ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS

Издаётся с января 1966 года

Հատոր
Том 74 №2 2021
Volume

ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ГИТУТЮН» НАН РА

Технический редактор: **Геворкян Г.З.**, Ответственный секретарь: **Авдалян Ж.А.**

E-mail: **journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech**

Հայաստանի Հանրապետություն, Երևան, 0019 Բաղրամյան պող. 24/2, Հեռ. 52-48-02

Республика Армения, Ереван,0019 пр. Баграмяна 24 /2, Тел. 52-48-02

24/2, Baghramyan Ave. Yerevan 0019 Republic of Armenia Tel. 52-48-02

Сдано в производство 07.07.2021 г.
Формат 70 х 100 $^{1}/_{16}$. Печ. лист – 4 7/8
Заказ № 1105. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24

ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

Մեխանիկա Volume 74, Issue 2, 2021 Mechanics

UDC 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/74.2.1

Control of Vibrations of Infinite Membrane Tape with a Moving Edge in a Supersonic Gas Flow

Avetisyan Ara S., Mkrtchyan M. H.

Key words: membrane, supersonic gas flow, one-dimensional vibrations, boundary action, control problem, harmonics of control function.

Управление колебаниями бесконечной мембранной ленты с подвижным краем в сверхзвуковом потоке газа

Аветисян Ара С., Мкртчян М. Г.

Рассмотрена задача управления колебаниями бесконечной в одном направлении мембранной ленты в сверхзвуковом потоке газа за конечный интервал времени. Один край мембранной ленты жестко защемлен. К другому краю ленты с помощью жесткой прямой линейки прикладывают управляющее воздействие. Математическая краевая задача бесконечной мембранной ленты моделируется как одномерные колебания струны с краевым воздействием.

Задача управления колебаниями бесконечной мембранной ленты, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа и с подвижным краем, решается методом разделения переменных, с разложением прогиба колебания ленты на собственные формы и функции ее гармоник в ряд Фурье. Искомая функция краевого управляющего воздействия также представляется в виде ряда Фурье. В случае краевого управления, собственные гармоники колебания мембранной ленты и гармоники управляющего воздействия строятся совместно, после удовлетворения граничным, начальным и финальным условиям задачи.

Рассмотрены частные случаи возможных управляющих функций воздействия и форм колебаний мембранной ленты в разных случаях начальных и конечных условий. Выполнены расчеты на конкретных примерах.

Ключевые слова: мембранная лента, сверхзвуковой поток газа, одномерные колебания, краевое воздействие, задача управления, гармоники управляющего воздействия.

Անվերջ մեմբրանային ժապավենի փափանումների ղեկավարումը շարժվող եզրով՝ գերձայնային գազի հոսքում

Ավետիսյան Արա Ս., Մկրտչյան Մ. Հ.

Դիտարկվում է մեկ ուղղությամբ անվերջ մեմբրանային ժապավենի փափանումների ղեկավարման խնդիրը գերձայնային գազի հոսքում ` ժամանակի վերջավոր միջակայքում: Մեմբրանային ժապավենի մի եզրը կոշտ ամրացված է, իսկ մյուս եզրին ազդում է ղեկավարող ազդեցություն՝ օգտագործելով կոշտ ուղիղ քանոն: Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը վերածվում է եզրային ղեկավարում ունեցող լարի միաչափ փափանումների ղեկավարման խնդրի:

Ուսումնասիրվող փապանումների ղեկավարման խնդիրը լուծվում է փոփոխականների անջատման մեթոդի միջոցով՝ մեմբրանային ժապավենի փապանումների պեղափոխությունը ներկայացնելով փապանման սեփական ձևերի և դրանց սեփական հարմոնիկների Ֆուրիեի շարքերի միջոցով: Ղեկավարման ֆունկցիան նույնպես ներկայացվում է Ֆուրիեի շարքերի միջոցով: Եզրային ղեկավարման համար մեմբրանային ժապավենի փապանումների սեփական հարմոնիկները և ղեկավարման ֆունկցիայի հարմոնիկները կառուցվում են միաժամանակ՝ խնդրի եզրային, սկզբնական և վերջնական պայմանները բավարարելուց հետո:

Դիտարկվում են տարբեր սկզբնական և վերջնական պայմանների համար մեմբրանային ժապավենի հնարավոր ղեկավարման ազդեցության և փապանումների ռեժիմների հատուկ դեպքեր: Իրականացվում է որոշակի դեպքերի թվային վերլուծություն:

Հիմնաբառեր: մեմբրանային ժապավեն, գերձայնային գազի հոսք, միաչափ փապանումներ, եզրային ազդեցություն, ղեկավարման խնդիր, ղեկավարման ֆունկցիայի հարմոնիկներ

A vibration control problem is considered for an infinite in one direction membrane tape in a supersonic gas flow in a finite time interval is considered. One edge of the membrane tape is rigidly fixed. A control action is applied to the other edge of the tape using a rigid straight ruler. The mathematical model of the problem is reduced to a control problem for one-dimensional vibrations of a string with a boundary control.

The vibration control problem under study is solved via variables separation method by expanding the deflection of the membrane vibration into Fourier series by natural vibration modes of the membrane and the function of its harmonics. The unknown function of the boundary control is also expanded into Fourier series. For the boundary control, the eigenharmonics of the membrane vibrations and the harmonics of the control are constructed simultaneously, after satisfying the boundary, initial and terminal conditions of the problem.

Particular cases of possible control functions and modes of vibrations of the membrane for different initial and terminal conditions are considered. Numerical analysis of particular cases is carried out.

Key words: membrane tape, supersonic gas flow, one-dimensional vibrations, boundary action, control problem, harmonics of control function.

Introduction

Flexible thin-walled structural elements (plates or shells) made from soft materials, which are technically modeled as membranes are often used in modern technology. Naturally, in technical problems of vibration control of membranes, the mathematical boundary value problem is formulated on the basis of boundary conditions and of the state of the membrane.

From this point of view, the proposed control problem of vibrations of an infinite in one direction membrane in a supersonic gas flow when one edge of the membrane is rigidly fixed, and the other edge is controlled, on a finite time interval is a model. Supersonic gas flow streamlines around the membrane along its width, resulting in a membrane to vibrate.

The problem is mathematically modeled as a problem of one-dimensional forced transverse vibrations of a membrane with a boundary control. Formally, it coincides with the problem of boundary control of string vibrations under a distributed transverse external action [1]. Forced vibrations of the membrane and issues of its stability in the aerodynamics of high supersonic gas velocities were investigated in the middle of the last century [2,3]. However, to the best of our knowledge, the issues of controlling such a membrane vibrations were not considered so far.

The solution to the mathematical boundary value problem of damping string vibrations with two control functions are given in the monograph [4].The problem is solved by the method of Fourier series expansion applied to the string deflection. For a string without a distributed transverse load, a similar mathematical boundary value problem is solved in [5], using D'Alembert method. However, D'Alembert method does not allow to solve similar boundary value problems in cases where the general solution of the problem cannot be represented in an integral forms containing the given initial and terminal conditions explicitly. In the problem of boundary control of vibrations of a string with given states at intermediate moments [6], the control of a string with two acting control functions depending on time at the two ends of the string is investigated.

In well-known monographs [7-10], some of the existing methods and those under intensive development can be found for the solution of model problems of controllability of dynamic systems or for the analysis of the nature of control of physicomechanical dynamic processes.

In the proposed work, we seek a solution to the control problem by expanding all functions, including the function of the boundary control in the form of Fourier series with respect to natural modes of vibrations of the membrane and with respect to its natural harmonics. After satisfying the boundary, initial and terminal conditions, the modes and harmonics of the vibrations of the membrane, as well as the corresponding control function are determined.

1 Statement of the problem. Formulation of the mathematical boundary value problem

Consider the possibility of control of an infinite in one direction membrane vibrating in a supersonic gas flow, when one edge of the tape is rigidly fixed, and the other edge is controlled (Fig. 1). The membrane has a width $0 \leq x \leq l$ and a very long length (considered to be infinite).

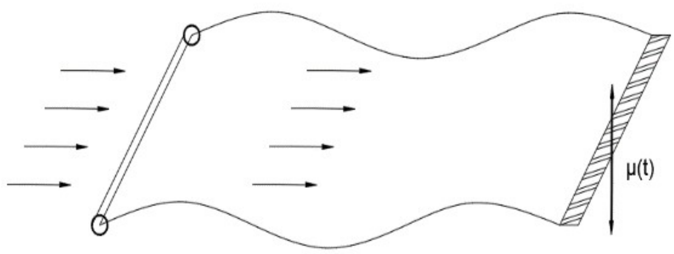


Figure 1: Diagram of supersonic gas flow around the membrane

The supersonic gas stream flows around the membrane along its width, vibrating the membrane. Vibrations of the membrane in a supersonic gas flow are modeled as parallel one-dimensional vibrations of the membrane[1]:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial W}{\partial x} - \alpha^2\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0\ , \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0. \tag{1.1}$$

Here,$\beta = \chi\rho_\infty M N_x^{-1}$ is a physical parameter characterizing the gas flow along the membrane, $\alpha^2 = \rho_0 h N_x^{-1}$is the inverse of the square of the speed, $N_x^{-1}$is the tensile force in the direction of the width of the membrane, ρ_0 is the membrane material density, χ is the aerodynamic constant, ρ_∞ is the gas density, M is the Mach number, h is the membrane thickness.

The edge $x = 0$ of the membrane is rigidly fixed. The induced vibrations of the membrane are controlled by means of a rigid rectilinear ruler applied on the moving edge $x = l$ of the membrane and represented by the function $\mu(t)$ depending only on time. The boundary conditions will therefore be

$$W(0,t) = \mu(t)\ , \quad W(l,t) = 0. \tag{1.2}$$

According to the classical formulation, based on equation (1.1) and boundary conditions (1.2), the boundary control $\mu(t)$ will be considered in the class of functions $\mu(t) \in L_2[0 \le t \le T_0]$. It is assumed that at the initial moment $t = 0$, the shape of the membrane deflection and the distribution of the rate of change of the deflection are known:

$$W|_{t=0} = \varphi(x)\ , \quad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{1.3}$$

It is required to find such a boundary control $\mu(t)$ for which equation (1.1) is transmitted from the initial state (1.3) to the terminal state

$$W(x,T_0) = \tilde{\varphi}(x)\ , \quad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=T_0} = \tilde{\psi}(x), \tag{1.4}$$

over the interval $t \in [0;T_0]$.

Deflection functions $\varphi(x)$ and $\tilde{\varphi}\,(x)$, as well as functions of the vibration speed $\psi(x)$ and $\tilde{\psi}(x)$, at the initial moment of time $t = 0$ and at the final moment of time $t = T_0$ respectively, are considered to be elements of $L_2[0 \le x \le l]$. The solution of the formulated mathematical boundary value problem is obtained by introducing a new displacement function $V(x,t)$ such that

$$V(x,t) = W(x,t) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu(t). \tag{1.5}$$

Substituting(1.5) into (1.1), boundary control $\mu(t)$ will move into the equation of vibration of the membrane. The mathematical boundary value problem in the form of homogeneous equation (1.1) subject to inhomogeneous boundary conditions (1.2) is reduced to inhomogeneous equation of forced vibrations

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} - \alpha^2\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\beta}{l}\mu(t) + \alpha^2\left(1-\frac{x}{l}\right)\ddot{\mu}(t) \tag{1.6}$$

with "external influence" $-(\beta/l)\ \cdot\mu(t) + \alpha^2\left(1 - x/l\ \right)\cdot\ddot{\mu}(t)$, subject to homogeneous boundary conditions for the unknown function of the reduced displacement $V(x,t)$:

$$V(0,t) = 0, \quad V(l,t) = 0. \tag{1.7}$$

The initial and terminal conditions are respectively reduced to

$$\begin{aligned} V\left(x,t\right)|_{t=0} &= \varphi\left(x\right)\ - \left(1-\frac{x}{l}\right)\cdot\mu\left(0\right), \\ \left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \psi(x) - \left(1-\frac{x}{l}\right)\dot{\mu}(0). \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} V(x,T_0) &= \tilde{\varphi}\left(x\right) - \left(1-\frac{x}{l}\right)\cdot\mu(T_0), \\ \left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_{t=T_0} &= \tilde{\psi}\left(x\right) - \left(1-\frac{x}{l}\right)\cdot\dot{\mu}(T_0) \end{aligned} \tag{1.9}$$

2 Solution of the mathematical boundary value problem

The new formulation of the mathematical boundary value problem in the form of equation (1.6) and homogeneous boundary conditions (1.7) allows the representation of the solution of the problem by the method of variable separation as follows:

$$V(x,t) = X(x)\cdot f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{0n}(x) f_n\left(t\right), \tag{2.1}$$

using the expansion of the reduced displacement of the membrane in the form of a Fourier series in terms of its eigenmodes of the vibration.

2.1 Decomposition of the forced vibration of the membrane tape on its own forms

Taking into account homogeneous boundary conditions (1.7) and the homogeneous part of equation (1.6), the deflection of the membrane can be represented as a Fourier series in terms of its eigenmodes as follows:

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{0n}(x), \text{ where } X_{0n}(x) = B_n \exp\left(\frac{\beta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \ n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

with corresponding eigenharmonics

$$f_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0n}\,(t)\,, \text{ and } \theta_{0n}\,(t) = A_{0n} \cdot \sin\left(\omega_{\theta n} t\right) + B_{0n} \cdot \cos\left(\omega_{\theta n} t\right). \tag{2.3}$$

In this case, the eigenvalues of the vibrational motion are defined as

$$\omega_{0n}^2 = \left(n\pi/\alpha l\ \right)^2 + \left(\beta/2\alpha\ \right)^2, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

It is obvious that the frequencies of eigenharmonics are determined by the physical and geometric parameters of the vibratory system: αl, $\beta = \chi\rho_\infty M N_x^{-1}$ and $\alpha^2 = \rho_0 h N_x^{-1}$. The maximum value of the eigenfrequency, at a certain value of the tensile force $N_x/l \ = \left(\chi^2\rho_\infty^2 M^2/8\pi^2 l\ \right)^{1/3}$, is achieved for the first eigenmode $X_{01}(x) = B_{01}\exp(\beta x/2\ ) \ \cdot \sin\left(\pi x/l\ \right)$. Due to the inhomogeneity of equation (1.6), the newly formed vibration modes on the segment $x \in [0;\ l]$ will be represented by the proper vibration modes (2.2), and the dynamics of these forms is already will be represented by another function of time $\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n\,(t)$. Decomposing also the factors in the terms on the right-hand side of the inhomogeneous equation (1.6) into the Fourier series with respect to eigenmodes (2.2),

$$1 = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) \text{ and } \left(1 - x/l\ \right) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_n(x), \tag{2.5}$$

we obtain an equation for the n–th form of vibration of the membrane, in the form of a sequential infinite system of ordinary differential equations

$$\ddot{\theta}_n\,(t) + \left(\lambda_n^2/\alpha^2\right)\ \cdot \theta_n\,(t) = -D_n \cdot \left[\ddot{\mu}\,(t) + \left(\beta/\alpha^2 l\right)\ \cdot \left(C_n/D_n\right)\ \cdot \mu\,(t)\right]\ . \tag{2.6}$$

In expansions (2.5), Fourier coefficients $C_n$andD_n are defined as

$$\begin{aligned} C_n =& [4\exp(-\beta l/2\ ) \cdot (2\exp(\beta l/2\ ) - 2(-1)^n) \cdot n\pi]/\left(4n^2\pi^2 + l^2\beta^2\right)\,, \\ D_n =& \frac{8\exp(-\beta l/2\ ) \cdot \left[\exp(\beta l/2\ ) \cdot \left(4n^2\pi^2 + l^2\beta^2 - 4l\beta\right) + 4ln\pi\beta(-1)^n\right] \cdot n\pi}{\left(4n^2\pi^2 + l^2\beta^2\right)^2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2 Control of the natural forms oscillations by harmonics of the edge action

The right-hand sides of the ordinary differential equations of the infinite system (2.6) include the boundary control action $\mu(t)$ corresponding to the oscillations of the eigenforms of the true deflection (2.2), one for all orthogonal forms with its secondary derivatives. The introduction of a new designation for the frequency of the edge control action

$$\omega_{\mu n}^2 = \frac{\beta l \cdot C_n}{(l\alpha)^2 \cdot D_n} = \\ = \frac{\beta l \cdot \left(4n^2\pi^2 + (\beta l)^2\right)[1-(-1)^n \exp(-\beta l/2\ )]}{4(l\alpha)^2 \cdot \left[(n\pi + (\beta l/2)\ )^2 - \beta l - n\pi\beta l \cdot [1-(-1)^n \cdot \exp(-\beta l/2\ )]\right]} \tag{2.8}$$

the function $\mu(t)$ is also represented as a series of corresponding harmonics

$$\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(t), \text{ where } \mu_n(t) = A_{n\mu} \cdot \sin(\omega_{\mu n} t) + B_{n\mu} \cdot \cos(\omega_{\mu n} t) \tag{2.9}$$

The infinite system of ordinary differential equations for the vibrations of the membrane (2.6) can be written in the form of an infinite system of equations for forced vibrations

$$\ddot{f}_{\theta n}(t) + \omega_{0n}^2 \cdot f_{\theta n}(t) = -D_n \cdot \left(\omega_{\mu n}^2 - \omega_{0n}^2\right) \cdot \mu_n(t), \tag{2.10}$$

or in the form

$$\ddot{f}_{\mu n}(t) + \omega_{\mu n}^2 \cdot f_{\mu n}(t) = \left(\omega_{\mu n}^2 - \omega_{0n}^2\right) \cdot \theta_{0n}(t)\ . \tag{2.11}$$

with respect to reduced harmonics $f_{\theta n}(t)$ or $f_{\mu n}(t)$ of displacement $V(x,t)$

$$f_{\theta n}(t) = \theta_n(\omega_{\theta n} t) + D_n \cdot \mu_n(\omega_{\mu n} t), \quad f_{\mu n}(t) = \mu_n(\omega_{\mu n} t) + D_n^{-1} \cdot \theta_n(\omega_{\theta n} t) \tag{2.12}$$

This harmonics is the direct composition eigenmodes of the membrane vibrations and the harmonics of the boundary action. It is obvious from the equations (2.10) and (2.11) that the true frequencies of the reduced harmonics of the eigenmodes of the membrane vibrations are formed in different ways.

According to the equation (2.10), the frequencies of the harmonics of the reduced eigenforms of the membrane are formed on the basis of the eigenfrequencies $\omega_{\theta n} = \omega_{0n}$, undergoing the harmonics of the boundary action $\mu_n(t)$ with frequency $\omega_{\mu n}$.

According to the equation (2.11), the frequencies of the harmonics of the reduced natural forms of the membrane are formed on basis of the "eigenfrequencies" of the boundary action $\omega_{\mu n}$, undergoing the influence of eigenharmonics of the membrane vibrations. From equations (2.10) and (2.11) it is also obvious that the vibration of the membrane subjected to boundary control will be stable or unstable depending on the values of the frequencies $\omega_{\theta n} < \omega_{\mu n}$ or $\omega_{\theta n} > \omega_{\mu n}$.

The general solution of (2.10) for n-th harmonic $f_n(\omega_{\theta n} t)$ is obtained by the method of variation of parameters in the form of addition of harmonics of eigen and forced vibrations of the membrane:

$$\begin{aligned} f_{\theta n}(\omega_{\theta n}t) = A^*_{\theta n}\cdot\sin(\omega_{\theta n}t) + B^*_{\theta n}\cdot\cos(\omega_{\theta n}t) + \\ + D_n\cdot\left[A_{n\mu}\cdot\sin(\omega_{\mu n}t) + B_{n\mu}\cdot\cos(\omega_{\mu n}t)\right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

Similarly, the general solution of (2.11) for the n-th harmonic,$f_n(\omega_{\mu n}t)$,is obtained as

$$f_{\mu n}(\omega_{\mu n}t) = A^*_{\mu n}\cdot\sin(\omega_{\mu n}t) + B^*_{\mu n}\cdot\cos(\omega_{\mu n}t) + A_{\theta n}\cdot\sin(\omega_{\theta n}t) + B_{\theta n}\cdot\cos(\omega_{\theta n}t) \tag{2.14}$$

It is evident from expressions (2.4) and (2.8) that the frequency characteristics of the system, $\omega_{\theta n}$ and $\omega_{\mu n}$, are determined by physical and mechanical parameters $\beta l = \chi\rho_\infty lMN_x^{-1}$ and $\alpha^2 = \rho_1 hN_x^{-1}$. Formally, these frequencies can be equal under the condition

$$\left[1-(-1)^n\cdot\exp(-\beta l/2\ )\right] = \left[4\left(n\pi\cdot(-1)^n-1\right) + l\beta/4\alpha^2\ \right] + \left(n^2\pi^2\right)/\left(\alpha^2\beta l\right) \tag{2.15}$$

It follows from equations (2.10), (2.11) and from the corresponding general solutions (2.13), (2.14) that in this case the system vibrates with the eigenfrequency of the reduced forms

$$f_{\theta n}(\omega_{\theta n}t) = (A^*_{\theta n} + D_n\cdot A_{n\mu})\cdot\sin(\omega_{\theta n}t) + (B^*_{\theta n} + D_n\cdot B_{n\mu})\cdot\cos(\omega_{\theta n}t) \tag{2.16}$$

In that case, neither a control problem nor a resonance of vibrations of the membrane occur. According to (1.5), (2.1), (2.2)and (2.12), for the deflection function $W(x,t)$ we obtain

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[\theta_n(\omega_{\theta n}t) + D_n\cdot\mu_n(\omega_{\mu n}t)\right]\ \cdot\exp\left(\frac{\beta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

In order to fulfill initial and terminal conditions (1.3) and(1.4),respectively, functions $\varphi(x)$ and $\psi(x)$, as well as $\tilde{\varphi}(x)$ and $\tilde{\psi}(x)$are also expanded into Fourier series as follows:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\cdot X_n(x),\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\cdot X_n(x) \tag{2.17}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n\cdot X_n(x),\ \tilde{\psi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\delta}_n\cdot X_n(x) \tag{2.18}$$

Taking into account the representation (2.17) of the deflection function $W(x,t)$ and expansions (2.18) and (2.19), initial and terminal conditions (1.8) and (1.9) for vibrations of the membrane with boundary control are written in the form of an infinite system of four algebraic equations for the amplitudes of the harmonics of the membrane vibrations and the boundary control,

$$\begin{cases} \theta_n(0) + D_n\ \cdot\mu_n(0) = \gamma_n \\ \dot{\theta}_n(0) + D_n\cdot\ \dot{\mu}_n(0) = \delta_n \\ \theta_n(\omega_{\theta n}T_0) + D_n\cdot\ \mu_n(\omega_{\mu n}T_0) = \tilde{\gamma}_n \\ \dot{\theta}_n(\omega_{\theta n}T_0) + D_n\ \cdot\dot{\mu}_n(\omega_{\mu n}T_0) = \tilde{\delta}_n \end{cases}$$

In the case of general solution (2.13), the infinite system of algebraic inhomogeneous equations (2.20) can be written in an expanded form with respect to four unknown harmonic coefficients $A^*_{\theta n}$, $B^*_{\theta n}$, $A_{n\mu}$ and $B_{n\mu}$:

$$\begin{cases} B^*_{\theta n} + D_n \cdot B_{n\mu} = \gamma_n \\ A^*_{\theta n} + (\omega_{\mu n}/\omega_{0n})\ D_n \cdot A_{n\mu} = \dfrac{\delta_n}{\omega_{\theta n}} \\ \sin(\omega_{\theta n} T^0_{\theta n}) \cdot A^*_{\theta n} + \cos(\omega_{\theta n} T^0_{\theta n}) \cdot B^*_{\theta n} + \\ +D_n \cdot \sin(\omega_{\mu n} T^0_{\theta n}) \cdot A_{n\mu} + D_n \cdot \cos(\omega_{\mu n} T^0_{\theta n}) \cdot B_{n\mu} = \tilde{\gamma}_n \\ \cos(\omega_{\theta n} T^0_{\theta n}) \cdot A^*_{\theta n} - \sin(\omega_{\theta n} T^0_{\theta n}) \cdot B^*_{\theta n} + \\ (\omega_{\mu n}/\omega_{\theta n})\ D_n \cdot \cos(\omega_{\mu n} T^0_{\theta n}) \cdot A_{n\mu} - (\omega_{\mu n}/\omega_{\theta n})\ D_n \cdot \sin(\omega_{\mu n} T^0_{\theta n}) \cdot B_{n\mu} = \dfrac{\tilde{\delta}_n}{\omega_{\theta n}} \end{cases}$$

Evaluating these four unknown constant coefficients $A^*_{\theta n}$, $B^*_{\theta n}$, $A_{n\mu}$ and $B_{n\mu}$, it will become an easy problem to determine the boundary control function $\mu(t)$ according to (2.9) and the deflection function $W(x, t)$ of the membrane vibrating in a supersonic gas flow according to (2.17) on the finite interval $t \in [0; T_{0\theta}]$.

In the case of general solution (2.14), infinite system of algebraic inhomogeneous equations (2.20) can be reduced to an expanded form with respect to four unknown harmonic coefficients $A_{\theta n}$, $B_{\theta n}$, $A^*_{n\mu}$ and $B^*_{n\mu}$:

$$\begin{cases} B_{\theta n} + B^*_{\mu n} = \gamma_n \\ A_{\theta n} + (\omega_{\mu n}/\omega_{\theta n})\ A^*_{\mu n} = \dfrac{\delta_n}{\omega_{\theta n}} \\ \sin(\omega_{\theta n} T^0_{\mu n}) \cdot A_{\theta n} + \cos(\omega_{\theta n} T^0_{\mu n}) \cdot B_{\theta n} + \sin(\omega_{\mu n} T^0_{\mu n}) \cdot A^*_{\mu n} + \\ \qquad + \cos(\omega_{\mu n} T^0_{\mu n}) \cdot B^*_{\mu n} = \tilde{\gamma}_n \\ \cos(\omega_{\theta n} T^0_{\mu n}) \cdot A_{\theta n} - \sin(\omega_{\theta n} T^0_{\mu n}) \cdot B_{\theta n} + \\ +(\omega_{\mu n}/\omega_{\theta n})\ \cdot \cos(\omega_{\mu n} T^0_{\mu n}) \cdot A^*_{\mu n} - (\omega_{\mu n}/\omega_{\theta n})\ \cdot \sin(\omega_{\mu n} T^0_{\mu n}) \cdot B^*_{\mu n} = \dfrac{\tilde{\delta}_n}{\omega_{\theta n}} \end{cases}$$

Finding four unknown constant coefficients $A_{\theta n}$, $B_{\theta n}$, $A^*_{\mu n}$ and $B^*_{\mu n}$, it will be an easy task to build the boundary control $\mu(t)$ according to (2.9) and the deflection function $W(x, t)$ of the membrane tape vibrating in a supersonic gas flow according to (2.17) on the finite interval $t \in [0; T_{0\mu}]$. In each of these cases, the required time of the boundary control is defined as

$$T_{\theta 0} = \max\left\{ T^0_{\theta n} = \frac{2\pi}{\omega_{\theta n}} \right\}, \quad T_{\mu 0} = \max\left\{ T^0_{\mu n} = \frac{2\pi}{\omega_{\mu n}} \right\}.$$

3 Numerical analysis for different initial and terminal states

Consider a membrane infinite in one direction vibrating in a supersonic gas flow which streamlines the membrane along its width. One edge of the membrane is rigidly fixed, while the other edge is controlled in the direction parallel to the deflection of the membrane (Fig 1). In numerical calculations, in order to determine the physical and geometric characteristics of the dynamic system, the following characteristics of the membrane material and the gas flow are consider: $\rho_0 = 1500\ kg/m^3$, $N_x = 1/50\ N/m$, $\chi = 0.32$, $M = 2.0$, $l = 2\ m$, $h = 0.0001\ m$,$\rho_\infty = 0.01\ kg/m^3$, $\alpha = 2.738613$, $\beta l = 0.64$. Obviously, depending on the physical and geometric characteristics of the system,the behavior of the fundamental harmonics $\theta_{0n}(t)$ of eigenforms of the membrane tapeand the corresponding harmonics of the boundary action $\mu_n(t)$ will be different.

The boundary control problem a)

In the case when the membrane is transmitted from the initial state

$$W|_{t=0} = \varphi(x)\ = \sin(10x)\ ,\quad \dot{W}\Big|_{t=0} = \psi(x) = \cos(10x) \tag{3.1}$$

to the terminal state of rest,

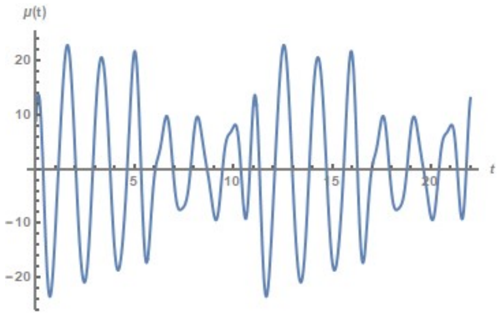
$$W(x, T_0) = \tilde{\varphi}(x) \equiv 0\ ,\ \dot{W}\Big|_{t=T_0} = \tilde{\psi}(x) \equiv 0 \tag{3.2}$$

for the boundary control $\mu(t)$ corresponding to general solution (2.13), in the case of $n = 15$, we obtain

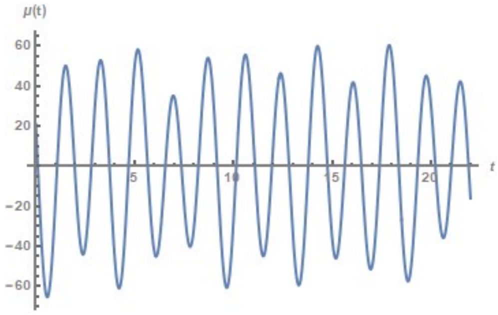
$$\begin{aligned}\mu_1(t) = &-0.08858 \cdot \sin[0.57654 \cdot t] - 0.348088 \cdot \sin[1.14863 \cdot t] - \\ &- 0.792535 \cdot \sin[1.72171 \cdot t] - 0.05522 \cdot \cos[0.57654 \cdot t] - \\ &- 0.550381 \cdot \cos[1.14863 \cdot t] - 0.5624 \cdot \cos[1.72171 \cdot t] + ... + \\ &+ 1.15872 \cdot \sin[7.456687 \cdot t] + 0.88594 \cdot \sin[8.030245 \cdot t] + \\ &+ 0.944 \cdot \sin[8.6038 \cdot t] + 1.23084 \cdot \cos[7.456687 \cdot t] - \\ &- 0.59297 \cdot \cos[8.030245 \cdot t] + 1.0624 \cdot \cos[8.6038 \cdot t]\end{aligned} \tag{3.3}$$

On the other hand, for the boundary control $\mu(t)$ corresponding to the general solution (2.14), in case of $n = 15$, we obtain

$$\begin{aligned}\mu_2(t) = &-0.024935 \cdot \sin[0.57654 \cdot t] + 0.011172 \cdot \sin[1.14863 \cdot t] - \\ &- 0.01416 \cdot \sin[1.72171 \cdot t] + 0.01911 \cdot \cos[0.57654 \cdot t] + \\ &+ 0.030467 \cdot \cos[1.14863 \cdot t] - 0.0299 \cdot \cos[1.72171 \cdot t] + ... + \\ &- 0.0266 \cdot \sin[7.456687 \cdot t] + 0.034766 \cdot \sin[8.030245 \cdot t] + \\ &+ 0.022 \cdot \sin[8.6038 \cdot t] + 0.03 \cdot \cos[7.456687 \cdot t] - \\ &- 0.01449837 \cdot \cos[8.030245 \cdot t] + 0.01334 \cdot \cos[8.6038 \cdot t]\end{aligned} \tag{3.4}$$



(a) membrane width $l = 2$ m



(b) membrane width $l = 5$ m

Figure 2: Edge control functions in the case of damping vibrations of the membrane: transition of the system from state (3.1) to state (3.2)

Despite the difference of expressions (3.3) and (3.4), in the case of the given physical and geometric characteristics of the dynamic system, their graphical representations match exactly (Fig. 2a). In the case of a wide tape, when $l = 5$ m, the boundary control $\mu(t)$ for $n = 15$ has the following form:

$$\begin{aligned}\mu_3(t) = &-0.02999 \cdot \sin[0.23675 \cdot t] - 0.035520 \cdot \sin[0.46256 \cdot t] - \\ &- 0.234953 \cdot \sin[0.69076 \cdot t] + 0.004589 \cdot \cos[0.23675 \cdot t] - \\ &- 0.04559 \cdot \cos[0.46256 \cdot t] + 0.025341 \cdot \cos[0.69076 \cdot t] - \\ &- 3.634929 \cdot \sin[2.98315 \cdot t] - 1.711715 \cdot \sin[3.21254 \cdot t] - \\ &- 48.79411 \cdot \sin[3.44193 \cdot t] + 1.867593 \cdot \cos[2.98315 \cdot t] + \\ &+ 1.075299 \cdot \cos[3.21254 \cdot t] + 16.53303 \cdot \cos[3.44193 \cdot t]\end{aligned} \tag{3.5}$$

Boundary control problem b)

In the case when the vibrating membrane is transmitted from the initial state

$$W|_{t=0} = \varphi(x) = \sin(10x)\ , \quad \dot{W}\Big|_{t=0} = \psi(x) \equiv 0 \tag{3.6}$$

to the terminal state

$$W(x, T_0) = \tilde{\varphi}(x) = \sin(2x)\ , \dot{W}\Big|_{t=T_0} = \tilde{\psi}(x) = 2\cos(2x) \tag{3.7}$$

for the boundary control $\mu(t)$ corresponding to general solution (2.13) when $n = 15$ we obtain

$$\begin{aligned}\mu_4(t) = &\,1.4382355 \cdot \sin[0.57654 \cdot t] - 7.03202 \cdot \sin[1.14863 \cdot t] - \\ &- 1.68865 \cdot \sin[1.72171 \cdot t] - 0.054924 \cdot \cos[0.57654 \cdot t] - \\ &- 19.36217 \cdot \cos[1.14863 \cdot t] - 0.6583 \cdot \cos[1.72171 \cdot t] - \\ &- \ldots - 0.4129 \cdot \sin[7.456687 \cdot t] + 1.3702 \cdot \sin[8.030245 \cdot t] - \\ &- 0.3794 \cdot \sin[8.6038 \cdot t] + 0.71193 \cdot \cos[7.456687 \cdot t] - \\ &- 1.2402 \cdot \cos[8.030245 \cdot t] + 0.6841 \cdot \cos[8.6038 \cdot t]\end{aligned} \tag{3.8}$$

On the other hand, for the boundary control $\mu(t)$ corresponding to the general solution (2.14) when $n = 15$,we obtain

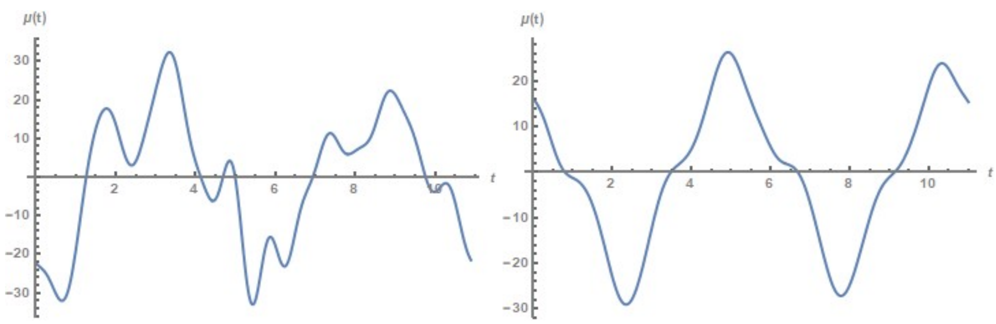
$$\begin{aligned}\mu_5(t) = &-0.024935 \cdot \sin[0.57654 \cdot t] + 0.011172 \cdot \sin[1.14863 \cdot t] - \\ &- 0.01416 \cdot \sin[1.72171 \cdot t] + 0.01911 \cdot \cos[0.57654 \cdot t] + \\ &+ 0.030467 \cdot \cos[1.14863 \cdot t] - 0.0299 \cdot \cos[1.72171 \cdot t] + ...+ \\ &- 0.0266 \cdot \sin[7.456687 \cdot t] + 0.034766 \cdot \sin[8.030245 \cdot t] + \\ &+ 0.022 \cdot \sin[8.6038 \cdot t] + 0.03 \cdot \cos[7.456687 \cdot t] - \\ &- 0.01449837 \cdot \cos[8.030245 \cdot t] + 0.01334 \cdot \cos[8.6038 \cdot t]\end{aligned} \tag{3.9}$$

Graphical representations of control edge actions $\mu_4(t)$ and $\mu_5(t)$ are shown in Figures 3a and 3b, respectively.

Boundary control problem c)

The problem of boundary control of a membrane changes significantly in the case when the supersonic gas flow is not taken into consideration. Then, the physical parameter $\beta = \chi\rho_\infty M N_x^{-1} = 0$. Therefore, the reduced inhomogeneous equation of forced vibrations (1.6) and the differential equation of the fundamental harmonics of the membrane vibration (2.6) are considerably simplified. As a result, we have forced vibrations of a stretched membrane with boundary excitation $\ddot{\mu}(t)$.

Considering that, the dimensionless physical parameter βl in basic calculations is taken equal to 0.64, then for much smaller values of this parameter, we will have a weak flow around the membrane tape.



(a) boundary control $\mu_4(t)$ in the case of general solution (2.13)

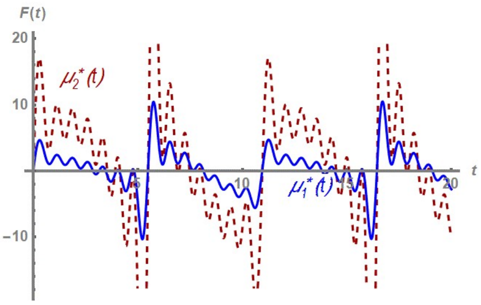
(b) boundary control $\mu_5(t)$ in the case of general solution (2.14)

Figure 3: Boundary controls in the case when the system is transited from state (3.6) to state (3.7)

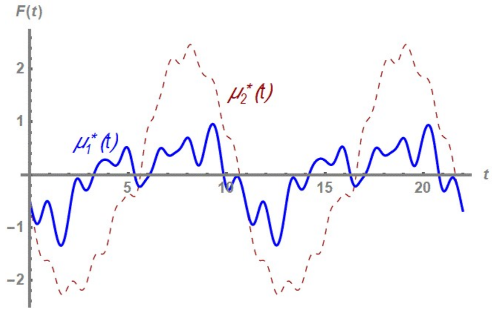
In the case, when the vibrating membrane is transmitted from the initial state

$$W|_{t=0} = \varphi(x) = \sin(10x) \ , \quad \dot{W}\Big|_{t=0} = \psi(x) \equiv 0 \tag{3.10}$$

to the terminal state



(a) The case of the general solution (2.13)
- boundary control $\mu_1^*(t)$ in case of parameter $\beta l \ = 0.64$,
- boundary control $\mu_2^*(t)$ in case of parameter $\beta l \ = 0.0001$,



(b) The case of the general solution (2.14)
- boundary control $\mu_1^*(t)$ in case of parameter $\beta l \ = 0.64$,
- boundary control $\mu_2^*(t)$ in case of parameter $\beta l \ = 0.0001$,

Figure 4: The functions of edge control of the vibration of the membrane tape in the case of the system transition from the state (3.10) to the state (3.11)

$$W(x, T_0) = \tilde{\varphi}(x) \ = \sin(2x) \ , \ \dot{W}\Big|_{t=T_0} = \tilde{\psi}(x) = 2\cos(2x) \tag{3.11}$$

The boundary control $\mu_4(t)$ for $\beta l \ = 0.64$ and $\mu_5(t)$ for $\beta l \ = 0.0001$, both corresponding to the general solution (2.13), is shown in the figure 4a.

The boundary control $\mu_1^*(t)$ for $\beta l \ = 0.64$ and $\mu_2^*(t)$ for $\beta l \ = 0.0001$, both corresponding to the general solution (2.14) are shown in the figure 4b.

Conclusions

In the control problem by edge action of oscillations of the infinite in one direction membrane tape in a supersonic gas flow, both of the deflection of the membrane tape and the equivalent efforts of the edge control action are decomposed into a Fourier series in terms by eigenforms of the vibration of tape. Mathematically, the problem is reduced to an infinite system of the boundary value problems of ordinary differential equations with matching conditions to the initial and final states of the tape, relative to the true harmonics by the oscillations of the eigenforms of the membrane tape and the corresponding harmonics of the edge action.

The characteristic frequencies both of the true vibration and the control action in a supersonic flow have been determined. The edge control action, as well as the behavior (the law of deflection change) of the oscillating belt under the given initial and final conditions, are found.

References

[1] Butkovsky A.G. – The theory of optimal control of systems with distributed parameters, M.: Nauka, 1968, 474 p. (in Russian). Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.

[2] Belubekyan M.V. – On the problem of membrane oscillation in a supersonic gas flow. //Dokl. AN Arm SSR. 1978. V.67. №2. Pp.74-77. (in Russian). Белубекян М.В. О задаче колебаний мембраны в сверхзвуковом потоке газа // Докл. АН Арм.ССР. 1978. Т.67. №2. С.74-77.

[3] Ilyushin A.A. – The law of flat sections in the aerodynamics of high supersonic speeds. //PMM. 1956. T.20. №6. (in Russian). Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. // ПММ. 1956. Т.20. Вып. 6. //

[4] Znamenskaya L.N. – Management of elastic vibrations. M.: fizmatlit, 2004. 176 p. ISBN 5-9221-0473-X. (in Russian). Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с. – ISBN 5-9221-0473-X. //

[5] Ilyin V.A., Moiseev E.I., Optimization of the boundary control of displacement at one end of a string with its free second end for an arbitrary sufficiently large period of time, Dokladi akademii RF. 2007, том 417. №1, p. 12-17. (in Russian). Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничного управления смещением на одном конце струны при свободном втором её конце за произвольный достаточно большой промежуток времени. // Доклады Академии РФ. 2007. Т.417. №1. С.12-17.

[6] Barseghyan V.R. - On the problem of boundary control of string vibrations with given states at intermediate points in time, // XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics, Kazan, August 20-24, 2015. Барсегян В.Р. О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань: 20-24 августа 2015 г. С.354-356.

[7] Bolotin V.V. – Non-conservative problems of the theory of elastic stability, Moscow: Fizmatlit, 1961. 340p. (in Russian). Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. //М.: Физматлит, 1961. 340с.

[8] Polyanin A.D. and Nazaikinskii V.E., Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists – 2^{nd} ed. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2016.

[9] Avetisyan A.S., Khurshudyan As. Zh., Controllability of Dynamic Systems: The Green's Function Approach, Cambridge: Cambridge Scholars Publishing, 2018.

[10] Zuazua E., Controllability of Partial Differential Equations, Madrid; Universidad Autonoma, 2002, 311p.

Information about authors

Ara S.Avetisyan - Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, **Email**: ara.serg.avetisyan@gmail.com

Manuk H.Mkrtchyan - Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, **Email**: mkmanuk@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.05.2021

ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, №2, 2021 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/74.2.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СИСТЕМЕ ПОЛУПЛОСКОСТЬ-СЛОЙ ПРИ УСЛОВИИ СКОЛЬЗЯЩЕГО КОНТАКТА МЕЖДУ НИМИ

Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З, Дарбинян А.З.

Ключевые слова: волна Рэлея, поперечное и продольные волны, волновое число, частота, условия затухания, дисперсионное уравнение.

Propagation of surface waves in a halfplane-layer system under the condition of sliding contact between them

Amirjanyan A.A., Belubekyan M.V., Gevorgyan G.Z, Darbinyan A.Z.

Key words: Rayleigh wave, transverse and longitudinal waves, wave number, frequency, damping conditions, dispersion equation.

The problem of the propagation of Rayleigh-type surface waves in the halfplane-layer system along the line of their connection is considered under the condition of sliding contact between them. A dispersion equation for the problem of the propagation condition of surface waves is obtained as a function of the physical and geometric characteristics of the half-plane and the layer under various conditions at the outer boundary of the layer.

Մակերևույթային ալիքների տարածումը կիսահարթություն–շերտ համակարգում նրանց միջև սահող կոնտակտի պայմանների դեպքում

Ամիրջանյան Հ.Ա., Բելուբեկյան Մ.Վ., Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ.

Հիմնաբառեր: Ռեյլեյի ալիքներ, երկայնական և լայնական ալիքներ, ալիքային թիվ, հաճախություն, մարման պայմաններ, դիսպերսիոն հավասարում:

Դիտարկված է Ռեյլեյի տիպի մակերևութային ալիքների տարածումը կիսահարթություն-շերտ համակարգում միացման գծի երկայնքով նրանց միջև սահող կոնտակտի պայմանների դեպքում: Ստացվել են խնդրի դիսպերսիոն հավասարումները և մակերևութային ալիքների տարածման պայմանները՝ կախված ֆիզիկական և երկրաչափական բնութագրիչներից և շերտի արտաքին մակերևույթի վրա տարբեր եզրային պայմանների դեպքում:

Рассмотрена задача распространения поверхностных волн типа Рэлея в системе полуплоскость-слой по линии их соединения при условии скользящего контакта между ними. Получены дисперсионное уравнение задачи и условия распространения поверхностных волн в зависимости от физических и геометрических характеристик полуплоскости и слоя при различных условиях на внешней границе слоя.

Введение.

Исследованию поверхностных волн типа Рэлея в составной полуплоскости посвящено множество работ. Обзор публикаций по этой тематике можно найти в [1-6] В работах [7-9] исследовано существование упругих волн, локализованных у границы раздела двух упругих сред, которые экспоненциально затухают по мере удаления от границы. Здесь рассмотрены задачи плоской деформации, при скользящем контакте между слоем и полуплоскостью и разных граничных условиях на внешней поверхности.

1 Постановка задачи

Рассматривается задача распространения плоской поверхностной волны для системы полупространство–слой (фиг.1).

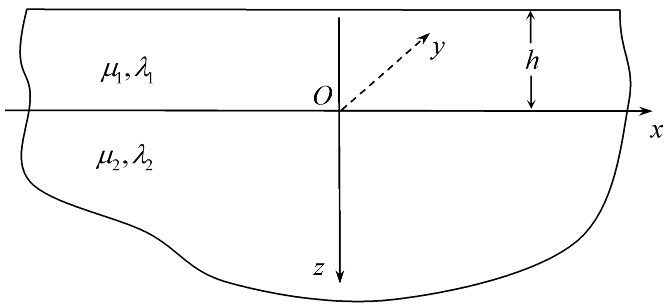
Для компонент упругих перемещений имеем

$$u_1^{(j)} = u^{(j)}(x,z,t),\;\; u_3^{(j)} = w^{(j)}(x,z,t),\;\; u_2^{(j)} = 0 \quad (j=1,2) \tag{1}$$

где $j = 1$ относится к слою, а $j = 2$ – к полуплоскости, t – время. Уравнения движения в перемещениях имеют вид [4]

$$\begin{aligned} c_{tj}^2 \Delta\, u^{(j)} + \left(c_{l\,j}^2 - c_{t\,j}^2\right)\, \frac{\partial}{\partial x}\, \left(\frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial t^2} \\ c_{t\,j}^2 \Delta\, w^{(j)} + \left(c_{l\,j}^2 - c_{t\,j}^2\right)\, \frac{\partial}{\partial z}\, \left(\frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 w^{(j)}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2}$$

где $c_{l\,j},\ c_{t\,j}$ –скорости распространения продольных и поперечных волн в соответствующих средах, $\lambda_j,\ \mu_j$–коэффициенты Ламе слоя и полупространства соответственно.



Фиг. 1

На линии раздела материалов $z = 0$ заданы условия скользящего контакта:

$$\sigma_{31}^{(1)} = 0,\;\; \sigma_{31}^{(2)} = 0,\;\; \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)},\;\; w^{(1)} = w^{(2)} \tag{3}$$

Посредством скалярных потенциалов представим перемещения в виде [4]

$$u^{(j)} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z},\ w^{(j)} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \tag{4}$$

уравнения (2) сводятся к

$$\Delta \Phi_j = \frac{1}{c_{l\,j}^2}\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2}, \quad \Delta\, \psi_j = \frac{1}{c_{t\,j}^2}\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial t^2}. \tag{5}$$

При этом для используемых в дальнейшем напряжений получаются следующие выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(j)} &= \lambda_j \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + (\lambda_j + 2\mu_j)\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} - 2\mu_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z \partial x}, \\ \sigma_{31}^{(j)} &= \mu_j \left(2\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

Введём обезразмеривающие обозначения

$$\begin{aligned} &\eta_j = \frac{c_{t\,j}^2}{c_{l\,j}^2} = \frac{\mu_j}{\lambda_j + 2\mu_j}; \quad \theta = \frac{{c_{t2}}^2}{{c_{t1}}^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad c = \frac{\omega}{k}; \quad \xi = \frac{c^2}{c_{t2}^2} \\ &\nu_{11} = \sqrt{1 - \xi\theta\eta_1},\ \nu_{12} = \sqrt{1 - \xi\,\theta},\ \nu_{21} = \sqrt{1 - \xi\eta_2},\ \nu_{22} = \sqrt{1 - \xi} \\ &\beta_2 = 1 - \frac{\xi}{2},\ \beta_1 = 1 - \frac{\xi\theta}{2},\ \mu_* = \mu_2/\mu_1 \end{aligned} \tag{7}$$

здесь c – неизвестная фазовая скорость, ω – частота, k – волновое число. Тогда решение уравнений (5) для слоя будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (A_1\,\mathrm{sh}(k\nu_{11}z\,) + B_1 ch(k\nu_{11}z\,))\,\exp ik(x - ct) \\ \Psi_1 &= (A_2\mathrm{ch}(k\nu_{12}z) + B_2\,\mathrm{sh}(k\nu_{12}z\,))\,\exp ik(x - ct) \end{aligned} \tag{8}$$

Общие решения уравнений (5) для полуплоскости, удовлетворяющие условиям затухания [4]:

$$\lim_{z\to\infty} \Phi_2 = 0\,,\ \lim_{z\to\infty} \Psi_2\ = 0$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= A_3\, e^{-k\nu_{21}z}\,\exp ik(x - ct) \\ \Psi_2 &= B_3 e^{-k\iota_{22}z}\,\exp ik(x - ct) \end{aligned} \tag{9}$$

$\nu_{2,1}, \nu_{2,2} > 0$ откуда вытекает что $0 < \xi < 1$

Также будем использовать обозначение $\xi_{R\,j} = \left(\frac{\mathrm{v}_{R\,j}}{c_{t2}}\right)^2$ $j = 1,2$ где $\mathrm{v}_{R\,j}$ $j = 1,2$ скорости распространения волн Релея в материалах полосы и полуплоскости соответственно.

2 Решение задачи

Рассмотрим различные граничные условия при $z = -h$

а. Свободная поверхность

$$\sigma_{31}^{(1)} = 0, \;\; \sigma_{33}^{(1)} = 0 \tag{10}$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\mu_* \left(\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}[s\nu_{1,2}] \operatorname{ch}[s\nu_{1,1}]} \right) 2\beta_1^2 \nu_{1,1}\nu_{1,2} - \operatorname{th}[s\nu_{1,1}] \operatorname{th}[s\nu_{1,2}] \left(\beta_1^4 + \nu_{1,1}^2 \nu_{1,2}^2 \right) \right) \nu_{2,1} -$$
$$- \theta\nu_{1,1} \left(\operatorname{th}[s\nu_{1,2}] \beta_1^2 - \operatorname{th}[s\nu_{1,1}] \nu_{1,1}\nu_{1,2} \right) \left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2} \right) = 0 \tag{11}$$

где $s = k\,h$; При $h \to 0$ или $\mu_1 \to 0$ приходим к задаче Релея. При $s \ll 1$, т.е. когда длина волны намного больше толщины слоя, дисперсионное уравнение, с точностью до порядка s^2 , примет вид

$$- s\xi\theta^2 \nu_{1,1}\nu_{1,2} \left(s\mu_* \frac{1}{4} \xi^2 \theta \nu_{2,1} + \left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2} \right) \right) \left(\frac{\xi\theta}{4} - (1 - \eta_1) \right) = 0 \tag{12}$$

откуда

$$\xi = \xi_{R2} - s \frac{\mu_* \theta \xi_{R2}^2 \sqrt{1 - \eta_2 \xi_{R2}} (2 - \xi_{R2})^2}{2\left(12\xi_{R2} - 8\eta_2\xi_{R2} - 6\xi_{R2}^2 + \xi_{R2}^3 - 4(1 - \eta_2)\right)} + O(s^2) \tag{13}$$

То есть, независимо от упругих характеристик материалов слоя и полуплоскости существует поверхностная волна, распространяющаяся со скоростью ξ, меньшей скорости волн Релея в полуплоскости ξ_{R2}.

Уравнение (12) имеет также корень

$$\xi = 4\frac{1 - \eta_1}{\theta} + O(s^2) = \xi_S + O(s^2) \tag{14}$$

который, в зависимости от упругих характеристик слоя и полуплоскости, может быть меньше единицы, что означает возможность существования и второй волны.

При $s \gg 1$ т.е. когда длина волны намного меньше толщины слоя, возможны три случая:

I.) $1 - \xi\theta > 0$; будем иметь $\operatorname{th}(kh\sqrt{1 - \xi\theta}) \sim \operatorname{th}(kh\sqrt{1 - \xi\theta\eta_1}) \sim 1$ откуда для (11) получаем [5]

$$- \left(\beta_1^2 - \nu_{1,1}\nu_{1,2} \right) \left(\mu_* \left(\beta_1^2 - \nu_{1,1}\nu_{1,2} \right) \nu_{2,1} + \theta\nu_{1,1} \left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2} \right) \right) = 0 \tag{15}$$

Первый множитель этого уравнения совпадает с уравнением Релея для полуплоскости из материала полосы, что является следствием принятого условия $s \gg 1$, и имеет корень $\xi = \xi_{R,1}$. Второй множитель уравнения (15) представляет собой дисперсионное уравнение для двух полуплоскостей при условии контакта Навье (3).

Исследуем второй множитель на предмет существования корня. Если

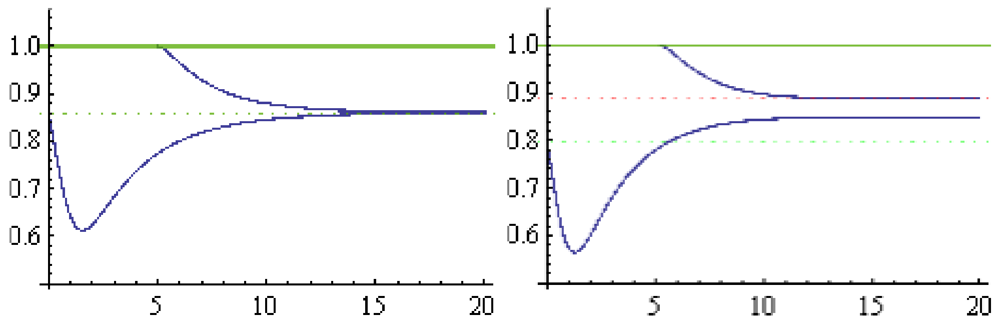
$$\theta < 1 \text{ и } \mu_* < \frac{\theta\sqrt{1-\theta\eta_1}}{4\left(\sqrt{1-\theta}\sqrt{1-\theta\eta_1}-(1-\theta/2)^2\right)\sqrt{1-\eta_2}} \tag{16}$$

или

$$\theta > 1 \text{ и } \mu_* > \frac{-1+4\theta\left(1-\theta+\sqrt{\theta-1}\sqrt{\theta-\eta_2}\right)}{\sqrt{\theta\left(\theta-\eta_2\right)}}\sqrt{1-\eta_1} \tag{17}$$

то в концах интервала $0 < \xi < \min\left(1, 1/\theta\right)$ второй множитель принимает разные знаки, что означает, что в этом интервале он имеет по крайней мере один корень. $(\xi = \xi_0)$.

На фиг. 2 представлены графики зависимости параметра ξ , характеризующего фазовую скорость, от параметра s , характеризующего волновое число, в случае (а), когда материалы полосы и полуплоскости одинаковы: $\mu_* = 1$; $\theta = 1$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ и (б), когда $\mu_* = 1$; $\theta = 1$; $\nu_1 = 0.4$; $\nu_2 = 0.1$.

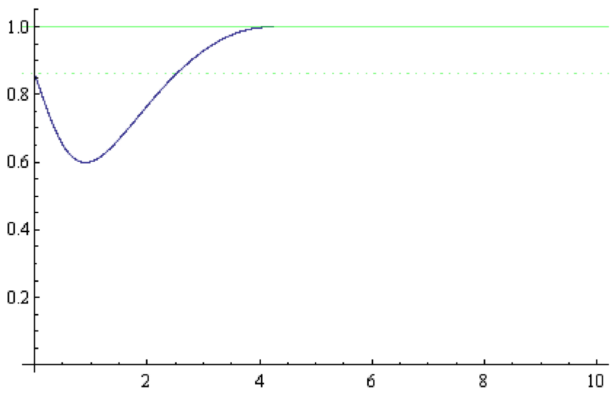


(a) $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ (b) $\nu_1 = 0.4$; $\nu_2 = 0.1$

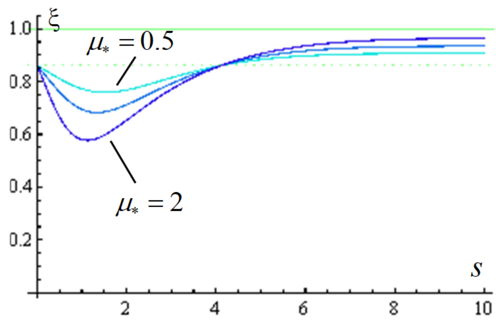
Фиг. 2: Зависимость ξ от s при $\mu_* = 1$; $\theta = 1$;

Графики фиг. 2(а) указывают на то, что для очень коротких волн в однородной полуплоскости, содержащей на некоторой глубине линию скольжения, поверхностные волны, распространяющиеся вдоль свободной границы слоя и вдоль линии скольжения, имеют одинаковую скорость, равную скорости волн Рэлея полуплоскости. Графики же фиг. 2(б) показывают, что отличие только лишь коэффициентов Пуассона уже приводит к разнице в скоростях распространения поверхностных волн вдоль свободной границы и линии раздела материалов. При этом скорость распространения поверхностной волны вдоль свободной границы стремится к скорости волн Рэлея для материала слоя, а скорость волны вдоль линии соединения занимает промежуточное значение ξ_0 между скоростями волн Рэлея для слоя и полуплоскости.

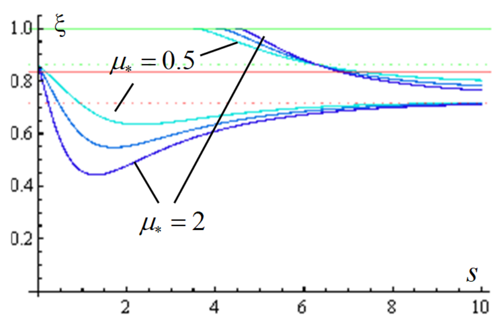
При $\theta < 1$; и $\mu_* > \frac{\theta\sqrt{1-\theta\eta_1}}{4\left(\sqrt{1-\theta}\sqrt{1-\theta\eta_1}-(1-\theta/2)^2\right)\sqrt{1-\eta_2}}$ для больших значений s волны отсутствуют. В частном случае, при определенных значениях параметров задачи, это представлено на Фиг. 3.



Фиг. 3: Зависимость ξ от s при $\mu_* = 3$; $\theta = 0.6$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$



(a) Зависимость ξ от s при $\theta = 0.8$



(b) $\theta = 1.2$

Фиг. 4

На фиг. 4а, 4б показаны графики зависимости квадрата фазовой скорости ξ поверхностных волн от s для различных значений параметра $\mu_* = 0.5, 1, 2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, при $\theta = 0.8$ и $\theta = 1.2$ соответственно. При $\xi = \xi_{R2}$ все графики пересекаются в одной точке, что подтверждает тот факт, что в этом случае дисперсионное уравнение (11) не зависит от μ_*.

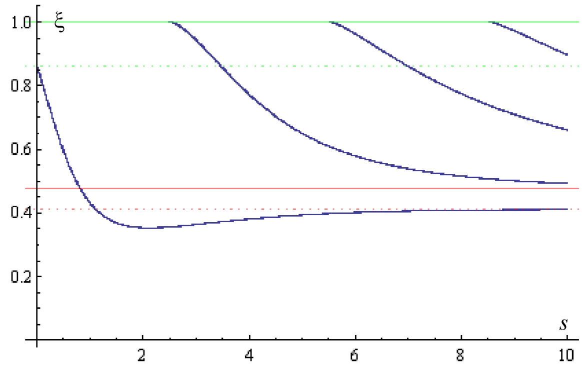
II) Пусть теперь, $1 - \xi\theta < 0$; $1 - \xi\theta\eta_1 > 0$

$\mathrm{th}(kh\sqrt{1-\xi\theta}) = itg(kh\sqrt{\xi\theta - 1})$; $\quad \mathrm{th}(kh\sqrt{1-\xi\theta\eta_1}) \sim 1$

из (11) следует

$$\mathrm{tg}\left(s\sqrt{\xi\theta - 1}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{\xi\theta-1}\nu_{1,1}\left(2\mu_*\beta_1^2\nu_{2,1} + \theta\nu_{1,1}\left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)\right)}{\mu_*\left(1+\beta_1^4\right)\nu_{2,1} + \mu_*\xi^2\theta^2\eta_1\nu_{2,1} + \theta\left(-\mu_*\xi\left(1+\eta_1\right)\nu_{2,1} + \beta_1^2\nu_{1,1}\left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)\right)} \tag{18}$$

В этом случае получается бесконечное число мод поверхностных волн

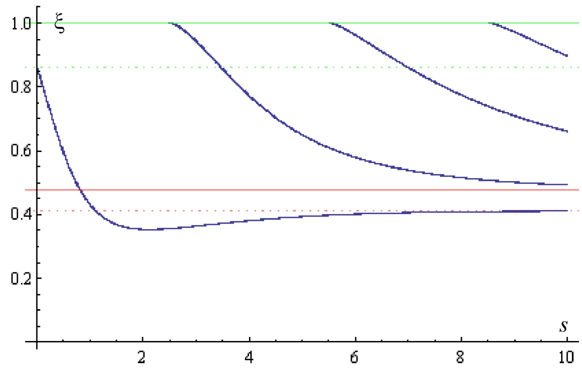


Фиг. 5: Зависимость ξ от s при $\mu = 1;\ \theta = 2;\ \nu_1 = \nu_2 = 0.3$

На фиг 5 приведены графики зависимости квадрата фазовой скорости ξ от параметра s. Эти графики напоминают графики волн Лява [4]. В отличие от волн Релея скорости распространения этих мод зависят от длины волны, т.е. имеет место дисперсия.

III) при $1 - \xi\theta < 0;\ \ 1 - \xi\theta\eta_1 < 0$ не удаётся получить аналитическую формулу для фазовой скорости. На фиг (6) приведены графики зависимости фазовой скорости поверхностных волн от $s = kh$, представляющего волновое число.

При $c_{t,1} < c_{t,2}$ с увеличением s количество мод поверхностных волн увеличивается.



Фиг. 6: Зависимость ξ от s при $\mu_* = 1;\ \theta = 6;\ \nu_1 = \nu_2 = 0.3$

Очевидно, что решение задачи в каждом из рассмотренных случаев определяется с точностью до постоянного множителя. Немалый интерес представляет изменение перемещений вдоль оси Oz, однако, как известно, в общем случае их вычислить невозможно. Учитывая, что для волны с волновым числом k всегда выполняется равенство:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}\left(\int\limits_{-h}^{0}E_P^{(1)}dz+\int\limits_0^{\infty}E_P^{(2)}dz\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}\left(\int\limits_{-h}^{0}E_K^{(1)}dz+\int\limits_0^{\infty}E_K^{(2)}dz\right)dx$$

где

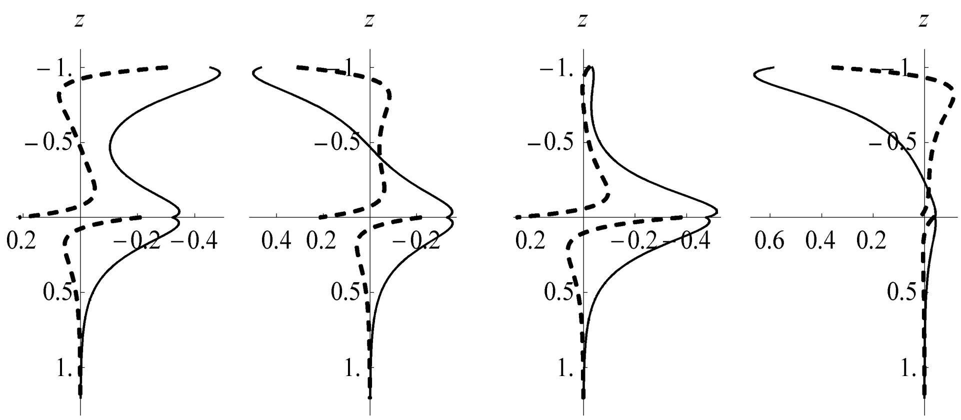
$$E_K^{(j)}=\rho_j\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u^{(j)}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w^{(j)}}{\partial t}\right)^2\right) \text{ - удельная кинетическая энергия,}$$

$$E_P^{(j)}=\frac{1}{2}\sum_{l,m}\sigma_{l,m}^{(j)}\varepsilon_{l,m}^{(j)} \text{ - потенциальная энергия,}$$

произвольный множитель в решении выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}\left(\int\limits_{-h}^{0}E_P^{(1)}dz+\int\limits_0^{\infty}E_P^{(2)}dz\right)dx=1 \tag{19}$$

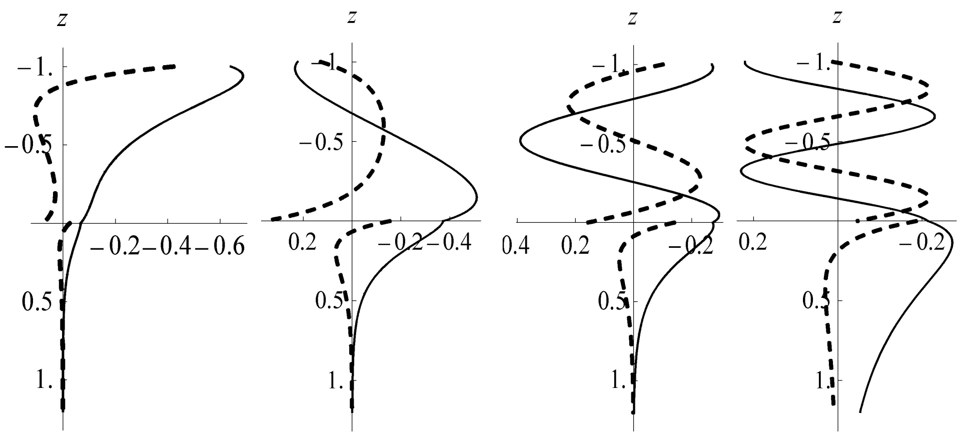
Вычисленные таким образом перемещения назовем нормализованными. На фиг. 7 представлены нормализованные перемещения, соответствующие данным Фиг.2(б).



Фиг. 7: Нормализованные перемещения u (пунктир) и w (сплошная линия) по оси z при $s = 15$ и $\xi = \{0.857, 0.862\}$ для правой пары графиков и $\xi = \{0.85, 0.89\}$ - для левой пары.

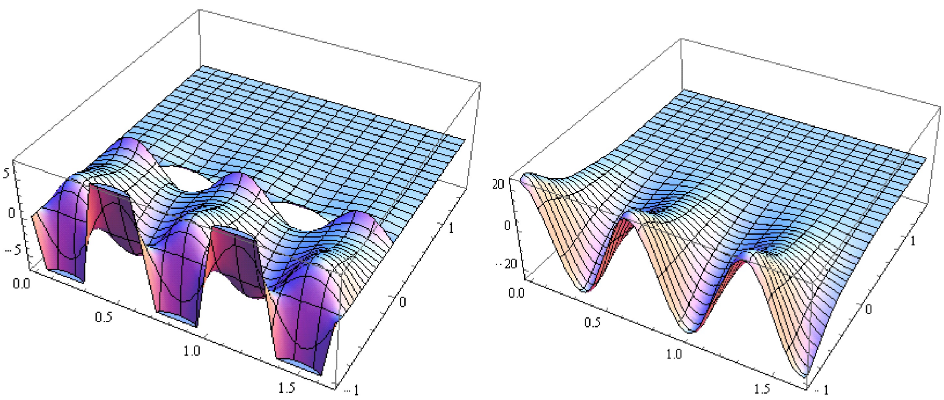
Левая пара графиков Фиг.7 показывает, что вследствие близости скоростей распространения волн вдоль свободной границы слоя и линии скольжения, перемещения точек слоя стремятся к симметричному и кососимметричному, относительно середины слоя, распределению, в то время как во втором случае (правая пара) явно выделяются две волны, распространяющиеся вдоль свободной границы слоя и по линии раздела материалов. При этом график на Фиг. 2(б), расположенный ниже, соответствует волне, распространяющейся по линии раздела материалов, а график, расположенный выше, - волне, распространяющейся вдоль свободной границы слоя.

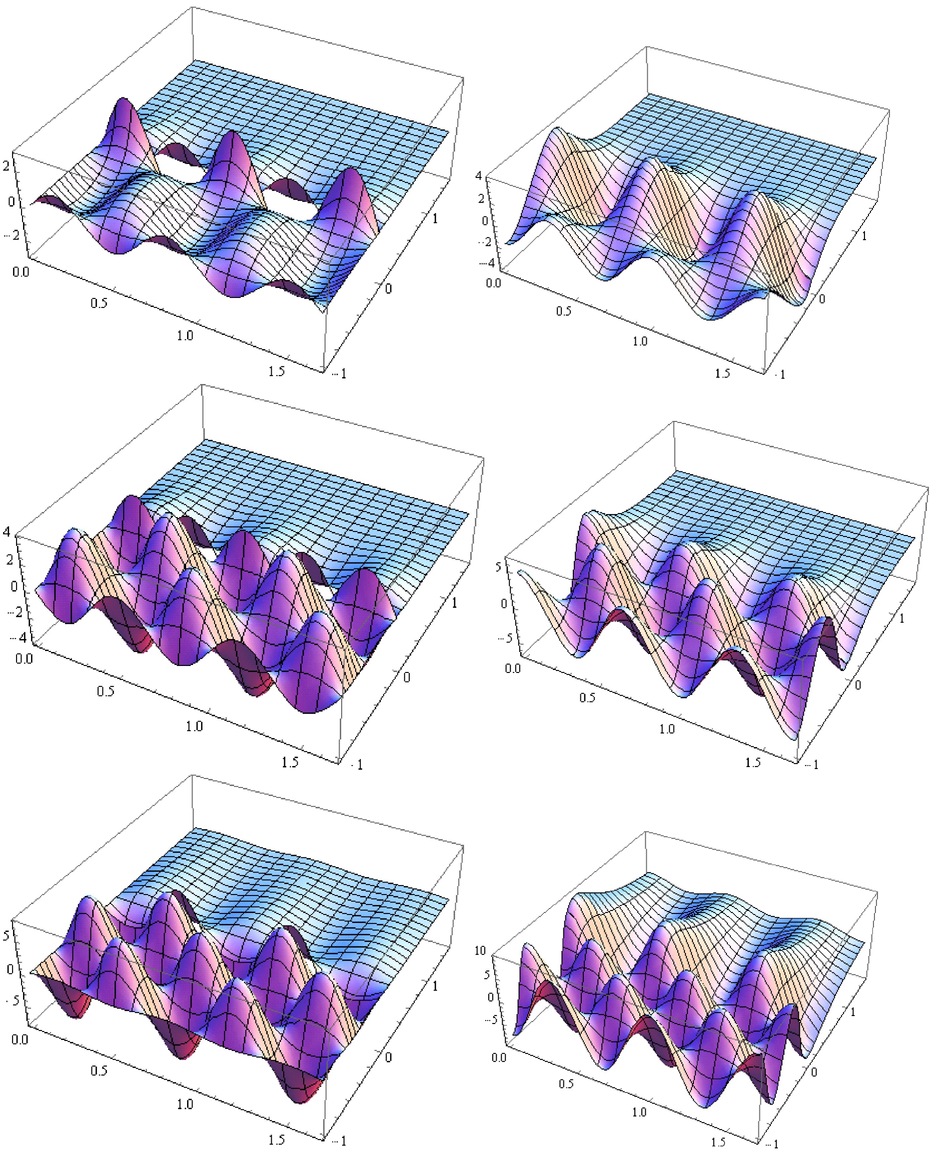
На Фиг.8 представлены нормализованные перемещения u и w по оси z вглубь полуплоскости для четырёх мод волны.



Фиг. 8: Нормализованные перемещения u (пунктир) и w (сплошная линия) по оси z для четырёх мод волны при $s = 9.5$ и $\xi = \{0.43, 0.55, 0.711, 0.96\}$

Для наглядности на Фиг.9 приведены также рельефные картины, соответствующие графикам на Фиг.8.





Фиг. 9: Рельефы перемещений u (слева) и w(справа) для четырёх мод.

Численный анализ показывает, что при увеличении s энергия волн переходит от полуплоскости к слою. При этом для волны, распространяющейся со скоростью, близкой к скорости Рэлея в слое $\xi_{R,1}$, максимальное значение энергии достигается около наружной поверхности слоя $z = -h$, а в случае волны, распространяющейся со скоростью, близкой к скорости $\xi = \xi_0$, энергия концентрируется вблизи поверхности $z = 0$. Для остальных мод волн энергия распределяется в слое более равномерно.

б. Защемлённая поверхность

$$u^{(1)} = 0\,,\ w^{(1)} = 0$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} &4\theta\nu_{1,1}\left(\beta_2^2-\nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)\left(\nu_{1,1}\nu_{1,2}\,\mathrm{th}\left[s\nu_{1,1}\right]-\mathrm{th}\left[s\nu_{1,2}\right]\right)+\\ &+\mu_*\nu_{2,1}\begin{pmatrix}\left(\left(1+\nu_{1,2}^2\right)^2+4-8\,\mathrm{sech}\,\left[s\nu_{1,1}\right]\mathrm{sech}\left[s\nu_{1,2}\right]\beta_1\right)\nu_{1,1}\nu_{1,2}-\\ -4\left(\beta_1^2+{\nu_{1,1}}^2{\nu_{1,2}}^2\right)\mathrm{th}\left[s\nu_{1,1}\right]\mathrm{th}\left[s\nu_{1,2}\right]\end{pmatrix}=0 \end{aligned} \tag{20}$$

При $s \ll 1$

$$\theta^2\nu_{1,1}\nu_{1,2}\xi\left(\mu_*\xi\nu_{2,1}-4\eta_1\left(\beta_2^2-\nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)s+\mu_*\xi\nu_{2,1}\left(1-2\eta_1\right)s^2\right)+O\left(s^3\right)=0 \tag{21}$$

При $s \to 0$ получается тривиальное решение $\xi = 0$, а это означает, что при защемлённой внешней границе слоя, длинные относительно толщины слоя поверхностные волны отсутствуют. При $s \gg 1$

Если $1-\xi\theta > 0$, то $\mathrm{th}(kh\sqrt{1-\xi\theta}) \sim \mathrm{th}(kh\sqrt{1-\xi\theta\eta_1}) \sim 1$ и из (21) получаем

$$-4\left(1-\nu_{1,1}\nu_{1,2}\right)\left(\mu_*\left(\beta_1^2-\nu_{1,1}\nu_{1,2}\right)\nu_{2,1}+\theta\nu_{1,1}\left(\beta_2^2-\nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)\right)=0.$$

Равенство нулю первого множителя $1-\nu_{1,1}\nu_{1,2}=0$, приводит к значению

$$\xi = \frac{1+\eta_1}{\theta\eta_1} \tag{22}$$

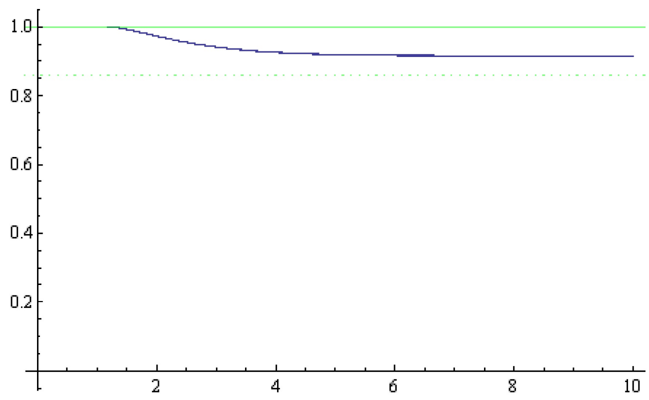
которое не удовлетворяет условию $1-\xi\theta > 0$.

Приравнивая к нулю второй множитель, приходим к уравнению

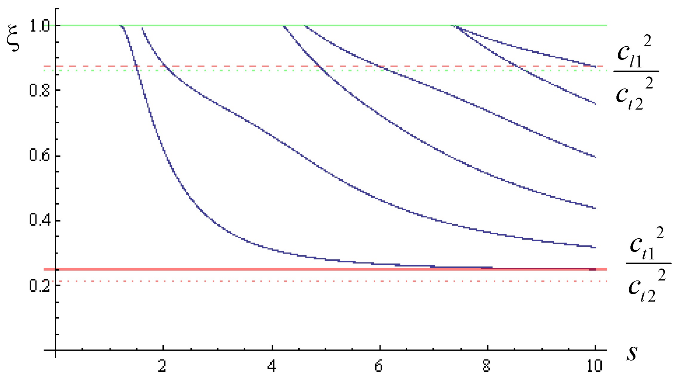
$$\mu_*\left(\beta_1^2-\nu_{1,1}\nu_{1,2}\right)\nu_{2,1}+\theta\nu_{1,1}\left(\beta_2^2-\nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)=0, \tag{23}$$

которое было исследовано выше. Отметим, что при $\theta \le 1$ в зависимости от значений других параметров либо поверхностной волны не существует, либо распространяется одна поверхностная волна, в то время как при $\theta > 1$ существует бесконечное число мод поверхностных волн.

На Фиг.10 и Фиг.11 приведены графики зависимости квадрата фазовой скорости ξ от параметра s в случае одной волны при $\theta \le 1$ и в случае $\theta > 1$ соответственно.



Фиг. 10: Зависимость ξ от s при $\mu_* = 1.5;\ \theta = 4;\ \nu_1 = \nu_2 = 0.3$



Фиг. 11: Зависимость ξ от s при $\mu_* = 1;\ \theta = 0.85;\ \nu_1 = \nu_2 = 0.3$

в. Условие симметрии (условие анти Навье).

$$w^{(1)} = 0\ ,\ \ \sigma_{31}^{(1)} = 0$$

Дисперсионное уравнение будет иметь вид

$$\begin{gathered}\theta\nu_{1,1}\left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)\operatorname{th}(s\nu_{1,1})\operatorname{th}(s\nu_{1,2}) + \\ + \mu_*\nu_{2,1}\left(\beta_1^2\operatorname{th}(s\nu_{1,2}) - \nu_{1,1}\nu_{1,2}\operatorname{th}(s\nu_{1,1})\right) = 0\end{gathered} \tag{24}$$

При $s \ll 1$

$$\nu_{1,2}\theta s\left(\mu_*\xi\left(\frac{\xi c_0}{4} - (1-\theta_1)\right)\nu_{2,1} + \nu_{1,1}^2\left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)s\right) = 0 \tag{25}$$

откуда

$$\xi = \xi_S - \frac{(1-2\eta_1)^2\left((1-\xi_S/2)^2 - \sqrt{1-\xi_S}\sqrt{1-\xi_S\eta_2}\right)}{\mu_*(1-\eta_1)\sqrt{1-\xi_S\eta_2}} s + O\left(s^2\right)$$

Что совпадает с (14) в первом приближении.

г. Условие антисимметрии (условие Навье)

$$u^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\theta\nu_{1,1}\left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}\right) + \mu_*\nu_{2,1}\left(\beta_1^2 \operatorname{th}[s\nu_{1,1}] - \nu_{1,2}\nu_{1,1}\operatorname{th}[s\nu_{1,2}]\right) = 0 \qquad (26)$$

При $s \ll 1$

$$\nu_{1,1}\theta\left(\frac{1}{4}s\mu_*\xi^2\theta\nu_{2,1} + \left(\beta_2^2 - \nu_{2,1}\nu_{2,2}\right)\right) = 0 \qquad (27)$$

откуда $\xi = \xi_{R2} + \frac{\mu_*\theta\xi_{R2}^2\sqrt{1-\eta_2\xi_{R2}}\left(4-4\xi_{R2}+\xi_{R2}^2\right)}{2\left(4-4\eta_2-12\xi_{R2}+8\eta_2\xi_{R2}+6\xi_{R2}^2-\xi_{R2}^3\right)} s + O\left(s^2\right)$ совпадает с (10) в первом приближении.

Проведенный для последних двух случаев граничных условий на внешней границе слоя численный анализ показал, что картина распространения волн вдоль линии раздела материалов подобна картинам, представленным выше для случая свободной внешней границы слоя.

Заключение

Исследован вопрос существования поверхностных волн в системе слой – полуплоскость, когда на линии стыка имеют место условия скольжения. Выяснено, что при $s \gg 1$ (когда длина волны намного меньше толщины слоя) и $\xi < \min\left(\frac{1}{\theta}, 1\right)$ поверхностная волна, распространяющаяся вдоль линии раздела материалов $z = 0$ и имеющая скорость ξ_0, существует при всех четырёх граничных условиях на поверхности слоя $z = -h$.

При $s \gg 1$ и $\theta > 1$ для любого ξ из $1/\theta < \xi < 1$ существует бесконечное множество волновых чисел k, удовлетворяющих дисперсионному уравнению.

При $s \ll 1$ (длинные волны) волна, которая распространяется вдоль линии $z = 0$ и имеет скорость ξ_S, существует только в случаях свободной поверхности слоя и при условии симметрии на внешней границе.

Волна, которая распространяется вдоль линии $z = 0$ и имеет скорость, определяемую формулой (13), распространяется при граничных условиях свободной поверхности и условиях антисимметрии на границе слоя.

При длинных волнах энергия волны главным образом распределена в полуплоскости, а при увеличении s, т.е. для коротких волн, она переходит в слой.

Литература

[1] Chattarjee S.N. Propogation of Rayleigh Waves in a Layer Lying over a Heterogeneous Half Space.// Pure and Applied Geophysics. 1971. V 86. №3. P 69-79.

[2] Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания упругой изотропной полосы, жестко связанной с анизотропной полупло¬скостью. Современные проблемы механики сплошной среды. // Труды V Межд. конф. Ростов-на Дону. 12-14 окт.1999. Ростов-на Дону. Изд. СКНЦ ВШ. 2000. Т 2. С 31-37.

[3] Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания в системе: анизотропная полоса-полуплоскость при жестком и скользящем соединении сред. // Изв. Вузов. Северо-Кавказкий регион. Естеств. науки. 2002. № 3. С. 120-121.

[4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.

[5] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М. Изд АН СССР 1957. 502 с.

[6] Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // В сб.: "Проблемы механики деформируемого твердого тела." Ереван: Изд. НАН Армении 1997. С. 79-96.

[7] Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупространство. Механика,58, №2, 2005.Ереван, Изд. НАН Армении. С.9-15.

[8] Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве с усиливающим тонким полубесконечным упругим слоем. Труды V международной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды", 2-7 октября 2017, Цахкадзор, Армения, Ер.: НУАСА, 2017, с. 69-70.

[9] Ардазишвили Р В. Влияние закрепления лицевых поверхностей на демпфирование антисиметричных кромочных волн высшего порядка в пластинах. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике. Казань, 20-24 августа 2015г с 198-200

Сведения об авторах

Амирджанян Арутюн Арменович - к.ф.-м.н.,научный сотрудник . Института механики НАН РА.
Тел.: (37410) 27-62-23
Email: amirjanyan@gmail.com

Белубекян Мелс Вагаршакович - к.ф.-м.н., гл.н.с. Института механики НАН РА

Геворкян Гнун Завенович - к.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА
Email: gnungev2002@yahoo.com

Дарбинян Артавазд Завенович -к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА
Email: darbinyan_1954@mail.ru

Поступила в редакцию 14.12.2020

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, № 2, 2021 Механика

УДК 539.3 http://doi.org/10.33018/74.2.3

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР ПАНЕЛИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, СЖАТОЙ В НАПРАВЛЕНИИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ К СКОРОСТИ ПОТОКА ГАЗА, ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ

Белубекян М. В., Мартиросян С. Р.

Ключевые слова: устойчивость, сжимающие силы, сверхзвуковое обтекание, дивергенция панели, панельный флаттер, сосредоточенные инерционные массы и моменты

Supersonic flutter panel with one free edge, compressed in the direction, perpendicular to the gas flow velocity, in presence of concentrated inertial masses and moments

M. V. Belubekyan, S. R. Martirosyan

Keywords: stability, compressive forces, supersonic overrunning, divergence of the panel, flutter, concentrated inertial masses and moments

In a linear formulation, the dependence of the types of loss of stability of the disturbed motion of the "plate-flow" dynamic system on the character of the initial stress state of a rectangular plate of moderate dimensions we is investigated. An analytical solution of the stability problem in the presence of concentrated inertial masses and moments at its free edge under the assumption that the direction perpendicular to the velocity of the flowing supersonic gas flow incident on its free edge we have found. We have shown, that during flow, the initial stress state caused by compressive forces leads to both significant destabilization and stabilization of the disturbed motion of the system depending on the parameters of the system.

Գերձայնային գազի հոսքում սեղմված սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին, որում սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Ս. Ռ. Մարտիրոսյան

Հիմնաբառեր. ուղղանկյուն սալ, կայունություն, սեղմող ուժեր, պանելային դիվերգենցիա, ֆլատեր, գերձայնային շրջհոսում, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ

Ուսումնասիրված է նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը գերձայնային գազի հոսքում միջին չափերի սեղմված ուղղանկյուն սալի խոտորված շարժման կայունության մի խնդրում, որում գազի հոսքը ուղղված է սալի ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը:

Ցույց է տրված պանելային դիվերգենցիայի և ֆլատերի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են գազի հոսքի համապատասխան կրիտիկական արագությունների արժեքները: Ցույց է տրված սեղմող ուժերի ինչպես ապակայունացնող, այնպես էլ կայունացնող ազդեցությունը «սալ–գազի հոսք» համակարգի խոտորված շարժման վրա, կապված համակարգի պարամետրերի արժեքներից:

В линейной постановке исследуется зависимость видов потери устойчивости возмущённого движения динамической системы “пластинка-поток” от характера первоначального напряжённого состояния прямоугольной пластинки умеренных размеров при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов на её свободном крае в предположении, что пластинка сжата в направлении, перпендикулярном скорости обтекающего сверхзвукового потока газа, набегающим на ее свободный край. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «плстинка-поток». Установлено, что при обтекании первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими усилиями, приводит, как к дестабилизации, так и к стабилизации возмущённого движения системы, в зависимости от её параметров.

Введение

Как известно [1– 4], выпучивание пластинок в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих усилий, расположенных в срединной плоскости пластинки. Так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, на много мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать сжимающие усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки [1]. Поэтому задача об устойчивости пластинок при равномерном сжатии является той “классической задачей”, решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

Изучению статической и динамической неустойчивости пластинок и оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, посвящено огромное количество работ, обзор которых, в основном, содержится в монографиях и в статьях [1– 10]. Однако в этих работах, за исключением работ А.А. Мовчана, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой статье, в отличие от вышеуказанных работ, с помощью алгоритма, подробно изложенного в работе [15], получено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» вблизи границ области устойчивости при следующих предположениях. Рассматриваемая первоначально сжатая прямоугольная пластинка умеренных размеров с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями обтекается сверхзвуковым потоком газа в направлении, перпендикулярном сжимающим силам; поток газа набегает на её свободный край, вдоль которого приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Показано, что возмущённое движение системы, теряет устойчивость как в виде дивергенции панели, так и в виде панельного флаттера, или же только в виде дивергенции панели, в зависимости от отношения сторон пластинки и её относительной толщины. Найдены соответствующие критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера. А также, установлены «опасные» границы области устойчивости [12], при переходе через которых происходит потеря прочности и возникновение усталостных трещин в материале пластинки [1, 2].

Как оказалось, первоначальное напряжённое состояние пластинки умеренных размеров, обусловленное сжимающими силами, приводит, в основном, к стабилизации возмущённого движения системы «пластинка-поток», в сравнении с системой с ненагруженной панелью [15].

1 Постановка задачи

Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка умеренных размеров, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$: $ab^{-1} \in (0.193, 1.96)$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 11].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_y = 2h\sigma_y$, равномерно распределённых по краям $y = 0$ и $y = b$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; сжимающие усилия σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [13, 14]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$. Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp, сжимающими усилиями σ_y в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c, приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что сжимающие усилия σ_y малы по сравнению с критическими напряжениями $(\sigma_y)_{cr}$, которые могут произвести выпучивание пластинки при отсутствии обтекания.

Отметим, что в работе, с целью получения возможности аналитического исследования в рассматриваемой задаче динамической устойчивости системы "пластинка–поток", распределённая масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными массами и моментами поворота, приложенными вдоль свободного края пластинки [2, 11, 15]. Такая замена вовсе не приводит к искажению динамической картины явления – потери устойчивости системы; быть может, с точностью до численных значений критических скоростей потока газа, которые могут быть несколько завышенными.

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности сжатой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [13,14] будет описываться соотношением [2, 8,18]:

$$D\Delta^2 w + 2h\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ– дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2, 11]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D^{-1} I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \;\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D^{-1} m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

при $x = 0$;

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \text{ при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr}– наименьшую скорость потока газа в сверхзвуковом и гиперзвуковом интервале скоростей:

$$V_{cr} \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}), \; M_0 = \sqrt{2}, \; M_{2\cos m} \approx 33.85; \tag{1.5}$$

приводящую к потере устойчивости состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_y < (\sigma_y)_{cr.} < (\sigma_y)_{pr.}. \tag{1.6}$$

Здесь, M_0 и $M_{2\cos m}$ – граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1]; $(\sigma_y)_{cr.}$– критические напряжения, приводящие к выпучиванию пластинки в отсутствии обтекания ($V = 0$), найденные в работе [17]; $(\sigma_y)_{pr.}$ – нижняя граница текучести [1, 17].

Анализ устойчивости возмущённого движения динамической системы “пластинка–поток” (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале скоростей потока газа (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае прямоугольных пластинок умеренных размеров:

$$\gamma = ab^{-1} \in (0.193, 1.96), \tag{1.7}$$

γ– отношение ширины пластинки a(сторона пластинки по потоку) к её длине b.

Заметим, что в работах [15, 16] получено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» в предположении отсутствия первоначального напряжённого состояния пластинки, в работе [17] – задачи статической устойчивости панели с нагруженными краями $y = 0$ и $y = b$. как при обтекании ($V \neq 0$), так и в отсутствии обтекания ($V = 0$).

Данная работа является продолжением работы [18], в которой исследована задача устойчивости (1.1) – (1.4) в случае достаточно удлинённых панелей ($\gamma \leq 0.193$).

2 Решение задачи

Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(\mu_n r x + \lambda t\right) \sin\left(\mu_n y\right), \ \mu_n = \pi n b^{-1} \tag{2.1}$$

C_n– произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b.

Возмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$), и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$). Критическая скорость потока V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости возмущённого движения системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$). Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение в виде алгебраического уравнения четвёртой степени:

$$r^4 - 2r^2 + \alpha_n^3 r + (1 - \beta_y^2) = 0, \ \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}, \ \beta_y^2 = 2h\sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2}, \tag{2.2}$$

которое в соответствии с методом решения Феррари можно представить в виде [17]:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1)}r + q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right)\left(r^2 - \sqrt{2(q+1)}r + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) = 0, \tag{2.3}$$

где $q = q(V)$– параметр, характеризующий скорость потока газа V– действительный корень кубического уравнения

$$8(q+1)\left(q^2-1+\beta_y^2\right)-\alpha_n^6=0, \tag{2.4}$$

удовлетворяющий условию [17]:

$$q \in (q_0, \infty) \tag{2.5}$$

$q_0 = \left(-1+2\sqrt{(4-3\beta_y^2)}\right)/3,\ \beta_y^2 \leq 4/3$ и $q_0 = 1,\ \beta_y^2 > 4/3$ (табл. 1);

β_y^2– коэффициент напряжения, который

$$\beta_y^2 < (\beta_y^2)_{cr.},\ (\beta_y^2)_{cr.} = \beta_y^2(n,\gamma,\nu) = 2h(\sigma_y)_{cr.}D^{-1}\mu_n^{-2}, \tag{2.6}$$

в соответствии с ограничением (1.6) и обозначениями (1.7) и (2.2).

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	1.333	>1.333
q_0	1.0	0.840	0.721	0.510	0.338	0.072	-0.333	1.0

Таблица 1

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.193	1.0	0.840	0.721	0.510	0.338
0.20	14.202	12.359	11.605	10.456	8.493
0.30	6.822	6.029	5.695	5.180	4.272
0.33	5.799	5.150	4.875	4.447	3.686
0.40	4.245	3.815	3.625	3.332	2.797
0.50	3.058	2.792	2.672	2.479	2.114
0.60	2.416	2.237	2.153	2.015	1.745
0.70	2.032	1.903	1.841	1.735	1.523
0.80	1.785	1.687	1.639	1.555	1.379
0.90	1.616	1.539	1.500	1.431	1.282
1.00	1.496	1.434	1.401	1.342	1.212
1.20	1.341	1.297	1.273	1.228	1.124
1.50	1.215	1.186	1.168	1.135	1.052
1.80	1.149	1.126	1.113	1.086	1.016
1.90	1.133	1.112	1.099	1.074	1.0084
1.96	1.125	1.105	1.092	1.067	1.004

Таблица 2

В таблице 2 приведены для некоторых значений параметров $\gamma \in (0.193, 1.96)$

и ν значения функции $(\beta_y^2)_{cr.} = \beta_y^2(n,\gamma,\nu)$ при $n=1$– решения уравнения

$$K_3 = \left(\sqrt{\beta_y^2}+1-\nu\right)^2 \sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}\,\mathrm{sh}\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}\right)\cos\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}\right) -$$
$$-\left(\sqrt{\beta_y^2}-1+\nu\right)^2 \sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}\,\mathrm{ch}\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}\right)\sin\left(\pi n\gamma\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}\right) = 0$$

в интервале $\beta_y^2 > 1$, полученные в работе [17].

Необтекаемая прямоугольная пластинка умеренных размеров $\gamma \in (0.193, 1.96)$ для всех значений коэффициента Пуассона ν при условии $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{cr.}$(табл.2) теряет статическую устойчивость в виде неустойчивости панели: локализованная неустойчивость отсутствует [17].

В работе [17] с помощью графоаналитических методов исследований показано, что в допустимом интервале значений параметра скорости $q \in (q_0, \infty)$ (2.5) характеристическое уравнение (2.2) имеет два действительных корня $r_1 \in R^1$, $r_2 \in R^1$ и пару комплексно сопряжённых корней $r_{3,4} \in W$ с положительной вещественной частью, которые легко находятся, как решения квадратных уравнений – сомножителей соотношения (2.3):

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - 0.5(q-1)} \tag{2.7}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + 0.5(q-1)} \tag{2.8}$$

При этом, имеем [17]:

$$r_1 < 0,\ r_2 < 0,\ \text{когда}\ \beta_y^2 \in [0,1),\ q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2})/3, \infty\right) \tag{2.9}$$

$$r_1 < 0,\ r_2 = 0,\ \text{когда}\ \beta_y^2 = 1,\ q \in (1/3, \infty) \tag{2.10}$$

$$r_1 < 0,\ r_2 > 0,\ \text{когда}\ \beta_y^2 \in (1, 4/3],\ q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2})/3, \infty\right)\ \text{и} \tag{2.11}$$
$$\beta_y^2 > 4/3,\ q \in (1, \infty)$$

Отсюда следует, что общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1), запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\sin(\mu_n y),\ \mu_n = \pi n b^{-1} \tag{2.12}$$

C_{nk} – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b ; r_k ,$k = \overline{1,4}$ – корни характеристического уравнения (2.2), определяемые выражениями (2.7) и (2.8).

Учитывая обозначения (2.2), из соотношения (2.4) находим явный вид зависимости скорости потока газа V от параметров q, n, γ, β_y^2 и ν системы «пластинка–поток»:

$$V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu) = 2\sqrt{2(q+1)\left(q^2-1+\beta_y^2\right)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D\left(a_0\rho_0 a^3\right)^{-1}, \qquad (2.13)$$

$q\in(q_0,\infty)$ (табл.1), $\beta_y^2\le(\beta_y^2)_{cr.}$ (табл.2) и $\gamma\in(0.193,1.96)$.

В силу условия (1.5), отсюда, очевидно, следует, что

$$V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)\in\left(V(q_0,n,\gamma,\beta_y^2,\nu),\ a_0M_{2\cos m}\right)\subseteq(a_0M_0,a_0M_{2\cos m}) \qquad (2.14)$$

когда $V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)\ge a_0M_0$, и

$$V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)\in(a_0M_0,a_0M_{2\cos m}),\ \text{когда}\ V(q_0,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)<a_0M_0. \qquad (2.15)$$

Тогда, согласно формуле цилиндрической жёсткости $D=\dfrac{E(2h)^3}{12(1-\nu^2)}$, допустимые интервалы значений приведённой скорости $V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)D^{-1}a_0\rho_0a^3$ при $V(q_0,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)\ge a_0M_0$, и при $V(q_0,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)<a_0M_0$ соответственно будут вида:

$$\begin{aligned}V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)D^{-1}(a_0\rho_0a^3)\in(V(q_0,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)D^{-1}(a_0\rho_0a^3),a_0M_{2cosm}\Psi)\subseteq\\ \subseteq(a_0M_0\Psi,a_0M_{2cosm}\Psi);\end{aligned} \qquad (2.16)$$

$$V(q,n,\gamma,\beta_y^2,\nu)D^{-1}(a_0\rho_0a^3)\in(a_0M_0\Psi,a_0M_{2\cos m}\Psi) \qquad (2.17)$$

где

$$\Psi=12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ M_0=\sqrt{2},\ M_{2\cos m}\approx 33.85. \qquad (2.18)$$

Из соотношений (2.16)–(2.18) видно, что длины $d(\nu,2ha^{-1})\le a_0(M_{2\cos m}-M_0)\Psi$ допустимых интервалов (2.16) и (2.17) являются убывающими функциями как от относительной толщины пластинки $2ha^{-1}$, так и от коэффициента Пуассона ν, при фиксированных значениях остальных параметров системы. Для стальных прямоугольных пластинок умеренных размеров $\gamma\in(0.193,1.96)$ подсчитанные интервалы допустимых значений приведённых скоростей потока газа $VD^{-1}(a_0\rho_0a^3)$ даны в таблице 3.

Как следует из данных таблицы 3, с ростом параметра $2ha^{-1}$ длины $d(\nu,2ha^{-1})$ допустимых интервалов уменьшаются примерно в 15.6 раз при всех фиксированных значениях ν , а с ростом коэффициента Пуассона ν– уменьшаются в 1.32 раза при фиксированных значениях параметра $2ha^{-1}$.

ν / $2ha^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81, 1311.78)	(52.03, 1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70, 1141.58)	(41.63, 996.35)
0.010	(11.84, 283.45)	(11.24, 269.09)	(10.91, 261.25)	(10.30, 246.70)	(8.99, 215.32)
0.012	(6.85, 164.01)	(6.50, 155.72)	(6.32, 151.20)	(5.96, 142.69)	(5.20, 124.60)
0.015	(3.51, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

Таблица 3

3 Дисперсионное уравнение

Перейдем к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков потери устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4). Подставляя общее решение (2.12) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель – после несложных преобразований описывается биквадратным уравнением вида:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2)\lambda^2 + A_3 = 0, \tag{3.1}$$

где

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3},\ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1},\ \delta_n > 0,\ \chi_n > 0, \tag{3.2}$$

приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$\begin{aligned} A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_y^2) = \sqrt{2(q+1)}\left(1 - e^{-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}\right) B_1 B_2 - \\ - 2B_2\left(q + 1 + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma} \operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) - \\ - 2B_1\left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma} \operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2); \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A_1(q,n,\gamma,\beta_y^2) = 2(q+1)\times \\
&\times\left[(q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})+(q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})e^{-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}\right]B_1B_2+ \\
&+2B_2\Big[\sqrt{2(q+1)(q^2-1+\beta_y^2)}\left(q+1+\sqrt{(q^2-1+\beta_y^2)}\right)\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)+ \\
&+2B_1((2q-1)(q+1)+\beta_y^2)\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big]\cos(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}+ \\
&+2\Big[B_1\sqrt{2(q+1)(q^2-1+\beta_y^2)}(q+1-\sqrt{(q^2-1+\beta_y^2)})\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)+ \\
&+(q+1)(q-1+\beta_y^2)\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)\Big]\sin(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= A_2\left(q,n,\gamma,\beta_y^2\right) = 2\,(q+1)\left(1+e^{-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}\right)B_1B_2- \\
&-4\,(q+1)\,B_1B_2\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_1)\,e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}+ \\
&+2\left(3\left(q^2-1\right)+2\beta_y^2\right)\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_1)\,e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma};
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3 &= A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) = \\
&= \sqrt{2(q+1)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2\right\}B_1B_2- \\
&-\sqrt{2(q+1)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2\right\}B_1B_2\times \\
&\times e^{-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}+2\Big\{\Big[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-(2q^2-4q+1)(q+1)- \\
&-\left(q-1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\beta_y^2-2\left((2q-1)(q+1)-q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\beta_y^2\right)\nu+ \\
&+\left(q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\nu^2\Big]\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)+2\sqrt{2(q+1)(q^2-1+\beta_y^2)}(q+1)B_1\times \\
&\times\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big\}B_2\cos(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}+ \\
&+2\Big\{-B_1\Big[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+(2q^2-4q+1)(q+1)+ \\
&+(q-1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\beta_y^2+2((2q-1)(q+1)+q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\beta_y^2)\nu- \\
&-(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\nu^2\Big]\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)-\sqrt{2(q+1)}(3(q^2-1)+2\beta_y^2)\times \\
&\times\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)\Big\}\sin(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma}=0
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-0.5(q-1)},\ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+0.5(q-1)} \tag{3.7}
$$

При всех допустимых значениях параметра скорости $q \in (q_0, \infty)$ (2.5), коэффициента напряжения $\beta_y^2 < (\beta_y^2)_{cr.}$ (табл. 2) и $n \geq 1$ для $\gamma \in (0.193, 1.9)$ очевидно, что $B_1 = B_1(q, \beta_y^2) > 0$ и $B_2 = B_2(q, \beta_y^2) > 0$, откуда следует справедливость неравенств:

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_y^2) > 0, A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_y^2) > 0 \tag{3.8}$$

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \delta_n^1 \tag{3.9}$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.8), перепишем в виде

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2)\chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0, \delta_n > 0, \chi_n > 0, k_n > 0 \tag{3.10}$$

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.10), определяющих собственные движения системы в пространстве существенных параметров $\Im = \left\{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_y^2, k_n\right\}$ - параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение системы. Значения остальных параметров системы – несущественных» – принимаются фиксированными.

4 Разбиение пространства параметров системы на области устойчивости и неустойчивости

Введём в рассмотрение в пространстве $\Im$ параметров системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости $\Im_1, \Im_2, \Im_3$. В области $\Im_0$ все λ_k уравнения (3.10) находятся в левой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$); в областях $\Im_1, \Im_2$ и $\Im_3$, соответственно, либо среди корней λ_k имеется один положительный корень, либо имеются два положительных корня, либо имеется пара комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью. Ясно, что возмущённое движение системы в области $\Im_0$ устойчиво, а в областях $\Im_1, \Im_2, \Im_3$ – неустойчиво. Ясно, что область устойчивости $\Im_0 \in \Im$ будет определяться соотношениями:

$$k_n A_1 + A_2 > 0,\ A_3 > 0,\ \Delta > 0 \tag{4.1}$$

а области неустойчивости $\Im_l$, $l = \overline{1,3}$ – соотношениями:

$$\Im_1 : k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 < 0, \Delta > 0 \text{ и } k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 < 0, \Delta > 0 \tag{4.2}$$

$$\Im_2 : k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0 \tag{4.3}$$

$$\Im_3 : k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta < 0 \text{ и } k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta < 0 \tag{4.4}$$

Здесь Δ – дискриминант характеристического определителя (3.10):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_y, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3. \tag{4.5}$$

Очевидно, что в области устойчивости $\Im_0$, определяемой условиями (4.1), уравнение (3.10) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$. При этом обтекаемая прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния. В области $\Im_1$, определяемой условиями (4.2), характеристический определитель (3.10) имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$ (из двух собственных движений пластинки, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2, одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону). В силу этого, прогибы пластинки будут возрастать во времени по экспоненциальному закону: в области $\Im_1$ имеет место дивергенция панели.

В области $\Im_2$, определяемой условиями (4.3), уравнение (3.10) имеет четыре действительных корня λ_i, по два отрицательных $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ и положительных $\lambda_3 > 0,\ \lambda_4 > 0$: из четырёх собственных движений пластинки два затухают, а остальные два неограниченно отклоняются по экспоненциальному закону. Тем самым, возмущённое движение системы в области $\Im_2$ так же, как и в $\Im_1$, является статически неустойчивым: имеет место дивергенция панели. Однако, в отличие от области$\Im_1$, в области $\Im_2$ явление дивергенции более ярко выражено.

В области $\Im_3$, определяемой условиями (4.4), характеристическое уравнение (3.10) имеет, по крайней мере, два комплексно сопряженных корня с положительной вещественной частью. Следовательно, возмущённое движение системы теряет динамическую устойчивость: имеет место панельный флаттер. Пластинка совершает флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде.

Границами области устойчивости $\Im_0$ возмущённого движения системы «пластинка- поток» в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности [12, 15]:

$$A_3 = 0 \tag{4.6}$$

$$\Delta = 0 \tag{4.7}$$

Характеристическое уравнение (3.10) на гиперповерхности (4.6) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности (4.7) – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

На границе (4.6) области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ возмущённое движение системы «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ Критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div.}$, соответствующие первому корню $q^{(1)}_{cr.div.} \in (q_0, \infty)$ уравнения (4.6) и подсчитанные по формуле (2.13), разграничивают области устойчивости $\Im_0$ и статической (дивергентной) неустойчивости $\Im_1$ возмущённого движения прямоугольной пластинки. При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде дивергенции панели. Это приводит к соответствующему изменению динамического поведения сжатой прямоугольной пластинки в потоке газа: в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Так как монотонное «выпучивание» пластинки не имеет колебательного характера, то может рассматриваться как квазистатический процесс – дивергенция.

Заметим, что уравнение (4.6) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [17] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой сжатой панели в статической постановке с помощью метода Эйлера.

На границе (4.7) области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_nA_1 + A_2 > 0, A_3 > 0$, а так же, на границе (4.7) области дивергентной неустойчивости $\Im_2$ при условии $k_nA_1 + A_2 < 0, A_3 > 0$, возмущённое движение системы при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ теряет динамическую устойчивость в виде панельного флаттера.

Критические скорости панельного флаттера $V_{cr.fl.}$, соответствующие первому корню $q^{(1)}_{cr.fl.} \in (q_0, \infty)$ уравнения (4.7) и подсчитанные по формуле (2.13), в зависимости от значений параметров системы γ, β_y^2, k_n при условии $k_nA_1+A_2 > 0$ разграничивают области устойчивости $\Im_0$ и $\Im_3$, или области $\Im_2$ и $\Im_3$. В обоих случаях при значениях скоростей потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям – к колебаниям по нарастающей амплитуде.

Однако, в первом случае плоская по форме пластинка начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния, а во втором случае – «выпученная» (изогнутая) пластинка. Соответственно, переходы $\Im_0 \to \Im_3$ и $\Im_2 \to \Im_3$ определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [12, 15].

Следует отметить, что в соответствии с соотношениями (4.1) – (4.5) очевидно, что при $k_n = 0$ – при отсутствии момента поворота I_c на свободном крае пластинки $x = 0$ возмущённое движение системы теряет устойчивость только в виде дивергенции панели, как и в случае системы при ненагруженной панели $(\beta_y^2 = 0)$[15]: панельный флаттер отсутствует.

Таким образом, критические скорости дивергенции панели флаттера $V_{cr.div.}$и панельного $V_{cr.fl.}$, соответствующие корням $q_{cr.div.}$ и $q_{cr.fl.}$ уравнений (4.6) и (4.7) соответственно, определяются по формуле (2.13) с достаточной точностью. При скоростях потока $V \geq V_{cr.div.}$и $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» переход возмущённого движения системы «пластинка–поток», соответственно, от устойчивости к неустойчивости в виде дивергенции панели и от устойчивости или от состояния дивергенции панели – к панельному флаттеру.

5 Численный анализ

В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\left\{q(n, \gamma, \nu, \beta_y^2, k_n)\right\} \in \Im$, параметризованных надлежащим образом в пространстве $\Im$. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому, ограничимся иллюстрациями типичных случаев, выделяя наиболее представительные из этого семейства кривых. Численные расчеты, проведённые для различных значений числа полуволн n , показали, что при фиксированных значениях остальных параметров системы наименьшие значения критических скоростей дивергенции и флаттера соответствуют значению $n = 1$.

В таблицах 4 – 19 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости возмущённого движения системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4), характеризующие наиболее представительные случаи зависимости приведённых критических скоростей дивергенции и флаттера от существенных параметров системы, применительно к интервалу сверх– и гиперзвуковых скоростей (1.5).

Как оказалось, качественные характеристики поведения возмущённого движения системы существенно зависят от параметра $\gamma \in (0.193, 1.96)$. Тем не менее, можно выделить три интервала значений $\gamma : (0.193, 0.33), [0.33, 0.74)$ и $[0.74, 1.96)$, в которых поведение возмущённого движения системы можно принять, примерно, одинаковым.

Для наглядной иллюстрации динамики изменения состояния системы «пластинка – поток» в указанных интервалах, составим цепочки переходов состояний системы из области $\Im_l \in \Im$ в область $\Im_k \in \Im$, основываясь на анализе численных результатов, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5). В частности, при составлении цепочек переходов для стальных пластинок учитывались интервалы допустимых значений приведённых скоростей потока газа, зависящих от относительной толщины пластинки $2ha^{-1}$ и коэффициента Пуассона ν [17, 18]. В данной статье приводится лишь часть этих данных (табл. 3).

5.1 Случай $\gamma \in (0.193, 0.33)$

Исследуем поведение возмущённого движения системы при $\gamma \in (0.193, 0.33)$ В этом случае сверхзвуковое обтекание приводит к резкому «скачкообразному падению» критического коэффициента напряжения $\left(\beta_y^2\right)_{cr}$ (табл.2): возмущённое движение системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5) – теряет устойчивость в виде дивергенции панели (область $\Im_1$), как и в случае достаточно удлинённых пластинок ($\gamma \leq 0.193$) [15, 18]. Если это состояние удаётся перейти, то в дальнейшем, в предположении $\beta_y^2 \in \left(0, \left(\beta_y^2\right)_{cr}\right)$ (табл. 2), при скоростях потока газа $V \geq V_0 > a_0\sqrt{2}$ (табл. 4) и $V \geq V_0^* > a_0\sqrt{2}$ (табл.5), соответствующих значениям $0 \leq k_1 < 0.3$ и $k_1 \geq 0.3$ соответственно, возмущённое движение системы становится устойчивым. Цепочки переходов состояний системы, в частности, для стальных пластинок относительной толщины $(2ha^{-1}) \in [0.006, 0.015]$, будут иметь следующее представление:

$$\Im_1 \xrightarrow{\mathrm{V_0}} \Im_0 \xrightarrow{\mathrm{V_{crdiv}}} \Im_1, \ k = 0 \tag{5.1}$$

$$\Im_1 \xrightarrow{\mathrm{V_0}} \Im_0 \xrightarrow{\mathrm{V_{crfl}}} \Im_3 \xrightarrow{\mathrm{V_0^*}} \Im_0 \xrightarrow{\mathrm{V_{crdiv}}} \Im_1, \ k \in (0, 0.3) \tag{5.2}$$

$$\Im_1 \xrightarrow{\mathrm{V_2}} \Im_2 \xrightarrow{\mathrm{V_{crfl}}} \Im_3 \xrightarrow{\mathrm{V_0^*}} \Im_0 \xrightarrow{\mathrm{V_{crdiv}}} \Im_1, \ k \geq 0.3 \tag{5.3}$$

Отметим две особенности, свойственные этому случаю:

1) в интервале $k_1 \in (0, 0.3)$ имеет место переход $\Im_0 \to \Im_3$, а в интервале

$k_1 \in (0.3, \infty)$ – переход $\Im_2 \to \Im_3$:

$$V_0(\gamma, \nu, \beta_y^2) = V_2(\gamma, \nu, \beta_y^2), \gamma \in (0.193, 0.33), \nu, \beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{cr} \quad (5.4)$$

$$2) \quad V_{cr.fl.} < V_{cr.div.}, k_1 \in (0, 0.3) \text{ и } V_2 < V_{cr.fl.} < V_{cr.div.}, k_1 \in (0.3, \infty) \quad (5.5)$$

Подробнее обсудим численные результаты для $\gamma = 0.3$, приведённые в таблицах 4 – 11. Данные таблиц 4 – 8 и 11 соответствуют значениям ν: 0.125; 0.25; 0.3; 0.375 и 0.5 соответственно при фиксированных значениях остальных параметров.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	2.25
$V_0 D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$	88.203	89.830	90.982	93.020	94.303	95.629	102.11
	89.786	91.389	92.667	94.862	95.830	97.553	102.73
и	90.435	92.331	93.151	95.638	96.128	98.342	103.36
	91.422	93.198	94.363	96.767	97.228	99.542	105.23
$V_2 D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$	93.111	94.776	96.160	98.700	98.579	101.60	107.75

Таблица 4

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	2.25
$V_0^* D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$	242.68	238.45	235.04	229.55	226.35	222.69	199.68
	237.54	231.81	228.82	224.68	219.89	215.46	185.85
при	235.07	229.75	226.54	220.64	216.68	211.96	176.82
	231.79	226.17	222.50	216.63	211.91	206.43	-
$k_1 \in (0, 0.3)$	226.09	219.70	215.75	208.68	204.02	197.06	-

Таблица 5

β_y^2 \ k_1	0.3	0.5	0.8	1	5	10	20	200
	296.69	292.38	279.57	269.87	214.82	200.93	191.32	176.17
	292.26	287.97	276.82	266.14	213.70	200.30	191.02	176.17
0	288.73	286.10	275.26	264.43	213.22	200.99	190.86	176.17
	286.97	283.59	272.01	262.72	212.59	199.68	190.56	176.17
	280.23	278.36	268.39	259.32	211.63	199.05	190.18	176.17
	278.79	275.32	264.67	254.82	209.09	197.36	189.66	175.90
	271.01	270.14	261.28	252.29	207.51	196.74	189.08	175.90
2.25	269.28	268.08	258.46	249.77	206.72	196.58	188.90	175.90
	265.00	265.00	256.12	248.10	205.93	195.81	187.83	175.90
	258.20	259.89	251.74	244.76	205.15	195.04	187.38	175.90

Таблица 6: Значения $V_0^* D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right) = V_0^* \left(\gamma, \nu, \beta_y^2, k_1\right)$ при $k_1 \geq 0.3$.

Приведённая критическая скорость устойчивости $V_0 D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$, а также, равная ей скорость дивергенции панели $V_2 D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ согласно (5.4), возрастают с ростом параметров γ , β_y^2 и больше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл. 4). Следовательно, первоначальное напряжённое состояние в данном случае приводит к дестабилизации, в сравнении с ненагруженной панелью $\left(\beta_y^2 = 0\right)$ [15]. Приведённая критическая скорость устойчивости $V_0^* D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$, зависит от параметров γ , β_y^2, ν и $k_1 > 0$: убывает с ростом β_y^2 и ν; в интервале $k_1 \in (0,\, 0.3)$ от k_1 зависит неощутимо мало, а в интервле $k_1 \geq 0.3$ убывает с ростом k_1, примерно, в 1.7 раз (табл. 5 и 6); с ростом γ в интервале $k_1 \in (0,\, 0.3)$ убывает, а в интервале $k_1 \geq 0.3$ – возрастает.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	2.25
$V_{crdiv} D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$	491.03	494.25	496.39	498.45	500.72	502.87	513.71
	480.56	483.76	485.89	488.05	490.18	492.33	500.97
	475.36	479.58	481.29	483.86	484.95	488.13	495.91
	470.17	473.34	474.84	477.60	479.31	479.77	488.34
	459.86	463.01	464.69	467.23	467.27	469.39	476.86

Таблица 7

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	2.25
$V_{crfl} D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$	106.97	110.25	112.25	116.23	118.91	121.61	140.86
	109.51	113.08	115.74	120.15	122.86	125.58	150.65
$k_1 \in (0,\, 0.3)$	110.66	114.37	117.04	121.47	124.12	128.26	159.22
$(\Im_0 \to \Im_3)$	112.33	116.06	119.00	123.45	126.85	130.96	-
	115.31	119.33	122.69	128.13	132.24	136.40	-

Таблица 8

k_1 \ β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	2.25
0.3	90.44	92.19	93.51	95.63	96.37	98.35	105.36
0.5	93.33	95.26	96.55	98.51	99.81	101.13	107.37
0.8	99.45	102.04	103.36	104.71	106.05	107.39	113.23
1	104.44	105.93	107.14	108.55	109.71	111.21	116.72
5	133.69	134.74	135.63	136.25	136.98	138.19	141.55
10	143.21	144.42	144.62	145.63	146.32	146.81	149.38
20	150.53	151.68	151.74	152.45	152.97	153.36	155.63
200	163.40	163.64	163.96	164.23	164.51	164.82	166.26

Таблица 9: Значения $V_{cr.fl.} D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $k_1 \geq 0.3$ (переход $\Im_2 \to \Im_3$)

Приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div.} D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ зависит от параметров γ , β_y^2 и ν: с ростом коэффициента напряжения β_y^2 возрастает примерно на 4%, меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл. 7). А с ростом γ при $\nu < 0.25$ – возрастает незначительно, в отличие от остальных ν, при которых убывает.

Приведённая критическая скорость флаттера панели $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ зависит от параметров γ , ν, β_y^2 и k_1.

Однако, при этом, в интервале $k_1 \in (0,\ 0.3)$ влияние параметра k_1 на скорость флаттера пренебрежимо мало, в отличие от значений в интервале $k_1 \geq 0.3$, в котором становится пренебрежимо малым влияние коэффициента Пуассона ν на скорость флаттера. При этом, при всех $k_1 > 0$ приведённая критическая скорость флаттера больше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν; с ростом коэффициента напряжения β_y^2 возрастает не более 16%; с ростом k_1 возрастает примерно в 1.82 раза; с ростом γ возрастает примерно 1.08 – 1.3 раза (табл. 8 и 9) .

Из сопоставления данных таблиц 7 – 9 следует, что $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ меньше $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ в 3 – 3.6 раза и более, а из сопоставления данных таблицы 3 с данными таблиц 4 – 9 следует достоверность представления (5.1) – (5.3).

В соответствии с формулой, полученной в работе [18] в предположении $V_0 \leq a_0\sqrt{2}$ и $V_0^* \leq a_0\sqrt{2}$, легко можно найти минимальную относительную толщину пластинки $\left(2ha^{-1}\right)_{\min}$, при которой возмущённое движение системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ является устойчивым при всех γ , $\nu, \beta_y^2 < \left(\beta_y^2\right)_{cr.}$ и $k_1 \geq 0$,:

$$\left(2ha^{-1}\right)_{\min} = \sqrt[3]{\frac{a_0\sqrt{2}}{(V_{0\max}D^{-1}(a_0\rho_0a^3))} \cdot (12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1})}, \tag{5.6}$$

где

$$(V_0)_{\max}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right) = \max_{\beta_y^2} V_0D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right), 0 \leq k_1 < 0.3 \text{ (табл. 4)}; \tag{5.7}$$

$$(V_0)_{\max}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right) = \max_{\beta_y^2} V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right), k_1 \geq 0.3 \text{ (табл. 5 и 6)}. \tag{5.8}$$

Подставляя значения (5.7) и (5.8) в формулу (5.6), получаем, соответственно, значения минимальной относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right)_{\min}$ и $\left(2ha^{-1}\right)^*_{\min}$ (табл. 10), которые, как оказалось, зависят от параметра $\gamma \in (0.193,\ 0.33)$ неощутимо мало.

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\left(2ha^{-1}\right)_{\min}$, $0 \leq k_1 < 0.3$	0.00487	0.00477	0.00472	0.00459	0.00438
$\left(2ha^{-1}\right)^*_{\min}$, $k_1 \geq 0.3$	0.00342	0.00338	0.00336	0.00329	0.00318

Таблица 10

Тогда, учитывая условие (5.4), для пластинок относительной толщины $2ha^{-1} < \left(2ha^{-1}\right)_{\min}$ при $k_1 = 0$ и $2ha^{-1} \in \left(\left(2ha^{-1}\right)^*_{\min},\ \left(2ha^{-1}\right)_{\min}\right)$ при $k_1 > 0$ цепочки переходов (5.1) – (5.3) в интервале $\gamma \in (0.193,\ 0.33)$ будут вида:

$$
\begin{aligned}
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_0^{**}} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 = 0;\\
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^{*}} \Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \in (0,\, 0.3)\,;\\
&\Im_2 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^{*}} \Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \geq 0.3.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Из выражений (5.9) следует, что возмущённое движение динамической системы «пластинка–поток», будучи устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ при всех $k_1 \in (0,\, 0.3)$, с увеличением скорости потока газа теряет сначала динамическую устойчивость в виде панельного флаттера при скоростях $V \geq V_{cr.fl.}$ (табл. 8) и после этого, вновь становясь устойчивым, теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях $V \geq V_{cr.div.}$(табл. 7), превышающих $V_{cr.fl.}$в 3 и более раз. А, при $k_1 \geq 0.3$ возмущённое движение системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ является статически неустойчивым: система находится в области $\Im_2$ – в состоянии более ярко выраженной дивергенции панели, в сравнении с областью $\Im_1$.

Для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} < \left(2ha^{-1}\right)^*_{\min}$ (табл. 10) цепочки переходов в интервале $\gamma \in (0.193,\ 0.33)$ имеют следующее описание:

$$
\begin{aligned}
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_0^{**}} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \in [0,\ 1);\\
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_0^{**}} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crfl}} \Im_3 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \in [1, 20);\\
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \to \Im_2 \xrightarrow{\tilde{V}_{crfl}} \Im_3 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \geq 20.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Как следует из описания цепочек переходов (5.10), для пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \leq \left(2ha^{-1}\right)^*_{\min}$ возмущённое движение системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ при всех $k_1 \geq 0$ является устойчивым, которую теряет в виде дивергенции панели при скоростях $V \geq V_{cr.div.}$. При дальнейшем увеличении скорости потока газа возмущённое движение системы для $k_1 \in [0,\ 1)$ теряет устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях $V \geq \tilde{V}_{cr.div.}$, превышающих $V_{cr.div.}$ примерно на порядок: панельный флаттер отсутствует.

β_y^2 \ k_1	1	5	10	20	200
0	1623.303	1689.451	1766.119	1830.869	1982.711
	1721.657	1742.038	1806.497	1854.521	1994.318
	1754.867	1766.118	1824.358	1879.938	2000.463
	-	1814.609	1869.936	1887.342	2010.526
	-	-	1916.034	1896.103	2038.150
2.25	-	1727.643	1798.690	1863.824	1996.387
	-	1785.756	1847.468	1896.680	2008.130
	-	1831.161	1863.824	1916.485	2014.851
	-	1896.680	1929.726	1949.644	2031.372
	-	-	-	-	-

Таблица 11: Значения $\tilde{V}_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $k_1 \geq 1$ (переход $\Im_2 \to \Im_3$)

Возмущённое движение системы в случаях, в которых $k_1 \geq 1$, теряет устойчивость в виде панельного флаттера при скоростях $V \geq \tilde{V}_{cr.fl.}$, превышающих $V_{cr.fl.}$ более, чем на порядок (табл. 9 и 11), после чего в виде дивергенции панели при скоростях $V \geq \tilde{V}_{cr.div.}$, превышающих $\tilde{V}_{cr.fl.}$ в 3 – 3.5 раза. Это означает, что с уменьшением относительной толщины пластинки $\left(2ha^{-1}\right)$ приведённая критическая скорость флаттера растёт больше, чем на порядок, в отличие от приведённой скорости дивергенции $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$(табл. 7), которая не зависит от относительной толщины пластинки.

Таким образом, при меньших значениях относительной толщины пластинки, начиная с значения $2ha^{-1} = \left(2ha^{-1}\right)^*_{\min}$(табл. 10), возмущённое движение системы при всех $k_1 \geq 0$ является устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей. Приведённые критические скорости дивергенции $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ (табл. 7) и флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $\tilde{V}_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ (табл. 8, 9 и 11) являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения $\beta_y^2 < \left(\beta_y^2\right)_{cr.}$(табл. 2): первоначальное напряжённое состояние, обусловленное статическим нагружением, способствует стабилизации возмущённого движения системы, в сравнении с системой с ненагруженной панелью [15]. При этом, чем меньше относительная толщина пластинки $\left(2ha^{-1}\right)$, тем больше приведённые критические скорости дивергенции панели и флаттера: с уменьшением относительной толщины пластинки возмущённого движения системы становится более устойчивым.

5.2 Случай $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$

Возмущённое движение системы при $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ и $\beta_y^2 \in \left(0,\ \left(\beta_y^2\right)^*_{cr.}\right)$ является устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей; $\left(\beta_y^2\right)^*_{cr} \approx \chi^{-1}(\gamma,\ \nu)\cdot\left(\beta_y^2\right)_{cr.}$, $\chi(\gamma,\nu)$ (табл. 12) – убывающая функция от γ и коэффициента Пуассона ν, характеризующая «скачкообразное падение» критического коэффициента напряжения $\left(\beta_y^2\right)_{cr.}$ (табл. 2), вследствие сверхзвукового обтекания.

γ	0.33	0.4	0.5	0.6	0.7
$\chi = \chi(\gamma, 0.125)$	4.142	3.265	2.548	2.301	2.117
$\chi = \chi(\gamma, 0.3)$	3.482	2.788	2.227	2.050	1.918
$\chi = \chi(\gamma, 0.5)$	2.632	2.151	1.761	1.662	1.586

Таблица 12

Цепочки переходов для стальных пластинок относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right) \in [0.006,\ 0.015]$ имеют следующее описание:

$$\begin{aligned}
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ 0 \leq k_1 < k_{11};\\
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \in (k_{11},\ k_{12});\\
&\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \xrightarrow{V_2} \Im_2 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1,\ k_1 \geq k_{12};
\end{aligned} \tag{5.11}$$

где k_{11} и k_{12} – коэффициенты, зависящие от параметров γ, ν и β_y^2. Так как влияние параметров ν и β_y^2 на значения функций k_{11} и k_{12} неощутимо мало, то можно принять, что $k_{11} = k_{11}(\gamma)$ и $k_{12} = k_{12}(\gamma)$.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0
$V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	14.650	13.707	13.007	11.681	10.649
	13.614	11652	10.946	9.639	8.538
	11.706	10.836	10.075	8.780	7.656
	10.448	9.557	8.822	7.500	6.207
	8.038	7.443	6.703	5.266	4.308

Таблица 13

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0
$\tilde{V}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	501.104	507.192	511.359	518.069	522.256
	470.207	474.455	477.387	481.937	484.877
	458.144	462.079	464.361	468.073	470.474
	441.374	443.860	445.328	447.815	449.283
	413.702	413.945	414.125	414.257	414.327

Таблица 14

k_1 \ β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0
0.5	125.501	132.932	140.407	150.003	158.154
	136.261	146.933	156.815	-	-
	141.602	154.500	172.547	-	-
	151.727	-	-	-	-
	-	-	-	-	-
0.8	113.652	119.822	124.403	129.733	134.057
	121.610	129.075	134.238	141.199	144.440
	125.180	133.361	138.470	149.016	157.473
	131.119	141.163	148.242	160.997	173.758
	143.487	158.651	177.549	-	-
1.0	112.627	117.532	121.796	127.478	131.407
	120.011	125.722	129.670	137.726	142.886
	123.752	129.501	133.473	142.751	148.350
	127.535	135.736	140.796	151.785	159.882
	138.256	149.310	158.629	-	-

Таблица 15: Значения $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $0.5 \le k_1 < 2$ (переход $\Im_0 \to \Im_3$)

В соответствии с численными результатами, коэффициенты $k_{11} = k_{11}(\gamma)$ и

$k_{12} = k_{12}(\gamma)$ при $\gamma = 0.4;\ 0.5;\ 0.6;\ 0.7$, соответственно, равны:

$$k_{11} \approx 0.5;\ 0.5;\ 0.8;\ 2 \text{ и } k_{12} \approx 0.8;\ 2;\ 3;\ 10. \tag{5.12}$$

Исследуем подробнее численные результаты искомой задачи при $\gamma = 0.5$, приведённые в таблицах 13 – 16.

Из сопоставления данных таблиц 13 и 14 следует, что $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ меньше $\tilde{V}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ примерно на два порядка. Значения обеих скоростей меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν.

Однако, приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$, в отличие от $\tilde{V}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$, является возрастающей функцией от $\gamma \in [0.33, 0.74)$ и убывающей от коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0,\ 1.2)$: при росте β_y^2 от 0 до 1.0 убывает, примерно, в 1.5 раза (табл. 13). А приведённая скорость дивергенции $\tilde{V}_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$, наоборот, является убывающей функцией от $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ и возрастающей от β_y^2: при росте $\beta_y^2 \in [0,\ 1.2)$ возрастает, примерно, на 4% (табл. 14).

Приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ (табл. 15 и 16) при $0.5 \le k_1 < 20$ больше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν; при $k_1 \ge 20$ влияние коэффициента Пуассона ν на скорость флаттера неощутимо мало. Критическая скорость $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ является возрастающей функцией от коэффициента напряжения β_y^2: возрастает примерно в 1.17–1.25 раз в интервале $\beta_y^2 \in [0,\ 1.2)$.

k_1 \ β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0
2	112.883	118.897	122.799	128.491	132.163
	118.894	125.346	129.594	135.809	139.910
	121.505	128.186	132.615	139.189	143.507
	125.479	132.779	137.582	144.817	149.707
	131.924	141.749	147.611	154.970	161.207
5	124.886	131.785	132.510	141.199	143.663
	126.398	135.234	140.796	145.482	148.744
	130.996	139.877	141.964	147.049	152.089
	132.970	141.046	146.271	150.992	153.882
	137.134	147.724	151.414	160.188	163.517
10	138.689	143.784	148.123	152.578	154.280
	140.250	146.143	150.222	153.374	157.472
	142.602	148.319	152.210	157.170	161.494
	144.965	150.502	154.207	160.956	162.910
	146.548	154.493	155.409	162.617	168.817
20	148.135	152.257	153.348	161.320	162.707
200	169.666	172.476	174.417	177.641	178.746

Таблица 16: Значения $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ при $k_1 \ge 2$ (переход $\Im_2 \to \Im_3$)

Наряду с этим, приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$

является монотонно убывающей функцией от k_1 в интервале $0.5 \leq k_1 < 2$ (табл. 15), а в интервале $k_1 \geq 2$ – возрастающей функцией от k_1. При этом, при $k_1 \geq 200$ влияние коэффициента k_1 на $V_{cr.fl.} D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ становится неощутимо малым. Следует отметить, что приведённая критическая скорость флаттера является возрастающей функцией от $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ при всех фиксированных значениях остальных параметров. Тем самым, для стальных пластинок относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right) \in [0.006,\ 0.015]$ состояние динамической системы «пластинка–поток» при бо'льших значениях β_y^2 и γ является более устойчивым: возмущённое движение системы теряет устойчивость в виде панельного флаттера при бо'льших значениях скоростей потока газа. С помощью аналогичных рассуждений, изъясняющих поведение возмущённого движения системы «пластинка–поток» в разделе 5.1, можно показать, что цепочки переходов (5.11) при всех $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} < \left(2ha^{-1}\right)^*_{\min} \approx 0.00342$ перепишутся в виде:

при $\nu \leq 0.25,\ 0 \leq k_1 < 2,\ \gamma \in [0.33,\ 0.5)$ и $\nu \leq 0.125,\ 0 \leq k_1 < 10,\ \gamma \in [0.5,\ 0.58)$:

$$\Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{\tilde{V}}_{crdiv}} \Im_1;$$

при $\nu \leq 0.125,\ 10 \leq k_1 < 20,\ \gamma \in [0.5,\ 0.58)$:

$$\Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crfl}} \Im_3 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{\tilde{V}}_{crdiv}} \Im_1;$$

при $\nu \leq 0.25,\ k_1 \geq 2,\ \gamma \in [0.33,\ 0.5)$ и $\nu \leq 0.125,\ k_1 \geq 20,\ \gamma \in [0.5,\ 0.58)$:

$$\Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1 \to \Im_2 \xrightarrow{\tilde{V}_{crfl}} \Im_3 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{\tilde{V}}_{crdiv}} \Im_1;$$

при остальных значениях параметров:

$$\Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1. \tag{5.13}$$

Отсюда следует, что для пластинок относительной толщины $2ha^{-1} < 0.00342$, у которых $\gamma \in [0.58,\ 0.74)$, при всех $k_1 \geq 0$, β_y^2 и значениях коэффициента Пуассона ν панельный флаттер отсутствует. Отметим, что $\tilde{\tilde{V}}_{cr.div.} D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ больше $\tilde{V}_{cr.div.} D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ на порядок и более; $\tilde{V}_{cr.fl.} D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ больше $\tilde{V}_{cr.div.} D^{-1} \left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ примерно в 3 – 4 раза. Из сопоставления цепочек переходов (5.11) и (5.13) очевидно, что с уменьшением относительной толщины пластинки $2ha^{-1}$ возмущённое движение системы теряет устойчивость при бо'льших значениях скоростей потока газа. Таким образом, в интервале $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$ первоначальное статическое нагружение, обусловленное сжимающими силами, приводит к стабилизации состояния системы «пластинка–поток». Более того, в случае пластинок относительной толщины $2ha^{-1} < 0.00342$ при всех $\gamma \in [0.58,\ 0.74)$ и фиксированных значениях остальных параметров панельный флаттер отсутствует: имеет место только дивергенция панели.

5.3 Случай $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$

Исследуем динамику возмущённого движения системы «пластинка–поток» при $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$. В этом случае, так же как и в разделе 5.2, при всех $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$ и $\beta_y^2 \in \left(0,\ \left(\beta_y^2\right)^*_{cr.}\right)$ возмущённое движение системы является устойчивым вблизи начала интервала сверхзвуковых скоростей $a_0\sqrt{2}$ для пластинок относительной толщины, примерно, $2ha^{-1} \in (0.007,\ 0.015]$. Здесь, $\left(\beta_y^2\right)^*_{cr} \approx \chi^{-1}(\gamma,\ \nu)\cdot \left(\beta_y^2\right)_{cr.}$; $\chi = \chi(\gamma, \nu)$, так же как и в разделе 5.2, является монотонно убывающей функцией от γ и ν (табл. 17). При этом, с увеличением скорости потока газа V возмущённое движение системы при всех значениях её параметров теряет устойчивость только в виде дивергенции панели: панельный флаттер отсутствует. Заметим, что для пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \leq 0.007$ возмущённое движение системы при скоростях потока газа $V \geq a_0\sqrt{2}$ является статически неустойчивым: имеет место дивергенция панели.

γ	0.74	0.8	1.0	1.5	$\geq$1.9
$\chi = \chi(\gamma, 0.125)$	2.076	2.028	1.917	1.598	1.541
$\chi = \chi(\gamma, 0.3)$	1.893	1.862	1.796	1.537	1.495
$\chi = \chi(\gamma, 0.5)$	1.576	1.567	1.515	1.384	1.372

Таблица 17: Caption

Цепочки переходов при $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$ и при всех значениях остальных параметров, в основном, будут иметь следующее описание:

$$\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1, \tag{5.14}$$

за исключением случаев, в которых $\gamma \in [0.74,\ 0.82)$, $\nu < 0.25$ и $\beta_y^2 < 0.5$. При этих значениях цепочки переходов будут вида: $\Im_0 \xrightarrow{V_{crdiv}} \Im_1 \to \Im_0 \xrightarrow{\tilde{V}_{crdiv}} \Im_1$.

В таблицах 18 и 19 даны значения приведённой критической скорости дивергенции панели $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.8$ и $\gamma = 1$ соответственно.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.79
	80.471	59.318	48.836	37.305
$V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	60.094	46.393	38.673	28.934
	54.320	41.877	34.945	25.759
$(\gamma = 0.8)$	46.751	35.953	29.924	21.105
	35.952	25.292	21.827	13.651

Таблица 18

β_y^2	0	0.3	0.5	0.75
$V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	524.286	501.362	125.924	77.458
	154.795	106.541	87.566	56.703
	128.470	93.215	67.203	49.539
$(\gamma = 1)$	102.100	86.247	60.693	40.153
	72.915	55.025	41.271	25.647

Таблица 19

Приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при всех $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$ является монотонно убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν и коэффициента напряжения β_y^2 (табл. 18 и 19). При этом, с возрастанием ν критическая скорость дивергенции панели убывает примерно в 2.2 – 2.73 раза при $\gamma = 0.8$; при $\gamma = 1$ – в 3.7 – 5 раз. Соответственно, с ростом коэффициента напряжения критическая скорость дивергенции панели убывает в 2.16 – 2.63 раза при $\gamma = 0.8$, а при $\gamma = 1$ – в 2.84 – 6.76 раз. Тем самым, первоначальное статическое нагружение при больших $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$ приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы, в сравнении с возмущённым движением системы с ненагруженной панелью $\left(\beta_y^2 = 0\right)$.

Из сопоставления данных таблиц 18 и 19 следует, что приведённая критическая скорость дивергенции возрастает с ростом $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$: при $\gamma = 1$ больше в 2 раза и более, чем при $\gamma = 0.8$.

Таким образом, в случае, в котором $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$, первоначальное статическое нагружение, обусловленное сжимающими силами, приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы «пластинка–поток».

6 Основные результаты

В работе, с помощью графоаналитического и численного методов исследований [15 – 18] изучается влияние первоначального напряжённого состояния прямоугольной пластинки умеренных размеров $\gamma \in (0.33,\ 1.96)$, обусловленного сжимающими силами, на устойчивость возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» при наличии на свободном крае пластинки сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток». Получены явные выражения дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости. Произведено разбиение многопараметрического пространства $\Im$ системы «пластинка–поток» на область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости: дивергенции панели $\Im_1$, $\Im_2$ и панельного флаттера $\Im_3$: определены интервалы изменения «существенных» параметров системы, разграничивающие области устойчивости и неустойчивости.

Введено понятие «цепочки переходов», звенья которой – переходы из одной области $\Im_k$ в другую $\Im_l$. «Цепочки переходов» позволяет наглядно проиллюстрировать всю динамику поведения возмущённого движения системы «пластинка–поток» в пространстве её «существенных» параметров $\Im$.

Найдены критические скорости сверхзвукового потока газа $V_{cr.div.}$ и $V_{cr.fl.}$, при превышении которых возмущённое движение динамической системы «пластинка–поток» теряет устойчивость в параметрическом пространстве в виде дивергенции панели, либо в виде панельного флаттера соответственно, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба.

Найдены критические значения коэффициента напряжения изгиба $\left(\beta_y^2\right)^*_{cr.}$ при обтекании. Установлено, что обтекание приводит к «скачкообразному падению» критического коэффициента напряжения, в сравнении с критическим коэффициентом напряжения при отсутствии обтекания [17]. При этом, коэффициент, характеризующий «падение», является монотонно убывающей функцией от параметра отношения сторон пластинки γ и коэффициента Пуассона ν. Вследствие этого возмущённое движение динамической системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ является статически неустойчивым при всех $\gamma \in (0.193,\ 0.33)$, в частности, для стальных панелей относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right) \in [0.006,\ 0.015]$. Для них найдена минимальная относительная толщина $\left(2ha^{-1}\right)_{\min}$, при которой возмущённое движение динамической системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ является устойчивым. Как оказалось, в этом случае приведённые критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения: первоначальное напряжённое состояние приводит к стабилизации возмущённого движения системы, в отличие от панелей, у которых $\gamma \geq 0.33$.

В случае панелей, у которых $\gamma \in [0.33,\ 0.74)$, первоначальное напряжённое состояние приводит как к дестабилизации возмущенного движения системы, так и к стабилизации, в зависимости от параметров γ и $2ha^{-1}$; а при $\gamma \in [0.74,\ 1.96)$ – к существенной дестабилизации при всех значениях остальных параметров, в сравнении с ненагруженной панелью [15].

Установлены «опасные» границы области устойчивости $\Im_0$ в смысле Баутина Н.Н. [12], характеризующиеся наличием звеньев $\Im_0 \to \Im_3$ и $\Im_2 \to \Im_3$ в «цепочке переходов», при которых происходит потеря прочности и возникновение усталостных трещин в материале пластинки [1, 2].

Заключение

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для решения широкого класса подобных задач устойчивости упругих систем как при первоначальном статическом нагружении, так и при динамическом.

Литература

[1] Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с. Volmir A.S. The Stability of the elastic system. Moscow: Physmathgiz. 1963. 880 p.

[2] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с. Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, 340 p. Izd. Fizmat lit. Moscow.

[3] Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38–46. Ishlinskii A.Yu. About the same, limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates. // Reports of USSR Academy of Sciences. 1954. V. 95. No. 3. Pp. 38-46.

[4] Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243. Movchan A.A.(1956). About vibrations of a plate, moving in gas. Izv. Acad. Nauk USSR. PMM. V. 20. No. 2, pp. 211-222.

[5] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука. 1972. 432 с. Volmir A.S. (1972). Nonlinear dynamics of plates and shells. Nauka. Moscow. 432p.

[6] Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic metods // Moscow: Science. Physmathlit. 1995. 320 p.

[7] Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968. Strength. Stability. Vibrations. Directory in 3 v. // Under the editorship of I. A. Birger and Ya. G. Panovko. – Moscow.: Mechanical Engineering. 1968.

[8] Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с. Algazin, S.D., Kijko, I.A. (2006). Flutter of Plates and Shells. Nauka. Moscow. 247 p.

[9] Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122. Novichkov Yu. N. A flutter of plates and shells. Results of science and technology Mechanics of deformable solids. – Moscow: Science. 1978. V. 11. Pp. 67-122.

[10] Crowell A.R., McNamara J.J., Miller B.A. (2011). Hypersonic aerothermoelastic response prediction of skin panels using computational fluid dynamic surrogates. Journal of aeroelasticity and structural dynamics. V. 2. No. 2, p. 3-30.

[11] . Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33–44. Rzhanitsyn A.R. (1985). “A cantilever elastic beam loaded by a follower force”, Izv. Acad. Nauk Arm. SSR, Mekhanika, 38, No. 5, pp. 33-44.

[12] Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с. Bautin N.N. The behavior of dynamical systems near the boundaries of the stability region. – M.: Science. 1984. 176 p.

[13] Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755. Il'yushin A.A.(1956). Law of Flat Sections at the Big Supersonic Velocity. PMM, v. 20(6), pp. 733-755.

[14] Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.

[15] Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край. // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge. //Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V. 67(2). P. 12–42.

[16] Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On a problem of supersonic panel flutter in the presence of concentrated inertial masses and moments // Изв. НАН Армении, Механика. 2016, т.69, № 3, с.41-59.

[17] Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край. // Изв. НАН Армении, Механика. 2017, т.70, № 4, с.12–34. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge// Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V. 70(4). P.12–34.

[18] M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. Supersonic flutter of a compressed elongated plate in the presence of concetrated inertial masses and moments.// Изв. НАН Армении. Механика. Изв. НАН Армении, Механика. 2020. Т.73, № 4, с. 58–74. Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2020. V. 73(4). P. 58–74.

Сведения об авторе

Белубекян Мелс Вагаршакович - кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.
Тел.: (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
Email: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна - кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.
Тел. (+374 10) 441010
Email: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 21.04.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, № 2, 2021 Механика

УДК 539.3 http://doi.org/10.33018/74.2.4

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СЖАТЫХ СТОРОН ПЛАСТИНКИ НА ЛОКАЛИЗОВАННУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Белубекян В.М., Терзян С.А.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, локализованная неустойчивость, метод Галёркина.

Influence of conditions of rigidly reinforced edges on plate localized instability

Belubekyan V.M, Terzyan S.A.

Keywords: Plate, localized instability, Galerkin method.

The problems of stability of a rectangular plate are considered, the two opposite sides of which are prepressed, one edge is free, and different edge conditions are applied to the fourth edge. Here replacing of hinged edges by rigidly reinforced edges does not allow the variable separation method to be used. In this case, the use of approximation methods, in particular the Galyorkin method, is necessary.

Սալի սեղմված եզրերի ամրակցման պայմանների ազդեցությունը տեղայնացված անկայունության վրա

Բելուբեկյան Վ.Մ., Թերզյան Ս.Հ.

Հիմնաբառեր. ուղղանկյուն սալ, տեղայնացված անկայունություն, Գալյորկինի մեթոդ:

Դիտարկվում են ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրներ, որի երկու հակադիր կողմերը նախապես սեղմված են, մի եզրը ազատ է, իսկ չորրորդ կողմի վրա տրվում են տարբեր եզրային պայմաններ: Հոդակապորեն ամրակցված եզրերի՝ կոշտ ամրակցված եզրերով փոխարինումը թույլ չի տալիս օգտվել փոփոխականների անջատման մեթոդից: Այս դեպքում մոտավոր մեթոդների, մասնավորապես Գալյորկինի մեթոդի կիրառումն անհրաժեշտ է:

Рассматриваются задачи устойчивости прямоугольной пластинки с двумя противоположными предварительно сжатыми сторонами с одним свободным краем при различных вариантах граничных условиях на четвёртой стороне. Замена шарнирно–закреплённых краёв на жёстко заделанные края не позволяет использовать метод разделения переменных. Для решения задачи в данной статье применяется приближённый метод Галёркина.

Введение

Задачам локализованной неустойчивости посвящены следующие работы [1-14]. Здесь рассматриваются задачи устойчивости прямоугольной пластинки с двумя противоположными предварительно сжатыми сторонами с одним свободным краем при различных вариантах граничных условий на четвёртой стороне. В отличие от [15], где на сжимаемых краях $y = 0, y = b$ заданы условия шарнирного–закрепления, здесь эти края полагаются жёстко заделанными, что приводит к тому, что метод разделения переменных становится неприменимым. В этом случае необходимо применение приближённых методов, в частности, метода Галёркина.

1 Постановка задачи

Пусть пластинка занимает область $0 \le x \le a$:$0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$ и сжата по сторонам $y = 0, b$, которые жёстко заделаны. Уравнение устойчивости пластинки удобно записать в виде:

$$L(w) \equiv \Delta^2 w + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \alpha^2 = \frac{P}{D} \tag{1.1}$$

Требуется найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, b \tag{1.2}$$

Решение уравнения (2.1) представим в виде бесконечного ряда

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) q_n(y) \tag{1.3}$$

где функции $q_n(y)$ удовлетворяют граничным условиям

$$q_n|_{y=0,b} = 0,\ \frac{dq_n}{dy}|_{y=0,b} = 0, \tag{1.4}$$

что обеспечивает удовлетворению граничным условиям закреплённого края (1.2). Функции $q_n(y)$, в частности, согласно методу Галёркина, могут быть определены из решения задачи устойчивости для уравнения балки

$$\frac{d^4 q_n}{dy^4} + \alpha^2 \frac{d^2 q_n}{dy^2} = 0 \tag{1.5}$$

Согласно методу Галёркина (или Бубнова–Галёркина) дифференциальные уравнения, определяющие функции $\varphi_n(y)$, получаются из равенств:

$$\int_0^b q_m(y) L\left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n q_n\right) dy = 0,\ m = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

Аналогичным образом устанавливаются также граничные условия для функции $\varphi_n(x)$ при $x = 0$ и $x = a$. В частности, для граничных условий свободного края (1.5) будем иметь

$$\begin{gathered}\int_0^b q_m \sum_{n=1}^{\infty} \left(q_n \varphi_n'' + \nu \frac{d^2 q_n}{dy^2} \varphi_n \right) dy = 0 \\ \int_0^b q_m \sum_{n=1}^{\infty} \left(q_n \varphi_n''' + (2-\nu) \frac{d^2 q_n}{dy^2} \varphi_n' \right) dy = 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

2 Приближенное решение

Для качественной оценки минимальной критической нагрузки в ряде (1.3) можно ограничиться одним членом

$$w(x,y) = \varphi_1(x) q_1(y) \tag{2.1}$$

В этом случае, вместо системы уравнений (1.6) получается одно уравнение

$$\varphi_1^{IV} - 2\gamma_1^2 \varphi_1'' + \left(\gamma_2^2 - \alpha^2 \gamma_1^2\right) \varphi_1 = 0 \tag{2.2}$$

где коэффициенты γ_1^2, γ_2^2, с учётом интегрирования по частям и условий (1.4)

$$\int_0^b q_1 \frac{d^2 q_1}{dy^2} dy = -\int_0^b \left(\frac{dq_1}{dy}\right)^2 dy, \int_0^b q_1 \frac{d^4 q_1}{dy^4} dy = \int_0^b \left(\frac{d^2 q_1}{dy^2}\right)^2 dy \tag{2.3}$$

имеют вид:

$$\gamma_1^2 = \left[\int_0^b q_1^2 dy\right]^{-1} \int_0^b \left(\frac{dq_1}{dy}\right)^2 dy, \ \gamma_2^2 = \left[\int_0^b q_1^2 dy\right]^{-1} \int_0^b \left(\frac{d^2 q_1}{dy^2}\right)^2 dy \tag{2.4}$$

Граничные условия свободного края $x = 0$ для функций $\varphi_1(x)$ согласно (1.7) будут:

$$\varphi_1'' - \nu\gamma_1^2 \varphi_1 = 0, \ \varphi_1''' - (2-\nu)\gamma_1^2 \varphi_1' = 0, \tag{2.5}$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.2), удобно записать в виде

$$\varphi_1(x) = Ashr_1\gamma_1 x + Bchr_1\gamma_1 x + Cshr_2\gamma_2 x + Dchr_2\gamma_2 x \tag{2.6}$$

где

$$r_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{1 - \gamma^2 + \beta_1^2}\right)^{1/2}, \quad \gamma^2 = \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}, \ \beta_1^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma_1^2} = \frac{P}{D\gamma_1^2} \tag{2.7}$$

Требование, чтобы решение (2.6) удовлетворяло граничным условиям свободного края (2.5), приводит к новому выражению для функции $\varphi_1(x)$

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) = \left(shr_1\gamma_1 x - \frac{r_1(r_1^2-2+\nu)}{r_2(r_2^2-2+\nu)} shr_2\gamma_2 x \right) A + \\ + \left(chr_1\gamma_1 x - \frac{r_1^2-\nu}{r_2^2-\nu} chr_2\gamma_2 x \right) B\end{aligned} \tag{2.8}$$

где оставшиеся произвольные постоянные A и B должны быть определены после удовлетворения граничным условиям на крае пластины $x = a$.

Пусть на кромке пластины $x = a$ заданы условия шарнирного закрепления (1.4), откуда следуют условия для функции $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(a) = 0,\ \varphi_1''(a) = 0, \tag{2.9}$$

Требование, чтобы решение (2.8) удовлетворяло граничным условиям (2.9), приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A, B. Условие равенства нулю детерминанта этой системы, после некоторых преобразований, приводит к уравнению

$$M(r_1, r_2) \equiv (r_1^2 - r_2^2) M_1(\beta_1, \nu) = 0 \tag{2.10}$$

где

$$M_1(\beta_1, \nu) = \frac{r_1^2-\nu}{r_2^2-\nu} th\chi_1 - \frac{r_1(r_1^2-2+\nu)}{r_2(r_2^2-2+\nu)} th\chi_2, \quad \chi_i = r_i\gamma_1 a,\ i = 1, 2 \tag{2.11}$$

При $r_1^2 - r_2^2 = 0$ получается корень уравнения (2.10) $\beta_1^2 = \gamma^2 - 1$, которому, как нетрудно проверить из решения (2.2), удовлетворяющего условиям (2.5) и (2.9), соответствует тривиальное решение $\varphi_1 = 0$ ($w = 0$).

Из уравнения

$$M_1(\beta_1, \nu) = 0 \tag{2.12}$$

в приближении

$$th\chi_i \approx 1 \tag{2.13}$$

получается уравнение

$$r_1^2 r_2^2 + 2(1-\nu) r_1 r_2 - \nu^2 = 0 \tag{2.14}$$

Уравнение (2.14) совпадает с уравнением, определяющим критическую нагрузку локализованной неустойчивости полубесконечной пластины–полосы [4,5] с заменой r_1, r_2 на p_1, p_2.

Из (2.7) следует, что условие существования отличается от (2.11) работы [15] и имеет вид

$$0 < \beta_1^2 < \gamma^2\ \beta_1^2 > \gamma^2 - 1 \tag{2.15}$$

Уравнение (2.14) показывает, что, как и в случае шарнирно-закреплённых краёв $y = 0$ и $y = b$, локализованная неустойчивость существует при условии $\nu \neq 0$.

3 Условия локализованной неустойчивости

В рассматриваемом здесь случае, когда края пластинки $y = 0, y = b$ закреплены, условие появления локализованной неустойчивости в зависимости от отношения $a/b, \beta_1^2 > \gamma$, в решении (2.8) гиперболические функции $shr_2\gamma_1 x, chr_2\gamma_1 x$ заменяются тригонометрическими функциями.

При предельном переходе $r_2 \to 0\,(\beta_1^2 \to \gamma)$. В уравнении (2.11) получается уравнение, определяющее $\gamma_1 a$, при котором появится локализованная неустойчивость

$$-\frac{2-\nu}{\nu} th\sqrt{2}\gamma_1 a + \frac{\nu}{2-\nu}\sqrt{2}\gamma_1 a = 0 \tag{3.1}$$

Отсюда также получается приближённая формула

$$\gamma_1 a \geq \frac{2-\nu^2}{\sqrt{2}\nu^2} \tag{3.2}$$

Нетрудно заметить, что уравнение (3.1) и неравенство (3.2) аналогичны уравнению (2.10) и неравенству (2.12) работы [15].

Для качественной оценки влияния закреплённых краёв $y = 0$ и $y = b$ можно взять в (2.1) функции

$$q_1(y) = y^2\left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \tag{3.3}$$

Согласно формулам (2.4), необходимые параметры задачи определяются следующим образом:

$$\gamma_1^2 = \frac{12}{b^2},\ \gamma_2^2 = \frac{504}{b^4},\ \gamma^2 = \frac{42}{b^2} \tag{3.4}$$

Сравнение формулы (2.13) работы [15] и (3.2), с учётом (3.4), показывает, что минимальное отношение a/b сторон пластинки, при котором становится возможным появление локализованной неустойчивости, в случае шарнирно закреплённых сторон $y = 0, y = b$ больше, чем это же отношение в случае закреплённых краёв, приблизительно в три раза

Заключение

Исследована возможность появления локализованной неустойчивости у свободного края $x = 0$ пластинки, стороны $y = 0, y = b$ которой жёстко закреплены, а четвертая сторона шарнирно опёрта. Проведено сравнение полученных результатов с результатами работы [15], где аналогичное исследование было проведено для пластинки, на сторонах $y = 0, y = b$ которой заданы условия шарнирного опирания или скользящей заделки. Показано, что минимальное отношение a/b сторон пластинки, при котором становится возможным появление локальной неустойчивости, зависит от граничных условий и является наименьшим в случае шарнирного опирания боковых, от свободной кромки, сторон пластинки.

Литература

[1] Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // ДАН СССР, 1954, т.XCV, №3, с.477-479.

[2] Banichuk N.V., Ishlinskii A.Yu. Some special features of the stability and vibrations of rectangular plate //J. Appl. Math. And Mech.1995, 59(4), p.593-597.

[3] Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек (Асимптотические методы). М.: Наука, 1995. 320с.

[4] Белубекян М.В. Задача локализованной неустойчивости пластинки // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем: Ереван: Изд. ЕГУ, 1997, с.95-99.

[5] Белубекян М.В., Чил-Акопян Э.О. Задачи локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57, №2, с.34-39.

[6] Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластин с учётом поперечных сдвигов // Изв. РАН. МТТ. 2004. №2, с.126-131.

[7] Banichuk N.V., Barsuk A.A. Localization of eigenforms and limit transitions in problems of stability of rectangular plates // J.Appl. Math and Mech. 2008. v.72(2), p.302-307.

[8] Sharifian R. Belubekyan V. Stability of a rectangular plate axially compressed on its two opposite free edges // ZAMM, 2012, v.92, №7, p.558-564.

[9] Белубекян М.В., Саакян А.А. О локализованной неустойчивости свободного края, опёртой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки при различных условиях закрепления четвёртой стороны. // Изв. РАН, МТТ. 2018, №3, с.61-66.

[10] Коненков Ю.К. Об изгибной волне релеевского типа // Акуст. Журнал. 1960., т.6, №1, с.124-126.

[11] Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки // Прикл. Механика. НАН Украины, 1994, т.30, №2, с.61-68.

[12] Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized Bending Waves in Rib-Rein-forced Elastic Orthotropic Plate. Journal of Appl/ Mechanics. 2007, v.74, Issue 1, p.169-173.

[13] Lawrie J.B., Kaplunov J. Edge waves and resonance on elastic structures: an overview // Mathematics and Mechanics of Solids. 2012, v.17, p.4-16.

[14] Белубекян М.В. Условия появления локализованных изгибных колебаний растянутой пластинки. В сб.: „Проблемы механики деформируемого твёрдого тела” Ереван, Гитутюн 2017, с.93-98. (Посв. 95-летию С.А. Амбарцумяна).

[15] Белубекян В.М., Терзян С.А. Влияние граничных условий на условия появления локализованной неустойчивости прямоугольной пластинки. В сб.: "Актуальные проблемы механики сплошной среды". Материалы 6-ой международной конференции, 01-06 октября 2019, Дилижан, Армения, стр. 60-63.

Сведения об авторе

Белубекян Вагаршак Мелсович - к.ф.м.н., н.с. Института механики НАН Армении.
Email: vbelub@gmail.com

Терзян Саркис Арутюнович - к.ф.м.н., н.с. Института механики НАН Армении.
Тел. (+374 91) 34 04 32 **Email**: sat_and_21@yahoo.com

Поступила в редакцию 19.01.2021

ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, №2, 2021 Механика

УДК 691.41:539.376 Doi - http://doi.org/10.33018/74.2.5

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ЦЕМЕНТОГРУНТНОГО КОМПОЗИТА С УЧЕТОМ УРОВНЯ СЖИМАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Карапетян К.А., Айроян С.Г., Манукян Е.С.

Ключевые слова: белозем карбонатного состава, цементогрунт, опытный образец, сжимающее напряжение, сопротивление разрушению, деформации ползучести, напряженно- деформированное состояние.

Karapetyan K.A., Hayroyan S.G., Manukyan E.S.

About analytical description of the creeping deformations development for elements from soil cement composite taking into account compressive stresses level

Keywords: belozem carbonate mixture, soil cement, testing piece, compressive stress, fracture strength, creep strain, mode of deformation

The results of creepage research of cylindrical elements from soil cement subjected to constant compressive stress of different values are discussed.

The Portland cement of the type 40 MPa, belozem as a pulverescent clay sand (belozem carbonate mixture)and ordinary pipeline water are used for the soil cement mixture.

It's shown that analytical dependence between creepage stresses and creepage strains for soil cement elements can be done successfully taking into account known dependences applicable for cement concrete elements.

Utter an opinion that during the practical calculation of the deformation mode for special elements and different parts of soil cement constructions taking into account the material creepage, the above-mentioned analytical dependences can be applicable.

Կարապետյան Կ.Ա., Հայրոյան Ս.Հ., Մանուկյան Ե.Ս

Սեղմող լարումների մակարդակի հաշվառմամբ ցեմենտագրունտային կոմպոզիտե պարրերի սողքի դեֆորմացիաների անալիտիկորեն նկարագրման մասին

Հիմնաբառեր.կարբոնատային կազմի սպիտակահող, ցեմենտագրունտ, փորձանմուշ, սեղմող լարում, դիմադրությունը քայքայվելուն, լարվածադեֆորմացիոն վիճակ:

Քննարկվում են տարբեր մեծության սեղմող լարումների ազդեցության պայմաններում գտնվող ցեմենտագրունտե գլանական պարրերի սողքի դեֆորմացիաների ուսումնասիրման արդյունքները:

Ցեմենտագրունտային խառնուրդը պատրաստելու համար օգտագործվել են 40 ՄՊա մարկայի պորտլանդցեմենտ, փոշենման սուպեսներով ներկայացված սպիտակահող(կարբոնատային կազմի սպիտակահող) և խողովակաշարի սովորական խմելու ջուր:

Ցույց է տրված, որ ցեմենտագրունտե տարրերի սողքի դեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած կապը, ինչպես նաև դրանց սողքի դեֆորմացիաների ժամանակի ընթացքում աճման պրոցեսը անալիտիկորեն նկարագրելու համար կարելի է հիմք ընդունել այն հայտնի առընչությունները, որոնք, սովորաբար օգտագործվում են ցեմենտային բետոնների մոտ ի հայտ եկող նման երևույթները նկարագրելիս:

Կարծիք է հայտնվում, որ ցեմենտագրունտե կառույցների առանձին տեղամասերի կամ դրանց կրող տարրերի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի սողքի հաշվառմամբ պրակտիկ հաշվարկներ իրականացնելիս կարելի է օգտվել վերը նշած անալիտիկ արտահայտություններից:

Обсуждаются результаты исследований ползучести цилиндрических элементов из цементногрунтного композита, находящихся под воздействием постоянных сжимающих напряжений различных уровней.

Для приготовления цементогрунтной смеси использовались портландцемент марки 40 МПа, белозем, представленный пилеватыми супесями (белозем карбонатного состава) и обычная трубопроводная вода.

Показано, что аналитическое описание связи между напряжениями и деформациями ползучести, а также процесса развития во времени деформации ползучести элементов из цементогрунта довольно успешно можно осуществлять принимая за основу известные зависимости, используемые с целью описания таких же явлений, проявляющихся у элементов из цементных бетонов.

Высказывается мнение, что при осуществлении практических расчетов напряженно - деформированного состояния ответстванных элементов и отдельных частей цементогрунтных сооружений с учетом ползучести материала можно пользоваться упомянутыми выше аналитическими зависимостями.

Введение

Тенденция возрастания из года в год объемов применения цементогрунта с целью строения отдельных ответственных элементов и частей малоэтажных зданий и сооружений [1, 2 и др] на первый план выдвигает задачу оптимального их проектирования. Успешному решению отмеченной задачи в большой мере может способствовать обладание четким представлением о механическом, в том числе и реологическом, поведении материала в условиях, близких к эксплуатационным.

В работе [3] приводятся данные, полученные в результате экспериментального исследования деформаций усадки и ползучести при сжатии опытных цилиндрических образцов, изготовленных из цементогрунта на основе белозема карбонатного состава. В этих исследованиях величина сжимающего напряжения для нагруженных образцов составляа $0.4R$ (R- предел сопротивления разрушению опытных образцов).

В указанной работе было показано, что цементогрунт обладает существенно заниженной сопротивляемостью деформированию, как объемному (деформации усадки), так и в направлении действия нагрузки, по сравнению с аналогичными характеристи-ками, установленными для других стройматериалов на основе цементного вяжующего, а в частности, для бетона на литоидной пемзе.

В настоящей работе приводятся и обсуждаются результаты исследования ползучести элементов из цементогрунта на основе белоземов карбонатного состава, находящихся под постоянно действующей сжимающей нагрузкой различного уровня. Сделана попытка аналитического описания процесса развития во времени деформа-ций ползучести этих элементов.

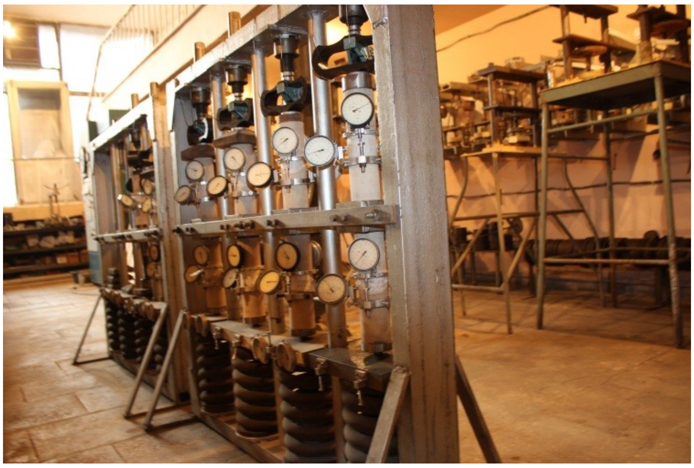
Методика проведения экспериментов.

Экспериментальная часть исследований была осуществлена с применением изготовленных из цементогрунтного композита цилиндрических элементов опытных образцов, размеры которых соответствуют принятым стандартами величинам (диаметр образцов составляет 5 см, а высота-20 см) [4].

Был использован цементогрунт на основе белоземов, взятых с участков, соседствующих территории Института физики, находящегося в жилом районе Ачапняк г. Еревана. На основе данных проведенных соответствующих анализов (анализы химического и соляного содержания материала, просеянного через сито №2) было установлено, что использованные белоземы представлены пылеватыми супесями (белозем карбонатного состава). В качестве связующего компонента использовался портландцемент марки 40, производимый Араратским цементным заводом (Республика Армения). Для получения мокрой смеси цементогрунта применялась обычная трубопроводная вода.Опытные образцы, полученные способом прямого прессования, освобождались из форм через 14 сут. после изготовления. В дальнейшем, до момента проведения экспериментальных исследований в возрасте (время, отсчитываемое после изготовления) 42 сут., они находились во влажных опилках.

Фиг. 1: Цементогрунтный образец, установленный на испытательной машине

Экспериментальные исследования ползучести цементогрунтных цилиндрических элементов были осуществлены на пружинных силовых установках (фиг.2).



Фиг. 2: Силовая установка для испытания цементогрунтных образцов на длительное сжатие в рабочем состоянии

До проведения длительных экспериментов на испытательной машине был определен предел сопротивления разрушению R опытных образцов на сжатие ($R = 7.5$ МПа) при скорости нагружения 3мм/мин (фиг.1). Опытные образцы нагружались постоянно действующей сжимающей нагрузкой, соответствующей 0.2, 0.4, 0.6, 0.7 и 0.8 σ/R (σ- сжимающее напряжение, R- предел сопротивления разрушению образцов). В каждом из указанныхслучаев испытанию подвергались по 3 образцаблизнеца и на таком же количестве образцовблизнецов измерялись усадочные деформации. За развитием во времени деформаций нагруженных и ненагруженных образцов следили в течение 158 дней. В этот промежуток времени следили также за изменением влажности W лабораторного помещения, где температура колебалась в пределах 22±50С. Определение, на основе взятых отсчетов, величин усадочных деформаций осуществлялось по методу, изложенному в [5], а деформации ползучести – согласно соответствующим стандартам [6].

Обсуждение полученных результатов

До перехода к обсуждению поставленных здесь задач отметим, что результаты исследований ползучести цементогрунтных цилиндрических элементов, нагруженных сжимающей нагрузкой, соответствующей $0.4R$, подробно обсуждались в упомянутой выше работе [3].

На фиг.3 метками показаны экспериментальные данные ползучести цементогрунтных элементов, находящихся под воздействием сжимающего напряжения различного уровня (3.а). Приведена также кривая изменения во времени влажности W лабораторногопомешения в период проведения экспериментов (3.б).

Из данных фиг.3.а следует, что с момента нахождения под нагрузкой у опытных образцов наблюдается развитие с начальной высокой и дальнейшей колебательно затухающей скоростью деформации ползучести. Указанное деформационное поведение образцов оказывается тем интенсивным, чем больше величина сжимающей нагрузки, под воздействием которой они находятся.

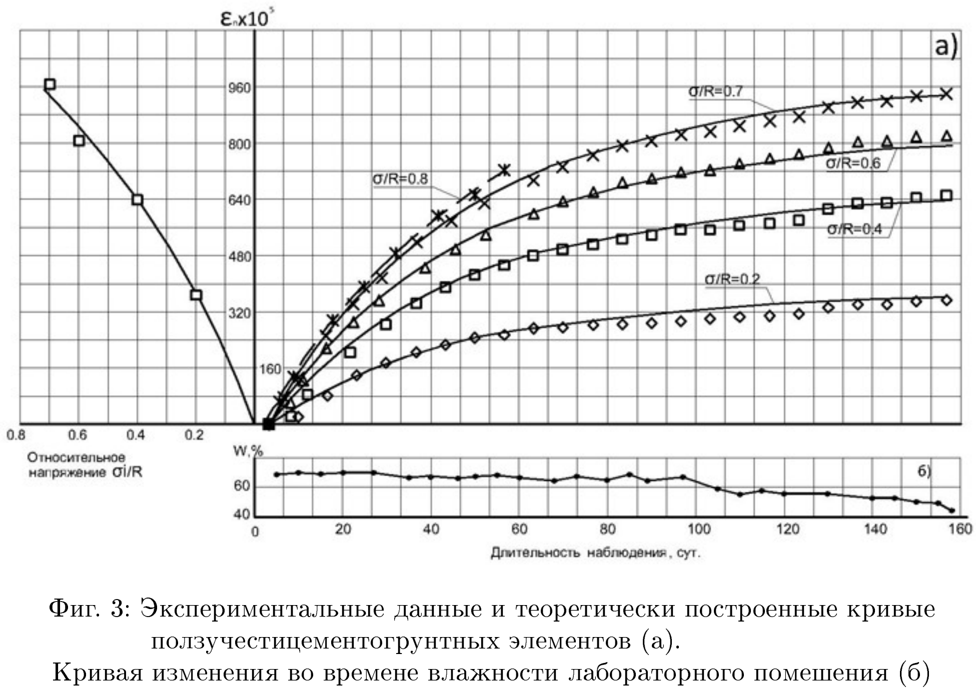
Сравнение данных фиг.3.а показывает, что процесс развития во времени деформации ползучести у цементогрунтных элементов, нагруженных сжимающей нагрузкой,соответствующей $\sigma = 0.2R,\ 0.4R,\ 0.6R,\ 0.7R$, носит практически один и тот же характер, что свидетельствует о существовании некоторого подобия в деформационном поведении этих элементов. Сказанное заключается в том, что отмеченный процесс с момента наблюдений условно можно разделять на 3 этапа, а именно:

I- развитие деформаций ползучести с начальной высокой и постепенно падающей скоростью,

II- развитие этих деформаций с переменной скоростью.

III- практически установившееся состояние с некоторыми колебаниями величины деформаций ползучести.

Из данных фиг.3.а также замечаем, что промежутки времени, соответствующие упо-мянутым выше этапам, во многом зависят от уровня сжимающего напряжения, действующего на цементогрунтный элемент. Сказанное особенно относится к первому этапу процесса развития деформаций ползучести во времени, начиная с момента начала проведения наблюдений.



Фиг. 3: Экспериментальные данные и теоретически построенные кривые ползучестицементогрунтных элементов (а).

Кривая изменения во времене влажности лабораторного помешения (б)

Что же касается деформации ползучести цементогрунтных элементов, находящихся под сжимающим напряжением величиной $0.8R$, то, как следует из данных фиг.3.а, они сразу после нагружения развиваются с существенно возрастающей и практически незатухающей скоростью. В результате было зафиксировано разрушение этих элементов, происходящее примерно через 60 сут. после нахождения их под нагрузкой.

Проведенные измерения и расчеты показали, что изменение величины потери влаги цементогрунтными элементами после завершения длительных экспериментов в зависи-мости от уровня действующего на них сжимающего напряжения не подчиняется какой-либо закономерности. Значение этой характеристики колеблется в пределах $12.1 - 14.8\%$. Значение аналогичной характеристики, определенное для ненагруженных элементов–близнецов колеблется в пределах $12.3 - 14.1\%$. Сказанное указывает на то, что в условиях с невысокой влажностью среды ($W \leq 75\%$, [7]) наличие длительно действующей сжимающей нагрузки практически не влияет на режим высыхания элементов из цементогрунтного композита на основе белоземов карбонатного состава.

В работе [3] отмечается, что, поскольку в составах цементогрунта в качестве связующего компонента обычно используется цемент, в результате схватывания и твердения которого образуются композиты на его основе, то при комментировании данных о ползучести цементогрунта можно считать допустимым принятие за основу существующих представлений о явлении ползучести, наблюдаемом у отмеченных композитов – например, бетонов.

Исходя из сказанного, ниже рассматривается вопрос аналитического описания процесса развития во времени деформаций ползучести цементогрунтных элементов, находящихся под воздействием постоянной сжимающей нагрузки, соответствующей уровню $0.2R$, $0.4R$, $0.6R$ и $0.7R$.

Известно, что для аналитического описания развития во времени t деформации ползучести ε_{Π} бетонов при различных уровнях сжимающего напряжения σ используется следующая зависимость [8]:

$$\varepsilon_{\Pi}(t,\sigma) = \varphi(\sigma)F(t), \tag{1}$$

где $\varphi(\sigma)$ -функция напряжения, $F(t)$ - аналитическое выражение кривой ползучести при единичном значении напряжения. Относительно указанной последней функции отметим, что в разных теориях ползучести материалов для функции $F(t)$, фигурирующей в (1), принимаются и другие обозначения. Например, в общеизвестной теории ползучести [9], широко применяемой в практике проведения экспериментальных исследований ползучести стареющих материалов, обладающих ярко выраженными упругоползучими свойствами, функция $F(t)$ обозначается через $C(t,\tau)$, где τ возраст материала к моменту проведения исследований.

В упомянутой выше работе [8] показано, что для сжимающих напряжений, непревышающих $0.8 - 0.85\,R$, кривые ползучести бетонов при одном и том же возрасте материала не являются афинно подобными, однако, они имеют весьмасходный характер. Поэтому, по мнению автора этой работы, при аналитическом описании экспериментальных данных замена предпосылки подобия кривых ползучести другой, более точной, но более сложной, вряд ли целесообразна. Одновременно им отмечается, что в этом случае следует с максимально возможной точностью подобрать функцию $\varphi(\sigma)$ [8].

Известно, что аналитическое выражение функции $C(t,\tau)$, фигурирующей в указанной выше теории ползучести [9], имеет следующий вид:

$$C(t,\tau) = \varphi(\tau) f(t-\tau), \tag{2}$$

где τ-возраст материала к моменту нагружения, $t-\tau$- длительность нахождения материала под нагрузкой, $\varphi(\tau)$- функция старения, $f(t-\tau)$ - функция длительности нахождения материала под нагрузкой.

Согласно работе [9], для функции $f(t-\tau)$ можно принять следующую зависимость:

$$f(t-\tau) = 1 - e^{-\gamma(t-\tau)}, \tag{3}$$

где γ -параметр, определяемый на основе опытных данных.

Следует отметить, что выражение (3) достаточно успешно используется в практике проведения экспериментальных исследований ползучести стареющих материалов, в том числе и цементных бетонов. Одновременно автор работы [9] высказывает мнение, что для более корректного аналитического описания опытных данных ползучести может оказаться необходимым использовать иное представление функции $f(t-\tau)$.

В результате проведенных широкомасштабных исследований в работе [10] была показана целесообразность представления выражения (3) в виде

$$f(t-\tau) = 1 - 0.5[e^{-\gamma_1(t-\tau)} + e^{-\gamma_2(t-\tau)}]. \tag{4}$$

Преимущество такого представленияфункции $f(t-\tau)$ заключается в том, что онаоказывается более гибкой при описании данных ползучести материала, особенно в начальный период экспериментов.

Как известно, у цементных бетонов величина относительного напряжения σ/R , при котором связь между напряжениями и деформациями ползучести близка клинейной, существенным образом зависит от возраста материала τ к моменту нагружения [8,11,12]. Экспериментальное установление пределов существования указанной связи весьма важно. Оно необходимодля реальной оценки напряженно-деформированного состояния конструкций как в этапе проектирования, так и в период их эксплуатации. На основе анализа данных, полученных в результате проведенных широкомасштабных исследований, в работе [11] показано, что дляцементных бетонов указанная выше связь вплоть до уровня напряжения $\sigma/R = 0.95$, в целом, строго нелинейна, которая, однако, может быть разделена на два линейных участка. При этом величина относительного напряжения σ/R,при котором имеет место переход от первого линейного участка ко второму, существенным образом зависит от возраста материала τ к моменту нагружения. А именно, при $\tau \leq 7$ дней указанная величина $\sigma/R = 0.75$, а в остальных случаях - 0.6.

В работе [13] показано, что значение σ/R , при котором связь между напряжениями и деформациями ползучести можно принять линейной,в случае старого бетона на природных пористых заполнителях($\tau = 18$ лет) следует принять равным $0.45 - 0.5$.

На основе представленных на левом поле фиг.3.а. результатов проведенных прямых измерений можно заключить, что значение относительного напряжения σ/R , при котором имеет место линейная связь между напряжениями и деформациями ползучести элементов из цементогрунтного композита на основе белоземов карбонатного состава, следует принять равным 0.4. Как известно, для аналитического описания экспериментальных зависимостей $\varepsilon_\Pi = f(\sigma)$, начальные участки которых можно считать близкими к прямолинейным, часто применяют функцию вида

$$\varepsilon_\Pi = \alpha\sigma + \beta\sigma^n, \tag{5}$$

где, α, β, n - параметры, определяемые из экспериментов.

Следует отметить, что в практике проведения исследований ползучести бетонов, иногда, вместо абсолютного значения напряжения σ, фигурирующего в (5), используется его относительное значение σ/R, что целесообразно для устранения противоречий, возникающих в размерностях опытных параметров α и β. В этом случае формула (5) заменяется следующей зависимостью [13].

$$\varepsilon_\Pi = \alpha\frac{\sigma}{R} + \beta\Big(\frac{\sigma}{R}\Big)^n, \tag{6}$$

Используя формулу (1) и учитывая изложенное выше для аналитического описания развития во времени деформаций ползучести элементов из цементогрунтного композита нами была принята следующая зависимость:

$$\varepsilon_\Pi(t,\tau) = \left[\alpha\frac{\sigma}{R} + \beta\Big(\frac{\sigma}{R}\Big)^n\right]\left[1 - 0.5\left(e^{-\gamma_1(t-\tau)} + e^{-\gamma_2(t-\tau)}\right)\right] \tag{7}$$

На левом поле фиг.3.а сплошной линией показана кривая зависимости ε_Π от σ/R , построенная согласно (6), а на правом поле этойфигуры - кривые ползучести цементогрунтных элементов, построенные согласно (7) при $\tau = 42$. Для опытных параметров аппроксимации в (6) и (7) были приняты следующие значения: $\alpha \approx 1320, \beta = 140, n = 5, \gamma_1 = 0.025(1/cym), \gamma_2 = 0.04(1/cym)$.

Как можно заключить из данных фиг.3.а аппроксимации вида (6) и (7) вполне приемлемы для аналитического описания экспериментальной зависимости $\varepsilon_\Pi - \sigma/R$ и данных развития во времени ползучести элементов из цементогрунтного композита на основе белоземов карбонатного состава, находящихся под воздействием сжимающих напряжений различных уровней.

Изложенное выше указывает на то, что при проведении практических расчетов напряженно-деформированного состояния ответственных элементов и частей цементогрунтных сооружений с учетом ползучести материала можно пользоваться зависимостями типа (6) и (7).

Литература

[1] Promis G., Ferrier E., Hamelin P. Effect of external FAR retrofitting on reinforced concrete columns for seismic strengthening// Composite structures. 2009. V.88, №3. Pp.367-379

[2] Рамзанов А.А., Бадаев А.Д., Манин Е.Б., Алнашин Т.А. Грунтобетон в закладке фундаментов. Строительство уникальных зданий и сооружений. 3(30). 2015. С.111-128.

[3] K.A Karapetyan, S.H. Hayroyan, E.S. Manukyan. Deformability during short-term loading, shrinkage and creep of a cementitious soil composite on the basis ofbelozems of carbonate. Journal of Physics: Conf. Series 1474(2020)012019

[4] ГОСТ 18105-2018. Бетоны. Правила контроля и оценки прочности. М.: Стандартинформ. 2019.15.с

[5] Лещинский М.Ю.Испытание бетона, Справочное пособие.-М.:Стройиздит. 1980. 360с.

[6] Бетоны.Методы испытаний.ГОСТ 24452-80.ГОСТ 24544-81.-М.:Гос.Комитет СССР по делам строительства.1981.54с.

[7] СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции /Госстрой России.-М.:ГУП.2002-76с.

[8] Васильев П.И. Связь между напряжениями и деформациями в бетоне при сжатии с учетомвремени.//Изв.ВНИИГ.1951.Т.45.С.78-92.

[9] Арутюнян Н.Х.Некоторые вопросы теории ползучести.М-Л.:ГИЗ технико-теоретической литературы.1952.с.323.

[10] Карапетян К.С. Влияние масштабного фактора на ползучесть бетона при сжатии и растяжении.Докл.АН Арм. ССР.1964.Т.38.№3.С.135-142.

[11] Карапетян К.С. Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести.//Изв.АН Арм.ССР. Серия физ.-мат. наук. 1959. Т.12. №4. С.13-20

[12] Улицкий Н.Н.Ползучесть бетона.Киев-Львов:Гостехиздат Украины. 1948.136с.

[13] Карапетян К.А.Ползучесть весьма старого бетона при постоянных и ступенчатовозрастающих нагрузках.//Изв.НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №4. С.68-74.

Сведения об авторе

Карапетян К. А. - д.т.н., зав. лаб. экспериментальных исследований Института механики НАН Армении, **Тел.**: (+374 10) 524852 , **Email**: koryan@mechins.sci.am

Айроян С.Г. - ЕГУ, д.г.н., профессор,
Тел.: (+374 93) 226210 , **Email**: koryan@mechins.sci.am

Манукян Е.С. - Н.с. Института механики НАН Армении,
Тел.: (+374 99) 500755 , **Email**: exushe.manukyan@gmail.com

Поступила в редакцию 16.04.2021

СОДЕРЖАНИЕ том 74, №2, 2021 г.

CONTENTS v. 74, issue 2, 2021

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ հ. 74, №2, 2021

Правила для авторов

«Известия НАН Армении. Механика» освещает вопросы в области теоретической и прикладной механики: теорий упругости, оболочек и пластин, пластичности, ползучести и вязкоупругости, электромагнитоупругости, аэрогидромеханики, устойчивости движения, строительной механики и техники экспериментирования.

1. Статьи, представляемые в «Известия НАН Армении. Механика», должны сопровождаться рекомендацией на опубликование от семинара, на котором доложена работа.
2. Статьи представляются на армянском, русском или английском языках в двух экземплярах с указанием УДК и должны включать **ключевые слова** и **краткие аннотации** на трёх языках, в которых не допускаются ссылки на цитированную литературу и громоздкие формулы. Отдельно в основном тексте выделить: **введение, постановку задачи, решение и заключение.**
3. Вместе с оригиналом статьи необходимо представить электронную версию в среде Word: бумага – формат А4; **Fonts – Times New Roman, Sylfaen. Поля – слева и справа – 4 см; снизу и сверху – 5 см; аннотации – 8pt; основной текст – 10pt с интервалом 1. Формулы – MathType, Defaults.**
4. Литература (10pt) приводится общим списком в конце статьи на языке оригинала, а также на английском языке, при этом, в нижеследующей последовательности указываются:

   для книги – фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания (город), издательство, год издания и количество страниц;

   для журнала – фамилия и инициалы автора, полное наименование работы, название журнала, год издания, том, выпуск или номер и страницы.
5. В конце статьи должны быть приведены сведения об авторах с указанием контактных данных.
6. При наличии нескольких авторов редколлегия рекомендует фамилии авторов статьи расположить в алфавитном порядке.
7. В случае отказа в публикации, редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр статьи.