ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ISSN 0002-3051

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

Հատոր
Том 75 № 3 2022
Volume

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Նվիրվում է ակադեմիկոս Ս.Ա.Համբարձումյանի 100-ամյակին

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА

Посвящается 100-летию академика С.А.Амбарцумяна

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS

Devoted to the 100th anniversary of academician S.A.Ambartsumyan

Издаётся с января 1966 года

Հատոր
Том 75 № 3 2022
Volume

ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ГИТУТЮН» НАН РА

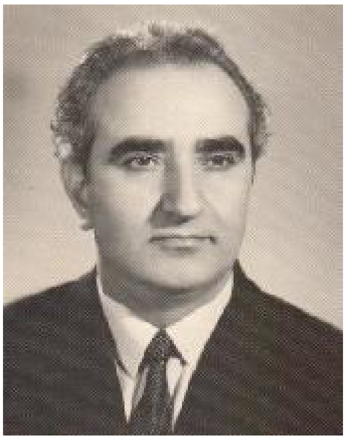
E-mail: **journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech**

Հայաստանի Հանրապետություն, Երևան, 0019 Բաղրամյան պող. 24/2, Հեռ. 52-48-02	Республика Армения, Ереван,0019 пр. Баграмяна 24 /2, Тел. 52-48-02	24/2, Baghramyan Ave. Yerevan 0019 Republic of Armenia Tel. 52-48-02

Сдано в производство 27.09.2022 г.
Формат 70 х 100 $^{1}/_{16}$. Печ. лист – 5 3/8
Заказ № 1189. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика



СТЕПАН РУБЕНОВИЧ МЕСЧЯН

(к 100 –летию со дня рождения)

22 октября 2022 года исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося ученого в области механики грунтов и инженерной геологии, одного из основоположников экспериментальной реологии глинистых грунтов, доктора технических наук, профессора Степана Рубеновича Месчяна.

С.Р.Месчян родился в 1922 году в г.Ахалцихе (Грузия). В 1939 году он окончил армянскую школу в г.Тбилиси, в 1944 году - строительной факультет ТбИИЖТ-Тбилисского института инженеров ж.-д. транспорта. В 1956 году ему была присвоена ученая степень кандидата технических наук, в 1965 году степень доктора технических наук, а в 1969 году он получил звание профессора.

В 1946 году С.Р.Месчян был направлен на работу на крупнейшую в Армении Гюмушскую гидроэлектростанцию. В 1953-1956 годы он работал в Институте стройматериалов и сооружений.

С 1956 года до 1971 года С.Р.Месчян работал в Институте математики и механики, с 1971 по 1986 – в Институте механики. Его усилиями в Институте была создана экспериментальная лаборатория механики грунтов, бессменным руководителем которой и являлся. В 1986-1992 г.г. С.Р.Месчян вместе с лабораторией был переведен в Институт геологических наук. В 1992 году он вернулся в Институт механики проработал там до последних дней своей жизни.

В институте механики НАР РА С.Р. Месчян занимал должность главного научного сотрудника. В этот период вокруг него сформировалась научная школа, объединившая ученых, успешно работающих в самых различных областях механики грунтов и инженерной геологии.

Свою педагогическую деятельность профессор С.Р Месчян начал в 1947 году чтением лекций по курсу «Механика грунтов, основания и фундаменты» в Ереванском отделении ТБИИЖТа, преподавал в Ереванском политехническом и Сельскохозяйственном институтах, в 1968-1982 г.г. занимал должность профессора кафедры «Общая и прикладная геология» Ереванского государственного университета.

Глубокие теоретические и экспериментальные исследования, создание на их основе принципиально новых методов расчета оснований и фундаментов, проектных решений, методов исследования реологических свойств глинистых грунтов принесли С.Р.Месчяну заслуженное признание как в Армении, так и за рубежом.

С.Р.Месчян одним из первых обосновал необходимость учета в практических расчетах реологического взаимодействия грунтов с инженерными сооружениями, учитывающего изменение напряженно –деформированного состояния во времени, и создал новое научное направление - экспериментальную реологию глинистых грунтов. Это позволило коренным образом изменить существовавшие ранее представления о принципах расчета сооружений на глинистых грунтах.

Во всех этих областях С.Р.Месяном были получены фундаментальные результаты, давшие новый импульс научным исследованиям применительно к практическим задачам.

Проф. С.Р. Месчян является автором и соавтором более 190 научных статей и десяти монографий на армянском, русском и английском языках. Второе издание книги «Экспериментальная реология глинистых грунтов» опубликовано на английском языке изд-вом Балкема (1995), а ее 3-е русское издание (2005) удостоено премии Президента Республики Армения в 2005 году. Монография «Ползучесть глинистых грунтов» была опубликована в 1967 году, книга была переведена на французский язык.

Монографии С.Р.Месчяна являются настольными книгами для его учеников и коллег, которые глубоко чтут его память.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика

АЛЕКСАНДР ПАРУЙРОВИЧ СЕЙРАНЯН
(К 75-летию со дня рождения)

Видный ученый в области механики и прикладной математики А.П.Сейранян родился 15 февраля 1947 года в Москве. Детство и юность его прошли в Армении. Он учился в Ереванской средней школе № 12 имени С.М.Кирова, которую окончил в 1965 году с отличием. В 1964 году А.П.Сейранян был призером Республиканских олимпиад по физике и математике, а в 1965 году стал победителем Республиканской олимпиады по физике и призером Всесоюзной олимпиады по физике. Он получил личное приглашение поступать в Московский физико-технический институт (Физтех). В 1965 году А.П.Сейранян поступил в Московский физико-технический институт, а после его окончания в 1971 году работал в Центральном аэрогидродинамическом институте имени Н.Е.Жуковского (ЦАГИ). В 1973 году поступил в аспирантуру Института проблем механики АН СССР, его научным руководителем был Ф.Л.Черноусько, ныне академик РАН. С 1976 по 1991 год работал в Институте проблем механики АН СССР. В 1977 году защитил кандидатскую диссертацию, а в 1988 году – докторскую диссертацию. В 1991-1992 годах работал в Датском техническом университете в качестве приглашенного профессора. С 1993 года и до недавнего времени работал в Институте механики МГУ имени М.В. Ломоносова ведущим научным сотрудником.

А.П.Сейранян является автором 190 научных работ, в том числе шести монографий на русском и английском языках. А.П.Сейранян внес крупный вклад в многопараметрическую теорию устойчивости, теорию оптимального проектирования конструкций, разработку аналитических и численных методов математической физики с приложениями к задачам механики. К ярким достижениям А.П.Сейраняна относятся аналитическое решение задачи Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны, решение задачи Келдыша о флаттере крыла с подкосами, решение классических задач об устойчивости качелей и вращении хула-хупа, разрешение парадокса Николаи и парадокса дестабилизации неконсервативных систем малыми диссипативными силами, новое решение задачи Челомея об устойчивости стержня под действием периодической нагрузки. Прикладные работы А.П.Сейраняна посвящены методам оптимизации жесткостных и аэроупругих характеристик конструкций самолетов.

В 1995 году А.П.Сейранян избран действительным членом Нью-Йоркской Академии наук. В 2008 году А.П.Сейранян избран академиком Национальной Академии Наук Армении (иностранным членом) и в 2010 году -- действительным членом Российской Академии естественных наук (РАЕН).

В 2012 году А.П.Сейранян в Италии был удостоен звания Лауреата международной премии имени Туллио Леви-Чивита за выдающиеся достижения в области механики и прикладной математики. В 2012 году А.П.Сейранян был удостоен премии имени М.А.Лаврентьева Российской Академии наук за цикл работ "Новые решения задачи Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны".

А.П.Сейранян является автором книги A.P.Seyranian «Stability and Catastrophes of Vibrating Systems Depending on Parameters», Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, 1991. Он является автором и издателем книги A.P.Seyranian, I.Elishakoff «Modern Problems of Structural Stability», 2002, Springer, Wien-New York. Монография A.P.Seyranian, A.A.Mailybaev «Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications», World Scientific, 2003 получила восторженные отзывы в международной научной печати. В 2009 году в издательстве «Физматлит» вышло в свет русское расширенное издание этой монографии.

А.П.Сейранян вошел в состав редколлегий 8 международных журналов: «Теоретическая и прикладная механика» (Югославия), «Structural and Multidisciplinary Optimization» (Springer), «Mathematical Problems in Engineering» (Hindawi), «Известия НАН Армении. Механика» (Армения), "Mathematics and Mechanics of Complex Systems" (Italy), "Прикладная математика и механика" (Россия), "Прикладная математика и математическая физика" (Россия) и "Journal of Vibration Testing and System Dynamics" (USA).

В 1995 году А.П.Сейранян выиграл грант Американского научного фонда и НАТО и совершил поездку по городам США. Он был гостем Математического института имени Р. Куранта (Нью-Йоркский университет), Мичиганского университета, Университета Райс в Хьюстоне (Техас), Мэрилендского университета и Университета штата Юта, где читал лекции и проводил научные исследования с американскими учеными. В 2001 году А.П.Сейранян организовал школу «Modern Problems of Structural Stability» в Международном центре по механике в г. Удине (Италия), где прочитал курс из семи лекций. В 2005 году А.П.Сейранян получил грант Японского общества по развитию науки для чтения лекций и исследований по механике совместно с японскими учеными. Он посетил в Японии Университет г. Цукуба, где проводил исследования, а также Университет префектуры Осака, Университет Рюкоку и участвовал в конференции по механике на острове Аваджи. В 2005 году А.П.Сейранян был приглашенным профессором в Римском Университете «La Sapienza». Он читал лекции на математическом и инженерном факультетах Римского университета, а также в Университете г. Болонья и Университете г. Салерно. В 2006 году А.П.Сейранян был приглашен в Институт фундаментальной и прикладной математики в Рио-де-Жанейро (Бразилия) для проведения исследований и чтения курса лекций по теории устойчивости и приложениям в механике. В рамках проекта ИНТАС в 2007 и 2008 годах А.П.Сейранян совершил поездки во Францию, Италию, Испанию и Голландию, где читал курс лекций. В 2009 году А.П.Сейранян выступил с докладом на пленарном заседании международной конференции по устойчивости, идентификации и управлению (SICON), проведенной Римским университетом. В 2010 году А.П.Сейранян прочитал курс лекций на конференции DINCON-2010 в г. Сьерра-Негра (Бразилия) и в Далянском технологическом университете (КНР). В 2012 году А.П.Сейранян по приглашению фонда Туллио Леви-Чивита посетил Исследовательский центр по математике и механике сложных систем (Цистерна ди Латина, Италия). В 2015 году фотография А.П.Сейраняна была представлена на Доске Почета Института механики МГУ. В последние годы А.П.Сейранян посетил Сербию, где в городе Нови Сад выступил на конференции, посвященной 70-летию академика Теодора Атанацковича.

Редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» сердечно поздравляет Александра Паруйровича Сейраняна с юбилеем и желает ему здоровья, долгих лет жизни и успехов в науке.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.3-7

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, УСИЛЕННОЙ ПО СВОЕЙ ГРАНИЦЕ НАКЛАДКОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Агаян К.Л.

Ключевые слова: плоская волна, отражение, волновое поле, контактные напряжения, накладка.

Propagation of Plane Waves in an Elastic Half-Plane Strengthened at its Boundary by a Stringer OF Infinite Length

Aghayan K.L.

Keywords: plane wave, reflection, wave field, contact stresses, stringer

The dynamic contact problem of the propagation of plane elastic waves incident from infinity onto the boundary of an elastic half-plane reinforced by an infinite plate of small thickness is studied. Questions related to the dynamic mutual influence of an elastic half-plane with an stringer attached to its boundary are studied. As a physical model for the stringer, a one-dimensional elastic continuum model is taken. The solution of the problem is constructed by direct application of the Fourier transform. Analytical expressions are obtained that represent the distribution of wave components in all parts of the half-plane.

Առաձգական հարթ ալիքի տարածումը եզրում՝ անվերջ երկարության վերադիրով ուժեղացված, առաձգական կիսահարթությունում

Աղայան Կ.Լ.

Հիմնաբառեր՝ հարթ ալիք, անդրադարձում, ալիքային դաշտ, կոնտակտային լարումներ, վերադիր

Դիտարկվում է անվերջությունից որոշակի անկյան տակ ընկնող լայնական հարթ ալիքի տարածման դինամիկ կոնտակտային խնդիրը, իր եզրագծով առաձգական անվերջ վերադիրով ուժեղացված, առաձգական կիսահարթության համար: Ուսումնասիրվում են առաձգական կիսահարթության և նրա եզրագծով ամրակցված առաձգական վերադիրի դինամիկ փոխազդեցության խնդիրը: Վերադիրի համար, որպես ֆիզիկական մոդել, ընդունվում է միաչափ առաձգական մարմնի վարկածը: Խնդրի փակ լուծումը կառուցվում է Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ: Ստացվել են անալիտիկ արտահայտություններ, բաղադրյալ կիսահարթության բոլոր տեղամասերում, ալիքային և կոնտակտային բաղադրիչների համար:

Исследуется динамическая контактная задача о распространении плоских упругих волн, падающих из бесконечности на границу упругой полуплоскости, усиленную бесконечной накладкой малой толщины. Изучаются вопросы, связанные с динамическим взаимовлиянием упругой полуплоскости с накладкой, сцепленной с ее границей. В качестве физической модели для накладки принимается модель одномерного упругого континуума. Решение задачи строится прямым применением преобразования Фурье. Получены аналитические выражения, представляющие распределение волновых составляющих во всех участках полуплоскости.

1. Введение

Исследования в области динамической теории упругости, связанные с процессами колебаний, дифракции и распространения различных типов волн в массивных телах с концентраторами напряжений, относятся к числу актуальных проблем динамики контактного взаимодействия упругих тел. В частности, это относится и к задачам распространения и отражения упругих и поверхностных волн типа Релея, Лява и др. в упругой плоскости с концентраторами напряжений типа - штамп, трещина, стрингер (накладка, включение), полоса, балка и др.

По исследованию плоских контактных и смешанных задач в динамической постановке для плоскости, полуплоскости и полосы, усиленных упругими креплениями, в виде стрингеров имеется достаточно много работ. Из динамических контактных задач, наиболее близких к рассматриваемой здесь задаче, отметим работы [1-5] и цитированные в них работы. В этих работах, в постановке плоской деформации, рассматриваются стационарные динамические контактные задачи для упругих пространства, слоя и полупространства. Контактирующими, с массивными телами, элементами здесь, в основном, являются штампы и слои, при различных видах нагружения и граничных условиях.

Число динамических контактных задач для упругой плоскости или полуплоскости с упругими стрингерами немного. Из таких укажем работы [6-8], отмечая при этом, что [6] является первой работой в этом направлении и, как отмечает ее автор, она была поставлена академиком Н.Х. Арутюняном.

В [6] рассматриваются две динамические контактные задачи о передаче гармонически изменяющейся во времени сосредоточенной силы к полубесконечной упругой полуплоскости через приклеенную к ее границе, упругую бесконечную и полубесконечную накладку. Работа выполнена на высоком математическом уровне. Получено замкнутое решение в виде интегралах Фурье.

Предлагаемая здесь задача является родственной к задачам из [6]. В [6,7] рассматривается вопрос о передаче сосредоточенной силы от стрингера к границе полуплоскости, где стрингер играет роль демпфера, ослабляющего влияние сосредоточенной силы. В рассматриваемой здесь задаче, как в [8], исследуются вопросы, связанные с общим изменением волнового поля вследствие взаимовлияния стрингера с границей полуплоскости.

2. Постановка задачи.

Пусть упругая полуплоскость в декартовой системе координат Oxz занимает область $\Omega^{-}\left(-\infty < x < \infty, z < 0\right)$. Ось Oz направлена по внешней нормали к границе полуплоскости. По своей границе $z = 0$ полуплоскость с упругими характеристиками $\left(\lambda, \mu, \rho\right)$ усилена бесконечной накладкой достаточно малой постоянной толщины h_S с упругими параметрами E_S, ν_S, ρ_S. Полуплоскость и накладка находятся в условиях полного контакта. Относительно усиливающей накладки предполагается, что вследствие малости толщины h_S, жесткость на изгиб пренебрежимо мала. Тогда давлением накладки на полуплоскость можно пренебречь и считать, что под накладкой возникают только касательные контактные напряжения. Это позволяет, как и в работах [9,10], в качестве физической модели накладки принять модель одномерного упругого континуума.

В рамках плоско-деформированного состояния исследуем двумерное волновое движение в указанной составной полуплоскости, когда на ее границу, из бесконечности падает плоская поперечная SV волна, описываемая потенциалом

$$\psi_\infty(x,z,t)=\psi_0(x,z)e^{-i\omega t} \quad x,z\in\Omega^- \tag{2.1}$$
$$\psi_0(x,z)=B_0e^{i(\xi x+\eta z)}, \quad \xi=k_2\cos\beta, \quad \eta=k_2\sin\beta,$$

где $\psi_0(x,z)$ - амплитуда, $\beta(0<\beta<\pi/2)$ - угол падения поперечной волны, $k_2=\omega/c_2$ - волновое число, $c_2=\sqrt{\mu/\rho}$ - скорость распространения поперечной волны в полуплоскости, μ и ρ - модуль сдвига и плотность среды, ω - частота колебаний, t - время.

При этих предположениях, требуется определить распределение волновых компонентов дифрагированного поля в полуплоскости и контактных напряжений, возникающих под накладкой.

3. Решение задачи для полуплоскости с заданной нагрузкой на границе

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу плоской деформации для вышеуказанной упругой области Ω^-, когда на границе действуют заданные нагрузки, а из бесконечности на границу полуплоскости падает поперечная волна, задаваемая формулой (2.1).

Согласно сделанному выше предположению относительно отсутствия нормальной нагрузки, примем, что на границе упругой полуплоскости имеем условия:

$$\sigma_z^*(x,z,t)\big|_{z=0}=0, \qquad \tau_{xz}^*(x,z,t)\big|_{z=0}=\tau_0(x)e^{-i\omega t} \quad (-\infty<x<\infty) \tag{3.1}$$

Учитывая гармонический характер решения задачи и опуская в дальнейшем гармонический множитель $e^{-i\omega t}$, при помощи амплитуд волновых потенциалов $\varphi(x,z)$ и $\psi(x,z)$ [11] решение этой задачи может быть сформулировано в виде следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi(x,z)+k_1^2\varphi(x,z)=0\\&\Delta\Psi(x,z)+k_1^2\Psi(x,z)=0\end{aligned} \qquad (x,z)\in\Omega^- \tag{3.2}$$

где

$$\Psi(x,z)=\psi(x,z)-B_0e^{\imath(\xi x+\eta z)}, \tag{3.3}$$

при граничных условиях

$$\sigma_z(x,0)=0; \quad \tau_{xz}(x,0)=\tau_0(x), \qquad |x|<\infty \tag{3.4}$$

Здесь $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, $k_1=\dfrac{\omega}{c_1}=\omega\sqrt{\rho/(\lambda+2\mu)}$ - волновое число, c_1 - скорость распространения продольных волн, λ,μ - параметры Ламе, ρ - плотность среды.

Применив к (3.2)-(3.4) преобразование Фурье с действительным переменным, придем к следующей системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\bar{\varphi}(\sigma,z)$ и $\bar{\psi}(\sigma,z)$:

$$\frac{d^2\bar{\varphi}(\sigma s,z)}{dx^2}-\gamma_1(\sigma)\bar{\varphi}(\sigma,z)=0$$
$$\frac{d^2\bar{\Psi}(\sigma,z)}{dz^2}-\gamma_2(\sigma)\bar{\Psi}(\sigma,z)=0 \tag{3.5}$$

с граничными условиями

$$\left.\left(\frac{d^2\bar{\varphi}}{dz^2}-\lambda^*\sigma^2\bar{\varphi}-2i\sigma\mu^*\frac{d\bar{\Psi}}{dz}\right)\right|_{z=0}=2\pi B_0\mu^*\xi\eta\,\delta(\sigma+\xi)\qquad(|\sigma|<\infty)$$
$$\left.\left(\frac{d^2\bar{\Psi}}{dz^2}+\sigma^2\bar{\Psi}+2i\sigma\frac{d\bar{\varphi}}{dx}\right)\right|_{z=0}=2\pi B_0\left(\eta^2-\xi^2\right)\delta(\sigma+\xi)-\frac{1}{\mu}\bar{\tau}_0(\sigma) \tag{3.6}$$

где $\lambda^*=\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}$, $\mu^*=\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}$, $\delta(x)$ - известная дельта функция Дирака,

$$\gamma_1(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_1^2},\qquad \gamma_2(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_2^2} \tag{3.7}$$

Общее решение (3.6), соответствующее физическим требованиями поставленной задачи, должно быть экспоненциально убывающим по z (неоднородные волны) либо уходящими от границы (однородные волны).

Такое решение записывается в виде

$$\bar{\varphi}(\sigma,z)=A_1(\sigma)e^{\gamma_1 z},\qquad \bar{\Psi}(\sigma,z)=B_1(\sigma)e^{\gamma_2 z} \tag{3.8}$$

где A_1, B_1 - неизвестные постоянные.

В (3.8) функции $\gamma_1(\sigma)$ и $\gamma_2(\sigma)$, задаваемые формулой (3.7), являются многозначными функциями. Точки $\sigma=\pm k_1$ и $\sigma=\pm k_2$ являются точками ветвления функций $\gamma_1(\alpha)$ и $\gamma_2(\alpha)$ в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$. Для обеспечения вышеуказанных требований принимается, что при $\sigma\to\pm\infty$ $\gamma_j(\sigma)\to|\sigma|\,(j=1,2)$, $\gamma_j(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_j^2}=-i\sqrt{k_j^2-\sigma^2}$, т.е. предполагается, что действительная ось обходит точки ветвления $\sigma=-k_1$ и $\sigma=-k_2$ сверху, а точки $\sigma=k_1$ и $\sigma=k_2$ - снизу [12].

Постоянные, входящие в (3.8), определяются из граничных условий (3.6) следующим образом:

$$A_1(\sigma)=8\pi B_0\frac{\xi\eta\left(\xi^2-\eta^2\right)}{R(\xi)}\delta(\sigma+\xi)-i\frac{2\sigma\sqrt{\sigma^2-k_2^2}}{\mu R(\sigma)}\overline{\tau_0}(\sigma) \tag{3.9}$$

$$B_1(\sigma)=-2\pi B_0\frac{\left(\xi^2-\eta^2\right)^2-4\xi^2\eta\sqrt{k_1^2-\xi^2}}{R(\xi)}\delta(\sigma+\xi)-\frac{2\sigma^2-k_2^2}{\mu R(\sigma)}\overline{\tau_0}(\sigma) \tag{3.10}$$

где $R(\sigma)$ – функция Релея:

$$R(\sigma)=\left(2\sigma^2-k_2^2\right)^2-4\sigma^2\sqrt{\left(\sigma^2-k_1^2\right)\left(\sigma^2-k_2^2\right)} \tag{3.11}$$

Подставляя значения A_1, B_1 из (3.9), (3.10) в (3.8), применяя обратное преобразование и учитывая (3.3), получим окончательные выражения волновых потенциалов $\varphi(x,z)$ и $\psi(x,z)$, решающих поставленную задачу при заданных B_0 и $\tau_0(x)$.

$$\begin{aligned}\varphi(x,z)&=4B_0\frac{\xi\eta\left(\xi^2-\eta^2\right)}{R(\xi)}e^{i\left(\xi x-\sqrt{k_1^2-\xi^2}z\right)}-\\&-\frac{i}{2\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma\sqrt{\sigma^2-k_2^2}\;\overline{\tau_0}(\sigma)e^{-i\sigma x+\sqrt{\sigma^2-k_1^2}z}}{R(\sigma)}d\sigma\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\psi(x,z)&=B_0e^{i(\xi x+\eta z)}-B_0\frac{\left(\xi^2-\eta^2\right)^2-4\eta\xi^2\sqrt{k_1^2-\xi^2}}{R(\xi)}e^{i\left(\xi x-\sqrt{k_2^2-\xi^2}z\right)}-\\&-\frac{1}{2\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(2\sigma^2-k_2^2\right)\overline{\tau_0}(\sigma)e^{-i\left(\sigma x-\sqrt{\sigma^2-k_2^2}z\right)}}{R(\sigma)}d\sigma\end{aligned} \tag{3.13}$$

Не останавливаясь здесь на подробностях, отметим, что в (3.9) первым, а в (3.10) вторым слагаемым обусловлены отраженные волны, а следующими – поверхностные волны с волновым числом $\sigma_R\left(R(\sigma_R)=0\right)$.

Отметим также, что при использовании формул (3.9)-(3.11) следует иметь в виду известное соотношение Снеллиуса $-k_1\cos\beta=k_2\cos\vartheta$, из которого определяется угол ϑ отраженной продольной волны.

Определим выражение образа Фурье горизонтальных перемещений граничных точек полуплоскости $\overline{U_x}(\sigma,0)$, которое будет необходимо для удовлетворения контактных условий и получения определяющего уравнения контактной задачи.
Применив к известному соотношению между компонентами перемещения и волновыми потенциалами [11], для трансформанты Фурье будем иметь:

$$\overline{U_x}(\sigma,z) = -i\sigma\bar{\varphi}(\sigma,z) - \frac{d\bar{\psi}(\sigma,z)}{dz} \tag{3.14}$$

Теперь, с учетом (3.8)-(3.10) получим:

$$\overline{U_x}(\sigma,0) = 2\pi i B_0 \eta H(\xi,\eta)\delta(\sigma+\xi) - \frac{k_2^2\sqrt{\sigma^2-k_2^2}}{\mu R(\sigma)}\overline{\tau_0}(\sigma), \tag{3.15}$$

где

$$H(\xi,\eta) = \frac{\left(\xi^2-\eta^2\right)\left(3\xi^2+\eta^2\right)+4\xi^2\eta\sqrt{k_1^2-\xi^2}}{R(\xi)} - 1 \tag{3.16}$$

В частном случае, из (3.12) и (3.13), полагая в них внешнюю нагрузку как сосредоточенную силу $\tau(x) = p_0(\zeta)\delta(x-\zeta)$, можно получить аналитические выражения волновых потенциалов как функции влияния для рассматриваемой задачи. Они имеют вид:

$$\begin{aligned}
\varphi(x,z,\zeta) &= B_0\frac{4\xi\eta\left(\xi^2-\eta^2\right)}{R(\xi)}e^{i\left(\xi x-\sqrt{k_1^2-\xi^2}z\right)} + \\
&+\operatorname{sign}(\zeta-x)\frac{p_0(\zeta)}{\mu}\frac{\sigma_R\sqrt{\sigma_R^2-k_2^2}e^{\sqrt{\sigma_R^2-k_2^2}z}e^{i\sigma_R|x-\zeta|}}{R'(\sigma_R)} + \\
&+\frac{p_0(\zeta)}{\pi\mu}\operatorname{sign}(\zeta-x)\int_0^{k_2}\frac{t\sqrt{k_2^2-t^2}\cos\left(\sqrt{k_2^2-t^2}z\right)e^{-it|x-\zeta|}}{R(t)}dt + \\
&+\frac{p_0(\zeta)}{\pi\mu}\operatorname{sign}(\zeta-x)\int_0^{\infty}\frac{t\sqrt{k_2^2+t^2}\cos\left(\sqrt{k_2^2+t^2}z\right)e^{-t|x-\zeta|}}{R(it)}dt
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\psi(x,z) &= B_0e^{i(\xi x+\eta z)} - B_0\frac{\left(\xi^2-\eta^2\right)^2-4\xi^2\eta\sqrt{k_1^2-\xi^2}}{R(\xi)}e^{i\left(\xi x+\sqrt{k_2^2-\xi^2}z\right)} - \\
&+\frac{ip_0(\zeta)}{\mu}\frac{\left(2\sigma_R^2-k_2^2\right)e^{\sqrt{\sigma_R^2-k_2^2}z}e^{i\sigma_R|x-\zeta|}}{R'(\sigma_R)} + \\
&+\frac{ip_0(\zeta)}{\pi\mu}\int_0^{k_2}\frac{\left(2t^2+k_2^2\right)\sin\left(\sqrt{k_2^2-t^2}z\right)e^{it|x-\zeta|}}{R(t)}dt + \\
&+\frac{ip_0(\zeta)}{\pi\mu}\int_0^{\infty}\frac{\left(2t^2+k_2^2\right)\sin\left(\sqrt{k_2^2+t^2}z\right)e^{-t|x-\zeta|}}{R(it)}dt
\end{aligned} \tag{3.18}$$

В полученных выражениях, в (3.18) начиная со второго слагаемого, первое слагаемое описывает отраженную волну, второе слагаемое – поверхностную волну Релея, а два последних слагаемых представляют объемные волны. Из (3.17) и (3.18) можно заметить, что поверхностная волна распространяется от точки приложения сосредоточенной тангенциальной силы в противоположные стороны со скоростью волн Релея.

4. Решение контактной задачи для бесконечной накладки

Рассмотрим движение накладки, отделяя ее от края полуплоскости. Обозначим через $\tau_S(x)$ амплитуду неизвестных тангенциальных контактных напряжений, возникающих на линии контакта накладки с границей полуплоскости. Применив принцип Даламбера к бесконечно малому элементу накладки, с учетом принятой выше модели одноосного напряженного состояния для него и закона Гука, для амплитуды горизонтальных перемещений $U_S(x)$ получим дифференциальное уравнение [8,10]

$$\frac{d^2U_S(x)}{dx^2}+q^2U_S(x)-A_S\tau_S(x)=0,\quad -\infty<x<\infty \tag{4.1}$$

$$q=\frac{\omega}{c_S},\quad c_S^2=\frac{E_S}{\rho_S\left(1-\nu_S^2\right)},\quad A_S=\frac{1-\nu_S^2}{E_S h_S}$$

Здесь q - волновое число, c_S - скорость распространения волн в стрингере (стержне), E_S,ν_S,ρ_S - модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала стрингера.

Применив к (4.1) преобразование Фурье, получим

$$\bar{U}_S(\sigma)=\frac{A_S}{q^2-\sigma^2}\bar{\tau}_S(\sigma) \tag{4.2}$$

Теперь заметим, что на линии соединения бесконечной накладки с границей полуплоскости должно выполняться условие сцепления, которое в трансформантах Фурье имеет вид:

$$\bar{U}_S(\sigma)=\bar{U}_x(\sigma,0)\qquad(-\infty<\sigma<\infty) \tag{4.3}$$

Из условия (4.3), с учетом выражений (3.15) и (4.2), для $\bar{\tau}_S(\sigma)$ получим:

$$\bar{\tau}_S(\sigma)=2\pi iB_0A(\xi,\eta)\delta(\sigma+\xi) \tag{4.4}$$

где

$$A(\xi,\eta)=\eta H(\xi,\eta)\frac{\mu R(\xi)\left(q^2-\xi^2\right)}{\mu A_S R(\xi)-i k_2^2\left(q^2-\xi^2\right)\sqrt{k_2^2-\xi^2}} \tag{4.5}$$

а $H(\xi,\eta)$ и $R(\xi)$ даются формулами (3.16) и (3.11).

Таким образом, выражение (4.4) дает решение контактной задачи, когда к границе полуплоскости приклеена бесконечная накладка.

Подставляя выражение $\overline{\tau}_S(\sigma)$ из (4.4) в (3.12) и (3.13), получим выражения амплитуд $\varphi(x,z)$ и $\psi(x,z)$:

$$\varphi(x,z,\zeta)=\frac{B_0}{R(\xi)}\left[4\xi\eta\left(\xi^2-\eta^2\right)-\frac{A(\xi,\eta)\xi}{\mu}\sqrt{k_2^2-\xi^2}\right]e^{i\left(\xi x-\sqrt{k_1^2-\xi^2}z\right)} \tag{4,6}$$

$$\psi(x,z)=B_0e^{i(\xi x+\eta z)}-\frac{B_0}{R(\xi)}\left[\left(\xi^2-\eta^2\right)^2-4\xi^2\eta\sqrt{k_1^2-\xi^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{A(\xi,\eta)\left(2\xi^2-k_2^2\right)}{\mu}\right]e^{i\left(\xi x-\sqrt{k_2^2-\xi^2}z\right)} \tag{4.7}$$

Последние формулы дают решение задачи в замкнутом виде.

В частности, для определения контактных касательных напряжений, возникающих под накладкой, будем иметь формулу

$$\tau_S(x)=B_0A(\xi,\eta)e^{-i\xi x}\qquad(-\infty<x<\infty) \tag{4.8}$$

а из (3.15) получим:

$$U_x(x,0)=B_0i\eta H(\xi,\eta)\frac{\mu A_S R(\xi)}{\mu A_S R(\xi)-ik_2^2\left(q^2-\xi^2\right)\sqrt{k_2^2-\xi^2}}e^{i\xi x}$$

Положив в (3.15) $\overline{\tau_0}(\sigma)\equiv 0$, получим перемещения $U_x^{(0)}(x,0)$ точек границы полуплоскости со свободной границей. Нетрудно проверить, что между перемещениями граничных точек полуплоскости с накладкой и без нее имеет место следующее соотношение:

$$U_x^{(0)}(x,0)=U_x(x,0)\left[1-\frac{ik_2^2\left(q^2-\xi^2\right)\sqrt{k_2^2-\xi^2}}{\mu A_S R(\xi)}\right] \tag{4.7}$$

Отметим некоторые качественные выводы из полученных результатов, вытекающие непосредственно из решения:

- волновое поле в рассматриваемой полуплоскости представляется в виде периодического колебательного движения;
- из (3.17) и (3.18) непосредственно следует, что если граница полуплоскости нагружена касательными нагрузками, то появляются поверхностные волны Релея;
- в случае бесконечной накладки, несмотря на присутствие контактных напряжений (4.6), нетрудно проверить, что потенциалы (3.12) и (3.13) не индуцируют поверхностные волны;

- при $q=\xi$, т.е. при совпадении волнового числа накладки с проекцией волного числа падающей волны на ось Ox, контактные напряжения не возникают.

5. Численный анализ.

Проведем численное сравнение амплитуд горизонтальных перемещений граничных точек полуплоскости и амплитуд отраженных волн для двух случаев: а) когда полуплоскость усилена бесконечной накладкой и б) когда ее граница свободна от напряжений. Вычислены отношения соответствующих величин в зависимости от угла падения падающей волны при различных значениях упругих характеристик полуплоскости и накладки.

На приведенных рисунках представлены графики зависимости отношения амплитуд горизонтальных перемещений граничных точек полуплоскости с накладкой к амплитудам перемещений без накладки (4.7):

$$\varepsilon_U = \left|U_x(x,0)\right| \Big/ \left|U_x^{(0)}(x,0)\right|,$$

а также отношения амплитуд отраженных продольных ε_φ и поперечных ε_ψ волн:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\left|A_{\varphi S}(x,0)\right|}{\left|A_{\varphi 0}(x,0)\right|} = \left|1 - \frac{A(\xi,\eta)\sqrt{k_2^2-\xi^2}}{4\mu\eta\left(\xi^2-\eta^2\right)}\right|$$

$$\varepsilon_\psi = \frac{\left|A_{\psi S}(x,0)\right|}{\left|A_{\psi 0}(x,0)\right|} = \left|1 + \frac{A(\xi,\eta)\left(2\xi^2-k_2^2\right)}{\mu\left[\left(\xi^2-\eta^2\right)^2 - 4\xi^2\eta\sqrt{k_1^2-\xi^2}\right]}\right|$$

от угла падения поперечной волны.

В качестве изменяемых параметров принимаются: коэффициент Пуассона полуплоскости ν, отношение скорости упругих волн в стрингере $c_S = \sqrt{E_S/\rho_S\left(1-\nu_S^2\right)}$ к c_2, обозначенного $\theta_S = c_S^2 \big/ c_2^2$, и комбинированного параметра $A_* = E_S h_S q \Big/ \left(\mu\left(1-\nu_S^2\right)\sqrt{\theta_S}\right)$.

На Рис.1 представлены кривые зависимости ε_U от угла падения β, когда $\theta_S = 0.5,\ A_* = 0.8$, а коэффициент Пуассона принимает значения $\nu = 0.16; 0.24; 0.43$

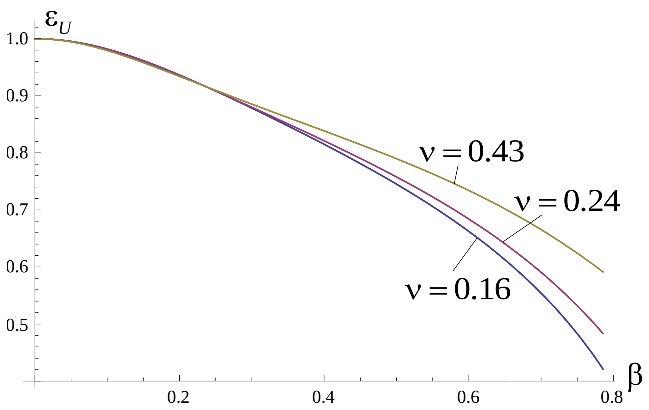


Рис.1 Зависимость ε_U от угла β при различных значениях коэффициента ν.

На Рис.2 представлены кривые зависимости ε_U от угла падения β, когда $\nu = 0.24,\ A_* = 0.5$, а параметр θ_S принимает значения $\theta_S = 0.4; 0.8; 1.5$

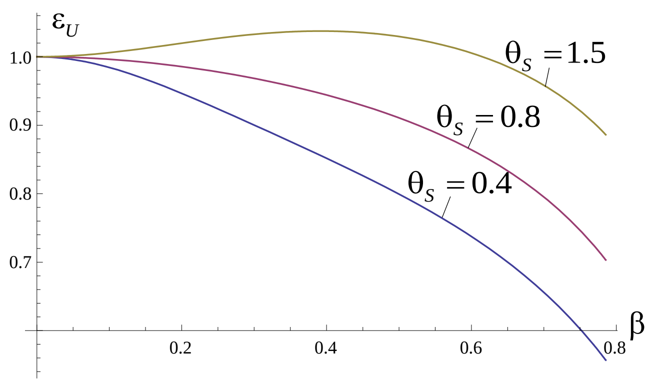


Рис.2 Зависимость ε_U от угла падения β при различных значениях параметра θ_S.

На Рис.3 представлены кривые зависимости ε_U от угла падения β, когда $\nu = 0.24;\ \theta_S = 0.8$, а комбинированный параметр принимает значения $A_* = 0.5; 1.0; 1.5$

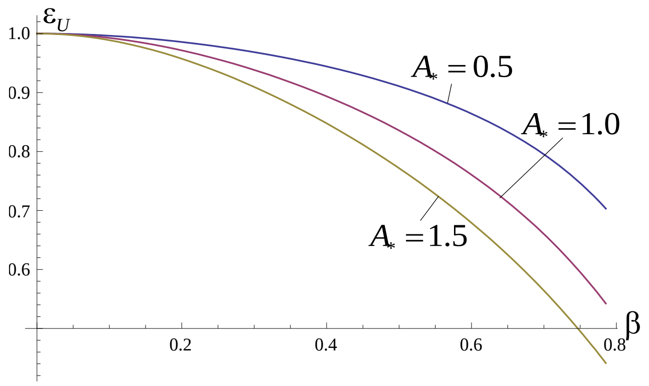


Рис.3 Зависимость ε_U от угла падения β при различных значениях параметра A_*.

Из графиков на Рис.1-Рис.3 замечаем, что при $\theta_S < 1$ наличие упругой накладки на границе полуплоскости приводит к уменьшению амплитуды перемещения граничных точек полуплоскости. Если же $\theta_S > 1$, то при малых углах падения наблюдается увеличение этой амплитуды. Изменение параметров ν и A_* приводит преимущественно к количественному изменению, причем влияние коэффициента Пуассона не очень существенно и более заметно при бо'льших значениях угла β.

На Рис. 4 представлены кривые зависимости ε_φ и ε_ψ от угла падения β, когда $\nu = 0.24,\ A_* = 0.5$, а параметр θ_S принимает значения $\theta_S = 0.4; 0.8; 1.5$.

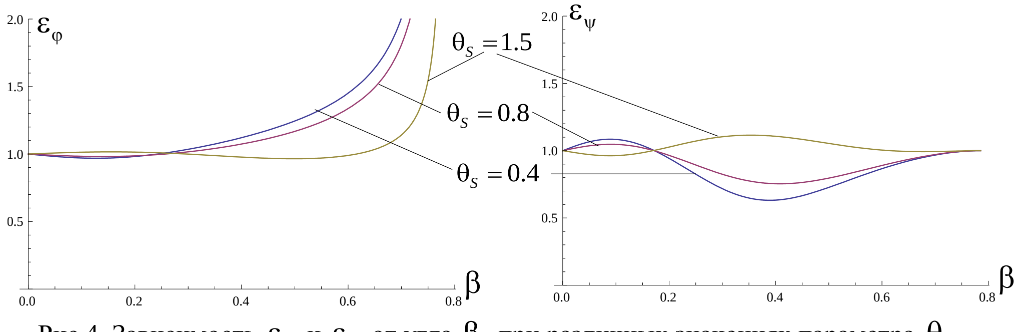


Рис.4 Зависимость ε_φ и ε_ψ от угла β при различных значениях параметра θ_S.

На Рис.5 представлены кривые зависимости ε_φ и ε_ψ от угла падения β, когда $\nu = 0.24;\ \theta_S = 0.8$, а комбинированный параметр принимает значения $A_* = 0.5; 1.0; 1.5$

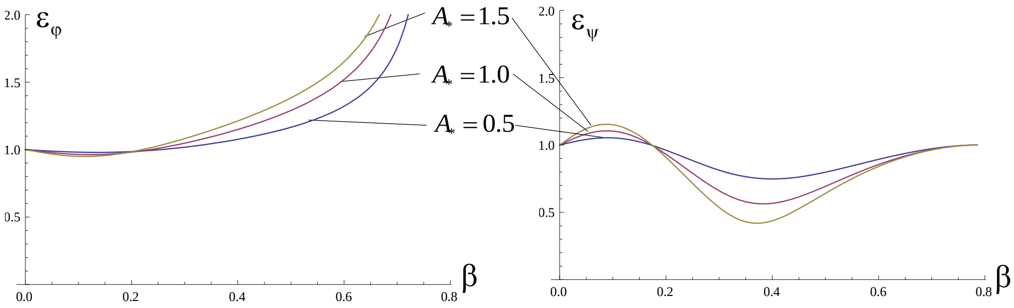


Рис.5 Зависимость ε_φ и ε_ψ от угла β при различных значениях параметра A_*

Зависимости ε_φ и ε_ψ от угла β при различных значениях коэффициента Пуассона ν здесь не приводятся, поскольку его влияние на эти величины значительно меньше, чем на ε_U. Как видим и здесь более существенное влияние оказывает параметр θ_S.

7. Заключение.

Исследуются вопросы, связанные с распространением плоских упругих волн, падающих под некоторым углом из бесконечности на границу упругой полуплоскости, усиленной стрингером бесконечной длины. Получено замкнутое решение задачи в виде аналитических выражений для волновых полей в полуплоскости и накладке, а также для контактных напряжений под стрингером. Построена функция влияния, которая позволяет непосредственно выписать определяющее интегральное уравнение для упругой полуплоскости, усиленной стрингерами конечной или полубесконечной длины, на границу которой из бесконечности падает плоская поперечная волна.

Показано, что в случае бесконечной накладки, как и в случае свободной от напряжений границы полуплоскости, поверхностные волны типа Релея не индуцируются. Кроме того, при совпадении волнового числа накладки q с проекцией волного числа падающей волны на ось Ox ξ, контактные напряжения не возникают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородачев Н.М. Колебания штампа, лежащего на упругом полупространстве, под действием горизонтальной гармонической силы. Изв. Вузов. Строительство и архитектура. 1963, № 9.
2. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. //В сб.: Проблемы механики деформируего твердого тела. Ереван, Изд. НАН Армении 1997, с. 79-96.
3. Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупространство. //Изв. НАН Армении., 2005. Т.58, №2. С. 9-15.
4. Агаян К.Л. Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве стонким упругим усиливающим слоем.//Тр. VII межд. конф. «Проблемы

динамики взаумодействия деформируемых сред», 19-23 сентября, 2011, Горис-Степанакерт, с. 18-25.
5. Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З., Дарбинян А.З. Распространение поверхностных волн в составной полуплоскости при условиях Навье на линии стыка.// Изв. НАН Армении., 2021, №4, с. 29-40.
6. Григорян Э.Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками.// Изв. АН СССР. МТТ. 1972. №5.
7. Григорян Э.Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. //ПММ, т.38, 1974, с. 321-330.
8. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. Изв. НАН РА, Механика, т 56, №4, 2003, с. 3-17.
9. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ing. Arch 3, 123-129 (1932).
10. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т.32,вып. 4.
11. Новацкий В. Теория упругости. М. Мир.: 1975. 872с.
12. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М. Мир. 1962, 294 с.
13. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук, думка, 1981. 284с.
14. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство.// Изв. НАН Армении, Механика, т. 60, №3, 2007, с. 23-37.
15. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Дифракция сдвиговой плоской волны в составном упругом пространстве сполубесконечной трещиной параллельмой линии неоднородности.// МТТ, 2013, №2, с. 106-113.
16. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. О новом методе определения асиптотических формул в задачах дифракции волн. Докл. НАН РА. 2010, №3, с 261-271.
17. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. Наук 1965, с. 328.

Сведения об авторе:
Агаян Каро Леренцович – проф., д.ф.м.н., в.н.с., Институт механики НАН РА, тел. +37491 485566
E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Поступила в редакцию 03.08.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.3-20

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КРУЧЕНИИ УПРУГОГО СЛОЯ ПОСРЕДСТВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ШТАМПА.

Гаспарян А.В., Мхитарян С.М., Саакян А.В.

Ключевые слова: упругий слой, кручение, цилиндрический штамп, касательные контактные напряжения, интегральное уравнение.

Գլանաձև դրոշմի միջոցով առաձգական շերտի առանցքահամաչափ ոլորման մասին կոնտակտային խնդիրը
ԳասպարյանԱ.Վ., Մխիթարյան Ս.Մ., Սահակյան Ա.Վ.

Բանալի բառեր. առաձգական շերտ, ոլորում, գլանային դրոշմ, շոշոփող կոնտակտային լարումներ, ինտեգրալ հավասարում:

Դիտարկվում է ուժային մոմենտով ոլորվող կոշտ շրջանային գլանաձև դրոշմի և առաձգական շերտի միջև առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդիրը: Համարվում է, որ դրոշմը հարակցված է շերտի վերին նիստին, իսկ շերտի ստորին նիստը ամրակցված է: Հանկելի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ այդ խնդրի լուծումը բերված է սիմետրիկ կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման: Ընդ որում կորիզը ներկայացված է Վեբեր-Սոնինի ինտեգրալի տեսքով կորիզի և ռեգուլյար կորիզի գումարով: Կատարված է շերտի բարձրության գնահատումը, որի հասանելիության դեպքում շերտը պրակտիկորեն դեֆորմացվում է որպես կիսատարածություն: Այդ ճանապարհին Աբելի ինտեգրալ հավասարման պարզ մեթոդով նորից ստացվել է Ռեյսներ-Սագոցիի խնդրի հայտնի լուծումը: Իսկ ելակետային Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի որոշիչ ինտեգրալ հավասարումը բերված է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման: Միաժամանակ, ելակետային ինտեգրալ հավասարումը կոլոկացիայի մեթոդով՝ զուգակցված ինտեգրալների հաշվման Գաուսի տիպի քառակուսացման բանաձևերի հետ, բերված է գծային հանրահաշվական հավասարումների վերջավոր համակարգի: Վեբեր-Սոնինի ինտեգրալի հաշվման համար քառակուսացման բանաձևի ստացման ժամանակ օգտագործվել են Չեբիշևի և Գեգենբաուերի օրթոգոնալ բազմանդամների հատկությունները: Առաձգական և երկրաչափական բնութագրիչ պարամետրերի փոփոխման բավականաչափ լայն տիրույթներում կատարված է քննարկվող խնդրի թվային վերլուծություն: Արդյունքում բացահայտվել է հիմնական ֆիզիկական մեծությունների՝ դրոշմի տակ կոնտակտային լարումների և դրոշմի պտտման անկյան փոփոխության օրինաչափությունները:

Contact Problem on Axis-symmetric Torsion of an Elastic Layer through a Cylindrical Stamp
Gasparyan A.V., Mkhitaryan S.M., Sahakyan A.V.

Key words: elastic layer, torsion, cylindrical punch, tangential contact stresses, integral equation.

The paper studies the axis-symmetric contact problem between an elastic layer and a rigid cylindrical circular stamp under torque. The stamp adheres to the upper boundary of the layer whereas the lower boundary of the layer is rigidly fastened. With the application of Hankel integral transform solving the problem reduces to solving the first kind Fredholm integral equation (IE) with symmetrical kernel, represented as a sum of its principal part, Weber-Sonin integral, and the regular kernel. It is estimated that once its height attains a certain level, the layer actually deforms as a semi-space. In the process, through Abel IE method, the solution of the well-known Reissner-Sagoci problem is obtained once again and the original first kind Fredholm IE is reduced to the second kind Fredholm IE. Concurrently, using the collocation method combined with Gauss type quadrature formulas for integral estimation, the original IE reduces to a finite system of linear algebraic equations. To obtain this quadrature formula, properties of Gegenbauer and Chebyshev orthogonal polynomials are used. In the enough wide range of change of characteristic elastic and geometrical parameters of the problem numerical analysis is performed and patterns of changes of tangential contact stresses under the stamp as well as the angle of twist of the stamp are identified.

Рассматривается осесимметрическая контактная задача между скручиваемым моментом жестким круговым цилиндрическим штампом и упругим слоем. Считается, что штамп сцеплен с упругим слоем на его верхней грани, а нижняя грань слоя о жестко защемлена. При помощи интегрального преобразования Ханкеля решение этой задачи сведено к решению ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим ядром, представимым суммой ядра в виде интеграла Вебера-Сонина и регулярного ядра. Произведена оценка высоты слоя, по достижению которой слой практически деформируется как упругое полупространство. На этом пути простым методом ИУ Абеля вновь получено известное решение задачи Рейсснера-Сагоци. А исходное определяющее ИУ Фредгольма первого рода сведено к ИУ Фредгольма второго рода. Одновременно это исходное ИУ методом коллокаций в сочетании с использованием квадратурных формул типа Гаусса для вычисления интегралов сведено к конечной СЛАУ. При получении этой квадратурной формулы, для вычисления интеграла Вебера-Сонина, использованы свойства ортогональных многочленов Гегенбауэра и Чебышева. В довольно широком диапазоне изменения характерных упругих и геометрических параметров обсуждаемой задачи проведен численный анализ. В результате выявлены закономерности изменения основных физических величин – касательных контактных напряжений под штампом и угол поворота штампа.

1. **Введение.** Контактные задачи о кручении упругих тел представляют собой обширную область раздела контактных и смешанных задач механики деформируемого твердого тела. Кручение, будучи одним из важных видов деформации многих машиностроительных, авиационных, строительных и других инженерных конструкций и их деталей, стало предметом многочисленных исследований. На основании результатов этих исследований формировалось и развивалось направление расчета конструкций на прочность при кручении. Теория кручения упругих тел излагается в учебниках и монографиях, из которых здесь укажем на монографии [1-4], посвященные всестороннему исследованию проблемы кручения. А основные достижения теории контактных задач кручения упругих тел, полученные до 1976г., отражены в коллективной монографии [5].

В статье [6] путем введения системы сплющенных сфероидальных координат построено решение контактной задачи об осесимметричном кручении упругого полупространства посредством сцепленного с ним кругового жесткого цилиндрического штампа. Решение этой задачи Рейсснера и Сагоци, методом дуальных интегральных уравнений построено в [7]. В работах [8,9] методом дуальных интегральных уравнений решена контактная задача о кручении упругого слоя жестким круглым штампом. Здесь решение задачи в конечном итоге сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, решаемого приближенно. В [9] рассмотрена еще одна задача о кручении слоя при смешанных граничных условиях.

В последние десятилетия контактные задачи о кручении упругих тел развивались и обобщались новыми постановками и привлечением новых физических моделей, связанных с новыми материалами, в частности, с появлением функционально-градиентными материалами. В этом направлении укажем на работы [10-14].

К контактным задачам кручения и, вообще, к контактным и смешанным задачам можно применить более эффективные современные численно-аналитические и аналитические методы, разработанные в последние десятилетия. С этой целью в настоящей статье в постановке, несколько отличной от [8,9], вновь рассматривается контактная задача об осесимметрическом кручении однородного изотропного слоя, когда его нижняя грань жестко защемлена, а сцепленный с ним по верхней грани слоя абсолютно жесткий круговой цилиндрический штамп скручивается моментом. Решение этой задачи методом интегрального преобразования Ханкеля сведено к решению интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода с симметрическим ядром, представимым суммой ядра в виде интеграла Вебера-Сонина и регулярного ядра. Для сравнительного анализа результатов по основным механическим характеристикам поставленной задачи и выявления степени эффективности применяемых математических методов решения определяющего ИУ обсуждаемой задачи, здесь построение этого решения будет осуществлено следующими методами:

a) представление неизвестного касательного контактного напряжения формулой с явно выделенной особенностью на граничной контактной окружности и его непрерывной частью, получение определяющего ИУ Фредгольма второго рода для определения непрерывной части;

b) метод коллокаций в сочетании с методом квадратурных формул;

c) метод ортогональных многочленов Якоби;

d) метод сингулярных интегральных уравнений.

В настоящей статье решение определяющего ИУ будет построено методами a) и b), а впоследствии – методами c) и d). Но численная реализация полученных здесь определяющих ИУ и аналитических формул будет, пока, осуществляться методом b) и, частично, методом c). Для основных характеристик задачи получены явные аналитические формулы и в частных случаях проведен их сравнительный численный анализ. При этом для вычисления интеграла Вебера-Сонина с необходимой точностью получена квадратурная формула с использованием многочленов Гегенбауэра.

2. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Пусть отнесенный к цилиндрической системе координат (r,φ,z) с полюсом в начале координат O декартовой системы координат $Oxyz$, упругий однородный изотропный слой $\Omega=\{0\le r<\infty;\ -\pi<\varphi\le\pi;\ 0\le z\le H\}$ высоты H и модуля сдвига G по грани $z=0$ жестко защемлен (Рис.1).

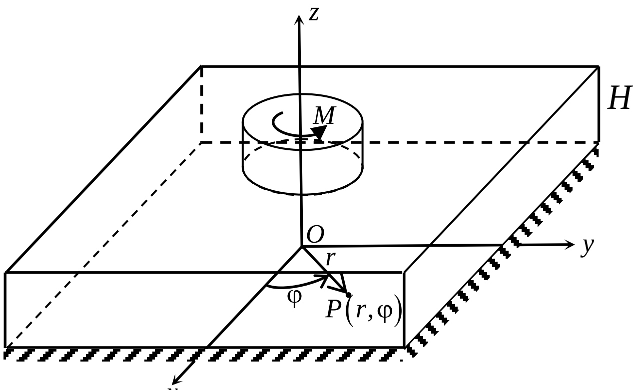


Рис.1 Схематическое представление задачи

Пусть, далее, на своей верхней грани $z = H$ слой сцеплен с абсолютно жестким круговым цилиндрическим штампом радиуса a, к которому приложен скручивающий вокруг оси Oz против часовой стрелки момент величины M. Требуется определить касательные контактные напряжения под штампом:

$$\tau_{z\varphi}\Big|_{z=H-0} = \tau(r) \qquad (0 \le r < a)$$

и угол закручивания, или поворота штампа, γ.

Выведем основные уравнения поставленной задачи. Так как имеет место осевая симметрия, то

$$u_r = u_r(r,z) = 0, \;\; u_z = u_z(r,z) = 0, \;\; u_\varphi = u_\varphi(r,z) \ne 0 \quad \big((r,\varphi,z) \in \Omega\big)$$

где u_r, u_z, u_φ -радиальные, вертикальные и окружные перемещения точек слоя.

Отсюда вытекает, что [10] (стр. 232-233; ф.-лы (22.4) и(22.7)) компоненты деформации имеют вид

$$\begin{gathered} e = e_r = e_\varphi = e_z = e_{rz} = 0; \quad e_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; \quad e_{z\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \\ 2\omega_r = -\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}; \quad 2\omega_\varphi = 0; \quad 2\omega_z = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \end{gathered},$$

а закон Гука - вид

$$\tau_{r\varphi} = Ge_{r\varphi} = G\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right); \; \tau_{rz} = 0; \quad \tau_{z\varphi} = Ge_{z\varphi} = G\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \tag{2.1}$$

где $\tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{z\varphi}$ - компоненты касательных напряжений. В данном случае дифференциальные уравнения равновесия сводятся к одному-единственному уравнению

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2}{r}\tau_{r\varphi} = 0. \tag{2.2}$$

Теперь подставляя (2.1) в (2.2), придем к следующему дифференциальному уравнению для $u_\varphi(r,z)$

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} = 0 \quad \big((r,\varphi,z) \in \Omega\big).$$

Далее решение описанной выше контактной задачи сведем к решению ИУ. С этой целью предварительно построим решение следующей вспомогательной смешанной граничной задачи:

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} = 0 \qquad (0 < r < \infty; \; 0 < z < H)$$

$$u_\varphi(r,z)\big|_{z=+0}=0 \quad \tau_{z\varphi}\big|_{z=H-0}=G\left.\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right|_{z=H-0}=\tau(r) \;\; (0<r<\infty)$$
$$\tau(r)=0 \quad 0<a<\infty; \quad \tau_{r\varphi}^2+\tau_{z\varphi}^2\to 0 \qquad r^2+z^2\to\infty; \tag{2.3}$$

где $\tau(r)$ считается известной функцией.

Запишем также моментное условие равновесия штампа

$$\int_0^a \tau(r)r^2dr=\frac{M}{2\pi}\ , \tag{2.4}$$

подразумевая под $\tau(r)$ распределение искомых касательных контактных напряжений, причем $\tau(r)\equiv 0$ при $r\in(a,\infty)$.

Решение граничной задачи (2.3)-(2.4) построим методом интегрального преобразования Ханкеля, для чего введем в рассмотрение трансформанты Ханкеля

$$\left\{\bar{u}_\varphi(\lambda,z);\ \bar{\tau}(\lambda)\right\}=\int_0^\infty \left\{u_\varphi(r,z);\ \tau(r)\right\}J_1(\lambda r)rdr\,,$$

где $J_1(x)$- бесселева функция первого рода, а λ $(0<\lambda<\infty)$- спектральный параметр Ханкеля. Приняв во внимание известную формулу из [7] (стр. 79, (2.32)), двухмерную смешанную граничную задачу (2.3) преобразуем в трансформантах Ханкеля к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\bar{u}_\varphi}{dz^2}-\lambda^2\bar{u}_\varphi=0 \qquad (0<z<H) \\ \bar{u}_\varphi(\lambda,z)\big|_{z=+0}=0 \qquad G\left.\dfrac{\partial\bar{u}_\varphi}{\partial z}\right|_{z=H-0}=\bar{\tau}(\lambda). \end{cases} .$$

Решение этой граничной задачи представляется формулой

$$\bar{u}_\varphi(\lambda,\mathrm{z})=\frac{1}{\lambda G}\frac{\operatorname{sh}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda H)}\bar{\tau}(\lambda) \quad (0\le z\le H),$$

откуда

$$\bar{u}_\varphi(\lambda,H)=\frac{1}{\lambda G}\operatorname{th}(\lambda H)\bar{\tau}(\lambda) \quad (0<\lambda<\infty)\ .$$

Теперь, по формуле обратного преобразования Ханкеля находим

$$u_\varphi(r,H)=\frac{1}{G}\int_0^\infty K(r,\rho)\tau(\rho)\rho d\rho \qquad (0\le r<\infty). \tag{2.5}$$

$$K(r,\rho)=\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\operatorname{th}(\lambda H)\,d\lambda$$

Выделим главную часть ядра $K(r,\rho)$,

$$K(r,\rho)=\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda+\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\left[\operatorname{th}(\lambda H)-1\right]d\lambda=$$

$$=\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda-\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\frac{e^{-\lambda H}}{\operatorname{ch}(\lambda H)}\,d\lambda.$$

В результате

$$K(r,\rho)=W_1(r,\rho)-L(r,\rho)\quad(0<r,\rho<\infty). \tag{2.6}$$

$$W_1(r,\rho)=\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\,d\lambda;\quad L(r,\rho)=\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\frac{e^{-\lambda H}}{\operatorname{ch}(\lambda H)}\,d\lambda,$$

где $W_1(r,\rho)$ - известный интеграл Вебера-Сонина. Очевидно, что подынтегральное выражение регулярного ядра $L(r,\rho)$ при $\lambda=0$ обращается в ноль, а при $\lambda\to\infty$ убывает, по крайней мере, с экспоненциальной скоростью $e^{-2\lambda H}$, что обеспечивает быструю сходимость этого интеграла.

Далее, исходя из (2.5), реализуем условие контакта штампа с упругим слоем $u_\varphi=\gamma r\quad(0\le r\le a)$, где γ угол закручивания или поворота штампа. В результате, для определения искомой функции $\tau(r)$ получим следующее определяющее ИУ Фредгольма первого рода

$$\frac{1}{G}\int_0^a K(r,\rho)\tau(\rho)\rho\,d\rho=\gamma r\quad(0<r<a), \tag{2.7}$$

Введем безразмерные величины

$$x=r/a;\quad s=\rho/a;\quad H_0=H/a;\quad \tau_0(r)=\tau(ax)/G;\quad M_0=M/2\pi Ga^3.$$

Тогда ИУ (2.7) примет вид

$$\int_0^1 K_0(x,s)\tau_0(s)s\,ds=\gamma x\quad(0<x<1), \tag{2.8}$$

а условие (2.4) – вид

$$\int_0^1 \tau_0(s)s^2\,ds=M_0. \tag{2.9}$$

При этом, согласно (2.6), будем иметь

$$K_0(x,s) = L_0(x,s) - N_0(x,s) \tag{2.10}$$

$$L_0(x,s) = \int_0^\infty J_1(\alpha x) J_1(\alpha s)\, d\alpha, \quad N_0(x,s) = \int_0^\infty J_1(\alpha x) J_1(\alpha s) \frac{e^{-\alpha H_0}}{\operatorname{ch}(\alpha H_0)}\, d\alpha. \; .$$

Таким образом, решение обсуждаемой контактной задачи свелось к решению ИУ (2.8) при условии (2.9).

Теперь оценим величину регулярного ядра $N_0(\mathrm{x}, s)$ из (2.10). Воспользуемся формулой [11] (стр. 966, ф.-ла 8.411.1, $n=1$).

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\theta - x\sin\theta)\, d\theta \quad (0 < x < \infty),$$

откуда сразу вытекает, что $|J_n(x)| \le 1$. Следовательно,

$$|N_0(x,s)| \le \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha H_0}}{\operatorname{ch}(\alpha H_0)}\, d\alpha \quad (0 < x, s < \infty).$$

Этот интеграл легко берется подстановкой $t = e^{-\alpha H_0}$ и после элементарных преобразований дает

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha H_0}}{\operatorname{ch}(\alpha H_0)}\, d\alpha = \frac{\ln 2}{H_0}.$$

Пусть ε - сколь угодно малое положительное число. Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$|N_0(x,s)| \le \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha H_0}}{\operatorname{ch}(\alpha H_0)}\, d\alpha = \frac{\ln 2}{H_0} < \varepsilon .$$

Отсюда непосредственно следует, что при $H_0 > \dfrac{\ln 2}{\varepsilon}$ с большой точностью можно пренебречь ядром $N_0(x,s)$, т.е. упругий слой можно заменить нижним упругим полупространством. А если потребовать выполнение условия

$$\frac{e^{-\alpha H_0}}{\operatorname{ch}(\alpha H_0)} < \varepsilon,$$

то обнаружим, что верхний предел для интеграла $N_0(x,s)$ из (2.10) практически можно заменить конечным числом

$$-\frac{\ln \varepsilon_0}{H_0}; \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Теперь ядра $L_0(x,s)$ и $N_0(x,s)$ преобразуем дальше. Воспользовавшись выражением из [11] (стр. 706, ф.-ла 6.574.), для интеграл Вебера-Сонина будем иметь

$$L_0(x,s)=\int_0^\infty J_1(\alpha x)J_1(\alpha s)d\alpha=\begin{cases}\dfrac{s\Gamma(3/2)}{x^2\Gamma(2)\Gamma(1/2)}F\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},2,\dfrac{s^2}{x^2}\right) & (s<x)\\[2ex] \dfrac{x\Gamma(3/2)}{s^2\Gamma(2)\Gamma(1/2)}F\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},2,\dfrac{x^2}{s^2}\right) & (x<s)\end{cases},$$

где $F(a,b,c,x)$ -гипергеометрическая функция Гаусса.

Далее, примем во внимание формулу аналитического продолжения этой функции [11] (стр. 1057, ф.-ла 9.134.2). Окончательно получим

$$L_0(x,s)=\frac{xs}{2\left(x^2+s^2\right)^{3/2}}F\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4},2,\frac{4x^2s^2}{\left(x^2+s^2\right)^2}\right)\quad (0<x,s<\infty) \tag{2.11}$$

Так как в этом случае $a+b-c=\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{4}-2=0$, то гипергеометрический ряд сходится для всех $x,s>0$, кроме случая $x=s$. При помощи асимптотических формул для $J_1(\alpha x)$ и $J_1(\alpha s)$ легко заметить, что при $x=s$ интеграл Вебера-Сонина $L_0(x,s)$ и, следовательно, гипергеометрический ряд (2.11) имеют логарифмическую особенность.

Перейдя к ядру $N_0(x,s)$, в интеграле от переменной α перейдем к переменной $\alpha=-\ln\tau/H_0$ $(0<\tau<1)$. В результате

$$N_0(x,s)=\frac{2}{H_0}\int_0^1 J_1\left(-\frac{\ln\tau}{H_0}x\right)J_1\left(-\frac{\ln\tau}{H_0}s\right)\frac{\tau d\tau}{\left(1+\tau^2\right)}\ . \tag{2.12}$$

Из (2.10) и (2.12) вытекает, что ядро $N_0(x,s)$ можно бесконечное число раз по x и s продифференцировать под знаком интеграла.

3. Решение определяющего ИУ (2.8)-(2.10). Это ИУ сначала относительно непрерывной части искомой функции сведем к ИУ Фредгольма второго рода. С этой целью воспользуемся известным представлением [12,13]

$$L_0(x,s)=\int_0^\infty J_1(\alpha x)J_1(\alpha s)d\alpha=\frac{2}{\pi}\frac{1}{xs}\int_0^{\min(x,s)}\frac{t^2dt}{\sqrt{\left(x^2-t^2\right)\left(s^2-t^2\right)}}$$

и ИУ (2.8) запишем в форме

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1\tau_0(s)ds\int_0^{\min(x,s)}\frac{t^2dt}{\sqrt{\left(x^2-t^2\right)\left(s^2-t^2\right)}}=f(x)\quad (0<x<1)$$

$$f(x)=\gamma x^2+x\int\limits_0^1 N_0(\mathrm{x},s)\tau_0(s)sds\ . \tag{3.1}$$

Далее, ИУ (3.1) преобразуем следующим образом:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^x \tau_0(s)ds\int\limits_0^s \frac{t^2dt}{\sqrt{(x^2-t^2)(s^2-t^2)}}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_x^1 \tau_0(s)ds\int\limits_0^x \frac{t^2dt}{\sqrt{(x^2-t^2)(s^2-t^2)}}=f(x)\quad (0<x<1).$$

В первом повторном интеграле поменяем порядок интегрирования. После элементарных преобразований получим

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^x \frac{T_0(t)t^2dt}{\sqrt{x^2-t^2}}=f(x)\quad (0<x<1),\ \ T_0(t)=\int\limits_t^1 \frac{\tau_0(s)ds}{\sqrt{s^2-t^2}} \tag{3.2}$$

Далее, нам понадобятся формулы обращения ИУ Абеля:

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}\int\limits_0^x \frac{g(t)t^2dt}{\sqrt{x^2-t^2}}=h(x) &&\qquad g(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{th(\mathrm{t})dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\\ &\frac{2}{\pi}\int\limits_x^1 \frac{g(t)dt}{\sqrt{t^2-x^2}}=h(x) &&\qquad g(x)=-\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 \frac{th(\mathrm{t})dt}{\sqrt{t^2-x^2}}\end{aligned} \tag{3.3}$$

Теперь ИУ Абеля (3.2) обращаем по первой паре (3.3). После простых преобразований будем иметь

$$xT_0(x)=\int\limits_0^x \frac{f'(\mathrm{t})dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\qquad (0<x<1),$$

и, следовательно, приняв во внимание вторую формулу (3.2), придем к следующему ИУ Абеля:

$$\int\limits_x^1 \frac{\tau_0(s)ds}{\sqrt{(s^2-x^2)}}=\frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{f'(t)dt}{\sqrt{(x^2-t^2)}}\quad (0<x<1).$$

Это уравнение вновь обращаем, но по второй паре формул (3.3). После элементарных преобразований получим

$$\tau_0(x)=-\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\int\limits_0^x f'(t)dt\int\limits_x^1 \frac{ds}{\sqrt{(s^2-x^2)(s^2-t^2)}}+\int\limits_x^1 f'(t)dt\int\limits_t^1 \frac{ds}{\sqrt{(s^2-x^2)(s^2-t^2)}}\right]$$

Далее, используя выражение интеграла из [11] (стр. 260, ф.-ла 3.152.11), можем записать

$$\tau_0\left(x\right)=-\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^1 M_0\left(x,t\right)f'(\mathrm{t})dt \qquad \left(0<x<1\right) \tag{3.4}$$

$$M_0\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}F\left(\arcsin\left(k_0\left(x,t\right)\right),\dfrac{t}{x}\right) & \left(t<x\right)\\[2mm] \dfrac{1}{t}F\left(\arcsin\left(k_0\left(t,x\right)\right),\dfrac{x}{t}\right) & \left(x<t\right)\end{cases} =$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{k_0(x,t)}\frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(x^2-t^2u^2\right)}} & \left(t<x\right)\\[2mm] \displaystyle\int_0^{k_0(t,x)}\frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(t^2-t^2xu^2\right)}} & \left(x<t\right)\end{cases},$$

$$k_0\left(x,t\right)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1-t^2}} \qquad k_0\left(t,x\right)=\sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}} \qquad \left(0<x,t<1\right),$$

где $F(q,k)$ - неполный эллиптический интеграл первого рода модуля $k\left(0<k<1\right)$ [11].

После внесения в (3.4) производной под знак интеграла, ИУ (3.4) преобразуется в следующее ИУ

$$\tau_0\left(x\right)+\frac{2}{\pi}\int_0^1 Q_0\left(x,s\right)\tau_0(s)sds=-g(x) \quad \left(0<x<1\right)$$

$$Q_0\left(x,s\right)=\int_0^1\frac{\partial M_0\left(x,t\right)}{\partial x}\left[N_0\left(t,s\right)+t\frac{\partial N_0\left(t,s\right)}{\partial t}\right]dt \tag{3.5}$$

$$g(x)=\frac{4\gamma}{\pi}\int_0^1\frac{\partial M_0\left(x,t\right)}{\partial x}tdt$$

Теперь искомые касательные контактные напряжения представим в виде

$$\tau\left(r\right)=\frac{\varphi(r)}{\sqrt{a^2-r^2}} \quad (0<r<a),$$

где $\varphi(r)$ - гельдеровская функция на отрезке $\left[0,a\right]$. Тогда после перехода к безразмерным величинам, будем иметь

$$\tau_0\left(x\right)=\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \varphi_0\left(x\right)=\frac{\varphi(ax)}{aG} \quad \left(0<x<1)\right) \tag{3.6}$$

Далее, (3.6) подставим в (3.5) и примем во внимание, что согласно (3.4) и (2.12)

$$\frac{\partial M_0(x,t)}{\partial x}=$$

$$=\begin{cases} -x\displaystyle\int_0^{k_0(x,t)}\frac{du}{\left(x^2-t^2u^2\right)\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(x^2-t^2u^2\right)}}-\frac{x\sqrt{1-t^2}}{\left(x^2-t^2\right)\sqrt{1-x^2}} & (t<x) \\ x\displaystyle\int_0^{k_0(t,x)}\frac{u^2du}{\left(t^2-x^2u^2\right)\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(t^2-x^2u^2\right)}}+\frac{x\sqrt{1-t^2}}{\left(t^2-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} & (x<t) \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial N_0(t,s)}{\partial t}=\frac{1}{H_0{}^2}\int_0^1\left[J_2\left(-\frac{\ln u}{H_0}t\right)-J_0\left(-\frac{\ln u}{H_0}t\right)\right]J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0}s\right)\frac{u\ln u du}{\left(1+u^2\right)}. \tag{3.8}$$

Здесь была использована формула $J_1'(x)=\left[J_0(x)-J_2(x)\right]/2$. Приняв во внимание (3.6) - (3.8) и опустив промежуточные выкладки, ИУ (3.5) преобразуем к виду

$$\varphi_0(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^1 R_0(x,s)\varphi_0(s)\frac{sds}{\sqrt{1-s^2}}=-g_0(x) \quad (0<x<1) \tag{3.9}$$

$$R_0(x,s)=\frac{xs}{H_0}\int_0^1\frac{R_1(s,t)\sqrt{1-t^2}dt}{t^2-x^2}-\frac{xs\sqrt{1-x^2}}{H_0}\times$$

$$\times\left[\int_0^x R_1(s,t)R_2(t,x)dt-\int_x^1 R_1(s,t)R_3(t,x)dt\right]=Q_0(x,s)s\sqrt{1-x^2}$$

$$R_1(s,t)=2\int_0^1 J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0}t\right)J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0}s\right)\frac{udu}{1+u^2}+$$

$$+\frac{t}{H_0}\int_0^1\left[J_2\left(-\frac{\ln u}{H_0}t\right)-J_0\left(-\frac{\ln u}{H_0}t\right)\right]J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0}s\right)\frac{u\ln u du}{1+u^2}$$

$$R_2(t,x)=\int_0^{k_0(x,t)}\frac{du}{\left(x^2-t^2u^2\right)\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(x^2-t^2u^2\right)}} \quad (t<x)$$

$$R_3(t,x)=\int_0^{k_0(t,x)}\frac{u^2du}{\left(t^2-x^2u^2\right)\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(t^2-x^2u^2\right)}} \quad (x<t)$$

$$g_0(x)=\sqrt{1-x^2}\,g(x)=-\frac{4\gamma}{\pi}x\left\{F\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1-x^2\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-x^2}\left[\int_0^x R_2(t,x)tdt-\int_x^1 R_3(t,x)tdt\right]\right\}=-\gamma h_0(x)\quad.$$

Наконец, полагая в (3.9) $\varphi_0(x)=\gamma\psi_0(x)\quad(0<x<1)$, определяющее ИУ Фредгольма второго рода рассматриваемой задачи представим в виде

$$\psi_0(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^1 R_0(x,s)\psi_0(s)\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}=h_0(x)\quad(0<x<1),\tag{3.10}$$

а условие (2.9) – в виде

$$\gamma\int_0^1\frac{\psi_0(s)s^2ds}{\sqrt{1-s^2}}=M_0\ .\tag{3.11}$$

Далее, интегралы с переменными пределами интегрирования, входящие в

$$h_0(x)=\frac{4}{\pi}x\left\{F\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1-x^2\right)+\sqrt{1-x^2}\left[\int_0^x R_2(t,x)tdt-\int_x^1 R_3(t,x)tdt\right]\right\}$$

преобразуем в интегралы с постоянными пределами, удобные для численной реализации. А именно,

1)

$$\int_0^x R_1(s,t)R_2(t,x)dt-\int_x^1 R_1(s,t)R_3(t,x)dt=$$

$$(t=x\tau)\qquad\qquad(t=x+(1-x)\tau)\tag{3.12}$$

$$=x\int_0^1 R_1(x\tau,s)R_2(x\tau,x)d\tau-(1-x)\int_0^1 R_1(x+(1-x)\tau,s)R_3(x+(1-x)\tau,x)d\tau$$

2)

$$R_2(t,x)=\int_0^{k_0(x,t)}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}\left(x^2-t^2u^2\right)^{3/2}}=\qquad\left(u=k_0(x,t)\tau\right)$$

$$=\left(1-t^2\right)^{3/2}\sqrt{1-x^2}\int_0^1\frac{d\tau}{\left[x^2\left(1-t^2\right)-t^2\left(1-x^2\right)\tau^2\right]^{3/2}\sqrt{1-t^2-\left(1-x^2\right)\tau^2}}\ (t<x)\tag{3.13}$$

3)

$$R_3(t,x)=\int\limits_0^{k_0(t,x)}\frac{u^2du}{\left(t^2-x^2u^2\right)^{3/2}\sqrt{\left(1-u^2\right)}}=\qquad \left(u=k_0(t,x)\tau\right)$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\left(1-t^2\right)^{-3/2}}\int\limits_0^1\frac{\tau^2d\tau}{\left[t^2\left(1-x^2\right)-x^2\left(1-t^2\right)\tau^2\right]^{3/2}\sqrt{1-x^2-\left(1-t^2\right)\tau^2}}\quad (x<t) \tag{3.14}$$

4)

$$\int\limits_0^x R_2(t,x)tdt-\int\limits_x^1 R_3(t,x)tdt=$$

$$(t=x\tau)\qquad\qquad (t=x+(1-x)\tau) \tag{3.15}$$

$$=x^2\int\limits_0^1 R_2(x\tau,x)\tau d\tau-(1-x)\int\limits_0^1 R_3\left(x+(1-x)\tau,x\right)\left[x+(1-x)\tau\right]d\tau$$

Теперь в определяющем ИУ (3.10) - (3.11) перейдем на стандартный интервал $(-1,1)$, продолжая входящие в них функции четным образом на интервал $(-1,0)$. В результате определяющее ИУ (3.10) преобразуется в ИУ

$$\psi_0(|x|)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 R_0(|x|,|s|)\psi_0(|s|)\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}=h_0(|x|)\ \ (-1<x<1), \tag{3.16}$$

а условие (3.11) – в условие

$$\gamma\int\limits_{-1}^1\frac{\psi_0(|s|)s^2ds}{\sqrt{1-s^2}}=2M_0 \tag{3.17}$$

Здесь, согласно (3.9) и (3.12)-(3.15), имеем

$$R_0(|x|,|s|)=|s|\sqrt{1-x^2}Q_0(|x|,|s|)=\frac{|s|\operatorname{sign}x}{2H_0}\int\limits_{-1}^1\frac{R_1(|s|,|t|)\sqrt{1-t^2}dt}{t-x}-$$

$$-\frac{|x||s|}{H_0}\sqrt{1-x^2}\left[|x|\int\limits_0^1 R_1(|x|\tau,|s|)R_2(|x|\tau,|x|)d\tau-\right. \quad . \tag{3.18}$$

$$\left.-(1-|x|)\int\limits_0^1 R_1\left(|x|+(1-|x|)\tau,|s|\right)R_3\left(|x|+(1-|x|),|x|\right)d\tau\right]$$

$$R_1(|s|,|t|)=2\int\limits_0^1 J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0}|t|\right)J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0}|s|\right)\frac{udu}{1+u^2}+$$

$$+\frac{|t|}{H_0}\int\limits_0^1\left[J_2\left(-\frac{\ln u}{H_0}|t|\right)-J_0\left(-\frac{\ln u}{H_0}|t|\right)\right]J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0}|s|\right)\frac{u\ln udu}{1+u^2} \tag{3.19}$$

$$h_0(|x|)=\frac{4}{\pi}|x|\left\{F\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1-x^2\right)+x^2\sqrt{1-x^2}\left[\int_0^1 R_2\left(|x|\tau,|x|\right)\tau d\tau-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(1-|x|\right)\int_0^1 R_3\left(|x|+\left(1-|x|\right)\tau,|x|\right)\left[|x|+\left(1-|x|\right)\tau,|x|\right]d\tau\right]\right\}, \qquad (3.20)$$

а функции $R_2(t,x)$ и $R_3(t,x)$ даются, соответственно, формулами (3.13) и (3.14).

Решение определяющего ИУ (3.16) при условии (3.17) сведем к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). С этой целью следуя общему методу [14], в качестве узловых точек для вычисления интеграла в (3.16) выберем точки $x_m=\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2M}\right)$ $\left(m=\overline{1,M}\right)$, где M - любое натуральное число, являющиеся корнями многочлена Чебышева первого рода $T_M(s)$. Тогда по квадратурной формуле Гаусса ИУ (3.16) сведем к следующей СЛАУ:

$$\begin{aligned}
&X_m+\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}R_0\left(|x_m|,|s_n|\right)X_n=a_m \qquad \left(m=\overline{1;M}\right)\\
&X_m=\psi_0(|x_m|);\quad a_m=h_0(|x_m|) \qquad \left(m,n=\overline{1;M}\right)\\
&x_m=\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2M}\right);\qquad s_n=\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2M}\right),
\end{aligned} \qquad (3.21)$$

а условие (3.17) – к соотношению

$$\frac{\pi\gamma}{M}=\sum_{n=1}^{M}X_n s_n^{\,2}=2M_0 \qquad (3.22)$$

Элементы матрицы и правой части СЛАУ (3.21) составляются в соответствии с (3.18)-(3.20). при этом, первый интеграл с ядром Коши из (3.18) легко вычисляется по квадратурной формуле

$$\int_{-1}^{1}\frac{R_1\left(|s_n|,|t|\right)\sqrt{1-t^2}dt}{t-x_m}=\frac{\pi}{2(M+1)}\sum_{p=1}^{M}R_1\left(|s_n|,|t_p|\right)\sin^2\left(\frac{\pi p}{M+1}\right)\frac{1}{t_p-x_m},$$

где $t_p=\cos\left(\pi p/M+1\right)$ $\left(p=\overline{1,M}\right)$ - корни многочленов Чебышева второго рода $U_M(t)$.

Отметим, что после решения СЛАУ (3.21) по (3.22) устанавливается зависимость между углом поворота штампа γ и безразмерным моментом M_0, приложенному к нему.

Решение исходного определяющего ИУ (2.8)-(2.10) построим также методом коллокаций в сочетании с применением квадратурных формул. С этой целью решение ИУ (2.8) вновь представим, как и выше, в виде

$$\tau_0(x) = \gamma\psi_0(x) \Big/ \sqrt{1-x^2} \quad (0 < x < 1) \tag{3.23}$$

Для применения квадратурных формул необходимо уравнение (2.8) свести к интервалу $(-1,1)$. Учитывая нечетность ядра $K_0(x,s)$ по обоим переменным, как и нечетность правой части уравнения, уравнение (2.8) можно будет записать на интервале $(-1,1)$, если принять неизвестную функцию $\psi_0(x)$ четной функцией. Исходя из того, что к левой части уравнения нельзя будет применить известные квадратурные формулы типа Гаусса из-за наличия в ядре $L_0(x,s)$ логарифмической особенности, оставим уравнение (2.8) в исходном виде, но функцию $\psi_0(x)$ будем считать четной функцией на интервале $(-1,1)$. Уравнение (2.8) запишем в виде

$$\int_0^1 \left[sL_0(x,s) - sN_0(x,s)\right] \frac{\psi_0(s)}{\sqrt{1-s^2}}\, ds = x \qquad (0 < x < 1) \tag{3.24}$$

Искомую функцию $\psi_0(x)$ будем искать в виде:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i T_n(x)}{(x-\xi_i)U_{n-1}(\xi_i)}, \qquad \left(\xi_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$$

при условии $Z_i = Z_{n-i+1}$, обеспечивающим четность этой функции.

Для упрощения дальнейших записей порядок аппроксимации n будем считать четным числом $n = 2k \ (k \in N)$.

Для регулярного ядра $N_0(x,s)$ можем воспользоваться обычной квадратурной формулой. Действительно, учитывая четность $sN_0(x,s)$ и $\psi_0(x)$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^1 sN_0(x,s)\tau_0(s)\,ds &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 sN_0(x,s)\tau_0(s)\,ds = \frac{\pi}{4k}\sum_{i=1}^{2k} Z_i N_0[x,\xi_i]\xi_i = \\ &= \frac{\pi}{4k}\left[\sum_{i=1}^{k} Z_i N_0[x,\xi_i]\xi_i + \sum_{i=1}^{k} Z_i N_0[x,-\xi_i](-\xi_i)\right] = \frac{\pi}{2k}\sum_{i=1}^{k} Z_i N_0[x,\xi_i]\xi_i \end{aligned} \tag{3.25}$$

Учитывая, что $Z_i = Z_{n-i+1}$ и $n = 2k \ (k \in N)$, функцию $\psi_0(x)$ представим в виде:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} \frac{Z_i T_{2k}(x)}{(x-\xi_i)U_{2k-1}(\xi_i)} = \frac{x}{k}\left\{\sum_{i=1}^{k} \frac{Z_i T_{2k}(x)}{(x^2-\xi_i^{\,2})U_{2k-1}(\xi_i)}\right\}$$

Подставив это представление в первый интеграл, будем иметь:

$$\int_0^1 L_0(x,s)\, s \frac{s}{k\sqrt{1-s^2}} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{Z_i T_{2k}(s)}{\left(s^2-\xi_i^{\,2}\right) U_{2k-1}(\xi_i)} \right\} ds =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{Z_i}{U_{2k-1}(\xi_i)} \int_0^1 L_0(x,s) \frac{s^2 T_{2k}(s)}{\left(s^2-\xi_i^{\,2}\right)\sqrt{1-s^2}}\, ds$$

Для вычисления интеграла

$$\int_0^1 L_0(x,s) \frac{s^2 T_{2k}(s)}{\left(s^2-\xi_i^{\,2}\right)\sqrt{1-s^2}}\, ds \qquad (3.26)$$

используем спектральное соотношение [19,20]

$$\int_0^1 L_0(x,s) C_{2m}^{3/2}\left(\sqrt{1-s^2}\right) \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\, ds =$$

$$= \frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(m+2)\Gamma(m+1)}\, x C_{2m}^{3/2}\left(\sqrt{1-x^2}\right) \qquad m = 0,1,2,.. \quad (0<x<1) \qquad (3.27)$$

где $C_n^{\lambda}(x)$ - многочлены Гегенбауэра.

Поскольку $\frac{T_{2k}(s)}{s^2-\xi_i^{\,2}}$ при произвольном натуральном k является многочленом относительно s^2, то этот многочлен можно представить посредством многочленов Гегенбауера четного порядка. Учитывая специфику многочленов Гегенбауера в выражении (3.26), рассматриваемый многочлен представим в виде:

$$\frac{T_{2k}(s)}{\left(s^2-\xi_i^{\,2}\right)} = \sum_{j=1}^{k} c_j^{(i)} C_{2(j-1)}^{3/2}\left(\sqrt{1-s^2}\right)$$

Для определения $c_j^{(i)}$ необходимо приравнять последнее равенство в произвольных, отличных друг от друга, k точках. Выбрав, например, точки $s_p = \frac{p-1}{k}$ $\left(p=\overline{1,k}\right)$, получим систему

$$\frac{T_{2k}(s_p)}{\left(s_p^2-\xi_i^{\,2}\right)} = \sum_{j=1}^{k} c_j^{(i)} C_{2(j-1)}^{3/2}\left(\sqrt{1-s_p^{\,2}}\right) \qquad \left(p=\overline{1,k}\right)$$

Определение коэффициентов $c_k^{(i)}$ целесообразно провести численно.

После определения $c_j^{(i)}$ для интеграла (3.26) будем иметь

$$\int_0^1 L_0(x,s)\frac{s^2T_{2k}(s)}{\sqrt{1-s^2}\left(s^2-\xi_i^2\right)}ds=\int_0^1 L_0(x,s)\frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\sum_{j=1}^k c_j^{(i)}C_{2(j-1)}^{3/2}\left(\sqrt{1-s^2}\right)ds=$$

$$=\sum_{j=1}^k c_j^{(i)}\int_0^1 L_0(x,s)\frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}C_{2(j-1)}^{3/2}\left(\sqrt{1-s^2}\right)ds=$$

$$=\sum_{j=1}^k c_j^{(i)}\frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(j-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(j+1)\Gamma(j)}xC_{2(j-1)}^{3/2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

В результате, для первого интеграла в уравнении (3.24) получим квадратурную формулу

$$\int_0^1 sL_0(x,s)\frac{\psi_0(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k\frac{Z_i}{U_{2k-1}(\xi_i)}P_i(x) \qquad (3.28)$$

где

$$P_i(x)=\sum_{j=1}^k c_j^{(i)}\frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(j-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(j+1)\Gamma(j)}xC_{2(j-1)}^{3/2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

Используя квадратурные формулы (3.25) и (3.28) и выбирая в качестве точек коллокации корни y_j многочлена Чебышева второго рода $U_{2k}(x)$, решение интегрального уравнения (3.24), окончательно, сведется к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k Z_i\left[\frac{P_i(y_j)}{U_{2k-1}(\xi_i)}-\frac{\pi}{2}N_0\left[y_j,\xi_i\right]\xi_i\right]=y_j \qquad \left(j=\overline{1,k}\right) \qquad (3.29)$$

где

$$\xi_i=\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{4k}\right)\quad\left(i=\overline{1,k}\right),\qquad y_j=\cos\left(\frac{\pi j}{2k+1}\right)\quad\left(j=\overline{1,k}\right),$$

$$P_i(x)=\sum_{j=1}^k c_j^{(i)}\frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(j-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(j+1)\Gamma(j)}xC_{2(j-1)}^{3/2}\left(\sqrt{1-x^2}\right),$$

а $c_j^{(i)}$ определяются из системы

$$\frac{T_{2k}(s_p)}{\left(s_p^2-\xi_i^2\right)}=\sum_{j=1}^k c_j^{(i)}C_{2(j-1)}^{3/2}\left(\sqrt{1-s_p^2}\right)\ ;\quad s_p=\frac{p-1}{k}\ \left(p=1,k\right)$$

Угол закручивания γ определится из условия (2.9), которое после дискретизации принимает вид:

$$\gamma \frac{\pi}{2k} \sum_{i=1}^{k} Z_i \xi_i^{\,2} = M_0 \tag{3.30}$$

и, тем самым, устанавливается связь между углом поворота штампа γ и приложенным к штампу безразмерным моментом M_0.

Теперь в ИУ (2.8) с ядром (2.10) совершим предельный переход $H_0 \to \infty$. В результате придем к определяющему ИУ задачи Рейсснера и Сагоци о кручении упругого полупространства посредством сцепленного с ним жесткого цилиндрического штампа:

$$\int_0^1 L_0(x,s)\tau_0(s)sds = \gamma x \quad (0<x<1)$$

Полагая здесь $\tau_0(x) = \gamma\,\omega_0(x) \quad (0<x<1)$ и используя приведенное выше представление интеграла Вебера-Сонина, придем к аналогичному с (3.1) ИУ:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \omega_0(s)ds \int_0^{\min(x,s)} \frac{t^2 dt}{\sqrt{(x^2-t^2)(s^2-t^2)}} = x^2 \quad (0<x<1).$$

Далее, поступив совершенно аналогично сделанному выше, придем к двум последовательно решаемым ИУ Абеля:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{s^2\Omega_0(s)ds}{\sqrt{x^2-s^2}} = x^2 \quad (0<x<1) \tag{3.31}$$

$$\Omega_0(s) = \int_s^1 \frac{\omega_0(t)dt}{\sqrt{t^2-s^2}} \quad (0<s<1)\;. \tag{3.32}$$

Теперь по формуле обращения Абеля (первая пара (3.3)) из (3.31) находим

$$s^2\Omega_0(s) = \frac{d}{ds}\int_0^s \frac{u^3 du}{\sqrt{s^2-u^2}} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_0^s \frac{u^2 du^2}{\sqrt{s^2-u^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[s^2 \int_0^s \frac{du^2}{\sqrt{s^2-u^2}} - \int_0^s \sqrt{s^2-u^2}\,du^2 \right] = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[s^2 \int_0^\xi \frac{d\eta}{\sqrt{\xi-\eta}} - \int_0^\xi \sqrt{\xi-\eta}\,d\eta \right] = 2s^2.$$

$$\xi = s^2 \quad \eta = u^2$$

Следовательно, $\Omega_0(s) = 2$, и ИУ (3.32) примет вид

$$\int_s^1 \frac{\omega_0(t)\,dt}{\sqrt{t^2-s^2}} = 2 \quad (0<s<1)$$

Отсюда, опять по формуле обращения Абеля (вторая пара (3.3)), легко находим

$$\omega_0(x) = \frac{4x}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (0<x<1). \qquad (3.33)$$

Наконец, подставляя (3.33) в (3.17), придем к следующей зависимости между γ и M_0:

$$8\gamma = 3\pi M_0. \qquad (3.34).$$

4. Числовые результаты. Вычислим относительный угол поворота штампа $\gamma_* = \gamma/M_0$, который при больших значениях толщины слоя H_0, согласно (3.34), должен стремиться к значению $3\pi/8$. В таблице 1 приведены значения γ_* для различных значений H_0, рассчитанных по формуле (3.30) при различных порядках аппроксимации $n=2k$. По строчкам можно судить о скорости сходимости метода коллокаций, описанного выше, а по столбцам – о толщине слоя, при которой слой можно заменить полупространством.

Таблица 1. Значения γ_*.

	$k=3$	$k=5$	$k=6$	$k=8$	$k=10$	$k=12$
$H_0=0.1$	0.32836	0.3393	0.33628	0.33666	0.33673	0.33673
$H_0=1$	1.11089	1.10992	1.10985	1.10981	1.1098	1.10979
$H_0=10$	1.17903	1.17811	1.17805	1.178	1.17799	1.17799
$H_0=100$	1.17914	1.17823	1.17812	1.17812	1.17811	1.1781
$H_0=\infty$	Точное значение $3\pi/8=1.178097.....$					

Отметим, что порядок относительной разницы между соседними столбцами изменяется от 10^{-2} до 10^{-5} в первой строчке и от 10^{-3} до 10^{-6} в остальных строчках. Очевидно, что для графического представления результатов вполне достаточно провести расчеты при $k=6$.

Для наглядности и более точной, чем по таблице 1, оценки зависимости угла поворота γ_* от толщины слоя H_0 на Рис. 2 приведен график этой зависимости, а также пунктиром показана линия точного значения этого угла для случая полупространства.

Как показывает этот график кривая γ_* при больших H_0 асимптотически приближается к прямой $\gamma_* = 3\pi/8$, соответствующей задаче Рейснера-Сагоци. Так и должно было быть.

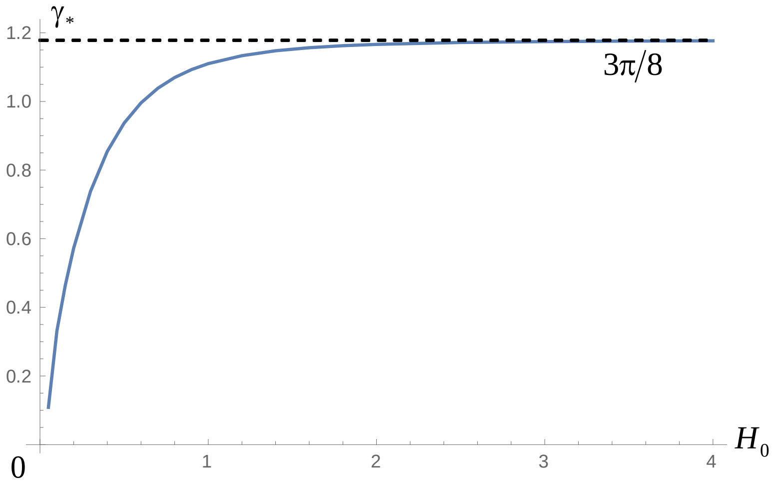


Рис. 2 Зависимость угла поворота γ_* от толщины слоя H_0

На Рис. 3 представлены кривые распределения безразмерных контактных напряжений, отнесенных к углу поворота штампа, $\tau_0(x)/\gamma$ для различных значений относительной толщины слоя H_0.

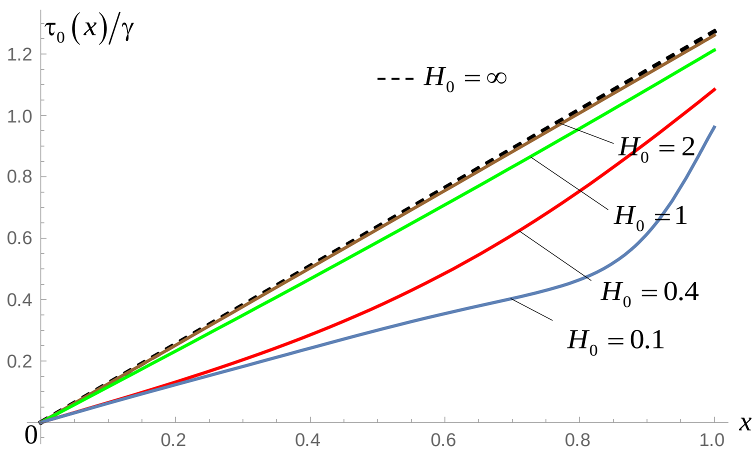


Рис.3 Распределение контактных напряжений под штампом

4. Заключение. Изложенные в статье аналитические и численно-аналитические методы решения определяющих ИУ обсуждаемой контактной задачи при осесимметрическом кручении упругого слоя посредством жесткого кругового цилиндрического штампа, показали их достаточно высокую эффективность и точность. Они позволили численным анализом выявить закономерности изменения основных механических величин. Этому способствовала и полученная здесь квадратурная формула типа Гаусса с привлечением многочленов Гегенбауэра и Чебышева. Приведенные в статье результаты служат основой для диверсификации, в дальнейшем, методов исследования контактных задач упругих тел и смежных граничных задач механики сплошной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв А.Е. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.
2. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М: Наука, 1966. 708 с.
4. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970, 940с.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976, 493с.
6. Reissner E., Sagoci H. Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space.// I.J. Appl. Phys., 1944, v. 15, #9.
7. Снеддон М. Преобразование Фурье. М.: И.Л., 1955, 668с.
8. Florens A.L. Two contact problems for an Elastic Layer.// Quart. J., Mech. And Appl. Math., 1961, v. 14, #4.
9. Кир Л.М. Кручение жесткого пуансона в контакте с упругим слоем при произвольном законе контактного трения.// Прикладная механика. Труды амер. о-ва инж.-мех., серия Е, 1964, N 3.
10. Rahman M. The Reissner-Sagoci problem for a half-space under buried torsional forces //Int. J. Solids Struct., 2000. vol. 37, no. 8. pp. 1119-1132. doi: 10.1016/s0020-7683(98)00277-7.
11. Liu, Tie-Jun Reissner-Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties. // Mechanics Research Communications. -2009, -v. 36, N3, pp. 322-329.
12. Su J., Ke L.L.,Wang Y.S.: Axisymmetric frictionless contact of a functionally graded piezoelectric layered half-space under a conducting punch.// Int. J. Solids Struct.. 90, 45–59(2016) doi:10.1016/j.ijsolstr. 2016.04.011
13. Chen P.J., Chen S.H., Peng J. Sliding contact between a cylindrical punch and a graded half-plane with an arbitrary gradient direction. // J. Appl. Mech., 82 (2015), pp. 1-9.
14. Sergei S. Volkov, Andrey Vasiliev, Sergey Aizikovich, Evgeniy Sadyrin Contact problem on indentation of an elastic half-plane with an inhomogeneous coating by a flat punch in the presence of tangential stresses on a surface.// May 2018, AIP Conference Proceedings 1959(1):070037, DOI:10.1063/1.5034712.
15. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958, 372с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
17. Ахиезер Н.И. и Щербина В.А. Об обращении некоторых сингулярных интегралов.// Записки матем. отд. физ.-мат. ф.-та Харьковского ун.-та и Харьковского матем. общества, 1957, т. 25, сер. 4, 191-198.

18. Мхитарян С.М. О формулах Н.И.Ахиезера и В.А.Щербины обращения некоторых сингулярных интегралов.// Матем. Исследования, Кишинев, 1968, т. 3, вып. 1(7), 61-70.
19. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса, «Вища школа», 1982, 168с.
20. Мхитарян С.М. О спектральных соотношениях для интегральных операторов в виде интеграла Вебера-Сонина и их приложениях к контактным задачам.// ПММ, 1984, т. 48, вып. 1, 105-113.

Сведения об авторах:
Мхитарян Сурен Манукович, член-корр. НАН РА, профессор, зав. отделом, Институт механики НАН, зав. кафедрой, Национальный университет архитектуры и строительства Армении, E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru .

Гаспарян Ануш Вараздатовна, к.ф.м.н., старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, E-mail: anushgasp@gmail.com

Саакян Аветик Вараздатович, д.ф.м.н., ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, E-mail: avetik.sahakyan@sci.am

Поступила в редакцию 02.09.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.3-42

Shear elastic waves in bi-material multi-layered waveguide

K. Ghazaryan, R. Ghazaryan, S.Terzyan

Key words: shear elastic waves, multilayer waveguide, matrix method, localised waves.

This analytical study demonstrates shear elastic wave propagation in stratified waveguide with emphasis on wave localisation effects using the propagator matrix method. The stratified waveguide consists of two-phase piecewise homogeneous periodically arranged finite number sub-layers along waveguide thickness. Analytical solutions are carried out for traction free waveguide. The existence of two modal types of guided waves is established: i) a localised surface mode occurring in "stopband" and ii) normal modes arising in a "passband" of frequencies.

Сдвиговые упругие волны в многослойном двухфазном волноводе

К. Казарян, Р. Казарян, С. Терзян

Ключевые слова: поперечные упругие волны, многослойный волновод, матричный метод, локализованные волны.

Даное аналитическое исследование посвящено вопросу распространения сдвиговой упругой волны в слоистом волноводе с акцентом на эффекты локализации волн с использованием метода трансфер матриц. Многослойный волновод состоит из конечного числа двухфазных кусочно-однородных периодически распределенных вдоль толщины волновода подслоев. Получены аналитические решения для волновода, поверхности которого свободны от механических напряжений. Установлено существование двух различных мод направленных волн: 1) локализованной поверхностной моды, возникающей в «полосе задерживания» и 2) нормальной моды, возникающей в «полосе пропускания» частот.

Սահքի առաձգական ալիքները բազմաշերտ երկփուլային ալիքատարում

Ղազարյան Կ., Ղազարյան Ռ., Թերզյան Ս.

Հիմնաբառեր՝. լայնական առաձգական ալիքներ, բազմաշերտ ալիքատար, մատրիցների մեթոդ, տեղայնացված ալիքներ:

Տվյալ վերլուծական հետազոտությունը նվիրված է շերտավոր ալիքատարում սահքի առաձգական ալիքի տարածմանը՝ մատրիցների մեթոդի կիրառմամբ, շեշտը դնելով ալիքների տեղայնացման երևույթին: Բազմաշերտ ալիքատարը բաղկացած է կտոր առ կտոր համասեռ, ալիքատարի հաստության երկայնքով պարբերաբար դասավորված վերջավոր թվով ենթաշերտերից: Ստացվել են անալիտիկ լուծումներ մեխանիկական լարումներից ազատ մակերևույթ ունեցող ալիքատարի համար: Հաստատվել է ուղղորդված ալիքների երկու տարբեր մոդերի գոյությունը. 1) տեղայնացված մակերևութային մոդ, որն առաջանում է հաճախությունների «հապաղման շերտում», և 2) նորմալ մոդ, որն առաջանում է հաճախությունների «բաց թողնման շերտում»:

Introduction

Recently much attention has been given to the propagation of elastic waves, called Floquet-Bloch waves, which occurs in elastic periodic structures (phonon crystals) and consisting of an arrangement of coupled substructures with highly contrasting mechanical properties (elastic stiffness and/or mass density). The most notable feature of phonon crystals is the existence of finite "stopband" of frequencies in which elastic waves are unable propagate in any direction [1-5]. This important feature makes possible to use such crystals in the design of novel engineering material and structures.

The existence of a new type of surface SH wave which propagates along the free surface of a periodically layered half-space was first demonstrated by Auld *et al*. [6]. They have shown that harmonic wave can be exponentially attenuated in periodically layered half-space in a finite "stopband" of frequencies. The detailed analysis of these SH waves was given by Camley *et al.* [7] and further developed by Chen *et al.* and Jorge *et al.*, which studies are reported in [8,9], respectively. *Boudouti et al.* [10] studied the transverse surface elastic wave in the semi-infinite N-layer super-lattices created by periodic repetition of N different elastic slabs and the special case of a four-layer super-lattice was considered. *Shuvalov et al.* [11] considered the SH surface wave in a periodically layered semi space with an arbitrary non-homogeneous unit cell profile. The study has shown that the existence and spectral properties of the SH surface wave is directly related to geometry and physical properties.

An extensive overview of historical developments with an in-depth literature (more than 400 references) and technical review of recent progress in the field of dynamics problem of elastic and acoustic wave motion in periodic structures is given by Hussein [12]. A review of the most widely-used methods determining structure of eigenmodes propagating in periodic materials was presented by *Gazalet et al* [13]. In one of the most recent papers on waves in periodic structures *Shmuel and Band* [14] shows that the frequency spectrum of periodic 1D two-phase laminates has a universal structure, independent of the geometry of their unit-cell and specific physical properties.

Vibration problems of finite periodic structures are closely related to the problems of wave reflection and transmission by a finite periodic layer. The reflection and transmission of electromagnetic waves through periodically stratified medium was considered by *Yeh et al.* [15], where the analytical expression of the reflectivity of a finite multilayer two phase dielectric reflector was presented. For semi-infinite periodic multilayer dielectric medium, consisting of alternating layers of different indices of refraction, the existence of surface electromagnetic wave was shown in finite "stopband" of frequencies. In the framework of matrix analysis the implications of the band structure of an infinite periodic structure for wave reflection by a finite structure are demonstrated by *Lekner* [16] for electromagnetic waves in stratified dielectric media. Numerous problems of wave propagation in elastic multilayered medium were considered by *Brekhovskikh* [17].

Shear wave transmission characteristics in elastic media that have periodic microstructure over a finite spatial length were examined by *Kobayashi et al.* [18] for two classes of such media, namely, one-dimensional multilayered media with finite-length periodicity and two-dimensional composite media with square arrays of aligned fibers within a finite length.

A few recently published studies were devoted to vibration problems of finite 1D periodic rods and beams. In the framework of Galerkin method *Ying* and *Ni [*19, 20] considered the vibration of finite length beam with arbitrary periodic modulation of beam rigidity and cross-section parameters. By means of numerical analysis the relationship between the natural frequencies of the non-uniform beams with finite periodicity and the band gap boundaries of the corresponding infinite periodic beam was investigated. *Xu et al.* [21] employed the transfer matrix method to study the natural frequencies of the two-phase beams with modulation by finite periodic uniform cells. The effects of the amounts, cross section ratios, and arrangement forms of the periodic cells on the natural frequencies were explored and the relationship between the natural bending frequencies of the beams with finite periodicity and the band gap boundaries of the corresponding infinite periodic beam has been discussed. Based on physical models of elastic rod and beam *Hvatov* and *Sorokin.* [22, 23] compared the eigenfrequency spectra of finite periodic structures with the location of the "stopband" for their infinite counterparts. Special attention was paid to eigenfrequencies and eigenmodes of a single periodicity cell with appropriate boundary conditions. The influence of the number of periodicity cells in a finite multi-layered structure on its eigenfrequency spectrum was analysed.

Elastic wave localisation in waveguide caused by micropolarity properties was shown by *Ambartsumian, Avetisyan and Belubekyan.* [24]. *Avetisyan et al.* [25, 26] have shown that an unevenness of waveguide walls can be the reason of shear wave localisation in layered elastic and piezoelectric composites.

To the best of the authors' knowledge less attention was paid to wave localization problem in finite periodically arranged structure. Hence, in the present paper, using the well-known propagator matrix formalism suggested by *Gilbert* and *Backus,* [27] and developed by *Alshits et al.* [28], an analytical formulation is provided for shear elastic wave propagation in periodically stratified layers with emphasis on wave localisation effects. The stratified finite layer consists from two-phase piecewise homogeneous sub-layers or functionally graded elastic alternating sub-layers when layer plane surfaces are free from mechanical tractions.

Multi-layered piecewise homogeneous waveguide

Let's consider shear waves propagating along a multi-layered elastic waveguide constituted by a finite number of repeated different two sub-layers consisting from different elastic materials A and B, see Fig. 1. Each of these sub-layers of widths d_1, d_2 , is labelled by the index $(s)=1,\ (s)=2$ within the unit cell labelled by the index $\mathrm{n}\,(\mathrm{n}=1,2,3...\mathrm{N})$. Each of the two sub-layers is assumed to be perfectly bonded to the adjoining sub-layers. The layer extends from the top surface $x=0$ to the bottom surface $x=Nd$, and $d=d_1+d_2$, N is the number of elementary units.

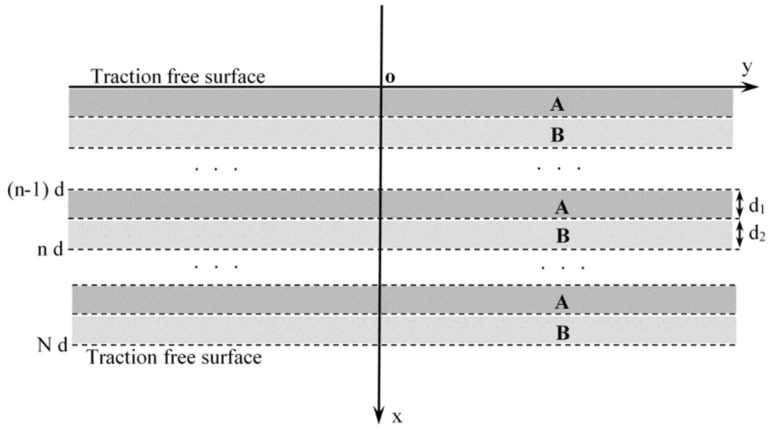


Figure 1: Geometry of the multi-layered elastic waveguide constituted by a finite number of repeated different elastic sub-layers A, B

The elastic displacements and stresses obey to the anti-plane equations of motion and Hooke's law. Choosing the anti-plane deformation in the z -direction one has

$$\partial_x \sigma_{xz} + \partial_y \sigma_{yz} = \rho \partial_{t,t} u_z \,,\ \sigma_{xz} = \mu \partial_x u_z, \sigma_{yz} = \mu \partial_y u_z \tag{1}$$

where $u_z(x, y, t)$ is the displacement in z - direction.

Considering a steady SH-wave propagating with

$$u_z(x, y, t) = u(x) \exp[i(ky - \omega t)] \tag{2}$$

where k, ω are wave number and frequency, the solutions for functions $u_n^{(s)}(x)$ within each material A, B domains of the sub-layer material can be found as the sum of incident and reflected plane waves

$$u_n^{(s)}(x) = \alpha_{ni}^{(s)} \exp(iq_s x) + \alpha_{nr}^{(s)} \exp(-iq_s x) \tag{3}$$

Here $q_s = \sqrt{\omega^2 / c_s^2 - k^2}, c_s^2 = \mu_s / \rho_s$, and correspondingly, $\alpha_{ni}^{(s)}$, $\alpha_{nr}^{(s)}$ are the complex amplitudes of the incident and reflected plane waves, respectively.

According to Eq. (2) one can define $\sigma_{zxn}^{(s)}$ as

$$\sigma_{zxn}^{(s)} = \tau_n^{(s)}(x) \exp[i(ky - \omega t)] \,, \tag{4}$$

$$\tau_n^{(s)}(x) = i\mu_s q_s \left[\alpha_{ni}^{(s)} \exp(iq_s x) - \alpha_{nr}^{(s)} \exp(-iq_s x) \right] \tag{5}$$

Enforcing the continuity of tractions and displacement jump boundary conditions at the interfaces of two materials that is

$$\begin{aligned} & u_n^{(1)}(x) = u_n^{(2)}(x), \tau_n^{(1)}(x) = \tau_n^{(2)}(x); \quad x = (n-1)d + d_1 \\ & u_n^{(2)}(x) = u_{n+1}^{(1)}(x), \tau_n^{(2)}(x) = \tau_{n+1}^{(1)}(x); \quad \mathrm{x} = \mathrm{nd} \\ & \mathrm{n} = 1, 2, ..., N \end{aligned} \tag{6}$$

Since the interface continuity conditions are imposed on functions $u_n^{(s)}(x), \tau_n^{(s)}(x)$ it is convenient to introduce the following column field vectors

$$\bar{U}_n^{(s)}(x) = \begin{pmatrix} u_n^{(s)} \\ \tau_n^{(s)} \end{pmatrix}, \ \bar{A}_n^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_{ni}^{(s)} \\ \alpha_{nr}^{(s)} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

In matrix form the solutions Eqs.(3-,5) can be cast as

$$\bar{U}_n^{(s)}(x) = \hat{\mathrm{F}}_n^{(s)}(x) \cdot \bar{A}_n^{(s)}, \tag{8}$$

where

$$\hat{\mathrm{F}}_n^{(s)}(x) = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}q_s x), & \exp(\text{-i}q_s x) \\ \mathrm{i}\mu_s q_s \exp(\mathrm{i}q_s x), & -\mathrm{i}\mu_s q_s \exp(\text{-i}q_s x) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Let note that the transmission conditions reported in Eqs. (6) lead to the conditions of continuities of the field vectors $\bar{U}_n^{(s)}(x)$ at separation interfaces of the sub-layers.

Statement of the problem, propagator matrix method

With the view of linking the field values of the vectors $\bar{U}_1^{(1)}(x), \bar{U}_N^{(2)}(x)$, between top $x=0$ and bottom $x=Nd$ surfaces of the waveguide, a propagator matrix method [26] will be used.

The method considers two neighbouring points $x_{1n}^{(s)}, x_{2n}^{(s)}$ within each material in domains of the sub-layers $A, B,$ of the n-th cell. For values of field vectors $\bar{U}_n^{(s)}(x)$ in these points the following conditions hold valid

$$\bar{U}_n^{(s)}\left(x_{1n}^{(s)}\right) = \hat{\mathrm{F}}_n^{(s)}\left(x_{1n}^{(s)}\right) \cdot \bar{A}_n^{(s)}, \quad \bar{U}_n^{(s)}\left(x_{2n}^{(s)}\right) = \hat{\mathrm{F}}_n^{(s)}\left(x_{2n}^{(s)}\right) \cdot \bar{A}_n^{(s)} \tag{10}$$

Eliminating vectors $\bar{A}_n^{(s)}$ from Eq. (10) the relation linking $\bar{U}_n^{(s)}$ vector field values within each material can be found. This is:

$$\bar{U}_n^{(s)}\left(x_{2n}^{(s)}\right) = T_n^{(s)}\left(x_{1n}^{(s)}, x_{2n}^{(s)}\right)\bar{U}_n^{(s)}\left(x_{1n}^{(s)}\right), \tag{11}$$

Herein $\hat{T}_n^{(s)}\left(x_{1n}^{(s)}, x_{2n}^{(s)}\right) = \hat{\mathrm{F}}_n^{(s)}\left(x_{2n}^{(s)}\right)\left(\hat{\mathrm{F}}_n^{(s)}\left(x_{1n}^{(s)}\right)\right)^{-1}$ is the transfer matrix in each sub-layer.

$$T_n^{(s)}\left(x_{1n}^{(s)}, x_{2n}^{(s)}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(q_s\left(x_{2n}^{(s)} - x_{1n}^{(s)}\right)\right) & \left(\mu_s q_s\right)^{-1}\sin\left(q_s\left(x_{2n}^{(s)} - x_{1n}^{(s)}\right)\right) \\ -\mu_s q_s \sin\left(q_s\left(x_{2n}^{(s)} - x_{1n}^{(s)}\right)\right) & \cos\left(q_s\left(x_{2n}^{(s)} - x_{1n}^{(s)}\right)\right) \end{pmatrix} \tag{12}$$

Let now consider the n-th cell of the structure. Using the continuity conditions of field vectors $\bar{U}_n^{(s)}(x)$ at interfaces $x_0 = (n-1)d + d_1$ one obtains

$$\bar{U}_n^{(1)}(x_0) = \bar{U}_n^{(2)}(x_0), \tag{13}$$

while Eq.(11) leads to the matrix equations

$$\bar{U}_n^{(2)}\left(nd\right) = \hat{M}\bar{U}_n^{(1)}\left((n-1)\,\mathrm{d}\right), \tag{14}$$

where $\hat{M} = \hat{T}_n^{(2)}\left(d_0, nd\right)\hat{T}_n^{(1)}\left((n-1)d, d_0\right), \quad d_0 = (n-1)d + d_1,$ (15)

Herein $\hat{\mathrm{M}}$ is the unimodal propagator matrix for SH wave field, which links the field vectors at the top and bottom of the n-*th* cell.

The explicit expressions of the unimodal propagator matrix $\hat{\mathrm{M}}$ elements can be derived as

$$
\begin{aligned}
m_{11} &= \cos(d_1q_1)\cos(d_2q_2) - \frac{q_1\mu_1 \sin(d_2q_2)\sin(d_1q_1)}{q_2\mu_2} \\
m_{12} &= \frac{\cos(d_1q_1)\sin(d_2q_2)}{q_2\mu_2} + \frac{\sin(d_1q_1)\cos(d_2q_2)}{q_1\mu_1} \\
m_{21} &= -q_2\mu_2\cos(d_1q_1)\sin(d_2q_2) - q_1\mu_1\cos(d_2q_2)\sin(d_1q_1) \\
m_{22} &= \cos(d_1q_1)\cos(d_2q_2) - \frac{q_2\mu_2}{q_1\mu_1}\sin(d_1q_1)\sin(d_2q_2)
\end{aligned} \tag{16}
$$

Let note that elements of matrix $\hat{M}$ do not depend of cell number n. Repeating this procedure the n-th times the propagator unimodal matrix $\hat{\mathrm{M}}^n$ can be found. The matrix $\hat{\mathrm{M}}^n$ links the field vectors at $x=0$ and $x=nd$ surfaces of the waveguide.

$$
\hat{M}^n\bar{U}_1^{(1)}(0) = \bar{U}_n^{(2)}(nd), \qquad n = 1, 2, ...N \tag{17}
$$

According to Sylvester's matrix polynomial theorem [28] for 2x2 matrices the elements of the n-th power of an unimodal matrix $\hat{M}^n$ can be cast as

$$
\hat{\mathrm{M}}^n = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \tag{18}
$$

and can be simplified using the following matrix identity

$$
\begin{aligned}
&M_{11} = m_{11}S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta); \quad M_{12} = m_{12}S_{n-1}(\eta) \\
&M_{21} = m_{21}S_{n-1}(\eta); \qquad M_{22} = m_{22}S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta)
\end{aligned} \tag{19}
$$

where $S_n(\eta)$ are the Chebyshev polynomials of second kind, namely

$$
\begin{aligned}
&S_n(\eta) = \frac{\sin((n+1)\phi)}{\sin(\phi)}; \cos(\phi) = \eta; \\
&\eta = \frac{1}{2}Tr(\hat{M}) = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22});
\end{aligned} \tag{20}
$$

The first Chebyshev polynomials are

$$
S_0(\eta) = 1, \qquad S_1(\eta) = 2\eta; \qquad S_2(\eta) = 4\eta^2 - 1
$$

Subsequent polynomials may be obtained from the recurrence relation of Chebyshev polynomials [29]

$$
S_m(\eta) = 2\eta S_{m-1}(\eta) - S_{m-2}(\eta) \tag{21}
$$

The matrix trace $\mathrm{Tr}(\hat{M})$, namely the condition $\left|\mathrm{Tr}(\hat{M})\right| > 2$, defines the “stopband” of frequencies [15], ranges of eigenfrequencies in which waves cannot propagate in the infinite periodic medium consisting of periodically repeated sub-layers of materials A and B. The “stopband” edges are given by $\left|\mathrm{Tr}(\hat{M})\right| = 2$.

By drawing an analogy with an infinite periodic medium the “stopband” is the ranges of finite layer eigenfrequencies satisfying to condition $|\eta| > 1$ and “passband” the ranges where $|\eta| < 1$.

Consider now a boundary value problem for the top $x = 0$ and bottom $x = Nd$ surface waveguides free from mechanical tractions.

In this case the following matrix equation can be imposed

$$\hat{M}^N \begin{pmatrix} u_1^{(1)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_N^{(2)}(Nd) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{22}$$

From the non-trivial solution of Eq. (22) one can find that $M_{21} = 0$ and therefore the two alternative equations must be considered

$$m_{21}(\omega) = 0 \tag{23}$$

$$S_{N-1}(\eta(\omega)) = 0 \tag{24}$$

Alongside Eq. (22) one can consider the matrix equation such as

$$\hat{M}^n \begin{pmatrix} u_1^{(1)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_n^{(2)}(nd) \\ \tau_n^{(2)}(nd) \end{pmatrix} = 0$$

and the relation between field vector values can be found as

$$u_n^{(2)}(nd) = (m_{11}S_{n-1} - S_{n-2})u_1^{(1)}(0); \qquad n = 1, 2, 3 \ldots N \tag{25}$$

Based on Eqs. (16, 23) we have

$$q_2\mu_2 \tan(d_2 q_2) + q_1\mu_1 \tan(d_1 q_1) = 0; \tag{26}$$

This is the dispersion equation for the single bi-material unit layer, walls of which are free from mechanical tractions. This equation was also discussed in [30].

The roots of Eq. (26) are curves in the phase-plane (ω, k), each point of which corresponds to a wave freely propagating in the waveguide.

From Eq. (23), since the matrix $\hat{M}$ is an unimodular matrix it follows that ;

$$m_{11}(\omega)m_{22}(\omega) = 1, \ \eta(\omega) = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \tag{27}$$

where $\gamma = m_{11}(\omega)$.

Equation (25) can be written now as

$$u_n^{(2)}(nd) = (\gamma S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta))u_1^{(1)}(0) \tag{28}$$

Using the recurrence relation $S_n(\eta) = 2\eta S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta)$ for the Chebyshev polynomials of the second kind the following relation is obtained

$$\gamma S_n(\eta) - S_{n-1}(\eta) = \gamma\left((\gamma + \gamma^{-1})S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta)\right) - S_{n-1}(\eta) =$$

$$= \gamma(\gamma S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta))$$

which can be rewritten as $P_{n+1}(\eta)=\gamma P_n(\eta)$, where $P_n(\eta)=\gamma S_{n-1}(\eta)-S_{n-2}(\eta)$.

Taking into account that $P_1(\eta)=\gamma$, the following identity can be obtained valid for all integers starting from n = 1

$$P_n(\eta)=\gamma^n \tag{29}$$

Hence it follows from (28) that for for the eigenfrequencies satisfying to dispersion equation (26)

$$u_n^{(2)}(nd)=\gamma^n u_1^{(1)}(0), \quad n=1,2,.....N \tag{30}$$

In "stopband" range defined by $|\eta|>1$, for the eigenfrequencies satisfying to dispersion equation (26) in the finite range where $|\gamma|<1$, the guided wave are localised in the neighbourhood of the waveguide top surface and decayed at the waveguide bottom surface with increasing of cell numbers. If $|\gamma|>1$ the localisation takes place in the neighbourhood of the bottom surface waveguide.

Similar localisation effects have been obtained in [7-11] for semi-infinite periodic piecewise layered, inhomogeneous structures, where was shown that semi-infinite periodic elastic medium can support propagation of shear surface waves.

Besides of the dispersion equation (26) defining the localisation mode the following dispersion equation should be considered as well

$$S_{N-1}(\eta)=0 \tag{31}$$

This equation has $(N-1)$ roots on the range $\eta\in(-1,1)$ and its zeroes are given by

$$\eta_m=\cos\left(m\pi N^{-1}\right), \qquad m=1,2.....(N-1)\ . \tag{32}$$

Taking into account that $S_{N-2}(\eta_m)=(-1)^{m+1}$, from the relation Eq. (25), one obtains

$$u_n^{(2)}(nd)=\frac{(-1)^{m+1}}{\sin\left(\frac{m\pi}{N}\right)}\left[m_{11}\sin\left(\frac{m\pi}{N}(N-n)\right)-\sin\left(\frac{m\pi}{N}(N-n+1)\right)\right]u_1^{(1)}(0)$$

$$u_N^{(2)}(Nd)=(-1)^m u_1^{(1)}(0) \tag{33}$$

From Eqs. (32) and (33) one can state that, in the eigenfrequency "passband" ranges $|\eta|<1$, there exist the $(N-1)$ wave normal modes where guided wave are distributed along the waveguide height according to the first correlation of Eq.(33) and having the same magnitude at the top and the bottom surfaces.

The analysis of this problem has shown that in the stratified waveguide with the piecewise homogeneous finite number unit periodic cells there exit two guided waves modes: 1) a localised mode occurring in the "stopband" frequency range and 2) $(N-1)$ normal modes occurring in the "passband" frequency region.

Results and Discussion

We now illustrate the obtained theoretical results providing analytical and numerical analysis of the equations and relations defining the localized mode of the guided wave in piecewise waveguide. Numerical calculations have been carried out for materials: A made from Cu material with the following properties ($\rho_1 = 8960 kgm^{-3}$, $\mu_1 = 47.7 GPa$), while B made from Al material with the properties ($\rho_2 = 2720 kgm^{-3}$, $\mu_2 = 26.2 \cdot GPa$)

First note that for piecewise waveguide all roots of the dispersion equation Eq. (26) of the localized mode are in the "stopband" range. The equation Eq. (26) has no solution when both $q_1(\omega)$ and $q_2(\omega)$ are imaginary. Other types of solutions are possible: $q_1(\omega)$ imaginary and $q_2(\omega)$ real and visa verse, and $q_1(\omega), q_2(\omega)$ both real.

Since for the given materials $c_1 < c_2$ we consider the specific "stopband" frequency range where $kc_1 < \omega < kc_2$. In this range $q_2(\omega) = iq_{20}(\omega), q_{20}(\omega) = \sqrt{k^2 - \omega^2/c_2^2}$, $q_1(\omega)$ is real and instead of Eq. (30) the following relation can be obtained when ω are roots of the Eq.(26)

$$u_n^{(2)}(nd) = \left(\frac{\cos(d_1 q_1)}{\cosh(d_2 q_{20})} \right)^n u_1^{(1)}(0), \qquad n = 1, 2, ...N$$

On the other hand, using relation Eq.(11,12), within sub-layers of material B we have that

$$u_n^{(2)}(nd) = \frac{1}{\cosh(d_2 q_{20})} u_n^{(2)}((n-1)d + d_1);$$

Therefore in this specific eigen frequencies range, in addition to displacement attenuation due to the cell number n increasing, it is found that the attenuation takes place also in within the material B bodies. This type of localisation was also reported in [30] where the theory of Love waves was generalized to a single bi-material layer consisting from a finite-thickness substrate covered by a finite-thickness slap having a lower shear elastic speed.

For a waveguide for any value of dimensionless wave number $\kappa = kd$ there are infinite number of discrete spectrum of eigenfrequencies which correspond to localised vibrations. Mode of these eigenfrequencies shown in Figure 2 are the solutions of dispersion equations Eq.(26) which in dimensionless notations can be written as

$$\mu\sqrt{\vartheta^2 - \kappa^2} \sin\left(\delta\sqrt{\vartheta^2 - \kappa^2}\right) \cos\left((1-\delta)\sqrt{\beta^2\vartheta^2 - \kappa^2}\right) +$$
$$+\sqrt{\beta^2\vartheta^2 - \kappa^2} \cos\left(\delta\sqrt{\vartheta^2 - \kappa^2}\right) \sin\left((1-\delta)\sqrt{\beta^2\vartheta^2 - \kappa^2}\right) = 0$$
$$\vartheta = \omega d/c_1; \delta = d_1/d; \kappa = kd; \mu = \mu_1/\mu_2; \beta = c_1/c_2 \tag{34}$$

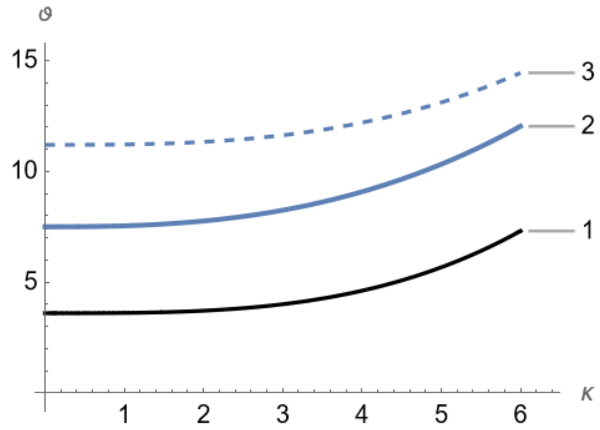
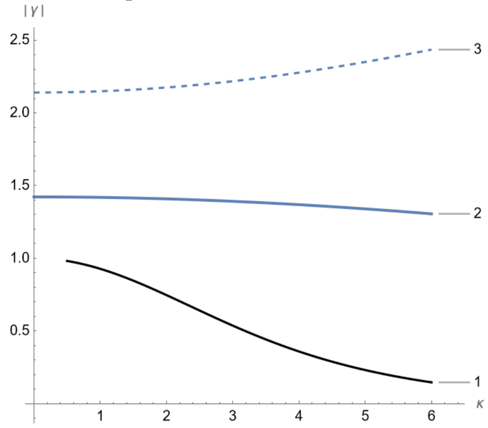


Fig.2 The dispersion curves of the localisation modes

In Figure 3 graphs of localisation coefficient $|\gamma(\kappa,\vartheta)|$ corresponding to the localised modes are presented.



Fiq.3 Localisation coefficient curves defining the guided wave amplitude localisation

As it follows from Figure 3 the strong localization takes place for the first and third modes. All the curves in Figures 2,3 correspond to the case $\delta = 0.4$.

Conclusions

The paper is devoted to the localisation problem of the shear elastic wave in stratified waveguide with plane surfaces free from mechanical tractions. The stratified waveguide constitutes from a finite number of periodically repeated perfectly bonded sub-layers. The main results of this paper are as follows: first, it is shown that in stratified piecewise bi-material waveguide with surfaces free from mechanical tractions, there exist two modal types of guided waves: i) a localised surface mode occurring in a “stopband” range and ii) normal modes arising in a “passband” range of eigenfrequencies. The guided wave may be localised at the neighbourhood of the waveguide top surface and decays at the waveguide bottom surface with increasing cell numbers; the localisation can take place at the neighbourhood of the bottom surface waveguide and that depends on the eigenfrequencies and mechanical properties of piecewise materials.

This study opens up new opportunities into the use of stratified waveguide in the design of novel engineering material and structures.

References

1. Delph T.J, Herrmann G.G, Kaul R.K. Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body: anti plane strain. ASME. J. Appl. Mech. 1978;45(2):343-349. DOI:10.1115/1.3424299
2. C. E. Bradley, Time harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic layers. Part I. Theory,The Journal of the Acoustical Society of America, 1994 96:3, 1844-1853. DOI:10.1121/1.410196
3. B.A. Auld , D.E. Chimenti ,P.J. Shull "Shear horizontal wave propagation in periodically layered composites." IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, 43,2,1996, p.319-325. DOI: 10.1109/58.485959
4. J. O. Vasseur, P.A. Deymier, B. Chenni, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, D.Prevost, Experimental and theoretical evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in solid phononic crystals. Physics Review Letters. 86(14), 2001, 3012–3015. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.3012
5. Adams, Samuel DM, Richard V. Craster, and Sebastien Guenneau. "Bloch waves in periodic multi-layered acoustic layers." Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. Vol. 464. No. 2098. The Royal Society, 2008. DOI:10.1098/rspa.2008.0065
6. B. A. Auld,, G. S. Beaupre, G. Herrmann, Horizontal shear surface waves on a laminated composite, Electronics Letters 1977, vol. 13, No.18 p.525-527. DOI: 10.1049/el:19770380
7. R. E. Camley, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, and A. A. Maradudin, Transverse elastic waves in periodically layered infinite and semi-infinite media,Phys. Rev. B 27, 1983, p.7318 . DOI: 10.1103/PhysRevB.27.7318
8. S. Chen, S.Lin, Z. Wang, T. Tang, The Bloch theorem generalized for Semi-Infinitely periodic systems with free furface, Acta Acustica united with Acustica, Vol. 94 (2008) p.528 – 533. DOI: 10.3813/AAA.918061
9. V.Jorge, S. Tejada, F. Sánchez-Roa. "Surface elastic waves of semi-infinite superlattice: On the Acoustic-Electromagnetic-Quantum Analogies." Journal of Materials Science and Engineering A 4 (11) (2014) p. 373-379. DOI:10.17265/2161-6213/2014.11.009
10. El Boudouti, E.H., Djafari-Rouhani, B., Akjouj, A. and Dobrzynski, L., 1996. Theory of surface and interface transverse elastic waves in N-layer superlattices. Physical Review B, 54(20), p.14728. DOI: 10.1103/PhysRevB.54.14728
11. Shuvalov, A. L., Poncelet, O., & Golkin, S. V. (2009, January). Existence and spectral properties of shear horizontal surface acoustic waves in vertically periodic half-spaces. Proc. Royal. Soc. A (2009) 465, p.1489–1511, DOI:10.1098/rspa.2008.0457
12. M.I.Hussein, M.J. Leamy, M. Ruzzene, Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook, Applied Mechanics Reviews, 2014, v. 66 , p.040802/1-38, DOI:10.1115/1.4026911

13. J. Gazalet, S. Dupont, J.C. Kastelik, Q. Rolland, and B. Djafari-Rouhani. A tutorial survey on waves propagating in periodic media: Electronic, photonic and phononic crystals. Perception of the Bloch theorem in both real and Fourier domains. Wave Motion, 50, 2013,p. 619-654, DOI:10.1016/j.wavemoti.2012.12.010
14. Shmuel G., Band,R.. Universality of the frequency spectrum of laminates, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 92, 2016, p.127-136. DOI:/10.1016/j.jmps.2016.04.001
15. P.Yeh, A.Yariv, and C.Hong, ‘‘Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory,’’ J. Opt. Soc. Am. 67, 1977,p.423–438. DOI:/10.1364/JOSA.67.000423
16. J. Lekner, "Light in periodically stratified media," J. Opt. Soc. Am. A 11, 2892-2899 (1994), DOI:10.1364/JOSAA.11.002892
17. Brekhovskikh L. Waves in Layered Media. Elsevier, 2012. p.497,
18. F. Kobayashi, S. Biwa, N. Ohno, Wave transmission characteristics in periodic media of finite length: multilayers and fiber arrays, International Journal of Solids and Structures ,41, 2004, p.7361–7375, DOI:10.1016/j.ijsolstr.2004.06.017
19. Z.G.Ying, Y.Ni , Dynamic characteristics of infinite-length and finite-length rods with high-wave-number periodic parameters, Journal of Vibration and Control, 1, 2017,p.1–15, DOI:10.1177/1077546316687676
20. Z.G. Ying , Y.Ni, A double expansion method for the frequency response of finite-length beams with periodic parameters. Journal of Sound and Vibration 391, (2017) p.180–193 DOI:10.1016/j.jsv.2016.12.011
21. Y.Xu, X.Zhou, W.Wang, L..Wang., F.Peng, B.Li. On natural frequencies of non-uniform beams modulated by finite periodic cells, Physics Letters A, 380,(2016) p. 3278–3283, DOI: 10.1016/j.physleta.2016.07.057
22. A. Hvatov, S. Sorokin, Free vibrations of finite periodic structures in pass- and “stopband”s of the counterpart infinite waveguides, Journal of Sound and Vibration,v. 7 2015, p. 200–217, DOI:10.1016/j.jsv.2015.03.003
23. A. Hvatov,S. Sorokin, Analysis of eigenfrequencies of finite periodic structures in view of location of frequency pass-and “stopband”s, Proceedings of the 20th International Congresson Sound and Vibration, Bangkok,Thailand, 2013.
24. Ambartsumian,S.A, Avetisyan A.S., Belubekyan M.V. Propagation of elastic waves in a plane waveguide layer on the basis of simplified model. of the Cosserat continuum, Proceedings of Mechanics of NAS, Armenia, 70,2,2017, pp. 15-27, DOI:10.33018/70.2.2
25. Avetisyan A.S., Kamalyan A.A., Hunanyan A.A. Features of localization of wave energy at rough surfaces of piezodielectric waveguide, Proceedings of Mechanics of NAS , Armenia, 70,1,2017, pp.40-63, DOI:10.33018/70.1.3
26. Avetisyan, A. S. The Mixed Boundary Conditions Problem of Layered Composites with Meta-Surfaces in Electro Elasticity. In Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials, (2019). (pp. 73-96). Springer, Cham. DOI:10.1007/978-3-030-17470-5-6
27. F. Gilbert, G. Backus, Propagator matrices in elastic wave and vibration problems, Geophysics, v. 31, 1966. p. 326-332 DOI:10.1190/1.1439771
28. Alshits, V. I., H. O. K. Kirchner, and G. A. Maugin. "Elasticity of multilayers: properties of the propagator matrix and some applications." Mathematics and Mechanics of Solids 6,5 (2001), 481-502. DOI:10.1177/108128650100600502

29. A.A.Tovar and W. Casperson, Generalized Sylvester theorems for periodic applications in matrix optics, J. Opt. Soc. Am. A 12, p.578-590 (1995). DOI:10.1364/JOSAA.12.000578
30. M.I.Newton, G.McHale, F.Martin, E. Gizeli , K. A. Melzak, Generalized Love waves, Europhysics Letters, 2002,58 (6), pp. 818–822 .DOI:10.1209/epl/i2002-00447-3

Informaton about autors

Karen Ghazaryan-Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E-mail: ghkarren@gmail.com

Rafayel Ghazaryan- Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E-mail: rafaelghazaryan52@gmail.com

Sargis Terzyan- Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E-mail: sat_and_21@yahoo.com

Received 20.06.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика

УДК 539.374 DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.3-55

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ЭКСТРУЗИИ ТРУБ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

М.А. Маргарян

Ключевые слова: тонкостенная труба, экструзия, спеченный материал, пористость, аналитический метод, меридиональное и окружное напряжения.

One approach to the analytical solution of the problem of pipe extrusion in the presence of internal high pressure

M.A. Margaryan

Keywords: thin-walled pipe, extrusion, sintered material, porosity, analytical method, meridional and circumferential stresses.

Based on the assumption that external p_v and internal p_r pressures acting on the pipe are equal: the circumferential stress of the pipe is determined. Simplified plasticity condition is obtained and the stress-strain state of the pipe is investigated by the analytical method.

The problem of extrusion of pipes loaded with internal high pressure is firstly completely solved in the case of the presence of friction, and then by a fairly simplified method in the absence of friction. This is due to the fact that in the main case, in the denominator of the formula for determining the σ_m meridional stress, there is a coefficient, that takes into account friction, and in the case of $k=0$ it is impossible to immediately determine the corresponding formula for the case in the absence of friction. To implement this process, the formula of the meridional stress was transformed to obtain an exponential function and its representation in the form of a series.

Dimensionless meridional, circumferential and average stresses are determined, depending on the degree of pipe deformation, which makes it possible to use the formulas of the deformation theory of plasticity of porous materials to study the process of compaction of the pipe material.

Numerical calculations are carried out in the MS EXCEL software environment for various coefficients of friction at 10% of the initial porosity of the material. To obtain a fully compacted material of a sintered pipe, the process of extrusion of the pipe with various dimensions is modeled in a corresponding conical die.

Ներքին բարձր ճնշումով բեռնավորված խողովակի արտամղման գործընթացի համալիր վերլուծական մեթոդով հետազոտման մի մոտեցման մասին

Մ.Ա. Մարգարյան

Հիմնաբառեր՝ բարակապատ խողովակ, արտամղում, եռակալված նյութ, ծակոտկենություն, վերլուծական մեթոդ, միջօրեական և շրջանային լարումներ:

Օգտագործելով խողովակի վրա ազդող արտաքին p_v և ներքին p_r ճնշումների հավասար լինելու ենթադրությունը որոշվում է խողովակի շրջանային լարումը, ստացվում է պարզեցված պլաստիկության պայման և վերլուծական մեթոդով հետազոտվում է դրա լարվածադեֆորմացիոն վիճակը:

Ներքին բարձր ճնշմամբ բեռնավորված խողովակի արտամղման խնդիրը սկզբում ամբողջապես լուծվել է շփման առկայության, իսկ այնուհետև, բավականին պարզ, շփման բացակայության դեպքերում, քանի որ հիմնական դեպքի σ_m միջօրեական լարման որոշման բանաձևի հայտարարում գտնվում է շփումը հաշվի առնող k գործակից և $k=0$ դեպքում հնարավոր չէ անմիջապես ստանալ շփման բացակայության դեպքի համապատասխան բանաձը: Այդ գործընթացը իրականացնելու համար կատարվել է շփման առկայության դեպքի միջօրեական լարման σ_m բանաձևի ձևափոխմամբ էքսպոնենտային ֆունկցիայի ստացում և այն շարքի վերածում:

Որոշվել են խողովակի դեֆորմացման աստիճանից կախված միջօրեական, շրջանային և միջին լարումների չափազուրկ մեծությունները,դրանք հնարավորություն են տվել, օգտագործելով ծակոտկեն նյութերի պլաստիկության դեֆորմացիոն տեսության բանաձևերը ուսումնասիրել խողովակի նյութի խտացման գործընթացը:

Թվային հաշվարկները կատարվել են MS EXCEL ծրագրային միջավայրում տարբեր շփման գործակիցների և նյութի 10% սկզբնական ծակոտկենության դեպքերում: Ամբողջապես խտացված եռակալված խողովակի նյութի ստացման համար դրա տարբեր չափսերով նախապատրաստվածքի արտամղման գործընթացը մոդելավորվել է համապատասխան կոնական մամլամայրում:

Используя допущение равенства внешнего p_v и внутреннего p_r давлений, действующих на трубу, определяется окружное напряжение трубы, в результате чего получается упрощённое условие пластичности. Аналитическим методом исследуется напряженно-деформированное состояние (НДС) трубы.

Задача экструзии труб, нагруженных внутренним высоким давлением, сначала полностью решается при условии наличия трения, а потом достаточно упрощенным методом - при отсутствии трения. Это обусловлено тем, что в основном случае в знаменателе формулы для определения меридионального напряжения σ_m находится коэффициент k, учитывающий трение, и в случае $k = 0$, т.е. при отсутствии трения, невозможно непосредственно определить соответствующую формулу. Для осуществления этого процесса проведено преобразование формулы меридионального напряжения σ_m при условии наличия трения для получения экспоненциальной функции и представления ее в виде ряда.

Определены безразмерные меридиональные, окружные и средние напряжения в зависимости от степени деформирования трубы, что позволило с использованием уравнений деформационной теории пластичности пористых материалов (ДТППМ) при различных коэффициентах трения изучить процесс уплотнения ее материала.

Численные расчеты проводились в программной среде MS EXCEL для различных коэффициентов трения при 10% начальной пористости материала. Для получения полностью уплотненного материала спеченной трубы проведено моделирование процесса экструзии заготовки заданных размеров в соответствующей конической матрице.

Введение. Вопросам пластического деформирования труб в конических матрицах посвящено множество исследований [1-4] и др. Работы [1-3] посвящены исследованию процессов волочения, обжатия, протяжки и раздачи тонкостенных цилиндрических труб из сплошных материалов в случае отсутствия и наличия контактного трения и упрочнения, а работа [4] - процессу формования труб из сплошных и спеченных материалов, эксплуатируемых в условиях внутреннего давления p_r. При этом используются уравнения течения пористых материалов. В работе [5] проведено моделирование процесса экструзии пористых стержней в программной среде ABAQUS. Получены зоны распределения компонентов НДС и проведен их анализ. Выявлены некоторые особенности уплотнения материала трубы. В частности, установлено, что в направлении поперечных сечений пористость распределяется неравномерно, при этом большей частью уплотняются поверхностные слои. Несмотря на это, задачи экструзии спеченных труб и стержней изучены недостаточно, что связано прежде всего с их многопараметровостью, сложностью уравнений равновесия и условиями пластичности с учетом текущей пористости материала. Следовательно, работы в этом направлении актуальны.

Целью работы является аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния процесса прессования в конической матрице тонкостенных спеченных труб, эксплуатируемых в условиях внутреннего давления.

Решение задачи упрощенным аналитическим методом. Для решения задачи воспользуемся системой уравнений (1) и (2), а также условием пластичности Мизеса (3), выражаемым главными напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3, что является более точным для пластических материалов с учетом достаточно сложного объемного напряженного состояния:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_m r) - \sigma_\theta + \frac{2p_m}{sin2\,\alpha} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = -\frac{p_v - p_r}{h} - \frac{p_v + p_r}{2\rho_\theta}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} = \sigma_\text{Т}\ , \tag{3}$$

Здесь σ_m и σ_θ - меридиональные и окружные напряжения; p_v - давление матрицы на трубу в нормальном направлении; p_m - давление матрицы на трубу в меридиональном направлении; p_r – внутреннее давление на трубу; h – толщина трубы; ρ_θ - радиус кривизны сечения трубы конической поверхностью, перпендикулярной линии меридиана (образующая конуса $\rho_\theta = r/cos\alpha$); r - текущий радиус окружности в перпендикулярном сечении по оси трубы (рис.1); α - угол между осью трубы и меридианом; $\sigma_\text{Т}$ - предел текучести материала.

Ввиду сложности задачи предположим, что давления p_v и p_r, действующие на трубу, равны, т.е. $p_v = p_r$. В этом случае из (2) получим

$$\sigma_\theta = -p_v = -p_r. \tag{4}$$

В случае прессования тонкостенной трубы главные напряжения примут вид

$$\sigma_1 = \sigma_m < 0,\ \ \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_\theta = -p_v = -p_r < 0. \tag{5}$$

Исходя из этого, условие пластичности (3) примет следующий вид:

$$\sigma_\theta = \sigma_m - \sigma_\text{Т}. \tag{6}$$

Решая уравнения равновесия (1) и (2), наряду с условием пластичности (6), получим формулы для определения компонентов НДС трубы в случае прессования в конической матрице.

Решение задачи при условии наличия трения (f ≠ 0), т.е. в уравнении (1): $\boldsymbol{p_m = fp_v}$.

В случае прессования тонкостенной трубы система уравнений примет вид

$$\begin{cases} r\frac{d\sigma_m}{dr} + \sigma_m - \sigma_\theta(1+k) = 0, \\ \qquad \sigma_\theta = \sigma_m - \sigma_\text{Т} \end{cases} \tag{7}$$

где *k=2f/sin2φ; φ* – угол конусности матрицы.

Подставив значение σ_θ из условия пластичности (7) в уравнение равновесия, получим

$$r\frac{d\sigma_m}{dr} + \sigma_m - (1+k)(\sigma_m - \sigma_\text{Т}) = 0. \tag{8}$$

Постепенно преобразуя уравнение (8):

$r\frac{d\sigma_m}{dr} + \sigma_m - \sigma_m(1+k) + \sigma_T(1+k) = 0,\ r\frac{d\sigma_m}{dr} - \sigma_m k + \sigma_T(1+k) = 0,$

$d\sigma_m = \left(\sigma_m k - \sigma_T(1+k)\right)\frac{dr}{r},$

$$\frac{d(\sigma_m k - \sigma_T(1+k))}{\sigma_m k - \sigma_T(1+k)} = k\frac{dr}{r} \qquad (9)$$

и интегрируя (9), получим

$$\ln[\sigma_m k - (1+k)\sigma_T] = k\ln r + \ln C. \qquad (10)$$

Для определения постоянной интегрирования C используем граничное условие случая прессования трубы, когда она выходит из матрицы ($r = r_1$) (рис. 1):

при $r = r_1$ – $\sigma_m = 0$ (11)

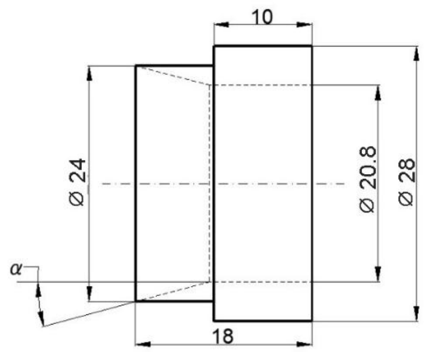


Рис. 1. Вид и размеры матрицы (мм)

В результате получим

$\ln[-(1+k)\sigma_T] = \ln C r_1^k$,

откуда сначала определяем константу C:

$C = \frac{-(1+k)\sigma_T}{r_1^k}.$

Подставив ее в уравнение (10), получим

$$\ln[\sigma_m k - (1+k)\sigma_T] = k\ln r + \ln\frac{-(1+k)\sigma_T}{r_1^k}. \qquad (12)$$

Преобразуя (12), получим формулу для определения меридионального напряжения σ_m:

$\ln[\sigma_m k - (1+k)\sigma_T] = \ln(-(1+k)\sigma_T)(\frac{r}{r_1})^k$, $\sigma_m k - (1+k)\sigma_T = (-(1+k)\sigma_T)(\frac{r}{r_1})^k,$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_T(1+k)}{k}\left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^k\right]. \qquad (13)$$

Решение задачи при отсутствии трения (*f* = 0). Заметим, что при условии отсутствия трения (k = 0) невозможно непосредственно из общей формулы (13) при наличии трения определить величину меридионального напряжения σ_m, так как коэффициент k находится в знаменателе σ_m.

Следовательно, для решения задачи при $k = 0$ необходимо использовать систему уравнений (7). Тогда имеем

$$r\frac{d\sigma_m}{dr} + \sigma_{\text{Т}} = 0. \tag{14}$$

Преобразуя (14), получим

$$d\bar{\sigma}_m = -\frac{dr}{r}, \tag{15}$$

где $\bar{\sigma}_m$ – безразмерное меридиональное напряжение:

$$\bar{\sigma}_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_{\text{Т}}}. \tag{16}$$

Интегрируя (15):

$$\bar{\sigma}_m = -\ln r + \ln C \tag{17}$$

и используя граничное условие (11), получим

$$C = r_1. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17), получим формулу для определения $\bar{\sigma}_m$:

$$\bar{\sigma}_m = \ln\left(\frac{r_1}{r}\right). \tag{19}$$

Таким образом, для полного решения задачи получаем следующие формулы для определения безразмерного меридионального напряжения $\bar{\sigma}_m$ при условии отсутствия и наличия трения:

$$\begin{cases} k = 0 \qquad \bar{\sigma}_m = \ln\left(\frac{r_1}{r}\right), \\ k \neq 0 \qquad \bar{\sigma}_m = \frac{(1+k)}{k}\left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^k\right]. \end{cases} \tag{20}$$

Покажем, что преобразованием второй формулы системы (20) для меридионального напряжения σ_m в случае $k \neq 0$ также возможно определить первую формулу системы (20) при $k=0$. Для этого воспользуемся методом [6].

Сначала выражение $\left(\frac{r}{r_1}\right)^k$ второй формулы системы (20) приведем к следующему виду: $\left(\frac{r_1}{r}\right)^{-k}$. Вводя обозначение

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{-k} = a \tag{21}$$

и логарифмируя его, находим

$$-kln\left(\frac{r_1}{r}\right) = lna \tag{22}$$

Потом, найдя из (22) значение

$$a = \exp(-kln\left(\frac{r_1}{r}\right)) \tag{23}$$

и подставляя его в (21), получим

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{-k} = e^{-kln\left(\frac{r_1}{r}\right)}. \tag{24}$$

Далее, разлагая $e^{-kln\left(\frac{r_1}{r}\right)}$ в ряд [7] и используя два первых его члена по формуле $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!}$, будем иметь

$$e^{-kln\left(\frac{r_1}{r}\right)} = 1 - kln\left(\frac{r_1}{r}\right).$$

Следовательно, формула (24) примет следующий вид:

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{-k} = 1 - kln\left(\frac{r_1}{r}\right). \quad (25)$$

Подставив (25) во вторую формулу (20), находим

$$\bar{\sigma}_m = \frac{(1+k)}{k}\left[kln\left(\frac{r_1}{r}\right)\right].$$

Окончательно из этой формулы при $k = 0$ получим первую формулу системы (20).

Отметим, что для определения изменения пористости материала при экструзии спеченной трубы в [5,6] применяют инженерный аналитический сопряженный метод, согласно которому используются полученные выше данные и следующая формула ДТППМ [4]:

$$v = 1 - (1 - v_0)\exp\left(-\frac{9v_0^m \sigma_0 \varepsilon_{eq0}}{(1-v_0)^{3n}\sigma_{eq0}}\right), \quad (26)$$

где v и v_0 – текущая и начальная пористости материала; $\sigma_{eq0} = \sigma_{\text{Т}}$ и $\varepsilon_{eq0} = \bar{\varepsilon}_i = 1{,}155|\bar{\varepsilon}_\theta|$ - соответственно упрощенные величины эквивалентных напряжений и деформаций; $\bar{\varepsilon}_\theta = \ln(r/r_0)$ – окружная логарифмическая деформация [4]; r_0 - начальный радиус трубы (рис.1); $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 -$ среднее напряжение; m и n - параметры пористости.

Результаты исследования. Численные расчеты проводились в программной среде MS EXCEL при условии отсутствия трения ($f = 0$) и с коэффициентом трения $f = 0{,}15$. Начальная пористость материала принята 10%, угол конусности матрицы - φ = 15°. При этом процесс экструзии заготовки моделировался в соответствующей конической матрице. Определены безразмерные значения меридиональных, окружных и средних напряжений в зависимости от степени деформации трубы, а также значения изменения пористости материала по формулам ДТППМ. На основании полученных данных НДС были составлены таблицы 1, 2 и построены графики (рис. 2).

Полученные данные показывают, что полное уплотнение материала происходит при интенсивности деформации $\bar{\varepsilon}_i = 0{,}165$. Сопоставление этих результатов с данными работы [6], полученными в тех же условиях без внутреннего давления, показывает, что остаток пористости в материале трубы составляет 4,8%, т.е. процесс прессования тонкостенной трубы, нагруженной внутренним высоким давлением, с точки значения уплотнения материала, является высокоэффективным.

Табл.1. Данные компонентов НДС и пористости материала при отсутствии трения: $f = 0$ ($k = 0$)

$r, мм$	$-\varepsilon_\theta$	$\bar{\varepsilon}_i$	r_1/r	$-\bar{\sigma}_m$	$-\bar{\sigma}_\theta$	$-\bar{\sigma}_0$	v
12.0	0	0	0.867	0.143	1.143	0.810	0.100
11.8	0.017	0.019	0.881	0.126	1.126	0.793	0.087
11.6	0.034	0.039	0.897	0.109	1.109	0.776	0.073
11.4	0.051	0.059	0.912	0.092	1.092	0.758	0.060
11.2	0.069	0.080	0.929	0.074	1.074	0.741	0.047
11.0	0.087	0.100	0.945	0.056	1.056	0.723	0.034
10.8	0.105	0.122	0.963	0.038	1.038	0.704	0.021
10.6	0.124	0.143	0.981	0.019	1.019	0.686	0.010
10.5	0.134	0.154	0.990	0.010	1.010	0.676	0.004
10.4	0.143	0.165	1.000	0	1.000	0.667	-0.002

Табл.2. Данные компонентов НДС и пористости материала при наличии трения: $f = 0{,}15$ ($k = 0{,}6$)

$r, мм$	$-\varepsilon_\theta$	$\bar{\varepsilon}_i$	r_1/r	$-\bar{\sigma}_m$	$-\bar{\sigma}_\theta$	$-\bar{\sigma}_0$	v
12.0	0	0	0.867	0.239	1.239	0.906	0.100
11.8	0.017	0.019	0.881	0.210	1.210	0.877	0.085
11.6	0.034	0.039	0.897	0.181	1.181	0.847	0.071
11.4	0.051	0.059	0.912	0.151	1.151	0.818	0.057
11.2	0.069	0.080	0.929	0.121	1.121	0.788	0.043
11.0	0.087	0.100	0.945	0.091	1.091	0.758	0.031
10.8	0.105	0.122	0.963	0.061	1.061	0.728	0.019
10.6	0.124	0.143	0.981	0.031	1.031	0.697	0.008
10.5	0.134	0.154	0.990	0.015	1.015	0.682	0.003
10.4	0.143	0.165	1.000	0	1.000	0.667	-0.002

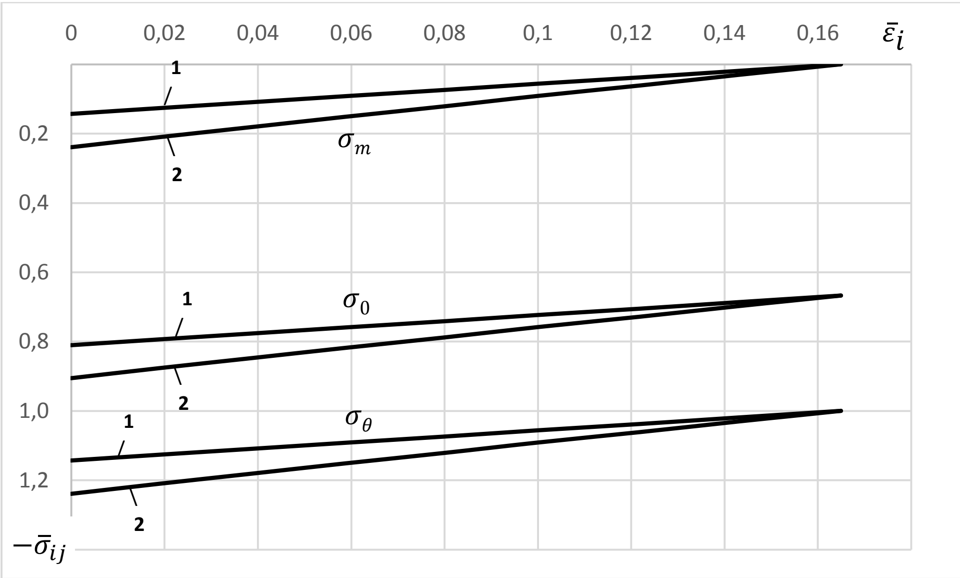


Рис.2. Данные безразмерных величин компонентов НДС в зависимости от значений интенсивности деформаций, где 1 – без учета трения ($f = 0$), 2 – с учетом трения ($f = 0.15$)

Заключение

1. Учитывая допущение равенства внешних p_v и внутренних p_r давлений, решена задача определения компонентов НДС процесса прессования тонкостенной трубы, эксплуатируемой в условиях внутреннего давления, что позволяет определить окружное напряжение и получить упрощенное условие пластичности. При этом, задача сначала полностью решается с учетом трения, а затем достаточно упрощенным методом – без учета трения, так как в формуле для определения меридионального напряжения σ_m имеется коэффициент трения k, и невозможно непосредственно из общей формулы при наличии трения ($k \neq 0$) определить величины меридионального напряжения σ_m, так как коэффициент k находится в знаменателе σ_m.

2. Показано, что получить формулу при условии отсутствия трения из основной формулы определения меридионального σ_m напряжения возможно путем преобразования формулы меридионального напряжения σ_m в случае учета трения, для получения экспоненциальной функции и представления ее в виде ряда.

3. Численные расчеты проводились в программной среде MS EXCEL при условии отсутствия трения ($f = 0$) и при значении коэффициента трения $f = 0.15$. Начальная пористость материала принята равной 10%, угол конусности матрицы - 15°. Определены безразмерные значения меридиональных, окружных и средних напряжений в зависимости от степени деформации трубы, а также значения изменения

пористости материала по формулам ДТППМ. Данные представлены в виде графиков и таблиц. Полное уплотнение материала происходит при интенсивности деформации $\varepsilon_i = 0{,}165$. При этом моделирование процесса экструзии заготовки осуществлялось в соответствующей конической матрице.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Малинин Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. - М.: Машиностроение, 1975.- 399 с.
2. **Сторожев М.В., Попов Е.А.** Теория обработки металлов давлением**.** - М.: Машиностроение, 1977.- 423 с.
3. **Джонсон У., Меллор П.Б.** Теория пластичности для инженеров. - М.: Машиностроение, 1979.- 567 с.
4. **Петросян Г.Л.** Пластическое деформирование порошковых материалов. - М.: Металлургия, 1988.- 153 с.
5. **Маргарян М.А.** Компьютерное моделирование процесса прессования круглого спеченного образца в конических матрицах // Известия НАН РА. Механика. - 2020. - Т. 73, №3. - С. 44-53.
6. **Бабаян А.А.** Исследование процесса прессования спеченной тонкостенной трубы в конической матрице упрощенным методом // Межв. сб. "Наукови Нотаки".- ЛУЦК, ЛНТУ, 2019**.**- Вып. N68. - С. 6-11.
7. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1983. - 176 с.

Сведения об авторе:
Маргарян Мигран Арнакович – аспирант Национального политехнического университета Армении, Институт механико-машиностроения, транспортных систем и дизайна. Тел.: (+374 94) 10 74 36; E-mail: marg.mihran@gmail.com

Поступила в редакцию 03.07.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.3-64

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР УДЛИНЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ, РАСТЯНУТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА

Мартиросян С. Р.

Ключевые слова: удлинённая прямоугольная пластинка, растягивающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, аналитический метод решения

S.R. Martirosyan

Supersonic flutter of an elongated rectangular plate with one free edge stretched along a gas flow

Key words: rectangular elongated plate, tensile forces, supersonic overrunning, aeroelastic stability, analytical solution method

In the article, in a linear formulation, the influence of the initial stress state of an elongated rectangular elastic plate with one free edge, stretched along the gas flow, on the stability of the unperturbed motion of the "plate-flow" linear dynamic system is studied under the assumption that there are concentrated inertial masses on its free edge and moments. An analytical solution of the problem of stability of a dynamical system is obtained.
The stabilizing effect of tensile forces on the system is shown.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Շրջհոսման ուղղությամբ ձգված երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի գերձայնային ֆլատերի մասին

Հիմնաբառեր՝ երկարաձիգ ուղղանկյուն սալ, առաձգական կայունություն, գերձայնային շրջհոսում, ձգող ուժեր, անալիտիկ լուծման եղանակ

Գծային դրվածքով ուսումնասիրված է շրջհոսման ուղղությամբ ձգված մեկ ազատ եզրով երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ–հոսք» գծային դինամիկ համակարգի չգրգռված շարժման կայունության վրա: Ենթադրվում է, որ սալի ազատ եզրին տեղակայված են կենտրոնացած իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է դինամիկ համակարգի կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Ցույց է տրված ձգող ուժերի կայունացնող ազդեցությունը:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния удлинённой прямоугольной упругой пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, на устойчивость невозмущённого движения линейной динамической системы «пластинка-поток» в предположении, что на её свободном крае имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение задачи устойчивости динамической системы. Показано стабилизирующее действие растягивающих сил на систему.

Введение. Исследованию задач аэроупругой устойчивости посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях [1–3]. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а также, дать оценку влияния комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния на устойчивость динамической системы «пластинка–поток» удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, растянутой по потоку газа, набегающим на её свободный край, в предположении, что на свободном крае приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости с помощью алгоритма, подробно изложенного в работе [8].

Показано, что невозмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет устойчивость в виде дивергенции панели (эйлеровой и не эйлеровой) и в виде панельного флаттера. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [7].

Дана эффективная оценка влияния первоначальных растягивающих сил на повышение устойчивости системы.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно удлинённая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$, $ab^{-1} \le 0.193$. Декартовая система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 8].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; растягивающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2, 4].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\Delta p = -a_0\rho_0 V\dfrac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [5]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp, растягивающими усилиями σ_x в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c, приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что усилия σ_x малы по сравнению с предельным значением $(\sigma_x)_{pr.}$, которое не превосходит нижнюю границу текучести; $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [6].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности растянутой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» будет описываться соотношением [1, 2]:

$$D\Delta^2 w - N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0\rho_0 V\frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ w = w(x, y, t); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2]:

$$D\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = I_c\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$D\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - N_x\frac{\partial w}{\partial x} = -m_c\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } x = 0;$$

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}),\ M_0 = \sqrt{2},\ M_{2\cos m.} \approx 33.85; \quad (1.5)$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr.} \quad (1.6)$$

Здесь, M_0 и $M_{2\cos m.}$ – граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]. Анализ устойчивости невозмущённого движения динамической системы “пластинка–поток” (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале скоростей потока газа (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае достаточно удлинённых прямоугольных пластин [8]:

$$\gamma = ab^{-1} \le 0.193, \quad (1.7)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

Замечание 1. В работе, с целью получения возможности аналитического исследования рассматриваемой задачи устойчивости системы «пластинка–поток», в дифференциальном уравнении (1.1) интенсивность распределённой массы пластинки $m\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ условно заменена интенсивностями $m_c \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ и $I_c \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$, учитываемых в граничных условиях (1.2), соответственно, приложенных вдоль свободного края пластинки $x = 0$ сосредоточенных масс m_c и моментов поворота I_c [1, 2, 8].

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y),\ \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\lambda > 0$). Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\lambda = 0$) [1, 2].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток»:

$$r^4 - 2\cdot(1+\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0, \tag{2.2}$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3}; \tag{2.3}$$

β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2\cdot N_x\, D^{-1}\mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2}, \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.}; \tag{2.4}$$

$(\beta_x^2)_{pr}$ – значение коэффициента напряжения β_x^2, соответствующее $(\sigma_x)_{pr.}$.

Ясно, что

$$\alpha_н^3 \in (a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1}\mu_n^{-3}), \tag{2.5}$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.3).

Характеристическое уравнение (2.2) подробно исследовано в работе [9].

В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде произведения двух квадратных трёхчленов:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r + q - \sqrt{q^2-1}\right)\left(r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r + q + \sqrt{q^2-1}\right) = 0, \tag{2.6}$$

где q – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(q+1+\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0,\ q\in R \tag{2.7}$$

параметр, характеризующий скорость потока газа V в соответствии с обозначением (2.3).

Как показано в работе [9]

$$q \in \left(q_0,\ q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right),\ q_0 = \left(-(\beta_x^2+1) + 2\sqrt{(\beta_x^2+1)^2+3}\right)\Big/3 \text{ (табл. 1)} \tag{2.8}$$

для всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}$.

Таблица 1.

β_x^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	2.0	5.0	10.0
q_0	1	1.010	1.027	1.065	1.097	1.309	2.163	3.757

При значениях (2.8) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ и пару комплексно сопряжённых $r_{3,4}\in W$ корней, являющихся решением квадратных уравнений – приравнённых к нулю сомножителей уравнения (2.6) [9]:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1-\beta_x^2)},\ r_1<0,\ r_2<0; \tag{2.9}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}. \tag{2.10}$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9) и (2.10), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,. \qquad (2.11)$$

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток» [9]:

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,,\gamma\in\left(0,0.193\right]. \qquad (2.12)$$

Эта формула позволяет по известному значению параметра $q=q\left(n,\gamma,\beta_x^2,\nu\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$.

В силу условия (1.5), из выражения (2.12) следует, что

$$V\left(q\right)\in\left(V\left(q_0\right),\,a_0\,M_{2cos\,m.}\right)\subseteq\left(a_0M_0,\,a_0\,M_{2cos\,m.}\right),\ \text{когда}\ V\left(q_0\right)\geq a_0M_0\,; \qquad (2.13)$$

и

$$V\left(q\right)\in\left(a_0M_0,\,a_0\,M_{2cos\,m.}\right),\ \text{когда}\ V\left(q_0\right)< a_0M_0\,. \qquad (2.14)$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D=\dfrac{E\cdot(2h)^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$ соотношения (2.13) и (2.14) для приведённой скорости $V\left(q,n,\gamma,\beta_x^2,\nu\right)\cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ запишутся, соответственно, в виде:

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0a^3)\in(V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0a^3)\,,$$

$$a_0M_{2\cos m}\Psi)\subseteq(a_0M_0,a_0M_{2\cos m.})\Psi\,; \qquad (2.15)$$

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0a^3)\in(a_0M_0,\,a_0M_{2\cos m})\Psi\,, \qquad (2.16)$$

где

$$\Psi=12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ M_0=\sqrt{2}\,,\ M_{2\cos m.}\approx 33.85\,. \qquad (2.17)$$

Подставляя значения относительной толщины пластинки $2ha^{-1}\in\left[0.006,\,0.015\right]$ в выражения (2.15) – (2.17), получаем $d\left(2ha^{-1},\nu\right)=(a_0M_0,\,a_0M_{2\cos m})\Psi$ – соответствующие интервалы допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ потока, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5), приведённые в таблице 2 для стальных пластинок.

Таблица 2.

V / $2ha^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81, 1311.78)	(52.03, 1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70, 1141.58)	(41.63, 996.35)
0.010	(11.84, 283.45)	(11.24, 269.09)	(10.91, 261.25)	(10.30, 246.70)	(8.99, 215.32)
0.012	(6.85, 164.01)	(6.50, 155.72)	(6.32, 151.20)	(5.96, 142.69)	(5.20, 124.60)
0.015	(3.51, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4). Перейдем к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков потери устойчивости возмущённого движения системы (1.1) – (1.4).

3.1. Растянутые удлинённые пластинки $\left(\gamma \in \left(0, 0.193\right]\right)$**.** Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.9) и (2.10), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается соотношением, представляющим биквадратное уравнение относительно собственного значения λ:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + \left(\chi_n A_1 + \delta_n A_2\right)\lambda^2 + A_3 = 0 \ , \tag{3.1}$$

где

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3} ,\ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1} ,\ \delta_n > 0 ,\ \chi_n > 0 , \tag{3.2}$$

приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \text{(3.3)}$$

$$= \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left(1 - \exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma\right) B_1 B_2 -$$

$$-2B_2\left(q+1+\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) sh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) -$$

$$-2B_1\left(q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) ch(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2) ;$$

$$A_1 = A_1(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \text{(3.4)}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(q+1+\beta_x^2)\left[(q-\sqrt{q^2-1})+(q+\sqrt{q^2-1})\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma\right]B_1B_2+\\
&+2B_2\left[\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\cdot\left(q+1+\beta_x^2+\sqrt{(q^2-1}\right)sh(\pi n\gamma B_1)+\right.\\
&\left.+2B_1((2q-1)(q+1)+q\beta_x^2)\,ch(\pi n\gamma B_1)\right]\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)+\\
&+2\left[B_1\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\left(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1}\right)ch(\pi n\gamma B_1)+\right.\\
&\left.+(q+1+\beta_x^2)(q-1+q\beta_x^2)sh(\pi n\gamma B_1)\right]\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\,;
\end{aligned}
$$

$$A_2 = A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2) = \quad (3.5)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(q+1+\beta_x^2)\left(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\right)B_1B_2-\\
&-4(q+1+\beta_x^2)B_1B_2ch(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)+\\
&+2(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4)sh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\,;
\end{aligned}
$$

$$A_3 = A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = \quad (3.6)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+\right.\\
&\left.+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)\right\}B_1B_2-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-\right.\\
&\left.-\left(1-\nu\right)^2+2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1}\right)\right\}B_1B_2\ \exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma+\\
&+\ 2B_2\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}-\right.\right.\\
&-(2q^2-4q+1)(q+1)+(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-\\
&\left.-2((2q-1)(q+1)-q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu+\ (q+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\right]sh(\pi n\gamma B_1)+\\
&\left.+2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}(q+1+\beta_x^2)\,B_1ch\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)+\\
&+2\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}+\right.\right.\\
&+(2q^2-4q+1)(q+1)-(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+\\
&\left.+\ 2((2q-1)(q+1)+q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu-(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\right]ch(\pi n\gamma B_1)-\\
&\left.-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)\left(q^2-1\right)}\,(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4)\cdot sh\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\sin\left(\pi n\gamma B_2\right);
\end{aligned}
$$

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1-\beta_x^2)},\ \ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1-\beta_x^2)}. \quad (3.7)$$

Легко показать, что при допустимых значениях параметра $q = q(V)$ (2.8) и коэффициента напряжения $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.}$

$B_1 = B_1(q, \beta_x^2) > 0$, $B_2 = B_2(q, \beta_x^2) > 0$, (3.8) откуда следует справедливость неравенств

$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0$, $A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0$, $n \geq 1$, $\gamma \in (0, 0.193]$. (3.9)

Вводя обозначение

$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c (\pi n \gamma)^2 \cdot (m_c a^2)^{-1}$, (3.10)

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), перепишется в виде

$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2)\chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0$, $\delta_n > 0$, $\chi_n > 0$, $k_n > 0$. (3.11)

В соответствии с обозначением (1.7), значению $\gamma = 0$ соответствует бесконечно удлинённая пластинка – предельный случай исходной задачи устойчивости удлинённых прямоугольных пластинок.

3.2. Растянутая бесконечно удлинённая панель ($\gamma = 0$). Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности растянутой бесконечно удлинённой пластинки может быть получено из (1.1) путём предельного перехода $b \to \infty$. Тогда, вводя величину $\xi = x a^{-1}$, уравнения исходной задачи (1.1) – (1.4) запишутся в виде:

$$D \frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi^4} - (N_x a^2) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} + (a_0 \rho_0 a^3 V) \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0, \; w_1 = w_1(\xi, t); \qquad (3.12)$$

$$D \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = (I_c a) \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi \cdot \partial t^2}; \; D \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} - (N_x a^2) \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = -(m_c a^3) \frac{\partial w_1}{\partial t^2}, \; \xi = 0; \qquad (3.13)$$

$$w_1 = 0, \; \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = 0, \; \xi = 1. \qquad (3.14)$$

Решение уравнения (3.12) будем искать в форме

$$w_1(\xi, t) = C e^{(r\xi + \lambda t)}. \qquad (3.15)$$

Подставляя решение (3.15) в дифференциальное уравнение (3.12), получаем характеристическое уравнение в виде

$$r^4 - 2\beta_\xi^2 r^2 + s_1^3 r = 0, \quad \beta_\xi^2 = 2h\sigma_x a^2 D^{-1}, \quad s_1^3 = V D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3). \qquad (3.16)$$

Корни r_k характеристического уравнения (3.16) определяются выражениями [9]

$$r_1 = -\sqrt{2(q_\xi + \beta_\xi^2)}, \; r_2 = 0, \; r_{3,4} = \sqrt{0.5(q_\xi + \beta_\xi^2)} \pm i \sqrt{0.5(3q_\xi - \beta_\xi^2)}; \qquad (3.17)$$

$$r_1 < 0, \; r_{3,4} \in W \text{ при всех } q_\xi \in \left((q_\xi)_0, q_\xi(a_0 M_{2\cos m})\right), \; (q_\xi)_0 > \frac{\beta_\xi^2}{3}. \qquad (3.18)$$

Здесь q_ξ – единственный действительный корень кубического уравнения [17]

$$8q_\xi^2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)-s_1^6=0. \qquad (3.19)$$

Отсюда, в соответствии с обозначением (3.16), получаем формулу

$$VD^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)=2\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cdot q_\xi, \qquad (3.20)$$

связывающую скорость потока газа V с остальными параметрами системы.

Согласно вышеизложенному общее решение (3.15) дифференциального уравнения (3.12) запишется в виде

$$w_1(\xi,\, t)=\sum_{k=1}^{4}C_k\exp\left(r_k\,\xi+\lambda\,t\right), \qquad (3.21)$$

C_k – произвольные постоянные; r_k – корни характеристического уравнения (3.16), определяемые выражениями (3.17).

Подставляя обшее решение (3.21) в граничные условия (3.13) и (3.14), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_k. Приравненный нулю определитель этой системы – характеристический определитель будет описываться в виде биквадратного уравнением, подобному (3.1):

$$\chi_\xi\cdot\delta_\xi\cdot\tilde{A}_0\lambda^4+\left(\chi_\xi\cdot\tilde{A}_1+\delta_\xi\cdot\tilde{A}_2\right)\lambda^2+\tilde{A}_3=0; \qquad (3.22)$$

$$\delta_\xi=m_cD^{-1}a^3,\ \chi_\xi=I_cD^{-1}a,\ \delta_\xi>0,\ \chi_\xi>0\ – \qquad (3.23)$$

приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x=0$ бесконечно удлинённой пластинки;

$$\tilde{A}_0=\tilde{A}_0(q_\xi,\beta_\xi^2)=2\sqrt{2\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\cdot \qquad (3.24)$$

$$\left(\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)sh\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}-\left(2q_\xi+\beta_\xi^2\right)sh\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cos\sqrt{0,5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\right)-$$

$$-2\beta_\xi^2\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cdot ch\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cdot\sin\sqrt{0.5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)};$$

$$\tilde{A}_1=\tilde{A}_1(q_\xi,\beta_\xi^2)=4q_\xi\sqrt{\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\cdot$$

$$\left(\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)e^{-\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}+\left(2q_\xi+\beta_\xi^2\right)e^{\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}\cos\sqrt{0.5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\right)+$$

$$+4q_\xi\beta_\xi^2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)e^{\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}\sin\sqrt{0.5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)};$$

$$\tilde{A}_2=\tilde{A}_2(q_\xi,\beta_\xi^2)=4\sqrt{\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)^3\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\cdot$$

$$\cdot\left(ch\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}-ch\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cos\sqrt{0,5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\right)+$$

$$+\ 4\left(3q_\xi^2-\beta_\xi^4\right)sh\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cdot\sin\sqrt{0,5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\ ;$$

$$\tilde{A}_3=\tilde{A}_3(q_\xi,\beta_\xi^2)=4\cdot q_\xi\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)^2\cdot\sqrt{2\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\cdot$$

$$\left(-e^{-\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}+e^{\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}\cos\sqrt{0.5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\right)-$$

$$-\ 4\cdot q_\xi\left(3q_\xi^2-\beta_\xi^4\right)\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cdot e^{\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}\sin\sqrt{0,5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\,.$$

Легко показать, что $\tilde{A}_0=\tilde{A}_0(q_\xi,\beta_\xi^2)>0$ и $\tilde{A}_2=\tilde{A}_2(q_\xi,\beta_\xi^2)>0$ при всех допустимых значениях q_ξ и β_ξ^2. А тогда, дисперсионное уравнение (3.22) можно переписать в виде, подобному (3.11):

$$\lambda^4+(k_\xi\,\tilde{A}_1+\tilde{A}_2)\chi_\xi^{-1}\tilde{A}_0^{-1}\lambda^2+\chi_\xi^{-1}\delta_\xi^{-1}\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_3=0\,,\ k_\xi=\chi_\xi\delta_\xi^{-1}=I_c\left(m_ca^2\right)^{-1}>0\,.\quad(3.25)$$

Следует заметить, что в отсутствии обтекания невозмущённое состояние равновесия растянутой как удлинённой прямоугольной пластинки, так и бесконечно удлинённой, является устойчивым при всех $\beta_x^2\neq0$ и $\beta_\xi^2\neq0$ соответственно [9].

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристических определителей (3.11) и (3.25), определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров, соответственно, $\Im=\left\{q(V),n,\gamma,\nu,\beta_x^2,k_n\right\}$ и $\Im_\xi=\left\{q_\xi(V),\beta_\xi^2,k_\xi\right\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение возмущённого движения. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости: $\Im_1,\Im_2$ и $\Im_3$. В области $\Im_0$ все корни λ_k уравнения (3.11) находятся в левой части комплексной плоскости $(\mathrm{Re}\,\lambda_k<0)$; в областях $\Im_1,\Im_2$ и $\Im_3$, соответственно, либо среди корней λ_k имеется один положительный корень, либо имеются два положительных корня, либо имеется пара комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью [7, 8].

Область устойчивости $\Im_0\in\Im$ будет определяться соотношениями:

$$k_nA_1+A_2>0\,,\ A_3>0\,,\ \Delta>0\,;\quad(4.1)$$

а области неустойчивости $\Im_l$, $l=\overline{1,3}$ – соотношениями:

$\Im_1$: $k_nA_1+A_2>0$, $A_3<0$, $\Delta>0$ и $k_nA_1+A_2<0$, $A_3<0$, $\Delta>0$; (4.2)

$\Im_2$: $k_nA_1+A_2<0$, $A_3>0$, $\Delta>0$; (4.3)

$\Im_3$: $k_nA_1+A_2>0$, $A_3>0$, $\Delta<0$ и $k_nA_1+A_2<0$, $A_3>0$, $\Delta<0$. (4.4)

Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta=\Delta(n,\gamma,\nu,\beta_x^2,k_n)=(k_nA_1+A_2)^2-4k_nA_0A_3. \quad (4.5)$$

Очевидно, что в области устойчивости $\Im_0$ уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4}=\pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

В области $\Im_1$ характеристический определитель (3.11) имеет два действительных корня $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4}=\pm i\omega$ (из двух собственных движений пластинки, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2, одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону). В силу этого, прогибы пластинки будут возрастать во времени по экспоненциальному закону: в области $\Im_1$ имеет место эйлерова дивергенция панели.

В области $\Im_2$ уравнение (3.11) имеет четыре действительных корня $\lambda_k\in R$ – два отрицательных ($\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$) и два положительных ($\lambda_3>0$, $\lambda_4>0$): из четырёх собственных движений пластинки два затухают, а остальные два неограниченно отклоняются по экспоненциальному закону. Следовательно, система в области $\Im_2$, также, как и в области $\Im_1$, является статически неустойчивой: имеет место не эйлерова дивергенция панели, более ярко выраженная.

В области $\Im_3$, определяемой условиями (4.4), характеристическое уравнение (3.11) имеет, по крайней мере, два комплексно сопряжённых корня с положительной вещественной частью. Следовательно, невозмущённое состояние равновесия системы теряет динамическую устойчивость: имеет место панельный флаттер. Пластинка совершает флаттерные колебания. – автоколебания.

Границами области устойчивости $\Im_0$ системы в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_nA_1+A_2>0$ являются гиперповерхности [8]:

$$A_3=0; \quad (4.6)$$

$$\Delta=0. \quad (4.7)$$

Характеристическое уравнение (3.11) на гиперповерхности (4.6) имеет один нулевой корень $\lambda_0=0$ кратности 2, а на гиперповерхности (4.7) – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2}=\pm i\omega$.

На границе (4.6) области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_nA_1+A_2>0$ и $\Delta>0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V\geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели. Критические скорости дивергенции панели $\left\{V^{(1)}_{cr.div.}, V^{(2)}_{cr.div.}\right\}$, определяемые подстановкой, соответственно, первого $q^{(1)}_{cr.div}$ и третьего $q^{(3)}_{cr.div}$ корней уравнения (4.6) в формулу (2.12), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_1$. При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера невозмущённого движения системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде дивергенции панели. Это приводит к соответствующему изменению динамического поведения растянутой прямоугольной пластинки в потоке газа: в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Так как монотонное «выпучивание» пластинки не имеет колебательного характера, то может рассматриваться как квазистатический процесс – дивергенция.

Заметим, что уравнение (4.6) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [9] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой растянутой панели в статической постановке по методу Эйлера.

Критические скорости не эйлеровой дивергенции $\left\{V_{1,2}\right\}$ разграничивают области $\Im_1$ и $\Im_2$: при скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит “мягкий” переход из области эйлеровой дивергенции $\Im_1$ в область не эйлеровой дивергенции $\Im_2$.

На границе (4.7) области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а также, на границе (4.7) области не эйлеровой дивергентной неустойчивости $\Im_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ теряет динамическую устойчивость в виде панельного флаттера. Критические скорости панельного флаттера $\left\{V^{(1)}_{cr.fl.}\right\}$, определяемые подстановкой первого корня $q^{(1)}_{cr.fl.}$ уравнения (4.7) в формулу (2.12), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, или области $\Im_2$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n$. В обоих случаях при значениях скоростей потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям. Однако, в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае – «выпученная» (изогнутая) по форме пластинка. Тем самым, переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [1, 7, 8].

Следует отметить, что критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div.}$ и панельного флаттера $V_{cr.fl.}$ определяются по формуле (2.12) с достаточной точностью.

В случае бесконечно удлиненной пластинки $(\gamma = 0)$ разбиение пространства параметров $\Im_\xi = \{q_\xi(V), \beta_\xi^2, k_\xi\}$ на область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости: $\Im_1, \Im_2$ и $\Im_3$ производится аналогичным способом. Критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера определяются с достаточной точностью подстановкой в формулу (3.20) соответствующих значений параметра q_ξ – решений уравнений $\tilde{A}_3(q_\xi, \beta_\xi^2) = 0$ и $\Delta_\xi\left(q_\xi, \beta_\xi^2, k_\xi\right) = 0$ соответственно. Здесь Δ_ξ – дискриминант биквадратного уравнения (3.25).

5. **Численные результаты**. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n)\} \in \Im$ и $\{q(\beta_\xi^2, k_\xi)\} \in \Im_\xi$, параметризованных надлежащим образом в пространствах $\Im$ и $\Im_\xi$ соответственно.

Численные расчеты показали, что в случае удлинённых прямоугольных пластинок ($\gamma \in (0,\ 0.193]$) критические скорости $V_{cr.div}^{(1)}$, $V_{cr.div}^{(2)}$, $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$ являются возрастающими функциями от числа полуволн n: их наименьшему значению соответствует $n = 1$. При этом, критические скорости $V_{cr.div}^{(1)}$ и $V_{cr.div}^{(2)}$ являются слабо убывающими функциями от коэффициента Пуассона ν, в отличие от критических скоростей $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$, являющихся слабо возрастающими функциями от коэффициента Пуассона ν.

В таблицах 3 – 9 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости системы «пластинка–поток» в случае удлинённых прямоугольных пластинок для значений $\gamma = 0.01; 0.1$ при $n = 1$, $\nu = 0.3$ и для бесконечно удлинённой пластинки $\gamma = 0$, характеризующие наиболее представительные случаи зависимости приведённых критических скоростей дивергенции и флаттера от «существенных» параметров системы.

Следует отметить, что качественные характеристики поведения возмущённого движения системы можно считать примерно одинаковыми для всех $\gamma \in [0,\ 0.193]$, в отличие от его количественных характеристик, существенно зависящих от параметра γ.

Для наглядной иллюстрации динамики состояния системы «пластинка – поток» в пространстве параметров $\Im$ составлены цепочки переходов из области $\Im_l \subset \Im$ в область $\Im_k \subset \Im$.

Следует отметить существенную зависимость форм представления цепочек от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок, основанную на сопоставлении значений соответствующих критических скоростей с данными таблицы 2.

В частности, цепочки переходов исходной системы для стальных пластинок относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right)\in\left[0.006, 0.015\right]$ при всех $\gamma\in\left[0,\ 0.193\right]$ – одинаковы и имеют следующее представление:

$$\left(\Im_0\right)\xrightarrow{V^{(1)}_{cr.div}}\Im_1\xrightarrow{V_0}\Im_0\xrightarrow{V^{(1)}_{cr.fl}}\Im_3\xrightarrow{V^{*}_0}\Im_0\xrightarrow{V^{(2)}_{cr.div}}\Im_1 \tag{5.1}$$

при $k_1\in\left(0,0.1\right)$ и $k_\xi\in\left(0,0.3\right)$;

$$\left(\Im_0\right)\xrightarrow{V^{(1)}_{cr.div}}\Im_1\xrightarrow{V_{1,2}}\Im_2\xrightarrow{V^{(1)}_{cr.fl}}\Im_3\xrightarrow{V^{*}_0}\Im_0\xrightarrow{V^{(2)}_{cr.div}}\Im_1 \tag{5.2}$$

при $k_1\ge 0.1$ и $k_\xi\ge 0.3$;

где, в соответствии с (3.10) и (3.25), $k_1=I_c\pi^2\gamma^2\left(m_c a^2\right)^{-1}$ и $k_\xi=I_c\cdot\left(m_c a^2\right)^{-1}$.

Из представлений (5.1) и (5.2) видны следующие две особенности в поведении невозмущённого движения системы «пластинка–поток».

1) Символом $\left(\Im_0\right)$ обозначено состояние системы вблизи $a_0\sqrt{2}$, указывающее на двоякое поведение невозмущённого движения. При значениях $\beta_x^2<\left(\beta_x^2\right)_{\min}$ и $\beta_\xi^2<\left(\beta_\xi^2\right)_{\min}$, соответственно, для $\gamma\in\left(0,0.193\right]$ и $\gamma=0$, невозмущённое движение системы неустойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$: имеет место эйлерова дивергенция. Начиная с значений $\left(\beta_x^2\right)_{\min}=\beta_x^2\left(\gamma,\ 2ha^{-1}\right)$ и $\left(\beta_\xi^2\right)_{\min}=\beta_\xi^2\left(2ha^{-1}\right)$ (табл. 3) невозмущённое движение системы становится устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$. Граничные значения $\left(\beta_x^2\right)_{\min}$ и $\left(\beta_\xi^2\right)_{\min}$ определяются из сопоставления значений $\left\{V^{(1)}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)\right\}$ с данными табл. 2. В соответствии с численными результатами зависимость $\left(\beta_x^2\right)_{\min}$ от коэффициента Пуассона исчезающе мала.

2) При малых значениях $k_1\in\left(0,0.1\right)$ и $k_\xi\in\left(0,0.3\right)$ имеет место переход $\Im_0\to\Im_3$, а при $k_1\ge 0.1$ и $k_\xi\ge 0.3$ – переход $\Im_2\to\Im_3$. При этом,

$$V_0\left(\gamma,\nu,\beta_x^2\right)=V_{1,2}\left(\gamma,\nu,\beta_x^2\right) \text{ при } \gamma\in\left(0,0.193\right],\nu \text{ и } \beta_x^2\le\left(\beta_x^2\right)_{pr.}; \tag{5.3}$$

$$V_0\left(\beta_\xi^2\right)=V_{1,2}\left(\beta_\xi^2\right) \text{ при } \gamma=0 \text{ и всех } \beta_\xi^2\le\left(\beta_\xi^2\right)_{pr.}. \tag{5.4}$$

Таблица 3.

$2ha^{-1}$	0.006	0.01	0.012	0.015
$\left(\beta_x^2\right)_{\min}, \gamma = 0.1$	89.26	23.64	14.06	7.12
$\left(\beta_x^2\right)_{\min}, \gamma = 0.01$	8935.00	2380.00	1423.00	768.00
$\left(\beta_\xi^2\right)_{\min}, \gamma = 0$	8.95	2.395	1.452	0.78

Соответственно, при $k_1 \in (0, 0.1)$ и $k_\xi \in (0, 0.3)$ при скоростях потока $V \geq V_{cr.fl.}^{(1)}$ начинает совершать флаттерные колебания плоская пластинка, а при $k_1 \geq 0.1$ и $k_\xi \geq 0.3$ – «выпученная» (изогнутая) пластинка.

Таблица 4.

β_x^2 / $\gamma = 0.1$	0	1	5	10	30	50
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_1 \in (0, 0.1)$; $V_2 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_1 \geq 0.1$	76.893	78.544	83.468	89.588	114.012	138.565
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	–	–	–	4.499	14.031	25.041
$V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	484.045	486.444	493.491	502.724	541.779	578.780

Таблица 5. Значения $V_{cr.fl.}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.1$.

β_x^2 / k_1	0	1.0	5.0	10.0	30.0	50.0
0.1	92.615	93.635	97.477	102.328	122.263	143.165
1.0	133.953	135.237	139.599	145.084	167.131	189.120
5.0	148.972	150.151	154.906	160.830	184.596	208.795
10.0	152.545	153.940	158.735	164.822	189.008	213.589

Таблица 6.

$\gamma = 0.01$ \ β_x^2	0	100	500	1000	3000	5000
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_1 \in (0, 0.1)$; $V_2 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_1 \geq 0.1$	75.764	76.975	81.899	87.997	112.242	136.543
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	–	–	–	4.164	13.892	44.270
$V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	484.898	486.844	494.430	504.312	543.439	581.761

Приведённые критические скорости $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma \in \left(0, 0.193\right]$ и $\gamma = 0$ определяются подстановкой второго корня $q = q_2$ уравнений $A_3\left(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2\right) = 0$ и $\tilde{A}_3\left(q_\xi, \beta_\xi^2\right) = 0$ соответственно, в формулы (2.12) и (3.20).

Таблица 7. Значения $V_{cr.fl.}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.01$.

k_1 \ β_x^2	0	100	500	1000	3000	5000
0.1	151.314	152.712	157.499	163.581	187.999	211.855
1.0	157.820	159.080	164.095	170.310	195.528	220.798
5.0	159.504	160.765	165.798	172.117	197.425	222.962
10.0	159.905	161.168	166.204	172.529	197.944	223.685

Таблица 8.

$\gamma = 0$ \ β_ξ^2	0	0.1	0.5	1	2	3
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_\xi \in (0, 0.3)$; $V_2 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_\xi \geq 0.3$	76.367	77.109	82.084	88.403	100.768	113.477
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	–	–	–	4.252	8.916	14.189
$V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	485.828	487.321	495.429	505.530	524.849.	545.244.

Таблица 9. Значения $V_{cr.fl.}^{(1)} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0$.

k_ξ \ β_ξ^2	0	0.1	0.5	1	2	3
0.1	89.443	91.236	100.584	112.671	142.407	–
0.3	76.367	77.045	81.954	88.270	101.329	114.942
0.5	79.700	80.712	84.970	90.552	101.610	113.184
1.0	91.462	92.318	96.152	101.132	111.019	121.161
5.0	122.756	124.012	128.080	133.262	143.980	154.294
10.0	132.574	133.850	138.501	143.981	149.635	166.238

При скоростях потока $V \geq V_0$ при $k_1 \in (0, 0.1)$ (табл. 4 и 6) и при $k_\xi \in (0, 0.3)$ (табл.8) происходит переход из области эйлеровой дивергенции $\Im_1$ в область устойчивости $\Im_0$. Соответственно, при скоростях потока $V \geq V_{1,2}$, где $V_0 = V_{1,2}$, при $k_1 \geq 0.1$ (табл. 4 и 6) и при $k_\xi \geq 0.3$ (табл.8) происходит переход из области эйлеровой дивергенции $\Im_1$ в область не эйлеровой дивергенции $\Im_{1,2}$.

При дальнейшем увеличении скорости потока газа: при скоростях $V \geq V_{cr.fl.}^{(1)}$.происходит переход системы к автоколебаниям. В первом случае, при $k_1 \in (0, 0.1)$ (табл. 5 и 7) и при $k_\xi \in (0, 0.3)$ (табл.9) система из состояния покоя (плоская пластинка) переходит к автоколебаниям – к флаттерным колебаниям, а во втором случае, при $k_1 \geq 0.1$ (табл. 5 и 7) и при $k_\xi \geq 0.3$ (табл.9) – «выпученная» (изогнутая) пластинка начинает совершать флаттерные колебания.

Приведённые критические скорости дивергенции и флаттера (табл. 4–9) являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения, соответственно, β_x^2 и β_ξ^2.

Тем самым, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное растягивающими усилиями, направленными по потоку газа, оказывает стабилизирующее действие на невозмущённое движение системы: приводит к повышению устойчивости системы.

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия растянутой упругой, как достаточно удлинённой прямоугольной пластинки, так и бесконечно удлинённой пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край, в предположении, что пластинка первоначально растянута по направлению потока газа.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости – области эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая определить критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости. Найдено наименьшее значение коэффициента напряжения, начиная с которого невозмущённое движение системы становится устойчивым вблизи значения $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей.

Установлено, что при больших значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям.

Показано, что критические скорости дивергенции и флаттера являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения растягивающих сил. Тем самым, растягивающие силы, направленные по потоку газа, приводят к повышению устойчивости системы «пластинка–поток».

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем..– М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
5. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
6. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
7. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
8. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
9. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции растянутой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 2, с.37–58.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 22.07.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика

КИРАКОСЯН РАЗМИК МАКАРОВИЧ

9 февраля 2022 ушёл из жизни известный ученый в области механики, доктор технических наук, профессор Размик Макарович Киракосян.

Р.М. Киракосян родился в 1937г. в Ереване. После окончания с отличием Ереванского политехнического института в 1959г. поступил в аспирантуру Ереванского госуниверситета. В 1964г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 1986г. – докторскую диссертацию. В 1990г. получил звание профессора.

С 1962г. он работал в Институте механики НАН РА. Он является автором более 120 научных статей, 3 изобретений и восьми монографий, посвящённых уточнённым теориям ортотропных пластин и оболочек, строительной механике, теориям пластичности и ползучести, а также общей физике.

Известны его работы для пластин и оболочек, находящихся в упруго-пластическом состоянии, предложенная им практическая модель упруго-защемлённой опоры тонкостенных элементов конструкций. Высокую научную ценность имеет монография «Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов», Ереван-2000, Изд.«Гитутюн» НАН РА. Им построены также аналогичные уточнённые теории для ортотропных пластин и оболочек переменной толщины при учёте влияния изменения температуры. В рамках отмеченных уточнённых теорий им, его учениками и коллегами решён ряд прикладных задач изгиба, устойчивости, колебаний, оптимизации и др.

В 1972-73г.г. Р.М. Киракосян в рамках бимоментно-векториальной теории В.З. Власова, выполнил расчёты на прочность высокоэтажных жилых домов, которые должны были строиться методом подъёма этажей. Расчёты были проведены с учётом высокой степени сейсмоактивности территории Армении. Благодаря этому, во время разрушительного спитакского землетрясения в 1988г. никакое из зданий, построенных указанным методом, не разрушилось и спаслись жизни сотен жителей этих домов.

Велики заслуги Киракосяна Р.М. в деле подготовки научных кадров. Под его научным руководством защищён ряд кандидатских и докторских диссертаций. Долгое время он являлся учёным секретарем Спец. Совета по защите диссертаций при Институте механики.

Помимо научной деятельности Киракосян Р.М. занимался ещё и преподавательской работой. В Ереванском архитектурно-строительном институте долгие годы читал лекции по сопротивлению материалов и строительной механике.

Кроме науки он занимался ещё и поэзией. Опубликованы четыре сборника его стихов.

Светлая память об Размике Макаровиче Киракосяне навсегда сохранится в наших сердцах.

Редколлегия журнала "Известия НАН Армении. Механика" глубоко скорбит по поводу тяжелой утраты.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика

СОДЕРЖАНИЕ 2022 г., том 75, №3

CONTENTS 2022, v. 75, №3

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2022, հ.75, №3