

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԵՆԻԱԿԱՆ ԳԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
ЕХАНИКА
MECHANICS

2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS

Издаётся с января 1966 года

Համար

Том 74 3 2021

Volume



ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ГИТУТЮН» НАН РА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Հակոբյան Վ.Ն. (գլխավոր խմբագիր), Սահակյան Ա.Վ. (գլխավոր խմբագրի տեղակալ), Աղալովյան Լ.Ա., Ավետիսյան Ա.Ս., Ավետիսյան Վ.Վ., Բաղդասարյան Գ.Ե., Բելուբեկյան Մ.Վ., Ղուկասյան Ա.Ա., Մխիթարյան Ս.Մ., Սարգսյան Ս.Հ.

ՄԻՋԱԶԳԱՅԻՆ ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԽՈՐՀՈՒՐԴ

Ալտենբախ Հ. (Գերմանիա), Գաչկևիչ Ա.Ռ. (Ուկրաինա), Գորյաչևա Ի.Գ. (Ռուսաստան), Հասանյան Դ.Զ. (ԱՄՆ), Կապլունով Յու.Դ. (Մեծ Բրիտանիա), Կուդիշ Ի.Ի. (ԱՄՆ), Շավլակաձե Ն.Ն. (Վրաստան), Մարզոկա Պ. (ԱՄՆ), Սեյրանյան Ա.Պ. (Ռուսաստան), Սումբատյան Մ.Ա. (Ռուսաստան), Վատուլյան Ա.Ն. (Ռուսաստան)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Акопян В.Н. (главный редактор), Саакян А.В. (зам. главного редактора), Аветисян А.С., Аветисян В.В., Агаловян Л.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В., Гукасян А.А., Мхитарян С.М., Саркисян С.О.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Альтенбах Х. (Германия), Асаян Д.Дж. (США), Ватулян А.О. (Россия), Гачкевич А.Р. (Украина), Горячева И.Г. (Россия), Каплунов Ю.Д. (Великобритания), Кудиш И.И. (США), Шавлакадзе Н.Н. (Грузия), Марзока П. (США), Сейранян А.П. (Россия), Сумбатян М.А. (Россия),

EDITORIAL BOARD

Hakobyan V.N. (editor-in-chief), Sahakyan A.V. (associate editor), Aghalovyan L.A., Avetisyan A.S., Avetisyan V.V., Bagdasaryan G.E., Belubekyan M.V., Ghukasyan A.A., Mkhitaryan S.M., Sarkisyan S. H.

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Altenbach H. (Germany), Gachkevich (Ukraine), Goryacheva I.G. (Russia), Hasanyan D.J. (USA), Kaplunov J.D. (UK), Kudish I.I. (USA), Shavlakadze N.N. (Georgia), Marzocca P. (USA), Seyranyan A.P. (Russia), Sumbatyan M.A. (Russia), Vatulyan A.H. (Russia)

Технический редактор: Геворкян Г.З., Ответственный секретарь: Авдалян Ж.А.

E-mail: journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech

Հայաստանի	Республика Армения,	24/2, Baghramyan Ave.
Հանրապետություն, Երևան,	Ереван, 0019	Yerevan 0019
0019 Բաղրամյան պող. 24/2,	пр. Баграмяна 24 /2,	Republic of Armenia
Հեռ. 52-48-02	Тел. 52-48-02	Tel. 52-48-02

Сдано в производство 07.07.2021 г.
Формат 70 x 100 $\frac{1}{16}$. Печ. лист – 4 $\frac{7}{8}$
Заказ № 1105. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
СОСТАВНОГО ПРОСТРАНСТВА С КРУГОВОЙ
ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ**

В.Н. Акопян, А.А. Амирджанян

Ключевые слова: осесимметричные смешанные задачи, межфазная трещина, межфазное включение, контактная задача

В работе построено точное решение задачи об осесимметричном напряженном состоянии составного упругого пространства, состоящего из двух разнородных полупространств, на плоскости стыка которых имеется круговая дискообразная трещина, на одном берегу которой заданы напряжения, а в другой берег вдавливается гладкий штамп (шайба). Выведена определяющая система уравнений задачи, которая при помощи операторов вращения сведена к системе сингулярных интегральных уравнений и построено её точное решение. Получены простые формулы как для определения нормальных контактных напряжений под штампом, так и для контактных напряжений на стыке разнородных полупространств.

**Axisymmetric mixed boundary problem for a composite space with a
circular disc-shaped crack**

V.N. Hakobyan, H.A. Amirjanyan

Keywords: axisymmetric mixed problems, interfacial crack, interfacial inclusion, contact problem

An exact solution to the problem of the axisymmetric stress state of a composite elastic space consisting of two dissimilar half-spaces with a circular disc-shaped crack on interface plane is constructed in this work. On one side of the crack, known stresses are acting, and a smooth stamp is pressed on the other side. Defining system of equations for the problem is derived, which, using rotation operators, is reduced to solving a system of singular integral equations, and its exact solution is constructed. Simple formulas are obtained both for determining the normal contact stresses under the stamp and for the contact stresses at the junction plane of dissimilar half-spaces.

Keywords: axisymmetric mixed problems, interfacial crack, interfacial inclusion, contact problem

**Առանցքահամաչափ խառը եզրային խնդիր շրջանային սկավառակաձև ճաք
սկալոնակող բաղադրյալ փարածության համար**

Վ.Ն.Հակոբյան, Հ.Ա.Ամիրջանյան

Նիսնաբաեր՝ առանցքահամաչափ խառը եզրային խնդիր, միջֆազային ճաք, միջֆազային ներդրակ, կոն-
տակտային խնդիր

Աշխատանքում կառուցված է երկու փարբեր կիսափարածություններից կազմված բաղադրյալ փարածու-
թյան առանցքահամաչափ լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ նրանց միացման
հարթության մեջ կա շրջանային սկավառակաձև ճաք, որի ափերից մեկին սկզբում են լարումներ, իսկ մյուս

ափին սեղմվում է հարթ հիմքով ողորկ դրոշմ: Դուրս են բերված խնդրի որոշիչ հավասարումների համակարգը, որը պարման օպերատորների օգնությամբ հանգեցված է սինգուլյար ինֆեզրալ հավասարումների համակարգի և կառուցված է նրա ճշգրիտ լուծումը: Սրացված են պարզ բանաձևեր ինչպես դրոշմի փակ գործող նորմալ լարումների, այնպես էլ փարատեռ կիսափարածությունների միացման հարթության մեջ գործող կոնփակփային լարումների համար:

Введение

Одним из важных направлений контактных и смешанных задач теории упругости и механики разрушения является не только определение локальных полей напряжений, возникающих вокруг концентраторов напряжений различных типов, одновременно находящихся в деформируемых однородных или составных телах, моделирующих те или иные конструкции, но и выявление закономерностей взаимовлияния этих концентраторов и разработка методов для понижения градиентов этих полей, что приведет к повышению прочности и долговечности этих конструкций и их деталей.

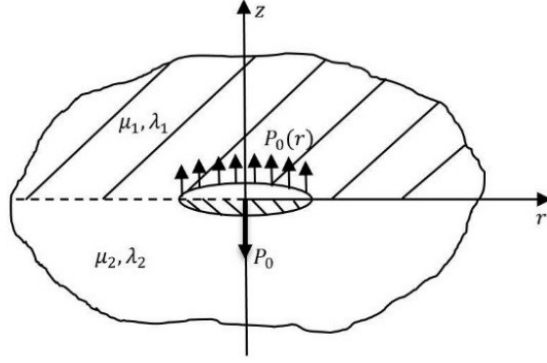
Многие результаты в этом направлении приведены в монографиях [1–6]. Работы в указанном направлении, в основном, посвящены изучению плоских и осесимметричных полей напряжений в однородных и кусочно-однородных массивных телах с концентраторами напряжений типа штампов, трещин и полностью или частично сцепленных с матрицей абсолютно жестких включений. В частности, укажем на работы [7–12], где построены точные решения ряда плоских и осесимметричных задач для кусочно-однородной плоскости и пространства с межфазными, частично оторванными от матрицы, включениями. Особо отметим работу [7], где построено замкнутое решение первой осесимметричной задачи для однородного пространства, содержащего круговую дискообразную трещину, на берегах которой заданы условия смешанного типа. Укажем также на работу [11], где построены разрывные решения уравнений осесимметричной теории упругости для кусочно-однородного пространства с круговой дискообразной трещиной.

Здесь же, на основе этих уравнений, рассматривается осесимметричное напряженное состояние кусочно-однородного пространства с межфазной круговой дискообразной трещиной, в один берег которой вдавливается гладкий штамп (абсолютно жесткая шайба).

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть упругое составное пространство, состоящее из двух разнородных полупространств с коэффициентами Ляме λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 , заполняющих в цилиндрической системе координат соответственно верхнее ($z \geq 0$) и нижнее ($z \leq 0$) полупространства, на плоскости стыка которых ($z = 0$) имеется монетообразная межфазная трещина с радиусом a , на нижний берег которой при помощи сосредоточенной силы P_0 вдавливается гладкий штамп с плоским основанием, а

на верхний берег действует распределённая нагрузка интенсивности $p_0(r)$ с равнодействующей, равной P_0 . На Фиг. 1 приведено осевое сечение составного пространства.



Фиг. 1

Ставится задача определить контактные напряжения, действующие как на стыке полупространств, так и на нижнем берегу трещины, а также их коэффициенты интенсивности в концевых точках трещины.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} u_1(r, 0) = u_2(r, 0); & w_1(r, 0) = w_2(r, 0); \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0); & \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) \end{cases} \quad (a < r < \infty), \quad (1.a)$$

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = -p_0(r); & \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0; \\ \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0; & w_2(r, 0) = -\delta; \end{cases} \quad (0 < r < a). \quad (1.b)$$

Здесь $w_j(r, z)$ и $u_j(r, z)$ ($j = 1, 2$) - нормальные и радиальные компоненты перемещений соответственно для верхнего и нижнего полупространств в цилиндрической системе координат, удовлетворяющие каждая в своей области определению уравнениям Ляме, $\sigma_z^{(j)}(r, z)$ и $\tau_{rz}^{(j)}(r, z)$ нормальные и касательные компоненты напряжений, а δ - нормальное жесткое смещение штампа.

Чтобы построить решение граничной задачи (1) используем разрывные решения для составного пространства с круговой дискообразной трещиной, полученные в [6, 11].

Используя указанные решения и сохраняя все обозначения, удовлетворим условиям (1.b). В итоге, придем к следующей определяющей системе из трех интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} b_1 L_{0,1}^1[u] + b_0 L_{0,0}^1[w] + d_1 L_{0,0}^0[\sigma] &= \Delta\delta; \\ b_2 L_{0,1}^2[u] + b_3 L_{0,0}^2[w] + b_0 L_{0,0}^1[\sigma] &= -\Delta p_0(r); \quad (0 < r < a) \\ b_3 L_{1,1}^2[u] + b_2 L_{1,0}^2[w] + b_1 L_{1,0}^1[\sigma] &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

которую нужно рассматривать при условиях равновесия штампа и непрерывности смещений на окружности $r = a$:

$$\int_0^a \sigma(r) r dr = 0; \quad u(a) = w(a) = 0 \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} w(r) &= w_1(r, 0) - w_2(r, 0); \quad u_1(r, 0) - u_2(r, 0) = u(r); \quad (0 < r < a), \\ \sigma(r) &= \sigma_z^{(1)}(r, 0) - \sigma_z^{(2)}(r, 0); \quad \tau(r) = \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) - \tau_{rz}^{(2)}(r, 0); \quad (0 < r < a) \\ L_{m,n}^k[\varphi] &= \int_0^a W_{m,n}^k(r, \xi) \varphi(\xi) d\xi; \quad W_{m,n}^k(r, \xi) = \int_0^\infty t^k J_m(tr) J_n(t\xi) dt; \\ b_2 &= 2 \left(\theta_1^{(1)} b_0 + \theta_2^{(1)} b_1 - \theta_1^{(1)} \Delta \right); \quad b_3 = 2 \left(\theta_1^{(1)} b_1 + \theta_2^{(1)} b_0 - \theta_2^{(1)} \Delta \right); \\ \theta_1^{(j)} &= \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad \theta_2^{(j)} = \frac{\mu_j (\lambda_j + 2\mu_j)}{\lambda_j + 3\mu_j} \quad (j = 1, 2), \\ d_0 &= \frac{\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}}{2}; \quad d_1 = \frac{\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(1)}}{2}; \quad b_0 = \theta_2^{(1)} (\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}) - \theta_1^{(1)} (\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}); \\ b_1 &= \theta_1^{(1)} (\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}) - \theta_2^{(1)} (\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}); \\ \Delta &= \left[(\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(1)})^2 - (\theta_1^{(2)} - \theta_1^{(1)})^2 \right]. \end{aligned}$$

Чтобы решить систему интегральных уравнений (2), следуя работе [11], приведем ее к системе сингулярных интегральных уравнений. Для этого введем новые неизвестные функции по формулам

$$w_*(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^a \frac{\xi w(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi; \quad \sigma_*(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^a \frac{\xi \sigma(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi; \quad u_*(t) = \frac{2t}{\pi} \int_t^a \frac{u(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi \quad (4)$$

и продолжим функции $\sigma_*(t)$ и $w_*(t)$ на интервал $(-a, 0)$ четным образом, а функцию $u_*(t)$ — нечетным образом, т.е. пусть $w_*(-t) = w_*(t)$, $u_*(-t) = -u_*(t)$, $\sigma_*(-t) = \sigma_*(t)$. Далее, применяя к обеим сторонам первых двух уравнений оператор I , а последнего уравнения — оператор I_1 ,

$$I(\varphi(x)) = \int_0^x \frac{\varphi(r) r dr}{\sqrt{x^2 - r^2}}; \quad I_1(\varphi(x)) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y \varphi(r) dr,$$

используя значение некоторых известных интегралов, приведенных в [11], дифференцируя первое уравнение по x , продолжая первое и последнее из полученных уравнений на интервал $(-a, 0)$ четным образом, а второе уравнение — нечетным образом, после некоторых выкладок, систему (2) представим в виде следующей

системы сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\pi d_1}{2} \sigma_*(x) + \frac{\pi b_1}{2} u'_*(x) - \frac{b_0}{2} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t-x} dt &= \Delta \delta; \\ \frac{\pi b_3}{2} w'_*(x) + \frac{b_0}{2} \int_{-a}^a \frac{\sigma_*(t)}{t-x} dt + \frac{b_2}{2} \int_{-a}^a \frac{u'_*(t)}{t-x} dt &= \Delta f(x); \quad (-a < x < a) \quad (5) \\ \frac{\pi b_1}{2} \sigma_*(x) + \frac{\pi b_3}{2} u'_*(x) - \frac{b_2}{2} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t-x} dt &= \Delta C_*. \end{aligned}$$

Условия (3), при этом, записываются следующим образом:

$$\int_{-a}^a u'_*(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a w'_*(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a \sigma_*(x) dx = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(x) &= I[p_0(r)]; \quad C_* = \frac{\pi b_1}{2\Delta} \sigma_*(0) + \frac{\pi b_3}{2\Delta} u'_*(0) + \frac{b_2}{2\Delta} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t} dt; \\ \Delta &= \left[\left(\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\theta_1^{(2)} - \theta_1^{(1)} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Решение определяющей системы уравнений

Приступим к решению определяющей системы (5) при условиях (6). Для этого из первого и последнего уравнений (5) исключая функцию $w'_*(x)$, найдем

$$\sigma_*(x) = 2 \frac{\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2}{\vartheta_1^{(1)}} u'_*(x) - \frac{2(b_2 \delta - b_0 C_*)}{\vartheta_1^{(1)} \vartheta_2^{(2)} \pi}. \quad (7)$$

Интегрируя полученное соотношение на интервале $(-a, a)$ и учитывая условия (6), найдем:

$$b_2 \delta - b_0 C_* = 0. \quad (8)$$

Подставляя полученное выражение для $\sigma_*(x)$ в первое и во второе уравнения (5), для определения приведенных дислокаций смещений получим следующую

систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} u'_*(x) - \frac{\alpha_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t-x} dt = A\delta; \\ w'_*(x) - \frac{\beta_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'_*(t)}{t-x} dt = Bf(x), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_2^{(1)}}; \quad \beta_1 = -\frac{\vartheta_1^{(1)}b_2 + 2b_0 \left(\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right)}{\vartheta_1^{(1)}b_3}; \quad A = \frac{2\Delta\alpha_1}{\pi b_0}; \quad B = \frac{2\Delta}{\pi b_3}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\beta_1 \neq 0$. Вводя новые неизвестные функции $\varphi_j(x) = u'_*(x) + \lambda_j w'_*(x)$ ($j = 1, 2$), систему уравнений (9) запишем в виде двух независимых сингулярных интегральных уравнений:

$$\varphi_j(x) + \frac{q_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds = g_j(x) \quad (-a < x < a; \quad j = 1, 2), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \lambda_j &= (-1)^j \sqrt{\alpha_1/\beta_1} = (-1)^j \lambda; \quad q_j = (-1)^{j+1} \sqrt{\alpha_1\beta_1} = (-1)^{j+1} q; \\ g_j(x) &= A\delta + \lambda_j Bf(x). \end{aligned}$$

При этом условия (6) примут вид:

$$\int_{-a}^a \varphi_j(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (11)$$

Сначала рассмотрим случай, когда q — действительное положительное число. В этом случае решения уравнений (10) будут следующие [6]:

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1+q_j^2} \left[g_j(x) + \frac{q_j X_j^+(x)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g_j(s) ds}{X_j^+(s)(s-x)} \right] \quad (-a < x < a; \quad j = 1, 2) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} X_j(z) &= \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{\gamma_j}; \quad X_j^+(x) = \sqrt{G_j} \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^{\gamma_j} = \sqrt{G_j} \omega_j(x); \\ \gamma_j &= (-1)^{j+1} \gamma; \quad \gamma = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2q}{1-q^2} & (q < 1) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2q}{1-q^2} & (q > 1) \end{cases}; \quad G_j = \frac{1 - (-1)^{j+1} i q}{1 + (-1)^{j+1} i q}. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь, как и в [6], ввиду энергетических соображений в тех

концевых точках, где показатель особенности больше $1/2$, взято ограниченное решение. Подставляя значения функции $g_j(x)$ в (12) и учитывая интегральное соотношение [14]:

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+s}{a-s} \right)^\gamma \frac{ds}{s-x} = \frac{\pi}{\sin \pi \gamma} \left[1 - \cos \pi \gamma \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\gamma \right] \quad (|x| < a; |\operatorname{Re} \gamma| < 1).$$

Найдем

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1+q_j^2} \left[\lambda_j B f(x) - \frac{\delta q_j \omega_j(x)}{\sin \pi \gamma_j} + \frac{\lambda_j q_j B \omega_j(x)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\omega_j(s)(s-x)} \right].$$

Удовлетворяя условиям (11), для жесткого смещения штампа получим следующее выражение

$$\delta = -\frac{\lambda_j B \sin \pi \gamma_j}{2\pi a \gamma_j A} \int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\omega_j(s)},$$

а для C_* будем иметь следующую формулу:

$$C_* = \frac{\lambda_j b_2 B \sin \pi \gamma_j}{2\pi a b_0 \gamma_j A} \int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\omega_j(s)}.$$

Далее, для компонентов дислокации смещений по формулам

$$w'_*(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad u'_*(x) = \frac{\lambda_1 \varphi_2(x) - \lambda_2 \varphi_1(x)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

найдем:

$$w'_*(x) = \frac{B}{1+q^2} \left\{ f(x) + \frac{A\delta q [\omega(x) - \omega(-x)]}{2\lambda B \sin \pi \gamma} + \frac{q}{2\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{\omega(x)}{\omega(s)} - \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)} \right] \frac{f(s) ds}{s-x} \right\}$$

$$u'_*(x) = -\frac{Aq}{2(1+q^2)} \left\{ \frac{\delta [\omega(x) + \omega(-x)]}{\sin \pi \gamma} + \frac{\lambda B}{A\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{\omega(x)}{\omega(s)} + \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)} \right] \frac{f(s) ds}{s-x} \right\};$$

$$\left(\omega(x) = \omega_1(x) = \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\gamma; \quad \omega_2(x) = \omega(-x) \right)$$

Следовательно из (7) для скачка приведенных нормальных напряжений получим:

$$\begin{aligned}\sigma_*(x) &= \frac{2 \left[\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right]}{\vartheta_1^{(1)}} u'_*(x) = \\ &= - \frac{Aq \left[\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right]}{\vartheta_1^{(1)} (1 + q^2)} \left\{ \frac{\delta [\omega(x) + \omega(-x)]}{\sin \pi \gamma} + \frac{\lambda B}{A\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{\omega(x)}{\omega(s)} + \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)} \right] \frac{f(s) ds}{s - x} \right\}.\end{aligned}$$

В частном случае, когда $p_0(r) = P_0/\pi a^2 = \text{const}$,

$$f(x) = \frac{P_0}{\pi a^2} \int_0^x \frac{r dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} = - \frac{P_0}{\pi a^2} \sqrt{x^2 - r^2} \Big|_0^x = \frac{P_0}{\pi a^2} x.$$

Тогда, используя значения интеграла

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\omega_j(x)} = \int_{-a}^a \left(\frac{a-x}{a+x} \right)^{\gamma_j} dx = \frac{2\pi a \gamma_j}{\sin \pi \gamma_j},$$

найдем

$$\int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\omega_j(s)} = - \frac{2P_0 \gamma_j^2}{\sin \pi \gamma_j}.$$

Следовательно, в указанном случае, для жесткого смещения штампа получим выражения

$$\delta = \frac{\lambda_j \gamma_j B P_0}{\pi a A} = - \frac{\lambda \gamma B P_0}{\pi a A}, \quad (13)$$

а постоянная C_* будет даваться формулой:

$$C_* = - \frac{\lambda_j \gamma_j b_2 B P_0}{\pi a b_0 A} = \frac{\lambda \gamma b_2 B P_0}{\pi a b_0 A}.$$

При этом из (12), учитывая значение интеграла [14]

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\omega_j(s)(s-x)} &= \frac{P_0}{\pi a^2} \int_{-a}^a \frac{ds}{\omega_j(s)} + \frac{P_0}{\pi a^2} x \int_{-a}^a \frac{ds}{\omega_j(s)(s-x)} = \\ &= \frac{P_0}{a^2 \sin \pi \gamma_j} \left[2a \gamma_j - x + \frac{x \cos \pi \gamma_j}{\omega_j(x)} \right],\end{aligned}$$

для функций $\varphi_j(x)$ найдем выражение

$$\varphi_j(x) = \frac{q_j \omega_j(x)}{(1 + q_j^2) \sin \pi \gamma_j} \left[A_*^{(j)} - x B_*^{(j)} \right], \quad (14)$$

где

$$A_*^{(j)} = -\frac{P_0 B \lambda \gamma}{\pi a}; \quad B_*^{(j)} = (-1)^j \frac{P_0 B \lambda}{\pi a^2}.$$

А приведенные компоненты скачков дислокации смещений и нормальных напряжений будут даваться формулами:

$$\begin{aligned} u'_*(x) &= -\frac{P_0 B}{2\pi a^2 \vartheta_2^{(1)} (1+q^2) \sin \pi \gamma} \{a\gamma [\omega(x) + \omega(-x)] + x [\omega(x) - \omega(-x)]\}; \\ w'_*(x) &= \frac{P_0 B q}{2\pi a^2 (1+q^2) \sin \pi \gamma} \{a\gamma [\omega(x) - \omega(-x)] - x [\omega(x) + \omega(-x)]\}, \\ \sigma_*(x) &= \frac{\left(\vartheta_2^{(1)}\right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)}\right)^2}{\vartheta_1^{(1)}} u'_*(x) = -\frac{P_0 B \left[\left(\vartheta_2^{(1)}\right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)}\right)^2\right]}{2\pi \vartheta_2^{(1)} a^2 (1+q^2) \sin \pi \gamma} \times \\ &\quad \times \{a\gamma [\omega(x) + \omega(-x)] + x [\omega(x) - \omega(-x)]\}. \end{aligned}$$

Скачок истинных нормальных напряжений, действующих на берега трещины, определится по формуле обращения:

$$\sigma(r) = \sigma_z^{(1)}(r, 0) - \sigma_z^{(2)}(r, 0) = P(r) - p_0(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s \sigma_*(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds,$$

где $P(r) = -\sigma_z^{(2)}(r, 0)$ контактное давление под штампом. Следовательно, контактное давление на нижний берег трещины определится формулой:

$$\begin{aligned} P(r) &= p_0(r) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s \sigma_*(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \frac{P_0}{\pi a^2} + \frac{P_0 B \left[\left(\vartheta_2^{(1)}\right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)}\right)^2\right]}{2\pi \vartheta_2^{(1)} a^2 (1+q^2) \sin \pi \gamma} \times \\ &\quad \times \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s \{a\gamma [\omega(s) + \omega(-s)] + s [\omega(s) - \omega(-s)]\}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Для определения контактных напряжений на плоскости стыка разнородных полу-пространств вне области дискообразной трещины используем формулы, полученные в [6], в случае $\tau_*(t) = 0$. Тогда, учитывая полученные формулы для $u'_*(x)$, $w'_*(x)$ и $\sigma_*(x)$, после некоторых несложных выкладок, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(r, 0) &= -\frac{b_3}{\Delta r} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{t w'_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \\ &= -\frac{b_3 P_0 B}{2\pi a^2 (1+q^2) \sin \pi \gamma \Delta r} \frac{d}{dr} \int_{-a}^a \frac{t (a\gamma + t) \omega(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \quad (r > a), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) &= -\frac{b_1}{\Delta} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{\sigma_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{b_3}{\Delta} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{u'_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \\
&= \frac{\vartheta_2^{(1)} b_2 P_0 \lambda}{2\vartheta_1^{(1)} \pi^2 a^2 b_3 (1 + q^2) \sin \pi \gamma} \frac{d}{dr} \int_{-a}^a \frac{[a\gamma - t] \omega(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \quad (r > a).
\end{aligned} \tag{17}$$

Теперь, при помощи формул (16) и (17) определим коэффициенты разрушающих напряжений на окружности $r = a$. Для этого, используя значение интеграла [14]

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t-r} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \left[\left| \frac{r+a}{r-a} \right|^{\alpha-1} - 1 \right] \quad (|r| > a),$$

эти формулы представим в видах:

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(j)}(r, 0) &= \frac{aP_0}{\pi q^2 r} \left\{ \frac{2\gamma^2 + \gamma - 1}{(r-a)^{1/2+\gamma}(r+a)^{3/2-\gamma}} + \frac{\gamma+1}{(r-a)^{1/2}(r+a)^{3/2}} \right\} + \\
&+ \Phi_1(r) \quad (|r| > a),
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}^{(j)}(r, 0) &= \frac{\lambda(\gamma+1)\vartheta_2^{(1)} B_2 P_0}{\pi \vartheta_1^{(1)} q^2 b_3} \left\{ \frac{1}{(r-a)^{1/2+\gamma}(r+a)^{3/2-\gamma}} + \right. \\
&+ \left. \frac{\gamma+1}{(r-a)^{1/2}(r+a)^{3/2}} \right\} + \Phi_2(r) \quad (|r| > a).
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Phi_1(r) &= -\frac{P_0}{\pi^2 r (1 + q^2) \sin \pi \gamma} \frac{d}{dr} \int_{-a}^a \frac{[\psi_\sigma(t, r) - \psi_\sigma(a, r)] \omega(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}; \\
\Phi_2(r) &= \frac{\vartheta_2^{(1)} b_2 P_0 \lambda}{\vartheta_1^{(1)} \pi^2 a^2 b_3 (1 + q^2) \sin \pi \gamma} \frac{d}{dr} \int_{-a}^a \frac{[\psi_\tau(t, r) - \psi_\tau(a, r)] \omega(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}; \\
\psi_\sigma(t, r) &= t(a\gamma + t) \sqrt{\frac{r-t}{r+t}}; \quad \psi_\tau(t, r) = (a\gamma - t) \sqrt{\frac{r-t}{r+t}}.
\end{aligned}$$

Используя представления (18) и (19), для коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$ получим следующие формулы :

$$K_I(a) = \frac{\sqrt{2}(2\gamma^2 + \gamma - 1) P_0}{\sqrt{\pi} q^2 (2a)^{3/2-\gamma}}; \quad K_{II}(a) = \frac{\sqrt{2} \vartheta_2^{(1)} (\gamma+1) b_2 \lambda P_0}{\sqrt{\pi} q^2 \vartheta_1^{(1)} b_3 (2a)^{3/2-\gamma}}.$$

Отметим, что в случае, когда q — чисто мнимое число, $q = iq^*$, то несложно доказать, что G_j ($j = 1, 2$) — действительные положительные числа и, следовательно

но, точки $\pm a$ являются концами автоматической ограниченности. В этом случае решения рассмотренной задачи будут даваться формулами (14), если в этих формулах заменить γ на $i\beta$ ($2\pi\beta = \ln(1+q^*) - \ln(1-q^*)$). При этом как контактные напряжения, так и разрушающие напряжения на окружности $r = a$ будут иметь корневую особенность с осцилляцией.

В конце, рассмотрим случай $q = 0$, который возможен лишь в случае, когда $\beta_1 = 0$. В этом случае из системы (9) и условий (6) получим

$$w'_*(x) = Bf(x); \quad u'_*(x) = A\delta + \frac{\alpha_1 B}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt; \quad \delta = \frac{\alpha_1 B}{2\pi a A} \int_{-a}^a \ln\left(\frac{a-t}{a+t}\right) f(t) dt.$$

Далее, по формуле (7), нетрудно получить формулу для определения функции $\sigma_*(x)$, а затем и для истинных контактных напряжений, действующих как под штампом, так и вне трещины. Приведем указанные формулы в выше рассмотренном частном случае, когда $f(x) = P_0 x / \pi a^2$. В этом случае из (20) будем иметь:

$$w'_*(x) = \frac{BP_0}{\pi a^2} x; \quad u'_*(x) = \frac{2\Delta\alpha_1 P_0}{\pi^3 a^2 b_3} \left[a - x \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right) \right]; \quad \delta = -\frac{3\vartheta_1^{(1)} b_0 P_0}{\pi^2 a \vartheta_2^{(1)} b_3};$$

$$\sigma_*(x) = \frac{4 \left[\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right] \Delta P_0}{\pi^3 a^2 \vartheta_2^{(1)} b_3} \left[a - x \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right) \right].$$

Тогда

$$\sigma(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s \sigma_*(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = A_0 \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\int_r^a \sqrt{s^2 - r^2} \ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right) ds - r^2 \int_r^a \frac{\ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \right] \right\},$$

и, следовательно, для контактного давления под штампом будем иметь:

$$p(r) = p_0(r) + \frac{a A_0}{\sqrt{a^2 - r^2}} +$$

$$+ \frac{A_0}{r} \frac{d}{dr} \left[\int_r^a \sqrt{s^2 - r^2} \ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right) ds - r^2 \int_r^a \frac{\ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \right].$$

Здесь

$$A_0 = \frac{4 \left[\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right] \Delta P_0}{\pi^3 a^2 \vartheta_2^{(1)} b_3}.$$

При этом раскрытие трещины, в указанном случае, определится формулой:

$$w(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{sw_*(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = -\frac{BP_0}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Для контактных напряжений, действующих вне трещины на стыке разнородных полупространств, получим выражения:

$$\sigma_z^{(j)}(r, 0) = -\frac{b_3}{\Delta r} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{tw'_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = -\frac{b_3 P_0 B}{\pi a^2 \Delta r} \left[\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \arcsin\left(\frac{r}{a}\right) \right];$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) &= -\frac{b_1}{\Delta} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{\sigma_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{b_3}{\Delta} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{u'_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \\ &= \frac{E_0}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \left[1 + \frac{2r^2}{a^2} \ln\left(\frac{r^2}{r^2 - a^2}\right) \right], \end{aligned}$$

где

$$E_0 = \frac{2P_0 \left[\vartheta_1^{(1)} b_3 + 2 \left(\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right) b_1 \right]}{\vartheta_2^{(1)} \pi^3 b_3}.$$

Отметим, что при выводе этих формул было использовано значение интеграла:

$$\int_0^a \frac{\ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds = -2a \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) + \sqrt{r^2 - a^2} \ln\left(\frac{r^2}{r^2 - a^2}\right).$$

Из полученных формул явствует, что нормальные напряжения на окружности $r = a$ имеют обычную корневую особенность, а касательные напряжения, помимо корневой, имеют также логарифмическую особенность.

Некоторые численные результаты

Известно, что использование операторов вращения при решении осесимметричных контактных и смешанных задач облегчает решение этих задач и часто для приведенных искомым функций получаются замкнутые решения в квадратурах. Однако, также известно, что даже при численном обращении операторов вращения часто можно столкнуться с непреодолимыми трудностями вычислительного характера. Ниже приводится алгоритм, при помощи которого можно получить численное обращение операторов вращения даже в случаях, когда приведенные искомые функции имеют показательную особенность с осцилляцией.

Рассмотрим интегралы вида

$$G_{n,\alpha,\beta}(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{s^n \omega_{\alpha,\beta}(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}},$$

где $\omega_{\alpha,\beta}(s) = (1-s)^\alpha (1+s)^\beta$. Используя соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{g(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds &= \frac{d}{dr} \int_r^1 \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} - \frac{g(r)}{\sqrt{s^2 - r^2}} \right) ds + \frac{d}{dr} \left(g(r) \int_r^1 \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \right) = \\ &= \int_r^1 \left(\frac{r(g(s) - g(r))}{\sqrt{s^2 - r^2}^3} - \frac{g'(r)}{\sqrt{s^2 - r^2}} \right) ds + \frac{d}{dr} \left(g(r) \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - r^2} \right) = \\ &= r \int_r^1 \frac{g(s) - g(r)}{\sqrt{s^2 - r^2}^3} ds - \frac{g(r)}{r\sqrt{1 - r^2}}, \end{aligned}$$

$G_{n,\alpha,\beta}(r)$ можно представить в виде

$$G_{n,\alpha,\beta}(r) = \int_r^1 \frac{s^n \omega_{\alpha,\beta}(s) - r^n \omega_{\alpha,\beta}(r)}{\sqrt{s^2 - r^2}^3} ds - r^{n-2} \omega_{\alpha-0.5,\beta-0.5}(r).$$

Чтобы выявить поведение $G_{n,\alpha,\beta}(r)$ при r , близких к нулю, рассмотрим интеграл

$$Q(r) = \int_r^b \frac{q(s) - q(r)}{\sqrt{s^2 - r^2}^3} ds; \quad \text{где} \quad q(s) = \sum_{i=0}^{2k} a_i s^i.$$

Подставляя представление $q(s)$ в $Q(r)$, меняя порядок интегрирования и суммирования, вычисляя интегралы в слагаемых и, далее, разлагая полученное для $Q(r)$ выражение в ряд, найдем, что сингулярная часть интеграла не зависит от верхнего предела интегрирования и имеет вид

$$H_{n,k,\alpha,\beta}(r) = \frac{a_1}{r} - \ln r \sum_{i=1}^k \frac{2\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n)} a_{2i} r^{2i}.$$

Если вместо a_i взять коэффициенты разложения функции $s^n \omega_{\alpha,\beta}(s)$ в ряд при $s=0$: $a_i = \frac{\omega_{\alpha,\beta}^{(i-n)}(0)}{(i-n)!}$, $i > n$; то $H_{n,k,\alpha,\beta}(r)$ будет совпадать с плохо интерполируемой частью $G_{n,\alpha,\beta}(r)$.

Численные расчёты показывают, что комбинация

$$f_n(\alpha, \beta, r) = \frac{G_{n,\alpha,\beta}(r)}{\omega_{\alpha-0.5,\beta-0.5}(r)} - H_{n,2,\alpha,\beta}(r) + r^{n-2}$$

гладкая функция от r , α и β , хорошо интерполируемая при помощи полиномов.

Таким образом если заменить $f_n(\alpha, \beta, r)$ интерполяционным полиномом $f_n^{(m)}(\alpha, \beta, r)$, то можно получить простую аналитическую формулу для $G_{n,\alpha,\beta}(r)$, которое требует численного интегрирования только в малом количестве точек

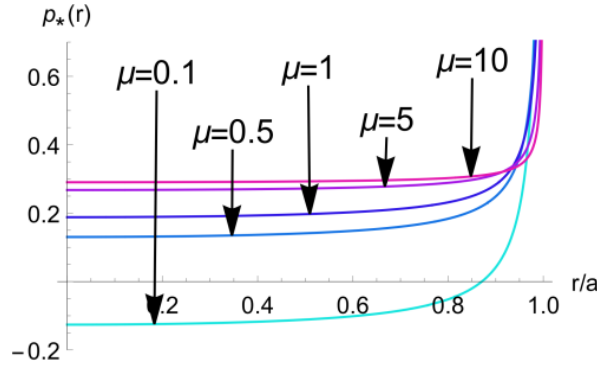
$$G_n^{(m)}{}_{\alpha,\beta}(r) = \left(f_n^{(m)}(\alpha, \beta, r) + \frac{G_{n,0,0}(r)}{\omega_{-0.5,-0.5}(r)} \right) \omega_{\alpha-0.5,\beta-0.5}(r).$$

Используя интерполяционный полином для $\sigma_*(s)$, легко получить выражение для $\sigma(r)$ через $G_n^{(m)}{}_{\alpha,\beta}(r)$

$$\sigma_*(s) = \omega_{\alpha,-\alpha}(s) \sum_{i=0}^n a_i s^i; \quad \sigma(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{s \sigma_*(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = -\sum_{i=0}^n a_i G_{i+1,\alpha,-\alpha}^{(m)}(r).$$

В численном примере приведённом ниже, уже при десяти точках на всём интервале $0 < r < 1$, значения, полученные с помощью интерполяции, совпадают со значениями, полученными численным интегрированием, с точностью до 10^{-8} .

Используя указанный алгоритм было построено численное обращение оператора вращения для контактного давления в случае, когда q действительное число. На Фиг.2 приведены графики приведённого контактного давления $p_*(r) = a^2 p(r)/P_0$ в зависимости от соотношения $\mu = \mu_2/\mu_1$ в случае, когда $\nu_1 = 0.3$ и $\nu_2 = 0.2$. Из них видно, что при возрастании параметра μ , что можно трактовать как возрастание μ_2 при постоянной μ_1 , контактное давление в средней части контактной зоны увеличивается, стремясь к определённому пределу, соответствующему случаю, когда второе полупространство абсолютно жёсткое.



Фиг. 2

При этом в случае, когда первое полупространство жестче, чем второе, больше чем в пять раз, в центральной части контактной зоны контактное давление становится отрицательным, т.е. в этой области штамп может оторваться от матрицы и, следовательно, нужно рассматривать задачу в новой постановке.

Заключение

Таким образом, построено точное решение поставленной задачи в квадратурах и получены простые формулы для определения нормального контактного давления и контактных напряжений, действующих вне трещины на стыке разнородных полупространств. Показано, что нормальные контактные напряжения на окружности, ограничивающей трещину имеют корневую особенность, а касательные напряжения, помимо этого, имеют также и логарифмическую особенность.

Разработан также алгоритм для численного обращения операторов вращения, который успешно применен для вычисления истинного контактного давления.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта №21Т-2С209.

Литература

- [1] Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М. Наука, 1980г.,304с.,
- [2] Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.- М.: Наука, 1982.- 344с.,
- [3] Панасюк В.В. Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с.
- [4] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.708с.
- [5] Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких ли-нейных включений и трещин в деформируемом теле.-К: Наукова думка, 1983-288с.
- [6] Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2014. 322с.
- [7] Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения.- В сб.: "Современные проблемы механики и авиации посвященном И.Ф. Образцову. 1980, с. 156-162.
- [8] Акопян В. Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, No4, с.57-65.
- [9] Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жёсткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве // В сб. трудов межд. конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды », посв. 95-летию со дня рожд. Акад. Н.Х.Арутюняна, Ереван-2007, с.45-51.

- [10] Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жёстком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
- [11] Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №3. С. 31-46.
- [12] Hakobyan V., Dashtoyan L. On a stress state of orthotropic plane with absolutely rigid inclusion // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 2016,69 (2). pp. 23-31. Doi- <http://doi.org/10.33018/69.2.2>
- [13] Mkhitarian S.M. On the stress-strain state of an elastic infinite plate with a crack expanding by means of smooth thin inclusion indentation// Proceedings of NAS RA, Mechanics. 2019,72(4). pp. 38-64. Doi- <http://doi.org/10.33018/72.4.4>
- [14] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм - доктор физ.- мат. наук, проф., главный научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (+37491) 350 – 222, email: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн - кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (+37477) 92-06-39, email: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 22.09.2021

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАНЕЛИ С СВОБОДНЫМ КРАЕМ,
СЖАТОЙ В НАПРАВЛЕНИИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ К
СКОРОСТИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА, ПРИ
НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И
МОМЕНТОВ**

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: достаточно широкая панель, сжимающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аналитический метод решения, локализованная дивергенция

M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan

**On the stability of a panel with a free edge compressed in a direction
perpendicular to the velocity of a supersonic gas flow in the presence of
concentrated inertial masses and moments**

Keywords: sufficiently wide panel, compressive forces, supersonic flow, aeroelastic stability, concentrated inertial masses and moments, analytical solution, localized divergence

By analyzing, as an example, a thin elastic compressed sufficiently wide panel streamlined by supersonic gas flows, we study the influence of the initial stress state of the panel on the stability of the disturbed motion of the dynamic system «plate – flow» under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments on its free edge. An analytical solution to the problem was found. We establish the relationship between the characteristics of natural vibrations of the plate and the velocity of the streamlining supersonic gas flow, which enables one to draw some conclusions concerning the stability of disturbed motions of the system depending on the stress factor and the relative thickness of the plate. The possibility of loss of stability of the disturbed motion of the system we have shown only in the form of localized divergence. For various values of the «essential» parameters of the system, we determine the critical velocities of the gas flow leading to the localized divergence. We have shown that in the flow around the initial stress state caused by compressive forces leads to a significant destabilization of the unperturbed equilibrium state of the plate.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Ս.Ռ. Մարտիրոսյան

**Գերձայնային գազի հոսքում սեղմված ուղղանկյուն սալի աերոառաձգական
կայունության մի խնդրի մասին, սալի ազար եզրին կենտրոնացված իներցիոն
զանգվածների և մոմենտների առկայության դեպքում**

Նիմաբաներ՝ լայն ուղղանկյուն սալ, սեղմող ուժեր, գերձայնային շրջհոսում, աերոառաձգական կայունություն, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծում, փեղայնացված դիվերգենցիա

Ուսումնասիրված է գերձայնային զագի հոսքում սեղմված բավականի լայն ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը նալ – հոսք՝ համակարգի կայունության վրա. զագի հոսքը ուղղված է սալի ազար եզրից դեպի հակադիր հողակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հողակապորեն ամրակցված եզրերին: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկական լուծումը: Ցույց է տրված, որ առկա է միայն փեղայնացված դիվերգենցիա, իսկ պանելային դիվերգենցիան, ինչպես նաև ֆլափերը, բացակայում են: Գտնված են փեղայնացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները, որոնք փաստում են սեղմող ուժերի ապակայունացման ազդեցության մասին:

В линейной постановке исследуется зависимость видов потери устойчивости невозмущённого состояния рановесия достаточно широкой тонкой упругой прямоугольной пластинки от характера первоначального напряжённого состояния при наличии сосредоточенных масс и моментов на её свободном крае в предположении, что пластинка сжата в направлении, перпендикулярном скорости обтекающего сверхзвукового потока газа, набегающего на её свободный край. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток». Показана возможность потери устойчивости возмущённого движения системы только лишь в виде локализованной дивергенции. Установлено, что при обтекании первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими усилиями, приводит к существенной дестабилизации состояния невозмущённого равновесия пластинки.

Введение

Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение. Вопрос об упругой устойчивости панелей обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки, неизбежно возникает на этапе проектирования и конструирования любого летательного аппарата для обеспечения безопасности полета.

Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а также, дать оценку влияния комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им. Поэтому, в современных исследованиях особенно важным является изучение динамического поведения системы «пластинка–поток», по возможности, аналитическими методами, наряду с численными.

Изучению статической и динамической неустойчивости пластинок и оболочек посвящено огромное количество работ, обзор которых, в основном, содержится в монографиях и в статьях [1–10]. Однако здесь, за исключением работ А.А. Мовчана, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой статье с помощью алгоритма, подробно изложенного в работе [15], получено аналитическое решение задачи устойчивости динамической системы «пластинка–поток» вблизи границ области устойчивости при следующих предположениях. Первоначально сжатая достаточно широкая панель [17] с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями обтекается сверхзвуковым потоком газа в направлении, перпендикулярном сжимающим силам;

поток газа набегаёт на её свободный край, вдоль которого приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты.

С помощью графоаналитических и численных методов исследований произведено разбиение пространства параметров системы на области устойчивости и неустойчивости. Исследована граница области устойчивости. Как оказалось, в случае достаточно широких прямоугольных панелей, в отличие от панелей достаточно удлиненных [20] и панелей умеренных размеров [21], возмущённое движение динамической системы теряет устойчивость лишь только в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки: дивергенция панели и панельный флаттер отсутствуют. Найдены критические скорости локализованной дивергенции и критические значения коэффициента напряжения в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба.

Установлено, что, как и ожидалось, первоначальное напряжённое состояние достаточно широкой панели, обусловленное сжимающими силами, приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы «пластинка-поток», в сравнении с системой с ненагруженной панелью [15, 17].

Данная работа является продолжением работ [17, 20, 21].

1 Постановка задачи

Рассматривается тонкая упругая достаточно широкая прямоугольная пластинка ($ab^{-1} \geq 1.96$), которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$ [17]. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край пластинки $x = 0$ – свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 11].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_y = 2h\sigma_y$, равномерно распределённых по краям $y = 0$ и $y = b$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; сжимающие усилия σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [13, 14]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния

невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp , сжимающими усилиями σ_y в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c , приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что сжимающие усилия σ_y малы по сравнению с критическими напряжениями $(\sigma_y)_{cr.}$, которые могут произвести выпучивание пластинки в отсутствии обтекания ($V = 0$).

Отметим, что в работе, с целью получения возможности аналитического исследования в рассматриваемой задаче динамической устойчивости системы «пластинка–поток», распределённая масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными массами и моментами поворота, приложенными вдоль свободного края пластинки [2, 11, 15]. Такая замена вовсе не приводит к искажению динамической картины явления – потери устойчивости системы; быть может, с точностью до численных значений критических скоростей потока газа, которые могут быть несколько завышенными.

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности сжатой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [13, 14] будет описываться соотношением [2, 8, 20, 21]:

$$D\Delta^2 w + 2h\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2, 11]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D^{-1} I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D^{-1} m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

при $x = 0$;

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x = a; \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b; \quad (1.4)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа в сверхзвуковом и гиперзвуковом интервале скоростей:

$$V_{cr.} \in (a_0 M_0, a_0 M_{2 \cos m.}), \quad M_0 = \sqrt{2}, M_{2 \cos m.} \approx 33.85; \quad (1.5)$$

приводящую к потере устойчивости состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_y < (\sigma_y)_{cr.} < (\sigma_y)_{pr.} \quad (1.6)$$

Здесь, M_0 и $M_{2 \cos m}$ – граничные значения числа Маха M , соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1]; $(\sigma_y)_{cr.}$ – критические напряжения, приводящие к выпучиванию пластинки в отсутствии обтекания ($V = 0$), найденные в работе [17]; $(\sigma_y)_{pr.}$ – нижняя граница текучести [1, 17].

Анализ устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале скоростей потока газа (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае достаточно широких прямоугольных пластинок [15, 17]:

$$\gamma = ab^{-1} \geq 1.96, \quad (1.7)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

Заметим, что в работах [15, 16] получено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» в предположении отсутствия первоначального напряжённого состояния пластинки, в работе [17] – решение задачи статической устойчивости панели с нагруженными краями $y = 0$ и $y = b$, как при обтекании ($V \neq 0$), так и в отсутствии ($V = 0$).

Данная работа является продолжением работ [20, 21], в которых исследована задача устойчивости (1.1) – (1.4) в случае достаточно удлиненных панелей ($\gamma \leq 0.193$) и панелей умеренных размеров ($0.193 < \gamma < 1.96$) соответственно.

2

Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b .

Возмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\text{Re } \lambda < 0$), и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re } \lambda > 0$). Критическая скорость потока газа $V_{cr.}$, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости возмущённого движения системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\text{Re } \lambda = 0$).

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение в виде алгебраического уравнения четвёртой

степени:

$$r^4 - 2r^2 + \alpha_n^3 r + (1 - \beta_y^2) = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}, \quad \beta_y^2 = 2h\sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2}, \quad (2.2)$$

которое в соответствии с методом решения Феррари можно представить в виде [17]:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1)}r + q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) \cdot \left(r^2 - \sqrt{2(q+1)}r + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) = 0, \quad (2.3)$$

где $q = q(V)$ – параметр, характеризующий скорость потока газа V – действительный корень кубического уравнения

$$8 \cdot (q+1)(q^2 - 1 + \beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0, \quad (2.4)$$

удовлетворяющий условию [17]:

$$q \in (q_0, \infty), \quad (2.5)$$

$$q_0 = \left(-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2}\right)/3, \quad \beta_y^2 \leq 4/3 \text{ и } q_0 = 1, \quad \beta_y^2 > 4/3 \quad (\text{табл. 1});$$

$\beta_y^2 = \beta_y^2(n, \gamma, \nu)$ – коэффициент напряжения, который

$$\beta_y^2 < (\beta_y^2)_{cr.}, \quad (\beta_y^2)_{cr.} = 2h(\sigma_y)_{cr.} D^{-1} \mu_n^{-2} \quad (\text{табл. 2}) \quad (2.6)$$

в соответствии с ограничением (1.6) и обозначениями (1.7) и (2.2). В соответствии с обозначениями (2.2), очевидно, что параметры α_n^3 и β_y^2 характеризуют, соответственно, неконсервативную и консервативную составляющие нагрузки.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	1.333	> 1.333
q_0	1	0.840	0.721	0.510	0.338	0.072	-0.333	1

Таблица 1

Данные таблицы 2 – значения функции $(\beta_y^2)_{cr.} = (\beta_y^2)_{cr.}(n, \gamma, \nu)$ при $n = 1$ – являются решениями следующих дисперсионных уравнений – характеристических определителей задачи статической устойчивости нагруженной панели ($m_c = 0$, $I_c = 0$, $\beta_y^2 \neq 0$) в отсутствии обтекания ($V = 0$) [1, 7, 17]:

$$\begin{aligned} K_1 = & \left(\sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}} \cdot (1 - \sqrt{\beta_y^2} - \nu)^2 + \sqrt{1 - \sqrt{\beta_y^2}} \cdot (1 + \sqrt{\beta_y^2} - \nu)^2 \right) \times \\ & \times sh\pi n \gamma \left(\sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}} - \sqrt{1 - \sqrt{\beta_y^2}} \right) - \left(\sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}} \cdot (1 - \sqrt{\beta_y^2} - \nu)^2 - \right. \\ & \left. - \sqrt{1 - \sqrt{\beta_y^2}} \cdot (1 + \sqrt{\beta_y^2} - \nu)^2 \right) \cdot sh\pi n \gamma \left(\sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{\beta_y^2}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

при $\beta_y^2 < 1$;

$$K_2 = (2 - \nu)^2 \cdot sh(\sqrt{2} \cdot \pi n \gamma) - \sqrt{2} \cdot \pi n \gamma \cdot \nu^2 \cdot ch(\sqrt{2} \cdot \pi n \gamma) = 0, \quad (2.8)$$

при $\beta_y^2 = 1$;

$$K_3 = \left(\sqrt{\beta_y^2} + 1 - \nu \right)^2 \cdot \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1} \cdot sh \left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1} \right) \cdot \cos \left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1} \right) - \\ - \left(\sqrt{\beta_y^2} - 1 + \nu \right)^2 \cdot \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1} \cdot ch \left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1} \right) \cdot \sin \left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1} \right) = 0, \quad (2.9)$$

при $\beta_y^2 > 1$.

В работе [17] показано, что

$$K_1(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) > 0, \quad \gamma < \gamma_*^1, \quad \beta_y^2 < 1; \quad (2.10)$$

$K_1(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = 0$ имеет два корня в интервале $\gamma \in (\gamma_*^1, \gamma_{gr.})$, а при $\gamma \geq \gamma_{gr.}$ — один корень, равный $\beta_y^2 = (\beta_y^2)_{loc.}$ (табл. 3) — единственному корню уравнения

$$K_{loc.inst.}(\nu, \beta_y^2) = \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2} \right)^2 - 2\nu \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2} \right) - (1 - \nu)^2 = 0, \quad \beta_y^2 < 1, \quad (2.11)$$

являющимся дисперсионным уравнением локализованной неустойчивости полубесконечной пластины-полосы ($\gamma = \infty$) [17], полученным из условия затухания колебаний на крае $x = a$ [3, 6, 18].

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
1.96	1.125	1.105	1.092	1.067	1.0040
2.00	1.120	1.101	1.089	1.064	1.0015
2.025	1.117	1.099	1.086	1.062	1.0000
3.00	1.052	1.041	1.033	1.017	0.9702
4.226	1.026	1.018	1.0123	1.0000	0.9605
5.00	1.018	1.0115	1.0067	0.9956	0.9586
7.226	1.0084	1.0036	1.0000	0.9910	0.9573
10.00	1.0042	1.00054	0.9975	0.9896	0.9571
11.03	1.0033	1.00000	0.9971	0.9892	0.9571
20.00	1.0008	0.99860	0.9962	0.9892	0.9571
40.00	1.000076	0.99836	0.9962	0.9892	0.9571
50.643	1.000000	0.99835	0.9962	0.9892	0.9571
≥ 80.00	0.999920	0.99835	0.9962	0.9892	0.9571

Таблица 2: Значения критического коэффициента напряжения $(\beta_y^2)_{cr.}$ при $n = 1$.

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$(\beta_y^2)_{loc.}$	0.99992	0.99835	0.9962	0.9892	0.9571

Таблица 3

Здесь, $\gamma_*^1 = \gamma_*^1(n, \nu)$ – решение уравнения (2.8) – значения γ при $\beta_y^2 = 1$ (табл. 2); $\gamma_{gr.} = \gamma_{gr.}(n, \nu)$ (табл. 4) – граничное значение параметра γ , начиная с которого невозмущённая форма равновесия сжатой прямоугольной пластинки при значениях $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{cr.}(n, \nu) = (\beta_y^2)_{loc.}(\nu) < 1$ (табл. 2 и 3) теряет устойчивость в виде локализованной неустойчивости, при котором прогиб локализуется в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки, аналогично полубесконечной пластине–полосе ($\gamma = \infty$). По сути, напряжения, возникающие в срединной поверхности прямоугольной пластинки при $\gamma \geq \gamma_{gr.}$, такие же, как и в случае полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$).

Тем самым, при всех n имеем

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{gr.}} K_1 = \lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{gr.}} K_1(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = K_{loc.inst.}(\nu, \beta_y^2), \quad \beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{loc.}(\nu) < 1. \quad (2.12)$$

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\gamma_{gr.}(n, \nu)$ при $n = 1$	80	42	18	11	9

Таблица 4

Заметим, что как было отмечено в работе [17], устойчивость необтекаемых прямоугольных пластинок при различных граничных условиях и при разных значениях отношения сторон γ прямоугольной пластинки рассматривалась, в частности, в работах [1, 3, 6, 7, 19]. В статье [3] и в монографиях [6, 7], в которых рассмотрена устойчивость сжатой пластинки, соответственно, с двумя свободными краями и с одним свободным и жёстко заделанным краями, при $\nu = 0.3$ и $\gamma = \infty$ получено то же самое значение критического коэффициента напряжения: $(\beta_y^2)_{loc.} = 0.9962$ (табл. 2 и 3). Это совпадение связано с локализацией прогиба $w(x, y)$ вблизи свободного края $x = 0$ пластинки при достаточно больших значениях $\gamma \geq \gamma_{gr.}$, в результате которой граничные условия на крае $x = a$ перестают оказывать влияние [6, 19].

Таким образом, невозмущённая форма равновесия сжатой прямоугольной пластинки при $\gamma < \gamma_{gr.}$ (табл. 4) и $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{cr.}(n, \nu)$ (табл. 2) теряет устойчивость в виде неустойчивости панели, а при $\gamma \geq \gamma_{gr.}$ и $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{loc.}(\nu) < 1$ (табл. 3) – в виде локализованной неустойчивости.

2.1. В работе [17] с помощью графоаналитических методов исследований показано, что при допустимых значениях параметра скорости (2.5) характеристическое уравнение (2.2) имеет два действительных корня $r_1 \in \mathbb{R}$, $r_2 \in \mathbb{R}$ и пару комплексно сопряжённых корней $r_{3,4} \in W$ с положительной вещественной частью, которые легко находятся, как решения квадратных уравнений – сомножителей

соотношения (2.3):

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} - 0.5(q-1)}, \quad (2.13)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + 0.5(q-1)}. \quad (2.14)$$

При этом, имеем [17]:

$$r_1 < 0, \quad r_2 < 0, \quad \text{когда } \beta_y^2 \in [0, 1), \quad q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty\right); \quad (2.15)$$

$$r_1 < 0, \quad r_2 = 0, \quad \text{когда } \beta_y^2 = 1, \quad q \in (1/3, \infty); \quad (2.16)$$

$$r_1 < 0, \quad r_2 > 0, \quad \beta_y^2 \in (1, 4/3], \quad q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty\right) \quad \text{и} \quad (2.17)$$

$$\beta_y^2 > 4/3, \quad q \in (1, \infty).$$

Отсюда следует, что общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1), запишется в виде двойного ряда:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.18)$$

C_{nk} – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b ; r_k , $k = \overline{1, 4}$ – корни характеристического уравнения (2.2), определяемые выражениями (2.13) и (2.14).

А также, как известно [17, 18], неравенства (2.15), в соответствии с условием затухания колебаний на крае $x = a$ пластинки, определяют необходимое условие потери устойчивости системы «пластинка–поток» в виде локализованной дивергенции в случае достаточно широких пластинок ($\gamma \gg 1$) и полубесконечной пластины-полосы ($\gamma = \infty$). При этом, общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1), запишется в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}. \quad (2.19)$$

Учитывая обозначения (2.2), из соотношения (2.4) находим явный вид зависимости скорости потока газа V от параметров системы «пластинка–поток», который для достаточно широких пластин ($\gamma \geq 1.96$) и полубесконечной пластины-полосы ($\gamma = \infty$) имеет следующее описание [17]:

$$V(q, n, \nu, \beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1) \cdot (q^2 - 1 + \beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 \cdot D(a_0 \rho_0 b^3)^{-1}. \quad (2.20)$$

В силу условия (1.5), отсюда, очевидно, следует, что

$$V(q, n, \nu, \beta_y^2) \in (V(q_0, n, \nu, \beta_y^2), \quad a_0 M_{2 \cos m.}) \subseteq (a_0 M_0, \quad a_0 M_{2 \cos m.}), \quad (2.21)$$

когда $V(q_0, n, \nu, \beta_y^2) > a_0 M_0$, и

$$V(q, n, \nu, \beta_y^2) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2 \cos m.}), \text{ когда } V(q_0, n, \nu, \beta_y^2) \leq a_0 M_0. \quad (2.22)$$

Тогда, согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = \frac{E \cdot (2h)^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$, допустимые интервалы значений приведённой скорости $V(q, n, \nu, \beta_y^2) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$, соответственно, будут вида:

$$\begin{aligned} V(q, n, \nu, \beta_y^2) D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3) &\in (V(q_0, n, \nu, \beta_y^2) D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3), a_0 M_{2 \cos m.} \Psi) \subseteq \\ &\subseteq (a_0 M_0 \Psi, a_0 M_{2 \cos m.} \Psi) \quad \text{при } V(q_0, n, \nu, \beta_y^2) \geq a_0 M_0; \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$V(q, n, \nu, \beta_y^2) D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3) \in (a_0 M_0 \Psi, a_0 M_{2 \cos m.} \Psi) \text{ при } V(q_0, n, \nu, \beta_y^2) < a_0 M_0;$$

$$\Psi = 12(1 - \nu^2) a_0 \rho_0 E^{-1} (2hb^{-1})^{-3}, \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2 \cos m.} \approx 33.85.$$

Из соотношений (2.23) видно, что длины соответствующих допустимых интервалов $d(\nu, 2hb^{-1}) \leq a_0(M_{2 \cos m.} - M_0)\Psi$ являются убывающими функциями как от относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$, так и от коэффициента Пуассона ν при фиксированных значениях остальных параметров системы. Для стальных достаточно широких прямоугольных пластинок $\gamma \geq 1.96$ подсчитанные интервалы допустимых значений приведённых скоростей потока газа $VD^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ даны в таблице 5.

Как следует из данных таблицы 5, длины d допустимых интервалов с ростом параметра $2hb^{-1}$ уменьшаются примерно в 52 раза при всех фиксированных значениях ν , а с ростом коэффициента Пуассона ν – уменьшаются в 1.32 раза при фиксированных значениях параметра $2hb^{-1}$.

$\nu \backslash 2hb^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.0040	(184.98, 4368.81)	(175.61, 4147.43)	(170.49, 4026.55)	(160.99, 3802.27)	(140.52, 3318.59)
0.0045	(129.92, 3068.36)	(123.34, 2912.88)	(119.74, 2827.98)	(113.07, 2670.46)	(98.69, 2330.75)
0.0060	(54.81, 1311.78)	(52.03, 1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70, 1141.58)	(41.63, 996.35)
0.0100	(11.84, 283.45)	(11.24, 269.09)	(10.91, 261.25)	(10.30, 246.70)	(8.99, 215.32)
0.0120	(6.85, 164.01)	(6.50, 155.72)	(6.32, 151.20)	(5.96, 142.69)	(5.20, 124.60)
0.0150	(3.51, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

Таблица 5

3

Перейдем к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков потери устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) вблизи границ области устойчивости.

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.18) и в виде (2.19) в граничные условия (1.2) – (1.4) и (1.2), (1.4) соответственно, получаем однородные системы алгебраических уравнений четвёртого и второго порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравненный нулю определитель каждой из этих систем уравнений – характеристический определитель Δ_i приводит к соответствующему дисперсионному уравнению:

$$\Delta_1 = \Delta_1(q(V), n, \gamma, \nu, \beta_y^2, \chi_n, \delta_n) = \chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2) \lambda^2 + A_3 = 0; \quad (3.1)$$

$$\Delta_2 = \Delta_2(q(V), n, \nu, \beta_y^2, \chi_n, \delta_n) = \chi_n \delta_n A_0^* \lambda^4 + (\chi_n A_1^* + \delta_n A_2^*) \lambda^2 + A_3^* = 0; \quad (3.2)$$

$$\chi_n = I_c D^{-1} b(\pi n)^{-1}, \quad \delta_n = m_c D^{-1} b^3(\pi n)^{-3}. \quad (3.3)$$

Дисперсионное уравнение (3.1) приведено и подробно изучено в работах [20, 21] при исследовании задачи устойчивости (1.1) – (1.4) в случае достаточно удлиненных пластин ($\gamma \leq 0.193$) и пластинок умеренных размеров ($\gamma \in (0.193, 1.96)$) соответственно. Так как данная работа является продолжением работ [20, 21], то в её тексте дисперсионное уравнение (3.1), в силу его громоздкости и ограниченности объёма статьи, можно не приводить, используя ссылку на эти работы.

Результаты численных исследований уравнений (3.1) и (3.2) показали их равносильность в интервале $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{loc}(\nu) < 1$ (табл. 3) при $\gamma \geq \gamma^*(\nu) \approx 1.96$ для всех ν : влияние коэффициента Пуассона ν на граничное значение $\gamma = \gamma^*$ неощутимо мало. Иными словами,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma^*} \Delta_1 = \Delta_2 = \chi_n \delta_n A_0^* \lambda^4 + (\chi_n A_1^* + \delta_n A_2^*) \lambda^2 + A_3^* = 0, \quad (3.4)$$

где

$$A_0^* = 1, A_1^* = \sqrt{2(q+1)} \cdot \left(q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right); A_2^* = \sqrt{2(q+1)}; \quad (3.5)$$

$$A_3^* = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2. \quad (3.6)$$

Следовательно, в интервале $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{loc}(\nu) < 1$ (табл. 3) при всех $\gamma \in [1.96, \infty)$ динамическое поведение системы «пластинка-поток» аналогично динамическому поведению системы «пластинка-поток», в которой обтекаемая пластинка – полубесконечная пластина-полоса ($\gamma = \infty$).

Учитывая соотношение (2.4), из выражений (3.5) очевидно следует

$$(\chi_n A_1^* + \delta_n A_2^*) > 0 \quad (3.7)$$

в области $\left\{ \gamma \in [1.96, \infty), \beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{loc}(\nu) < 1 \right\}$ при всех $q \in (q_0, \infty)$ (табл. 1).

Нетрудно показать, что дискриминант биквадратного уравнения (3.4)

$$Diskr(\Delta_2) = (k_n A_1^* + A_2^*)^2 - 4k_n A_3^* > 0, k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}; \quad (3.8)$$

при $q \in (q_0, \infty)$ (табл. 1), $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{loc}(\nu)]$ (табл. 3), $k_n \geq 0$ и ν .

В самом деле, подставляя в формулу дискриминанта (3.8) выражения (3.4) и (3.5), после несложных преобразований получаем

$$Diskr(\Delta_2) = 2(q+1) \left[k_n \left(q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right) - 1 \right]^2 + 4k_n(1 - \beta_y^2 + (2q + \nu)\nu) > 0.$$

Итак, в соответствии с условием затухания колебаний на краю пластинки $x = a$, анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1), (1.2) и (1.4) для всех $\gamma \in [1.96, \infty)$ и $\gamma = \infty$ сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.4), определяющих собственные движения системы в пространстве существенных параметров $\mathfrak{Z} = \{q(V), n, \nu, \beta_y^2, k_n\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение системы. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4

Из способа разбиения пространства параметров $\mathfrak{Z}$ системы «пластинка-поток» на область устойчивости $\mathfrak{Z}_0$ и области неустойчивости $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ [12, 15, 20, 21], в силу условий (3.7) и (3.8) очевидно, что в данном случае пространство параметров $\mathfrak{Z}$ состоит из двух областей $\mathfrak{Z}_0$ и $\mathfrak{Z}_1$: в области $\mathfrak{Z}_0$ все корни λ_k уравнения (3.4) находятся в левой части комплексной плоскости ($\text{Re } \lambda_k < 0$); в области $\mathfrak{Z}_1$ среди корней λ_k имеется один положительный корень. А стало быть, область устойчивости $\mathfrak{Z}_0$ будет определяться соотношением $A_3^* > 0$, соответственно, область неустойчивости $\mathfrak{Z}_1$ – соотношением $A_3^* < 0$. Тем самым, уравнение (3.4) в области устойчивости $\mathfrak{Z}_0$ имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: обтекаемая прямоугольная пластинка при $\gamma \in [1.96, \infty)$ как и полубесконечная пластина-полоса ($\gamma = \infty$), совершают гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния. В области $\mathfrak{Z}_1$ уравнение (3.4) имеет два действительных $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ корни и пару чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$ корней (из двух собственных движений пластинки, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2 , одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону). В соответствии с этим, прогибы пластинки будут возрастать во времени по экспоненциальному закону: в области $\mathfrak{Z}_1$ имеет место потеря статической устойчивости.

Границей области устойчивости $\mathfrak{Z}_0$, в соответствии с соотношениями, определяющих области $\mathfrak{Z}_0$ и $\mathfrak{Z}_1$, является гиперповерхность [12, 15, 17]: $A_3^* = 0$, или, согласно обозначению (3.6),

$$A_3^* = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 = 0, \quad (4.1)$$

на которой дисперсионное уравнение (3.4) имеет нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2 и пару чисто мнимых корней $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$. Очевидно, что уравнение (4.1) является достаточным условием потери статической устойчивости возмущённого движения системы в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки $x = 0$, когда $\gamma \in [1.96, \infty)$ и $\gamma = \infty$.

Заметим, что уравнение (4.1) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [17] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой сжатой панели в статической постановке по методу Эйлера.

Критические скорости потока газа $V_{loc.div.}$, найденные подстановкой решения $q_{loc.div.} \in (q_0, \infty)$ уравнения (4.1) в формулу (2.20), разграничивают область устойчивости $\mathfrak{S}_0$ и область локализованной дивергенции $\mathfrak{S}_1$. При скоростях $V \geq V_{loc.div.}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k , вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде локализованной дивергенции: прогибы пластинки локализованы в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки.

Таким образом, в отличие от достаточно удлинённых пластинок ($\gamma \leq 0.193$) [20] и пластинок умеренных размеров ($0.193 < \gamma < 1.96$) [21], в случае достаточно широких пластинок ($\gamma \geq 1.96$) возмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет устойчивость только лишь в виде локализованной дивергенции, подобно полубесконечной пластине–полосе ($\gamma = \infty$).

5

Исследуем динамику возмущённого движения системы «пластинка–поток» при $\gamma \in [1.96, \infty)$, $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{loc}(\nu)]$ (табл. 3) в интервале допустимых значений $q \in (q_0, \infty)$ (табл. 1).

Результаты численных исследований показали, что возмущённое движение системы является устойчивым вблизи начала интервала сверхзвуковых скоростей $a_0\sqrt{2}$ для пластинок относительной толщины, примерно, $2h^{-1}b \in (0.006, 0.015]$ при всех значениях коэффициента Пуассона ν . А в случае пластинок относительной толщины, примерно, $2h^{-1}b \leq 0.004$ возмущённое движение системы при скоростях потока газа $V \geq a_0\sqrt{2}$ является статически неустойчивым: имеет место локализованная дивергенция. При этом, сверхзвуковое обтекание приводит к «скачкообразному падению» критического коэффициента напряжения $(\beta_y^2)_{loc}(\nu)$ (табл. 3): $\beta_y^2 \in (0, (\beta_y^2)_{loc}^*)$, $(\beta_y^2)_{loc}^* \approx \chi^{-1}(\nu) \cdot (\beta_y^2(\nu))_{loc.}$ (табл. 6).

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
χ	1.541	1.527	1.495	1.432	1.372

Таблица 6

Цепочки переходов [20, 21] в интервале $\beta_y^2 \in (0, (\beta_y^2)_{loc}^*)$ при всех $\gamma \geq 1.96$ и $\gamma = \infty$, при $2h^{-1}b \in (0.006, 0.015]$, при всех значениях коэффициента Пуассона

ν будут иметь следующее описание:

$$\mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{loc.div}} \mathfrak{S}_1. \quad (5.1)$$

Подставляя решение $q_{loc.div.} \in (q_0, \infty)$ уравнения (4.1) в формулу (2.20), получаем значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$, представленные для некоторых значений коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in (0, (\beta_y^2)_{loc.}^*)$ и коэффициента Пуассона ν в таблице 7.

Из данных таблицы 7 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ является монотонно убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν при фиксированном значении коэффициента напряжения β_y^2 , а также, монотонно убывающей функцией от β_y^2 при фиксированном значении ν .

β_y^2	0	0.3	0.5	0.6	0.7	0.72
$V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$	295.420	227.320	181.029	156.386	130.327	124.636
	169.690	128.511	102.902	87.480	70.749	67.216
	143.916	110.280	85.591	72.310	58.134	55.180
	114.692	86.247	66.136	55.249	43.875	41.526
	79.937	58.238	42.789	39.011	26.282	24.640

Таблица 7

Из данных таблицы 7 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ убывает в 3.02 – 9.11 раз с ростом ν , а с ростом β_y^2 – в 2.84 – 6.76 раза, в сравнении с приведённой критической скоростью локализованной дивергенции системы с ненагруженной панелью ($\beta_y^2 = 0$) [15]. Это означает, что первоначальное напряжённое состояние достаточно широкой пластинки приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы «пластинка–поток», в сравнении с возмущённым движением системы с первоначально ненагруженной достаточно широкой пластинкой.

Сопоставление данных таблиц 5 и 7 подтверждает истинность вывода о неустойчивости возмущённого движения системы вблизи $a_0 \sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5), когда относительная толщина достаточно широких пластинок $2h^{-1}b \leq 0.004$. Более того, при дальнейшем увеличении скорости потока газа возмущённое движение – при скоростях $V \geq a_0 \sqrt{2}$ так же является статически неустойчивым при всех допустимых значениях остальных параметров: имеет место локализованная дивергенция.

Таким образом, возмущённое движение системы «пластинка – поток» в случае достаточно широких пластин ($\gamma \geq 1.96$) и полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$) теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции при скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div.}$. Приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ является монотонно убывающей функцией от коэффициента напряжения β_y^2 , характеризующего первоначальное напряжённое состояние пластинки: убывает примерно на порядок, в сравнении с ненагруженной панелью. Тем самым, первоначальное напряжённое состояние приводит

к существенной дестабилизации возмущённого движения системы «достаточно широкая пластинка – поток».

В силу независимости функции $V_{loc.div} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ от параметра k_1 , ясно, что коэффициенты χ_1 и δ_1 , характеризующие сосредоточенные инерционные моменты I_c и массы m_c , соответственно, влияют всего лишь на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности свободного края пластинки $x = 0$.

Заметим, что дисперсионное уравнение (4.1) при $\beta_y^2 = 0$ тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [15] при исследовании задачи устойчивости возмущённого движения системы (1.1) – (1.4) в случае достаточно широких пластинок с ненагруженными, первоначально, краями. А также, из сравнения граничных значений $\gamma = \gamma^* \approx 1.96$ при $\beta_y^2 = 0$ и $\beta_y^2 > 0$ следует, что в данной постановке задачи устойчивости влияние коэффициента напряжения β_y^2 на граничное значение γ^* неощутимо мало.

6 Основные результаты

В работе исследуется своеобразное влияние первоначального напряжённого состояния достаточно широкой прямоугольной пластинки ($\gamma \geq 1.96$) с свободным краем на устойчивость возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» при наличии на свободном крае пластинки сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что края прямоугольной пластинки, параллельные скорости потока газа, нагружены ещё до обтекания равномерно распределёнными сжимающими усилиями. Аналитическое решение найдено с помощью метода, подробно описанного в работе [15].

Получены явные выражения дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости.

С помощью графоаналитических и численных методов анализа произведено разбиение многопараметрического пространства $\mathfrak{Z}$ системы «пластинка–поток» на область устойчивости $\mathfrak{Z}_0$ и области неустойчивости $\mathfrak{Z}_i$, $i = 1, 2, 3$. Показано, что пространство «существенных» параметров системы состоит лишь только из двух областей: области устойчивости $\mathfrak{Z}_0$ и области статической неустойчивости $\mathfrak{Z}_1$, в которой имеет место локализованная дивергенция. При этом, в случае стальных пластинок относительной толщины $2h^{-1}b \leq 0.004$ пространство параметров состоит только из области $\mathfrak{Z}_1$. Определены интервалы изменения «существенных» параметров системы, разграничивающие области устойчивости и неустойчивости. Исследована граница перехода из области устойчивости $\mathfrak{Z}_0$ в область $\mathfrak{Z}_1$, которая, очевидно, является «безопасной» [12].

Найдены критические скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба: при скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ возмущённое движение системы теряет устойчивость.

Найдены критические значения коэффициента напряжения изгиба при обтекании $(\beta_y^2)_{loc.}^*$. Установлено, что критический коэффициент напряжения $(\beta_y^2)_{loc.}^*$

примерно в 1.37 – 1.54 раза меньше критического коэффициента напряжения при отсутствии обтекания $(\beta_y^2(\nu))_{loc.}$ [17].

Показано, что критические скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ являются монотонно убывающими функциями от коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{loc.}^*)$: убывают примерно на порядок, в сравнении с ненагруженной панелью [15].

Таким образом, в случае достаточно широких пластин ($\gamma \geq 1.96$) и в случае полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$) первоначальное напряжённое состояние приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы «пластинка – поток».

Заключение

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для получения аналитического решения широкого класса задач устойчивости упругих систем, в частности, при комбинированном нагружении.

Литература

- [1] Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с. Volmir A.S. The Stability of the elastic system. Moscow: Physmathgiz. 1963. 880 p.
- [2] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с. Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, 340 p. Izd. Fizmat lit. Moscow.
- [3] Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38–46. Ishlinskii A.Yu. About the same, limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates. // Reports of USSR Academy of Sciences. 1954. V. 95. No. 3. Pp. 38-46.
- [4] Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243. Movchan A.A.(1956). About vibrations of a plate, moving in gas. Izv. Acad. Nauk USSR. PMM. V. 20. No. 2, pp. 211-222.
- [5] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука. 1972. 432 с. Volmir A.S. (1972). Nonlinear dynamics of plates and shells. Nauka. Moscow. 432p.
- [6] Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. – М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic methods // Moscow: Science. Physmathlit. 1995. 320 p.
- [7] Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968. Strength. Stability.

- Vibrations. Directory in 3 v. // Under the editorship of I. A. Birger and Ya. G. Panovko. – Moscow.: Mechanical Engineering. 1968.
- [8] Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука. 2006. 247 с. Algazin, S.D., Kijko, I.A. (2006). Flutter of Plates and Shells. Nauka. Moscow. 247 p.
 - [9] Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122. Novichkov Yu. N. A flutter of plates and shells. Results of science and technology Mechanics of deformable solids. – Moscow: Science. 1978. V. 11. Pp. 67-122.
 - [10] Crowell A.R., McNamara J.J., Miller B.A. (2011). Hypersonic aerothermoelastic response prediction of skin panels using computational fluid dynamic surrogates. Journal of aeroelasticity and structural dynamics. V. 2. No. 2, p. 3-30.
 - [11] Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. //Иzv. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33–44. Rzhantsyn A.R. (1985). “A cantilever elastic beam loaded by a follower force”, Izv. Acad. Nauk Arm. SSR, Mekhanika, 38, No. 5, pp. 33-44.
 - [12] Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с. Bautin N.N. The behavior of dynamical systems near the boundaries of the stability region. – М.: Science. 1984. 176 p.
 - [13] Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755. Il'yushin A.A.(1956). Law of Flat Sections at the Big Supersonic Velocity. PMM, v. 20(6), pp. 733-755.
 - [14] Ashley G H., Zartarian G. Piston theory - a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
 - [15] Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край. // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge. //Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V. 67(2). P. 12–42.
 - [16] Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On a problem of supersonic panel flutter in the presence of concentrated inertial masses and moments // Изв. НАН Армении, Механика. 2016, т.69, № 3, с.41-59.
 - [17] Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегаании сверхзвукового потока газа на ее свободный край. // Изв. НАН Армении, Механика. 2017, т.70, № 4, с.12–34. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge// Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V. 70(4). P.12–34.

- [18] Коненков Ю.К. Об изгибной волне “релеевского” типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С. 124–126. Konenkov Yu.K. A Rayleigh–Type Flexural Wave // Soviet Physics. Akoustic Journal. 1960, v. 6, № 1, pp. 124–126.
- [19] Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34. (2012). The localized instability of the elastic plate-strip streamlined by a supersonic gas flow. Izv. NAS of Armenia, Mechanika, v. 65 (1), pp. 29-34.
- [20] Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. Supersonic flutter of a compressed elongated plate in the presence of concentrated inertial masses and moments. // Изв. НАН Армении. Механика. 2020. Т.73, № 4, с. 58–74. Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2020. V. 73(4). P. 58–74.
- [21] Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер панели с свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов. // Изв. НАН Армении, Механика. 2021. Т.74, №2. 33-59

Сведения об авторе

Мартиросян Стелла Размиковна - кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.

Тел. (+374 10) 524890

Email: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 14.07.2021

**СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПОЛОСЫ,
СОДЕРЖАЩЕЙ ВНУТРЕННЮЮ ТРЕЩИНУ, ВЫХОДЯЩУЮ НА
ЛИНИЮ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ**

Саакян А.В., Саркисян В.Г., Хачикян А.С.

Ключевые слова: составная полоса, краевая трещина, упругость, сингулярное интегральное уравнение, неподвижная особенность, коэффициент концентрации напряжений, раскрытие трещины, механические квадратуры.

Sahakyan A.V., Sargsyan V.G., Khachikyan A.S.

**Mixed Boundary Value Problem for an Elastic Composite Strip Containing an
Internal Crack Terminating at the Interface of Materials**

Keywords: composite strip, edge crack, elasticity, singular integral equation, unmoved singularity, stress concentration coefficient, crack opening, mechanical quadrature formula.

The stress state of a piecewise-homogeneous elastic strip is considered, composed of two strips from different materials, one of which contains a crack of finite length, perpendicular terminating at the interface of materials. It is assumed that the composite strip on the side of the strip, in which there is a crack, is rigidly restrained, and the other side is free from stress. The strip is deformed under the influence of a normal load symmetrically applied to the crack edges.

The stress intensity factors at the crack tips, contact stresses at the material interface, as well as the shape of the crack opening were determined. The study of the dependence of the indicated values on the elastic constants of the strip materials and the relative widths of the strips has been carried out.

Մահակյան Ա.Վ., Սարգսյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս.

**Խառը եզրային խնդիր նյութերի բաժանման գծի վրա դուրս եկող ներքին ճաք պարունակող
առաձգական բաղադրյալ շերտի համար**

Հիմնաբառեր: բաղադրյալ շերտ, եզրային ճաք, առաձգականություն, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում, անշարժ եզակիություն, լարումների ուժգնության գործակից, ճաքի բացվածք, մեխանիկական քառակուսացման բանաձևեր:

Դիտարկված է երկու փարանյութ շերտերից կազմված բաղադրյալ առաձգական շերտի լարվածային վիճակը, երբ շերտերից մեկում կա վերջավոր երկարության ճաք, որը ուղղահայաց դուրս է գալիս նյութերի բաժանման գիծ: Ենթադրվում է, որ բաղադրյալ շերտը ճաք պարունակող շերտի կողմից կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուս կողմը ազատ է լարումներից: Շերտը դեֆորմացվում է ճաքի ափերին համաչափ կիրառված նորմալ բեռի ազդեցության տակ:

Որոշված են ճաքի զագայթներում լարումների ուժգնության գործակիցները, նյութերի բաժանման գծի վրա կոնտակտային լարումների բախշումը, ինչպես նաև ճաքի բացվածքի տեսքը: Հեղուկացվել է նշված մեծությունների կախվածությունը շերտերի առաձգական հաստատուններից և շերտերի հարաբերական հաստություններից:

Рассматривается напряженное состояние кусочно-однородной упругой полосы, составленной из двух разнородных полос, в одной из которых содержится трещина конечной длины, перпендикулярно выходящая на линию раздела материалов. Предполагается, что составная полоса со стороны полосы, в которой имеется трещина, жестко закреплена, а другая сторона свободна от напряжений. Полоса деформируется под воздействием нормальной нагрузки, симметрично приложенной к берегам трещины. Определены коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины, контактные напряжения на линии раздела материалов, а также форма раскрытия трещины. Проведено исследование зависимости указанных величин от упругих постоянных материалов полос и относительных ширин полос.

1 Введение

Исследованию напряженного состояния составных массивных тел, содержащих концентраторы напряжений в виде трещин, тонких включений или накладок, посвящено множество исследований, среди которых, в частности, отметим [1–6]. Особое место занимают задачи определения напряженного состояния составной плоскости, когда трещина перпендикулярно или под углом выходит на линию раздела материалов, в этой связи отметим лишь работы [6–8].

В настоящей работе рассмотрено напряженное состояние кусочно-однородной упругой полосы, составленной из двух разнородных полос, в одной из которых содержится трещина конечной длины, перпендикулярно выходящая на линию раздела материалов.

2 Постановка задачи

Пусть имеем упругую кусочно-однородную полосу, которая состоит из двух разнородных бесконечных полос ширины h_1 и h_2 и во второй из них содержит трещину конечной длины a , выходящую на линию раздела материалов $y = 0$. Предположим, что составная полоса по стороне $y = h_2$ жестко закреплена, другая ее сторона $y = -h_1$ свободна от напряжений. Внешняя нагрузка в виде нормального давления p симметрично приложена к берегам трещины (Рис.1).

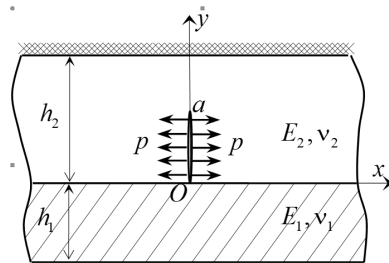


Рис. 1

Для составной полосы будем иметь следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_2(x, h_2) &= 0, & v_2(x, h_2) &= 0, \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, -h_1) &= 0, & \sigma_y^{(1)}(x, -h_1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

На линии соединения полос имеем условия полного контакта:

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_2(x, 0), & v_1(x, 0) &= v_2(x, 0), \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), & \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0), \end{aligned} \quad (2.2)$$

а на берегах трещины заданы напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(2)}(0, y) &= 0 \\ \sigma_x^{(2)}(0, y) &= -p \quad (0 < y < a) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В силу симметрии в постановке задачи будем рассматривать лишь правую половину составной полосы $x \geq 0$. Далее, индексом «1» будут отмечаться величины, относящиеся к нижней полосе ($-h_1 \leq y \leq 0$), а индексом «2» - к полосе, содержащей трещину, ($0 \leq y \leq h_2$).

3 Вывод определяющего уравнения задачи

Для вывода определяющего уравнения поставленной задачи воспользуемся бигармонической функцией Эри, которую в соответствующих областях представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \int_0^\infty (A_1 \operatorname{sh} \lambda y + B_1 \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y (C_1 \operatorname{sh} \lambda y + D_1 \operatorname{ch} \lambda y)) \cos x \lambda d\lambda; \\ \Phi_2(x, y) &= \int_0^\infty (A_2 \operatorname{sh} \lambda y + B_2 \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y (C_2 \operatorname{sh} \lambda y + D_2 \operatorname{ch} \lambda y)) \cos x \lambda d\lambda + \\ &+ \sum_{k=1}^\infty (a_k + x b_k) e^{-\lambda_k x} \sin \lambda_k y; \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\lambda_k = \pi k / h_2$.

Используя формулы, выражающие компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений [9], для компонентов напряжений и перемещений, необходимых для удовлетворения граничным условиям (2.1) на сторонах составной полосы, будем иметь:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_y^{(j)}(x, y) \\ \tau_{xy}^{(j)}(x, y) \\ u_j(x, y) \\ v_j(x, y) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \mathbf{T}(x, \lambda) \mathbf{S}_j(\lambda, y) \begin{Bmatrix} A_j(\lambda) \\ B_j(\lambda) \\ C_j(\lambda) \\ D_j(\lambda) \end{Bmatrix} d\lambda + \mathbf{V}_j(x, y, \lambda_k) \quad (j = 1, 2) \quad (3.2)$$

где

$$\mathbf{T}_j(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \lambda x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \lambda x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \lambda x \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j(\lambda, y) = & \begin{pmatrix} -\lambda^2 s_y & -\lambda^2 c_y & -\lambda^3 y s_y & -\lambda^3 y c_y \\ \lambda^2 c_y & \lambda^2 s_y & \lambda^2 (y \lambda c_y + s_y) & \lambda^2 (c_y + y \lambda s_y) \\ \frac{\lambda s_y}{2\mu_j} & \frac{\lambda c_y}{2\mu_j} & \frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y s_y + (\theta_j + 1) c_y) & \frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y c_y + (\theta_j + 1) s_y) \\ -\frac{\lambda c_y}{2\mu_j} & -\frac{\lambda s_y}{2\mu_j} & -\frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y c_y - \theta_j s_y) & -\frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y s_y - \theta_j c_y) \end{pmatrix}; \\ & (s_y = \operatorname{sh} y \lambda; \quad c_y = \operatorname{ch} y \lambda) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1(x, y, \lambda_k) &= 0; \\ \mathbf{V}_2(x, y, \lambda_k) &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \lambda_k} \lambda_k [a_k \lambda_k + b_k (-2 + x \lambda_k)] \sin \lambda_k y \\ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \lambda_k} \lambda_k [a_k \lambda_k + b_k (-1 + x \lambda_k)] \cos \lambda_k y \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-x \lambda_k}}{2\mu_2} [a_k \lambda_k + b_k (\theta_2 + x \lambda_k)] \sin \lambda_k y \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-x \lambda_k}}{2\mu_2} [-a_k \lambda_k + b_k (1 + \theta_2 - x \lambda_k)] \cos \lambda_k y \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\mu_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}$ - модуль сдвига, E_j - модуль Юнга, ν_j - коэффициент Пуассона материалов полос, $\theta_j = 1 - 2\nu_j$. Обозначения s_y, c_y введены исключительно для простоты представления матрицы $\mathbf{S}_j(\lambda, y)$.

Из первого условия в (2.3) нетрудно найти, что $b_k = \lambda_k a_k$. Следовательно,

$$\mathbf{V}_2(x, y, \lambda_k) = \begin{pmatrix} e^{-x \lambda_k} \lambda_k^2 a_k (x \lambda_k - 1) \sin \lambda_k y \\ e^{-x \lambda_k} \lambda_k^2 a_k x \lambda_k \cos \lambda_k y \\ \frac{e^{-x \lambda_k}}{2\mu_2} a_k \lambda_k (1 + \theta_2 + x \lambda_k) \sin \lambda_k y \\ \frac{e^{-x \lambda_k}}{2\mu_2} a_k \lambda_k (\theta_2 - x \lambda_k) \cos \lambda_k y \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Из условия симметрии имеем также условия

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{x=0} = 0 \text{ при } a < y < h_2 \text{ и } \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{x=0} = w(y) \text{ при } 0 < y < a \quad (3.6)$$

где $w(y)$ - искомая функция, представляющая собой производную перемещения берега трещины. Пользуясь представлениями (3.2) и (3.5), найдем

$$a_k = \frac{4\mu_2}{\lambda_k^2 h_2 (1 + \theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \cos \lambda_k \zeta d\zeta \quad (3.7)$$

Перейдем к удовлетворению граничных условий (2.1) и (2.2). Представляя компоненты левой части и второго слагаемого правой части равенства (3.2) в виде соответствующих косинус или синус интегралов Фурье, равенство (3.2) запишем в виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_y^{(j)}(\lambda, y) \\ \bar{\tau}_{xy}^{(j)}(\lambda, y) \\ \bar{u}_j(\lambda, y) \\ \bar{v}_j(\lambda, y) \end{pmatrix} = \mathbf{S}_j(\lambda, y) \begin{pmatrix} A_j(\lambda) \\ B_j(\lambda) \\ C_j(\lambda) \\ D_j(\lambda) \end{pmatrix} + (j-1) \begin{pmatrix} \delta_\sigma(\lambda, y) \\ \delta_\tau(\lambda, y) \\ \delta_u(\lambda, y) \\ \delta_v(\lambda, y) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

где компоненты последнего столбца, с учетом (3.5), имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta_\sigma(\lambda, y) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_k \frac{2\lambda^2 \lambda_k}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda_k y \\ \delta_\tau(\lambda, y) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_k \frac{2\lambda \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda_k y \\ \delta_u(\lambda, y) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \frac{\lambda^3 (1 + \theta_2) + \lambda (3 + \theta_2) \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda_k y \\ \delta_v(\lambda, y) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_k \frac{\lambda^2 (1 + \theta_2) - (1 - \theta_2) \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda_k y \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя в (3.8) $y = 0$ и учитывая условия (2.2), восемь коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$) выразим через значения $\{\sigma_0, \tau_0, u_0, v_0\}$ трансформантов Фурье компонентов напряжений и перемещений на линии $y = 0$ и величин из (3.9), содержащих в себе основную искомую функцию $w(\zeta)$:

$$\begin{pmatrix} A_j(\lambda) \\ B_j(\lambda) \\ C_j(\lambda) \\ D_j(\lambda) \end{pmatrix} = \mathbf{S}_j^{-1}(\lambda, 0) \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \tau_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - (j-1) \mathbf{S}_j^{-1}(\lambda, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_\tau(\lambda, 0) \\ 0 \\ \delta_v(\lambda, 0) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Далее, подставляя полученные представления в (3.2) и удовлетворяя граничным условиям (2.1), выразим компоненты $\{\sigma_0, \tau_0, u_0, v_0\}$, а следовательно и все компоненты напряжений и перемещений, через функции $\delta_\tau(\lambda, 0)$, $\delta_v(\lambda, 0)$ и $\delta_v(\lambda, h_2)$, которые, с учетом (3.7), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \delta_\tau(\lambda, 0) &= M \int_0^a w(\zeta) \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda (h_2 - \zeta)}{\operatorname{sh} \lambda h_2} - \lambda \zeta \frac{\operatorname{sh} \lambda (h_2 - \zeta)}{\operatorname{sh} \lambda h_2} - \lambda h_2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \zeta}{\operatorname{sh}^2 \lambda h_2} \right) d\zeta \\ \delta_v(\lambda, 0) &= M \int_0^a w(\zeta) \left[\zeta \frac{\operatorname{sh} \lambda (h_2 - \zeta)}{\operatorname{sh} \lambda h_2} + h_2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \zeta}{\operatorname{sh}^2 \lambda h_2} + \theta_2 \frac{\operatorname{ch} \lambda (h_2 - \zeta)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_2} - \frac{1 + \theta_2}{\lambda^2 h_2} \right] d\zeta \end{aligned}$$

$$\delta_v(\lambda, h_2) = M \int_0^a w(\zeta) \left[h_2 \frac{\text{ch } \lambda(h_2 + \zeta)}{\text{sh}^2 \lambda h_2} - (\zeta + h_2) \frac{\text{sh } \lambda \zeta}{\text{sh } \lambda h_2} + \frac{\theta_2 \text{ch } \lambda \zeta}{\lambda \text{sh } \lambda h_2} - \frac{1 + \theta_2}{\lambda^2 h_2} \right] d\zeta \quad (3.11)$$

$$M = \frac{4\mu_2}{\pi(1 + \theta_2)}$$

Полученные представления не приводятся ввиду громоздкости, обусловленной, главным образом, многопараметровостью поставленной задачи. На примере компоненты σ_0 представим общую структуру полученных выражений.

$$\sigma_0 = \frac{\cos x\xi}{\Delta(\lambda) \text{ch } \lambda h_2} [G_1(\lambda) \delta_v(\lambda, h_2) + G_2(\lambda) \delta_v(\lambda, 0) + G_3(\lambda) \delta_\tau(\lambda, 0)] \quad (3.12)$$

Здесь

$$G_1(\lambda) = -\lambda(1 + \theta_2) \{ \lambda h_1 \text{sch}^2 \lambda h_1 [-\mu(1 + \theta_1)(1 + \theta_2 + \lambda h_2 \text{th } \lambda h_2) + \lambda h_1(\lambda h_2(\mu - 1) - (1 + (2 - \mu)\theta_2) \text{th } \lambda h_2)] + \text{th } \lambda h_1 [\mu(1 + \theta_1)(1 + \theta_2) + (1 + 2\theta_2 + \theta_1\theta_2\mu) \text{th } \lambda h_1 \text{th } \lambda h_2 + \lambda h_2((1 + \theta_1\mu) \text{th } \lambda h_1 + (1 + \theta_1)\mu \text{th } \lambda h_2)] \} ,$$

$G_2(\lambda)$ и $G_3(\lambda)$ имеют похожий вид, $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$,

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \mu^2(1 + 2\theta_2 + (\lambda^2 h_2^2 + \theta_2^2) \text{sch}^2 \lambda h_2)(1 + 2\theta_1 + (\lambda^2 h_1^2 + \theta_1^2) \text{sch}^2 \lambda h_1) + \\ & \left(-\lambda^2 h_2^2 \text{sch}^2 \lambda h_2 + (1 + 2\theta_2)^2 \text{th}^2 \lambda h_2 \right) (1 - (1 + \lambda^2 h_1^2) \text{sch}^2 \lambda h_1) + \\ & 2\mu(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)(\lambda^2 h_1 h_2 \text{sch}^2 \lambda h_1 \text{sch}^2 \lambda h_2 + (1 + 2\theta_2) \text{th } \lambda h_1 \text{th } \lambda h_2) + \\ & 2\mu(-\lambda^2 h_2^2 \text{sch}^2 \lambda h_2 + \theta_2(1 + 2\theta_2) \text{th}^2 \lambda h_2)((\lambda^2 h_1^2 - \theta_1) \text{sch}^2 \lambda h_1 + \theta_1) . \end{aligned}$$

Очевидно, что аналитические представления для интегралов Фурье (3.8) будут достаточно громоздкими, но они легко реализуются при численных расчетах. Из граничных условий (2.1)-(2.3) неудовлетворенным осталось только второе из условий (2.3). Выписав выражение напряжения $\sigma_x^{(2)}(x, y)$ посредством функции Эри и просчитав сумму с учетом представления (3.7), для компоненты $\sigma_x^{(2)}$ на линии $x = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(2)}(0, y) = & \int_0^\infty \lambda^2 [(B_2 + \lambda y D_2 + 2C_2) \text{ch } \lambda y + (A_2 + 2D_2 + \lambda y C_2) \text{sh } \lambda y] d\lambda - \\ & - \frac{\mu_2}{h_2(1 + \theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \left(\text{ctg } \frac{\pi(y - \zeta)}{2h_2} + \text{ctg } \frac{\pi(y + \zeta)}{2h_2} \right) d\zeta \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставляя в (3.13) полученные выше представления коэффициентов A_2, B_2, C_2 и D_2 через интегралы (3.11) и меняя порядок интегрирования, из второго из условий (2.3) получим определяющее уравнение поставленной задачи:

$$\frac{\mu_2}{\pi(1+\theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \left[Q(y, \zeta) - \frac{\pi}{2h_2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(y-\zeta)}{2h_2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+\zeta)}{2h_2} \right) \right] d\zeta = -p \quad (3.14)$$

где функция $Q(y, \zeta)$ является интегралом Фурье по лучу $\lambda \in (0, \infty)$. Детальное исследование поведения подынтегральной функции на бесконечности позволило выделить сингулярную часть ядра $Q(y, \zeta)$:

$$Q(y, \zeta) = \frac{c_1}{y+\zeta} + \frac{c_2 y}{(y+\zeta)^2} + \frac{c_3 y^2}{(y+\zeta)^3} + Q^*(y, \zeta) \quad (3.15)$$

Здесь $Q^*(y, \zeta)$ является регулярной частью ядра, принимающей конечное значение при $y, \zeta \rightarrow 0$,

$$c_1 = \frac{(3 + 3\mu\kappa_1 - \mu - \kappa_2)(1 + \kappa_2)}{2(\mu + \kappa_2)(1 + \mu\kappa_1)}, \quad c_2 = 6\frac{\mu - 1}{\mu + \kappa_2}, \quad c_3 = 4\frac{1 - \mu}{\mu + \kappa_2}, \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i.$$

Учитывая поведение гиперболического котангенса около нуля, гиперболические слагаемые в (3.14) представим в виде:

$$\frac{\pi}{2h_2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(y-\zeta)}{2h_2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+\zeta)}{2h_2} \right) = \frac{1}{y-\zeta} + \frac{1}{y+\zeta} + Q_0(y, \zeta) \quad (3.16)$$

где регулярная функция $Q_0(y, \zeta)$ определяется формулой:

$$Q_0(y, \zeta) = \frac{\pi}{2h_2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(y-\zeta)}{2h_2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+\zeta)}{2h_2} \right) - \frac{2y}{y^2 - \zeta^2}$$

В итоге, определяющее уравнение (3.14) можно переписать в виде сингулярного интегрального уравнения с обобщенным ядром Коши:

$$\int_0^a w(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - y} + \frac{c_0}{y + \zeta} + \frac{c_2 y}{(y + \zeta)^2} + \frac{c_3 y^2}{(y + \zeta)^3} + R(y, \zeta) \right] d\zeta = -\frac{\pi(1 + \theta_2)}{\mu_2} p \quad (3.17)$$

где

$$R(y, \zeta) = Q^*(y, \zeta) - Q_0(y, \zeta)$$

,

$$c_0 = c_1 - 1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3(\mu - 1)}{\mu + \kappa_2} - \frac{1 + \kappa_2}{1 + \mu\kappa_1} \right]$$

Уравнение (3.17) можно переписать и в виде, который и будет использован при его решении

$$\int_0^a w(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - y} + L \left[\frac{1}{y + \zeta} \right] + R(y, \zeta) \right] d\zeta = -\frac{\pi(1 + \theta_2)}{\mu_2} p \quad (3.18)$$

где L – дифференциальный оператор:

$$L \equiv c_0 - c_2 y \frac{d}{dy} + \frac{c_3 y^2}{2} \frac{d^2}{dy^2} \quad (3.19)$$

Вместе с уравнением (3.18) необходимо также удовлетворить условию смыкания концов трещины

$$\int_0^a w(\zeta) d\zeta = 0 \quad (3.20)$$

(3.20) Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению сингулярного интегрального уравнения с обобщенным ядром Коши (неподвижной особенностью) (3.18) при условии (3.20).

4 Решение определяющей системы уравнений

Решение определяющей системы уравнений (3.18), (3.20) построим при помощи метода механических квадратур. Для применения последнего сведем уравнения на интервал $(-1, 1)$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[\frac{1}{\xi - z} + L_* \left[\frac{1}{z + \xi + 2} \right] + R_*(z, \xi) \right] d\xi &= -p_* \quad (-1 < z < 1) \\ \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= w \left(\frac{2}{a} \zeta - 1 \right), \quad R_*(z, \xi) = R \left(\frac{2}{a} y - 1, \frac{2}{a} \zeta - 1 \right), \quad p_* = \frac{\pi(1 + \theta_2)}{\mu_2} p, \\ L_* &\equiv c_0 - c_2 (z + 1) \frac{d}{dz} + \frac{c_3 (z + 1)^2}{2} \frac{d^2}{dz^2}. \end{aligned}$$

При этом в регулярном ядре $R_*(z, \xi)$ появятся относительные толщины $h_1^* = h_1/a$ и $h_2^* = h_2/a$, а также отношение модулей сдвига μ , по которым и будет в дальнейшем проведен численный анализ. Решение системы (4.1) будем искать в виде

$$\varphi(\xi) = (1 - \xi)^\alpha (1 + \xi)^\beta \varphi_*(\xi) \quad (-1 < \alpha, \beta < 0), \quad (4.2)$$

Показатели особенности α и β определяются из исследования поведения сингулярного

интегрального уравнения в окрестности концов интервала интегрирования $(-1, 1)$. Используя известные результаты о поведении сингулярных интегралов в окрестности концевых точек [9], найдем, что $\alpha = -0.5$, а показатель β является корнем следующего трансцендентного уравнения

$$\cos \pi \beta + c_0 - \beta c_2 + \frac{\beta(\beta - 1)}{2} c_3 = 0 \quad (-1 < \beta < 0) \quad (4.3)$$

Численный анализ показывает, что при любых допустимых значениях упругих характеристик материалов полос уравнение (4.3) имеет единственный корень в указанном интервале. При этом, при возрастании модуля сдвига μ_1 материала полосы, не содержащей трещину, т.е. $\mu = \mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$ показатель β приближается к нулю, а при $\nu_2 = 0$ обращается в ноль, при убывании же модуля сдвига μ_1 показатель β приближается к -1 .

После определения показателя β , решение определяющего сингулярного интегрального уравнения с неподвижной особенностью строится методом механических квадратур [10]. Воспользуемся квадратурной формулой для интеграла типа Коши [11], применимой для обоих сингулярных слагаемых в ядре интегрального уравнения (4.1),

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x-t} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \approx \sum_{i=1}^n w_i \frac{f(\xi_i)}{\xi_i - t} [1 - q_i(t)] \quad (t \neq \pm 1, \alpha, \beta > -1) \quad (4.4)$$

где $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ — корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$,

$$w_i = \frac{2}{n + \alpha + \beta + 1} \frac{Q_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_i)}{P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)}, \quad q_i(t) = \frac{Q_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{Q_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_i)},$$

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{t-1}\right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times \\ \times F\left(n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-t}\right) & t \notin [-1, 1] \\ \left(Q_n^{(\alpha, \beta)}(t+i0) + Q_n^{(\alpha, \beta)}(t-i0)\right)/2 & (-1 < t < 1) \end{cases}$$

Правую часть уравнения (4.1) заменим квадратурной формулой, будем иметь

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(\xi_i) \left\{ \frac{1 - q_i(z)}{\xi_i - z} + L_* \left[\frac{1 - q_i(-z-2)}{\xi_i + z + 2} \right] + R_*(z, \xi_i) \right\} = -p_* \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(\xi_i) = 0$$

Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно искомых величин $\varphi_*(\xi_i)$ ($i = 1, n$) необходимо для первого уравнения выбрать $(n-1)$ точек коллокации. Заметим, что квадратурная формула для третьего слагаемого является формулой наивысшей алгебраической точности при любых z , в то время как для первого слагаемого квадратурная формула является таковой только тогда, когда z совпадает с корнями функции $q_i(z)$, точнее функции $Q_n^{(\alpha, \beta)}(z)$, для второго же слагаемого этого не имеет места ни при каких значениях z . Очевидно, что в качестве точек коллокации следует выбрать корни функции $q_i(z)$, число которых, как нетрудно проверить, равно именно $(n-1)$.

Таким образом, положив в (4.5) $z = \zeta_k$ ($k = 1, n-1$), ζ_k – корни функции $q_i(z)$, получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $\varphi_*(\xi_i)$ ($i = 1, n$), после определения которых функцию $\varphi_*(\xi)$ можно будет интерполировать следующим многочленом:

$$\varphi_*(x) = \sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(\xi_i) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{h_m} P_m^{(\alpha, \beta)}(\xi_i) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (4.6)$$

где

$$h_m = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1) \Gamma(m+1) \Gamma(m+\alpha+\beta+1)}$$

5 Численный анализ

Проведем исследование сходимости решения системы (4.5) к решению системы (4.1). Очевидно, что как геометрические, так и механические параметры задачи достаточно существенно влияют на скорость сходимости метода механических квадратур. Особенно сильно это влияние заметно в случаях, когда хотя бы один из этих параметров приближается к критическому значению, приводящему к стремлению хотя бы одного из показателей особенности решения (4.2) к конечным значениям области их определения либо к появлению особенностей в регулярном ядре $R_*(z, \xi)$, а следовательно, и к изменению структуры первого уравнения в (4.1). В рассматриваемой задаче такими критическими значениями являются $h_1^* = 0$, $h_2^* = 1$ и $\mu = 0, \infty$.

Учитывая, что наибольшее отклонение интерполирующего многочлена от интерполируемой функции имеет место на концах отрезка интерполирования, в качестве показателей сходимости метода выбраны коэффициенты интенсивности напряжений в концах трещины, определяемые формулами

$$K_{(-1)} = \frac{(1+\kappa_2)[(1+2\beta)(1+\mu\kappa_1) - (3+2\beta)(\mu+\kappa_2)]}{2(1+\mu\kappa_1)(\mu+\kappa_2)\sin\pi\beta} p_* \varphi_*(-1)$$

$$K_{(+1)} = -2^{0.5+\beta} p_* \varphi_*(1),$$

а также среднеквадратичное отклонение левой части первого уравнения системы (4.5), рассчитанной во внутренних узлах равномерной сетки, делящей интервал $(-1, 1)$ на 20 отрезков, от правой части:

$$K_{(err)} = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{k=1}^{19} \left[\sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(\xi_i) \left\{ \frac{1 - q_i(t_k)}{\xi_i - t_k} + L_* \left[\frac{1 - q_i(-t_k - 2)}{\xi_i + t_k + 2} \right] + R_*(t_k, \xi_i) \right\} + p_* \right]^2}$$

$$t_k = -1 + \frac{k}{20}, \quad (k = 1, 19).$$

В Табл. 1 приведены значения указанных величин при разных порядках аппроксимации n и различных значениях параметров h_1^* , h_2^* и μ . Для коэффициентов Пуассона приняты значения $\nu_1 = 0.35$, $\nu_2 = 0.25$, а также положено $p_* = 1$. Результаты приведены для пяти групп значений указанных параметров, из которых в первой значения параметров далеки от критических, а в остальных хотя бы один из параметров относительно близок к

критическому значению. Из таблицы видно, что для всех групп, за исключением, может быть, последней, сходимость достаточно хорошая и численный анализ поставленной задачи можно провести при $n = 10$.

	n	6	10	14	18
$h_1^* = 2$	$K_{(-1)}$	0.1109	0.1121	0.1124	0.1126
$h_2^* = 2.5$	$K_{(+1)}$	0.3550	0.3549	0.3549	0.3549
$\mu = 5$	$K_{(err)}$	0.0031	7.6×10^{-4}	9.2×10^{-5}	1.2×10^{-4}
$h_1^* = 2$	$K_{(-1)}$	0.5644	0.5628	0.5623	0.5621
$h_2^* = 1.05$	$K_{(+1)}$	0.1894	0.1896	0.1900	0.1901
$\mu = 0.5$	$K_{(err)}$	1.1×10^{-3}	5.3×10^{-4}	5.2×10^{-5}	2.7×10^{-5}
$h_1^* = 0.05$	$K_{(-1)}$	0.3664	0.3649	0.3644	0.3647
$h_2^* = 2.5$	$K_{(+1)}$	0.3726	0.3716	0.3717	0.3717
$\mu = 2$	$K_{(err)}$	3.9×10^{-3}	1.4×10^{-3}	4.6×10^{-5}	1.3×10^{-4}
$h_1^* = 2.8$	$K_{(-1)}$	1.7809	1.7536	1.7466	1.7442
$h_2^* = 4.2$	$K_{(+1)}$	0.2751	0.2756	0.2757	0.2757
$\mu = 0.0001$	$K_{(err)}$	0.0031	8.6×10^{-4}	1.4×10^{-4}	8.9×10^{-5}
$h_1^* = 2.8$	$K_{(-1)}$	0.0083	0.0084	0.0082	0.0084
$h_2^* = 4.2$	$K_{(+1)}$	0.4414	0.4490	0.4440	0.4417
$\mu = 100$	$K_{(err)}$	0.0018	0.0054	0.1134	0.0004

Таблица 1: Сходимость численного метода

Исходя из результатов таблицы, численный анализ проведен для значений исходных параметров относительно далеких от критических значений при $n = 10$. Исследована зависимость коэффициентов интенсивности напряжений у концов трещины, показателя особенности β , а также формы раскрытия трещины от исходных параметров задачи.

На Рис.2-Рис.5 представлены графики зависимости коэффициентов концентрации напряжений $K_{(-1)}$ у конца трещины, выходящего на линию раздела материалов, (далее, внешний конец) (сплошные линии) и $K_{(+1)}$ у внутреннего конца трещины (пунктирные линии) от отношения модулей сдвига материалов полос $\mu = \mu_2/\mu_1$ при различных значениях одного из параметров h_1^* , h_2^* , ν_1 и ν_2 при неизменных трех остальных. При численных расчетах параметр μ изменялся в пределах $[0.1, 8.35]$. В зависимости от этого же параметра исследовано также изменение показателя особенности β при различных значениях коэффициентов Пуассона ν_1 и ν_2 . Выяснено, что коэффициент Пуассона ν_1 материала нижнего слоя мало влияет на показатель особенности β , особенно при приближении к концам интервала изменения μ , в средней же части чем больше коэффициент ν_1 , тем меньше по модулю показатель β . Коэффициент же ν_2 влияет на этот показатель в равной мере по всему интервалу изменения μ , при этом чем больше коэффициент ν_2 , тем больше по модулю показатель β (Табл.2).

μ	$\nu_2 = 0.25$			$\nu_1 = 0.35$		
	$\nu_1 = 0.15$	$\nu_1 = 0.25$	$\nu_1 = 0.35$	$\nu_2 = 0.15$	$\nu_2 = 0.25$	$\nu_2 = 0.35$
0.1	-0.3221	-0.3116	-0.3001	-0.2398	-0.3001	-0.3538
2.1	-0.5965	-0.5809	-0.5596	-0.5413	-0.5596	-0.5788
4.35	-0.6744	-0.6627	-0.6462	-0.6307	-0.6462	-0.6632
8.35	-0.7421	-0.7335	-0.7211	-0.7074	-0.7211	-0.7363

Таблица 2: Показатель особенности β

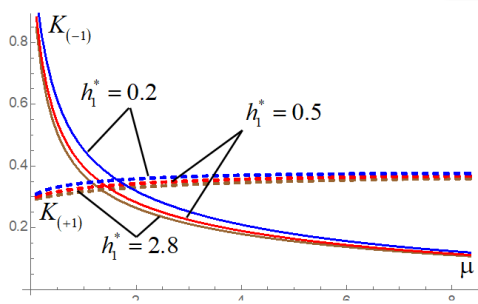


Рис.2 $h_2^* = 4.2$; $\nu_1 = 0.35$, $\nu_2 = 0.25$

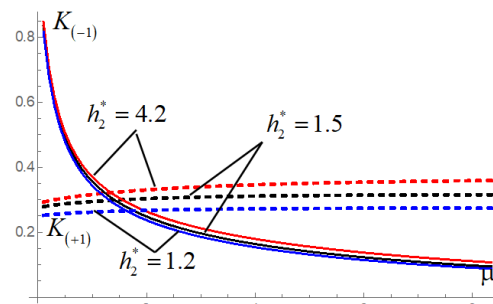


Рис.3 $h_1^* = 2.8$; $\nu_1 = 0.35$, $\nu_2 = 0.25$

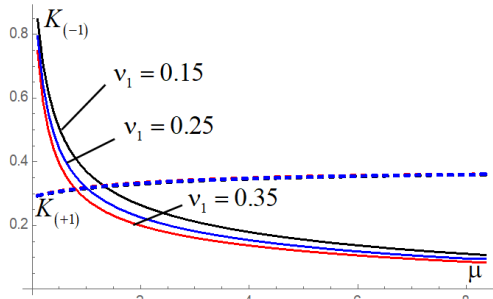


Рис.4 $h_1^* = 2.8$; $h_2^* = 4.2$, $\nu_2 = 0.25$

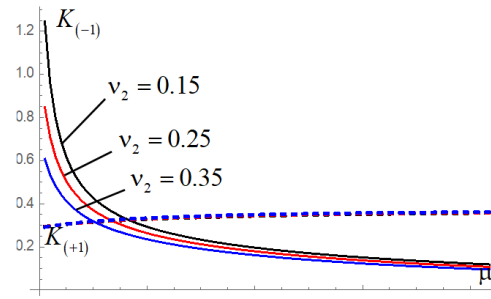


Рис.5 $h_1^* = 2.8$; $h_2^* = 4.2$, $\nu_1 = 0.35$

Из приведенных графиков можно сделать следующие выводы:

- С возрастанием отношения коэффициент концентрации напряжений у внешнего конца трещины существенно падает, стремясь к нулю, а второй коэффициент медленно возрастает, стремясь к определенному пределу,
- Коэффициенты Пуассона обоих материалов практически не влияют на коэффициент концентрации напряжений у внутреннего конца трещины,
- Наибольшее влияние на коэффициент концентрации напряжений у внешнего конца трещины имеет коэффициент Пуассона материала верхнего слоя,

- Изменение толщины верхнего слоя влияет, главным образом, на коэффициент концентрации напряжений у внутреннего конца трещины,
- Изменение толщины нижнего слоя почти одинаково влияет на коэффициенты концентрации напряжений у обоих концов трещины.

На Рис.6 – Рис.7 приведены графики распределения безразмерных контактных напряжений $\tau_{xy}(x, 0)/(a\mu_2)$ и $\sigma_y(x, 0)/(a\mu_2)$ по линии раздела материалов вблизи вершины трещины для различных значений параметров задачи. На Рис.6 приведены указанные графики для различных значений толщины нижней полосы $h_1^* = 1.5; 0.75; 0.5$ при неизменных остальных: $h_2^* = 4.5; \mu = 0.5; \nu_1 = 0.35$ и $\nu_2 = 0.25$, а на Рис.7 те же графики для $\mu = 0.5; 1; 2$ и $h_2^* = 4.5; h_1^* = 0.5; \nu_1 = \nu_2 = 0.25$.

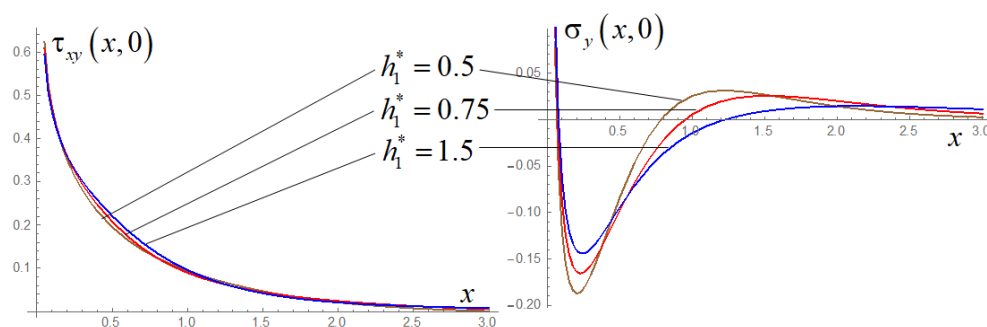


Рис. 6: Распределение тангенциальных (слева) и нормальных (справа) напряжений по линии раздела материалов для различных значений толщины нижней полосы h_1^* .

Судя по графикам Рис.6, изменение толщины нижней полосы h_1^* не сильно влияет на распределение тангенциальных напряжений, нормальные же напряжения, несмотря на то, что они по величине существенно меньше тангенциальных, достаточно сильно реагируют на это изменение. При этом тангенциальные напряжения при удалении от вершины трещины убывают монотонно, а нормальные напряжения на достаточно близком расстоянии от вершины трещины меняют знак, достигают локального минимума, возрастают до определенного локального максимума и далее монотонно убывают до нуля. Уменьшение толщины h_1^* приводит к увеличению абсолютных значений локальных экстремумов и уменьшению интервала этих активных изменений, после которого начинается монотонное убывание до нуля. Причем уменьшение этой зоны обусловлено, главным образом, сдвигом локального максимума.

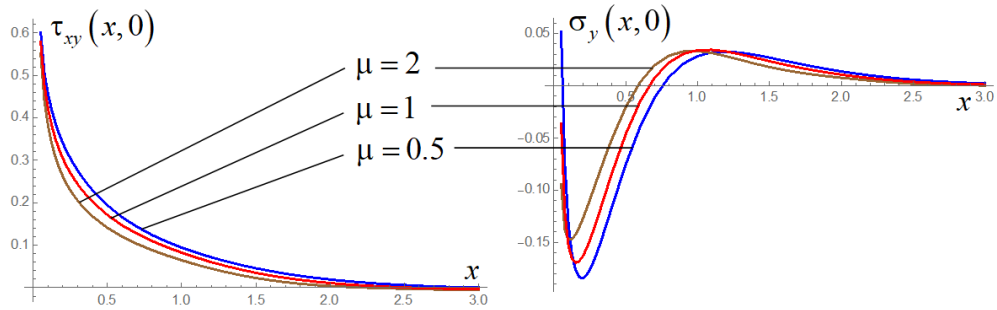


Рис. 7: Распределение тангенциальных (слева) и нормальных (справа) напряжений по линии раздела материалов для различных значений отношения модулей сдвига μ .

Изменение отношения модулей сдвига μ равнозначно влияет на распределение обоих напряжений. Увеличение отношения μ приводит к уменьшению как тангенциальных напряжений, так и абсолютных значений нормальных напряжений. При этом интервал активных изменений нормальных напряжений уменьшается, а локальный максимум, оставаясь на одном уровне, и локальный минимум, уменьшаясь по абсолютной величине, приближаются к вершине трещины. Здесь, в отличие от предыдущих графиков, оба локальных экстремума в равной мере приближаются к вершине трещины.

При помощи квадратурной формулы для вычисления интеграла с переменным пределом [12] вычислено также раскрытие трещины. На Рис.8 представлены формы раскрытия трещины при различных значениях параметров. Два параметра приняты постоянными $h_2^* = 4.2$; $\nu_2 = 0.25$.

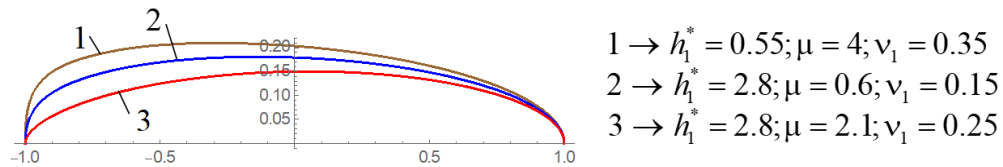


Рис. 8: Форма раскрытия трещины

Заключение

Исследовано напряженное состояние двухкомпонентной составной полосы вокруг трещины конечной длины, перпендикулярно выходящей на линию раздела материалов. Получено определяющее уравнение задачи, являющееся сингулярным интегральным уравнением с обобщенным ядром Коши, иначе называемым уравнением с неподвижной особенностью. При помощи метода механических квадратур исследованы зависимости коэффициентов концентрации напряжений в концах трещины, показателя особенности на внешнем конце трещины, формы раскрытия трещины, а также распределение нормальных и тангенциальных напряжений на линии раздела материалов от упругих и геометрических параметров задачи.

Выявлена степень влияния отдельных параметров на коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины: толщина нижней полосы почти одинаково, с преобладанием у внешнего конца, влияет на оба коэффициента интенсивности; толщина верхней полосы заметно влияет только на коэффициент интенсивности напряжений у внутреннего конца трещины; оба коэффициента Пуассона существенно влияют на коэффициент интенсивности у внешнего конца и практически не влияют на коэффициент у внутреннего конца трещины.

Показано, что толщина нижней полосы влияет также на распределение контактных напряжений по линии раздела материалов, причем значительно существеннее на нормальные контактные напряжения, отношение же модулей сдвига влияет на оба контактных напряжения в равной мере.

Авторы выражают глубокую признательность своему молодому коллеге к.ф.м.н. А.А. Амирджаняну за очень полезное обсуждение на всем, достаточно долгом, протяжении подготовки статьи и помощь при выполнении численных расчетов.

Литература

- [1] Развитие теории контактных задач в СССР. Под редакцией Л.А.Галина. М.: Наука, 1976
- [2] Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Известия АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1962, №1, с.131-137. 3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
- [3] Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
- [4] Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Равновесие упругой плоскости, содержащей полосу и симметричные трещины на линиях контакта. Изв. НАН Армении. Механика. 2015 т.68. №2, с3-9. <http://doi.org/10.33018/68.2.1>
- [5] Саакян А.В., Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Равновесие составной упругой плоскости, содержащей полосу и симметрично расположенные взаимно перпендикулярные трещины. Изв. НАН РА. Механика. 2017, т. 70, №4, С. 57-67. <http://doi.org/10.33018/70.4.5>
- [6] Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Е., «Гитутюн », 2014, 322 с.
- [7] Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. (1973) Numerical solution of singular integral equations. In: Sih G.C. (eds) Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of fracture, vol 1. Springer, Dordrecht
- [8] Соболев Б.В., Рашидова Е.В., Борисова Е.В. Задача о поперечной внутренней трещине в составной упругой полуплоскости. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Труды VIII межд. конф., 22-26 сент. 2014г., Горис-Степанакерт.-Ереван, 2014.-С. 403-407.

- [9] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. –М.: Наука, 1968. 511с.
- [10] A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
- [11] Саакян А.В., Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Известия НАН Армении, Механика, 2000, т.53, №3, сс.12-19. <https://mechanics.sci.am/docs/v53i3a2>
- [12] 12. Саакян А.В., Квадратурные формулы для вычисления интеграла с переменным верхним пределом. Труды II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды », Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, сс. 107-111. <http://www.mechins.sci.am/download/conf-proceedings-2010-vol2.pdf>

Сведения об авторах:

Саакян Аветик Вараздатович - д.ф.м.н., в.н.с., avetik.sahakyan@sci.am
Саркисян Вардан Гарегинович - к.т.н., с.н.с., varsargsyan43@gmail.com
Хачикян Альберт Серобович - к.ф.м.н., в.н.с., khachikyanalbert39@gmail.com

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию 27.08.2021

**HYBRID OF SURFACE SHEAR WAVES AT THE CONTACT
INTERFACE BETWEEN PIEZOELECTRIC AND ELECTRICALLY
CONDUCTIVE HALF-SPACES**

Avetisyan Ara S., Gevorgyan A.V., Avetisyan L.V.

Keywords: piezoelectric, perfect conductor, surface shear wave, electro active wave, magneto active wave, wave dispersion, Alfvén velocity.

**Гибрид поверхностных волн сдвига на гра-
нице раздела пьезоэлектрического и элек-
тропроводящего полупространств**

Аветисян Ара С., Геворкян А.В., Аветисян Л.В.

Ключевые слова: пьезоэлектрик, идеальный проводник, поверхностная волна сдвига, электро активная волна, магнито активная волна, дисперсия волн, скорость Альфвена.

Аннотация: Рассматривается совместное распространение электро-магнито активных, поверхностных волн упругого сдвига в двухслойном композите. Композит состоит из пьезоэлектрического и идеально проводящего полупространств, и размещен в параллельном поверхности раздела полупространств внешнем постоянном магнитном поле. Сформулирована математическая краевая задача. Анализ полученного дисперсионного уравнения позволяет определить условия существования локализованных поперечных волн на границе раздела двух сред и характер локализаций магнитоупругих и электроупругих волн. Показано, что волновой процесс в композите можно оптимизировать, изменяя напряженность магнитного поля. Наличие параллельного магнитного поля может привести к устранению существующего гибрида поверхностных электроактивных и магнитоактивных упругих поперечных волн или может привести к их возникновению.

**Սահբի մակերևութային ալիքների հիբրիդ՝ պիեզոէլեկտրական և էլեկտրական
հաղորդիչ կիսադարձությունների ամրակցման միջերեսին**

Ավերիսյան Արա Ս., Գևորգյան Ա.Վ., Ավերիսյան Լևոն Վ.

Նիւնարաւոր՝ պիեզոէլեկտրիկ, իդէալական հաղորդիչ, սահբի մակերևութային ալիք, էլեկտրական ալիք, մագնիսական ալիք, ալիքի ցրում, Ալֆենի արագություն:

Դիտարկվում է երկշերտ կոմպոզիտում էլեկտրամագնիսական ալիքի մակերևութային առաձգական սահբի ալիքների համադրելի տարածումը: Կոմպոզիտը բաղկացած է պիեզոէլեկտրական և կապարյալ հաղորդիչ կիսադարձություններից և տեղակայված է կիսադարձությունների միջերեսին զուգահեռ արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտում: Ձևակերպված է մաթեմատիկական եզրային արժեքի խնդիր: Ստացված դիսպերսիայի հավասարման վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս որոշելու երկու միջավայրերի միջերեսի մոտ տեղայնացված սահբի ալիքների առկայության պայմանները, ինչպես նաև մագնիսաառաձգական և էլեկտրաառաձգական սահբի ալիքների տեղայնացման բնույթը: Յուրյ է արված, որ կոմպոզիտում ալիքային գործընթացը

կարելի է օպտիմալացնել՝ փոխելով արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածությունը: Զուգահեռ մագնիսական դաշտի առկայությունը կարող է հանգեցնել մակերևույթի էլեկտրակրիվ և մագնիսաակրիվ առաձգական կտրուկ ալիքների առկա հիբրիդի վերացմանը կամ կարող է հանգեցնել դրանց առաջացման:

Զուգահեռ մագնիսական դաշտի առկայությունը կարող է հանգեցնել մակերևույթի էլեկտրակրիվ և մագնիսաակրիվ առաձգական սահքի ալիքների հիբրիդի առաջացման, կամ կարող է հանգեցնել առկա հիբրիդի վերացմանը:

Abstract: The propagation of electro-magnetically active, surface elastic shear waves in a bi-material composite is considered. The composite consists of the contacting piezoelectric and perfectly conducting half-spaces. There is an external constant magnetic field parallel to the interface of the half-spaces. A mathematical boundary value contact problem is formulated. An analysis of the derived dispersion equation provides the conditions for the existence of surface shear waves localized at the interface between two media. The effects and nature of the localizations of magnetoelastic and electroelastic waves are discussed. It is shown that the wave process in the composite can be optimized by changing the magnetic field intensity. It is shown also that the magnetic field can eliminate the existing hybrid of surface electroactive and magnetically active elastic shear waves, or can lead to their origin.

Introduction

In [1], 1911 Love A. E. H. showed that, unlike plane strain waves, localization of the wave energy of pure elastic shear is possible in the near-surface zone of an elastic half-space at the junction with a layer of softer material. In 1924, Lord Stoneley R. [2], investigated the possibility of the existence of waves similar to Rayleigh waves and Love waves, which propagate along the inner joints of the layers of the earth's crust. In his work, he also investigated the circumstances under which a Love-type wave can exist if a layer of constant thickness is bounded on both sides by very thick layers of various materials.

In [3], 1968 Bleustein J.L. and in [4], 1969 Gulyaev Yu.V., are showed the possibility of localizing the energy of an electroelastic shear wave near a mechanically free surface of a piezoelectric medium of certain symmetry, under different boundary conditions for the accompanying electric field. After these primary sources, soviet and foreign scientists solved a number of problems on the propagation of electroacoustic waves in piezoelectric crystals and in electrically conductive media, a review of which was given in books [5, 6] already in the eighties. The features of the localization of the wave energy of a purely shear electroelastic wave of the Gulyaev- Bleustein type, in multifunctional media, or in layered composites are still being studied. There are a thousand works where the regularities of the propagation of electroelastic shear waves in composite structures, or in media with complicated properties are investigated.

In modern electronics, inhomogeneous composite (in particular layered, piecewise homogeneous) waveguides are widely used as converters, filters or resonators of electro-magneto-acoustic high-frequency wave signals with the use of piezoelectric crystals [7–9], etc.

Qualitatively different interests are represented by the cases when the electroacoustic signal overcomes a transversely inhomogeneous layered structure [10], and when the

electroacoustic signal flows along the interface of homogeneous layers of the structure [11]. In these works, the formation of a hybrid of electroactive waves of elastic shear and elastic plane deformation in the case of non-acoustic contact between layers of piezoelectric materials is investigated.

Naturally, a hybrid of an electroactive elastic shear wave and a magneto active elastic shear wave in a layered composite of a piezoelectric and an electrically conductive material (multifunctional composite material) can provide a peculiar interest. In this case, different surface conditions of mechanical fields at the interface between layers can allow different hybridizations of elastic shear waves.

The proposed work studies the formation and propagation of a hybrid of electroactive and magneto active surface elastic shear waves at the interface between contacting piezoelectric and perfect conducting half-spaces, in an external constant magnetic field parallel to the interface of half-spaces.

1 Formulation of the mathematical boundary value contact problem

The composite medium of piezoelectric and electro conductive half-spaces is referred to a rectangular Cartesian coordinate system $Ox_1x_2x_3$. The coordinate plane Ox_3x_1 is the contact interface between half-spaces, the coordinate plane Ox_1x_2 is coincides with the isotropy plane of a 6mm piezoelectric medium with hexagonal symmetry. The coordinate axis Ox_3 is parallel to the polarization axis of the piezoelectric crystal $\vec{p}_6$, and the coordinate axis Ox_2 is directed into the piezoelectric half-space (Fig. 1).

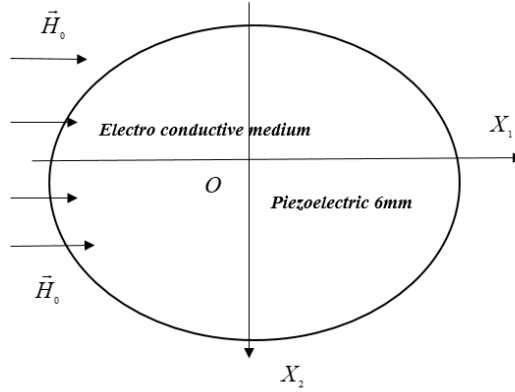


Fig. 1: Located in an external magnetic field $\tilde{\mathbf{H}}_0(H_{01}, 0, 0)$ a composite space consisting of a piezoelectric medium and an perfectly conducting medium

Constant initial magnetic field $\tilde{\mathbf{H}}_0(H_{01}, 0, 0)$ is directed along the axis Ox_1 . The magnetoelasticity equations for a perfectly conducting isotropic medium, in the general

three-dimensional case, have the form [12]

$$G_2 \nabla^2 \vec{u}^{(2)} + \frac{\mu^{(2)}}{4\pi} \left\{ \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{u}^{(2)} \times \tilde{\mathbf{H}}_0 \right] \right\} \times \tilde{\mathbf{H}}_0 = \rho^{(2)} \frac{\partial^2 \vec{u}^{(2)}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

The coupled equations of elasticity and the equations of electrodynamics for a dielectric piezoelectric medium and material relations have the form [5, 6]

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} = \rho^{(1)} \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 E_i^{(1)}}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 E_i^{(1)}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\mu^{(1)}}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 D_i^{(1)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0. \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \hat{C}_{ijkl} u_{kl}^{(1)} - e_{mij} E_m^{(1)}, \quad D_i^{(1)} = e_{ikl} u_{kl}^{(1)} + \varepsilon_{ij} E_j^{(1)}. \quad (1.4)$$

In equations (1.1) ÷ (1.4), the indices $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3\}$, G_2 is the shear elastic modulus of the conducting medium, $\rho^{(1)}$ and $\rho^{(2)}$ are the bulk densities of materials, $\vec{u}^{(n)} = \{u_i^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)\}$ are the vectors of elastic displacements, $\mu^{(1)}$ and $\mu^{(2)}$ are the magnetic fields permeability in piezoelectric and electrically conductive media, respectively. $\hat{C}_{ijkl}$ is a tensor of elastic constants, $\hat{e}_{mij}$ is a tensor of piezoelectric modules, $\hat{\varepsilon}_{ik}$ is a tensor of dielectric constant of piezoelectric, and $\hat{u}_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ is the tensor of linear deformation of piezoelectric medium.

Hereinafter, the permeability of the magnetic field of the piezoelectric will be considered $\mu^{(1)} = 1$.

The superscripts (1) and (2) denote the quantities corresponding to the piezoelectric half-space and perfect conducting half-space, respectively.

Since the electroactive elastic shear wave is possible in the sagittal plane $0x_1x_2$ of a piezoelectric material, the displacement field can be represented by two-dimensional equations in the plane $0x_1x_2$ in the half-spaces $n \in \{1, 2\}$.

Elastic displacements field of this type is permissible if, in the solutions of equations (1.2) and (1.3), we put $E_3^{(1)}(x_1, x_2, t) \equiv 0$ taking into account the material relations (1.4).

Then, an electric field is potential also in a piezoelectric medium $\vec{E}^{(1)}(x_1, x_2, t) = -\text{grad}\varphi^{(1)}(x_1, x_2, t)$. For piezoelectric half-space under consideration, we obtain the following system of equations

$$\begin{aligned} c_1^2 \nabla^2 u_3^{(1)}(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial^2 u_3^{(1)}(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \left[u_3^{(1)}(x_1, x_2, t) - (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot \varphi^{(1)}(x_1, x_2, t) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Where, $c_1 = \sqrt{G_1/\rho^{(1)}}$ is the speed of the volume shear wave, $G_1 = C_{44}(1 + \chi^2)$ is the piezoelectrically stiffened elastic shear modulus, $\chi = \sqrt{e_{15}^2/(\varepsilon_{11}C_{44})}$ is the coefficient of electromechanical coupling in piezoelectric medium.

For a magneto active elastic shear wave travelling in perfect conducting half-space,

from equation (1.1) we obtain

$$(c_2^2 + a_2^2) \frac{\partial^2 u_3^{(2)}(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 u_3^{(2)}(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u_3^{(2)}(x_1, x_2, t)}{\partial t^2}. \quad (1.6)$$

Here $c_2 = \sqrt{G_2/\rho^{(2)}}$ is the velocity of the bulk shear wave and $a_2 = H_0/\sqrt{4\pi\rho^{(2)}}$ is the speed of Alfvén in a conducting medium.

Since the accompanying magnetic field is neglected in a piezoelectric medium, and the accompanying electric field is neglected in a perfect conducting media, the electroelasticity equations (1.5) in the piezoelectric media and the equation (1.6) of magnetoelasticity in the perfect conducting media can be obtained in a rather simplified form.

Accordingly, they will be small of the order $\approx 10^{-5}$.

The boundary conditions can be also simplified. Taking into account that the corresponding component of the Maxwell stress tensor is identically zero at the interface, $x_2 = 0$ we obtain

$$C_{44} \frac{\partial u_3^{(1)}(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} + e_{15} \frac{\partial \varphi^{(1)}(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} = G_2 \frac{\partial u_3^{(2)}(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}, \quad (1.7)$$

$$u_3^{(1)}(x_1, x_2, t) = u_3^{(2)}(x_1, x_2, t), \quad \varphi^{(1)}(x_1, x_2, t) = 0. \quad (1.8)$$

The condition (1.7) is obtained from the condition of continuity of mechanical stresses. The conditions (1.8) are obtained from the condition continuity of elastic displacements and the tangential component of the electric field at the interface of the half-planes.

Since we consider the surface waves, the conditions of disturbances attenuation for damping of disturbances over the depth of half-spaces must be satisfied also

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} u_3^{(1)}(x_1, x_2, t) = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \varphi^{(1)}(x_1, x_2, t) = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} u_3^{(2)}(x_1, x_2, t) = 0. \quad (1.9)$$

2 Formation of the hybrid of the electroactive and the magneto active SH elastic waves

Based on attenuation conditions (1.9), the solutions both of the equations (1.5) and (1.6) can be represented as

$$\begin{aligned} u_3^{(1)}(x_1, x_2, t) &= A_1 \cdot \exp(-k\alpha_1 x_2) \cdot \exp[ik(x_1 - vt)], \\ \varphi^{(1)}(x_1, x_2, t) &= [B_1 \cdot \exp(-kx_2) - (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot A_1 \cdot \exp(-k\alpha_1 x_2)] \cdot \exp[ik(x_1 - vt)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$u_3^{(2)}(x_1, x_2, t) = A_2 \cdot \exp(k\alpha_2 x_2) \cdot \exp[ik(x_1 - vt)] \quad (2.2)$$

Here $\alpha_1^2 = 1 - v^2/c_1^2 > 0$ and $\alpha_2^2 = 1 + a_2^2/c_2^2 - v^2/c_2^2 > 0$ are attenuation coefficients of waves in half-spaces, $v(\omega) = \omega/k$ is the unknown phase velocity of a surface hybrid wave localized at the contact interface of the adjacent half-spaces of the composite media.

Substituting solutions (2.1) into boundary conditions (1.7) and (1.8), we obtain a system of homogeneous algebraic equations for arbitrary constant amplitudes. From the condition for the existence of nontrivial solutions to a system of homogeneous algebraic equations, the dispersion equation is obtained

$$(1 - v^2(\omega)/c_1^2)^{1/2} + (G_1/G_2) \cdot (1 + a_2^2/c_2^2 - v^2(\omega)/c_2^2)^{1/2} = \chi^2 \quad (2.3)$$

The condition for the existence of real roots for the dispersion equation (2.3) is $v^2(\omega) < \min\{c_1^2, c_2^2 + a_2^2\}$.

The left side of equation (2.3) is a monotonically decreasing function of the phase velocity $v(\omega)$. This makes it possible to obtain the conditions for the existence of a hybrid of surface waves depending on the ratio of the shear wave velocities in the media and on the magnetic field intensity. Let's consider different cases:

i) Let the speed of an elastic transverse wave in the piezoelectric medium be less than the speed of an elastic transverse wave in the perfect conducting medium $c_1 \leq c_2$. Since the parameter on the right-hand side of Eq. (2.3) must be between the extreme values of the function on the left-hand side of the Eq. (2.3). The condition for the existence of surface waves in this case can be written in the following form

$$(G_1/G_2) \cdot (1 + (a_2^2 - c_1^2)/c_2^2)^{1/2} \leq \chi^2 \leq 1 + (G_1/G_2) \cdot (1 + a_2^2/c_2^2)^{1/2} \quad (2.4)$$

Since the coefficient of electromechanical coupling of the piezoelectric medium is less than unity $0 < \chi^2 < 1$, the condition (2.4) can be reduced to the form

$$H_0 \leq 2\sqrt{\pi\rho^{(2)}} \cdot \left[(G_2/G_1)^2 \cdot \chi^4 - 1 \right] c_2^2 + c_1^2^{1/2} \quad (2.5)$$

It follows from this condition that in the absence of an external magnetic field, ($H_{01} = 0$), the surface elastic shear waves of phase velocity $v(\omega) < c_1$, can exist in the composite if $\chi^2 \geq (G_1/G_2) \cdot \sqrt{c_2^2 - c_1^2}/c_2 < 1$.

The weak external magnetic field, satisfying to condition (2.5) does not eliminate the surface waves. The strong external magnetic field can lead to elimination of the existing hybrid of surface shear waves, at the following values of the magnetic field intensities

$$H_0 > 2\sqrt{\pi\rho^{(2)}} \cdot [c_1^2 - (1 - \chi^4 G_1^2 G_2^{-2}) \cdot c_2^2]^{1/2} \quad (2.6)$$

ii) In velocity ratios $c_1^2 \geq c_2^2 + a_2^2$, the condition for the existence of a hybrid of surface shear waves can be defined as

$$(1 - (c_2^2 + a_2^2)/c_1^2)^{1/2} \leq \chi^2 \leq 1 + (G_2/G_1) \cdot (1 + a_2^2/c_2^2)^{1/2} \quad (2.7)$$

Obviously, in the absence of an external magnetic field, when $H_{01} = 0$, for composite materials where $c_1 \geq c_2$ the surface shear waves always exist. Such waves

can be eliminated outside of the narrow interval of external magnetic field intensities

$$2\sqrt{\pi\rho^{(2)}} \cdot [(1 - \chi^4) \cdot c_1^2 - c_2^2]^{1/2} \leq H_0 < 2\sqrt{\pi\rho^{(2)}} \cdot (c_1^2 - c_2^2)^{1/2} \quad (2.8)$$

iii) When $c_2^2 < c_1^2 < c_2^2 + a_2^2$, instead of relation (2.7), the existence condition for the surface shear waves can be written as

$$(G_2/G_1) \cdot (1 - (c_1^2 - a_2^2)/c_2^2)^{1/2} < \chi^2 < 1 + (G_2/G_1) \cdot (1 + a_2^2/c_2^2)^{1/2} \quad (2.9)$$

In this case, in the absence of a magnetic field, the condition for the surface shear wave existence is

$$(1 - c_2^2/c_1^2)^{1/2} \leq \chi^2 \leq 1 + (G_2/G_1) \quad (2.10)$$

The external magnetic field can lead to the elimination of existing surface waves if

$$H_0 < 2\sqrt{\pi\rho^{(2)}} \cdot [c_1^2 - [1 - (G_2/G_1)^2 \cdot \chi^4]c_2^2]^{1/2} \quad (2.11)$$

From condition (2.10) it follows, that in case of absence of an external magnetic field, shear surface waves always exist.

In the cases both of a weak magnetic field, when $H_0 < 2\sqrt{\pi\rho^{(2)}} \cdot (c_1^2 - c_2^2)^{1/2}$ and a strong magnetic field, when $H_0 > 2\sqrt{\pi\rho^{(2)}} \cdot [c_1^2 - (1 - \chi^4 G_1^2 G_2^{-2}) \cdot c_2^2]^{1/2}$, the elastic surface shear waves disappears.

An external magnetic field can lead to appearance of waves, if

$$2\sqrt{\pi\rho^{(2)}} \cdot (c_1^2 - c_2^2)^{1/2} < H_0 < 2\sqrt{\pi\rho^{(2)}} \cdot [c_1^2 - (1 - \chi^4 G_1^2 G_2^{-2}) \cdot c_2^2]^{1/2} \quad (2.12)$$

Numerical Analysis

For piezoelectric medium, we take the material Cadmium Sulfide CdS, with the following material parameters: $\rho_1 = 4.82 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ - bulk density, $c_{44} = 1.43 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ - shear modulus, $\chi^2 = 0,047$ - coefficient of electro-mechanical coupling, $G_1 = 1.4972 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ - piezoelectrically stiffened elastic shear modulus and $c_1 = 1.7625 \cdot 10^3 \text{ m/sec}$ is the speed of bulk shear waves.

For perfect conducting medium we take the material Tin Sn, with material parameters: $\rho_2 = 7,29 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ is the bulk density and $c_2 = 1.7563 \cdot 10^3 \text{ m/sec}$ are the shear stiffness of, and the velocity of bulk shear waves is $G_2 = 2.2487 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

For this selected materials $c_1 > c_2$ and the condition for the existence of waves (2.10) is also satisfied. In the absence of an external magnetic field, the surface elastic shear waves propagate in both of half-spaces. In the piezoelectric half-space, the surface shear wave is accompanied by oscillations of the electric field, and in the electro conducting half-space we have a purely elastic shear wave. For the weak magnetic field, when $H_0 < 3.558 \cdot 10^6 \text{ a/m}$ or strong magnetic field, when $H_0 > 3.797 \cdot 10^6 \text{ a/m}$, the surface waves in the composite do not exist.

For the intensities of the external magnetic field satisfying to condition (2.12): $3.558 \cdot 10^6 \text{ a/m} < H_0 < 3.797 \cdot 10^6 \text{ a/m}$, there exist the hybrid both of the magnetically

active surface elastic shear wave in electro conducting medium and the electrically active surface elastic shear wave in a piezoelectric localized at the contact interface of these media.

Conclusion

In a composite consisting of 6mm class of hexagonal symmetry piezoelectric medium contacting with perfect conducting medium, in the absence of external constant magnetic field the elastic shear surface waves are always exist localizing at contact interface. In the piezoelectric medium, this wave is accompanied by oscillations of the electric field. The presence of an external magnetic field parallel to the interface can eliminate these surface waves.

At other values of the external magnetic field intensities, the hybrid both of a magnetically active elastic surface shear wave in perfect conducting medium and an electrically active elastic shear wave in a piezoelectric medium is exist localized at the contact interface of these media.

This kind of compound composite makes it is possible, by means of changing intensities of external magnetic field, to control propagation modes of electro-magneto-elastic surface waves in composite devices.

References

- [1] Love A. E. H., «Some problems of geodynamics », first published in 1911 by the Cambridge University Press and published again in 1967 by Dover, New York, USA., Chapt 11: Theory of the propagation of seismic waves,
- [2] Stoneley R., Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids, (1924), Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, Volume 106, Issue 738, pp. 416-428, <http://doi.org/10.1098/rspa.1924.0079>
- [3] Bluestein F.L., A new surface wave in piezoelectric materials, Appl. Phys. Lett. (1968), vol.13, №12. pp. 412–413.
- [4] Гуляев Ю.В. Поверхностные ультразвуковые волны в твердых телах. - Письма в ЖЭТФ, 1969, т.9, вып.1, с.63-65.
- [5] Партон В.З., Кудрявцев Б.А., Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел, 1988, Наука, с.472,
- [6] Royer, D., Dieulesaint, E., Elastic Waves in Solids I. Free and Guided Propagation. 2000, Springer, Berlin, p. 293
- [7] Mechanics of Composite, Hybrid and Multi-Functional Materials, vol. 5, Proceed. Of the 2018 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics, Editors Piyush R. Thakre, Raman P. Singh, G. Slipher,

- [8] Mechanics of Composite, Hybrid and Multi-Functional Materials, vol. 6, Proceed. Of the 2020 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics, Editors Raman P. Singh, V. Chalivendra,
- [9] Mechanics of Composite and Multi-Functional Materials, vol. 6, Proceed. Of the 2017 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics, Editors Piyush R. Thakre, Raman P. Singh, G. Slipher,
- [10] Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., Propagation of Hybrid Electroelastic Waves in Transversally Inhomogeneous Periodic Piezoelectric Structure, (2020), Mechanics. Proc. of NAS of Armenia, 73 (1). pp. 6-22, <http://doi.org/10.33018/73.1.1>
- [11] Avetisyan Ara S., Jilavyan Hakob S., Hybrid of Rayleigh and Gulyaev-Bluestein Electro-Acoustic Waves Near the Inner Surface of a Layered Piezoelectric Composite, Mechanics, Proceed. of NAS RA, (2020), vol. 73, №2, pp. 10-30, <http://doi.org/10.33018/73.2.2>
- [12] Gevorgyan A.V., Avetisyan A.S., About surface waves at the interface between the half-spaces of piezoelectric and electrically conductive materials, In Proc. «Investigations on Mechanics of Deformable Solid », Yerevan, (1983), pp. 77-83 (in Russian)
Геворкян А.В., Аветисян А.С., О поверхностных волнах на границе раздела полупространств, из пьезоэлектрического и электропроводящего материалов, Сб. статей «Исследования по механике твердого деформируемого тела», Ереван, 1983, стр.77-83.

Dedicated to the memory of our Teacher: To Professor Mels Vagharshak Belubekyan

Information about authors:

Avetisyan Ara S. - *Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E: mail - ara.serg.avetisyan@gmail.com,*

Gevorgyan Artak V. - *Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E: mail - AGevorgyanV@gmail.com,*

Avetisyan Levon V. - *Postgraduate in Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E: mail - levon.avetisyan1@ysumail.am ,*

Received 25.08.2021

**OPTIMAL CHOICE OF THE TYPE OF THE FINAL CONFIGURATION AT
THE LIMITED CONTROL OF GRIPPER MOTION OF THE TWO LINK
MANIPULATOR**

Avetisyan V.V.

Keywords: two link manipulator, limited control, the type of the final configuration

Аветисян В.В.

**Оптимальный выбор типа конечной конфигурации при ограниченном
управлении перемещением схвата двузвенного манипулятора**

Ключевые слова: : двузвенный манипулятор, ограниченное управление, конечный тип конфигурации

Рассматривается задача ограниченного управления перемещением точечного схвата плоского двузвенного манипулятора с прямолинейными звеньями равной длины и со вторым статически уравновешенным звеном. На плоскости обобщенных координат манипулятора построены области, позволяющие по заданным координатам терминального положения манипулятора определить управления, обеспечивающие перемещение манипулятора из начального положения покоя в заданное терминальное положение покоя за конечное время без нарушения ограничений на управления, а также выбрать тип конечной конфигурации, при котором время перемещения схвата минимально. Численными расчетами установлено, что оптимальный выбор типа конечной конфигурации может приводить к значительному уменьшению времени перемещения схвата манипулятора. Дана оценка близости результатов, получаемых с помощью рассматриваемом способе управления и оптимальном по быстродействию управлении.

Ավետիսյան Վ.Վ.

**Երկօղակ մանիպուլյատորի վերջնական կոնֆիգուրացիայի տեսակի օպտիմալ ընտրությունը
բռնիչի տեղափոխման սահմանափակ ղեկավարման դեպքում**

Հիմնաբաներ՝ երկօղակ մանիպուլյատոր, սահմանափակ ղեկավարում, վերջնական կոնֆիգուրացիայի տեսակ:

Դիտարկվում է ուղղագիծ և հավասար երկարությամբ օղակներով հարթ երկօղակ մանիպուլյատորի կեդրային բռնիչի տեղաշարժման սահմանափակ ղեկավարման խնդիրը, երբ մանիպուլյատորի երկրորդ օղակը ստատիկորեն հավասարակշռված է: Մանիպուլյատորի ընդհանրացված կոորդինատների հարթության մեջ կառուցված են հասանելի կոնֆիգուրացիաների փրոյեկցիաներ, որոնք հնարավորություն են տալիս ըստ մանիպուլյատորի տերմինալ դիրքի կոորդինատների որոշել այն ղեկավարումները, որոնք ապահովում են մանիպուլյատորի տեղափոխումը սկզբնական հանգստի դիրքից տերմինալ հանգստի դիրք վերջավոր ժամանակում՝ առանց ղեկավարումների վրա դրված սահմանափակումների խախտման, ինչպես նաև ընտրել վերջնական կոնֆիգուրացիայի տեսակը, որի դեպքում բռնիչի տեղափոխման ժամանակը նվազագույնն է: Թվային հաշվարկներով հաստատվել է, որ վերջնական կոնֆիգուրացիայի տեսակի օպտիմալ ընտրությունը կարող է բերել մանիպուլյատորի բռնիչի տեղափոխման ժամանակի զգալի նվազեցմանը: Տրված է արդյունքների մոդիլայիզացիայի գնահատականը, որոնք ստացվում են դիտարկվող ղեկավարման և օպտիմալ ըստ արագագործության ղեկավարման դեպքերում:

We consider the limited control problem for the motion of a point gripper of a plane two-link manipulator with linear links of equal length, the second link being statically balanced. Regions are constructed on the plane of the generalized coordinates of the manipulator that allow, based on the specified coordinates of the manipulator's terminal position, to determine the controls that ensures the manipulator moves from the initial rest position to the specified terminal resting position in a finite time without violating the controls constraints, and also to select the type of final configuration in which the movement time is gripper is minimal. It is established by numerical calculations that the optimal choice of the final configuration can significantly reduce the motion time of the manipulator gripper. An estimate is given for the proximity of the results obtained using the considered control method and time-optimal control.

Introduction

Two-link robotic manipulators are widely used in various branches of modern industry. They are used both independently and as part of the structures of multi-link manipulation robots for which it is these two links that perform the bulk of the robot's motions when it performs various technological operations. One possible approach to the rational calculation of control modes is their optimization according to some manipulator performance criterion (time of transport operations, energy consumption, etc.). An essential component in the formation of algorithms for controlling the motion of a two-link manipulator is taking into account its design and geometric features. For a plane two-link manipulator, each position of the gripper corresponds to two feasible configurations differing by the sign of the angle between the links. Consequently, the performance of the gripper motion to the terminal position depends both on the type of the final configuration and on the control method that brings the manipulator into this configuration. In [1, 2], optimal and suboptimal control laws were constructed for a two-link manipulator with zero-lag links in the two-point problem of moving a gripper with a load. A significant dependence of the time it takes to bring the gripper to the terminal state on the manipulator configuration type was revealed, and the problem of choosing the optimal configuration type was solved. In [3], a graphic-analytical approach was developed to constructing time-suboptimal open-loop controls that bring a two-link manipulator with arbitrary geometric and lag characteristics from the initial rest configuration to an arbitrary final rest configuration. The publications [4–9] deal with optimization methods for solving the problem of controlling robots, including two-link manipulators, and calculating their design parameters. Models of mechanical and electromechanical plane two-link manipulators with statically balanced second link and with arbitrary lag characteristics are considered in [10–13]. Assuming that the manipulator design allows full clockwise and counterclockwise rotation of the links, it was established that the manipulator can be brought to the same final configuration by various combinations of rotations of the links. For each of the two types of final configurations, the graphic-analytical procedure solved the problem of choosing the directions of rotations of the manipulator links and determining the control method for which a given control criterion (the response speed [10, 11], the energy consumption [13], and a combined functional [12]) attains its minimum value. The optimal type of the final configuration was found by a straightforward calculation. In [14, 15], a parametric optimization method was used to construct a quadratic-functional-suboptimal control of the motion of a plane two-link manipulator taking into account feasible manipulator configurations corresponding to given gripper positions at the beginning and end of the motion. In [16], a mechanical model of a two-link manipulator [3] is considered, the design of which allows only half a revolution of the links in the positive and negative directions. For a given terminal position of the manipulator gripper, the type of final configuration and a control method have been determined, which ensure the movement of the gripper to a given final resting position in a minimum time. In [17, 18], using the generalized method of constructing a limited control [19], explicitly found the controls and the corresponding finite time, at which the two-link manipulator of the initial state of rest is brought to any final state of rest in the working zone without violating the restrictions on the speed.

This article discusses a mechanical model of a two-link manipulator [16]. On the plane of the generalized coordinates of the manipulator, regions are constructed that allow, based on the given coordinates of the terminal position of the manipulator, to determine the limited controls that ensures the movement of the manipulator from the initial resting position to a given terminal rest position in a finite time, as well as to determine the type of final configuration at which the time of movement of the gripper is minimal.

1 Design of the manipulator model

Consider a mechanical two-link system consisting of two absolutely rigid links G_1 and G_2 of the same length joined with a hinge O_2 . The link G_1 is attached to a stationary base using the hinge O_1 . The hinges are perfect and cylindrical, and their axes are parallel to each other. A gripper is

mounted on the end of the second link at point O_3 . We will assume that the linear sizes of the gripper are much smaller than the lengths of the links and consider the gripper to be a material point when studying transport motions. The manipulator control under study is accomplished with two independent drives D_1 and D_2 . The first link and the base interact via the drive D_1 and D_2 is responsible for the interaction between the links G_1 and G_2 of the manipulator. The control functions in the manipulator model under study are the torques M_1 and M_2 about the axes O_1 and O_2 generated by the drives D_1 and D_2 , respectively. The system performs a plane-parallel motion in a horizontal plane perpendicular to the axes of the hinges O_1 and O_2 .

The Lagrange equations describing the motion of the system under consideration in the case when the link of the manipulator is statically balanced have the form [3]:

$$(I_1 + m_2 L^2) \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 = M_2, \quad (1.1)$$

Here we have introduced the following notation: φ_1 is the angle between the axis O_1x and the straight line O_1O_2 ; φ_2 is the angle between the axis O_1x and the straight line O_2O_3 ; $L = |O_1O_2| = |O_2O_3|$ is the length of the first and second links; I_1 and I_2 are the moments of inertia of the links G_1 and G_2 about the axes of the hinges O_1 and O_2 , respectively; and m_2 is the mass of the link G_2 . We assume that the positive sense of the angles φ_1 and φ_2 is counterclockwise from the line O_1x .

The control torques M_1 and M_2 are subject to the constraints

$$|M_1| \leq M_1^0, \quad |M_2| \leq M_2^0, \quad (1.2)$$

where M_1^0 and M_2^0 are given constants.

2 Statement of the problem

The manipulator control objective is to bring the gripper into a given spatial position by rotating the manipulator links in the positive and negative directions within a half turn. It follows from the geometry of the two-link manipulator that there exists a one-to-one correspondence

$$x = L(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2), \quad y = L(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2). \quad (2.1)$$

between the Cartesian coordinates x, y of the projection of the point O_3 and the generalized coordinates φ_1, φ_2 .

However, the angles φ_1, φ_2 are not uniquely determined by the Cartesian coordinates x, y . Let the working area of the manipulator be a semicircle $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4L^2, x > 0\}$. We solve system (2.1) with respect to φ_1, φ_2

$$\varphi_i(x, y) = \arctg \frac{y}{x} + (-1)^i \frac{1}{2} K \delta, \quad \delta = \arccos \left[\frac{x^2 + y^2 - 2L^2}{2L^2} \right], \quad K = \pm 1, \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

It follows from (2.2) that each gripper position (x, y) inside the manipulator working area R is associated with two configurations of the two-link manipulator that differ in the sign of the angle $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ between the links. The quantity δ in (2.2) is the angle at the vertices O_1 and O_3 of the triangle $O_1O_2O_3$. As follows from (2.2), the values $K = 1$ and $K = -1$ are associated with the configurations for which $\theta > 0$ and $\theta < 0$, respectively; i.e. $K = \text{sign} \theta$. Let us denote them by $\{\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\}_K$, $K = \pm 1$. In what follows, the arguments (x, y) of the functions $\varphi_i(x, y)$ will be dropped.

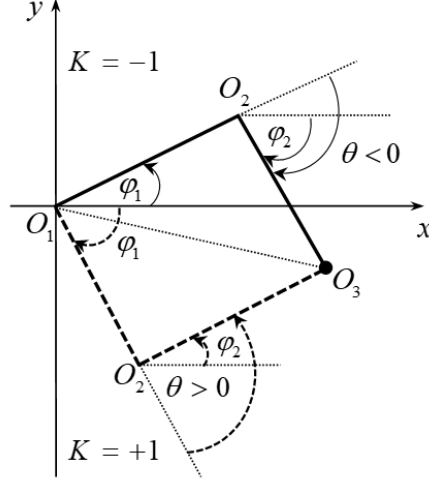


Fig. 1

Thus, on the plane $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2 : -\pi \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi\}$ of manipulator's generalized coordinates, the points (φ_1, φ_2) and (φ_2, φ_1) , corresponding to the configurations $\{\varphi_1, \varphi_2\}_{K=+1}$ and $\{\varphi_1, \varphi_2\}_{K=-1}$, respectively, are symmetric about the bisector of quadrants I and III, and one has

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_2) &\in \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 \geq \varphi_1\} = \Phi(+1), \\ (\varphi_2, \varphi_1) &\in \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 \leq \varphi_1\} = \Phi(-1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

We will consider system (1.2) under the initial conditions

$$\varphi_i(0) = \varphi_i^0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.4)$$

which are associated, according to (2.1), with the initial gripper rest position

$$\begin{aligned} x(0) &= L(\cos \varphi_1^0 + \cos \varphi_2^0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ y(0) &= L(\sin \varphi_1^0 + \sin \varphi_2^0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Assume that we are given distinct initial gripper position (x^0, y^0) (2.5) and final gripper position (x^T, y^T) in the manipulator working area R . Since the position (x^T, y^T) is associated with the two configurations $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_K$, $K = \pm 1$, for the terminal conditions for system (1.2) we take the conditions

$$\varphi_i|_K(T) = \varphi_i^T|_K, \quad \dot{\varphi}_i|_K(T) = 0, \quad i = 1, 2, \quad K = \pm 1, \quad (2.6)$$

which are uniquely associated with one and the same gripper rest position

$$\begin{aligned} x(T) &= L(\cos \varphi_1^T|_K + \cos \varphi_2^T|_K) = x^T, \quad \dot{x}(T) = 0, \\ y(T) &= L(\sin \varphi_1^T|_K + \sin \varphi_2^T|_K) = y^T, \quad \dot{y}(T) = 0, \end{aligned} \quad K = \pm 1. \quad (2.7)$$

System (1.2), (1.3) is completely controllable in the class of piecewise continuous functions $M_1(t)$ and $M_2(t)$ [3], therefore, for given edge gripper states (2.5), (2.7), each combination of conditions (2.6) ($K = +1, -1$) and each feasible controls M_1 and M_2 are associated with some transfer time $T^{(K)}$. From the above it follows that there is a dependency for the travel time

$$T^{(K)} = T [\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\} |_K, M_1, M_2], \quad K = \pm 1. \quad (2.8)$$

Consider the following problem of control of the manipulator gripper motion with allowance for the final configuration type.

Determine the type $K = \pm 1$ of the final configuration (2.6) and the law of change of the controls $M = M_1(t)$ and $M = M_2(t)$, that ensure the minimum of functionality (2.8)

$$T^* = \min_{K=\pm 1} T (\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\} |_K, M_1, M_2) \quad (2.9)$$

when bringing the manipulator gripper from the initial rest state (2.5) into the given rest state (2.8) without violation of restrictions (1.2).

3 Construction of bounded controls

In (1.1), (1.2), (2.4) - (2.7) we pass to the dimensionless variables

$$\begin{aligned} t' &= (M_2^0 / (m_2 L^2))^{1/2} t, \quad I'_i = I_i / (m_2 L^2), \quad M'_i = M_i / M_2^0, \\ x' &= x / L, \quad y' = y / L, \quad \varphi'_i = \varphi_i - \varphi_i^0, \quad \varphi'^{0,T}_i = \varphi_i^{0,T} - \varphi_i^0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

If now we omit the primes, then relations (1.1), (1.2), (2.4) are simplified $\varphi_{1,2}^0 = 0$, $m_2 = 1$, $L = 1$, $M_2^0 = 1$, and system (1.1), the constraints (1.2), and the boundary conditions (2.4), (2.6) acquire the form

$$(I_1 + 1)\ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad (3.2)$$

$$I_2\ddot{\varphi}_2 = M_2,$$

$$|M_1| \leq M_1^0, \quad |M_2| \leq 1, \quad (3.3)$$

$$\varphi_i(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.4)$$

$$\varphi_i |_K (T) = \varphi_i^T |_K, \quad \dot{\varphi}_i |_K (T) = 0, \quad i = 1, 2; \quad K = \pm 1. \quad (3.5)$$

First, consider the problem of constructing a limited control $M = (M_1, M_2)$ of the system (3.2) - (3.5) without taking into account the type of the final configuration. When solving this problem under the boundary conditions (3.5), we omit the parameter K .

The change of variables

$$q_1 = (I_1 + 1)\varphi_1, \quad q_2 = I_2\varphi_2 \quad (3.6)$$

reduces system (3.2)-(3.5) to the form

$$\ddot{q}_1 = M_1 - M_2, \quad \ddot{q}_2 = M_2, \quad (3.7)$$

$$|M_1| \leq M_1^0, \quad |M_2| \leq 1, \quad (3.8)$$

$$q_1(0) = q_1^0 = 0, \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad q_2(0) = q_2^0 = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0 \quad (3.9)$$

$$q_1(T) = q_1^T = (I_1 + 1)\varphi_1^T, \quad \dot{q}_1(T) = 0, \quad q_2(T) = q_2^T = I_2\varphi_2^T, \quad \dot{q}_2(T) = 0. \quad (3.10)$$

The phase vector of system (3.7) is formed by the variables $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2$. We represent the system of equations (3.7) in the vector form

$$\dot{x} = Ax + BM, \quad (3.11)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)^T, \quad M = (M_1, M_2)^T$$

with constant matrices A and B having dimensions 4x4 and 4x2, and a fundamental matrix $\Omega(t)$, respectively

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

We write the initial (3.9) and final (3.10) conditions in the form

$$x(0) = 0, \quad (3.13)$$

$$x(T) = x^1 = (x_1^1, 0, x_3^1, 0)^T. \quad (3.14)$$

We will use the well-known approach to constructing the control [19]. Following the indicated approach, we seek the control solving the problem without taking into account constraints (3.8) in the form

$$M(t) = Q^T(t)C, \quad Q(t) = \Omega^{-1}(t)B \quad (3.15)$$

Here $C = (C_1, C_2, C_3, C_4)^T$ is the constant vektor determined from the system of the following linear algebraic equation

$$R(T) \cdot C = \Phi^{-1}(T)x^1, \quad R(T) = \int_0^T Q(t)Q^T(t)dt. \quad (3.16)$$

Since the system (3.11), (3.12) is completely controllable, then the matrix $R(T)$ is nondegenerate [19] and therefore (3.16) has a unique solution

$$C = R^{-1}(T) \Omega^{-1}(T) x^1, \quad x^1 = (x_1^1, 0, x_3^1, 0)^T. \quad (3.17)$$

After calculating the matrices $Q^T(t), \Omega^{-1}(T), R^{-1}(T), C$, taking into account (3.12), the components of the sought vector control (3.15) can be represented in the form

$$M_1(t) = g(t, T)x_1^1 + g(t, T)x_3^1, \quad M_2(t) = g(t, T)x_3^1, \quad g(t, T) = -12T^{-3}t + 6T^{-2}. \quad (3.18)$$

Solution $x(t)$ of system (3.11) - (3.13) under control $M(t)$ with components (3.18) for any $T > 0$ satisfies the boundary condition (3.14). In this case, however, the components of the constructed control do not necessarily satisfy the imposed constraints (3.8). In order to take these constraints into account, let us estimate the control modules M_1 and M_2

$$|M_1(t)| \leq |g(t, T)| |x_1^1 + x_3^1|, \quad |M_2| \leq |x_3^1| |g(t, T)|. \quad (3.19)$$

Since the linear function $g(t, T)$ (3.17) decreases monotonically on the interval $[0, T]$, taking maximum $g(0, T) = 6T^{-2}$ and minimum $g(T, T) = -6T^{-2}$ values at the ends of this interval, respectively, then inequalities (3.19) can be rewritten as

$$|M_1| \leq 6 |x_1^1 + x_3^1| T^{-2}, \quad |M_2| \leq 6 |x_3^1| T^{-2}. \quad (3.20)$$

If now the required transition time T of the system (3.11), (3.12) from state (3.13) to the state (3.14) is chosen from the relation

$$T = \max(T_1, T_2), \quad (3.21)$$

where

$$T_1 = \sqrt{6|x_1^1 + x_3^1|(M_1^0)^{-1}}, \quad T_2 = \sqrt{6|x_3^1|} \quad (3.22)$$

is the roots of the following equations $6|x_1^1 + x_3^1|T^{-2} = M_1^0$, $6|x_3^1|T^{-2} = 1$ respectively, then constraints (3.7) will be satisfied for all $t \in [0, T]$.

From (3.21), (3.22) we obtain

$$T = \begin{cases} T_1 = \sqrt{6|x_1^1 + x_3^1|(M_1^0)^{-1}}, & \text{if } M_1^0|x_3^1| < |x_1^1 + x_3^1|, & (a) \\ T_2 = \sqrt{6|x_3^1|}, & \text{if } M_1^0|x_3^1| > |x_1^1 + x_3^1|, & (b) \\ T_1 = T_2, & \text{if } M_1^0|x_3^1| = |x_1^1 + x_3^1|. & (c) \end{cases} \quad (3.23)$$

After the time of motion (3.23) is determined for a given final state x^1 (3.14), the control functions $M_1(t)$ and, $M_2(t)$ can be calculated at each moment using formulas (3.18).

In the initial variables (3.6), (3.11), relations (3.18), (3.23) take the form

$$\begin{aligned} M_1(t) &= (-12T^3t + 6T^2)(I_1 + 1)\varphi_1^T + (-12T^3t + 6T^2)I_2\varphi_2^T, \\ M_2(t) &= (-12T^3t + 6T^2)I_2\varphi_2^T, \end{aligned} \quad (3.24)$$

where

$$T = \begin{cases} T_1 = \sqrt{6|(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T|(M_1^0)^{-1}}, & \text{if } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1, & (a) \\ T_2 = \sqrt{6|I_2\varphi_2^T|}, & \text{if } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2, & (b) \\ T_1 = T_2, & \text{if } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi' \cup \Phi''. & (c) \end{cases} \quad (3.25)$$

On the plane of finite configurations $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, the regions Φ_i , $i = 1, 2$ and Φ' , Φ'' , appearing in formulas (3.25) are determined as follows:

$$\Phi_1 = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi : \begin{aligned} &\{-A\varphi_1^T < \varphi_2^T < B\varphi_1^T, \varphi_1^T \geq 0\} \cup \\ &\cup \{B\varphi_1^T < \varphi_2^T < -A\varphi_1^T, \varphi_1^T \leq 0\} \end{aligned} \right\}, \quad (3.26)$$

$$\Phi_2 = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi : \begin{aligned} &\{B\varphi_1^T < \varphi_2^T, \varphi_1^T \geq 0\} \cup \{-A\varphi_1^T < \varphi_2^T, \varphi_1^T \leq 0\} \cup \\ &\cup \{\varphi_2^T < -A\varphi_1^T, \varphi_1^T \geq 0\} \cup \{\varphi_2^T < B\varphi_1^T, \varphi_1^T \leq 0\} \end{aligned} \right\}, \quad (3.27)$$

$$\Phi' = \{(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi : \varphi_2^T = -A\varphi_1^T\}, \Phi'' = \{(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi : \varphi_2^T = B\varphi_1^T\}, \quad (3.28)$$

where

$$A = (I_1 + 1)(M_1^0 + 1)^{-1}I_2^{-1}, \quad B = (I_1 + 1)(M_1^0 - 1)^{-1}I_2^{-1}. \quad (3.29)$$

Thus, according to the given values φ_1^T, φ_2^T , the time of the process (3.25) is first determined, and then the desired controls (3.24), at which the required displacement of the manipulator is carried out without violating the constraints (3.3).

4 Determining the optimal type of the manipulator's final configuration

Let us assume that the manipulator is characterized by the following dimensional parameters appearing in (1.1), (1.2)

$$L = 1 \text{ m}, m_2 = 4 \text{ kg}, I_1 = I_2 = (10/3) \text{ kg} \cdot \text{m}^2, M_1^0 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}, M_2^0 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad (4.1)$$

which correspond to the manipulator, the links of which are the same homogeneous rods. After passing to dimensionless parameters according to (3.1), we obtain from (4.1) that

$$L = 1, m_2 = 1, I_1 = I_2 = 1/3, M_1^0 = 1, M_2^0 = 1. \quad (4.2)$$

Note that the problem solving procedure does not substantially change for other geometric and physical manipulator parameters.

Let us proceed to finding the minimum with respect to the parameter K in (2.9). Let the end position of the gripper $(x^T, y^T) \in R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x > 0\}$ be fixed. Then from formula (2.2) we find two terminal points $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi(+1)$ and $(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \Phi(-1)$ (2.3), which, according to (2.2), are associated with the manipulator configurations $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=+1}$ and $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=-1}$, respectively. In both cases, we write down the constructed controls, in which the superscripts $(+)$ and $(-)$ will correspond to the values $K = +1$ and $K = -1$, respectively.

If $K = +1$, then according to (2.3) $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi(+1)$. Then (3.24) takes the form

$$\begin{aligned} M_1^{(+)}(t) &= \left(-\frac{12}{T^{(+)}^3}t + \frac{6}{T^{(+)}^2}\right)(I_1 + 1)\varphi_1^T + \left(-\frac{12}{T^{(+)}^3}t + \frac{6}{T^{(+)}^2}\right)I_2\varphi_2^T, \\ M_2^{(+)}(t) &= \left(-\frac{12}{T^{(+)}^3}t + \frac{6}{T^{(+)}^2}\right)I_2\varphi_2^T, \end{aligned} \quad (4.3)$$

where

$$T^{(+)}(\varphi_1^T, \varphi_2^T) = \begin{cases} T_1^{(+)} = \sqrt{6|(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T|}, & (a) \\ \text{if } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Psi_1(+1) \cup \left(\bigcup_{i=3}^6 \Psi_i(+1)\right), & \\ T_2^{(+)} = \sqrt{6|I_2\varphi_2^T|}, \text{ if } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Psi_2(+1), & (b) \\ T_1^{(+)} = T_2^{(+)}, \text{ if } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi(+1) \cap (\Phi' \cup \Phi''). & (c) \end{cases} \quad (4.4)$$

The following notation is introduced in formula (4.4):

$$\begin{aligned} \Psi_1(+1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(+1) : \varphi_1^T \leq \varphi_2^T, \varphi_1^T \geq 0\}, \\ \Psi_2(+1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(+1) : -A\varphi_1^T \leq \varphi_2^T, \varphi_1^T \leq 0\}, \\ \Psi_3(+1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(+1) : -\varphi_1^T \leq \varphi_2^T \leq -A\varphi_1^T, \varphi_1^T \leq 0\}, \\ \Psi_4(+1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(+1) : -A^{-1}\varphi_1^T \leq \varphi_2^T \leq -\varphi_1^T, \varphi_1^T \leq 0\}, \\ \Psi_5(+1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(+1) : 0 \leq \varphi_2^T \leq -A^{-1}\varphi_1^T, \varphi_1^T \leq 0\}, \\ \Psi_6(+1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(+1) : \varphi_1^T \leq \varphi_2^T \leq 0, \varphi_1^T \leq 0\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

where, taking into account (3.29), (4.2), $A = 2$. At the same time $\left(\bigcup_{i=1}^6 \Psi_i(+1)\right) = \Phi(+1)$.

Since the domains $\Phi(+1)$ and $\Phi(-1)$ (2.3) are symmetric to each other about the straight line $\varphi_2^T = \varphi_1^T$, we conclude that the change of variables $\varphi_1^T \rightarrow \varphi_2^T$, $\varphi_2^T \rightarrow \varphi_1^T$ transforms the domains

$\Psi_i(+1)$, $i = 1, \dots, 6$, into the respective domains $\Psi_i(-1)$, $i = 1, \dots, 6$, symmetric about the straight line $\varphi_2^T = \varphi_1^T$.

Therefore, if $K = -1$, then the point $(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \Phi(-1)$. Then from (3.24) we obtain

$$\begin{aligned} M_1^{(-)}(t) &= \left(-\frac{12}{T^{(-)3}}t + \frac{6}{T^{(-)2}}\right)(I_1 + 1)\varphi_2^T + \left(-\frac{12}{T^{(-)3}}t + \frac{6}{T^{(-)2}}\right)I_2\varphi_1^T, \\ M_2^{(-)}(t) &= \left(-\frac{12}{T^{(-)3}}t + \frac{6}{T^{(-)2}}\right)I_2\varphi_1^T, \end{aligned} \quad (4.6)$$

where

$$T^{(-)}(\varphi_2^T, \varphi_1^T) = \begin{cases} T_1^{(-)} = \sqrt{6|(I_1 + 1)\varphi_2^T + I_2\varphi_1^T|}, & (a) \\ \text{if } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \left(\bigcup_{i=1}^4 \Psi_i(-1)\right) \cup \Psi_6(-1), & \\ T_2^{(-)} = \sqrt{6|I_2\varphi_1^T|}, \text{ if } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \Psi_5(-1), & (b) \\ T_1^{(-)} = T_2^{(-)}, \text{ if } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \Phi(-1) \cap (\Phi' \cup \Phi''). & (c) \end{cases} \quad (4.7)$$

where

$$\begin{aligned} \Psi_1(-1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(-1) : 0 \leq \varphi_2^T \leq \varphi_1^T\}, \\ \Psi_2(-1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(-1) : -A^{-1}\varphi_1^T \leq \varphi_2^T \leq 0, \varphi_1^T \geq 0\}, \\ \Psi_3(-1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(-1) : -\varphi_1^T \leq \varphi_2^T \leq -A^{-1}\varphi_1^T, \varphi_1^T \geq 0\}, \\ \Psi_4(-1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(-1) : -A\varphi_1^T \leq \varphi_2^T \leq -\varphi_1^T, \varphi_1^T \geq 0\}, \\ \Psi_5(-1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(-1) : \varphi_2^T \leq -A\varphi_1^T, \varphi_1^T \geq 0\}, \quad A = 2, \\ \Psi_6(-1) &= \{\varphi_1^T, \varphi_2^T \in \Phi(-1) : \varphi_2^T \leq \varphi_1^T, \varphi_1^T \leq 0\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Thus, calculating the minimum in (2.9), taking into account (4.5), (4.6) and (4.7), (4.8), reduces to choosing the smallest of two times:

$$T^* = \min \left[T^{(+)}(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \Big|_{(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Psi_i(+1)}, T^{(-)}(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \Big|_{(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \Psi_i(-1)}, 1 \leq i \leq 6 \right]. \quad (4.9)$$

Calculating the minimum in (4.9) for the numerical values of (4.2), as a result, we obtain

$$T^* = \begin{cases} T_1^{(+)}(\varphi_1^T, \varphi_2^T), \text{ if } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Psi_1(+1) \cup \Psi_3(+1), & (1) \\ T_2^{(+)}(\varphi_1^T, \varphi_2^T), \text{ if } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Psi_2(+1), & (2) \\ T_1^{(-)}(\varphi_2^T, \varphi_1^T), \text{ if } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \Psi_4(-1) \cup \Psi_6(-1), & (3) \\ T_2^{(-)}(\varphi_2^T, \varphi_1^T), \text{ if } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \Psi_5(-1), & (4) \\ T_1^{(+)}(\varphi_1^T, \varphi_2^T) = T_1^{(-)}(\varphi_2^T, \varphi_1^T), \text{ if } \varphi_2^T = \varphi_1^T. & (5) \end{cases} \quad (4.10)$$

where $\Psi_i(\pm 1)$, $i = 1, \dots, 6$ determined from (4.5), (4.8). Let us provide a numerical example. For the manipulator with the dimensionless parameters in (4.2), we take the gripper initial and terminal coordinates in the form

$$x^0 = 2, \quad y^0 = 0, \quad x^T = 1, \quad y^T = -0.5. \quad (4.11)$$

The values of the coordinates of the gripper initial and terminal states (4.11) are associated with the initial configuration $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0$ and with the two terminal

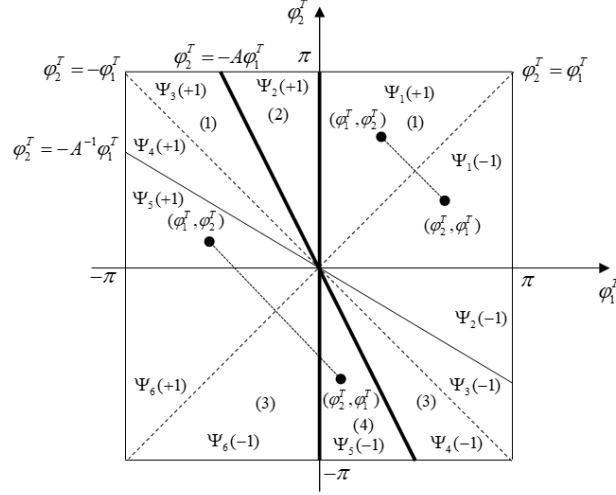


Fig. 2

configurations (2.2), which are in turn associated with the two points, symmetric about the straight line $\varphi_2^T = \varphi_1^T$, on the angular manipulator plane (the angles are given in radian and angle degree measures):

$$\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=+1} : (\varphi_1^T, \varphi_2^T) = (-1.699 \text{ rad}, 0.514 \text{ rad}) = (-97^0 37', 29^0 46'), \quad (4.12)$$

$$\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=-1} : (\varphi_2^T, \varphi_1^T) = (0.514 \text{ rad}, -1.699 \text{ rad}) = (29^0 46', -97^0 37'). \quad (4.13)$$

In the case under consideration, the point $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Psi_5(+1)$, and the point $(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \Psi_5(-1)$ (fig. 2). Consequently, according to formula (4.10) (4), the minimum travel time of the gripper is achieved at point (4.13), which corresponds to the final configuration corresponding to the value $K = -1$. In this case, one should use the controls $M_1^{(-)}, M_2^{(-)}$ (4.6), in which the travel time is determined by the formula (4.7)(b): $T^* = T_2^{(-)} = \sqrt{6 |I_2 \varphi_1^T|}$ and equal $T^* = 1,84 (2.92 \text{ s})$. The figure in parentheses give dimensional values of these times with the use of the conversion formulas (3.1). For comparison, note that if we choose the terminal configuration (4.12) ($K = +1$), then the gripper transfer time turns equal $T_1^{(+)}(\varphi_1^T, \varphi_2^T) = \sqrt{6 |(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T|}$ (4.4) (a) and out to be much worse; namely, $T_1^{(+)} = 3.54 (5.59 \text{ s})$.

The constructed controls are not time optimal, but simple enough for calculation and practical implementation. It is established by formulas (3.25) - (3.28) that

- 1) the domains Φ_1 and Φ_2 up to notation, coincide with the domains constructed in a similar time-optimal problem [16],
- 2) between the time of optimal movement T^0 [16] and the time (3.25) there is the following ratio: $T^0/T^* \approx 0.816$. For comparison, we present the results of calculating the time-optimal movement T^0 for the end positions of the gripper (4.12) and (4.13). With the final configuration $K = -1$ the time-optimal is equal $T^0 = 1.5 (2.37 \text{ s})$ and with $K = +1$ is equal $T^0 = 2.89 (4.57 \text{ s})$.

Conclusions

On the configuration plane of a two-link manipulator with a second statically balanced link, regions are constructed that allow, based on a given terminal position of the manipulator, to

determine the laws of controls change, which brings the manipulator from the initial resting configuration to the terminal resting configuration in a finite time without violating controls constraints, and also to choose the type of final configuration for which the time of movement of the gripper is minimal. It has been established by numerical calculations that the optimal choice of the type of the final configuration can lead to a significant decrease in the travel time. An estimate is given for the proximity of the results obtained using the considered control method and time-optimal control.

The work was supported by the Science Committee of RA, in the frames of the research project №21 T-2D255

References

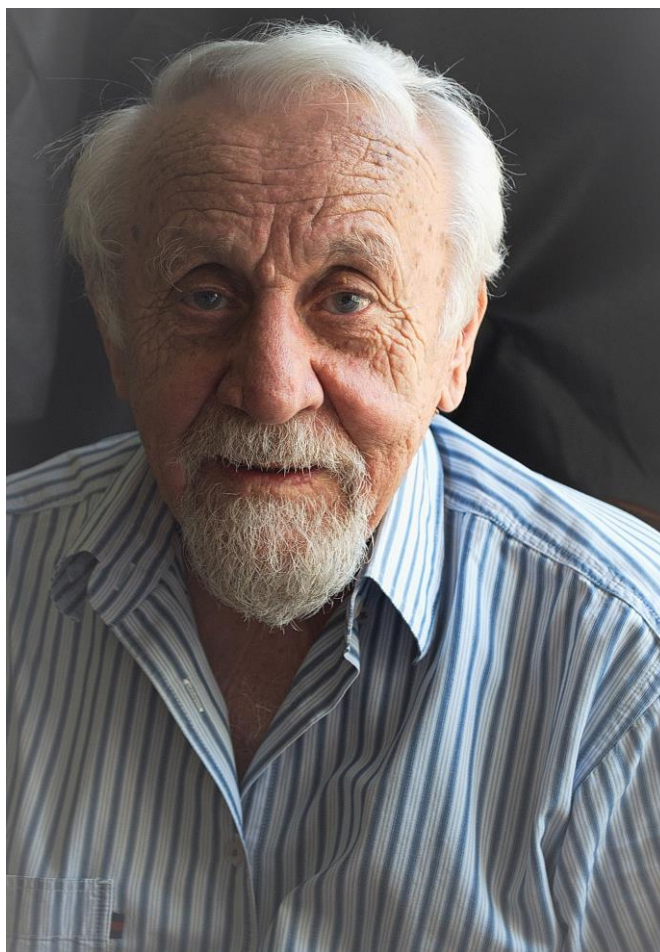
- [1] Bolotnik N.N., Kaplunov A.A. Optimal linear motions of cargo by a two-link manipulator // *Izv.Akad. Nauk SSSR Tekh. Kibern.* 1982. No. 1. P. 68–74.
- [2] Bolotnik N.N., Kaplunov A.A. Optimizing the control and configurations of a two-link manipulator // *Izv. Akad. Nauk SSSR Tekh. Kibern.* 1983. No. 4. P. 123–131.
- [3] Avetisyan V.V., Bolotnik N.N., Chernousko F.L. Optimal Programmed Motions of a Two-Link Manipulator // *Soviet J. Comput. Syst. Sci.* 1985. Vol. 23. No. 5. P. 65–73.
- [4] Akulenko L.D., Bolotnik N.N., Chernousko F.L., Kaplunov A.A. Optimal Control of Manipulation Robots // *IFAC Proc.* 1985. Vol. 17. Issue 2. P. 311–315.
- [5] Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Optimization of control modes of manipulation robots with regard of the energy consumption // *Soviet J. Comput. Syst. Sci.* 1987. Vol. 25. No. 3. P. 100–107.
- [6] Chernousko F.L., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Time-Optimal Control for Robotic Manipulators // *Optimal Control Applications and Methods.* 1989. Vol. 10. Issue 4. P. 293–311.
- [7] Bolotnik N.N., Chernous'ko F.L. Optimizing control of manipulation robots // *Izv. Akad. Nauk SSSR Tekh. Kibern.* 1990. No. 1. P. 189–238.
- [8] Meier E.B., Bryson A.E. Efficient Algorithm for Time-Optimal Control of a Two-Link Manipulator // *J. Guidance, Control and Dynamics.* 1990. Vol. 13. Issue 5. P. 859–866.
- [9] Chernousko F.L. Optimization in Control of Robots // *Computational Optimal Control.* Basel: Birkhause, 1994. P. 19–28.
- [10] Avetisyan V.V., Ovakimyan N.V. Optimal plane-parallel motions of a two-link manipulator // *Izv. Ross. Akad. Nauk. Teoriya. Sist. Upr.* 1995. No. 3. P. 161–168.
- [11] Avetisyan V.V., Hovakimyan N.V. Constructing the Regions of Admissible States of Positioning for a Two-Link Manipulator with Account of Speed Constraints // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 1997. Vol. 36. Issue 4. P. 638–646.
- [12] Avetisyan V.V. Optimizing configurations and directions of rotations of links in a two-link manipulator // *Proceedings of the NAS.* 2000. Vol. 51. Issue 4. P. 65–71.
- [13] Avetisyan V.V. Movements of an Electromechanical Manipulator Robot Optimal with Respect to Energy Rpenditure // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 1996. Vol. 35. Issue 4. P. 679–685.
- [14] Demydyuk M.V., Hoshovs'ka N. Parametric Optimization of the Transport Operations of a Two-Link manipulator // *J. Math. Sci.* 2019. Vol. 238. No. 2. P. 174–188.

- [15] Demydyuk M.V., Demydyuk V.M. Parametric optimization of the kinematic structure and the movement of the two-link manipulator // Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems // 2020. Vol. 48. P. 36-48.
- [16] Avetisyan V.V. Time-Optimal Control of Gripper Motion in a Two-Link Manipulator with Allowance for the Terminal Configuration // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82. No. 2. P. 189-199.
- [17] Avetisyan V.V. Constrained control of linear dynamic system with restrictions velocity // Proceedings of the NAS. 2000. Vol. 53. Issue 4. P. 48-55.
- [18] Avetisyan V.V. Control of electromechanical manipulator with restrictions on tension and current // Proceedings of the NAS. 2002. Vol. 55. Issue 1. P. 68-74.
- [19] Chernousko F.L. On the construction of a bounded control in oscillatory systems // J. Appl. Math. Mech. 1988. Vol. 52. Issue 4. P. 426-433.

Information about authors:

Vahan Vardges Avetisyan - Doctor of physical and mathematical sciences, professor. Institute of Mechanics of NAS RA, tel. (+374) 94 44 95 60, email - vanavet@yahoo.com,

Received 20.09.2021



Белубекян Мелс Вагаршакович

(1935-2021)

После 55-летней научно-педагогической деятельности, на 86 году жизни попрощался с земной жизнью профессор, главный научный сотрудник Института механики Национальной академии наук Армении – Белубекян Мелс Вагаршакович.

Армянская школа механики потеряла талантливого ученого, умелого педагога, преданного патриота и гражданина своей страны.

Профессор М.В.Белубекян родился 8 мая 1935г. в г. Ереване. В 1958 г. окончил физико-математический факультет Ереванского государственного университета, а в 1964 г. – аспирантуру Ленинградского политехнического института под руководством профессора Лойцянского Л.Г.

Научные исследования М.В.Белубекяна посвящены современным проблемам механики сплошной среды и получили широкое признание в научных кругах. Он предложил и развивал теорию токонесящих пластин и оболочек, является одним из основателей теории магнитоупругости тонкостенных тел. Со своими учениками, М.В.Белубекян разработал и создал

эффективные методы решения задач в области распространения волн в электропроводящих и пьезоэлектрических средах.

Профессор М.В.Белубекян автор или соавтор более 250 научных статей и около 15 монографий, которые послужили основой для успешного развития новых направлений механики в Армении.

В 1972 году, в Институте Механики НАН РА, М.В.Белубекян со своими молодыми коллегами организовал научный семинар «Волновые процессы». Действующий до сих пор семинар, под руководством профессора М.В.Белубекяна, получил широкое признание в среде ученых, и играет огромную роль в подготовке молодых научных кадров.

Долгие годы М.В.Белубекян работал в Институте механики НАН РА. Он объединил вокруг себя большую группу молодых ученых. Под его непосредственным руководством были защищены более двадцати кандидатских и докторских диссертаций.

Проф. М.В.Белубекян внес огромный вклад в развитие механики. Подготовленные им высококвалифицированные ученые-механики работают и преподают в научных учреждениях и вузах Армении. Вы

Профессор М.В.Белубекян являлся членом Национальных Комитетов по теоретической и прикладной механике Армении и России, его научная и преподавательская работа была удостоена правительственных наград, в том числе медали "Анания Ширакаци" Республики Армения.

Многие годы, являясь членом редколлегии журнала Известия Национальной Академии Наук Армении «Механика», своим принципиальным отношением и своей заботливостью по отношению к коллегам, в особенности, молодым, профессор М.В.Белубекян снискал уважение авторов нашего журнала.

Вечная память о жизни и деятельности Мэлса Вагаршаковича навсегда останется в наших сердцах.

Дирекция Института Механики Национальной Академии Наук Армении
Редакция журнала Известия Национальной Академии Наук Армении
«Механика»
Национальный Комитет по Теоретической и Прикладной Механике Армении

СОДЕРЖАНИЕ 2021 г., том 74 №3

В.Н.Акопян, А.А. Амирджанян. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с круговой дискообразной трещиной	3
Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об устойчивости панели с свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости сверхзвукового потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов	19
Саакян А.В., Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Смешанная задача для упругой составной полосы, содержащей внутреннюю трещину, выходящую на линию раздела материалов	37
Аветисян Ара С., Геворкян А.В., Аветисян Л.В. Гибрид поверхностных волн сдвига на границе раздела пьезоэлектрического и электропроводящего полупространств.....	53
Аветисян В.В. Оптимальный выбор типа конечной конфигурации при ограниченном управлении перемещением схвата двузвенного манипулятора.....	61
Памяти Белубекяна М.В.	73

CONTENTS 2021, v. 74 №3

V.N.Hakobyan, H.A.Amirjanyan Axisymmetric mixed boundary problem for a composite space with a circular disc-shaped crack	3
M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan On the stability of a panel with a free edge compressed in a direction perpendicular to the velocity of a supersonic gas flow in the presence of concentrated inertial masses and moments	19
Sahakyan A.V., Sargsyan V.G., Khachikyan A.S. Mixed Boundary Value Problem for an Elastic Composite Strip Containing an Internal Crack Terminating at the Interface of Materials.....	37
Avetisyan Ara S., Gevorgyan A.V., Avetisyan L.V. Hybrid of surface shear waves at the interface between piezoelectric and electrically conductive half-spaces.....	53
Avetisyan V.V. Optimal Choice of the Type of the Final Configuration at the Limited Control of Gripper Motion of the Two Link Manipulator.....	61
M.V. Belubekyan necrology	73

Վ.Ն.Հակոբյան, Հ.Ա.Ամիրջանյան Առանցքահամաչափ խառը եզրային խնդիր շրջանային սկավառակաձև ճաք պարունակող բաղադրյալ տարածության համար3

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ. Գերձայնային գազի հոսքում սեղմված երկարաձիգ սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և մոմենտների առկայությանը19

Սահակյան Ա.Վ., Սարգսյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս. Խառը եզրային խնդիր նյութերի բաժանման գծի վրա դուրս եկող ներքին ճաք պարունակող առաձգական բաղադրյալ շերտի համար37

Ավետիսյան Արա Ս., Գևորգյան Ա.Վ., Ավետիսյան Լևոն Վ. Սահքի մակերևութային ալիքների հիբրիդ՝ պիեզոէլեկտրական և էլեկտրական հաղորդիչ կիսատարածությունների ամրակցման միջերեսին47

Ավետիսյան Վ.Վ. Երկօղակ մանիպուլյատորի վերջնական կոնֆիգուրացիայի տեսակի օպտիմալ ընտրությունը բռնիչի տեղափոխման սահմանափակ դեկավարման դեպքում62

Մ.Վ. Բելուբեկյանի հիշատակին73

Сдано в производство 27.10.2021 г.

Формат 70 x 100¹/₁₆ . Печ. лист – 43/4

Заказ № 1119. Тираж 150.

Цена договорная.

Типография Издательства НАН РА

Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24

Правила для авторов

«Известия НАН Армении. Механика» освещает вопросы в области теоретической и прикладной механики: теорий упругости, оболочек и пластин, пластичности, ползучести и вязкоупругости, электромагнитно-упругости, аэрогидромеханики, устойчивости движения, строительной механики и техники экспериментирования.

1. Статьи, представляемые в «Известия НАН Армении. Механика», должны сопровождаться рекомендацией на опубликование от семинара, на котором доложена работа.
2. Статьи представляются на армянском, русском или английском языках в двух экземплярах с указанием УДК и должны включать **ключевые слова** и **краткие аннотации** на трёх языках, в которых не допускаются ссылки на цитированную литературу и громоздкие формулы. Отдельно в основном тексте выделить: **введение, постановку задачи, решение и заключение.**
3. Вместе с оригиналом статьи необходимо представить электронную версию в среде Word: бумага – формат A4; **Fonts – Times New Roman, Sylfaen.** Поля – слева и справа – 4 см; снизу и сверху – 5 см; аннотации – 8pt; основной текст – 10pt с интервалом 1. **Формулы – MathType, Defaults.**
4. Литература (10pt) приводится общим списком в конце статьи на языке оригинала, а также на английском языке, при этом, в нижеследующей последовательности указываются:
для **книги** – фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания (город), издательство, год издания и количество страниц;
для **журнала** – фамилия и инициалы автора, полное наименование работы, название журнала, год издания, том, выпуск или номер и страницы.
5. В конце статьи должны быть приведены сведения об авторах с указанием контактных данных.
6. При наличии нескольких авторов редколлегия рекомендует фамилии авторов статьи расположить в алфавитном порядке.
7. В случае отказа в публикации, редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр статьи.