



Հատոր

Том

Volume

75 № 4 2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Նվիրվում է ակադեմիկոս Ս.Ա.Համբարձումյանի 100-ամյակին

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА

Посвящается 100-летию академика С.А.Амбарцумяна

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS

Devoted to the 100th anniversary of academician S.A.Ambartsumyan

Издаётся с января 1966 года

Համար

Том

Volume

75 №4 2022



ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ГИТУТЮН» НАН РА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Հակոբյան Վ.Ն. (գլխավոր խմբագիր), Սահակյան Ա.Վ. (գլխ. խմբագրի տեղակալ),
Աղալովյան Լ.Ա., Ավետիսյան Ա.Ս., Ավետիսյան Վ.Վ., Բաղդասարյան Գ.Ե.,
Ղազարյան Կ.Բ., Ղուկասյան Ա.Ա., Մխիթարյան Ս.Ս., Ջիլավյան Ս.Հ., Սարգսյան Ս.Հ.

ՄԻՋԱԶԳԱՅԻՆ ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԽՈՐՀՈՒՐԴ

Ալտենբախ Հ. (Գերմանիա), Գաչկևիչ Ա.Ռ. (Ուկրաինա), Գորյաչևա Ի.Գ. (Ռուսաստան),
Հասանյան Դ.Զ. (ԱՄՆ), Կապլունով Յու.Դ. (Մեծ Բրիտանիա), Կուդիշ Ի.Ի. (ԱՄՆ),
Շավլակաձե Ն.Ն. (Վրաստան), Մարզոկա Պ. (ԱՄՆ), Մեյրանյան Ա.Պ. (Ռուսաստան),
Սումբատյան Մ.Ա. (Ռուսաստան), Վատույան Ա.Հ. (Ռուսաստան)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Акопян В.Н. (главный редактор), Саакян А.В. (зам. главного редактора), Аветисян А.С.,
Аветисян В.В., Агаловян Л.А., Багдасарян Г.Е., Гукасян А.А., Джилаван С.А.,
Казарян К.Б., Мхитарян С.М., Саркисян С.О.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Альтенбах Х. (Германия), Асанян Д.Дж. (США), Ватулян А.О. (Россия), Гачкевич
А.Р. (Украина), Горячева И.Г. (Россия), Каплунов Ю.Д. (Великобритания), Кудиш
И.И. (США), Шавлакадзе Н.Н. (Грузия), Марзока П. (США), Сейранян А.П.
(Россия), Сумбатян М.А. (Россия),

EDITORIAL BOARD

Hakobyan V.N. (editor-in-chief), Sahakyan A.V. (associate editor), Aghalovyan L.A.,
Avetisyan A.S., Avetisyan V.V., Bagdasaryan G.E., Ghazarjan K.B., Ghukasyan A.A.,
Jilavjan S.H., Mkhitaryan S.M., Sarkisyan S. H.

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Altenbach H. (Germany), Gachkevich (Ukraine), Goryacheva I.G. (Russia), Hasanyan
D.J. (USA), Kaplunov J.D. (UK), Kudish I.I. (USA), Shavlakadze N.N. (Georgia),
Marzocca P. (USA), Seyranyan A.P. (Russia), Sumbatyan M.A. (Russia), Vatulyan
A.H. (Russia)

Технический редактор: Геворкян Г.З., Ответственный секретарь: Авдалян Ж.А.

E-mail: journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech

Հայաստանի	Республика Армения,	24/2, Baghranyan Ave.
Հանրապետություն, Երևան,	Ереван, 0019	Yerevan 0019
0019 Բաղրամյան պող. 24/2,	пр. Баграмяна 24 /2,	Republic of Armenia
Հեռ. 52-48-02	Тел. 52-48-02	Tel. 52-48-02



NAGUSH
KHACHATUROVICH
HARUTYUNYAN

(1922-1993)

On November 23, 2022, we are celebrating the 110th anniversary of the birth of Nagush Khachaturovich Harutyunyan, who was one of the founders of the Armenian school of mechanics. He was a prominent and distinguished scientist who has gained wide international recognition, one of the most energetic and skillful organizer of science and higher education in Armenia, a prominent political leader, academician of Armenian National Academy of Sciences. His name is connected with the formation and further

progress of a number of scientific directions in mechanics of deformable solid bodies, among them theory of elasticity, creep and contact mechanics. He formed several generations of scientists in both Armenia and other countries.

Harutyunyan was born in 1912 in Yerevan (Russian Empire, now the capital of the Republic of Armenia). For many years he lived with his grandfather - the famous historian Leo, whose huge scientific figure instilled in the young man respect for science. In 1930 he entered the Moscow Military Engineering Academy named after V.V. Kuybyshev. After graduating from it in 1936 and being qualified as engineer-hydroconstructor, he returned to Armenia. He started his professional career as a leading engineer of the construction company Sevan-Zangustroy. At the same time he taught at the Yerevan Polytechnic Institute. In 1937, Harutyunyan entered the postgraduate courses of the Leningrad Polytechnic Institute (now Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University). Communication with the greatest scientists in mechanics like B.G. Galerkin, E.L. Nikolai, and A.I. Lurie played a decisive role in his future scientific development. Harutyunyan always had special love and respect towards the Leningrad school of mechanics, and his scientific contacts with this school have never been broken. After defending his first doctoral thesis (candidate of sciences) in 1941, he went to the front. His military service during the World War II was marked with the Orders of Patriotic War of I and II degree, the Order of the Red Star and medals.

Demobilized from the army in 1945, N.Kh. Harutyunyan returned to Armenia and started again his scientific and pedagogical activities. In 1949 in Moscow, at the Institute of Mechanics of the USSR Academy of Sciences he defended the doctoral thesis and was awarded the title of doctor of technical sciences. In 1950, he became the title of professor. In

the same year, he was elected a full member of the Academy of Sciences of Armenia and a member of the Presidium of this academy.

In 1952-55, his scientific activities continued at the Academy of Sciences, where he worked as the Academician-Secretary of the Department of Engineering Sciences. In 1955, Harutyunyan was appointed head of the newly created laboratory of creep and strength at the Institute of Mathematics and Mechanics. In 1959, he was elected Vice-President of the Academy of Sciences. In parallel with his scientific work, he is engaged in pedagogical activities. In 1945-51, he taught at Yerevan Polytechnic Institute, in 1951 - at Yerevan State University where he was the professor of the Chair of Theoretical Mechanics and in 1958 he became the head of newly created Chair of Theory of Elasticity and Plasticity (now Chair of Continuum Mechanics) and led it till 1978. In 1961, Harutyunyan was appointed Rector of Yerevan State University. Thanks to his efforts, the Chair of Biophysics, Nuclear Physics, Economic Cybernetics and the Joint Computer Center of the Academy of Sciences and YSU were established. In 1962, he was awarded the honorary title of the Honored Scientist of the Armenian SSR. For many years, he was a member of the USSR National Committee on Theoretical and Applied Mechanics and its Presidium. He was appointed the Editor-in-Chief of the journal "Proceedings of the Armenian SSR Academy of Sciences, Mechanics" and a member of the Editorial Board of "Proceedings of the USSR Academy of Sciences, Mekhanika Tverdogo Tela" (English translation Mechanics of Solids, now published by Springer).

N.Kh. Harutyunyan was actively involved in social-political and state activities. He was many times elected a deputy of the Supreme Soviet of the Republic and the Supreme Soviet of the USSR; in 1962-1975, he was the Chairman of the Presidium of the Supreme Soviet of the Armenian SSR and Deputy Chairman of the Presidium of the Supreme Soviet of the USSR. In the Soviet Union and abroad he adequately represented Armenia and its achievements in various fields of public life.

N.Kh. Harutyunyan's research activities developed mainly in two directions: the mathematical theory of elasticity and the theory of creep. His first works on elasticity theory were on torsion and bending of prismatic rods with polygonal cross-section, where he proposed an effective method for solving these problems, based on reducing them to the solution of infinite systems of algebraic equations. The method was applied in numerous studies and became classical. It was included in monographs and textbooks. Scientific results, obtained in this direction, were generalized. Finally, they were summarized in the fundamental book: "Torsion of Elastic Bodies" (authors N.Kh. Harutyunyan and B.L. Abrahamyan), published in Moscow in 1963. N.Kh. Harutyunyan had performed extensive scientific-research work in the field of elastic contact and mixed boundary value problems and obtained exact solutions classes of these problems together with his students. He also developed the scientific approach to contact problems concerning the load transfer to elastic solid bodies by means of thin-walled stringers.

N.Kh. Harutyunyan had made the greatest scientific contribution to the theory of creep. After analyzing the results of numerous experiments, N.Kh. Harutyunyan and G.N. Maslov concluded that in problems of strength and durability of engineering structures made, for

example, of concrete, plastics, soils, glass-reinforced plastics, classical approaches did not work. In addition to the usual physical and mechanical properties of materials, one should also consider the properties due to the creep phenomenon, such as aging and heredity. This fundamental idea was a new mathematical theory of creep of aging bodies, developed by N.Kh. Harutyunyan, which later entered the science as the Maslov-Arutyunyan creep theory. Considering this theory, the existing standards for the calculation of strength and longevity of numerous construction structures and their elements have been changed. The fundamental results of Harutyunyan's theory of creep have been summed up in his fundamental monograph "Some Problems of Creeping Theory", which was published in Moscow in 1952. It was translated and published in England, France, and China. Some chapters were published in Germany, Poland, and Romania. In the formulations of the linear and nonlinear theories of creep Harutyunyan constructed contact and numerous other problems of theoretical and practical importance. In the nonlinear problems, he formulated the superposition principle of generalized displacements.

In the last two decades of his scientific activity, Harutyunyan considerably generalized and developed his original theory of creep, having worked out the theory of creep of inhomogeneously aging bodies and created a new scientific direction: the mathematical theory of growing deformable bodies. The scientific results are summarized in numerous monographs and scientific papers. In 1975, N.Kh. Harutyunyan moved to Moscow and started to work at the Institute for Problems in Mechanics of the USSR Academy of Sciences as the head of the Department of Viscoelastic Body Mechanics. During the years of his stay in Moscow, his scientific and personal relations with Armenia did not weaken. He was also the head of the Department of Theory of Viscoelasticity at the Institute of Mechanics of the Armenian Academy of Sciences.

Nagush Kh. Harutyunyan died on January 18, 1993 in Moscow and remained devoted to science until the end of his life. He left a huge scientific heritage, including seven fundamental monographs, around two hundred original works, a scientific school, numerous students and followers in Armenia and abroad. His scientific ideas and results will undoubtedly serve as a basis for new ideas and creative achievements of young scientists and a wide range of researchers.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛОСЫ
С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Աղալովյան Լ. Ա., Կապույան Վ. Տ

Ключевые слова: плоская деформация, вынужденные колебания, ортотропное тело, внутреннее трение, смешанная краевая задача.

Aghalovyan L. A., Kapujyan V. T.
Forced vibrations of a layer in a plane deformation state considering internal friction

Keywords: plane deformation, forced vibrations, orthotropic body, internal friction, mixed boundary problem.

The problem of forced vibrations of an orthotropic body in a plane deformation state when there is internal friction is solved by the asymptotic method. It is assumed that the layer rests freely on an absolutely rigid base, and the front surface is affected by normal and tangential forces changing harmonically according to time. The solution of the problem is reduced to the solution of the system of equations, singular perturbed with a small parameter. The solution of the outer problem and the components of the displacement vector and stress tensor corresponding to it are determined. Cases where the solution becomes mathematically precise are noted, and an illustrative example is given.

Աղալովյան Լ. Ա., Կապույան Վ. Տ.
Հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող շերտի ստիպողական տատանումները,
երբ հաշվի է առնվում ներքին շփումը

Հիմնաբանոր՝ հարթ դեֆորմացիա, հարկադրական տատանումներ, օրթոտրոպ մարմին, ներքին շփում, խառը եզրային խնդիր:

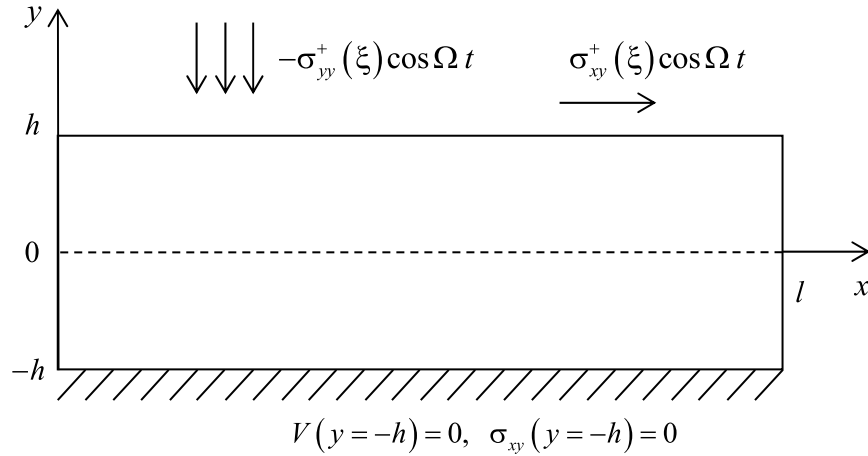
Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող օրթոտրոպ մարմնի ստիպողական տատանումների խնդիրը, երբ առկա է ներքին շփում: Ենթադրվում է, որ շերտը ազատ հենված է բացարձակ կոշտ հենարանի վրա, իսկ դիմալի մակերևույթի վրա ազդում են ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ և տանգենցիալ ուժեր: Խնդրի լուծումը հանգեցված է փոքր պարամետրով սինգուլյար գրգռված հավասարումների համակարգի լուծմանը: Որոշված են արտաքին խնդրի լուծումը և նրան համապատասխանող տեղափոխության վեկտորի և լարման թենզորի բաղադրիչները: Նշված են դեպքեր, երբ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ, բերված է իլյուստրացիոն օրինակ:

Асимптотическим методом решена задача о вынужденных колебаниях ортотропного тела, находящегося в условиях плоской деформации, при наличии в теле внутреннего трения. Предполагается, что полоса свободно лежит на абсолютно жесткой подстилке, а на лицевую поверхность действуют нормальные и тангенциальные силы, изменяющиеся во времени гармонически. Решение задачи сведено к решению системы уравнений, сингулярно возмущенной малым параметром. Определены решение внешней задачи и соответствующие ему компоненты вектора перемещения и тензора напряжений. Указаны случаи, когда решение становится математически точным, приведен иллюстрационный пример.

Введение. Доказано, что если тело даже изолировано от внешнего воздействия, то в ней колебательный процесс имеет затухающий характер. Это объясняется наличием в теле внутреннего трения [1]. В данной работе решена смешанная задача о вынужденных колебаниях ортотропного тела, находящегося в условиях плоской деформации, при наличии в теле внутреннего трения. Считается, что трение пропорционально скорости точек. Для решения подобных динамических задач, эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. В работе [2] была установлена принципиально новая асимптотика, позволившая найти решения как статических, так и динамических задач [3, 4]. Этим методом решена смешанная трехмерная динамическая задача для ортотропной пластинки с учетом внутреннего трения [5].

1. Постановка задачи, основные уравнения и соотношения

Имеем ортотропное тело, которое находится в условиях плоской деформации и занимает область $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, -h \leq y \leq h, h \ll l\}$ (Фиг. 1)



Фиг. 1

Требуется найти в области D решение уравнений движения с учетом внутреннего трения:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - K \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - K \frac{\partial v}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1)$$

при соотношениях упругости

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta_{11} \sigma_{xx} + \beta_{12} \sigma_{yy}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \beta_{12} \sigma_{xx} + \beta_{22} \sigma_{yy}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \beta_{66} \sigma_{xy}, \quad (2)$$

и граничных условиях:

$$\sigma_{xy}(x, h, t) = \sigma_{xy}^+(\xi) \cos \Omega t; \quad \sigma_{yy}(x, h, t) = -\sigma_{yy}^+(\xi) \cos \Omega t; \quad \xi = \frac{x}{l};$$

$$V(x, -h, t) = 0; \quad \sigma_{xy}(x, -h, t) = 0. \quad (3)$$

2. Решение сформулированной задачи

Для решения сформулированной задачи в уравнениях движения (1) и соотношениях упругости (2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \zeta = \frac{y}{h}; \quad U = \frac{u}{l}; \quad V = \frac{v}{l}. \quad (4)$$

Согласно (4), уравнения (1) и соотношения (2) примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \zeta} - Kl^2 \frac{\partial U}{\partial t} = \rho l^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad \varepsilon = \frac{h}{l}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \zeta} - Kl^2 \frac{\partial V}{\partial t} = \rho l^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \beta_{11} \sigma_{xx} + \beta_{12} \sigma_{yy}; \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \beta_{12} \sigma_{xx} + \beta_{22} \sigma_{yy}; \quad (6)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = \beta_{66} \sigma_{xy}.$$

Решение задачи будем искать в виде:

$$\sigma_{\alpha\beta}(x, y, t) = \sigma_{jkl}(\xi, \zeta) \sin \Omega t + \sigma_{jkl}(\xi, \zeta) \cos \Omega t, \quad (7)$$

$$\alpha, \beta = x, y, \quad j, k = 1, 2;$$

$$U(x, y, t) = U_I(\xi, \zeta) \sin \Omega t + U_{II}(\xi, \zeta) \cos \Omega t, \quad (U, V).$$

Подставив (7) в (5), (6) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при $\sin \Omega t, \cos \Omega t$, получим:

$$\frac{\partial \sigma_{11I}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12I}}{\partial \zeta} + Kl^2 \Omega U_{II} = -\rho l^2 \Omega^2 U_I; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{11II}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12II}}{\partial \zeta} - Kl^2 \Omega U_I = -\rho l^2 \Omega^2 U_{II};$$

$$\frac{\partial \sigma_{12I}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22I}}{\partial \zeta} + Kl^2 \Omega V_{II} = -\rho l^2 \Omega^2 V_I;$$

$$\frac{\partial \sigma_{12II}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22II}}{\partial \zeta} - Kl^2 \Omega V_I = -\rho l^2 \Omega^2 V_{II};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_I}{\partial \xi} &= \beta_{11} \sigma_{11I} + \beta_{12} \sigma_{22I}; & \frac{\partial U_{II}}{\partial \xi} &= \beta_{11} \sigma_{11II} + \beta_{12} \sigma_{22II}; \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial V_I}{\partial \zeta} &= \beta_{12} \sigma_{11I} + \beta_{22} \sigma_{22I}; & \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_{II}}{\partial \zeta} &= \beta_{12} \sigma_{11II} + \beta_{22} \sigma_{22II}; \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial U_I}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_I}{\partial \xi} &= \beta_{66} \sigma_{12I}; & \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_{II}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_{II}}{\partial \xi} &= \beta_{66} \sigma_{12II}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Решение (I) сингулярно возмущенной системы (8), (9) складывается из решений внешней задачи (I^{out}) и пограничного слоя (I^b) .

Решение внешней задачи ищем в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ijk}^{out} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ijk}^{(s)}(\xi, \zeta), \quad s = \overline{0, N}, \quad i, j = 1, 2, \quad k = I, II; \\
U_k^{out} &= \varepsilon^s U_k^{(s)}(\xi, \zeta), \quad (U, V).
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставив (10) в (8), (9), для определения $\sigma_{ijk}^{(s)}, U_k^{(s)}, V_k^{(s)}$ получим систему:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11I}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12I}^{(s)}}{\partial \zeta} + 2H\Omega U_{II}^{(s)} + \rho_1^2 \Omega^2 U_I^{(s)} &= 0, \quad 2H = Kh^2, \rho_1^2 = \rho h^2; \\
\frac{\partial \sigma_{11II}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12II}^{(s)}}{\partial \zeta} - 2H\Omega U_I^{(s)} + \rho_1^2 \Omega^2 U_{II}^{(s)} &= 0; \\
\frac{\partial \sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22I}^{(s)}}{\partial \zeta} + 2H\Omega V_{II}^{(s)} + \rho_1^2 \Omega^2 V_I^{(s)} &= 0; \\
\frac{\partial \sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22II}^{(s)}}{\partial \zeta} - 2H\Omega V_I^{(s)} + \rho_1^2 \Omega^2 V_{II}^{(s)} &= 0; \\
\frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial \xi} = \beta_{11} \sigma_{11I}^{(s)} + \beta_{12} \sigma_{22I}^{(s)}; & \frac{\partial U_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi} = \beta_{11} \sigma_{11II}^{(s)} + \beta_{12} \sigma_{22II}^{(s)}; \\
\frac{\partial V_I^{(s)}}{\partial \zeta} = \beta_{12} \sigma_{11I}^{(s)} + \beta_{22} \sigma_{22I}^{(s)}; & \frac{\partial V_{II}^{(s)}}{\partial \zeta} = \beta_{12} \sigma_{11II}^{(s)} + \beta_{22} \sigma_{22II}^{(s)}; \\
\frac{\partial U_I^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial \xi} = \beta_{66} \sigma_{12I}^{(s)}; & \frac{\partial U_{II}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi} = \beta_{66} \sigma_{12II}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Из (11) напряжения можно выразить через перемещения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{12\gamma}^{(s)} &= \frac{1}{\beta_{66}} \left(\frac{\partial U_{\gamma}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_{\gamma}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \gamma = I, II; \\
\sigma_{11\gamma}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(-\beta_{12} \frac{\partial V_{\gamma}^{(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22} \frac{\partial U_{\gamma}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right); \quad \Delta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2; \\
\sigma_{22\gamma}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(\beta_{11} \frac{\partial V_{\gamma}^{(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12} \frac{\partial U_{\gamma}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Подставив значения $\sigma_{12\gamma}^{(s)}$ в первые два уравнения (11), для определения $U_I^{(s)}$, $U_{II}^{(s)}$ получим уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2 \Omega^2 U_I^{(s)} + 2H\Omega U_{II}^{(s)} &= R_{uI}^{(s-1)}; \\
\frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^2 U_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2 \Omega^2 U_{II}^{(s)} - 2H\Omega U_I^{(s)} &= R_{uII}^{(s-1)}; \\
R_{uI}^{(s-1)} &= -\frac{\partial \sigma_{11I}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^2 V_I^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}; \quad R_{uII}^{(s-1)} = -\frac{\partial \sigma_{11II}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^2 V_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}.
\end{aligned} \tag{13}$$

В (13) исключив $U_{II}^{(s)}$, для определения $U_I^{(s)}$ получим уравнение

$$\frac{\partial^4 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2\rho_1^2 \Omega^2 \beta_{66} \frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \beta_{66}^2 \Omega^2 (\rho_1^4 \Omega^2 + 4H^2) U_I^{(s)} = \beta_{66}^2 \Psi_{1U}^{(s-1)}, \tag{14}$$

где $\Psi_{1U}^{(s-1)} = l_1 R_{uI}^{(s-1)} - l_2 R_{uII}^{(s-1)}$, операторы:

$$l_1 = \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2 \Omega^2, \quad l_2 = 2H\Omega. \tag{15}$$

Решив характеристическое уравнение, соответствующее (14), получим четыре корня:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{\Omega \beta_{66}} (\alpha_1 + \alpha_2 i); \quad k_2 = -k_1; \quad k_3 = \sqrt{\Omega \beta_{66}} (-\alpha_1 + \alpha_2 i); \quad k_4 = -k_3; \\
\alpha_1 &= \frac{\sqrt{2H}}{\sqrt{\rho_1^2 \Omega + \sqrt{\rho_1^4 \Omega^2 + 4H^2}}}; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\rho_1^2 \Omega + \sqrt{\rho_1^4 \Omega^2 + 4H^2}}{2}},
\end{aligned} \tag{16}$$

следовательно:

$$U_I^{(s)} = A_1^{(s)}(\xi)\varphi_1 + A_2^{(s)}(\xi)\varphi_2 + A_3^{(s)}(\xi)\varphi_3 + A_4^{(s)}(\xi)\varphi_4 + U_{Iq}^{(s-1)}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \cos\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_2\zeta ch\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_1\zeta; & \varphi_2 &= \sin\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_2\zeta sh\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_1\zeta; \\ \varphi_3 &= \cos\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_2\zeta sh\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_1\zeta; & \varphi_4 &= \sin\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_2\zeta ch\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_1\zeta. \end{aligned} \quad (18)$$

Из системы (13) $U_{II}^{(s)}$ выражается через $U_I^{(s)}$ по формуле

$$\begin{aligned} U_{II}^{(s)} &= \frac{1}{l_2} \left(R_{ul}^{(s-1)} - l_1 U_I^{(s)} \right) = A_1^{(s)}\varphi_2 - A_2^{(s)}\varphi_1 + A_3^{(s)}\varphi_4 - A_4^{(s)}\varphi_3 + \\ &+ \frac{1}{2H\Omega} \left(R_{ul}^{(s-1)} - \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^2 U_{Iq}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} - \rho_1^2 \Omega^2 U_{Iq}^{(s-1)} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив значение $\sigma_{22\gamma}^{(s)}$ в третье и четвертое уравнения системы (11), для определения $V_\gamma^{(s)}$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2 \Omega^2 V_I^{(s)} + 2H\Omega V_{II}^{(s)} &= R_{vI}^{(s-1)}; \\ \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2 V_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2 \Omega^2 V_{II}^{(s)} - 2H\Omega V_I^{(s)} &= R_{vII}^{(s-1)}; \\ R_{vI}^{(s-1)} &= \frac{\beta_{12}}{\Delta} \frac{\partial^2 U_I^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial \xi}; & R_{vII}^{(s-1)} &= \frac{\beta_{12}}{\Delta} \frac{\partial^2 U_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (20)$$

В (20) исключив $V_{II}^{(s)}$, для определения $V_I^{(s)}$ получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + \frac{2\Delta\rho_1^2\Omega^2}{\beta_{11}} \frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta^2\Omega^2(\rho_1^4\Omega^2 + 4H^2)}{\beta_{11}^2} V_I^{(s)} &= \frac{\Delta^2}{\beta_{11}^2} \Psi_{IV}^{(s-1)}; \\ \Psi_{IV}^{(s-1)} &= l_3 R_{vI}^{(s-1)} - l_2 R_{vII}^{(s-1)}, \quad l_3 = \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2 \Omega^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Корнями соответствующего (21) характеристического уравнения являются:

$$n_1 = \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}(\alpha_1 + \alpha_2 i); n_2 = -n_1; \quad n_3 = \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}(-\alpha_1 + \alpha_2 i); n_4 = -n_3, \quad (22)$$

следовательно:

$$\begin{aligned} V_I^{(s)} &= B_1^{(s)}\psi_1 + B_2^{(s)}\psi_2 + B_3^{(s)}\psi_3 + B_4^{(s)}\psi_4 + V_{Iq}^{(s-1)}, \\ \psi_1 &= \cos\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta ch\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta; \quad \psi_2 = \sin\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta sh\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta; \\ \psi_3 &= \cos\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta sh\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta; \quad \psi_4 = \sin\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta ch\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta. \end{aligned} \quad (23)$$

Из системы (20), учитывая (23),

$$\begin{aligned} V_{II}^{(s)} &= B_1^{(s)}\psi_2 - B_2^{(s)}\psi_1 + B_3^{(s)}\psi_4 - B_4^{(s)}\psi_3 + \\ &+ \frac{1}{2H\Omega} \left(R_{vI}^{(s-1)} - \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2 V_{Iq}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} - \rho_1^2 \Omega^2 V_{Iq}^{(s-1)} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

3. Определение неизвестных функций решения

Решения $U_\gamma^{(s)}, V_\gamma^{(s)}$ содержат пока неизвестные функции $A_i^{(s)}(\xi), B_i^{(s)}(\xi)$, которые однозначно определяются из граничных условий (3), которые, согласно (7), принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{12I}^{(s)}(\xi, 1) &= 0; \quad \sigma_{12II}^{(s)}(\xi, 1) = \sigma_{xy}^{+(s)}(\xi), \quad \sigma_{xy}^{+(0)} = \varepsilon\sigma_{xy}^+, \quad \sigma_{xy}^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0; \\ \sigma_{12I}^{(s)}(\xi, -1) &= 0; \quad \sigma_{12II}^{(s)}(\xi, -1) = 0; \\ \sigma_{22I}^{(s)}(\xi, 1) &= 0; \quad \sigma_{22II}^{(s)}(\xi, 1) = -\sigma_{yy}^{+(s)}(\xi), \quad \sigma_{yy}^{+(0)} = \varepsilon\sigma_{yy}^+, \quad \sigma_{yy}^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0; \\ V_I^{(s)}(\xi, -1) &= 0; \quad V_{II}^{(s)}(\xi, -1) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Удовлетворив условиям (25) относительно $\sigma_{12\gamma}^{(s)}$, получим систему:

$$\begin{aligned} A_1^{(s)} N_1 + A_2^{(s)} N_2 + A_3^{(s)} N_3 + A_4^{(s)} N_4 &= P_{1I}^{(s)}; \\ -A_1^{(s)} N_1 - A_2^{(s)} N_2 + A_3^{(s)} N_3 + A_4^{(s)} N_4 &= P_{2I}^{(s)}; \\ A_1^{(s)} N_2 - A_2^{(s)} N_1 + A_3^{(s)} N_4 - A_4^{(s)} N_3 &= P_{3I}^{(s)}; \\ -A_1^{(s)} N_2 + A_2^{(s)} N_1 + A_3^{(s)} N_4 - A_4^{(s)} N_3 &= P_{4I}^{(s)}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= \alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1; \quad N_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2; \quad N_3 = \alpha_1 a_4 - \alpha_2 a_3; \\ N_4 &= \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_4; \quad a_i = \varphi_i(\zeta = 1), \quad i = 1, 2, 3, 4; \\ P_{1I}^{(s)} &= -\frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left(\frac{\partial U_{Iu}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1}; \quad P_{3I}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left(\beta_{66} \sigma_{xy}^{+(s)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2H\Omega} \left(\frac{\partial R_{ul}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^3 U_{Iu}^{(s-1)}}{\partial \zeta^3} - \rho_1^2 \Omega^2 \frac{\partial U_{Iu}^{(s-1)}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} - \left(\frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1} \right); \\ P_{4I}^{(s)} &= \frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left(-\frac{1}{2H\Omega} \left(\frac{\partial R_{ul}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\beta_{66}} \frac{\partial^3 U_{Iu}^{(s-1)}}{\partial \zeta^3} - \rho_1^2 \Omega^2 \frac{\partial U_{Iu}^{(s-1)}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=-1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=-1} \right); \quad P_{2I}^{(s)} = -\frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}} \left(\frac{\partial U_{Iu}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Решением алгебраической системы (26) является:

$$\begin{aligned} A_{1I}^{(s)} &= \delta_1 \left(N_1 \left(P_{1I}^{(s)} - P_{2I}^{(s)} \right) + N_2 \left(P_{3I}^{(s)} - P_{4I}^{(s)} \right) \right), \quad \delta_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{N_1^2 + N_2^2}; \\ A_{2I}^{(s)} &= \delta_1 \left(N_2 \left(P_{1I}^{(s)} - P_{2I}^{(s)} \right) - N_1 \left(P_{3I}^{(s)} - P_{4I}^{(s)} \right) \right); \\ A_{3I}^{(s)} &= \delta_2 \left(N_3 \left(P_{1I}^{(s)} + P_{2I}^{(s)} \right) + N_4 \left(P_{3I}^{(s)} + P_{4I}^{(s)} \right) \right), \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{N_3^2 + N_4^2}; \\ A_{4I}^{(s)} &= \left(N_4 \left(P_{1I}^{(s)} + P_{2I}^{(s)} \right) - N_3 \left(P_{3I}^{(s)} + P_{4I}^{(s)} \right) \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Удовлетворив условиям (25) относительно $\sigma_{22\gamma}^{(s)}$, $V_\gamma^{(s)}$, получим систему:

$$\begin{aligned}
B_1^{(s)}M_1 + B_2^{(s)}M_2 + B_3^{(s)}M_3 + B_4^{(s)}M_4 &= P_{1II}^{(s)}; \\
B_1^{(s)}b_4 + B_2^{(s)}b_3 - B_3^{(s)}b_2 - B_4^{(s)}b_1 &= P_{2II}^{(s)}; \\
B_1^{(s)}M_2 - B_2^{(s)}M_1 + B_3^{(s)}M_4 - B_4^{(s)}M_3 &= P_{3II}^{(s)}; \\
-B_2^{(s)}b_4 + B_1^{(s)}b_3 + B_4^{(s)}b_2 - B_3^{(s)}b_1 &= P_{4II}^{(s)},
\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}
M_1 &= \alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1; \quad M_2 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2; \quad M_3 = \alpha_1 b_4 - \alpha_2 b_3; \\
M_4 &= \alpha_1 b_3 + \alpha_2 b_4; \quad b_i = \psi_i(\zeta = 1), \quad i = 1, 2, 3, 4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1II}^{(s)} &= -\frac{1}{\sqrt{\Delta\Omega\beta_{11}}} \left(\beta_{11} \frac{\partial V_{Iq}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \beta_{12} \frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1}; \\
P_{2II}^{(s)} &= -\left(V_{Iq}^{(s-1)} \right)_{\zeta=-1}; \quad P_{3II}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta\Omega\beta_{11}}} \left(-\Delta\sigma_{yy}^{+(s)} - \right. \\
&\quad \left. -\frac{\beta_{11}}{2H\Omega} \left(\frac{\partial R_{vI}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^3 V_{Iq}^{(s-1)}}{\partial \zeta^3} - \rho_1^2 \Omega^2 \frac{\partial V_{Iq}^{(s-1)}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} + \left(\beta_{12} \frac{\partial U_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1} \right); \\
P_{4II}^{(s)} &= -\frac{1}{2H\Omega} \left(R_{vI}^{(s-1)} - \frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2 V_{Iq}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} - \rho_1^2 \Omega^2 V_{Iq}^{(s-1)} \right)_{\zeta=-1}.
\end{aligned} \tag{30}$$

По формуле Крамера

$$B_i^{(s)} = \frac{\Delta_i^{(s)}}{\Delta_1}; \quad i=1,2,3,4; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ d_{II} & c_{II} & -b_{II} & -a_{II} \\ M_2 & -M_1 & M_4 & -M_3 \\ -d_{II} & c_{II} & b_{II} & -a_{II} \end{vmatrix}; \quad P^{(s)} = \begin{vmatrix} P_{1II}^{(s)} \\ P_{2II}^{(s)} \\ P_{3II}^{(s)} \\ P_{4II}^{(s)} \end{vmatrix}, \tag{31}$$

где $\Delta_i^{(s)}$ получается заменой i - того столбца Δ_1 столбцом $P^{(s)}$ свободных членов.

Имея значения функций $A_i^{(s)}, B_i^{(s)}$ по формулам (17), (19) определяются $U_I^{(s)}, U_{II}^{(s)}$, а по формулам (23), (24) - $V_I^{(s)}, V_{II}^{(s)}$. По формулам (12) определяются напряжения.

4. О математически точных решениях

Если входящие в граничные условия (3) функции $\sigma_{xy}^+(\xi), \sigma_{yy}^+(\xi)$ являются алгебраическими многочленами от ξ , итерационный процесс обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена. В результате, получаем математически точное решение во внешней задаче.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим случай, когда

$$\sigma_{xy}^+ = \gamma_1 + \gamma_2 \xi, \quad \sigma_{yy}^+ = \gamma_3 + \gamma_4 \xi. \quad (32)$$

При $s = 0$, согласно формулам (17), (27), (28), (30), (31) имеем

$$\begin{aligned} P_{1I}^{(0)} &= P_{2I}^{(0)} = P_{4I}^{(0)} = 0; \quad P_{3I}^{(0)} = \sqrt{\frac{\beta_{66}}{\Omega}} \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2 \xi); \\ P_{1II}^{(0)} &= P_{2II}^{(0)} = P_{4II}^{(0)} = 0; \quad P_{3II}^{(0)} = -\sqrt{\frac{\Delta}{\Omega \beta_{11}}} \varepsilon \sigma_{yy}^+; \\ A_1^{(0)} &= \frac{N_2}{\delta_1} \sqrt{\frac{\beta_{66}}{\Omega}} \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2 \xi); \quad A_2^{(0)} = -\frac{N_1}{\delta_1} \sqrt{\frac{\beta_{66}}{\Omega}} \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2 \xi); \\ A_3^{(0)} &= \frac{N_4}{\delta_2} \sqrt{\frac{\beta_{66}}{\Omega}} \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2 \xi); \quad A_4^{(0)} = -\frac{N_3}{\delta_2} \sqrt{\frac{\beta_{66}}{\Omega}} \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2 \xi); \\ B_1^{(0)} &= -\frac{\sqrt{\Delta} \varepsilon (\gamma_3 + \gamma_4 \xi)}{\sqrt{\Omega \beta_{11}} \Delta_1} M_1^3; \quad B_2^{(0)} = \frac{\sqrt{\Delta} \varepsilon (\gamma_3 + \gamma_4 \xi)}{\sqrt{\Omega \beta_{11}} \Delta_1} M_2^3; \\ B_3^{(0)} &= -\frac{\sqrt{\Delta} \varepsilon (\gamma_3 + \gamma_4 \xi)}{\sqrt{\Omega \beta_{11}} \Delta_1} M_3^3; \quad B_4^{(0)} = \frac{\sqrt{\Delta} \varepsilon (\gamma_3 + \gamma_4 \xi)}{\sqrt{\Omega \beta_{11}} \Delta_1} M_4^3, \end{aligned} \quad (33)$$

где M_i^j является минором элемента, стоящего на пересечении i - того столбца и j - той строки определителя Δ_1 .

Аналогичным образом вычисляются данные для $s = 1$ (в силу объемистости, их значения не приводим), а все величины при $s \geq 2$ тождественно равны нулю, т. е. итерация обрывается на приближении $s = 1$, следовательно имеем математически точное решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{ijk}^{out} &= \varepsilon^{-1} \sigma_{ijk}^{(0)} + \sigma_{ijk}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, \quad k = I, II; \\ U_k^{out} &= U_k^{(0)} + \varepsilon U_k^{(1)}, \quad (U, V). \end{aligned} \quad (34)$$

Найденное в работе решение внешней задачи (I^{out}), как правило, не будет удовлетворять условиям на торцевых сечениях полосы $x = 0, l$. Возникающая невязка устраняется решением для пограничного слоя (I^b). Это решение можно построить автономно и срастить его с решением внешней задачи, описанном в [4] способом. Как показано в [4], решение пограничного слоя, при удалении от торцов во внутрь полосы, убывает экспоненциально.

Заключение. Найдено решение внешней задачи плоской деформации ортотропной полосы при наличии в ней внутреннего трения. Полоса лежит на жесткой подстилке, на верхнюю кромку полосы действуют нормальные и тангенциальные нагрузки, гармонически изменяющиеся во времени. Если эти нагрузки зависят от продольной координаты полиномиально, итерация обрывается, в результате получаем математически точное решение во внешней задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз. 1960. 193с.
2. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз. сб. Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория деформируемых тонкостенных систем. // В сб. Механика. 2009: Труды межд. школы – конференции молодых ученых. Ереван. Изд-во ЕГУАС, 2009. С. 5-35.
4. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. London. World Scientific. 2015. 376p.
5. Агаловян Л.А., Саргсян М.З. К решению трехмерной смешанной динамической задачи о вынужденных колебаниях ортотропной пластины с учетом внутреннего вязкого трения. // Доклады. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. Т.110. №2. 2010. С. 163-170.

Сведения об авторах

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН РА, доктор физ.-мат. наук, зав. отделом «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН РА
Тел.: (+37410) 529630
E-mail: lagal@sci.am

Япуджян Варужан Тигранович – аспирант, млад. науч. сотр. Института механики НАН РА
Тел.: (+37444) 990250
E-mail: varujan.yapujyan@mail.ru

Поступила в редакцию 14 ноября 2022

О НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ
ПЛОСКОСТИ С АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМ ЧАСТИЧНО СКОЛЬЗЯЩИМ
МЕЖФАЗНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Акопян В.Н., Акопян Л.В., Даштоян Л.Л.

Ключевые слова: кулоновское трение, абсолютно жёсткое включение, частично скользящее включение, смешанная задача.

Hakobyan V.N., Hakobyan L.V., Dashtoyan L.L.

Stress State of Piecewise Homogeneous Plane with Absolutely Rigid Partially Sliding Interfacial Inclusion

Key words: Coulomb friction, absolutely rigid inclusion, mixed boundary value problem, partially sliding inclusion.

This paper considers the stress state for a piecewise homogeneous plane, containing an absolutely rigid thin interfacial inclusion, one of the long sides of which is completely coupled to the plane, and the other side is in contact with it under dry friction conditions. On the basis of discontinuous solutions of the theory of elasticity for a piecewise homogeneous plane, a closed solution of the mixed boundary value problem is constructed. The regularities for the behavior of contact stresses near the end points of the inclusion are clarified, and simple formulas are obtained for determining both normal and tangential contact stresses acting on the long sides of the inclusion.

Հակոբյան Վ.Ն., Հակոբյան Լ.Վ., Դաշտոյան Լ.Լ.

Մասնակիորեն սահող բացարձակ կոշտ միջֆազային ներդրակ պարունակող կտոր առ կտոր
համասեռ հարթության լարվածային վիճակի մասին

Հիմնաբառեր՝ կուլոնյան շփում, բացարձակ կոշտ ներդրակ, մասնակիորեն սահող ներդրակ, խառը եզրային խնդիր

Ուսումնասիրված է կտոր առ կտոր համասեռ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն պարունակում է բացարձակ կոշտ ներդրակ, որի երկար կողմերից մեկը ամրակցված է հիմքին, իսկ մյուս կողմի և հիմքի կոնտակտի տեղամասում տեղի ունի շփման Կուլոնի օրենքը: Ստացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները երեք սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի տեսքով և կառուցվել է նրա փակ լուծումը: Պարզված է կոնտակտային լարումների վարքը ներդրակի ծայրակետերի շրջակայքում և ստացվել են պարզ բանաձևեր ներդրակի երկար կողմերին գործող ինչպես նորմալ, այնպես էլ շոշափող կոնտակտային լարումների համար:

В настоящей работе, на основе разрывных решений теории упругости для кусочно-однородной плоскости, построено точное решение смешанной задачи для кусочно-однородной плоскости, которая содержит межфазное абсолютно жёсткое тонкое включение, одна из длинных сторон которого полностью сцеплена с плоскостью, а другая сторона контактирует с ней при условиях сухого трения. Выяснены закономерности поведения контактных напряжений вблизи концевых точек включения и получены простые формулы для определения как нормальных, так и касательных контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения.

Введение

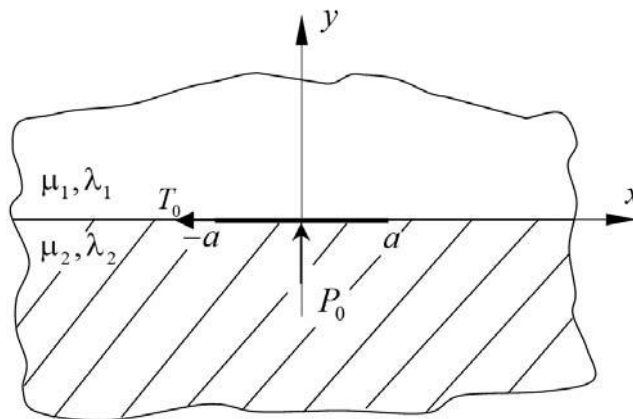
Изучению плоского напряженно-деформированного состояния однородной и кусочно-однородной плоскости, содержащей межфазные дефекты типа трещин, полностью или частично сцепленных тонких абсолютно жёстких включений,

посвящено много работ. В этой связи укажем на монографии [1-6], где построены точные или эффективные решения ряда задач в указанном направлении. Приведём также работы [7-8], где построены точные решения двух задач для кусочно-однородной плоскости с межфазными включениями, одна сторона которых сцеплена с матрицей, а другая сторона отошла от матрицы, создавая трещину, или гладко контактирует с матрицей. Точные решения многих задач о взаимовлиянии абсолютно жёстких включений с трещинами в ортотропной упругой плоскости приведены в монографии [6]. Отметим также работы [10,11] в которых построены точные решения двух контактных задач для кусочно-однородной упругой плоскости с меж-фазной трещиной, на один из берегов которой вдавливается абсолютно жёсткий гладкий штамп или жёсткий штамп с сухим трением. Приведём также работу [9], где построено точное решение аналогичной задачи для однородной ортотропной плоскости.

В настоящей работе изучено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости с межфазным абсолютно жёстким включением, одна из длинных сторон которого жёстко сцеплена с матрицей, а вторая контактирует с матрицей при сухом трении.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламэ μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2 соответственно, отнесённой к декартовой системе координат Oxy , ось абсцисс которой направлена по линии соединения разнородных полуплоскостей, и содержащей на интервале $(-a, a)$ этой оси межфазное, абсолютно жёсткое включение. Считается, что одна из длинных сторон включения полностью сцеплена с кусочно-однородной плоскостью, а другая сторона контактирует с ней в условиях сухого трения. Полагается также, что плоскость деформируется под действием нормальной и горизонтальной сосредоточенных нагрузок величины P_0 и T_0 соответственно, приложенных к включению (Фиг. 1).



Фиг. 1

Требуется построить точное решение задачи в квадратурах и выяснить поведение контактных напряжений, действующих под штампом и на плоскости стыка разнородных полуплоскостей вблизи концевых точек трещины, в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) \\ u^{(1)}(x, 0) = u^{(2)}(x, 0) \\ v^{(1)}(x, 0) = v^{(2)}(x, 0) \end{cases} \quad |x| > a \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \rho \sigma_y^{(1)}(x, 0) \\ u^{(2)}(x, 0) = \delta_1 \\ v^{(1)}(x, 0) = v^{(2)}(x, 0) = \delta_2 \end{cases} \quad |x| < a \quad (1б)$$

где δ_j ($j = 1, 2$) – горизонтальные и вертикальные компоненты жёсткого смещения штампа, $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ ($j = 1, 2$) – компоненты тензора напряжений, действующих в верхней и нижней полуплоскостях, $u^{(j)}(x, y)$ и $v^{(j)}(x, y)$ ($j = 1, 2$) – горизонтальные и нормальные составляющие вектора смещений в соответствующих полуплоскостях.

Для решения поставленной задачи будем использовать разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости, полученные в монографии [7]. Сохранив обозначения, введённые в [7], и учитывая, что в рассматриваемом случае $v(x) = v^{(1)}(x, 0) - v^{(2)}(x, 0) = 0$, для напряжений на длинных сторонах включения, а также для нормальных и горизонтальных смещений точек кусочно-однородной плоскости, соприкасающихся с длинными сторонами включения получим следующие выражения:

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \frac{l_0}{\Delta} \sigma(x) + \frac{l_1}{\Delta} u'(x) + \frac{l_2}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds; \quad (2)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \frac{l_0}{\Delta} \tau(x) - \frac{l_2}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_3}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds;$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0) = \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma(x); \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau(x);$$

$$\frac{dv^{(2)}(x, 0)}{dx} = \frac{dv^{(1)}(x, 0)}{dx} = -\frac{d_0}{\Delta} \tau(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_2}{\pi \Delta \vartheta_2^{(2)}} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds;$$

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx} = -\frac{l_0}{\Delta\vartheta_2^{(2)}}u'(x) + \frac{d_0}{\Delta}\sigma(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta}\int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x}ds;$$

Здесь введены обозначения:

$$\sigma(x) = \sigma_y^{(1)}(x,0) - \sigma_y^{(2)}(x,0); \tau(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x,0) - \tau_{xy}^{(2)}(x,0);$$

$$\frac{d[u^{(1)}(x,0) - u^{(2)}(x,0)]}{dx} = \frac{du^{(1)}(x,0)}{dx} = u'(x)/\theta_2^{(2)};$$

$$l_0 = \vartheta_2^{(1)}(\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}) - \vartheta_1^{(1)}(\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}); \quad l_2 = \vartheta_1^{(1)}\vartheta_2^{(2)} + \vartheta_2^{(1)}\vartheta_1^{(2)};$$

$$l_1 = 2(\vartheta_2^{(2)})^{-1}(\vartheta_1^{(2)}l_0 - \vartheta_2^{(2)}l_2); \quad l_3 = 2(\vartheta_2^{(2)})^{-1}(\vartheta_1^{(2)}l_2 - \vartheta_2^{(2)}l_0);$$

$$d_0 = \frac{\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}}{2}; \quad d_1 = \frac{\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}}{2}; \quad \vartheta_1^{(j)} = \frac{\mu_j}{2 + \alpha_j}; \quad \vartheta_2^{(j)} = \frac{(1 + \alpha_j)\mu_j}{2 + \alpha_j};$$

$$\Delta = (\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)})^2 - (\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)})^2; \quad \alpha_j = \frac{1}{1 - 2\nu_j}; \quad (j = 1, 2).$$

Используя соотношения (2), удовлетворим условиям на берегах трещины (1.6), предварительно продифференцировав последние два. В итоге, для определения неизвестных скачков нормальных и касательных контактных напряжений $\sigma(x)$ и $\tau(x)$, действующих на длинные стороны включения, а также дислокации горизонтальных смещений $u'(x)$, получим следующую определяющую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} d_0\tau(x) + \frac{d_1}{\pi}\int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x}ds + \frac{l_2}{\pi\vartheta_2^{(2)}}\int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x}ds = 0; \\ l_0\tau(x) - \rho l_0\sigma(x) - \rho l_1u'(x) - \frac{\rho l_2}{\pi}\int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x}ds - \frac{l_2}{\pi}\int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x}ds - \frac{l_3}{\pi}\int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x}ds = 0; \\ \frac{l_0}{\vartheta_2^{(2)}}u'(x) - d_0\sigma(x) + \frac{d_1}{\pi}\int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x}ds = 0; \end{cases} \quad (3)$$

Для определения единственного решения системы (3), её будем рассматривать при условиях равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_{-a}^a \sigma(x)dx = P_0; \quad \int_{-a}^a \tau(x)dx = T_0; \quad \int_{-a}^a u'(x)dx = 0 \quad (4)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы системы сингулярных интегральных уравнений (3) при условиях (4).

Решение системы определяющих уравнений

Чтобы построить замкнутое решение системы (3) при условиях (4), приведём систему (3) к каноническому виду. Получим:

$$\begin{cases} \sigma(x) + \frac{a_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{a_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{a_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0; \\ \tau(x) + \frac{b_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{b_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0; \\ u'(x) + \frac{c_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{c_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{c_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0. \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\vartheta_2^{(1)} l_0}{2\rho\vartheta d_0}; \quad a_2 = -\frac{\vartheta_1^{(1)} \vartheta_2^{(2)}}{\vartheta}; \quad a_3 = \frac{\vartheta_2^{(1)} \vartheta_1^{(2)} l_0}{\rho\vartheta_2^{(2)} \vartheta d_0}; \quad b_1 = \frac{d_1}{d_0}; \quad b_3 = \frac{l_2}{\vartheta_2^{(2)} d_0}; \\ c_1 &= \frac{\vartheta_2^{(1)} \vartheta_2^{(2)}}{2\rho\vartheta}; \quad c_2 = \frac{\vartheta_2^{(1)} \vartheta_2^{(2)}}{2\vartheta}; \quad c_3 = \frac{\vartheta_2^{(1)} \vartheta_1^{(2)}}{\rho\vartheta}; \quad \vartheta = \left(\vartheta_2^{(1)}\right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)}\right)^2 + \vartheta_1^{(1)} \vartheta_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Отметим, что представление (5) определяющей системы непригодно лишь в случае однородной плоскости, рассмотренной в [9], когда $d_0 = l_1 = 0$.

Как и в [11], решение системы (5) приведем к решению трех независимых сингулярных интегральных уравнений. Для этого умножим второе и третье из уравнений (5) на отличные от нуля неизвестные постоянные m и n соответственно и просуммируем с первым уравнением (5). Получим:

$$\begin{aligned} &\sigma(x) + m\tau(x) + nu'(x) + \\ &+ \frac{a_1 + mb_1 + nc_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s) + \frac{(a_2 + nc_2)\tau(s)}{a_1 + mb_1 + nc_1} + \frac{(a_3 + mb_3 + nc_3)u'(s)}{a_1 + mb_1 + nc_1}}{s-x} ds = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, потребуем, чтобы имели место равенства:

$$\frac{a_2 + nc_2}{a_1 + mb_1 + nc_1} = m; \quad \frac{(a_3 + mb_3 + nc_3)}{a_1 + mb_1 + nc_1} = n.$$

Исключив из полученных уравнений n , для определения m придём к следующему уравнению третьего порядка:

$$Am^3 + Bm^2 + Cm + D = 0 \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -c_1(b_1c_3 - c_1b_3) - c_2b_1^2; \\ B &= c_2(b_1c_3 - b_3c_1) + c_1(a_3c_1 - a_1c_3) - b_1(a_1c_2 - a_2c_1) - c_2(b_3c_1 + a_1b_1); \end{aligned}$$

$$C = c_2 (a_1 c_3 - a_3 c_1) + c_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) - a_1 (a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_2 (b_3 c_2 + a_2 b_1);$$

$$D = c_2 (c_2 a_3 - a_2 c_3) + a_2 (a_1 c_2 - a_2 c_1)$$

При этом n через m определяется по формуле:

$$n = \frac{b_1 m^2 + a_1 m - a_2}{c_2 - c_1 m}. \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда (7) имеет три различных корня. В этом случае, введя функции

$$\varphi_j(x) = \sigma(x) + m_j \tau(x) + n_j u'(x) \quad (j = 1, 2, 3), \quad (9)$$

где m_j ($j = 1, 2, 3$) – решения уравнения (7), а n_j ($j = 1, 2, 3$) для каждого решения m_j уравнения (7) определяются по формуле (8), решение системы (5) сводится к решению следующих трех независимых сингулярных интегральных уравнений:

$$\varphi_j(x) + \frac{q_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds = 0; \quad (10)$$

$$(-a < x < a; \quad q_j = a_1 + m_j b_1 + n_j c_1; \quad j = 1, 2, 3).$$

при условиях

$$\int_{-a}^a \varphi_j(x) dx = P_0 + m_j T_0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Решение уравнений (10) имеет вид [4]:

$$\varphi_j(x) = C_j X_j^+(x); \quad (12)$$

$$X_j(z) = (z+a)^{-\gamma_j} (z-a)^{\gamma_j-1}; \quad \gamma_j = \frac{1}{2\pi i} \ln |G_j| + \frac{\vartheta_j}{2\pi} = \alpha_j - i\beta_j;$$

$$0 < \vartheta_j = \arg G_j < 2\pi; \quad G_j = \frac{1-iq_j}{1+iq_j} \quad (j = 1, 2, 3).$$

а функция

$$X_j^+(x) = -\sqrt{G_j} (a+x)^{-\gamma_j} (a-x)^{\gamma_j-1} = -\sqrt{G_j} \omega_j(x)$$

значение комплексной функций $X_j(z)$ на верхнем берегу интервала $(-a, a)$.

При помощи (12), удовлетворив условиям (11) и учитывая значение интеграла [12]

$$\int_{-a}^a (x+a)^{-\gamma} (a-x)^{\gamma-1} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma},$$

найдем:

$$C_j = -\left(P_0 + m_j T_0\right) \frac{\sin \pi\gamma_j}{\pi\sqrt{G_j}} \quad (j=1,2,3).$$

Следовательно,

$$\Phi_j(x) = \frac{\left(P_0 + m_j T_0\right) \sin \pi\gamma_j}{\pi(a+x)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}. \quad (13)$$

Далее, подставляя значение функций $\Phi_j(x)$ из (13) в соотношения (9), для определения неизвестных функций $\sigma(x)$, $\tau(x)$ и $u'(x)$ получим систему алгебраических уравнений. Решив эту систему, найдем:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) A_j^* \sin \pi\gamma_j}{\pi(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}; \quad \tau(x) = \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) B_j^* \sin \pi\gamma_j}{\pi(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}; \\ u'(x) &= \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) C_j^* \sin \pi\gamma_j}{\pi(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1^* &= \frac{(m_2 n_3 - m_3 n_2)}{\Delta_*}; \quad A_2^* = \frac{(m_3 n_1 - m_1 n_3)}{\Delta_*}; \quad A_3^* = \frac{(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{\Delta_*}; \quad B_1^* = \frac{n_2 - n_3}{\Delta_*}; \\ B_2^* &= \frac{n_3 - n_1}{\Delta_*}; \quad B_3^* = \frac{n_1 - n_2}{\Delta_*}; \quad C_1^* = \frac{m_3 - m_2}{\Delta_*}; \quad C_2^* = \frac{m_1 - m_3}{\Delta_*}; \quad C_3^* = \frac{m_2 - m_1}{\Delta_*}; \\ \Delta_* &= (m_2 n_3 - m_3 n_2) + (m_3 n_1 - m_1 n_3) + (m_1 n_2 - m_2 n_1). \end{aligned}$$

Из полученных формул (14) можно заключить, что в случае, когда уравнение (7) имеет три различных действительных корня, то $|G_j| = 1$ ($j=1,2,3$) и как скачки контактных напряжений $\sigma(x)$ и $\tau(x)$, так и горизонтальная компонента дислокации $u'(x)$ в концевых точках включения будут иметь показательную особенность без осцилляции с тремя различными показателями $\gamma_j = \vartheta_j / 2\pi$ ($j=1,2,3$). В случае же, когда уравнение (7) имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня, эти функции в концевых

точках включения будут иметь одну показательную особенность без осцилляции и две с осцилляциями.

Используя представления (14) и значение интеграла [12]

$$\int_{-a}^a \frac{(a+s)^{-\gamma} (a-s)^{\gamma-1}}{s-x} ds = \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi\gamma)}{(a+x)^\gamma (a-x)^{1-\gamma}} \quad (0 < \gamma < 1; |x| < a),$$

по формулам (2) для контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения, получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{1}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) [l_0 A_j^* + l_1 B_j^* + l_2 C_j^* \operatorname{ctg} \pi\gamma_j] \sin \pi\gamma_j}{(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}; \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= -\frac{1}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) [l_2 A_j^* \cos \pi\gamma_j - l_0 B_j^* \sin \pi\gamma_j - l_3 C_j^* \cos \pi\gamma_j]}{(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}; \\ \sigma_y^{(2)}(x, 0) &= \frac{1}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) [(l_0 - \Delta) A_j^* + l_1 B_j^* + l_2 C_j^* \operatorname{ctg} \pi\gamma_j] \sin \pi\gamma_j}{(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}; \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= -\frac{1}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) [l_2 A_j^* \cos \pi\gamma_j - (l_0 - \Delta) B_j^* \sin \pi\gamma_j - l_3 C_j^* \cos \pi\gamma_j]}{(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, рассматривая представления (2) вне интервала контакта включений с плоскостью и используя формулу [12]

$$\int_{-a}^a \frac{(s+a)^{-\gamma} (a-s)^{\gamma-1}}{s-x} ds = \frac{\pi \operatorname{sign} x}{|a+x|^\gamma |a-x|^{1-\gamma} \sin \pi\gamma} \quad (|x| > a)$$

для контактных напряжений в зоне сцепления разнородных полуплоскостей получим формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{l_2}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds = \frac{l_2}{\pi^2 \Delta} \sum_{j=1}^3 \int_{-a}^a \frac{(P_0 + m_j T_0) B_j^* \sin \pi\gamma_j}{(s-x)(s+a)^{\gamma_j} (a-s)^{1-\gamma_j}} ds = \\ &= \frac{l_2 \operatorname{sign} x}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) B_j^*}{|a+x|^\gamma |a-x|^{1-\gamma}} \quad (|x| > a); \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = -\frac{l_2}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_3}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = \\ &= -\frac{\operatorname{sign} x}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) (l_2 A_j^* + l_3 C_j^*)}{|a+x|^\gamma |a-x|^{1-\gamma}} \quad (|x| > a). \end{aligned}$$

Следовательно, можно утверждать, что контактные напряжения как на длинных сторонах включения, так и на стыке разнородных полуплоскостей имеют те же особенности, что и их скачки на длинных сторонах включений.

Не разбирая случая, когда уравнение (7) имеет кратные корни, заметим только, что в этом случае число уравнений (10) уменьшается. Это не позволяет сразу определить искомые функции. Однако, решив эти уравнения, можно определить одну из искомых функций через две другие, если (7) имеет трёхкратный корень, или две из искомых функций через одну из них, если (7) имеет один простой и один двукратный корень. Затем, используя соответственно два или одно из уравнений (5), решение задачи можно свести к решению системы из двух неоднородных сингулярных интегральных уравнений, в первом случае, и к одному неоднородному сингулярному интегральному уравнению во втором случае.

Следует отметить также, что, как показывают численные расчеты, когда $\mu = \mu_1 / \mu_2 > 0.5$ и значение коэффициента трения ρ меньше, чем 0.5, уравнение (7) имеет три действительных корня.

Заключение

Таким образом, методом сингулярных интегральных уравнений построено точное решение задачи для кусочно-однородной плоскости с межфазным конечным, абсолютно жёстким тонким включением, одна из длинных сторон которого жёстко сцеплена с матрицей, а другая сторона контактирует с матрицей при сухом трении. Получены простые формулы как для определения контактных напряжений на длинных сторонах включения и вне трещины, так и для горизонтальной компоненты дислокации. Показано, что в случае, когда характеристическое кубическое уравнение имеет три действительных корня, что имеет место когда нижняя полуплоскость не жёстче верхней полуплоскости более, чем в два раза, а коэффициент трения не превосходит 0.5, как контактные напряжения на длинных сторонах включения, так и нормальные и касательные контактные напряжения вне трещины в концевых точках трещины имеют показательную особенность без осцилляции с тремя различными показателями. Обсуждён также случай, когда характеристическое кубическое уравнение имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня. Показано, что в этом случае контактные напряжения помимо показательной особенности без осцилляции имеют также показательную особенность с осцилляцией.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-2C209

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М. Наука, 1980г.,304с.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. - М.: Наука, 1982.- 344с.
3. Панасюк В.В. Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
5. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жёстких линейных включений и трещин в деформируемом теле.-Киев: Наукова думка, 1983.-288с.
6. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2014. 322с.
7. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, No4, с.57-65.
8. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жёстком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
9. Hakobyan V., Dashtoyan L. On a stress state of orthotropic plane with absolutely rigid inclusion //Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 2016, 69 (2). pp. 23-31. Doi- <http://doi.org/10.33018/69.2.2>
10. Акопян Л.В., Даштоян Л.Л. Контактная задача для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной. Сб. трудов VII-ой межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Цахкадзор-2021, ст.18-22.
11. Hakobyan V.N., Hakobyan L.V. and Dashtoyan L.L. Contact problem for a piecewise-homogeneous plane with an interfacial crack under dry friction. //Journal of Physics: Conference Series, Vol. 2231, VII Int. Conf.: Topical Problems of Continuum Mechanics (TPCM 2021) 04/10/2021 - 08/10/2021, Publ. online: 25/04/2022. DOI - <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012024>
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.

Сведения об авторах

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. института механики НАН Армении, тел.: (37410) 568188 E-mail: vhakobyan@sci.am

Акопян Лусине Ваграмовна – канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотр. института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568188 E-mail: lhakobyan@gmail.com

Даштоян Лилит Левоновна – кандидат физ.-мат. наук, ученый секретарь института механики НАН РА, тел.: (+3741) 56-81-89, e-mail: lilit.dashtoyan@sci.am

Поступила в редакцию 28 октября 2022

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО
ПРОЦЕССА, ОБСЛУЖИВАЕМОГО ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ
МАНИПУЛЯТОРОМ

Гукасян А. А.

Ключевые слова: технологический процесс, адаптивный электромеханический манипулятор, конвейер, фазовые траектории, синтез управления.

Ghukasyan A.A.

About Mathematical Modeling of a Technological Process Served by an
Electromechanical Manipulator

Keywords: technological process, adaptive electromechanical manipulator, conveyor, phase trajectories, synthesis control.

A mathematical model of the technological process serviced by an adaptive electromechanical manipulator is constructed. The technological process consists of a manipulator, conveyors and a trolley with parts. Various variants of the synthesis of optimal and quasi-optimal in time conveyor service, which can take place within the framework of the model under consideration, are investigated. Qualitative pictures of the phase trajectories of the manipulator movement in the service process are constructed. The control functions are determined depending on the phase coordinates of conveyors and parts, taking into account that during the movement of the manipulator, various external and internal forces can act on the system. On the phase plane, those areas are highlighted, within which it is possible to service the conveyors by the manipulator.

Ղուկասյան Ա. Ա.

Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորով սպասարկվող տեխնոլոգիական պրոցեսի
մաթեմատիկական մոդելավորման մասին

Հիմնաբառեր. տեխնոլոգիական պրոցես, ադապտիվ էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատոր, կոնվեյեր, ֆազային հետագիծ, դեկավարման սինտեզ:

Կառուցված է տեխնոլոգիական պրոցեսի մաթեմատիկական մոդել, որը սպասարկվում է ադապտիվ /կողմնորոշվող/ էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի միջոցով: Տեխնոլոգիական պրոցեսը կազմված է մանիպուլյատորից, կոնվեյերներից և դետալներով սայլակից: Հետազոտված է կոնվեյերների օպտիմալ և կվազիօպտիմալ ըստ ժամանակի մատակարարման սինթեզի տարբեր խնդիրներ, որոնք կարող են տեղի ունենալ հետազոտվող մոդելի շրջանակներում: Կառուցված են մատակարարման ընթացքում մանիպուլյատորի շարժման ֆազային հետագծերի որակական պատկերները: Որոշված են կոնվեյերների և բեռի ֆազային կոորդինատներից կախված դեկավարման ֆունկցիաները հաշվի առնելով, որ շարժման ընթացքում մանիպուլյատորի վրա կարող են ազդել ներքին և արտաքին տարբեր ուժեր: Ֆազային հարթության վրա առանձնացված են այն տիրույթները, որոնց շրջանակներում հնարավոր է կոնվեյերների սպասարկումը մանիպուլյատորի միջոցով:

Построена математическая модель технологического процесса, обслуживаемого адаптивным электромеханическим манипулятором. Технологический процесс состоит из манипулятора, конвейеров и тележки с деталями. Исследованы различные варианты синтеза оптимального и квазиоптимального по времени обслуживания конвейеров, которые могут иметь место в рамках рассматриваемой модели.

Построены качественные картины фазовых траекторий движения манипулятора в процессе обслуживания. Определены управляющие функции в зависимости от фазовых координат конвейеров и деталей, учитывая, что во время движения манипулятора на систему могут действовать различные внешние и внутренние силы. На фазовой плоскости выделены те области, в рамках которых возможно обслуживание конвейеров манипулятором.

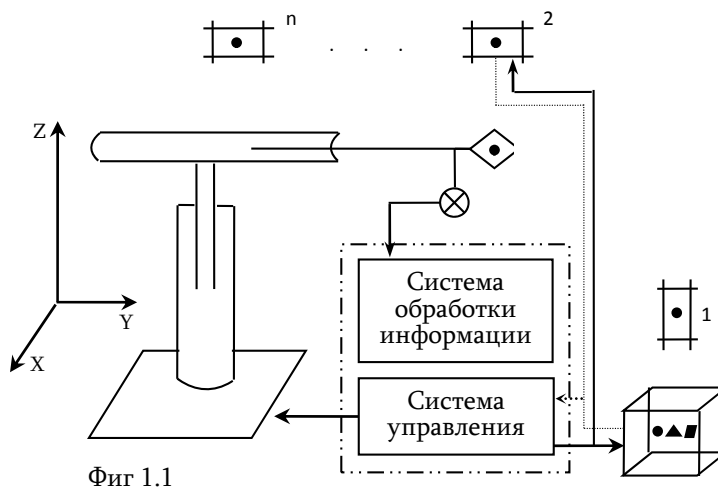
Введение. Обслуживание технологического процесса с помощью манипуляционных роботов имеет определенный интерес как для практики, так и для теории математического моделирования и управления движениями. На практике в системе ГАП могут иметь место различные задачи обслуживания, которые могут быть решены с использованием манипуляторов с программным управлением (порядок обслуживания и время встреч заранее определены) или адаптивного манипуляционного робота, оснащенного системой технического зрения, чувствительными датчиками и другими элементами искусственного интеллекта. Простейшими датчиками являются датчики контактного типа. Эти датчики чаще всего располагают на наружных и внутренних поверхностях захватного устройства манипулятора [1-9]. Датчики усилия позволяют регулировать усилие схвата пропорционально массе захватываемых объектов. Для измерения усилий применяют два способа: по упругой деформации чувствительного элемента и по перемещению подвижной части чувствительного элемента в зависимости от массы объектов. Для измерения малых усилий пригодны различные конструкционные решения с использованием проволочных и полупроводниковых тензометров сопротивления или токопроводящих полимеров. Для измерения больших усилий применяют магнитоупругие элементы, а для точных измерений – тарированные пружины и другие упругочувствительные элементы. Адаптивные манипуляционные роботы, оснащенные датчиками, имеют возможность в процессе обслуживания по разным критериям определить последовательность целей. На фиг. 1.2 приведена одна из схем чувствительного схвата манипулятора с тарированными пружинами. В работах [10-14] приводятся математические модели процессов обслуживания манипулятором технологического процесса, а также обсуждаются различные варианты оптимизации управляемого процесса. Эти исследования являются продолжением работы [10]. Во всех случаях время нахождения манипулятора около каждого объекта не учитывается, то есть считается, что в момент времени t_i манипулятор обслуживает объект под номером i и мгновенно направляется к другому объекту (предположение имеет место, поскольку $\tau/(T - t_0) \ll 1$, где τ – время нахождения манипулятора около объекта, а $(T - t_0)$ – время процесса обслуживания). Отметим, что если последовательность обслуживания манипулятором объектов фиксирована, то задача на каждом этапе движения $[t_{i-1}, t_i]$ сводится к обычной задаче управления или оптимального управления с фиксированными или свободными краевыми условиями [15-18]. В задачах обслуживания актуальными являются также вопросы управления с переменной и не фиксированной массой [19,20]. В случае, когда последовательность обслуживания и моменты встреч с объектами не фиксированы, то

первоначальную задачу управления можно сформулировать как задачу нахождения последовательностей объектов обслуживания и моментов встреч, в процессе которых минимизирующий функционал будет зависеть также от последовательности встреч. Решение такой задачи существует, поскольку число возможных последовательностей встреч с объектами конечно. С точки зрения технологического процесса немаловажным критерием качества является также рациональное использование технологического участка ($S \rightarrow \min$). Этот критерий является геометрическим и налагает на кинематику движения манипулятора дополнительное ограничение [10]. Отметим, что в общем случае задачи обслуживания являются многоэтапными, где выбор критерия оптимальности для всего процесса и для каждого этапа зависят от технологического назначения.

Ниже приводится математическая модель простого и абстрактного управляемого технологического процесса (Фиг.1.1), где предполагается, что адаптивный электромеханический манипулятор, с помощью датчика усилий определяя по деформации упругих элементов вес детали, на каждом этапе осуществляет оптимальное или квазиоптимальное по времени ($T \rightarrow \min$) обслуживание конвейеров с учетом внешних или внутренних факторов. Исследованы различные варианты синтеза обслуживания на каждом этапе, которые могут иметь место в рамках рассматриваемой модели. Построены качественные картины фазовых траекторий движения манипулятора и определены управляющие функции в зависимости от фазовых координат. Приведенная модель технологического процесса и поставленные задачи обслуживания являются содержательными и представляют также определенный интерес в области теоретической механики и математической теории управления движений.

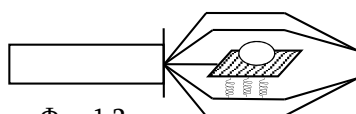
1. Математическая модель технологического процесса. Рассматривается управляемый технологический процесс, который состоит из нескольких (n) конвейеров, подвижной тележки с деталями весом $m_i^* (i = 1, 2, \dots, n)$ и адаптивным электромеханическим манипулятором (Фиг.1.1). Задача манипулятора состоит в том, что манипулятор должен оптимальным образом переложить нужные детали из тележки на конвейеры. Здесь последовательность обслуживания конвейеров (целей), а также время встречи с ними не фиксированы. Однако адаптивный манипулятор с помощью датчика усилий, расположенного во внутренней поверхности захватного устройства (Фиг.1.2), определяя по деформации упругих элементов вес деталей, должен детали с весом $m_i^* (i = 1, 2, \dots, n)$ переложить на i -ый ($i = 1, 2, \dots, n$) конвейер, соответственно. Нужно отметить, что порядок подачи деталей из тележки происходит произвольным образом. Рассматриваемый процесс можно назвать также процессом сортировки деталей. Принципиальная схема работы чувствительного схвата манипулятора с тарированными пружинами

представлена на фиг. 1.3. Представленная схема с локальным управлением со многими другими составляют часть системы обработки информации (фиг.1.1) (на фиг. 1.3 приняты следующие обозначения: D- деталь, СЛУ- система локального управления, $\otimes$ - измерительный прибор, СУ-система управления, Δl_i ($i = 1, 2, \dots, n$) - относительные удлинение тарированных пружин, m_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) - вес детали).



Фиг 1.1

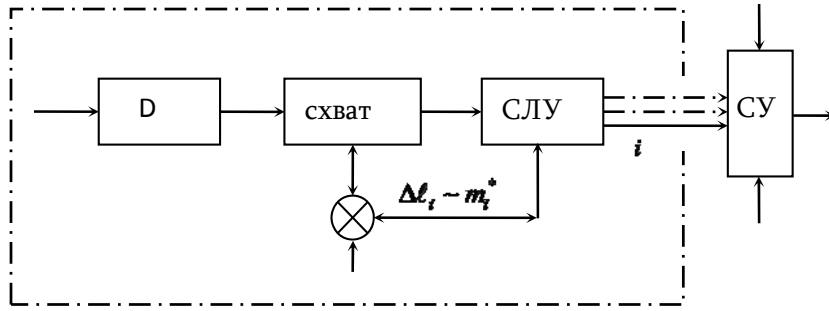
Электромеханическая модель управляемого манипулятора имеет пять степеней подвижности, кинематическая схема которой приведена на Фиг. 1.1. Манипулятор состоит из подвижного основания, стойки, вертикально ориентированного вала, направляющей и стрелы со схватом. Все подвижные части манипулятора считаются абсолютно твердыми телами. Степени подвижности манипулятора, соответствуют движению основания на плоскости OXY , перемещению вала в вертикальном направлении, его повороту вокруг вертикальной оси и перемещению стрелы вдоль направляющей. Указанным степеням подвижности соответствуют обобщенные координаты: $x_0(t), y_0(t)$ положение основания; $z(t)$ - расстояние от связанной с основанием горизонтальной плоскости OXY до стрелы; $\varphi(t)$ - угол поворота стрелы относительно оси вала; $y(t)$ - расстояние центра масс стрелы до оси вала. Управление по указанным степеням свободы осуществляется электромагнитными силами и моментами nM, n_2F_2, n_3F_3 , соответственно (n, n_2, n_3 - коэффициенты пропорциональности). Предполагается, что при движении манипулятора по указанным степеням



Фиг 1.2

30

подвижности могут действовать постоянные по величине внешние или неучтенные внутренние силы или моменты M^0, F_2^0, F_3^0 , соответственно.



Фиг. 1.3

Введем обозначения: l - полная длина стрелы (стрела моделируется как однородный стержень с одинаковым сечением); m_1 - суммарная масса направляющего цилиндра и вала; J_1 - суммарный момент инерции цилиндра и вала относительно оси, параллельной OZ и проходящей через их центр масс; m_2 - масса стрелы; J_2 - центральный момент инерции стрелы; m_0 - суммарная масса основания и стойки; $\mathbf{R}$ - радиус-вектор центра масс стрелы относительно начала координат системы $OXYZ$ (точки O); $\mathbf{R}_1$ - радиус-вектор груза на схвате относительно точки O ; $\mathbf{r}$ - радиус-вектор основания манипулятора относительно точки O .

В инерциальной системе координат $OXYZ$ векторы $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_1$, и $\mathbf{r}$ имеют вид

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) + y(t) \sin \varphi \\ y_0(t) + y(t) \cos \varphi \\ 0 + z(t) \end{pmatrix}, \mathbf{R}_1(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) + \left(y(t) + \frac{l}{2}\right) \sin \varphi \\ y_0(t) + \left(y(t) + \frac{l}{2}\right) \cos \varphi \\ 0 + z(t) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{r}(t) = (x_0(t), y_0(t), 0)^T$$

Фазовые положения деталей в тележке относительно системы координат $OXYZ$ определим через $(x_i^0(t), y_i^0(t), z_i^0(t), \dot{x}_i^0(t), \dot{y}_i^0(t), \dot{z}_i^0(t))$, а текущие местоположения деталей на конвейерах – через координаты $(y_i^*(t), \varphi_i^*(t), z_i^*(t), \dot{y}_i^*(t), \dot{\varphi}_i^*(t), \dot{z}_i^*(t))$.

Здесь предполагается, что управляющей стороне известна динамика движения конвейеров и тележки, а также параметры $(x_i^0(t), y_i^0(t), z_i^0(t), \dot{x}_i^0(t), \dot{y}_i^0(t), \dot{z}_i^0(t))$; $(y_i^*(t), \varphi_i^*(t), z_i^*(t), \dot{y}_i^*(t), \dot{\varphi}_i^*(t), \dot{z}_i^*(t))$ в момент времени t .

Кинетическая и потенциальная энергия движения манипулятора имеет вид

$$K_i = \frac{J_1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m_1}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_0 + m_1}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + m_2 \frac{\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + m_i^* \frac{\dot{\mathbf{R}}_1^2}{2}; \quad (1.2)$$

$$\Pi_i = (m_1 + m_2 + m_i^*) gz, (i = 1, 2, \dots, n)$$

Предполагая, что движение по степеням подвижности происходит поэтапно при заданном движении основания $(\ddot{x}_0 = const, \ddot{y}_0 = const)$, уравнение движения манипулятора можно представить в виде

$$\ddot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{Q}_i - \mathbf{W}_i \quad (1.3)$$

где

$$\mathbf{a}_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i})^T, \mathbf{Q}_i = (Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{3i})^T, (\alpha_{1i} = \varphi, \alpha_{2i} = y, \alpha_{3i} = z);$$

$$Q_{1i} = nM(t) / [J_1 + J_2 + m_2 y^2 + m_i^* (y + l/2)^2];$$

$$Q_{2i} = n_2 F_2 / (m_2 + m_i^*); Q_{3i} = n_3 F_3 / (m_1 + m_2 + m_i^*);$$

$$\mathbf{W}_i = (w_{1i}, w_{2i}, w_{3i})^T; w_{1i} = M^0 / [J_1 + m_2 y^2 + J_2 + m_i^* (y + l/2)^2];$$

$$w_{2i} = \ddot{x}_0 \sin \varphi_* + \ddot{y}_0 \cos \varphi_* + F_2^0 / (m_2 + m_i^*);$$

$$w_{3i} = F_3^0 / (m_1 + m_2 + m_i^*) - g; (i = 1, 2, \dots, n)$$

(φ_* - угол между осями системы координат $OXYZ$ и вектора ускорения $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, 0)$ основания манипулятора)

К уравнениям (1.3) необходимо добавить также уравнения баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей приводов [7-9]

$$L_j \dot{I}_j + R_j I_j + k_j n_j \dot{\alpha}_{ji} = u_j, |u_j| \leq U_j, (j = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

Здесь L_j - коэффициенты индуктивности обмоток роторов электродвигателей приводов, R_j - электрические сопротивления обмоток роторов электродвигателей приводов, I_j - ток в цепях роторов приводов, k_j - коэффициенты пропорциональности между электрическим током в цепях роторов электродвигателей приводов и усилиями $(Q_j = k_j I_j)$, u_j - электрические напряжения, подаваемые на вход электродвигателей приводов.

Нужно отметить, что на этапах обслуживания, когда движение манипулятора происходит без груза, в (1.3) необходимо положить $m_i^* = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

Используя соотношение $(Q_j = k_j I_j) (j = 1, 2, 3)$, из (1.3) и (1.4) получим

$$L_j \ddot{\alpha}_{ji} + R_j \ddot{\alpha}_{ji} + k_j^* \dot{\alpha}_{ji} = u_j^* - w_j^*, \quad (1.5)$$

где $u_j^* = k_j u_j, w_j^* = R_j w_j, k_j^* = k_j^2 n_j, (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3)$

В дальнейшем предполагаем, что $L_j \ll R_j$. При этом систему уравнений (1.5) в нулевом приближении можно представить в виде [1,21]

$$R_j \ddot{\alpha}_{ji} + k_j^* \dot{\alpha}_{ji} = \tilde{u}_j, \quad (1.6)$$

где $\tilde{u}_j = u_j^* - w_j^*, (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3)$.

(отметим, что уравнения (1.5) при $L_j \ll R_j$ имеет вид $\varepsilon L_j^0 \ddot{\alpha}_{ji} + R_j \ddot{\alpha}_{ji} + k_j^* \dot{\alpha}_{ji} = u_j^* - w_j^*$, где $\varepsilon \ll 1, L_j^0 \sim 1, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3$ и представляет систему сингулярно и регулярно возмущенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных [21,22])

Случай, когда во время движения манипулятора по степеням подвижности не действуют дополнительные внешние или внутренние усилия ($w_j^* \equiv 0, j = 1, 2, 3$) в [21], при ограничениях на управляющие воздействия $|u_j^*| \leq u_j^0, j = 1, 2, 3$ и при условиях $L_j \ll R_j (j = 1, 2, 3)$, в нулевом приближении подробно исследована задача об оптимальном по быстродействию управления транспортными движениями электромеханического манипуляционного робота с тремя степенями свободы. В пренебрежении взаимным влиянием различных степеней свободы определено оптимальное управление в форме синтеза, обеспечивающее наискорейшее приведение робота в заданную конфигурацию с торможением движения в конце процесса.

В силу принципа максимума Л.С.Понтрягина оптимальное управление $u_j^{*o} (j = 1, 2, 3)$ релейное [18]. Корни характеристических уравнений (1.6) вещественные ($\lambda_{j1} = 0, \lambda_{j2} = -k_j^*/R_j, (j = 1, 2, 3)$), и следовательно, каждое из управлений $u_j^{*o} (j = 1, 2, 3)$ имеет не более одной точки переключения на оптимальной траектории. Отсюда вытекает, что в общем случае траектория оптимального обслуживания при $w_j^* \equiv 0, j = 1, 2, 3$ на фазовой плоскости $(\alpha_j(t), \dot{\alpha}_j(t))$ состоит из отрезков двух фазовых кривых, одна из которых отвечает значению $u_j^{*o} = u_j^0 (j = 1, 2, 3)$, а другая - $u_j^{*o} = -u_j^0 (j = 1, 2, 3)$. Один из отрезков фазовых кривых, составляющих оптимальную траекторию, проходит через конечную точку $(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T) (j = 1, 2, 3)$.

Принимая за основу решение задачи оптимального быстродействия при $w_j^* \equiv 0, j=1, 2, 3$, построим фазовые траектории и синтез управления квазиоптимального обслуживания манипулятором объектов при управлении $\tilde{u}_j = u_j^* - w_j^* (j=1, 2, 3)$.

Ограничения на управляющие воздействия $\tilde{u}_j$ представим в виде

$$-u_j^0 - w_j^* \leq \tilde{u}_j(t) \leq u_j^0 - w_j^*, (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, 3) \quad (1.7)$$

где u_j^0 ограничение на u_j^* .

При ограничении (1.7) фазовые траектории квазиоптимального обслуживания манипулятором конвейера при $w_j^* \neq 0, j=1, 2, 3$ на фазовой плоскости $(\alpha_j(t), \dot{\alpha}_j(t))$ состоит из отрезков двух фазовых кривых, одна из которых отвечает значению $\tilde{u}_j^o = u_j^0 - w_j^* (j=1, 2, 3)$, а другая - $\tilde{u}_j^o = -u_j^0 - w_j^* (j=1, 2, 3)$. Поскольку система уравнений (1.6) и ограничения (1.7), при $L_j \ll R_j (j=1, 2, 3)$ имеют место на каждом этапе обслуживания, то в дальнейшем можно пропускать индекс i .

2. Приближенный синтез обслуживания. Построим синтез квазиоптимального обслуживания для систем второго порядка (1.6), приводящий манипулятор из произвольного начального состояния

$$\alpha_j(t_0) = \alpha_j^0, \dot{\alpha}_j(t_0) = \dot{\alpha}_j^0 (j=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

в произвольное конечное состояние

$$\alpha_j(T) = \alpha_j^T, \dot{\alpha}_j(T) = \dot{\alpha}_j^T (j=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

при ограничениях (1.7), за возможное минимальное время $(T \rightarrow \min)$.

Не нарушая общности, в качестве произвольного начального состояния можно взять положение деталей на тележке, а в качестве конечного состояния- положение деталей на конвейерах (напомним, что по предположению управляющей стороне известна (2.1) и (2.2)).

Общее решение уравнения (1.6) при $\tilde{u}_j = \text{const} (j=1, 2, 3)$ имеет вид

$$\alpha_j = \alpha_j^0 - \frac{\tilde{u}_j}{k_j^*} R_j \ln \frac{\tilde{u}_j - k_j^* \dot{\alpha}_j}{\tilde{u}_j - k_j^* \omega_j^0} + \frac{R_j}{k_j^*} (\omega_j^0 - \dot{\alpha}_j), (j=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

где α_j^0, ω_j^0 - значения переменных $\alpha_j, \dot{\alpha}_j$, соответственно в некоторый начальный момент времени t_0 (2.1).

Поскольку выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, из (2.3) следует, что на любой фазовой траектории семейства (2.3) выполняются неравенства

$$\dot{\alpha}_j < \tilde{u}_j / k_j^*, \omega_j^0 < \tilde{u}_j / k_j^* \quad (2.4)$$

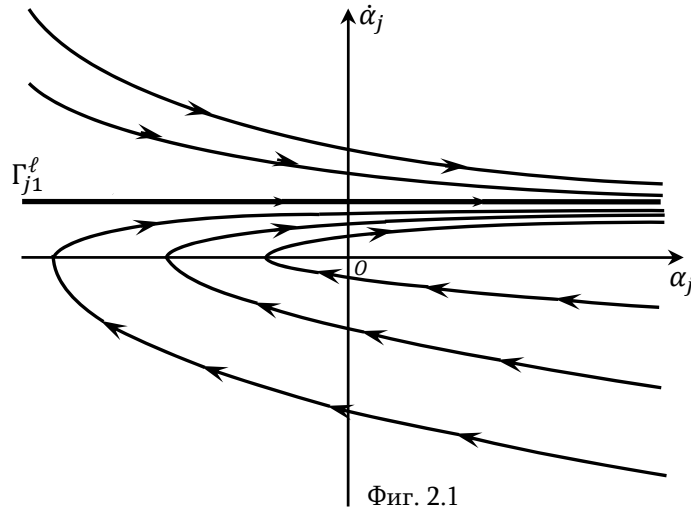
или

$$\dot{\alpha}_j > \tilde{u}_j / k_j^*, \omega_j^0 > \tilde{u}_j / k_j^*, (j = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

2.1 Синтез квазиоптимального обслуживания в случае

$$\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*, u_j^0 > w_j^*, (j = 1, 2, 3).$$

Из производной функции (2.3) по $\dot{\alpha}_j$ ($\partial \alpha_j / \partial \dot{\alpha}_j = R_j \dot{\alpha}_j / (u_j^0 - w_j^* - k_j^* \dot{\alpha}_j)$) следует, что в области (2.4) функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ монотонно возрастает при $\dot{\alpha}_j > 0$ и монотонно убывает при $\dot{\alpha}_j < 0$, а в области (2.5), где $\dot{\alpha}_j > 0$ функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ монотонно убывает. Кривые семейства (2.3) имеют асимптотику $\dot{\alpha}_j = \tilde{u}_j / k_j^*$. Отметим, что эта кривая также является фазовой траекторией уравнения, отвечающей стационарному вращению соответствующего звена манипулятора с постоянной скоростью.



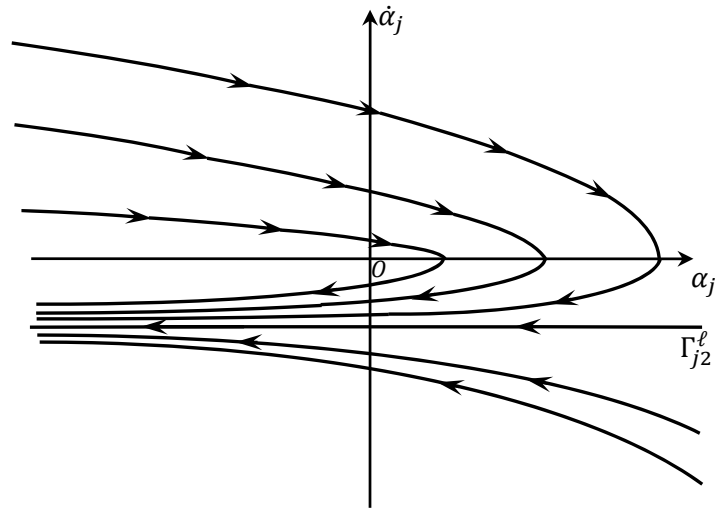
Фиг. 2.1

На фиг. 2.1 изображены фазовые кривые уравнения (1.6), отвечающие значению $\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^* (u_j^0 > w_j^*)$, при $w_j^* = 0$, $w_j^* > 0$ и $w_j^* < 0$ ($j = 1, 2, 3$), соответственно. Стрелками показано направление движения изображающей точки. Приняты обозначения Γ_{j1}^l ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$) для асимптотики $\dot{\alpha}_j = \tilde{u}_j / k_j^*$, которые означают $\Gamma_{j1}^1 : \dot{\alpha}_j = u_j^0 / k_j^* (w_j^* = 0)$, $\Gamma_{j1}^2 : \dot{\alpha}_j = (u_j^0 - w_j^*) / k_j^* (w_j^* > 0)$, $\Gamma_{j1}^3 : \dot{\alpha}_j = (u_j^0 - w_j^*) / k_j^* (w_j^* < 0)$. Все асимптотики в рассматриваемом случае находятся на верхней полуплоскости. Фазовые траектории обслуживания при $w_j^* = 0$

$(j = 1, 2, 3)$ являются оптимальными базовыми траекториями, а время движения по этим траекториям минимальным. В остальных случаях, где $w_j^* \neq 0 (j=1, 2, 3)$, здесь и в дальнейшем, фазовые траектории являются квазиоптимальными, которые и обусловлены влиянием внешних или внутренних сил или моментов на решения задачи оптимального обслуживания.

Аналогично построим семейства фазовых кривых уравнения (1.6), отвечающие значению $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$ ($u_j^0 > w_j^*$), при $w_j^* = 0$, $w_j^* > 0$ и $w_j^* < 0$. Из выражений для производной функции (2.3) по $\dot{\alpha}_j$ при $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$, $(\partial \alpha_j / \partial \dot{\alpha}_j = -R_j \dot{\alpha}_j / (u_j^0 + w_j^* + k_j^* \dot{\alpha}_j))$ следует, что в области (2.5), где $\dot{\alpha}_j > -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$, $\omega_j^0 > -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$ функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ монотонно убывает при $\dot{\alpha}_j > 0$ и монотонно возрастает при $\dot{\alpha}_j < 0$, а в области (2.4), где $\dot{\alpha}_j < -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$, $\omega_j^0 < -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$ - монотонно убывает.

На Фиг. 2.2 изображены фазовые кривые уравнения (1.6), отвечающие управлению $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$, ($u_j^0 > w_j^*$) при $w_j^* = 0, w_j^* > 0, w_j^* < 0$ ($j = 1, 2, 3$) - соответственно. Обозначению Γ_{j2}^l ($l = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) соответствуют следующие асимптотики: $\Gamma_{j2}^1 : \dot{\alpha}_j = -u_j^0 / k_j^* (w_j^* = 0)$, $\Gamma_{j2}^2 : \dot{\alpha}_j = -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^* (w_j^* > 0)$, $\Gamma_{j2}^3 : \dot{\alpha}_j = -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^* (w_j^* < 0)$. Здесь все асимптотики находятся в нижней



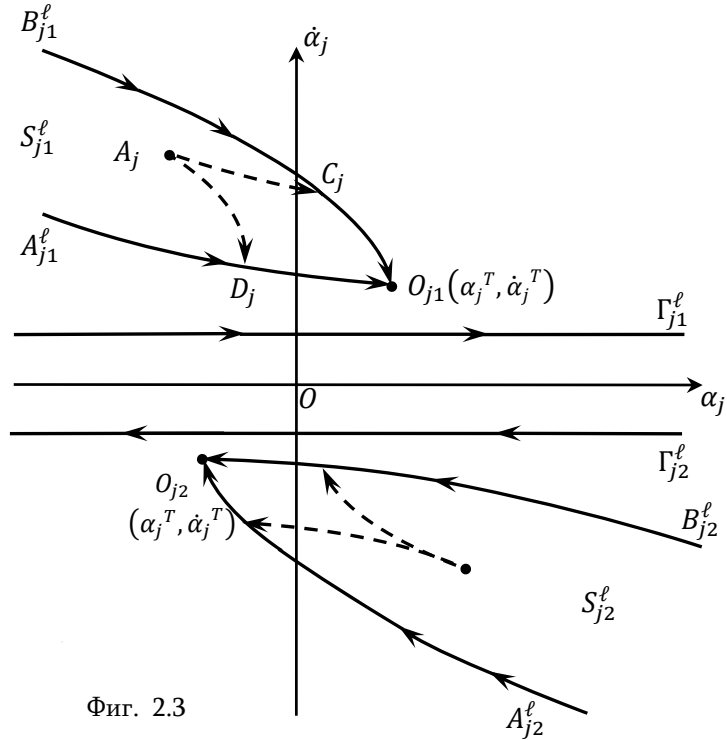
Фиг. 2.2

полуплоскости. При $w_j^* = 0$ ($j = 1, 2, 3$) асимптоты Γ_{j1}^1 (фиг.2.1) и Γ_{j2}^1 ($j = 1, 2, 3$) (фиг.2.2) симметричны относительно координатной линии α_j ($j = 1, 2, 3$).

Анализ фазовых кривых показывает, что единственными фазовыми траекториями, приводящими манипулятор в заданное состояние $(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ при $\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*$, где $u_j^0 > w_j^*$, являются

$$\alpha_j = \alpha_j^T - \frac{R_j}{k_j^{*2}} \left[(u_j^0 - w_j^*) \ln \frac{u_j^0 - w_j^* - k_j^* \dot{\alpha}_j}{u_j^0 - w_j^* - k_j^* \dot{\alpha}_j^T} + k_j^* (\dot{\alpha}_j - \dot{\alpha}_j^T) \right] \quad (2.6)$$

$(w_j^* = 0, w_j^* > 0, w_j^* < 0), (j = 1, 2, 3)$



Фиг. 2.3

При $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$, $u_j^0 > w_j^*$ фазовые кривые, приводящие систему (1.6) в фазовую точку $(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$, имеют вид

$$\alpha_j = \alpha_j^T + \frac{R_j}{k_j^{*2}} \left[(u_j^0 + w_j^*) \ln \frac{u_j^0 + w_j^* + k_j^* \dot{\alpha}_j}{u_j^0 + w_j^* + k_j^* \dot{\alpha}_j^T} - k_j^* (\dot{\alpha}_j - \dot{\alpha}_j^T) \right] \quad (2.7)$$

$$(w_j^* = 0, w_j^* > 0, w_j^* < 0), (j = 1, 2, 3))$$

На фиг. 2.3, 2.4 изображены все семейство фазовых траекторий, приводящих манипулятор в конечные состояния, когда конечные состояния находятся выше линии $\Gamma_{j1}^l (\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_{j1}^l)$, ниже линии $\Gamma_{j2}^l (\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j2}^l)$, и между линиями $\Gamma_{j1}^l, \Gamma_{j2}^l$ ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$) (Фиг.2.4) соответственно.

Обозначая через $v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha})$ функцию, заданную на фазовой плоскости $(\alpha, \dot{\alpha})$, решение рассматриваемой задачи квазиоптимального обслуживания, когда $\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_{j1}^l$ можно истолковать следующим образом

$$v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^*, & \text{на дуге } A_{j1}^l O_{j1} \text{ и в области } S_{j1}^l \\ -(u_j^0 + w_j^*), & \text{на дуге } B_{j1}^l O_{j1} \text{ и в области } S_{j1}^l \end{cases}, (j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3) \quad (2.8)$$

Из фазовых кривых следует, что в случае $\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_{j1}^l$ квазиоптимальное (оптимальное при $w_j^* = 0, j = 1, 2, 3$) решение задачи обслуживания существует только в области S_{j1}^l ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$). Здесь S_{j1}^l – открытая область, ограниченная линиями $A_{j1}^l O_{j1}$ и $B_{j1}^l O_{j1}$. Внутри области S_{j1}^l решение задачи не зависит от чередования переключений управляющей функции $\tilde{u}_j$, то есть в S_{j1}^l можно двигаться по закону (2.6) и (2.7) до попадания на линии переключения $A_{j1}^l O_{j1}$ и $B_{j1}^l O_{j1}$, соответственно. После этого, дальнейшее движение совершается по линии $A_{j1}^l O_{j1}$ или $B_{j1}^l O_{j1}$ до попадания в конечную точку. Все эти траектории при $w_j^* = 0, j = 1, 2, 3$ удовлетворяют принципу максимума и, следовательно, являются оптимальными. На каждой оптимальной траектории значение управляющего параметра $\tilde{u}_j$ равно $v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha})$ в той точке, в которой в момент времени t находится фазовая точка. Заметим, что время движения по указанным траекториям в области S_{j2}^l также не зависит от чередования выбора функции $\tilde{u}_j(t)$, а определяется фазовыми координатами внутренней (начальной) точки области S_{j2}^l и конечной точки O_{j2} . ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$) S_{j2}^l – открытая область, ограниченная линиями $A_{j2}^l O_{j2}$ и $B_{j2}^l O_{j2}$.

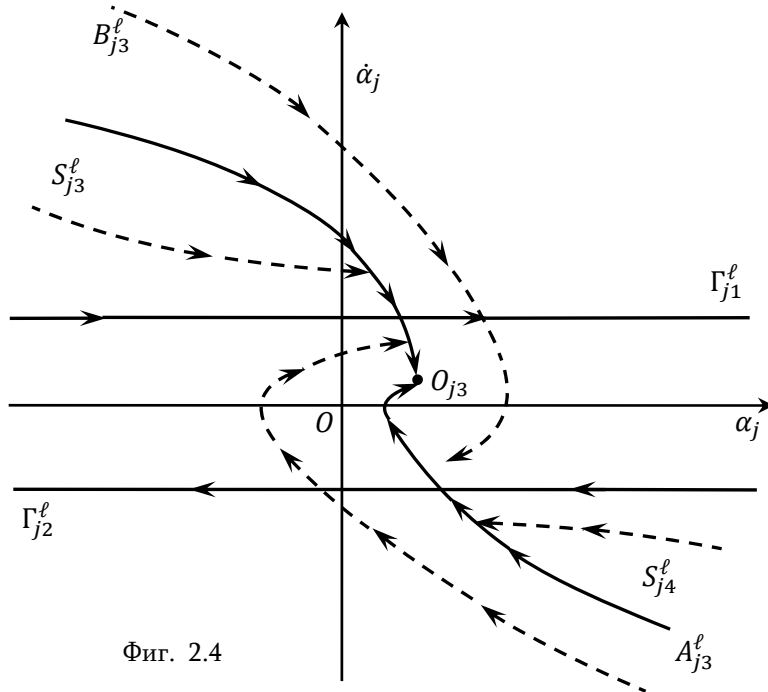
Не нарушая общности, докажем последнее утверждение при $w_j^* = 0$ и $|\tilde{u}_j(t)| \leq u_j^0$ ($j = 1, 2, 3$). Пусть в момент времени $t = t_0$ положение манипулятора совпадает с точкой $A_j(\alpha_j^0, \dot{\alpha}_j^0) \in S_{j1}^l$, а конечное положение при $t = T$ – с точкой $O_{j1}(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ Фиг. 2.3. Из (2.8) следует, что движение из начальной точки

$A_j(\alpha_j^0, \dot{\alpha}_j^0) \in S_{j1}^1$ к конечной точке $O_{j1}(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ при $|\tilde{u}_j(t)| \leq u_j^0 (j=1,2,3)$ не зависит от чередования переключений управляющей функции. Сначала можно двигаться по закону $\tilde{u}_j = +u_j^0 (j=1,2,3)$ до попадания на линии $B_{j1}O_{j1} (j=1,2,3)$, затем по закону $\tilde{u}_j = -u_j^0 (j=1,2,3)$ до точки O_{j1} , или сначала по закону $\tilde{u}_j = -u_j^0 (j=1,2,3)$ до линии переключения $A_{j1}O_{j1}$, затем по закону $\tilde{u}_j = +u_j^0 (j=1,2,3)$ до точки $O_{j1} (j=1,2,3)$.

Точки пересечения с линиями $B_{j1}O_{j1}$ и $A_{j1}O_{j1}$ в моменты времени $t=t_{1j}$ и $t=t_{2j}$ обозначим через $C_j(\alpha_j^1(t_{1j}), \dot{\alpha}_j^1(t_{1j}))$ и $D_j(\alpha_j^2(t_{2j}), \dot{\alpha}_j^2(t_{2j}))$, соответственно.

Определим время движения по траектории $A_j C_j O_{j1}$. Уравнение (1.6) представим через фазовых координат $(\alpha_{j1}(t) = \alpha_j(t), \alpha_{j2}(t) = \dot{\alpha}_j(t))$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{j1} = \alpha_{j2} \\ \dot{\alpha}_{j2} = -\frac{k_j^*}{R_j} \alpha_{j1} + \frac{\tilde{u}_j}{R_j}, (\alpha_{j1} = \alpha_j, j=1,2,3) \end{cases} \quad (2.9)$$



Фиг. 2.4

Интегрируя (2.9) от t_{1j} до t , получим

$$\tilde{u}_j |t - t_{1j}| = R_j [\alpha_{j2}(t) - \alpha_{j2}(t_{1j})] + k_j^* [\alpha_{j1}(t) - \alpha_{j1}(t_{1j})] \quad (2.10)$$

Из постановки следует, что если $t \in [t_0, t_{1j}]$, то $\tilde{u}_j = +u_j^0$, а если $t \in [t_{1j}, T_{1j}]$, то $\tilde{u}_j = -u_j^0$. Справедливы, также условия

$$|t - t_{1j}| = \begin{cases} t - t_{1j}, & \text{если } t > t_{1j} \\ t_{1j} - t, & \text{если } t < t_{1j} \end{cases},$$

следовательно, время движения от точки A_{j1} до точки C_j , определяется выражением

$$t_{A_j C_j} = |t_0 - t_{1j}| = \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j2}(t_0) - \alpha_{j2}(t_{1j})] + \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(t_0) - \alpha_{j1}(t_{1j})] \quad (2.11)$$

Аналогичным образом определим время движения от точки C_j до конечной точки O_{j1} , получим

$$t_{C_j O_{j1}} = |T_{1j} - t_{1j}| = \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j2}(t_{1j}) - \alpha_{j2}(T_{1j})] + \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(t_{1j}) - \alpha_{j1}(T_{1j})] \quad (2.12)$$

Обозначая время движения от точки A_j до точки O_{j1} по траектории $A_j C_j O_{j1}$ через $T_{A_j C_j O_{j1}}$, получим

$$\begin{aligned} T_{A_j C_j O_{j1}} = t_{A_j C_j} + t_{C_j O_{j1}} = (T_{1j} - t_0) &= \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j2}(t_0) - \alpha_{j2}(T_{1j})] + \\ &+ \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(t_0) - \alpha_{j1}(T_{1j})] \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь $(\alpha_{j1}(T_{1j}), \dot{\alpha}_{j1}(T_{1j}))$ координаты конечной точки O_{j1} .

Выражение (2.13) не зависит от фазовых координат промежуточной точки C_j , то есть время движения от точки A_j до точки O_{j1} по траектории $A_j C_j O_{j1}$ не зависит от координаты точки C_j .

Аналогичным образом определим время движения по траектории $A_j D_j O_{j1}$.

Интегрируя уравнения (2.9) от t до t_{2j} , получим

$$\tilde{u}_j |t - t_{2j}| = R_j [\alpha_{j2}(t) - \alpha_{j2}(t_{2j})] + k_j^* [\alpha_{j1}(t) - \alpha_{j1}(t_{2j})]$$

Здесь имеют место следующие условия, если $t \in [t_0, t_{2j}]$, то $\tilde{u}_j = -u_j^0$, а если $t \in [t_{2j}, T_{2j}]$, то $\tilde{u}_j = +u_j^0$ и $|t - t_{2j}| = \begin{cases} t - t_{2j}, & \text{если } t > t_{2j} \\ t_{2j} - t, & \text{если } t < t_{2j} \end{cases}$,

Время движения от точки A_{j1} до точки D_j , определяется выражением

$$t_{A_j D_j} = |t_0 - t_{2j}| = \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j2}(t_{2j}) - \alpha_{j2}(t_0)] + \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(t_{2j}) - \alpha_{j1}(t_0)], \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.14)$$

а время движения от точки D_j до точки O_{j1} - выражением

$$t_{D_j O_{j1}} = |T_{2j} - t_{2j}| = \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j1}(T_{2j}) - \alpha_{j1}(t_{2j})] + \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(T_{2j}) - \alpha_{j1}(t_{2j})], \quad (2.15)$$

Из (2.14) и (2.15) имеем

$$T_{A_j D_j O_{j1}} = t_{A_j D_j} + t_{D_j O_{j1}} = (T_{2j} - t_0) = \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j2}(T_{2j}) - \alpha_{j2}(t_0)] + \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(T_{2j}) - \alpha_{j1}(t_0)] \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) также не зависит от фазовых координат промежуточной точки D_j .

Поскольку $\alpha_{j1}(T_{2j}) = \alpha_{j1}(T_{1j}); \alpha_{j2}(T_{2j}) = \alpha_{j2}(T_{1j}), (j = 1, 2, 3)$, то из (2.13) и (2.16) следует, что время движения $T_{A_j C_j O_{j1}}$ от точки $A_j \in S_{j1}^1$ до конечной точки O_{j1} по траектории $A_j C_j O_{j1}$ и время движения $T_{A_j D_j O_{j1}}$ от точки $A_j \in S_{j1}^1$ до конечной точки O_{j1} по траектории $A_j D_j O_{j1}$ равны по абсолютной величине, то есть не зависит от выбора траектории движения.

Обозначая

$$F_j(\alpha_{j1}(t_0), \alpha_{j2}(t_0), \alpha_{j1}(T), \alpha_{j2}(T)) = \frac{R_j}{u_j^0} [\alpha_{j2}(t_0) - \alpha_{j2}(T_1)] + \frac{k_j^*}{u_j^0} [\alpha_{j1}(t_0) - \alpha_{j1}(T_1)] \quad (j = 1, 2, 3)$$

время движения в области S_{j1}^1 ($j = 1, 2, 3$) можно представить следующим образом

$$|T - t_0| = \begin{cases} F_j(\alpha_{j1}(t_0), \alpha_{j2}(t_0), \alpha_{j1}(T), \alpha_{j2}(T)), & \text{если } +u_j^0, -u_j^0 \\ -F_j(\alpha_{j1}(t_0), \alpha_{j2}(t_0), \alpha_{j1}(T), \alpha_{j2}(T)), & \text{если } -u_j^0, +u_j^0 \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3)$$

Полученный результат распространяется также для квазиоптимальных режимов управления манипулятором.

Аналогично с (2.8) строится решение задачи квазиоптимального синтеза управления в случае $\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j2}^l$ фиг.2.3

$$v_{j2}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^* \text{ на дуге } A_{j2}^l O_{j2} \text{ и в области } S_{j2}^l & (j = 1, 2, 3; \\ -(u_j^0 + w_j^*) \text{ на дуге } B_{j2}^l O_{j2} \text{ и в области } S_{j2}^l & (l = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (2.17)$$

При $l = 1, w_j^* = 0$ синтеза управления (2.17) является оптимальным.

В рассматриваемом случае, также, внутри области S_{j2}^l можно двигаться по законам (2.6) и (2.7) до попадания на линии переключения $A_{j2}^l O_{j2}$ и $B_{j2}^l O_{j2}$ соответственно. В области S_{j2}^l время движения также не зависит от выбора траектории. Напомним, что при $l = 1, w_j^* = 0, l = 2, w_j^* > 0, l = 3, w_j^* < 0$.

Обозначая синтезирующую функцию через $v_{j3}(\alpha_j, \dot{\alpha}_j)$, решение задачи квазиоптимального синтеза управления в случае $\Gamma_{j2}^l < \dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j1}^l$ ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$) представим в виде фиг.2.4

$$v_{j3}(\alpha_j, \dot{\alpha}_j) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^* \text{ ниже линии } A_{j3}^l O_{j3}, \text{ на дуге } A_{j3}^l O_{j3} \text{ и в } S_{j3}^l \\ -(u_j^0 + w_j^*) \text{ выше линии } B_{j3}^l O_{j3}, \text{ на дуге } B_{j3}^l O_{j3} \text{ и в } S_{j4}^l \end{cases} \quad (2.18)$$

Здесь S_{j3}^l - открытая область, ограниченная линиями $B_{j3}^l O_{j3}$ и Γ_{j1}^l , S_{j4}^l - линиями $A_{j3}^l O_{j3}$ и Γ_{j2}^l ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$), соответственно.

В рассматриваемом случае $\Gamma_{j2}^l < \dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j1}^l$ ($j = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$) управление (2.18) обеспечивает квазиоптимальное приведение в конечное состояние $O_{j3}(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ ($j = 1, 2, 3$) из любой точки фазовой плоскости (обслуживание манипулятором возможно при любой позиции элементов технологического процесса). При $w_j = 0, j = 1, 2, 3$, синтез управления $v_{j3}(\alpha_j, \dot{\alpha}_j), j = 1, 2, 3$ (2.18) является оптимальным по быстродействию.

2.2 Синтез обслуживания в случае $u_j^0 = w_j^*, w_j^* > 0 (j = 1, 2, 3)$. На отрезке времени, когда $\tilde{u}_j = 0 (\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*)$, фазовые траектории обслуживания представляют собой прямые линии (1.6), (2.3). Движение происходит без управления (по инерции) по фазовым прямым

$$\alpha_j(t) = \alpha_j^0 + \frac{R_j}{k_j^*} \omega_j^0 - \frac{R_j}{k_j^*} \dot{\alpha}_j \quad (2.19)$$

Из (2.19) следует, что функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ всюду монотонно убывает, поскольку $\partial \alpha_j / \partial \dot{\alpha}_j < 0$ ($j = 1, 2, 3$) (Фиг.2.5).

На отрезке времени, когда $\tilde{u} = -(u_j^0 + w_j^*)$, фазовые траектории обслуживания описываются уравнениями (2.3) и имеют вид

$$\alpha_j = \alpha_j^0 + \frac{2u_j^0}{k_j^{*2}} R_j \ln \frac{2u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j}{2u_j^0 + k_j^* \omega_j^0} + \frac{R_j}{k_j^*} (\omega_j^0 - \dot{\alpha}_j) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.20)$$

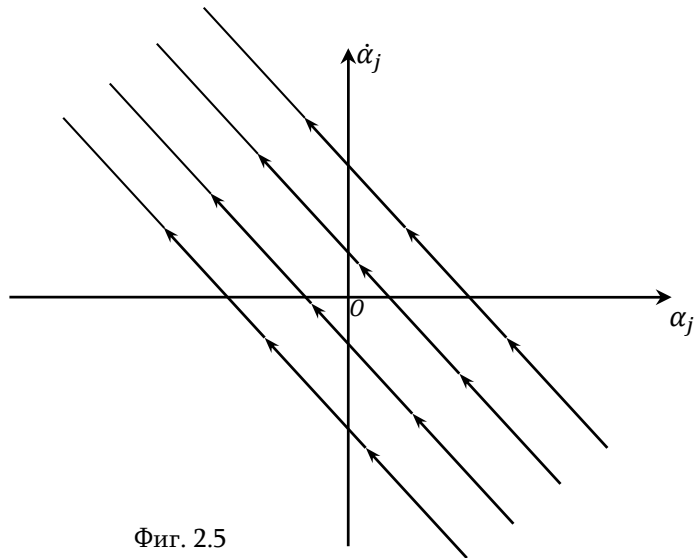
Здесь $\partial \alpha_j / \partial \dot{\alpha}_j = -R_j \dot{\alpha}_j / (2u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j)$ ($j = 1, 2, 3$).

Анализ фазовых кривых показывает, что в области, где $\dot{\alpha}_j > -2u_j^0/k_j^*$, $\omega_j^0 > -2u_j^0/k_j^*$, при $\dot{\alpha}_j < 0$ функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ (2.20) монотонно возрастает ($\partial \alpha_j / \partial \dot{\alpha}_j > 0, j = 1, 2, 3$), а при $\dot{\alpha}_j > 0$ — монотонно убывает ($\partial \alpha_j / \partial \dot{\alpha}_j < 0, j = 1, 2, 3$) (фиг. 2.6.). В области $\dot{\alpha}_j < -2u_j^0/k_j^*, \omega_j^0 < -2u_j^0/k_j^*$ функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ монотонно убывает, так как $\dot{\alpha}_j < 0$ ($\partial \alpha_j / \partial \dot{\alpha}_j < 0, j = 1, 2, 3$). Фазовые кривые (2.20) имеют асимптотику $\Gamma_j : \dot{\alpha}_j = -2u_j^0/k_j^* (j = 1, 2, 3)$, которые также являются фазовыми траекториями движения манипулятора.

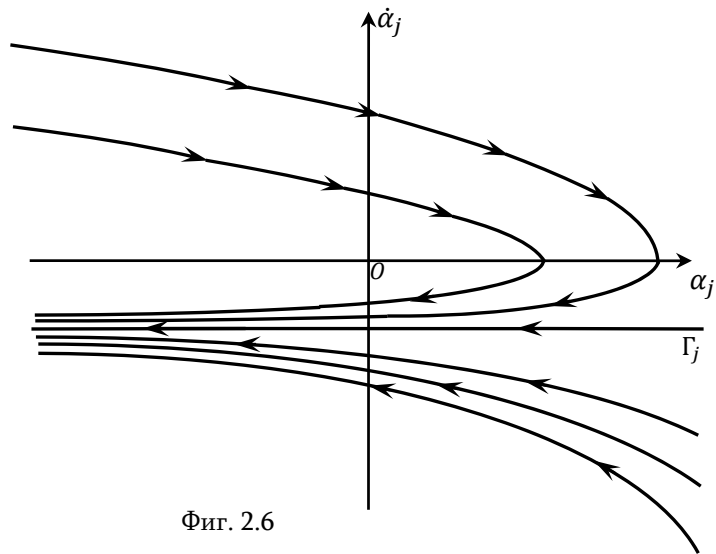
На фиг. 2.7 изображены все семейства полученных таким образом фазовых траекторий, приводящих манипулятор в конечное состояние, когда конечное состояние находится выше линии $\Gamma_j(\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_j)$ и ниже линии $\Gamma_j(\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_j)$. Фазовыми кривыми, приводящими манипулятор в фазовую точку $(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T) (j = 1, 2, 3)$ являются

$$\alpha_j = \alpha_j^T + \frac{2u_j^0}{k_j^{*2}} R_j \ln \frac{2u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j}{2u_j^0 + k_j^* \omega_j^0} + \frac{R_j}{k_j^*} (\dot{\alpha}_j^T - \dot{\alpha}_j) \quad (2.21)$$

$$\alpha_j(t) = \alpha_j^T + \frac{R_j}{k_j^*} \dot{\alpha}_j^T - \frac{R_j}{k_j^*} \dot{\alpha}_j \quad (2.22)$$



Фиг. 2.5



Фиг. 2.6

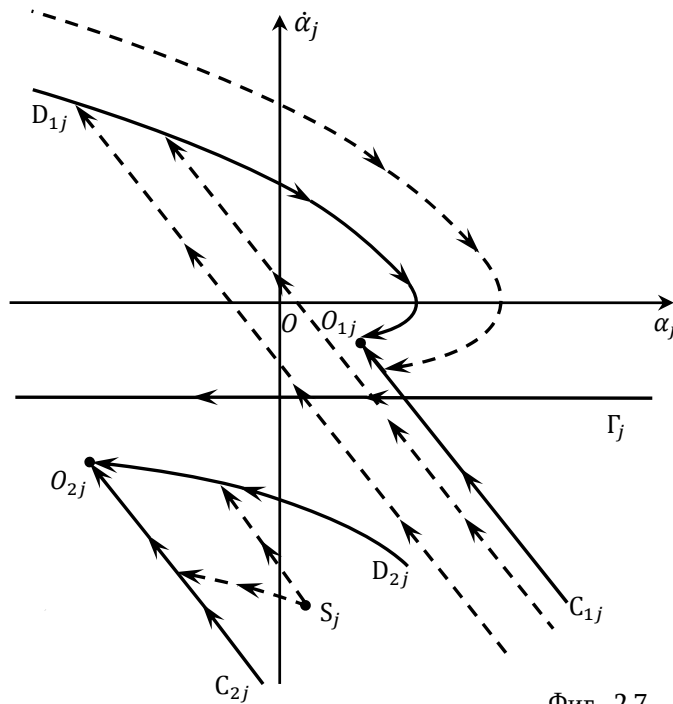
Обозначая через $v_{1j}(\alpha, \dot{\alpha})$ функцию, заданную на фазовой плоскости $(\alpha_j, \dot{\alpha}_j)$, решение задачи синтеза для рассматриваемого случая при $\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_j$ можно представить в виде

$$v_{1j}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} -2u_j^0 & \text{выше линии } C_{1j}O_{1j}D_{1j} \text{ и на дуге } D_{1j}O_{1j} \\ 0 & \text{ниже линии } C_{1j}O_{1j}D_{1j} \text{ и на линии } C_{1j}O_{1j} \end{cases}, (j = 1, 2, 3) \quad (2.23)$$

В случае $\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_j$, аналогично строится решение задачи синтеза

$$v_{2j}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} -2u_j^0 & \text{в области } S_j \text{ и на дуге } D_{2j}O_{2j} \\ 0 & \text{в области } S_j \text{ и на линии } C_{2j}O_{2j} \end{cases}, (j=1,2,3) \quad (2.24)$$

Здесь через S_j обозначена внутренняя открытая область на плоскости $(\alpha, \dot{\alpha})$, ограниченная между линиями $D_{2j}O_{2j}, C_{2j}O_{2j}$. Внутри области S_j решение задачи не зависит от чередования переключений управляющей функции, то есть в S_j можно двигаться по закону (2.19) и (2.20) до попадания на линии переключения $D_{2j}O_{2j}$ и $C_{2j}O_{2j}$, соответственно. После этого дальнейшее движение совершается по линии $D_{2j}O_{2j}$ или $C_{2j}O_{2j}$ до попадания в конечную точку O_{2j} ($j=1,2,3$). В случае $u_j^0 = w_j^*, w_j^* > 0$ на каждой траектории значение управляющей функции $\tilde{u}_j$, в зависимости от положения конечной точки, равно $v_{1j}(\alpha, \dot{\alpha})$ (2.23) и $v_{2j}(\alpha, \dot{\alpha})$ (2.24) соответственно.



Фиг. 2.7

2.3 Синтез оптимального обслуживания в случае $u_j^0 < w_j^*, w_j^* > 0 (j=1,2,3)$.

Рассмотрим частный случай, который также может возникнуть при решении задачи

обслуживания $u_j^0 < w_j^*, w_j^* > 0 (j=1,2,3)$. Фазовые траектории обслуживания (2.3), при $\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*$ являются

$$\alpha_j = \alpha_j^0 + \frac{w_j^* - u_j^0}{k_j^{*2}} R_j \ln \frac{w_j^* - u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j}{w_j^* - u_j^0 + k_j^* \omega_j^0} + \frac{R_j}{k_j^*} (\omega_j^0 - \dot{\alpha}_j), (j=1,2,3) \quad (2.25)$$

где $\partial \alpha / \partial \dot{\alpha} = -R_j \dot{\alpha}_j / (w_j^* - u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j)$.

В области $\dot{\alpha}_j > (u_j^0 - w_j^*) / k_j^*, \omega_j^0 > (u_j^0 - w_j^*) / k_j^*$ функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ (2.25) монотонно убывает при $\dot{\alpha}_j > 0$ и монотонно возрастает при $\dot{\alpha}_j < 0$.

В области, где $\dot{\alpha}_j < (u_j^0 - w_j^*) / k_j^*, \omega_j^0 < (u_j^0 - w_j^*) / k_j^*$, $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ - монотонно убывает. Фазовые кривые семейства (2.25) имеют асимптотику $\Gamma_{j1}^1 : \dot{\alpha}_j = (u_j^0 - w_j^*) / k_j^*$ фиг. 2.8.

При $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*) (u_j^0 < w_j^*, w_j^* > 0)$ семейства фазовых кривых имеют вид

$$\alpha_j = \alpha_j^0 + \frac{u_j^0 + w_j^*}{k_j^{*2}} R_j \ln \frac{u_j^0 + w_j^* + k_j^* \dot{\alpha}_j}{u_j^0 + w_j^* + k_j^* \omega_j^0} + \frac{R_j}{k_j^*} (\omega_j^0 - \dot{\alpha}_j), (j=1,2,3) \quad (2.26)$$

где $\partial \alpha / \partial \dot{\alpha} = -R_j \dot{\alpha}_j / (w_j^* + u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j)$.

Функция $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ (2.26) в области $\dot{\alpha}_j > -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*, \omega_j^0 > -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$ монотонно убывает при $\dot{\alpha}_j > 0$ и монотонно возрастает при $\dot{\alpha}_j < 0$.

В области, где $\dot{\alpha}_j < -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*, \omega_j^0 < -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$, $\alpha_j(\dot{\alpha}_j)$ (2.26) - монотонно убывает. Асимптотическими линиями для фазовых кривых семейства (2.26) являются $\Gamma_{j2}^1 : \dot{\alpha}_j = -(u_j^0 + w_j^*) / k_j^*$ фиг. 2.9.

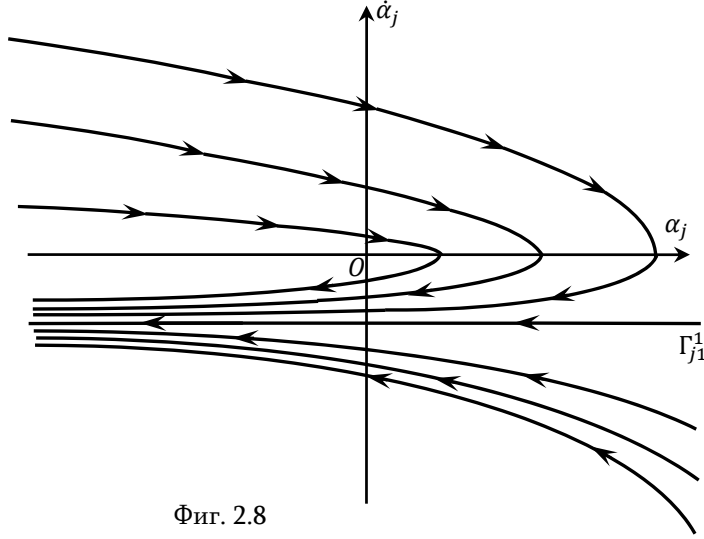
Фазовыми траекториями, проходящими через точку $(\alpha_j^T, \dot{\alpha}_j^T)$ при управлении $\tilde{u}_j = (u_j^0 - w_j^*)$ и $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$ являются

$$\alpha_j = \alpha_j^T + R_j k_j^{*-2} \left[(w_j^* - u_j^0) \ln \frac{w_j^0 - u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j}{w_j^0 - u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j^T} + k_j^* (\dot{\alpha}_j^T - \dot{\alpha}_j) \right], \quad (2.27)$$

$(\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*), (j=1,2,3)$

$$\alpha_j = \alpha_j^T + R_j k_j^{*-2} \left[(w_j^* + u_j^0) \ln \frac{w_j^0 + u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j}{w_j^0 + u_j^0 + k_j^* \dot{\alpha}_j^T} + k_j^* (\dot{\alpha}_j^T - \dot{\alpha}_j) \right], \quad (2.28)$$

$(\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)), (j=1,2,3)$



Фиг. 2.8

Из фиг. 2.8, 2.9 и формул (2.27), (2.28) следует, что в случае $u_j^0 < w_j^*$, $w_j^* > 0$ ($j = 1, 2, 3$) характер движения по фазовым траекториям (2.27) при $\tilde{u}_j = u_j^0 - w_j^*$ и движения по (2.28) при $\tilde{u}_j = -(u_j^0 + w_j^*)$ одинаков. На фиг. 2.10 изображены семейства фазовых траекторий обслуживания в случае $u_j^0 < w_j^*$, $w_j^* > 0$, когда конечная точка находится выше линии $\Gamma_{j1}^1(\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_{j1}^1)$, ниже линии $\Gamma_{j2}^1(\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j2}^1)$ и между линиями $\Gamma_{j1}^1, \Gamma_{j2}^1(\Gamma_{j2}^1 < \dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j1}^1)$ ($j = 1, 2, 3$) соответственно. При помощи функции $v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha}), v_{j2}(\alpha, \dot{\alpha}), v_{j3}(\alpha, \dot{\alpha})$ ($j = 1, 2, 3$) решение задачи синтеза квазиоптимального обслуживания можно представить в виде

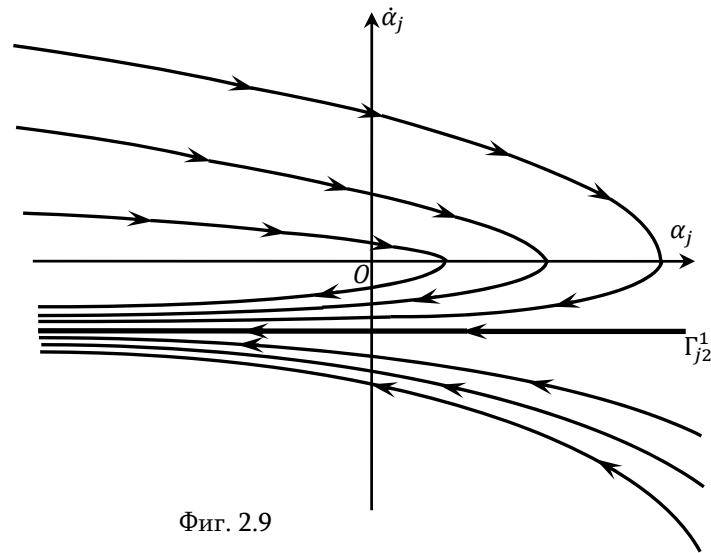
$$v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^* & \text{в области } S_{j1} \text{ и на дуге } E_{j1}O_{j1} \\ -(u_j^0 + w_j^*) & \text{в области } S_{j1} \text{ и на дуге } F_{j1}O_{j1} \end{cases}, (\dot{\alpha}_j^T > \Gamma_{j1}^1) \quad (2.29)$$

$$v_{j2}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^* & \text{в области } S_{j2} \text{ и на дуге } E_{j2}O_{j2} \\ -(u_j^0 + w_j^*) & \text{в области } S_{j2} \text{ и на дуге } F_{j2}O_{j2} \end{cases}, (\dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j2}^1) \quad (2.30)$$

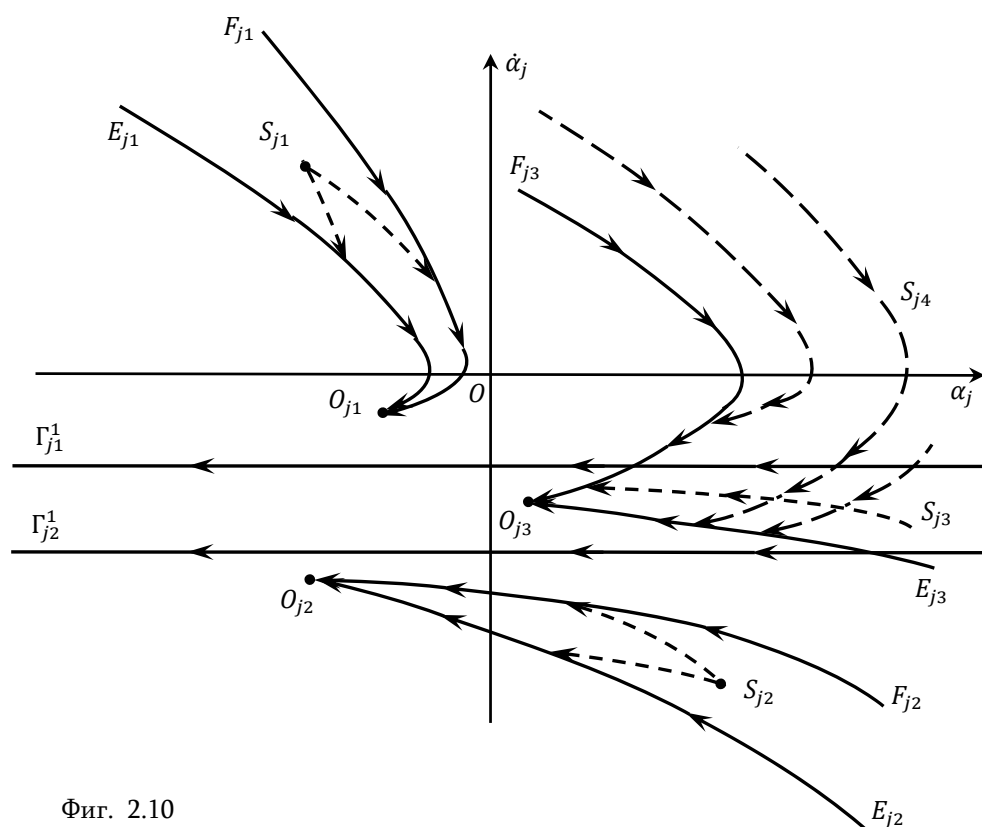
$$v_{j3}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{cases} u_j^0 - w_j^* & \text{в области } S_{j3} \text{ и на дуге } E_{j3}O_{j3}, \quad (\Gamma_{j2}^1 < \dot{\alpha}_j^T < \Gamma_{j1}^1) \\ -(u_j^0 + w_j^*) & \text{в областях } S_{j3}, S_{j4} \text{ и на дуге } F_{j3}O_{j3} \end{cases} \quad (2.31)$$

Здесь $S_{j1}, S_{j2}, S_{j3}, S_{j4}$ – открытые области, ограниченные линиями $E_{j1}O_{j1}$ и $F_{j1}O_{j1}$; $E_{j2}O_{j2}$ и $F_{j2}O_{j2}$; $E_{j3}O_{j3}, F_{j3}O_{j3}$ и Γ_{j1}^1 ; $F_{j3}O_{j3}$ и Γ_{j1}^1 соответственно.

В областях $S_{j1}, S_{j2}, S_{j3}, S_{j4}$ решение задачи квазиоптимального обслуживания не зависит от чередования управляющей функции. Внутри этих областей можно двигаться по законам (2.25) и (2.26) до попадания на линии переключения, а дальше двигаться по этим линиям. Из решения следует, что в рассматриваемом случае задачи квазиоптимального обслуживания по быстродействию манипулятором конвейеров имеет решение только для тех начальных условий, которые находятся в областях $S_{j1}, S_{j2}, S_{j3}, S_{j4}$ и на линиях переключения. По аналогии с п.2.1 можно доказать, что внутри этих областей время движения не зависит от чередования выбора управляющей функций, а определяется фазовыми координатами начальной и конечной точек. В зависимости от положения конечной точки на каждой траектории значение управляющего параметра $\tilde{y}_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) (в произвольный момент времени t) равно $v_{j1}(\alpha, \dot{\alpha}), v_{j2}(\alpha, \dot{\alpha})$ или $v_{j3}(\alpha, \dot{\alpha})$ из (2.29)–(2.31).



Фиг. 2.9



Фиг. 2.10

Заключение. Построена математическая модель управляемого технологического процесса, которая состоит из адаптивного электромеханического манипулятора, конвейеров и тележки с деталями. Предполагая, что манипулятор с помощью датчика усилий, определяя по деформации упругих элементов, вес детали, на каждом этапе осуществляет квазиоптимальное по времени обслуживание непрерывной работы определенных конвейеров с учетом внешних или внутренних факторов. Составлено приближенное уравнение движения манипулятора и с помощью принципа максимума исследованы различные варианты синтеза квазиоптимального и оптимального обслуживания на каждом этапе, которые могут иметь место в рамках рассматриваемой модели. При разных соотношениях между управляющей функцией и различными факторами, построены качественные картины фазовых траекторий движения манипулятора и определены управляющие функции в зависимости от фазовых координат. На фазовой плоскости выделены те области, в рамках которых возможно оптимальное обслуживание конвейеров. В

рамках принятой модели технологического процесса возможны также другие постановки задачи обслуживания с применением манипуляционных роботов, которые могут иметь определенный интерес с точки зрения технологического назначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989, 363 с.
2. Хватов Б.Н. Гибкие производственные системы. Расчет и проектирование. Тамбов, Изд. ТГТУ, 2007, 117с.
3. Иванов А.А. Проектирование системы автоматизированного машиностроения. Изд. «Инфра-М. Форум», 2004.
4. Соломенцев Ю.М. Технологические основы гибких производственных систем. 2000. pdf.
5. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004, 478 с.
6. Динамика управления роботами. /Под. редакцией Е.И.Юревича. М.: Наука, 1984, 336 с.
7. Козырев Ю.Г. Промышленные роботы. Справочник. М.: Машиностроение, 1988. 392 с.
8. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979, 615 с.
9. К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли Робототехника. М.: Мир, 1989. 620 с.
10. Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом. Известия АН Арм. ССР, Механика, т.39, №6, 1986, с.39-49.
11. Гукасян А.А. Об управляемости процесса многоэтапного обслуживания технологического участка манипулятора с векторным управлением. Доклады НАН Армении. 2021. Т.121. № 3. с.181-191.
12. Гукасян А.А. О математическом моделировании процесса обслуживания и условия ее управляемости. Изв. НАН РА, Механика. 2017. Т. 70. №3. С. 26-38.
13. A. A. Ghukasyan and A. Ya. Ordyan On a model of the processes of maintaining a technological area by a manipulator. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012026 doi: 10.1088/1742-6596/991/1/01202. 5th International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics with a Special Session in Honor of Alexander Manzhirrov's 60th Birthday 2–7 October 2017, Tsakhkadzor, Armenia: Accepted papers received: 15 March 2018 Published online: 13 April 2018.
14. Гукасян А.А. Обобщенная модель многоэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса и условия управляемости. Изв. НАН РА, Механика. 2022. Т. 75. №1,2. С. 67-84.
15. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968, 475 с.
16. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978, 551 с.
17. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 574 с.

18. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983, 392с.
19. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. //Известия НАН РА, Механика, №1, 2002, с.75-81.
20. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Задача оптимального управления движением точки переменной массы. //В сборнике научных трудов “Математический анализ и его приложения” АГПУ им. Х.Абовяна, Ереван 2003, вып.3, с.29-40.
21. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов. // Изв. АН СССР, МТТ, №4, 1986, с.21-29.
22. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272с.

Сведения об авторе:

Гукасян А.А. – Доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Республики Армения, **E-mail:** ghukasyan10@yandex.com.

Поступила в редакцию 4 октября 2022

**СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОДНИМ
СВОБОДНЫМ КРАЕМ, РАСТЯНУТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА, ПРИ НАЛИЧИИ
СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ**

Мартirosян С. Р.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка умеренных размеров, растягивающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, панельный флаттер, дивергенция панели, локализованная дивергенция, аналитический метод решения

S.R. Martirosyan

Supersonic flutter of a rectangular plate with one free edge, stretched along the gas flow, in the presence of pointed inertial masses and moments

Keywords: moderately sized rectangular plate, tensile forces, supersonic flow, aeroelastic stability, pointed inertial masses and moments, panel flutter, panel divergence, localized divergence, analytical solution method

In a linear formulation, the problem of aeroelastic stability of the "plate-flow" dynamic system is studied under the assumption that pointed masses and moments are applied on the free edge of a rectangular plate, initially stretched along a supersonic gas flow. An analytical solution of the stability problem is found. It has been established that the initial stress state due to tensile forces in a supersonic flow leads to a significant stabilization of the unperturbed motion of the system.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային զագի հոսքի ուղղությամբ նախնական ձգված ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին, որում սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ

Հիմնաբանը՝ միջին չափերի ուղղանկյուն սալ, ձգող ուժեր, աերոառաձգական կայունություն, գերձայնային շրջհոսում, պանելային և տեղայնացված դիվերգենցիա, պանելային ֆլատեր, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ

Գծային դրվածքով ուսումնասիրված է մեկ ազատ եզրով առաձգական ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի՝ պայմանավորված գերձայնային զագի հոսքով ուղղված ձգող ուժերով, ազդեցությունը «սալ-հոսք» դինամիկ համակարգի չխոտորված շարժման կայունության վրա: Ստացված է դինամիկական համակարգի կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը երբ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ:

Ցույց է տրված ընդլայնական ձգող ուժերի զգալի կայունացնող ազդեցությունը «սալ-հոսք» դինամիկական համակարգի վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния прямоугольной упругой пластинки умеренных размеров с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, на устойчивость невозмущённого движения динамической системы «пластинка-поток» в предположении, что на её свободном крае имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение задачи устойчивости динамической системы.

Показано существенное стабилизирующее действие первоначальных продольных сил растяжения на динамическую систему «пластинка-поток».

Введение. Как известно [1, 2], рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение. Вопрос об упругой устойчивости панелей обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки, неизбежно возникает на этапе проектирования и конструирования любого летательного аппарата для обеспечения безопасности полета. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а также, дать оценку влияния комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

Исследованию задач аэроупругой устойчивости пластин и оболочек посвящено огромное количество работ, обзор которых, в основном, содержится в монографиях и статьях [1– 6]. Однако в этих работах, в основном, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой статье, в отличие от вышеуказанных работ, с помощью алгоритма, подробно изложенного в работе [16], получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» вблизи границ области устойчивости при следующих предположениях. Рассматриваемая прямоугольная пластинка умеренных размеров с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, первоначально растянутая силами, равномерно распределёнными по её длине, обтекается сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край, вдоль которого приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота.

Установлено, что при малых значениях параметра отношения ширины пластинки (сторона пластинки по потоку) к её длине невозмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет как статическую, так и динамическую устойчивость, соответственно, в виде дивергенции панели (эйлеровой и неэйлеровой) и в виде панельного флаттера. А при больших значениях параметра отношения сторон прямоугольной пластинки – теряет только статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели или в виде локализованной дивергенции.

Показано, что критические скорости дивергенции, локализованной дивергенции и флаттера являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения растягивающих сил. Соответственно, предварительное напряжённое состояние пластинки умеренных размеров, обусловленное продольными растягивающими силами, приводит к существенному повышению устойчивости системы «пластинка–поток», в сравнении с системой с ненагруженной панелью [16].

Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости в смысле Н.Н. Баутина [14]. При переходе через «опасные» границы происходит потеря прочности и возникновение усталостных трещин в материале пластинки [1, 2].

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка умеренных размеров, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$: $ab^{-1} \in (0.193, 1.96)$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости

невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 10–13].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; растягивающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где

a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [7, 8]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp , растягивающими усилиями σ_x в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c , приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что усилия σ_x малы по сравнению с предельным значением $(\sigma_x)_{pr.}$, которое не превосходит нижнюю границу текучести; $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [1, 11, 13].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности растянутой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [7, 8] будет описываться соотношением [1, 2, 6]:

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y, t); \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2, 9, 10]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad (1.2)$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b; \quad (1.4)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2\cos m.} \approx 33.85; \quad (1.5)$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr}. \quad (1.6)$$

Здесь, M_0 и $M_{2\cos m.}$ – граничные значения числа Маха M , соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]. Анализ устойчивости невозмущённого движения динамической системы “пластинка – поток” (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале скоростей потока газа (1.5) при условии (1.6).

Заметим, что в статье, с целью получения возможности аналитического исследования рассматриваемой задачи устойчивости, в дифференциальном уравнении (1.1)

интенсивность распределённой массы пластинки $m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ условно заменена

интенсивностями $m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ и $I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$, учитываемых в граничных условиях (1.2),

соответственно, приложенных вдоль свободного края пластинки $x = 0$ сосредоточенных масс m_c и моментов поворота I_c [1, 2, 9–13]. Такая замена, вовсе, не приводит к искажению динамической картины явления – потери устойчивости системы; быть может, с точностью до численных значений критических скоростей потока газа, которые могут быть несколько завышенными [9, 10, 13, 16].

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать для прямоугольных пластин умеренных размеров:

$$\gamma = ab^{-1} \in (0.193; 1.96), \quad (1.7)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

В работе [16] получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» в отсутствии предварительного напряжённого состояния пластинки.

В работе [17], следуя методу Эйлера, получено решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4) в статической постановке при $\gamma \in [0, \infty]$.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости динамической системы (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\text{Re} \lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re} \lambda > 0$) [15]. Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости невозмущённого движения системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\text{Re} \lambda = 0$) [1, 2, 15].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток», описываемое алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$r^4 - 2 \cdot (1 + \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0, \quad (2.2)$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \quad (2.3)$$

β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2}, \quad \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}; \quad (2.4)$$

$(\beta_x^2)_{pr}$ – значение коэффициента напряжения β_x^2 , соответствующее $(\sigma_x)_{pr}$.

Ясно, что

$$\alpha_n^3 \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3}, a_0^2 \rho_0 M_{2\cos m} D^{-1} \mu_n^{-3}), \quad (2.5)$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.3).

Характеристическое уравнение (2.2) подробно исследовано в работе [17]. В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2), как алгебраическое уравнение четвёртой степени, можно представить в виде произведения двух квадратных трёхчленов:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q - \sqrt{q^2-1}\right) \left(r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q + \sqrt{q^2-1}\right) = 0, \quad (2.6)$$

где q – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8 \cdot (q+1+\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0, \quad q \in R. \quad (2.7)$$

Согласно обозначению (2.3), отсюда следует, что параметр q характеризует скорость V потока газа при фиксированных значениях остальных параметров системы: $q = q(V) \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m}))$, в силу условия (1.5).

В работе [17] с помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), записанного в эквивалентной форме (2.6), найден «допустимый» интервал значений параметра $q = q(V)$:

$$q \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})), \quad q_0 = \left(-(\beta_x^2 + 1) + 2\sqrt{(\beta_x^2 + 1)^2 + 3}\right)/3 \quad (\text{табл. 1}) \quad (2.8)$$

для всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}$.

Таблица 1.

β_x^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	2.0	5.0	10.0
q_0	1	1.010	1.027	1.065	1.097	1.309	2.163	3.757

Из данных таблицы 1 следует, что функция $q_0 = q_0(\beta_x^2)$ является монотонно возрастающей в интервале $\left[0, (\beta_x^2)_{pr}\right)$.

При значениях (2.8) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ и пару комплексно-сопряжённых $r_{3,4} \in W$ корней, являющихся решением квадратных уравнений – приравненных нулю сомножителей уравнения (2.6) [17]:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}, \quad r_1 < 0, \quad r_2 < 0; \quad (2.9)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}, \quad q \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})) \quad (2.10)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9) и (2.10), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y). \quad (2.11)$$

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток» [17]:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \quad \gamma \in (0.193; 196). \quad (2.12)$$

Эта формула позволяет по известному значению параметра $q = q(n, \gamma, \beta_x^2, \nu)$ определить приведённую скорость потока газа $V(q) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$.

В силу условия (1.5), из выражения (2.12) следует, что

$$V(q) \in (V(q_0), a_0 M_{2\cos m.}) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), V(q_0) \geq a_0 M_0; \quad (2.13)$$

$$V(q) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), V(q_0) < a_0 M_0. \quad (2.14)$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = \frac{E \cdot (2h)^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$ соотношения (2.13) и (2.14) для приведённой скорости $V(q) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ запишутся, соответственно, в виде [17]:

$$V(q) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (V(q_0) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m.} \Psi) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}) \Psi; \quad (2.15)$$

$$V(q) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}) \Psi, \quad (2.16)$$

где

$$\Psi = 12(1 - \nu^2) a_0 \rho_0 E^{-1} (2ha^{-1})^{-3}, M_0 = \sqrt{2}, M_{2\cos m.} \approx 33.85. \quad (2.17)$$

Подставляя значения относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ пластинки в выражения (2.15)–(2.17), получаем $d(2ha^{-1}, \nu) = (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}) \Psi$ – соответствующие интервалы допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ потока, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5), приведённые в таблице 2 для стальных пластинок.

Из данных таблицы 2 следует, что интервалы $d(2ha^{-1}, \nu)$ с ростом относительной толщины $2ha^{-1}$ пластинки уменьшаются, примерно, в 15.6 раз при всех фиксированных значениях ν , а с ростом коэффициента Пуассона ν – уменьшаются в 1.32 раза при фиксированных значениях параметра $2ha^{-1}$.

Таблица 2.

$\begin{matrix} \nu \\ 2ha^{-1} \end{matrix}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81,1311.78)	(52.03,1245.27)	(50.52,1208.98)	(47.70,1141.58)	(41.63,996.35)
0.010	(11.84,283.45)	(11.24,269.09)	(10.91,261.25)	(10.30,246.70)	(8.99,215.32)
0.012	(6.85,164.01)	(6.50,155.72)	(6.32,151.20)	(5.96,142.69)	(5.20,124.60)
0.015	(3.51,84.04)	(3.33,79.73)	(3.23,77.33)	(3.05,73.10)	(2.67,63.81)

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4). Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.9) и (2.10), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель – после несложных преобразований описывается в виде биквадратного уравнения относительно собственного значения λ :

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2) \lambda^2 + A_3 = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \quad \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \quad \delta_n > 0, \quad \chi_n > 0, \quad (3.2)$$

приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$\begin{aligned} A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) &= \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left(1 - e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma} \right) B_1 B_2 - \\ &- 2B_2 \left(q+1+\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1} \right) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma} \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) - \\ &- 2B_1 \left(q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1} \right) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma} \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \sin(\pi n \gamma B_2); \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} A_1 = A_1(q, n, \gamma, \beta_x^2) &= \\ &= 2(q+1+\beta_x^2) \left[\left(q - \sqrt{q^2-1} \right) + \left(q + \sqrt{q^2-1} \right) e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma} \right] B_1 B_2 + \\ &+ 2B_2 \left[\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} (q^2-1) \cdot \left(q+1+\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1} \right) \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) + \right. \\ &+ 2B_1 \left((2q-1)(q+1) + q\beta_x^2 \right) \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \left. \right] \cos(\pi n \gamma B_2) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma} + \\ &+ 2 \left[B_1 \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} (q^2-1) \left(q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1} \right) \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) + \right. \\ &+ \left. \left(q+1+\beta_x^2 \right) \left(q-1+q\beta_x^2 \right) \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) \right] \sin(\pi n \gamma B_2) \cdot e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma}; \end{aligned} \quad \text{h(3.4)}$$

$$\begin{aligned} A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) &= 2(q+1+\beta_x^2) \left(1 + e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma} \right) B_1 B_2 - \\ &- 4(q+1+\beta_x^2) B_1 B_2 \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma} + \end{aligned}$$

$$+2\left(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4\right)\text{sh}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma}; \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} A_3 = A_3(q, n, \gamma, v, \beta_x^2) = & \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left\{ \left(q+1-\sqrt{q^2-1} \right)^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 + \right. \\ & + 2\beta_x^2 \left(q-\sqrt{q^2-1} \right) \Big\} B_1 B_2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left\{ \left(q+1+\sqrt{q^2-1} \right)^2 - 2(q+1)v - \right. \\ & - (1-v)^2 + 2\beta_x^2 \left(q+\sqrt{q^2-1} \right) \Big\} B_1 B_2 e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma} + \\ & + 2B_2 e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma} \left\{ \left[\left(4q^2+2q-1 \right) \sqrt{q^2-1} + \left(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2 \right) \beta_x^2 - \right. \right. \\ & - \left(2q^2-4q+1 \right) (q+1) - 2 \left((2q-1)(q+1) - q\sqrt{q^2-1} + q\beta_x^2 \right) v + \\ & + \left. \left. \left(q+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1} \right) v^2 \right] \text{sh}(\pi n\gamma B_1) + \right. \\ & + 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}(q^2-1)(q+1+\beta_x^2)B_1 \text{ch}(\pi n\gamma B_1) \Big\} \cos(\pi n\gamma B_2) + \\ & + 2e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma} \left\{ -B_1 \left[\left(4q^2+2q-1 \right) \sqrt{q^2-1} + \left(2q^2-4q+1 \right) (q+1) - \right. \right. \\ & - \left(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2 \right) \beta_x^2 + 2 \left((2q-1)(q+1) + q\sqrt{q^2-1} + q\beta_x^2 \right) v - \\ & - \left. \left. \left(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1} \right) v^2 \right] \text{ch}(\pi n\gamma B_1) - \right. \\ & - \left. \left. \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}(q^2-1) \left(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4 \right) \text{sh}(\pi n\gamma B_1) \right\} \sin(\pi n\gamma B_2); \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$B_1 = \sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1-\beta_x^2)}, \quad B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1-\beta_x^2)}. \quad (3.7)$$

При всех допустимых значениях параметра скорости $q = q(V)$ (2.8) и коэффициента напряжения $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}$, очевидно, что $B_1 = B_1(q, \beta_x^2) > 0$ и $B_2 = B_2(q, \beta_x^2) > 0$, откуда следует справедливость неравенств:

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0, \quad A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0, \quad n \geq 1, \gamma \in (0.193, 1.96). \quad (3.8)$$

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c (\pi n \gamma)^2 \cdot (m_c a^2)^{-1}, \quad (3.9)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.8), переписывается в виде

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2) \chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0, \quad \delta_n > 0, \chi_n > 0, k_n > 0. \quad (3.10)$$

Заметим, что непосредственной подстановкой значения $\beta_x^2 = 0$ в уравнение (3.10) можно убедиться в его тождественности соответствующему дисперсионному уравнению, полученному в работе [16].

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.10), определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров $\mathfrak{T} = \{q(V), n, \gamma, v, \beta_x^2, k_n\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение системы. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Введём в рассмотрение в пространстве параметров $\mathfrak{T}$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\mathfrak{T}_0$ и области неустойчивости $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$. В области $\mathfrak{T}_0$ все корни λ_k уравнения (3.10) находятся в левой части комплексной плоскости ($\text{Re } \lambda_k < 0$); в областях $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ и $\mathfrak{T}_3$, соответственно, либо среди корней λ_k имеется один положительный корень, либо имеются два положительных корня, либо имеется пара комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью [15].

Область устойчивости $\mathfrak{T}_0 \in \mathfrak{T}$ будет определяться соотношениями:

$$k_n A_1 + A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \Delta > 0; \quad (4.1)$$

а области неустойчивости $\mathfrak{T}_l, l = \overline{1, 3}$ – соответственно, соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1: & k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 < 0, \Delta > 0 \quad \text{и} \quad k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 < 0, \Delta > 0; \\ \mathfrak{T}_2: & k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0; \\ \mathfrak{T}_3: & k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta < 0 \quad \text{и} \quad k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta < 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь Δ – дискриминант характеристического определителя (3.10):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, v, \beta_x^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3. \quad (4.3)$$

В области устойчивости $\mathfrak{T}_0$ уравнение (3.10) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

В области $\mathfrak{T}_1$ характеристический определитель (3.10) имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$ (из двух собственных движений пластинки, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2 , одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону). В силу этого, прогибы пластинки будут возрастать во времени по экспоненциальному закону: в области $\mathfrak{T}_1$ имеет место эйлерова дивергенция панели [1, 2, 13].

В области $\mathfrak{Z}_2$ уравнение (3.10) имеет четыре действительных корня λ_i – два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$): из четырёх собственных движений пластинки два затухают, а остальные два неограниченно отклоняются по экспоненциальному закону. Тем самым, невозмущённое движение системы в области $\mathfrak{Z}_2$ так же, как и в области $\mathfrak{Z}_1$, является статически неустойчивым: имеет место дивергенция панели. Однако, в отличие от области $\mathfrak{Z}_1$, в области $\mathfrak{Z}_2$ явление дивергенции более ярко выражено: имеет место не эйлерова дивергенция панели [13].

В области $\mathfrak{Z}_3$ характеристическое уравнение (3.10) имеет, по крайней мере, два комплексно-сопряжённых корня с положительной вещественной частью. Невозмущённое движение системы теряет динамическую устойчивость: имеет место панельный флаттер – колебания пластинки по нарастающей амплитуде.

Границами области устойчивости $\mathfrak{Z}_0$ системы «пластинка-поток» в пространстве её параметров $\mathfrak{Z}$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности [12 – 15]:

$$A_3 = 0; \quad (4.4)$$

$$\Delta = 0. \quad (4.5)$$

Характеристическое уравнение (3.10) на гиперповерхности (4.4) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности (4.5) – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

На границе (4.4) области устойчивости $\mathfrak{Z}_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ невозмущённое движение системы «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость или в виде эйлеровой дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, соответственно, при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ и $V \geq V_{locdiv.}$, в зависимости от значений параметров γ , ν и β_x^2 .

Заметим, что уравнение (4.4) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [17] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой растянутой панели в статической постановке с помощью метода Эйлера.

Критические скорости дивергенции панели $\{V_{cr.div.}^{(1)}, V_{cr.div.}^{(2)}\}$, определяемые подстановкой, соответственно, первого $q_{cr.div.}^{(1)}$ и третьего $q_{cr.div.}^{(3)}$ корней уравнения (4.4) в формулу (2.12), разграничивают область устойчивости $\mathfrak{Z}_0$ и область эйлеровой дивергенции $\mathfrak{Z}_1$. При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k , вызывающий плавное изменение характера невозмущённого движения системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде дивергенции панели. Это приводит к соответствующему изменению динамического поведения растянутой

прямоугольной пластинки в потоке газа: в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Так как монотонное «выпучивание» пластинки не имеет колебательного характера, то может рассматриваться как квазистатический процесс – дивергенция панели.

Как оказалось, в соответствии с численными результатами, для всех $\gamma \in [1.3, 1.96)$ при условии $\beta_x^2 \geq (\beta_x^2)_{gr.} = (\beta_x^2)_{gr.}(\gamma, \nu)$ система теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции – дивергенции, локализованной в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки, подобно полубесконечной пластине–полосе ($\gamma = \infty$) [17]. При этом уравнение (4.4) имеет единственное решение $q = q_{locdiv}$, подставлением которого в формулу (2.12), получаем критическую скорость локализованной дивергенции V_{locdiv} . При скоростях потока газа $V \geq V_{locdiv}$ «выпучивается» окрестность свободного края $x = 0$ пластинки. Функция $(\beta_x^2)_{gr.} = (\beta_x^2)_{gr.}(\gamma, \nu)$ является монотонно убывающей от $\gamma \in [1.3, 1.96)$ и слабо убывающей от коэффициента Пуассона ν . Значения $(\beta_x^2)_{gr.}(\gamma, \nu)$ разграничивают область $\mathfrak{I}_1$ на две подобласти: $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_{div.} \cup \mathfrak{I}_{locdiv}$ [17].

Критические скорости не эйлеровой дивергенции $\{V_{1,2}\}$ разграничивают области $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_2$: при скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит “мягкий” переход из области эйлеровой дивергенции $\mathfrak{I}_1$ в область не эйлеровой дивергенции $\mathfrak{I}_2$.

На границе (4.5) области устойчивости $\mathfrak{I}_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а так же, на границе (4.5) области дивергентной неустойчивости $\mathfrak{I}_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, невозмущённое движение системы при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ теряет динамическую устойчивость в виде панельного флаттера.

Критические скорости панельного флаттера $\{V_{cr.fl.}^{(1)}\}$, соответствующие первому корню $q_{cr.fl.}^{(1)} \in (q_0, \infty)$ уравнения (4.5) и подсчитанные по формуле (2.12), в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n$ разграничивают, или области устойчивости $\mathfrak{I}_0$ и флаттерной неустойчивости $\mathfrak{I}_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, или области дивергентной неустойчивости $\mathfrak{I}_2$ и флаттерной неустойчивости $\mathfrak{I}_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$. В обоих случаях, при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям – к колебаниям по нарастающей амплитуде.

Однако, в первом случае плоская по форме пластинка начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния, а во втором случае –

«выпученная» (изогнутая) пластинка. Соответственно, переходы $\mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ определяют «опасные границы» областей $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_2$ [1, 2, 13, 14].

Критические скорости дивергенции $V_{cr.div.}$, $V_{1,2}$, локализованной дивергенции $V_{locdiv.}$ и панельного флаттера $V_{cr.fl.}$, определяются по формуле (2.12) с достаточной точностью.

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо-аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_y^2, k_n)\} \in \mathfrak{S}$, параметризованных надлежащим образом в пространстве $\mathfrak{S}$. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому, ограничимся иллюстрацией типичных случаев, выделяя наиболее представительные из этого семейства кривых (таблицы 3 – 15). При этом, численные расчеты, проведённые для различных значений числа полуволн n , показали, что при фиксированных значениях остальных параметров системы критические скорости дивергенции и флаттера являются возрастающими функциями от n : их наименьшему значению соответствует $n = 1$.

Следует отметить, что несмотря на существенную зависимость качественных характеристик поведения возмущённого движения системы от параметра $\gamma \in (0.193; 1.96)$, тем не менее, можно выделить три интервала значений γ : $(0.193, 0.33)$, $[0.33, 0.74)$ и $[0.74, 1.96)$, в которых поведение невозмущённого движения системы можно принять, примерно, одинаковым. Для наглядной иллюстрации динамики состояния системы в указанных интервалах, составлены соответствующие цепочки переходов состояний системы из области $\mathfrak{S}_l \subset \mathfrak{S}$ в область $\mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{S}$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5).

5.1. Для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в интервале $\gamma \in (0.193, 0.33)$ невозмущённое движение системы «пластинка–поток» при малых значениях коэффициента напряжения $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{\min}$ неустойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5): имеет место эйлерова дивергенция панели (область $\mathfrak{S}_1$). Начиная со значения $\beta_x^2 = (\beta_x^2)_{\min}$ – становится устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ (табл. 3).

Таблица 3.

$2ha^{-1}$	0.006	0.01	0.012	0.015
$(\beta_x^2)_{\min}, \gamma = 0.2$	22.06	5.34	2.96	1.21
$(\beta_x^2)_{\min}, \gamma = 0.3$	9.78	1.89	0.82	0.04

Значения функции $(\beta_x^2)_{\min}(\gamma, 2ha^{-1})$ найдены из сопоставления критической скорости эйлеровой дивергенции $V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ с данными таблицы 2.

Из данных таблицы 3 следует, что функция $(\beta_x^2)_{\min} = (\beta_x^2)_{\min}(\gamma, 2ha^{-1})$ является убывающей функцией от параметра $\gamma \in (0.193, 0.33)$ при фиксированных значениях параметра $2ha^{-1}$: с ростом γ , примерно в 1.7 раз, значение функции $(\beta_x^2)_{\min}$ уменьшается более, чем на порядок. Влияние коэффициента Пуассона ν на пороговое значение коэффициента напряжения $(\beta_x^2)_{\min}$ исчезающе мало.

Соответственно, цепочки переходов состояний системы будут вида:

$$(\mathfrak{T}_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.fl.}^{(1)}} \mathfrak{T}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{T}_1, \quad k_1 < 0.4; \quad (5.1)$$

$$(\mathfrak{T}_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{T}_2 \xrightarrow{V_{cr.fl.}^{(1)}} \mathfrak{T}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{T}_1, \quad k_1 \geq 0.4. \quad (5.2)$$

Здесь, в соответствии с обозначением (3.9), $k_1 = I_c \pi^2 \gamma^2 (m_c a^2)^{-1}$.

Справедливо равенство $V_0 = V_{1,2}$: приведённые скорости $V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ исчисляются подстановкой второго корня уравнения (4.4) в формулу (2.12). При этом, при малых $k_1 < 0.4$ имеет место переход $\mathfrak{T}_0 \rightarrow \mathfrak{T}_3$, а при больших $k_1 \geq 0.4$ – переход $\mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_3$, соответственно, при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}^{(1)}$ при $k_1 < 0.4$ начинает совершать автоколебания «плоская» пластинка, а при $k_1 \geq 0.4$ – «изогнутая» пластинка.

Таблица 4.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	88.199	91.350	93.746	99.521	110.399	119.662
и	89.786	93.198	95.477	101.138	112.594	123.661
$V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	90.435	93.877	96.186	101.887	113.373	125.003
	91.422	95.283	97.230	103.014	114.725	126.351
	93.088	96.685	99.064	105.028	117.027	129.058

Таблица 5.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	–	5.014	5.830	7.931	12.165	16.905
		4.473	5.278	7.349	11.701	16.280
		4.255	5.051	7.114	11.416	16.046
		3.925	4.716	6.760	11.061	15.658
		3.362	4.156	6.156	10.423	14.962

В таблицах 4 – 7 приведены численные результаты для $\gamma = 0.3$. При этом, данные таблиц 4–6 соответствуют значениям $\nu = 0.125; 0.25; 0.3; 0.375; 0.5$, а таблицы 7 – $\nu = 0.3$.

Из данных таблиц 5–7 следует, что в интервале $\gamma \in (0.193, 0.33)$ для пластинок из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν критические скорости $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ убывают, соответственно, на 12% и 3%, а $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ – возрастают на 2.3% и 1.4% соответственно.

Таблица 6.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	491.454	496.671	499.942	508.448	524.871	541.357
	481.234	486.017	489.200	496.800	512.453	528.588
	477.171	481.876	485.009	492.586	508.194	523.637
	471.210	475.772	478.745	486.288	501.404	515.920
	461.463	465.992	468.716	475.852	490.225	503.990

Таблица 7. Значения $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\nu = 0.3$

$k_1 \backslash \beta_x^2$	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
0.1	110.408	117.187	121.950	135.203	176.729	–
0.3	90.437	93.853	95.972	102.012	114.674	127.567
0.5	93.451	96.293	98.400	103.516	114.023	125.003
1.0	104.255	106.889	108.818	113.468	122.844	132.469
2.0	118.049	120.733	122.481	127.192	136.401	145.828
5.0	134.647	137.594	139.423	144.213	153.840	163.684
10.0	144.330	147.348	149.364	154.413	164.421	174.803

На промежутке $\beta_x^2 \in [0, 3]$ критические скорости $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ возрастают, соответственно, в 1.4 раза, 1.045 раз, 1.18 раза и в 1.1–1.2 раза.

5.2. Невозмущённое движение системы «пластинка–поток», начиная примерно со значения $\gamma = 0.33$, становится устойчивым вблизи $a_0 \sqrt{2}$ при всех $\beta_x^2 \geq 0$ для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in (0.01, 0.015]$. А, для пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.01]$ – при $\beta_x^2 \geq (\beta_x^2)_{\min}$ (табл. 8).

Таблица 8. Значения $(\beta_x^2)_{\min}$ при $\gamma \in [0.33, 0.74]$ и $2ha^{-1} = 0.006; 0.01$.

$\gamma \backslash 2ha^{-1}$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.73
0.006	4.2	2.3	1.28	0.49	0.011
0.010	0.52	0.01	0	0	0

Соответственно, при $2ha^{-1} \in [0.006, 0.01]$ и $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{\min}$ невозмущённое движение системы неустойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$: имеет место эйлерова дивергенция панели.

Цепочки переходов представятся в виде:

$$(\mathfrak{I}_0) \xrightarrow{V_{cr.div.}^{(1)}} \mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div.}^{(2)}} \mathfrak{I}_1, k_1 < 0.5; \quad (5.3)$$

$$(\mathfrak{I}_0) \xrightarrow{V_{cr.div.}^{(1)}} \mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.fl.}^{(1)}} \mathfrak{I}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div.}^{(2)}} \mathfrak{I}_1, k_1 \in [0.5, 2);$$

$$(\mathfrak{I}_0) \xrightarrow{V_{cr.div.}^{(1)}} \mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{I}_2 \xrightarrow{V_{cr.fl.}^{(1)}} \mathfrak{I}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div.}^{(2)}} \mathfrak{I}_1, k_1 \geq 2;$$

Здесь, также, по аналогии с предыдущим случаем (разд. 5.1), $V_0 = V_{1,2}$.

Как следует из выражений (5.3), при малых k_1 ($k_1 < 0.5$) флаттер отсутствует: имеет место потеря устойчивости системы только лишь в виде эйлеровой дивергенции панели при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}^{(1)}$ и $V \geq V_{cr.div.}^{(2)}$ соответственно. При $k_1 \in [0.5, 2)$ и $k_1 \geq 2$ система теряет устойчивость и в виде дивергенции панели, и в виде флаттера. При этом имеют место, соответственно, переходы $\mathfrak{I}_0 \rightarrow \mathfrak{I}_3$ и $\mathfrak{I}_2 \rightarrow \mathfrak{I}_3$: при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}^{(1)}$ при $k_1 \in [0.5, 2)$ начинает совершать автоколебания «плоская» пластинка, а при $k_1 \geq 2$ – «изогнутая» пластинка.

В таблицах 9–12 приведены численные результаты исходной задачи для $\gamma = 0.5$.

Таблица 9.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	112.626	119.749	125.924	141.674	173.443	205.683
и	117.410	128.058	133.991	151.087	185.942	222.210
$V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	120.011	130.737	137.492	155.146	191.627	229.671
	124.885	135.756	143.073	161.708	200.469	241.946
	133.268	145.169	153.181	173.805	206.291	267.577

Таблица 10.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_{cr,div}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	15.217	18.773	21.485	28.945	44.734	62.175
	12.613	16.454	19.211	26.241	41.742	58.306
	11.706	15.565	18.563	25.182	40.443	56.904
	10.448	14.201	16.910	23.813	38.494	54.805
	8.406	12.041	14.581	21.254	35.565	51.315
$V_{cr,div}^{(2)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	501.104	512.567	522.207	543.400	586.043	626.011
	469.630	480.837	488.510	507.432	539.972	573.127
	458.288	466.950	475.123	492.685	524.875	553.991
	441.092	450.348	456.415	471.701	499.471	524.774
	413.148	421.869	426.441	437.960	457.585	472.538

Из данных таблиц 9 – 12 следует, что приведённые критические скорости, соответствующие критическим скоростям эйлеровой дивергенции панели $V_{cr,div}^{(1)}$ и $V_{cr,div}^{(2)}$, не эйлеровой дивергенции панели $V_{1,2}$ и панельного флаттера $V_{cr,fl}^{(1)}$ являются возрастающими функциями от параметров: n, γ и β_x^2 . В отличие от скоростей $V_{1,2}$ и $V_{cr,fl}^{(1)}$, критические скорости эйлеровой дивергенции $V_{cr,div}^{(1)}$ и $V_{cr,div}^{(2)}$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν .

Таблица 11. Значения $V_{cr,fl}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $k_1 < 2$ (переход $\mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{S}_3$).

β_x^2 k_1	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
0.5	125.112	140.281	151.488	185.733		
	135.351	153.966	168.959	—	—	—
	140.250	161.281	180.177			
	149.329	178.751	—			
	—	—				
1.0	111.422	121.623	128.788	147.461	190.749	249.783
	118.522	130.085	138.079	159.649	214.860	—
	121.879	133.818	142.204	165.434	234.193	
	126.587	140.046	149.361	175.960	—	
	137.134	152.958	164.815	—		

Таблица 12. Значения $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $k_1 \geq 2$ (переход $\mathfrak{I}_2 \rightarrow \mathfrak{I}_3$).

$\beta_x^2 \backslash k_1$	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
2.0	112.809	121.248	126.991	141.873	173.870	209.324
	118.894	128.211	124.572	151.087	188.123	232.487
	121.579	131.198	137.844	155.269	194.708	246.238
	125.698	135.950	143.113	162.079	207.178	—
	133.422	145.130	153.382	176.214	—	—
5.0	126.852	134.399	139.450	152.302	179.446	208.412
	131.234	139.420	144.975	159.238	189.435	222.813
	133.153	141.617	147.362	162.162	193.826	229.671
	136.125	145.011	151.086	166.890	201.306	290.858
	141.620	151.431	158.251	176.150	218.641	—
10.0	138.689	147.353	152.374	165.434	191.715	219.199
	140.250	151.150	156.420	170.232	198.692	229.741
	142.602	152.656	158.292	172.542	202.252	234.842
	144.965	155.238	161.113	176.002	207.898	243.660
	146.548	159.972	166.303	182.814	219.816	—

А приведённые критические скорости эйлеровой дивергенции $V_{cr.div.}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{cr.div.}^{(2)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ убывают, примерно, в 1.2 раза с ростом коэффициента Пуассона ν , а скорости $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ – возрастают, примерно, в 1.2 раза и 1.05 – 1.22 раза соответственно. При этом, при больших значениях коэффициента Пуассона ν с ростом коэффициента напряжения β_x^2 автоколебания начинают постепенно исчезать: растягивающие усилия приводят к существенному повышению устойчивости системы «пластинка – поток».

5.3. Невозмущённое движение системы «пластинка–поток» для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ при всех $\gamma \in [0.74, 1.96]$ и $\beta_x^2 \geq 0$ является устойчивым вблизи $a_0 \sqrt{2}$. С увеличением скорости потока газа невозмущённое движение системы теряет устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели или в виде локализованной дивергенции в зависимости от параметров γ , ν и β_x^2 : панельный флаттер и не эйлерова дивергенция панели отсутствуют [17].

Таблица 13.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_{crdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ $\gamma = 0.8$	81.466	102.765	118.628	165.402	689.543	783.569
	59.421	76.187	87.526	117.202	173.640	247.456
	54.086	68.915	80.128	107.909	165.655	228.778
	46.171	60.668	70.625	96.533	150.345	207.903
	35.167	48.453	57.489	81.124	130.259	183.078

При $\gamma \in [0.74, 1.3)$, $\beta_x^2 \geq 0$ и всех v система теряет устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях потока $V \geq V_{cr.div.}$ (табл. 13 и 14).

Соответственно, цепочка переходов будет вида:

$$\mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{cr.div.}} \mathfrak{S}_1, \gamma \in [0.74, 1.3), \beta_x^2 \geq 0. \quad (5.4)$$

Таблица 14.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_{crdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ $\gamma = 1$	522.743	577.560	612.285	702.632	897.284	1071.121
	156.951	206.272	239.197	310.434	470.539	597.198
	128.462	165.615	190.252	255.029	383.445	511.530
	102.093	133.979	155.561	208.950	317.049	430.057
	72.910	100.260	118.173	164.256	258.358	356.738

Из данных таблиц 13 и 14 следует, что приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, являясь монотонно убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν и монотонно возрастающей от коэффициента напряжения β_x^2 и параметра γ , существенно зависит от этих параметров. При этом, при $\gamma = 0.8$ и $\gamma = 1$ критическая скорость дивергенции панели с возрастанием ν убывает примерно в 2.3 – 4.28 раза и в 3 – 7.17 раза соответственно. А с ростом коэффициента напряжения $\beta_x^2 \in [0, 3]$ – возрастает, примерно, в 6.5 – 11.7 раза при $\gamma = 0.8$ и в 2.8 – 7.7 раза при $\gamma = 1$.

При $\gamma \in [1.3, 1.96)$ и всех ν невозмущённое движение системы теряет устойчивость или в виде дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, в зависимости от $\beta_x^2 = (\beta_x^2)_{gr.}(\gamma, \nu) \in [0, 3]$. При этом, $(\beta_x^2)_{gr.}(\gamma, \nu)$ является монотонно убывающей функцией от γ и слабо убывающей от ν (табл.15) [17].

Таблица 15.

γ	1.96	1.8	1.6	1.4	1.3
$(\beta_x^2)_{gr.}$ при $\nu = 0.3$	0	1.8	2.0	2.1	2.2

В интервале $\gamma \in [1.3, 1.96)$ при $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{gr.}$ (γ, ν) система теряет устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели $(\mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div.}} \mathfrak{T}_{div.})$, а при значениях $\beta_x^2 \geq (\beta_x^2)_{gr.}$ (γ, ν) – в виде локализованной дивергенции $(\mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{loc.div.}} \mathfrak{T}_{loc.div.})$. При этом, $\mathfrak{T}_{div.} \subset \mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_{loc.div.} \subset \mathfrak{T}_1$: $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_{div.} \cup \mathfrak{T}_{loc.div.}$ [17].

Начиная с $\gamma = \gamma_{gr.} = 1.96$, при скоростях потока $V \geq V_{loc.div.}$ при всех $\beta_x^2 \geq 0$ и ν система теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции – дивергенции, локализованной в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки, подобно полубесконечной пластине–полосе ($\gamma = \infty$) [16, 17].

Тем самым, для всех $\gamma \in [0.74, 1.96)$ предварительное статическое нагружение в виде растягивающих усилий ($\beta_x^2 > 0$) приводит к существенному повышению устойчивости системы, в сравнении с системой с предварительно ненагруженной панелью ($\beta_x^2 = 0$) [16].

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущенного состояния равновесия упругой прямоугольной пластинки умеренных размеров ($\gamma \in (0.193, 1.96)$) с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегаящим на ее свободный край, в предположении, что пластинка предварительно растянута по направлению потока газа и на свободном крае имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота. Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы на область устойчивости и области неустойчивости.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости в смысле Н.Н. Баутина.

Найдены критические скорости дивергенции и панельного флаттера.

Установлено, что в интервале $\gamma \in (0.193, 0.74)$ при малых значениях коэффициента напряжения система «пластинка–поток» является неустойчивой вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей для стальных пластин относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$.

Найдено минимальное значение коэффициента напряжения в зависимости от относительной толщины и от отношения сторон прямоугольной пластинки, начиная с которого система становится устойчивой вблизи значения $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуко-

вых скоростей при всех $\gamma \in (0.193, 0.74)$. При дальнейшем увеличении скорости потока система, становясь устойчивой, вновь теряет её в виде дивергенции панели (эйлеровой и не эйлеровой), а после, в виде панельного флаттера. Найдены соответствующие критические скорости дивергенции и панельного флаттера.

В интервале $\gamma \in [0.74, 1.3)$ система теряет устойчивость только в виде эйлеровой дивергенции панели, а при значениях $\gamma \in [1.3, 1.96)$ – теряет устойчивость или в виде дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, в зависимости от коэффициента напряжения растягивающих усилий.

Найдено граничное значение коэффициента напряжения $(\beta_x^2)_{gr.}$ в зависимости от $\gamma \in [1.3, 1.96)$ и от коэффициента Пуассона ν , разграничивающее область эйлеровой неустойчивости на подобласти дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Показано, что при малых значениях параметра отношения интенсивностей приложенных моментов поворота и инерционных масс имеет место переход из области устойчивости в область панельного флаттера: переход системы от «покоя» к движению – автоколебаниям (флаттерным колебаниям). При этом плоская пластинка начинает совершать автоколебания. При больших значениях этого параметра потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы из области не эйлеровой дивергенции в область панельного флаттера – к автоколебаниям: «изогнутая» пластинка начинает совершать автоколебания.

Показано, что критические скорости дивергенции и флаттера являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения растягивающих сил. Тем самым, растягивающие силы приводят к существенному повышению устойчивости системы «пластинка–поток», в сравнении с системой, в случае панели с предварительно ненагруженными краями [16].

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122.
5. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243.
6. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.

7. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
8. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
9. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем. – М.: Гостехиздат. 1955. 475 с.
10. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. с. 33–44.
11. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
12. Алфутов Н.А. Расчёт на устойчивость упругих систем.– М.: Машиностроение. 1978, 312 с.
13. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. 1979. 384 с.
14. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
15. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
17. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции растянутой панели при набегающем сверхзвукового потока газа на ее свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 2, с.37–58.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890, (+374 10) 441010 E-mail: mechinsstella@mail.ru

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян

Ключевые слова: плоская контактная задача, осесимметрическая контактная задача, контакт стрингера с другим телом, условие ограниченности контактных напряжений, энергетический принцип Кастильяно.

S.M. Mkhitarian
On the boundedness of stresses in contact problems of the theory of elasticity.

Keywords: plane contact problem, axisymmetric contact problem, stringer contact with another body, contact stress limitation condition, Castigliano's energy principle.

The article deals with the issue of determining the necessary dependencies between the characteristic elastic and geometric parameters that ensure the boundedness of the contact pressures (stresses) at the boundaries of the contact areas in the classical contact problems of the theory of elasticity, namely, in plane and axisymmetric problems, as well as in the problem of contact interaction of a stringer of finite length with an elastic half-plane. To determine the size of contact areas or other parameters when contact stresses are restricted, along with the widely used principle of continuity of contact stresses on smooth contact surfaces, the Castigliano energy principle is also used for elastic bodies, for which Hooke's law is valid. Based on the identity of the results obtained by both principles, their equivalence is shown. In addition, new results have been obtained for these two classical contact problems, supplementing those previously obtained. In the problem of the contact of a stringer with an elastic half-plane, by the principle of stress continuity, the conditions for the boundedness of contact stresses at the ends of a stringer are obtained only in two special cases. In addition, new results have been obtained for these two classical contact problems, supplementing those previously obtained. In the problem of the contact of a stringer with an elastic half-plane, by the principle of stress continuity, the conditions for the boundedness of contact stresses at the ends of a stringer are obtained only in two particular cases.

Ս.Մ. Մխիթարյան
Առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրներում լարումների
սահմանափակության մասին

Հիմնաբառեր. հարթ կոնտակտային խնդիր, առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդիր, առաձգական մարմնի հետ վերադիրի կոնտակտ, կոնտակտային լարումների սահմանափակության պայման, Կաստիլյանոյի էներգետիկ սկզբունք:

Հոդվածում դիտարկվում է առաձգական և երկրաչափական պարամետրերի միջև անհրաժեշտ կախվածությունների որոշման հարցը, որոնք ապահովում են առաձգականության տեսության հարթ և առանցքահամաչափ դասական կոնտակտային խնդիրներում կոնտակտային լարումների սահմանափակությունը՝ կոնտակտային տիրույթների եզրագծերի վրա: Նույն հարցը քննարկվում է նաև վերջավոր երկարության վերադիրի և առաձգական կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության խնդրում: Կոնտակտային լարումների սահմանափակության դեպքում կոնտակտային տիրույթների չափերի կամ այլ պարամետրերի որոշման համար ողորկ կոնտակտային մակերևույթների դեպքում լայնորեն կիրառվող կոնտակտային լարումների անընդհատության սկզբունքին հավասար կիրառվում է նաև Կաստիլյանոյի էներգետիկ սկզբունքը՝ առաձգական մարմինների համար, որոնք ենթարկվում են Հուկի օրենքին: Երկու սկզբունքներով ստացվող արդյունքների նույնական լինելու հիման վրա ցույց է տրված այդ սկզբունքների համարժեքությունը:

Վերադիրի և առաձգական կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության խնդրում վերադիրի ծայրակետերում կոնտակտային լարումների սահմանափակության պայմանները՝ լարումների անընդհատության սկզբունքով, ստացվել են միայն երկու մասնավոր դեպքերում:

В статье рассматривается вопрос определения необходимых зависимостей между характерными упругими и геометрическими параметрами, обеспечивающих ограниченность контактных давлений (напряжений) на границах контактных областей в классических контактных задачах теории упругости, а именно, в плоских и осесимметрических задачах, а также в задаче контактного взаимодействия стрингера конечной длины с упругой полуплоскостью. Для определения размеров областей контакта или других параметров, когда контактные напряжения ограничены, наряду с широко применяемым принципом непрерывности контактных напряжений на гладких контактных поверхностях, применяется также энергетический принцип Кастильяно для упругих тел, для которых справедлив закон Гука. На основании идентичности результатов, полученных обеими принципами, показана их эквивалентность. Кроме того, по указанным двум классическим контактным задачам получены новые результаты, дополняющие ранее полученные. В задаче о контакте стрингера с упругой полуплоскостью условия ограниченности контактных напряжений на концах стрингера на основе принципа непрерывности напряжений получены лишь в двух частных случаях.

1. Введение. Классические контактные задачи о взаимодействии двух упругих тел составляют обширную область математической теории упругости, на основе которых в конце XIX и в начале XX столетий в механике деформируемого твердого тела сформировалось теоретически и практически значимое новое научное направление. В последние десятилетия, да и в настоящее время, это направление интенсивно развивается, обогащаясь новыми основополагающими идеями, методами и результатами. Классические контактные задачи теории упругости и, вообще, контактные задачи механики деформируемого твердого тела и результаты их исследования легли в основу теории контактной прочности и механики контактного разрушения, широко применяемых в расчетах разнообразных машиностроительных, в частности, авиационных, строительных, конструкций и их деталей. Исследованию контактных задач посвящены многочисленные оригинальные научные статьи и фундаментальные монографии [1–7]. Основные достижения теории контактных и смешанных задач, полученные до 1976 г., с достаточной полнотой отражены в коллективной монографии [8], а до недавнего времени в [9].

В классических контактных задачах теории упругости принимаются известные гипотезы Герца, вследствие чего одно из двух упругих тел, взаимодействующих между собой, можно заменить упругими основаниями бесконечных размеров, а вместо другого тела рассматривать, без ограничения общности, абсолютно жесткий штамп различных геометрических форм. При этом в качестве упругих оснований берутся полупространство, слой, полуплоскость, полоса, плоские и пространственные клиновидные упругие тела, упругая плоскость с круговым отверстием и прочие. В такой постановке контактных задач контактные напряжения под штампами в концевых точках контактного отрезка или на границе контактной области, как правило, обращаются в бесконечность. Тем самым эти напряжения выходят из пределов применимости закона Гука, который входит в постановку задач и которым обусловлена математическая структура определяющих функциональных уравнений задач. В конечном итоге на контактной поверхности возникает концентрация напряжений, существенно влияющая на характеристики прочности конструкций, снижая их. Поэтому возникает необходимость надлежащим выбором характерных геометрических и физических параметров данной задачи устранить концентрацию контактных напряжений. Для достижения этой цели обычно применяется принцип непрерывности напряжений на контактной поверхности [2–6]. Но, как показано в

работах [7, 10], полученные по этому методу размеры контактной зоны не совпадают с экспериментальными данными, т.е. полученные по теории Герца результаты разнятся от результатов, полученных экспериментальным путем. Это объясняется тем, что в некоторых местах контактирующих между собой поверхностей из-за их негладкости возникают локальные отталкивающие силы, т.е. происходит явление адгезии. С учетом последнего в [7, 10] предложен энергетический принцип определения размеров контактных зон, аналогично энергетическому принципу Гриффитса [11] в теории трещин.

С другой стороны, упомянутый выше принцип непрерывности контактных напряжений сразу вытекает из известного начала или энергетического принципа Кастильяно [12]. Согласно последнему, если для упругого тела справедлив закон Гука, то накопленная в теле потенциальная энергия деформации минимальна. Более того, если данная задача имеет единственное решение, то этот минимум энергии также единственный. А именно, справедливость закона Гука означает непрерывность напряжений и деформаций, т.е. эти два принципа эквивалентны.

В настоящей статье размеры контактной области в плоской и осесимметрической контактных задачах теории упругости при несколько более общих предположениях, нежели в [5], определяются при помощи энергетического принципа Кастильяно. Одновременно полученные в [3] результаты по исследованию этих задач дополняются некоторыми новыми элементами. Результаты, полученные по принципу непрерывности напряжений на гладких контактных поверхностях и по энергетическому принципу Кастильяно, тождественно совпадают, что показывает эквивалентность этих принципов. Кроме того, в некоторых частных случаях получены условия ограниченности контактных напряжений в задаче о контактном взаимодействии конечного стрингера с упругой полуплоскостью.

2. Плоская контактная задача теории упругости. Эта задача обстоятельно исследована в монографиях [3–4]. Пусть в нижнюю упругую полуплоскость $y \leq 0$ с упругими постоянными (E, ν) , отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy , под действием центральной вертикальной силы величины P вдавливается абсолютно жесткий штамп с гладкой поверхностью. Эта поверхность описывается уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ неотрицательная, дифференцируемая и четная функция ($f(x) \geq 0$, и $f(-x) = f(x)$ при $x \in (-a, a)$). Здесь $[-a, a]$ контактный отрезок, по которому после вдавливания в упругое основание штамп соприкасается с границей упругой полуплоскости. Обозначим через $p(x)$ контактное давление под штампом, т.е. положим

$$\sigma_y \Big|_{y=0} = \begin{cases} -p(x) & (x \in [-a, a]); \\ 0 & (x \in (-\infty, \infty) \setminus [-a, a]); \end{cases} \quad \tau_{yx} \Big|_{y=0} = 0 \quad (-\infty < x < \infty);$$

где σ_y и τ_{yx} — соответственно, компоненты нормальных и касательных напряжений.

Тогда решение поставленной задачи сводится к решению следующего интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром [3].

$$\int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) ds = \frac{c-f(x)}{\vartheta} \quad (-a < x < a), \quad (2.1)$$

решение $p(x)$ которого должно удовлетворять условию равновесия штампа

$$\int_{-a}^a p(x) dx = P. \quad (2.2)$$

Здесь c – константа, а $\vartheta = 2(1-\nu^2)/\pi E$ при плоской деформации и $\vartheta = 2/\pi E$ при обобщенном плоском напряженном состоянии. Считая $f(x)$ дифференцируемой функцией, обе части ИУ (2.1) продифференцируем по x . В результате относительно $p(x)$ придем к следующему сингулярному интегральному уравнению (СИУ):

$$\int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{s-x} = -\frac{f'(x)}{\vartheta} \quad (-a < x < a) \quad (2.3)$$

опять при условии (2.2). Решение СИУ (2.3) в классе неограниченных на концах интервала $(-a, a)$ функций при этом условии имеет вид [3,12]

$$p(x) = \frac{1}{\vartheta \pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2} f'(s) ds}{s-x} + \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a < x < a). \quad (2.4)$$

Отсюда вытекает, что для непрерывности (ограниченности) контактных напряжений или контактного давления $p(x)$ в концевых точках $x = \pm a$ интервала $(-a, a)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\frac{1}{\pi \vartheta} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+s}{a-s}} f'(s) ds = P, \quad \frac{1}{\pi \vartheta} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a-s}{a+s}} f'(s) ds = -P. \quad (2.5)$$

Преобразуя первое условие (2.5) и складывая их, придем к условиям

$$\frac{1}{\pi \vartheta} \int_{-a}^a \frac{f'(s) s ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} = P; \quad \int_{-a}^a \frac{f'(s) ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} = 0. \quad (2.6)$$

Таким образом, для непрерывности контактных напряжений на концах контактного участка $(-a, a)$ необходимо и достаточно выполнение условий (2.6).

Далее, при выполнении условий (2.5) или (2.6) формула (2.4) для $p(x)$ представляется в форме

$$p(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi^2 \vartheta} \int_{-a}^a \frac{f'(s) ds}{(s-x) \sqrt{a^2 - s^2}} \quad (-a \leq x \leq a). \quad (2.7)$$

Исходя из условий (2.6), в [3] для некоторых частных случаев функции $f(x)$ определена полудлина a контактного отрезка $[-a, a]$ и по формуле (2.7) вычислено соответствующее контактное давление $p(x)$.

Обратимся теперь к энергетическому принципу Кастильяно и отметим, что согласно (2.1) вертикальные перемещения $v(x, -0)$ граничных точек нижней упругой полуплоскости от давления $p(x)$ определяется по формуле

$$v(x, -0) = -9 \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) ds + C \quad (-\infty < x < \infty).$$

А для потенциальной энергии деформации U , накопленной в нижней упругой полуплоскости $y \leq 0$ будем иметь [2]

$$U = \frac{1}{2} \int_{-a}^a v(x, 0) \sigma_y \Big|_{y=0} dx = \frac{9}{2} \int_{-a}^a p(x) dx \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) ds - CP.$$

Далее решение ИУ (2.1) представим в форме бесконечного ряда

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} p_n T_n(x/a) \quad (-a < x < a) \quad (2.8)$$

с неизвестными коэффициентами p_n , где $T_n(x)$ – многочлены Чебышева первого рода. Представление (2.8) для $p(x)$ подставим в левую часть ИУ (2.1), поменяем порядок интегрирования и суммирования, затем воспользуемся известными спектральными соотношениями

$$\int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} \frac{T_n(s/a) ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} = \mu_n T_n\left(\frac{x}{a}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots \quad -a < x < a)$$

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{\pi}{n} & (n = 1, 2, \dots); \\ \pi \ln(2/a) & (n = 0); \end{cases}$$

а также условиями ортогональности многочленов Чебышева первого рода:

$$\int_{-a}^a T_m\left(\frac{x}{a}\right) T_n\left(\frac{x}{a}\right) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = v_{mn} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$v_{mn} = \begin{cases} \pi & (m = n = 0); \\ \frac{\pi}{2} & (m = n \neq 0); \\ 0 & (m \neq n). \end{cases}$$

После простых преобразований находим

$$U = \frac{\vartheta}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n v_n p_n^2 - \frac{1}{2} C \vartheta P; \quad v_n = \begin{cases} \pi (n=0), \\ \frac{\pi}{2} \quad (n=1, 2, \dots). \end{cases} \quad (2.9)$$

Теперь вычислим коэффициенты p_n . Из (2.8) имеем

$$p_n = \frac{1}{v_n} \int_{-a}^a p(x) T_n\left(\frac{x}{a}\right) dx \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Подставляя сюда выражение из (2.4), после несложных преобразований получим

$$p_n = \frac{1}{v_n} \left(P \delta_n - \frac{f_n}{\pi a \vartheta} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

$$\delta_n = \begin{cases} 1 (n=0); \\ 0 (n=1, 2, \dots); \end{cases} \quad (2.10)$$

$$f_0 = 0; \quad f_n = \int_{-a}^a f'(s) U_{n-1}\left(\frac{s}{a}\right) \sqrt{a^2 - s^2} ds \quad (n=1, 2, \dots),$$

где U_{n-1} – многочлены Чебышева второго рода. Приняв во внимание значения v_n и полагая в интеграле (2.10) $s = a\eta$ ($-1 \leq \eta \leq 1$), будем иметь

$$p_n = \begin{cases} P/\pi \quad (n=0); \\ -g_n \quad (n=1, 2, \dots); \end{cases} \quad (2.11)$$

$$g_n = \frac{f_n}{\pi a \vartheta v_n} = \frac{2a}{\vartheta \pi^2} \int_{-1}^1 f'(a\eta) U_{n-1}(\eta) \sqrt{1 - \eta^2} d\eta.$$

Отсюда, предполагая существование второй производной $f''(x)$, находим

$$\frac{dp_n}{da} = \begin{cases} 0 \quad (n=0) \\ -\frac{2}{\pi^2 \vartheta} \int_{-1}^1 f'(a\eta) U_{n-1}(\eta) \sqrt{1 - \eta^2} d\eta - \\ -\frac{2a}{\pi^2 \vartheta} \int_{-1}^1 f''(a\eta) U_{n-1}(\eta) \eta \sqrt{1 - \eta^2} d\eta \quad (n=1, 2, \dots). \end{cases} \quad (2.12)$$

Теперь из (2.9)

$$\frac{dU}{da} = \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n v_n p_n \frac{dp_n}{da} \quad (2.13)$$

и, следовательно, параметр a – полудлина контактного отрезка, будет определяться из уравнения

$$\frac{dU}{da} = 0. \quad (2.14)$$

Итак, вычисление параметра a в плоской контактной задаче по энергетическому принципу Кастильяно осуществляется при помощи формул (2.11) – (2.14).

Для энергии U помимо (2.9) можно получить другую формулу, содержащую, вместо ряда, интегралы. А именно, согласно определяющему ИУ (2.1)

$$v(x, -0) = -\vartheta \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) ds = f(x) - c \quad (-\infty < x < \infty).$$

Поэтому

$$U = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) - c] \sigma_y|_{y=-0} = \frac{1}{2} \left[cP - \int_{-a}^a f(x) p(x) dx \right].$$

Далее подставляя сюда выражение $p(x)$ из (2.4), после простых преобразований придем к формуле

$$U = \frac{cP}{2} - \frac{P}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{f(x) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{2\pi^2 \vartheta} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - s^2} f'(s) ds \int_{-a}^a \frac{f(x) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(s - x)}} \quad (2.15)$$

Рассмотрим частный случай параболического штампа, полагая [3]

$$\frac{c - f(x)}{\vartheta} = \alpha - Ax^2 \Rightarrow f(x) = c - \alpha\vartheta + A\vartheta x^2 \Rightarrow f'(x) = 2A\vartheta x.$$

Для этой функции $f(x)$ вычислим входящие в (2.15) элементарные интегралы.

Получим

$$U = \frac{cP}{2} - \frac{1}{4} AP\vartheta a^2 + \frac{\vartheta A^2}{8} a^4,$$

откуда

$$\frac{dU}{da} = -\frac{1}{2} AP\vartheta a + \frac{1}{2} \vartheta A^2 a^3 = 0.$$

Из этого уравнения находим $P = a^2 A$, т.е. $a = \sqrt{P/A}$, что совпадает с известным результатом из [3]. Этот же результат вытекает из формул (2.10) – (2.14). В данном частном случае из (2.10) будем иметь

$$p_n = \begin{cases} \pi P & (n=0); \\ -a^2 A/\pi & (n=2); \\ 0 & (n=1, 3, \dots). \end{cases}$$

Тогда (2.13) дает

$$U = \frac{\pi \vartheta}{2} \left[P^2 \ln \frac{2}{a} + \frac{1}{4} a^4 A^2 \right].$$

Отсюда

$$\frac{dU}{da} = \frac{\pi \vartheta}{2} \left(-\frac{P^2}{a} + a^3 A^2 \right) \text{ и } \frac{dU}{da} = 0 \Rightarrow P = a^2 A \Rightarrow a = \sqrt{P/A}.$$

С другой стороны

$$\frac{d^2 U}{da^2} = \frac{\pi \vartheta}{2} \left(\frac{P^2}{a^2} + 3a^2 A^2 \right) > 0$$

и, следовательно, при указанном a имеем единственный минимум энергии.

3. Осесимметрическая контактная задача теории упругости. Перейдем к осесимметрической контактной задаче теории упругости. Пусть в упругое полупространство $z \leq 0$ с упругими постоянными (E, ν) , отнесенное к цилиндрической системе координат r, φ, z , под действием центральной вертикальной силы P вдавливается абсолютно жесткий штамп. Предполагается, что штамп имеет форму тела вращения с абсолютно гладкой поверхностью, которая описывается уравнением $z = f(r)$ ($f(0) = 0, f(r) > 0 \quad r > 0$). Тогда на поверхности упругого полупространства образуется контактная площадка в форме круга с радиусом a . Действующее на этой площадке контактное давление обозначим через $p(r)$, т.е. $\sigma_r|_{z=0} = -p(r) \quad (0 \leq r < a)$.

Для вывода определяющего ИУ относительно $p(r)$, воспользуемся известным решением задачи Буссинеска. Тогда для вертикальных перемещений $w(r, -0)$ граничных точек нижнего упругого полупространства будем иметь

$$w(r, -0) = -\Theta \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \rho) p(\rho) \rho d\rho \quad (0 < r < \infty)$$

$$K(r, \rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \vartheta)}}; \quad \Theta = \frac{1 - \nu^2}{\pi E}.$$
(3.1)

Далее интеграл $K(r, \rho)$ преобразуем в интеграл Вебера-Сонина, для чего положим $\tau = \varphi - \vartheta$ и примем во внимание свойство интегралов от периодических функций. В результате

$$K(r, \rho) = \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \frac{d\tau}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \tau}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \tau}}.$$

Теперь подкоренное выражение в этом интеграле представим в форме

$$r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \tau = (r + \rho)^2 \left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\tau}{2} \right) \quad \left(k^2 = \frac{4r\rho}{(r + \rho)^2} \leq 1 \right)$$

и перейдем к переменной $u = (\pi - \tau)/2$. Будем иметь

$$K(r, \rho) = \frac{4}{r + \rho} K(k) = \frac{2\pi}{r + \rho} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{4r\rho}{(r + \rho)^2}\right) \quad (r, \rho > 0).$$

Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода модуля k , $F(\alpha, \beta, \gamma, \chi)$ – гипергеометрическая функция Гаусса и использована известная формула из [13] (стр.919, ф-ла 8.113.1). Далее, воспользовавшись формулами опять из [13] (стр.1057, ф-ла 9.134.3, стр.680, ф-ла 6.152.1), окончательно находим

$$K(r, \rho) = 2\pi \int_0^a J_0(\lambda r) J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (r, \rho > 0),$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода нулевого индекса. Последний интеграл и есть интеграл Вебера-Сони́на. В результате, формула (3.1) запишется в виде

$$w(r, -0) = -2\pi\Theta \int_0^a W_0(r, \rho) p(\rho) \rho d\rho \quad (0 \leq r < \infty)$$

$$W_0(r, \rho) = \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$
(3.2)

Далее, (3.2) подставим в условие контакта штампа с упругим полупространством $w(r, -0) = f(r) - \alpha \quad (0 \leq r \leq a)$.

Тогда для определения контактного давления придем к следующему ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим ядром:

$$\int_0^a W_0(r, \rho) p(\rho) \rho d\rho = g(r); \quad g(r) = \frac{\alpha - f(r)}{2\pi\Theta},$$
(3.3)

где α – мера жесткого погружения штампа в упругое полупространство. ИУ (3.3) должно быть рассмотрено при условии равновесия штампа

$$\int_0^a p(\rho) \rho d\rho = \frac{P}{2\pi}.$$
(3.4)

Здесь решение определяющего ИУ (3.3) – (3.4) построим более простым методом, нежели в [3]. А именно, к (3.3) – (3.4) применим метод последовательных обращений интегральных уравнений типа Абеля. С этой целью воспользуемся известным представлением интеграла Вебера-Сони́на [14,15].

$$W_0(r, \rho) = \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda \rho) d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\min(r, \rho)} \frac{dt}{\sqrt{(r^2 - t^2)(\rho^2 - t^2)}} \quad (r, \rho > 0).$$

Это представление ядра $W_0(r, \rho)$ подставим в ИУ (3.3):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^r p(\rho) \rho d\rho \int_0^\rho \frac{dt}{\sqrt{(r^2 - t^2)(\rho^2 - t^2)}} + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^a p(\rho) \rho d\rho \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{(r^2 - t^2)(\rho^2 - t^2)}} = g(r) \quad (0 < r < a). \end{aligned}$$

и поменяем порядок интегралов:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \int_t^r \frac{p(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \int_t^a \frac{p(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = g(r) \quad (0 < r < a).$$

Отсюда

$$\frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \int_t^a \frac{p(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = g(r) \quad (0 < r < a)$$

и, следовательно, полагая

$$\chi(t) = \int_t^a \frac{p(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} \quad (0 < t < a), \quad (3.5)$$

будем иметь

$$\frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\chi(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = g(r) \quad (0 < r < a). \quad (3.6)$$

Таким образом, решение исходного определяющего ИУ (3.3) свелось к последовательному решению двух ИУ Абеля (3.5) и (3.6).

Для решения ИУ (3.5) и (3.6) воспользуемся формулами обращения Абеля:

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} &= h(\xi) \Rightarrow \varphi(\xi) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{h(\eta) \eta d\eta}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}; \\ \int_\xi^a \frac{\psi(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}} &= g(\xi) \Rightarrow \psi(\xi) = -\frac{2}{\pi} \int_\xi^a \frac{g(\eta) \eta d\eta}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь по первой паре формул (3.7) обратим ИУ (3.6)

$$\chi(r) = \frac{d}{dr} \int_\xi^a \frac{g(t) t dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \quad (0 < r < a), \quad (3.8)$$

а по второй паре формул (3.7) – ИУ (3.5):

$$p(r) = -\frac{2}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\chi(t) t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (0 < r < a). \quad (3.9)$$

Далее, предполагая, что функция $f(r)$ и, следовательно, функция $g(r)$ непрерывно дифференцируема на $0 \leq r \leq a$, интегрированием по частям преобразуем формулу (3.8):

$$\chi(r) = \frac{d}{dr} \left[g(t) \sqrt{r^2 - t^2} \right]_{t=r}^{t=0} + \int_0^r \sqrt{r^2 - t^2} g'(t) dt = r \int_0^r \frac{g'(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + g(0).$$

Так как $f(0) = 0$, то $g(0) = \frac{\alpha}{2\pi\Theta}$.

Следовательно,

$$\chi(r) = r \int_0^r \frac{g'(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \frac{\alpha}{2\pi\Theta} \quad (0 \leq r < a). \quad (3.10)$$

Аналогичные преобразования формулы (3.9) приводят ее к виду

$$p(r) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\chi(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{\chi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right] \quad (0 < r < a), \quad (3.11)$$

где, согласно (3.10),

$$\chi(a) = a \int_0^a \frac{g'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} + \frac{\alpha}{2\pi\Theta}. \quad (3.12)$$

Предполагая функцию $g(r)$ дважды непрерывно дифференцируемой, из (3.10) находим

$$\begin{aligned} \chi'(r) &= \left[r \int_0^r \frac{g'(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \frac{\alpha}{2\pi\Theta} \right]' = \left[r \int_0^1 \frac{g'(ur) du}{\sqrt{1 - u^2}} \right]'_r = \int_0^1 \frac{g'(ur) du}{\sqrt{1 - u^2}} + \\ &+ r \int_0^1 \frac{g''(ur) u du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\frac{1}{2\pi\Theta} \int_0^r \frac{f'(t) + t f''(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt \quad (0 < r < a). \end{aligned}$$

Итак,

$$\chi'(r) = -\frac{1}{2\pi\Theta} \int_0^r \frac{f'(t) + t f''(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt \quad (0 < r < a). \quad (3.13)$$

Далее, подставляя выражение $\chi'(r)$ из (3.13) в (3.11), после несложных преобразований решение исходного определяющего ИУ (3.3) представим формулой

$$p(r) = \frac{1}{\pi^2 \Theta} \left\{ \left[\alpha - a \int_0^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right] \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \right. \\ \left. + \int_0^a L(r, u) [f'(u) + u f''(u)] du \quad (0 \leq r < a) \right. \quad (3.14)$$

$$L(r, u) = L(u, r) = \int_{\max(r, u)}^a \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - r^2)(t^2 - u^2)}}.$$

Симметрическое ядро $L(r, u)$ при помощи известного выражения этих интегралов из [13] (стр.260, ф-ла 3.152.11) запишется в виде

$$L(r, u) = \begin{cases} \frac{1}{r} F \left(\arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{a^2 - u^2}} \right), \frac{u}{r} \right) & (u < r); \\ \frac{1}{u} F \left(\arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right), \frac{r}{u} \right) & (u > r); \end{cases}$$

где $F(u, t)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода.

Далее выражение $p(r)$ из (3.11) подставим в условие равновесия штампа (3.4)

$$P = 2\pi \int_0^a p(r) r dr = 4 \left[\chi(a) \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_0^a r dr \int_r^a \frac{\chi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right] = \\ = 4 \left[\chi(a) \sqrt{a^2 - r^2} \Big|_{r=a}^{r=0} + \frac{1}{2} \int_0^a \chi'(t) dt \int_0^t \frac{d(t^2 - r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right].$$

После простых преобразований находим

$$P = 4 \int_0^a \chi(t) dt.$$

Теперь сюда подставим выражение $\chi(t)$ из (3.10). В результате будем иметь

$$P = \frac{2}{\pi \Theta} \left[\alpha a - \int_0^a \frac{r f(r) dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right]. \quad (3.15)$$

Так как $P > 0$, то отсюда для меры погружения штампа в упругое полупространство получим следующую оценку:

$$\alpha > \frac{1}{a} \int_0^a \frac{r f(r) dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Таким образом, контактное давление $p(r)$ под штампом выражается формулами (3.10) – (3.11) или формулой (3.14). А зависимость меры погружения штампа в упругое основание α от прижимающей штампа вертикальной силы P выражается формулой (3.15).

Теперь условие ограниченности контактного давления $p(r)$ на граничной окрестности $r = a$ контактной области, согласно (3.11), запишется в виде $\chi(a) = 0$ или в виде

$$a \int_0^a \frac{g'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -\frac{\alpha}{2\pi\Theta}. \quad (3.16)$$

Рассмотрим частный случай, когда поверхность штампа представляет собой параболоид вращения: $f(r) = Ar^2$ ($A > 0$). Тогда

$$g(r) = \frac{\alpha - Ar^2}{2\pi\Theta} \Rightarrow g'(r) = -\frac{Ar}{\pi\Theta}$$

и, следовательно, из (3.10)

$$\chi(r) = -\frac{A}{\pi\Theta} r^2 + \frac{\alpha}{2\pi\Theta}.$$

Отсюда

$$\chi(a) = 0 \Rightarrow \alpha = 2Aa^2 \quad (3.17)$$

и, следовательно, из (3.11)

$$p(r) = \frac{4A}{\pi^2\Theta} \sqrt{a^2 - r^2} \quad (0 \leq r \leq a). \quad (3.18)$$

Далее из (3.15)

$$P = \frac{8Aa^3}{3\pi\Theta},$$

откуда

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi\Theta P}{8A}}. \quad (3.19)$$

При этом формула (3.18) приобретает вид

$$p(r) = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \frac{P}{\pi a^2} \quad (0 \leq r \leq a), \quad (3.20)$$

а формула (3.17) – вид

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt[3]{9\pi^2 A \Theta P}. \quad (3.21)$$

Результаты (3.19) – (3.21) совпадают с результатами, полученными ранее в [3] другими методами.

Обратимся теперь к энергетическому принципу Кастильяно и вычислим энергию деформации упругого полупространства U . Вертикальные перемещения граничных

точек упругого полупространства $z < 0$, вызванные вследствие вдавливания штампа в него, определяются формулой (3.2). С другой стороны, согласно определяющему ИУ (3.3)

$$w(r, -0) = f(r) - \alpha = -2\pi\Theta g(r); \quad g(r) = \frac{\alpha - f(r)}{2\pi\Theta} \quad (0 \leq r \leq a).$$

Следовательно,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L\pi} d\varphi \int_0^a w(r, -0) \sigma_z|_{z=0} r dr = 2\pi^2\Theta \int_0^a g(r) p(r) r dr.$$

Подставляя сюда выражения $p(r)$ из (3.14) и $g(r)$, после элементарных преобразований получим

$$U = 2 \left[\alpha a \chi(a) - \alpha \int_0^a \chi'(t) t dt - \chi(a) \int_0^a \frac{f(r) r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_0^a f(r) r dr \int_0^a \frac{\chi'(t) t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right]. \quad (3.22)$$

Пусть теперь, в частности, как выше

$$f(r) = Ar^2 \Rightarrow g(r) = \frac{\alpha - Ar^2}{2\pi\Theta} \Rightarrow g'(r) = -\frac{Ar}{\pi\Theta},$$

$$\chi(r) = -\frac{A}{\pi\Theta} r^2 + \frac{\alpha}{2\pi\Theta} \Rightarrow \chi'(r) = -\frac{\alpha Ar}{\pi\Theta}.$$

Теперь после вычисления элементарных интегралов из (3.22) будем иметь

$$U = 2 \left[\frac{\alpha}{\pi\Theta} \left(\frac{\alpha}{2} - Aa^2 \right) \left(\alpha - \frac{2a^2 A}{3} \right) + \frac{2a^3 \alpha A}{3\pi\Theta} - \frac{4}{15\pi\Theta} A^5 a^2 \right].$$

Отсюда

$$\frac{dU}{da} = \frac{2a^2 A}{3\pi\Theta} (\alpha - 2a^2 A) = 0 \Rightarrow \alpha = 2a^2 A.$$

Последнее совпадает с полученным выше результатом (3.17), обеспечивающим ограниченность контактного давления $p(r)$ на граничной окружности $r = a$ контактного круга. Далее, как и выше, получаются приведенные выше формулы (3.18) – (3.21).

Выражение энергии (3.22) преобразуем дальше, подставляя туда выражение функции $\chi(r)$ из (3.10). Не останавливаясь на элементарных выкладках, приведем окончательный результат:

$$U = \frac{1}{\pi\Theta} \left\{ \alpha^2 a - 2\alpha \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} f'(r) dr + \int_0^a t^2 dt \left[\int_0^t \frac{f'(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right]^2 \right\}.$$

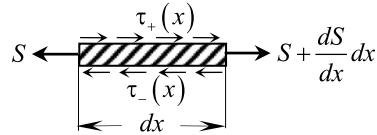
4. Контактное взаимодействие стрингера конечной длины с упругой полуплоскостью. Пусть нижняя упругая полуплоскость с упругими постоянными

(E, ν) на своей границе $y = 0$ по отрезку $[-a, a]$ усилена стрингером. Пусть далее стрингер обладает модулем Юнга E_s , коэффициентом Пуассона ν_s , имеет высоту h_s и нагружен симметрически. А именно, на его верхней границе действуют касательные силы интенсивности $\tau_+(x)$, причем $\tau_+(-x) = -\tau_+(x)$ ($x \in [-a, a]$), а на краях - горизонтальные сосредоточенные силы величины P , направленные в противоположные стороны. В предположении, что механическое поведение стрингера описывается известной моделью Мелана [16] как одномерного упругого континуума, т.е. стрингер находится в одноосном напряженном состоянии, требуется определить касательные контактные напряжения $\tau_-(x)$ ($-a < x < a$) под стрингером, а также горизонтальные усилия в сечениях стрингера $S(x) = \sigma_x(x)h_s$, где σ_x - нормальное напряжение в сечении x стрингера. При этом предполагается, что упругая полуплоскость находится в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния.

При различных видах нагружения стрингера и полуплоскости описанная контактная задача различными методами рассматривается во многих работах [17,18]. В работе [17] решение этой задачи впервые было сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В настоящей статье будет, в основном, рассмотрена возможность построения ограниченного на концах отрезка $[-a, a]$ решения определяющего интегродифференциального уравнения (ИДУ) поставленной выше контактной задачи для стрингера.

Приступив к выводу определяющего (ИДУ) задачи, рассмотрим равновесие дифференциальной части длины dx стрингера:



Так как по принятой модели стрингер находится в одноосном напряженном состоянии, то проектируя все силы на ось Ox можем записать

$$-S(x) + \tau_+(x)dx + S(x) + \frac{dS}{dx}dx - \tau_-(x)dx = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dS}{dx} = \tau_-(x) - \tau_+(x) \quad (-a < x < a),$$

причем для $S(x)$ должны выполняться граничные условия

$$S(-a) = P; \quad S(a) = P.$$

Следовательно,

$$S(x) = P + \int_{-a}^x [\tau_-(s) - \tau_+(s)] ds \quad (-a \leq x \leq a). \quad (4.1)$$

Очевидно, что (4.1) при втором условии $S(a) = P$ приводит к тривиальному условию равновесия стрингера

$$\int_{-a}^a [\tau_-(s) - \tau_+(s)] ds = 0.$$

которое удовлетворяется автоматически из-за нечетности подынтегральных функций. Далее по закону Гука для стрингера

$$S(x) = \sigma_x h_s = E_s^* h_s \varepsilon_s = E_s^* h_s \frac{du_s}{dx}, \quad (4.2)$$

где $u_s = u_s(x)$ – упругие горизонтальные перемещения точек стрингера, а

$$E_s^* = \begin{cases} E_s / (1 - \nu_s^2) & \text{при плоской деформации;} \\ E_s & \text{при обобщенном плоском напряженном состоянии.} \end{cases}$$

Теперь из (4.1) и (4.2) будем иметь

$$\frac{du_s}{dx} = \frac{1}{h_s E_s^*} \left[\int_{-a}^x \tau_-(s) ds + P - \int_{-a}^x \tau_+(s) ds \right] \quad (-a \leq x \leq a). \quad (4.3)$$

С другой стороны, горизонтальные перемещения $u(x, -0)$ граничных точек нижней упругой полуплоскости $y \leq 0$ от касательных напряжений интенсивности $\tau_-(x)$, распределенных по отрезку $[-a, a]$ ее границы, будут даваться формулой

$$u(x, -0) = \vartheta \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} \tau_-(s) ds + const \quad (-\infty < x < \infty).$$

Отсюда

$$\frac{du(x, -0)}{dx} = \vartheta \int_{-a}^a \frac{\tau_-(s) ds}{s-x} \quad (-\infty < x < \infty), \quad (4.4)$$

где

$$\vartheta = \begin{cases} \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} & \text{при плоской деформации;} \\ \frac{2}{\pi E} & \text{при обобщенном плоском напряженном состоянии.} \end{cases}$$

Далее (4.3) и (4.4) подставим в условие контакта стрингера с упругой полуплоскостью

$$\frac{du(x, -0)}{dx} = \frac{du_s}{dx} \quad (-a < x < a).$$

В результате придем к следующему ИДУ относительно функции $\varphi(x)$ с сингулярным ядром Коши:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi'(s) ds}{s-x} &= \lambda_* \varphi(x) + \lambda_* f(x) \quad (-a < x < a) \\ \varphi(x) &= \int_{-a}^x \tau_-(s) ds, \quad f(x) = P - \int_{-a}^x \tau_+(s) ds \\ \varphi(\pm a) &= 0; \quad \varphi'(x) = \tau_-(x); \quad \lambda_* = \frac{1}{E_s^* h_s \vartheta \pi}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теперь ИДУ (4.5) как СИУ относительно $\tau_-(x) = \varphi'(x)$ обращаем в классе неограниченных на концах интервала $(-a, a)$ функций. Будем иметь [12,3]

$$\begin{aligned} \tau_-(x) = \varphi'(x) &= -\frac{\lambda_*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2} \varphi(s) ds}{s-x} - \\ &- \frac{\lambda_*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2} f(s) ds}{s-x} \quad (-a < x < a). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Преобразуем первое слагаемое в (4.6):

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2} p(s) ds}{s-x} &= -\frac{\lambda_*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - x^2 + x^2 - s^2) \varphi(s) ds}{(s-x) \sqrt{a^2 - s^2}} = \\ &= -\frac{\lambda_*}{\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{\varphi(s) ds}{(s-x) \sqrt{a^2 - s^2}} + \frac{\lambda_* x}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{a^2 - s^2}}, \end{aligned}$$

так как $\varphi(x)$ на $[-a, a]$ четная функция. В результате (4.6) запишется в виде

$$\begin{aligned} \tau_-(x) = \varphi'(x) &= -\frac{\lambda_*}{\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{\varphi(s) ds}{(s-x) \sqrt{a^2 - s^2}} + \\ &+ \frac{\lambda_*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[Kx - \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2} f(s) ds}{s-x} \right]; \quad K = \int_{-a}^a \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{a^2 - s^2}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отсюда вытекает, что для ограниченности $\tau_-(x)$ на концах интервала $(-a, a)$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{cases} Ka + \int_{-a}^a \frac{a+s}{\sqrt{a^2-s^2}} f(s) ds = 0 \\ Ka + \int_{-a}^a \frac{a-s}{\sqrt{a^2-s^2}} f(s) ds = 0; \end{cases}$$

которые вследствие четности функции $f(x)$ на $(-a, a)$ сводятся к одному условию

$$K + \int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = 0 \quad \text{или} \quad \int_{-a}^a \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{a^2-s^2}} + \int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = 0 \quad (4.8)$$

Отметим, что условие (4.8) вытекает также из известного условия ограниченности решения СИУ с ядром Коши на концах интервала $[-a, a]$ [12].

Итак, при соблюдении условия (4.8) правая часть (4.7) будет ограниченной функцией при $x = \pm a$.

Теперь в (4.1), (4.5) и (4.8) введем безразмерные величины, полагая

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a; \quad \tau(s) = \frac{\tau_-(a\xi)}{\vartheta}; \quad g(\xi) = \frac{f(a\xi)}{a\vartheta};$$

$$\chi(\xi) = \frac{\varphi(a\xi)}{\vartheta} = \int_{-1}^{\xi} \tau(\eta) d\eta; \quad \chi(\pm 1) = 0, \quad g(\xi) = P_0 - \int_{-1}^{\xi} \tau_+^{(0)}(\eta) d\eta;$$

$$P_0 = \frac{P}{a\vartheta}; \quad \tau_+^{(0)}(\xi) = \frac{\tau_+(\xi a)}{\vartheta}, \quad \lambda = a\lambda_* = \frac{a}{E_s^* h_s \vartheta \pi}.$$

В результате ИДУ (4.5) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi'(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = \lambda \chi(\xi) + \lambda g(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (4.9)$$

$$\chi'(\xi) = \tau(\xi); \quad \chi(\pm 1) = 0;$$

а (4.1) и (4.8) примут, соответственно, вид

$$S_0(\xi) = \chi(\xi) + g(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1); \quad S_0(\xi) = \frac{S(a\xi)}{\vartheta}; \quad (4.10)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\chi(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} + \int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = 0. \quad (4.11)$$

Построим ограниченное на концах интервала $(-1, 1)$ решение ИДУ (4.9), полагая

$$\tau(\xi) = \chi'(\xi) = \sqrt{1-\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n U_{2n-1}(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1), \quad (4.12)$$

где x_n — пока неизвестные коэффициенты. Отсюда

$$\begin{aligned}
\chi(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \int_{-1}^{\xi} U_{2n-1}(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{1-\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[\frac{U_{2n+2}(\xi)}{2n+1} - \frac{U_{2n}(\xi)}{2n-1} \right] \quad (-1 \leq \xi \leq 1).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Теперь (4.12) и (4.13) подставим в (4.9), поменяем порядок интегрирования и суммирования и воспользуемся известным соотношением

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} U_{n-1}(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = -T_n(\xi) \quad (n=1, 2, \dots, -1 < \xi < 1).$$

В результате получим

$$-\sum_{n=1}^{\infty} x_n T_{2n}(\xi) = \frac{\lambda}{2} \sqrt{1-\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[\frac{U_{2n+2}(\xi)}{2n+1} - \frac{U_{2n}(\xi)}{2n-1} \right] + \lambda g(\xi) \quad (-1 < \xi < 1).$$

Далее обе части этого равенства умножим на $T_{2m}(\xi) \sqrt{1-\xi^2}$ ($m=1, 2, \dots$) и проинтегрируем по ξ от -1 до 1. Приняв во внимание условия ортогональности многочленов $T_{2m}(\xi)$, после вычисления некоторых элементарных интегралов относительно коэффициентов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ придем к следующей бесконечной СЛАУ:

$$\begin{aligned}
x_m + \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn} x_n &= -\frac{2\lambda}{\pi} g_m \quad (m=1, 2, \dots) \\
K_{mn} &= \frac{2n+3}{(2n+1)[(2n+1)^2 - 4m^2]} - \frac{2n+1}{(2n-1)[(2n-1)^2 - 4m^2]}; \\
g_m &= \int_{-1}^1 \frac{g(\xi) T_{2m}(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Доказательство регулярности бесконечной системы (4.14) проводится совершенно аналогично тому, что изложено в [18].

После решения бесконечной системы (4.14) безразмерные осевые усилия согласно (4.10) и (4.13) можно вычислить по формуле

$$S_0(\xi) = \frac{1}{2} \sqrt{1-\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[\frac{U_{2n+2}(\xi)}{2n+1} - \frac{U_{2n}(\xi)}{2n-1} \right] + g(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1).$$

Подставляя (4.13) в условие (4.11), после элементарных вычислений его представим в виде

$$8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x_n}{(4n^2 - 1)^2} = \int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{4.15}$$

Рассмотрим два частных случая симметрического нагружения стрингера.

1. Пусть $\tau_+(x) = A \operatorname{sign} x (-a \leq x \leq a)$; $A = \text{const.}$ Тогда

$$f(x) = P - A \int_{-a}^x \operatorname{sign} s ds = P - A(|x| - a) \quad (-a \leq x \leq a).$$

Следовательно,

$$g(\xi) = \frac{f(a\xi)}{a\vartheta} = P_0 - A_0(|\xi| - 1); \quad A_0 = \frac{A}{\vartheta}.$$

Поэтому

$$\int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \int_{-1}^1 \frac{P_0 - A_0(|\eta| - 1)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \pi(A_0 + P_0) - 2A_0. \quad (4.16)$$

В данном частном случае из (4.14) вычислим также коэффициенты g_m . После элементарных выкладок находим

$$g_m = (-1)^m \frac{2A_0}{4m^2 - 1} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Теперь решение бесконечной системы (4.14) при правой части $(-1)^{m+1} \lambda / (4m^2 - 1) \quad (m = 1, 2, \dots)$ обозначим через y_m . Тогда

$$x_m = \frac{4A_0}{\pi} y_m \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4.17)$$

Наконец, подставляя (4.16) и (4.17) в условие (4.15), определим отношение величин P_0 и A_0 ;

$$\frac{P_0}{A_0} = \frac{2}{\pi^2} \left[\pi + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m y_m}{4m^2 - 1} \right] - 1,$$

при котором безразмерные касательные напряжения под стрингером в точках $\xi = \pm 1$ ограничены или исходные контактные касательные напряжения в точках $x = \pm a$ ограничены.

2. Пусть теперь

$$\tau_+(x) = Ax^{2n-1} \quad (n = 1, 2, \dots \quad -a \leq x \leq a).$$

В этом случае

$$g(\xi) = P_0 - A_n(\xi^{2n} - 1)(-1 \leq \xi \leq 1); \quad A_n = \frac{a^{2n+1} A}{2\pi\vartheta}.$$

и, следовательно

$$\int_{-1}^1 \frac{g(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \pi(A_0 + A_n) - A_n \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1/2)}{n!}. \quad (4.18)$$

Коэффициенты g_m из (4.14) легко вычисляются при помощи известной формулы из [13] (стр.39, ф-ла 1.320.5). В результате

$$g_m = -\frac{A_n}{2^{2n}} \begin{cases} \pi C_{2n}^{n-m} & (1 \leq m \leq n); \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

Теперь решение бесконечной системы (4.14) при правой части

$$\delta_m^{(n)} = \begin{cases} \lambda C_{2n}^{n-m} & (1 \leq m \leq n); \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

обозначим через $y_m^{(n)}$. Тогда

$$x_m = \frac{A_n}{2^{2n-1}} y_m^{(n)} \quad (m, n = 1, 2, \dots). \quad (4.19)$$

Подставляя (4.18) и (4.19) в условие (4.15), приходим в данном случае и следующему условию ограниченности касательных контактных напряжений в концевых точках интервала $(-1, 1)$:

$$\frac{P_0}{A_n} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1/2)}{n!} + \frac{1}{2^{2n-4}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m y_m^{(n)}}{(4m^2 - 1)^1} \right] - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Заключение. Изложенные в статье результаты, основанные на применении энергетического принципа Кастильяно, в некоторой степени пополняют и расширяют возможности получения ограниченных напряжений на границах рассматриваемых областей в контактных и смешанных задачах теории упругости. Этот принцип в применении к вопросам исследования концентрации напряжений в окрестности вершины составного клиновидного упругого тела, может позволить определить необходимые зависимости между характерными упругими и геометрическими параметрами, обеспечивающие справедливость закона Гука в этой области, т.е. непрерывность или ограниченность напряжений и деформаций.

Отметим, что в статье установлено тождественное совпадение результатов, полученных принципом непрерывности напряжений на гладких, контактных поверхностях и энергетическим принципом Кастильяно, что указывает на их эквивалентность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв А.Е. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М: Наука, 1966. 708 с.
3. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М. –Л: 1949, 270 с.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304с.
5. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970, 940с.
6. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия, М.: Мир, 1989, 512с.
8. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976, 493с.

9. Механика контактных взаимодействий/ под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. 670 с.
10. K. L. Johnson, K. Kendall, A. D. Roberts, Surface energy and the contact of elastic solids. Proc Roy. Soc. A 324 1971, 301-313. 2
11. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. of Roy. Soc. London, Ser. A., vol.221, 1920, p.163–198.
12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640с.
13. Градштейн И.С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
14. Ахиезер Н.И. и Щербина В.А. Об обращении некоторых сингулярных интегралов.// Записки матем. отд. физ.-мат. ф.-та Харьковского ун.-та и Харьковского матем. общества, 1957, т. 25, сер. 4, 191-198.
15. Мхитарян С.М. О формулах Н.И.Ахиезера и В.А.Щербины обращения некоторых сингулярных интегралов.// Матем. Исследования, Кишинев, 1968, т. 3, вып. 1(7), 61-70.
16. Melan E., Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen, Ing.– Arch., 3, 1932, N2, p. 123–129.
17. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т.32, вып.4, 1968, с.632–646.
18. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983, 488 с.

Сведения об авторе

Мхитарян Сурен Манукович – чл.- корр. НАН РА, проф., зав.отделом, Институт механики НАН РА,

E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Поступила в редакцию 9 ноября 2022

ГОДИЧНОЕ СОДЕРЖАНИЕ 2022 г., том 75

1. **Аветисян А.С.** Многокомпонентные электроакустические волны (МЭАВ) в пьезокристаллических текстурах: прикладные возможности..... 1-2-111
2. **Аветисян А.С., Джилаван С.А., Хуршудян Ас.Ж.** Управляемость в среднем трансверсально изотропной пластинки Амбарцумяна..... 1-2-124
3. **Аветисян В.В., Григорян Ш.А.** Субоптимальное по быстродействию управление движением двузвенного манипулятора..... 1-2-136
4. **Агаловян Л. А., Япуджян В. Т** Вынужденные колебания при плоской деформации полосы с учетом внутреннего трения..... 4-6
5. **Агаловян Л.А.** О некоторых аспектах развития теории оболочек и пластин в Армении..... 1-2-5
6. **Агаян К.Л.** Распространение плоских волн в упругой полуплоскости, усиленной по своей границе накладкой бесконечной длины..... 3-7
7. **Акопян В.Н., Акопян Л.В., Даштоян Л.Л.** О напряжённом состоянии кусочно-однородной плоскости с абсолютно жёстким частично скользящим межфазным включением..... 4-17
8. **Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В.** Контактная задача для составной плоскости с разрезом..... 1-2-17
 - **Акопян Л.В. см. 7,8.**
 - **Амирджанян А.А. см. 8**
9. **Александр Паруйрович Сейранян** (К 75-летию со дня рождения)..... 3-5
10. **Багдасарян Г.Е., Сагоян Р.О., Варданян И.А.** Резонансы в вынужденных нелинейных колебаниях ортотропных пологих оболочек..... 1-2-27
 - **Варданян И.А. см. 10**
 - **Васильев А.С. см. 19**
 - **Волков С.С. см. 19**
11. **Ватульян А.О.** О коэффициентных обратных задачах и их приложениях в механике и биомеханике..... 1-2-36
12. **Гаспарян А.В., Мхитарян С.М., Саакян А.В.** Контактная задача об осесимметричном кручении упругого слоя посредством цилиндрического штампа. 3-20
13. **Григорян М.С., Мхитарян С.М.** О точном решении одного класса задач о контактном взаимодействии стрингеров с упругими телами..... 1-2-48
 - **Григорян Ш.А. см.3**
14. **Гуксян А. А.** О математическом моделировании технологического процесса, обслуживаемого электромеханическим манипулятором..... 4-27
15. **Гуксян А.А.** Обобщенная модель многоэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса и условия управляемости 1-2-67
 - **Даштоян Л.Л. см. 7.**
 - **Джилаван С.А. см.2**
 - **Казаков Е.А. см.29**
16. **Казарян К., Казарян Р., Терзян С.** Сдвиговые упругие волны в многослойном двухфазном волноводе..... 3-42

17. Казарян К., Марзокка П. Локализованные волны в упругих тонкостенных конструкциях 1-2-148
 - Казарян Р. см.16.
18. Каплунов Ю.Д., Приказчиков Д.А. К вопросу о выводе уравнения струны 1-2-163
19. Кудиш И.И., Волков С.С., Васильев А.С. Гидродинамический упорный подшипник, смазываемый неньютоновской жидкостью Гизекуса 1-2-169
20. Маргарян М.А. Об одном подходе к аналитическому решению задачи экструзии труб при наличии внутреннего высокого давления 3-55
 - Марзокка П. см. 16.
21. Мартиросян С. Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов 4-52
22. Мартиросян С. Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа 3-64
 - Мусатова Н.К. см.29.
23. Мхитарян С. М. Об ограниченности напряжений в контактных задачах теории упругости 4-74
 - Мхитарян С.М. см. 12,13
24. Нагуш Хачатурович. Арутюнян (К 110-летию со дня рождения) 4-3
25. Памяти Киракосяна Размика Макаровича 3-83
 - Приказчиков Д.А. см. 18.
 - Саакян А.В. см. 12.
 - Сагоян Р.О. см. 10.
 - Самсонов И.К. см.29.
26. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель динамики микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью независимыми полями перемещений и вращений и метод конечных элементов 1-2-85
27. Сергей Александрович Амбарцумян (К столетию со дня рождения) 1-2-3
28. Степан Рубенович Месчян (К столетию со дня рождения) 3-3
29. Сумбатян М.А., Казаков Е.А., Мусатова Н.К., Самсонов И.К. Теоретическое и экспериментальное исследование звукового поля беспилотного летательного аппарата 1-2-99
 - Терзян С. см. 16.
 - Хачатрян М.В. см. 26.
 - Хуршудян Ас.Ж. см.2.
30. Шавлакадзе Н.Н. Адгезионное взаимодействие кусочно-однородной ортотропной пластины с упругой балкой 1-2-184
 - Япуджян В. Т см.3.

СОДЕРЖАНИЕ 2022 г., том 75 №4

Нагуш Хачатурович. Арутюнян (К 110-летию со дня рождения)	3
Агаловян Л. А., Япуджян В. Т. Вынужденные колебания при плоской деформации полосы с учетом внутреннего трения.....	6
Акопян В.Н., Акопян Л.В., Даштоян Л.Л. О напряжённом состоянии кусочно- однородной плоскости с абсолютно жёстким частично скользящим межфазным включением	17
А. А. Гукасян О математическом моделировании технологического процесса, обслуживаемого электромеханическим манипулятором	27
Мартirosyan С. Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов	52
Мхитарян С. М. Об ограниченности напряжений в контактных задачах теории упругости	73
СОДЕРЖАНИЕ 2022 г., том 75	96

CONTENTS 2022, v. 75 №4

110 anniversary N.Kh. Harutyunyan	3
Aghalovyan L. A., Yapujyan V. T. Forced vibrations of a layer in a plane deformation state considering internal friction	6
Hakobyan V.N., Hakobyan L.V., Dashtoyan L.L. Stress State of Piecewise Homogeneous Plane with Absolutely Rigid Partially Sliding Interfacial Inclusion.....	17
A.A. Ghukasyan About Mathematical Modeling of a Technological Process Served by an Electromechanical Manipulator	27
Martirosyan S.R Supersonic flutter of a rectangular plate with one free edge, stretched along the gas flow, in the presence of pointed inertial masses and moments.....	52
Mkhitaryan S.M. On the boundedness of stresses in contact problems of the theory of elasticity.	73
CONTENTS 2021, v. 74	96

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2022, հ.75 №4

Ն.Խ. Հարությունյանի 110-ամյակին.....	3
Աղալովյան Լ. Ա., Յափուջյան Վ. Տ. Հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող շերտի ստիպողական տատանումները, երբ հաշվի է առնվում ներքին շփումը	6
Հակոբյան Վ.Ն., Հակոբյան Լ.Վ., Դաշտոյան Լ.Լ. Մասնակիորեն սահող բացարձակ կոշտ միջֆազային ներդրակ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ հարթության լարվածային վիճակի մասին	17
Ա. Ա. Ղուկասյան Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորով սպասարկվող տեխնոլոգիական պրոցեսի մաթեմատիկական մոդելավորում մասին	27
Ս.Ռ.Մարտիրոսյան Գերձայնային զազի հոսքի ուղղությամբ նախնական ձգված ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին, որում սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ.....	52
Մխիթարյան Ս.Մ. Առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրներում լարումների սահմանափակության մասին.....	73
ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2022, հ.75	96

Сдано в производство 27.12.2022 г.
Формат 70 х 100 $\frac{1}{16}$. Печ. лист – 6 $\frac{1}{4}$
Заказ № 1214. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24

Правила для авторов

«Известия НАН Армении. Механика» освещает вопросы в области теоретической и прикладной механики: теорий упругости, оболочек и пластин, пластичности, ползучести и вязкоупругости, электромагнитоупругости, аэрогидромеханики, устойчивости движения, строительной механики и техники экспериментирования.

1. Статьи, представляемые в «Известия НАН Армении. Механика», должны сопровождаться рекомендацией на опубликование от семинара, на котором доложена работа.
2. Статьи представляются на армянском, русском или английском языках в двух экземплярах с указанием УДК и должны включать **ключевые слова** и **краткие аннотации** на трёх языках, в которых не допускаются ссылки на цитированную литературу и громоздкие формулы. Отдельно в основном тексте выделить: **введение, постановку задачи, решение и заключение.**
3. Вместе с оригиналом статьи необходимо представить электронную версию в среде Word: бумага – формат A4; **Fonts –Times New Roman, Sylfaen. Поля – слева и справа – 4 см; снизу и сверху – 5 см; аннотации – 8pt; основной текст – 10pt с интервалом 1. Формулы – MathType, Defaults.**
4. Литература (10pt) приводится общим списком в конце статьи на языке оригинала, а также на английском языке, при этом, в нижеследующей последовательности указываются:
для книги – фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания (город), издательство, год издания и количество страниц;
для журнала – фамилия и инициалы автора, полное наименование работы, название журнала, год издания, том, выпуск или номер и страницы.
5. В конце статьи должны быть приведены сведения об авторах с указанием контактных данных.
6. При наличии нескольких авторов редколлегия рекомендует фамилии авторов статьи расположить в алфавитном порядке.
7. В случае отказа в публикации, редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр статьи.