ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ISSN 0002-3051

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

Հատոր
Том 75 №1-2 2022
Volume

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Նվիրվում է ակադեմիկոս Ս.Ա.Համբարձումյանի 100-ամյակին

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА

Посвящается 100-летию академика С.А.Амбарцумяна

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS

Devoted to the 100th anniversary of academician S.A.Ambartsumyan

Издаётся с января 1966 года

Հատոր
Том 75 №1-2 2022
Volume

ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ГИТУТЮН» НАН РА

E-mail: **journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech**

Հայաստանի Հանրապետություն, Երևան, 0019 Բաղրամյան պող. 24/2, Հեռ. 52-48-02

Республика Армения, Ереван,0019 пр. Баграмяна 24 /2, Тел. 52-48-02

24/2, Baghramyan Ave. Yerevan 0019 Republic of Armenia Tel. 52-48-02

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика

Сергей Александрович Амбарцумян

(К столетию со дня рождения)

Сто лет назад родился крупный ученый-механик, основатель новых научных направлений в области механики деформируемых сред, один из создателей научной школы механики в Армении, академик НАН Армении, иностранный член Российской Академии Наук Сергей Александрович Амбарцумян.

Сергей Александрович родился 17 марта 1922 г. в Александрополе (Гюмри) в семье юриста. В 1942 году окончил Ереванский политехнический институт. В 1946 году стал кандидатом, а в 1952 году – доктором технических наук, с 1953 года – профессор. В 1956 г. он был избран членом–корреспондентом, в 1965 г.– академиком НАН Армении, а 2003 г. – иностранным членом РАН.

Трудовую деятельность С.А. Амбарцумян начал в 1940 г. С 1942 г. и до последних дней своей жизни он преподавал в высших учебных заведениях республики и работал в научно-исследовательских институтах НАН Армении. С.А.Амбарцумян был директором Института математики и механики, Института механики НАН РА. Был избран академиком-секретарем отделения физико-технических наук и механики и вице-президентом НАН Армении. В течение 14 лет он был ректором Ереванского государственного университета, 20 лет – депутатом, Председателем Верховного Совета Армении, депутатом и членом Президиума Верховного Совета СССР. Более сорока лет был членом Президиума НАН Армении.

С.А.Амбарцумяном впервые была построена общая теория анизотропных слоистых оболочек. Всеобщее признание получили труды С.А.Амбарцумяна, в которых разработаны уточнённые теории пластин и оболочек. С.А.Амбарцумян – автор разномодульной теории упругости. Им и его учениками разработаны эффективные методы расчёта стержней, пластин и оболочек, изготовленных из композиционных материалов разносопротивляющихся растяжению и сжатию.

С.А.Амбарцумян и его ученики Г.Е.Багдасарян и М.В.Белубекян по праву считаются основоположниками общей теории электромагнитоупругости тонких тел. Сформулировав и обосновав оригинальную гипотезу магнитоупругости тонких тел, они предложили эффективные методы решения различных, прикладных задач электромагнитоактивных оболочек и пластин. С.А.Амбарцумяном создана оригинальная микрополярная теория оболочек и пластин, в которой сочетается его уточнённая теория оболочек и пластин с классической несимметричной теорией упругости.

Последние годы он со своими учениками занимался проблемами прикладной микрополярной теории тонких тел, динамическими задачами электромагнитоупругости пластин и оболочек, а также теоретическими вопросами механики космических лифтов, в частности, вопросами прочности и колебаний космического кабеля транспортирующего груза и электрического тока.

С.А.Амбарцумяном опубликовано 14 монографий и более 300 статей. Полученные им научные результаты нашли широкое применение при создании объектов современной техники. Его труды известны во всем мире, полученные им результаты являются существенным вкладом в мировую науку. Они переведены и изданы в США, Японии, Китае и в Сингапуре. Имя С.А. Амбарцумяна неразрывно связано и с Российской наукой. Он более шестидесяти пяти лет успешно сотрудничал с редколлегиями прославленных журналов Российской академии наук (ПММ, МТТ). Велики его заслуги в деле укрепления дружбы и сотрудничества между учёными разных стран.

Его многолетняя деятельность и научные труды высоко оценены и отмечены многочисленными государственными и научными наградами и премиями.

Научное наследие С.А.Амбарцумяна всегда будет являться источником творческого вдохновения для ученых-механиков.

Международный редакционный совет и редколлегия журнала глубоко чтят память великого ученого.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК 539.3
Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-5

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН В АРМЕНИИ

Агаловян Л.А.

Ключевые слова: пластина, оболочка, анизотропия; классическая, уточненные, асимптотическая теории, неклассические краевые задачи.

Aghalovyan L.A.
On Some Aspects of the Development of the Theory of Shells and Plates in Armenia

Keywords: plate, shell, anisotropy; classical, refined, asymptotic theories, non-classical boundary value problems.

Some aspects of the development of the classical, refined, asymptotic theories of anisotropic plates and shells in Armenia are outlined. The decisive role of S.A.Ambartsumyan in the creation and development of these theories, the foundation of the corresponding Scientific school is noted.

Աղալովյան Լ.Ա.
Հայաստանում թաղանթների և սալերի տեսության զարգացման որոշ ասպեկտների մասին

Հիմնաբառեր՝ սալեր, թաղանթներ, դասական, ճշգրտված, ասիմպտոտիկ տեսություններ, ոչ դասական եզրային խնդիրներ:

Շարադրված են Հայաստանում անիզոտրոպ թաղանթների և սալերի դասական, ճշգրտված, ասիմպտոտիկ տեսությունների զարգացման որոշ ասպեկտները: Ընդգծված է Ս.Համբարձումյանի որոշիչ դերը այդ տեսությունների ստեղծման, զարգացման, համապատասխան գիտական դպրոցի հիմնադրման վեհ գործում:

Излагаются некоторые аспекты развития классической, уточненных, асимптотической теорий анизотропных пластин и оболочек в Армении. Отмечается решающая роль С.А. Амбарцумяна в создании и развитии этих теорий, основании соответствующей Научной школы.

1. Классическая и уточненные теории пластин и оболочек

Балки, стержни, пластины и оболочки являются составными элементами современных строительных конструкций, машиностроения, летательных и морских аппаратов, приборостроения. Для расчета на прочность, устойчивость и долговечность подобных конструкций необходимо определить их напряженно-деформированные состояния (НДС). Для этого в общем случае следует решить соответствующую трехмерную задачу теории упругости. Однако, первоначально было трудно преодолевать возникающие математические трудности и нашли развитие прикладные теории на основе метода принятия гипотез, используя их геометрическую специфику. Для балок и стержней один из размеров (длина) намного больше размеров их поперечного сечения. Для пластин и оболочек – толщина намного меньше тангенциальных размеров. Классическая теория изотропных балок и стержней построена на основе гипотезы плоских сечений Бернулли-Кулона-Эйлера (Тимошенко, 1965).

Первые исследования по теории пластин выполнены Коши и Пуассоном методом разложения по переменному параметру толщины. Однако сразу возникло противоречие, связанное с несоответствием между порядком основного дифференциального уравнения (четвертый) и выведенных Пуассоном граничных условий на боковой поверхности (их оказалось три). Это обстоятельство почти на полвека приостановило развитие теории. Проблему удалось решить Кирхгофу методом гипотез (гипотеза о недеформируемых нормалях). Кирхгоф на основе этой гипотезы, гласящей: нормальный к координатной поверхности прямолинейный элемент пластинки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной координатной поверхности пластинки и сохраняет свою длину; и варьированием потенциальной энергии деформации вывел основное уравнение изгиба пластинки и непротиворечивые граничные условия на боковой поверхности (их оказалось два). Обычно помимо этой геометрической гипотезы используется и вторая (статическая) гипотеза: нормальным напряжением $\sigma_{\gamma\gamma}$, действующим на площадках, параллельных координатной, и имеющим направление нормали к этим площадкам, можно пренебречь по сравнению с другими компонентами тензора напряжений. Ляв (1935) распространил эти гипотезы (гипотезы Кирхгофа-Лява) для вывода основных уравнений изотропных оболочек. Большой вклад для окончательного построения классической теории изотропных пластин и оболочек и методов решения возникающих прикладных задач внесли: Лурье, 1947; Власов, 1949; Голденвейзер, 1953, 1976;Тимошенко, 1963; Новожилов, 1962;Флюгге, 1961; Доннел, 1982 и др. Классическая теория анизотропных пластин построена Лехницким, 1957. Классическая теория слоистых анизотропных оболочек безупречно построена С. А. Амбарцумяном, 1961. Монография С. А. Амбарцумяна сразу же приобрела известность, была переведена NACA и издана в США (AmbartsumianS.A., 1964). По сей день она является настольной книгой конструкторских бюро по новой технике, подтверждая мировую известность автора.

В последующем, вплоть до сороковых годов двадцатого века доминирующую роль играли исследования на основе гипотезКирхгофа-Лява. Начиная с этих годов наметился интерес и к другим способам решения трехмерных задач теории упругости для пластин и оболочек. Это было связано с тем, что гипотезы Кирхгофа-Лява не всегда обеспечивали необходимую точность результатов. Сказанное касается, в частности, анизотропных пластин и оболочек, слоистых пластин и оболочек, динамических задач, пластин и оболочек из современных композиционных материалов. Для решения возникающих проблем было предложено множество подходов, которые можноразбить на три группы: а) метод смягченных гипотез, б) метод разложений по толщине, в) асимптотический метод. За короткий период появились основанные на смягченных допущениях теории Э. Рейсснера (ReissnerE., 1944; 1945), С. Амбарцумяна (Амбарцумян1967; 1971;1987;1991; Ambartsumian 1971), типа С. Тимошенко (Naghdi, 1957;Пелех, 1973).

В уточненной теории пластин Э.Рейсснера задается закон изменения основных расчетных тангенциальных напряжений σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} по толщине пластины и из уравнений равновесия и соотношений упругости $3D$ задачи выводятся двумерные непротиворечивые уравнения для определения перемещений и остальных компонент тензора напряжений. С точки зрения решения $3D$ задачи теории упругости, ошибка в выборе закона изменения основных расчетных напряжений будет чувствительно влиять на окончательные результаты.

В уточненной теории пластин Амбарцумяна С.А. основной упор сделан на касательные напряжения σ_{xz} , σ_{yz} , не считающиеся основными. Предполагается, что:

а) нормальное к срединной плоскости пластинки перемещение w не зависит от координаты z (как в классической теории);

б) касательные напряжения σ_{xz} , σ_{yz} меняются по толщине пластинки по заданному закону:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xz} &= \frac{X^{+}-X^{-}}{2}+\frac{z}{h}(X^{+}+X^{-})+f_1(z)\varphi(x,y) \\
\sigma_{yz} &= \frac{Y^{+}-Y^{-}}{2}+\frac{z}{h}(Y^{+}+Y^{-})+f_2(z)\psi(x,y)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где h – толщина пластинки, $f_i(z)$ - заданные функции, которые характеризуют законы изменения этих касательных напряжений по толщине пластинки, $f_i\left(z=\pm\frac{h}{2}\right)=0;\quad \varphi(x,y),\quad \psi(x,y)$ - неизвестные пока функции. Представление касательных напряжений в виде (1) позволяет с самого начала тождественно удовлетворять граничным условиям на лицевых поверхностях $z=\pm h/2$ пластинки:

$$
\sigma_{xz}(z=\pm\frac{h}{2})=\pm X^{\pm}(x,y); \qquad \sigma_{yz}(z=\pm\frac{h}{2})=\pm Y^{\pm}(x,y) \tag{2}
$$

где $X^{\pm}, Y^{\pm}$ – тангенциальные компоненты заданных поверхностных нагрузок.

Удовлетворивуравнения равновесия и соотношения упругости (обобщенный закон Гука), решение $3D$ задачи сводится к решению системы из пяти двумерных дифференциальных уравнений и удовлетворению соответствующих приведенных граничных условий на боковой поверхности пластинки относительно пяти неизвестных функций $u(x,y), v(x,y), w(x,y), \varphi(x,y), \psi(x,y)$. Построена соответствующая уточненная теория дла анизотропных оболочек, а также итерационная теория (Амбарцумян 1974).

На основе классической и уточненных теорий анизотропных пластин и оболочек С.А. Амбарцумяном, его учениками Г.Е. Багдасаряном, В.Ц. Гнуни, А.А. Хачатряном, Л.А. Мовсисяном, М.В. Белубекяном, Р.М. Киракосяном и другими учениками и сотрудниками решено множество интересных прикладных задач по прочности, устойчивости и колебаниям пластин и оболочек, в том числе слоистых. В результате созданная С.А. Амбарцумяном армянская Научная школа по теории пластин и оболочек приобрела известность не только в СССР, но и во всем мире.

Важное место занимают исследования С.А. Амбарцумяна и его учеников по изучению взаимодействия тонкостенных конструктивных элементов с различными физическими полями, в частности, температурными, электромагнитными и др. С.А. Амбарцумяном, Г.Е. Багдасаряном, М.В. Белубекяном на основе им же предложенной гипотезы магнитоупругости тонких тел, построена теория магнитоупругости тонких оболочек и пластин (Амбарцумян, Багдасарян, Белубекян, 1977). В дальнейшем это направление интенсивно развивалось и расширялось. Основные результаты отражены в монографиях (Амбарцумян, Белубекян, 1991;1992;2010; Амбарцумян, Багдасарян, 1996);(Багдасарян, 1999; Baghdasaryan, Mikilyan, 2016; Baghdasaryan, Danoyan,2018). Спектр научных интересов С.А.Амбарцумяна продолжал оставаться широким. Он является автором разномодульной теории упругости (Амбарцумян,1982), прикладной микрополярной теории оболочек и пластин (Амбарцумян,1999).

По уточненной теории типа Тимошенко сначала задаются компоненты вектора перемещения (обычно как линейные функции от толщинной переменной), затем $3D$ задача теории упругости сводится к двумерной для пластин и оболочек (Naghdi, 1957; Пелех, 1973).

Согласно методу разложения по толщине, искомые величины предствляются в виде степенных рядов по поперечной координате z к пластинке или оболочке. Этому методу посвящена монография (Кильчевский,1963). Н.А. Кильчевским вариационным методом выведены также непротиворечивые граничные условия, которые возникали у Коши как проблема.

К методу разложения по толщине можно отнести также представления искомых величин в виде ряда по некоторым специальным функциям от поперечной координаты, в частности по полинимам Лежандра. Такая теория для изотропных оболочек построена И.Н. Векуа (Векуа, 1982). Характерной особенностью методов разложения по толщине является повышение порядка основных разрешающих дифференциальных уравнений с увеличением числа приближений, что приводит к необходимости преодоления значительных математических трудностей.

2. Асимптотическая теория пластин и оболочек

Учитываявышеуказаннуюспецификупластиниоболочек,переходявуравненияхравновесия(движения) и соотношениях упругости $3D$ задачи теории упругости к безрзамерным координатам и пермещениям, всегда есть возможностьвыделить малый геометрический параметр $\varepsilon = h/l$ (h - толщина, l - характерный тангенциальный размер) в этих уравнениях и соотношениях. Казалось бы, можно обычным разложением по этому параметру решить $3D$ задачу. Последовало разочарование, ибо система оказалась сингулярно возмущенной малым параметром. При этом малый параметр оказался коэффициентом не всего старшего оператора, а лишь его части. На сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения математики начали обращать внимание начиная с середины двадцатого века (К. О. Фридрихс, А. Н. Тихонов, В. Вазов, М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, А. Х. Найфе и др.). Последовало бурное развитие и появилось множество первоклассных монографий (Вазов В., 1968; Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., 1973; Найфе А. Х., 1976: Ломов С. А., 1981 и др.). Однако в этих монографиях не был обсужден тип сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, возникающих в теории упругости для тонких тел. Для решения подобных уравнений и систем эффективным оказался асимптотический метод. Первыми работами по применению асимптотического метода для решения задач пластин и оболочек являются (FriedrichsandDressler, 1961; Green,1962a; 1962b; Гольденвейзер, 1962). Было доказано, что одним разложением по малому параметру, как в регулярно возмущенных малым параметром уравнениях, задачу решить невозможно. Решение сингулярно возмущенных уравнений и систем складывается из двух качественно различных слагаемых: решения внешней задачи (I^{out}) и решения пограничного слоя (I_b):

$$I = I^{out} + I_b \tag{3}$$

Применительно к $3D$ задаче теории упругости, решением внешней задачи помимо удовлетворения уравнений равновесия (движения) и соотношений упругости, удовлетворяются граничные условия на лицевых поверхностях пластинки или оболочки (внешние условия). Это же решение в русскоязычных публикацияхбыло принято называть решением внутренней задачи (I^{int}) в том плане, что оно справедливо на некотором расстоянии от боковой поверхности, т.е. внутри пластинки или оболочки. Решение I_b локализовано вблизи боковой поверхности и как правило все его величины экспоненциально убывают при удалении от боковой поверхности во внутрь пластинки или оболочки. Эти решения можно построить раздельно.

Решение внешней задачиищется в виде

$$I^{out} = \varepsilon^{q_I+s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0,N} \tag{4}$$

где обозначение $s = \overline{0,N}$ означает суммирование по целочисленным значениям повторяющегося (немого) индекса s от нуля до числа приближений N (обозначение Эйнштейна). В случае регулярного возмущения $q_I = 0$. Здесь же значение q_I зависит от искомой функции и от типа краевых условий на лицевых поверхностях. Они должны быть такими, чтобы после подстановки (4) в преобразованные переходом к безразмерным координатам и перемещениям системы и приравнивания в каждом уравнении соответствующих коэффициентов при ε, возможно было получить непротиворечивую систему для определения всех $I^{(s)}$. Это наиболее трудная часть при использовании асимптотического метода. Неслучайно, что некоторые авторы отыскание таких q_I считают искусством (Бабич, Булдырев, 1977). Например, в плоской задаче для полосы (балки) имеем $q_I = -2$ для σ_{xx}, u; $q_I = -1$ для σ_{xy}; $q_I = 0$ для σ_{yy}; $q_V = 0$ в симметричной (растяжение - сжатие), $q_V = -3$ в кососимметричной (изгиб) задачах (Агаловян, 1997). Соответствующее этой асимптотике разрешающее уравнение при $s = 0$ совпадает с уравнением на основе гипотезы плоских сечений Бернулли-Кулона-Эйлера, последующие приближения уточняют данные классической теории балок и стержней. Уникальны свойства решения пограничного слоя для изотропной полосы ширины $2h$. Оно является математически точным. Напряжения σ_{xxb}, σ_{xyb} в произвольном поперечном сечении самоуравновешенны:

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_{xxb} dy = 0, \quad \int_{-h}^{+h} y\sigma_{xxb} dy = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_{xyb} dy = 0 \tag{5}$$

Все искомые величины пограничного слоя убывают от торца $x = 0$ балки (стержня) во внутрь как $\exp\left(-\operatorname{Re}\lambda_1 \dfrac{x}{h}\right)$, где λ_1 – первый корень с $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$ уравнения $\sin 2\lambda + 2\lambda = 0$ в симметричной задаче $(\operatorname{Re}\lambda_1 \approx 2.106)$ и уравнения $\sin 2\lambda - 2\lambda = 0$ в задаче изгиба $(\operatorname{Re}\lambda_1 \approx 3.749)$. Постоянные в решении внешней задачи однозначно определяются, используя свойство (5) и на их значения не влияют самоуравновешенные торцевые нагрузки, т.е. тождественно выполняется принцип Сен-Венана. Таким образом, принцип Сен-Венана есть следствие, вытекающее из математически точного решения плоской задачи.

Асимптотический метод позволяет решить первую краевую $3D$ задачу для термоупругой пластинки

$$D = \left\{(x, y, z) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h,\ \min(a, b) = l,\ h << l\right\},$$

обладающей общей анизотропией (21 постоянная упругости). Считается, что на лицевых плоскостях $z = \pm h$ заданы значения напряжений

$$\sigma_{jz}(x, y, \pm h) = \sigma_{jz}^{\pm}(x, y), \qquad j = x, y, z \tag{6}$$

В уравнениях равновесия с учетом объемных сил и соотношениях упругости с учетом влияния температурного поля по модели Дюгамеля-Неймана, переходя к безразмерным координатам $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и перемещениям $U = u/l$, $V = v/l$, $W = w/l$, снова получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему. Решение этой системы имеет вид (3), а решение внешней задачи вид (4). Для определения $I^{(s)}$ получим непротиворечивую систему, если

$$\begin{gathered} q_I = -2 \ \text{ для } \ \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}; \quad q_I = -1 \ \text{ для } \ \sigma_{xz}, \sigma_{yz}; \\ q_I = 0 \ \text{ для } \ \sigma_{zz}; q_I = -2 \ \text{ для } \ u, v; \quad q_I = -3 \ \text{ для } \ W \end{gathered} \tag{7}$$

Подставив (4), с учетом (7), в безразмерные уравнения равновесия и соотношения упругости, получим уравнения

$$l_{11}u^{(s)} + l_{12}v^{(s)} = P_1^{(s)}, \quad l_{12}u^{(s)} + l_{22}v^{(s)} = P_2^{(s)} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} B_{11}\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial \xi^4} + 4B_{16}\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2\left(B_{12} + 2B_{66}\right)\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ s + 4B_{26}\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial \xi\, \partial \eta^3} + B_{22}\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial \eta^4} = q^{(s)} \end{gathered} \tag{9}$$

Написанные в размерных координатах уравнения (8) при $s=0$ совпадают с уравнениями обобщенной плоской задачи, а уравнение (9) с уравнением изгиба по классической теории Кирхгофа для пластинок, имеющих плоскость упругой симметрии. При $s>0$ меняются правые части этих уравнений, куда, помимо нагрузочных слагаемых,будут входить слагаемые, связанные с общей анизотропией. Таким образом, $3D$ задача теории упругости,в случае общей анизотропии сводится к решению обобщенно плоской задачи и задачи изгиба пластинок, имеющих плоскость упругой симметрии.

3. Асимптотика решений неклассических краевых задач пластин и оболочек

Во всех известных монографиях по классической теории пластин и оболочек и по уточненным теориям был рассмотрен лишь один класс задач – на лицевых поверхностях пластины или оболочки заданы значения соответствующих компонент (σ_{jz}) тензора напряжений, т.е. условия первой краевой задачи теории упругости. Между тем случаи, когда на лицевых поверхностях заданы значения перемещений или смешанные условия также имеют большое прикладное значение. Причина оказалась очевидной – гипотезы Кирхгофа-Лява и известных уточненных теорий тут неприменимы. Например, если пластинка лежит на жестком основании $(w=0)$ и верхней лицевой поверхности сообщено штампом нормальное перемещение $w^{+}=const$, то гипотезой классической теории (w не зависит от z) невозможно удовлетворить этим условиям. Поэтому, вероятно трудно было найти подходящую гипотезу и до последнего времени подобные задачи в частных случаях решались аналитическими методами – интегральным преобразованием, методом потенциала и др. Между тем эти задачи остаются классическими краевыми задачами теории упругости.

Автору статьи удалось найти достаточно простую асимптотику для решения сначала соответствующих плоских задач (Агаловян,1982), затем пространственных (Агаловян,1997).

Пусть на лицевой поверхности пластинки D, обладающей общей анизотропией, заданы значения компонент вектора перемещения (условия второй краевой задачи теории упругости):

$$u(\xi,\eta,+h)=u^{+}(\xi,\eta),\quad v(\xi,\eta,+h)=v^{+}(\xi,\eta),\quad w(\xi,\eta,+h)=w^{+}(\xi,\eta)$$
$$u(\xi,\eta,-h)=u^{-}(\xi,\eta),\quad v(\xi,\eta,-h)=v^{-}(\xi,\eta),\quad w(\xi,\eta,-h)=w^{-}(\xi,\eta) \qquad (10)$$

или смешанные условия:

$$\sigma_{jz}(\xi,\eta,+h)=\sigma_{jz}^{+}(\xi,\eta),\quad j=x,y,z$$
$$u(\xi,\eta,-h)=u^{-}(\xi,\eta),\quad (u,v,w) \qquad (11)$$

в частности, $u^{-}=v^{-}=w^{-}=0$

Если в уравнениях трехмерной задачи теории упругости перейти к безразмерным координатам и перемещениям, опять получим сингулярно возмущенную малым параметром систему. Решение внешней задачи будем искать в виде (4). При условиях (10) или (11) мы получим непротиворечивую систему для определения $I^{(s)}$, если

$$\begin{aligned} & q_I = -1 \quad \text{для всех} \quad \sigma_{ij}, \quad i, j = x, y, z \\ & q_I = 0 \quad \text{для} \quad U, V, W \end{aligned} \tag{12}$$

Подставив (4) в преобразованную систему, сучетом (12), получим непротиворечивую систему для определения $I^{(s)}$. Решение этой системы будет содержать шесть неизвестных функций, которые однозначно определяются из шести условий (10) или (11).Таким образом, в отличие от первой краевой задачи, во второй и смешанной краевых задачах все неизвестные сразу выражаются через функции, которые входят в условия (10) или (11). Более того, если функции $u^+, v^+, w^+, \sigma^+_{jz}$ являются многочленами от ξ, η, итерация обрывается и получается математически точное решение во внешней задаче. В качестве иллюстрации сказанного приведем решение второй краевой задачи для ортотропных пластин при $u^-, v^-, w^- = 0$, $u^+, v^+, w^+ = const$. Итерация обрывается на исходном приближении, имеем

$$\sigma_{xz} = \frac{u^+}{2ha_{55}},\ \sigma_{yz} = \frac{v^+}{2ha_{44}},\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_{xx} = \frac{A_{13}w^+}{2hA_{33}},\ \sigma_{yy} = \frac{A_{23}w^+}{2hA_{33}},\ \sigma_{zz} = \frac{A_{12}w^+}{2hA_{33}}$$

$$u = \frac{u^+}{2h}(h+z), \quad v = \frac{v^+}{2h}(h+z), \quad w = \frac{w^+}{2h}(h+z) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} & A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad A_{13} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}, \quad A_{23} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}, \\ & A_{33} = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 \end{aligned}$$

Асимптотика (4), (12) оказалась востребованной для решения краевых задач для слоистых пластин и оболочек (Агаловян,1997; Агаловян, Геворгян, 2005). Эта же асимптотика позволяет решить $3D$ динамические задачи теории упругости для пластин и оболочек. При этом не только вторую и смешанную краевые задачи, а и первую (Агаловян,2000; 2008; 2015a; 2017).

В середине двадцатого века сейсмологи обнаружили, что перед сильным землетрясением происходит значительная деформация поверхности Земли в зоне землетрясения. Тогда же возникла естественная задача (Rikitake)– можноли, измеряя перемещения точек поверхности сейсмоопасных зон, определить напряженно-деформированное состояние (НДС) блока земной коры или литосферной плиты Земли. Асимптотический метод позволяет решить и эту проблему для блоков в виде слоистых пластин и оболочек. Определив НДС, можно осуществить мониторинг его изменения во времени на основе новых измерений, выявить критические состояния и их местоположение. Вычисление же энергии деформации позволит оценить магнитуду ожидаемого землетрясения (Aghalovyan, 2015b; Aghalovyan, Aghalovyan,2021).

Асимптотический метод был использован и в некоторых других областях механики сплошной среды.

С.О. Саркисяном построены:

- Асимптотическая теория магнитоупругости тонких оболочек и пластин (Саркисян, 1992);
- Асимптотическая теория микрополярных упругих тонких пластин и оболочек (Саркисян, 2008;2012);
- Теория микрополярных упругих (термоупругих) тонких пластин и оболочек (Саркисян, 2011a; 2011b;2013;2019a);
- Моменто-мембранная теория упругих тонких оболочек и пластин как модель для двумерных наноматериалов (Саркисян, 2019 b; 2020;2021a;2021b).

Резюмируя изложенное выше, можно констатировать, что созданная в Армении усилиями С. А. Амбарцумяна Научная школа по теории оболочек и пластин занимает достойное место в мировой науке по механике сплошной среды, в частности, по механике тонкостенных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агаловян Л.А.** (1982) О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.// Межвуз.Сб: Изд-во ЕГУ. Вып.2.С .7-12.
2. **Агаловян Л.А.** (1997) Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 414с.
3. **Агаловян Л.А.** (2000) К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин.// Изв. Вузов. Северо-Кавказ. Регион. Естеств. Наук. №3.С.78.
4. **Агаловян Л.А., Геворкян Р.С**.(2005) Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек.Изд. «Гитутюн». Ереван. 468с.
5. **Aghalovyan L.A.**(2008)An asymptotic method for solving three-dimensional boundary value problems of statics and dynamics of thin bodies // Proc. IUTAM Symp. On the Relations of Shells, Plate, Beam and 3D Models, Springer. P. 1-20.
6. **Aghalovyan L.A.**(2015a) Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore.London. World Scientific Publishing. 376 p.
7. **Aghalovyan L.A.** (2015b) On Some Classes of 3D Boundary-Value problems of Statics and Dynamics of Plates and Shells. In book: Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology. Springer International Publishing. Switzerland,P.1-23.
8. **Агаловян Л.А.** (2017) О пространственных динамических задачах пластин и оболочек // Изв. НАНРАМеханика,Т.20, №1, С.3-21.
9. **Aghalovyan M.L., Aghalovyan L.A.** (2021) On one class of spatial problems of layered plates and applications in seismology. In the book: Recent approaches in the theory of plates and plate-like structures (Advanced Structured Materials, 151), Chapter 1, Springer Nature Switzerland AG, pp.1-16.
10. **Амбарцумян С.А.**(1961) Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз. 384с.
11. **Ambartsumyan S.A.** (1964) Theory of anisotropic shells.Washington. 396p.(NASA Technical Translation)
12. **Амбарцумян С.А.**(1967) Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 266с.

13. **Ambartsumyan S.A.** (1971) Theory of anisotropic plates. Technomic Publishing Co., USA. 248p.
14. **Амбарцумян С.А.**(1974) Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. Физматлит.448с.
15. **Амбарцумян С.А.**(1987) Теория анизотропных пластин.Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука. 360с.
16. **Ambartsumyan S.A.** (1991) Theory of anisotropic plates. Hemisphere Publishing Co., USA. 361p.
17. **Амбарцумян С.А.,Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.** (1977) Магнитоупругость тонких оболочек. М.: Наука. 272с.
18. **Амбарцумян С.А.**(1982) Разномодульная теория упругости. М.: Наука. 317с.
19. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** (1991) Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван. Изд.Ер. гос. Ун-та. 143с.
20. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** (1992) Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван. Изд.АН Армении. 124с.
21. **Амбарцумян С.А.,Багдасарян Г.Е.** (1996) Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматгиз. 286с.
22. **Амбарцумян С.А.** (1999) Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван, «Гитутюн». 214с.
23. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** (2010) Прикладная микрополярная теория упругих оболочек. Ереван, Гитутюн. 136с.
24. **Бабич В.М., Булдырев В.С.** (1977) Искусство асимптотики.// Вестник Ленинград. Ун-та. №13. Вып.3. С.5-12.
25. **Багдасарян Г.Е.** (1999) Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Изд. ЕГУ. 440с.
26. **Baghdasaryan G., Mikilyan M.** (2016) Effects of Magnitoelastic Interaction in Conductive Plates and Shells. Springer. ISBN 978-3-319-19161-4. 289p.
27. **Baghdasaryan G., Danoyan Z.** (2018) Magnitoelastic Waves. Springer. ISBN 978-981-10-6762-4. 270p.
28. **Вазов В.** (1968) Асимтотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:Мир. 464с.
29. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** (1973) Асимтотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.:Наука. 272с.
30. **Векуа И.Н.** (1982) Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.:Наука. 285с.
31. **Власов В.З.** (1949)Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.,Л.:Гостехтеориздат. 784с.
32. **Гольденвейзер А.Л.** (1953, 1976) Теория упругих тонких оболочек М.:Наука. 512с.
33. **Гольденвейзер А.Л.** (1962) Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрировния уравнений теории упругости //ПММ. Т.26. Вып.4.С.668-686.
34. **Green A.E.**(1962a) On the Linear Theory of Thin Elastic Shells //Proc. Roy. Soc. Ser. A. Vol.266. №1325.

35. **Green A.E.** (1962b) Boundary Layer Equations in the Linear Theory of Thin Elastic Shells //Proc. Roy. Soc. Ser. A. Vol. 269. №1339.
36. **Доннелл Л.Г.** (1982) Балки, пластины и оболочки. М.:Наука. 567с.
37. **Кильчевский Н.А.** (1963) Основы аналитической механики оболочек. Киев. Изд-во АН УССР. 354с.
38. **Лехницкий С.Г.** (1957) Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат. 463с.
39. **Ломов С.А.** (1981) Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.:Наука. 398с.
40. **Лурье А.И.** (1947) Статика тонкостенных оболочекМ.:Гостехіздат. 252с.
41. **Ляв А.** (1935) Математическая теория упругости. М. ОНТИ.
42. **Муштари Х.М., Галимов К.З.** (1957) Нелинейная теория упругих оболочек. Казань. Таткнигоиздат. 431с.
43. **Naghdi P.M.** (1957) On the Theory of Thin Elastic Shells// Quatr. Appl. Math. Vol.14. , №4, P.369-380.
44. **Найфе А.Х.** (1976) Методы возмущений М.:Мир. 455с.
45. **Новожилов В.В.** (1962) Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 431с.
46. **Пелех Б.Л.** (1973) Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наук. Думка. 248с.
47. **Reissner E.** (1944) On the theory of bending of Elastic plates//J. Math. And Phys. Vol. 23.
48. **Reissner E.** (1945) The Effects of Transversal-Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates//J. Appl. Meh. Vol. 12.
49. **Саркисян С.О.** (1992) Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 260 с.
50. **Саркисян С.О.** (2008) Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости// Прикладная математика и механика. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
51. **Саркисян С.О.** (2011a) Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. Т. 14. № 1. С. 55-66.
52. **Саркисян С.О.** (2011b) Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады Российской академии наук. Т. 436. № 2. С. 195-198.
53. **Саркисян С.О.** (2012) Теория микрополярных упругих тонких оболочек// Прикладная математика и механика. Т. 76. Вып. 2. С. 325-343.
54. **Sargsyan S.H.** (2013) Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells// Journal of Thermal Stresses. Vol. 36. № 11. P. 1200-1216.
55. **Sargsyan S.H.** (2019a)Applied Theory of Dynamics of Micropolar Elastic Thin Shells and Variation Principles// Advanced Structured Materials. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. Springer. V. 103. P. 449-464.
56. **Саркисян С.О.** (2019b)Дискретно-континуальная и континуально-моментная модели графена для деформаций в своей плоскости// Физическая мезомеханика. Т. 22.№ 5. С. 28-33.
57. **Саркисян С.О.** (2020) Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией “сдвиг плюс поворот”// Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23. N4. С. 13-19.

58. **Саркисян С.О.**(2021a) Некоторые вопросы построения континуальной теории и расчёта деформаций графена// Перспективные материалы и технологии. Монография. Глава 32. Минск: Изд-воНАНБеларуси. С. 462-472.
59. **Sargsyan Samvel H.** (2021b) Moment-Membrane model of a plate as a continual model of graphene deformations and a finite element method for its calculation // AIP Conference Proceedings 2448, 020020: https://doi.org/10.1063/5.0073269
60. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** (1963) Пластинки и оболочки. М.: Физматлит. 636с.
61. **Тимошенко С.П.** (1965) Сопротивление материалов. Т.1. М.: Физматлит. 364с.
62. **Филин А.П.** (1987) Элементы теории оболочек. Л. Стройиздат. 384с.
63. **Флюгге В.** (1961) Статика и динамика оболочек. М: Госстройиздат. 306с.
64. **Friedrichs K.O. and Dressler R.F.** (1961) A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates // Comm. PureandAppl. Math. Vol. 14, № 1.
65. **Саркисян С. О.** (2022) Вариационные принципы моментно-мембранной теории оболочек//Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. № 1. С. 38-47.

Сведения об авторе

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН РА, докт. физ.-мат. наук, зав. отделом «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН РА,
Тел: (+37410)529630, E-mail:lagal@sci.am

Поступила в редакцию 16.03. 2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК 539.3
Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-17

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В.

Ключевые слова: смешанная задача, трещина, штамп, межфазный дефект.

Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Hakobyan L.V.
Contact problem for a compound plane with a cut

Keywords: mixed boundary value problem, crack, stamp, interfacial defect

This article discussed the plane stress state of a composite elastic plane with an interfacial crack, on one of the banks of which, with adhesion, an absolutely rigid stamp is pressed that does not reach the endpoints of the crack. Using discontinuous solutions of the Lame equations for a composite plane with an interfacial crack, the solution of the problem is reduced to solving a singular integral equation. The solution of the latter is constructed by the numerical-analytical method of mechanical quadratures. A numerical analysis has been carried out and regularities of changes of contact stresses and the Cherepanov-Rice integral J have been studied depending on the physical-mechanical and geometrical parameters of the problem.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա., Հակոբյան Լ.Վ.
Կոնտակտային խնդիր միջֆազային ճաքով բաղադրյալ հարթության համար

Հիմնաբառեր՝ խառը եզրային խնդիր, ճաք, դրոշմ, միջֆազային դեֆեկտ

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է բաղադրյալ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն պարունակում է միջֆազային ճաք, որի ափերից մեկին է սեղմվում, ճաքի գագաթներ դուրս չեկող, ափին հարակցված բացարձակ կոշտ դրոշմը: Միջֆազային դեֆեկտներով բաղադրյալ հարթության համար Լամեի հավասարումների խզվող լուծումների օգնությամբ խնդրի լուծումը բերվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման, որի լուծումը կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի թվային-անալիտիկ մեթոդով: Թվային հաշվարկի օգնությամբ ուսումնասիրվել են կոնտակտային լարումների և Չերեպանով-Ռայսի J ինտեգրալի փոփոխման օրինաչափությունները:

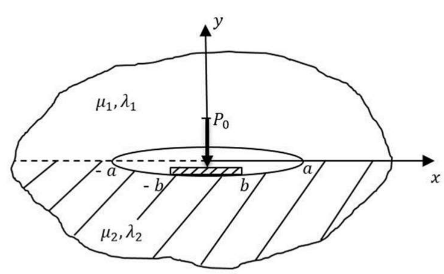
Рассмотрено плоско-деформированное состояние составной упругой плоскости с межфазной трещиной, на один из берегов которой со сцеплением вдавливается абсолютно жёсткий штамп, не доходящий до концевых точек трещины. Используя разрывные решения уравнений Ламэ для составной плоскости с межфазной трещиной, решение задачи сведено к решению сингулярного интегрального уравнения. Решение последнего построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Проведён численный эксперимент и изучены закономерности изменения контактных напряжений и J интеграла Черепанова-Райса в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи.

Введение

Изучение закономерности изменения напряжённо-деформированного состояния вокруг концентраторов напряжений различных типов и разработка методик повышения работоспособности и долговечности конструкций и их деталей всегда было и остается одним из важнейших направлений контактных и смешанных задач теории упругости и механики разрушения. Многие фундаментальные результаты в этом направлении приведены в известных монографиях [1-5]. Укажем также на монографию [6] и на работы [7-10], где получены точные решения ряда задач для составной плоскости и пространства с межфазными трещинами, в один из берегов которых вдавливается абсолютно жёсткий штамп при различных условиях контакта. В работах [11-13] получены замкнутые решения ряда контактных задач для упругой однородной и ортотропной плоскости с конечными трещинами, на один или оба берега которых одновременно действуют абсолютно жёсткие штампы, не доходящие до концевых точек трещины. Что же касается аналогичных задач для кусочно-однородной плоскости, то, как нам известно, они до сих пор не были рассмотрены. Исходя из этого и с целью устранения этой бреши, в настоящей работе изучено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости с трещиной, в один из берегов которой со сцеплением вдавливается абсолютно жёсткий штамп, не доходящий до концевых точек трещины.

Постановка задачи и вывод определяющего уравнения

Пусть составная упругая плоскость из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламэ λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 соответственно, отнесённая к декартовой системе координат Oxy, направление оси Ox которой совпадает с линией соединения разнородных материалов, находится в условиях плоской деформации. Будем полагать, что составная плоскость на линии $y=0$ на интервале $(-a,a)$ ослаблена разрезом и деформируется под воздействием абсолютно жёсткого штампа с плоским основанием, вдавливаемого сосредоточенной нормальной силой P_0 в нижний берег разреза на участке $(-b,b)$ $(0<b<a)$.



Фиг. 1

Считается также, что остальная часть берегов разреза свободна от напряжений и сила P_0 приложена к штампу в точке $x=0$, что исключает его поворот (Фиг.1)

Ставится задача: определить контактные напряжения, действующие под штампом, и J - интеграл Черепанова - Райса в концевых точках разреза $x=\pm a$.

Снабдив индексами 1 и 2 компоненты напряжений и смещений разнородных полуплоскостей, задачу математически можно представить в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \sigma_y^{(2)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x,0); \\ u_1(x,0) + iv_1(x,0) = u_2(x,0) + iv_2(x,0) \end{cases} \quad (|x| > a); \tag{1.1a}$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = 0; & (-a < x < a) \\ \sigma_y^{(2)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x,0) = 0; & (-a < x < -b; \ \& \, b < x < a) \\ u_2(x,0) + iv_2(x,0) = i\delta & (-b < x < b) \end{cases} \quad (|x| < a) \tag{1.1b}$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x,y)$, $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ $(j=1,2)$ - компоненты напряжения, действующие в соответствующих полуплоскостях, $u_j(x,y)$ и $v_j(x,y)$ $(j=1,2)$ – компоненты смещения точек этих полуплоскостей, а δ – жёсткое смещение штампа.

Чтобы построить решение поставленной задачи будем использовать разрывные решения для составной плоскости с межфазными дефектами, приведённые в [6]:

$$\sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \frac{1}{\Delta}\left\{ l_0\chi(x) + l_1 w'(x) + \right. \\ \left. + \frac{il_2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(s)\,ds}{s-x} + \frac{il_3}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{w'(s)\,ds}{s-x} \right\} \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[u_2(x,0) + iv_2(x,0)\right] = -\frac{1}{\Delta}\left\{ \frac{l_0 w'(x)}{\theta_2^{(2)}} - d_0\chi(x) + \right. \\ \left. + \frac{l_2 i}{\pi\theta_2^{(2)}}\int_{-a}^{a}\frac{w'(s)}{s-x}ds + \frac{d_1 i}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(s)\,ds}{s-x} \right\} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.3}$$

где

$$\left[\sigma_y^{(2)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x,0)\right] = -\begin{cases} \chi(x) & (-b < x < b) \\ 0 & (b < |x| < a) \end{cases} \tag{1.4}$$

-комплексная комбинация неизвестных контактных напряжений, действующих под штампом,

$$w(x) = \left[u_1(x,0) + iv_1(x,0)\right] - \left[u_2(x,0) + iv_2(x,0)\right]$$

-комплексная комбинация разности смещений точек берегов трещины.

Здесь использованы обозначения

$$l_0 = \theta_2^{(1)}\left(\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}\right) - \theta_1^{(1)}\left(\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}\right); \qquad l_2 = \theta_1^{(1)}\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(1)}\theta_1^{(2)}$$

$$l_1 = 2\left(\vartheta_2^{(2)}\right)^{-1}\left(\vartheta_1^{(2)} l_0 - \vartheta_2^{(2)} l_2\right); \qquad l_3 = 2\left(\vartheta_2^{(2)}\right)^{-1}\left(\vartheta_1^{(2)} l_2 - \vartheta_2^{(2)} l_0\right);$$

$$d_0 = \frac{\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}}{2}; \quad d_1 = \frac{\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}}{2}; \quad \theta_1^{(j)} = \frac{\mu_j}{2+\alpha_j}; \quad \theta_2^{(j)} = \frac{\left(1+\alpha_j\right)\mu_j}{2+\alpha_j};$$

$$\Delta = \left(\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}\right)^2 - \left(\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}\right)^2; \qquad \alpha_j = \frac{1}{1-2\nu_j}; \quad \left(j=1,2\right),$$

где ν_j $\left(j=1,2\right)$ – коэффициенты Пуассона.

При помощи соотношений (1.2) и (1.3) удовлетворим первому и третьему из условий (1.1b), предварительно продифференцировав последнее. В итоге, придём к системе уравнений:

$$\begin{cases} l_0\chi\left(x\right) + l_1 w'\left(x\right) + \dfrac{il_2}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\chi\left(s\right)ds}{s-x} + \dfrac{il_3}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{w'\left(s\right)ds}{s-x} = 0 & \left(-a<x<a\right) \\ \dfrac{l_0 w'\left(x\right)}{\theta_2^{(2)}} - d_0\chi\left(x\right) + \dfrac{l_2 i}{\pi\theta_2^{(2)}}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{w'\left(s\right)}{s-x}ds + \dfrac{d_1 i}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\chi\left(s\right)ds}{s-x} = 0 & \left(-b<x<b\right) \end{cases} \tag{1.5}$$

Первое из этих уравнений рассмотрим как сингулярное интегральное уравнение относительно функции $\varphi\left(x\right) = w'\left(x\right) + l_2\chi\left(x\right)/l_3$

$$\varphi\left(x\right) + \frac{iq}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi\left(s\right)ds}{s-x} = F\left(x\right) \quad \left(-a<x<a\right), \tag{1.6}$$

где

$$F\left(x\right) = \frac{l_0 l_3 - l_1 l_2}{l_1 l_3}\chi\left(x\right); \;\; q = l_3 / l_1,$$

и выразим $w'\left(x\right)$ через функцию $\chi\left(x\right)$. При этом должны быть обеспечены условия непрерывности смещения в концевых точках трещины и условие равновесия штампа, т.е. условия

$$\int_{-a}^{a} w'\left(x\right)dx = 0\,; \quad \int_{-a}^{a}\chi\left(x\right)dx = \int_{-b}^{b}\chi\left(x\right)dx = P_0 \tag{1.7}$$

или

$$\int_{-a}^{a}\varphi\left(x\right)dx = l_2 P_0 / l_1 \tag{1.8}$$

Решение уравнения (1.6) при условии (1.8) следующее [4,6]:

$$\varphi\left(x\right) = \frac{1}{1-q^2}\left\{F\left(x\right) + \frac{q\omega\left(x\right)}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{F\left(s\right)ds}{\omega\left(s\right)\left(s-x\right)}\right\} + d\omega\left(x\right) \tag{1.9}$$

$$\left(-a<x<a\right)$$

где

$$\omega(x)=(x+a)^{-1/2+i\gamma}(a-x)^{-1/2-i\gamma};\ d=\frac{l_2\operatorname{ch}(\pi\gamma)}{\pi l_3}P_0;\quad g=\frac{1+q}{1-q};$$

$$\left(\gamma=\frac{1}{2\pi}\ln|g|=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu_1+æ_1\mu_2}{\mu_2+æ_2\mu_1};\ \mu_j=\frac{E_j}{2(1+\nu_j)};\ æ_j=3-4\nu_j;\ j=1,2\right)$$

Подставляя в (1.9) значение $F(x)$, после некоторых выкладок, используя вторую из формул (1.7), получим

$$w'(x)=-\frac{D}{l_1^2-l_3^2}\chi(x)-\frac{A\omega(x)}{\pi i\left(l_1^2-l_3^2\right)}\int_{-b}^{b}\frac{\chi(s)\,ds}{\omega(s)(s-x)}+d\omega(x) \qquad (1.10)$$

$$(-a<x<a)$$

$$A=l_0l_3-l_1l_2=-2\Delta\left(\left(\vartheta_2^{(1)}\right)^2-\left(\vartheta_1^{(1)}\right)^2\right);\quad D=l_2l_3-l_0l_1=-\frac{\vartheta_1^{(2)}}{\vartheta_2^{(2)}}A.$$

Из первого уравнения (1.5) также можем записать

$$\frac{i}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{w'(s)\,ds}{s-x}=-\frac{l_0}{l_3}\chi(x)-\frac{l_1}{l_3}w'(x)-\frac{il_2}{\pi l_3}\int_{-b}^{b}\frac{\chi(s)\,ds}{s-x}.$$

Учитывая формулу (1.4), при помощи полученного соотношения и формулы (1.10), из второго уравнения (1.5) для определения комплексной комбинации контактных напряжений $\chi(x)$ получим следующее определяющее сингулярное интегральное уравнение второго рода:

$$\chi(x)+\frac{q_*}{\pi i}\int_{-b}^{b}\frac{\chi(s)\,ds}{s-x}+\int_{-b}^{b}K(s,x)\chi(s)\,ds=f(x)\quad(-b<x<b) \qquad (1.11)$$

где

$$q_*=\frac{\vartheta_2^{(2)}}{\vartheta_1^{(2)}};\qquad K(s,x)=-\frac{\vartheta_2^{(2)}\mu_1^2}{\pi iæ_1\vartheta_1^{(2)}l_3}\frac{\left[\omega(x)-\omega(s)\right]}{\omega(s)(s-x)};$$

$$f(x)=-\frac{4P_0l_2\mu_1^2\mu_2^2\operatorname{ch}(\pi\gamma)\omega(x)}{\pi æ_1æ_2\vartheta_1^{(2)}\vartheta_2^{(2)}l_3^2}.$$

Уравнение (1.11) нужно рассматривать при втором условии в (1.7):

$$\int_{-b}^{b}\chi(x)\,dx=P_0. \qquad (1.12)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению определяющего сингулярного интегрального уравнения (1.11) при условии (1.12).

Решение определяющего сингулярного интегрального уравнения

Решение определяющего сингулярного интегрального уравнения (1.11) будем строить численно-аналитическим методом механических квадратур. Для этого уравнение (1.11) при помощи замены переменных $x = b\eta,\ s = b\xi$ сформулируем на интервале $(-1,1)$ и введя обозначения

$$\psi(x) = b\chi(x)/P_0; \quad K_*(\eta,\xi) = bK_*(b\eta,b\xi), \quad f_*(\eta) = bf(b\eta)/P_0$$

запишем в виде:

$$\psi(\eta) + \frac{q_*}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + \int_{-1}^{1}K_*(\xi,\eta)\psi(\xi)ds = f_*(\eta) \qquad (-1 < x < 1) \tag{2.1}$$

При этом условие (1.12) принимает вид

$$\int_{-1}^{1}\psi(s)ds = 1 \tag{2.2}$$

Нетрудно показать, что решение уравнения (2.1) в концевых точках интервала имеет осциллирующую особенность $1/2 \mp i\beta$, т.е. его можно представить в виде:

$$\psi(\eta) = \psi_*(\eta)(1+\eta)^{-1/2+i\beta}(1-\eta)^{-1/2-i\beta} \tag{2.3}$$

где

$$G = \frac{1-q_*}{1+q_*}, \quad \beta = \frac{\ln|G|}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}\ln æ_2\,,$$

а $\psi_*(\eta)$ – непрерывная ограниченная функция на интервале $[-1,1]$.

Далее, подставляя выражение функции $\psi(t)$ из (2.3) в (2.1) и (2.2), используя квадратурные формулы, приведённые в [14], по обычной процедуре, придём к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах квадратурной формулы.

После решения этой системы, при помощи интерполяционной формулы Лагранжа, восстанавливается функция $\psi_*(\eta)$ и определяются все необходимые механические характеристики поставленной задачи.

Приведём формулы для определения безразмерного J- интеграла Черепанова-Райса в концевых точках трещины. Для этого будем использовать первое соотношение (1.2), которое при $|x| > a$ имеет вид:

$$\sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \frac{il_2}{\pi\Delta}\int_{-b}^{b}\frac{\chi(s)ds}{s-x} + \frac{il_3}{\pi\Delta}\int_{-a}^{a}\frac{w'(s)ds}{s-x} \tag{2.4}$$

Подставляя сюда значение $w'(x)$ из (1.10) и используя значение интеграла [15]

$$\int_a^b \frac{(s-a)^{\nu-1}(b-s)^{-\nu}ds}{s-x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{(b-x)\sin(\pi\nu)}\left|\dfrac{x-a}{b-x}\right|^{\nu-1} & (x < a;\ x > b) \\ -\pi\,\mathrm{ctg}(\pi\nu)\,(x-a)^{\nu-1}(b-x)^{-\nu} & (a < x < b) \end{cases}$$

$$(0 < \mathrm{Re}\,\nu < 1)$$

при $\nu = 1/2 + i\gamma$, получим

$$\sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = -\frac{l_3 \operatorname{sign} x\, \omega_1(x)}{\Delta\, ch(\pi\gamma)}\left[id - \frac{b_*}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{\chi(s)\,ds}{\omega(s)(s-x)}\right] + \Phi(x); \quad (2.5)$$

$$\Phi(x) = \frac{i\left(l_2 + a_* l_3 - i b_* \operatorname{th}(\pi\gamma)\right)}{\pi\Delta}\int_{-b}^{b}\frac{\chi(s)\,ds}{(s-x)}; \quad \omega_1(x) = |a+x|^{-\frac{1}{2}+i\gamma}|a-x|^{-\frac{1}{2}-i\gamma},$$

$$b_* = \frac{æ_2\left(\vartheta_2^{(2)}\right)^2}{2\mu_2^2}; \quad a_* = \frac{æ_2 \vartheta_1^{(2)}\vartheta_2^{(2)}}{2\mu_2^2}.$$

Нетрудно проверить, что функция $\Phi(x)$ ограничена в концевых точках трещины. Теперь в выражении интеграла, входящего в (2.5), перейдем к интервалу $(-1,1)$ и запишем (2.5) посредством функции $\psi(x)$. Получим:

$$\frac{\sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0)}{P_0} = -\frac{\operatorname{sign} x\,\omega_1(x)}{\pi\Delta}\times$$
$$\times\left[i l_2 - \frac{b_* l_3}{l_* \operatorname{ch}(\pi\gamma)}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\omega_*(\xi)(\xi - x/b)}\right] + \Phi_*(x) \quad (|x|>a), \quad (2.6)$$
$$\left(\omega_*(\xi) = (\xi + l_*)^{-\frac{1}{2}+i\gamma}(l_* - \xi)^{-\frac{1}{2}-i\gamma}; \quad l_* = a/b > 1\right).$$

Тогда безразмерные коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений будут определены по формуле:

$$K_I(\pm a) - iK_{II}(\pm a) = \lim_{x\to(-1)^j(a+0)}\frac{\omega_1^{-1}(x)\left[\sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0)\right]}{P_0} =$$
$$= \mp\frac{1}{\pi\Delta}\left[i l_2 - \frac{b_* l_3}{l_* \operatorname{ch}(\pi\gamma)}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\omega_*(\xi)(\xi \mp l_*)}\right],$$

а J - интеграл Черепанова-Райса по формуле [16]:

$$J(\pm a) = \tilde{\mu} K(\pm a)\bar{K}(\pm a); \quad \tilde{\mu} = \frac{P_0}{2a}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right).$$

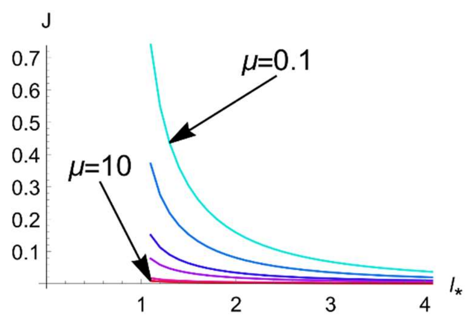
Численные расчеты

Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения контактных напряжений, действующих под штампом, и безразмерных интегралов Черепанова-Райса $J(\pm a)$ в концевых точках трещин в зависимости от соотношения

$\mu = \mu_2 / \mu_1$ и параметра $l_* = a / b$ в случае фиксированных значений коэффициентов Пуассона ν_j $(j = 1,2)$. При этом, считается, что $P_0 / a\mu_1 = 1$.

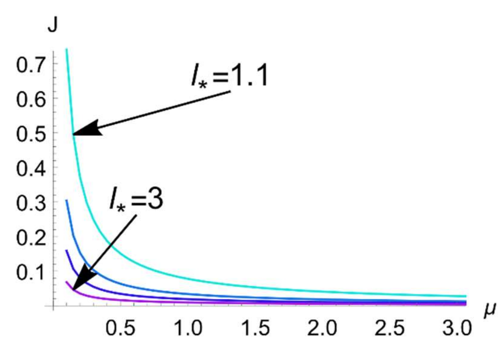
Результаты численных расчётов приведены в виде графиков (Фиг. 2- 3). На Фиг. 2 приведены соответственно графики безразмерных J - интегралов Черепанова-Райса в концевых точках трещины в зависимости от параметра l_* в случае, когда $\nu_1 = 0.2,\ \nu_2 = 0.3,$ и $\mu = 0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 1,\ 5,\ 10$.

Они показывают, что при удалении штампа от концевых точек трещины значение J - интеграла Черепанова-Райса уменьшается. При этом, чем жёстче верхняя полуплоскость, тем меньше значение J - интеграла.



Фиг. 2

На Фиг. 3 приведены графики безразмерных J - интегралов Черепанова-Райса в концевых точках трещины в зависимости от параметра μ в случае, когда $\nu_1 = 0.3$,



$\nu_2 = 0.2$ и $l_* = 1.1, 1.5, 2, 3$.

Фиг. 3

Из них явствует, что при уменьшении параметра μ, что можно считать уменьшением μ_2 при постоянном значении μ_1, J - интеграл Черепанова-Райса в концевых точках трещины увеличивается. При этом, чем больше расстояние концевых точек штампа от концевых точек трещины, тем меньше значение J - интеграла Черепанова-Райса.

Численные расчеты показывают также, что контактные напряжения мало зависят как от параметра μ, так и от параметра l_*.

Заключение

Таким образом, методами сингулярных интегральных уравнений и механических квадратур получено решение задачи о вдавливании абсолютно жёсткого штампа, не доходящего до концевых точек трещины, в один из берегов межфазной трещины в составной упругой плоскости. Изучены закономерности изменения контактных напряжений и J - интеграла Черепанова-Райса в концевых точках трещины. Показано, что чем ближе концевые точки штампа к концевым точкам трещины, тем больше вероятность распространения трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М. Наука, 1980г.,304с.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.- М.: Наука, 1982.- 344с.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
5. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жёстких линейных включений и трещин в деформируемом теле. - Киев: Наукова думка, 1983.-288с.
6. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2014. 322с.
7. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, No4, с.57-65.
8. Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жёсткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве //В сб. трудов межд. конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посв. 95-летию со дня рожд. акад. Н.Х.Арутюняна, Ереван-2007, с.45-51.
9. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жёстком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
10. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №3. С. 31-46.

11. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Контактная задача для ортотропной плоскости с разрезом. //Механика композитных материалов, т.49, № 5, 2013г., с.757-772.
12. Мхитарян С.М. О напряжённо-деформационном состоянии упругой бесконечной пластины с трещиной, расширяющейся посредством вдавливания в неё гладкого тонкого включения. // Изв. НАН РА, Механика, 2019(72), №4, с.38-64
13. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Контактная задача для однородной плоскости с трещиной. //Известия НАН РА, Механика, т.73, № 4, 2020г, с. 3-12 .
14. Саакян А.В. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные. // Известия РАН, Механика твердого тела, 2012, №6, сс.116-121.
15. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. (Специальные функции)- М.: Наука, 1983.- 751с.
16. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т1., Т2 под редакцией Ю. Мураками. М.: Мир, 1990, 1014с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм–доктор физ.-мат. наук, проф., тел.: (37410) 568188, эл. почта: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн – кандидат физ.-мат. наук, ,тел.: (37410) 568188, эл. почта: amirjanyan@gmail.com

Акопян Лусине – кандидат физ.-мат. наук, ,тел.: (37410) 564890, эл. почта: lusine.vahram.hakobyan@gmail.am

Поступила в редакцию 07.03.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК 539.3
Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-27

РЕЗОНАНСЫ В ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Багдасарян Г.Е., Сагоян Р.О., Варданян И.А.

Ключевые слова: Ортотропные оболочки, сверхзвуковой поток газа, резонанс, вынужденные колебания.

Բաղդասարյան Գ.Ե., Սաղոյան Ռ.Օ., Վարդանյան Ի.Ա.

Ռեզոնանսներ օրթոտրոպ թաղանթների ստիպողական ոչ գծային տատանումներում

Հիմնաբառեր:Օրթոտրոպ թաղանթներ, գազի գերձայնային հոսանք, ռեզոնանս, ստիպողական տատանումներ

Դիտարկված է կրկնակի կորության ուղղանկյուն օրթոտրոպ թաղանթի ոչ գծային տատանումների խնդիրը: Ոչ գծային խնդիրների լուծման անալիտիկ մեթոդի հիման վրա, ուսումնասիրվել է խնդրի ոչ գծայնության ազդեցությունը տատանողական պրոցեսի բնութագրիչների վրա: Ցույց է տրված, որ տատանումների ոչ գծային լինելը հանգեցնում է էապես նոր տեսակի ռեզոնանսների ի հայտ գալուն՝ օբերտոնների և սեփական տատանումների պատիկ հաճախականությունների վրա: Հոդվածում ստացված են բանաձևեր, որոնք ցույց են տալիս ամպլիտուդա-հաճախության կախվածության բնույթը և այդ բանաձևերը կարող են հիմք հանդիսանալ դիտարկվող թաղանթի ոչ գծային տատանումների բնութագրերի վրա անիզոտրոպիայի և ընդլայնական սահքերի ազդեցությունն ուսումնասիրելու համար: Առաջարկված է ամպլիտուդա-հաճախականության կախվածության կորի վրա սահմանային և բիֆուրկացիայի կետերի հայտնաբերման մեթոդ:

Baghdasaryan G.Y., Saghoyan R.O., Vardanyan I.A.

Resonances in forced nonlinear vibrations of orthotropic shells

Keywords: Orthotropic shells; supersonic gas flow; resonance, forced vibrations.

The problem of nonlinear vibrations of an orthotropic shallow shallow shell of double curvature, rectangular in plan, is considered. On the basis of the analytical method for solving nonlinear vibration problems, proposed in [4,6], the influence of problem nonlinearity on the characteristics of oscillatory process is studied. It is shown that the oscillation nonlinearity leads to the appearance of essentially new types of resonances at overtones and at multiple frequencies of natural oscillations. In this paper, the obtained formulas showing the nature of amplitude-frequency dependence can become the basis for studying the effect of anisotropy and transverse shears on the characteristics of nonlinear oscillations of the shell under consideration. A method for finding limit points and bifurcation points on the curve of amplitude-frequency dependence is proposed.

Рассматривается задача нелинейных колебаний прямоугольной в плане ортотропной пологой оболочки двоякой кривизны. На основе аналитического метода решения нелинейных задач колебаний, предложенного в работах [4,6], исследовано влияние нелинейности задачи на характеристики колебательного процесса. Показано, что нелинейность колебаний приводит к появлению существенно новых типов резонансов на обертонах и на кратных частотах собственных колебаний. Полученные в работе формулы, показывающие характер амплитудно-частотной зависимости, могут стать основой для исследования влияния анизотропии и поперечных сдвигов на характеристики нелинейных колебаний рассматриваемой оболочки. Предложен способ нахождения предельных точек и точек бифуркации на кривой амплитудно-частотной зависимости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую ортотропную пологую оболочку постоянной толщины h. Пусть материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет три плоскости упругой симметрии, главные направления которых совпадают с направлениями ортогональных координатных линий α, β, γ. Координатная поверхность (α, β) совпадает со срединной поверхностью оболочки. Считается, что геометрия срединной поверхности оболочки совпадает с геометрией плоскости и главные кривизны k_α и k_β при дифференцировании ведут себя как постоянные.

Принимаются следующие предположения [1,2].

а) по толщине оболочки нормальные перемещения остаются неизменными,

б) нормальные напряжения σ_γ пренебрежимо малы по сравнению с прочими напряжениями,

в) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$, согласно гипотезам С.А.Амбарцумяна, имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma} &= f(\gamma)\varphi(\alpha,\beta,t) \\ \tau_{\beta\gamma} &= f(\gamma)\psi(\alpha,\beta,t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\varphi(\alpha,\beta,t)$ и $\psi(\alpha,\beta,t)$ – искомые функции, $f(\gamma)$ – функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине оболочки, причем $f(\pm h/2)=0$,

г) нормальные перемещения $w(\alpha,\beta,t)$ сравнимы с толщиной оболочки.

Учитывая принятые предположения и поступая обычным образом [1-3], получим следующую систему дифференциальных уравнений движения оболочки

$$\begin{gathered} a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^4} + (a_{66}-2a_{12})\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4} + \\ + k_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + k_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 = 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} 2B_{55}I_0(h/2)\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} + 2B_{44}I_0(h/2)\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta} + k_\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2} + k_\beta\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2} + \\ + \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + Z(\alpha,\beta,t) = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}+\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}+2B_{55}I_0\left(h/2\right)\Phi_1=$$
$$=I_1\left(B_{11}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\alpha^2}+B_{66}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\beta^2}\right)+I_1\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\alpha\partial\beta} \tag{1.4}$$

$$D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}+2B_{44}I_0\left(h/2\right)\Phi_2=$$
$$=I_1\left(B_{22}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\beta^2}+B_{66}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\alpha^2}\right)+I_1\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\alpha\partial\beta} \tag{1.5}$$

$$I_0\left(\gamma\right)=\int_0^{\gamma}f\left(\gamma\right)d\gamma,\qquad I_1\left(\gamma\right)=\int_0^{\gamma}\gamma I_0\left(\gamma\right)d\gamma\qquad\left(D_{ik}=B_{ik}\frac{h^3}{12}\right)$$

Здесь $w\left(\alpha,\beta,t\right)$ – прогиб оболочки, D_{ik} – жесткость при изгибе, B_{ik} и a_{ik} – обычные коэффициенты упругости [1], $\Phi_1=B_{55}^{-1}\varphi\left(\alpha,\beta,t\right)$, $\Phi_2=B_{44}^{-1}\psi\left(\alpha,\beta,t\right)$ – функции, характеризующие поперечные сдвиги, $F=F\left(\alpha,\beta,t\right)$ – функция напряжений, через которую внутренние усилия представляются так:

$$T_\alpha=\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2},\qquad T_\beta=\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2},\qquad S=-\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}.$$

Поперечная нагрузка $Z\left(\alpha,\beta,t\right)$ складывается из сил инерции, сил демпфирования и нормально приложенной заданной нагрузки $f\left(\alpha,\beta,t\right)$

$$Z=-\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho_0 h\lambda\frac{\partial w}{\partial t}+f\left(\alpha,\beta,t\right) \tag{1.6}$$

Здесь ρ_0 – плотность материала оболочки, λ – коэффициент линейного затухания, t – время. Легко заметить, что система (1.2)-(1.5), за исключением уравнения неразрывности (1.2), содержит искомые функции Φ_1 и Φ_2, характеризующие учет поперечных сдвигов.

Здесь, в отличие от обычной системы уравнений нелинейной теории оболочек, вместо двух уравнений имеем четыре уравнения.

Рассматривается шарнирно опертая пологая оболочка, края которой свободно смещаются в плане. Тогда имеем следующие граничные условия:

при $\alpha=0$, $\alpha=a_1$

$$w=0,\quad S=0,\quad T_\alpha=0,\quad \psi=0,\quad M_\alpha=0 \tag{1.7}$$

при $\beta = 0$, $\beta = a_2$

$$w = 0, \quad S = 0, \quad T_\beta = 0, \quad \varphi = 0, \quad M_\beta = 0 \tag{1.8}$$

Здесь T_α, T_β и S – средние усилия на кромках оболочки,

$$M_\alpha = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + I_1\left(B_{11}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\alpha^2} + B_{66}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\beta^2}\right)$$

$$M_\beta = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + I_1\left(B_{22}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\beta^2} + B_{66}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\alpha^2}\right)$$

Таким образом, задача колебаний рассматриваемой оболочки сводится к решению системы нелинейных уравнений (1.2)-(1.5) при граничных условиях (1.7)-(1.8), когда Z представлена выражением (1.6).

2. Сведение поставленной задачи к исследованию нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

Приближенное решение системы (1.2)-(1.5) будем искать в виде

$$w(\alpha,\beta,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f_{ik}(t)\sin\lambda_i\alpha\cdot\sin\mu_k\beta \tag{2.1}$$

$$\Phi_1(\alpha,\beta,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p_{ik}(t)\cos\lambda_i\alpha\cdot\sin\mu_k\beta$$

$$\Phi_2(\alpha,\beta,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} R_{ik}(t)\sin\lambda_i\alpha\cdot\cos\mu_k\beta \qquad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a_1},\ \mu_k = \frac{k\pi}{a_2}\right). \tag{2.2}$$

Здесь $f_{ik}(t)$, $p_{ik}(t)$, $R_{ik}(t)$ – подлежащие определению функции времени t. Рассматривая (2.1) замечаем, что часть граничных условий (1.7)-(1.8) удовлетворяются.

Подставляя (2.1) в (1.2), найдем функцию $F(\alpha,\beta,t)$, удовлетворяющую граничным условиям (1.7)-(1.8).

Затем, подставляя значения w, Φ_1 и Φ_2 соответственно из (2.1) и (2.2) в (1.4) и (1.5), получим линейную алгебраическую систему относительно $p_{ik}(t)$ и $R_{ik}(t)$. Решая эту систему, выразим Φ_1 и Φ_2 через функции $f_{ik}(t)$.

Для определения $f_{ik}(t)$ воспользуемся уравнением (1.3). Подставляя (2.1) и (2.2) и найденные выражения для F в (1.3) и решая его методом Бубнова-Галеркина, для $f_{ik}(t)$ получим систему

$$\frac{d^2 f_{ik}}{dt^2} + 2\lambda \frac{df_{ik}}{dt} + \omega_{ik}^2 f_{ik} + \Psi_{ik}\left(f_{11},...,f_{nm},M\right) = 0$$
$$\left(i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,m\right) \tag{2.3}$$

где ω_{ik} – частота собственных колебаний оболочки, Ψ_{ik} – некоторые нелинейные функции.

В дальнейшем ограничимся случаем одночленной аппроксимации. Тогда вместо системы (2.3) в случае цилиндрической панели $\left(k_\alpha = 0\right)$ получаем следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно безразмерной функции $y = f_{11}/h$:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y - ly^2 + dy^3 = q\left(t\right). \tag{2.4}$$

Здесь

$$\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{1}{\rho_0 h}\left[2I_0\left(h/2\right)B_{55}\lambda_1 P_{11} + 2I_0\left(h/2\right)B_{44}\lambda_1\mu_1 R_{11} + \frac{k_\beta^2\lambda_1^4}{\Delta_{11}}\right],$$

$$q\left(t\right) = \frac{4}{\rho_0 h}\frac{1}{a_1 a_2}\int_0^{a_1}\int_0^{a_2} f\left(\alpha,\beta,t\right)\sin\lambda_1\alpha\sin\mu_1\beta\, d\alpha d\beta,$$

$$l = -L\omega_1^2\delta_{11}, \quad d = Q\gamma_{11}\omega_1^2,$$

где

$$P_{11} = \frac{\lambda_1}{Q_{11}}\left\{\left[D_{11}\lambda_1^2 + \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\mu_1^2\right]\left[2B_{44}I_0\left(h/2\right) + I_1\left(B_{22}\mu_1^2 + B_{66}\lambda_1^2\right)\right] - \right.$$
$$\left. - I_1\left(B_{12} + B_{66}\right)\left[D_{22}\mu_1^2 + \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\lambda_1^2\right]\mu_1^2\right\},$$

$$R_{11} = \frac{\mu_1}{Q_{11}}\left\{\left[D_{22}\mu_1^2 + \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\lambda_1^2\right]\left[2B_{55}I_0\left(h/2\right) + I_1\left(B_{11}\lambda_1^2 + B_{66}\mu_1^2\right)\right] - \right.$$
$$\left. - I_1\left(B_{12} + B_{66}\right)\left[D_{11}\lambda_1^2 + \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\mu_1^2\right]\lambda_1^2\right\},$$

$$Q_{11} = \left[2B_{55}I_0\left(h/2\right) + I_1\left(B_{11}\lambda_1^2 + B_{66}\mu_1^2\right)\right]\left[2B_{44}I_0\left(h/2\right) + I_1\left(B_{22}\mu_1^2 + B_{66}\lambda_1^2\right)\right] -$$
$$- I_1^2\left(B_{12} + B_{66}\right)^2\lambda_1^2\mu_1^2;$$

$$L = \frac{1}{\rho_0 h\omega_1^2}, \quad Q = \frac{h}{16\rho_0\omega_1^2}, \quad \delta_{11} = -\frac{8\lambda_1^2\mu_1^2}{3\pi^2}\left(\frac{1}{a_{11}\lambda_1^2} + \frac{4\lambda_1^2}{\Delta_{11}}\right)k_\beta h,$$

$$\gamma_{11} = \frac{\lambda_1^2}{a_{22}} + \frac{1}{a_{11}}\mu_1^4, \qquad \Delta_{11} = a_{11}\lambda_1^4 + \left(a_{66} - 2a_{12}\right)\lambda_1^2\mu_1^2 + a_{22}\mu_1^4.$$

Здесь ω_1 – частота первой формы малых собственных колебаний оболочки.

3. Исследование основного нелинейного уравнения

В предыдущем пункте получили уравнение (2.4). Пусть $q\left(t\right) = q \cdot \cos\theta t.$

Тогда (2.4) примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + \omega^2 y - ly^2 + dy^3 = q\cos\theta t. \tag{3.1}$$

Член $2\lambda\, dy/dt$ в уравнении (3.1) характеризует затухание системы, где показатель линейного затухания λ определяется из опытов.

Уравнение типа (3.1) исследовано в [4]. Ниже используются основные результаты, полученные в этой работе и в работе [6].

Из уравнения (3.1), пренебрегая нелинейными членами, находим

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = q\cos\theta t. \tag{3.2}$$

решение которого имеет вид

$$y = a \cdot e^{-\lambda t}\cos\left(\omega t + c\right) + b\cos\left(\theta t + \delta\right), \tag{3.3}$$

где a и c произвольные постоянные, а

$$b = \frac{q}{\sqrt{\left(\omega^2 - \theta^2\right)^2 + 4\lambda^2\theta^2}}, \qquad \mathrm{tg}\delta = \frac{2\lambda\theta}{\theta^2 - \omega^2}. \tag{3.4}$$

В (3.3) существенным является второй член, т.к. первый экспоненциально убывает со временем, и решение (3.3) через достаточно большой промежуток времени фактически имеет вид

$$y = b\cos\left(\theta t + \delta\right), \tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.1) в случае, когда $q = 0$ легко можно получить методом последовательных приближений. Имеем

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + ..., \tag{3.6}$$

$$y_1 = b\cos\omega t, \quad y_2 = \frac{lb^2}{2\omega^2} - \frac{lb^2}{6\omega^2}\cos 2\bar{\omega}t, \quad y_3 = -\frac{lb^2}{16\omega^2}\left(\frac{l^2}{3\omega^2} - \frac{d}{2}\right)\cos 3\bar{\omega}t, \tag{3.7}$$

$$\bar{\omega} = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + ..., \tag{3.8}$$

$$\omega_0 = \omega, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \left(\frac{3d}{8\omega} - \frac{5l^2}{12\omega^2}\right) b^2. \tag{3.9}$$

Пусть мы находимся вблизи обычного резонанса, т.е. $\theta = \omega + \varepsilon$. В формуле (3.4) заменив ω на нелинейное значение частоты $\overline{\omega}$ по формуле (3.8), получим [4]

$$b^2\left[\left(\varepsilon - \kappa b^2\right)^2 + \lambda^2\right] = \frac{q^2}{4\omega^2}, \tag{3.10}$$

где $\kappa = \dfrac{3d}{8\omega} - \dfrac{5l^2}{12\omega^2}$.

Уравнение (3.10), начиная со следующего значения $q_{kp} = 8\omega^2\lambda^2 / |\kappa|$, имеет три вещественных корня в определенной области частот [3,4]. Границы этой области определяются условием

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b + \kappa b^2}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\kappa\varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4} = \infty$$

или

$$\varepsilon^2 - 4\kappa\varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4 + \lambda^2 = 0. \tag{3.11}$$

Решая (3.11) совместно с (3.10), находим точки C и D кривой (3.10) (см. Рис.1), в которых а) происходит смена устойчивости на неустойчивость и б) касательные кривой зависимости “амплитуда-частота” в этих точках являются вертикальными. Такие точки называются предельными и определение положения этих точек на указанной кривой является существенным при исследовании устойчивости нелинейных колебаний [6,7]. Отрезок CD соответствует неустойчивым колебаниям системы [6]. В точке C происходит срыв амплитуды, которая скачком падает до точки E. При обратном процессе в точке D амплитуда скачком возрастает до точки B. Это явление сопровождается преодолением некоторого энергетического барьера [7].

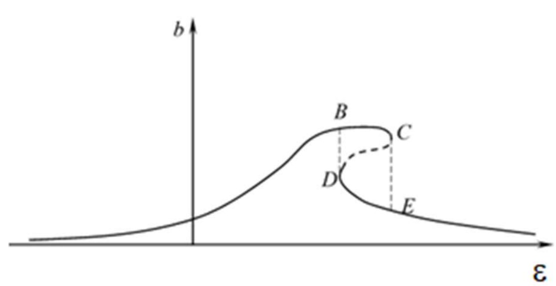


Рис.1

Случай $\theta = \frac{\omega}{2} + \varepsilon$ и аналогичные ему приводят к возникновению резонансов, рассмотренных выше, но с меньшей интенсивностью [4,5].

Пусть $\theta = 2\omega + \varepsilon$. Тогда, аналогичным образом, для амплитуд установившихся колебаний в областях неустойчивости получаются следующие возможные значения:

$$b = 0, \tag{3.12}$$

$$b^2 = \frac{1}{\kappa}\left[\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{lq}{6\omega^2}\right)^2 - \lambda^2}\right], \tag{3.13}$$

$$b^2 = \frac{1}{\kappa}\left[\frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\left(\frac{lq}{6\omega^2}\right)^2 - \lambda^2}\right], \tag{3.14}$$

где

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\left(\frac{lq}{3\omega^2}\right)^2 - 4\lambda^2}. \tag{3.15}$$

Зависимость b от ε изображена на рис.2.

В интервале AB $b = 0$, т.е. резонанс отсутствует. На участке BD значение $b = 0$ неустойчиво, система находится в состоянии резонанса и получается процесс установления колебаний по линии BK.

В точке K амплитуда скачком падает до значения $b = 0$ и в дальнейшем устойчивым является эта ветвь. Решение DE всюду неустойчиво [4-7].

Таким образом, нелинейность колебаний приводит к появлению существенно новых типов резонансов, т.е. резонансов на обертонах и на кратных частотах собственных колебаний.

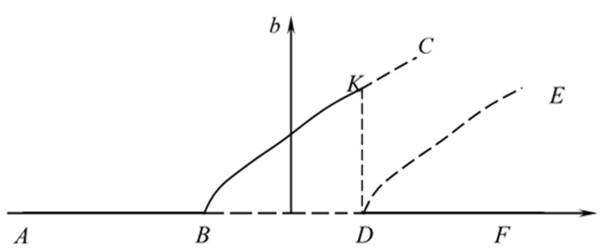


Рис.2

Следует отметить, что эти резонансы имеют автоколебательный характер и существенно отличаются от параметрически возбуждаемых колебаний [7], хотя и возникают на одних и тех же частотах.

В точках B и D происходит бифуркация (разветвление) колебательного состояния: решение, устойчивое до этих точек, после них становится неустойчивым, и наоборот. Исследование резонансов на других частотах не представляет трудностей. Отметим также, что полученные здесь формулы (3.10)-(3.15) позволяют всесторонне исследовать влияние анизотропии и поперечных сдвигов на характеристики рассматриваемых колебаний.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № 21T-2C257.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Наука, Москва, 1974.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Наука, Москва, 1972.
3. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Резонанс в вынужденных нелинейных колебаниях слоистых анизотропных оболочек. Известя АН Арм.ССР, Серия Физико-математические науки, 1961, XIV (1), с. 41-49.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Мосва, Физматгиз, 1958.
5. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости анизотропных оболочек вращения. Известия АН Арм.ССР, Серия Физико-математические науки, 1960, XIII(5), с. 21-30.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва, Физматгиз, 1963.
7. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956

<u>Information about authors:</u>

Baghdasaryan Gevorg Yervand – Academician of the NAS RA, Professor, Main researcher at the Institute of Mechanics NAS RA
Phone.: (010) 355308; E-mail: gevorgb@rau.am

Saghoyan Rafayel Onik – Freelance employer, Institute of Mechanics NAS RA
Phone: (093) 248226; E-mail: rafael1984@mail.ru.

Vardanyan Iren Armen – Freelance employer, Institute of Mechanics NAS RA
Phone.: (091) 191129; E-mail: irena_123@bk.ru

Поступила в редакцию 05.04.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика

УДК 539.3

Doi:10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-36

О КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В МЕХАНИКЕ И БИОМЕХАНИКЕ

Ватульян А. О.

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, итерационные процессы, интегральные уравнения Фредгольма, эластография.

Վատուլյան Ա.Հ.
Գործակցային հակադարձ խնդիրներ և նրանց կիրառությունները մեխանիկայում և բիոմեխանիկայում

Հիմնաբառեր՝ գործակցային հակադարձ խնդիրներ, իտերացիոն պրոցեսներ, Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումներ, առաձգագրություն

Դիտարկված են փոփոխական գործակիցներով օպերատորների համար տարբեր տիպի գործակցային հակադարձ խնդիրներ, դրանց կիրառությունները անհամասեռ կառուցվածքների՝ ֆունկցիոնալ գրադիենտային նյութերից ձողային և գլանային մարմինների նույնականացման խնդիրներում, երբ լրացուցիչ տեղեկությունը վերցվում է մակերևույթից կամ կողաճակատից: Ներկայացված է կիրառությունը առաձգագրության խնդիրներում, երբ նույնականացվում են փափուկ հյուսվածքների հատկությունները օբյեկտի ներսում լրացուցիչ տեղեկությունների առկայության պայմաններում:

Vatulyan A.O.
On coefficient inverse problems and their applications in mechanics and biomechanics

Keywords: coefficient inverse problems, iterative processes, Fredholm integral equations, elastography

Various types of coefficient inverse problems for operators with variable coefficients are considered, their applications to the problems of identification of inhomogeneous structures - functionally graded materials on the example of rod and cylindrical bodies when removing additional information from the surface or end. An application to the problems of elastography in the identification of soft tissue properties with additional information inside the object is presented.

Рассмотрены различные типы коэффициентных обратных задач для операторов с переменными коэффициентами, их приложения к задачам идентификации неоднородных структур - функционально-градиентных материалов на примере стержневых и цилиндрических тел при снятии дополнительной информации с поверхности или торца. Представлено приложение к задачам эластографии при идентификации свойств мягких тканей при дополнительной информации внутри объекта.

Введение

Коэффициентные обратные задачи (КОЗ) - интенсивно развивающийся раздел математический физики, который характеризуют математические проблемы, связанные с определением коэффициентов краевой задачи для некоторой математической модели по некоторой дополнительной информации. Так, например, дополнительная информация для моделей теории упругости и ее обобщений задается в виде значений резонансных частот, в виде информации о полях смещений, измеренных либо на границе, либо внутри области. Подлежащие определению характеристики могут быть постоянными или зависящими от координат коэффициентами дифференциальных операторов, коэффициентами, входящими в граничные условия. Как правило, определение коэффициентов математической модели относится к некорректным задачам, для которых характерны возможная неединственность и неустойчивость по отношению к малым возмущениям входной информации [1]. В настоящее время имеется достаточно много монографий, посвященных различным аспектам постановок и методам решения коэффициентных обратных задач для разных разделов математической физики. Среди многих работ отметим [2-10], посвященные постановкам и анализу нелинейных некорректных проблем, и [11-13], в которых обсуждены различные аспекты численной реализации.

Заметим, что коэффициентные обратные задачи (КОЗ) делятся на два больших класса:

1. определение постоянных коэффициентов модели
2. определение переменных коэффициентов модели

Конечномерные КОЗ и методы их исследования достаточно подробно изучены. Они могут базироваться как на явном представлении решений дифференциальных уравнений и использовании некоторых дополнительных условий (метод Прони, метод квазилинеаризации [13]), минимизации функционала невязки, так и на использовании некоторых итерационных процедур.

Для второго типа КОЗ в случае зависимости искомых параметров-функций от координат операторные уравнения, связывающие заданные и искомые функции, в общем случае неоднородности в явном виде не могут быть построены; решения прямых задач в этом случае могут быть построены лишь с помощью каких-либо численных методов-конечных элементов, конечно-разностных или проекционных; таким образом, КОЗ в этом случае относятся к наиболее трудному классу обратных задач. В настоящее время имеется достаточно большое число монографий, в которых излагаются основные аспекты решения обратных задач, методы регуляризации и численные аспекты решения КОЗ.

Опишем некоторые проблемы, возникающие в различных областях механики и моделирования. Так, сформированные достаточно давно модели (например, классическая модель теплопроводности), опиравшиеся на гипотезы однородности и изотропии, позволили с достаточной степенью точности описывать различные процессы теплоообмена. Эти модели требовали определения лишь определения нескольких базовых параметров из простых физических экспериментов, что позволяло строить аналитические решения для канонических областей либо в виде рядов или интегралов, исследовать влияние параметров задачи, условий нагружения на изучаемый процесс и делать обоснованные прогностические выводы.

Аналогичная ситуация формировалась на протяжении двух столетий и при исследовании деформирования твердых тел. Математическая формулировка проблем деформирования твердых тел на основе простейшего варианта модели (однородное изотропное тело) позволила решить целый ряд актуальных научных и прикладных проблем, в механике придала импульс развитию и совершенствованию инженерных расчетов на прочность и устойчивость, в математике позволила создать теорию общих краевых задач для эллиптических операторов, исследовать свойства решений во многих важных случаях (например, в задачах о концентраторах напряжений для полостей и трещин). Модель однородной теории упругости благодаря определению двух упругих постоянных – модуля Юнга и коэффициента Пуассона на основе простых макроэкспериментов (опыты на растяжение и кручение стержней) стала эффективным средством анализа многих проблем не только в механике деформируемого твердого тела, но и в смежных областях (машиностроение, строительство, акустика, геофизика). Отметим, что многие исследования и расчеты на прочность в механике деформируемого твердого тела и в настоящее время базируются на этой апробированной модели.

Вместе с тем отметим, что при исследовании ряда проблем деформирования твердых тел в новых областях (механика композитов и функционально-градиентных структур, геофизика и горная механика, биомеханика) модель однородной среды оказалась недостаточной для адекватного описания деформирования элементов природных и искусственных конструкций. В некоторых ситуациях делались попытки осуществить исследование в рамках осредненных моделей, однако не всегда такое осреднение (и размазывание свойств) было продуктивным и приводило к расхождению результатов расчетов с данными экспериментов. Продвижение в исследовании краевых задач для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами оказалось менее заметным в первую очередь в силу того, что не существует способа построения в аналитическом виде общих решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка (и более высоких порядков) при произвольных зависимостях коэффициентов от координат. Конечно, в научной литературе имеются исследования, в которых решения строятся виде рядов (или с помощью проекционных методов типа Галеркина), однако такая схема, как правило, приводит к решению бесконечных алгебраических систем, для которых не всегда возможно доказать сходимость приближенных решений, полученных на основе метода редукции, к точным. Отметим, что ранее основное внимание при анализе моделей неоднородной теории упругости уделялось как общим вопросам существования решений, так и способам построения усредненных моделей в средах с быстро меняющимися коэффициентами, весьма важным с точки зрения теории пластин и оболочек и общей механики композитов.

Заметим, что для анализа равновесия или колебаний и использования модели неоднородной теории упругости необходимо знать в самом простом случае непрерывно-неоднородного (или кусочно-однородного) изотропного тела три функции (модули Ламе и плотность среды). При этом физические характеристики задаются при помощи функциональных зависимостей, которые должны быть предварительно определены из некоторых экспериментов или наблюдений, как правило, связанных с измерением граничных или внутренних полей смещений при статическом нагружении или при возбуждении колебаний некоторой нагрузкой. Наиболее часто такие зависимости предполагаются одномерными (особенно при использовании моделей слоя, полупространства или слоистого полупространства), а наиболее распространенный способ их определения - анализ отклика исследуемого объекта при возможном варьировании способа нагружения. При этом задача определения нескольких функций приводит к исследованию довольно сложных нелинейных обратных задач для эллиптических и гиперболических операторов, различные аспекты которой стали предметом исследования относительно недавно. Отметим, что довольно часто принимаемый кусочно-постоянный характер изменения искомых характеристик в ряде ситуаций оправдан, поскольку это предположение существенно сужает область поиска и значительно упрощает исследование обратных задач, однако может привести к существенному искажению результатов идентификации, и, как следствие, к ошибкам при прогнозировании ресурса конструкции. В рамках такого подхода решение исходной некорректной задачи сводится к определению конечного числа параметров в некоторой ограниченной области n -мерного пространства поиска. Такой поиск в последние годы осуществляется на основе метода регуляризации на компактных множествах, а среди конечномерных вариантов отметим как традиционные градиентные методы нахождения минимумов функционалов невязки, так и нейросети и генетические алгоритмы.

Настоящая работа посвящена некоторым аспектам постановки и исследования ряда обратных задач для моделей неоднородной теории упругости и биомеханики мягких тканей по определению переменных упругих характеристик при задании дополнительной информации на границе тела и внутри его и их приложениям.

Постановка и решение задачи.

Рассмотрим установившиеся колебания ограниченной области V с кусочно-гладкой границей $S = S_u \cup S_\sigma$, а n_j - компоненты единичного вектора внешней нормали к S. Сформулируем постановку коэффициентных обратных задач в нескольких вариантах.

Вариант 1-задание (измерение) граничных полей смещений. Этот вариант предлагается реализовывать при определении материальных характеристик материала, зависящих от координат, в случае задания дополнительной информации на границе объекта.

Уравнения установившихся колебаний имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad i = 1,2,3 \tag{1}$$

Определяющие соотношения

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} \tag{2}$$

и граничные условия смешанного типа

$$u_i\big|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j\big|_{S_\sigma} = p_i \tag{3}$$

Здесь c_{ijkl} - компоненты тензора упругих модулей, являющиеся кусочно-непрерывными функциями координат, которые удовлетворяют обычным условиям симметрии и положительной определенности, ρ -плотность среды. Сформулируем задачу определения коэффициентов дифференциального оператора теории упругости по дополнительной информации

$$u_i\big|_{S_\sigma} = f_i(x,\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{4}$$

Такая постановка соответствует измерению поля перемещений на части границы S_σ, на которой осуществляется нагружение, в некотором диапазоне частот. Отметим, что в такой общей постановке задача является нелинейной и построение решения осуществляется на основе построения некоторого итерационного процесса. Приведем постановку в случае изотропного тела, для которого закон Гука (2)

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{5}$$

где λ, μ - параметры Ляме.

Для решения обратной задачи по восстановлению трех переменных характеристик λ, μ, ρ используется несколько подходов, в основе которых лежит итерационный метод типа Ньютона[14] и его модификации. Сформулируем соответствующие операторные уравнения. Для нахождения трех характеристик будем использовать три режима зондирования, которые характеризуются как разными областями приложения нагрузки, так и способом ее приложения, обозначая эти нагрузки через $p_i^{(m)}, m = 1,2,3$; соответствующие поля смещений будем обозначать $u_i^{(m)}$.

Для упругих тел можно пользоваться обобщенным соотношением взаимности и полученным на основе него операторным соотношением [13]. При исследовании коэффициентных обратных задач, состоящих в определении некоторых функций, характеризующих неоднородность, для общих линейных моделей механики сплошной среды также можно опираться на слабую формулировку, которая весьма часто используется и для исследования прямых задач.

Перейдем к слабой постановке, для чего спроектируем уравнение движения (1) на элемент v, представляющий собой вектор-функцию с дифференцируемыми компонентами и удовлетворяющий граничным условиям на S_u (далее будем считать, что $v \in H_0(V)$). Используя теорему Гаусса-Остроградского и учитывая граничные условия в (3), приведем полученное равенство к виду $A(a,u,v) = b(v)$, где $A(a,u,v)$ есть трилинейная форма (линейная по каждому аргументу) переменных a,u,v, $b(v)$-линейная форма.

Так, слабая постановка для анизотропной теории упругости представлена в [13] и состоит в нахождении компонент вектора смещений, причем для трилинейной и линейной форм имеем соответственно

$$\begin{gathered} A(a,u,v) = \int\limits_V 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho)dV,\ \ b(v) = \int\limits_{S_\sigma} p_i v_i dS, \omega \in [\omega_1, \omega_2] \\ 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho) = C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} - \rho\omega^2 u_i v_i \end{gathered} \tag{6}$$

В изотропном случае для определяющих соотношений вида (5) из слабой постановки (6), полагая $v_i = u_i^{(m)}$, имеем следующую систему нелинейных интегральных уравнений типа Урысона

$$\int\limits_V \left[\lambda(u_{k,k}^{(m)})^2 + \mu(u_{i,j}^{(m)} + u_{j,i}^{(m)})(u_{i,j}^{(m)} + u_{j,i}^{(m)}) - \rho\omega^2 u_i^{(m)} u_i^{(m)}\right]dV = \int\limits_{S_\sigma} p_i^{(m)} f_i^{(m)} dS, \tag{7}$$

Особенностью этой системы 3 уравнений является знакоопределенность ядер при неизвестных функциях λ, μ, ρ. Возможное нарушение знакоопределенности в зависимости от компонент тензора деформаций имеется в случае несжимаемого материала, которое будет обсуждено ниже в варианте 2.

Система нелинейных операторных уравнений исследуется на основе операторного метода Ньютона [14], при этом требуется нахождение производных по Фреше от основного оператора. В работе удалось построить линейную систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами, позволяющую находить поправки к некоторому начальному приближению. Начальное приближение отыскивается обычно в классе простых функций - линейных или кусочно-линейных путем минимизации функционала невязки.

$$J_n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{S\sigma} (f - u^{(n)})^2 \, dS d\omega$$

Отметим также работу [15], в которой представлен подобный подход в КОЗ теории упругости.

Исследования в рамках предлагаемого подхода могут быть использованы при анализе колебаний кругового цилиндра и решении КОЗ при общих двумерных законах неоднородности. К настоящему времени исследования коэффициентных обратных задач проведены для следующих цилиндрических структур в случае одномерных законов неоднородности двух типов:

1. Для радиальных законов неоднородности при изучении деформирования конечного цилиндра [16-17], где сформулированы соответствующие итерационные процессы и решен ряд задач и неоднородного цилиндрического волновода, где ситуация сложнее и связана с нахождение вычетов для мероморфных функций, заданных в наборе точек [18].

2. Для осевых законов неоднородности при исследовании колебаний цилиндрических стержней кругового поперечного сечения - продольных, изгибных, крутильных. Отметим, что при выполнении соотношения радиус -длина $a/l \le 0.2$ можно использовать для моделирования одномерные теории. Отметим, что в этом случае обратная задача разделяется на две подзадачи. Из совместного анализа задач для продольных и изгибных колебаний определяются модуль Юнга и плотность, а из задачи для крутильных колебаний находится модуль сдвига $G = \mu$.

Опишем подробно первую подзадачу для консольно закрепленного стержня в соответствии с [19].

Будем считать, что в задачах о продольных колебаниях на торец – действует единичная сила и снимается АЧХ с этого же торца; в задаче об изгибных колебаниях возмущение создается сосредоточенным моментом единичной амплитуды на торце и снимается АЧХ для угла поворота.

Далее сформулируем обратную задачу об определении двух функций $g(x)$- безразмерный модуль Юнга и $r(x)$ - безразмерная плотность, считая, что известна дополнительная информация об амплитудно-частотных характеристиках стержней вида

$$u(1,\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \in [0, \lambda_1] \tag{8}$$

$$w'(1,\lambda) = \phi(\lambda), \quad \lambda \in [0, \lambda_2] \tag{9}$$

В работе [16] построены интегральные уравнения вида (7) для стержней, в которых возбуждаются продольные и изгибные колебания, которые имеют вид

$$f(\lambda)=\int_0^1 g(\xi)u'^2(\xi,\lambda)d\xi-\lambda\int_0^1 r(\xi)u^2(\xi,\lambda)d\xi, \lambda\in[0,\lambda_1] \quad (10)$$

$$\phi(\lambda)=\int_0^1 g(\xi)w''^2(\xi,\lambda)d\xi-\gamma\lambda\int_0^1 r(\xi)w^2(\xi,\lambda)d\xi, \lambda\in[0,\lambda_2] \quad (11)$$

Здесь u и w соответственно амплитуды продольных и изгибных перемещений стержня, которые, вообще говоря, являются операторами от искомых функций $g(x)$ и $r(x)$; разложения этих функций в степенные ряды с операторными коэффициентами рекуррентной структуры также представлены в [19]; $\lambda=\omega^2$.

Итерационный процесс, описанный выше, приводит на n-той итерации к последовательному решению задач для стержней с известными переменными характеристиками и нахождению поправок из системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с непрерывными ядрами для поправок вида

$$\int_0^1 \Delta g_n(\xi)u'^2_{n-1}(\xi,\lambda)d\xi-\lambda\int_0^1 \Delta r_n(\xi)u^2_{n-1}(\xi,\lambda)d\xi=-f(\lambda)+f_{n-1}(\lambda), \lambda\in[0,\lambda_1] \quad (12)$$

$$\int_0^1 \Delta g_n(\xi)w''^2_{n-1}(\xi,\lambda)d\xi-\gamma\lambda\int_0^1 \Delta r_n(\xi)w^2_{n-1}(\xi,\lambda)d\xi=\phi(\lambda)-\phi_{n-1}(\lambda), \quad \lambda\in[0,\lambda_2]$$

Система (12) решается на основе метода регуляризации А. Н. Тихонова[1], итерационный процесс останавливается при достижении определенного значения функционала невязки или по достижении некоторого числа итераций. В рамках подобного подхода решена и задача, связанная с идентификацией переменных свойств кожи, моделируемой как трехслойная упругая или вязкоупругая структура [20].

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута определенная точность при выполнении дополнительных граничных условий (8)-(9). Фактически двухэтапная процедура позволяет сразу формулировать операторные уравнения в обратной задаче, избегая решения задач первого приближения.

Задача о крутильных колебаниях консольного стержня содержит две функции, определяющие свойства – безразмерный модуль сдвига и плотность. Поскольку плотность определена из предыдущей подзадачи, то для нахождения модуля сдвига получается одно операторное уравнение, а схема его исследования аналогична предыдущему.

Замечание 1. Если внимательно проанализировать постановки задач в рамках неоднородной теории упругости, становится ясным, что трилинейность формы открывает и другие возможности при постановке КОЗ, которые в последние годы стали реализовываться при исследовании свойств мягких биологических тканей.

Вариант 2 – задание (измерение) полей смещений внутри объекта исследования. Этот вариант постановки предлагается реализовывать при определении материальных характеристик материала, зависящих от координат, в случае задания дополнительной информации внутри объекта. Далее изложим приложение этого подхода к некоторым задачам идентификации свойств тканей, в частности, в задачах эластографии мягких тканей.

Отметим, что современные методы исследования тканей и органов человеческого организма достаточно хорошо позволяют определить изменения в структурах и их характерные размеры. В то же время определение физических характеристик изменённых структур представляет собой весьма трудную задачу и требует решения ряда обратных задач, если измерения производятся с поверхности исследуемого объекта. В то же время при измерении полей внутри объекта исследования в значительной степени упрощает процедуру определения физических свойств, например, модуля сдвига и далее судить о стадии патологического процесса. Ультразвуковая диагностика с эластографией позволяет получить информацию не только о структуре ткани, а также об упругих свойствах ткани. Это дает возможность перейти от качественной оценки к оценке количественных показателей состояния самой ткани.

Таким образом, эластография представляет собой в настоящее время весьма популярный современный способ оценки характеристик упругости мягких тканей. Эта методика стала использоваться относительно недавно, первый измерительный аппарат, предназначенный для этого, был разработан и введен в эксплуатацию в 2002г. и основан на ультразвуковом зондировании исследуемой области и измерении полей (смещений, деформаций) внутри объекта. При этом первоначальный вариант такого прибора был основан на предварительной компрессии вблизи зоны обследования, что позволяло дать сравнительную оценку модулей упругости различных участков исследуемой области. Результаты такой оценки с помощью преобразования данных ультразвукового зондирования выводились на экран монитора в виде оттенков серого или в цветном варианте. Преобразование данных измеренных смещений внутри зоны исследования в карту любого из свойств мягкой ткани, основаны на математических алгоритмах, которые в совокупности называются алгоритмами инверсии, которые используются в ряде работ, например, в [21,22].

Используемая в то время при оценке модулей упругости методика имела ряд недостатков, в первую очередь, связанных с оценкой степени компрессии, давала большой разброс измеряемых характеристик и поэтому в более поздних вариантах аппаратуры (начиная с 2003г.) начал использоваться метод, получивший в дальнейшем название «эластография сдвиговых волн», предложенный Сарвазяном А. П., и развитый им вместе с коллегами [23-25]. Суть его состоит в возбуждении сдвиговых волн, преобладающих в мягких тканях, и измерении их скоростей внутри исследуемого объекта, что позволяло на основе простой зависимости между скоростью, плотностью и модулем Юнга (в рамках модели несжимаемой упругой среды) оценить модуль Юнга. Этот метод начал интенсивно использоваться различными производителями ультразвукового оборудования и одним из первых стал аппарат FibroScan для диагностики тканей печени, который с успехом используется в настоящее время в практической диагностике.

Вместе с тем отметим, что, например, в настоящее время при оценке состояния мягких тканей, например, печени в медицинской диагностике имеется всего лишь три диапазона оценок для модуля упругости, по этому показателю делается вывод об отсутствии патологии или ее наличии и ее степени.

Заметим, что локальные поля смещений в таких диагностических аппаратах описывались при помощи решений уравнения Гельмгольца [24], что означает пренебрежение градиентами модуля сдвига (это возможно для размытых неоднородностей) Соответственно уточнение модели позволит дать более точную оценку модуля и плотности и учесть их изменение внутри предметной области.

Следует отметить, что данные о смещениях внутри ткани состоят из продольных волн и поперечных волн, как на частоте возбуждения, так и на высших гармониках. Отметим, что продольные волны в мягких тканях (ткани мозга) имеют большую длину волны (скорости продольных волн порядка 1400 м/с против 1–10 м/с для поперечных волн). Обычно в алгоритмах обработки сигналов отсекаются высшие гармоники, однако они не позволяют отфильтровать только поперечные волны, поэтому учет продольных волн для уточнения модели имеет первостепенное значение. В то же время модель эластографии, в которой используется модель несжимаемого неоднородного упругого тела, может быть с успехом использована для совершенствования методик оценки упругих свойств, в первую очередь модуля сдвига.

Для уточнения оценок свойств тканей в настоящей работе использована модель несжимаемой упругой среды с переменными характеристиками - модулем сдвига и плотностью, сформулирована соответствующая краевая задача для оператора второго порядка с переменными коэффициентами, на базе которой исследованы две обратные задачи (по восстановлению переменного модуля сдвига при известной плотности и восстановлению двух переменных характеристик) по измеренному внутри области измерений полю деформаций, причем для возбуждения волновых процессов использован один из наиболее употребительных способов (сдвиговые колебания поверхности, либо фокусированный ультразвуковой пучок).

Обратимся к слабой постановке (6), которую можно использовать для исследования различных типов задач. Особенность постановки задачи при использовании информации о полях смещений внутри объекта состоит в том, что необходимо восстановить свойства области $V_0 \subset V$, причем поля смещений u_i известны всюду в V и, кроме того, известны свойства упругого тела в V / V_0. Такая постановка описывает суть проблемы и для ситуации, когда есть выраженная граница между областями с различными характеристиками, и когда эта граница слабо прослеживается. Отметим также, что плотность мягких тканей (нормальных и патологически измененных отличается не более, чем на 10%), а модуль сдвига может отличаться на порядок. Таким образом, в рамках предположений (несжимаемость и постоянство плотности) для определения модуля сдвига на основе предыдущих построений имеем интегральное уравнение Фредгольма 1 рода с гладким ядром следующего вида

$$\int_V \mu(u_{i.j} + u_{j,i})(u_{i.j} + u_{j,i})dV = \rho\omega^2 \int_V u_i u_i dV + \int_{S_\sigma} p_i u_i dS \qquad (13)$$

Заметим, что ядро этого уравнения является положительно определенным. Также отметим, что это уравнение может быть упрощено, если выделить отдельно область V / V_0, свойства ткани в которой известны и записать уравнение (13) для области V_0, в которой μ неизвестно. Отметим две трудности (или две некорректные подзадачи) в решении интегрального уравнения вида (13) или его аналога. Во-первых, вычисление частных производных от измеренных смещений представляет первую некорректную задачу, которая может быть решена при помощи использования сплайн-аппроксимаций, а обращение вполне непрерывного оператора вида (13) представляет собой вторую некорректную подзадачу, которая обычно решается с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова.

Отметим, что для уравнения (13) несложно установить и единственность определения модуля сдвига в классе кусочно-монотонных функций. Допустим, что имеется два решения интегрального уравнения (13) μ_1 и μ_2. Сформулируем однородное интегральное уравнение относительно функции $\mu_* = \mu_1 - \mu_2$. Оно имеет вид

$$\int_{V_0} \mu_*(x) R(x,\omega) dV = 0 \tag{14}$$

Здесь $R(x,\omega) = (u_{i.j} + u_{j,i})(u_{i.j} + u_{j,i})$ - неотрицательное ядро, которое может обращаться в ноль только тогда, когда деформации равны нулю, что соответствует движению как твердого целого. В силу кусочной монотонности функция $\mu_*(x)$ может принимать значения разных знаков. Введем в рассмотрение разбиение $V_0 = V_{0+} \bigcup V_{0-}$, считая, что $\mu_* \geq 0$ на V_{0+}, а $\mu_* \leq 0$ на V_{0-}. Введем в рассмотрение неотрицательную функцию $\mu_{**} = \mu_*$ при $x \in V_{0+}$ и $\mu_{**} = -\mu_*$ при $x \in V_{0-}$. Тогда из (14) получим равенство $\int_{V_0} \mu_{**}(x) R(x,\omega) dV = 0$, откуда следует в силу положительности ядра μ_{**}=0, что и доказывает единственность решения уравнения (13).

Замечание 2. Кроме того, для уточнения модели и учета реального затухания в мягких тканях можно использовать подобный подход для оператора второго порядка с переменными комплексными коэффициентами в рамках концепции комплексных модулей, в которой принимается, что описания колебаний вязкоупругой среды необходимо в упругих постановках заменить упругие модули комплексными функциями, зависящими от частоты колебаний $\lambda = \lambda^*(x, i\omega),\ \mu = \mu^*(x, i\omega)$, которые формируются обычно в рамках модели стандартного вязкоупругого тела и представляющие собой дробно-рациональные функции частоты.. В рамках такого подхода получено интегральное уравнение с вполне-непрерывным оператором вида (13) с комплексным ядром и комплекснозначной неизвестной функцией, которое исследуется в рамках обобщенного метода регуляризации А.Н.Тихонова.

Заключение. В работе изложены способы идентификации свойств неоднородных упругих структур - функционально-градиентных материалов и биологических тканей на основе различных постановок. При этом дополнительная информация задается либо на границе тела , либо внутри него. Представлены способы исследования линейных и нелинейных операторных уравнений с вполне-непрерывными операторами на основе формирования итерационных процессов и методов регуляризации, приведены примеры для цилиндрических структур - стержней и цилиндров.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач, М.: Наука, 1986. 288с
2. Яхно В.Г. Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений упругости. - Новосибирск: Наука, 1990. - 304 с.
3. Bui H.D. Inverse Problems in the Mechanic of Materials: An Introduction. - CRC Press, Boca Raton, FL, 1994. - 224 p.
4. Isakov V. Inverse problems for PDE. - Springer-Verlag, 2005. - 284 p.
5. Marc Bonnet, A. Constantinescu. Inverse problems in elasticity. Inverse Problems, IOP Publishing, 2005, 21, pp.R1-R50. 10.1088/0266-5611/21/2/R01. hal-00111264
6. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384с.
7. Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.:-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика. Институт компьютерных исследований. 2008. 608с.
8. Bal G. Introduction to Inverse Problems. – N-Y: Columbia University, 2012. - 205 p.
9. Neto F.D.M., Neto A.J.S. An Introduction to Inverse Problems with Applications. - Berlin: Springer, 2013. - 255 p
10. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: ФГУП "Издательство СО РАН", 2018. -512 с.
11. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. -230 с.
12. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 480 с.
13. Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. -272с.
14. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983. -432с.
15. Perkowski Z., Czabak M. Description of behaviour of timber-concrete composite beams including interlayer slip, uplift, and long-term effects: Formulation of the model and coefficient inverse problem// Engineering Structures. 2019. 194. P.230-
16. Dudarev, V.V., Vatulyan, A.O., Mnukhin, R.M., Nedin, R.D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder // Mathematical Methods in the Applied Sciences7/30/2020, V. 43 Is. 11, p 6861-6870,
17. Vatulyan, A.O., Dudarev V.V., Mnukhin, R.M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder// International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2021, 17(2), pp. 321–332 .
18. Vatulyan, A.O., Yurov, V.O. On the reconstruction of material properties of a radially inhomogeneous cylindrical waveguide// Mathematical Methods in the Applied Sciences 2021 44(6), pp. 4756–4769
19. Ватульян А. О., Юров В. О. Об определении механических характеристик стержневых элементов из функционально-градиентных материалов// Изв. РАН, МТТ, 2021. №4, С. 52–63
20. Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В. Об одном методе идентификации свойств многослойных мягких биологических тканей// Российский журнал биомеханики 2013, т.17, №3, С.37-48.

21. Sinkus, R., Lorenzen, J., Schrader, D., Lorenzen, M., Dargatz, M., Holz D.,. High-resolution tensor MR elastography for breast tumour detection. // Phys. Med. Biol. 2000 Jun; 45(6): 1649-64. doi: 10.1088/0031-9155/45/6/317.
22. Manduca A., Oliphant T.E., Dresner M.A., Mahowald J.LKruse., S.A.,. Amromin E, Felmlee J.P. Greenleaf., J.F, Ehman R.L. // Magnetic resonance elastography: Non-invasive mapping of tissue elasticity. Medical Image Analysis 5 (2001) pp.237–254.
23. Сарвазян А. П. Низкочастотные акустические характеристики биологических тканей. // Механика полимеров 1975; №4. С.691-695.
24. Sarvazyan, A., Goukassian, D., Maevsky, G., 1994. Elasticity imaging as a new modality of medical imaging for cancer detection. //In: Proceedings of an International Workshop on Interaction of Ultrasound with Biological Media, pp. 69–81.
25. Сарвазян А. П., Руденко О. В., Свенсон С. Д., Фаулкс Ю. Б., Емельянов С. Ю. Упругая визуализация сдвиговых волн: новая ультразвуковая технология медицинской диагностики. // УЗИ Мед. Биол.1998; 24:С. 1419-1435.
26. Arani A, Manduca A, Ehman RL, Huston III J. Harnessing brain waves: a review of brain magnetic resonance elastography for clinicians and scientists entering the field. //Br J Radiol 2021; 94: 20200265.
27. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 340 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Ватульян Александр Ованесович - доктор физ.мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета.
E-mail: vatulyan@aaanet.ru

Поступила в редакцию 29.03.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК 539.3
Doi:10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-48

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СТРИНГЕРОВ С УПРУГИМИ ТЕЛАМИ

Григорян М.С., Мхитарян С.М.

Ключевые слова: упругая полуплоскость, упругая полоса, упругий клин, стрингер, плоская деформация, антиплоская деформация, интегральное уравнение.

Գրիգորյան Մ.Ս., Մխիթարյան Ս.Մ.
Ստրինգերների և առաձգական մարմինների կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրների մի դասի ճշգրիտ լուծման մասին

Հիմնաբառեր: առաձգական կիսահարթություն, առաձգական շերտ, առաձգական սեպ, ստրինգեր, հարթ դեֆորմացիա, հակահարթ դեֆորմացիա, ինտեգրալ հավասարում:

Բարակապատ տարրերի տեսքով ստրինգերների և առաձգական հոծ մարմինների կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրների մոդիֆիկացված դրվածքով, երբ նախապես տրված է ստրինգերների կետերի հորիզոնական առաձգական տեղափոխությունների ռեժիմը, դիտարկվում է ճշգրտորեն լուծվող այդպիսի խնդիրների մի դաս: Ստրինգեր-առաձգական հիմքեր համակարգերի կոշտության հարցերի հետազոտությունը՝ ստրինգերների վրա ազդող ուժային գործոնների որոշումով, որոնք ապահովում են դրանց առաձգական տեղափոխությունների նախապես տրված ռեժիմը, ունի տեսական և գործնական նշանակություն: Առաձգական հոծ մարմինները վերցվում են կիսահարթության, շերտի և սեպի տեսքով, որոնք գտնվում են հարթ կամ հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում: Դիտարկվող կոնտակտային խնդիրների լուծումները բերված են լոգարիթմական սիմետրիկ կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների լուծումների, որոնց ճշգրիտ (փակ) լուծումները կառուցվում են Չեբիշևի բազմանդամներ պարունակող սպեկտրալ առնչությունների օգնությամբ:

Grigoryan M.S., Mkhitaryan S.M.
On precise solution of one class of problems on contact interaction of stringer with elastic bodies

Key words: elastic halfplane, elastic strip, elastic wedge, stringer, plane deformation, antiplane deformation, integral equation.

In modified problem statement on contact interaction of thin-walled elements in the form of the stringers with massive elastic bodies, when the regime of elastic horizontal displacements of stringer points is previously solved problem is considered. These problems have theoretical and practical interest when studying the questions of rigidity of stringers-elastic bases systems with the subsequent determination acting on the stringers of the force factors providing given them the regime of the elastic displacements. The massive elastic bodies are taken in the form of half-plane, strip and wedge, being in the conditions of plane or antiplane deformation. The solutions of the considered contact problems are brought to Fredholm integral equations of the first kind with symmetrical logarithmic kernel. Their precise (closed) solutions are built with the help of spectral correlations in Chebyshev polynomials.

В модифицированной постановке задач о контактном взаимодействии тонкостенных элементов в виде стрингеров с массивными упругими телами, когда заранее задан режим упругих горизонтальных перемещений точек стрингеров, рассмотрен один класс таких задач, решаемых точно. Эти задачи

представляют теоретический и практический интерес при исследовании вопросов жесткости систем стрингеры - упругие основания с последующим определением действующих на стрингеры силовых факторов, обеспечивающих заданный их режим упругих перемещений. Массивные упругие тела берутся в виде полуплоскости, полосы и клина, находящихся в условиях плоской или антиплоской деформации. Решения рассматриваемых контактных задач сведены к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром. Их точные (замкнутые) решения построены при помощи спектральных соотношений для многочленов Чебышева.

Введение. Задачи контактного взаимодействия между стрингерами и массивными упругими телами составляют обширную область теории контактных задач механики деформируемого твердого тела. Они будучи связаны с важными для инженерной практики вопросами о передаче нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров к массивным деформируемым телам, в последние десятилетия получили интенсивное развитие. Такому развитию способствовала также необходимость исследования вопросов концентрации напряжений с резко изменяющимися градиентами вокруг стрингеров, которые существенно влияют на прочностные характеристики многих инженерных конструкций и их деталей.

Первые исследования контактных задач стрингеров с массивными упругими телами восходят к известной статье Мелана [1]. Впоследствии существенное продвижение в этой области достигнуто в работах [2-4]. Основные результаты по задачам контактного взаимодейтвия между стрингерами и массивными упругими телами, полученные до 1976г., и методы их решения подытожены в коллективной монографии [5]. В этом направлении укажем также на монографии [6-8].

В задачах указанного типа в рамках модели одномерного упругого континуума стрингера [1] обычно требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами и осевых напряжений в их сечениях по заданной системе внешних сил. Но при исследовании вопросов жесткости системы стрингер - упругое основание представляет теоретический и практический интерес и такая постановка таких задач, когда необходимо заранее задать режим осевых упругих перемещений точек стрингеров и определить, по дифференциальному уравнению их деформирования, действующие на стрингеры соответствующие силовые факторы, обеспечивающие заданный режим перемещений. В такой постановке в [9] рассмотрена задача о контакте произвольного конечного числа и периодичекой системы стрингеров с упругой полуплоскостью, где обсуждены также некоторые частные случаи. В указанной постановке в [10] построено точное (замкнутое) решение задачи о контактном взаимодействии конечного стрингера с упругой полосой при антиплоской деформации.

В настоящей статье в указанной постановке получены точные решения одного класса задач о контактном взаимодействии стрингеров с массивными упругими телами в форме упругой полуплоскости при плоской деформации и в форме упругой полосы и упругого клина при антиплоской деформации. При этом рассматриваются случаи контакта двух одинаковых симметрично расположенных и симметрично нагруженных стрингеров с упругими телами отмеченных форм. Обсуждаемые задачи формулируются в виде интегральных уравнений Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром и методом ортогональных многочленов строятся их замкнутые решения.

1. Постановка задач и вывод определяющих интегральных уравнений (ОИУ).

Пусть упругая полуплоскость $\Pi_- = \left\{ -\infty < x < \infty;\ -\infty < y \le 0 \right\}$, отнесенная к правой прямоугольной системе координат Oxy и находящаяся в условиях плоской деформации, обладает модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Пусть, далее, полуплоскость Π_- на своей границе $y=0$ по совокупности отрезков $L=[-a,-b]\cup[b,a]$ усилена двумя одинаковыми и относительно начала координат O симметрически расположенными стрингерами высоты h с модулем Юнга E_s и коэффициентом Пуассона ν_s. Предположим, что стрингер по отрезку на своей верхней грани $y=h$ в направлении оси Ox нагружена касательными силами интенсивности $\tau_+(x)$, т.е. .., а в его концевых сечениях $x=b$ и $x=a$ - сосредоточенными горизонтальными силами, соответственно, P_b и P_a в противоположных направлениях. Стрингер же по $[-a,-b]$ границы полуплоскости Π_- нагружен симметрически, так что $\tau_+(-x)=-\tau_+(x)$ $x\in[-a,-b]\cup[b,a]$, а сосредоточенные силы по величине равны P_b и P_a, но направлены противоположно им. Будем считать, что наперед задан режим горизонтальных упругих перемещений точек стрингеров в виде функции $f(x)$ $(x\in L)$, т.е. $u(x,y)\big|_{y=-0}=f(x)$, причем $f(-x)=-f(x)$ $(x\in L)$, где $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция на L, т.е. $f(x)\in C^2(L)$. Требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами $\tau_-(x)$, причем $\tau_{yx}\big|_{y=-0}=\tau_-(x)$, $\tau_-(-x)=-\tau_-(x)$ $(x\in L)$, касательные силы $\tau_+(x)$ на грани $y=h$ стрингеров $\left(\tau_+(-x)=-\tau_+(x)\ x\in L\right)$, сосредоточенные силы P_a и P_b, обеспечивающие заданный режим упругих перемещений точек стрингеров в виде функции $f(x)$.

При этом для полноты постановки задачи необходимо, кроме упругих перемещений точек стрингеров, еще задать равнодействующие P касательных контактных под стрингерами:

$$\int_{-a}^{-b}\tau_-(s)\,ds=-P,\quad \int_{b}^{a}\tau_-(s)\,ds=P, \tag{1.1}$$

где P - известная величина.

Выведем ОИУ поставленной задачи. С этой целью воспользуемся формулой для горизонтальных перемещений граничных точек упругой полуплоскости Π_-:

$$u(x,-0)=\vartheta\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\ln\frac{1}{|x-s|}\tau_-(s)\,ds \tag{1.2}$$

$$\vartheta = \frac{2\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}, \ -\infty < x < \infty; \ \tau_-\left(-x\right) = -\tau_-\left(x\right); \ u\left(-x,-0\right) = -u\left(x,-0\right),$$

которая сразу получается из формулы для соответствующих вертикальных перемещений опять граничных точек полуплоскости Π_- [11] по принципу взаимности работ. Теперь, приняв во внимание свойство нечетности функций $u(x,-0)$ и $\tau_-\left(x\right)$, формулу (1.1) преобразуем к виду

$$u\left(x,-0\right) = \vartheta\int_b^a \ln\frac{x+s}{\left|x-s\right|}\tau_-\left(s\right)ds \qquad \left(0 < x < \infty\right).$$

Отсюда, реализуя граничное условие $u(x,-0) = f(x)$ $(b < x < a)$, придем к следующему ОИУ Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром:

$$\vartheta\int_b^a \ln\frac{x+s}{\left|x-s\right|}\tau_-\left(s\right)ds = f\left(x\right) \qquad \left(x \in \left(b,a\right)\right), \tag{1.3}$$

откуда определяется неизвестная функция $\tau_-\left(x\right)$ - касательные контактные напряжения под стрингерами.

Далее обратимся к стрингерам. Так как стрингеры физически и геометрически одинаковы, относительно начала координат расположены симметрически и симметрически нагружены, то ограничимся только правым стрингером по отрезку $b \le x \le a$. Дифференциальное уравнение деформирования этого стрингера в рамках его модели одноосного напряженного состояния [1] имеет вид [8]

$$hE_s^*\frac{d^2u_s}{dx^2} = \tau_-\left(x\right) - \tau_+\left(x\right); \left(b < x < a\right); \quad E_s^* = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}, \tag{1.4}$$

где $u_s = u_s\left(x\right)$ - горизонтальные упругие перемещения точек стрингера по отрезку $\left[b,a\right]$. При обобщенном плоском напряженном состоянии следует формально положить $\nu_s = 0$. Вводя в рассмотрение осевое усилие $S = S\left(x\right)$ в сечении x стрингера, причем $S\left(x\right) = \sigma_x h$, где σ_x - осевое напряжение в сечении x стрингера, и приняв во внимание закон Гука $\sigma_x = E_s^*\varepsilon_s = E_s^*\frac{du_s}{dx}$ $\left(b < x < a\right)$, для определения $S\left(x\right)$ при помощи (1.4) получим следующую простейшую граничную задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dx} = \tau_-\left(x\right) - \tau_+\left(x\right) \quad \left(b < x < a\right) \qquad S\left(x\right)\Big|_{x=b} = P_b, \quad S\left(x\right)\Big|_{x=a} = P_a.\end{cases} \tag{1.5}$$

Отсюда находим

$$S(x)=\int_b^x\left[\tau_-(s)-\tau_+(s)\right]ds+P_b\quad (b\le x\le a).$$

После того как построено решение $\tau_-(x)$ ОИУ (1.3) при условии (1.1), из (1.4), согласно условию контакта $u_s(x)=u(x,-0)=f(x)$ $(b\le x\le a)$, сразу находим

$$\tau_+(x)=\tau_-(x)-hE_s^* f''(x)\qquad (b<x<a). \tag{1.6}$$

Кроме того, так как

$$S(x)=\sigma_x h=hE_s^* f'(x),\ (b\le x\le a), \tag{1.7}$$

то

$$\sigma_x=E_s^* f'(x),\ P_a=hE_s^* f'(a);\ \ P_b=hE_s^* f'(b). \tag{1.8}$$

Таким образом, после решения ОИУ (1.3) при условии (1.1), основные силовые характеристики стрингеров будут определяться по формулам (1.6)-(1.8).

Далее перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$\xi=x/a,\ \eta=s/a;\ k=b/a;\ \varphi_\pm(\xi)=\vartheta\tau_\pm(a\xi);\ g(\xi)=f(a\xi)/a;$$

$$S_0(\xi)=S(a\xi)/hE_s^*,\ \sigma_x^{(0)}(\xi)=\sigma_x(a\xi)/E_s^*;\ P_a^{(0)}=P_a/hE_s^*,\ P_b^{(0)}=P_b/hE_s^*.$$

В результате, ОИУ (1.3) преобразуется к виду

$$\int_k^1 \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\varphi_-(\eta)\,d\eta=g(\xi)\qquad (k<\xi<1), \tag{1.9}$$

а формулы (1.6)-(1.8)- к видам соответственно

$$\varphi_+(\xi)=\varphi_-(\xi)-\lambda g''(\xi)\quad (k<\xi<1),\quad \lambda=h\vartheta E_s^*/a \tag{1.10}$$

$$S_0(\xi)=g'(\xi),\ \ \sigma_x^{(0)}(\xi)=g'(\xi);\ \ P_a^{(0)}=g'(1),\ P_b^{(0)}=g'(k).$$

Условие же равновесия правого стрингера согласно (1.1) перейдет в следующее условие:

$$\int_k^1 \varphi_-(\eta)\,d\eta=P_0;\qquad (P_0=\vartheta P/a). \tag{1.11}$$

Таким образом, в разбираемой задаче основными уравнениями в безразмерных величинах будут (1.9)-(1.11).

В изложенной выше постановке рассмотрим также задачу о контактном взаимодействии двух одинаковых полубесконечных стрингеров с упругой полуплоскостью.

Пусть граница $y=0$ этой полуплоскости по совокупности отрезков $L=(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$ усилена двумя одинаковыми полубесконечными стрингерами. Пусть, далее, на верхних гранях $y=h$ стрингеров действуют одинаковые по величине, но противоположные по направлению касательные силы интенсивности $\tau_+(x)$ $\left(\tau_+(-x)=-\tau_-(x)\ \ x\in L\right)$, а в концевых точках $x=\pm a$ действуют одинаковые по величине, но противоположные по направлению, сосредоточенные горизонтальные силы величины P_a. Здесь также примем, что заранее задан режим упругих горизонтальных перемещений точек стрингеров в виде функции $f(x)\in C^2$ $\left((-\infty,-a]\cup[a,\infty)\right)$, причем $f(-x)=-f(x)$ и $f(x)=o(1)$ при $|x|\to\infty$. Требуется определить силовые факторы $\tau_\pm(x)$, σ_x и P_a, обеспечивающие заданный режим перемещений.

Приступив к выводу основных уравнений обсуждаемый задачи, для горизонтальных перемещений $u(x,-0)$ граничных точек упругой полуплоскости Π_- будем иметь

$$u(x,-0)=\vartheta\left(\int_{-\infty}^{-a}+\int_a^{\infty}\right)\ln\frac{1}{|x-s|}\tau_-(s)\,ds=$$

$$=\vartheta\int_a^{\infty}\ln\frac{x+s}{|x-s|}\tau_-(s)\,ds\,(a\le x<\infty)\qquad\left(\tau_-(x)=-\tau_-(x)\qquad(\infty<x<\infty)\right).$$

Так как по постановке задачи $u(x,-0)=f(x)$ $(a\le x<\infty)$, то отсюда получим следующее ОИУ задачи:

$$\vartheta\int_a^{\infty}\ln\frac{x+s}{|x-s|}\tau_-(s)\,ds=f(x)\ \ (a<x<\infty). \tag{1.12}$$

Обращаясь к стрингерам, рассмотрим равновесие части $[a,x]$ правого полубесконечного стрингера. Можем записать

$$-T_a+\int_a^x\tau_+(s)\,ds-\int_a^x\tau_-(x)\,dx+\sigma_x h=0,$$

откуда

$$\sigma_x=\frac{1}{h}\left[T_a-\int_a^x\tau_+(s)\,ds+\int_a^x\tau_-(s)\,ds\right]\ \ (a\le x<\infty).$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие $\lim\limits_{x\to\infty}\sigma_x = 0$, откуда вытекает, что

$$T_a = \int_a^\infty \left[\tau_+(s) - \tau_-(s)\right] ds. \tag{1.13}$$

Дифференциальное уравнение же деформирования правого полубесконечного стрингера имеет вид (1.4), но на интервале (a,∞). Далее поступив совершенно аналогично сделанному выше, получим, что после определения $\tau_-(x)$ из ОИУ (1.12), основные силовые факторы, действующие на правый стрингер определятся по формулам

$$\tau_+(x) = \tau_-(x) - hE_s^* f''(x), \quad \sigma_x = E_s^* f'(x)\frac{n!}{r!(n-r)!}, \ (a < x < \infty) \tag{1.14}$$

$$T_a = hE_s^* f'(a).$$

Далее в ОИУ (1.12) введем безразмерные величины

$$\xi = a/x, \ \eta = a/s; \ \tau_0(\xi) = \vartheta\tau(a/\xi)/\xi^2, \ f_0(\xi) = f(a/\xi)/a.$$

В результате, ОИУ (1.12) перейдет в следующее ОИУ:

$$\int_0^1 \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\tau_0(\eta)\,d\eta = f_0(\xi) \quad (0<\xi<1), \tag{1.15}$$

а условие (1.13)- в условие

$$\int_0^1 \varphi_0(\eta)\,d\eta = T_0; \ T_0 = \int_0^1 q_0(\eta)\,d\eta - T_a^{(0)}; \ q_0(\eta) = \frac{\vartheta}{\eta^2}\tau + \left(\frac{a}{\eta}\right); \ T_a^{(0)} = \frac{\vartheta T_a}{a}. \tag{1.16}$$

Указанные безразмерные величины можно ввести также в формулах (1.14). На этом однако останавливаться не будем. Итак, решение рассматриваемой задачи свелось к решению ОИУ (1.15)-(1.16).

Перейдем к задаче о контакте двух стрингеров с упругой полосой при анти-плоской деформации. Пусть упругая полоса $\Omega_- = \{-\infty < x < \infty; \ -H \le y \le 0\}$ высоты H и модуля сдвига G отнесена к правой прямоугольной системе координат Oxy. Пусть, далее, полоса на своей границе $y=0$ по совокупности отрезков $L = [-a,-b] \cup [b,a]$ усилена двумя одинаковыми стрингерами высоты h и модулями сдвига G_s, а по грани $y=-H$ жестко защемлена. Верхние грани стрингеров симметрически нагружены касательными силами интенсивности $\tau_+(x)$, причем $\tau_+(-x) = -\tau_+(x)$, а в сечениях $x=\pm a$ и $x=\pm b$ действуют касательные сосредоточенные силы $T_{\pm a}$ и $T_{\pm b}$, причем $T_{-a}=-T_a$, $T_{-b}=-T_b$. Считается, что под действием этих нагрузок система стрингеры-полоса, точнее система длинноленточные стрингеры-упругий слой, находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. В описанной задаче опять примем, что наперед задан режим упругих перемещений $u(x,-0)$ точек стрингеров в направлении оси Oz в виде функции $f(x)\in C^2([-a,-b]\cup[b,a])$, причем $f(-x)=-f(x)$. Кроме того, как и выше, заданы равнодействующие P касательных контактных напряжений под стрингерами, т.е. имеют место условия (1.1). Требуется определить действующие на стрингеры силовые факторы $\tau_\pm(x)$, $P_{\pm a}$ и $P_{\pm b}$, обеспечивающие заданный режим их перемещений.

Приступив к выводу основных уравнений описанной задачи, сначала запишем выражение упругих перемещений $u(x,-0)$ в направлении оси Oz граничных точек полосы $y=0$ от касательных сил интенсивности $\tau_-(x)$, полученное методом преобразования Фурье [10]

$$u(x,-0)=\frac{1}{\pi G}\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\ln\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)\tau_-(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi G}\int_b^a\ln\left(\frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)}{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi(x+s)}{4H}\right)}\right)\tau_-(s)\,ds\qquad(-\infty<x<\infty).$$

Исходя из последнего, реализуем граничное условие $u(x,-0)=f(x)$ $(b<x<a)$, в результате чего относительно $\tau_-(x)$ придем к следующему ОИУ:

$$\frac{1}{\pi G}\int_b^a\ln\left(\frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)}{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi(x+s)}{4H}\right)}\right)\tau_-(s)\,ds=f(x)\ \ (b<x<a).\tag{1.17}$$

Уравнение (1.17) должно рассматриваться при втором условии (1.1).

Обращаясь теперь к вопросу определения силовых факторов, действующих на стрингеры, сначала запишем дифференциальное уравнение деформирования правого стрингера при антиплоской деформации [12]:

$$hG_s\frac{d^2u_s}{dx^2}=\tau_-(x)-\tau_+(x)\ \ (b<x<a),\tag{1.18}$$

где $u_s = u_s(x)$- упругие перемещения точек правого стрингера в направлении оси Oz. Теперь очевидно, что после решения ОИУ (1.17), вследствие условия контакта $u_s(x) = u(x,-0) = f(x)$ $(b < x < a)$, функция $\tau_+(x)$ сразу определится из (1.18):

$$\tau_+(x) = \tau_-(x) - hG_s f''(x) \quad (b < x < a). \tag{1.19}$$

А усилия $S(x) = h\tau_{xz}$ в сечениях правого стрингера и сосредоточенные силы T_a и T_b определятся по формулам

$$\begin{gathered} S(x) = \int_b^x \left[\tau_-(s) - \tau_+(s)\right] ds + T_b \quad (b \le x \le a); \\ T_b = hG_s f'(b); \quad T_a = hG_s f'(a). \end{gathered} \tag{1.20}$$

Далее введем безразмерные величины

$$t = \pi x/H, \ u = \pi s/H; \ c_0 = \pi b/H, \ d_0 = \pi a/H;$$

$$\tau_0(\xi) = \frac{1}{G}\tau(H\xi/\pi); \ f_0(\xi) = \frac{\pi}{H} f(H\xi/\pi).$$

Тогда ОИУ (1.17) преобразуется в следующее ОИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{d_0} \ln\frac{\operatorname{sh}(t/2) + \operatorname{sh}(u/2)}{\left|\operatorname{sh}(t/2) - \operatorname{sh}(u/2)\right|} \tau_0(u)\,du = f_0(t) \quad (c_0 < t < d_0),$$

а условие (1.1) - в следующее условие:

$$\int_{c_0}^{d_0} \tau_0(u)\,du = T_0, \qquad (T_0 = \pi P/Gh).$$

Эти уравнения преобразуем дальше, полагая

$$\xi = \operatorname{sh}(t/2), \ \eta = \operatorname{sh}(u/2), \ \omega_0(\xi) = 2\tau_0(2\operatorname{arcsh}\xi)\Big/\sqrt{1+\xi^2}, \ \gamma_0 = \operatorname{sh}(c_0/2),$$

$$g_0(\xi) = f_0(2\operatorname{arcsh}\xi); \ t = 2\operatorname{arcsh}\xi = 2\ln\left(\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right); \ \delta_0 = \operatorname{sh}(d_0/2);$$

В результате придем к ОИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_0}^{\delta_0} \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\omega_0(\eta)\,d\eta = g_0(\xi) \quad (\gamma_0 < \xi < \delta_0), \tag{1.21}$$

и к условию

$$\int_{\gamma_0}^{\delta_0} \omega_0(\eta) d\eta = T_0. \tag{1.22}$$

Таким образом, поставленная задача окончательно описывается ОИУ (1.21)-(1.22).

Указанные безразмерные величины можно ввести также в уравнениях (1.19)-(1.20).

В постановке предыдущей задачи рассмотрим также задачу о контакте двух одинаковых полубесконечных стрингеров с упругой полосой $\Omega_- = \{-\infty < x < \infty;\ -H \le y \le 0\}$ модуля G и высоты H. Здесь предполагается, что прикрепленные на границе полосы $y = 0$ по совокупности полубесконечных отрезков $L = \{-\infty < x < -a;\ a < y < \infty\}$ стрингеры на своих верхних гранях $y = h$ нагружены касательными силами $\tau_{yx}\big|_{y=h-0} = \tau_+(x)$ $\left(x \in L;\ \tau_+(-x) = -\tau_+(x)\right)$, а в своих сечениях $x = \pm a$ - сосредоточенными горизонтальными силами $T_{\pm a}$ $(T_{-a} = -T_a)$. Опять при заданном режиме упругих перемещений стрингеров $u(x,-0) = f(x)$ $\left(f(x) \in C^2\left((-\infty,-a] \cup [a,\infty)\right)\right)$, $f(-x) = -f(x)$ требуется определить функции $\tau_\pm(x)$, силы $T_{\pm a}$ и осевые усилия $S(x) = \tau_{zx} h$ в стрингерах с модулем сдвига G_s.

На основании результатов предыдущей задачи имеем

$$u(x,-0) = \frac{1}{\pi G}\left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty}\right) \ln \operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right) \tau_-(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi G}\int_a^{\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)}{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi(x+s)}{4H}\right)}\right) \tau_-(s)\, ds \qquad (0 < x < \infty).$$

Отсюда при помощи условия $u(x,-0) = f(x)$ $\left(x \in (-\infty,-a] \cup [a,\infty)\right)$ придем к следующему ОИУ:

$$\frac{1}{\pi G}\int_a^{\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)}{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi(x+s)}{4H}\right)}\right) \tau_-(s)\, ds = f(x) \ \ \left(x \in (a,\infty)\right).$$

Здесь введем безразмерные величины

$$t=\pi x/H,\ u=\pi s/H;\ c=\pi a/H;\ \tau_0(t)=\frac{1}{G}\tau_-(tH/\pi);\ f_0(t)=\frac{\pi}{H}f(tH/\pi).$$

Тогда после простых преобразований будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_c^\infty \ln\frac{\operatorname{sh}(t/2)+\operatorname{sh}(u/2)}{|\operatorname{sh}(t/2)-\operatorname{sh}(u/2)|}\tau_0(u)\,du=f_0(t)\quad (t\in(c,\infty)).$$

Далее опять положим

$$\xi=\operatorname{sh}(t/2)/\operatorname{sh}(c/2),\ \eta=\operatorname{sh}(u/2)/\operatorname{sh}(c/2);\ g_0(\xi)=f_0\left(2\operatorname{arcsh}\left(\eta\operatorname{sh}(c/2)\right)\right);$$

$$\omega_0(\eta)=2\operatorname{sh}(c/2)\Big/\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(c/2)\eta^2}\;\tau_0\left(2\operatorname{arcsh}\left(\eta\operatorname{sh}(c/2)\right)\right);$$

$$t=2\operatorname{arcsh}\left(\xi\operatorname{sh}(c/2)\right)=2\ln\left[\xi\operatorname{sh}(c/2)+\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(c/2)\xi^2}\right].$$

В результате ОИУ рассматриваемой задачи представим формулой

$$\frac{1}{\pi}\int_1^\infty \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\tau_0(\eta)\,d\eta=g_0(\xi)\quad (1<\xi<\infty). \tag{1.23}$$

Преобразуем также условие (1.13). В только что введенных безразмерных координатах оно принимает вид

$$\int_c^\infty \tau_0(u)\,du=T_0,\quad T_0=\frac{(T_+-T_a)\pi}{HG};\ T_+=\int_a^\infty \tau_+(s)\,ds;$$

а в координатах ξ,η - вид

$$\int_1^\infty \omega_0(\eta)\,d\eta=T_0. \tag{1.24}$$

После решения ОИУ (1.23)-(1.24) силовые характеристики стрингеров определяется как выше. Отметим, что, как и выше, ОИУ (1.23), можно преобразовать к виду (1.15).

Наконец, при антиплоской деформации рассмотрим задачу контактного взаимодействия между двумя одинаковыми стрингерами и клиновидным телом $\Omega=\{0\le r<\infty;\ -\alpha\le\varphi\le\alpha;\ -\infty<z<\infty\}$, отнесенным к цилиндрической системе координат r,φ,z с полюсом в вершине O клина Ω. Предполагается, что клин обладает модулем сдвига G и на своих гранях $\varphi=\pm\alpha$ на отрезках $b\le r\le a$ усилен двумя одинаковыми стрингерами модуля G_s и высоты h. Как выше, считается, что стрингеры нагружены симметрически относительно биссектрисы клина $\varphi=0$. А именно, верхняя грань стрингера на грани $\varphi=\alpha$ клина Ω по отрезку $b \le r \le a$ нагружена касательными силами интенсивности $\tau_+(r)\ (b \le r \le a)$, направленными по оси Oz, а в сечениях $r = a$ и $r = b$ опять в направлении оси Oz действуют сосредоточенные силы P_a и P_b соответственно. Стрингер на грани клина $\varphi = -\alpha$ нагружен такими же силами, одинаковыми по величине, но противоположными по направлению. Считается, что под воздействием этих силовых факторов система стрингеры-клин находится в условиях антиплоской деформации в направлении оси Oz с базовой плоскостью (r, φ). Предположим, что опять заранее задан режим упругих перемещений стрингеров в направленными оси Oz $u(r,\alpha) = f(r) \in C^2(b,a)$ и требуется определить касательные контактные напряжения $\tau_{\varphi r} = \tau_-(r)\ (b < r < a)$, касательные силы $\tau_+(r)$ и сосредоточенные силы P_a и P_b таким образом, чтобы они обеспечили заданный режим перемещений точек стрингеров $f(r)$. При этом, как выше, считается, что заданы также равнодействующие P касательных контактных напряжений под стрингерами, т.е. должно выполняться условие

$$\int_b^a \tau_-(r)\,dr = P. \tag{1.25}$$

Приступив к выводу основных уравнений описанной задачи, предварительно построим решение следующей вспомогательной первой граничной задачи для плоского клина $\omega = \{0 \le r < \infty;\ -\alpha \le \varphi \le \alpha\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (0 < r < \infty; -\alpha < \varphi < \alpha) \\ \tau_{r\varphi}\Big|_{\varphi=\pm\alpha} = \dfrac{G}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pm\alpha} = \tau(r) \quad (0 < r < \infty); \end{cases} \tag{1.26}$$

где $u = u(r,\varphi)$- упругие перемещение точек клина ω в направленными оси Oz при антиплоской деформации, $\tau_{r\varphi}$ - компонента касательных напряжений, а $\tau(r)$- считается заданной функцией. Решение граничной задачи (1.26) построим методом интегрального преобразования Меллина, введя в рассмотрение трансформанты Меллина:

$$\overline{u} = \overline{u}(p,\varphi) = \int_0^\infty u(r,\varphi) r^{p-1} dr,\ \ \overline{\tau} = \overline{\tau}(p) = \int_0^\infty \tau(r) r^p dr \quad (-1-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0,\ \varepsilon > 0).$$

При этом полоса регулярности преобразования Меллина, как в [13], была определена условием сходимости интеграла $\overline{\tau}(p)$. В трансформантах Меллина граничная задача (1.26) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{u}}{d\varphi^2} + p^2\overline{u} = 0 \quad (-\alpha < \varphi < \alpha); \\ \left.\dfrac{d\overline{u}}{d\varphi}\right|_{\varphi=\pm\alpha} = \overline{\tau}(p)/G. \end{cases}$$

Решение этой граничной задачи представляется формулой

$$\overline{u}(p,\varphi) = \frac{\overline{\tau}(p)}{Gp}\frac{\sin(p\varphi)}{\cos(p\alpha)} \quad (-\alpha \le \varphi \le \alpha),$$

откуда

$$-p\overline{u}(p,\varphi) = -\frac{\overline{\tau}(p)}{G}\frac{\sin(p\varphi)}{\cos(p\alpha)} \quad (-\alpha \le \varphi \le \alpha).$$

Теперь по формуле обращения преобразования Меллина

$$\frac{d\overline{u}(r,\alpha)}{dr} = -\frac{1}{2\pi iGr}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\overline{\tau}(p)\operatorname{tg}(p\alpha)r^{-p}dp =$$

$$= -\frac{1}{2\pi iGr}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\operatorname{tg}(p\alpha)r^{-p}dp\int\limits_0^\infty \tau(r_0)r_0^{\,p}dr_0 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi iGr}\int\limits_0^\infty \tau(r_0)dr_0\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\operatorname{tg}(p\alpha)\left(\frac{r_0}{r}\right)^p dp \qquad (-1-\varepsilon < c < 0).$$

Так как полюсы функции $\operatorname{tg}(p\alpha)$ расположены вне интервала $|\operatorname{Re} p| < \dfrac{\pi}{2\alpha}$, то полосу регулярности $-1-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0$ можно расширить, заменив ее полосой регулярности $-\dfrac{\pi}{2\alpha} < \operatorname{Re} p < \dfrac{\pi}{2\alpha}$ и, следовательно, вследствие аналитичности функции $\operatorname{tg}(p\alpha)$ в указанной полосе можем положить $c = 0$. Далее заменой $p = is$ от мнимой оси интегрирования перейдем на действительную ось. После элементарных преобразований находим

$$\frac{du(r,\alpha)}{dr}=\frac{r^{\pi/2\alpha-1}}{\alpha G}\int_0^\infty\frac{\tau_0^{\pi/2\alpha}\tau(r_0)\,dr_0}{r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}}\qquad(0<r<\infty),\tag{1.27}$$

где использовано выражение синус-интеграла Фурье из [14] (стр. 85, ф-ла 2.9(4)). Очевидно, что

$$\frac{du(r,-\alpha)}{dr}=-\frac{du(r,\alpha)}{dr}\qquad(0<r<\infty).$$

Теперь, исходя из (1.27) вычислим интеграл

$$J(r,\alpha)=\int\frac{r^{\pi/2\alpha-1}dr}{r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}},$$

полагая в нем

$$x=r^{\pi/\alpha},\ u=r_0^{\pi/\alpha};\ c=b^{\pi/\alpha},\ d=a^{\pi/\alpha}$$

и используя выражение известного интеграла из [15] (стр. 85, ф-ла 2.9(4)). После простых преобразований находим

$$J(r,\alpha)=\frac{\alpha}{\pi\sqrt{u}}\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{u}}{\left|\sqrt{x}-\sqrt{u}\right|}.$$

На основании последнего, применительно к поставленной контактной задачи для клина, будем иметь

$$u(r,\alpha)=\frac{\alpha}{\pi^2G}\int_c^d\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{u}}{\left|\sqrt{x}-\sqrt{u}\right|}u^{\alpha/\pi-1}\tau_-\left(u^{\alpha/\pi}\right)du\quad(0\le x<\infty).\tag{1.28}$$

Отсюда, в частном случае, когда $\alpha=\pi/r$, полагая $x=r^2,\ u=r_0^2$, находим

$$u(r,\pi/2)=\frac{1}{\pi G}\int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{d}}\ln\frac{r+r_0}{|r-r_0|}\tau(r_0)\,dr_0,$$

что совпадает с известным результатом для упругой полуплоскости.

Теперь, перейдя к выводу ОИУ рассматриваемой контактной задачи для клина, при помощи (1.28) реализуем условие $u(r,\alpha)=f(r)\ (b\le r\le a)$:

$$\frac{\alpha}{\pi^2G}\int_c^d\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{u}}{\left|\sqrt{x}-\sqrt{u}\right|}u^{\alpha/\pi-1}\tau_-\left(u^{\alpha/\pi}\right)du=f(r)=f\left(x^{\alpha/\pi}\right)\quad(c<x<d).$$

Придерживаясь прежних обозначений, в этом уравнении положим

$$x=\xi^2,\ u=\eta^2;\ \beta=\sqrt{c}=b^{\pi/2\alpha};\ \gamma=\sqrt{d}=a^{\pi/2\alpha};$$

$$\omega_0(\xi)=\xi^{2\alpha/\pi-1}\,\tau_-\left(\xi^{2\alpha/\pi}\right)/G;\quad f_0(\xi)=\frac{\pi}{\alpha}f\left(\xi^{2\alpha/\pi}\right).$$

В результате придем к следующему ОИУ задачи:

$$\frac{1}{\pi}\int_\beta^\gamma \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\omega_0(\eta)\,d\eta=f_0(\xi)\qquad(\beta<\xi<\gamma).\tag{1.29}$$

Наконец, полагая здесь

$$\xi=\gamma t,\ \eta=\gamma\,\mathrm{v};\ \tau_0(t)=\omega_0(\gamma t);\quad g_0(t)=\frac{\pi}{\alpha a}f\left((\gamma t)^{2\alpha/\pi}\right);\ k=\beta/\gamma;$$

ОИУ (1.29) представим в безразмерной форме

$$\frac{1}{\pi}\int_k^1 \ln\frac{t+\mathrm{v}}{|t-\mathrm{v}|}\tau_0(\mathrm{v})\,d\mathrm{v}=g_0(t)\qquad(k<t<1).\tag{1.30}$$

Преобразуем также условие (1.29). Можем записать

$$\int_b^a \tau_-(r)\,dr=P\ \left(r=(\gamma t)^{2\alpha/\pi}\right)\Rightarrow\int_k^1\tau_-\left((\gamma t)^{2\alpha/\pi}\right)\frac{2\alpha}{\pi}(\gamma t)^{2\alpha/\pi-1}\gamma dt=P\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_k^1\tau_0(t)\,dt=P_0;\qquad P_0=\frac{\pi}{2\alpha aG}P.$$

Итак,

$$\int_k^1\tau_0(t)\,dt=P_0.\tag{1.31}$$

После решения ОИУ (1.30)-(1.31), действующие на стрингеры необходимые силовые факторы определяются как выше.

2. **Решение ОИУ (1.9)-(1.11) и (1.15)-(1.16).** Так как ОИУ (1.9) при условии (1.11), (1.21)-(1.22) и (1.30)-(1.31) рассмотренных выше контактных задач имеют одинаковую структуру, а ОИУ (1.15)-(1.16) и (1.23)-(1.24) описанных выше задач также в сравнении между собой имеют одинаковые структуры, то здесь ограничимся только решением указанных ОИУ.

Решение ОИУ (1.9) при условии (1.11) построим методом ортогональных многочленов Чебышева при помощи спектральных соотношений [16]:

$$\int_k^1 \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi+\eta|}\frac{T_n(Y)\,d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(\eta^2-k^2)}}=\lambda_n T_n(X)\qquad(n=0,1,2,\ldots)\tag{2.1}$$

$$X=\cos\vartheta,\qquad \vartheta=\frac{\pi}{K'}\int\limits_{1}^{\xi/k}\frac{du}{\sqrt{\left(u^2-1\right)\left(1-k^2u^2\right)}};\qquad \lambda_0=\pi K,$$

$$Y=\cos\varphi,\quad \varphi=\frac{\pi}{K'}\int\limits_{1}^{\eta/k}\frac{du}{\sqrt{\left(u^2-1\right)\left(1-k^2u^2\right)}};\quad \lambda_n=\frac{K'}{n}\operatorname{th}\left(\pi nK/K'\right)\ \ n=1,2,...,$$

Здесь $K=K\left(k\right)$- полный эллиптический интеграл первого рода, $K'=K\left(k'\right)$ $\left(k'=\sqrt{1-k^2}\right)$, а $T_n\left(X\right)$- многочлены Чебышева первого рода аргумента X. Отметим, что ϑ и φ, причем $0\le\vartheta,\varphi\le\pi$, можно выразить через неполный эллиптический интеграл первого рода. Действительно, в выражении ϑ от переменной интегрирования u перейдем к переменной $t=1/u$. Тогда

$$\vartheta=\frac{\pi}{K'}\int\limits_{k/\xi}^{1}\frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(t^2-k^2\right)}}\qquad \left(k\le\xi\le1\right).$$

Далее, воспользовавшись выражением известного интеграла из [14] (стр. 260, ф-ла 10), получим

$$\vartheta=\frac{\pi}{K'}F\left(\arcsin\frac{\sqrt{\xi^2-k^2}}{K'\xi},k'\right)=\frac{\pi}{K'}\int\limits_{0}^{\sqrt{\xi^2-k^2}/k'\xi}\frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k'^2t^2\right)}}\quad \left(k\le\xi\le1\right),$$

где $F\left(\lambda,q\right)$- неполный эллиптический интеграл первого рода.

Теперь, исходя из (2.1), решение ОИУ (1.9) представим в форме бесконечного ряда

$$\varphi_-\left(\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\xi^2\right)\left(\xi^2-k^2\right)}}\sum_{n=0}^{\infty}X_nT_n\left(X\right)\qquad \left(k<\xi<1\right) \tag{2.2}$$

с неизвестными коэффициентами X_n. Далее (2.2) подставим в (1.9), поменяем порядок суммирования и интегрирования и воспользуемся соотношением (2.1). Будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_nX_nT_n\left(X\right)=g\left(\xi\right)\qquad \left(k<\xi<1\right).$$

Отсюда при помощи условий ортогональности многочленов Чебышева $T_n\left(X\right)$:

$$\int_k^1 T_m(X)T_n(X)\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}}=\begin{cases} K' & (n=m=0);\\ K'/2 & (n=m\neq 0);\\ 0 & (n\neq m);\end{cases}$$

непосредственно вытекающих из обычных условий ортогональности многочленов $T_n(x)$ $(x=\cos\vartheta)$, находим

$$X_0=g_0/\lambda_0 K',\ X_n=2g_n/\lambda_n K' \quad (n=1,2,...);$$
$$g_n=\int_k^1\frac{g(\xi)T_n(X)d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}} \quad (n=1,2,...). \tag{2.3}$$

Теперь заметим, что горизонтальные упругие перемещения точек стрингеров в виде функции $f(x)$ состоят из чисто упругих перемещений в виде функции $f_0(x)$ и одинаковых горизонтальных жестких смещений величины Δ, так что $f(x)=f_0(x)+\Delta$ $(b\le x\le a)$. Отсюда $g(\xi)=g_0(\xi)+\Delta_0$, где $g_0(\xi)=f_0(a\xi)/a$ $\Delta_0=\Delta/a$. Приняв во внимание это обстоятельство, из (2.3) будем иметь

$$g_n=g_n^{(0)}+K'\Delta_0\delta_n,\ \ \delta_n=\begin{cases}1 \ (n=0);\\ 0\ (n=1,2,...);\end{cases}\ \ X_0=\left(g_0^{(0)}+\Delta_0 K'\right)/\lambda_0 K';$$
$$g_n^{(0)}=\int_k^1\frac{g_0(\xi)T_n(X)d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}}\ (n=0,1,2,...);\ X_n=2g_n/\lambda_n K'\ (n=1,2,...) \tag{2.4}$$

С другой стороны, подставляя (2.2) в условие (1.11), находим $X_0=P_0/K'$. Тогда из (2.4) определим абсолютно жесткое смещение правого стрингера:

$$\Delta_0=\frac{\Delta}{a}=\frac{\lambda_0 P_0-g_0^{(0)}}{K'}.$$

Перейдем к решению ОИУ (1.15), представив его решение в форме бесконечного ряда

$$\tau_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sum_{n=1}^{\infty}Y_n T_{2n-1}(\xi) \quad (0<\xi<1)$$

с неизвестными коэффициентами Y_n и воспользуемся известными спектральными соотношениями

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\frac{T_{2n-1}(\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{1}{2n-1}T_{2n-1}(\xi) \qquad (n=1,2,\ldots,\ 0<\xi<1).$$

Далее, поступив совершенно аналогично сделанному выше, находим

$$Y_n = \frac{4(2n-1)}{\pi^2} f_n; \quad f_n = \int_0^1 f_0(\xi)\frac{T_{2n-1}(\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\ (n=1,2,\ldots).$$

Так как функция $f_0(\xi)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, то интегрированием по частям в последнем интеграле легко показать, что по крайней мере, $Y_n = O\left(\frac{1}{n^{2+\xi}}\right)$ при $n\to\infty$ $(\xi>0)$.

Обращаясь, теперь, к условию (1.13) или к этому же условию (1.16) в безразмерной форме, покажем, что одно тождественно удовлетворяется. Действительно, согласно (1.14),

$$T_a = hE_s^* f'(a);$$

$$\int_a^\infty \left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds = -hE_s\int_a^\infty f''(s)\,ds = -hE_s^* f'(s)\Big|_{s=a}^{s=\infty} = hE_s^* f'(a) = T_a,$$

поскольку $f'(x)$ на бесконечности исчезает.

3. **Заключение.** В статье методом ортогональных мноогочленов Чебышева с аргументом в виде неполного эллиптического интеграла первого рода при помощи соответствующих спектральных соотношений, содержащих эти многочлены, построены замкнутые решения одного класса задач контактного взаимодействия стрингеров с массивными упругими телами в модифицированной их постановке, когда заранее задан режим упругих перемещений точек стрингеров. Такая постановка представляет интерес в исследованиях вопросов жесткости систем стрингеры-упругие основания. Изложенные здесь методики и идеи могут быть использованы в исследованиях новых граничных задач механики сплошной среды, когда описывающие их ОИУ имеют симметрические ядра, представимые суммой рассмотренных здесь ядер и регулярных ядер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E., Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen, Ing.– Arch., 3, 1932, N2, p. 123–129.
2. Koiter W.J.T. On the Diffusion of Load from a Stiffener into a Sheet, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, N2, p. 164–178.
3. Muki R., Sternberg E. Transfer of Load from an Edge-Stiffener to a Sheet - a Reconsideration of Melan Problem, J. of Appl. Mech. Trans. ASME, Ser. E., 1967, N3, p. 233-242.

4. Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben über geschweisste oder geklebte Verbindungen, Österr, Ing.–Arch., 1964, N3–4, p. 284–292.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976, 493 с.
6. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983, 296 с.
7. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван. Изд.-во «Гитутюн» НАН РА, 2014, 322 с.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983, 488 с.
9. Mkhitaryan S.M., Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S. On Two Problems of Contact Interaction of Stringers with an Elastic Half-Plane. Construction Technologies and architecture. ISSN 2674-1237, Vol. 2, p. 19-30.
10. Мхитарян С.М., Гаспарян А.В., Саргсян А.С. О точном решении интегрального уравнения одной контактной задачи математической теории упругости. Доклады НАН РА. Т. 121. N2, стр. 106-115.
11. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М. –Л: 1949, 270 с.
12. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. – В сб.: Механика деформируемого твердого тела, Ереван, Изд–во НАН Армении, 1993, стр. 129–143.
13. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968, 402 с.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, т. 1, 1969, 344 с.
15. Градштейн И.С. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ФМ, 1963, 1100 с.
16. Мхитарян С.М. О собственных функциях интегрального оператора, порожденного логарифмическим ядром на двух интервалах, и их приложении к контактным задачам. Известия АН Арм. ССР. Механика, т. 35, №6, 1982, стр. 3–18.

Сведения об авторах

Мхитарян Сурен Манукович – чл.-корр. НАН РА, проф., зав отделом, Институт механики НАН РА,
E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Григорян Марине Самвеловна – к.ф.м.н., доцент, декан факультета «Управление и технологии», Национальный университет архитектуры и строительства Армении
E-mail: marinegrigoryan17@gmail.com

Поступила в редакцию 15.03.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК 62.50; 621.38
Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-67

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ МНОГОЭТАПНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА И УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ

А. А. Гукасян

Ключевые слова: манипулятор, процесс обслуживания, технологический процесс, промежуточные состояния, матрица управляемости.

A. A. Ghukasyan

Generalized Model of Multi-Stage Manipulator Service of Technological Process and Control Conditions

Key words: manipulator, maintenance process, technological process, intermediate states, controllability matrix

The results of mathematical modeling and research into the controllability of multi-stage maintenance by a manipulator of a technological process, which consists of moving or stationary objects (targets) and a multi-link manipulator with a variable structure and vector control, are presented. It is assumed that during the maintenance process, the dynamic characteristics of the manipulator, the phase state vector and the ability of the control system, depending on the mass of the transferred load or tool, may change at some finite time points. In the general case, a description of the process of servicing moving and stationary objects by a manipulator is given and controllability issues are studied in the case when the movement of the manipulator at each service interval is described by linear differential equations with constant coefficients of various sizes and with vector control, and the movements of the objects are given. The questions of controllability of the whole process are investigated depending on the controllability at each stage of the movement. The controllability matrix of the entire system, which combines a finite number of composite systems, is given. It is shown that the service process over the entire time interval is completely controllable if it is controllable over each service interval.

Ա. Ա. Ղուկասյան

Մանիպուլյատորի միջոցով բազմափուլ տեխնոլոգիական պրոցեսի մատակարարման ընդհանրական մոդելը և ղեկավարելիության պայմանները

Հիմնաբառեր. մանիպուլյատոր, մատակարարման պրոցես, տեխնոլոգիական պրոցես, միջանկյալ վիճակներ, ղեկավարելիության մատրիցա

Բերված են մաթեմատիկական մոդելավորման և մանիպուլյատորի միջոցով բազմափուլ տեխնոլոգիական պրոցեսի մատակարարման ղեկավարելիության հարցերի ուսումնասիրության արդյունքները, երբ տեխնոլոգիական պրոցեսը բաղկացած է շարժական կամ անշարժ օբյեկտներից և փոփոխական ստրուկտուրայով ու վեկտորական ղեկավարման բազմօղակ մանիպուլյատորից: Ենթադրրվում է, որ մատակարարման պրոցեսում մանիպուլյատորի դինամիկական բնութագրիչները, ֆազային վեկտորը և ղեկավարման համակարգի հնարավորությունները՝ կախված տեղափոխվող բեռի կամ սարքի զանգվածից, կարող է փոխվել ժամանակի վերջավոր պահերի: Ընդհանուր դեպքում բերված են մանիպուլյատորի միջոցով շարժական և անշարժ օբյեկտներին մատակարարման պրոցեսի նկարագրությունը և հետազոտվում է ղեկավարելիության հարցերը, երբ մանիպուլյատորի շարժումը մատակարարման յուրաքանչյուր փուլում նկարագրվում է տարբեր չափողականության հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումներով և վեկտորական ղեկավարման միջոցով, երբ տրված են օբյեկտների շարժումները: Ուսումնասիրվում է ամբողջ պրոցեսի ղեկավարելիության հարցը՝ կախված յուրաքանչյուր փուլի շարժման ղեկավարելիությունից: Բերված է ղեկավարելիության մատրիցան ամբողջ համակարգի համար, որը միավորում է վերջավոր թվով բաղադրյալ համակարգեր: Ցույց է տրված, որ մատակարարման պրոցեսը ժամանակի ամբողջ ինտերվալում հանդիսանում է լրիվ ղեկավարելի, եթե այն ղեկավարելի է մատակարարման յուրաքանչյուր ինտերվալում:

Приводятся результаты математического моделирования и исследования вопросов управляемости многоэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса, который состоит из подвижных или неподвижных объектов (целей) и многозвенного манипулятора с переменной структурой и векторным управлением. Предполагается, что в процессе обслуживания, динамические характеристики манипулятора, фазовый вектор состояния и возможность системы управления в зависимости от массы переносимого груза или инструмента могут изменяться в некоторые конечные моменты времени. В общем случае приводится описание процесса обслуживания манипулятором подвижных и неподвижных объектов и исследуются вопросы управляемости в случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами различной размерности и с векторным управлением, а движения объектов заданы. Исследуются вопросы управляемости всего процесса в зависимости от управляемости на каждом этапе движения. Приведена матрица управляемости всей системы, объединяющей конечное число составных систем. Показано, что процесс обслуживания на всём промежутке времени является вполне управляемым, если он управляем на каждом интервале обслуживания.

Введение. Строится математическая модель технологического процесса обслуживания, который может быть реализован с использованием манипуляторов с программным управлением или адаптивного робота, оснащенного системой технического зрения, чувствительным элементом, а также другими элементами искусственного интеллекта. Применение робота в технологическом процессе обслуживания эффективно для выполнения, главным образом, вспомогательных операций производственного цикла, а также операций, выполняемых в экологически вредных и дискомфортных условиях. При моделировании автоматизированных производственных систем все элементы в системе обслуживания, то есть станки, манипуляторы, конвейеры, склады с деталями или другими технологическими инструментами могут быть рассмотрены как подвижные и неподвижные объекты (цели), состояния которых могут быть заданы или являться решениями некоторых дифференциальных уравнений, описывающих их движение [1-8]. Ниже приводятся результаты математического моделирования и исследования вопросов управляемости многоэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса, который состоит из подвижных или неподвижных объектов (целей) и многозвенного манипулятора с переменной структурой и векторным управлением. Предполагается, что в процессе обслуживания, динамические характеристики манипулятора, фазовый вектор состояния и возможность системы управления в зависимости от массы переносимого груза или инструмента могут изменяться в некоторые конечные моменты времени [9, 10]. Задача манипулятора состоит в том, что он должен обслуживать непрерывную работу объектов в зависимости от технологического назначения. В общем случае приводится описание процесса обслуживания манипулятором подвижных и неподвижных объектов и исследуются вопросы управляемости в случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами различной размерности и с векторным управлением, а движения объектов заданы.

В работах [11-18] исследуются различные задачи оптимального обслуживания манипулятором технологического процесса. В [11] приведена модель управляемого технологического процесса, состоящего из подвижных конвейеров, тележки с различными деталями и адаптивным манипулятором. Манипулятор оптимальным образом обслуживает работу конвейеров нужными деталями, когда последовательность обслуживания определяется с помощью датчика усилий, расположенного во внутренней поверхности захватного устройства манипулятора. В [18] обслуживание технологического процесса осуществляется многозвенным манипулятором с векторным управлением. Движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы. Здесь предполагается, что размерность матрицы динамических характеристик многозвенного манипулятора, размерность фазового вектора и матрицы возможности системы управления в процессе обслуживания не меняются. Определена матрица управляемости технологического процесса при векторном управлении манипулятора и приведены сравнения со скалярным управлением [13]. В рамках математической модели процесса обслуживания манипулятором технологического участка, разработанной в исследованиях [11,13-15,18], в работе [17], в частности, для трехэтапного обслуживания, исследуется возможность применения алгоритма оптимального управления манипулятора по быстродействию. На первом этапе движение манипулятора описывается уравнением второго порядка, на втором – третьего порядка, как электромеханическая модель манипулятора [19], а на третьем этапе – второго порядка с нефиксированной массой на захвате [9,10]. Применяя принцип максимума построен синтез оптимального обслуживания на каждом этапе. Оптимальный синтез обслуживания является объединением управлений для каждого этапа. Во всех исследованиях время нахождения манипулятора около каждого объекта не учитывается [11], то есть считается, что в момент времени t_i манипулятор обслуживает объект под номером i и мгновенно направляется к другому объекту (предположение имеет место, поскольку $\tau \ll T - t_0$ где $\tau -$ время нахождения манипулятора около объекта, а $\left(T - t_0\right)$ - время процесса обслуживания).

1. Описание модели обслуживания. Предполагаем, что движения объектов обслуживания заданы [13,14,18], а динамика движения манипулятора на каждом интервале $\left[t_{i-1}, t_i\right]$ $\left(i = 1, 2, ..., k\right)$ описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами различных размеров и с векторным управлением. Допускается, что возможности системы управления в процессе обслуживания на каждом интервале $\left[t_{i-1}, t_i\right]$, может меняться

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}^i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}^i \text{, где } \mathbf{A}_i = \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\omega}^i\right),\ \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_i\left(\boldsymbol{\omega}^i\right)\ \left(i = 1, 2, \ldots, k\right) \tag{1.1}$$

Здесь элементы матриц $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}_i$ зависят от некоторого параметра $\omega^i \left(i = 1, 2, ..., k\right)$, который может меняться после каждой встречи с объектами. В практических задачах обслуживания параметром $\omega^i \in \left\{\Omega^i\right\}$, где $\left\{\Omega^i\right\} (i = 1, 2, ..., k)$ - область допустимых значений параметра ω^i, может являться масса переносимого манипулятором груза или инструмента [9,10,18].

Уравнения (1.1) на всем интервале обслуживания представим в виде

$$
\begin{cases}
\dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}^1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u}^1, t \in [t_0, t_1] \\
\dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}^2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}^2, t \in [t_1, t_2] \\
------------ \\
\dot{\mathbf{x}}^{k-1} = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}^{k-1}, t \in [t_{k-2}, t_{k-1}] \\
\dot{\mathbf{x}}^k = \mathbf{A}_k\mathbf{x}^k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}^k, t \in [t_{k-1}, t_k = T]
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

Применяем следующие обозначения: k – количество интервалов обслуживания $[t_{i-1}, t_i](i = 1, 2, ..., k)$, $\mathbf{x}^i - n_i$-мерный фазовый вектор состояния манипулятора (состояния захвата манипулятора), который соответствует движению на интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$, $\mathbf{A}_i - (n_i \times n_i)$-мерная матрица с постоянными элементами $\left\{a^i_{l,j}\left(\omega^i\right)\right\}_{l,j=1}^{n_i,n_i}$ на интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$, характеризующими динамические свойства механической системы манипулятора в зависимости от параметра ω^i (здесь предполагается, что изменение параметра происходит скачкообразно в моменты времени $t_{i-1}\left(i=1,2,...,k\right)$), $\mathbf{B}_i - (n_i \times r_i)$ - мерная матрица с постоянными элементами $\left\{b^i_{l,j}\right\}_{l,j=1}^{n_i,r_i}$ на интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$, характеризующими возможность системы управления манипулятором на том же интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$, $\mathbf{u}^i - r_i\left(r_i \le n_i\right)$ - мерный вектор управления, $t \in [t_0, T]$ (t_0 - начальный, $t_k = T$ - конечный момент времени). Моменты времени $t_i\left(i=1,2,...,k\right)$ $\left(t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{k-1} < t_k = T\right)$ могут быть фиксированными или определяться из дополнительных условий. В [18] приведено описание в случае, когда в процессе обслуживания размерность матриц динамических характеристик манипулятора и возможности системы управления, а также размерность фазового вектора не меняются.

На каждом этапе обслуживания $[t_{i-1}, t_i]\left(i = 1, 2, ..., k\right)$, матрицы $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ и векторы $\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i$ в (1.2) имеют вид

$$
\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a^i_{11} & a^i_{12} & \cdots & a^i_{1n_i} \\ a^i_{21} & a^i_{22} & \cdots & a^i_{2n_i} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a^i_{n_i1} & a^i_{n_i2} & \cdots & a^i_{n_in_i} \end{pmatrix} \quad
\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} b^i_{11} & b^i_{12} & \cdots & b^i_{1r_i} \\ b^i_{21} & b^i_{22} & \cdots & b^i_{2r_i} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b^i_{n_i1} & b^i_{n_i2} & \cdots & b^i_{n_ir_i} \end{pmatrix},
\tag{1.3}
$$

$$
\mathbf{x}^i = \left(x^i_1, x^i_2, ..., x^i_{n_i}\right)^T, \mathbf{u}^i = \left(u_1, u_2, ..., u_{r_i}\right)^T, \; \left(i = 1, 2, ...k\right)
$$

Движения объектов обслуживания в каждый промежуточный момент времени $t_i\left(i=1,2,...,k\right)$ заданы, и их состояние в n_i – мерном пространстве определим фазовым вектором $\mathbf{z}^i\left(i=1,2,...,k\right)$.

Пусть в пространстве состояния заданы произвольные начальное (при $t=t_0, i=1$) и конечное (при $t=T, i=k$) положения системы (1.2) в виде

$$\mathbf{x}^1\left(t_0\right)=\mathbf{x}^1_{t_0}, \mathbf{x}^k\left(t_k\right)=\mathbf{x}^k\left(T\right)=\mathbf{x}^k_T \tag{1.4}$$

где фазовый вектор $\mathbf{x}^1_{t_0}$ имеет размерность n_1, а $\mathbf{x}^k_T$ – размерность n_k.

В общем случае предполагается, что $n_1 \neq n_k, r_1 \neq r_k$ и в промежуточные моменты времени $t_i\ (i=1,2,\dots,k-1)$, когда происходит переход из одного этапа обслуживания в другое, фазовые векторы составных систем (1.2) должны удовлетворять условиям:

$$\mathbf{x}^i\left(t_i\right)=\mathbf{z}^i\left(t_i\right)=\mathbf{x}^{i+1}\left(t_i\right), (i=1,2,\dots,k-1) \tag{1.5}$$

где $\mathbf{z}^i\left(t_i\right)$ – фазовое состояние объектов в моменты времени $t_i\ (i=1,2,\dots,k-1)$.

Условия (1.5) обеспечивают преемственность процесса [20,21] и означают, что конец движения манипулятора на интервале времени $t\in\left[t_{i-1},t_i\right]$ является началом движения на следующем интервале времени $t\in\left[t_i,t_{i+1}\right]$.

Не нарушая общности, предполагаем что $n_{i+1}>n_i$, $r_{i+1}>r_i$ $\left(r_i\le n_i, r_{i+1}\le n_{i+1}\right)$ $\left(i=1,2,\cdots,k-1\right)$. Для согласования размерности фазовых векторов на разных этапах движения, формально считаем, что движение на i - ом этапе происходит на n_{i+1}-мерном пространстве $R^{n_{i+1}}$, где последние $\left(n_{i+1}-n_i\right)$ компоненты фазового вектора $\mathbf{x}^i\left(t\right)$ тождественно равны нулю [14,15], то есть

$$\begin{gathered}\mathbf{x}^i\left(t\right)=\left(x_1^i, x_2^i,\cdots,x_{n_i}^i, 0_{n_i+1}, 0_{n_i+2},\cdots,0_{n_{i+1}}\right)^T,\\ \mathbf{x}^{i+1}\left(t\right)=\left(x_1^{i+1}, x_2^{i+1},\cdots,x_{n_i}^{i+1}, x_{n_i+1}^{i+1}, x_{n_i+2}^{i+1},\cdots,x_{n_{i+1}}^{i+1}\right)^T\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\left(\begin{aligned}&x_1^{i+1}\left(t_i\right)=x_1^i\left(t_i\right), x_2^{i+1}\left(t_i\right)=x_2^i\left(t_i\right),\cdots,x_{n_i}^{i+1}\left(t_i\right)=x_{n_i}^i\left(t_i\right),\\ &x_{n_i+1}^{i+1}\left(t_i\right)\equiv 0, x_{n_i+2}^{i+1}\left(t_i\right)\equiv 0,\cdots,x_{n_{i+1}}^{i+1}\left(t_i\right)\equiv 0\end{aligned}\right)$$

Аналогичным образом, можно формально увеличить размерность пространства состояний на $i+1$ этапе движений на величину $\left(n_i-n_{i+1}\right)$, когда $n_{i+1}<n_i\left(i=1,2,\cdots,k-1\right)$

Поскольку на каждом интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}] (i=1,2,...,k)$ движение манипулятора описывается системой линейных дифференциальных уравнений (1.1), то при надлежащем выборе управляющей вектор-функции $\mathbf{u}^i = (u_1, u_2, ..., u_{r_i})^T$ из области допустимых управлений, имеем единственную траекторию движения манипулятора, удовлетворяющую условиям (1.4), (1.5). Полученные таким образом решения $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}^i(t)\}$ уравнений (1.2), где $\mathbf{x}^i(t) = (x_1^i, x_2^i, ..., x_{n_i}^i)^T$ $(i=1,2,...,k)$, являются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми, то есть всегда, кроме моментов времени $t_i\ (i=1,2,...,k)$, решение $\mathbf{x}(t)$ является непрерывно дифференцируемым.

2. Управляемость процесса обслуживания. Важным вопросом для дальнейшего исследования процесса обслуживания манипулятором объектов (технологического участка) являются вопросы управляемости, как на отдельных этапах обслуживания, так и управляемость всей системы на всем интервале времени [13-15,18].

Каждая система из совокупности (1.2)

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}^i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}^i \quad (i=1,2,...,k) \tag{2.1}$$

при векторном управлении $\mathbf{u}^i = (u_1^i(t), u_2^i(t), ..., u_{r_i}^i(t))^T$, является вполне управляемой на интервале $t \in [t_i, t_{i+1}] (i=1,2,...,k)$, если ранг матрицы управляемости равен n_i [22-24], то есть

$$rang\begin{pmatrix}\mathbf{B}_i & \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i & \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i \cdots \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\end{pmatrix} = n_i\ (i=1,2,...,k) \tag{2.2}$$

и неуправляемой на интервале $t \in [t_i, t_{i+1}] (i=1,2,...,k)$, если

$$rang\begin{pmatrix}\mathbf{B}_i & \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i & \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i \cdots \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\end{pmatrix} < n_i\ (i=1,2,...,k) \tag{2.3}$$

Матрица управляемости $(\mathbf{B}_i\ \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\ \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i\ \cdots \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i)$- имеет размерность $(n_i \times n_i r_i)$. В случае скалярного управления манипулятором матрица $(\mathbf{b}_i\ \mathbf{A}_{ii}\mathbf{b}\ \mathbf{A}_i^2\mathbf{b}_i\ \cdots \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{b}_i)$ управляемости на интервале обслуживания $t \in [t_i, t_{i+1}]$ $(i=1,2,...,k)$ имеет размерность $(n_i \times n_i)$ [13]. В случае (2.3) вопросы управляемости (2.1) исследуются в некотором подпространстве (подпространстве управляемости) фазового пространства меньшей размерности [23].

Автономная система (2.1) на интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$ называется вполне управляемой (обладает свойством управляемости), если для любой пары точек $\mathbf{x}^i(t_{i-1})$ и

$\mathbf{x}^i(t_i)(i=1,2,...,k)$ существует ограниченное измеримое векторное управление $\mathbf{u}^i(t)=\left(u_1^i(t),u_2^i(t),...,u_{r_i}^i(t)\right)^T, t\in[t_{i-1},t_i]$, переводящее систему (2.1) из точки $\mathbf{x}^i(t_{i-1})$ в точку , $\mathbf{x}^i(t_i)(i=1,2,...,k)$, при размерности $r_i \le n_i$ [22-25]. Из определения вполне управляемости системы (2.1) и условий (1.4), (1.5), следует обобщенное определение вполне управляемости совокупности (1.2) на интервале времени $t\in[t_0,T]$, при векторном управлении $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$.

Обобщенное определение управляемости. Совокупность (1.2) на интервале времени $[t_0,T]$ является вполне управляемой (обладает свойством управляемости), если для любого начального $\mathbf{x}^1(t_0)$ и конечного $\mathbf{x}^k(T)$ состояний существует допустимое векторное управление $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$ $t\in[t_0,T]$, переводящее (1.2) из начального состояния в конечное, с обеспечением в промежуточные моменты времени $t_i\left(t_0<t_1<t_2<...<t_{k-1}<t_k=T\right)$ условий $\mathbf{x}^i(t_i)=\mathbf{x}^{i+1}(t_i)(i=1,2,...,k-1)$. Управление при этом строится как объединение управлений $\mathbf{u}_p=\left\{\mathbf{u}^i(t)\right\}$ $(i=1,2,...,k-1)$ манипулятором на каждом этапе обслуживания, то есть как элемент $\sum\limits_{i=1}^{k-1} r_i$ -мерного векторного пространства $R^{\sum_{i=1}^{k-1} r_i}$ ($\mathbf{u}_p \in R^{\sum_{i=1}^{k-1} r_i}$).

Нетрудно убедиться, что процесс обслуживания (1.2) является вполне управляемым на интервале времени $[t_0,T]$, если он вполне управляем на каждом этапе и неуправляемым, если хотя бы одна из систем (1.2) не вполне управляема на своем интервале определения.

Для доказательства этого утверждения предполагаем, что на интервале времени $[t_0,T]$ имеется только один промежуточный момент t_1, где происходит изменение динамических характеристик механической системы манипулятора, возможность системы управления и размерность фазового вектора [13-15,18].

Движение манипулятора на каждом интервале $[t_0,t_1],[t_1,T](k=2)$ описывается следующими уравнениями

$$\left[\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}}^1=\mathbf{A}_1\mathbf{x}^1+\mathbf{B}_1\mathbf{u}^1, t_0\le t\le t_1 \\ \dot{\mathbf{x}}^2=\mathbf{A}_2\mathbf{x}^1+\mathbf{B}_2\mathbf{u}^2, t_1\le t\le t_2=T\end{array}\right. , \tag{2.4}$$

где начальные и конечные условия, а также условия преемственности имеют вид

$$\mathbf{x}^1(t_0)=\mathbf{x}^1_{t_0}, \mathbf{x}^1(t_1)=\mathbf{z}^1(t_1)=\mathbf{x}^2(t_1), \mathbf{x}^2(t_2)=\mathbf{x}^2_T \tag{2.5}$$

Матрицы $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ и векторы $\mathbf{x}^i$, $\mathbf{u}^i$ в общем случае, имеют структуры (1.3), а условие управляемости и неуправляемости (2.2), (2.3), соответственно при $i = 1,2$.

Дальнейшего исследования вопросов о вполне управляемости процесса обслуживания, описывающимися объединением систем (2.4) при $n_2 > n_1$ на всем промежутке времени $[t_0, T]$, по аналогии с [13-15], формально рассмотрим движение в пространстве состояния $R^{n_1+n_2}$ размерности $(n_1 + n_2)$, где движение на первом этапе, то есть в течение времени $[t_0, t_1]$, происходит в подпространстве R^{n_1}, а на втором этапе $[t_1, T]$ в подпространстве R^{n_2}. Подпространства R^{n_1} и R^{n_2} $\left(R^{n_1} \bigcup R^{n_2} = R^{n_1+n_2}\right)$ не имеют внутренних точек, а при $t = t_1$ имеют общие граничные точки.

Для описания движения в $R^{n_1+n_2}$ в течение времени $t \in [t_0, t_2], (t_2 = T)$ введем $(n_1 + n_2)$- мерный вектор состояния $\mathbf{y}$ и $(r_1 + r_2)$-мерный вектор управления $\mathbf{v}$ следующим образом

$$\mathbf{y} = \left(x_1^1, \quad x_2^1, \quad \ldots \quad , x_{n_1}^1, \quad x_1^2, \quad x_2^2, \quad \ldots \quad , x_{n_2}^2\right)^T, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{v} = \left(u_1^1, \quad u_2^1, \quad \ldots \quad , u_{r_1}^1, \quad u_1^2, \quad u_2^2, \quad \ldots \quad , u_{r_2}^2\right)^T,$$

где $\mathbf{y}^1 = \left(x_1^1, \quad x_2^1, \quad \ldots, \quad x_{n_1}^1, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0\right)^T$, при $t_0 \le t \le t_{1-}$ (2.7)

$$\mathbf{v}^1 = \left(u_1^1, \quad u_2^1, \quad \ldots \quad , u_{r_1}^1, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots \quad , 0\right)^T,$$

и $\mathbf{y}^2 = \left(0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad x_1^2, \quad x_2^2, \quad \ldots, \quad x_{n_2}^2\right)^T$, при $t_{1+} \le t \le t_2$ (2.8)

$$\mathbf{v}^2 = \left(0, \quad 0, \quad \ldots \quad , 0, \quad u_1^2, \quad u_2^2, \quad \ldots \quad , u_{r_2}^2\right)^T,$$

В момент времени t_1, из (2.5) следует, что $\left|\mathbf{y}^1(t_1)\right| = \left|\mathbf{y}^2(t_1)\right|$.

Введем блочную матрицу $\mathbf{C}$ с размерностью $\left((n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)\right)$ и матрицу $\mathbf{D}$ с размерностью $\left((n_1 + n_2) \times (r_1 + r_2)\right)$, соответственно

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

где матрицы $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ определяются из (1.3) и $r_2 > r_1$.

В соответствии с (2.6)-(2.9) матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ можно представить в виде суммы следующих матриц

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} \end{pmatrix}, \ \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} \end{pmatrix}, \ \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

(матрицы $\mathbf{0}_{li}\left(l, j = 1,2\right)$ с нулевыми элементами в (2.10) имеют размерности $\left(n_l \times n_j\right)$, а $\mathbf{0}_{ii} - \left(n_i \times r_i\right)$ в (2.11)).

С учетом (2.6) - (2.11) системы уравнений (2.4) в общем случае можно представить в виде

$$\left[\begin{array}{l} \dot{\mathbf{y}}^1 = \mathbf{C}_1\mathbf{y}^1 + \mathbf{D}_1\mathbf{v}^1, t \in \left[t_0, t_1\right] \\ \dot{\mathbf{y}}^2 = \mathbf{C}_2\mathbf{y}^2 + \mathbf{D}_2\mathbf{v}^2, t \in \left[t_1, t_2\right] \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Из (2.6)-(2.11) следует, что первую систему уравнений в (2.12) можно рассматривать на всем промежутке времени $\left[t_0, t_2\right]$ с нулевыми элементами в $\left[t_1, t_2\right]$ (с нулевым продолжением), а вторую систему в $\left[t_0, t_2\right]$ с нулевыми элементами в $\left[t_0, t_1\right]$ [13,14].

Начальными и конечными условиями для задач управления (2.12), соответственно, являются

$$\mathbf{y}^1\left(t_0\right) = \left(x_1^1\left(t_0\right), x_2^1\left(t_0\right), ..., x_n^1\left(t_0\right), 0, 0, ..., 0\right)^T, \mathbf{y}^1\left(t_1\right) = \left(x_1^1\left(t_1\right), x_2^1\left(t_1\right), ..., x_n^1\left(t_1\right), 0, 0, ..., 0\right)^T$$

$$\mathbf{y}^2\left(t_1\right) = \left(0, 0, ..., 0, x_1^2\left(t_1\right), x_2^2\left(t_1\right), ..., x_n^2\left(t_1\right)\right)^T, \mathbf{y}^2\left(t_2\right) = \left(0, 0, ..., 0, x_1^2\left(t_2\right), x_2^2\left(t_2\right), ..., x_n^2\left(t_2\right)\right)^T$$

$$\left|\mathbf{y}^1\left(t_1\right)\right| = \left|\mathbf{y}^2\left(t_1\right)\right|, \left(x_i^1\left(t_1\right) = x_i^2\left(t_1\right), i = 1, 2, ..., n\right) \tag{2.13}$$

Объединяя системы (2.12) с учетом (2.6)-(2.13), процесс обслуживания формально можно описать уравнением

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{D}\mathbf{v}, t \in \left[t_0, t_2\right] \tag{2.14}$$

где векторы $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ и матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ определяются из (2.6)-(2.8) и (2.9)-(2.11), соответственно.

Поскольку в каждый момент времени $t \in \left[t_0, t_2\right]$ (2.14) либо совпадает с первым уравнением из (2.12), либо со вторым, то для переменных и параметров (2.6)-(2.13) матрицы управляемости (2.2) для (2.12) имеют следующие структуры, соответственно

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{C}_1\mathbf{D}_1 & \mathbf{C}_1^2\mathbf{D}_1 \cdots \mathbf{C}_1^{n_1-1}\mathbf{D}_1 \end{pmatrix}, \text{ при } t \in [t_0, t_1] \tag{2.15}$$

и $$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_2 & \mathbf{C}_2\mathbf{D}_2 & \mathbf{C}_2^2\mathbf{D}2 \cdots \mathbf{C}_2^{n_2-1}\mathbf{D}_2 \end{pmatrix}, \text{ при } t \in [t_1, t_2] \tag{2.16}$$

$$rang\begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{C}_1\mathbf{D}_1 & \mathbf{C}_1^2\mathbf{D}_1 \cdots \mathbf{C}_1^{n_1-1}\mathbf{D}_1 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{A}_1^{n_1-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$rang\begin{pmatrix} \mathbf{D}_2 & \mathbf{C}_2\mathbf{D}_2 & \mathbf{C}_2^2\mathbf{D}2 \cdots \mathbf{C}_2^{n_2-1}\mathbf{D}_2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2 \end{pmatrix}$$

Обозначим через $\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^2$ следующие матрицы

$$\mathbf{M}_1^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{A}_1^{n_1-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_2^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2 \end{pmatrix}$$

Здесь матрицы $\mathbf{M}_1^1$ и $\mathbf{M}_2^2$ имеют размерности $\left((n_1+n_2)\times r_1 n_1\right)$ и $\left((n_1+n_2)\times r_2 n_2\right)$ соответственно. С учетом (2.2), (2.3, (2.15), (2.16), $rang\mathbf{M}_i\ (i=1,2)$ совпадает с (2.2) и (2.3), при $i=1,2$.

Объединяя матрицы $\mathbf{M}_1^1$ и $\mathbf{M}_2^2$, получим

$$\mathbf{M}^1 = \left\{\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^2\right\} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n_1-1}\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Блочная диагональная матрица $\mathbf{M}^1$ имеет размерность $\left((n_1+n_2)\times(n_1 r_1 + n_2 r_2)\right)$, где $\mathbf{M}_{11} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 \cdots \mathbf{A}_1^{n_1-1}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix}$ совпадает с матрицей управляемости первой системы совокупности (2.12), а $\mathbf{M}_{22} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 \cdots \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2 \end{pmatrix}$ - с матрицей управляемости второй системы.

Замечание. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ данные матрицы одинакового строения, то в общем случае $rang(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le rang\mathbf{A} + rang\mathbf{B}$ и неравенство является точным, если [26]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

В рассматриваемом случае (2.15)- (2.17), имеем

$$rang\mathbf{M}^1 = rang\mathbf{M}_{11} + rang\mathbf{M}_{22}. \tag{2.18}$$

В случае скалярного управления $(r_1, r_2 = 1)$ блочная диагональная матрица $\mathbf{M}^1$ является квадратной, имеет размерность $((n_1+n_2)\times(n_1+n_2))$ и определитель вычисляется следующим образом [14,15,26]

$$\det\mathbf{M}^1 = \det\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{M}_{11}\times\mathbf{M}_{22}) = \det\mathbf{M}_{11}\times\det\mathbf{M}_{22} \tag{2.19}$$

Здесь $\det\mathbf{M}^1 \neq 0$, если $rang\mathbf{M}^1 = (n_1+n_2)$, где $rang\mathbf{M}_{11} = n_1$, $rang\mathbf{M}_{22} = n_2$

Из (2.19) следует, что движение механической системы манипулятора или процесс обслуживания, описываемый объединением (2.12), вполне управляем на интервале времени $t\in[t_0, T]$ тогда и только тогда, когда обе системы в (2.12) при $r_1, r_2 = 1$ и при (2.5) вполне управляемы на интервалах времени $[t_0, t_1]$ и $[t_1, t_2]$, соответственно, и неуправляемы, если одна из систем в (2.12) не вполне управляема на своем интервале определения, то есть $\det\mathbf{M}^1 = \det\mathbf{M}_{11}\times\det\mathbf{M}_{22} = 0$, если $rang\mathbf{M}_{11} < n_1$, или $rang\mathbf{M}_{22} < n_2$. Эти результаты совпадают с результатами исследования [14,15].

При $1 < r_1 \leq n_1$ и $1 < r_2 \leq n_2$ $(r_1 \neq r_2)$ для рассматриваемого случая имеем (2.18). Если системы в (2.4) при (2.5) вполне управляемы на своих интервалах движений $[t_0, t_1]$ и $[t_1, t_2]$, то тогда $rang\mathbf{M}_{11} = n_1$ и $rang\mathbf{M}_{22} = n_2$ $(rang\mathbf{M}_{11} < n_1$, или $rang\mathbf{M}_{22} < n_2$ в противном случае). По аналогии с [13-15] в качестве матрицы управляемости для объединения (2.4) на промежутке времени $[t_0, t_2]$ можно принять матрицу $\mathbf{M}^1$. Следовательно, процесс обслуживания вполне управляем, если

$rang\mathbf{M}_{11} = n_1$, $rang\mathbf{M}_{22} = n_2$ и

$$rang\mathbf{M}^1 = rang\mathbf{M}_{11} + rang\mathbf{M}_{22} = n_1 + n_2 \tag{2.20}$$

и не вполне управляем на интервале времени $[t_0, t_2]$, если

$$rang\mathbf{M}^1 < n_1 + n_2 \; (rang\mathbf{M}_{11} < n_1, \text{ или } rang\mathbf{M}_{22} < n_2), \tag{2.21}$$

где $\mathbf{M}_{11} = \left(\mathbf{B}_i \ \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i \ \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i \ \cdots \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\right)$ и $\mathbf{M}_{22} = \left(\mathbf{B}_2 \ \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \ \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 \ \cdots \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{B}_2\right)$.

Предположим, что утверждение об управляемости верно при $(k-1)$ этапах движения. То есть матрица управляемости для объединенных систем (1.2) при $(k-1)$, имеет вид

$$\mathbf{M}^{k-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{M}_{k-1k-1} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Здесь матрица $\mathbf{M}_{jj}$ $(j = 1,2,\ldots,k-1)$ является матрицей управляемости системы под номером $j\left(j = 1, 2, \cdots, k-1\right)$ из (1.2) на интервале времени движения $\left[t_{j-1}, t_j\right]$ и имеет размерность $\left(n_j \times n_j r_j\right)$, а матрица управляемости $\mathbf{M}^{k-1}$ объединенной системы на интервале времени $\left[t_0, t_{k-1}\right]$ имеет размерность $\left[\left(\sum\limits_{j=1}^{k-1} n_j\right) \times \left(\sum\limits_{j=1}^{k-1} n_j r_j\right)\right]$. По аналогии с (2.18) $rang\mathbf{M}^{k-1} = \sum\limits_{j=1}^{k-1} n_j$. Матрицы $\mathbf{0}_{ij}\left(i, j = 1, 2, \ldots k-1, i \neq j\right)$ с нулевыми элементами имеют размерности $\left(n_i \times n_j r_j\right)$. соответственно.

Для объединения системы уравнений (1.2), описывающих $(k-1)$ этапов движения, рассмотрим пространства состояния размерностью $\sum\limits_{j=1}^{k-1} n_j \left(R^{\sum_{j=1}^{k-1} n_j}\right)$.

Вектор состояния $\mathbf{y}$ и вектор управления $\mathbf{u}$ представим в виде

$$\mathbf{y} = \left(x_1^1, x_2^1, \cdots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \cdots, x_{n_2}^2, \cdots, x_1^{\kappa-1}, x_2^{\kappa-1}, \cdots, x_{n_{\kappa-1}}^{\kappa-1}\right)^T$$

$$\mathbf{v} = \left(u_1^1, u_2^1, \cdots, u_{r_1}^1, u_1^2, u_2^2, \cdots, u_{r_2}^2, \cdots, u_1^{\kappa-1}, u_2^{\kappa-1}, \cdots, u_{r_{\kappa-1}}^{\kappa-1}\right)^T \tag{2.23}$$

$\mathbf{y}$ имеет размерность $\sum\limits_{j=1}^{k-1} n_j$, а $\mathbf{u}-$ $\sum\limits_{j=1}^{k-1} r_j$.

На каждом интервале движения имеем

$\mathbf{y}^1 = \left(x_1^1, \ \ x_2^1, \ \ \cdots, \ \ x_{n_1}^1, \ \ 0, \ \ 0, \ \ \cdots, \ \ 0, \ \ \cdots, \ \ 0, \ \ 0, \ \ \cdots, \ \ 0\right)^T$,

при $t_0 \le t \le t_{1-}$

$$\mathbf{v}^1 = \left(u_1^1,\quad u_2^1,\quad \cdots,\quad u_{r_1}^1,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0\right)^T$$

$$\mathbf{y}^2 = \left(0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad x_1^2,\quad x_2^2,\quad \cdots,\quad x_{n_2}^2,\quad \cdots,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0\right)^T,$$

при $t_{1+} \le t \le t_{2-}$ (2.24)

$$\mathbf{v}^2 = \left(0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad u_1^2,\quad u_2^2,\quad \cdots,\quad u_{r_2}^2,\quad \cdots,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0\right)^T$$

……………………………………………………………………………………

$$\mathbf{y}^{\kappa-1} = \left(0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad \cdots,\quad x_1^{\kappa-1},\quad x_2^{\kappa-1},\quad \cdots,\quad x_{n_{k-1}}^{\kappa-1}\right)^T,$$

при $t_{(\kappa-2)+} \le t \le t_{\kappa-1}$

$$\mathbf{v}^{k-1} = \left(0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad \cdots,\quad u_1^{\kappa-1},\quad u_2^{\kappa-1},\quad \cdots,\quad u_{r_{\kappa-1}}^{\kappa-1}\right)^T$$

По аналогии с (2.6)-(2.8) в промежуточные моменты времени t_j $\left(j = 1,2,\ldots,k-2\right)$ вектор состояния $\mathbf{y}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to t_j-} \mathbf{y} = \lim_{t\to t_j-}\left(\mathbf{x}^1,\quad \mathbf{x}^2,\quad \cdots,\quad \mathbf{x}^j,\quad \mathbf{x}^{j+1},\quad \cdots,\quad \mathbf{x}^{k-1}\right)^T = \\ &= \left(\mathbf{0},\quad \mathbf{0},\quad \cdots,\quad \mathbf{0},\quad \mathbf{x}^j,\quad \mathbf{0},\quad \cdots,\quad \mathbf{0}\right)^T = \mathbf{y}^j\left(t_j\right), \\ &\lim_{t\to t_j+} \mathbf{y} = \lim_{t\to t_j+}\left(\mathbf{x}^1,\quad \mathbf{x}^2,\quad \cdots,\quad \mathbf{x}^j,\quad \mathbf{x}^{j+1},\quad \cdots,\quad \mathbf{x}^{k-1}\right)^T = \\ &= \left(\mathbf{0},\quad \mathbf{0},\quad \cdots,\quad \mathbf{0},\quad \mathbf{x}^{j+1},\quad \mathbf{0},\quad \cdots,\quad \mathbf{0}\right)^T = \mathbf{y}^{j+1}\left(t_j\right), \end{aligned} \qquad \left(j = 1,2,\ldots,k-2\right).$$

Параметры (2.9) - (2.11) в рассматриваемом случае имеют вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{A}_{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{B}_{k-1} \end{pmatrix} \qquad (2.25)$$

на интервале времени $t \in \left[t_0, t_{\kappa-1}\right]$.

$$\mathbf{C}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1}\end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

при $t\in[t_0,t_1]$.

$$\mathbf{C}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1}\end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

при $t\in[t_1,t_2]$.

На интервале $t\in[t_{\kappa-2},t_{\kappa-1}]$, имеем

$$\mathbf{C}_{k-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{A}_{k-1}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{k-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{B}_{k-1}\end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Матрицы $\mathbf{M}_1^1,\mathbf{M}_2^2,\dots,\mathbf{M}_{k-1}^{k-1}$ имеют аналогичные структуры (2.15), (2.16) с размерностями $(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})\times r_j n_j,(j=1,2,\cdots,k-1)$.

В частности

$$\mathbf{M}_1^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n_1-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1} \end{pmatrix}, \text{ при } t \in [t_0, t_1] \tag{2.29}$$

$$\mathbf{M}_2^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1} \end{pmatrix}, \text{ при } t \in [t_1, t_2] \tag{2.30}$$

....

$$\mathbf{M}_{k-1}^{k-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{B}_{k-1} & \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{B}_{k-1} & \mathbf{A}_{k-1}^2\mathbf{B}_{k-1} & \cdots & \mathbf{A}_{k-1}^{n_{k-1}-1}\mathbf{B}_{k-1} \end{pmatrix}, \text{ при } t \in [t_{\kappa-2}, t_{\kappa-1}] \tag{2.31}$$

Объединяя матрицы $\mathbf{M}_1^1,\ \mathbf{M}_2^2, \ldots,\ \mathbf{M}_{k-1}^{k-1}$, получим (2.22)

$$\mathbf{M}^{k-1} = \left\{\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^2, \ldots, \mathbf{M}_{k-1}^{k-1}\right\} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{M}_{k-1k-1} \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

где $\mathbf{M}_{11} = \left(\mathbf{B}_1\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\ \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1\ \cdots \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1\right)$, $\mathbf{M}_{22} = \left(\mathbf{B}_2 \quad \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \quad \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 \cdots \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2\right)$
$,\ldots,\ \mathbf{M}_{k-1k-1} = \left(\mathbf{B}_{k-1} \quad \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{B}_{k-1} \quad \mathbf{A}_{k-1}^2\mathbf{B}_{k-1} \cdots \mathbf{A}_{k-1}^{n_{k-1}-1}\mathbf{B}_{k-1}\right)$

$$rang\mathbf{M}^{k-1} = rang\mathbf{M}_{11} + rang\mathbf{M}_{22} + \ldots + rang\mathbf{M}_{k-1k-1} = \left(n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1}\right).$$

На последнем этапе движения манипулятора динамические характеристики механической системы изменяются в момент времени $t = t_{\kappa-1}$ и манипулятор движется из точки $\mathbf{x}^k\left(t_{k-1}\right)$ в конечную точку $\mathbf{x}^k\left(T\right)$ (напомним, что $\mathbf{x}^{k-1}\left(t_{k-1}\right) = \mathbf{x}^k\left(t_{k-1}\right)$ (1.5)).

Система уравнений движения на интервале времени $t \in [t_{\kappa-1}, t_\kappa]$ совпадает с последней системой из (1.2), то есть

$$\dot{\mathbf{x}}^k = \mathbf{A}_k\mathbf{x}^k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}^k, \quad \text{при } \mathbf{x}^{k-1}\left(t_{k-1}\right) = \mathbf{x}^k\left(t_{k-1}\right) \tag{2.33}$$

На интервале $t \in [t_{\kappa-1}, t_\kappa]$ система (2.33) вполне управляема, если

$$rang\mathbf{M}_{kk} = rang\left(\mathbf{B}_k \quad \mathbf{A}_k\mathbf{B}_k \quad \mathbf{A}_k^2\mathbf{B}_k \quad \ldots \quad \mathbf{A}_k^{n_k-1}\mathbf{B}_k\right) = n_k \tag{2.34}$$

На всем интервале времени $\left[t_0, T\right]$ матрица управляемости $\mathbf{M}^k$ объединения систем (1.2), с учетом (2.29), (2.33), имеет следующую структуру

$$\mathbf{M}^k = \left\{\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^2, \cdots, \mathbf{M}_{k-1}^{k-1}, \mathbf{M}_k^k\right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} & \mathbf{0}_{1k} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} & \mathbf{0}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{M}_{k-1k-1} & \mathbf{0}_{k-1k} \\ \mathbf{0}_{k1} & \mathbf{0}_{k2} & \mathbf{0}_{k3} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1} & \mathbf{M}_{kk} \end{pmatrix}, \qquad (2.35)$$

Матрица $\mathbf{M}^k$ имеет размерность $\left[\left(\sum_{j=1}^{k} n_j\right) \times \left(\sum_{j=1}^{k} n_j r_j\right)\right]$, где

$$\mathbf{M}_k^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1} \\ \mathbf{B}_k & \mathbf{A}_k\mathbf{B}_k & \mathbf{A}_k^2\mathbf{B}_k & \cdots & \mathbf{A}_k^{n_k-1}\mathbf{B}_k \end{pmatrix} \text{ при } t \in \left[t_{\kappa-1}, T\right]$$

$$\max rang\mathbf{M}^k = \max rang \sum_{i=1}^{k} \mathbf{M}_{ii} = \left(n_1 + n_2 + \cdots + n_k\right).$$

Следовательно, из (2.21), (2.22), (2.35) следует, что система (1.2) с промежуточными состояниями (1.5) на всем интервале времени $\left[t_0, T\right]$ вполне управляема, если все системы (2.1) управляемы на интервалах своего определения, и не вполне управляема, если хотя бы одна система из (2.1) не вполне управляема на своем интервале определения. То есть, процесс обслуживания манипулятором на всем интервале времени вполне управляем, если каждый этап обслуживания вполне управляем и неуправляем, если хотя бы на одном интервале обслуживания процесс неуправляемый.

Заключение. Описывается модель технологического процесса многоэтапного обслуживания, состоящего из управляемого многозвенного манипулятора с переменной структурой и векторным управлением. Манипулятор должен автоматически обслуживать непрерывную работу подвижных или неподвижных объектов (целей). Предполагается, что элементы и размерность матрицы динамических характеристик многозвенного манипулятора, размерность фазового вектора движений, а также матрицы возможности системы управления в процессе обслуживания могут меняться в некоторые моменты времени. В частном случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы, исследуются вопросы управляемости всего процесса в зависимости от управляемости на каждом этапе движения. Показано, что процесс обслуживания на всём промежутке времени является вполне управляемым, если он управляем на каждом интервале обслуживания и неуправляем, если он неуправляем хотя бы на одном интервале. Приведена матрица управляемости всей системы, объединяющей конечное число составных систем. Обобщены результаты исследований, полученных в работах [13,14,17,18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989, 363 с.
2. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов. //Известия АН СССР, МТТ, №4, 1986, с.21-29.
3. Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Грудев А.И., Черноусько Ф.Л. О влиянии упругой податливости конструкции робота на их динамику. //Изв. АН СССР МТТ, 1985, №3, с. 63-71.
4. Гукасян А.А., Мачкалян Р.Н. Кинематика движения манипулятора с упругими соединительными узлами в криволинейний системе координат. Изв. НАН РА, Механика. 2007. Т. 60. №3. С. 62-67.
5. Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №3. С.68-83.
6. Гукасян А.А. Кинематическое управление движением схвата двухзвенного упругого манипулятора. //Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. № 4. С.316-324.
7. Гукасян А.А. О пространственном положении и деформации упругих звеньев манипулятора. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №4. С.53-64.
8. Гукасян А.А. О двух подходах к исследованию кинематики упругих манипуляторов. // Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.53-67.
9. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. //Известия НАН РА, Механика, №1, 2002, с.75-81.
10. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Задача оптимального управления движением точки переменной массы. //В сборнике научных трудов “Математический анализ и его приложения” АГПУ им. Х.Абовяна, Ереван 2003, вып.3, с.29-40.
11. Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом. //Известия АН Арм. ССР, Механика, т.39, №6, 1986, с.39-49.
12. Гукасян А.А. О моделировании процесса обслуживания манипулятором технологического участка. В сб. трудов межд. конф. «Экстремальная робототехника (ЭР-2016)», Санкт-Петербург, 2016, с. 153-159.
13. Гукасян А.А. О математическом моделировании процесса обслуживания и условия ее управляемости. Изв. НАН РА, Механика. 2017. Т. 70. №3. С. 26-38.
14. A A Ghukasyan and A Ya Ordyan On a model of the processes of maintaining a technological area by a manipulator. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012026 doi: 10.1088/1742-6596/991/1/01202.
15. Гукасян А. А., Ордян А. Я. Об одной модели процесса обслуживания манипулятором технологического участка. В сб. трудов межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Цахкадзор, Армения, 2017, с. 75-76.

16. Гукасян А.А., Ордян А. Я. Об оптимизации процесса обслуживания манипулятором технологического процесса. В сб. трудов 9-ой межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Горис, Армения, 2018, с.143-147.
17. Гукасян А. А., Ордян А. Я. О задачах синтеза оптимального управления в процессе обслуживания. В сб. трудов 6-ой межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан, Армения, 2019, октябрь 1-6, с. 124-128.
18. Гукасян А.А. Об управляемости процесса многоэтапного обслуживания технологического участка манипулятора с векторным управлением. //Доклады НАН Армении. 2021. Т.121. № 3. с.181-191.
19. Гукасян А.А. Об оптимальном управлении манипулятором с электромеханическими приводными системами. Межвузовский сборник научных трудов "Прикладная математика", ЕГУ, N: 7, 1988, с. 86-105..
20. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами. //ДАН СССР, т.176, №4, 1967, с.754-756.
21. Величенко В.В. Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями //ДАН СССР, т.174, №5, 1967. с.1011-1013.
22. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983, 392с.
23. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968, 475 с.
24. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978, 551 с.
25. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 574 с.
26. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: физматлит. 2004, 560 с.

Сведения об авторе:

Гукасян А.А.– Институт механики НАН Армении, Горисский Государственный Университет**.**
E-mail: ghukasyan10@yandex.com.

Поступила в редакцию 10.02.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК 539.3
Doi:10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-85

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО ТОНКОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Саркисян С. О., Хачатрян М.В.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, стержень, круговая ось, динамика, математическая модель, метод конечных элементов

Sargsyan S.H., Khachatryan M.V.

Mathematical model of dynamics of micropolar elastic thin beam with a circular axis with independent fields of displacements and rotations and the finite element method

Key words: micropolar, elastic, beam, circular axis, dynamics, mathematical model, finite element method

The mathematical model of dynamics of micropolar elastic thin beam with a circular axis with independent fields of displacements and rotations is constructed on the basis of the equations of dynamics of a plane stress state of micropolar theory of elasticity in the region of a circular sector and using previously developed hypotheses for micropolar thin bodies. Corresponding variational principle is established for the problems of natural frequencies of micropolar thin beam with a circular axis. Further, on the basis of this variational principle, a variant of application of the finite element method for construction numerical solutions for boundary problems of the corresponding mathematical model is developed, which can be used to determine the natural frequencies of micropolar beam with a circular axis. An example is considered, the results of which establish the fact that the micropolarity of the material increases the natural vibration frequencies of the beam compared to the classical case.

Սարգսյան Ս.Հ., Խաչատրյան Մ.Վ.

Տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար առաձգական շրջանային առանցքով բարակ կոր ձողի դինամիկայի մաթեմատիկական մոդելը և վերջավոր տարրերի մեթոդը

Հիմնաբառեր: միկրոպոլյար, առաձգական ձող, շրջանային առանցք, դինամիկա, մաթեմատիկական մոդել, վերջավոր տարրերի մեթոդը

Հիմք ընդունելով միկրոպոլյար առաձգականության հարթ լարվածային վիճակի դինամիկայի հավասարումները շրջանային սեկտորի տիրույթում, կիրառելով նախկինում մշակված վարկածները միկրոպոլյար բարակ մարմինների համար, կառուցվում է տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար առաձգական շրջանային առանցքով բարակ կոր ձողի դինամիկայի մաթեմատիկական մոդելը։ Շրջանային առանցքով միկրոպոլյար բարակ կոր ձողի ազատ տատանումների համար հաստատվում է համապատասխան վարիացիոն սկզբունքը։ Այնուհետև, վարիացիոն այս սկզբունքի կիրառման հիման վրա մշակվում է համապատասխան մաթեմատիկական մոդելի եզրային խնդիրների թվային լուծումների կառուցման վերջավոր տարրերի մեթոդի տարբերակ, որի օգտագործմամբ կարելի է որոշել շրջանային առանցքով միկրոպոլյար կոր ձողի սեփական տատանումների հաճախականությունները։ Դիտարկվում է օրինակ, որի լուծման արդյունքում հաստատվում է այն հանգամանքը, որ ձողի միկրոպոլյարությունը բարձրացնում է սեփական տատանումների հաճախականությունները համեմատած դասական դեպքի հետ։

На основе уравнений динамики плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости в области кругового сектора, используя ранее разработанные гипотезы для микрополярных тонких тел, построена математическая модель динамики микрополярного с независимыми полями перемещений и вращений упругого тонкого стержня с круговой осью. Установлен соответствующий вариационный принцип для задач собственных колебаний микрополярного тонкого стержня с круговой осью. Далее, на основе этого вариационного принципа разработан вариант применения метода конечных элементов для построения численных решений граничных задач соответствующей математической модели, применением которого можно определить частоты собственных колебаний микрополярного стержня с круговой осью. Рассматривается пример, результаты которого устанавливает то обстоятельство, что микрополярность материала повышает частоты собственных колебаний стержня по сравнению с классическим случаем.

Введение. Упругие тонкие стержни с круговой осью имеют большие применения в приборостроении, машиностроении, строительной механике. Отметим, что в приложениях, в основном, распространены стержни с круговой осью в условиях плоской задачи. Теория и расчёт упругих стержней с круговой осью на основе классической теории упругости главным образом основана на следующих допущениях: 1) применима гипотеза плоского сечения [1], 2) стержень является нерастяжимым [1]. Разработана также теория изгиба упругого стержня с круговой осью с учётом продольной деформации оси и деформации сдвига [2,3]. В работах [2,3] разработаны варианты метода конечных элементов для решения задач упругого стержня с круговой осью в уточнённой постановке.

В работе [4] изучена задача изгиба упругого стержня с круговой осью в постановке моментной теории упругости со стеснённым вращением на основе гипотезы плоского стержня.

В работе [5], на основе метода гипотез [6], построена прикладная модель статики микрополярного (с независимыми полями перемещений и вращений) упругого тонкого стержня с круговой осью и разработан вариант МКЭ для численного решения соответствующих краевых задач.

В данной работе, на основе метода гипотез [7], построена прикладная модель динамики микрополярного (с независимыми полями перемещений и вращений) упругого тонкого стержня с круговой осью, установлен соответствующий вариационный принцип (для задач о собственных колебаниях) и разработан вариант МКЭ для построения численных решений соответствующих краевых задач, с применением которого можно определить частоты собственных колебаний указанного стержня.

1. Постановка задачи. Рассмотрим кривой стержень (брус), имеющий вид части кругового кольца с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника с размерами $2h \times 2h^*$ (Рис.1). Пусть верхняя $(r = r_2)$ и нижняя $(r = r_1)$ поверхности загружены, а каждый торец $(\varphi = 0$ или $\varphi = \varphi_1)$ либо загружен, либо закреплён определённым образом. Будем предполагать, что толщина стержня в направлении перпендикулярно к плоскости чертежа $(2h^*)$ настолько мала, что напряжённо-деформированное состояние в стержне можно принимать как плоское (плоское напряжённое состояние) в срединной плоскости этого тела. Пусть r_0 - радиус средней линии области срединной плоскости (т.е. оси стержня).

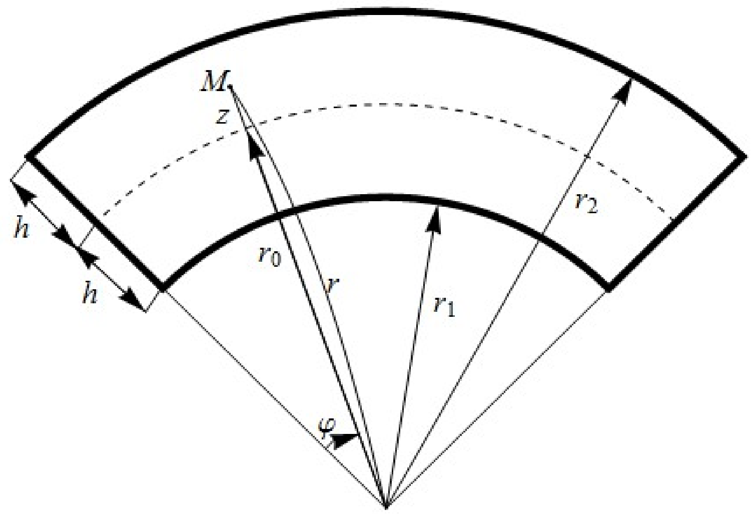


рис.1

В срединной плоскости стержня, в полярной системе координат (r,φ) $(r_1 \le r \le r_2,\ 0 \le \varphi \le \varphi_1)$, имеют место уравнения обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости [8]:

Уравнения движения:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{21} + \sigma_{12}\right) = \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{22} - \sigma_{11}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi} = \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \mu_{13}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r}\mu_{23} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = J\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2}.$$

Соотношения упругости:

$$\gamma_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \upsilon\sigma_{22}\right], \quad \gamma_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \upsilon\sigma_{11}\right], \quad \gamma_{12} = \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21},$$

$$\gamma_{21} = \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}, \quad \chi_{13} = \frac{1}{B}\mu_{13}, \quad \chi_{23} = \frac{1}{B}\mu_{23}, \tag{1.2}$$

либо в обратной форме

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{11} + \nu\gamma_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{22} + \nu\gamma_{11}),$$

$$\sigma_{12}=(\mu+\alpha)\gamma_{12}+(\mu-\alpha)\gamma_{21},\quad \sigma_{21}=(\mu-\alpha)\gamma_{12}+(\mu+\alpha)\gamma_{21}, \tag{1.3}$$

$$\mu_{13}=B\chi_{13},\quad \mu_{23}=B\chi_{23};$$

Геометрические соотношения:

$$\gamma_{11}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\phi}+\frac{1}{r}V_2,\quad \gamma_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial r},\quad \gamma_{12}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial\phi}-\frac{1}{r}V_1-\omega_3,\quad \gamma_{21}=\frac{\partial V_1}{\partial r}+\omega_3,$$

$$\chi_{13}=\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_3}{\partial\phi},\quad \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial r}. \tag{1.4}$$

Здесь σ_{11}, σ_{21}, σ_{12}, σ_{21} - силовые (обычные) напряжения; μ_{13}, μ_{23} - моментные напряжения; γ_{11}, γ_{22}, γ_{12}, γ_{21} - деформации; χ_{13}, χ_{23} - изгибы-кручения; V_1, V_2 - перемещения; ω_3 - свободный поворот; E, ν, α, B - упругие постоянные микрополярного материала $\left(\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}\right)$, ρ -плотность материала, J -мера инерции материала при вращении.

Будем считать, что на лицевых линиях $r=r_1$, $r=r_2$ заданы внешние усилия и моменты:

$$\begin{aligned}&\sigma_{21}=q_1^-,\ \sigma_{22}=q_2^-;\ \mu_{23}=m^-,\ \text{на}\ \ r=r_1,\\ &\sigma_{21}=q_1^+, \sigma_{22}=q_2^+;\ \mu_{23}=m^+,\ \text{на}\ \ r=r_2,\end{aligned} \tag{1.5}$$

а на крайних сечениях области $(\varphi=0,\ \varphi=\varphi_1)$ имеет место один из следующих вариантов граничных условий:

а)
$$\begin{aligned}&\sigma_{11}=\sigma'_{11},\ \sigma_{12}=\sigma'_{12},\ \mu_{13}=\mu'_{13},\quad \text{при}\ \ \varphi=0;\\ &\sigma_{11}=\sigma''_{11},\ \sigma_{12}=\sigma''_{12},\ \mu_{13}=\mu''_{13},\quad \text{при}\ \ \varphi=\varphi_1,\end{aligned} \tag{1.6}$$

b)
$$\begin{aligned}&V_1=V'_1,\ V_2=V'_2,\ \omega_3=\omega'_3,\ \text{при}\ \ \varphi=0;\\ &V_1=V''_1,\ V_2=V''_2,\ \omega_3=\omega''_3,\ \text{при}\ \ \varphi=\varphi_1,\end{aligned} \tag{1.7}$$

в)
$$\begin{aligned}&\sigma_{11}=\sigma'_{11},\ V_2=V'_2,\ \mu_{13}=\mu'_{13},\ \text{при}\ \ \varphi=0;\\ &\sigma_{11}=\sigma''_{11},\ V_2=V''_2,\ \mu_{13}=\mu''_{13},\ \text{при}\ \ \varphi=\varphi_1.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Плотность потенциальной энергии деформации W микрополярного упругого изотропного тела при плоском напряжённом состоянии выражается следующей формулой:

$$W=\frac{E}{2\left(1-\upsilon^2\right)}\gamma_{11}{}^2+\frac{E\upsilon}{1-\upsilon^2}\gamma_{11}\gamma_{22}+\frac{E}{2\left(1-\upsilon^2\right)}\gamma_{22}{}^2+\frac{1}{2}(\mu+\alpha)\gamma_{12}^2+$$
$$+(\mu-\alpha)\gamma_{12}\gamma_{21}+\frac{1}{2}(\mu+\alpha)\gamma_{21}^2+\frac{1}{2}B\chi_{13}^2+\frac{1}{2}B\chi_{23}^2. \tag{1.9}$$

Если рассматривать собственные колебания для задачи плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, тогда для следующего функционала получим принцип минимума [8]:

$$\tilde{U}=\int_0^{\varphi_1}\int_{r_1}^{r_2}\left(W+\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}V_1+\rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}V_2+J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2}\omega_3\right)rd\varphi dr. \tag{1.10}$$

2. Исходные гипотезы. Построение прикладной модели динамического изгиба микрополярного упругого стержня с круговой осью с независимыми полями перемещений и вращений.

Сформулируем допущения (гипотезы) [7], используемые при построении прикладной модели динамики микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью:

1. В качестве исходной кинематической гипотезы для перемещений, примем гипотезу прямой линии - это означает, что линейный элемент первоначально перпендикулярный к средней линии срединной плоскости стержня до деформации, после деформации остаётся прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии, а поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Кроме того, для свободного поворота ω_3 будем считать, что эта функция по координате z - постоянная. Вследствие указанных допущений будем иметь следующий линейный закон изменения перемещений и свободного поворота по толщине срединной плоскости стержня с круговой осью:

$$V_1=u(\varphi,t)+z\psi(\varphi,t),\ V_2=w(\varphi,t),\ \omega_3=\Omega_3(\varphi,t), \tag{2.1}$$

где $u(\varphi,t)$ и $w(\varphi,t)$ - перемещения точек средней линии в направлениях по ее касательной и по нормали (т.е. $w(\varphi,t)$ - это прогиб стержня); $\psi(\varphi,t)$ - угол поворота первоначально нормального элемента; $\Omega_3(\varphi,t)$ - свободный поворот этого элемента.

Кинематические гипотезы (2.1) в целом, как в работах [6,7], назовём обобщёнными кинематическими гипотезами Тимошенко на случай микрополярного тонкого стержня (в данном случае, для стержня с круговой осью).

2. Гипотеза о тонкостенности стержня, при которой примем следующие приближённые равенства:

$$1+\frac{h}{r_0}\approx 1\ , \qquad \frac{1}{r}=\frac{1}{r_0+z}=\frac{1}{r_0\left(1+\frac{z}{r_0}\right)}\approx\frac{1}{r_0}. \tag{2.2}$$

3. Предположения о малости в первом уравнении закона Гука ((1.2)$_1$) нормального напряжения σ_{22}, относительно нормального напряжения σ_{11}.

4. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{21} примем

$$\sigma_{21}=\overset{0}{\sigma}_{21}(\varphi,t). \tag{2.3}$$

После определения указанных выше величин, формулу для σ_{21} уточним следующим образом. Интегрируем по z второе из (1.1) ((1.1)$_2$) уравнение движения и, при определении постоянной интегрирования (вернее функции от φ), будем требовать равенство нулю интеграла от $-h$ до h от полученного выражения. После указанного интегрирования, полученное окончательное выражение прибавим к формуле (2.3).

В соответствии с принятым законом распределения перемещений и поворота (2.1), подставляя их в формулы (1.3), находим деформации и изгибы-кручения:

$$\gamma_{11}=\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{1}{r_0}w\right)+z\frac{1}{r_0}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad \gamma_{22}=0, \quad \gamma_{12}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{1}{r_0}u-\Omega_3,$$

$$\gamma_{21}=\psi+\Omega_3\ , \quad \chi_{13}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\varphi}, \quad \chi_{23}=0. \tag{2.4}$$

Примем следующие обозначения

$$\Gamma_{11}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{1}{r_0}w,\ \Gamma_{12}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{1}{r_0}u-\Omega_3,\ \Gamma_{21}=\psi+\Omega_3,$$

$$\mathrm{K}_{11}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\ k_{13}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\varphi}\ , \tag{2.5}$$

тогда для деформаций, изгибов - кручений получим

$$\gamma_{11}=\Gamma_{11}+z\mathrm{K}_{11},\ \gamma_{22}=0,\ \gamma_{12}=\Gamma_{12},\ \gamma_{21}=\Gamma_{21},\ \chi_{13}=k_{13},\ \chi_{23}=0. \tag{2.6}$$

Здесь Γ_{11} - представляет собой продольную относительную деформацию средней линии; K_{11} - изменение кривизны средней линии (от силовых напряжений); Γ_{12}, Γ_{21} - сдвиговые деформации; k_{13} - изменение кривизны средней линии (от моментных напряжений).

Используя гипотезу 3) и формулу $(2.6)_1$, из формулы $(1.2)_1$ для напряжений σ_{11} будем иметь

$$\sigma_{11} = \overset{0}{\sigma}_{11}(\varphi, t) + z\,\overset{1}{\sigma}_{11}(\varphi, t), \tag{2.7}$$

где

$$\overset{0}{\sigma}_{11}(\varphi, t) = \mathrm{E}\Gamma_{11}, \quad \overset{1}{\sigma}_{11}(\varphi, t) = \mathrm{E}\mathrm{K}_{11}. \tag{2.8}$$

Для определения силового напряжения σ_{12} используем формулы $(1.2)_3$, $(2.4)_3$, $(2.4)_4$, получим:

$$\sigma_{12} = (\mu + \alpha)\Gamma_{12} + (\mu - \alpha)\Gamma_{21}. \tag{2.9}$$

Принимая во внимание формулы (2.7) для σ_{11} и (2.9) для σ_{12}, рассмотрим второе уравнение движения $(1.1)_2$, которое интегрируем по z $(r = r_0 + z)$, с учётом условия тонкостенности области (2.2) и граничных условий из (1.5) для σ_{22}, окончательно получим:

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}\left(q_2^+ + q_2^-\right) - \frac{h^2}{2}\frac{1}{r_0}\overset{1}{\sigma}_{11} + z\left(\frac{1}{r_0}\overset{0}{\sigma}_{11} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial \overset{0}{\sigma}_{12}}{\partial\varphi} + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{r_0}\overset{1}{\sigma}_{11}\frac{z^2}{2}. \tag{2.10}$$

Для моментного напряжения μ_{13}, на основании формулы $(1.2)_5$ и с учётом из (2.6) формулы для χ_{13}, будем иметь:

$$\mu_{13} = Bk_{13}. \tag{2.11}$$

Значение для моментного напряжения μ_{23} получим из третьего уравнения движения $(1.1)_3$ интегрированием по z с учётом формул (2.11), (2.9) и (2.3):

$$\mu_{23} = \frac{1}{2}\left(m^+ + m^-\right) - z\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial \overset{0}{\mu}_{13}}{\partial\varphi} + \overset{0}{\sigma}_{12} - \overset{0}{\sigma}_{21} - J\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}\right). \tag{2.12}$$

Для определения силового напряжения σ_{21}, за основу будем принимать гипотезу 4), тогда с использованием первого уравнения движения $(1.1)_1$, а также формулы (2.3), окончательно получим:

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(\varphi, t) + \frac{h^2}{6}\frac{1}{r_0}\frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{11}}{\partial\varphi} - \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\frac{h^2}{6} - z\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial \overset{0}{\sigma}_{11}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r_0}\overset{0}{\sigma}_{12} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) -$$

$$-\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{11}}{\partial\varphi}-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right). \tag{2.13}$$

С целью приведения двумерной задачи микрополярной теории упругости к одномерной, что уже выполнено для перемещений и поворота, деформаций и изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в прикладной теории микрополярного упругого стержня с круговой осью, вместо компонент силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики - усилия: N , Q_1, Q_2 и моменты: M_{11}, L_{13}, которые выражаются следующими формулами:

$$\mathrm{N}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}dz\,,\quad Q_1=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}dz\,,\quad Q_2=\int_{-h}^{h}\sigma_{21}dz\,,$$

$$\mathrm{M}_{11}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}zdz\,,\qquad L_{13}=\int_{-h}^{h}\mu_{13}dz\,. \tag{2.14}$$

Здесь, N - нормальное усилие, Q_1 , Q_2 - перерезывающие усилия, M_{11} - изгибающий момент от силовых напряжений, L_{13} - изгибающий момент от моментных напряжений.

Принимая за основу формулы для σ_{21} ((2.13)), σ_{22} ((2.10)) и μ_{23} ((2.12)), удовлетворяя граничным условиям (1.5), с учётом формул (2.14), приходим к системе уравнений движения прикладной модели микрополярного упругого стержня с круговой осью:

$$\frac{1}{r_0}\mathrm{N}-\frac{1}{r_0}\frac{\partial Q_1}{\partial\varphi}=\left(q_2^+-q_2^-\right)-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,,$$

$$\frac{1}{r_0}Q_1+\frac{1}{r_0}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial\varphi}=-\left(q_1^+-q_1^-\right)+2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,,$$

$$Q_2-\frac{1}{r_0}\frac{\partial \mathrm{M}_{11}}{\partial\varphi}=h\left(q_1^++q_1^-\right)-\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,,$$

$$Q_2-Q_1-\frac{1}{r_0}\frac{\partial L_{13}}{\partial\varphi}=\left(m^+-m^-\right)-2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}\,. \tag{2.15}$$

Далее при помощи формул для σ_{11} ((2.7)), σ_{12} ((2.9)), σ_{21} ((2.13)), μ_{13} ((2.11)) получим соотношения упругости для указанной модели:

$$N = 2\mathrm{E}h\Gamma_{11},$$

$$Q_1 = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{12} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{21},$$

$$Q_2 = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{21} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12},$$

$$\mathrm{M}_{11} = \frac{2\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11}, \quad \therefore \tag{2.16}$$

Присоединим к уравнениям движения (2.15) и соотношениям упругости (2.16) ещё и геометрические уравнения (2.5):

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0}u - \Omega_3,$$

$$\Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad \mathrm{K}_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\varphi}. \tag{2.17}$$

Уравнения движения (2.15), соотношения упругости (2.16) и геометрические соотношения (2.17) представляют собой основные уравнения прикладной модели микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью. К этой системе уравнений следует присоединить граничные условия:

I. Условия силового и моментного характера (например, для края $\varphi = 0$):

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}\Big|_{\varphi=0} = \mathrm{N}' = \int_{-h}^{h} \sigma'_{11} dz, && \mathrm{M}_{11}\Big|_{\varphi=0} = \mathrm{M}'_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma'_{11} z dz; \\ &Q_1\Big|_{\varphi=0} = Q'_1 = \int_{-h}^{h} \sigma'_{12} dz, && L_{13}\Big|_{\varphi=0} = L'_{13} = \int_{-h}^{h} \mu'_{13} dz; \end{aligned} \tag{2.18}$$

В частности, из этих условий получим условия свободного края:

$$\mathrm{N}\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad Q_1\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \mathrm{M}_{11}\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad L_{13}\Big|_{\varphi=0} = 0 \,. \tag{2.19}$$

II. Условия, когда на краях заданы перемещения и поворот (например, для края $\varphi = 0$):

$$\begin{aligned} &u\Big|_{\varphi=0} = u' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V'_1 dz, && \psi\Big|_{\varphi=0} = \psi' = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} V'_1 z dz; \\ &w\Big|_{\varphi=0} = w' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V'_2 dz, && \Omega_3\Big|_{\varphi=0} = \Omega'_3 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \omega'_3 dz; \end{aligned} \tag{2.20}$$

В частности, из этих условий получим условия полной заделки края

$$u\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad w\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \psi\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \Omega_3\Big|_{\varphi=0} = 0 \,. \tag{2.21}$$

III. Условия типа шарнирного опирания (например, для края $\varphi = 0$):

$$\mathrm{N}\Big|_{\varphi=0} = \mathrm{N}' = \int_{-h}^{h} \sigma'_{11} dz, \qquad \mathrm{M}_{11}\Big|_{\varphi=0} = \mathrm{M}' = \int_{-h}^{h} \sigma'_{11} z dz;$$
$$w\Big|_{\varphi=0} = w' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V'_2 dz, \qquad L_{13}\Big|_{\varphi=0} = L'_{13} = \int_{-h}^{h} \mu'_{13} dz; \tag{2.22}$$

Это, когда шарнирный край загружен моментами. В однородном случае будем иметь следующие граничные условия:

$$N\Big|_{\varphi=0} = 0,\ w\Big|_{\varphi=0} = 0,\ M_{11}\Big|_{\varphi=0} = 0,\ L_{13}\Big|_{\varphi=0} = 0. \tag{2.23}$$

Математическая модель динамики микрополярного упругого стержня с круговой осью выражается системой уравнений (2.15)-(2.17) и граничными условиями (2.18) (либо - (2.20), либо - (2.22)).

Линейная плотность потенциальной энергии деформации прикладной модели изгибной деформации микрополярных упругих стержней с круговой осью с независимыми полями перемещений и вращений: $W_0 = \int_{-h}^{h} W dz$ (используя формулы (1.9), (2.6), (2.14)), будет выражаться так

$$W_0 = \mathrm{E}h\Gamma_{11}^2 + \frac{\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11}^2 + (\mu+\alpha)h\Gamma_{12}^2 + (\mu+\alpha)h\Gamma_{21}^2 +$$
$$+2(\mu-\alpha)h\Gamma_{12}\Gamma_{21} + (\gamma+\varepsilon)hk_{13}^2. \tag{2.24}$$

В случае собственных колебаний микрополярных стержней с круговой осью для следующего функционала получим принцип минимума:

$$\tilde{U}_0 = \int_0^{\varphi_1}\left(W_0 + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}w + \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u + \frac{\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\psi + Jh\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}\Omega_3\right)r_0 d\varphi. \tag{2.25}$$

3. Разработка варианта метода конечных элементов для решения граничных задач собственных колебаний микрополярных стержней с круговой осью с независимыми полями перемещений и вращений.

В решении задач механики деформируемого твёрдого тела и строительной механики, большое значение приобрели численные методы, основанные на вариационных принципах. Среди них особое место занимает МКЭ, благодаря универсальности и программной реализации [9,10].

В области микрополярной теории упругости МКЭ развит в работах [11-13]. В работе [14] разработан вариант метода МКЭ для расчёта задачи изгиба микрополярных упругих тонких пластин, а в работах [5,15]- для расчёта статических задач микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью.

Для динамической задачи микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью (при изучении собственных колебаний) выберем для прогиба $\overline{w}$, осевого перемещения - $\overline{u}$, полного поворота ψ нормального элемента и для свободного поворота нормального элемента Ω_3 разложения в виде:

$$\overline{w}(\overline{s},\tau)=\left(\alpha_1+\alpha_2\overline{s}+\alpha_3\overline{s}^2+\alpha_4\overline{s}^3\right)\cdot\sin\overline{\omega}\tau,$$
$$\overline{u}(\overline{s},\tau)=\left(\alpha_5+\alpha_6\overline{s}+\alpha_7\overline{s}^2+\alpha_8\overline{s}^3\right)\cdot\sin\overline{\omega}\tau,$$
$$\psi(\overline{s},\tau)=\left(\alpha_9+\alpha_{10}\overline{s}+\alpha_{11}\overline{s}^2+\alpha_{12}\overline{s}^3\right)\cdot\sin\overline{\omega}\tau, \tag{3.1}$$
$$\Omega_3(\overline{s},\tau)=\left(\alpha_{13}+\alpha_{14}\overline{s}+\alpha_{15}\overline{s}^2+\alpha_{16}\overline{s}^3\right)\cdot\sin\overline{\omega}\tau,$$

где $\overline{\omega}$ безразмерная частота собственных колебаний:

$$\overline{\omega}=\omega\cdot t_0,\ \text{где}\ t_0=a\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\,,$$

в данном случае имеем следующее обозначение для безразмерного времени:

$$\tau=\frac{t}{t_0}=\frac{t}{a}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

А $\overline{w}=\dfrac{w}{a},\ \overline{u}=\dfrac{u}{a},\ \overline{s}=\dfrac{s}{a}.$

Функционал (2.25) представим в безразмерном виде:

$$\tilde{U}_0=\int_0^1\Big(\overline{W}_0+\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{t}^2}\overline{w}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{t}^2}\overline{u}+\frac{\delta^2}{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial\overline{t}^2}\psi+\overline{J}\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial\overline{t}^2}\Omega_3)d\overline{s}\,, \tag{3.2}$$

после интегрирования по $\overline{s}$ получим функцию шестнадцати независимых переменных $\delta_1,\delta_2,...\delta_{16}$. Минимизация функционала (3.2) приводит к нахождению минимума функции шестнадцати независимых переменных (3.1).

Вычислив соответствующие частные производные, приходим к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\left([K]-\overline{\omega}^2[M]\right)\cdot\{\delta\}=0. \tag{3.3}$$

Здесь $[K]$ - матрица жёсткости, $[M]$ - матрица масс конечного элемента, размерности 16×16 .

Ненулевые элементы матрицы масс конечного элемента имеют следующий вид:

$$M_{11}=M_{33}=M_{99}=\frac{26}{35},\ M_{12}=M_{21}=M_{34}=M_{43}=-M_{9,10}=$$
$$-M_{10,9}=-M_{11,12}=-M_{12,11}=\frac{11}{105},M_{19}=M_{91}=M_{3,11}=M_{11,3}=\frac{9}{35},$$
$$M_{1,10}=M_{10,1}=-M_{29}=-M_{92}=M_{3,12}=M_{12,3}=-M_{4,11}=-M_{11,4}=-\frac{13}{210},$$
$$M_{22}=M_{44}=M_{10,10}=M_{12,12}=\frac{2}{105},M_{2,10}=M_{10,2}=M_{12,4}=M_{4,12}=-\frac{1}{70},$$
$$M_{55}=M_{13,13}=\frac{26}{105}\delta^2,M_{56}=M_{65}=-M_{13,14}=-M_{14,13}=\frac{11}{315}\delta^2,$$
$$M_{5,13}=M_{13,5}=\frac{3}{35}\delta^2,M_{5,14}=M_{14,5}=-M_{6,13}=-M_{13,6}=-\frac{13}{630}\delta^2,$$
$$M_{66}=M_{14,14}=\frac{2}{315}\delta^2,M_{6,14}=M_{14,6}=-\frac{1}{210}\delta^2,M_{77}=M_{15,15}=\frac{26}{35}\bar{J}, \tag{3.4}$$
$$M_{78}=M_{87}=-M_{15,16}=-M_{16,15}=\frac{11}{105}\bar{J},M_{7,14}=M_{14,7}=M_{7,15}=M_{15,7}=\frac{9}{35}\bar{J},$$
$$M_{7,16}=M_{16,7}=-M_{8,15}=-M_{15,8}=-\frac{13}{210}\bar{J},$$
$$M_{88}=M_{16,16}=\frac{2}{105}\bar{J},M_{8,16}=M_{16,8}=-\frac{1}{70}\bar{J},$$

где принято обозначение $\bar{J}=\dfrac{J}{\rho a^2}$.

Обращая определитель однородной системы линейных алгебраических уравнений (3.3) в ноль, получим уравнение для определения безразмерной частоты $\bar{\omega}$ собственных колебаний.

В качестве примера рассмотрим задачу свободных колебаний стержня с круговой осью, когда один конец жёстко защемлён, а другой свободен, граничные условия имеют следующий вид:

при $\bar{s}=0$, $\bar{w}=0,\ \bar{u}=0,\ \psi=0,\ \Omega_3=0$;

$$\text{при } \bar{s}=1=\frac{\pi\bar{r}_0}{2},\ \bar{Q}_1=0,\ \bar{N}=0,\ \bar{M}_{11}=0,\ \bar{L}_{13}=0, \tag{3.5}$$

которые с учётом (2.16) и (2.17) эквивалентны следующим условиям:

при $\bar{s}=0$, $\bar{w}=0,\ \bar{u}=0,\ \psi=0,\ \Omega_3=0$;

при $\bar{s}=1=\dfrac{\pi\bar{r}_0}{2}$, $2\delta\left(1+\bar{\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{s}}-\dfrac{1}{\bar{r}_0}\bar{u}-\Omega_3\right)+2\delta\left(1-\bar{\alpha}\right)\left(\psi+\Omega_3\right)=0,$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{s}} + \frac{1}{\overline{r}_0}\overline{w} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \overline{s}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_3}{\partial \overline{s}} = 0 . \tag{3.6}$$

Задачу будем решать с помощью МКЭ.

В табл. 1 приведены значения наименьшей частоты микрополярного стержня с круговой осью в зависимости от значения безразмерного физического параметра $\overline{\alpha}$.

Таблица 1. Наименьшая частота свободных колебаний $\overline{\omega}$ микрополярной и классической стержней с круговой осью со свободным вращением в зависимости от $\overline{\alpha}$.

$\overline{\alpha}$	Микрополярная модель $\overline{\omega}\times 10^3$			Классическая модель $\overline{\omega}\times 10^3$		
	2 конечных элемента	4 конечных элемента	8 конечных элементов	2 конечных элемента	4 конечных элемента	8 конечных элементов
10^{-6}	13.83	13.61	13.60	13.81	13.59	13.58
10^{-5}	14.00	13.77	13.77	-	-	-
10^{-4}	15.44	15.22	15.21	-	-	-
10^{-3}	21.39	21.15	21.15	-	-	-
10^{-2}	27.29	27.12	27.12	-	-	-
10^{-1}	28.86	28.74	28.73	-	-	-

Из приведённых численных результатов (табл.1) можем сделать вывод о том, что учёт микрополярных свойств материала повышает частоты собственных колебаний по сравнению с классическим случаем. Следует также отметить, что по микрополярной теории по сравнению с классическим случаем, получаются новые добавочные частоты собственных колебаний стержня.

Заключение. Основные результаты данной работы следующие:

1. Построена прикладная модель динамики микрополярных (с независимыми полями перемещений и вращений) упругих тонких стержней с круговой осью.
2. Установлен вариационный принцип для задач собственных колебаний микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью.
3. Разработан вариант МКЭ для численного определения частот собственных колебаний микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью.
4. Установлено, что учёт микрополярных свойств материала стержня приводит к повышению частот собственных колебаний и появлению добавочных частот по сравнению с классическим случаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. Под общей редакцией: И.А. Биргера, Я.Г. Пановко, Т.1. М.: Изд-во “Машиностроение”. 1968. 832с.

2. Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г. Решение задач механики методом конечных элементов. М.: Изд-во “Академкнига”. 2008. 160 с.
3. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Классическая модель статики упругих тонких стержней с круговой осью с учетом поперечных сдвигов и метод конечных элементов// Сб. трудов межд. конф. Актуальные проблемы механики сплошной среды. Цахкадзор, Армения. 2017. Изд-во НАН РА. С. 125-126.
4. Lakes R.S., Drugan W.J. Bending of a Cosserat elastic bar of square cross section - theory and experiment// J. Appl. Mech. 82(9). 2015. pp. 091002.
5. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Построение модели изгиба микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью и ее реализация методом конечных элементов// Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13. № 3. С. 256-268.
6. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66.
7. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады Российской академии наук. 2011. Т. 436. № 2. С. 195-198.
8. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. 383 p.
9. Галлагер Р. Метод конечных элементов. М.: Изд-во “Мир”. 1984. 428 с.
10. Крылов О.В. Метод конечных элементов и его приложение в инженерных расчетах. М.: Изд-во “Радио и связь”. 2002. 104 с.
11. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Аналитические и численные решения в рамках континуума Коссера как основа для постановки экспериментов по обнаружению моментных эффектов в материалах // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. №4. С. 76–91.
12. Nakamura S., Benedict R.L., Lakes R.S. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity// Intern. J. Eng. Sci. 1984. V. 22. № 3. P. 319-330.
13. Park S.K., Gao X.L. Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory// Journal of Micromechanics and Microengineering, 16 (11). 2006. P. 2355 – 2359.
14. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Метод конечных элементов в расчетах на изгиб микрополярных упругих тонких пластин// Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 3. С. 375-383.
15. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью и метод конечных элементов //Актуальные проблемы прочности. Монография. Витебск: НАН Беларуси. 2018. Т. 1. Глава 14. С. 258-271.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович - член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор, (+374 93) 15 16 98. E-mail s_sargsyan@yahoo.com

Хачатрян Мелине Вардановна –кандидат физико-математических наук, тел. (+374 94) 61 82 13. E-mail khachatryanmeline@mail.ru

Поступила в редакцию 25.02.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК 539.3
Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-99

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Сумбатян М.А., Казаков Е.А., Мусатова Н.К., Самсонов И.К.

Ключевые слова: аэроакустика, летательный аппарат, функция Грина, акустическое давление, акустическое поле, квадрокоптер.

SumbatyanM.A., KazakovE.A., MusatovaN.K., SamsonovI.K.
Theoretical and experimental study of the sound field of the unmanned aerial vehicle

Keywords: aeroacoustics, aircraft, Green's function, acoustic pressure, acoustic field, quadrocopter.

In the paper we demonstrate the measurements of the structure of the sound field of the quadrocopter in the hover mode. The influence of the configuration of the outer region on the pattern of the vortex field is analyzed. Here are compared the results of theoretical and natural experiments. It is establishedthat in the open area the theoretical results nearly coincide with the measured ones. The results in a closed area differ by no more than 2 dB, which somewhat exceeds the generally accepted permissible error of 1 dB and can be explained by the non-ideal physical conditions of the experiment (roughness of the ground surface, the influence of surrounding buildings, trees, etc.). The qualitative properties established should also become apparent in the conditions of UAV movement along the streets of the city with sound reflection from buildings.

Սումբատյան Մ.Ա., Կազակով Ե.Ա., Մուսատովա Ն.Կ., Սամսոնով Ի.Կ.
Անօդաչու թռչող սարքի ձայնային դաշտի տեսական և փորձարարական ուսումնասիրությունը

Հիմնաբառեր՝ աէրոակուստիկա, թռչող սարք, Գրինի ֆունկցիա, ակուստիկ ճնշում, ակուստիկ դաշտ, կվադրոկոպտեր:

Աշխատանքում բերված են կվադրոկոպտերի ձայնային դաշտի կառուցվածքի չափումները կախման ռեժիմում: Կատարված է արտաքին միջավայրի տեսքի ազդեցության անալիզը մրրկային դաշտի կարոցվածքի վրա: Հաստատված է, որ բաց տարածությունում տեսական արդյունքները պրակտիկորեն համընկնում են չափումների արդյունքների հետ: Փակ տարածությունում արդյունքները տարբերվում են 2դԲ, որը մի փոքր ավելի է ընդունված 2դԲ թույլատրելի սխալանքից, ինչը կարող է բացատրվել ֆիզիկական փորձի ֆիզիկական պայմանների ոչ կատարելությունից;

В работе представлены измерения структуры звукового поля квадрокоптера в режиме висения. Выполнен анализ влияния конфигурации внешней области на структуру вихревого поля. Произведено сравнение теоретических результатов с результатами натурных экспериментов. Установлено, что в открытом пространстве теоретические результаты практически совпадают с результатами измерений. Результаты в замкнутом пространстве отличаются не более 2 дБ, что несколько превышает общепринятую допустимую погрешность 1 дБ и может быть объяснено неидеальностью физических условий проведения эксперимента (неровность поверхности земли, влияние окружающих зданий, деревьев и т. д.). Выявленные там качественные свойства должны проявляться и в условиях движения БПЛА по улицам города с отражением звука от строений.

Введение

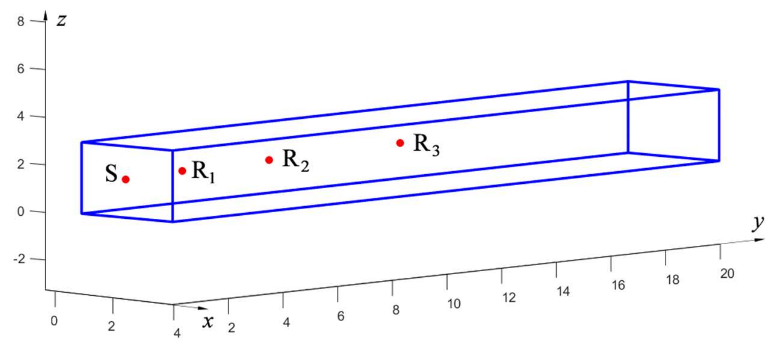
За последние несколько лет беспилотная авиация, будь то гражданские малогабаритные квадрокоптеры либо более крупные коммерческие беспилотные летательные аппараты (БПЛА), получает всё большее распространение. Примером актуальности темы исследования могут служить недавние работы [1-3].Работы [1,2] посвящены обнаружению БПЛА с земли. В статье [1] также представлена оценка достижимых расстояний обнаружения звука БПЛА в различных средах с разными значениями фонового шума. В работе [2] делается попытка проанализировать малозаметность и аэродинамические характеристики средневысотного аппарата большой продолжительности полета. Также интересной является работа [3].В ней представлена сложная трёхмерная модель распространения звука от дрона среди застройки, построенная при помощи метода трассировки лучей Гаусса. Это лишь малая часть работ, посвященных задаче распространения звука от БПЛА. Большое внимание уделяется крупнымкоммерческим летательным аппаратам, мы же рассматриваем БПЛА с гораздо меньшими размерами, весом и геометрией. Вследствие этой растущей популярности актуальной является тематика изучения акустического поля БПЛА в аспектах обнаружения и контроля в рамках городской среды и снижения негативного влияния на экологическую картину.В случае с квадрокоптерами, генерируемое возмущение воздушного потока является вихревой зоной, ввиду фундаментальных особенностей конструкций винтомоторной группы, лежащей в основе технологииих изготовления. Целью данной работы является сравнение результатов, полученных на основе аналитической модели, и результатов, полученных путём проведения натурных экспериментов, по замеру акустического поля квадрокоптеров.

Аналитическое моделирование

Пользуясь теорией вихревого звука, в которой доказывается, чтовихревое поле порождаетзвуковое[4], будем говорить о расчете акустического давления в среде. Вычислим акустическое давление в заданной точке приёма при различном расположении источников звука. Точка приёма при полевых испытаниях соответствует положению микрофона, записывающего шум от беспилотного летательного аппарата, а точка источника – непосредственно положение летательного аппарата.В качестве ограниченного пространства, моделирующего городские условия распространения звука от парящего квадрокоптера, рассмотрим бесконечный по одной координате и ограниченный по двум другим трёхмерный прямоугольный параллелепипед.Этот случай можно рассматривать как аналог реальной ситуации полета БПЛА между домами в параллельной узкой застройке. При сравнении с натурными экспериментами такая модель соответствует случаю распространения звука в длинном узком коридоре. Для сопоставления аналитических результатов с уровнем звука, полученным при натурных экспериментах в децибелах, воспользуемся доказанным утверждением, что сигналы, пришедшие в точку приемника после переотражений, складываются по энергии. Зная формулу для энергии, а также учитывая характер звукопоглощения поверхностей в помещении, получим уровень звукового давления, сопоставимый с экспериментальным.

Пусть точка источника имеет координаты $S=\left(x_S, y_S, z_S\right)=\left(a/2, 5, c/2\right)$, а точки приема $R_1=\left(a/2, 6, c/2\right)$, $R_2=\left(a/2, 10, c/2\right)$, $R_3=\left(a/2, 15, c/2\right)$. Ширина слоя равна $h=2.7$ м вдоль осей *x* и *z*– ширина и высотакоридора при натурных экспериментах. Частота работы пропеллеров БПЛА равна приближенно

$\omega = 1000$ рад/с; для этого случая волновое число равно $k = \omega / c = \dfrac{1000\,\text{рад/с}}{343\,\text{м/с}} \approx 2.915$.



Фиг.1. Схема расположения источников звука и точки приёма в трёхмерном параллелепипеде.

В случае абсолютно отражающих стен давление в произвольной точке пространства бесконечного параллелепипеда вычисляется по формуле [5,6]:

$$
\begin{gathered}
p(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{j=1}^{4} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikr)}{r}, \quad r = \sqrt{\left(\xi_j + 2an\right)^2 + \eta_j^{\,2} + \left(\zeta_j + acl\right)^2} \\
(\xi_1,\eta_1,\zeta_1) = (x_S - x_R,\, y_S - y_R, z_S - z_R), \\
(\xi_2,\eta_2,\zeta_2) = (-x_S - x_R, y_S - y_R, z_S - z_R), \\
(\xi_3,\eta_3,\zeta_3) = (x_S - x_R, y_S - y_R, -z_S - z_R), \\
(\xi_4,\eta_4,\zeta_4) = (-x_S - x_R, y_S - y_R, -z_S - z_R),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $a \times b \times c$ – размер параллелепипеда ($0 < x < a$, $b \to \infty$, $0 < z < c$). Вдоль оси *y*коридор считается бесконечным, что соответствует измерениям, проведенным в коридоре учебного института.

Известно, что энергия акустического сигнала пропорциональна квадрату давления: $E = \left|p(x,y,z)\right|^2$. Тогда, при суммировании членов ряда (1) по энергии, числитель в формуле (1) обратится в единицу в силу того, что экспонента от мнимого аргумента по модулю равна 1, а в знаменателе останется квадрат расстояния между точками приёма и источника:

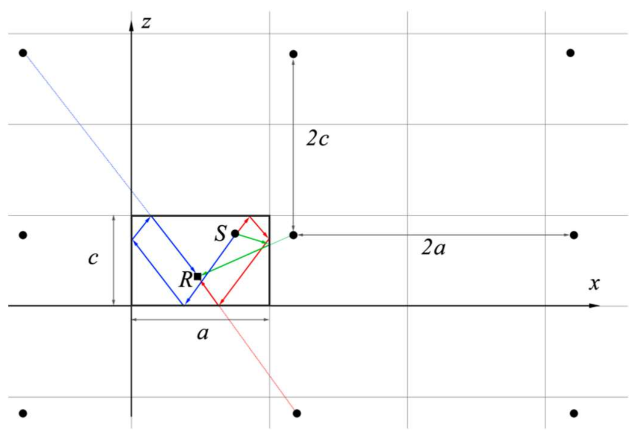
$$E(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{j=1}^{4}\sum_{n,l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\xi_j+2an\right)^2+\eta_j^{\ 2}+\left(\zeta_j+acl\right)^2}, \qquad (2)$$

В формуле (2) учтено, что, за долгую практику развития акустики установлено, чтосигналы, пришедшие после переотражений, складываются по энергии.

Ряд (2) соответствует случаю идеально отражающих поверхностей без звукопоглощения. Для корректных вычислений необходимо учитывать, что при каждом отражении энергия звукового луча уменьшается в $(1-\alpha)$ раз, где $0<\alpha<1$ – коэффициенты звукопоглощения. Для простоты полагаем, что все отражающие поверхности имеют один и тот же коэффициент звукопоглощения α. При $\alpha=0$ имеем случай абсолютно отражающих стен. Тогда, например, первая сумма из ряда (2) примет вид:

$$\mathrm{Sum}_1^E=\sum_{n,l=-\infty}^{\infty}\frac{(1-\alpha)^{2|n|+2|l|}}{\left(\xi_1+2an\right)^2+\eta_1^{\ 2}+\left(\zeta_1+acl\right)^2} \qquad (3)$$

Она соответствует случаю $(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)=(x_S-x_R,\, y_S-y_R, z_S-z_R)$. Показатель степени в формуле (3) равен сумме числа пересечений отрезка, соединяющего точки мнимого источника и приёмника, а также вертикальных (параметр $2|n|$) и горизонтальных (параметр $2|l|$) линий, как показано на Фиг.2. В частности, для $n=0,\ l=0$ имеем случай прямого попадания звукового луча из реального источника *S*в точку приёма *R*. В данном случае это происходитбез каких-либо переотражений от стен и, следовательно, без пересечений лучом вертикальных и горизонтальных линий, как это имело бы место при пролете луча от мнимого источника к приемнику.



Фиг.2. Отражение звуковых лучей от сторон параллелепипеда, соответствующее мнимым источникам для суммы Sum_2^E.

Опишем также три других элемента суммы из формулы (2):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sum}_2^E &= \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^{|2n-1|+2|l|}}{(\xi_2+2an)^2+\eta_2^2+(\zeta_2+acl)^2} \\
\mathrm{Sum}_3^E &= \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^{2|n|+|2l-1|}}{(\xi_3+2an)^2+\eta_3^2+(\zeta_3+acl)^2} \\
\mathrm{Sum}_4^E &= \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^{|2n-1|+|2l-1|}}{(\xi_4+2an)^2+\eta_4^2+(\zeta_4+acl)^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим подробнее эти выражения, например, для второйсуммы в (2) при *j=2*. Это соответствует первой строке в (4), и здесьотличие от случая *j=2*состоит в позиции источника по координате $x:(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)=(-x_S-x_R,\, y_S-y_R,\, z_S-z_R)$ и в показателе степени в числителе – вместо $|2n|$ теперь стоит $|2n-1|$, поскольку «исходный источник»$(-x_S,\, y_S,\, z_S)$ (соответствующий положению при $n=0, l=0$) является мнимым и лежит вне границ параллелепипеда. Тогда точки мнимых источников в пространстве будут располагаться, как изображено на Фиг.2 черными кругами, из числа которых следует исключить реальный источник *S*. Например, для случая $n=1,\ l=0$ появляется точка мнимого источника, которая смещена от точки $(-x_S,\, y_S,\, z_S)$ вправо вдоль оси x на величину $2a$; вдоль оси z смещение не происходит. Это соответствует зеленому лучу однократного отражения на Фиг.2. При этом отрезок, соединяющий мнимый источник с приёмником, действительно пересёк одну вертикальную линию($2|n-1|=1$). Случаи, отмеченные на графике синим и красным цветом, оба соответствуют трехкратному отражению. Для синего цвета имеем $n=0,\ l=1$, в итоге $|2n-1|+|2l|=3$. Для красного цвета имеем $n=1,\ l=-1$, и опять получаем $|2n-1|+|2l|=3$.

Случаи третьего и четвёртого слагаемых (*j=3,4*) аналогичны первым двум, с той лишь разницей, что$(\xi_3,\eta_3,\zeta_3)=(x_S-x_R,\, y_S-y_R,\, -z_S-z_R)$ и $(\xi_4,\eta_4,\zeta_4)=(-x_S-x_R,\, y_S-y_R,\, -z_S-z_R)$.

Как было отмечено выше, область, которая моделировалась в среде MATLAB, представляет собой бесконечный по y коридор с размерами $a=2.7$ м, $c=2.7$ м вдоль осей x и z .Коэффициент звукопоглощения $\alpha=0.2$ подобран, исходя из акустических характеристик помещения. Величины «бесконечных» параметров суммирования в двойных рядах (3), (4), брались $n,l=\overline{-100,100}$.

Результаты численных расчетов приведены в таблице 1 в виде, показывающем ослабление сигнала на расстояниях $r_2 = 5$ и $r_3 = 10$ метров по сравнению с расстоянием $r_1 = 1$ метр, – в относительном ослаблении по энергии и в децибелах.

Таблица 1.Ослабление уровня принимаемого акустического сигнала при увеличении расстояния от источника до приемника в трехмерном бесконечном параллелепипеде.

E_1 / E_2	3.631	E_1 / E_3	7.079
$E_1 - E_2$	5.6 дБ	$E_1 - E_3$	8.5 дБ

Здесь E_1, E_2 и E_3 – давление, соответствующее точкам приемника R_1, R_2 и R_3 на указанных расстояниях от приемника соответственно.

Любопытно рассмотреть поведение уровня звука с расстоянием при более близком расположении точек приёма к источнику звука: $S = (a/2, 5, c/2)$, $R_4 = (a/2, 5.2, c/2)$, $R_5 = (a/2, 5.35, c/2)$, $R_6 = (a/2, 5.9, c/2)$, что отражено в таблице 2.

Таблица 2. Ослабление уровня принимаемого акустического сигнала при увеличении расстояния от источника до приемника в трехмерном параллелепипеде в случае близкого расположения излучателя и приемников.

E_4 / E_5	2.561	E_4 / E_6	7.271
$E_4 - E_5$	4.1 дБ	$E_4 - E_6$	8.6 дБ

Экспериментальная часть

По данному направлению исследований были проведены несколько циклов измерений в летний и осенний периоды 2021 года. Измерения проводились при трёх различных условиях на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича Южного федерального университета(г. Ростов-на-Дону, Россия):

- в узком коридоре – шириной 2,7 метра, длиной 30 метров, высотой 2,7 метра;
- в широком коридоре – в плане 8 на 10 метров, при той же высоте потолка;
- на уличной площадке – расстояние от стены института составляло от 10 до 15 метров. При этом с трёх других боковых сторон стены отсутствовали, т. е. в этих направлениях пространство было практически неограниченным.

В качестве генераторов акустических сигналов использовались БПЛА марки «Геоскан Пионер», «Геоскан Пионер мини» российского производстваи «DJI Mavic Air» китайского производства.Для измерений использовались микрофоны PCB-378B02производства США, а также четырехканальный акустический измерительный прибор SIRIUSm-3xACC-1xACC+ производства компании DEWESOFT (страна изготовитель Словения).

При выполнении измерений расстояния от микрофона до БПЛА составляли 1, 5, 10 и 15 метров. БПЛА находился в режиме висения на высоте установки микрофона, которая составляла 1,5 метра. В случаях измерений, которые проводились на уличной площадке и в широком коридоре, показания снимались с трёх микрофонов путём измерения среднего значения. Микрофоны располагались на углах 45 и 90 градусов мнимой окружности вокруг БПЛА и были направлены непосредственно на него. Схемы расположения микрофонов во время измерений представлены на Фиг. 3-5.

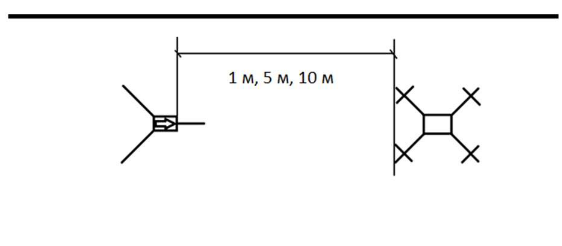
Измерения в помещениях проводились в выходной день, в условиях практически полного отсутствия посторонних источников шума. Это же касается и измерений на уличной площадке, достаточно удалённой от проезжей части. Это говорит о том, что полученные в результате измерений данные в достаточной мере удовлетворяют необходимой точности. Полученные данные представлены в Таблицах 3 и 4.

Таблица 3. Данные экспериментов для квадрокоптера Геоскан Пионер (полный уровень сигнала).

	1 метр	5 метров	10 метров
улица, дБ	73,5	63,5	56
коридор, дБ	81	75	71,5
площадка, дБ	82	75	72,5

Таблица 4. Данные экспериментов дляквадрокоптеров DJI Mavic Air и Геоскан Пионер мини на расстоянии 1 метр (полный уровень сигнала).

	DJIMavicAir	Геоскан Пионер мини
коридор, дБ	75	67
площадка, дБ	74	64



Фиг. 3. Схема расположения микрофонов в узком коридоре.

Основные выводы об уровне шума сводятся к следующему.

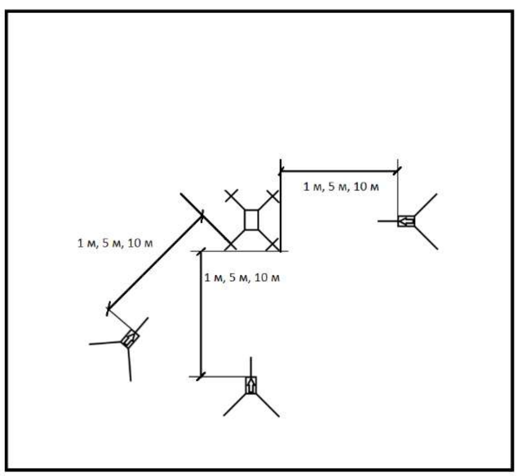
1. Результаты в неограниченном пространстве. Они приведены в первой строке таблицы 3. Теоретический расчет уровня звука, с целью сравнения с измеренными табличными данными, возможен лишь при наличии информации об уровне звука самого квадрокоптера – данные, которые не предоставляются покупателю. Однако относительные значения уровня сигнала при изменении расстояния можно оценить напрямую. При анализе табличных данных следует принимать во внимание горизонтальную поверхность земли.

Энергетическое суммирование интенсивности прямого звукового луча (траектория пролета луча 1м) и отраженного от поверхности земли (пролет луча $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ мпри высоте установки источника и приемника, равной 1.5 м) дает уровень сигнала в децибелах: $10\lg(1+1/10)=0,41\ \partial Б$, т.к. энергия сигнала убывает как квадрат расстояния. Траектория отраженного от земли звукового луча показана на Фиг. 6.

По сравнению с этим уровнем на расстоянии приемника от источника, равном 5м, имеем длину пролета прямого луча 5м, а длину пролета отраженного от поверхности луча $\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$ м. При этом энергетическое суммирование дает для уровня суммарного сигнала $10\lg(1/25+1/34)=-11,59\ \partial Б$.

На расстоянии 10м имеем длину пролета прямого луча 10м, а длину пролета отраженного от поверхности луча $\sqrt{3^2+10^2}=\sqrt{109}$ м. При этом энергетическое суммирование дает для уровня суммарного сигнала $10\lg(1/100+1/109)=-17,17\ \partial Б$.

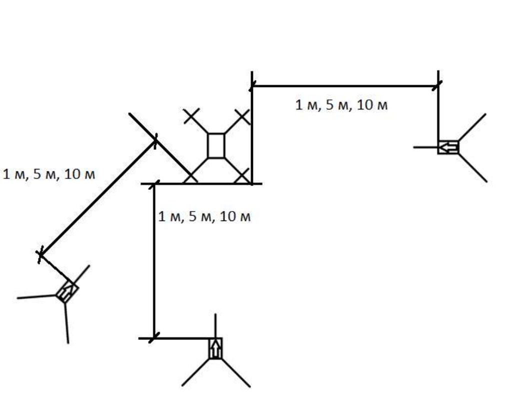
Разность первого и третьего чисел в первой строке таблицы 3 дает 56 – 73,5 = -17,5 дБ, что практически совпадает с разностью теоретических значений -17,17–0,41 = -17,58 дБ, если учесть, что общепринятая допустимая ошибка при измерениях уровня звука равна 1 дБ. Разность первого и второго значения в первой строке таблицы 1 равна 63,5 – 73,5 = -10 дБ; при этом разность теоретических значений равна -11,59 – 0,41 = -12 дБ. Т.е. разница между теоретическим и измеренным значением отличается на 2 дБ, что несколько превышает допустимую погрешность и может быть объяснена неровностью поверхности земли при измерениях на асфальтированной автомобильной стоянке вблизи здания Института.



Фиг. 4. Схема расположения микрофонов в широком коридоре.

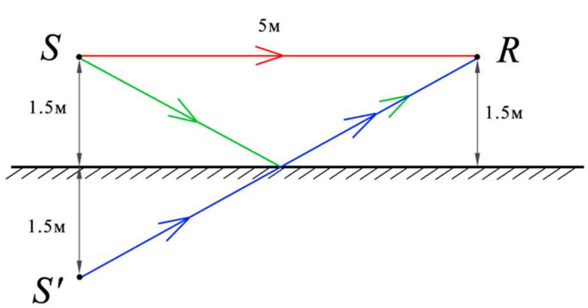
2. Результаты в замкнутом пространстве. Если бы не было стен, то сигнал незначительно нарастал бы с ростом частоты, оставаясь почти постоянным, т. к. это является общим качественным свойством шума пропеллеров. Влияние же стен состоит в том, что при кирпичной отштукатуренной и/или покрашенной стене на

данном частотном интервале коэффициент звукопоглощения монотонно возрастает с ростом частоты.Т. е. эффект стенки уменьшает сигнал с ростом частоты – по сравнению со случаем, если бы стена была идеально отражающей поверхностью.

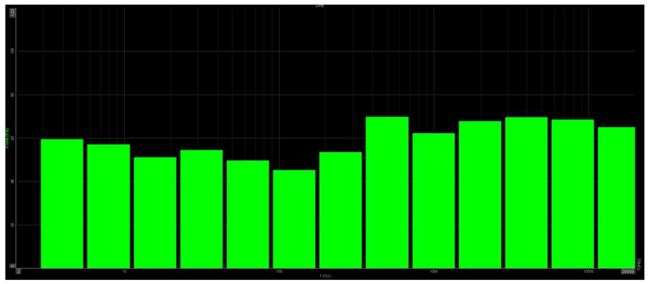


Фиг. 5. Схема расположения микрофонов на уличной площадке.

В результате взаимодействия этих двух факторов на данном частотном интервале получается, что с ростом частоты уровень сигнала сначала уменьшается, а потом нарастает, что и подтверждается гистограммами в частотном интервале от 4 до 20000 Гц, представленными на Фиг. 7 и 8.



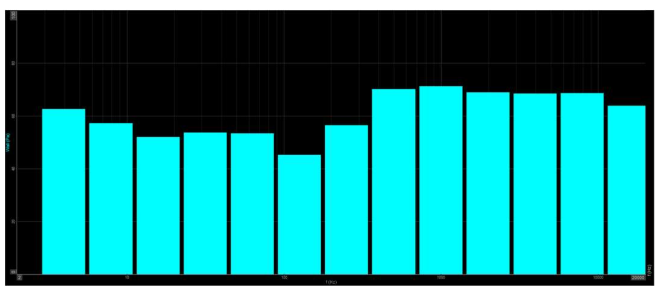
Фиг. 6. Траектория прямого и отраженного от земли звукового луча. Длина пробега отраженного луча равна длине пробега прямого распространения от мнимого источника S´ до приемника R.



Фиг.7. Зависимость уровня звукового сигнала от квадрокоптера Геоскан Пионер по октавным частотам, на расстоянии 5 метров, в режиме висения между двумя стенами.

Заметим лишь, что представленные гистограммы имеют локальный максимум в окрестности средней частоты, близкой к соответствующей частоте вращения пропеллеров, что довольно естественно с физической точки зрения. В то же время доминирование основной частоты над остальными незначительно.

Заметим также, что спадание уровня сигнала в ограниченных пространствах намного слабее, чем в неограниченных, что объясняется многочисленными отражениями волн от стен, пола и потолка со звукопоглощением энергии при отражениях, и является совершенно естественным с физической точки зрения.



Фиг. 8. Уровень звукового сигнала от квадрокоптера DJI Mavic Air по октавным частотам, на расстоянии 1 метр, в режиме висения между двумя стенами.

Эти же качественные свойства должны проявляться и в условиях движения БПЛА по улицам города, с отражением звука от строений. Именно, в открытом пространстве уровень звукового давления, генерируемого квадрокоптером, практически в любой точке приема монотонно возрастает с ростом частоты. Однако в условиях городской застройки это качественное свойство существенно изменяется. Зависимость от частоты становится не монотонной, а сначала (примерно до средних частот порядка 250–500 Гц) уменьшается и только потом начинает возрастать с ростом частоты.

Сравнение натурных экспериментов и теоретической модели и выводы

Наконец,сравним численно теоретически полученные результаты для трёхмерного бесконечного параллелепипеда по формулам (2) – (4), с экспериментом, проведенным в узком длинном коридоре Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ.

Из таблицы 5 видно, что эксперимент и предложенная авторами теоретическая модель показывают очень близкие результаты – в пределах погрешности, не превышающей 1 дБ. Данное расхождение можно объяснить тем, что в аналитической модели не учитываются шероховатости поверхностей, от которых происходит переотражение акустических волн, а также особенностью аналитической модели, которая представляет граничные условия в виде стен с однородными свойствами звукопоглощения, что на практике трудноосуществимо.

Таблица 5. Ослабление уровня принимаемого акустического сигнала с расстоянием в трехмерном ограниченном пространстве. Сравнение эксперимента и аналитической модели.

	Натурный эксперимент	Аналитическая 3D модель
$E_1 - E_2$	6 дБ	5.6 дБ
$E_1 - E_3$	9.5 дБ	8.5 дБ

Авторы признательны Российскому Фонду Фундаментальных Исследований (РФФИ) за поддержку, грант № 19-29-06013.

Авторы также отмечают высокую эффективность исследований при использовании акустического измерительного прибора SIRIUSm-3xACC-1xACC+ и микрофонов PCB-378B02, приобретенных Южным федеральным университетом по программе Минобрнауки РФ обновления приборной базы российских университетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ekimov A., Estimation of UAVs detection distance using passive acoustic, 2022. DOI:10.13140/RG.2.2.13401.24164.
2. Haoqin S., Xiaoxiang B., Jianhua L., Kai L., Mengxi C., Jing S., Calculation and analysis on stealth and aerodynamic characteristics of a medium altitude long endurance UAV, Procedia Engineering, 2015, V. 99, P.111-115. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.514.
3. Bian H., Tan Q., Zhong S., Zhang X., Assessment of UAM and drone noise impact on the environment based on virtual flights, Aerospace Science and Technology, 2021, V. 118, 106996. DOI:10.1016/j.ast.2021.106996.
4. Powell A.,Theory of vortex sound, Journal of the Acoustical Society of America, 1964, V. 36,No.1, P. 177–195.
5. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах, Москва: Наука, 1973.

6. Сумбатян М.А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике, Москва: Физматлит, 2013.

<u>Сведения об авторах:</u>

СумбатянМежлум Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: masumbatyan@sfedu.ru, тел.: +7(928)139-70-67

Казаков Евгений Алексеевич – ассистент, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: Eugene.A.Kazakov@yandex.ru, тел.: +7(918)896-44-07

Мусатова Наталия Кристиановна – аспирант, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: musatova.nataliasfedu.ru@gmail.com, тел.: +7(999)698-66-97

Самсонов Илья Константинович – аспирант, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: ellias.samsonov@gmail.com, тел.: +7(905)432-89-09

Поступила в редакцию 20.02.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК 539.3
Doi:10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-111

MULTI-COMPONENT ELECTROACOUSTIC WAVES (MCEAW) IN PIEZO CRYSTALLINE TEXTURES:APPLIED OPPORTUNITIES

A.S. Avetisyan

Keywords: electroelasticity, multi-component wave,generalized tensor, electroactive state, piezocrystallinetexture, non-acoustic contact, plane deformation, quasistatic equations.

Ա.Ս. Ավետիսյան
Բազմաբաղադրիչ էլեկտրաակուստիկ ալիքները (MCEAW) պիեզոբյուրեղային կառուցվածքում. Կիրառական հնարավորություններ

Հիմնաբառեր՝ էլեկտրաառաձգականություն, բազմաբաղադրիչ ալիք, ընդհանրացված տենզոր, էլեկտրաակտիվ վիճակ, պիեզոկրիստալային հյուսվածք, ոչ ակուստիկ կոնտակտ, հարթ դեֆորմացիա, քվազիստատիկ հավասարումներ:

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ պիեզոէլեկտրական կառուցվածքի յուրաքանչյուր ընտրված հարթությունում և՛ մեկ բաղադրիչով առաձգական սահքի ալիքը, և՛ երկու բաղադրիչով առաձգական հարթ դեֆորմացիայի ալիքը կարող է ուղեկցվել կամ ընտրված հարթությանը ուղղահայաց էլեկտրական դաշտի բաղադրիչի տատանումներով կամ ընտրված հարթությանը զուգահեռ, հարթ էլեկտրական դաշտի տատանումներով: Ձևավորվում են բազմաբաղադրիչ էլեկտրաառաձգական ալիքների չորս տիպի փաթեթներ: Ստացված են, պիեզոբյուրեղի ընտրված հարթությունում, էլեկտրաառաձգականության երկչափ խնդրի ձևակերպման անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, որոնք թույլ են տալիս ձևավորել բազմաբաղադրիչ քվազիստատիկ էլեկտրաառաձգական ալիքի առանձին գրգռում և տարածում:

Ара С. Аветисян
Многокомпонентные электроакустические волны (МЭАВ) в пьезокристаллических текстурах: прикладные возможности

Ключевые слова: электроупругость, многокомпонентная волна, обобщенный тензор, электроактивное состояние, пьезокристаллическая текстура, неакустический контакт, плоская деформация, квазистатические уравнения.

В данной работе показывается, что в каждой сагиттальной плоскости пьезотекстуры как однокомпонентная упругая сдвиговая волна, так и двухкомпонентная упругая плоская деформационная волна могут сопровождаться либо колебаниями поперечной составляющей электрического поля, либо колебаниями плоского электрического поля. Формируются четыре таких пакета многокомпонентных электроупругих волн. Получены необходимые и достаточные условия, позволяющие поставить двумерную задачу электроупругости в вибрируемой сагиттальной плоскости пьезокристалла, где возможно раздельное возбуждение и распространение многокомпонентной квазистатической электроупругой волны.

In this paper is shown, that in each sagittal plane of the piezoelectric texture, both the one-component elastic shear wave and the two-component elastic plane deformation wave can be accompanied by either oscillations of the transverse component of the electric field or oscillations of the plane electric field. Four such packets of multicomponent electroelastic waves are formed.Necessary and sufficient conditions are obtained that allow the formulation of a two-dimensional problem of electroelasticity in a vibrated sagittal plane of a piezocrystal, where separate excitation and propagation of a multicomponent quasistatic electroelastic wave is possible.

Introduction

In many structural diagrams of modern electronic technology, various new crystalline elements, layered composite waveguides, formed from various natural or artificially grown piezoelectric materials with different physical and mechanical properties, are widely used. The piezoelectric or ferroelectric materials have many distinct properties, negative piezoelectric constants and high mechanical flexibility. Piezoelectric or ferroelectric materials are widely used in ***2D*** layered functional heterostructures. These new materials and heterostructures have broad applications in memory, logic, sensing, optical and energy harvesting devices. Piezoelectric crystals are inherently anisotropic structures and the operation of such elements is often based on the emission (or delay) of electroacoustic waves of incomplete component packages.

Separate excitation and propagation of a purely transverse elastic wave (***SH*** type waves) from a plane deformation wave (***P&SV*** type waves) is possible both in an isotropic medium and in all crystal textures of cubic, hexagonal, trigonal, tetragonal and rhombic symmetry **[1]**. A higher anisotropy of the crystal texture leads to the convolution of the components of purely elastic waves and, in fact, the separation of components in elastic bodies is uniquely determined by the structure of the elastic constant tensor.

In contrast to a purely elastic medium, where two types of waves can propagate separately: a two-component wave of the plane stress-strain state (***P&SV*** type wave) and a single-component anti-plane deformation wave (***SH*** type wave), in a piezoelectric medium, four different incomplete sets of multicomponent electroelastic waves can propagate separately. The properties of piezoelectric media are given by the structure of the generalized tensor of electromechanical constants. Therefore, in the case of piezoelectric media, the group of those symmetries and classes of crystals is significantly narrowed, in the sagittal planes of which separate excitation and propagation of the indicated types of electroelastic waves are possible.

The possibility of the separate excitation and propagation of an electroactive elastic plane deformation wave from thenon-electroactive shear elastic wave or separate excitation and propagation of an electroactive shear elastic wave from a non electroactive elastic plane deformation wave, depending on the physical properties of the piezoelectric medium, was studied in the articles [2, 3]. However, the other new cases when separate excitation and propagation of two electroactive wave packets are possiblehave not been considered yet.

The ability to formulate the problem of excitation and propagation of incomplete multicomponent electroelastic waves is due to both the anisotropy of the medium and the admissibility of setting a two-dimensional problem in one of the sagittal planes of an anisotropic medium.

As a rule, structural elements used in modern technology are thin-walled and in the formulation of two-dimensional problems, we must take into account possible approaches that allow separate formulations of the problems of electroactive plane deformation and electroactive anti-plane deformation.

The mathematical formulation of the two-dimensional problem of electroelasticity in any of the sagittal planes $0x_\alpha x_\beta$ of the piezoelectric texture requires the observance of several well-known hypotheses:

i) The hypothesis of straight normal.
ii) The hypothesis of the inextensibility of the middle surface of the plate.

iii) The hypothesis about the absence of pressure of the material layers on each other.

Adhering to the physical essence of these hypotheses, in applied problems of thin-walled elastic elements of structures, the two-dimensional problem of the theory of elasticity was mathematically modeled in different ways by many researchers Kirchhoff G. [4], Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. [5], Reissner E. [6], Ambartsumian S.A. [7].In each of these cases, the hypotheses were accepted as additional restrictions based on the nature of the distribution of the mechanical load on the element and the conditions for fixing the end of the elastic element.

The hypothetical approach has also been successfully implemented in the problems of electro-magneto-elasticity of thin plates and shells [8], where, along with hypothetical distributions of mechanical characteristics over the thickness of a thin-walled element, characteristic distributions of the electromagnetic field are also accepted.

Naturally, the need to introduce additional restrictions (hypotheses) also arises when modeling two-dimensional problems on the propagation of electroelastic waves of plane or antiplane deformations in semi-infinite waveguides. In general, in order to fulfill these hypotheses, additional conditions are imposed on the electromechanical characteristics:

a. In the process of deformation, the segment of the straight line normal to the sagittal plane does not change.

b. The characterizing values of the wave-driven process outside the sagittal plane do not change.

c. In the sagittal plane of the piezocrystal, the axial stressandtheaxial polarization (electrical displacement)are absent.

These conditions make it possible to formulate a generalized plane stress-strain state also in a cut perpendicular to the selected axis (material plane of zero thickness) of an infinite waveguide layer. With loosely supported detached ends of the layer, the principles of Saint-Venant [10] and flat sections [9] also work.According to hypotheses, in the case when there are no acting axial stress and axial polarization in the selected planes, the elastic surface is inextensible, and it cannot be transversely polarized. Such modeling also allows formulating an equivalent generalized antiplane stress-strain state.

In this paper, definitions of possible multicomponent waves (package of wave components) are given. The possibility of the separated formulation of two-dimensional problems of electroelasticity in piezoelectric textures is investigated.

As an applied example, it will be shown that non-acoustic contact between the layers of an inhomogeneous waveguide makes it possible to create a wave hybrid in it, when dissimilar electroacoustic fields are created in its layers.

1. Some definitions and basic relations of the electroelastic stress-strain state in homogeneous piezoelectric media

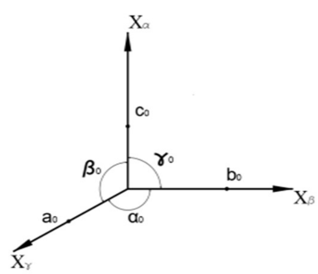
Physicomechanical constants of the homogeneous piezoelectric medium: the elastic stiffness $c_{(ij)(nm)}$, piezoelectric coefficients $e_{j(mn)}$ and dielectric constant ε_{ik}, form a generalized electroelastic tensor of piezoelectric materials of the type $\left(\hat{\gamma}_{jn}\right)_{9\times 9}=\left(\hat{c}_{ij}\right)_{6\times 6}\cup\left(\hat{e}_{mn}\right)_{3\times 6}\cup\left(\hat{\varepsilon}_{ik}\right)_{3\times 3}$ [11, 12]

$$\begin{pmatrix} \left(\hat{c}_{(ij)(nk)}\right)_{6\times6} & \left(\hat{e}_{(ij)m}\right)_{6\times3} \\ \left(\hat{e}_{m(ij)}\right)_{3\times6} & \left(\hat{\varepsilon}_{ik}\right)_{3\times3} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

In generalized electroelastic tensor of linear electroelasticity of piezoelectric materials (1.1) the notations and known transitions from four-digit indices to two-digit indices $(\alpha\gamma) \rightleftarrows \alpha \text{ if } \alpha=\gamma$ and $(\alpha\gamma) \rightleftarrows 9-\alpha-\gamma \text{ if } \alpha \neq \gamma$ are used. It is also assumed that the indices $\{\alpha;\beta;\gamma\} \in \{1;2;3\}$, $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$ and $\gamma \neq \alpha$ indicated by the Greek letters, are dumb, and summation over them is not carried out.

The conditions permitting separate excitation and propagation of the plane or anti flat stress strain states in the uniform piezoelectric medium of this anisotropy, are imposed on the structure tensor of elastic material stiffness $\left(\hat{c}_{ij}\right)_{6\times6}$, as well as on the corresponding structures of tensors of piezoelectric coefficients $\left(\hat{e}_{nj}\right)$ and dielectric constant of the material $\left(\hat{\varepsilon}_{ik}\right)_{3\times3}$.

The generalized linear tensor of electroelasticity (1.1) for each piezoelectric texture, the material relations of the medium and the basic equations are determined in accordance with the geometric diagram of piezoelectric textures (Fig. 1),according to the rules for installing crystals by to crystal syngonies (table 1) and the rules for choosing crystallographic axes in them (table 2) [11, 12].



$\{X_\alpha, X_\beta, X_\gamma\}$ –crystallographic axis of the texture,
$\{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$ - angles in the sagittal planes,
$\{a_0, b_0, c_0\}$ - measures of axial unit vectors,
symmetry axes of the 2nd, 3rd, 4th, 6th orders in the texture,
m - normal to the plane of symmetry.

Fig. 1. *Geometric layout of piezoelectric textures*

These tables describe the order of the axes of symmetry (and/or inversion) and the anisotropy planes of the piezocrystals, the commensurability of the unit vectors and angles of the selected orthogonal system of base coordinates, as well as the order of alignment of the coordinate system with the base axes and planes of piezocrystals. To formulate the problems of electroelasticity in piezoelectric media, it is necessary to combine the coordinate axes and planes with the crystal axes and sagittal planes of the given piezoelectric texture, respectively.

Without loss of generality, let us formulate the problem of linear electroacoustics in one of the sagittal planes of the piezocrystal $x_\alpha 0 x_\beta$, where all components of the electroelastic field depend on the coordinates x_α and x_α, and there are no changes in the electro-mechanical characteristics of the field along the third base coordinate $\partial[*]/\partial x_\gamma \equiv 0$

Table 1. ***Crystal installation rules according to syngonies***

Crystalline textures	*crystallographic axis of the texture*	*angles in the sagittal planes*	*measures of axial unit vectors*
Triclinic	$x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \rightleftarrows 1; \bar{1};$	$\alpha_0 \neq \beta_0 \neq \gamma_0 \neq 90^0$	$a_0 \neq b_0 \neq c_0$
Monoclinic	$x_\beta \rightleftarrows 2 \ \ or \ \ m$	$\alpha_0 = \gamma_0 = 90^0 \neq \beta_0$	$a_0 \neq b_0 \neq c_0$
Rhombic	$x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \rightleftarrows 2 \ or \ m$	$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 90^0$	$a_0 \neq b_0 \neq c_0$
Tetragonal	$x_\alpha, x_\beta \rightleftarrows 2; m$, $x_\gamma \rightleftarrows 4; \bar{4}$	$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 90^0$	$a_0 = b_0 \neq c_0$
Trigonal and Hexagonal	$x_\alpha, x_\beta \rightleftarrows 2; m$, $x_\gamma \rightleftarrows 3; \bar{3}; 6; \bar{6}$	$\alpha_0 = \beta_0 = 90^0$, $\gamma_0 = 120^0$	$a_0 = b_0 \neq c_0$
Cubic	$x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \rightleftarrows 4; \bar{4}; 2$	$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 90^0$	$a_0 = b_0 = c_0$

In the linear theory of electroelasticity of homogeneous piezoelectric media, the two-dimensionalcomplete system of quasi-static equations written in a crystallographic coordinate system is used[13, 14, 15]

$$\partial\sigma_{ij}(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_j = \rho\left(\partial^2 u_i(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial t^2\right),\ \partial D_n(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_n = 0, \tag{1.2}$$

where $u_i(x_\alpha, x_\beta, t)$ are the elastic displacement vector components, $\sigma_{ij}(x_\alpha, x_\beta, t)$ are the mechanical stress tensor components, $D_n(x_\alpha, x_\beta, t)$ are the electrical displacement vector components, ρ is the material density and the indices take on the values $j, n \in \{\alpha, \beta\}$ and $i \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Generally, the components of the mechanical stress tensor $\sigma_{ij}(x_\alpha, x_\beta, t)$ and the components of the electric displacement vector $D_m(x_\alpha, x_\beta, t)$ in the equations (1.2), on the sagittal planes $x_\alpha 0 x_\beta$ are determined as[13, 14]

$$\sigma_{ij}(x_\alpha, x_\beta, t) = c_{(ij)(nm)}\left(\partial u_n(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_m\right) - e_{m(ij)}E_m(x_\alpha, x_\beta, t),$$

$$D_k(x_\alpha, x_\beta, t) = e_{k(nm)}\left(\partial u_n(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_m\right) + \varepsilon_{km}E_m(x_\alpha, x_\beta, t) \tag{1.3}$$

where the mechanical and electric fields are interconnected by the piezoelectric coefficient tensor $(\hat{e}_{j(mn)})$.

Table 2. ***Rules for selecting crystallographic axes in textures***

Crystalline textures	*crystallographic axis*		
	x_α	x_β	x_γ
Triclinic	In a plane perpendicular to the direction [001]		[001]
Monoclinic	[100]	[010]	[001]
Rhombic	[100]	[010]	[001]
Tetragonal	[100]	[010]	[001]
Trigonal and Hexagonal	[100]	[010]	[001]
Cubic	[100]	[010]	[001]

The plane quasi-static electric field is potential $E_m(x_\alpha, x_\beta, t) = -\left(\partial\varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_m\right)$, where $m \in \{\alpha;\beta\}$ .In problems where elastic waves are accompanied by vibrations of a plane electric field $\{E_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t),\ E_\beta(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0\}$, the linear material relations (1.3) of piezoelectrics are often represented in the form

$$\sigma_{ij}(x_\alpha, x_\beta, t) = c_{(ij)(nk)}\left(\partial u_n(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_k\right) + e_{m(ij)}\left(\partial\varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_m\right),$$

$$D_m(x_\alpha, x_\beta, t) = e_{m(nk)}\left(\partial u_n(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_k\right) - \varepsilon_{mk}\left(\partial\varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_k\right). \quad (1.4)$$

Obviously, in two-dimensional quasi-static problem of electroelasticity, both elastic deformations can decompose into the plane $\{u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t),\ u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0\}$ and antiplane $\{0;\ 0;\ u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)\}$ components, and their accompanying electric field can be plane $\left\{E_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t),\ E_\beta(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0\right\}$ or antiplane $\left\{0,\ 0,\ E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)\right\}$.

Consequently, in piezoelectrics it will be possible to separately excite and propagate an electroelastic wave of a type from four incomplete sets of its components:

i. Four-component electroelastic wave - $\{u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t),\ u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0,\ E_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t),\ E_\beta(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0\}$, electractive plane deformation with accompanying oscillations of the plane electric field,
ii. Three-component electroelastic wave - $\{u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t),\ u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0,\ 0,\ 0,\ E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)\}$, electractive plane deformation with accompanying oscillations of the anti-plane electric field,

iii. Three-component electroelastic wave - $\{0,\ 0,\ u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t),\ E_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t),\ E_\beta(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0\}$, electractive anti-plane deformation with accompanying oscillations of the plane electric field,

iv. Two-component electroelastic wave - $\{0, 0, u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t), 0, 0, E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)\}$, electractive anti-plane deformation with accompanying oscillations of the anti-plane electric field.

From the selected structures of wave packets, it is obvious that in a particular sagittal plane, the first from the fourth, or the second and the third packets are separated from each other.

2. Necessary and sufficient conditions for the separation of electroactive elastic states in a piezoelectric medium

The problems of the possibility for separate excitation and propagation of the waves of electroactive plane deformation and electroactive elastic wave of anti-plane deformation in homogeneous piezoelectric materials, were studied in [2, 3]. In these articles it is shown that in the elastic anisotropic homogeneous media the separation of the plane elastic deformation wave from the anti-plane elastic deformation wave in a selected sagittal plane $x_\alpha 0 x_\beta$ of the crystalline medium is ensured by the absence of the corresponding constants in the structure of the elastic stiffness tensor $(\hat{c}_{(ij)(nk)})_{6\times 6}$

$$c_{\alpha(\gamma\alpha)} = c_{\alpha(\beta\gamma)} = c_{\beta(\beta\gamma)} = c_{\beta(\gamma\alpha)} = c_{(\alpha\beta)(\gamma\alpha)} = c_{(\alpha\beta)(\beta\gamma)} \equiv 0 \tag{2.1}$$

In this case, the electroactive wave of plane deformation accompanied by oscillations of the plane electric field in piezoelectrics can be separated from the wave of antiplane elastic deformation, when, along with the conditions (2.1), the conditions for the absence of piezoelectric coefficients in the generalized electroelasticity tensor (1.1) are satisfied

$$e_{\alpha(\gamma\alpha)} = e_{\alpha(\gamma\beta)} = e_{\beta(\gamma\alpha)} = e_{\beta(\gamma\beta)} \equiv 0 \tag{2.2}$$

The electroactive wave of antiplanar elastic deformation accompanied by oscillations of a plane electric field in piezoelectrics can be separated from the wave of plane elastic deformation when, along with the conditions (2.1), the conditions for the absence of other piezoelectric coefficients in the generalized electroelasticity tensor (1.1) are satisfied

$$e_{\alpha(\alpha\alpha)} = e_{\alpha(\beta\beta)} = e_{\beta(\alpha\alpha)} = e_{\beta(\beta\beta)} = e_{\alpha(\alpha\beta)} = e_{\beta(\beta\alpha)} \equiv 0 \tag{2.3}$$

The electroactive wave of plane elastic deformation accompanied by the oscillations of the antiplane electric field $\{u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t),\ u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0,\ 0,\ 0,\ E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)\}$ in piezoelectrics can be separated from the wave of plane elastic deformation, when, along with the conditions (2.1), the conditions for the absence of other piezoelectric coefficients in the generalized electroelasticity tensor (1.1) are satisfied

$$e_{\alpha(\alpha\alpha)} = e_{\alpha(\beta\beta)} = e_{\beta(\alpha\alpha)} = e_{\beta(\beta\beta)} = e_{\alpha(\alpha\beta)} = e_{\beta(\beta\alpha)} \equiv 0 \tag{2.4}$$

The electroactive wave of the antiplane elastic deformation accompanied by the oscillations of the antiplane electric field $\{0,\ 0,\ u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0,\ 0,\ E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)\}$ in piezoelectrics can be separated from the wave of plane elastic deformation, when, along with conditions (2.1), the conditions for the absence of other piezoelectric coefficients in the generalized electroelasticity tensor (1.1) are satisfied

$$e_{\gamma(\alpha\alpha)} = e_{\gamma(\beta\beta)} = e_{\gamma(\alpha\beta)} \equiv 0 \tag{2.5}$$

For separate excitation and propagation of plane or antiplane electroactive stress-strain states, the above pairs of conditions (2.1) and (2.2), or (2.1) and (2.3), or (2.1) and (2.4), or (2.1) and (2.5) as constraints on the anisotropy of the medium are necessary but not sufficient.

From material relations (1.4) and the conditions (2.1) and (2.2) corresponding to them, taking into account the form of the generalized electroelasticity tensor (1.1), it follows that, in the formulation of the two-dimensional problem of electroelasticity, side by side with nonzero stresses characteristic of the plane stress state $\sigma_{\alpha\alpha}(x_\alpha, x_\beta, t)$ $\sigma_{\beta\beta}(x_\alpha, x_\beta, t)$ and $\sigma_{\alpha\beta}(x_\alpha, x_\beta, t)$, there also arises an axial mechanical stress $\sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t)$ .As well as, along with the nonzero components of the electric displacement of the plane electric field $D_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t)$ and $D_\beta(x_\alpha, x_\beta, t)$, the third component $D_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)$ of the electric displacement vector can arise.

The presence of non-zero axial components of the mechanical stress and the vector of electrical displacement along the axis $0x_\gamma$, in the general case will violate the formulation of the two-dimensional problem of electroelasticity in the material sagittal plane $x_\alpha 0 x_\beta$ .Therefore, to fulfill the accepted hypotheses, additional conditions are imposed on the electromechanical characteristics: the absence of axial mechanical stress $\sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t)$ and the axial component of the electric polarization (electric displacement) $D_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)$ perpendicular to the sagittal plane of the piezoelectric crystal.

In all piezoelectric crystals for which conditions (2.1) ÷ (2.5) are satisfied, the dielectric constant tensors $(\hat{\varepsilon}_{ik})_{3\times3}$ are diagonal. Therefore, the third component of the electric displacement is represented only by the elastic elongations $(\partial u_\alpha / \partial x_\alpha)$, $(\partial u_\beta / \partial x_\beta)$ and shift $(\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha)$ in the sagittal plane.

It is known that in any basic plane $x_\alpha 0 x_\beta$ the elastic stiffnesses $c_{\gamma\alpha} \neq 0$ and $c_{\gamma\beta} \neq 0$, as well as the elastic compliance coefficients $s_{\gamma\alpha} = (-1)^{\alpha+\gamma} \cdot \Delta c_{\alpha\gamma} / \Delta^c$ and $s_{\gamma\beta} = (-1)^{\beta+\gamma} \cdot \Delta c_{\beta\gamma} / \Delta^c$ cannot be zeros. Therefore, the existence of a non-zero axial stress $\sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t)$ can lead to the axial tensions (compressions) $r_{\gamma\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t)$ in the direction of the axis $0x_\gamma$, violating the planar deformed state.

Taking into account the above statements, from the material rations of axial mechanical stress and electrical displacement

$$\sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha,x_\beta,t)=c_{\gamma\alpha}\frac{\partial u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\alpha}+c_{\gamma\beta}\frac{\partial u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\beta}+c_{\gamma(\gamma\beta)}\frac{\partial u_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\beta}-$$
$$-e_{\alpha(\gamma\gamma)}E_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t)-e_{\beta(\gamma\gamma)}E_\beta(x_\alpha,x_\beta,t)-e_{\gamma(\gamma\gamma)}E_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)+ \tag{2.6}$$
$$+c_{\gamma(\alpha\gamma)}\frac{\partial u_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\alpha}+c_{\gamma(\alpha\beta)}\left[\frac{\partial u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\alpha}\right],$$

$$D_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)=e_{\gamma(\alpha\alpha)}\frac{\partial u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\alpha}+e_{\gamma(\beta\beta)}\frac{\partial u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\beta}+$$
$$+e_{\gamma(\gamma\beta)}\frac{\partial u_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\beta}+e_{\gamma(\alpha\gamma)}\frac{\partial u_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\alpha}+ \tag{2.7}$$
$$+e_{\gamma(\alpha\beta)}\left[\frac{\partial u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t)}{\partial x_\alpha}\right]+\varepsilon_{\gamma\gamma}E_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)$$

it follows that in piezoelectric crystals, the formulation of theelectractive plane deformation with accompanying oscillations of the plane electric field $\{u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t),\ u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t),\ 0,\ E_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t),\ E_\beta(x_\alpha,x_\beta,t),\ 0\}$, in the sagittal plane $x_\alpha 0 x_\beta$ is possible, when

$$\begin{cases} c_{\gamma\alpha}(\partial u_\alpha/\partial x_\alpha)+c_{\gamma\beta}(\partial u_\beta/\partial x_\beta)=-c_{\gamma(\alpha\beta)}\left[(\partial u_\alpha/\partial x_\beta)+(\partial u_\beta/\partial x_\alpha)\right]- \\ -e_{\alpha(\gamma\gamma)}(\partial\varphi/\partial x_\alpha)-e_{\beta(\gamma\gamma)}(\partial\varphi/\partial x_\beta) \\ e_{\gamma(\alpha\alpha)}(\partial u_\alpha/\partial x_\alpha)+e_{\gamma(\beta\beta)}(\partial u_\beta/\partial x_\beta)=-e_{\gamma(\alpha\beta)}\left[(\partial u_\alpha/\partial x_\beta)+(\partial u_\beta/\partial x_\alpha)\right] \end{cases} \tag{2.8}$$

The system of linear equations (2.6) and -(2.7) has nontrivial (arbitrary) solutions with respect to elastic elongations (or compressions) $(\partial u_\alpha/\partial x_\alpha)$ and $(\partial u_\beta/\partial x_\beta)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=\dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta}\left[\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\dfrac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right]+\dfrac{e_{\gamma(\beta\beta)}}{\Delta}\left[e_{\alpha(\gamma\gamma)}(\partial\varphi/\partial x_\alpha)+e_{\beta(\gamma\gamma)}(\partial\varphi/\partial x_\beta)\right] \\ \dfrac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}=\dfrac{\Delta_\beta}{\Delta}\left[\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\dfrac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right]+\dfrac{e_{\gamma(\alpha\alpha)}}{\Delta}\left[e_{\alpha(\gamma\gamma)}(\partial\varphi/\partial x_\alpha)+e_{\beta(\gamma\gamma)}(\partial\varphi/\partial x_\beta)\right] \end{cases} \tag{2.9}$$

In relations(2.6), (2.7) and (2.8) it is taken into account, that the accompanying plane quasi-static electric field is potential $E_m(x_\alpha,x_\beta,t)=-\partial\varphi(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_m$, where $m\in\{\alpha;\beta\}$, as well as the descriptions $\Delta=c_{\gamma\beta}e_{\gamma(\alpha\alpha)}-c_{\gamma\alpha}e_{\gamma(\beta\beta)}$, $\Delta_\alpha=c_{\gamma(\alpha\beta)}e_{\gamma(\beta\beta)}-c_{\gamma\beta}e_{\gamma(\alpha\beta)}$, and $\Delta_\beta=c_{\gamma(\alpha\beta)}e_{\gamma(\alpha\alpha)}-c_{\gamma\alpha}e_{\gamma(\alpha\beta)}$ are taken.

Statement-1. In the chosen sagittal plane $x_\alpha 0 x_\beta$ of the piezoelectric crystal, a four-component electroacoustic wave $\{u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t), u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t), 0, E_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t), E_\beta(x_\alpha, x_\beta, t), 0\}$ is possible, if the elements of the generalized electroelastic tensor (1.1) of the medium satisfy conditions (2.1), (2.2) and the additional functional representation (2.8), according to which the elastic tensions $\partial u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha$ and $\partial u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta$ in the sagittal plane are expressed in terms of elastic shear $\partial u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta$ and $\partial u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha$, as well as the plane electric field components $\partial \varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha$ and $\partial \varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta$.

From relations (2.6) and (2.7) it also follows, that the formulation of the electractive anti plane deformation with accompanying oscillations of anti plane electric field $\{0,\ 0,\ u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0,\ 0,\ E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)\}$, in the sagittal plane $x_\alpha 0 x_\beta$ of piezoelectric crystals is possible, when

$$\begin{cases} c_{\gamma(\gamma\beta)}(\partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta) + c_{\gamma(\alpha\gamma)}(\partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha) = e_{\gamma(\gamma\gamma)} E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t) \\ e_{\gamma(\gamma\beta)}(\partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta) + e_{\gamma(\alpha\gamma)}(\partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha) = -\varepsilon_{\gamma\gamma} E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t) \end{cases} \tag{2.10}$$

Since the dielectric constant $\varepsilon_{\gamma\gamma}$ is a positive definite quantity, withthe additional condition on the coefficients of the generalized electromechanical tensor $c_{\gamma(\alpha\gamma)} \cdot e_{\gamma(\gamma\beta)} - c_{\gamma(\gamma\beta)} \cdot e_{\gamma(\alpha\gamma)} \neq 0$, the system of linear equations (2.9) always has nontrivial solutions with respect to elastic shears $\partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha$ and $\partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta$

$$\begin{cases} (\partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha) = \dfrac{c_{\gamma(\gamma\beta)}\varepsilon_{\gamma\gamma}\left((e_{\gamma(\gamma\gamma)} e_{\gamma(\alpha\beta)})/(c_{\gamma(\gamma\beta)}\varepsilon_{\gamma\gamma}) + 1\right)}{c_{\gamma(\alpha\gamma)} \cdot e_{\gamma(\gamma\beta)} - c_{\gamma(\gamma\beta)} \cdot e_{\gamma(\alpha\gamma)}} \cdot E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t) \\ (\partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta) = \dfrac{c_{\gamma(\gamma\alpha)}\varepsilon_{\gamma\gamma}\left((e_{\gamma(\gamma\gamma)} e_{\gamma(\alpha\beta)})/(c_{\gamma(\gamma\alpha)}\varepsilon_{\gamma\gamma}) + 1\right)}{c_{\gamma(\alpha\gamma)} \cdot e_{\gamma(\gamma\beta)} - c_{\gamma(\gamma\beta)} \cdot e_{\gamma(\alpha\gamma)}} \cdot E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t) \end{cases} \tag{2.11}$$

Statement-2. In the chosen sagittal plane $x_\alpha 0 x_\beta$ of the piezoelectric crystal, a four-component electroacoustic wave $\{0,\ 0,\ u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0,\ 0,\ E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)\}$ is possible, if the elements of the generalized electroelastic tensor (1.1) of the medium satisfy conditions (2.1), (2.5) and the additional functional representation (2.10), according to which, the shifts $\partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha$ and $\partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta$ in an elastic shear wave are expressed in terms of the axial component of the accompanying electric field $E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)$.

Similarly, from relations (2.6) and (2.7)it also follows, that for the formulation of the two-dimensional problem of an electractive plane deformation with accompanying oscillations of the anti-plane electric field $\{u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t),\ u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t),\ 0,\ 0,\ 0,\ E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)\}$, in the sagittal plane $x_\alpha 0 x_\beta$, the additional conditions are obtained

$$
\begin{cases}
(\partial u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\alpha) = \dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta}\left[(\partial u_\alpha/\partial x_\beta)+(\partial u_\beta/\partial x_\alpha)\right]+ \\
+\dfrac{\left((e_{\alpha(\gamma\gamma)}e_{\gamma(\beta\beta)})/(c_{\gamma\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma})+1\right)\cdot c_{\gamma\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma}}{\Delta}\cdot E_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t) \\
(\partial u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\beta) = \dfrac{\Delta_\beta}{\Delta}\left[(\partial u_\alpha/\partial x_\beta)+(\partial u_\beta/\partial x_\alpha)\right]+ \\
+\dfrac{\left((e_{\beta(\gamma\gamma)}e_{\gamma(\alpha\alpha)})/(c_{\gamma\alpha}\varepsilon_{\gamma\gamma})+1\right)\cdot c_{\gamma\alpha}\varepsilon_{\gamma\gamma}}{\Delta}\cdot E_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

The non trivial presentations (2.11) for axial elongations (or compression) $(\partial u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\alpha)$ and $(\partial u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\beta)$, in this case are possible with the additional condition on the coefficients of the generalized electro elastic tensor $c_{\gamma(\alpha\gamma)}\cdot e_{\gamma(\gamma\beta)} - c_{\gamma(\gamma\beta)}\cdot e_{\gamma(\alpha\gamma)} \neq 0$.

Statement-3. In the chosen sagittal plane $x_\alpha 0 x_\beta$ of the piezoelectric crystal, a four-component electroacoustic wave $\{u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t),\ u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t),\ 0,\ 0,\ 0,\ E_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)\}$ is possible, if the elements of the generalized electroelastic tensor (1.1) of the medium satisfy conditions (2.1), (2.4) and the additional functional representation (2.11), according to which the elastic tensions $\partial u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\alpha$ and $\partial u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\beta$ in the sagittal plane are expressed in terms of elastic shear $\partial u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\beta$ and $\partial u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\alpha$, as well as the shear electric field $E_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)$.

In the case of the electractive anti-plane deformation with accompanying oscillations of the plane electric field $\{0,\ 0,\ u_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t),\ \partial\varphi(x_\alpha,x_\beta,t)/x_\alpha,\ \partial\varphi(x_\alpha,x_\beta,t)/x_\beta,\ 0\}$, in the sagittal plane $x_\alpha 0 x_\beta$, the additional conditions imposed on the structure of the electromechanical generalized tensor are obtained similar to $c_{\gamma(\alpha\gamma)}\cdot e_{\gamma(\gamma\beta)} - c_{\gamma(\gamma\beta)}\cdot e_{\gamma(\alpha\gamma)} \neq 0$. Under these condition on the coefficients of the generalized electromechanical tensor (1.1), we obtain the additional non trivial presentations with respect to elastic shears $\partial u_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\alpha$ and $\partial u_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\beta$

$$(\partial u_{\gamma}/\partial x_{\alpha})=\frac{e_{\alpha(\gamma\gamma)}}{c_{\gamma(\gamma\beta)}\,(e_{\gamma(\alpha\gamma)}/e_{\gamma(\gamma\beta)})-c_{\gamma(\alpha\gamma)}}(\partial\varphi(x_{\alpha},x_{\beta},t)/\partial x_{\alpha})+$$

$$+\frac{e_{\beta(\gamma\gamma)}}{c_{\gamma(\gamma\beta)}\,(e_{\gamma(\alpha\gamma)}/e_{\gamma(\gamma\beta)})-c_{\gamma(\alpha\gamma)}}(\partial\varphi(x_{\alpha},x_{\beta},t)/\partial x_{\beta})$$

$$(\partial u_{\gamma}/\partial x_{\beta})=\frac{e_{\beta(\gamma\gamma)}}{c_{\gamma(\gamma\alpha)}\,(e_{\gamma(\beta\gamma)}/e_{\gamma(\gamma\alpha)})-c_{\gamma(\beta\gamma)}}(\partial\varphi(x_{\alpha},x_{\beta},t)/\partial x_{\beta})+ \tag{2.13}$$

$$+\frac{e_{\alpha(\gamma\gamma)}}{c_{\gamma(\gamma\alpha)}\,(e_{\gamma(\beta\gamma)}/e_{\gamma(\gamma\alpha)})-c_{\gamma(\beta\gamma)}}(\partial\varphi(x_{\alpha},x_{\beta},t)/\partial x_{\alpha})$$

Statement-4. In the chosen sagittal plane $x_{\alpha}0x_{\beta}$ of the piezoelectric crystal, a four-component electroacoustic wave $\{0,0,u_{\gamma}(x_{\alpha},x_{\beta},t),\partial\varphi(x_{\alpha},x_{\beta},t)/\partial x_{\alpha}\,,\,\partial\varphi(x_{\alpha},x_{\beta},t)/\partial x_{\beta}\,,0\}$ is possible, if the elements of the generalized electroelastic tensor (1.1) of the medium satisfy conditions (2.1), (2.3) and the additional functional representation (2.12), according to which, the shifts $\partial u_{\gamma}(x_{\alpha},x_{\beta},t)/\partial x_{\alpha}$ and $\partial u_{\gamma}(x_{\alpha},x_{\beta},t)/\partial x_{\beta}$ in the elastic shear wave are expressed in terms of the axial component of the accompanying plane electric field $\partial\varphi(x_{\alpha},x_{\beta},t)/\partial x_{\alpha}$ and $\partial\varphi(x_{\alpha},x_{\beta},t)/\partial x_{\beta}$.

Along with the necessary conditions for separate excitation and propagation of electroactive multicomponent waves (2.1) and one of (2.2)÷(2.5), additional conditions (2.8), (2.10), (2.11), (2.12) are obtained, which are sufficient for the formulation of the two-dimensional problem of electroelasticity. In each case of studying the electroelastic two-dimensional problem, it is necessary along with the material relations of the medium to take into account additional representations of elastic elongations and shears (2.8), (2.10), (2.11) and (2.12), respectively.

The necessary conditions for the coefficients of the generalized electroelasticity tensor, as well as additional sufficient representations of elastic elongations and shifts in the other two sagittal planes, can be obtained, without repeating all the calculations by simply rotating the coordinate indices $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\rightarrow\{\gamma,\ \alpha,\ \beta\}\rightarrow\{\beta,\ \gamma,\ \alpha\}$.

3. Conclusion

The necessary conditions imposed on the coefficients of the generalized electroelasticity tensor, as well as the additional relations between elastic displacements and electric field components are formulated that allow the formulation of the two-dimensional problem of linear electroelasticity.

In two-dimensional electroelasticity of anisotropic piezoelectrics, both purely planar and purely antiplanar, as well as mixed (planar elastic and antiplanar electric, or antiplanar elastic and planar electric) multicomponent electroelastic fields are formed.

Taking into account the obtained additional relations between the elastic displacements and electric field components, the constitutive equations for the nonzero components of the mechanical stress tensor and the electric displacement vector, as well as the quasi-static electroelasticity equations for each piezoelectric texture, are derived, respectively.

A catalog of possible multicomponent electroelastic fields in all sagittal planes of all piezoelectric textures has been compiled.

On the example of relatively simple separately existing electroelastic multicomponent fields, an example of their practical application in composite waveguides is given.

REFERENCES

1. Khzardzhyan A.A., (1982), On the plane and anti-flat problems of the theory of elasticity in homogeneous anisotropic media, YSU Scientific Notes, №2, p. 24-29, [in Russian],
2. Avetisyan A.S., (1985), About the problem of the propagation of transversal waves in piezoelectric solid, Proceed. of NAS of Armenia, vol. 38, Iss. 1, pp. 3-11, [in Russian],
3. Avetisyan A.S., Two-Dimensional Problems of Electro Acoustics in Homogeneous Piezoelectric Crystals, Proceed. of NAS RA, Mechanics, (2019), vol. 72, №3, pp. 56-79, http://doi.org/10.33018/72.3.4,
4. Kirchhoff G., LecturesonMathematics, Physics, Mechanics, Leipzig, (1883), Vol. 1 isin 3d. Edition. 485 p.,[in German],
5. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., (1959), Theory of Plates and Shells, 2-nd edition, McGraw Hill Book Company, New York, Toronto, London, 636 p.,
6. ReissnerE., On the theory of bending of elastic plates. (1944), J. Math. And Phys., vol. 23, 1, pp. 184-191, https://doi.org/10.1002/sapm1944231184
7. Ambartsumian S.A., Theory of anisotropic Plates: Strength, Stability and Vibrations, Volume 11 of the Progress in Materials Science series, Technomic Publishing Co., Inc., Stamford, U.S.A., 1970, 276 p.,
8. Ambartsumian S.A., Bagdasaryan G.E., Belubekyan M.V., (1977), Magnetoelasticity of thin plates and shells, Mosc.,Nauka, 272p. [in Russian],
9. Rabotnov Yu.N., Mechanics of a deformable solid, M., URSS, Lenand(2019), 712 pp.,[in Russian],
10. A.E.H. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity. 1, 1892,
11. Nye J., Physical properties of crystals and their description using tensors and matrices, (1967), 2nd ed. - M.: "Mir", 386 p.,
12. Shaskolskaya M.P., (1984), Crystallography, M.: "Higher. Sc.", 376 p. [in Russian],
13. Gerard A. Maugin, (1988), Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids, North Holland, Amsterdam, 598p.
14. E. Dieulesaint and D. Royer, (1980), *Elastic Waves in Solids: Applications To Signal Processing*, Wiley, New York, NY, USA,.
15. V. Z. Parton and B. A. Kudryavtsev, (1988),*Electro-magneto-elasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*, Gordon and Beach, New York, NY, USA,
16. B. A. Auld, (1981), "Wave propagation and resonance in piezoelectric materials",*Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 70, no. 6, pp. 1577–1585,

Information about author

Ara Sergey Avetisyan - Corresponding member of NAS of Armenia, Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences, Armenia, Yerevan-0019, M. Baghramyan ave. 24/2, Tel.: (+374 91) 20 20 02, E: mail - ara.serg.avetisyan@gmail.com

Received 04.03.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

Մեխանիկա 75, № 1-2, 2022 Mechanics

UDC 539.3 Doi- 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-124

AVERAGED CONTROLLABILITY OF TRANSVERSELY ISOTROPIC AMBARTSUMYAN PLATE

A. S. Avetisyan, S. H. Jilavyan, As. Zh. Khurshudyan

Keywords. particular theory of S. A. Ambartsumyan, refined theories of anisotropic plates, Green's function approach, infinite system

А. С. Аветисян, С. А. Джилавян, Ас. Ж. Хуршудян

Управляемость в среднем трансверсально изотропной пластинки Амбарцумяна

Ключевые слова: частная теория С. А. Амбарцумяна, уточненные теории анизотропных пластин, метод функции Грина, бесконечная система

В этой статье рассмотрена управляемость в среднем пластинки Амбарцумяна, изготовленной из трансверсально изотропного материала. Уравнения состояния основаны на гипотезах частной теории анизотропных пластин, разработанной С. А. Амбарцумяном для описания деформированного состояния анизотропных пластин, в каждой точке которой имеется плоскость изотропии, параллельная срединной плоскости пластинки. Применен метод функции Грина для явного представления нормального перемещения пластинки через материальные параметры пластинки (плотность, модули Юнга в обоих направлениях изотропии), являющиеся равномерно распределенными случайными величинами. В результате, условие управляемости в среднем сведено к бесконечной системе линейных уравнений относительно искомой функции управления. Построены три параметрических класса частных (эвристических) решений урезанного варианта бесконечной системы. Определение параметров управления сведено к решению задачи нелинейного программирования.

Ա. Ս. Ավետիսյան, Ս. Հ. Ջիլավյան, Աս. Ժ. Խուրշուդյան

Համբարձումյանի մասնակի ճշգրտված տեսությամբ նկարագրվող տրանսվերսալ իզոտրոպ սալի միջինացված ղեկավարելիությունը

Հիմնաբառեր՝ Ս. Ա. Համբարձումյանի մասնակի ճշգրտված տեսություն, անիզոտրոպ սալերի ճշգրտված տեսություններ, Գրինի ֆունկցիայի եղանակ, անվերջ համակարգ

Այս աշխատանքում հետազոտվում է Համբարձումյանի՝ տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութից պատրաստված սալի միջինացված ղեկավարելիությունը: Սալի ծռման հավասարումները ստացվում են անիզոտրոպ սալերի մասնակի ճշգրտված տեսության վարկածների հիման վրա, որը մշակել է Ս. Ա. Համբարձումյանը՝ սալի ամեն կետում միջին հարթությանը զուգահեռ իզոտրոպիայի հարթություն ունեցող անիզոտրոպ սալերի դեֆորմացված վիճակը նկարագրելու համար: Սալի նորմալ տեղափոխության բացահայտ կախվածությունը նյութի պարամետրերից (խտություն, իզոտրոպիայի երկու ուղղությամբ առաձգականության գործակիցներ) ստացվում է Գրինի ֆունկցիայի եղանակի կիրառմամբ: Ենթադրվում է, որ այդ պարամետրերը հավասարաչափ բաշխված պատահական մեծություններ են: Արդյունքում՝ միջինացված ղեկավարելիության պայմանից ստացվում է ղեկավարման որոնվող ֆունկցիայի նկատմամբ գծային հավասարումների անվերջ համակարգ: Կառուցվում է անվերջ համակարգի հատած մասի մասնավոր (էվրիստիկ) լուծումների երեք պարամետրական դաս, իսկ ղեկավարման պարամետրերի որոշումը հանգեցվում է ոչ գծային ծրագրավորման խնդրի լուծմանը:

In this paper we study the averaged controllability of Ambartsumyan plate made of a transversely isotropic material. Governing equations are based on assumptions of particular theory of anisotropic plates developed by S. A. Ambartsumyan specifically for describing the deformation of anisotropic plates made of material with isotropy plane which, at each point of the plate, is parallel to its middle plane. The Green's function approach is applied to express the plate normal displacement by means of material parameters (density, Young moduli in both directions of isotropy) which are assumed to be uniformly distributed random variables. Eventually, the averaged controllability condition is reduced to an infinite system of linear constraints with respect to the control action. Three types of particular (heuristic) solutions of the truncated version of the infinite system are discussed. Determination of control parameters is reduced to the solution of a problem of nonlinear programming.

1 Introduction

The concept of averaged controllability has been introduced by Enrique Zuazua in the recent paper [1] and has been further developed in [2–9] (also, refer to the list of references in [8]). Averaged controllability is an important criterion of controllability for systems or processes containing random parameters. In case of systems or processes described by partial differential equations, material characteristics may be (and most of the cases are) regarded as such parameters. The advantage of this notion is that controls providing the desired state exactly or approximately, do not depend on the random parameters. For instance, let a controlled state be described by $w\left(x,t,u;\alpha\right)$ where x and t are deterministic variables, u is the control and α is some random variable. The aim is to provide a desired state $w_T\left(x\right)$ at $t=T$. Then we will say that it is controllable in average if the controllability residue

$$\mathcal{R}_T\left(u\right)=\left|\left|\bar{w}\left(x,T,u\right)-w_T\left(x\right)\right|\right|$$

satisfies

$$\mathcal{R}_T\left(u\right)=0\quad\text{(exactly)}\quad\text{or}\quad\mathcal{R}_T\left(u\right)\leq\varepsilon\quad\text{(approximately)}$$

for some given ε and appropriate norm $||\cdot||$. Here, $\bar{w}$ is the averaged state given by

$$\bar{w}\left(\cdot,\cdot,\cdot\right)=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}w\left(\cdot,\cdot,\cdot;\alpha\right)p\left(\alpha\right)\mathrm{d}\alpha,$$

p is the PDF and α_0, α_1 are the extreme values of α.

Thence, substituting $\bar{w}$ into the definition of $\mathcal{R}_T\left(u\right)$, we will be able to derive a constrained on u that does not depend on α explicitly. It rather depends on the extreme values α_0 and α_1.

Generally, the analysis of exact averaged controllability is considerably simplified when the integral in the expression of $\bar{w}$ is explicitly evaluated. Nevertheless, in case when the integral can not be explicitly evaluated, approximate analytical expressions like trapezoidal or Simpson rule can work out with high accuracy. On the other hand, the analysis of approximate averaged controllability is often easier considering that the integral can be well estimated in terms of known integral inequalities.

In this paper, we consider a similar problem for a square plate simply supported at its four edges. The plate occupies the domain $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in [0, l]^2, 2z \in [-h, h] \right\}$ and it is subject to a dynamical load $F(x, y, t) = u(t)\, v(x, y)$ with controllable u and given distribution function v. We will assume that at $t = 0$, the plate was resting in equilibrium. The plate is made of a transversely isotropic material. More specifically, at each point of the plate the isotropy plane is parallel to the middle plane of the plate.

2 Ambartsumyan hypotheses and governing equation

Denote by $\boldsymbol{w} = (w_x, w_y, w_z)$ the displacement field in the plate. Let us assume that the following hypotheses of Ambartsumyan particular theory are valid [10]:

1. w_z does not depend on z-coordinate, i.e., $w_z = w(x, y, t)$,
2. the normal stress σ_{zz} and the shear stresses τ_{xz}, τ_{yz} are determined according to classical anisotropic plate theory.
3. in the Hooke law, σ_{zz} is negligible with respect to the stresses σ_{xx}, σ_{yy} and τ_{xy}.

Note that in [11] it has been shown that Ambartsumyan theory of anisotropic plates is of fourth order similar to the linearized von Kármán equations. An optimal control problem for Ambartsumyan layer-plate has been considered in [12].

On the basis of these hypotheses, the displacement field will be expressed as follows:

$$w_x(x, y, z, t) = -z\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z}{2G'}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3}\right)\varphi_0(x, y, t),$$
$$w_y(x, y, z, t) = -z\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{z}{2G'}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3}\right)\psi_0(x, y, t),$$

and the normal stress is determined from the third equation of motion of the classical theory subject to the boundary conditions

$$\sigma_{zz}\big|_{2z=h} = F(x, y, t), \quad \sigma_{zz}\big|_{2z=-h} = 0,$$

as follows:

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{z}{h} - 2\frac{z^3}{h^3}\right)F(x, y, t) + \rho \cdot \left(\frac{2z^2}{h^2} - \frac{1}{2}\right) z \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.$$

Here,

$$\varphi_0(x, y, t) = -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial \Delta w_0}{\partial x}, \quad \psi_0(x, y, t) = -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial \Delta w_0}{\partial y},$$

(ρ, E, ν, G') are the independent material parameters of the plate, Δ is the 2D Laplace operator, and w_0 is the normal displacement of the plate mid-plane calculated by the classical theory, i.e.,

$$D\Delta\Delta w_0 + \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = F(x, y, t) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{2.1}$$

where

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

is the bending stiffness of the plate.

Then, the anisotropic normal displacement w of the plate mid-plane will satisfy the fourth order equation

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_1(x, y, t) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{2.2}$$

with

$$F_1(x, y, t) = F(x, y, t) - \frac{h^2}{10(1-\nu^2)} \frac{E}{G'} \left[\Delta F - \rho h \frac{\partial^2 \Delta w_0}{\partial t^2} \right],$$

subject to boundary conditions

$$\begin{cases} w = 0, & M_{xx} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0, l \\ w = 0, & M_{yy} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, l. \end{cases} \tag{2.3}$$

Here, M_{xx} and M_{yy} are the in-plane bending moments given by

$$M_{xx}(x, y, t) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{10} \frac{D}{G'} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right),$$

$$M_{yy}(x, y, t) = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{10} \frac{D}{G'} \left(\nu \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right).$$

Note that (2.1) can be explicitly solved for various boundary conditions: refer to [13] for more details. Since in our case the plate is simply supported at its four edges, we will have [13]

$$w_0(x, y, t) = \frac{1}{\rho h} \int_0^t \int_0^l \int_0^l F(\xi, \eta, \tau) G(x, \xi, y, \eta, t - \tau) \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\tau, \tag{2.4}$$

$$G(x, \xi, y, \eta, t) = \frac{4}{l^2} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}} \sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \lambda_{nm} t \right) \varphi_n(x) \varphi_n(\xi) \varphi_m(y) \varphi_m(\eta),$$

$$\lambda_{nm} = \frac{h}{l^2} \frac{\pi^2 (n^2 + m^2)}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad \varphi_n(x) = \sin\left(\pi n \frac{x}{l} \right).$$

Similarly, the general solution to (2.2) and (2.3) will be

$$w(x,y,t) = \frac{1}{\rho h}\int_0^t\int_0^l\int_0^l F_1(\xi,\eta,\tau)\,G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau = w_0(x,y,t) -$$
$$- \frac{h}{10(1-\nu^2)}\frac{E}{\rho G'}\int_0^t\int_0^l\int_0^l \Delta F\cdot G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau +$$
$$+ \frac{h^2}{10(1-\nu^2)}\frac{E}{G'}\int_0^t\int_0^l\int_0^l \frac{\partial^2\Delta w_0}{\partial\tau^2}\cdot G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau.$$

Denoting

$$\frac{h}{10(1-\nu^2)}\frac{E}{\rho G'}\int_0^t\int_0^l\int_0^l \Delta F\cdot G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau = w_1(x,y,t;\boldsymbol{P}),$$

$$\frac{h^2}{10(1-\nu^2)}\frac{E}{G'}\int_0^t\int_0^l\int_0^l \frac{\partial^2\Delta w_0}{\partial\tau^2}\cdot G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau = w_2(x,y,t;\boldsymbol{P}),$$

we will obtain

$$w(x,y,t;\boldsymbol{P}) = w_0(x,y,t;\boldsymbol{P}) - w_1(x,y,t;\boldsymbol{P}) + w_2(x,y,t;\boldsymbol{P}).$$

The indication of $\boldsymbol{P}$ in the argument of w and w_0, w_1, w_2 is merely to show their dependence on the material parameters.

2.1 Simplification of the displacement

Before proceeding with controllability problem formulation, let us first simplify w_0, w_1 and w_2 further. First, notice that

$$w_0(x,y,t;\boldsymbol{P}) = \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{nm}^0\varphi_n(x)\varphi_m(y)\cdot\int_0^t u(\tau)\,K_{nm}^0(t-\tau;E,\rho)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$v_{nm}^0 = \frac{4}{l^2 h\lambda_{nm}}\int_0^l\int_0^l v(\xi,\eta)\,\varphi_n(\xi)\,\varphi_m(\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

$$K_{nm}^0(t;E,\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho E}}\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}t\right),$$

$$w_1(x,y,t;\boldsymbol{P}) = \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{nm}^1\varphi_n(x)\varphi_m(y)\cdot\int_0^t u(\tau)\,K_{nm}^1(t-\tau;\boldsymbol{P})\,\mathrm{d}\tau,$$

$$v_{nm}^1 = \frac{4h}{10l^2(1-\nu^2)\cdot\lambda_{nm}}\int_0^l\int_0^l \Delta v\cdot\varphi_n(\xi)\,\varphi_m(\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

$$K_{nm}^1(t;\boldsymbol{P}) = \frac{1}{G'}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}t\right).$$

Further, notice that since $K_{nm}^0(0;\cdot,\cdot)\equiv 0$, we have

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t u(\tau)\,K_{nm}^0(t-\tau;E,\rho)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t u(\tau)\,\frac{\partial^2 K_{nm}^0(t-\tau;E,\rho)}{\partial t^2}\mathrm{d}\tau=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}^2\int_0^t u(\tau)\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau.$$

Therefore,

$$\frac{\partial^2\Delta w_0}{\partial t^2}=\sum_{n,m=1}^{\infty}v_{nm}^0\Delta\left(\varphi_n(x)\,\varphi_m(y)\right)\int_0^t u(\tau)\,\frac{\partial^2 K_{nm}^0(t-\tau;E,\rho)}{\partial t^2}\mathrm{d}\tau=$$
$$=\frac{\pi^2}{l^2}\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\sum_{n,m=1}^{\infty}\lambda_{nm}^2\left(n^2+m^2\right)v_{nm}^0\varphi_n(x)\,\varphi_m(y)\times$$
$$\times\int_0^t u(\tau)\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau.$$

Substituting this expression into w_2, we will obtain

$$w_2(x,y,t;\boldsymbol{P})=\frac{4\pi^2h^2}{10l^4\left(1-\nu^2\right)}\frac{E}{\rho G'}\int_0^t\int_0^l\int_0^l\sum_{n,m=1}^{\infty}\lambda_{nm}^2\left(n^2+m^2\right)v_{nm}^0\times$$
$$\times\varphi_n(\xi)\,\varphi_m(\eta)\int_0^\tau u(\tau)\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}(\tau-\tau_1)\right)\mathrm{d}\tau_1\times$$
$$\times\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nm}}\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}(t-\tau)\right)\varphi_n(x)\,\varphi_n(\xi)\,\varphi_m(y)\,\varphi_m(\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau.$$

On the other hand, since

$$\int_0^l\varphi_{n_1}(\xi)\,\varphi_{n_2}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\frac{l}{2}\delta_{n_1}^{n_2},$$

where $\delta_{n_1}^{n_2}$ is the Kronecker symbol, we will obtain

$$w_2(x,y,t;\boldsymbol{P})=\sum_{n,m=1}^{\infty}v_{nm}^2\varphi_n(x)\,\varphi_m(y)\int_0^t K_{nm}^2(u,t,\tau;\boldsymbol{P})\,\mathrm{d}\tau,$$

where

$$v_{nm}^2=\frac{\pi^2h^2}{10l^2\left(1-\nu^2\right)}\cdot\lambda_{nm}\left(n^2+m^2\right)v_{nm}^0.$$
$$K_{nm}^2(u,t,\tau;\boldsymbol{P})=\frac{E}{\rho G'}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}(t-\tau)\right)\times$$
$$\times\int_0^\tau u(\tau_1)\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}(\tau-\tau_1)\right)\mathrm{d}\tau_1.$$

Thus, finally,

$$
\begin{aligned}
w\left(x,y,t;\boldsymbol{P}\right)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\Bigg[&v_{nm}^{0}\int_{0}^{t}u\left(\tau\right)K_{nm}^{0}\left(t-\tau;E,\rho\right)\mathrm{d}\tau-\\
&-v_{nm}^{1}\int_{0}^{t}u\left(\tau\right)K_{nm}^{1}\left(t-\tau;\boldsymbol{P}\right)\mathrm{d}\tau+\\
&+v_{nm}^{2}\int_{0}^{t}K_{nm}^{2}\left(u,t,\tau;\boldsymbol{P}\right)\mathrm{d}\tau\Bigg]\varphi_{n}\left(x\right)\varphi_{m}\left(y\right).
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

3 Averaged controllability problem

Assume that the material parameters $\boldsymbol{P}=(\rho,\ E,\ G')$ are uniformly distributed random variables. Let the aim of control be to provide at $t=T$ the desired state

$$
w\left(x,y,T\right)=w_{T}\left(x,y\right),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=T}=\dot{w}_{T}\left(x,y\right)\quad\text{in}\quad\Omega
$$

with $w_T,\dot{w}_T\in L^2\left([0,1]^2\right)$. Then, the averaged controllability criterion will be

$$
\mathcal{R}_{T}\left(u\right)=\left|\left|\bar{w}\left(x,y,T\right)-w_{T}\left(x,y\right)\right|\right|_{L^{2}\left([0,1]^{2}\right)}^{2}+\left|\left|\left.\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}\right|_{t=T}-\dot{w}_{T}\left(x,y\right)\right|\right|_{L^{2}\left([0,1]^{2}\right)}^{2}.
\tag{3.1}
$$

3.1 Determination of averaged state

The averaged state $\bar{w}$ will be determined as

$$
\begin{aligned}
\bar{w}\left(x,y,t\right)=\int_{\mathbb{P}}w\left(x,y,t\right)p\left(\boldsymbol{P}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{P}=&\int_{\mathbb{P}}w_{0}\left(x,y,t\right)p\left(\boldsymbol{P}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{P}-\\
-\int_{\mathbb{P}}w_{1}\left(x,y,t\right)p\left(\boldsymbol{P}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{P}+&\int_{\mathbb{P}}w_{2}\left(x,y,t\right)p\left(\boldsymbol{P}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{P}.
\end{aligned}
$$

Now, let us evaluate the averaged state taking into account that

$$
p\left(E\right)=\frac{\theta\left(E-E_{0}\right)-\theta\left(E-E_{1}\right)}{E_{1}-E_{0}},
$$

where θ is the Heaviside function. Since only K_{nm}^{0} depends on E and ρ only, we will obtain

$$
\bar{w}_{0}\left(x,y,t\right)=\frac{1}{\mu}\sum_{n,m=1}^{\infty}v_{nm}^{0}\varphi_{n}\left(x\right)\varphi_{m}\left(y\right)\cdot\int_{0}^{t}u\left(\tau\right)\bar{K}_{nm}^{0}\left(t-\tau\right)\mathrm{d}\tau,
$$

where $\mu=\left(E_1-E_0\right)\left(\rho_1-\rho_0\right)\left(G_1'-G_0'\right)$,

$$
\bar{K}_{nm}^{0}\left(t\right)\mathrm{d}\tau=\int_{\rho_{0}}^{\rho_{1}}\int_{E_{0}}^{E_{1}}K_{nm}^{0}\left(t;E,\rho\right)\mathrm{d}E\mathrm{d}\rho.
$$

Since K^1_{nm} contains only $1/G'$, their integration is separate and straightforward. As a result, we obtain,

$$\bar{w}_1(x,y,t) = \frac{1}{\mu}\ln\frac{G'_1}{G'_0}\sum_{n,m=1}^{\infty} v^1_{nm}\varphi_n(x)\varphi_m(y)\cdot\int_0^t u(\tau)\bar{K}^1_{nm}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\bar{K}^1_{nm}(t) = \int_{\rho_0}^{\rho_1}\int_{E_0}^{E_1}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}t\right)\mathrm{d}E\,\mathrm{d}\rho.$$

Similarly,

$$\bar{w}_2(x,y,t) = \frac{1}{\mu}\ln\frac{G'_1}{G'_0}\sum_{n,m=1}^{\infty} v^2_{nm}\varphi_n(x)\varphi_m(y)\int_0^t \bar{K}^2_{nm}(u,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

where

$$\begin{aligned}\bar{K}^2_{nm}(u,t,\tau) = \int_0^\tau u(\tau_1)\int_{\rho_0}^{\rho_1}\int_{E_0}^{E_1}\frac{E}{\rho}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}(t-\tau)\right)\times\\ \times\sin\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\lambda_{nm}(\tau-\tau_1)\right)\mathrm{d}E\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\tau_1 :=\\ := \int_0^\tau u(\tau_1)K^3_{nm}(t,\tau,\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1.\end{aligned}$$

Thence, we arrive at

$$\bar{w}(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} K_{nm}(u,t)\varphi_n(x)\varphi_m(y), \tag{3.2}$$

where

$$\begin{aligned}K_{nm}(u,t) = \frac{v^0_{nm}}{\mu}\int_0^t u(\tau)\bar{K}^0_{nm}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau-\\ -\frac{1}{\mu}\ln\frac{G'_1}{G'_0}\int_0^t\Big[v^1_{nm}u(\tau)\bar{K}^1_{nm}(t-\tau)-\\ -v^2_{nm}\int_0^\tau u(\tau_1)K^3_{nm}(t,\tau,\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1\Big]\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

3.2 Reduction of the averaged controllability condition to an infinite system

Denoting by $w_{T,nm}$ and $\dot{w}_{T,nm}$ the Fourier sine-coefficients of the corresponding functions, substituting (3.2) evaluated at $t = T$ into (3.1) and taking into account the orthogonality of trigonometric functions, (3.1) is reduced to the following coupled infinite system of constraints with respect to the control function u:

$$\begin{cases} K_{nm}(u,T) - w_{T,nm} = 0,\\ \left.\dfrac{\partial K_{nm}}{\partial t}\right|_{t=T} - \dot{w}_{T,nm} = 0.\end{cases}\tag{3.3}$$

4 Some heuristic solutions

Even though infinite system (3.3) is linear in u, its determination is not straightforward. For instance, it can be treated as a problem of moments and resolved explicitly (see [14] for details). It can also be formally satisfied by some heuristic solutions [15].

4.1 Trigonometric solution

Since $v_{nm}^{0,1,2}$, $w_{T,nm}$ and $\dot{w}_{T,nm}$ converge in n, m very fast, (3.3) can be truncated for some finite N, M. We additionally assume that u is compactly supported on $[0, T]$. Then,

$$u(t) = \sum_{k=1}^{L} u_k \sin(q_k t + r_k)$$

can be substituted into the truncated system to derive

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{L} u_k \mathcal{T}_{nm}(q_k, r_k) - w_{T,nm} = 0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{L} u_k \left.\frac{\partial \mathcal{T}_{nm}}{\partial t}\right|_{t=T} - \dot{w}_{T,nm} = 0, \end{cases} \quad n \le N, \quad m \le M, \tag{4.1}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{nm}(q_k, r_k) = \frac{v_{nm}^0}{\mu} \int_0^T \sin(q_k \tau + r_k) \bar{K}_{nm}^0 (T - \tau) \, \mathrm{d}\tau - \\ - \frac{1}{\mu} \ln \frac{G_1'}{G_0'} \int_0^T \Bigg[v_{nm}^1 \sin(q_k \tau + r_k) \bar{K}_{nm}^1 (T - \tau) - \\ - v_{nm}^2 \int_0^\tau \sin(q_k \tau_1 + r_k) K_{nm}^3 (T, \tau, \tau_1) \, \mathrm{d}\tau_1 \Bigg] \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

4.2 Piecewise constant solution

Another important control class is represented as

$$u(t) = \sum_{k=1}^{L} u_k \left[\theta(t - t_{k-1}) - \theta(t - t_k)\right].$$

In this case, the parameters u_k, t_k will be determined from the following system:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{L} u_k \mathcal{P}_{nm}(t_k) - w_{T,nm} = 0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{L} u_k \left.\frac{\partial \mathcal{P}_{nm}}{\partial t}\right|_{t=T} - \dot{w}_{T,nm} = 0, \end{cases} \quad n \le N, \quad m \le M, \tag{4.2}$$

where

$$\mathcal{P}_{nm}\left(t_k\right)=\frac{v_{nm}^0}{\mu}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\bar{K}_{nm}^0\left(T-\tau\right)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\mu}\ln\frac{G_1'}{G_0'}\left[v_{nm}^1\int_{t_{k-1}}^{t_k}\bar{K}_{nm}^1\left(T-\tau\right)\mathrm{d}\tau-\right.$$
$$\left.-v_{nm}^2\int_0^T\int_0^\tau\left[\theta\left(\tau_1-t_{k-1}\right)-\theta\left(\tau_1-t_k\right)\right]K_{nm}^3\left(T,\tau,\tau_1\right)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau\right].$$

4.3 Impulsive control

Another heuristic solution is the impact action of the external force which can be represented in terms of Dirac function as follows:

$$u\left(t\right)=\sum_{k=1}^{L}u_k\delta\left(t-t_k\right).$$

In this case, for u_k and t_k we derive

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{L}u_k\mathcal{I}_{nm}\left(t_k\right)-w_{T,nm}=0,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{L}u_k\left.\frac{\partial\mathcal{I}_{nm}}{\partial t}\right|_{t=T}-\dot{w}_{T,nm}=0,\end{cases}\qquad n\le N,\quad m\le M,\tag{4.3}$$

where

$$\mathcal{I}_{nm}\left(t_k\right)=\frac{v_{nm}^0}{\mu}\bar{K}_{nm}^0\left(T-t_k\right)-\frac{1}{\mu}\ln\frac{G_1'}{G_0'}\left[v_{nm}^1\bar{K}_{nm}^1\left(T-t_k\right)-\right.$$
$$\left.-v_{nm}^2\int_0^T K_{nm}^3\left(T,\tau,t_k\right)\mathrm{d}\tau\right].$$

Note that (4.1), (4.2) and (4.3) can be solved for appropriate L by efficient numerical methods of nonlinear programming, which will be the subject of another publication elsewhere.

5 Conclusions

Averaged controllability of Ambartsumyan plate made of a transversely isotropic material is studied. The plate, which is initially in complete equilibrium, is simply supported at its edges and is subject to an external control action with a prescribed distribution function on the upper surface of the plate. The material characteristics of the plate (more specifically, the density and both Young moduli) are considered to be uniformly distributed random variables and the averaged state of the plate is computed. The averaged controllability analysis of the plate is reduced to an infinite system of linear constraints with respect to the control function. Three distinct parametric families of heuristic controls are provided to satisfy the truncated version of the infinite system. Efficient numerical methods of nonlinear programming can be applied to determine those parameters.

References

[1] E. Zuazua, Averaged control, Automatica, 2014, vol. 50, issue 12, pp. 3077–3087.

[2] M. Lazar, E. Zuazua, Averaged control and observation of parameter-depending wave equations. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2014, vol. 352, issue 6, pp. 497–502.

[3] Q. Lü, E. Zuazua, Averaged controllability for random evolution Partial Differential Equations. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2016, vol. 105, issue 3, pp. 367–414.

[4] J. Lohéac, E. Zuazua, From average to simultaneous controllability. Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. Ser. 6, 2016, vol. 25, issue 4, pp. 785–828.

[5] J. Lohéac, E. Zuazua, Averaged controllability of parameter dependent conservative semigroups. Journal of Differential Equations, 2017, vol. 262, issue 3, pp. 1540–1574.

[6] J. Klamka, As. Zh. Khurshudyan, Averaged controllability of heat equation in unbounded domainswith random geometry and location of controls: The Green's function approach. Archives of Control Sciences, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 573–584.

[7] A. S. Avetisyan, As. Zh. Khurshudyan, Averaged controllability of Euler-Bernoulli beams withrandom material characteristics: The Green's function approach. Proc. of NAS of Armenia, Mechanics, 2019, vol. 72, issue 4, pp. 7–18.

[8] M. Lazar, J. Lohéac, Control of parameter dependent systems. "Numerical Control: Part A" edited by E. Zuazua, E. Trelat. Elsevier, 2022.

[9] S. H. Jilavyan, As. Zh. Khurshudyan, Averaged controllability of thermoelasticity equations. Average state of a rectangular plate. Proceedings of the YSU. Physical and Mathematical Sciences, 2021, vol. 55, issue 3, pp. 123–130.

[10] S. A. Ambartsumyan, Theory of Anisotropic Plates: Strength, Stability, and Vibrations. Hemisphere Pub. Corp., New York, 1991.

[11] A. S. Avetisyan, As. Zh. Khurshudyan, On justification of Ambartsumyan's plate theory via Γ-convergence. In "Problems of Mechanics of Deformable Solid Body", dedicated to the 95th anniversary of Academician of NAS of Armenia Sergey A. Ambartsumyan. Institute of Mechanics, NAS of Armenia, pp. 151–158.

[12] S. H. Jilavyan, As. Zh. Khurshudyan, Optimal control of anisotropic layer-plate vibrations in view of transverse shear. Proceedings of III International Conference "Problems of Control, Information Processing and Transmission", vol. 2, Saratov, 2013, pp. 219–228.

[13] A. D. Polyanin, V. E. Nazaikinskii, Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. 2^{nd} edition. Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, 2016.

[14] A. S. Avetisyan, As. Zh. Khurshudyan, Controllability of Dynamic Systems. The Green's Function Approach. Cambridge Scholars Publishing, Cambridge, 2018.

[15] As. Zh. Khurshudyan, Heuristic determination of resolving controls for exact and approximate controllability of nonlinear dynamic systems. Mathematical Problems in Engineering, 2018, 9496371, 16 pages.

Information about author:

A. S. Avetisyan - Head of the Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics, NAS of Armenia
E: mail - ara.serg.avetisyan@gmail.com

S. H. Jilavyan - Head of Chair of Mechanics, Faculty of Mathematics and Mechanics, Yerevan State University
E: mail - samjilavyan@ysu.am

As. Zh. Khurshudyan - Senior Researcher (outsource), Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics, NAS of Armenia
E: mail - khurshudyan@mechins.sci.am

Received 18.03.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК 62-50 Doi:10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-136

TIME-SUBOPTIMAL CONTROL OF A TWO-LINK MANIPULATOR MOTION

Avetisyan V.V., Grigoryan Sh.A.

Key words: two link manipulator, time-suboptimal control

Аветисян В.В., Григорян Ш.А.

Субоптимальное по быстродействию управление движением двузвенного манипулятора

Ключевые слова: двузвенный манипулятор, субоптимальное по быстродействию управление

Рассматривается задача построения субоптимальных по быстродействию режимов управления движением плоского двузвенного манипулятора с произвольными геометрическими и инерционными характеристиками. Требуется перевести манипулятор из заданной начальной конфигурации в заданную конечную конфигурацию при условиях, что в начале и в конце процесса система покоится, а модули управляющих обобщенных сил не превышают фиксированных значений. Управления ищутся в классе релейных режимов с минимальным (равным трем) суммарным числом переключений, достаточным для удовлетворения граничных условий. Предложен расчетный алгоритм, позволяющий по начальным и конечным положениям определить количество точек переключения управлений, порядок чередования их знаков, моменты переключения и время приведения манипулятора в требуемое положение покоя.

Ավետիսյան Վ.Վ., Գրիգորյան Շ.Ա.

Երկօղակ մանիպուլյատորի շարժման սուբօպտիմալ ըստ արագագործության ղեկավարումը

Հիմնաբառեր: երկօղակ մանիպուլյատոր, սուբօպտիմալ ըստ արագագործության ղեկավարում

Դիտարկվում է կամայական երկրաչափական և իներցիոն բնութագրիչներով հարթ երկօղակ մանիպուլյատորի շարժման սուբօպտիմալ ըստ արագագործության ղեկավարման ռեժիմների կառուցման խնդիրը: Պահանջվում է մանիպուլյատորը տեղափոխել տրված սկզբնական հանգստի վիճակից տրված վերջնական հանգստի վիճակ ղեկավարումների վրա դրված տրված սահմանափակումների դեպքում: Ղեկավարումները փնտրվում են կտոր առ կտոր հաստատուն ֆունկցիաների դասում՝ նվազագույն (հավասար երեքի) գումարային թվով փոխանցման կետերով, որը բավարար է եզրային պայմաններին բավարարելու համար: Առաջարկված է հաշվարկային ալգորիթմ, որը թույլ է տալիս ըստ սկզբնական և վերջնական դիրքերի որոշել ղեկավարումների փոխանցման կետերի քանակը, դրանց նշանների հերթագայության կարգը, փոխանցման պահերը և տրված հանգստի դիրք մանիպուլյատորի բերման ժամանակը:

We consider the problem of the construction of a time-suboptimal control modes of the motion of a flat two-link manipulator with arbitrary geometric and inertial characteristics. It is required to transfer the manipulator from a given initial configuration to a given final configuration under the conditions that at the beginning and at the end of the process the system is at rest, and the moduli of the generalized control forces do not exceed fixed values. The controls are sought in the class of relay modes with a minimum (equal to three) total number of switches, sufficient to satisfy the boundary conditions. A computational algorithm is proposed that allows, from the initial and final positions, to determine the number of control switching points, the order of alternation of their signs, the switching moments and the time for bringing the manipulator to the required rest position.

Introduction

In practice, two-link manipulators are used both independently and as part of the structures of multi-link manipulation robots for which it is these two links that perform the bulk of the robot's motions when it performs various technological operations. Therefore, the development of effective modes of program control of a two-link robotic manipulator is still an urgent task. When choosing program controlled movements, one should take into account such factors as the time for performing a work operation by a manipulator, energy consumption, various restrictions, ease of implementation, etc. In cases where shortening of the work cycle of the manipulator leads to speed up of the entire technological process, it is advisable to construct programmed motions that are optimal with respect to speed of action. At the same time, an important task from the point of view of practical implementation is the construction of optimal control laws for a two-link manipulator of a simple structure, having the minimum possible number of switchings. In [1,2], optimal and suboptimal control laws were constructed for a two-link manipulator with zero-lag links in the two-point problem of moving a gripper with a load. A significant dependence of the time it takes to bring the gripper to the terminal state on the manipulator configuration type was revealed, and the problem of choosing the optimal configuration type was solved. In [3], a graphic-analytical approach was developed to constructing time-suboptimal open-loop controls that bring a two-link manipulator with arbitrary geometric and lag characteristics from the initial rest configuration to an arbitrary final rest configuration. The publications [4–8] deal with optimization methods for solving the problem of controlling robots, including two-link manipulators, and calculating their design parameters. In [9,10], a parametric optimization method was used to construct a quadratic-functional-suboptimal control of the motion of a plane two-link manipulator taking into account feasible manipulator configurations corresponding to given gripper positions at the beginning and end of the motion. In [11,12], the problems of optimal control of transport movements of an electromechanical two-link manipulator time optimal [11], energy consumption and the functional combined from them [12] are considered. Methods for calculating controls are proposed based on a simplified model that does not take into account the mutual influence of links. Numerical simulation of the dynamics of the complete model under optimal control modes has been carried out. The simulation results have established the practical efficiency of the found modes. In [13], an algorithm was developed for time suboptimal control of a two-link electromechanical manipulator with high positioning accuracy. A combined control is proposed that allows you to bring the manipulator to the desired position with any given accuracy. The works [14-16] are devoted to the construction of time optimal control of the motion of a two-link manipulator with a second balanced link.

In this paper, for a flat two-link manipulator with arbitrary geometric and inertial characteristics, an algorithm for calculating suboptimal program controls is proposed, which allows, based on the initial and final configurations of the manipulator, to determine the number of switching points of control moments, the order of alternation of their signs, the switching moments at which the system moves from the initial rest position to the specified final rest position in a time close to the optimal response time.

1 Formulation of the problem

Consider a two-link manipulator (fig. 1) consisting of two absolutely rigid bodies G_1 and G_2 joined by a hinge O_2. The body G_1 (first link) is joined to a fixed foundation by means of hinge O_1. The hinges are ideal and cylindrical, and their axes are parallel to one another. At the end of the second link (G_2) a reinforced gripper is installed, in which there is a movable object (cargo). We will assume that the linear sizes of the gripper are much smaller than the lengths of the links and consider the gripper to be a material point when studying transport motions. The system performs a plane-parallel motion in a horizontal plane perpendicular to the axes of the hinges O_1 and O_2. The manipulator control under study is accomplished with two independent drives D_1 and D_2. The first link and the base interact via the drive D_1, and D_2 is responsible for the interaction between the links G_1 and G_2 of the manipulator. The control functions in the manipulator model under study are the torques M_1 and M_2 about the axes O_1 and O_2 generated by the drives D_1 and D_2, respectively. The action of other forces is not taken into account.

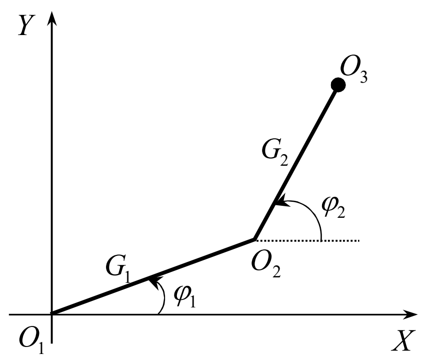


Fig. 1. Calculation model of a two-link manipulator

In the plane we introduce a fixed Cartesian coordinate system O_1XY with origin one the axis of O_1. We denote: φ_1 - angle between the O_1X and the straight line O_1O_2 connecting the hinges; φ_2 - angle between the O_1X axis and the straight line O_2C passing through the axis of the moving hinge O_2 and the center of mass C of G_2; $L_1 = |O_1O_2|$ - distance between the hinge axes; $l = |O_2C|$ - distance from the axis of O_2 to the center of mass of G_2 with the cargo; I_1 and I_2 - moment of inercia of G_1 and G_2 (with the cargo) about the axes of O_1 and O_2, respectively; m - mass of G_2 with the cargo.

The Lagrange equations describing the motion of this system have the form [3]

$$
\begin{aligned}
&(I_1 + mL_1^2)\ddot{\varphi}_1 + mL_1 l\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + mL_1 l\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = M_1 - M_2, \\
&I_2\ddot{\varphi}_2 + mL_1 l\,\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - mL_1 l\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = M_2.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

We pose the following optimal control problem.

Problem 1.1. Find the program laws of change the control moments $M_1 = M_1(t)$, $M_2 = M_2(t)$ that ensure of the system (1.1) from the initial state

$$\varphi_1(0) = \varphi_1^0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \qquad \varphi_2(0) = \varphi_2^0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0 \tag{1.2}$$

into a given final state

$$\varphi_1(T) = \varphi_1^T, \quad \dot{\varphi}_1(T) = 0, \qquad \varphi_2(T) = \varphi_2^T, \quad \dot{\varphi}_2(T) = 0 \tag{1.3}$$

In a minimum time T, with the condition that the control moments are limited in absolute value by constants:

$$|M_1(t)| \le M_1^0, \quad |M_2(t)| \le M_2^0. \tag{1.4}$$

In (1.1)-(1.4) we go to over to dimensionless variables denoted by primes:

$$t' = (M_1^0/(mL_1^2))^{1/2} t, \quad l' = l/L_1, \quad I_i' = I_i/(mL_1^2), \quad M_i' = M_i/M_2^0, \quad i = 1,2. \tag{1.5}$$

If we then omit omit the primes, and also rotate the coordinate system O_1XY through the angle φ_1^0, then relations (1.1)-(1.4) become simpler: in them we have

$$\varphi_1^0 = 0, \quad m = 1, \quad L_1 = 1, \quad M_2^0 = 1. \tag{1.6}$$

2 Solving a linear problem

First consider the special case of the manipulator (1.1) in which the second manipulator link is statically balanced; i.e., one has $l = 0$ in (2.1). Then, taking into account (1.6), the time-optimal control problem takes the form

$$T \to \min \tag{2.1}$$

$$(I_1 + 1)\ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2\ddot{\varphi}_2 = M_2, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_1(0) = 0, \qquad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \\ &\varphi_2(0) = \varphi_2^0, \qquad \dot{\varphi}_2(0) = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\varphi_i(T) = \varphi_i^T, \quad \dot{\varphi}_i(T) = 0, \quad i = 1,2, \tag{2.4}$$

$$|M_1| \le M_1^0, \quad |M_2| \le 1. \tag{2.5}$$

The solution of problem (2.1)-(2.5) is known [3]. A pair of functions that determine the time optimal control depending on $(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T)$, $\Delta\varphi_2^T = \varphi_2^T - \varphi_2^0$, can be represented as:

$$M^* = \begin{cases} (M_1^*, M_2^*), & (\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi_0, \\ (M_1^*, M_2), & (\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi_1, \\ (M_1, M_2^*), & (\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi_2. \end{cases} \tag{2.6}$$

Here the areas Φ_i, $i = 0,1,2$ are defined as follows:

$$\Phi_0 = \Phi_0^{(0,0)} \cup \Phi_0^{(0,1)} \cup \Phi_0^{(1,0)} \cup \Phi_0^{(1,1)}, \tag{2.7}$$

$$\Phi_0^{(0,0)} = \left\{(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi : \Delta\varphi_2^T = B\varphi_1^T,\ \varphi_1^T > 0\right\},$$
$$\Phi_0^{(0,1)} = \left\{(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi : \Delta\varphi_2^T = -A\varphi_1^T,\ \varphi_1^T > 0\right\},$$
$$\Phi_0^{(1,0)} = \left\{(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi : \Delta\varphi_2^T = -A\varphi_1^T,\ \varphi_1^T < 0\right\},$$
$$\Phi_0^{(1,1)} = \left\{(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi : \Delta\varphi_2^T = B\varphi_1^T,\ \varphi_1^T < 0\right\},$$

$$\Phi_1 = \Phi_1^{(0)} \cup \Phi_1^{(1)}, \tag{2.8}$$
$$\Phi_1^{(0)} = \left\{(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi :\ -A\varphi_1^T < \Delta\varphi_2^T < B\varphi_1^T,\ \varphi_1^T > 0\right\},$$
$$\Phi_1^{(1)} = \left\{(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi :\ B\varphi_1^T < \Delta\varphi_2^T < -A\varphi_1^T,\ \varphi_1^T < 0\right\},$$

$$\Phi_2 = \Phi_2^{(0)} \cup \Phi_2^{(1)}, \tag{2.9}$$
$$\Phi_2^{(0)} = \left\{(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi :\ B\varphi_1^T < \Delta\varphi_2^T,\ \varphi_1^T > 0\ \ u\ \ -A\varphi_1^T < \varphi_2,\ \varphi_1^T < 0\right\},$$
$$\Phi_2^{(1)} = \left\{(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi :\ \Delta\varphi_2^T < -A\varphi_1^T,\ \varphi_1^T > 0\ \ u\ \ \Delta\varphi_2^T < B\varphi_1^T,\ \varphi_1^T < 0\right\},$$

where

$$A = (I_1 + 1)(M_1^0 + 1)^{-1} I_2^{-1}, \quad B = (I_1 + 1)(M_1^0 - 1)^{-1} I_2^{-1},$$

and

$$\Phi = \left\{\varphi_1, \varphi_2 :\ -2\pi \le \varphi_1, \varphi_2 \le 2\pi\right\} \tag{2.10}$$

- the region of change of generalized coordinates (angles) of a two-link manipulator.

According to (2.6), the components of the optimal control M^* are defined as follows.

If

$$(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi_1 = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \Phi_1^{(\alpha)}, \tag{2.11}$$

then M_1^* - control with one switching, and M_2 - control with two switching

$$M_1^* = (-1)^\alpha M_1^0\, \mathrm{s}ign\left[(t_0^{(1)} - t)\left|(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\Delta\varphi_2^T\right|\right], \quad t_0^{(1)} = T_1^*/2,$$
$$\alpha = 0, 1, \tag{2.12}$$

$$M_2 = \begin{cases} (-1)^\beta, & t \in \left[0, t_2^{(2)}\right) \cup \left[t_3^{(2)}, T_1^*\right], \\ (-1)^{\beta+1}, & t \in \left[t_2^{(2)}, t_3^{(2)}\right), \end{cases}$$
$$t_2^{(2)} = (-1)^\beta I_2 \Delta\varphi_2^T / T_1^* + T_1^*/4, \tag{2.13}$$
$$t_3^{(2)} = (-1)^\beta I_2 \Delta\varphi_2^T / T_1^* + 3T_1^*/4, \quad \beta = 0, 1.$$

If

$$(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T) \in \Phi_2 = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \Phi_2^{(\alpha)}, \tag{2.14}$$

then M_1 - control with two switching, and M_2^* - control with one switching

$$M_1 = \begin{cases} (-1)^{\beta} M_1^0, & t \in \left[0, t_2^{(1)}\right) \cup \left[t_3^{(1)}, T_2^*\right], \\ (-1)^{\beta+1} M_1^0, & t \in \left[t_2^{(1)}, t_3^{(1)}\right), \end{cases}$$

$$t_2^{(1)} = (-1)^{\beta}\left[(I_1+1)\varphi_1^T + I_2\Delta\varphi_2^T\right] / (M_1^0 T_2^*) + T_2^*/4, \tag{2.15}$$

$$t_3^{(1)} = (-1)^{\beta}\left[(I_1+1)\varphi_1^T + I_2\Delta\varphi_2^T\right] / (M_1^0 T_2^*) + 3T_2^*/4, \quad \beta = 0,1,$$

$$M_2^* = (-1)^{\alpha}\, \mathrm{s}ign\left[(t_0^{(2)} - t)\left|I_2\Delta\varphi_2^T\right|\right], \quad t_0^{(2)} = T_2^*/2, \quad \alpha = 0,1. \tag{2.16}$$

If

$$(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_0 = \left(\bigcup_{\alpha=0}^{1} \Phi_0^{(0,\alpha)}\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha=0}^{1} \Phi_0^{(\alpha,1)}\right), \tag{2.17}$$

then M_1^*, M_2^* - controls with one switching

$$M_1^* = (-1)^{\alpha} M_1^0\, \mathrm{s}ign\left[(t_1^{(1)} - t)\left|(I_1+1)\varphi_1^T + I_2\Delta\varphi_2^T\right|\right], \quad \alpha = 0,1,$$

$$M_2^* = (-1)^{\beta}\, \mathrm{s}ign\left[(t_1^{(2)} - t)\left|I_2\Delta\varphi_2^T\right|\right], \qquad \beta = 0,1, \tag{2.18}$$

$$t_1^{(1)} = t_1^{(2)} = T_1^*/2 = T_2^*/2,$$

In (2.11)-(2.16) T_1^* and T_2^* are defined using the following formulas

$$T_1^* = 2\left(\left|(I_1+1)\varphi_1^T + I_2\Delta\varphi_2^T\right| / M_1^0\right)^{1/2}, \quad T_2^* = 2\left(\left|I_2\Delta\varphi_2^T\right|\right)^{1/2}. \tag{2.19}$$

Formulas (2.6)-(2.19), depending on whether point $(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T)$ belongs to a particular area $\Phi_i(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T)$, $i = 1,2,3$, allow us to determine both the type of control mode and the switching moments $t_i^{(j)} = t_i^{(j)}(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T)$, $i = 1,2,3$; $j = 1,2$ and time $T^* = T^*(\varphi_1^T, \Delta\varphi_2^T)$, under which the system (2.2) moves from the initial state of rest (2.3) to the given state of rest (2.4) in the minimum time. As follows from formulas (2.11)–(2.16), in case $l = 0$, the pairs of modes (2.12), (2.13) and (2.15), (2.16) for $\alpha = 0, \beta = 0$ and $\alpha = 0, \beta = 1$ are equivalent in terms of time optimal and, therefore, we can restrict ourselves to considering one of them. However, in case $l \neq 0$, generally speaking, one should not expect these pairs to be equivalent.

3 Algorithm for Solving a Nonlinear Problem

To solve Problem 1.1 in the case $l \neq 0$, the following algorithm is proposed.

3.1. Since there are eight boundary conditions (1.2), (1.3) for the fourth-order controlled system (1.1), then in order to fulfill these conditions, in the general case, it is required that the control law contain at least four free parameters, including the non-fixed time T of the end of the process. From the maximum principle of Pontryagin it follows that the control functions will be relay functions and that they are maximum (with respect to the modulus). In accordance with the linear case, we set piecewise constant control laws with four free parameters (the switching moments t_1, t_2, t_3 and the process time T) in one of the following forms:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad M_1 = M_1^0 u_\alpha(t),\ \ M_2 = v_\beta(t),\\
&(2)\quad M_1 = M_1^0 v_\beta(t),\ \ M_2 = u_\alpha(t),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} (-1)^\alpha, & t \in [0, t_1), \\ (-1)^{\alpha+1}, & t \in [t_1, T], \end{cases} \qquad v_\beta(t) = \begin{cases} (-1)^\beta, & t \in [0, t_2) \cup [t_3, T], \\ (-1)^{\beta+1}, & t \in [t_2, t_3), \end{cases}$$

$$0 \le t_1 \le T, \qquad 0 \le t_2 \le t_3 \le T, \qquad \alpha, \beta = 0,1.$$

According to (3.1), both moments M_1 and M_2 take the maximum possible (with respect to the modulus) values and have not more than three switching in total. The function u_α corresponds to one switching at the moment t_1, and the function v_β corresponds to two switchings at the moments t_2 and t_3. Formulas (3.1) describe eight different methods of control, differing from each other by the number of the moment that has one switching (cases (1) and (2)), as well as by combinations of values $\alpha, \beta = 0,1$ that determine the order of alternation of signs of the control moment with two switching.

Fixing one of these eight modes, we can look for parameters t_1, t_2, t_3, T so that solution $\varphi_i(t_1, t_2, t_3; t)$, $i = 1,2$ of the system (1.1) with initial conditions (1.2) would satisfy conditions (1.3) at the end of the motion. We get a system of four equalities

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t_1, t_2, t_3, T) = \varphi_1^T, \quad \varphi_2(t_1, t_2, t_3, T) = \varphi_2^T, \qquad (a)\\
&\dot\varphi_1(t_1, t_2, t_3, T) = 0, \qquad \dot\varphi_2(t_1, t_2, t_3, T) = 0 \qquad\quad (b)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

for the sought parameters t_1, t_2, t_3, T.

However, for given terminal values φ_1^T, φ_2^T, the existence of a solution to system (3.2) depends (as in the linear case) on the choice of the type of control regime (3.1). Therefore, it is first necessary to construct regions $\Phi_i(l), i = 0,1,2$, and then, depending on whether point $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$ belongs to one or another region $\Phi_i(l), i = 0,1,2$, determine the type of control mode (3.1) in which system (1.1), (1.2) is brought to this terminal position with zero velocities.

Let's move on to constructing the region $\Phi_0(l)$. Consider the following semi-reverse method. By analogy with case $l = 0$, controls under which system (1.1) with initial conditions (1.2) is reduced to the terminal point (1.3) lying on the boundary $\Phi_0(l)$ will be sought in the class of controls (3.1) with one switching

$$M_1 = M_1^0 u_\alpha(t), \quad M_2 = \mu_\beta(t),$$
$$u_\alpha(t) = (-1)^\alpha sign(t_1 - t), \quad \mu_\beta(t) = (-1)^\beta sign(t_2 - t), \tag{3.3}$$
$$0 \le t_1 \le T, \quad 0 \le t_2 \le T, \quad \alpha, \beta = 0,1.$$

Fix one of the four modes (3.3) and one of the parameters t_1, t_2 (for example, t_2). Then we calculate parameters t_1 and T from the last two conditions of the following system

$$\varphi_1(t_1,t_2,T) = \varphi_1^T, \quad \varphi_2(t_1,t_2,T) = \varphi_2^T, \quad \dot\varphi_1(t_1,t_2,T) = 0, \quad \dot\varphi_2(t_1,t_2,T) = 0. \tag{3.4}$$

This procedure is reduced to finding the root (by the method of half division of the segment) of a function of one variable t_1, the parameter T is easily found in the process of numerical integration of equations (1.1) as the moment of the first vanishing of one of the angular velocities ($\dot\varphi_1$ or $\dot\varphi_2$). When searching for the root t_1, the value $t_1 = t_1^{(1)}$ calculated by formulas (2.18), (2.19) of section 2 is used as the initial value. After that, from the first two conditions (3.4) we determine the boundary values φ_1^T, φ_2^T that correspond to the obtained set of parameters t_1, t_2, T. By sampling (with a certain step) parameter t_1, one can construct regions of finite configurations that are achievable for given initial conditions and control type (3.3). If the described procedure is carried out for all types of control with one switching (3.3), then lines $\Phi_0^{(\alpha,0)}(l)$, $\Phi_0^{(\alpha,1)}(l)$ will stand out on plane φ_1^T, φ_2^T, defining region $\Phi_0(l)$:

$$\Phi_0(l) = \left(\bigcup_{\alpha=0}^{1} \Phi_0^{(0,\alpha)}(l)\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha=0}^{1} \Phi_0^{(\alpha,1)}(l)\right). \tag{3.5}$$

Since under controls (3.3) the solutions of system (1.1), (1.2) continuously depend on the parameter l, then $\Phi_0^{(0,\alpha)}(l)\Big|_{\alpha=0,1} \to \Phi_0^{(0,\alpha)}\Big|_{\alpha=0,1}$, $\Phi_0^{(1,\alpha)}(l)\Big|_{\alpha=0,1} \to \Phi_0^{(1,\alpha)}\Big|_{\alpha=0,1}$, as $l \to 0$.

3.2. By analogy with the linear case, taking into account (2.10), outside region $\Phi_0(l)$, in the region $\Phi \setminus \Phi_0(l)$:

$$\Phi_1(l) \cup \Phi_2(l) = \left(\bigcup_{\alpha=0}^{1} \Phi_1^{(\alpha)}(l)\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha=0}^{1} \Phi_2^{(\alpha)}(l)\right) \tag{3.6}$$

we will consider control modes with three switching times (3.1)(1),(2):
in the regions

$$\Phi_1^\alpha(l), \alpha = 0,1 \quad \text{- control mode (3.1)(1),} \tag{3.7}$$

i.e. control M_1 with one switching at time t_1 and control M_2 with two switching at times t_2 and t_3, and in the regions

$\Phi_2^{\alpha}(l), \alpha = 0,1$ - control mode (3.1)(2), (3.8)

i.e. control M_1 with two switching at times t_2 and t_3, and control M_2 with one switching at time t_1. Thus, depending on which region (3.5) or (3.6) the point $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$ lies in, from (3.7) or (3.8), respectively, it can be defined the type of control mode (3.1)((1) or (2)), which can be used to transfer the manipulator to (1.1), (1.2) to a given final state (1.3).

Suppose $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)}(l)$. This point according to (3.7) corresponds to the case (1): $\alpha = 0, \beta = 0$ or $\alpha = 0, \beta = 1$ in (3.1). Let's fix the first of them and solve system (3.2) with respect to the parameters t_1, t_2, t_3, T. Let us carry out multiple integration of system (1.1) with "zeroing" in three parameters t_1, t_2, t_3. First, two (for example, t_2, t_3) of the four parameters t_1, t_2, t_3, T are set, and from the conditions of velocities vanishing (3.2)(a), the remaining parameters (t_1, T) are calculated (this procedure is described in detail above, when solving the system (3.4)). Then, trying with some step the parameters t_2, t_3, the previous procedure is repeated many times until the boundary conditions in (3.2)(b) are satisfied. Finding parameters t_2, t_3 again reduces to finding first the root of the first equation (3.2)(a) with respect to variable t_2 and then the second equation (3.2)(a) with respect to variable t_3. As a result, the parameters t_1, t_2, t_3, T, at which the control mode (3.1)(1)($\alpha = 0, \beta = 0$) realizes the movement of the system (1.1), (1.2) to the state (1.3) are determined.

4 Calculation results

Let's assume that the manipulator is characterized by the following dimensional parameters appearing in (1.1), (1.4):

$$\begin{aligned} &L_1 = 1\,\text{m},\ l = 0.2\,\text{m},\ m_2 = 10\,\text{kg},\ I_1 = I_2 = (10/3)\,\text{kg}\cdot\text{m}^2, \\ &M_1^0 = 2\,\text{N}\cdot\text{m},\ M_2^0 = 1\,\text{N}\cdot\text{m}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

which correspond to the manipulator, the links of which are the same uniform rods.

After passing to dimensionless parameters, according to (1.5), we obtain from (4.1)

$$L_1 = 1,\ l = 0.2,\ m = 1,\ I_1 = I_2 = 1/3,\ M_1^0 = 2,\ M_2^0 = 1. \tag{4.2}$$

At values (4.2) boundary $\Phi_0(l)$ was constructed to the semi-inverse numerical technique described in the section 3.1 (fig. 2). For both calculation options $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0$. On the axes of fig. 2 the final values of the angles $\varphi_1 = \varphi_1^T, \varphi_2 = \varphi_2^T$ are plotted. The bold line in fig. 2 shows the border $\Phi_0(l)$ ($l = 0, 0.2$) between regions $\Phi_1(l)$ and $\Phi_2(l)$.

We take the initial and final conditions in the form

$$\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0\,, \quad \varphi_1^T = 57°17' \approx 1\,\text{rad} \quad \varphi_2^T = 114°34' \approx 2\,\text{rad}\,. \tag{4.3}$$

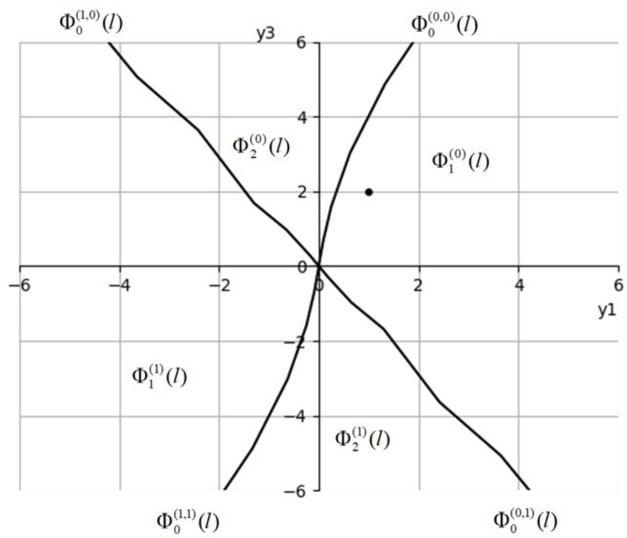


Fig. 2. Diagram on the plane of generalized coordinates $y_1 = \varphi_1$, $y_3 = \varphi_2$ for determining the type of modes in the case $l = 0.2$.

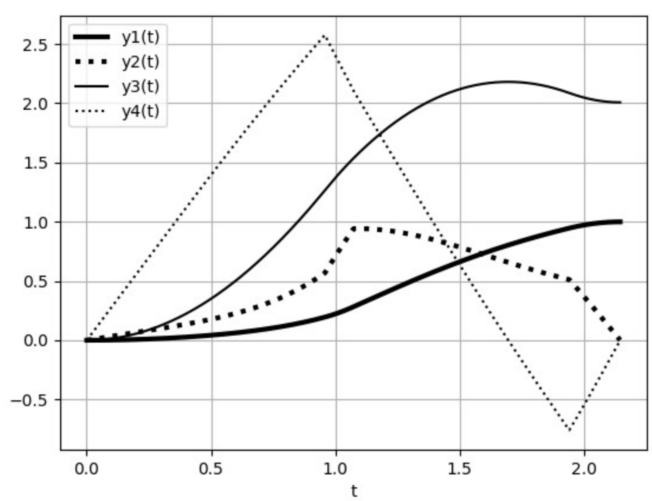


Fig.3. Dependence of generalized coordinates $y_1 = \varphi_1$, $y_3 = \varphi_2$, $y_2 = \dot{\varphi}_1$, $y_4 = \dot{\varphi}_2$ on time in the case $l = 0.2$.

Values of parameters (4.2), (4.3) correspond to fig. 2, from which we find that in the case under consideration $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)}$. Therefore, the control mode (3.1) (1) from (3.7) should be used: control M_1 with one switching t_1 and control M_2 with two switching t_2, t_3. Calculations of the values of parameters t_1, t_2, t_3, T from system (3.2) at finite values (4.2) according to the algorithm described in the section 3.2 gave the following results:

$$t_1 = 1.073 \text{ (2.401s)}, \ t_2 = 0.957 \text{ (2.141s)}, \ t_3 = 1.940 \text{ (4.341s)}, \ T = 2.146 \text{ (4.802s)}. \quad (4.4)$$

At values of (4.4), the fulfillment of equations (3.2), (4.3) is ensured with an accuracy of 0.001 for both angles and both velocities. In parentheses in (4.4), (4.5) the dimensional values of times are given using the transition formulas (1.5).

In the case $l = 0$, for finite values (4.3), parameters t_1, t_2, t_3, T are determined using the analytical solutions of the section 2 (formulas (2.12), (2.13), (2.19)):

$$t_1 = t_1^{(1)} = 1, \quad t_2 = t_2^{(2)} = 0.833, \quad t_3 = t_3^{(2)} = 1.833, \quad T = T^* = 2. \quad (4.5)$$

Note that the first three values from (4.5) were used as starting values when searching for the parameters (4.3) from the system (3.2) by the algorithm of the section 3.2.

The motion of a two-link manipulator was numerically simulated with controls (3.1)(1). Equations (1.1) were integrated under initial conditions $\varphi_i^0 = \dot{\varphi}_i^0 = 0$, $i = 1, 2$ and control mode (3.1)(1) ($\alpha = 0, \beta = 0$) with parameters (4.4). The results of the simulation are shown in fig. 3. The bold solid line and the solid line, respectively, show the dependences of angles and on time, and the bold dashed line and the dashed line show the dependences of angular velocities and on time.

Comparison of calculated results (4.4), (4.5) shows that moving the manipulator to the required rest position in control modes (3.1) is accomplished in time close to optimal calculated for the linear case with optimal control modes of the section 2. Therefore, the constructed control modes can be regarded as time suboptimal.

Conclusion

The described algorithm allows constructing software relay controls that are suboptimal in terms of speed with the minimum possible number of switching, sufficient for the transition of a two-link manipulator from the initial state of rest to any terminal state of rest in the working region of the manipulator. The results of numerical simulation of the dynamics of a two-link manipulator with constructed control modes have established the acceptability of the proposed calculation methodology. It can be used to calculate suboptimal program motions of manipulating robots.

The work was supported by the Science Committee of RA, in the frames of the research project 21T-2D255.

References

1. Bolotnik N.N., Kaplunov A.A. Optimal linear motions of cargo by a two-link manipulator // Izv.Akad. Nauk SSSR. Tekh. Kibern. 1982. No. 1. P. 68-74.
2. Bolotnik N.N., Kaplunov A.A. Optimizing the control and configurations of a two-link manipulator // Izv. Akad. Nauk SSSR. Tekh. Kibern. 1983. No. 4. P. 123-131.
3. Avetisyan V.V., Bolotnik N.N., Chernousko F.L. Optimal Programmed Motions of a Two-Link Manipulator // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1985. V. 23. No. 5. P. 65–73.

4. Akulenko L.D., Bolotnik N.N., Chernousko F.L., Kaplunov A.A. Optimal Control of Manipulation Robots // IFAC Proc. 1985. Vol. 17. Issue 2. P. 311–315.
5. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Time-Optimal Control for Robotic Manipulators.// Optimal Control Applications and Methods. 1989. Vol. 10. Issue 4. P. 293–311.
6. Bolotnik N.N., Chernous'ko F.L. Optimizing control of manipulation robots // Izv. Akad. Nauk SSSR Tekh. Kibern. 1990. No. 1. P. 189-238.
7. Meier E.B., Bryson A.E. Efficient Algorithm for Time-Optimal Control of a Two-Link Manipulator // J. Guidance, Control and Dynamics. 1990. Vol. 13. Issue 5. P. 859–866.
8. Chernousko F.L. Optimization in Control of Robots / Computational Optimal Control. Basel: Birkhause, 1994. P. 19–28.
9. Demydyuk I.V., Hoshovs'ka N. Parametric Optimization of the Transport Operations of a Two-Link manipulator // J. Math. Sci. 2019. Vol. 238. No. 2. P. 174-188.
10. Demydyuk I.V., Demydyuk V.I. Parametric optimization of the kinematic structure and the movement of the two-link manipulator // Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems // 2020. Vol. 48. P. 36-48.
11. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Modeling and optimization of transport motion for an industrial robot // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1986. Vol. 24. No. 6. P. 97-103.
12. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Optimization of control modes of manipulation robots with regard of the energy consumption // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1987. Vol. 25. No. 3. P. 100-107.
13. Avetisyan V.V., Bolotnik N.N. Suboptimal control of an electromechanical manipulator with a high degree of positioning accuracy // Mechanics of Solids . 1990. Vol. 25. Issue 5. P.32-41.
14. Avetisyan V.V., Hovakimyan N.V. Constructing the Regions of Admissible States of Positioning for a Two-Link Manipulator with Account of Speed Constraints // J. Comput. Syst. Sci. Int. 1997. Vol. 36. Issue 4. P. 638–646.
15. Avetisyan V.V. Time-Optimal Control of Gripper Motion in a Two-Link Manipulator with Allowance for the Terminal Configuration // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82. No. 2. P. 189-199.
16. Avetisyan V.V. Optimal choice of the type of the final configuration at the limited control of gripper motion of the two link manipulator // Mechanics - Proceedings of NAS RA. 2021. Vol. 74. Issue 3. P. 61-72.

Information about authors:

Vahan Vardges Avetisyan - Doctor of physical and mathematical sciences, professor. Institute of Mechanics of NAS RA, tel. (+374) 94 44 95 60, email - vanavet@yahoo.com,

Shushanna Armen Grigoryan – Master's student of the faculty of applied mathematics and informatics of the RAU, (+374) 95 68 34 04, email - shushannagrigoryan7@gmail.com

Received 02.03.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК539.3 Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-148

Devoted to the memory of professorMelsBelubekyan

LOCALISED WAVES IN ELASTIC THIN-WALLED STRUCTURES

K.Ghazaryan, P. Marzocca

Key Words: Plate, shell, bending edge wave, localisation, membrane theory of shell

Նվիրվում է պրոֆեսորՄելսԲելուբեկյանիհիշատակին

Կ. Ղազարյան, Պ. Մարզոկա

Տեղայնացվածալիքներըառաձգականբարակապատկառուցվածքներում

Հիմնաբառեր. Սալ, թաղանթ, ծռման եզրային ալիք, տեղայնացում, թաղանթների մեմբրանային տեսություն

Տվյալ հոդվածում հեղինակները ներկայացնում են բարակապատ կառուցվածքներում տեղայնացված ծռման ալիքներին առնչվող իրենց աշխատանքների ընդհանուր ամփոփումը: Հեղինակները ներկայացնում են նաև երկու նոր խնդիրների դրվածքն ու անալիտիկ արդյունքները՝ պայմանավորված ներդրակներով ամրանավորված համասեռ անվերջ սալում ծռման եզրային ալիքի տարածումով: Ամրանավորված ներդրակները մոդելավորված են որպես առաձգական հեծան, կամ առաձգական սալ:

Посвящается памяти профессора Мелса Белубекяна

Казарян К, Марзокка П.

Локализованные волны в упругих тонкостенных конструкциях

Ключевые слова: Пластинка, оболочка, изгибная краевая волна, локализация, мембранная теория оболочек

В данной статье авторы представляют обзор своих исследований, касающихся локализованных изгибных волн в тонкостенных конструкциях. Авторы также представляют постановку и аналитические результаты для двух новых задач, связанных с распространением изгибной краевой волны в однородной бесконечной пластине, армированной включениями, моделируемые как упругая балка или упругая пластина.

In this paper the authors provide a review of our investigations pertaining to localized bending waves in thin-walled structures. The authors also present the statements and analytical results fortwo new problems related to bending edge wave propagation in homogeneous infinite plate reinforced by inclusions, modelled as elastic beam or elastic plate.

1. Localized bending waves are perturbations concentrated in the vicinity of the free edge of thin plates and shells and decaying within a short distance from the edge. These bending localized waves are also called “edge waves” or “edge resonance waves”. Based on the Kirchhoff theory of isotropic elastic thin plates, the existence of a bending wave localised near the free edge of a semi-infinite medium was first demonstrated by Konenkov in [1].

The first edge waves' results published in English were documented in [2,3], where was rediscovered the same phenomenon concurrently and independently, without being aware of Konenkov's contribution.

From a mathematical point of view, the edge wave resonance eigenvalue problem is similar to the eigenvalue problem for the local stability of plate [4] which was firstly reported in [5].

The problem of bending waves localized near the free edge of a transversely isotropic plate is investigated in [6] using the Ambartsumian's higher-order plate theory which takes account of the transverse shears generated by flexural deformation. Unlike the first order Reissner–Mindlin theory, which also takes account of transverse shears, Ambartsumian's theory does not demand that plane normal cross-sections remain plane during bending. Within this analysis the existence of localized bending waves in transversely isotropic plates is established, and solutions of the dispersion equation obtained for different values of the elastic parameters. The analysis of frequencies of localized bending waves shows that for thick plates the effect of anisotropy can be considerable. For the case of vibrations of a narrow plate, from the long wave approximation a new beam vibration equation of the Timoshenko type is obtained for a transversally isotropic plate.

Within the framework of the Ambartsumian's higher-order plate theory, in [7] the existence and propagation problems of electro-elastic bending waves localized at the free edge of a 6mm hexagonal symmetry piezoelectric plate was established. The condition for existence of a localized bending wave is obtained, and the dispersion equation solved with respect to a dimensionless frequency. It is shown that the piezoelectric effect can increase the attenuation coefficient for a localized wave by up to 70% compared with that for a purely elastic plate, thus significantly decreasing the depth of penetration. The problem is also solved within the classical Kirchhoff theory. A comparison of results is carried out between two theories.

The study of planar and bending magnetoelastic vibrations of a perfectly conductive flat plate immersed in a uniform external magnetic field is presented in [8]. The Kirchhoff's plate theory and the model of a perfect conductive medium are used. The conditions for the existence of localized bending vibrations in the vicinity of the free edge of the plate are established. It is shown that the localized vibrations can be detected and can be eliminated by means of an applied magnetic field.

The problems of localized bending waves for elastic isotropic and orthotropic cantilever plates with a rib reinforcement were studied in [9,10]. Herein the effect of inertial and elastic contributions due to the rib have been separately analysed. These investigations revealed that the presence of a reinforcement rib can suppress localized bending waves.

In the framework of the membrane theory of cylindrical shells [11,12], the localised vibration near free edges of finite and semi-infinite cylindrical shell is considered. The derived dispersions equations lead to the localised membrane vibration conditions which are analysed and the appropriate recommendations are offered.

Localized magnetoelastic bending vibration of an electroconductive elastic plate [8]

The study of bending magnetoelastic vibrations of a perfectly conductive flat plate immersed in a uniform external magnetic field is presented. Kirchhoff's plate theory and the model of a perfect conductive medium are used. For this system it can be shown that localized bending vibrations exist in the vicinity of the plate free edge and can be detected and eliminated by means of changing the intensity magnitude of the magnetic field.

An elastic electroconductive plate is considered and is immersed in an external longitudinal magnetic field parallel to the (x, y) plane, (Fig. 1). $\mathbf{H_0} = H_{01}\mathbf{i_x} + H_{02}\mathbf{i_y}$ of constant intensity $\left(H_{01} = const\right.$, $\left.H_{02} = const\right)$.

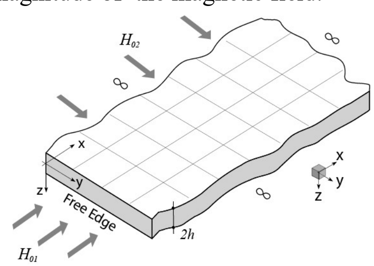


Fig.1 Model of a plate immersed in a magnetic field in x and y directions.

In framework of the Kirchhoff's theory and the model of a perfect conducting medium the plate vibration equation can be defined as

$$D\Delta^2 w - \frac{h}{2\pi}\left(H_{01}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_{02}^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2H_{01}H_{02}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

where w is the plate normal deflection.

Next the localized bending vibrations of a semi-infinite plate occupying the domain $0 \le x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-h \le z \le h$ is considered. It is assumed that the localized waves are propagating along the y axis.

The associated boundary conditions at the edge $x = 0$ are:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0; \quad D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(2-\upsilon\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] - \frac{hH_{01}^2}{2\pi}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

At $x \to \infty$ the vibration damps out, implying that $\lim\limits_{x\to\infty} w = 0$.

The two special cases of a magnetic field are considered:

Magnetic field perpendicular to wave propagation

In this case $H_{01} \ne 0, H_{02} = 0$. The solution of Eq. (1) can be written as:

$$w\left(x, y\right) = w_0\left(C_1 e^{-k px} + C_2 e^{-kqx}\right)e^{i(\omega t - ky)} \tag{3}$$

where k is the wave number and ω is the frequency of vibration,

$$p = \sqrt{\left(1 + \chi + \sqrt{\eta^2 + 2\chi + \chi^2}\right)}, \quad q = \sqrt{\left(1 + \chi - \sqrt{\eta^2 + 2\chi + \chi^2}\right)},$$

$$\eta^2 = \frac{2\rho h\omega^2}{Dk^4}, \chi = \frac{hH_0^2}{4\pi Dk^2}$$

The dimensionless parameter η is related to the frequency of localized vibration, and according to the condition of damping it should satisfy the inequality $0 < \eta^2 < 1$. The roots of the dispersion equation can be cast in the following form:

$$\eta^2 = 1 + 2\left(1 - v - \chi\right)\sqrt{\left(1 - v - \chi\right)^2 + v^2} - 2\left(1 - v - \chi\right)^2 - v^2 \tag{4}$$

Sufficient and necessary conditions for the existence of localized bending waves have the form

$$\chi < (3+\nu)(1-\nu)/2, \quad \nu \neq 0$$

In particular, for a steel plate $(E = 110\,\text{GPa},\ \upsilon = 0.3)$, with relative wave-length of $kh = 0.02$ and $kh = 0.01$, a value of $\chi_0 = 1.15$ is needed to eliminate localized vibrations, resulting in an intensity of the magnetic field on the order of $H_{01} \sim 1.5T$ and $H_{01} \sim 0.37T$, respectively.

Magnetic field parallel to wave propagation

In this case $H_{01} = 0, H_{02} \neq 0$ and application of H_{02} leads to an increase in the localized vibration frequencies with increasing magnetic field intensity, implying that the localized vibrations exist, regardless of the magnitude of intensity of the magnetic field.

Orthotropic plate reinforced by a rigid rib [9]

A study of the localized bending wave in a thin elastic orthotropic cantilever plate reinforced by a rigid rib is presented. A general solution is given and the particular case of an isotropic reinforced plate is analyzed. The bending vibration equation issolved in conjunction with appropriate boundary conditions and an avenue to identify the rib elastic proprieties through an inverse approach is described.

A rectangular elastic plate in a Cartesian reference system (x, y, z) is considered such that the plane (xOy) coincides with the plate middle surface, with z as the coordinate along thickness of a plate, such as , $y \in [0, b]$, $z \in [-h, h]$ (Fig.2)

Based on the Kirhhoff's hypothesis, a plate bending vibration equation can be written as

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{11} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

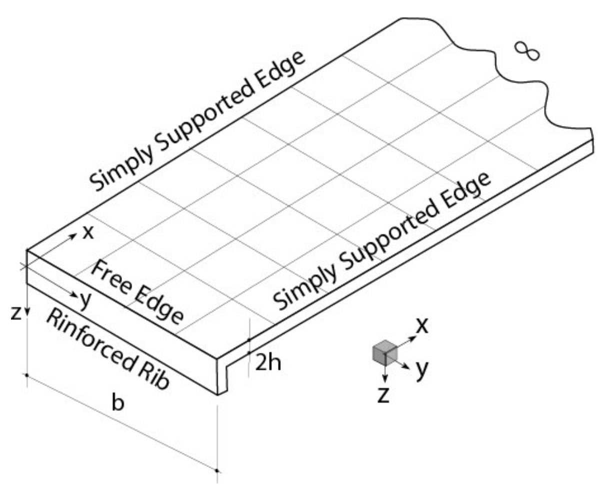


Figure 2: Model of a cantilever plate with one free and rib reinforced edge.

Here $w(x,y)$ is a plate middle surface normal displacement, $2h$ is the plate thickness, ρ is a density of a plate material, $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$ are physical constants characterizing plate rigidness.

On plate edges, e.g. $y = 0, b$, simply supported boundary condition has been assumed.

The edge $x = 0$ is supposed to be free from mechanical stresses and reinforced with rib, which is modeled as an elastic beam. On this edge, the following boundary conditions are applied

$$-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = A_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right),$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = D_0 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(D_{12} + 4D_{66}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + D_0 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$$

Herein, A_0 and D_0 are the twist and bending stiffness of the beam, respectively.

As a limiting case, if the plate is semi-infinite, the attenuation (localization) condition for the out of plane displacement at $x \to \infty$ is assumed as $\lim\limits_{x\to\infty} w(x,y,t) = 0$

The necessary and sufficient condition of the existence of localized waves is found as

$$\gamma\beta\lambda_n^2 + \gamma\lambda_n\sqrt{2(\alpha_2 + \alpha_3)} - \alpha_1^2 < 0 \tag{5}$$

$$\alpha_1 = \frac{D_{22}}{D_{11}}, \qquad \alpha_2 = \frac{D_{12}}{D_{11}}, \qquad \alpha_3 = \frac{2D_{66}}{D_{11}}, \qquad \beta = \frac{A_0}{D_{11}}, \qquad \gamma = \frac{D_0}{D_{11}};$$

$$\lambda_n = \pi n/b, \qquad n = 1,2,3.....$$

Without a rib, i.e. $\gamma = \beta = 0$, the condition (5) always hold, while the presence of a rigid rib can eventually eliminate the localized wave if $\gamma\beta\lambda_n^2 + \sqrt{2}\gamma\lambda_n - \upsilon^2 < 0$.

On the other hand, for isotropic plate with rectangular square cross section rib the condition (5) can be written as

$$\frac{n^2\pi^2a^8}{b^2h^6}\left(\frac{E_0}{E}\right)^2+\frac{\sqrt{2}\left(1-\upsilon^2\right)n\pi na^4}{bh^3}\frac{E_0}{E}-\left(1-\upsilon^2\right)^2\upsilon^2<0$$

and the localized waves can be eliminated if

$$\frac{\pi a^4}{bh^3}\left(\frac{E_0}{E}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\upsilon^2\right)\left(\sqrt{1+2\upsilon^2}-1\right).$$

Effect of the stiffness and inertia of a rib reinforcement on localized bending waves in semi-infinite strips [10]

The problem of localized bending waves in an elastic semi-infinite plate with a rib reinforcement has been analyzed. The mathematical conditions for the existence of the waves have been derived from the equation of motion. In particular, the effects of inertial and elastic terms in the rib have been separately investigated, leading to an interesting duality. With such a configuration, the existence of localized bending waves for a massless rib reinforcement does not depend on the inertial properties of the strip. On the other hand, if only the inertia contributions of the rib are taken into account, the flexural stiffness of the strip plays no role. Results for several cross-sections and a typical aluminum alloy material have presented. Analyzing the changes in the dimensionless frequencies of the waves, it has been found that – for a circular and square cross sections – there exists a particular dimension for which the edge waves are equivalent to the edge waves occurring without any reinforcement. From the investigation of the regions of existence of the waves it appeared that the elastic contributions due to the rib are predominant compared to their inertial ones, at least for this problem. Furthermore, stiffer strips have been found to require smaller reinforcements to suppress their edge wave.

Localised vibrations of membrane cylindrical shell [11,12]

The problem of localized vibration has been studied in an elastic cylindrical shell using the equations of shell membrane theory. The shell has one edge which is traction free, while three different boundary conditions are considered on the other edge, namely, a clamped edge condition, and the Navier and anti-Navier boundary conditions. The corresponding dispersion equations have been obtained and analyzed to assess the existence of a localized vibration at the free-edges. For all boundary condition cases the qualitative behavior of dispersion curves is very similar for the selected values of the Poisson ratios. However, it is observed that the frequency decreases when the shell length increases, reaching asymptotic values more rapidly for higher wave numbers. It has also been shown that there are no qualitative differences between results of shells under Navier and anti-Navier edge conditions. For the case of a shell with a traction free edgeand clamped edge there is a minimum value of shell length/shell radius ratio where the localized vibration does not occur. In addition, for the shells with traction free edge/Navier and traction free edge/anti-Navier boundary conditions it is shown that localized vibrations occur for any shell length.

A cylindrical shell of length L , R radius of shell middle surface and thickness h (Fig.3) is considered next.

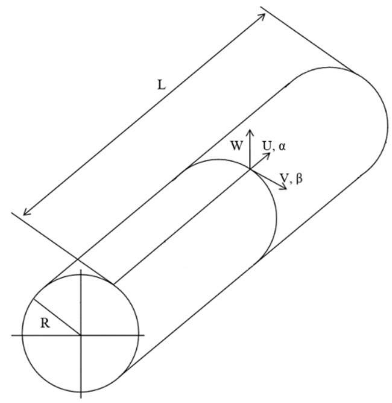


Fig.3 Cylindrical shell middle surface

The equations of motion and constitutive elastic law of cylindrical membrane shell are as follows

$$\Delta U+\theta_0\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+\frac{2v}{(1-v)R}\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\Delta V+\frac{\theta_0}{R}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+\frac{2}{(1-v)R^2}\frac{\partial W}{\partial\beta}=\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad (6)$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{W}{R}+v\frac{\partial U}{\partial\alpha}=-\frac{\rho Rh}{C}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

Here $C=Eh\left(1-v^2\right)^{-1}$, ρ is the bulk density, E is Young's modulus, G is the shear modulus, v is the Poisson's ratio of the shell material, h is the shell thickness, U is the axial displacement along the generator, V is the circumferential displacement in the direction of the profile of the middle surface and W is the radial displacement normal to the middle surface, $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$, $c_t^2=\frac{G}{\rho}$, $\theta_0=\frac{1+v}{1-v}$,

When $\theta^{-1}n^{-2}<\eta^2<1$ the modes of all solutions of Eq. (6) have attenuated, non periodic, forms.

In the case of the boundary conditions of the clamped and traction free shell the particular case when the effect of bending deformation is negligible, namely when $\gamma=0$, the dispersion equation has the form

$$4\left(2-\eta^2\right)^2\sqrt{s_1 s_2}+\left[4s_1 s_2+\left(2-\eta^2\right)^2\right]\sinh\left(kp_1L\right)\sinh\left(kp_2L\right)-$$
$$-\left[1+\left(2-\eta^2\right)^2\right]\sqrt{s_1 s_2}\cosh\left(kp_1L\right)\cosh\left(kp_2L\right)=0 \qquad (7)$$

where

$$p_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2\left(1-v^2\gamma\right)}}\left[s_1+s_2-\gamma s_3\pm\sqrt{\left(s_1+s_2-\gamma s_3\right)^2-4\left(1-v^2\gamma\right)s_1\left(s_2-\gamma\right)}\right]^{1/2}$$

$$\theta=\frac{1-v}{2},\eta^2=\frac{\omega^2}{k^2c_t^2},\ k=\frac{n}{R},\ s_1=1-\eta^2,s_2=1-\theta\eta^2,$$

$$s_3=2-v^2\eta^2,\gamma=\left(1-\theta n^2\eta^2\right)^{-1}$$

Herein ω is the circular frequency.
In the limit $\eta\to 1$ one can find

$$4\sqrt{1-\theta}+kL\sinh\left(kL\sqrt{1-\theta}\right)-2\sqrt{1-\theta}\cosh\left(\sqrt{1-\theta}\,kL\right)=0$$

which determines the critical length of shell $r_0=kL$, beyond which the localisation, edge resonance, occurs.

Taking into account that edge resonance take placeat $kL>>1$, the following condition for critical length is found

$$kL>2\sqrt{1-\theta}\ \ or\ \ L/R>2\sqrt{1-\theta}\ /\ n$$

In the general case when the effect of bending deformation is not negligible $\gamma\neq 0$, for sufficient long shell $r_0=kL$ the critical length of shell $r_0=kL$ is determined from the condition

$$r_0=\frac{2p_0^2\left(1-v^2\gamma_0\right)+1+v-2v\gamma_0}{\left(1+v-2v\gamma_0\right)p_0}\left\{1-v^2\gamma_0+\frac{\left(1-\gamma_0\right)v}{1-\theta-\gamma_0}\left[1-\theta-\left(2-v^2\right)\gamma_0\right]\right\}$$

where $p_0=\left[\dfrac{1-\theta-\gamma_0\left(2-v^2\right)}{2-\left(1-v^2\gamma_0\right)}\right]^{1/2}$, $\gamma_0=\dfrac{1}{1-\theta n^2}$

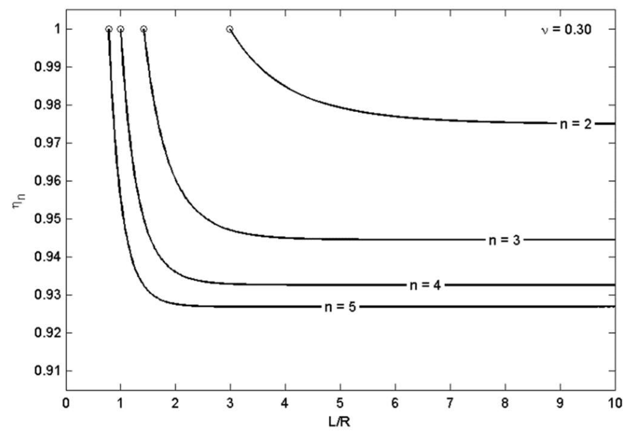


Fig.4 Dimensionless frequency η_n vs. L/R of the shell
with traction free and clamped edges

From the dispersion curves, according to the wave number *n*, there is a minimum value of L/R under which localized waves do not take place. These values are reported in Table 1.

$(L/R)_{\min}$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	
$\nu=0.20$	2.5970	1.3061	0.9246	0.7232
$\nu=0.25$	2.7848	1.3618	0.9602	0.7501
$\nu=0.30$	2.9872	1.4169	0.9947	0.7758
$\nu=0.35$	3.2083	1.4712	1.0279	0.8005

Table 1. Minimum values for L/R for the existence of localized waves
corresponding to shell with traction free and clamped edges

The bending edge waves in an infinite elastic plate reinforced with rib

An infinite homogeneous elastic plate reinforced with inclusion, defined as an elastic rib, is considered next (Fig.5). The solutions for the edge wave attenuation due to the inclusion is to be found.

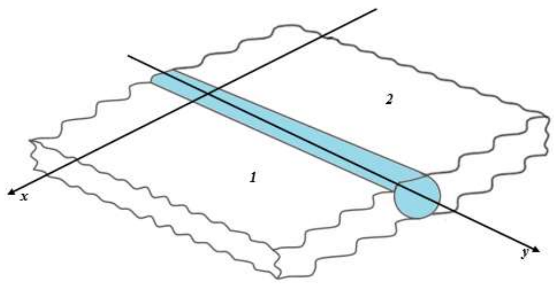


Fig.4 .Homogeneous elastic plate reinforced with an elastic rib .

The equations of plate vibration in $x > 0, s = 1$ and regions are

$$D\left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial y^2}\right)+2\rho h\frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \qquad s=1,2$$

$$\eta=\frac{\omega}{k^2}\sqrt{\frac{2\rho h}{D}};\; p=\sqrt{1-\eta};\; q=\sqrt{\eta+1}; \tag{8}$$

Solutions of Eq. (8) attenuated at $x \to \pm\infty$ can be written as

$$w_1=\left(C_1\exp\left[-kpx\right]+C_2\exp\left[-kqx\right]\right)\exp\left[i\left(ky-\omega t\right)\right];$$
$$w_2=\left(C_3\exp\left[kpx\right]+C_4\exp\left[kqx\right]\right)\exp\left[i\left(ky-\omega t\right)\right];$$

Boundary conditions at $x = 0$ can be written as

$$D_0\left(\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)+\upsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(w_1-w_2\right)\right)+G_0 I_t\frac{\partial^3 w_2}{\partial x\partial y^2}-\rho_0 I_p\frac{\partial^3 w_2}{\partial x\partial t^2}=0$$
$$D_0\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}\left(w_1-w_2\right)+\left(2-\upsilon\right)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\left(w_1-w_2\right)\right)+E_0 J\frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4}+\rho_0 S\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}=0 \tag{9}$$

$$\left(w_1-w_2\right)=0;\; \frac{\partial}{\partial x}\left(w_1-w_2\right)=0$$

Here G_0, ρ_0, are shear modulus, bulk density of the rib material, I_t, I_p, J, S are cross-sectional torsional moment of inertia, cross-sectional polar moment of inertia, cross-sectional bending moment of inertia, cross-sectional area of the rib, correspondingly.

Substituting Eq. (10) into boundary conditions anhomogeneous set of algebraic equations can be found. These will have arbitrary constants, namely C_1, C_2, C_3, C_4. Equating the determinant of the set of equations to zero, the dispersion equations expressed in terms of the dimensionless frequency η can be found dispersion equations

$$\left(GI_t k^2 + 2Dk\left(p+q\right) - I_p \rho_0 \omega^2\right) = 0$$

$$\left(E_0 J k^4 + 2Dk^3 pq\left(p+q\right) - S\rho_0 \omega^2\right) = 0$$

The first equation can be rewritten in dimensionless notations as

$$\theta + \sqrt{1+\eta} + \sqrt{1-\eta} - \beta\eta^2 = 0;$$

$$\theta = \frac{G_0 I_t k}{2D}; \beta = \frac{I_p k^3 \rho_0}{4h\rho};$$

This equation has a solution $\eta < 1$ corresponding to the localized wave if $\beta > \sqrt{2} + \theta$
The second equation can be rewritten as

$$\alpha + \sqrt{1-\eta^2}\left(\sqrt{1-\eta} + \sqrt{1+\eta}\right) - \vartheta\eta^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{E_0 J k}{2D}; \vartheta = \frac{kS\rho_0}{4h\rho}$$

For this equation the solution of the localized wave exists if $\vartheta > \alpha$.
From these localization conditions it follow that the rib inertia terms $S\rho_0$ and $\rho_0 I_p$ provide the existence of localized bending waves in plate.

The bending edge waves in a bi-material compound plates

Two semi-infinite plates of the same material (extend between $a \le y < \infty$ and $-\infty < y \le -a$) reinforced by elastically bonded finite plate of other material ($y < |a|$) are considered next. The finite plate is distinguished by an index (0) (Fig.5).

$$D_s\left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2}\right) + 2\rho_s h \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} = 0; s = 0,1,2 \qquad (10)$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho; \quad D_1 = D_2 = D; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu$$

$$p = \sqrt{1-\eta}; \; q = \sqrt{1+\eta}; \; \eta = \frac{\omega}{k^2}\sqrt{\frac{2\rho_0 h}{D_0}};$$

Here w_s is the plate middle surface normal displacement, D_s are plate flexural rigidities, ρ_s are bulk densities of plate materials, $2h$ plate thickness.

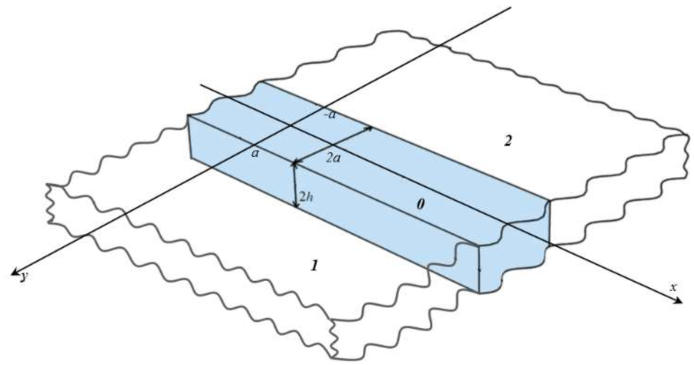


Fig.5 Semi-infinite plates of the same material (extend between $a \le y < \infty$ and $-\infty < y \le -a$) reinforced by elastically bonded finite plate

Solutions of (1) can be written as

$$w_0 = w(y)\exp\left[i(kx-\omega t)\right]; \quad y \in (-a,a)$$

$$w_1 = \left(B_1 \exp\left[-kp(y-a)\right] + B_2 \exp\left[-kq(y-a)\right]\right)\exp\left[i(kx-\omega t)\right]; y \in (a,\infty)$$

$$w_2 = \left(A_1 \exp\left[kp(y+a)\right] + A_2 \exp\left[kq(y+a)\right]\right)\exp\left[i(kx-\omega t)\right]; y \in (-a,-\infty)$$

The condition $\eta < 1$ condition prescribes wave attenuation at $y \to \pm\infty$.
The following continuity conditions apply

$$w_1 = w_0, \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} \qquad y = a; \qquad (11)$$
$$M_1 = M_0, N_1 = N_0;$$

$$w_2 = w_0; \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}; \quad y = -a; \qquad (12)$$
$$M_2 = M_0 \;; N_2 = N_0$$

$$M_s = D_s\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \upsilon_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right); N_s = D_s\left(\frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} + (2-\upsilon_s)\frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial x^2}\right)$$

Herein M_s, N_s are stress couples and generalized normal stress resultants, and υ_s are Poisson ratios of plate materials, respectively.

Substituting w_1 and w_2 into the first row of boundary conditions (11) and (12) one obtains

$$B_1 = -\frac{kqw(a)+w'(a)}{k(p-q)}, \qquad B_2 = \frac{kpw(a)+w'(a)}{k(p-q)}$$
$$A_1 = -\frac{kqw(-a)-w'(-a)}{k(p-q)}, \quad A_2 = \frac{kpw(-a)-w'(-a)}{k(p-q)}; \tag{13}$$

Substituting w_1 and w_2 into second row of boundary conditions (11) and (12) and using (13) the boundary conditions at middle plate edges $y = \pm a$ canbe found:

$$k^2(pq\gamma+\gamma\upsilon-\upsilon_0)w(a)+k(p+q)\gamma w'(a)+w''(a)=0$$
$$k^3pq(p+q)\gamma w(a)+k^2\left(2-\upsilon+\gamma\left(-2+p^2+pq+q^2+\upsilon\right)\right)w'(a)-w'''(a)=0$$
$$k^2(pq\gamma+\gamma\upsilon-\upsilon_0)w(-a)-k(p+q)\gamma w'(-a)+w''(-a)=0,$$
$$k^3pq(p+q)\gamma w(-a)-k^2\left(2-\gamma\left(2-p^2-pq-q^2-\upsilon\right)-\upsilon_0\right)w'(-a)+w'''(-a)=0$$

$$\gamma = D/D_o; \qquad (\ )' = \frac{d}{dy}$$

The equation of middle plate and boundary conditions leads to the separate anti-symmetric or symmetric solutions:

Anti-symmetric solution

$$w(x) = c_1 \sin(kp_0 y) + c_2 \sinh(kq_0 y); \tag{14}$$

$$p_0 = \sqrt{\eta_0 - 1}; \qquad q_0 = \sqrt{\eta_0 + 1}; \ \eta_0 = \frac{\omega}{k^2}\sqrt{\frac{2\rho_0 h}{D_0}};$$

Substituting Eq. (14) into boundary conditions an homogeneous set of algebraic equations, with respect to the arbitrary constants can be found. Equating the determinant of the set of equations to zero, the following dispersion equation determining frequency ω is also found:

Dispersion equation

$$q_0\left(s+p_0^2f+q_0^2g-p_0^2q_0^2\right)\mathrm{tg}(akp_0)-p_0\left(s-p_0^2g-q_0^2f-p_0^2q_0^2\right)\mathrm{th}(akq_0)+$$
$$+\gamma(p+q)\left(p_0^2+q_0^2\right)\left(p_0q_0+pq\,\mathrm{tg}(akp_0)\,\mathrm{th}(akq_0)\right)=0 \tag{15}$$

By the same way we can obtain the dispersion equation for symmetric solution

$$w(y)=c_3\cos(kp_0y)+c_4\cosh(kq_0y);$$

Dispersion equation

$$q_0\left(s+p_0^{\ 2}f+q_0^{\ 2}g-p_0^{\ 2}q_0^{\ 2}\right)\mathrm{th}(akq_0)+p_0\left(s-p_0^{\ 2}g-q_0^{\ 2}f-p_0^{\ 2}q_0^{\ 2}\right)\mathrm{tg}(akp_0)+$$

$$+pq(p+q)\left(p_0^{\ 2}+q_0^{\ 2}\right)\gamma-p_0q_0(p+q)\left(p_0^{\ 2}+q_0^{\ 2}\right)\gamma\,\mathrm{tg}(akp_0)\,\mathrm{th}(akq_0)=0 \quad (16)$$

In (15,16) the following notations are used

$$s=-(\gamma\upsilon-\upsilon_0)\left(2+\gamma\left(-2+q^2+\upsilon\right)-\upsilon_0\right)+$$

$$+2pq\gamma(-1+\gamma-\gamma\upsilon+\upsilon_0)+p^2\gamma\left(q^2\gamma-\gamma\upsilon+\upsilon_0\right);$$

$$f=\left(2+\gamma\left(-2+p^2+pq+q^2+\upsilon\right)-\upsilon_0\right);g=pq\gamma+\gamma\upsilon-\upsilon_0$$

The numerical analysis of dispersion equations (15,16), can provide practical recommendations. Two types of compound plate materials will be considered, namely $\rho_0/D_o\geq\rho/D$ and $\rho_0/D_o<\rho/D$.

Conclusions

This paper offers a detailed review of the authors' published investigations pertaining to localized magnetoelastic bending vibration of an electroconductive elastic plate, edge bending waves in orthotropic plate and isotropic strip reinforced by a rigid rib and localized vibration of cylindrical membrane shells. The authors also present new analytical results concerning bending wave localization at inclusion in infinite homogeneous plate modelled as beam or plate.

References

1. Y.K. Konenkov, "A Rayleigh-type flexural wave," Acoustic Journal, 1960, Vol. 6, No. 1, pp. 122-123 (in Russian).
2. J. McKenna, G.D. Boyd, R.N. Thurston, "Plate theory solution for guided flexural acoustic waves along the tip of a wedge," IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, 1974, Vol. 21, pp. 178-186. https://doi.org/10.1109/T-SU.1974.29812
3. R.N. Thurston, J. McKenna, "Flexural acoustic waves along the edge of a plate," *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, 1974, Vol. 21, pp. 296–297. https://doi.org/10.1109/T-SU.1974.29830
4. M.V. Belubekyan, "The Problems of Plates Localized Instability," Proc. of Int. Conf. "Optimal Control, Stability and Durability Problems of Mechanical Systems. Yerevan, 1997, pp. 95-99 (in Russian).
5. A.Y. Ishlinskii, "On a limiting process in the theory of the stability of elastic rectangular plates," DokladyAkademiiNauk, 1954, Vol. 95, pp. 477-479 (in Russian).

6. G.T.Piliposian, M.V. Belubekyan, and K.B. Ghazaryan. "Localized bending waves in a transversely isotropic plate." Journal of Sound and Vibration, 329, 17, 2010, p. 3596-3605.doi:10.1016/j.jsv.2010.03.019
7. G.T. Piliposian, K.B. Ghazaryan, “Localized bending vibrations of piezoelectric plates,” Journal Waves in Random and Complex Media, 2011, Vol. 21, No. 3, pp. 418-433. https://doi.org/10.1080/17455030.2011.576712
8. M. Belubekyan, K. Ghazaryan, P. Marzocca, C. Cormier, “Localized Magnetoelastic, Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate,” Journal of Applied Mechanics, 2007, Vol. 74, pp. 1071-1076.https://doi.org/10.2514/6.2006-2110
9. M. Belubekyan, K. Ghazaryan, P. Marzocca, C. Cormier, “Localized Bending Waves in a Rib-Reinforced Elastic Orthotropic Plate,” Journal of Applied Mechanics, 2007, Vol. 74, pp.169-171.https://doi.org/10.1115/1.2165242
10. A. Milanese, P. Marzocca, M. Belubekyan, K. Ghazaryan, “Effect of the stiffness and inertia of a rib reinforcement on localized bending waves in semi-infinite strips,” International Journal of Solids and Structures, 2009, Vol. 46, pp. 2126-2135. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.08.004
11. M. Belubekyan, K. Ghazaryan, A. Vardanov, A. Milanese, P. Marzocca, “Localized Vibrations Near the Free-edge of a Cylindrical Shell,” Proceedings of 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA Publishing, Washington DC, 2008, pp.1874-1876
12. M. Belubekyan, K. Ghazaryan, P. Marzocca. "Localised membrane vibration of cylindrical shells." The Journal of the Acoustical Society of America 141,3 (2017): p.1947-1952. https://doi.org/10.1121/1.4978525

Information about authors

Karen Ghazaryan ,Professor ,Principal Researcher, Institute of Mechanics National Academy of Sciences, Armenia,
Email : ghakrren@gmail.com

Pier Marzocca, Professor, Director, Sir Lawrence WackettDefence and Aerospace Centre,RMIT University, Australia,
Email:pier.marzocca@rmit.edu.au

Received 07.03.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика

УДК 539.3

Doi:10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-163

ON THE DERIVATION OF A STRING EQUATION

Kaplunov J., Prikazchikov D.A.

Keywords: string equation, asymptotic methods, mathematical rigour.

Каплунов Ю.Д., Приказчиков Д.А.

К вопросу о выводе уравнения струны.

Ключевые слова: уравнение струны, асимптотические методы, математическая строгость.

В работе пересматривается вывод классического волнового уравнения, описывающего поперечные колебания упругой струны. Предлагаемый подход базируется на математически корректном применении второго закона Ньютона в случае малого участка струны. Помимо этого, приводится асимптотическое решение плоской задачи теории упругости для предварительно деформированной полосы. Показано, что обсуждаемое одномерное волновое уравнение соответствует главному длинноволновому низкочастотному приближению двумерного решения. В то же время, в следующем приближении уравнение движения струны уже не является гиперболическим, вследствие появления дисперсионного члена с четвертой производной.

Կապլունով Յու. Դ, Պրիկազչիկով Դ.Ա.

Լարի հավասարման արտածման մասին

Հիմնաբառեր՝ լարի հավասարում, ասիմպտոտիկ մեթոդ, մաթեմատիկական խստություն:

Աշխատանքում վերանայվում է լարի լայնական տատանման կլասիկ հավասարումների արտածումը: Առաջարկվող մոտեցումը հիմնվում է լարի փոքր տեղամասում Նյուտոնի երկրորդ օրենքի մաթեմատիկորեն խիստ կիրառման վրա: Բացի այդ բերվում է նախօրոք դեֆորմացված շերտի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը: Ցույց է տրված, որ քննարկվող միաչափ ալիքային հավասարումը համապատասխանում է երկչափ լուծման ցածր հաճախության մոտարկմանը: Միևնույն ժամանակ հաջորդ մոտարկման լարի շարժման հավասարումը արդեն հիպերբոլիկ չէ, չորրորդ ածանցյալով դիսպերսիոն անդամի առաջացման պատճառով:

The traditional derivation of the wave equation for an elastic string is revised. The focus is on a rigorous implementation and subsequent analysis of the Second Newton's Law adapted for a small string element. Asymptotic treatment of the plane strain problem for a pre-stressed elastic strip shows that the 1D classical wave equation corresponds to the leading order long-wave low-frequency approximation. At the same time, the next order approximation is not given by a hyperbolic equation supporting a dispersive transverse motion.

Introduction. An elastic string is seemingly the most popular example in the textbooks on PDEs and mathematical physics, see e.g. [1,2,3,4], illustrating the derivation of the canonical hyperbolic wave equation. At the same time, even the best mathematicians, e.g. see the correspondence between A.D. Myshkis and O.A. Oleynik [5], are not quite comfortable with string analysis. Apparently, the point is that the underlying physical framework, including the assumption on a prescribed uniform tension, with its orientation varying in time and space, as well as peculiarities of the implementation of anintegral form of the Second Newton's Law, needs to be fully appreciated. It is also worth noting that the famous introductory texts on linear elasticity, see e.g. [6-9] usually do not consider a string, which is governed by a more elaborated linearized theory for pre-stressed elastic solids. On other hand, more specialized applied books on elastic waveguides, e.g. [10,11] oftenlack a mathematical rigour when dealing with a string.

Another fundamental issue is that a string as a physical object has a small but finite thickness, similarly to thin elastic rods, plates and shells. For the latter, the equations of motion are always established by the reduction of the original 3D equations of motion to lower dimensional models, e.g. see [12,13]. For a string, such reduction was developed for plane-strain deformation [14] and later extended to a membrane in [15]. The cited papers start from linearized equations for pre-stressed incompressible elastic solids [16].

Below we start from the “exact” formulation (within 1D context) of the equation of motion for a small string element. All the steps of the limiting process, including the evaluation of the curvilinear integral associated with the inertial term using the mean value theorem, are addressed in detail. In this case, the linearization leading to the sought for wave equation is performed at the very last stage.

In addition, we presenta brief revisit of the string problem, along with the lines of the consideration in [14]. It is demonstrated that the classical wave equation in case of a string is just the leading order long-wave low-frequency approximation of the associated plane-strain problem. A dispersive term with fourth-order derivative, arising at next order, enables smoothening the discontinuity at the characteristics of the leading order hyperbolic operator.

1. One-dimensional derivation. First, consider a traditional 1D model in the variables x and t, assuming that the tension T is uniform, and is always oriented along the tangent to the string profile given by the function $u = u(x, t)$. Another problem parameter is mass density per unit length ρ. Consider a small but finite string element of length Δx, see Fig. 1, where $\theta(x, t)$ is the angle formed by the tangent with the horizontal axis x. The element is assumed to be stretched by the tension T at its ends.

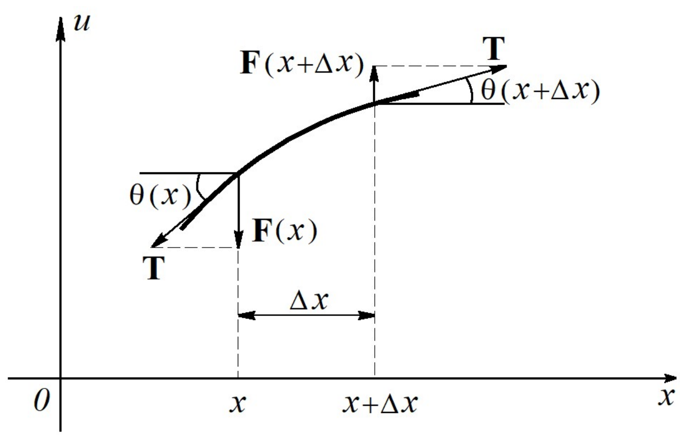


Fig. 1. String element under tension.

According to the Second Newton's Law, the equation of transverse motion of the chosen string element is given by

$$\Delta F = \rho \int_C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ds, \tag{1}$$

where C is the curve in (x, u) coordinate frame defined by $x \leq \xi \leq x + \Delta x$, with

$$\Delta F = F(x + \Delta x, t) - F(x, t) = T\{sin(\theta(x + \Delta x, t)) - sin(\theta(x, t))\}. \tag{2}$$

Here we emphasize that the tension T is the only force arising in the string. At the same time, its vertical projection varies in space and time, supporting transverse wave propagation.

The inertial term in (1) is expressed through a curvilinear integral of the first kind over the line segment of the string profile, hence we have from (1) and (2)

$$T\{sin(\theta(x + \Delta x, t)) - sin(\theta(x, t))\} = \rho \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi}\right)^2} d\xi. \tag{3}$$

The formulation (3) is exact within the current 1D setup. To the best of authors' knowledge, this equation specifying the Second Newton's Law for a string does not usually appear in standard textbooks [1,2,11].

Let us simplify this equation for small Δx, assuming for the sake of definiteness that the function $u = u(x, t)$ is twice differentiable in x and t. First, we have in the left hand side of (3)

$$\Delta F = 2Tsin\left(\frac{\theta(x + \Delta x, t) - \theta(x, t)}{2}\right) cos\left(\frac{\theta(x + \Delta x, t) + \theta(x, t)}{2}\right)$$

$$\approx 2Tsin\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}\Delta x\right) cos(\theta(x, t)) \approx T\Delta x \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} cos(\theta(x, t)). \tag{4}$$

Here we neglected the quantities of order $O((\Delta x)^2)$, since the function $\theta(x, t)$ is differentiable with respect to x.

Now recall that

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{5}$$

according to the definition of the tangent. Then, we have in the right hand side of (4)

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)^{-1}, \quad \text{and} \quad cos\theta = \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2}. \tag{6}$$

As a result,

$$\Delta F \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \Delta x \tag{7}$$

Next, we have from the right hand side of (3), using the mean value theorem

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right)^2}\, d\xi = \left[\frac{\partial^2 u(x',t)}{\partial t^2}\left(1+\left(\frac{\partial u(x',t)}{\partial x'}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Delta x \approx$$

$$\approx \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\left(1+\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Delta x, \tag{8}$$

where $x' = x + \eta\Delta x,\ 0 < \eta < 1$. On substituting (7) and (8) into (3), we obtain a nonlinear equation given by

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}, \tag{9}$$

where $c^2 = T/\rho$ is the conventional squared speed within the string.

Finally, assuming the displacement gradient is small, i.e. $|\partial u/\partial x| \ll 1$, we obtain the classical linear equation of string motion

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{10}$$

2. Asymptotic derivation in two-dimensional case. We start from plane-strain equations for a pre-stressed, incompressible elastic strip $-\infty < x < \infty,\ -h \le y \le h$, see Fig. 2,

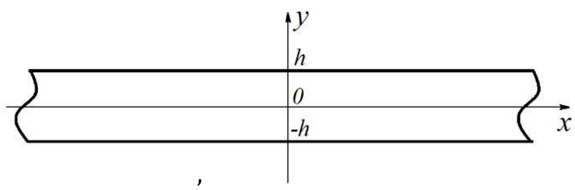


Fig. 2. Schematic of an elastic strip.

written in a symbolic form as

$$L[\boldsymbol{u}] = \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}, \tag{11}$$

where L is a 2x2 second order matrix linear differential operator and $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ is the displacement vector, satisfying the linearized measure of the incompressibility condition $\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0$. Here and below see [14] for more specific details. The pre-stress is assumed to be in the form of horizontal tension T, uniform across the strip thickness. It should be noted that the parameters T and ρ have different dimensions than their counterparts in Section 1, which however does not affect the observations in the paper.

The homogeneous boundary conditions at traction-free faces $y = \pm h$ are given by

$$l_i[\boldsymbol{u}] = 0, \quad i = 1,2, \tag{12}$$

where l_i are appropriate first-order differential operators.

Consider long-wave low-frequency motion of the strip, for which

$$x = \lambda\xi_1,\ \ y = h\xi_2,\ \ t = \frac{\lambda\tau}{c}, \tag{13}$$

where $\lambda-$ typical wave length, $c = \sqrt{T/\rho}$. Here the ratio $\eta = h/\lambda \ll 1$ is assumed to be small. Next, the displacements are expanded into asymptotic series in terms of this parameter as

$$u_1 = \eta \sum_{i=0}^{\infty} u_{1i}\eta^{2i}, \qquad u_2 = \sum_{i=0}^{\infty} u_{2i}\eta^{2i}. \tag{14}$$

On substituting these series into the equations of motion and boundary conditions (11), (12), and the aforementioned incompressibility condition, expressed in the dimensionless variables$\xi_1, \xi_2$and τ, we arrive at leading order to the wave equation (10), for $u = u_{20}$. Thus, 1D approach exposed in the previous section appears to be asymptotically justified.

At next order, we have for $u = u_{20} + \eta^2 u_{21}$ a refined equation given by

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{c^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{\delta}{T}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \tag{15}$$

in which the coefficient at senior derivative cannot be expressed only through the basic problem parameters T and ρ, but also involves a more specific characteristic of pre-stress, denoted for brevity by δ. The presence of such fourth-order dispersive term results in smoothening of the discontinuities predicted by the classical string equation (10). In this case, depending on the sign of the coefficient, the associated wave front can be either receding ($T > 3\delta$) or advancing ($T < 3\delta$), e.g. see Fig. 3 a) and b), respectively.

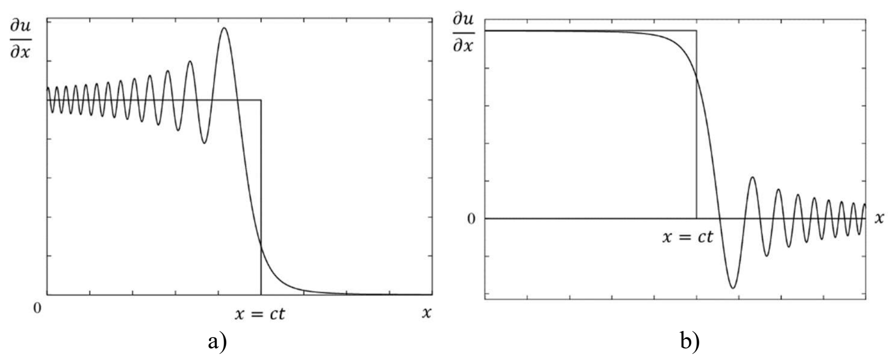


Fig. 3. Dispersive behaviour near the wave front $x = ct$: a) receding; b) advancing.

3. Concluding remarks. The 1D derivation presented in Section 1 starts with a rigorous formulation of the Second Newton's Law within adapted physical assumptions. Each step of the limiting process, as the size of the chosen string element tends to zero, is addressed in detail. Nevertheless, the initially nonlinear problem for a string does not seem to be the best example for illustrating the derivation of the wave equation. In particular,a simpler problem for the longitudinal waves in an elastic rod looks more preferable. Indeed, the latter does not involve relatively elaborated geometrical consideration, along with a nontrivial hypothesis regarding uniform tension tangent to the string profile, but operates with a lucid Hooke's Law instead.

The 2D analysis in Section 2 demonstrates that the fundamental wave equation (10) is not exact, but corresponds to a specific leading order long-wave approximation for transverse low-frequency motion for a thin pre-stressed elastic strip. In this case, the refined equation (15) involves a term with a fourth-order derivative resulting in dispersive wave propagation.

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics.// Courier Corporation. – 2013.
2. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics //Moscow, Nauka. – 1976.
3. Sveshnikov A.G., Bogolyubov, A.N., Kravtsov V.V. Lectures on mathematical physics // Moscow, Moscow State University. – 2004.
4. Petrovsky I.G. Lectures on partial differential equations. – Courier Corporation, 2012.
5. Myshkis A.D. Soviet Mathematicians: My Memories //Editorial LKI, Moscow. – 2007.
6. Nowacki W. Theory of elasticity //M.: Mir. – 1975.
7. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. – Cambridge university press, 2013.
8. Amenzade Y.A. Theory of elasticity // M.: Mir. – 1979.
9. Filonenko-Borodich M.M. Elasticity theory //Gostekhteorizdat, Moscow. – 1959.
10. Graff K.F. Wave motion in elastic solids. – Courier Corporation, 2012.
11. Coulson C.A. Waves-A mathematical account of the common types of wave motion //University of Oxford, England, Oliver and Boyd Interscience Publishers Inc., Edinburgh, Scotland. – 1955.
12. Gol'denveizer A.L. Theory of elastic shells // Elsevier – 2014.
13. Ambartsumyan S.A. General Theory of Anisotropic Shells// M.:Nauka. – 1974.
14. Kaplunov J.D., Nolde E.V., Rogerson G.A. A low-frequency model for dynamic motion in pre-stressed incompressible elastic structures //Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2000. – T. 456. – №. 2003. – C. 2589-2610.
15. Pichugin A.V., Rogerson G.A. An asymptotic membrane-like theory for long-wave motion in a pre-stressed elastic plate //Proc. of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.–2002. – T. 458. – №. 2022. – C. 1447-1468.
16. Ogden R.W. Nonlinear elastic deformations //Dover, Mineola. – 1984.

Information about authors

Kaplunov Julius – PhD, DSc, Fellow Eur ASc, Professor in Applied Mathematics, School of Computer Science and Mathematics, Keele University
Email: j.kaplunov@keele.ac.uk

Prikazchikov Danila Alexandrovich – PhD, Reader in Applied Mathematics, School of Computer Science and Mathematics, Keele University
Email: d.prikazchikov@keele.ac.uk

Received 28.02.2022

ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, № 1-2, 2022 Механика

УДК 62-50 Doi-10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-169

A HYDRODYNAMIC THRUST BEARING LUBRICATED BY A NON-NEWTONIAN GIESEKUS FLUID

Ilya I. Kudish, Sergei S. Volkov, Andrey S. Vasiliev

Keywords: fluid with non-Newtonian nonlinear Giesekus model, hydrodynamic lubrication problem for a thrust bearing, perturbation analysis, analytical approximate solution

И.И.Кудиш, С.С.Волков, А.С.Васильев

Гидродинамический упорный подшипник, смазываемый неньютоновской жидкостью Гизекуса

Ключевые слова: жидкость с неньютоновской нелинейной моделью Гизекуса, гидродинамическая задача смазки упорного подшипника, анализ методом возмущений, аналитическое приближенное решение

Существует огромный объем исследований гидродинамических и упругогидродинамических задач смазки для смазок с ньютоновской реологией. Смазочные материалы с ньютоновской реологией не проявляют обычно наблюдаемого экспериментального поведения относительно высокой вязкости при низких напряжениях и относительно низкой вязкости при высоких напряжениях. В этой статье мы расширяем ранее проведенный анализ смазочных материалов с неньютоновским поведением Гизекуса для случая моделирования упорного подшипника. Основная цель статьи – получить аналитическое решение для упорного гидродинамического подшипника, смазываемого жидкостью, с реологией Гизекуса. Эта цель достигается тщательным применением методов возмущений. Получено трехчленное приближенное аналитическое решение и проанализирована его зависимость от входных параметров задачи.

Ի.Ի.Կուդիշ, Ս.Ս.Վոլկով, Ա.Ս.Վասիլև

Գիզեկուսի ոչ նյուտոնյան հեղուկով յուղվող հիդրոդինամիկական հենակային առանցքակալ

Հիմնաբառեր՝ Գիզեկուսի ոչ նյուտոնյան ոչ գծային մոդելով հեղուկ, հենակային առանցքակալի յուղման հիդրոդինամիկական նդիր, վերլուծություն գրգռումների եղանակով, մոտավոր անալիտիկ լուծում:

Նյուտոնյան ռեոլոգիայով քսանյութերով հիդրոդինամիկական և առաձգահիդրոդինամիկական յուղման խնդիրների վերաբերյալ գոյություն ունի հետազոտությունների մի հսկա ծավալ: Նյուտոնյան ռեոլոգիայով քսանյութերը չեն ցուցադրում սովորաբար նկատվող փորձարարական վարքագիծ՝ ցածր լարումների դեպքում համեմատաբար բարձր մածուցիկություն և բարձր լարումների դեպքում համեմատաբար ցածր մածուցիկություն: Այս հոդվածում մենք ընդլայնում ենք Գիզեկուսի ոչ նյուտոնյան վարքագծով քսանյութերի մեր նախորդ վերլուծությունը հենակային առանցքակալների մոդելավորման համար: Հոդվածի հիմնական նպատակն է Գիզեկուսի ռեոլոգիայով օժտված հեղուկով յուղված հենակային հիդրոդինամիկական առանցքակալի համար ստանալ անալիտիկ լուծում: Այս նպատակը հասանելի է դառնում գրգռման մեթոդների մանրազննին կիրառմամբ: Ստացված է եռանդամային մոտավոր անալիտիկ լուծում և վերլուծված է դրա կախվածությունը խնդրի մուտքային պարամետրերից:

There exists a huge volume of studies of hydrodynamic and elastohydrodynamic lubrication problems for lubricants with Newtonian rheology. Lubricants with Newtonian rheology do not exhibit the usually observed experimentally behavior of having relatively high viscosity for low stresses and relatively low viscosity for high stresses. In this paper we extend the earlier conducted analysis of lubricants with a non-Newtonian Giesekus behavior for the case of thrust bearing modeling. The main goal of the paper is to obtain an analytical solution for a hydrodynamically thrust bearing lubricated by a fluid with the Giesekus rheology. This goal is achieved by careful application of perturbation methods. A three-term approximate analytical solution is obtained and its dependence on the problem input parameters is analyzed.

Introduction

Over the years the modern automotive industry as well as various bearing and gear setups demand more and more efficient lubrication to reduce friction losses, contact energy losses, and to increase joint fatigue durability. Obviously, even a small increase in lubricated joint efficiency multiplied by millions of cars and lots of other moving mechanisms can be quite significant in reducing emissions, fuel, and material required for joint manufacturing worldwide. Frictional losses are associated with a number of specific components among which are engines, bearings, and gears. Therefore, understanding tribological characteristics of lubricated contacts may help in reducing frictional losses, increasing fluid economy and fatigue durability. There is a large number of papers dedicated to studying hydrodynamic and elastohydrodynamic lubrication contacts with Newtonian lubricants [1] - [25]. These paper cover problems under isothermal and thermal conditions for smooth and textured surfaces etc.

Several decades ago lubrication industry started using formulated lubricants represented by a base stock oils (described by Newtonian rheology) with some polymeric additives. These additives make the rheology of formulated lubricants non-Newtonian. Most of the existing and usually used non-Newtonian lubricant rheologies [26] are linear rheological fluid models such as Maxwell, Jeffrey, various Oldroyd-B models, etc. A review of such models is given in [41]. These models are designed to introduce into consideration an important fluid parameter such as its relaxation time related to the structure of the polymeric additive. Some studies of these kind of lubricating fluids can be found in [27] - [32]. Various elastohydrodynamic and hydrodynamic problems for lubricants with generalized Newtonian rheology were considered in [33, 34]. Some other elastohydrodynamic lubrication problems for functionally graded materials and hydrodynamic problems for solids without coatings, with a single and double coatings and Newtonian lubricants were considered in [35] - [37] and [38] - [40], respectively.

The main defect of these kind of models is their inability to adequately describe fluid rheological behavior for low and high fluid stresses when usually lubricant viscosity approaches to two different limiting values. The rheological fluid model that is free of the just mentioned defect is the Giesekus model [26]. Specifically, besides introducing the fluid relaxation time this model provides for relatively high fluid viscosity at low fluid stresses and relatively low fluid viscosity at relatively high fluid stresses. This model is nonlinear and, therefore, it is much harder to analyze lubrication problems involving lubricants with such a rheology. For a relatively simple case of a Giesekus fluid flow between two parallel flat surfaces is considered in [42, 43].

There is a paper on lubrication of a two-dimensional model of a thrust bearing with a fluid with the Giesekus rheological model [44]. The paper analysis is performed with the help of a perturbation method. However, the paper contains a number of shortcomings. For example, all convective terms in the equations of fluid motion and fluid rheological equations are omitted, Reynolds equations solved are incomplete, the perturbation analysis performed is not consistent in the case when the thrust bearing is of the same order as the Giesekus fluid mobility parameter α, etc. One limiting case of hydrodynamic lubricated contact for the case of two moving rigid cylinders separated by a thin layer of an incompressible lubricant with the Giesekus rheology is considered in [45].

In this paper, the Giesekus rheology is used for modeling friction between one rigid surfaces moving over another rigid surface at rest. The surfaces are separated by a incompressible fluid described by the Giesekus rheology. The problem is analyzed using the regular perturbation method. The approximate solution is obtained in an analytical form. Many applications of perturbation techniques to steady problems can be founded in [46]. Also, it can be applied to dynamic problems, for example see [47].

The paper is organized as following. In the first section, the formulation of the hydrodynamic lubrication problem for a line contact is presented. In the second section, the proper simplification of the rheology equations and the equations of the motion pertinent to the case of steady lubricant flow in a narrow long channel is described. The third and fourth sections are dedicated to obtaining the components of lubricant velocity and derivation of Reynolds equations of different order and their analytical solutions, respectively. Some specific examples of the obtained solution and their analysis are presented in the last section. In particular, some examples of pressure distributions, energy loss etc. are provided.

1 Formulation of the Lubrication Problem

Let us consider a steady plane problem for a lubricated contact modeling a two-dimensional hydrodynamic thrust bearing (see Fig. 1) lubricated by an incompressible non-Newtonian Giesekus fluid [26] with constant viscosity μ and relaxation time λ_1. The coordinate system is introduced in such a way that the $x-$axis is directed along the surface of the rigid runner moving with the linear velocity $\overline{u_1}$ while the $z-$axis is perpendicular to it and directed upward. The $y-$axis is directed in the solids. The fixed rigid pad (the linear velocity of which is $\overline{u_2} = 0$) and the runner are completely separated by the lubrication film. The components of the lubricant velocity are represented by functions $u(x, y, z)$, $v(x, y, z) = 0$, and $w(x, y, z)$. The problem parameters are independent of the coordinate y. The equations of the motion of such a fluid are described by the solvent and additive rheology equations as follows [33, 34]

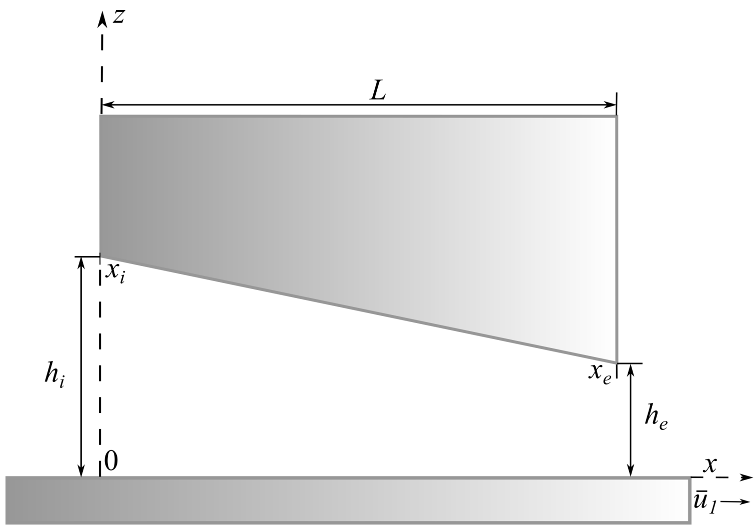


Fig. 1: The general view of a lubricated contact.

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}),$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} = 0, \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}).$$

In addition to that for an incompressible fluid with the fluid density $\rho(x, z) = constant$ we have the continuity equation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{1.2}$$

In this case the stress tensor components are as follows

$$p_{xx} = -p + \tau_{xx},\ p_{xy} = \tau_{xy} = 0,\ \ p_{zx} = \tau_{zx},$$
$$p_{zz} = -p + \tau_{zz},\ p_{zy} = \tau_{zy} = 0, \tag{1.3}$$

where p is the pressure and $\tau_{xx},\ \tau_{xy},\ \tau_{zx},\ \tau_{zz}$, and τ_{zy} are additional stress components acting in the corresponding directions. These tensor components satisfy the Giesekus fluid model which is a nonlinear model and takes into account the degree to which the additive polymeric molecules are aligned with the lubricant flow which is characterized by the mobility parameter $\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq 1$. The rheological equations are as follows [26]

$$\begin{gathered}\tau = \tau_s + \tau_p,\ \mu = \mu_s + \mu_p, \\ \tau_s = \mu_s \dot{\gamma}, \\ \tau_p + \lambda_1 \tau_{p(1)} - \alpha \frac{\lambda_1}{\mu_p} \{\tau_p \cdot \tau_p\} = \mu_p \dot{\gamma},\end{gathered} \tag{1.4}$$

where τ is the full stress tensor while τ_s and τ_p are the solvent and polymer stress tensors, respectively, μ_s and μ_p are the constant solvent and polymer dynamic viscosities, $\dot{\gamma}$ is the deformation tensor [26], and λ_1 is the constant relaxation time.

In (1.4) we used the the definitions of the tensor operators $\tau_{p(1)}$ and $\{\tau_p \cdot \tau_p\}$ from [26].

Assuming that we have no slip and no penetration conditions on the solid surfaces for u and w we have the following boundary conditions on the lubricated surfaces

$$u(x, 0) = \overline{u_1},\ u(x, h(x)) = 0, \tag{1.5}$$

$$w(x, 0) = w(x, h(x)) = 0. \tag{1.6}$$

The gap between the runner and pad is described by the function

$$h(x) = h_i + mx,\ m = \frac{h_e - h_i}{L} < 0,\ m = m_0 \epsilon,\ m_0 = O(1),\ \epsilon \ll 1, \tag{1.7}$$

where L is the actual length of the bearing, h_i and h_e are the gaps between the runner and pad at the inlet and exit from the contact, respectively, and $\epsilon = h_i/L \ll 1$ is a small parameter of the problem.

As outside of the bearing the lubricant pressure is atmospheric which is much lower the pressure in the lubricated contact for pressure p we have the following boundary conditions

$$p(0, z) = p(L, z) = 0. \tag{1.8}$$

It is assumed here that the inlet point in the lubricated contact is located at $x = 0$ while the exit point from the lubricated contact is located at $x = L$.

Our goal is to determine such components of the solution as contact pressure $p(x, z)$, the components of the tensor $\tau(x, z)$ in the fluid and its velocity components $u(x, z)$ and $w(x, z)$. We will find a three-term perturbation solution of the above determined problem in the case when $\epsilon \ll 1$. We will assume that

$$\begin{gathered}\alpha = \alpha_0 \epsilon,\ \alpha_0 = O(1),\ \epsilon = \frac{h_i}{L} \ll 1, \\ \lambda_1 = \lambda \epsilon,\ \lambda = O(1),\ \epsilon \ll 1.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Here α_0 and λ are nonnegative constants. Also, we will assume that

$$Re_0 = \frac{\rho \overline{u_1} h_i}{\mu_*} = O(1),\ \alpha \ll 1, \tag{1.10}$$

were Re_0 is the effective local Reynolds number in the lubricant flow and μ_* is the ambient lubricant viscosity.

2 Asymptotic Analysis of the Rheological and Motion Equations

Let us introduce the following dimensionless variables

$$\lambda_1' = \frac{\overline{u_1}}{L}\lambda_1,\ x' = \frac{x}{L},\ \{z', h_i', h_e'\} = \frac{1}{h_i}\{z, h_i, h_e\},\ p' = p\frac{h_i^2}{\mu_* \overline{u_1} L},$$
$$u' = \frac{u}{\overline{u_1}},\ w' = \frac{w}{U_z},\ \{\mu', \mu_s', \mu_p'\} = \frac{1}{\mu_*}\{\mu, \mu_s, \mu_p\},$$
$$\{\tau_{xx}', \tau_{sxx}', \tau_{pxx}', \tau_{zx}', \tau_{szx}', \tau_{pzx}', \tau_{zz}', \tau_{szz}', \tau_{pzz}'\}$$
$$= \frac{h_i}{\mu_* \overline{u_1}}\{\tau_{xx}, \tau_{sxx}, \tau_{pxx}, \tau_{zx}, \tau_{szx}, \tau_{pzx}, \tau_{zz}, \tau_{szz}, \tau_{pzz}\}, \quad (2.1)$$

where U_z is the characteristic velocity of the lubricating fluid in the direction of the $z-$axis.

For simplicity in the further analysis the primes at the dimensionless variables are dropped. Then the dimensionless $h_i = 1$ and the problem solution is searched within the interval $0 \leq x \leq 1$.

Due to nonlinearity and complexity of the problem it is impossible to develop any analytical solutions except the perturbation ones which will be used in this analysis. We will search the problem solution in the form of the following series in ϵ

$$\{\tau_{sxx}(x,z), \tau_{sxz}(x,z), \tau_{szz}(x,z)\} = \{\tau_{sxx0}(x,z), \tau_{sxz0}(x,z),$$
$$\tau_{szz0}(x,z)\} + \epsilon\{\tau_{sxx1}(x,z), \tau_{sxz1}(x,z), \tau_{szz1}(x,z)\} \quad (2.2)$$
$$+\epsilon^2\{\tau_{sxx2}(x,z), \tau_{sxz2}(x,z), \tau_{szz2}(x,z)\} + \ldots,$$

$$\{\tau_{pxx}(x,z), \tau_{pxz}(x,z), \tau_{pzz}(x,z)\} = \{\tau_{pxx0}(x,z), \tau_{pxz0}(x,z),$$
$$\tau_{pzz0}(x,z)\} + \epsilon\{\tau_{pxx1}(x,z), \tau_{pxz1}(x,z), \tau_{pzz1}(x,z)\} \quad (2.3)$$
$$+\epsilon^2\{\tau_{pxx2}(x,z), \tau_{pxz2}(x,z), \tau_{pzz2}(x,z)\ + \ldots,$$

$$p(x,z) = p_0(x,z) + \epsilon p_1(x,z) + \epsilon^2 p_2(x,z) + \ldots,$$
$$u(x,z) = u_0(x,z) + \epsilon u_1(x,z) + \epsilon^2 u_2(x,z) + \ldots, \quad (2.4)$$
$$w(x,z) = w_0(x,z) + \epsilon w_1(x,z) + \epsilon^2 w_2(x,z) + \ldots,$$

where $p_0(x,z)$, $u_0(x,z)$, $w_0(x,z)$, $\tau_{sxx0}(x,z)$, $\tau_{sxz0}(x,z)$, $\tau_{szz0}(x,z)$, $\tau_{pxx0}(x,z)$, $\tau_{pxz0}(x,z)$, $\tau_{pzz0}(x,z)$, $p_1(x,z)$, $u_1(x,z)$, $w_1(x,z)$, $\tau_{sxx1}(x,z)$, $\tau_{sxz1}(x,z)$, $\tau_{szz1}\ (x,z)$, $\tau_{pxx1}(x,z)$, $\tau_{pxz1}(x,z)$, $\tau_{pzz1}(x,z)$, $p_2(x,z)$, $u_2(x,z)$, $w_2(x,z)$, $\tau_{sxx2}(x,z)$, $\tau_{sxz2}(x,z)$, $\tau_{szz2}(x,z)$, $\tau_{pxx2}(x,z)$, $\tau_{pxz2}(x,z)$, and $\tau_{pzz2}(x,z)$ are the unknown main, first-, and second-order approximations of the corresponding functions while the gap $h(x)$ between the runner and pad and functions $h_0(x_0)$ and $h_1(x_0)$ are described by the equations (see (1.7))

$$h(x) = 1 + mx = h_0(x) + \epsilon h_1(x),$$
$$h_0(x) = 1,\ h_1(x) = m_0 x. \tag{2.5}$$

As it will be shown below functions $p_0(x,z)$ and $p_1(x,z)$ are independent of z (i.e. $p_0(x,z) = p_0(x)$ and $p_1(x,z) = p_1(x)$) while functions $p_k(x,z)$ for $k \geq 2$ may depend on both x and z.

It is important to realize that the boundary conditions on the terms of the expansions of $u,\ w$, and p in $\epsilon \ll 1$ are

$$u_0(x,0) = 1,\ u_0(x,1) = 0,\ u_1(x,0) = 0,\ u_1(x,1) = -h_1 \tfrac{\partial u_0(x,1)}{\partial z},$$
$$u_2(x,0) = 0,\ u_2(x,1) = -h_1 \tfrac{\partial u_1(x,1)}{\partial z} - \tfrac{h_1^2}{2} \tfrac{\partial^2 u_0(x,1)}{\partial z^2}, \tag{2.6}$$

$$w_0(x,0) = 0,\ w_0(x,1) = 0,\ w_1(x,0) = 0,\ w_1(x,1) = -h_1 \tfrac{\partial w_0(x,1)}{\partial z},$$
$$w_2(x,0) = 0,\ w_2(x,1) = -h_1 \tfrac{\partial w_1(x,1)}{\partial z} - \tfrac{h_1^2}{2} \tfrac{\partial^2 w_0(x,1)}{\partial z^2}. \tag{2.7}$$

Also, from (1.8) we have

$$p_0(0) = p_1(0) = p_2(0) = 0,\ p_0(1) = p_1(1) = p_2(1) = 0. \tag{2.8}$$

Using expansions (2.2)-(2.5) in equations (1.1)-(1.6), and (1.8) taking into account (1.9) and (1.10), and equating terms of the same order of ϵ these equations can be simplified and reduced to solution of the problems for Reynolds equations of order zero

$$\tfrac{d}{dx} \int\limits_0^1 u_0(x,z)dz = 0, \tag{2.9}$$

of order one

$$\tfrac{d}{dx} \int\limits_0^{h_0} u_1(x,z)dz = 0, \tag{2.10}$$

and of order two

$$\tfrac{d}{dx}\{\int\limits_0^{h_0} u_2(x,z)dz + \tfrac{h_1^2}{2}(\tfrac{1}{h_0} - \tfrac{h_0}{2\mu} \tfrac{dp_0}{dx})\} = 0, \tag{2.11}$$

where

$$u_0(x,z) = 1 - z + (z^2 - z)\tfrac{1}{2\mu} \tfrac{dp_0}{dx}. \tag{2.12}$$

Keeping in mind that $h_0(x) = 1$ the above mentioned problem for the Reynolds equation of order zero has the form

$$\tfrac{d}{dx}\{\tfrac{1}{6\mu} \tfrac{dp_0}{dx} - h_0\} = 0,\ h_0(x) = 1,\ p_0(0) = p_0(1) = 0, \tag{2.13}$$

and its solution is

$$p_0(x) = 0. \tag{2.14}$$

It can be shown that $w_0(x, z) = 0$.

Taking that into account we have

$$\begin{aligned} u_1(x, z) &= (z^2 - z)\frac{1}{2\mu}\frac{dp_1}{dx} + zh_1, \\ w_1(x, z) &= z^2(\frac{1}{2} - \frac{z}{3})\frac{1}{2\mu}\frac{d^2p_1}{dx^2} - \frac{z^2}{2}\frac{dh_1}{dx}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Here we took into account that $h_0 = 1$, $\frac{dh_0}{dx} = \frac{d^2h_1}{dx^2} = w_0 = p_0 = \frac{dp_0}{dx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$.

Then using (2.11), (2.15), and (2.8) we obtain the problem for the Reynolds equation of order one the solution for which is

$$p_1(x) = 3\mu m_0(x^2 - x). \tag{2.16}$$

Obviously, $u_0(x, z)$ from (2.15) and $p_0(x)$ from (2.14) is as a solution of a Couette fluid flow problem through a channel with a constant cross section with zero pressure gradient. Due to the fact that $p_0(x) = 0$ and $p_1(x)$ takes into account only the varying channel cross section via function $h_1(x)$ (the pad slope m_0) and fluid viscosity μ pressure $p_2(x)$ simultaneously takes into account the fluid viscosity, relaxation time, and polymer mobility factor, i.e. parameters μ, λ, and α_0. In other words, the nonlinear non-Newtonian rheology gets incorporated in the problem solution only on the order level of ϵ^2.

The equations for the second order term $p_2(x, z)$ from the rheology and motion equations have the form

$$\begin{aligned} Re_0\{u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0\frac{\partial u_1}{\partial z} + w_1\frac{\partial u_0}{\partial z}\} &= -\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx2}}{\partial z}, \\ -\frac{\partial p_2}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx0}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Integrating the second equation in (2.17) we get

$$p_2(x, z) = \tau_{zz1} + \mu\frac{\partial u_0}{\partial x} + P_2(x), \tag{2.18}$$

where $P_2(x)$ is an arbitrary function of x. Taking into account solutions (2.14), (2.16) and the fact that $h_0(x) = 1$ the expression for $u_2(x, z)$ and the Reynolds equation of order two (2.11) can be significantly simplified and the problem for $P_2(x)$ can be presented in the form

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\{\frac{dP_2}{dx} + 3h_1\frac{dp_1}{dx} - \frac{Re_0}{120}(\frac{11}{\mu}\frac{d^2p_1}{dx^2} - 42\frac{dh_1}{dx}) - \frac{\mu_p\lambda}{\mu}[9\lambda\alpha_0\frac{dp_1}{dx} \\ &-\mu\frac{dh_1}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2p_1}{dx^2}]\} = 0, \ P_2(0) = P_2(1) = -\mu_p\alpha_0\lambda. \end{aligned} \tag{2.19}$$

The solution to this problem is

$$P_2(x) = 3m_0\{9\mu_p\lambda^2\alpha_0 - \mu m_0(2x + \frac{1}{2})\}(x^2 - x) - \mu_p\lambda\alpha_0. \tag{2.20}$$

Using (2.18) and (2.20) we obtain

$$p_2(x,z) = 3\mu m_0\{-m_0(2x+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{9\mu_p\lambda^2\alpha_0}{\mu}\}(x^2-x). \tag{2.21}$$

After that we can easily calculate the tensor components in the form

$$\tau_{xx} = \tau_{sxx} + \tau_{pxx},\ \tau_{zx} = \tau_{szx} + \tau_{pzx},\ \tau_{zz} = \tau_{szz} + \tau_{pzz},$$

$$\tau_{sxx0} = \tau_{sxx1} = 0,\ \tau_{sxx2} = 2\mu_s\tfrac{\partial u_1}{\partial x},\ \tau_{szx0} = \mu_s\tfrac{\partial u_0}{\partial z},\ \tau_{szx1} = \mu_s\tfrac{\partial u_1}{\partial z}, \tag{2.22}$$

$$\tau_{szx2} = \mu_s[\tfrac{\partial u_2}{\partial z} + \tfrac{\partial w_0}{\partial x}],\ \tau_{szz0} = \tau_{szz1} = 0,\ \tau_{szz2} = -2\mu_s\tfrac{\partial u_1}{\partial x},$$

$$\tau_{pxx0} = 2\mu_p\lambda(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^2,\ \tau_{pzx0} = \mu_p\tfrac{\partial u_0}{\partial z},\ \tau_{pzz0} = 0,$$

$$\tau_{pxx1} = \mu_p\{10\lambda^3\alpha_0(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^4 + 4\lambda\tfrac{\partial u_0}{\partial z}\tfrac{\partial u_1}{\partial z} + \lambda\alpha_0(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^2 \tag{2.23}$$

$$\tau_{pzx1} = \mu_p\{3\lambda^2\alpha_0(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^3 + \tfrac{\partial u_1}{\partial z}\},\ \tau_{pzz1} = \mu_p\lambda\alpha_0(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^2,$$

$$\tau_{pxx2} = 2\mu_p\{-3\lambda^2\tfrac{\partial^3 u_0}{\partial z^3}w_1 + 42\lambda^5\alpha_0^2(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^6 + 7\lambda^3\alpha_0(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^4$$

$$+20\lambda^3(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^3\alpha_0\tfrac{\partial u_1}{\partial z} + \lambda\tfrac{\partial u_0}{\partial z}(\alpha_0\tfrac{\partial u_1}{\partial z} + 2\tfrac{\partial u_2}{\partial z}) + \lambda(\tfrac{\partial u_1}{\partial z})^2 + \tfrac{\partial u_1}{\partial x}\},$$

$$\tau_{pzx2} = -\mu_p\lambda\tfrac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}w_1 - \mu_p\lambda\{u_0\tfrac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z} - 22\lambda^3\alpha_0^2(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^5\} \tag{2.24}$$

$$+\mu_p\lambda^2\alpha_0\{2\alpha_0(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^3 + 9(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^2\tfrac{\partial u_1}{\partial z}\} + \mu_p\{-2\lambda\tfrac{\partial u_0}{\partial z}\tfrac{\partial u_1}{\partial x} + \tfrac{\partial u_2}{\partial z}\},$$

$$\tau_{pzz2} = \mu_p\{6\lambda^3\alpha_0^2(\tfrac{\partial u_0}{\partial z})^4 + 2\lambda\alpha_0\tfrac{\partial u_1}{\partial z}\tfrac{\partial u_0}{\partial z} - 2\tfrac{\partial u_1}{\partial x}\}.$$

After that we can easily calculate the additional pressure created in the contact

$$N_1(x,z) = \tau_{xx}(x,z) - \tau_{zz}(x,z). \tag{2.25}$$

The above expressions are simplified using the fact that $w_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0$.

3 Examples of Some Specific Lubrication Problem Solutions and Discussion

Now, let us consider some results which can be extracted from the obtained approximate solution. We will assume that always $\mu = 1$. We will take as the basic set the following values: $\epsilon = 0.05$, $Re_0 = 5$, $\mu_p = 0.25$, $\lambda = 1$, $\alpha_0 = 2$, and $m_0 = -0.5$. The pressure distributions $p(x)$ versus parameters μ_p, λ, α_0, and m_0 while in each case the rest of the parameters are fixed and equal to their basic values are presented in Fig. 2. It is clear that in each case the pressure distributions $p(x)$ are very close to a parabola. That can also be seen from the ratios $p_{rel}(x)$ of pressure $p(x)$ divided by the pressure for a lubricant with the Newtonian rheology coinciding

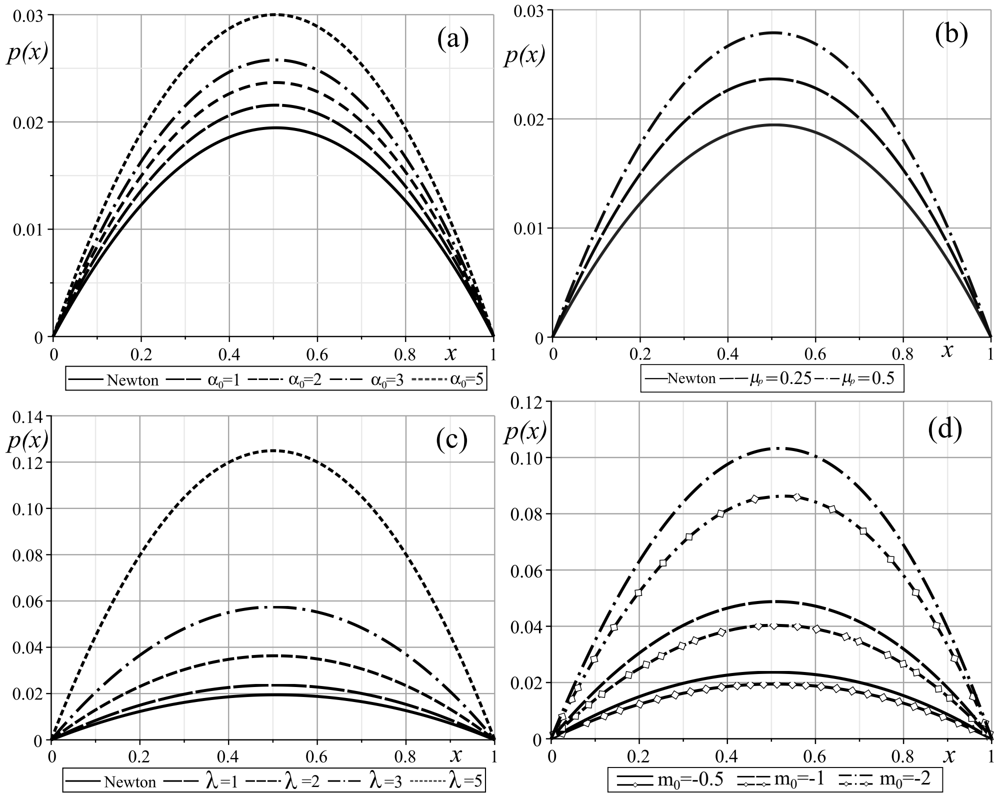


Fig. 2: Curves of the dimensionless pressure $p(x)$ as functions of x for different values of μ_p, λ, α_0, and m_0 as shown in figure legends. In Fig. 2d curves without circles correspond to the case of the dimensionless pressure $p_N(x)$ for a Newtonian fluid ($\mu_p = \lambda = \alpha_0 = 0$). The calculations were made for the following basic set of parameters: $\epsilon = 0.05,\ \mu_p = 0.25,\ \lambda = 1,\ \alpha_0 = 2$, and $mu_0 = -0.5$.

with $p_N(x) = 3\mu m_0\epsilon\{1 - \epsilon m_0(2x + \frac{1}{2})\}(x^2 - x)$

$$p_{rel}(x) = \frac{1+\epsilon[-m_0(2x+\frac{1}{2})+\frac{9\mu_p\lambda^2\alpha_0}{\mu}]}{1-\epsilon m_0(2x+\frac{1}{2})} + \ldots = 1 + O(\epsilon),\ \epsilon \ll 1. \tag{3.1}$$

which is obtained for $\mu_p = \lambda = \alpha_0 = 0$. Moreover, for $\mu_p > 0$, $\lambda > 0$, and $\alpha_0 > 0$ the contact pressure $p(x)$ is higher than the pressure $p_N(x)$ for the case of a lubricant with Newtonian rheology and for higher $\mu_p,\ \lambda$, and α_0 pressure $p(x)$ is higher.

For non-Newtonian fluids with polymeric additives described by the Giesekus model it makes sense also to consider some anisotropic fluid properties such as the first stress invariant which being scaled the same way as stresses (see (2.1)) in the dimensionless form is

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{zz}. \tag{3.2}$$

Obviously, the value of $N_1(x,z)$ can be easily calculated using (2.22)-(2.24). A typical

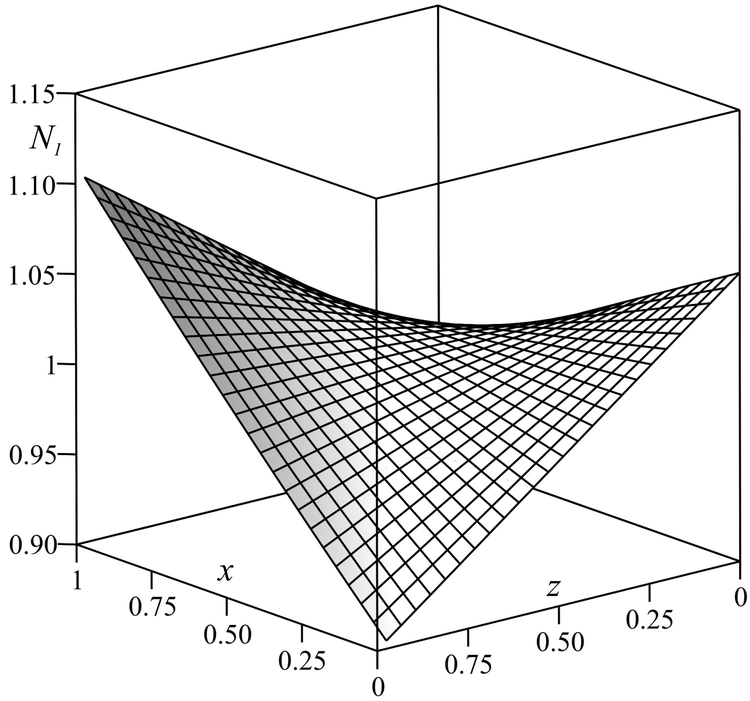


Fig. 3: A typical distribution of stress $N_1(x,z)$ obtained for $\epsilon = 0.05,\ Re_0 = 5,\ \mu_p = 0.25,\ \lambda = 1,\ \alpha_0 = 2$, and $m_0 = -0.5$.

graph of $N_1(x,z)$ is presented in Fig. 4. The value of $N_1(x,z)$ is positive for all x and z values which means that the carrying load of a bearing lubricated by a fluid with the Giesekus rheology is higher than that for the same bearing lubricated by a Newtonian fluid.

In addition to that one can easily calculate the energy loss in the lubricated contact and the friction force created by the lubricant flow by using the expressions for the stress component $\tau_{zx}(x,z)$ and and the lubricant velocity distribution $u(x,z)$ obtained above.

4 Closure

A new relatively simple asymptotic modeling of the behavior of the Giesekus lubrication parameters in the line contact of a rigid thrust bearing was developed. The rheology equations of the lubricant were simplified using the scale analysis assuming that the size of the lubricant layer across it is much smaller than along it. The solutions of the simplified rheology equations were obtained in the form of power series in small parameter ϵ. That allowed for derivation of the Reynolds equations of the zero, first, and second orders and the application of a regular perturbation method which simplified the problem. The lubrication problems based on the Reynolds equations of the zero, first, and second orders were solved analytically. All hydrodynamic parameters of the contact such as pressure, shear stress, coefficient of friction, energy loss etc. were determined analytically.

Acknowledgments This work was supported by the Russian Science Foundation (RSF) through Grant No. 22-49-08014.

References

[1] White F.M. and Corfield I. Viscous fluid flow. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2006.

[2] Barnes H.A., Hutton J.F., and Walters K. An introduction to rheology. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science, 1989.

[3] Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1886; 177: 157.234.

[4] Sommerfeld A. Zur hydrodynamische theorie der schmiermittelreibung. Zeitsch Math. Phys. 1904; 50: 97.155.

[5] Raimondi A.A. and Boyd J. A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design: I. ASLE Trans. 1958; 1: 159.174.

[6] Raimondi A.A. and Boyd J. A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design: II. ASLE Trans. 1958; 1: 174.193.

[7] Raimondi A.A. and Boyd J. A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design: III. ASLE Trans. 1958; 1: 194.209.

[8] Raimondi A.A. A numerical solution for the gas lubricated full journal bearing of finite length. ASLE Trans. 1961; 4: 131.155.

[9] Dowson D. History of tribology. New York: Addison-Wesley Longman Limited, 1979.

[10] Elsharkawy A.A. On the hydrodynamic liquid lubrication analysis of slider/disk interface. J. Mech. Eng. Sci. 2001; 43: 177.192.

[11] Shah R.C. and Bhat M.V. Ferrofluid lubrication in porous inclined slider bearing with velocity slip. J. Mech. Eng. Sci. 2002; 44: 2495.2502.

[12] Shenoy S.B. and Pai R. Theoretical investigations on the performance of an externally adjustable fluid-film bearing including misalignment and turbulence effects. Trib. Int. 2009; 42: 1088.1100.

[13] Vignolo G.G., Barila L.DO., and Quinzani L.M. Approximate analytical solution to Reynolds equation for finite length journal bearings. Trib. Int. 2011; 44: 1089.1099.

[14] Sfyris D and Chasalevris A. An exact analytical solution of the Reynolds equation for the finite journal bearing lubrication. Trib. Int. 2012; 55: 46.58.

[15] Chasalevris A and Sfyris D. Evaluation of the finite journal bearing characteristics, using the exact analytical solution of the Reynolds equation. Trib. Int. 2013; 57: 216.234.

[16] Rao T.VV.L.N., Rani A.M.A., Nagarajan T., et al. Analysis of slider and journal bearing using partially textured slip surface. Trib. Int. 2012; 56: 121.128.

[17] Ram N. and Sharma S. A study of misaligned hole-entry worn journal bearing operating in turbulent regime. Ind. Lubr. Trib. 2013; 65: 108.118.

[18] Ram N. and Sharma S. Influence of wear on the performance of hole-entry hybrid misaligned journal bearing in turbulent regime. Ind. Lubr. Trib. 2014; 66: 509.519.

[19] Akbarzadeh P. Numerical study of thermohydrodynamic characteristics of oil tilting-pad journal bearings with a self-pumping fluid flow circulation. Trib. Trans. 2015; 58: 18.30.

[20] Gong R.Z., Li D.Y., Wang H.J., et al. Analytical solution of Reynolds equation under dynamic conditions. Proc. I. Mech. E., Part J: J. Eng. Trib. 2016; 230: 416.427.

[21] Akbarzadeh P., Mikaeeli S.Z. and Rahimiyan M. Multiobjective optimization of thermohydrodynamic journal bearing using MOPSO algorithm. Proc. I. Mech. E., Part J: J. Eng. Trib. 2018; 232: 657.671.

[22] Novotny L.P., Skara P., and Hlin Lk.J. The effective computational model of the hydrodynamics journal floating ring bearing for simulations of long transient regimes of turbocharger rotor dynamics. Int. J. Mech. Sci. 2018; 148: 611.619.

[23] Li B., Sun J., Zhu S., et al. Thermohydrodynamic lubrication analysis of misaligned journal bearing considering the axial movement of journal. Trib. Int. 2019; 135: 397.407.

[24] Novotny L.P., Hrabovsky L.J., Juracka J., et al. Effective thrust bearing model for simulations of transient rotor dynamics. Int. J. Mech. Sci. 2019; 157: 374.383.

[25] Yu Y., Pu G., Jiang T., et al. Discontinuous grooves in thrust air bearings designed with CAPSO algorithm. Int. J. Mech. Sci. 2020; 165: 105197.

[26] Bird, R.B., Curtis Ch.F., Armstrong, R.C., and Hassager, O. 1987. *Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 1 : Fluid Mechanics.* 2nd ed. John Wiley & Sons, New York.

[27] Tichy J.A. Non-Newtonian lubrication with the convected Maxwell model. ASME J. Trib. 1996; 118: 344–348.

[28] Huang P., Li Z.H., Meng Y.G., et al. Study on thin film lubrication with second-order fluid. ASME J. Trib. 2002; 124: 547–552.

[29] Akyildiz F.T. and Bellout H. Viscoelastic lubrication with Phan-Thein-Tanner fluid (PTT). ASME J. Trib. 2004; 126: 288–291.

[30] Gwynllyw D.R. and Phillips T.N. The influence of Oldroyd-B and PTT lubricants on moving journal bearing systems. J. Non-Newton. Fluid Mech. 2008; 150: 196–210.

[31] Covitch, M.J. and Trickett, K.J. 2015. How Polymers Behave as Viscosity Index Improvers in Lubricating Oils. Advances in Chemical Engineering and Science. v. 5, 134-151.

[32] Sawyer, W.G. and Tichy, J.A. 1998. Non-Newtonian Lubrication with the Second Order Fluid. Transactions by the ASME. v. 120, p. 622.

[33] Kudish, I.I. and Covitch, M.J. 2010. *Introduction to Modeling and Analytical Methods in Tribology*. Chapman & Hall/CRC.

[34] Kudish, I.I. 2013. *Elastohydrodynamic Lubrication for Line and Point Contacts. Asymptotic and Numerical Approaches*. Chapman & Hall /CRC Press.

[35] Kudish, I. I., Volkov, S. S., Vasiliev, A. S., Aizikovich, S. M. Some Criteria for Coating Effectiveness in Heavily Loaded Line Elastohydrodynamically Lubricated Contacts-Part II: Lubricated Contacts. Journal of Tribology, 2016 138(2), 021505.

[36] Kudish, I. I., Volkov, S. S., Vasiliev, A. S., Aizikovich, S. M. Effectiveness of coatings with constant, linearly, and exponentially varying elastic parameters in heavily loaded line elastohydrodynamically lubricated contacts. Journal of Tribology, 2017 139(2), 021502.

[37] Kudish, I. I., Volkov, S. S., Vasiliev, A. S., Aizikovich, S. M. Lubricated point heavily loaded contacts of functionally graded materials. Part 2. Lubricated contacts. Mathematics and Mechanics of Solids, 2018. 23(7), 1081-1103.

[38] Kudish I. I., Pashkovski E., Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M. Heavily loaded line EHL contacts with thin adsorbed soft layers. Math. Mech. Solids. 2020. Vol. 25 ?4. P.1011–1037.

[39] Kudish I.I. , Volkov S.S. , Aizikovich S.M. , Ke L. One simple case of lubricated line contact for double-layered elastic solids // Problems of strength and plasticity. Vol 84 No 1 (2022) p. 5-14. (in print).

[40] Kudish I. I., Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M. Characterization of the behavior of different contacts with double coating. Mathematics and Mechanics of Complex Systems. 2021. Vol. 9. ?. 2. P. 179-202, doi.org/10.2140/memocs.2021.9.179

[41] Cherizol R., Sain M., and Tjong J. Review of non-Newtonian mathematical models for rheological characteristics of viscoelastic composites. Green Sustain. Chem. 2015; 5: 6–14.

[42] Yoo J. and Choi H.C. On the steady simple shear flows of the one-mode Giesekus fluid. Rheol. Acta. 1989; 28: 13–24.

[43] Raisi A., Mirzazadeh M., Dehnavi A.S., et al. An approximate solution for the Couette–Poiseuille flow of the Giesekus model between parallel plates. Rheol Acta 2008; 47: 75–80.

[44] Abbaspur A., Norouzi M., Akbarzadeh P., and Vaziri S.A. Analysis of nonlinear viscoelastic lubrication using Giesekus constitutive equation. Proc. I. Mech. E., Part J: J. Eng. 2020; Trib. 1–15, DOI: 10.1177/1350650120944280

[45] Kudish, I.I., Pashkovski, E., and Patterson., R. 2022. Line Contact Lubricated by a Fluid Described by Non-Newtonian Giesekus Model. IMA J. Appl. Math. (in print).

[46] Van-Dyke, M. 1964. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. New York-London: Academic Press.

[47] Kaplunov, J.D., Nolde, E.V., and Shorr, B.F. 2005. A perturbation approach for evaluating natural frequencies of moderately thick elliptic plates. J. Sound and Vibr., v. 281, pp. 905–919, doi:10.1016/j.jsv.2004.02.046.

Information about authors:

Ilya I. Kudish - ASME Fellow, ILRIMA Consulting LLC, Millersburg, MI 49759, USA, email - ilyakudish@gmail.com,

Sergei S. Volkov - Laboratory of Functionally Graded and Composite Materials, Research and Education Center "Materials Don State Technical University, 1 Gagrina sq., 344001, Rostov-on-Don,

Andrey S. Vasiliev - Laboratory of Functionally Graded and Composite Materials, Research and Education Center "Materials Don State Technical University, 1 Gagrina sq., 344001, Rostov-on-Don, Russia.

Received 14.05.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика

2010 MSC 74B05, 74K20, 74K15

Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-184

ADHESIVE INTERACTION OF A PIECEWISE-HOMOGENEOUS ORTHOTROPIC PLATE WITH AN ELASTIC BEAM

N.N. Shavlakadze

Keywords: contact problem, orthotropic plate, elastic inclusion, integro-differential equation, integral transformation, Riemann problem, asymptotic estimates

Ն.Ն. Շավլակաձե

Կտոր առ կտոր համասեռ օրթոտրոպ սալի սոսնձային փոխազդեցությունը առաձգական հեծանի հետ

Հիմնաբառեր: կոնտակտային խնդիր, օրթոտրոպ սալ, առաձգական ներդրակ, ինտեգրո-դիֆֆե-րենցիալ հավասարում, ինտեգրալ ձևափոխություն, Ռիմանի խնդիր, ասիմպտոտիկ գնահատականներ

Դիտարկված է կտոր առ կտոր համասեռ օրթոտրոպ սալ, որը ուժեղացված է ուղիղ անկյան տակ նյութերի բաժանման գիծ դուրս եկող վերջավոր երկարության սեպաձև ներդրակով և բեռնավորված է շոշոփող և նորմալ ուժերով:Անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության մեթոդներով խնդիրը բերված է ֆիկսված եզակիությամբ սինգուլյար ինտեգրո-դիֆֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը: Այն դեպքում, երբ ներդրակ-հեծանը ունի միայն ծռման կոշտություն և բեռնավորված է նորմալ ուժերով, ինտեգրալ ձևափոխությունների միջոցով ստացված է Ռիմանի խնդիր, որի լուծումը ներկայացված է բացահայտ տեսքով: Որոշված են կոնտակտային գծի վրա առաջացող նորմալ լարումները և պարզված է կոնտակտային լարումների վարքը եզակի կետերի շրջակայքում:

Н.Н. Шавлакадзе

Адгезионное взаимодействие кусочно-однородной ортотропной пластины с упругой балкой

Ключевые слова: контактная задача, ортотропная пластина, упругое включение, интегро-дифференциальное уравнение, интегральное преобразование, задача Римана, асимптотические оценки

Рассмотрена кусочно-однородная упругая ортотропная пластина, армированная конечным включе-нием клиновидной формы, выходящаяна границу раздела материалов под прямым углом и нагруженная касательными и нормальными силами. С помощью методов теории аналитических функций задача сводится к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям с фиксированной особенностью. Когда включение-балка имеет только изгибную жесткость и нагружена нормальными силами, с помощью интегрального преобразования получается задача Римана, решение которой представлено в явном виде. Определены нормальные контактные напряжения вдоль линии контакта и установлено поведение контактных напряжений в окрестностях особых точек.

A piecewise-homogeneous elastic orthotropic plate, reinforced with a finite inclusion of the wedge-shaped, which meets the interface at a right angle and is loaded with tangential and normal forces is considered. By using methods of the theory of analytic function, the problem is reduced to singular integro-differential equations with fixed singularity. When the inclusion-beam has only bending stiffness and is loaded with normal forces, using an integral transformation a Riemann problem is obtained, the solution of which is presented in explicit form. The normal contact stresses along the contact line are determined and the behavior of the contact stresses in the neighborhood of singular points is established.

Introduction

The solutions of static contact problems for different domains, reinforced with elasticthin inclusions andpatches of variable stiffness were obtained, and the behavior of the contact stresses at the ends of the contact line has been investigated, depending on the geometrical and physical parameters of these thin-walled elements [1-10]. The first fundamental problem for a piecewise-homogeneous plane was solved, when a crack of finite length arrives at the interface of two bodies at the right angle [11], and also a similar problem for a piecewise-homogeneous plane when acted upon by symmetrical normal stresses at the crack sides [12, 13], as well as the contact problems for piecewise-homogeneous planes with a semi-infinite and finite inclusion [14].

Problem statement and its solution

Suppose an elastic body S occupies the plane of a complex variable $z = x + iy$, which contains an elastic patch along the segment $l_1 = (0,1)$ and consists of two half-planes of dissimilar materials

$$S^{(1)} = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, z \notin [0,1]\}, \qquad S^{(2)} = \{z \mid \operatorname{Re} z < 0\}$$

joined along the Oy axis. In particularly, we will consider a piecewise-homogeneous orthotropic plate in the condition of plane deformation, which consists of two half-planes of dissimilar materials and reinforced with a finite patch (inclusion) with modulus of elasticity $E_1(x)$, thickness $h_1(x)$ and Poisson's coefficient ν_1. It is assumed that the horizontal and vertical stresses with intensity $\tau_0(x)$ and $p_0(x)$ acts on the patch along the Ox axis (the functions $\tau_0(x)$ and $p_0(x)$ are bounded functions on the finite interval). The patchin the vertical direction bends like a beam (has a finite bending stiffness) and besides in the horizontal direction the patch compressed or stretched like rod being in uniaxial stress state. The contact between the plate and patch is realized by a thin glue layer with width h_0 and Lame's constants λ_0, μ_0. The contact conditions has the form [15]

$$u_1(x) - u^{(1)}(x,0) = k_0\tau(x),\ v_1(x) - v^{(1)}(x,0) = m_0 p(x), \qquad 0 < x < 1 \qquad (1.1)$$

where $u^{(1)}(x,y),\ v^{(1)}(x,y)$ are displacement components of the plate points and $u_1(x),\ v_1(x)$ displacements of the patch points along the Ox axis, $k_0 = h_0/\mu_0$ and $m_0 = h_0/(\lambda_0 + 2\mu_0)$.

We have to define the law of distribution of tangential $\tau(x)$ and normal $p(x)$ contact stresses on the line of contact, the asymptotic behavior of these stresses at the ends of the patch.

According to the equilibrium equation of patch elements and Hooke's law we have:

$$\frac{du_1(x)}{dx} = \frac{1}{E(x)}\int_0^x [\tau(t) - \tau_0(t)]dt,$$

$$\frac{d^2}{dx^2} D(x) \frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} = p_0(x) - p(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1.2}$$

and the equilibrium equation of the patch has the form

$$\int_0^1 [\tau(t) - \tau_0(t)]dt = 0, \quad \int_0^1 [p(t) - p_0(t)]dt = 0, \quad \int_0^1 t[p(t) - p_0(t)]dt = 0, \tag{1.3}$$

where $E(x) = \dfrac{E_1(x)h_1(x)}{1-\nu_1^2}$, $\mathrm{D}(x) = \dfrac{E_1(x)h^3{}_1(x)}{1-\nu_1^2}$.

At the interface of the two materials we have the continuity conditions

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)}, \qquad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \qquad u^{(1)} = u^{(2)}, \qquad v^{(1)} = v^{(2)} \tag{1.4}$$

where $\sigma_x^{(\mathrm{k})}, \tau_{xy}^{(\mathrm{k})}$ are the stress components and $u^{(\mathrm{k})}, v^{(\mathrm{k})}$ are the displacement components.

The boundary conditions ofthe components of the stress and displacement fields in the half-plane $S^{(1)}$ has the form

$$\sigma_y^{(1)+} - \sigma_y^{(1)-} = p(x),\ \tau_{xy}^{(1)+} - \tau_{xy}^{(1)-} = \tau(x),\ u^{(1)+} = u^{(1)-},\ v^{(1)+} = v^{(1)-},\ 0 < x < 1 \tag{1.5}$$

Using Lekhnitskii's formulae [16] the components of stress and displacement are represented in the form

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(k)} &= -2\,\mathrm{Re}[\beta_k^2 \Phi_k(z_k) + \gamma_k^2 \Psi_k(\varsigma_k)] \\
\sigma_y^{(k)} &= 2\,\mathrm{Re}[\Phi_k(z_k) + \Psi_k(\varsigma_k)] \\
\tau_{xy}^{(k)} &= 2\,\mathrm{Im}[\beta_k \Phi_k(z_k) + \gamma_k \Psi_k(\varsigma_k)] \\
u^{(k)} &= 2\,\mathrm{Re}[\rho_k \varphi_k(z_k) + r_k\, \psi_k(\varsigma_k)] \\
v^{(k)} &= -2\,\mathrm{Im}[\beta_k r_k \varphi_k(z_k) + \gamma_k \rho_k \psi_k(\varsigma_k)]
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$z_k = x + i\beta_k y,\ \varsigma_k = x + i\gamma_k y,\ \ \Phi_k(z_k) = \varphi_k'(z_k),\ \ \Psi_k(\varsigma_k) = \psi_k'(z_k),\ \ k = 1,2$$

Here $\pm i\beta_k$, $\pm i\gamma_k$ are the roots of the characteristic equation

$$\mu^4 + \left(\frac{E_k}{G_k} - 2\nu_k\right)\mu^2 + \frac{E_k}{E_k^*} = 0, \quad (\beta_k > \gamma_k),$$

(E_k, E_k^*) are the Young's modulus with respect to the principal (Ox, Oy) direction respectively, G_k are the shear modulus, ν_k are Poisson's ratios of the plane materials, respectively.

The problem with conditions (1.1)-(1.5) reduced to finding the functions $\Phi_k(z_k), \Psi_k(\varsigma_k), (k=1,2)$ which are holomorphic in the regions $S^{(k)}$ respectively, and satisfies the following boundary conditions:

$$\begin{aligned}
&2\,\mathrm{Re}[\Phi_1^+(x)-\Phi_1^-(x)+\Psi_1^+(x)-\Psi_1^-(x)]=p(x)\\
&2\,\mathrm{Im}[\beta_1(\Phi_1^+(x)-\Phi_1^-(x))+\gamma_1(\Psi_1^+(x)-\Psi_1^-(x)]=\tau(x)\\
&\mathrm{Re}[\rho_1(\Phi_1^+(x)-\Phi_1^-(x))+r_1(\Psi_1^+(x)-\Psi_1^-(x))]=0\\
&\mathrm{Im}[\beta_1 r_1(\Phi_1^+(x)-\Phi_1^-(x))+\gamma_1\rho_1(\Psi_1^+(x)-\Psi_1^-(x))]=0
\end{aligned} \quad 0<x<1 \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}[\beta_1^2\Phi_1(t_1)+\gamma_1^2\Psi_1(\sigma_1)]=\mathrm{Re}[\beta_2^2\Phi_2(t_2)+\gamma_2^2\Psi_2(\sigma_2)]\\
&\mathrm{Im}[\beta_1\Phi_1(t_1)+\gamma_1\Psi_1(\sigma_1)]=\mathrm{Im}[\beta_2\Phi_2(t_2)+\gamma_2\Psi_2(\sigma_2)]\\
&\mathrm{Im}[\rho_1\beta_1\Phi_1(t_1)+r_1\gamma_1\Psi_1(\sigma_1)]=\mathrm{Im}[\rho_2\beta_2\Phi_2(t_2)+r_2\gamma_2\Psi_2(\sigma_2)]\\
&\mathrm{Re}[\beta_1^2 r_1\Phi_1(t_1)+\gamma_1^2\rho_1\Psi_1(\sigma_1)]=\mathrm{Re}[\beta_2^2 r_2\Phi_2(t_2)+\gamma_2^2\rho_2\Psi_2(\sigma_2)]
\end{aligned} \tag{1.8}$$

where $t_k = i\beta_k y,\ \sigma_k = i\gamma_k y,\ \rho_k = -\dfrac{\beta_k^2+\nu_k}{E_k},\ r_k = -\dfrac{\gamma_k^2+\nu_k}{E_k},\ k=1,2$

System (1.7)has the unique solution

$$\begin{aligned}
&\Phi_1^+(x)-\Phi_1^-(x)=\frac{-r_1\beta_1 p(x)+i\rho_1\tau(x)}{2\beta_1(\rho_1-r_1)}\\
&\Psi_1^+(x)-\Psi_1^-(x)=\frac{\rho_1\gamma_1 p(x)-ir_1\tau(x)}{2\gamma_1(\rho_1-r_1)}, \qquad 0<x<1
\end{aligned} \tag{1.9}$$

In view of the fact that $\tau(x)=0,\ p(x)=0$ when $x>1$, the general solution of problem (1. 9) can be represented in the form:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(z_1)=\frac{ir_1}{4\pi(\rho_1-r_1)}\int_0^1\frac{N_1(t)dt}{t-z_1}+w_1(z_1)\equiv ir_1 w_0(z_1)+w_1(z_1),\\
&\Psi_1(\zeta_1)=-\frac{i\rho_1}{4\pi(\rho_1-r_1)}\int_0^1\frac{N_2(t)dt}{t-\zeta_1}+w_2(\zeta_1)\equiv -i\rho_1 w_0(\varsigma_1)+w_2(\varsigma_1),
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$N_1(t)=p(t)-i\frac{\rho_1}{r_1\beta_1}\tau(t), \qquad N_2(t)=p(t)-i\frac{r_1}{\rho_1\gamma_1}\tau(t),$$

where $w_1(z_1)$ and $w_2(\varsigma_1)$ are unknown analytic functions in the half-planes $\operatorname{Re} z_1 > 0,\ \operatorname{Re}\varsigma_1 > 0$ respectively, which will be defined by using the conditions (1.8).

We will now introduce the boundary values of functions $\Phi_1(z_1)$ and $\Psi_1(\varsigma_1)$, expressed by formulae (1.10), into equalities (1. 8) and multiply expressions obtained by $\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z},\ t = iy,\ z = x + iy,\ x > 0$ we integrate along the imaginary axis and use the fact that if $\Phi(z)$ is a holomorphic function in the half-plane $\operatorname{Im} z > 0\ (\operatorname{Im} z < 0)$, then $\overline{\Phi(iy)}$ is the boundary value of the function $\overline{\Phi(-\overline{z})}$, holomorphic in the half-plane $\operatorname{Im} z < 0\ (\operatorname{Im} z > 0)$. As a result, using Cauchy's theorem and formula, we obtain the following system

$$\beta_1^2 w_1(\beta_1 z) + \gamma_1^2 w_2(\gamma_1 z) - \beta_2^2\overline{\Phi_2(-\beta_2\overline{z})} - \gamma_2^2\overline{\Psi_2(-\gamma_2\overline{z})} =$$
$$= -ir_1\beta_1^2\overline{w_0(-\beta_1\overline{z})} + i\rho_1\gamma_1^2\overline{w_0(-\gamma_1\overline{z})}$$

$$\beta_1 w_1(\beta_1 z) + \gamma_1 w_2(\gamma_1 z) + \beta_2\overline{\Phi_2(-\beta_2\overline{z})} + \gamma_2\overline{\Psi_2(-\gamma_2\overline{z})} =$$
$$= ir_1\beta_1\overline{w_0(-\beta_1\overline{z})} - i\rho_1\overline{\gamma_1 w_0(-\gamma_1\overline{z})}$$

$$\rho_1\beta_1 w_1(\beta_1 z) + r_1\gamma_1 w_2(\gamma_1 z) + \rho_2\beta_2\overline{\Phi_2(-\beta_2\overline{z})} + \gamma_2\overline{r_2\Psi_2(-\gamma_2\overline{z})} =$$
$$= ir_1\rho_1\beta_1\overline{w_0(-\beta_1\overline{z})} - i\rho_1 r_1\gamma_1\overline{w_0(-\gamma_1\overline{z})}$$

$$\beta_1^2 r_1 w_1(\beta_1 z) + \gamma_1^2\rho_1 w_2(\gamma_1 z) - \beta_2^2 r_2\overline{\Phi_2(-\beta_2\overline{z})} - \gamma_2^2\rho_2\overline{\Psi_2(-\gamma_2\overline{z})} =$$
$$= -ir_1^2\beta_1^2\overline{w_0(-\beta_1\overline{z})} + i\rho_1^2\gamma_1^2\overline{w_0(-\gamma_1\overline{z})}$$

Solving this system for functions $w_1(\beta_1 z)$ and $w_2(\gamma_1 z)$, and replacing z by z_1/β_1 and ς_1/γ_1 respectively, one obtains

$$w_1(z_1) = \frac{iI_1}{\Delta}\overline{w_0(-\overline{z}_1)} + \frac{iI_2}{\Delta}\overline{w_0(-\frac{\gamma_1}{\beta_1}\overline{z}_1)},$$

$$w_2(\varsigma_1) = \frac{iI_1^*}{\Delta}\overline{w_0(-\frac{\beta_1}{\gamma_1}\overline{\varsigma}_1)} + \frac{iI_2^*}{\Delta}\overline{w_0(-\overline{\varsigma}_1)}, \tag{1.11}$$

For functions $\Phi_2(-\beta_2 z)$ and $\Psi_2(-\gamma_2 z)$ with this notation $-\beta_2 z = z_2, -\gamma_2 z = \varsigma_2$, we have

$$\Phi_2(z_2) = -\frac{iI_3}{\Delta} w_0(\frac{\beta_1}{\beta_2} z_2) - \frac{iI_4}{\Delta} w_0(\frac{\gamma_1}{\beta_2} z_2),$$

$$\Psi_2(\varsigma_2) = -\frac{iI_3^*}{\Delta} w_0(\frac{\beta_1}{\gamma_2} \varsigma_2) - \frac{iI_4^*}{\Delta} w_0(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \varsigma_2),$$

where

$$I_1 = -\Delta_{11} r_1 \beta_1^2 + \Delta_{21} r_1 \beta_1 + \Delta_{31} r_1 \rho_1 \beta_1 - \Delta_{41} \beta_1^2 r_1^2,$$
$$I_2 = \Delta_{11} \rho_1 \gamma_1^2 - \Delta_{21} \rho_1 \gamma_1 - \Delta_{31} \rho_1 r_1 \gamma_1 + \Delta_{41} \rho_1^2 \gamma_1^2,$$
$$I_1^* = -\Delta_{12} r_1 \beta_1^2 + \Delta_{22} r_1 \beta_1 + \Delta_{32} r_1 \rho_1 \beta_1 - \Delta_{42} \beta_1^2 r_1^2,$$
$$I_2^* = \Delta_{12} \rho_1 \gamma_1^2 - \Delta_{22} \rho_1 \gamma_1 - \Delta_{32} \rho_1 r_1 \gamma_1 + \Delta_{42} \rho_1^2 \gamma_1^2,$$
$$I_3 = -\Delta_{13} r_1 \beta_1^2 + \Delta_{23} r_1 \beta_1 + \Delta_{33} r_1 \rho_1 \beta_1 - \Delta_{43} \beta_1^2 r_1^2$$
$$I_4 = \Delta_{13} \rho_1 \gamma_1^2 - \Delta_{23} \rho_1 \gamma_1 - \Delta_{33} \rho_1 r_1 \gamma_1 + \Delta_{43} \rho_1^2 \gamma_1^2$$
$$I_3^* = -\Delta_{14} r_1 \beta_1^2 + \Delta_{24} r_1 \beta_1 + \Delta_{34} r_1 \rho_1 \beta_1 - \Delta_{44} \beta_1^2 r_1^2$$
$$I_4^* = \Delta_{14} \rho_1 \gamma_1^2 - \Delta_{24} \rho_1 \gamma_1 - \Delta_{34} \rho_1 r_1 \gamma_1 + \Delta_{44} \rho_1^2 \gamma_1^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_1^2 & \gamma_1^2 & -\beta_2^2 & -\gamma_2^2 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \rho_1 \beta_1 & r_1 \gamma_1 & \rho_2 \beta_2 & r_2 \gamma_2 \\ \beta_1^2 r_1 & \gamma_1^2 \rho_1 & -\beta_2^2 r_2 & -\gamma_2^2 \rho_2 \end{vmatrix},$$

$\Delta_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ are the cofactors of the corresponding matrix elements.

Boundary conditions (1.2) are equivalent to the relations:

$$\frac{1}{E(x)} \int_0^x [\tau_1(t) - \tau_1^0(t)] dt - [\rho_1 \Phi_1(x) + \rho_1 \overline{\Phi_1(x)} + r_1 \Psi_1(x) + r_1 \overline{\Psi_1(x)}] = k_0 \tau'(x)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{D(x)} \int_0^x dt \int_0^t [p_1^0(\tau) - p_1(\tau)] d\tau - \\ &-i \frac{d}{dx} \left[\beta_1 r_1 \left(\Phi_1(x) - \overline{\Phi_1(x)} \right) + \gamma_1 \rho_1 \left(\Psi_1(x) - \overline{\Psi_1(x)} \right) \right] = m_0 p_1''(x) \end{aligned} \qquad (1.\ 12)$$

Substituting expressions (1.10) and (1.11) into (1.12) we obtain the integro-differential equations on the interval $0 < x < 1$

$$\frac{\psi(x)}{E(x)}-\frac{1}{2\pi}\int_0^1 Q(t,x)\psi'(t)dt-k_0\psi''(x)=f_1(x), \tag{1.13}$$

$$\frac{\varphi(x)}{D(x)}+\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^1 R(t,x)\varphi''(t)dt+m_0\varphi^{IV}(x)=f_2(x), \tag{1.14}$$

$$\psi(1)=0,\quad \varphi(1)=0,\quad \varphi'(1)=0$$

where

$$Q(t,x)=\frac{\lambda_1}{t-x}+\frac{\lambda_2}{t+x}+\frac{\lambda_3}{\beta_1 t+\gamma_1 x}+\frac{\lambda_4}{\gamma_1 t+\beta_1 x}$$

$$R(t,x)=\frac{k_1}{t-x}+\frac{k_2}{t+x}+\frac{k_3}{\beta_1 t+\gamma_1 x}+\frac{k_4}{\gamma_1 t+\beta_1 x}$$

$$\psi(x)=\int_0^x[\tau(t)-\tau_0(t)]dt,\ \varphi(x)=\int_0^x dt\int_0^t[p_0(\tau)-p(\tau)]d\tau,$$

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 Q(t,x)\tau_0(t)dt+k_0\tau_0'(x),$$

$$f_2(x)=m_0p_0''(x)+\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^1 R(t,x)p_0(t)dt$$

$$\lambda_1=\frac{\rho_1^2\gamma_1-r_1^2\beta_1}{(\rho_1-r_1)\beta_1\gamma_1},\ \lambda_2=\frac{\rho_1^2\gamma_1 I_1+r_1^2\beta_1 I_2^*}{\Delta\beta_1\gamma_1(\rho_1-r_1)},\ \lambda_3=\frac{-I_2\rho_1^2}{\Delta r_1(\rho_1-r_1)},\ \lambda_4=\frac{-I_1^*r_1^2}{\Delta\rho_1(\rho_1-r_1)},$$

$$k_1=\frac{\beta_1 r_1^2+\gamma_1\rho_1^2}{\rho_1-r_1},\ k_2=\frac{\beta_1 r_1 I_1+\gamma_1\rho_1 I_2^*}{\Delta(\rho_1-r_1)},\ k_3=\frac{\beta_1^2 r_1 I_2}{\Delta(\rho_1-r_1)},\ k_4=\frac{\gamma_1^2\rho_1 I_1^*}{\Delta(\rho_1-r_1)}.$$

Exact solution of equation (1.14)

Under the condition, when the inclusion-beam is loaded only with normal forces and bending stiffness of the inclusion varies linearly, i.e. $D(x)=d_0x^3$, $m_0(x)=m_0x$,the equation (1.14) and the corresponding boundary conditions take the form

$$\frac{\varphi(x)}{D(x)}-\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^1 R(t,x)\varphi''(t)dt+[m_0(x)\varphi''(x)]''=f_2(x),\qquad 0<x<1 \tag{2.1}$$

$$\varphi(1)=0\qquad \varphi'(1)=0$$

$$f_2(x) = -\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{p_0(t)dt}{t-x} + m_0(x)p_0''(x),$$

The solution of equation(2.1) is sought in the class of functions [17]

$$\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''' \in H([0,1]), \;\; \varphi^{IV} \in H((0,1)).$$

The change of variables $x = e^{\xi}$, $t = e^{\varsigma}$ in equation (2.1) gives

$$\frac{\varphi_0(\xi)}{d_0 e^{3\xi}} - \frac{1}{2\pi e^{\xi}}\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{0} e^{-2\varsigma} R\left(1, e^{\xi-\varsigma}\right)[\varphi_0''(\varsigma) - \varphi_0'(\varsigma)]d\varsigma +$$

$$+m_0 e^{-3\xi}[\varphi_0{}^{iv}(\xi) - 4\varphi_0'''(\xi) + 5\varphi_0''(\xi) - 2\varphi_0'(\xi)] == f_2\left(e^{\xi}\right), \qquad -\infty < x < 0,$$

where $\varphi_0(\xi) = \varphi(e^{\xi})$

Subjecting both part of this equation to generalized Fourier transform [18] we obtain the following Riemann boundary value condition:

$$\Phi^-(s)G(s) = \Psi^+(s) + F(s), \qquad |s| < \infty \tag{2.2}$$

where

$$G(s) = 1 + \frac{d_0}{2}\left[k_1 s \coth \pi s + k_2 \frac{s}{\operatorname{sh} \pi s} + k_3 \frac{e^{is\mu}}{\gamma_1}\frac{s}{\operatorname{sh} \pi s} + k_4 \frac{e^{-is\mu}}{\beta_1}\frac{s}{\operatorname{sh} s\pi s}\right](s-i) +$$

$$+\lambda_2^4(s^4 - 4is^3 - 5s^2 + 2is), \qquad \mu = \ln\frac{\beta_1}{\gamma_1}, \qquad \lambda_2^4 = m_0 d_0$$

$$\Phi^-(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} \varphi(e^{\varsigma})e^{is\varsigma}d\varsigma, \quad F(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{3\xi} f_2(e^{\xi})e^{is\xi}d\xi,$$

$$\Psi^+(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} \psi(\xi)e^{is\xi}d\xi$$

$$\psi(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ e^{2y}\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2s}R(1, e^{y-s})[\varphi_0''(s) - \varphi_0'(s)]ds, & y > 0 \end{cases}$$

The condition (2.2) can be represented as

$$\Phi^-(s)(1+\sqrt{i}\lambda_2 s)(1+i\sqrt{i}\lambda_2 s)G_0(s) = \frac{\Psi^+(s)}{(1-\sqrt{i}\lambda_2 s)(1-i\sqrt{i}\lambda_2 s)} + H(s) \tag{2. 3}$$

where

$$G(s)=\frac{G(s)}{1+\lambda_2^4 s^4}(1+i\lambda_2^2 s^2)(1-i\lambda_2^2 s^2)\equiv$$

$$\equiv G_0(s)(1-\sqrt{i}\lambda_2 s)(1-i\sqrt{i}\lambda_2 s)(1+\sqrt{i}\lambda_2 s)(1+i\sqrt{i}\lambda_2 s)$$

$$H(s)=\frac{F(s)}{(1-\sqrt{i}\lambda_2 s)(1-i\sqrt{i}\lambda_2 s)},\ G_0(s)=\frac{G(s)}{1+\lambda_2^4 s^4}.$$

By virtue of functions $\Phi^-(s)$ and $\Psi^+(s)$ definition, they will be boundary values of the functions which are holomorphic in the upper and lower half-planes, respectively.

The problem can be formulated as follows: it is required to determine the function $\Psi^+(z)$, holomorphic in the half-plane $\operatorname{Im} z>0$ and which vanishes at infinity, and the function $\Phi^-(z)$, holomorphic in the half-plane $\operatorname{Im} z<1$, (with the exception of a finite number of zeros of function $G(z)$) which vanishes at infinity and are continuous on the real axis by condition (2.3).

Since $\operatorname{Re} G_0(s)>0$ and $G_0(\infty)=G_0(-\infty)=1$, we have $\operatorname{Ind} G_0(s)=0$.

The solution of this problem has the form [17]

$$\Phi^-(z)=\frac{\tilde{X}(z)}{(1+\sqrt{i}\lambda_2 s)(1+i\sqrt{i}\lambda_2 s)},\qquad \operatorname{Im} z\le 0;$$

$$\Psi^+(z)=\tilde{X}(z)(1-\sqrt{i}\lambda_2 s)(1-i\sqrt{i}\lambda_2 s),\quad \operatorname{Im} z>0$$

$$\Phi^-(z)=(\Psi^+(z)+F(z))G^{-1}(z),\ 0<\operatorname{Im} z<1 \tag{2.4}$$

where

$$\tilde{X}(z)=X(z)\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(t)dt}{X^+(t)(t-z)}\right\},\qquad X(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln G_0(t)dt}{t-z}\right\}.$$

(here the integral should be understood in the sense of the Cauchy principal value).

Using the formula $\varphi''(x)=\dfrac{\varphi_0''(\ln x)-\varphi_0'(\ln x)}{x^2}$ and applying the inverse Fourier transformation

$$\varphi_0'(\ln x)=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}s\Phi^-(s)e^{-is\ln x}ds,\ \varphi_0''(\ln x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}s^2\Phi^-(s)e^{-is\ln x}ds$$

we will investigate the behavior of the function $p_0(x) - p(x) = \psi''(x)$ in the neighborhood of the points $z = 0$ and $z = 1$.

We obtain by an inverse transformation: $p_0(x) - p(x) = O(1), \quad x \to 1-$.

The poles of the function $\Phi^-(z)$ in the domain $D_0 = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ may be zeros of the function $G(z)$. It can be shown that the function $G(z)$ has no zeros in the strip $0 < \operatorname{Im} z < 2$. Then, applying Cauchy's theorem to the functions $e^{-i\xi z} iz\Phi^-(z)$, $e^{-i\xi z} z^2 \Phi^-(z)$ we obtain the following estimate

$$p_0(x) - p(x) = O(x^{y_0 - 2 + ix_0}), \qquad x \to 0+, \qquad y_0 > 2 \tag{2.5}$$

where $z_0 = x_0 + iy_0$ is zero of the function $G(z)$ with a minimal imaginary part and with $x_0 \neq 0$, consequently we have oscillating stress singularities.

References

1. Aleksandrov V. M., Mkhitaryan S. M., Contact problems for bodies with thin coverings and layers (in Russian). "Nauka", Moscow, 1983.

2. Popov G., Concentration of elastic stresses near punches, cuts, thin inclusion and supports(in Russian). "Nauka", Moscow, 1983.

3. Bantsuri R., The contact problem for an anisotropic wedge with an elastic fastening. (in Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR 222(3), 568-571, 1975.

4. Nuller B. The deformation of an elastic wedge- shaped plate supported by a rod of variable stiffnessand a method of solving mixed problems (in Russian). Prikl. Math. Mekh. 40, No.2, 306- 316 (1976).

5. Antipov Yu. A., Moiseev N. G. Exact solution of the two-dimensional problem for a composite plane with a cut that crosses the interface line. J. Appl. Math. Mech. 55, 1999, No.4, p. 531-539.

6. Antipov Yu. A., Arutyunyan N. Kh. A contact problem for an elastic layer with cover plates in the presence of friction and adhesion. J. Appl. Math. Mech. 57, 1993, No.1, 159-170.

7. Tsuchida, E., Mura, T., Dundurs, J. The elastic field of an elliptic inclusion with a slipping interface. Trans. ASME J. Appl. Mech. 53(1986), No.1, p. 103-107.

8. Ting, T. C. T. Uniform stress inside an anisotropic elliptic inclusion with imperfect interface bonding. J. Elasticity. 96(2009), No.1, p. 43-55.

9. Bantsuri, R., Shavlakadze, N.:The contact problem for an anisotropic wedge-shaped plate with an elasticfastening of variable stiffness. J. Appl. Math. Mech. 66, No.4, 645- 650 (2002)

10. Shavlakadze, N. The contact problems of Mathematical theory of elasticity for plates with an elastic inclusion. Acta Appl. Math. 99, 29-51(2007).

11. Khrapkov A. The first fundamental problem for a piecewise-homogeneous plane with acutperpendicularto a straight section. Prikl. Mat. I Mekh. 32, No.4, 647-669(1968).

12. Bantsuri R. The first fundamental problem for a piecewise-homogeneous orthotropic plane with acutperpendicularto a straight section. Soobstch. AkadNaukGruz SSR. 1978, 91 (3), 569-572.

13. Ungiadze A. The first fundamental problem for a piecewise-homogeneous elastic plane containing a semi-infinite crack intersecting the interface at a right angle. Trudy Tbil. Mat. Inst, 1986, 81, 79-86.

14. Bantsuri R., Shavlakadze N. The contact problem for a piecewise-homogeneousplane with a finite inclusion. J. Appl. Math. Mech. 75, No.4, 93- 97 (2011)

15. Lubkin, J. I., Lewis, I. C.: Adhesive shear flow for an axially loaded finite stringer bonded to an infinite sheet// Quart. J. Mech. Appl. Math. No. 23. 521 – 533. 1970.

16. Lekhnitskii, S. Anisotropic Plates (in Russian). Gostekhizdat, M.-L., 1947.

17. Muskhelishvili N. I., Singular integral equations. Boundary problems of function theoryandtheir application to mathematical physics (in Russian). 2nd. Fizmatgiz, Moscow, 1962;English translation: Wolters-NoordhoffPublishing, Grotingen, 1967.

18. Gakhov F. D., Cherskii Yu. I. Convolution Type Equation. (in Russian). “Nauka”, M., 1978

Information about author

Nugzar Naum Shavlakadze Iv. JavakhishviliTbilisi StateUniversityA. Razmadze Mathematical Institute, Georgian Technical University, E-mail:nusha1961@yahoo.com

Received 26.02.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика

СОДЕРЖАНИЕ 2022 г., том 75, №1-2

CONTENTS 2022, v. 75, №1-2

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2022, h.75, №1-2

Сдано в производство 24.05.2022 г.

Формат 70 х 100 $^{1}/_{16}$. Печ. лист – 12 3/8

Заказ № 1166. Тираж 150.

Цена договорная.

Типография Издательства НАН РА

Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24