ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS

Издаётся с января 1966 года

Հատոր
Том 74 №4 2021
Volume

ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ГИТУТЮН» НАН РА

E-mail: **journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech**

Հայաստանի Հանրապետություն, Երևան, 0019 Բաղրամյան պող. 24/2, Հեռ. 52-48-02

Республика Армения, Ереван,0019 пр. Баграмяна 24 /2, Тел. 52-48-02

24/2, Baghramyan Ave. Yerevan 0019 Republic of Armenia Tel. 52-48-02

Сдано в производство 07.07.2021 г.
Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$. Печ. лист – 4 7/8
Заказ № 1105. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, № 4, 2021 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/74.4.1

Агаловян Л.А., Япуджян В.Т.

О СМЕШАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ПЛОСКОСТЬ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ

Ключевые слова: плоская деформация, вынужденные колебания, анизотропное тело, плоскость упругой симметрии, резонанс.

Aghalovyan L.A., Yapujyan V.T.

About the plane deformational dynamic mixed problem of an anisotropic body with a plane of elastic symmetry

Keywords: plane deformation, forced oscillations, anisotropic body, plane of elastic symmetry, resonance.

Forced oscillations of the layer with general anisotropy in its plane have been studied. It is assumed that the layer rests freely on an absolutely rigid base, and the front surface is affected by a normal load that changes harmonic over time. The solution of the problem by the asymptotic method reduces to the solution of the singular perturbation equations. The solution of the corresponding external problem has been determined. The cases where resonance can occur, when the solution becomes mathematically precise are expressed.

Աղալովյան Լ.Ա., Յափուջյան Վ.Տ.

Առաձգականության սիմետրիայի հարթություն ունեցող անիզոտրոպ մարմնի հարթ դեֆորմացիոն դինամիկական խառը խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ հարթ դեֆորմացիա, հարկադրական փատանումներ, անիզոտրոպ մարմին, առաձգական սիմետրիաի հարթություն, ռեզոնանս:

Ուսումնասիրված են իր հարթության մեջ ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված շերտի ստիպողական փատանումները: Ենթադրվում է, որ շերտը ազատ հենված է բացարձակ կոշտ հենարանի վրա, իսկ դիմային մակերևույթի վրա ազդում է ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ բեռ: Ասիմպտոտիկ մեթոդով խնդրի լուծումը հանգեցված է սինգուլյար գրգռված հավասարումների լուծմանը: Որոշված է համապատասխան արտաքին խնդրի լուծումը:

Արտածված են այն դեպքերը, երբ կարող է առաջանալ ռեզոնանս, երբ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ:

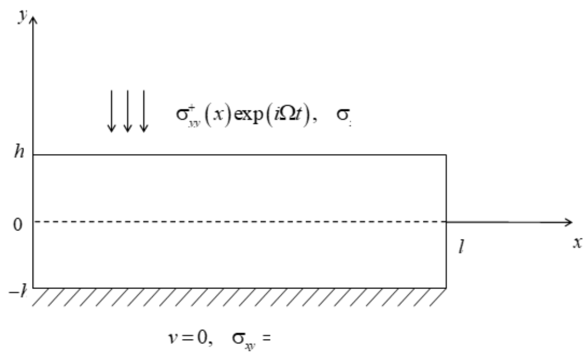
Изучены вынужденные колебания анизотропной полосы, обладающей общей анизотропией в своей плоскости. Полоса опирается на абсолютно жесткое основание, а на верхнюю кромку полосы действует переменная нормальная нагрузка, которая изменяется во времени гармонически. Асимптотическим методом решение задачи сведено к системе сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Найдено решение внешней задачи. Выведены условия возникновения резонанса. Указаны случаи, когда найденное решение становится математически точным.

Введение

Для решения статических и динамических краевых задач теории упругости для тонких тел типа балок, пластин и оболочек эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Решению статических краевых задач асимптотическим методом для пластин и оболочек посвящена монография Гольденвейзера А.Л. [1], где рассматривалась лишь первая краевая задача теории упругости, т.е. на лицевых поверхностях пластин и оболочек заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений. Статические краевые задачи для анизотропных балок, пластин и оболочек асимптотическим методом рассмотрены в монографиях Агаловяна Л.А. [2] и Агаловяна Л.А., Геворкяна Р.С. [3]. Были рассмотрены как классические, так и неклассические краевые задачи. Асимптотический метод оказался особенно эффективным для решения неклассических краевых задач, т.е. когда на лицевых поверхностях заданы значения перемещений или смешанные условия. Была установлена принципиально новая асимптотика для решения этих задач [2–4]. Метод оказался эффективным и для решения динамических задач тонких тел [2, 5–10].

1 Постановка задачи, основные уравнения

Рассматриваются вынужденные колебания анизотропной полосы $D = \{(x, y): \ 0 \leq x \leq l, \ -h \leq y \leq h, \ h << l\}$, находящейся в условиях плоской деформации (Фиг. 1).



Фиг. 1

Считается, что полоса свободно лежит на жесткой подстилке, на верхнюю кромку полосы действует нормальная нагрузка, меняющаяся во времени гармонично. Требуется найти решение уравнений движения плоской деформации анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\\ &\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned}\tag{1}$$

при соотношениях упругости [11, 12]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx}=\beta_{11}\sigma_{xx}+\beta_{12}\sigma_{yy}+\beta_{16}\sigma_{xy};\quad \varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x};\\ &\varepsilon_{yy}=\beta_{12}\sigma_{xx}+\beta_{22}\sigma_{yy}+\beta_{26}\sigma_{xy};\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y};\\ &\varepsilon_{xy}=\beta_{16}\sigma_{xx}+\beta_{26}\sigma_{yy}+a_{66}\sigma_{xy};\quad \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}\tag{2}$$

где

$$\beta_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}};\quad i,j=1,2,6,\tag{3}$$

a_{ij}- постоянные упругости, и при граничных условиях:

$$\begin{aligned} &\sigma_{yy}\left(y=h\right)=-\sigma^{+}_{yy}\left(x\right)\exp\left(i\Omega t\right);\quad \sigma_{xy}\left(y=h\right)=0;\\ &v\left(y=-h\right)=0;\quad \sigma_{xy}\left(y=-h\right)=0. \end{aligned}\tag{4}$$

Граничные условия при $x=0,l$ не конкретизируем, ими обусловлено появление пограничного слоя, которое можно рассматривать отдельно [?].

2 Асимптотическое решение задачи

Решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}(x,y,t)=\sigma_{11}(x,y)\exp(i\Omega t)\,; \quad (x,y:1,2)\,;\\
&\sigma_{xy}(x,y,t)=\sigma_{12}(x,y)\exp(i\Omega t)\,;\\
&u(x,y,t)=u_x(x,y)\exp(i\Omega t)\,; \quad v(x,y,t)=u_y(x,y)\exp(i\Omega t)\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Подставив (5) в уравнения (1) и (2) и перейдя к безразмерным координатам и перемещениям:

$$x=l\xi; \quad y=h\zeta; \quad U=\frac{u_x}{l}; \quad V=\frac{u_y}{l}, \tag{6}$$

в результате получим систему

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\Omega_*^2U=0; \quad \Omega_*^2=\rho h^2\Omega^2; \quad \varepsilon=\frac{h}{l};\\
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\Omega_*^2V=0;\\
&\frac{\partial U}{\partial\xi}=\beta_{11}\sigma_{11}+\beta_{12}\sigma_{22}+\beta_{16}\sigma_{12}; \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=\beta_{12}\sigma_{11}+\beta_{22}\sigma_{22}+\beta_{26}\sigma_{12};\\
&\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}=\beta_{16}\sigma_{11}+\beta_{26}\sigma_{22}+\beta_{66}\sigma_{12}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Решение сингулярно возмущенной системы (7) складывается из решений внешней задачи $\left(I^{out}\right)$ и пограничного слоя $\left(I^{b}\right)$:

$$I=I^{out}+I_b. \tag{8}$$

Решение внешней задачи будем искать в виде

$$I^{out}=\varepsilon^{q_i+s}I^{(s)}, \quad s=\overline{0,N}, \tag{9}$$

где $q_i=-1$ для σ_{11}, σ_{12}, σ_{22} и $q_i=0$ для U, V, обозначение $s=\overline{0,N}$ означает, что в (9) по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование по целочисленным значениям s от нуля до числа приближений N. Подставив (9) в систему (7) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\zeta}+\Omega_*^2U^{(s)}=0; \quad \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}+\Omega_*^2V^{(s)}=0;\\
&\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}=\beta_{11}\sigma_{11}^{(s)}+\beta_{12}\sigma_{22}^{(s)}+\beta_{16}\sigma_{12}^{(s)}; \quad \frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=\beta_{12}\sigma_{11}^{(s)}+\beta_{22}\sigma_{22}^{(s)}+\beta_{26}\sigma_{12}^{(s)};\\
&\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}=\beta_{16}\sigma_{11}^{(s)}+\beta_{26}\sigma_{22}^{(s)}+\beta_{66}\sigma_{12}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Из системы (10) напряжения можно выразить через перемещения $U^{(s)}$ и $V^{(s)}$:

$$\sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_1\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \alpha_2\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + \frac{\gamma_1^{(s-1)}}{\Delta};$$
$$\sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_3\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \alpha_4\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + \frac{\gamma_2^{(s-1)}}{\Delta};$$
$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_5\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \alpha_3\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + \frac{\gamma_3^{(s-1)}}{\Delta};$$
$$\Delta = \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{26}\alpha_3 + \beta_{22}\alpha_4;$$

$\alpha_1 = (\beta_{12}\beta_{26} - \beta_{16}\beta_{22})$; $\quad \alpha_2 = (\beta_{16}\beta_{26} - \beta_{12}\beta_{66})$; $\quad \alpha_3 = (\beta_{12}\beta_{16} - \beta_{11}\beta_{26})$;
$\alpha_4 = \left(\beta_{11}\beta_{66} - \beta_{16}^2\right)$; $\quad \alpha_5 = \left(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2\right)$;

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(s-1)} &= \left(\beta_{22}\beta_{66} - \beta_{26}^2\right)\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + \alpha_1\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}; \\ \gamma_2^{(s-1)} &= \alpha_2\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + \alpha_3\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}; \\ \gamma_3^{(s-1)} &= \alpha_1\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + \alpha_5\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставив значения $\sigma_{12}^{(s)}, \sigma_{22}^{(s)}$ в первые два уравнения (10), для определения $U^{(s)}$, $V^{(s)}$ получим уравнения:

$$\begin{aligned} &\alpha_5\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \alpha_3\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Omega_*^2\Delta U^{(s)} = \gamma_{11}^{(s-1)}; \\ &\alpha_3\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \alpha_4\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Omega_*^2\Delta V^{(s)} = \gamma_{22}^{(s-1)}; \\ &\gamma_{11}^{(s-1)} = -\Delta\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\gamma_3^{(s-1)}}{\partial\zeta}; \\ &\gamma_{22}^{(s-1)} = -\Delta\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\gamma_2^{(s-1)}}{\partial\zeta}. \end{aligned} \tag{12}$$

Для ортотропной полосы учитывая, что $\beta_{16} = \beta_{26} = 0$, имеем $\alpha_3 = 0$. В результате, уравнения для $U^{(s)}$ и $V^{(s)}$ разделяются и им соответствуют сдвиговые и продольные колебания, которые при $s = 0$ независимы. В случае общей анизотропии, как следует из (12), нет такого разделения. Из системы (12), после некоторых преобразований, $V^{(s)}$ можно выразить через$U^{(s)}$ по формуле

$$V^{(s)}=\frac{b}{\alpha_3 a}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\alpha_4}{\alpha_3}U^{(s)}+\frac{1}{a}\gamma_{22}^{(s-1)}-\frac{\alpha_4}{\alpha_3 a}\gamma_{11}^{(s-1)};$$
$$a=\Omega_*^2\Delta;\quad b=\left(\alpha_4\alpha_5-\alpha_3^2\right), \tag{13}$$

а для определения $U^{(s)}$ получим уравнение

$$\frac{\partial^4 U^{(s)}}{\partial\zeta^4}+\frac{ac}{b}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{a^2}{b}U^{(s)}=\gamma^{(s-1)};$$
$$c=\left(\alpha_4+\alpha_5\right); \tag{14}$$
$$\gamma^{(s-1)}=\frac{(\alpha_4-\alpha_3)}{b}\frac{\partial^2\gamma_{11}^{(s-1)}}{\partial\zeta^2}+\frac{a}{b}\gamma_{11}^{(s-1)}.$$

Решением уравнения (14) будет

$$U^{(s)}=U_0^{(s)}(\xi,\zeta)+U^{(s-1)}(\xi,\zeta), \tag{15}$$

где $U_0^{(s)}$ решение однородного, а $U^{(s-1)}$ частное решение неоднородного уравнения (14).

Решение однородного уравнения ищем в виде $U_0^{(s)}=e^{k\zeta}$. Для определения k получим уравнение

$$k^4+\frac{ac}{b}k^2+\frac{a^2}{b}=0. \tag{16}$$

Обозначив $z=k^2$, будем иметь

$$z_{1,2}=\frac{a}{2b}\left(-c\pm\sqrt{c^2-4b}\right). \tag{17}$$

Согласно формулам (11), (13), (14), $a>0,\quad c>0$, $c^2-4b=(\alpha_4-\alpha_5)^2+4\alpha_3^2>0$. Следовательно, при $b>0$

а)

$$z_1=\frac{a}{2b}\left(-c+\sqrt{c^2-4b}\right)<0;\quad z_2=\frac{a}{2b}\left(-c-\sqrt{c^2-4b}\right)<0, \tag{18}$$

а при $b<0$

б)

$$z_1<0;\quad z_2>0. \tag{19}$$

Таким образом имеем:

а)

$$k_{1,2}=\pm\delta_1 i;\quad k_{3,4}=\pm\delta_2 i;$$

$$\delta_1=\sqrt{\frac{a}{2b}\left(c-\sqrt{c^2-4b}\right)};\quad \delta_2=\sqrt{\frac{a}{2b}\left(c+\sqrt{c^2-4b}\right)};\quad \delta_1,\ \delta_2>0;\quad (20)$$

$$U_0^{(s)}=D_{11}^{(s)}(\xi)\cos\delta_1\zeta+D_{21}^{(s)}(\xi)\sin\delta_1\zeta+D_{31}^{(s)}(\xi)\cos\delta_2\zeta+D_{41}^{(s)}(\xi)\sin\delta_2\zeta,$$

б)

$$k_{1,2}=\pm\delta_1 i;\quad k_{3,4}=\pm\delta_3;$$

$$\delta_3=\sqrt{\frac{a}{2b}\left(-c-\sqrt{c^2-4b}\right)},\quad \delta_3>0;\quad (21)$$

$$U_0^{(s)}=D_{12}^{(s)}\cos\delta_1\zeta+D_{22}^{(s)}\sin\delta_1\zeta+D_{32}^{(s)}ch\delta_3\zeta+D_{42}^{(s)}sh\delta_3\zeta.$$

Подставив значение $U^{(s)}$ в (13) получим

а)

$$V^{(s)}=M_vD_{11}^{(s)}\cos\delta_1\zeta+M_vD_{21}^{(s)}\sin\delta_1\zeta+N_{v1}D_{31}^{(s)}\cos\delta_2\zeta+N_{v1}D_{41}^{(s)}\sin\delta_2\zeta+\gamma_{v1}^{(s-1)};$$

$$M_v=\frac{\alpha_4a-\delta_1^2b}{\alpha_3a};\quad N_{v1}=\frac{\alpha_4a-\delta_2^2b}{\alpha_3a};\quad (22)$$

$$\gamma_{v1}^{(s-1)}=\frac{b}{\alpha_3a}\frac{\partial^2U^{(s-1)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\alpha_4}{\alpha_3}U^{(s-1)}+\frac{1}{a}\gamma_{22}^{(s-1)}-\frac{\alpha_4}{\alpha_3a}\gamma_{11}^{(s-1)},$$

б)

$$V^{(s)}=M_vD_{12}^{(s)}\cos\delta_1\zeta+M_vD_{22}^{(s)}\sin\delta_1\zeta+N_{v2}D_{32}^{(s)}ch\delta_3\zeta+N_{v2}D_{42}^{(s)}sh\delta_3\zeta+\gamma_{v2}^{(s-1)};$$

$$N_{v2}=\frac{\alpha_4a+\delta_3^2b}{\alpha_3a}.\quad (23)$$

Подставив значения $U^{(s)},\ \ V^{(s)}$ в формулы (11), определим $\sigma_{11}^{(s)},\ \ \sigma_{22}^{(s)},\ \ \sigma_{12}^{(s)}$:

а)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(-M_1 D_{11}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_1 D_{21}^{(s)} \cos\delta_1\zeta - N_{11} D_{31}^{(s)} \sin\delta_2\zeta + \right.\\
&\qquad \left. + N_{11} D_{41}^{(s)} \cos\delta_2\zeta\right) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_1 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_2 \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_1^{(s-1)}\right);\\
&\sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(-M_2 D_{11}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_2 D_{21}^{(s)} \cos\delta_1\zeta - N_{21} D_{31}^{(s)} \sin\delta_2\zeta + \right.\\
&\qquad \left. + N_{21} D_{41}^{(s)} \cos\delta_2\zeta\right) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_3 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_4 \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_2^{(s-1)}\right);\\
&\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(-M_3 D_{11}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_3 D_{21}^{(s)} \cos\delta_1\zeta - N_{31} D_{31}^{(s)} \sin\delta_2\zeta + \right.\\
&\qquad \left. + N_{31} D_{41}^{(s)} \cos\delta_2\zeta\right) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_5 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_3 \frac{\partial \gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_3^{(s-1)}\right);\\
&M_1 = \delta_1\left(\alpha_1 + \alpha_2 M_v\right); \quad N_{11} = \delta_2\left(\alpha_1 + \alpha_2 N_{v1}\right);\\
&M_2 = \delta_1\left(\alpha_3 + \alpha_4 M_v\right); \quad N_{21} = \delta_2\left(\alpha_3 + \alpha_4 N_{v1}\right);\\
&M_3 = \delta_1\left(\alpha_5 + \alpha_3 M_v\right); \quad N_{31} = \delta_2\left(\alpha_5 + \alpha_3 N_{v1}\right);
\end{aligned}
\tag{24}
$$

б)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(-M_1 D_{12}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_1 D_{22}^{(s)} \cos\delta_1\zeta + N_{12} D_{32}^{(s)} sh\delta_3\zeta + \right.\\
&\qquad \left. + N_{12} D_{42}^{(s)} ch\delta_3\zeta\right) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_1 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_2 \frac{\partial \gamma_{v2}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_1^{(s-1)}\right);\\
&\sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(-M_2 D_{12}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_2 D_{22}^{(s)} \cos\delta_1\zeta + N_{22} D_{32}^{(s)} sh\delta_3\zeta + \right.\\
&\qquad \left. + N_{22} D_{42}^{(s)} ch\delta_3\zeta\right) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_3 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_4 \frac{\partial \gamma_{v2}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_2^{(s-1)}\right);\\
&\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(-M_3 D_{12}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_3 D_{22}^{(s)} \cos\delta_1\zeta + N_{32} D_{32}^{(s)} sh\delta_3\zeta + \right.\\
&\qquad \left. + N_{32} D_{42}^{(s)} ch\delta_3\zeta\right) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_5 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_3 \frac{\partial \gamma_{v2}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_3^{(s-1)}\right);\\
&N_{12} = \delta_3\left(\alpha_1 + \alpha_2 N_{v2}\right);\\
&N_{22} = \delta_3\left(\alpha_3 + \alpha_4 N_{v2}\right);\\
&N_{32} = \delta_3\left(\alpha_5 + \alpha_3 N_{v2}\right).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Граничные условия (4) приобретают вид:

$$\sigma_{22}^{(s)}(\xi,1) = -\sigma_{yy}^{+(s)}, \quad \sigma_{yy}^{+(0)} = \varepsilon\sigma_{yy}^{+}, \quad \sigma_{yy}^{+(s)} = 0,\ s \neq 0; \quad \sigma_{12}^{(s)}(\xi,1) = 0;$$
$$V^{(s)}(\xi,-1) = 0; \quad \sigma_{12}^{(s)}(\xi,-1) = 0. \tag{26}$$

Удовлетворив условиям (26), получим систему алгебраических уравнений

а)

$$\begin{gathered}
D_{11}^{(s)} M_2 \sin\delta_1 - D_{21}^{(s)} M_2 \cos\delta_1 + D_{31}^{(s)} N_{21} \sin\delta_2 - D_{41}^{(s)} N_{21} \cos\delta_2 = P_{11}{}^{(s)}; \\
D_{11}^{(s)} M_3 \sin\delta_1 - D_{21}^{(s)} M_3 \cos\delta_1 + D_{31}^{(s)} N_{31} \sin\delta_2 - D_{41}^{(s)} N_{31} \cos\delta_2 = P_{21}{}^{(s)}; \\
D_{11}^{(s)} M_v \cos\delta_1 - D_{21}^{(s)} M_v \sin\delta_1 + D_{31}^{(s)} N_{v1} \cos\delta_2 - D_{41}^{(s)} N_{v1} \sin\delta_2 = P_{31}{}^{(s)}; \\
D_{11}^{(s)} M_3 \sin\delta_1 + D_{21}^{(s)} M_3 \cos\delta_1 + D_{31}^{(s)} N_{31} \sin\delta_2 + D_{41}^{(s)} N_{31} \cos\delta_2 = P_{41}{}^{(s)}; \\
P_{11}^{(s)} = \left(\Delta\sigma_{yy}^{+(s)} + \alpha_3 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_4 \frac{\partial\gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_2^{(s-1)}\right)_{\zeta=1}; \\
P_{21}^{(s)} = \left(\alpha_5 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_3 \frac{\partial\gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_3^{(s-1)}\right)_{\zeta=1}; \quad P_{31}^{(s)} = \left(-\gamma_{v1}^{(s-1)}\right)_{\zeta=-1}; \\
P_{41}^{(s)} = \left(-\alpha_5 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \alpha_3 \frac{\partial\gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \gamma_3^{(s-1)}\right)_{\zeta=-1}.
\end{gathered} \tag{27}$$

Из системы (27) по формуле Крамера определим неизвестные $D_{j1}^{(s)}$

$$D_{j1}^{(s)} = \frac{\Delta_{j1}^{(s)}}{\Delta_1}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} M_2\sin\delta_1 & -M_2\cos\delta_1 & N_{21}\sin\delta_2 & -N_{21}\cos\delta_2 \\ M_3\sin\delta_1 & -M_3\cos\delta_1 & N_{31}\sin\delta_2 & -N_{31}\cos\delta_2 \\ M_v\cos\delta_1 & -M_v\sin\delta_1 & N_{v1}\cos\delta_2 & -N_{v1}\sin\delta_2 \\ M_3\sin\delta_1 & M_3\cos\delta_1 & N_{31}\sin\delta_2 & N_{31}\cos\delta_2 \end{vmatrix};$$

$$j = 1,2,3,4; \quad P_1^{(s)} = \begin{vmatrix} P_{11}^{(s)} \\ P_{21}^{(s)} \\ P_{31}^{(s)} \\ P_{41}^{(s)} \end{vmatrix}, \tag{28}$$

где $\Delta_{j1}^{(s)}$ получается из Δ_1 заменой j - того столбца столбцом $P_1^{(s)}$ из свободных членов.

Решение (20), (28) будет конечным, если $\Delta_1 \neq 0$. Те значения Ω, при которых $\Delta_1 = 0$, являются резонансными частотами.

Для случая б) имеем систему

б)

$$\begin{aligned}
&D_{12}^{(s)} M_2 \sin\delta_1 - D_{22}^{(s)} M_2 \cos\delta_1 - D_{32}^{(s)} N_{22} sh\delta_3 - D_{42}^{(s)} N_{22} ch\delta_3 = P_{12}^{(s)};\\
&D_{12}^{(s)} M_3 \sin\delta_1 - D_{22}^{(s)} M_3 \cos\delta_1 - D_{32}^{(s)} N_{32} sh\delta_3 - D_{42}^{(s)} N_{32} ch\delta_3 = P_{22}^{(s)};\\
&D_{12}^{(s)} M_v \cos\delta_1 - D_{22}^{(s)} M_v \sin\delta_1 + D_{32}^{(s)} N_{v2} ch\delta_3 - D_{42}^{(s)} N_{v2} sh\delta_3 = P_{32}^{(s)};\\
&D_{12}^{(s)} M_3 \sin\delta_1 + D_{22}^{(s)} M_3 \cos\delta_1 - D_{32}^{(s)} N_{32} sh\delta_3 + D_{42}^{(s)} N_{32} ch\delta_3 = P_{42}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Из системы (29) по формуле Крамера определяем неизвестные $D_{j2}^{(s)}$

$$D_{j2}^{(s)} = \frac{\Delta_{j2}^{(s)}}{\Delta_2}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} M_2 \sin\delta_1 & -M_2 \cos\delta_1 & -N_{22} sh\delta_3 & -N_{22} ch\delta_3 \\ M_3 \sin\delta_1 & -M_3 \cos\delta_1 & -N_{32} sh\delta_3 & -N_{32} ch\delta_3 \\ M_v \cos\delta_1 & -M_v \sin\delta_1 & N_{v2} ch\delta_3 & -N_{v2} sh\delta_3 \\ M_3 \sin\delta_1 & M_3 \cos\delta_1 & -N_{32} sh\delta_3 & N_{32} ch\delta_3 \end{vmatrix}; \tag{30}$$

$$j = 1,2,3,4; \quad P_2^{(s)} = \begin{vmatrix} P_{12}^{(s)} \\ P_{22}^{(s)} \\ P_{32}^{(s)} \\ P_{42}^{(s)} \end{vmatrix}.$$

После определения $D_{j1}^{(s)}, D_{j2}^{(s)}$, по формулам (20)-(25), определятся все компоненты вектора перемещений и тензора напряжений.

Для этого случая резонансными частотами будут те значения Ω, при которых $\Delta_2 = 0$.

3 О математически точном решении во внешней задаче

Если функция $\sigma_{yy}^{+}(\xi)$является алгебраическим многочленом по переменной ξ, итерация обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена, в результате получаем математически точное решение во внешней задаче. Для иллюстрации сказанного, рассмотрим случай когда

$$\sigma_{yy}^{+} = c_0 + c_1\xi. \tag{31}$$

Согласно формул (11), (15), (20), (22), (24), (27), (28), (31), имеем:

а) при $s=0$

$$D_{j1}^{(0)}=\frac{\Delta_{j1}^{(0)}}{\Delta_1};\quad P_1^{(0)}=\begin{vmatrix}\Delta\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)\\ 0\\ 0\\ 0\end{vmatrix};\quad j=1,2,3,4;$$
$$\begin{gathered}\Delta_{11}^{(0)}=\Delta\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)M_1^1;\quad \Delta_{21}^{(0)}=-\Delta\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)M_2^1;\\ \Delta_{31}^{(0)}=\Delta\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)M_3^1;\quad \Delta_{41}^{(0)}=-\Delta\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)M_4^1,\end{gathered}\tag{32}$$

где M_i^j является минором элемента, стоящего на пересечении i - того столбца и j - той строки определителя Δ_1.

Для неизвестных $D_{j1}^{(0)}$, входящих в $U_0^{(0)}$, имеем

$$\begin{gathered}D_{11}^{(0)}=\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)M_1^1;\quad D_{21}^{(0)}=-\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)M_2^1;\\ D_{31}^{(0)}=\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)M_3^1;\quad D_{41}^{(0)}=-\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)M_4^1.\end{gathered}\tag{33}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}U^{(0)}&=\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)\left(M_1^1\cos\delta_1\zeta-M_2^1\sin\delta_1\zeta+M_3^1\cos\delta_2\zeta-M_4^1\sin\delta_2\zeta\right);\\ V^{(0)}&=\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)\left(M_1^1M_v\cos\delta_1\zeta-M_2^1M_v\sin\delta_1\zeta+M_3^1N_{v1}\cos\delta_2\zeta-\right.\\ &\quad\left.-M_4^1N_{v1}\sin\delta_2\zeta\right);\\ \sigma_{11}^{(0)}&=\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)\left(-M_1^1M_1\sin\delta_1\zeta-M_2^1M_1\cos\delta_1\zeta-M_3^1N_{11}\sin\delta_2\zeta-\right.\\ &\quad\left.-M_4^1N_{11}\cos\delta_2\zeta\right);\\ \sigma_{22}^{(0)}&=\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)\left(-M_1^1M_2\sin\delta_1\zeta-M_2^1M_2\cos\delta_1\zeta-M_3^1N_{21}\sin\delta_2\zeta-\right.\\ &\quad\left.-M_4^1N_{21}\cos\delta_2\zeta\right);\\ \sigma_{12}^{(0)}&=\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0+c_1\xi\right)\left(-M_1^1M_3\sin\delta_1\zeta-M_2^1M_3\cos\delta_1\zeta-M_3^1N_{31}\sin\delta_2\zeta-\right.\\ &\quad\left.-M_4^1N_{31}\cos\delta_2\zeta\right),\end{aligned}\tag{34}$$

при $s = 1$

$$U^{(1)} = U_0^{(1)} + U^{(0)}.$$

Используя формулы (14), (20), имеем

$$\begin{aligned}
U^{(0)} &= B_1 \cos\delta_1\zeta + B_2 \sin\delta_1\zeta + B_3 \cos\delta_2\zeta + B_4 \sin\delta_2\zeta;\\
B_1 &= \frac{\Delta\varepsilon c_1}{b\Delta_1}\left(M_2^1\left(a - \delta_1^2\left(\alpha_4 - \alpha_3\right)\right)\left(M_1 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_5 M_v\delta_1\right)\right);\\
B_2 &= \frac{\Delta\varepsilon c_1}{b\Delta_1}\left(M_1^1\left(a - \delta_1^2\left(\alpha_4 - \alpha_3\right)\right)\left(M_1 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_5 M_v\delta_1\right)\right)\\
B_3 &= \frac{\Delta\varepsilon c_1}{b\Delta_1}\left(M_4^1\left(a - \delta_2^2\left(\alpha_4 - \alpha_3\right)\right)\left(N_{11} + \alpha_1\delta_2 + \alpha_5 N_{v1}\delta_2\right)\right);\\
B_4 &= \frac{\Delta\varepsilon c_1}{b\Delta_1}\left(M_3^1\left(a - \delta_2^2\left(\alpha_4 - \alpha_3\right)\right)\left(N_{11} + \alpha_1\delta_2 + \alpha_5 N_{v1}\delta_2\right)\right).
\end{aligned} \tag{35}$$

Из системы (27), согласно (20), (28), будем иметь

$$\begin{aligned}
U_0^{(1)} &= D_{11}^{(1)} \cos\delta_1\zeta + D_{21}^{(1)} \sin\delta_1\zeta + D_{31}^{(1)} \cos\delta_2\zeta + D_{41}^{(1)} \sin\delta_2\zeta;\\
P_1^{(1)} &= \begin{vmatrix} P_{11}^{(1)} \\ P_{21}^{(1)} \\ P_{31}^{(1)} \\ P_{41}^{(1)} \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{11}^{(1)}\left(\zeta = 1\right) &= \left(\Delta\sigma_{yy}^{+(1)} + \alpha_3\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta} + \alpha_4\frac{\partial\gamma_{v1}^{(0)}}{\partial\zeta} + \gamma_2^{(0)}\right)_{\zeta=1};\\
P_{21}^{(1)}\left(\zeta = 1\right) &= \left(\alpha_5\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta} + \alpha_3\frac{\partial\gamma_{v1}^{(0)}}{\partial\zeta} + \gamma_3^{(0)}\right)_{\zeta=1};\\
P_{31}^{(1)}\left(\zeta = -1\right) &= \left(-\gamma_{v1}^{(0)}\right)_{\zeta=-1};\\
P_{41}^{(1)}\left(\zeta = -1\right) &= \left(-\alpha_5\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta} - \alpha_3\frac{\partial\gamma_{v1}^{(0)}}{\partial\zeta} - \gamma_3^{(0)}\right)_{\zeta=-1};
\end{aligned} \tag{36}$$

$$D_{j1}^{(1)} = \frac{\Delta_{j1}^{(1)}}{\Delta_1}, \quad j = 1, 2, 3, 4;$$
$$\Delta_{11}^{(1)} = P_{11}^{(1)}(\zeta = 1)\, M_1^1 - P_{21}^{(0)}(\zeta = 1)\, M_1^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta = -1)\, M_1^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta = -1)\, M_1^4;$$
$$\Delta_{21}^{(1)} = P_{11}^{(1)}(\zeta = 1)\, M_2^1 - P_{21}^{(0)}(\zeta = 1)\, M_2^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta = -1)\, M_2^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta = -1)\, M_2^4;$$
$$\Delta_{31}^{(1)} = P_{11}^{(1)}(\zeta = 1)\, M_3^1 - P_{21}^{(0)}(\zeta = 1)\, M_3^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta = -1)\, M_3^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta = -1)\, M_3^4;$$
$$\Delta_{41}^{(1)} = P_{11}^{(1)}(\zeta = 1)\, M_4^1 - P_{21}^{(0)}(\zeta = 1)\, M_4^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta = -1)\, M_4^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta = -1)\, M_4^4.$$

Перемещение $V^{(1)}$ и напряжения $\sigma_{11}^{(1)}$, $\sigma_{12}^{(1)}$, $\sigma_{22}^{(1)}$ определяются по формулам (22) и (24). Аналогичным образом можно получить данные для случая (б). Несложно убедиться, что при $s \geq 2$ получается нулевое решение. Таким образом, во внешней задаче имеем математически точное решение:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = \varepsilon^{-1}\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2; \\ &u_x = l\left(U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)}\right); \quad u_y = l\left(V^{(0)} + \varepsilon V^{(1)}\right); \\ &\sigma_{xx} = \sigma_{11}(x, y)\exp(i\Omega t), \quad (x, y : 1, 2); \quad \sigma_{xy} = \sigma_{12}(x, y)\exp(i\Omega t); \\ &u = u_x \exp(i\Omega t); \quad v = u_y \exp(i\Omega t). \end{aligned} \tag{37}$$

Заключение

Решена смешанная динамическая плоская задача для анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии. Считается, что полоса конечных размеров свободно опирается на абсолютно жесткое основание, а на верхнюю кромку полосы действует нормальная нагрузка, которая во времени изменяется гармонически. Асимптотическим методом получено решение внешней задачи (в русскоязычной литературе оно часто называется решением внутренней задачи). В отличие от той же задачи для ортотропного тела, вынужденные колебания не распадаются на продольные и поперечные колебания. Определена амплитуда колебаний, установлены условия возникновения резонанса. Указаны случаи, когда асимптотическое решение становится математически точным.

Литература

[1] Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.

[2] Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. London. World Scientific. 2015. 376p. (Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. наука. 1997. 414с.)

[3] Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер.: Изд-во “Гитутюн” НАН РА. 2005. 468с.

[4] Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз. сб. Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.

[5] Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. вузов Северо-Кавказ. регион. Естеств. наук. 2000. №3. С. 8-11.

[6] Агаловян М.Л. Асимптотика решения пространственной динамической задачи для анизотропных пластин. В сб. докладов XX Межд. конф. по теории оболочек и пластин «Механика оболочек и пластин ». Изд. Нижегородского госуниверситета. Нижний Новгород. 2002г. С. 78-82.

[7] Агаловян М.Л. О вынужденных колебаниях анизотропных пластин на абсолютно жестком основании. Тр. межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященном 95-летию акад. Н.Х. Арутюняна, Цахкадзор. Ереван. 2007г. С. 28-31.

[8] Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 111-125.

[9] Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки. // Докл. НАН РА. 2009. Т. 109. №4. С. 304-309.

[10] Агаловян Л.А. О пространственных динамических задачах пластин и оболочек. Изв. НАН РА, Механика. 2017. Т. 70. №1. С. 3-21.

[11] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 1977. М. Наука. 416с.

[12] Агаловян Л.А. Об основных соотношениях обобщенной плоской деформации анизотропных тел. Докл. НАН РА. 2021. Т. 121. №1. С. 54-60.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович - академик НАН РА, докт. физ.-мат. наук, зав. отделом «Механика тонкостенных систем »Института механики НАН РА
Тел.: (+37410) 529630, **email**: lagal@sci.am

Япуджян Варужан Тигранович - аспирант, млад. науч. сотр. Института механики НАН РА
Тел.: (+37444) 990250, **email**: varujan.yapujyan@mail.ru

Поступила в редакцию 11.09.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, № 4, 2021 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/74.4.2

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНЫМ ДЕФОРМИРУЕМЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Акопян Л.В., Амирджанян А.А., Даштоян Л.Л., Джилавян С.А.,

Ключевые слова: смешанная задача, контактная задача, межфазное включение, изгиб и растяжения балки.

Hakobyan L, Amirjanyan H., Dashtoyan L., Jilavyan S.

Stress state of a piece-homogeneous plane with interfacial deformable inclusion

Keywords: mixed boundary value problem, interfacial inclusion, bending and stretching of a beam

The work considers the plane stress state of a piecewise-homogeneous plane, of two heterogeneous half-planes, which isreinforced by a deformable thin inclusion at the junction of the half-planes and is deformed under action of distributed loads applied to the inclusion. It is assumed the inclusion undergo both tension and bending. A governing system of integro-differential equations with respect to jumps of contact stresses acting on the long sides of the inclusion is derived. The solution of the governing system in the general case is constructed by numerical-analytical method of mechanical quadratures. In the case of an infinite inclusion, an exact solution to the problem is obtained.

Հակոբյան Լ.Վ., Ամիրջանյան Հ.Ա., Դաշտոյան Լ.Լ., Ջիլավյան Ս.Հ.

Միջֆազային դեֆորմացվող ներդրակով կտոր առ կտոր համասեռ հարթության լարվածային վիճակը

Հիմնաբառեր՝ խառը եզրային խնդիր, միջֆազային ներդրակ, կոնտակտային խնդիր, հեծանի ծռում և ձգում:

Դիտարկված է կտոր առ կտոր համասեռ հարթության հարթ–դեֆորմացիոն վիճակը, որը երկու տարբեր կիսահարթությունների միացման գծի վրա ուժեղացված է դեֆորմացվող բարակ ներդրակով և դեֆորմացվում է ներդրակի վրա ազդող բաշխված բեռների ազդեցության տակ: Ենթադրվում է, որ ներդրակը ոչ միայն ձգվում է, այլ նաև ծռվում: Ստացված է խնդրի որոշիչ ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը ներդրակի երկար կողմերին գործող լարումների թռիչքների նկատմամբ, որի լուծումը, ընդհանուր դեպքում, կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի օգնությամբ: Անվերջ ներդրակի դեպքում կառուցված է խնդրի փակ լուծումը:

В работе рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости,составленной из двух разнородных полуплоскостей, которая на линии стыка полуплоскостей усилена деформируемым тонким включением и деформируется под воздействием нормальных и касательных нагрузок, приложенных к включению. Полагается, что включение подвергается как растяжению, так и изгибу. Выведена ключевая система интегро-дифференциальных уравнений относительно скачков контактных напряжений, действующих на длинных сторонах включения. Решение ключевой системы, в общем случае, построено численно аналитическим методом механических квадратур. В случае бесконечного включения получено точное решение задачи.

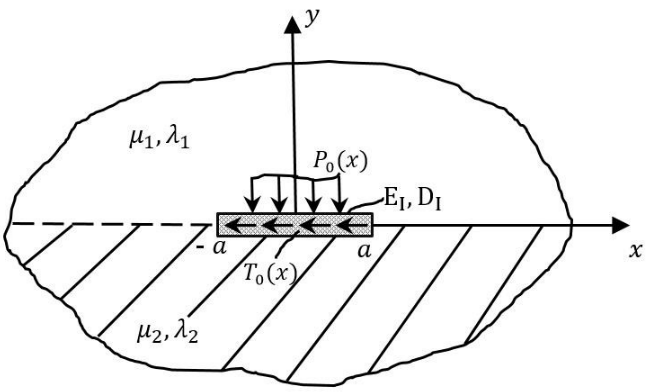
1 Введение

Плоско-деформированное или обобщённое плоское напряжённое состояние однородных массивных тел с концентраторами напряжений типа деформируемых накладок или включений хорошо изучено. Многие результаты в этом направлении приведены в монографии [1]. В этой связи укажем также на работы [2–11], где исследован ряд плоских задач для упругой плоскости и полуплоскости с деформируемыми накладками и включениями, относительно которых, главным образом, предполагалось, что они не сопротивляются изгибу и подвергаются только растяжению. Особо отметим монографию [4], где приведены некоторые результаты взаимодействия упругих накладок с упругими основаниями с одновременным учетом растягивания и изгиба накладок. Однако число аналогичных исследований как для однородных массивных тел с деформируемыми накладками и включениями, так и для кусочно-однородных массивных тел с межфазными деформируемыми включениями, где наряду с растяжением включения нужно учесть также и его изгиб, очень мало.

Исходя из вышесказанного, на основе простых моделей растяжения и изгиба балки, здесь рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости с межфазным деформируемым тонким включением конечной длины.

2 Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Пусть кусочно-однородная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат Oxy, изготовленная путем соединения двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламе μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2, на интервале $L = (-a, a)$ линии соединения полуплоскостей усилена деформируемым тонким включением толщины h_I, с приведённым модулем деформации E_I^* и жесткостью изгиба D_I. Полагается, что плоскость деформируется под воздействием нормальных $P_0(x)$ и касательных $T_0(x)$ распределенныхнагрузок, действующих на включение(Фиг.1).



Фиг. 1

При этом, включение будем трактовать как одномерный континуум, который под воздействием приложенной к нему нагрузкиодновременно подвергается как растяжению, так и к изгибу. Будем считать, что вследствие малости толщины включения смещения точек его длинных сторон одинаковыиопределяются из независимых уравнений растяжения и изгиба средней линии включения.

Требуется вывести определяющую систему интегро-дифференциальных уравнений поставленной задачи и построить ее эффективное решение, определить закономерности изменения как контактных, так и касательных контактных напряжений, действующих на сторонах включения, в зависимости от упругих характеристик включения и разнородных полос.

Вследствие сделанных предположений, в зоне контакта включения с матрицей имеют место следующие условия контакта:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dV_j(x,0)}{dx} = v'_I(x) + \gamma; \\ \frac{dU_j(x,0)}{dx} = \varepsilon_I(x) = u'_I(x)\end{array}\right. (-a < x < a;\quad j = 1,2) \tag{1.1}$$

Здесь $V_j(x,y)$, $U_j(x,y)$ $(j = 1,2)$ соответственно вертикальные и горизонтальные компоненты смещенийточек разнородных полуплоскостей, удовлетворяющие, каждые в своей области определения, уравнениям Ламе, связанные с нормальными $\sigma_y^{(j)}(x,y)$ и касательными $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ напряжениями, действующими в разнородных полуплоскостях, известными соотношениями, γ- угол поворота включения. $v_I(x)$и $u_I(x)$ соответственно вертикальная и горизонтальная компоненты смещений средней линии включения, удовлетворяющие уравнениям [1]:

$$\begin{array}{l}\dfrac{d^2u_I}{dx^2} = \dfrac{1}{h_I E_I^*}\left[T_0(x) - \tau(x)\right]; \quad (-a < x < a) \\ \dfrac{d^4v_I}{dx^4} = -\dfrac{1}{D_I}\left[P_0(x) - \sigma(x)\right], \quad (-a < x < a)\end{array} \tag{1.2}$$

где $\sigma(x)$ и$\tau(x)$ - компоненты скачков нормальных и касательных напряжений, действующих на длинные стороны включения, которые выражаются через компоненты напряжений разнородных полуплоскостей на берегах линии L по формулам:

$$\tau(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x,0) - \tau_{xy}^{(2)}(x,0); \quad \sigma(x) = \sigma_y^{(1)}(x,0) - \sigma_y^{(2)}(x,0),$$

$$E_I^* = \frac{E_I}{2(1-\nu_I^2)}; \quad D_I = \frac{E_I h_I^3}{12(1-\nu_I^2)};$$

E_I и h_I соответственно модуль упругости и толщина включения.

Из уравнений (1.2), при условии отсутствия перерезывающей силы и момента в концевых точках включения, находим:

$$\begin{array}{l}\dfrac{du_I}{dx} = \dfrac{1}{h_I E_I^*}\displaystyle\int_{-a}^{x}[T_0(s) - \tau(s)]ds; \qquad (-a < x < a) \\ \dfrac{dv_I}{dx} = -\dfrac{1}{D_I}\displaystyle\int_{-a}^{a} G'_x(x-s)\left[P_0(s) - \sigma(s)\right]ds; \; (-a < x < a) \\ \left(G(x) = |x|^3/12\right),\end{array} \tag{1.3}$$

Чтобы удовлетворить условиям контакта, определим компоненты смещений разнородных полуплоскостей на берегах линии L через компоненты скачков нормальных и касательных напряжений. Для этого будем использовать разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной, приведенные в [6]. Учитывая при этом, что в рассматриваемом случае компоненты дислокации смещений равны нулю, будем иметь:

$$\begin{aligned} v'_1(x,0) = v'_2(x,0) = -\frac{d_0}{\Delta}\tau(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds, \\ u'_1(x,0) = u'_2(x,0) = \frac{d_0}{\Delta}\sigma(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\tau(s)}{s-x}ds \end{aligned} \tag{1.4}$$

где введены обозначения:

$$d_0 = \frac{\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}}{2}; \qquad d_1 = \frac{\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}}{2}; \quad \vartheta_1^{(j)} = \frac{\mu_j}{2+\alpha_j}; \qquad \vartheta_2^{(j)} = \frac{(1+\alpha_j)\,\mu_j}{2+\alpha_j};$$
$$\Delta = \left(\vartheta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}\right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}\right)^2; \qquad \alpha_j = \frac{1}{1-2\nu_j}; \quad (j=1,2)\,.$$

Далее, используя представления (1.3) и (1.4), удовлетворим условиям контакта (1.1). В итоге придем к следующей определяющей системе интегро-дифференциальных уравнений для определения компонентов скачков напряжений на длинных сторонах включения:

$$\begin{aligned} \frac{d_0}{\Delta}\tau(x) + \frac{d_1}{\pi\Delta}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds = \frac{1}{D_I}\left[\int\limits_{-a}^{a} G'_x(x-s)\left[P_0(s) - \sigma(s)\right]ds\right] - \gamma \\ \frac{d_0}{\Delta}\sigma(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\tau(s)}{s-x}ds = \frac{1}{h_I E_I^*}\int\limits_{-a}^{x}\left[T_0(s) - \tau(s)\right]ds \\ (-a < x < a) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Систему (1.5) нужно рассматривать вместе с уравнениями равновесия включения, которые можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-a}^{a}\sigma(x)\,dx = P_0^*; \quad \int\limits_{-a}^{a}\tau(x)\,dx = T_0^*; \quad \int\limits_{-a}^{a} x\left[\sigma(x) - P_0(x)\right]dx = 0, \\ \left(P_0^* = \int\limits_{-a}^{a} P_0(x)\,dx; \quad T_0^* = \int\limits_{-a}^{a} T_0(x)\,dx\right). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Таким образом решение задачи свелось к решению системы интегро-дифференци-альных уравнений (1.5) при условиях (1.6). После решения системы определяющих уравнений контактные напряжения определятся формулами [5]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y^{(1)}(x,0)=\frac{l_0}{\Delta}\sigma(x)+\frac{l_2}{\pi\Delta}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\tau(s)}{s-x}ds; \quad \sigma_y^{(2)}(x,0)=\sigma_y^{(1)}(x,0)-\sigma(x);\\
&\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\frac{l_0}{\Delta}\tau(x)-\frac{l_2}{\pi\Delta}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds; \quad \tau_{xy}^{(2)}(x,0)=\tau_{xy}^{(1)}(x,0)-\tau(x).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Решение системы определяющих уравнений.

Решение определяющей системы уравнений (1.5) будем строить численно-аналитическим методом механических квадратур. Для этого введем в расмотрение комплексную комбинацию скачков напряжений $\varphi(x)=\sigma(x)-i\tau(x)$ и систему (1.5) запишем в следующем виде:

$$\varphi(x)\;-\;\frac{q}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s\;-\;x}ds\;+\;\int\limits_{-a}^{a}K_1(x,s)\,\varphi(s)ds\;+\;\int\limits_{-a}^{a}K_2(x,s)\,\bar{\varphi}(s)ds\;=\;f(x)\;+\;\frac{i\Delta}{d_0}\gamma \tag{1.8}$$

$$(-a<x<a)$$

где

$$\begin{aligned}
&q=d_1/d_0, \qquad K_1(x,s)=\frac{\Delta}{2id_0D_i}\left[G'_x(s-x)-h_I^2H(x-s)/6\right];\\
&K_2(x)=\frac{\Delta}{2id_0D_i}\left[G'_x(x)+h_I^2H(x)/6\right];\\
&f(x)\;=-\frac{i\Delta}{d_0D_i}\int\limits_{-a}^{a}\left[G'_x(s-x)\,P_0(s)-h_I^2H(x-s)\,T_0(s)/6\right]ds.
\end{aligned}$$

При помощи замены переменных $x=at$ и $s=a\tau$уравнение (1.8) сформу-лируем на интервале (-1,1). Получим:

$$\psi(t)-\frac{q}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int\limits_{-1}^{1}K_1^*(t,\tau)\,\psi(\tau)d\tau+\int\limits_{-1}^{1}K_2^*(t,\tau)\,\bar{\psi}(\tau)d\tau=f_*(t)+i\gamma_* \tag{1.9}$$

$$(-1<x<1)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\psi(t)=a\varphi(at)/|N_0|\,; \quad f_*(t)=af(at)/|N_0|; \quad \gamma_*=\frac{\gamma a\Delta}{|N_0|\,d_0};\\
&N_0=P_0^*+iT_0^*; \quad K_j^*(t,\tau)=aK_j(at,a\tau) \quad (j=1,2)\;.
\end{aligned}$$

Условия (6) при этом примут вид:

$$\int_{-1}^{1} \psi\left(t\right) dt = N_0^*; \qquad \int_{-1}^{1} \mathrm{Re}\left[t\,\psi\left(t\right)\right] dt = M_0;$$
$$\left(N_0^* = N_0/\left|N_0\right|; \quad M_0 = \int_{-1}^{1} \frac{aP_0\left(at\right)}{\left|N_0\right|} tdt\right). \tag{1.10}$$

Нетрудно установить, что функция $\psi(t)$ в концевых точках интервала интегрирования $t = \pm 1$ имеет осциллирующую особенность и ее можно представить вследующем виде [11]:

$$\psi\left(t\right) = \frac{\psi^*\left(t\right)}{\left(1+t\right)^{1/2-i\beta}\left(1-t\right)^{1/2+i\beta}} \tag{1.11}$$

$$\left(\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{{}_2\left(\mu_1 + {}_1\mu_2\right)}{{}_1\left(\mu_2 + {}_2\mu_1\right)}; \quad {}_j = 3 - 4\nu_j; \quad j = 1,2\right)$$

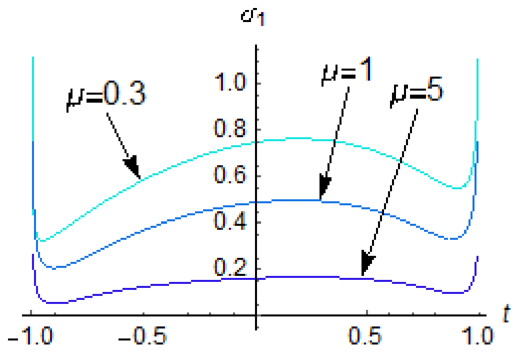
где функция $\psi^*\left(t\right)$- непрерывная ограниченная функция на замкнутом интервале $[-1, 1]$, а ν_j $(j = 1, 2)$ - коэффициенты Пуассона разнородных полуплоскостей.

Подставляя значение функции $\psi\left(t\right)$ из (1.11) в (1.9) и (1.10), по известной процедуре [12], придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $\psi^*\left(t\right)$ в узлах квадратурной формулы $\psi^*\left(\xi_i\right)$ $\left(\,i = 1, 2, ...n\,\right)$ и приведенного угла поворота включения γ_*. После определения этих значений можно восстановить функцию $\psi^*\left(t\right)$ при помощи формулы Лагранжа.

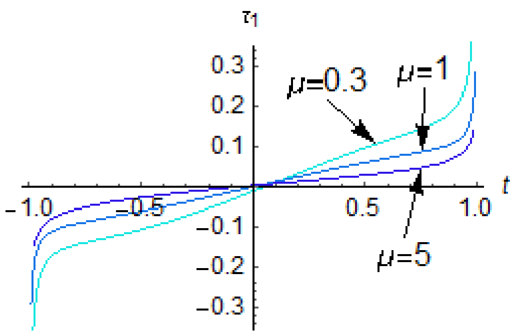
Некоторые численные результаты

Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения безразмерных контактных напряжений $\sigma_1\left(t\right) = a\sigma_y^{(1)}\left(at, 0\right)/\left|N_0\right|$и $\tau_1\left(t\right) = a\tau_{xy}^{(1)}\left(at, 0\right)/\left|N_0\right|$ на длинных сторонах включения, а также приведенного угла поворота включения γ_* в зависимости от отношения $\mu = \mu_2/\mu_1$ в случае фиксированных значений коэффициентов Пуассона ν_j $(j = 1, 2)$, модуля упругости включения E_I, отношения$l = h/2a$, когда $aP_0\left(xa\right)/\left|N_0\right| = \cos\left(x - 0.5\right)$, $aT_0\left(xa\right)/\left|N_0\right| = 0.5x$ и $\left|N_0\right|/a\mu_1 = 0.1$.

Результаты численных расчётов приведены на Фиг. 2и в таблице 1.На Фиг. 2a и Фиг. 2b приведены соответственно графики распределения безразмерных нормаль-ных и касательных контактных напряжений для разных значений параметра μ в случае, когда $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$,$\mu_I/\mu_1 = 20$и $l = 0.1$. Из них видно, что при выбранных значениях параметров увеличениепараметра $\mu = \mu_2/\mu_1$, что можно трактовать как увеличение жесткости нижней полуплоскости при постоянной жесткости верхней полуплоскости, приводит к уменьшению нормальных напряжений в средней части зоны контакта, акасательные контактные напряжения,при этом,по абсолютной величине уменьшаются во всей зоне контакта.



(a) Нормальные напряжения



(b) Тангенциальные напряжения

Фиг. 2

В таблице 1. приведены значения приведенного угла поворота включения γ_* при тех же значениях параметров и той же внешней нагрузке,

μ	0.2	0.5	1	3	5	10
γ_*	-0.068	-0.049	-0.032	-0.0106	-0.0047	-0.0004

Таблица 1: Приведенный угол поворота

2 Кусочно-однородная плоскость с бесконечным межфазным включением

Теперь рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда включение бесконечное и на него в точке $x = x_0$под углом α действует сосредоточенная сила P_0, т.е. имеем $P_0(x) = P_0 \sin\alpha\, \delta(x - x_0)$и $T_0(x) = P_0 \cos\alpha\, \delta(x - x_0)$.

Учитывая, что в рассматриваемом случае угол поворота включения равен нулю, систему (5) и условия (6) запишем в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{d_0}{\Delta}\tau(x) + \frac{d_1}{\pi\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds = -V_I(x) \quad (-\infty < x < \infty) \\ &\frac{d_0}{\Delta}\sigma(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(s)}{s-x}ds = U_I(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(x)\,dx = P_0\sin\alpha; \quad \int_{-\infty}^{\infty}\tau(x)\,dx = P_0\cos\alpha. \tag{2.2}$$

Здесь

$$U_I(x) = \frac{du_I}{dx} = \frac{1}{h_I E_I^*}\left[P_0 \cos\alpha\, H(x - x_0) - \int\limits_{-\infty}^{x} \tau(s) ds\right]; \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$V_I(x) = \frac{dv_I}{dx} = -\frac{1}{D_I}\left[P_0 \sin\alpha\, G'_x(x - x_0) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} G'_x(x - s)\,\sigma(s)\, ds\right]; \quad (-\infty < x < \infty)$$

Далее, к обеим частям уравнений (1.2) и (2.1) применим обобщенное преобразование Фурье. Учитывая формулу для преобразования свертки [?] и значение интеграла [?]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ipx}{x} dx = i\pi \operatorname{sign}(p)$$

получим:

$$\begin{aligned} \bar{U}_I &= \frac{i}{ph_i E_I^*}\left[P_0 \cos\alpha e^{ix_0 p} - \bar{\tau}(p)\right]; \\ \bar{V}_I &= \frac{i}{p^3 D_i}\left[P_0 \sin\alpha e^{ix_0 p} - \bar{\sigma}(p)\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d_0}{\Delta}\bar{\sigma}(p) + i\frac{d_1 \operatorname{sign}(p)}{\Delta}\bar{\tau}(p) = \bar{U}_I(p); \\ &\frac{d_0}{\Delta}\bar{\tau}(p) - i\frac{d_1 \operatorname{sign}(p)}{\Delta}\bar{\sigma}(p) = -\bar{V}_I(p). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставляя значения $\bar{U}_I(p)$ и $\bar{V}_I(p)$ из (2.3) в (2.4), для определения образов Фурье скачков напряжений $\bar{\sigma}(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) e^{ipx} dx$; $\quad \bar{\tau}(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(x) e^{ipx} dx$, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d_1 |p| p^2}{\Delta} + \dfrac{1}{D_I}\right)\bar{\sigma}(p) + \dfrac{id_0 p^3}{\Delta}\bar{\tau}(p) = \dfrac{P_0 \sin\alpha e^{ipx_0}}{D_I}; \\ \dfrac{id_0 p}{\Delta}\bar{\sigma}(p) - \left(\dfrac{1}{E_I^* h_I} + \dfrac{d_1 |p|}{\Delta}\right)\bar{\tau}(p) = -\dfrac{P_0 \cos\alpha e^{ipx_0}}{E_I^* h_I}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Отсюда найдем:

$$\bar{\sigma}(p) = -\frac{P_0 \cos\alpha\, e^{ipx_0}}{\Delta_*}\left[id_0 h_I^2 p^3/6 - d_1 tg\alpha\,|p| - \Delta\, tg\alpha/\left(h_I E_I^*\right)\right]; \tag{2.6}$$

$$\bar{\tau}(p) = \frac{P_0 \cos\alpha\, e^{ipx_0}}{\Delta_*}\left[d_1 h_I^2 p^2 |p|/6 + ipd_0 tg\alpha + \Delta/\left(h_I E_I^*\right)\right], \tag{2.7}$$

где

$$\Delta_* = \frac{1}{4} D_I p^4 + \frac{1}{6} h_I^2 d_1 \left| p \right| p^2 + d_1 \left| p \right| + \frac{\Delta}{h_I E_I^*}$$

Нетрудно заметить, что

$$\bar{\sigma}\left(0\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma\left(x\right) dx = P_0 \sin\alpha; \quad \bar{\tau}\left(0\right) \ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau\left(x\right) dx = P_0 \cos\alpha,$$

т.е. условия равновесия включения удовлетворены автоматически. Из формул (2.6) и (2.7) скачки контактных напряжений можно найти по формулам обратного преобразования Фурье:

$$\sigma\left(x\right) = -\frac{P_0 \cos\alpha}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{i d_0 h_I^2 p^3}{6} - d_1 \operatorname{tg}\alpha \left| p \right| - \frac{\Delta \operatorname{tg}\alpha}{h_I E_I^*} \right] \frac{e^{-ip(x-x_0)}}{\Delta_*} dp; \tag{2.8}$$

$$\tau\left(x\right) = \frac{P_0 \cos\alpha}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d_1 h_I^2 p^2 \left| p \right|}{6} + i p d_0 \operatorname{tg}\alpha + \frac{\Delta}{h_I E_I^*} \right] \frac{e^{-ip(x-x_0)}}{\Delta_*} dp\,. \tag{2.9}$$

Определим контактные напряжения. С этой целью, применяя к уравнениям (1.7) преобразование Фурье, придем к соотношениям:

$$\begin{aligned} &\bar{\sigma}_y^{(1)}\left(p,0\right) = \frac{l_0}{\Delta}\bar{\sigma}(p) - \frac{i l_2 \operatorname{sign}\left(p\right)}{\Delta}\bar{\tau}(p); \quad \bar{\sigma}_y^{(2)}\left(p,0\right) = \bar{\sigma}_y^{(1)}\left(p,0\right) - \bar{\sigma}(p); \\ &\bar{\tau}_{xy}^{(1)}\left(p,0\right) = \frac{l_0}{\Delta}\bar{\tau}(p) + \frac{i l_2 \operatorname{sign}\left(p\right)}{\Delta}\bar{\sigma}(p); \quad \bar{\tau}_{xy}^{(2)}\left(p,0\right) = \bar{\tau}_{xy}^{(1)}\left(p,0\right) - \bar{\tau}(p). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Подставляя значения $\bar{\sigma}\left(p\right)$ и $\bar{\tau}\left(p\right)$ из (2.6) и (2.7) в (2.10), найдем

$$\begin{aligned} &\bar{\sigma}_y^{(1)}\left(p,0\right) \ = \ -\frac{P_0 e^{ipx_0} \cos\alpha}{\Delta_*} \left[\frac{i\vartheta_1^{(1)} h_I^2 p^3}{12} \ - \ \frac{\vartheta_2^{(1)} \operatorname{tg}\alpha \left| p \right|}{2} \ - \ \frac{l_0 \operatorname{tg}\alpha - i l_2 \operatorname{sign} p}{h_I E_I^*} \right]; \\ &\bar{\tau}_{xy}^{(1)}\left(p,0\right) = \frac{P_0 e^{ipx_0} \cos\alpha}{\Delta_*} \left[\frac{\vartheta_2^{(1)} h_I^2 |p|^3}{12} + \frac{i p \vartheta_1^{(1)} \operatorname{tg}\alpha}{2} + \frac{l_0 + i l_2 \operatorname{sign} p \operatorname{tg}\alpha}{h_I E_I^*} \right]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Отсюда, при помощи обратного преобразования Фурье получим:

$$\sigma_y^{(1)}\left(x,0\right) \ = \ -P_0 \cos\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{i\vartheta_1^{(1)} h_I^2 p^3}{12\Delta_*} \ - \ \frac{\vartheta_2^{(1)} \operatorname{tg}\alpha \left| p \right|}{2\Delta_*} \ - \ \frac{l_0 \operatorname{tg}\alpha \ - \ i l_2 \operatorname{sign} p}{\Delta_* h_I E_I^*} \right] e^{-ip(x-x_0)} dp;$$

$$\tau_{xy}^{(1)}\left(x,0\right) = P_0 \cos\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\vartheta_2^{(1)} h_I^2 |p|^3}{12\Delta_*} + \frac{i p \vartheta_1^{(1)} \operatorname{tg}\alpha}{2\Delta_*} + \frac{l_0 + i l_2 \operatorname{sign} p}{\Delta_* h_I E_I^*} \right] e^{-ip(x-x_0)} dp.$$

Нетрудно заметить, что функции $\bar{\sigma}_y^{(1)}\left(p,0\right)$ и $\bar{\tau}_{xy}^{(1)}\left(p,0\right)$ на бесконечности ведут себя соответственно как $1/p$ и $1/\left|p\right|$. Следовательно в точке приложения нагрузки $x = x_0$ нормальные и касательные контактные напряжения ведут себя соответственно как функции $\operatorname{sign}\left(x - x_0\right)$

и $\ln|x-x_0|$.

Заключение.

Таким образом, изучено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости с межфазным деформируемым включением. Полагается, что включение одновременно подвергается как растяжению, так и изгибу. На основе разрывных решений уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости и простых моделей растяжения и изгиба балки выведены определяющие интегральное и интегро-дифференциальное уравнения поставленной задачи, решение которых, в случае конечного включения, построено численно-аналитическим методом механических квадратур. В случае бесконечного включения, когда на него действует сосредоточенная нагрузка, методом интегрального преобразования Фурье построено точное решение задачи. Показано, что в точке приложения нагрузки нормальные и касательные контактные напряжения ведут себя соответственно как функции $\operatorname{sign}(x)$ и $\ln|x|$.

Литература

[1] Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с.

[2] Ефимов А.Б., Малый В.И., Толкачева Н.М. Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием, МТТ, 1969, №1, с.166-171.

[3] Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином, ПММ, 1975, т.39,вып. 6, с. 1100-1109.

[4] Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. //Изд. ЕГу, Ереван, 1983, 255с.

[5] Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости, Изв. НАН Армении, Механика, 1992, т. 45, №1-2, с.11-26

[6] Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Издательство Гитутюн НАН РА, Ереван -2014, 322с.

[7] Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости, Изв. НАН РА, Механика, 2008, т. 61, №4, с. 5-19

[8] Агаян К.Л. Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой полуплоскости плоским штампом, Изв. НАН РА, Механика, 2010, т. 63, №4, с.3-11.

[9] Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. //Изв. НАН РА. Механика. 2009. Т.62. №3. С.29-43.

[10] В.Н.Акопян, А.А.Амирджанян Напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с системой периодических параллельных внутренних включений // Известия НАН РА, Механика, т.71, № 2, 2018г, с. 3-17. http://doi.org/10.33018/71.2.1

[11] Hakobyan V., Dashtoyan L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with absolutely rigid inclusions // Proceedings of 8th International Conference Contemporary Problems of Architecture and Construction, Yerevan, 2016, pp.125-128

[12] A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070

[13] Снеддон Н.И. Преобразование Фурье //Москва : Изд-во иностр. лит.,1955.– 668 с.

[14] Брычков.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обоб¬щен¬ных функций.- М.: Наука, 1977.- 287с.

Сведения об авторах:

Акопян Лусине Ваграмовна - к.ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90

Амирджанян Арутюн Арменович - к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 56-81-88, **email**: amirjanyan@gmail.com

Даштоян Лилит Левоновна - к.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН РА, (37410) 56-81-89, **email**: lilit.dashtoyan@sci.am

Джилавян Самвел Акопович - к.ф.–м.н., зав. кафедрой механики, Ереванский госуниверситет.Тел.: (+374 91) 500770, **email**: samjilavyan@ysu.am

Поступила в редакцию 12.09.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, № 4, 2021 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/74.4.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ УСЛОВИЯХ НАВЬЕ НА ЛИНИИ СТЫКА

Амирджанян А.А., $\boxed{\text{Белубекян М.В.}}$, Геворгян Г.З, Дарбинян А.З.

Ключевые слова: волна Рэлея, поперечные и продольные волны, волновое число, частота, условия затухания, дисперсионное уравнение.

Amirjanyan A.A., $\boxed{\text{Belubekyan M.V.}}$, Gevorgyan G.Z, Darbinyan A.Z.

Propagation of Surface Waves in a Composite Semi-Plane Under Navier Conditions on the Joint Line

Keywords: Rayleigh wave, transverse and longitudinal waves, wave number, frequency, damping conditions, dispersion equation

The problem of the propagation of Rayleigh-type surface waves along the connection line of the half-plane-layer system is considered. It is assumed that the Navier conditions are specified on the line connecting the layer with the half-plane, i.e. normal stresses are equal to zero, and shear stresses and tangential displacements of the layer and half-plane are equal to each other. The dispersion equations of the problem are obtained and investigated in the cases when the outer boundary of the layer is free of stresses, is clamped, or the Navier conditions are set on it.

Ամիրջանյան Հ.Ա., $\boxed{\text{Բելուբեկյան Մ.Վ.}}$, Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ.

Մակերևույթային ալիքների փարածումը բաղադրյալ կիսահարթություն մեջ միացման գծի վրա Նավյեի կոնտակտի պայմաններով դեպքում

Հիմնաբառեր՝ Ռելեյի ալիք, երկայնական և լայնական ալիքներ, ալիքային թիվ, հաճախություն:

Դիտարկված է Ռելեյի տիպի մակերևույթային ալիքների տարածումը կիսահարթություն-շերտ համակարգի միացման գծի երկայնքով, որտեղ տեղի ունեն Նավյեի կոնտակտի պայմանները, իսկ շերտի վերևի մասում դիտարկված են ազատ, ամրակցման կամ Նավյեի կոնտակտի պայմանները: Երկու դեպքում էլ ստացվել են խնդրի դիսպերսիոն հավասարումները և մակերևույթային ալիքների տարածման պայմանները՝ կախված ֆիզիկական և երկրաչափական բնութագրիչներից:

Рассмотрена задача распространения поверхностных волн типа Рэлея по линии соединения системы полуплоскость-слой. Принимается, что на линии соединения слоя с полуплоскостью заданы условия Навье, т.е. нормальные напряжения равны нулю, а касательные напряжения и тангенциальные перемещения слоя и полуплоскости равны друг другу. Получены и исследованы дисперсионные уравнения задачи в случаях, когда внешняя граница слоя свободна от напряжений, защемлена или на ней заданы условия Навье.

Исследованы разные случаи упругих постоянных материалов слоя и полуплоскости. Численным расчётом показана зависимость фазовой скорости волны, распространяющейся вдоль границы слоя, от частоты. Получены условия распространения поверхностных волн в зависимости от физических и геометрических характеристик полуплоскости и слоя.

Введение.

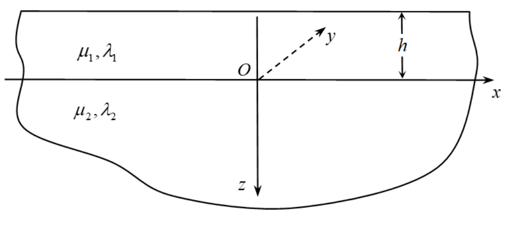
Распространение поверхностных волн типа Рэлея в составной полуплоскости было исследовано многими авторами, отметим, в частности, работы [1–7]. Работа [7] авторов была посвящена исследованию распротранения поверхностных волн в системе слой-полуплоскость, когда на линии их соединения заданы условия скользящего контакта. В работе [4] М.В.Белубекяном были рассмотрены разные условия соединения тонкой полосы с полупространством, в том числе и условия антискользящего контакта, предполагающего равенство нулю нормального усилия и равенства друг к другу тангенциальных перемещений и напряжений, названных им условиями Навье. В работе [8] авторами была рассмотрена задача распространения поверхностных волн в составной полупло¬скости, когда между полуплоскостью и полосой имеют место условия Навье, а на свободной поверхности полосы заданы условия скользящего контакта. В настоящей работе рассматривается та же задача, но при трех разных условиях на свободной поверхности полосы: а) свободная поверхность, б) жесткое защемление и в) условия Навье. С другой стороны, настоящая работа вкупе с [8] является аналогом работы [7], но при других условиях на линии соединения.

Постановка задачи

В рамках плоской задачи теории упругости рассматривается возможность распространения поверхностных волн вдоль линии соединения упругого слоя толщины h, характеризующегося параметрами Ламе $\lambda_1,\ \mu_1$, и упругой полуплоскости с параметрами $\lambda_2,\ \mu_2$. В левосторонней прямоугольной системе координат $Oxyz$ полоса занимает область $(-h \le z \le 0)$, а полуплоскость – $(z > 0)$ (фиг.1) Рассмотрим случай плоской деформации, т.е. для компонент упругих перемещений примем

$$u_1^{(i)} = u^{(i)}(x,z,t)\,,\quad u_3^{(i)} = w^{(i)}(x,z,t)\,,\qquad u_2^{(i)} = 0 \quad (i=1,2) \tag{1}$$

где индексом $i = 1$ обозначаются величины, относящиеся к слою, а индексом $i = 2$ –к полуплоскости, t–время.



Фиг. 1: Схематическое представление рассматриваемой системы

Уравнения движения в перемещениях для каждой из областей $(-h \le z \le 0)$

и $(z>0)$ имеют вид [9]

$$\begin{aligned} & c_{ti}^2 \Delta\, u^{(i)} + \left(c_{\ell i}^2 - c_{ti}^2\right) \ \frac{\partial}{\partial x} \ \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2} \\ & c_{t\,i}^2 \Delta\, w^{(i)} + \left(c_{\ell\, i}^2 - c_{t\,i}^2\right) \ \frac{\partial}{\partial z} \ \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2}$$

где $c_{\ell i}$, c_{ti} – скорости распространения продольных и поперечных волн в соответствующих средах, Δ - оператор Лапласа.

На линии раздела материалов $z=0$ заданы условия Навье [4]:

$$\sigma_{33}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)} \tag{3}$$

При помощи скалярных потенциалов [**?**]

$$u^{(j)} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z},\ w^{(j)} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \tag{4}$$

уравнения (2) сводятся к независимым друг от друга уравнениям

$$\Delta \Phi_j = \frac{1}{c_{\ell\, j}^2} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2}, \qquad \Delta\, \psi_j = \frac{1}{c_{t\, j}^2} \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Компоненты напряжений, необходимые для удовлетворения условиям (3) и граничным условиям на неконтактирующей поверхности полосы, выражаются через эти потенциалы следующими формулами:

$$\begin{aligned} & \sigma_{33}^{(j)} = \lambda_j \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + (\lambda_j + 2\mu_j) \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} - 2\mu_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z \partial x}, \\ & \sigma_{31}^{(j)} = \mu_j \left(2 \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

Общие решения уравнений (5) для слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} & \Phi_1 = (A_1 \,\mathrm{sh}(k\nu_{11} z\,) + B_1 ch(k\nu_{11} z\,))\ \exp ik(x-ct) \\ & \Psi_1 = (A_2 \mathrm{ch}(k\nu_{12} z) + B_2\, \mathrm{sh}(k\nu_{12} z\,))\ \exp ik(x-ct) \end{aligned} \tag{7}$$

а для полуплоскости, с учетом того, что они должны удовлетворять условиям затухания [9]:

$$\lim_{z\to\infty} \Phi_2 = 0,\ \lim_{z\to\infty} \Psi_2 = 0\,, \tag{8}$$

будут иметь вид:

$$\begin{aligned} & \Phi_2 = A_3\, e^{-k\nu_{21} z}\ \exp ik(x-ct) \\ & \Psi_2 = B_3 e^{-k\nu_{22} z}\ \exp ik(x-ct) \end{aligned} \qquad (\nu_{21}, \nu_{22} > 0) \tag{9}$$

где k - волновое число, c - скорость распространения возможной волны.

Кроме того, здесь использованы следующие обозначения

$$\eta_j = \frac{c_{tj}^2}{c_{\ell j}^2} = \frac{\mu_j}{\lambda_j + 2\mu_j}; \qquad \theta = \frac{{c_{t2}}^2}{{c_{t1}}^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}; \qquad \xi = \frac{c^2}{c_{t2}^2};$$
$$\nu_{11} = \sqrt{1-\xi\theta\eta_1}; \quad \nu_{12} = \sqrt{1-\xi\,\theta}; \quad \nu_{21} = \sqrt{1-\xi\eta_2}; \quad \nu_{22} = \sqrt{1-\xi};$$
$$\beta_2 = 1 - \frac{\xi}{2}; \quad \beta_1 = 1 - \frac{\xi\theta}{2}; \quad \mu_* = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Исходя из введенных обозначений и учитывая, что $\eta_j < 1$, условия в (9) будут выполнены, если будет выполнено условие $0 < \xi < 1$.

Следовательно, условие $0 < \xi < 1$ является необходимым для существования поверхностных, т.е. затухающих по глубине, волн.

В дальнейшем будем использовать также обозначение

$$\xi_{Rj} = \frac{\mathrm{v}_{Rj}^2}{c_{t2}^2} \qquad (j = 1, 2)$$

где v_{R1} и v_{R2} - скорости распространения волн Релея в материалах полосы и полуплоскости соответственно.

2 Решение задачи.

Для исследования вопроса возможности существования поверхностной волны, распространяющейся вдоль линии раздела материалов, необходимо получить дисперсионное уравнение и выяснить наличие у него корня, удовлетворяющего условию $0 < \xi < 1$. Известно, что для получения дисперсионного уравнения, помимо условий соединения материалов (3), необходимо иметь граничные условия на свободной поверхности слоя. Рассмотрим три различных варианта граничных условий при $z = -h$.

2.1 а. Поверхность $z = -h$ свободна от напряжений.

Пусть свободная поверхность слоя не нагружена, т.е. имеем

$$\sigma_{31}^{(1)}\Big|_{z=-h} = 0, \qquad \sigma_{33}^{(1)}\Big|_{z=-h} = 0 \tag{10}$$

Подставив представления (7) и (9) в выражения компонентов перемещений и напряжений (4) и (6) и удовлетворив условиям (3) и (10), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных A_j, B_j $(j = 1, 2, 3)$. Условие существования решения этой системы, т.е. условие равенства к нулю определителя матрицы системы, приводит к следующему дисперсионному уравнению

$$
\begin{aligned}
&\theta\nu_{12}\left(\beta_2^2-\nu_{21}\nu_{22}\right)\left(\beta_1^2\,\mathrm{th}\,s\nu_{11}-\nu_{11}\nu_{12}\,\mathrm{th}\,s\nu_{12}\right)+\\
&+\mu_*\nu_{22}\left[2\beta_1^2\nu_{11}\nu_{12}\left(\mathrm{sech}\,s\nu_{11}\,\mathrm{sech}\,s\nu_{12}-1\right)+\right.\\
&\left.+\left(\beta_1^4+\nu_{11}^2\nu_{12}^2\right)\mathrm{th}\,s\nu_{11}\,\mathrm{th}\,s\nu_{12}\right]=0
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

где $s = k\,h = h/\lambda$ - безразмерный параметр, представляющий собой отношение толщины полосы к длине волны λ.

Учитывая, что для гиперболических функций можно использовать асимптотические формулы, которые существенно упростят уравнение (11), рассмотрим отдельно случаи длинных волн, или тонкого слоя, и коротких волн, или толстого слоя. Исследование проведем в плане получения аналитических формул. Рассмотрим случай длинных волн, или тонкого слоя, когда $s \ll 1$.

В этом случае дисперсионное уравнение (11) примет вид

$$
4\left(\beta_2^2-\nu_{21}\nu_{22}\right)+\mu_*\xi\nu_{22}s\left[\xi\theta-4\left(1-\eta_1\right)\right]+O\left(s^2\right)=0 \qquad (12)
$$

Здесь учтено, что при $\xi = 0$ имеем тривиальное решение.

Полученное уравнение совпадает с соответствующим уравнением работы [4], где тонкий слой рассматривается в рамках теории пластин Кирхгоффа. В работе [10] рассмотрена похожая задача, но при принятии для тонкого слоя гипотез Мелана для стрингера. Полученное в [10] уравнение отличается от (12), поскольку условия контакта слоя с полуплоскостью записываются для усредненных по толщине слоя величин, и в обозначениях настоящей работы имеет вид:

$$
4\left(\beta_2^2-\nu_{21}\nu_{22}\right)+\mu_*\xi\nu_{22}s\frac{\xi\theta-1}{1-\eta_1}+O\left(s^2\right)=0.
$$

Разыскивая решение уравнеиия (12) в виде ряда по s, для корня дисперсионного уравнения можно получить асимптотическую формулу

$$
\xi=\xi_{R2}+s\frac{2\mu_*\xi_{R2}\sqrt{1-\xi_{R2}}(2-\xi_{R2})^2}{\left(4\left[1+\left(1-2\xi_{R2}\right)\eta_2\right]-\left(2-\xi_{R2}\right)^3\right)}\left(1-\eta_1-\frac{\xi_{R2}\theta}{4}\right)+O(s^2) \qquad (13)
$$

Если в случае скользящего контакта на линии соединения [7] этот корень был всегда меньше скорости волны Релея в полуплоскости ξ_{R2}, то в рассматриваемом случае при малых значениях параметра θ этот корень больше ξ_{R2}, при $\theta = \frac{4(1-\eta_1)}{\xi_{R2}}$ равен ξ_{R2} , а при больших значениях меньше ξ_{R2}.

Пусть теперь $s \gg 1$. В этом случае асимптотики зависят от значения параметра θ, спектром изменения которого является положительная полуось числовой оси. Рассмотрим отдельные случаи.

I) Пусть $\theta \le 1$, тогда для произвольного $0 < \xi < 1$, с учетом $0 < \eta_1 < 0.5$, подкоренные выражения величин ν_{11} и ν_{12} будут положительными и для гиперболических функций можно принять:

$$
\mathrm{th}(s\sqrt{1-\xi\theta})\approx\mathrm{th}(s\sqrt{1-\xi\theta\eta_1})\approx 1;\quad \mathrm{sech}(s\sqrt{1-\xi\theta})\approx\mathrm{sech}(s\sqrt{1-\xi\theta\eta_1})\approx 0
$$

Тогда уравнение (11) сведется к уравнению

$$-\left(\beta_1^2-\nu_{11}\nu_{12}\right)\left(\mu\left(\beta_1^2-\nu_{11}\nu_{12}\right)\nu_{22}+\theta\nu_{12}\left(\beta_2^2-\nu_{21}\nu_{22}\right)\right)=0 \qquad (14)$$

Первый множитель совпадает с уравнением Релея для материла полосы и имеет решение $\xi=\xi_{R1}$.

Второй же множитель (14) в концах интервала $0<\xi<1$ имеет разные знаки, и монотонно убывает, а это означает, что уравнение имеет один корень. Также отметим, что это решение всегда находится между скоростями волн Релея в полуплоскости и в полосе.

II) Если $1<\theta<1/\eta_1$, то из уравнения (14) следует искать корень в интервале $0<\xi<1/\theta$. В интервале же $1/\theta\ <\xi<1$ будем иметь $1-\xi\theta<0$ и $1-\xi\theta\eta_1>0$, а следовательно

$$\mathrm{th}(s\sqrt{1-\xi\theta})=itg(s\sqrt{\xi\theta-1});\qquad \mathrm{th}(s\sqrt{1-\xi\theta\eta_1})\approx 1.$$

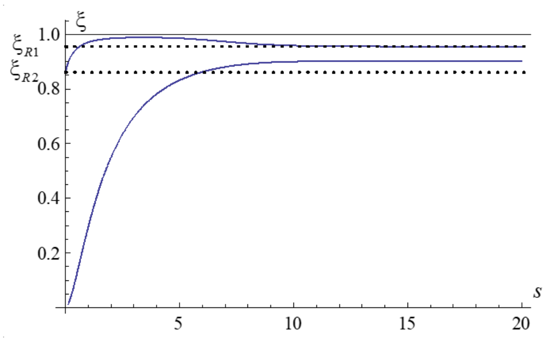
Тогда из уравнения (11) следует

$$\tan\left[s\sqrt{\xi\theta-1}\right]=\frac{\beta_1^2\sqrt{\theta\xi-1}\left(2\mu_*\nu_{22}\nu_{11}-\theta\left(\beta_2^2-\nu_{21}\nu_{22}\right)\right)}{\mu_*\nu_{22}\left(\beta_1^4+\nu_{11}^2\nu_{12}^2\right)-\theta\nu_{12}^2\nu_{11}\left(\beta_2^2-\nu_{21}\nu_{22}\right)}. \qquad (15)$$

Последнее выражение указывает на то, возможно распротранение бесконечного числа мод поверхностных волн.

III) Пусть теперь $1/\eta_1\ <\theta$. Тогда, как и в предыдущем случае, следует искать в интервале $0<\xi<1/\theta$ искать корень уравнения (14), в интервале $1/\theta\ <\xi<1/\theta\eta_1$ воспользоваться формулой (15), а в интервале $1/\theta\eta_1\ <\xi<1$ гиперболические функции обращаются в тригонометрические и аналитическую формулу для фазовой скорости, к сожалению, получить не удаётся.

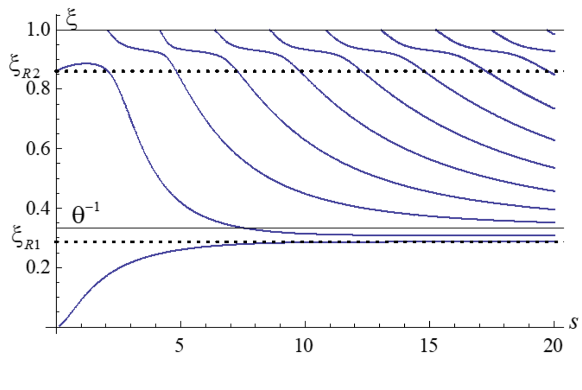
Перейдем к численному анализу зависимости скорости распространения возмож-ных поверхностных волн от параметра s. Не довольствуясь полученными выше асимтотическими формулами, численный анализ проведем непосредственно на уравнении (11). Выяснилось, что кроме поверхностной волны, распространяющейся со скоростью, близкой к ξ_{R2}, при всех значениях параметра θ существует также возможность распространения второй волны, скорость которой, начиная с нуля, возрастает по мере возрастания параметра s. На фиг. 2-4 представлены графики зависимости скоростей возможных поверхностных волн, распространяющихся вдоль линии соединения материалов, от параметра s при определенных значениях отношения модулей сдвига $\mu_*=1.5$, коэффициентов Пуассона материалов полосы и полуплоскости, принятых одинаковыми $\nu_1=\nu_2=0.3$, и разных значениях параметра $\theta=0.9$, 3, 6, попадающих в указанные выше подобласти.



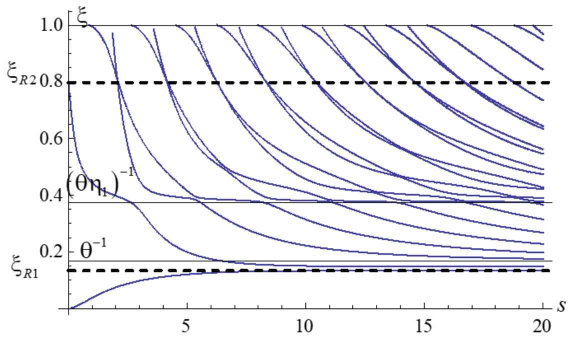
Фиг. 2: Зависимость ξ от s при $\mu_* = 1.5$; $\theta = 0.9$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$

Как видно из фиг.2. верхняя кривая стремится к ξ_{R1}, а нижняя - к некоторой величине между ξ_{R1} и ξ_{R2}. Численный анализ при таких значениях параметра θ и коэффициентов Пуассона, когда $\xi_{R1} < \xi_{R2}$, верхняя кривая стремится к некоторой величине между ξ_{R1} и ξ_{R2}, а нижняя - к ξ_{R1}, что соответствует утверждению подпункта I) случая $s \gg 1$. Нетрудно проверить, что выполняется и описание к асимптотической формулы (13).

В отличие от случая скользящего контакта на линии раздела [7], когда вторая волна появляется лишь после определенного значения параметра s и ее скорость выше ξ_{R1}, в этом случае вторая волна существует при всех s, а скорость ее распространения всегда меньше ξ_{R1}.

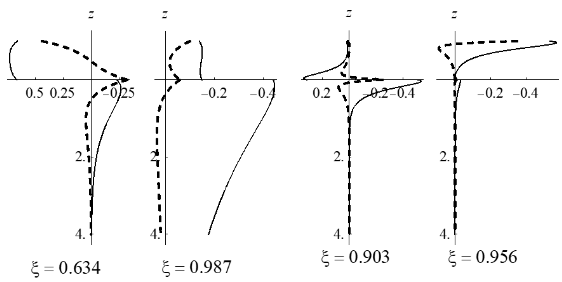


Фиг. 3: Зависимость ξ от s при $\mu_* = 1.5$; $\theta = 3$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$



Фиг. 4: Зависимость ξ от s при $\mu_* = 1.5;\ \theta = 6;\ \nu_1 = \nu_2 = 0.3$

Фиг. 3 и фиг. 4 показывают, что при больших значениях параметра θ картины распределения кривых скоростей разных мод схожи с картинами для скользящего контакта [7], но отличаются тем, что существует дополнительная волна, изменяющаяся в интервале $(0, \xi_{R1})$, а все остальные скорости больше, чем ξ_{R1}.



Фиг. 5: Нормализованные перемещения u (пунктир) и w (сплошная линия) по оси z при $s = 2.5$ (левая пара) и $s = 15$ (правая пара)

По аналогии с работой [7], представим также амплитуды нормализованных перемещений по глубине системы слой-полуплоскость. Напомним, что в указанной работе было введено понятие нормализованных перемещений, т.е. перемещений, удовлетворяющих, для каждого волнового числа k, условию

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}} \left(\int\limits_{-h}^{0} E_P^{(1)} dz + \int\limits_0^{\infty} E_P^{(2)} dz \right) dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{k}} \left(\int\limits_{-h}^{0} E_K^{(1)} dz + \int\limits_0^{\infty} E_K^{(2)} dz \right) dx = 1$$

где $E_P^{(j)}$, $E_K^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ - удельные потенциальные и кинетические энергии слоя и полуплоскости.

Из графиков первой пары ($s = 2.5$), соответствующей случаю относительно тонкого слоя, можно заметить, что энергия медленно распространяющейся волны аккумулируется, главным образом, внутри слоя, а быстро распространяющейся волны – в приграничной зоне полуплоскости. Вертикальное перемещение внутри слоя для обоих волн можно считать практически постоянным, т.е. при колебании слой можно считать недеформируемым в вертикальном направлении.

Графики второй пары ($s = 15$), соответствующей случаю относительно толстого слоя, явно указывают на «поверхностный »характер этих волн, энергия первой волны сконцентрирована в непосредственной близости от линии соединения материалов, а второй волны - у свободной границы слоя. При этом по величине скорости распространения этих волн уже достаточно близки друг к другу.

б. Защемлённая поверхность

В этом случае на верхней границе $z = -h$ имеем условия

$$u^{(1)}(x, -h) = 0\,, \quad w^{(1)}(x, -h) = 0$$

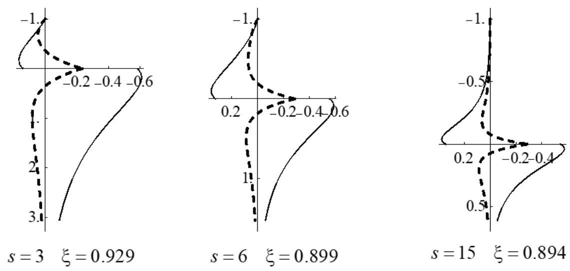
и дисперсионное уравнение будет иметь вид

$$\mu_* \nu_{22} \left(\left(\beta_1^2 + \nu_{11}^2 \nu_{12}^2 \right) \operatorname{th} s\nu_{11} \operatorname{th} s\nu_{12} - \left(1 - 2\beta_1 \operatorname{sech} s\nu_{11} \operatorname{sech} s\nu_{12} + \beta_1^2 \right) \nu_{11}\nu_{12} \right) + \\ + \theta \nu_{12} \left(\beta_2^2 - \nu_{21}\nu_{22} \right) \left(\operatorname{th} s\nu_{11} - \nu_{11}\nu_{12} \operatorname{th} s\nu_{12} \right) = 0$$

Численный анализ полученного дисперсионного уравнения показал, что:

- при $\theta \leq 1$ может распространяться только одна поверхностная волна, скорость распространения которой при увеличении параметра s, монотонно убывая от единицы, стремится к определенной величине между ξ_{R1} и ξ_{R2}.
- при $\theta > 1$ опять-таки имеем бесконечное число мод поверхностных волн, скорость распространения которых всегда выше, чем ξ_{R1}, но, в отличие от случая свободного края, здесь отсутствует медленно распространяющаяся волна, скорость которой при $s \gg 1$ была равна ξ_{R1}.

На фиг. 6 представлены нормализованные перемещения для данных, соответствующих фиг. 2, т.е. $\mu_* = 1.5$, $\theta = 0.9$ и $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, при разных значениях параметра $s = 3, 6, 15$.



Фиг. 6: Нормализованные перемещения u (пунктир) и w (сплошная линия) по оси z

Как и следовало ожидать, поверхностная волна может распространяться только по линии соединения материалов. Схожесть картин и практически одинаковые значения перемещений на линии соединения объясняются тем, что представлены нормали¬зованные перемещения, сохраняющие энергию постоянной, и здесь не происходит перераспределения энергии между волнами, как это имело место в предыдущем случае.

г. Условие антисимметрии (условие Навье)

Здесь имеем

$$u^{(1)}(x,-h)=0,\quad \sigma_{33}^{(1)}(x,-h)=0$$

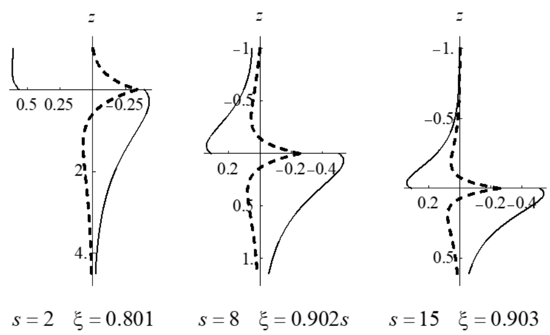
и дисперсионное уравнение будет

$$\theta\nu_{1,2}\left(\beta_2^2-\nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)\operatorname{th}s\nu_{1,1}\operatorname{th}s\nu_{1,2}+\mu_*\nu_{2,2}\left(\beta_1^2\operatorname{th}s\nu_{1,1}-\nu_{1,1}\nu_{1,2}\operatorname{th}s\nu_{1,2}\right)=0$$

Численный анализ дисперсионного уравнения дал следующие результаты:

- при $\theta\le 1$ может распространяться только одна поверхностная волна, скорость распространения которой при увеличении параметра s, монотонно возрастая от нуля, стремится к определенной величине между ξ_{R1} и ξ_{R2}. Эта волна является аналогом волны, соответствующей нижней кривой на фиг.2.
- при $\theta>1$ картина кривых скоростей разных мод поверхностных волн схожа с картинами на фиг.3 и фиг.4 с той лишь разницей, что здесь первая кривая в группе мод начинается не с ξ_{R2}, а с единицы.

На фиг. 7 также представлены нормализованные перемещения для данных, соответствующих фиг. 2, т.е. $\mu_*=1.5$, $\theta=0.9$ и $\nu_1=\nu_2=0.3$, при разных значениях параметра $s=2,8,15$.



Фиг. 7: Нормализованные перемещения u (пунктир) и w(сплошная линия) по оси z

Сравнивая последние кривые с кривыми на фиг. 5 и фиг. 6 замечаем, что сплошная кривая на первом рисунке почти повторяет эту же кривую на первом рисунке фиг.5, поведение пунктирной линии повторяет поведение этой кривой на рисунках фиг. 6, третий рисунок практически повторяет третьи рисунки фиг.5 и фиг.6. Первые два совпадения объясняются наличием одного общего условия $u^{(1)}(x,-h) = 0$ или $w^{(1)}(x,-h) = 0$, третье же совпадение, очевидно, является следствием уменьшения влияния граничных условий ввиду удаленности границы от линии соединения, если изменение параметра $s = kh$ связать с изменением толщины слоя h.

Заключение.

Исследован вопрос существования поверхностных волн в системе слой – полуплоскость, когда на линии стыка имеют место условия Навье и проведено сравнение результатов с результатами другой работы, где проведено аналогичное исследование при условиях скольжения на линии соединения.

Литература

[1] Chattarjee S.N. Propagation of Rayleigh Waves in a Layer Lying over a Heterogeneous Half Space. // Pure and Applied Geophysics. 1971. V 86. №3. P 69-79.

[2] Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания упругой изотропной полосы, жестко связанной с анизотропной полупло¬скостью. Современные проблемы механики сплошной среды. // Труды V Межд. конф. Ростов-на Дону. 12-14 окт.1999. Ростов-на Дону. Изд. СКНЦ ВШ. 2000. Т 2. С 31-37.

[3] Белоконь, А. В., Белоконь О. А., Болгова А. И. Волны в трехмерном слое, подкрепленном тонкой пластиной //Вестник Самарского Государственного Университета, 2007, №6. - С.30-42.

[4] Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупространство. Механика, 58, №2, 2005. Ереван, Изд. НАН Армении. С.9-15.

[5] Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // В сб.: “Проблемы механики деформируемого твердого тела.” Ереван: Изд. НАН РА, 1997. С. 79-96.

[6] Гринченко В. Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук, думка, 1981. 284 с.

[7] Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З, Дарбинян А.З. Распространение поверхностных волн в системе полуплоскость-слой при условии скользящего контакта между ними. Изв. НАН РА, Механика, 2021, т.74, №2, с. 18-32.

[8] Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З, Дарбинян А.З. Распространение поверхностных волн в составной полуплоскости. Изв. НАН РА, Механика, 2020, т.73, №1, с. 23-29.

[9] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.

[10] Агаян К.Л., Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве с тонким упругим усиливающим слоем. //Тр. VII межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред », 19-23 сентября, 2011, Горис-Степанакерт, с.18-25

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович - к.ф.-м.н., с.н.с.. Института механики НАН РА. Тел.:(37410) 27-62-23, **email**: amirjanyan@gmail.com

Геворкян Гнун Завенович - к.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА, **email**: gnungev2002@yahoo.com

Дарбинян Артавазд Завенович -к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА, **email**: darbinyan_1954@mail.ru

Поступила в редакцию 3.09.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, № 4, 2021 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/74.4.1.4

Forced electroacoustic oscillations along piezoelectric layer thickness: Applied opportunities

Avetisyan Ara S., Mkrtchyan M.H., Avetisyan L.V.

Keywords: piezoelectric layer, electro-acoustic forced oscillations, surface impact, contactless impact, oscillations control, energy concentration.

Вынужденные электроакустические колебания по толщине пьезоэлектрического слоя. Прикладные возможности

Аветисян Ара С., Мкртчян М. Г., Аветисян Л.В.

Ключевые слова: пьезоэлектрический слой, электроакустические вынужденные колебания, поверхностное воздействие, бесконтактное воздействие, управление колебаниями, концентрация энергии.

С целью формулирования постановки задач управления колебаниями пьезоэлемента при помощи поверхностного воздействия электрическим полем, а также для получения способа накопления электрической энергии, рассматривается простая модельная задача вынужденных колебании пьезоэлектрического слоя класса 6mm гексагональной симметрии.

Формулированы задача управления электроакустическими сдвиговыми колебаниями по толщине пьезоэлектрического слоя поверхностным механическим воздействием, а также задача бесконтактного управления этими колебаниями воздействием поверхностного потенциала электрического поля.

Решения задач колебаний представляются в виде разложения искомых функций по собственным модам однородной краевой задачи, а функции, характеризующие поверхностные воздействия, - соответствующими гармониками.

Решены прикладные задачи управления электроакустическими колебаниями в случае, как механического поверхностного воздействия, так и бесконтактного поверхностного воздействия потенциалом электрического поля.

Պիեզոէլեկտրական շերտի հաստությամբ էլեկտրաառաձգական հարկադրական տատանումները. Կիրառման հնարավորություններ

Ավետիսյան Արա Ս., Մկրտչյան Մ.Հ., Ավետիսյան Լ.Վ.

Բանալի բառեր՝ պիեզոէլեկտրական շերտ, տատանումներ ըստ հաստության, էլեկտրա-ակուստիկ հարկադրական տատանումներ, մակերևութային ազդեցություն, անհպում ազդեցություն, տատանումների ղեկավարում, էներգիայի կուտակում:

Նպատակ ունենալով, էլեկտրական դաշտի մակերևութային ազդեցության միջոցով, պիեզոէլեկտրական շերտի տատանումների անհպում ղեկավարման խնդիրների ձևակերպումը, ինչպես նաև էլեկտրական էներգիայի կուտակման մեթոդ ստանալու համար, դիտարկվում է վեցանկյուն սիմետրիայի $6mm$ դասի պիեզոէլեկտրական շերտի հարկադրական տատանումների պարզ մոդելային խնդիր:

Ձևակերպված են մակերևութային մեխանիկական ազդեցությամբ պիեզոէլեկտրական շերտում, ըստ հաստության սահքի էլեկտրաակուստիկ փափանումների ղեկավարման խնդիրը, ինչպես նաև էլեկտրական դաշտի մակերևութային անհպում ազդեցությամբ այդ փափանումների ղեկավարման խնդիրը:

Տափանման խնդիրների լուծումները ներկայացվում են համասեռ եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաների շարքերի տեսքով, իսկ մակերևութային ղեկավարող ազդեցությունները բնութագրող ֆունկցիաները ներկայացված են համապատասխան հարմոնիկաներով:

Լուծված են էլեկտրաակուստիկ փափանումների ղեկավարման կիրառական խնդիրներ, ինչպես մակերևութային մեխանիկական ազդեցության, այնպես էլ էլեկտրական դաշտի պոտենցիալով մակերևութային անհպում ազդեցության դեպքերում:

In a view of formulation of the controlling problems of a piezoelectric element oscillation by means of an electric field surface impact, as well as to obtain a method for electric energy harvesting, a simple model problem is considered of forced oscillations of a piezoelectric layer of a 6mm class of hexagonal symmetry.

The problem of controlling electroacoustic shear oscillations along the thickness of the piezoelectric layer by surface mechanical impact, as well as the problem of contactless control is formulated for oscillations caused by impact of the surface potential of an electric field.

The solutions of oscillation problems are represented in the form of an expansion of the sought functions in terms of eigenmodes of a homogeneous boundary value problem, the functions characterizing surface influences are represented by the corresponding harmonics.

The applied problem of control has been solved for electroacoustic oscillations in cases of both mechanical surface impact and non-contact surface impact caused by an electric field potential.

Introduction

In 1880 the Curie brothers discovered the unique property of piezoelectric matter (direct piezoelectric effect). Shortly thereafter in 1881, the inverse effect was also confirmed, specifically, that the substance located between the two electrodes, reacts to an electrical voltage applied to it by changing its shape. The direct piezoelectric effect is currently widely used in high-precision instrumentation, and the inverse piezoelectric effect, for exciting oscillations of mechanical pressures and deformations.

General principles and basic relations of the linear theory of piezoelectrics are well studied. These can be found in famous books [1–5] and etc.

With the development of modern technology, research on the control of related oscillatory and wave processes is encountered more and more [6–9] and etc. But before dealing with process control, it is necessary to explore the controllability of the original physical model [10, 11].

In order to formulate the formulation of control tasks for oscillations of the piezoelectric layer using surface mechanical impact or contactless action of an electric field, as well as to identify a method of accumulating electrical energy, a simple model problem is considered of forced oscillations of a piezoelectric layer made of a material of 6mm class of hexagonal symmetry

1 One-dimensional shear oscillations across the oscillations of the piezoelectric layer.

In a rectangular Cartesian coordinate system(x, y, z), an elastic layer of a piezoactive material of 6mm class of hexagonal symmetry occupying the region

$\{0 \leq x \leq a;\ -\infty < y < \infty;\ \infty < z < \infty\}$ (Fig. 1).

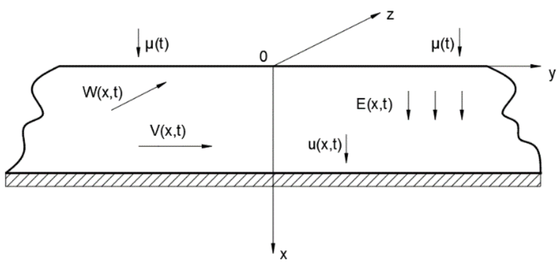


Fig. 1: Physical model of excitation of electroacoustic oscillations along the thickness of the piezoelectric layer and their control

Crystallographic axis of symmetry $\bar{P}_6$ is parallel to the coordinate axis $0z$, and the coordinate plane $x0y$ aligned with the isotropic plane of the material. The equations of propagation of one-dimensional shear waves or transverse oscillations of the layer, in the quasi-static approximation can be specified by the set of equations [1, 2, 4]

$$c_{44}w_{,xx}(x,t) + e_{15}\varphi_{,xx}(x,t) = \rho\ddot{w}(x,t), \quad \varepsilon_{11}\varphi_{,xx}(x,t) = e_{15}w_{,xx}(x,t). \tag{1.1}$$

Here, we used the following notations: function $w(x,t)$ is the elastic displacement along the coordinate z, $E(x,t) = -\varphi_{,x}$ is the component of the electric field along the coordinate x, c_{44} the shear modulus,ρ is the bulk density,ε_{11} dielectric permittivity and e_{15} piezo module of layer material. The expressions for the non-zero components of the mechanical stress and electrical displacement in one-dimensional setting have the form

$$\sigma_{zx}(x,t) = c_{44}w_{,x}(x,t) + e_{15}\varphi_{,x}(x,t), \quad D_x(x,t) = e_{15}w_{,x}(x,t) - \varepsilon_{11}\varphi_{,x}(x,t). \tag{1.2}$$

On planes $x = 0$ and $x = a$ of layer edges, the boundary conditions of surface mechanical impact and clamping are given by

$$w(0,t) = \mu(t), \tag{1.3}$$

$$w(a,t) = 0. \tag{1.4}$$

In the boundary condition (1.3), $\mu(t)$ is an arbitrary function of time corresponding to a nonstationary displacement of the surface. But in problems of electroelasticity, the surface impact can also be set by mechanical force $\sigma_{zx}(0,t)$, or by surface polarization (electrical displacement) $D_x(0,t)$, or by electrical potential $\varphi(0,t)$.

On the planes of layer edges, the boundary conditions for the electric field are also satisfied. Without loss of generality, as applied limiting variants of electrical boundary conditions, we consider the conditions of electrically open and electrically closed surfaces, respectively, on the planes $x = 0$ and $x = a$

$$\left[\varphi_{,x}(x,t) - (e_{15}/\varepsilon_{11}\ ) \cdot w_{,x}(x,t)\right]_{x=0} = 0, \quad \varphi(x,t)|_{x=a} = 0. \tag{1.5}$$

For a complete formulation of the boundary value problem of forced oscillations of elastic shear, it is also necessary to set the initial conditions also. In the case of a quasi-static formulation of the problem, it is natural to set the initial values for the mechanical components $w(x,t)$ and $\dot{w}(x,t)$

$$w(x,0) = f(x), \qquad \dot{w}(x,0) = g(x) \tag{1.6}$$

Initial conditions for accompanying electric field components $\varphi(x,t)$ and $\dot{\varphi}(x,t)$ are determined in accordance with the boundary value problem (1.1) and (1.3)-(1.5). Here, four more types of initial conditions are possible with initial values of the accompanying electric field components

$$w(x,0) = f(x), \qquad \varphi(x,0) = \psi(x) \tag{1.7}$$

$$\dot{w}(x,0) = g(x), \qquad \varphi(x,0) = \psi(x) \tag{1.8}$$

$$w(x,0) = f(x), \qquad \dot{\varphi}(x,0) = \phi(x) \tag{1.9}$$

$$\dot{w}(x,0) = g(x), \qquad \dot{\varphi}(x,0) = \phi(x) \tag{1.10}$$

Reduced boundary value problem (1.1), (1.3), (1.4) and (1.6) is similar to the problem of forced oscillations of a string [10]. When the one of the initial conditions (1.7)-(1.10) is valid instead of conditions (1.6), the solution of boundary value problems does not become more complicated, but the content and applications are expanded.

2 Solution of the boundary value problem of forced oscillations of elastic shear along the thickness of the piezoelectric layer.

System of equations (1.1) can easily brought to the form

$$\tilde{c}_t^2 \cdot w_{,xx}(x,t) = \ddot{w}(x,t), \quad \varphi_{,xx}(x,t) = (e_{15}/\varepsilon_{11})\cdot w_{,xx}(x,t), \tag{2.1}$$

where $\tilde{c}_t^2 = c_{44}(1+\chi^2)/\rho$ is the reduced velocity of the electroactive shear wave, $\chi^2 = e_{15}^2/(c_{44}\varepsilon_{11})$ is the electromechanical coupling coefficient of the material. By introducing a transform to move shear

$$w(x,t) = u(x,t) + (1 - x/a\ ) \cdot \mu(t) \tag{2.2}$$

The boundary r conditions (1.3) and (1.4) with regard to function $u(x,t)$ are converted to homogeneous surface conditions

$$u(0,t) = 0, \qquad u(a,t) = 0 \tag{2.3}$$

and the first equation of the system (2.1) takes the form of an inhomogeneous wave equation, with a perturbation $(1 - x/a\ ) \cdot \ddot{\mu}(t)$, at a certain depth of the layer

$$\tilde{c}_t^2 \cdot u_{,xx}(x,t) = \ddot{u}(x,t) + (1 - x/a\ ) \cdot \ddot{\mu}(t), \quad \varphi_{,xx}(x,t) = (e_{15}/\varepsilon_{11}\ ) \cdot u_{,xx}(x,t). \tag{2.4}$$

Homogeneous boundary conditions (2.3) allow to represent the solution of the equation (2.4) in the form of an expansion in eigenfunctions of the homogeneous boundary value problem

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \sin(\lambda_n x), \tag{2.5}$$

with eigenvalues $\lambda_n = n\pi/a$ and the corresponding harmonics characterizing the dynamics of natural oscillations of the layer $u_n(t)$

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t), \tag{2.6}$$

where $u_n(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} [A_{un}\cos(\omega_{un}t) + B_{un}\sin(\omega_{un}t)]$ and $\omega_{un} = \tilde{c}_t\lambda_n$

Factor in inhomogeneous part of the equation (2.4) also is represented as a series of its eigen functions

$$(1 - x/a\ ) \cdot \ddot{\mu}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\mu}_n(t) \cdot c_n \cdot \sin(\lambda_n x) \quad \text{where} \quad c_n = 2/n\pi \tag{2.7}$$

with the corresponding harmonics of its acceleration characterizing the surface effect

$$\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{\mu n}\cos(\omega_{\mu n}t) + B_{\mu n}\sin(\omega_{\mu n}t)] \tag{2.8}$$

Here,$\omega_{\mu n}$ are the known frequencies of the harmonics of the surface effect, $A_{\mu n}$ and $B_{\mu n}$ are the known amplitudes of harmonics of surface impact. Substituting (2.6) and (2.8) into the first of the equations (2.4), we come to the infinite system of ordinary differential equations

$$\ddot{u}_n(t) + \omega_{un}^2 \cdot u_n(t) = -c_n\omega_{\mu n}^2 \cdot \mu_n(t) \tag{2.9}$$

Here, $\omega_{un} = \tilde{c}_t\lambda_n$ are the eigen frequencies of oscillations of the layer, and $\omega_{\mu n}$ are the surface impact frequency. General solutions to equations (2.9) we find by the method of variation of constants

$$\begin{aligned} u_n(t) &= A_{un}\cos(\omega_{un}t) + B_{un}\sin(\omega_{un}t) + \\ &+ c_n\omega_{\mu n}^2/(\omega_{\mu n}^2 - \omega_{un}^2) \ \cdot [A_{\mu n}\cos(\omega_{\mu n}t) + B_{\mu n}\sin(\omega_{\mu n}t)] \end{aligned} \tag{2.10}$$

where the non-resonant frequency of exposure is defined as

$$\omega_{\mu n} \neq \omega_{un}, \tag{2.11}$$

Unknown amplitudes A_{un} and B_{un}, in solutions (2.10) we find on the basis of the given initial conditions, expanding these conditions in a Fourier series in terms of their eigen forms. In the case when the initial conditions are specified by mechanical characteristics (1.6), these expansions will be written in the form

$$w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cdot\sin(\lambda_n x),\quad \dot{w}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n\cdot\sin(\lambda_n x) \tag{2.12}$$

Comparing the expressions for the true shear across the layer thickness (2.2) and the expansion of the initial conditions (2.12), to determine unknown amplitudes A_{un} and B_{un} we will have an infinite system of linear algebraic equations in the form

$$\begin{cases} u_n(0)+c_n\cdot\mu_n(0)=f_n \\ \dot{u}_n(0)+c_n\cdot\dot{\mu}_n(0)=g_n \end{cases} \tag{2.13}$$

Taking into account (2.5), (2.6), (2.8) and (2.10) we can easily obtain the unknown amplitudes

$$\begin{cases} A_{un}+c_n\left[1+\omega_{\mu n}^2/(\omega_{\mu n}^2-\omega_{un}^2)\ \right]\cdot A_{\mu n}=f_n \\ B_{un}+c_n\left[1+\omega_{\mu n}^2/(\omega_{\mu n}^2-\omega_{un}^2)\ \right]\cdot B_{\mu n}=g_n/\omega_{un} \end{cases} \tag{2.14}$$

Taking into account the transformation (2.2), true shear in layer thickness $w(x,t)$ is defined in the following form

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n(t)+c_n\cdot\mu_n(t)\right]\cdot\sin\left(\lambda_n x\right) \tag{2.15}$$

where $w_n(t)=u_n(t){+}c_n{\cdot}\mu_n(t)$ are true harmonics of oscillations under surface impact. From the second equation of the system (2.4), taking into account the transformation (2.2), the surface conditions (1.5) and (2.3) on surfaces $x=a$ and $x=0$, the potential of the accompanying electric field oscillations is determined in the form

$$\varphi(x,t)=(e_{15}/\varepsilon_{11}\ )\cdot\left[(a-x)\cdot u'(0,t)+u(x,t)\right] \tag{2.16}$$

Using expansions (2.6) and (2.8) the expressions for the electric potential can be written as

$$\varphi(x,t)=(e_{15}/\varepsilon_{11}\ )\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[a\cdot\lambda_n c_n+1\right]\cdot\left[A_{un}\cos(\omega_{un}t)+B_{un}\sin(\omega_{un}t)\right]\cdot\sin(\lambda_n x) \tag{2.17}$$

Taking into account the boundary conditions (2.3), on the clamped surface $x=a$, the electric potential disappears, and its derivative will not be zero

$$\varphi(a,t)=0,\qquad \varphi'(a,t)=(e_{15}/\varepsilon_{11}\ )\cdot\left[u'(a,t)-u'(0,t)\right]. \tag{2.18}$$

On the surface of mechanical impact $x=0$, taking into account the boundary conditions (2.3), the electric potential and its derivative, respectively, take the values

$$\varphi(0,t)=(e_{15}/\varepsilon_{11}\ )\cdot a\cdot u'(0,t)=(e_{15}/\varepsilon_{11}\ )\cdot a\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cdot u_n(t),\quad \varphi'(0,t)=0. \tag{2.19}$$

On the basis of the obtained solutions of the problem of forced oscillations along the thickness of the piezoelectric layer, it is possible to propose new problems: control of electroacoustic oscillations by surface mechanical impact , or contactless impact on electroacoustic oscillations by non-stationary potential of the electric field, accumulation tasks (or absorption) the energy of the electric field.

3 The problem of controlling electroacoustic oscillations of shear along the thickness of a piezoelectric layer

As in the problem of forced oscillations, when solving the control problem, we again use the Fourier series method in the mathematical boundary value problem. This approach reduces the problem of controlling oscillations along the layer thickness by surface impact into an infinite system of the oscillation controlling by means of eigenforms of the harmonics of the surface impact [10].

In the problem of oscillation control, as in the expansion of the impact function (2.8) and so in the solutions (2.10), the amplitudes of harmonics of surface impact $A_{\mu n}$ and $B_{\mu n}$, are unknown ones. These coefficients are determined together with the unknown amplitudes of the harmonics of the eigen vibration modes A_{un} and B_{un}.

3.1 Control of electroacoustic oscillations of shear along the thickness of the piezoelectric layer by surface mechanical impact -1.

Based on the obtained solution of the problem of forced oscillations of a piezo layer in the case of unsteady boundary mechanical loading, we can discuss the control problem requiring to determine mechanical impact function $\mu(t)$ allowing to reach electroelastic state with deflection values

$$w(x, T_0) = R(x), \qquad \dot{w}(x, T_0) = 0, \tag{3.1}$$

at the moment of time T_0. In the ratios (3.1) R and T_0 are given constants. Here, taking into account the expression for the deflection function (2.15), together with an infinite system of linear algebraic equations (2.13), from the conditions of the final state (3.1), one more infinite system of linear algebraic equations can be obtained

$$\begin{cases} u_n(T_0) + c_n \cdot \mu_n(T_0) = r_n \\ \dot{u}_n(T_0) + c_n \cdot \dot{\mu}_n(T_0) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

In the system of equations (3.2) r_n are the expansion coefficients of the final version of deflection function

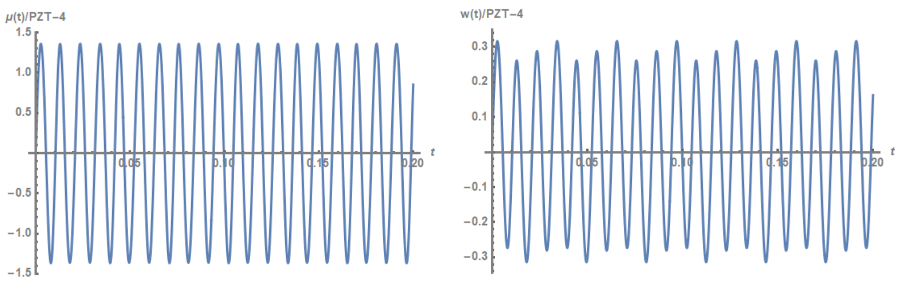
$$w(x, T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cdot \sin(\lambda_n x) \tag{3.3}$$

The values of the unknown amplitudes of the corresponding harmonics A_{un}, B_{un}, $A_{\mu n}]$ and $B_{\mu n}$, we can obtain from the system of equations (2.13) and (3.2)

$$\begin{cases} A_{un} + c_n(1+\gamma_{\omega n}) \cdot A_{\mu n} = f_n \\ B_{un} + c_n(1+\gamma_{\omega n}) \cdot B_{\mu n} = g_n/\omega_{un} \\ \cos(\omega_{un}T_0) \cdot A_{un} + \sin(\omega_{un}T_0) \cdot B_{un} + \\ + c_n(1+\gamma_{\omega n}) \cdot \cos(\omega_{\mu n}T_0) \cdot A_{\mu n} + c_n(1+\gamma_{\omega n}) \cdot \sin(\omega_{\mu n}T_0) \cdot B_{\mu n} = r_n \\ \sin(\omega_{un}T_0) \cdot A_{un} - \cos(\omega_{un}T_0) \cdot B_{un} + \\ + c_n(1+\gamma_{\omega n}) \cdot \sin(\omega_{\mu n}T_0) \cdot A_{\mu n} - c_n(1+\gamma_{\omega n}) \cdot \cos(\omega_{\mu n}T_0) \cdot B_{\mu n} = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

In the infinite system (3.4) the following notations are used for dimensionless frequency characteristics $\delta_{\omega n} = \omega_{\mu n}/\omega_{un}$ and $\gamma_{\omega n} = \delta^2_{\omega n}/(\delta^2_{\omega n} - 1)$.

From the conditions of the existence of nontrivial solutions of a system of algebraic linear equations, we can determine the time interval $t \in [0; T_0]$ during which the surface impact $\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(t)$ leads to the excited state of the piezoelectric layer from (1.6) state to state (3.1). Calculating the main determinant $Det\|d_{ij}(\omega_{un}; \omega_{\mu n}; T_0)\|_{4\times 4} = c_n^2 \neq 0$ of the system (3.4), we convince the possibility of controlling the shear oscillations along the thickness of the piezoelectric layer.

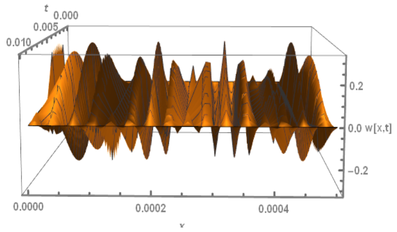


(a) Surface mechanical impact function $\mu(t)$ for controlling electro-acoustic oscillations over the thickness of the piezoelectric layer

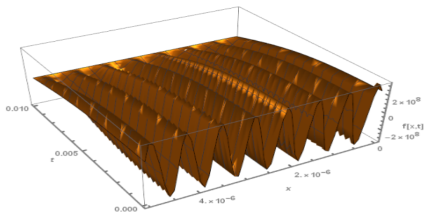
(b) The behavior of time depending function of elastic shear of electroacoustic oscillations of a piezoelectric layer $w(t)$

Fig. 2

Finding the amplitudes of the corresponding harmonics A_{un}, B_{un}, $A_{\mu n}$ and $B_{\mu n}$ from the system of equations (3.4), we define the function of the surface effect according to (2.8) and the surface of the electroacoustic shear and the potential of the accompanying electric field according to (2.15) and (2.17) , accordingly.



(a) Elastic shear change surface $w(x,t)$ in the process of controlling electro-acoustic oscillations of the piezoelectric layer in the case of surface mechanical action $\mu(t)$



(b) Surface of change of electric potential $\varphi(x,t)$ in the process of controlling electro-acoustic oscillations of the piezoelectric layer in the case of surface mechanical action $\mu(t)$

Fig. 3

In a particular case, when the initial and final states of the piezoelectric layer descriptions are known

$$w(x,0) = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \sin(\lambda_n x), \quad \dot{w}(x,0) = G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot \sin(\lambda_n x) \tag{3.5}$$

$$w(x,T_0) = R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cdot \sin(\lambda_n x), \quad \dot{w}(x,T_0) = 0, \tag{3.6}$$

for a period of time $t \in [0;\ 1.0sec]$ the control function $\mu(t)$ is constructed, as a mechanical surface effect (Fig.2.a). A function $w(t)$ of the temporal behavior of the elastic shear of electroacoustic oscillations of the piezoelectric layer has been constructed also (Fig.2.b). Wave surfaces of elastic shear and electric potential along the thickness of a piezolayer with a thickness $a = 10^{-3}m$ are shown in the figures 3a and 3b ,respectively.

3.2 Control of electroacoustic oscillations of shear across the thickness of the piezoelectric layer by surface mechanical impact - 2.

The most interesting applied control problem will be obtained if there is need to determine the function of the mechanical surface impact $\mu(t)$ so, that over time $t \in [0; T_0]$ the electric field potential accompanying mechanical oscillations will be equal to a given value $\Phi(x,T_0)$. In this case, instead of the final conditions (2.1) we need to consider the state

$$\varphi(x,T_0) = \Phi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \cdot \sin(\lambda_n x), \quad \dot{w}(x,T_0) = 0, \tag{3.7}$$

Taking into account that the electric field potential accompanying mechanical oscillations have the form (1.17), the determined infinite system of equations can be written as we obtain in the form

$$\begin{cases} A_{un} + c_n(1+\gamma_{\omega n}) \cdot A_{\mu n} = f_n \\ B_{un} + c_n(1+\gamma_{\omega n}) \cdot B_{\mu n} = g_n/\omega_{un} \\ \cos(\omega_{un}T_0) \cdot A_{un} + \sin(\omega_{un}T_0) \cdot B_{un} + c_n\gamma_{\omega n} \cdot \cos(\omega_{\mu n}T_0) \cdot A_{\mu n} + \\ + c_n\gamma_{\omega n} \cdot \sin(\omega_{\mu n}T_0) \cdot B_{\mu n} = (\varepsilon_{11}/e_{15}\ )\,(\phi_n/(a \cdot \lambda_n c_n + 1)\ ) \\ \sin(\omega_{un}T_0) \cdot A_{un} - \cos(\omega_{un}T_0) \cdot B_{un} + \\ + c_n(1+\gamma_{\omega n}) \cdot \sin(\omega_{\mu n}T_0) \cdot A_{\mu n} - c_n(1+\gamma_{\omega n}) \cdot \cos(\omega_{\mu n}T_0) \cdot B_{\mu n} = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Naturally, as in the system (3.4), in an infinite system (3.8 the same notations for dimensionless frequency characteristics are used $\delta_{\omega n} = \omega_{\mu n}/\omega_{un}$ and $\gamma_{\omega n} = \delta_{\omega n}^2/(\delta_{\omega n}^2 - 1)$.

Finding the amplitudes of the corresponding harmonics A_{un}, B_{un}, $A_{\mu n}$ and $B_{\mu n}$ from the system of equations (2.8), we define the function of the surface effect according to (2.8) and the surface of the electroacoustic shear and the potential of the accompanying electric field according to (1.15) and (1.17,) respectively.

In the particular case when the numerical parameters of the initial and final states of the piezoelectric layer are known (2.5) and (2.7), for a period of time $t \in [0;\ 1.0sec]$ the control function is built $\mu(t)$, as a mechanical surface effect (Fig.4.a). The behavior of time depending function of the elastic shear of electroacoustic oscillations of the piezoelectric layer has also been constructed $w(t)$ (Fig.4.b) changing from initial condition (2.5) to final condition (2.7).

4 Contactless control of electroacoustic oscillations of the piezoelectric layer shear by surface action of an electric field.

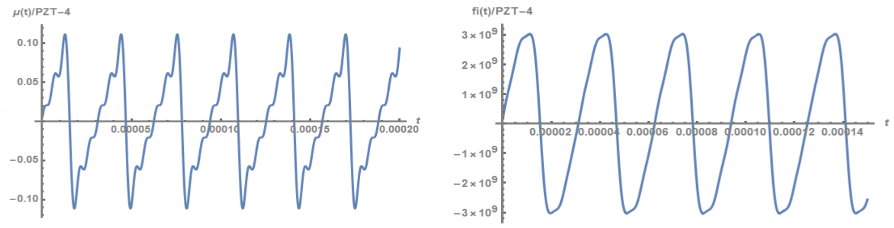
The more interesting case will be the option of contactless surface action, when on the traction free surface of the piezoelectric layer $x = 0$ a non-stationary electric field acts

$$\varphi(0,t) = \varphi_0(t), \tag{4.1}$$

and the second surface $x = a$, as before is clamped

$$w(a,t) = 0. \tag{4.2}$$

In condition (4.1), $\varphi_0(t) \in \mathbb{C}_2$ the times function corresponding to the unsteady potential of the electric field.



(a) Surface electric impact function $\mu(t)$ for controlling electro-acoustic oscillations of shear along the thickness of the piezoelectric layer

(b) Function of the behavior of the electric potential of electroacoustic oscillations of the piezoelectric layer as a function of time $\varphi(t)$

Fig. 4

On the layer edge planes, it is necessary to satisfy the two more boundary conditions for the electromechanical values of the field. Without loss of generality, as applied versions of electromechanical boundary conditions, we consider the conditions of a traction free surface on $x = 0$ and an electrically closed surface on $x = a$, respectively

$$[w_{,x}(x,t) + (e_{15}/c_{44}) \cdot \varphi_{,x}(x,t)]_{x=0} = 0, \quad \varphi(a,t) = 0 \tag{4.3}$$

For a complete statement of the control problem, it is also necessary to set the initial and final conditions. Initial and final conditions for the components of the accompanying electric field $\varphi(x,t)$ and $\dot{\varphi}(x,t)$ are determined in accordance with the boundary value problem (1.1) and (4.1) - (4.3). Here, one more types of initial conditions is possible with the initial values of the components of the electroactive vibration

$$w(x,0) = f(x), \quad \dot{\varphi}(x,0) = \phi(x) \tag{4.4}$$

In this case, we will consider the conditions of such a final state when the potential of the electric field accompanying mechanical oscillations is equal to a given value $\Phi(x, T_0)$

$$\varphi(x,T_0) = \tilde{\psi}(x), \quad \dot{w}(x,T_0) = 0. \tag{4.5}$$

To solve the control problem, we introduce the transformation

$$\varphi(x,t) = \Phi(x,t) + (1 - x/a\ ) \cdot \varphi_0(t) \tag{4.6}$$

For the introduced function $\Phi(x,t)$, condition (4.1) and the second condition from (4.3) are converted to homogeneous surface conditions

$$\Phi(0,t) = 0, \qquad \Phi(a,t) = 0 \tag{4.7}$$

The first equation of the system (1.1) takes the form of an inhomogeneous wave equation, with a perturbation $(1 - x/a\ ) \cdot \ddot{\mu}(t)$ at a certain depth of the layer

$$\tilde{C}_t^2 \cdot \Phi_{,xx}(x,t) = \ddot{\Phi}(x,t) + (1 - x/a\ ) \cdot \ddot{\varphi}_0(t), \tag{4.8}$$

The second equation confirms the synchronism of the shift function $w(x,t)$ and the new introduced function $\Phi(x,t)$

$$w_{,xx}(x,t) = (\varepsilon_{11}/e_{15}) \cdot \Phi_{,xx}(x,t) \tag{4.9}$$

The first surface condition from (4.3) converted to form

$$[w_{,x}(x,t) + (e_{15}/c_{44}) \ \cdot \Phi_{,x}(x,t)]_{x=0} = (e_{15}/ac_{44}) \ \cdot \varphi_0(t) \tag{4.10}$$

Homogeneous boundary conditions (4.7) allow to represent the equation (4.8) solution in the form of an expansion in eigenfunctions of the homogeneous boundary value problem

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \cdot \sin(\lambda_n x) \tag{4.11}$$

with eigenvalues $\lambda_n = n\pi/a$ and with the corresponding harmonics characterizing the dynamics of the process $\phi_n(t)$

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t). \tag{4.12}$$

Factor in the inhomogeneous part of the equation (4.8) also is represented as a series of its eigenfunctions

$$(1 - x/a\ ) \cdot \ddot{\varphi}_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_{0n}(t) \cdot c_n \cdot \sin(\lambda_n x) \quad \text{where} \quad c_n = 2/n\pi \tag{4.13}$$

and with the corresponding harmonics of its acceleration characterizing the surface effect

$$\varphi_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{0n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{\varphi n} \cos(\omega_{\varphi n} t) + B_{\varphi n} \sin(\omega_{\varphi n} t)] \tag{4.14}$$

Here $\omega_{\varphi n}$ are unknown frequencies, $A_{\varphi n}$ and $B_{\varphi n}$ unknown amplitudes of harmonics of surface action. Substituting decompositions (4.12) and (4.14) into the equation (4.8), we come to the solution of the infinite system of ordinary differential equations

$$\ddot{\Phi}_n(t) + \omega_{wn}^2 \cdot \Phi_n(t) = -c_n \omega_{\varphi n}^2 \cdot \varphi_{0n}(t) \tag{4.15}$$

Here, $\omega_{wn} = \tilde{C}_t \lambda_n$ natural frequency of oscillations of the layer, and $\omega_{\varphi n}$ surface action frequency.

General solutions of equations (4.15) we find by the method of variation of constants

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &= A_{wn} \cos(\omega_{wn} t) + B_{wn} \sin(\omega_{wn} t) - \\ &- c_n \cdot \omega_{\varphi n}^2 / (\omega_{wn}^2 - \omega_{\varphi n}^2\ ) \cdot [A_{\varphi n} \cos(\omega_{\varphi n} t) + B_{\varphi n} \sin(\omega_{\varphi n} t)] \end{aligned} \tag{4.16}$$

where the non-resonant frequency of exposure is defined as

$$\omega_{\varphi n} \neq \omega_{wn} \tag{4.17}$$

Taking into account the transformation (4.6), electric field potential across the layer thickness $\varphi(x,t)$ is defined as follows

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n(t) + c_n \cdot \varphi_{0n}(t)] \cdot \sin(\lambda_n x) \tag{4.18}$$

where $\varphi_n(t) = \Phi_n(t) + c_n \cdot \varphi_{0n}(t)$ true harmonic of oscillations under surface action. From the equation (4.9), taking into account the transformation (4.6) and surface conditions (4.7) on surfaces $x = a$ and $x = 0$, electroactive elastic shear is defined as

$$w(x,t) = (e_{15}/c_{44}) \cdot [(a-x) \cdot \Phi'(0,t) + \Phi(x,t)] \tag{4.19}$$

Using expansions (4.6), (4.18) and (4.19) the expression for the electroactive elastic shear can be written in the form of the expansion

$$w(x,t) = (e_{15}/c_{44}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [a\lambda_n c_n + 1] \cdot \Phi_n(t) \cdot \sin(\lambda_n x) \tag{4.20}$$

Taking into account the boundary conditions (4.4), on the clamped surface $x = a$, the electric potential disappears, and its derivative is not zero

$$w(a,t) = 0, \qquad w'(a,t) = (e_{15}/c_{44}) \cdot [\Phi'(a,t) - \Phi'(0,t)]\,. \tag{4.21}$$

On the surface of mechanical action $x = 0$, taking into account the boundary conditions (3.3), the electric potential and its derivative, respectively, take the values

$$w(0,t) = (e_{15}/c_{44}) \cdot a \cdot \Phi'(0,t) = (e_{15}/c_{44}) \cdot a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \Phi_n(t), \quad w'(0,t) = 0. \tag{4.22}$$

Presenting the initial and final conditions (4.5) in the form of Fourier series in eigenforms $\sin(\lambda_n x)$

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \sin(\lambda_n x), \quad \dot{\varphi}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \cdot \sin(\lambda_n x) \tag{4.23}$$

$$\varphi(x,T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n \cdot \sin(\lambda_n x). \quad \dot{w}(x,T_0) = 0 \tag{4.24}$$

The values of the unknown amplitudes of the corresponding harmonics A_{wn}, B_{wn}, $A_{\varphi n}$ and $B_{\varphi n}$,

$$\begin{cases} A_{wn} - c_n\gamma_{\omega n} \cdot A_{\varphi n} = (c_{44}/e_{15}) \cdot f_n/(a\lambda_n c_n + 1) \\ B_{wn} + c_n \cdot \delta_\omega (1-\gamma_{\omega n}) \cdot B_{\varphi n} = \phi_n/\omega_{wn} \\ \cos(\omega_{wn}t) \cdot A_{wn} + \sin(\omega_{wn}t) \cdot B_{wn} + \\ + c_n(1-\gamma_{\omega n}) \cdot \cos(\omega_{\varphi n}t) \cdot A_{\varphi n} + c_n(1-\gamma_{\omega n}) \cdot \sin(\omega_{\varphi n}t) \cdot B_{\varphi n} = \tilde{\psi}_n \\ \sin(\omega_{wn}T_0) \cdot A_{wn} - \cos(\omega_{wn}T_0) \cdot B_{wn} - \\ - c_n\delta_{\omega n}\gamma_{\omega n} \cdot \sin(\omega_{\varphi n}T_0) \cdot A_{\varphi n} + c_n\delta_{\omega n}\gamma_{\omega n} \cdot \cos(\omega_{\varphi n}T_0) \cdot B_{\varphi n} = 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

we find from the system of linear algebraic equations, which obtained from (4.23) and (4.24).

Into an endless system (4.25) the notations are used for dimensionless frequency characteristics $\delta_{\omega n} = \omega_{\varphi n}/\omega_{wn}$ and $\gamma_{\omega n} = \delta_{\omega n}^2/(1-\delta_{\omega n}^2)$

Finding the amplitudes of the corresponding harmonics A_{un}, B_{un}, $A_{\mu n}$ and $B_{\mu n}$ from the system of equations (4.25), we define the function of the surface effect according to (4.14) and electroacoustic shear surfaces and potential of the accompanying electric field according to (4.20) and (4.18) accordingly.

Conclusion

The problem is established of controlling shear oscillations along the thickness of the piezoelectric layer by surface mechanical impact, as well as the problem of contactless control of electroacoustic oscillations of shear along the thickness of the piezoelectric layer by the potential of the electric field.

The solution of the oscillation equation is represented in the form of an expansion in terms of eigenfunctions of a homogeneous boundary value problem, with the corresponding harmonics and their accelerations characterizing the surface impact.

An interesting applied problem of controlling electroacoustic oscillations has been solved, when it is required to determine the function of mechanical surface impact so that throughout the finite period of time the potential of the electric field accompanying mechanical oscillations will be equal to a given value.

References

[1] Balakirev M. K., Gilinsky I. A., Waves in piezoelectrics. Novosibirsk. Nauka. 1982. p.239, (in Russian) Балакирев М. К., Гилинский И. А., (1982), Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск. Наука. 239 стр.

[2] Parton V.Z., Kudryavtsev B.A., (1988), Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. M. Science. p.472, (in Russian) Партон В. З., Кудрявцев Б. А., (1988), Электромагнитоупругость пьезоэлектричес-ких and электропроводных тел. М. Наука. 472 стр.

[3] Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V., Plessky V., (1995), Surface acoustic waves in inhomogeneous media, Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20, p.388

[4] D. Royer, E. Dieulesaint, (1999), (ISBN 1439-2674), Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation, Springer Science & Business Media, p.374

[5] D. Royer, E. Dieulesaint, (1999), (ISBN 1439-2674), Elastic Waves in Solids II: Generation, Acousto-optic Interaction, Applications, Springer Science & Business Media, p.446

[6] Belubekyan M.V., Papyan A.A., (2020), https://doi.org/10.46991/PYSU:A/2020.54.3.146 , Vibration of piezoelectric layer of class 6mm with rigidly clamped and free edges under Initial conditions. Procc. Of Yerevan State University "Physical and Mathematical Sciences", vol. 54, №3, pp. 146-152

[7] Аветисян Ара С., (2022), О Постановке Задач Бесконтактного Поверхностного Управления Распространением Электроакустической Волны, Акустический Журнал, (в печати) Avetisyan Ara S., On Formulation of Problems for Non-Contact Surface Control of Electroacoustic Wave Propagation, (2022), Acoustic Journal, (in press)

[8] Алексеев С.Г., Гуляев Ю.В., Котелянский И.М., Мансфельд Г.Д., Некоторые тенденции развития акустоэлектроники сверхвысоких частот, Успехи Физических наук, 2005, № 8, стр. 895-899, http://doi.org/10.3367/UFNr.0175.200508i.0895

[9] Bergamini A.E., Zündel M., Flores Parra E.A., Delpero T., Ruzzene M., and Ermanni P., Hybrid dispersive media with controllable wave propagation: A new take on smart materials, Journal of Applied Physics, 2015, vol. 118, http://dx.doi.org/10.1063/1.4934202

[10] Butkovsky A.G., (1968), The theory of optimal control of systems with distributed parameters, M.: Nauka, p.474 (in Russian), Бутковский А.Г., (1965), Теория оптимального управления системами с распределёнными пара¬¬мет¬рами. М.: Наука, 474 стр.

[11] Avetisyan A.S., Khurshudyan As. Zh., (2018), (ISBN 978-1-5275-0892-7), Controllability of Dynamic Systems: The Green's Function Approach, Cambridge: Cambridge Scholars Publishing, p.203

Dedicated to the memory of our Teacher: To Professor Mels Vagharshak Belubekyan

<u>Information about authors:</u>

Avetisyan Ara S. - *Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E: mail - ara.serg.avetisyan@gmail.com,*

Manuk H. Mkrtchyan - *Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E: mail - mkmanuk@yandex.ru,*

Avetisyan Levon V. - *Postgraduate in Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E: mail - levon.avetisyan1@ysumail.am .*

Received 12.10.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, № 4, 2021 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/74.4.5

Ghazaryan K., Ghazaryan R., Terzyan S.

Localization of Shear Waves in Inhomogeneous Periodically Stratified Waveguide

Keywords: Localization , shear elastic wave, inhomogeneous material, waveguide.

Локализация сдвиговых волн в слоисто- периодическом неоднородном волноводе

Казарян К., Казарян Р., Терзян С.

Ключевые слова: локализация, сдвиговая упругая волна, неоднородный материал, волновод.

Для определенного класса неоднородных материалов аналитически установлена возможность локализации сдвиговой упругой волны в слоистом волноводе, состоящем из периодически повторяющихся упруго контактирующих неоднородных конечнего числа идентичных слоев. Для неоднородного материала с периодическими несимметричными профилями показано, что вследствии неоднородности имеет место локализация сдвиговых волн на внешних границах волновода Локализация волн значительно усиливается с увеличением числа элементарных ячеек волновода. Для неоднородного материала с симметричными профилями показано, что в этом волноводе локализация сдвиговых волн не имеет место.

Կ. Ղազարյան, Ռ. Ղազարյան, Ս. Թերզյան.

Սահքի ալիքների տեղայնացումը շերտավոր – պարբերական ալիքատարում

Հիմնաբառեր՝ Տեղայնացում, սահքի առաձգական ալիք, անհամասեռ նյութ, ալիքատար:

Անհամասեռ նյութերի որոշակի դասի համար անալիտիկորեն հաստատված է շերտավոր ալիքատարում սահքի առաձգական ալիքի տեղայնացման հնարավորությունը: Շերտավոր ալիքատարը բաղկացած է պարբերաբար կրկնվող, առաձգականորեն հպված վերջավոր թվով նույնական շերտերից: Պարբերական, ոչ սիմետրիկ պրոֆիլներով անհամասեռ նյութի համար ցույց է տրված, որ անհամասեռության հետևանքով ալիքատարի արտաքին եզրերում տեղի ունի սահքի ալիքների տեղայնացում: Ալիքատարի տարրական բջիջների թվի աճին զուգընթաց ալիքների տեղայնացումը զգալիորեն ուժեղանում է: Սիմետրիկ պրոֆիլներով անհամասեռ նյութի համար ցույց է տրված, որ այդ ալիքատարում սահքի ալիքների տեղայնացում տեղի չունի:

For a special class of inhomogeneity materials this analytical study demonstrates localization of shear elastic wave in periodically stratified waveguide, consisting of periodically repeated perfectly bonded inhomogeneous identical finite number unit cells. For inhomogeneous material with periodic non symmetrical profiles is shown that due to inhomogeneity the shear guided waves can be localized at interfaces in the waveguide. The localization of waves significantly increases with the numbers of the waveguide unit cells. For inhomogeneous material with symmetrical profiles is shown that this material does not support localization in waveguide.

Introduction

Functionally graded materials (FGM) are inhomogeneous elastic bodies whose properties vary with space. FGM plays an essential role in the most advanced integrated systems for vibration control and health monitoring. The progress in the characterization, modelling, analysis and principal developments of FGM was reviewed in [1, 2]. In pure elastic FGM materials elastic wave propagation was studied by many authors, and some studies close to presented article topic are worth to be mentioned [3–11]. In piezoelectric medium coupled electro- elastic bulk and surface waves are widely discussed in science periodic, particularly in [12–21]. Elastic and couple electro elastic surface wave prorogation in inhomogeneous materials admitting analytical solutions is considered in [6–10, 13, 15]. In this study, an exact analytical approach and transfer matrix technique are used to investigate localization of shear elastic wave in periodically stratified waveguide of some functionally graded material, consisting of periodically repeated perfectly bonded inhomogeneous identical unit cells.

Statement of the problem.

Let consider shear elastic wave propagation in periodically stratified functionally graded waveguide, consisting of periodically repeated perfectly bonded identical inhomogeneous layers. The material parameters of a inhomogeneous material, the stiffness and the mass density are assumed to be varied in the same proportion in the unit cell as $\mu_n(x) = \mu_0 f_n(x); \rho_n(x) = \rho_o f_n(x)$, where $f_n(x)$ is the inhomogeneity functions which will be specified later, $x \in [(n-1)\,d, nd]\,, n = 1, 2, ..N$, is the number of the unit sells (Fig.1)

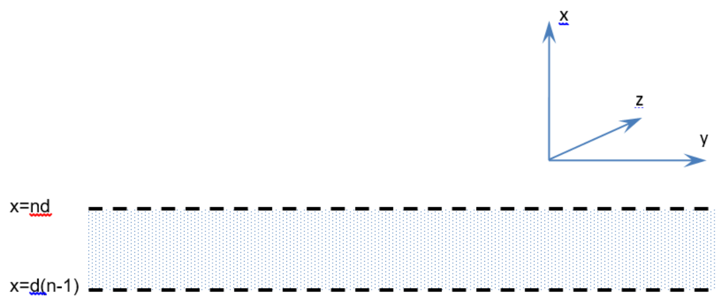


Fig.1 Elementary unit cell of the inhomogeneous elastic waveguide

The elastic displacements and stresses obey to the anti-plane equations of motion and Hooke's law. Choosing the anti-plane deformation in the z-direction and considering a steady SH-wave $u_n\,(x, y, t) = u_{n0}\,(x) \exp{[i(ky - \omega t)]}$, where $u_n\,(x, y, t)$ is the displacement in z direction, we come to the following equations $(k, \omega$ are wave number and angular frequency)

$$\begin{aligned}&\partial_x \tau_{0n}(x) + \left(\varrho_0 \omega^2 - \mu_0 k^2\right) f_n(x) u_{0n}(x) = 0\\&\tau_{0n}(x) - \mu_0 f_n(x) \partial_x \left(u_{0n}(x)\right) = 0\end{aligned} \tag{1}$$

For a special class of inhomogeneity functions Eqs. (1) can be converted into differential equations with constant coefficients admitting the exact solutions [10, 16].

$$f_n^{(\pm)}(x) = \left(\cosh\left(a\left(x - (n-1)\,d\right) + d_0\right) + \frac{b}{a}\sinh\left(a\left(x - (n-1)\,d\right) + d_0\right)\right)^{\pm 2} \tag{2}$$

The expression Eqs. (2) is valid also for $b = ib_0$, $a = 0$. When $a = 0$ instead of Eq.(2) we have $(d_0 = 0)$

$$f_n^{(\pm)}(x) = (1 + b(x - d(n-1)))^{\pm 2}; \tag{3}$$

Solutions of Eq. (1), corresponding to the functions $f_n^{(+)}(x)$, can be found as

$$u_{0n}\left(x\right) = \frac{\left(A_{1n}\, e^{ipx} + A_{2n}\, e^{-ipx}\right)}{\sqrt{f_n^{(+)}(x)}}; \quad \tau_{0n}(x) = \mu_0 f_n^{(+)}(x) \partial_x \left(u_n(x)\right) \tag{4}$$

where $p = d^{-1}\sqrt{\theta^2 - (kd)^2 - (ad)^2}; \theta = \omega\sqrt{\mu_0^{-1}\rho_0}$; By introducing the column field vector $\bar{U}_n\left(x\right) = \left(u_{0n}(x), \tau_{0n}(x)\right)^T, \bar{A}_n = \left(A_{1n} A_{2n}\right)^T$ the solutions of Eq.(4) can be cast as

$$\bar{U}_n\left(x\right) = \hat{F}_n^{(+)}\left(x\right)\bar{A}_n$$

where

$$\begin{aligned}&\hat{F}_n^{(+)}\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt{f_n^{(+)}(x)}} \times \\&\times \begin{pmatrix} 2e^{ipx} & 2e^{-ipx} \\ \mu_0\, e^{ipx}\left(2ipf_n^{(+)}(x) - \partial_x f_n^{(+)}(x)\right) & -\mu_0 e^{-ipx}\left(2ipf_n^{(+)}(x) + \partial_x f_n^{(+)}(x)\right)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

Solutions of Eqs. (1) corresponding to the functions $f_n^{(-)}(x)$ can be found as

$$\begin{aligned}\tau_{0n}(x) &= \frac{\mu_0\left(A_{1n} e^{ipx} + A_{2n} e^{-ipx}\right)}{\sqrt{f_n^{(-)}(x)}};\\ u_{0n}(x) &= \frac{\mu_0 k^2 - \varrho_0 \omega^2}{f_n^{(-)}(x)} \partial_x \tau_{0n}(x);\end{aligned} \tag{6}$$

and in the matrix form they can cast as

$$\bar{U}_n\left(x\right) = \hat{F}_n^{(-)}\left(x\right) \cdot \bar{A}_n$$

where

$$\hat{F}_n^{(-)}(x) = \sqrt{f_n^{(-)}(x)} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} -\frac{e^{ipx}\left(2ipf_n^{(-)}(x)+\partial_x f_n^{(-)}(x)\right)}{2(a^2+p^2)\left(f_n^{(-)}(x)\right)^2} & -\frac{e^{-ipx}\left(-2ipf_n^{(-)}(x)+\partial_x f_n^{(-)}(x)\right)}{2(a^2+p^2)\left(f_n^{(-)}(x)\right)^2} \\ \mu_0 e^{ipx} & \mu_0 e^{-ipx} \end{pmatrix}$$

The transfer matrix $\hat{M}$ linking field vector values at the surfaces $x = (n-1)d, x = nd$ of the unit cell can now be determined as:

$$\bar{U}_n(nd) = \hat{F}_n^{(\pm)}(nd) \cdot \bar{A}_n, \bar{U}_n((n-1)d) = \hat{F}_n^{(\pm)}((n-1)d) \cdot \bar{A}_n \tag{7}$$

Excluding vector $\bar{A}_n$ in Eq. (5) one has

$$\bar{U}_n(nd) = \hat{M}^{(\pm)} \bar{U}_n((n-1)d); \tag{8}$$

Herein $\hat{M}^{(\pm)} = \hat{F}_n^{(\pm)}(nd)\left(\hat{F}_n^{(\pm)}\right)^{-1}((n-1)d)$ is the unimodal transfer matrix for the inhomogeneous cells corresponding to the functions $f_n^{(\pm)}(x)$.

The condition $\left|\mathrm{Tr}\left(\hat{M}^{(\pm)}\right)\right| > 2$, defines the stopband of frequencies, ranges of eigen frequencies in which waves cannot propagate in the infinite periodic medium consisting of periodically repeated inhomogeneous cells [22]. Let note that elements of matrix $\hat{M}^{(\pm)}$ do not depend of cell number n.

Using the continuity conditions of the field vectors $\bar{U}(x)$ at interfaces $x = nd$ we come to the matrix equations

$$\widehat{U}_{n+1}(x_n) = \hat{M}^{(\pm)} \widehat{U}_n(x_{n-1}) \tag{9}$$

, Repeating this procedure the n-th times the propagator unimodal matrix $\left(\hat{M}^{(\pm)}\right)^n$ can be found. The matrix $\left(\hat{M}^{(\pm)}\right)^n$ links the field vectors at $x = 0$ and $x = nd$ surfaces of the waveguide.

$$\left(\hat{M}^{(\pm)}\right)^n \bar{U}_1(0) = \bar{U}_n(nd), \qquad n = 1, 2, ...N \tag{10}$$

According to Sylvester's matrix polynomial theorem for 2x2 matrices the elements of the n-th power of an unimodal matrix $\hat{M}^{(\pm)}$ can be cast as [23]

$$\left(\hat{M}^{(\pm)}\right)^n = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

and can be simplified using the following matrix identity

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_{11} S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta); M_{12} = m_{12} S_{n-1}(\eta) \\ M_{21} &= m_{21} S_{n-1}(\eta); M_{22} = m_{22} S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta) \end{aligned} \tag{11}$$

where $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$are elements of matrix $\hat{M}^{(\pm)}$

$$\hat{M}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

$S_n(\eta)$ are the Chebyshev polynomials of second kind, namely

$$S_n(\eta) = \frac{\sin((n+1)\phi)}{\sin\phi}; \qquad \cos\phi = \eta;$$
$$\eta = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\hat{M}\right) = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22});$$

The first Chebyshev polynomials are

$$S_0(\eta) = 1, \quad S_1(\eta) = 2\eta; \quad S_2(\eta) = 4\eta^2 - 1$$

Subsequent polynomials may be obtained from the recurrence relation of Chebyshev polynomials [**?**]

$$S_m(\eta) = 2\eta S_{m-1}(\eta) - S_{m-2}(\eta) \tag{12}$$

Consider now a boundary value problem when the waveguide interfaces $x = 0, x = Nd$ and are tractions free

$$\tau_{01}(0) = \tau_{0N}(Nd) = 0 \tag{13}$$

In this case the following matrix equation can be imposed

$$\left(\hat{M}^{(\pm)}\right)^N \begin{pmatrix} u_{01}(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0N}(Nd) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Eq. (14) have a non-trivial solution if the following two alternative equations are satisfied

$$m_{21}(\theta) = 0 \tag{15}$$

$$S_{N-1}(\eta(\theta)) = 0 \tag{16}$$

From Eq.(14) besides of these equations it follows also that

$$u_{0N}(Nd) = (m_{11}S_{N-1} - S_{N-2})\, u_{01}(0); \tag{17}$$

Alongside with Eq. (14) one can consider the matrix equation such as

$$\left(\hat{M}^{(\pm)}\right)^n \begin{pmatrix} u_{01}(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0n}(nd) \\ \tau_{0n}(nd) \end{pmatrix} \tag{18}$$

and the relation between field vector values can be found as

$$u_{0n}(nd) = (m_{11}S_{n-1} - S_{n-2})\, u_{01}(0); \qquad n = 1, 2, 3...N \tag{19}$$

The roots of Eqs. (15,16) are curves in the phase plane (θ, kd), each point of which corresponds to a wave travelling in the wave guides.

If $m_{21}(\theta) = 0$ or $m_{12}(\theta) = 0$, then since $\hat{M}^{(\pm)}$ is a unimodular matrix $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$ it follows that $m_{11}m_{22} = 1$ and therefore $\eta = \left(\lambda + \lambda^{-1}\right)/2$, where $\lambda = m_{11}(\theta)$ Using recurrent relation Eq.(12) the following new relation can be shown for the Chebyshev polynomials of second kind:

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} = \lambda S_n(\eta) - S_{n-1}(\eta) = \lambda \left((\lambda + \lambda^{-1})S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta)\right) - S_{n-1}(\eta) = \\
= \lambda \left(\lambda S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta)\right)
\end{aligned}
$$

which can be rewritten as

$$P_{n+1} = \lambda P_n \tag{20}$$

where $P_n = (\lambda S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta))$

Taking into account that $P_1 = \lambda, (S_0(\eta) = 1, S_{-1}(\eta) = 0)$ the following identity can be obtained valid for all integers starting from $n = 1$,

$$P_n = \lambda^n \tag{21}$$

Hence it follows from Eqs.(19,21) that for frequencies $\theta = \theta_0$, where $\theta = \theta_0$ are the roots of the equation $m_{21}(\theta) = 0$, we have

$$u_{0n}(nd) = \lambda^n u_0(0); \qquad n = 1, 2...N \tag{22}$$

Therefore Eq. (22) shows that at frequencies $\theta = \theta_0$, localisation of elastic shear displacements may take place at the top or bottom interfaces of the periodic waveguide if $m_{11}(\theta) \neq m_{22}(\theta)$.

Another possible case is $S_{N-1}(\eta(\theta)) = 0$. This equation has $N - 1$ roots in the range $\eta \in (-1, 1)$ which are given by $\eta_m(\theta) = \cos\left(m\pi N^{-1}\right), m = 1, 2...N - 1$

Taking into account that in this case $S_{N-2}(\eta_m) = (-1)^m$ one can write

$$u_{0n}(nd) = (-1)^m u_{01}(0); \qquad n = 1, 2......N \tag{23}$$

This means that $N-1$ shear wave normal modes exist where amplitudes of guided waves are distributed along the waveguide width and have the same magnitude at the top and the bottom interfaces.

When the top and bottom faces of the waveguide are clamped

$$u_0(0) = u_0(Nd) = 0$$

Eqs. (15,21) should be replaced by the following equations:

$$m_{12}(\theta) = 0 \tag{24}$$

$$
\begin{aligned}
&S_{N-1}(\eta(\theta)) = 0 \\
&\tau_{0n}(nd) = \lambda^{-n} \tau_{01}(0)
\end{aligned}
$$

In this case the localization of the elastic shear stresses takes place at the top or bottom interfaces when $m_{12}(\theta_0) = 0$ if $m_{11}(\theta_0) \neq m_{22}(\theta_0)$.

Here are also $N-1$ normal modes distributed along the waveguide width and have the same magnitude of stresses at the top and the bottom interfaces which follows from the following relation:

$$\tau_{0n}(nd) = (-1)^m \tau_{01}(0); \qquad n = 1, 2......N \tag{25}$$

Thus two different families of vibrational modes exist in the inhomogeneous waveguide for both traction free and clamped the top and bottom interfaces . One is a localized mode which exists only when $m_{11}(\theta_0) \neq m_{22}(\theta_0)$, where θ_0 are the roots of $m_{21}(\theta_0) = 0$ or$m_{21}(\theta_0) = 0$. There are also another $N-1$ normal non-localised vibration modes at frequencies defined by $S_{N-1}(\eta(\theta)) = 0$.

Results and discussions

In this section attention is restricted to some specified inhomogeneity functions. In the first example, the inhomogeneity function are quadratic functions

$f_n^{(+)}(x) = (1 + b(x - d(n-1)))^2$ At the Fig.2 the profiles of quadratic functions $f_n^{(+)}(x)$ in the elementary cells $n = 1, 2, 3, 4$ are presented for different values of inhomogeneity parameter $\beta = bd$, $\beta = 1; \beta = -0.7, \beta = -2$

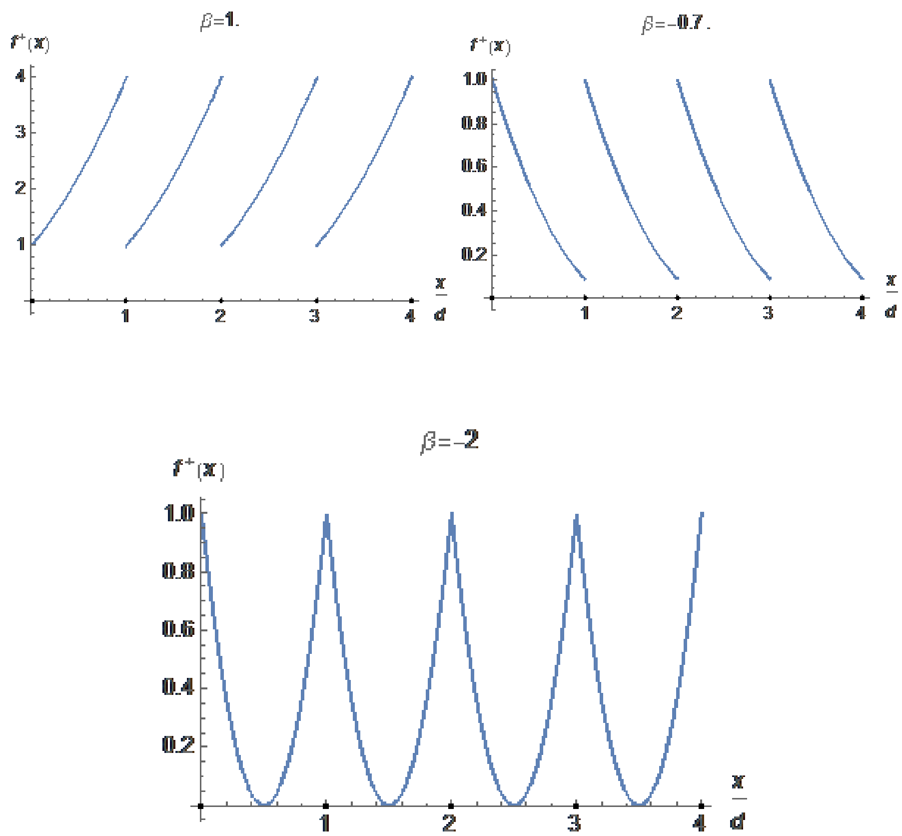


Fig. 2: Profiles of quadratic function $f_n^{(+)}(x)$)

Let note that the inhomogeneous quadratic function when $\beta = -2$ is the symmetric function $f_n^{(+)}((n-1)d + x) = f_n^{(+)}(nd - x), \qquad x \in (0, d/2\ )$.

For quadratic functions $f_{n0}^{(+)}(x)$ the transfer matrix $\hat{M}^{(+)}$ can be found as

$$\hat{M}^{(+)} = \begin{pmatrix} \frac{Z\cos Z + \beta \sin Z}{Z(1+\beta)} & \frac{d \sin Z}{\mu_0 Z(1+\beta)} \\ \frac{\mu_0}{d}\left(Z\beta^2 \cos Z - \left(\beta^2 + Z^2(1+\beta)\sin Z\right)\right) & (1+\beta)\cos Z - \frac{\beta}{Z}\sin Z \end{pmatrix} \tag{26}$$

where $Z = \sqrt{\theta^2 - (kd)^2}$ is a dimensionless parameter.

From Eqs. (26) it follows that when $\beta = -2$ then $m_{11}(\theta) = m_{22}(\theta)$ and therefore localization does not take place. For inhomogeneous quadratic function when $\beta \neq -2$ localization of guided wave amplitudes takes place at eigen frequencies determining from equations $m_{21}(\theta_0) = 0$or $m_{12}(\theta_0) = 0$. The eigen frequencies of the waveguide with clamped interfaces determines from equation

$$\sin Z = 0; \qquad \theta_0 = \sqrt{(kd)^2 + \pi^2 m^2}. \tag{27}$$

At these frequencies the localization coefficient $|\lambda| = |1 + \beta|$ is a monotonically decreasing function in interval $\beta \in (-\infty, -1)$ and a monotonically increasing function in interval $\beta \in (-1, \infty)$.

In the interval $\beta \in (-2, 0)$ we have $|\lambda| < 1$, outside of this interval $|\lambda| > 1$.

The eigen frequencies of waveguide with traction free interfaces determines from equation

$$\beta^2 \cos Z - \left(\beta^2 + Z^2(1+\beta)\sin Z\right) = 0 \tag{28}$$

The graphs of localization coefficients for traction free waveguide are presented on the Fig.3 .

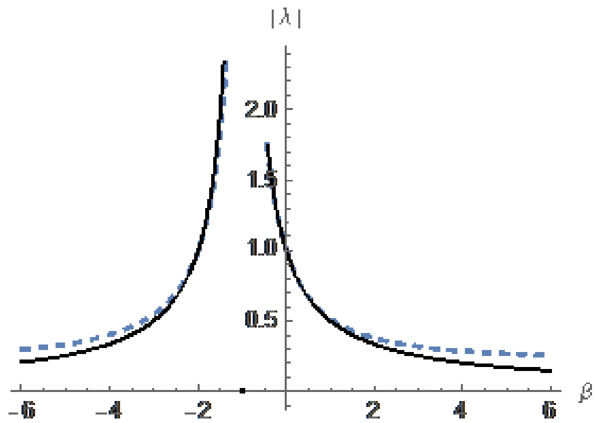


Fig. 3: Localization coefficient of shear stresse wave amplitudes for quadratic function.

As it follows from data of Fig.3 the localization coefficient weakly depends from eigen frequencies θ_0.

Contrary to the above case for waveguide with traction free interfaces In the interval $\beta \in (-2, 0)$, $|\lambda| > 1$, outside of this interval $|\lambda| < 1$.

When $|\lambda| < 1$, in the traction free or clamped waveguide with quadratic periodic inhomogeneity one can state that the amplitudes of guided waves attenuate from the waveguide bottom interface to the top interface with increasing of cell numbers. When $|\lambda| > 1$ the amplitudes of guided waves attenuate from the waveguide top interface to the bottom interface. In the second example, the inhomogeneity functions are inverse quadratic functions .

$$f_{n0}^{(-)}(x) = (1 + b(x - d(n-1)))^{-2}$$

In the Fig.4 the profiles of the inverse quadratic functions $f_n^{(-)}(x)$ in the elementary cells $n = 1, 2, 3, 4$ are presented for different values of inhomogeneity parameter $\beta = bd$, $\beta = 1$; $\beta = -0.8$, $\beta = -2$

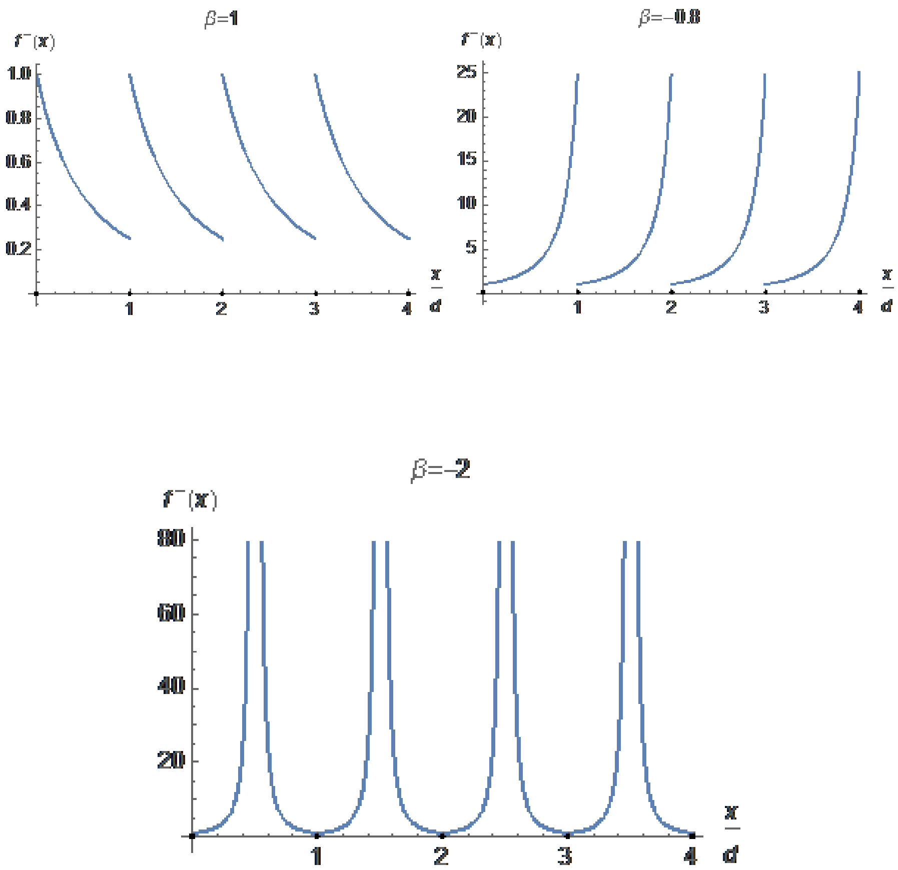


Fig. 5: Profiles of inverse quadratic function $f_n^{(-)}(x)$)

Corresponding to the inverse quadratic function $f_{n0}^{(-)}(x)$ the transfer matrix $\hat{M}_{(-)}$

can be found as

$$\hat{M}^{-} = \begin{pmatrix} (1+\beta)\cos Z - \frac{\beta}{Z}\sin Z & \frac{d}{\mu_0 Z^3}\left(Z\beta^2\cos Z - \left(\beta^2 + Z^2(1+\beta)\sin Z\right)\right) \\ \frac{\mu_0 Z \sin Z}{d(1+\beta)} & \frac{Z\cos Z + \beta \sin Z}{Z(1+\beta)} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Juxtaposition of the matrix $\hat{M}^{-}$ with matrix $\hat{M}^{+}$ leads to the conclusion that contrary to quadratic function case Eq.(27) determines eigen frequencies for waveguide with traction free interfaces and Eq.(28) determines eigen frequencies for waveguide with clamped interfaces.

Therefore we can state in the case of inverse quadratic function inhomogeneity the results concerning localization effects for clamped /free traction waveguide coincides with results of traction free /clamped waveguide with quadratic function inhomogeneity.

Conclusion

Based on an exact analytical approach and transfer matrix technique a localization of shear elastic wave is established in waveguide consisting of periodically repeated perfectly bonded inhomogeneous identical of finite numbers unit cells. For a special class of inhomogeneity functions admitting exact solutions, relationships are established between elastic displacements of the top and bottom interfaces of the waveguide when these interfaces are traction free. When they are clamped a relationship is established between tangential stresses on these interfaces. It is shown the localization of guided waves are take place in the traction free or clamped waveguide with quadratic and inverse quadratic non symmetrical periodic inhomogeneity. In the case of inverse quadratic function inhomogeneity the results concerning localization effects for clamped /free traction waveguide coincides with results of traction free /clamped waveguide with quadratic function inhomogeneity. The localization of waves significantly increases with the numbers of the waveguide unit cells. It is shown also that the waveguide with inhomogeneous cells of which are symmetrical periodic quadratic and inverse functions do not support wave localization.

References

[1] R.M. Mahamood, E.T. Akinlabi, M. Shukla, S. Pityana, Functionally Graded Material: An Overview, Proceedings of the World Congress on Engineering, London, UK, 2012, vol. 3, pp. 35-41. http://hdl.handle.net/10204/6548

[2] V. Birman, L.W. Byrd, Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures, Applied Mechanics Reviews, vol.60, 2007, pp. 195-215.

[3] S.N. Bhattacharya, Exact solution of SH wave equation in transversely isotropic inhomogeneous elastic media, Pure and Appl. Geophysics, vol. 93, 1972, pp. 19-75

[4] М.В. Белубекян, Об условиях существования волн Лява с неоднородным слоем, Изв. АН Армении. Механика, Т. 44, №3, 1991 с. 7-10,

[5] М.В. Белубекян, А.Р. Мухсихачоян, Сдвиговая поверхностная волна в слабонеоднородных упругих телах, Акуст. Ж., Т.42, №2, 1996, с.179-182,

[6] З. Данoян, Л. Атоян, С. Саакян, Н. Даноян, Волны типа Лява в слоистой структуре, состоящей из двух однородных полупространств с неоднородными слоями, соединённых однородным слоем, Известия НАН Армении, Механика, Т.67,3, 2014, с. 49-55.

[7] K.B. Ghazaryan, D.G. Piliposyan, Love Waves in a Structure with an Inhomogeneous layer, NAS RA, v. 111, , 2011, pp. 138-147.

[8] G.A. Maugin, Elastic surface waves with transverse horizontal polarization, Adv. Appl. Mech., vol. 23, 1983, pp. 373–434. DOI:10.1016/S0065-2156(08)70246-1

[9] D. Hasanyan, G. Piliposian, A. Kamalyan, M.Karakhanyan, Some dynamic problems for elastic materials with functional inhomogeneities anti-plane deformations. 2003, Continuum Mech. Thermodynamics. 15, 519–527., https://dx.doi.org/10.1007/s00161-003-0130-8

[10] B.Collet, M.Destrade, G.Maugin, Bleustein–Gulyaev waves in some functionally graded materials, European Journal of Mechanics A/Solids, 25 (2006) p.695–706.

[11] Mei, C., Li, L., Tang, H., Han, X., Wang, X., & Hu, Y. Broadening band gaps of shear horizontal waves of metamaterials via graded hierarchical architectures. (2021) Composite Structures, 271, p.114118. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114118

[12] Han, X., & Liu, G. R. (2003). Elastic waves in a functionally graded piezoelectric cylinder. Smart Materials and Structures, 12(6), 962, https://doi.org/10.1088/0964-1726/12/6/014

[13] А.С. Аветисян, Поверхностные электроупругие волны Лява в случае неоднород-ного пьезоэлектрического слоя, Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, №1, с. 24-29

[14] Liu, J., X. S. Cao, and Z. K. Wang. "Propagation of Love waves in a smart functionally graded piezoelectric composite structure."Smart materials and structures 16, no. 1 (2006), https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/1/002

[15] А.С. Аветисян, А.А. Камалян, О распространении электроупругого сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое класса 6мм, Докл.НАН Армении, 114, 2, 2014, с. 108- 115,

[16] А. Камалян, О распространении и поведении электроупругой волны в пьезоди-электрике в зависимости от неоднородности, Изв. НАН Армении, Механика, 66, 4, 2014, с. 38-48 .

[17] A.Avetisyan, A. Kamalyan, A. Hunanyan, Features of localization of wave energy at rough surfaces of piezodielectric waveguide, Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 2017,70 (1), 40-63. DOI:10.33018/70.1.3

[18] Cao, X., Jin, F., Jeon, I., & Lu, T. J. (2009). Propagation of Love waves in a functionally graded piezoelectric material (FGPM) layered composite system. International Journal of Solids and Structures, 46(22-23), 4123-4132. http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.08.005

[19] Qian, Z. H., Jin, F., Lu, T., & Kishimoto, K. (2009). Transverse surface waves in a layered structure with a functionally graded piezoelectric substrate and a hard dielectric layer. Ultrasonics, 49(3), 293-297. https://doi.org/10.1016/j.ultras.2008.10.004

[20] A.Avetisyan, (2019). The Mixed Boundary Conditions Problem of Layered Composites with Meta-Surfaces in Electro Elasticity. In Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials (pp. 73-96). Springer, Cham.

[21] A.Avetisyan, V. Khachatryan Propagation of hybrid electro elastic waves in transversally inhomogeneous periodic piezoelectric structure. Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics 2020,73 (1), 1-17,http://doi.org/10.33018/73.1.1

[22] A. Srivastava, Metamaterial properties of periodic laminates, Journal of the mechanics and physics of solids, 96 (2016) 252–263. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.018.A.

[23] 23. A. Tovar, L. W. Casperson, Generalized Sylvester theorems for periodic applications in matrix optics, J. Opt. Soc. Am. A 12 (3) (1995) 578–590, https://doi.org/10.1364/JOSAA.12.000578

Сведения об авторах:

Казарян Карен Багратович - *главный научный сотрудник ин-та Механики НАН Армении. Тел.: +37499 227395, Email - ghkarren@gmail.com,*

Казарян Рафаэль Аракелович - *научный сотрудник ин-та Механики НАН Армении. Тел.: +37499 396344, Email- rafaelghazaryan52@gmail.com,*

Терзян Саркис Арутюнович - *научный сотрудник ин-та Механики НАН Армении. Тел.: +37499 340432, Email - sat_and_21@yahoo.com.*

Received 17.10.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, №4, 2021 Механика

ГОДИЧНОЕ СОДЕРЖАНИЕ 2021 г., том 74

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, №4, 2021 Механика

СОДЕРЖАНИЕ 2021 г., том 74 №4

CONTENTS 2021, v. 74 №4

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2021, h.74 №4