ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, №1, 2021 Механика

БАГДАСАРЯН ГЕВОРГ ЕРВАНДОВИЧ
(к 85-летию со дня рождения)

Исполнилось 85 лет со дня рождения видного учёного-механика, заслуженного деятеля науки РА, академика НАН РА, доктора физико-математических наук, профессора Геворга Ервандовича Багдасаряна.

Г.Е.Багдасарян родился 13 января 1936 г. в селе Цахкаовит области Арагацотн. В 1953 г., окончив среднюю школу в Апаране, он поступил на отделение механики физико-математического факультета Ереванского государственного университета, который с отличием окончил в 1958 г. В 1964 г. после защиты диссертации по теме "Задачи устойчивости анизотропных оболочек и пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа" ему была присуждена учёная степень кандидата технических наук, а в 1977г. после защиты диссертации "Задачи магнитоупругости тонких пластин и оболочек" он получил учёную степень доктора физико-математических наук. В 1990 г. Г.Е. Багдасарян был избран членом-корреспондентом, а в 1994 г. – действительным членом НАН РА.

Трудовую деятельность Г.Е. Багдасарян начал в 1958 году в Институте механики НАН РА, проработав там до 1964 г. младшим научным сотрудником, с 1964 по 1979 гг. - старшим научным сотрудником, а с 1979 по 1988 гг. – заведующим отделом магнитоупругости, в 1986-1987 гг. он занимал должность директора этого института.

Долгие годы академик Г.Е. Багдасарян сочетал научно-исследовательскую работу с плодотворной научно-организационной и педагогической деятельностью.

С 1983 года и по настоящее время он является профессором кафедры математических методов и моделирования факультета прикладной математики и информатики Ереванского государственного университета. В 1988-2001 гг. он занимал должность заведующего кафедрой, с 1993 по 1995 гг. был деканом факультета прикладной математики и информатики ЕГУ. В 1994-1998 гг. Г.Е. Багдасарян занимал должность ректора Армянского государственного педагогического института, а в 1998-2002 гг. – председателя Высшей аттестационной комиссии РА, с 2002 по 2007 гг. занимал должность советника ректора ЕГУ. С 2006 года и по настоящее время Г.Е. Багдасарян является главным научным сотрудником Института механики НАН РА.

Опубликованные Г.Е. Багдасаряном многочисленные научные статьи и семь монографий являются существенным вкладом в механику сплошной среды. В этой области, совместно с одним из основателей армянской школы механики академиком С.А. Амбарцумяном и профессором М.В. Белубекяном, Г.Е. Багдасарян создал и развил такое актуальное направление механики, как теория магнитоупругости.

В отечественном научном мире Г.Е. Багдасарян является пионером в области исследо-вания устойчивости тонкостенных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (флаттер).

Работы Г.Е. Багдасаряна, в которых предложены эффективные аналитические методы и расчётные схемы для исследования нелинейных вынужденных, параметрических и флаттерных колебаний слоистых анизотропных пластин и оболочек, при помощи которых в вынужденных колебаниях были выявлены резонансы нового типа, обусловленные учётом нелинейности, в случае докритических скоростей обтекания была показана возможность существования стационарных колебаний, существование нижней критической скорости и пути её вычисления, получили всеобщее признание. Построена общая теория описания и исследования взаимосвязанных механических и электромагнитных явлений для тонкостенных проводящих тел (совместно с академиком С.А. Амбарцумяном и профессором М.В. Белубекяном). Были сформулированы постановки новых задач математической физики, на основе решения которых выявлен ряд новых явлений, обусловленных взаимодействием сплошной среды и физических полей разного характера. К таким явлениям, в частности, относятся исключение возможности параметрического резонанса, затухание опасных флаттерных колебаний, существенное уменьшение амплитуды вынужденных колебаний при помощи постоянного магнитного поля, возможность возбуждения резонансных колебаний вынужденного и параметрического типа при помощи нестационарного магнитного поля, оптимальное управление амплитудно-частотной характеристикой нелинейных магнитоупругих колебаний, а также управление поведением вынужденных и параметрических колебаний различного характера посредством постоянного магнитного поля.

Академиком Г.Е. Багдасаряном разработаны теоретические основы исследования распространения магнитоакустических взаимосвязанных волн в пьезоэлектрических, пьезомагнитных, магнитострикционных и ферромагнитных средах, доказана возможность возбуждения сдвиговых поверхностных и щелевых волн нового типа, обусловленных пьезомагнетическим (или магнитострикционным) эффектом, выявлена возможность существования также сопутствующих поверхностных колебаний, что позволяет акустические волны из одной пьезомагнитной среды без механического контакта передать в другую пьезомагнитную среду.

Предложены также методы математического моделирования и решения важных, имеющих практическое значение задач прочности, колебаний и устойчивости сверхпроводящих и магнитомягких ферромагнитных тел, в частности, тонких пластин, в стационарных и нестационарных магнитных полях. Основными характеристиками научной деятельности Г.Е. Багдасаряна являются актуальность, новаторство, универсальность и целеустремленность. Его научные статьи, доклады на международных конференциях и обзорные статьи известны во многих научных центрах России, Европейского Союза, Америки и других стран мира.

Академик Г.Е. Багдасарян является одной из выдающихся личностей армянской школы механики, создателем собственной научной школы. Велика заслуга Г.Е. Багдасаряна в деле подготовки высококвалифицированных научных кадров. Под его руководством защищены около двадцати кандидатских и докторских диссертаций.

Г.Е. Багдасарян является членом редколлегий ряда научных журналов – Доклады НАН РА, Известия НАН РА "Механика", "Математические методы и физико-механические поля" (Львов, Украина), членом национальных комитетов по теоретической и прикладной механике Армении и России, учёного Совета Института механики НАН РА, специализированного совета Механика-047 ВАК РА.

Поздравляя академика НАН РА Г.Е. Багдасаряна с 85-летним юбилеем, Редакция журнала “Известия НАН РА, Механика” желает ему долгих лет жизни, крепкого здоровья, успехов в научной и научно-организационной деятельности.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

Մեխանիկա Volume 74, Issue 1, 2021 Mechanics

UDC 517.977.1+517.977.5 http://doi.org/10.33018/74.1.1

A MESO-SCALE MODEL OF PARTICLE REINFORCED TIMOSHENKO BEAM

Avetisyan A. S., Khurshudyan As. Zh., Chopuryan S. S.

Keywords: multiscale modelling, homogenization, particle reinforced composites, transverse shear, Timoshenko beam

Мезомасштабная модель балки Тимошенко, усиленной частицами

Аветисян А. С., Хуршудян Ас. Ж., Чопурян С. С.

Ключевые слова: многомасштабное моделирование, гомогенизация, композиты усиленные частицами, поперечный сдвиг, балка Тимошенко

В этой статье, из соответствующих микро-скопических уравнений, выводятся мезо-скопические уравнения изгиба балки Тимошенко, усиленной частицами, когда масштабный параметр равный отношению радиуса частиц и толщины балки убывая стремится к нулю. Балка жестко заделана на одном конце, а к другому ее концу применяется осевая нормальная нагрузка постоянной интенсивности.

Применяя метод конечных элементов, численно определяются поле перемещений и напряженно-деформированное состояние балки для убывающих значений масштабного параметра и показывается сходимость решений моделированной задачи.

Մասնիկներով ուժեղացված Տիմոշենկոյի հեծանի մեզո-մասշտաբ մոդել

Ավետիսյան Ա. Ս., Խուրշուդյան Ас. Ժ., Չոփուրյան Ս. Ս.

Հիմնաբառեր. բազմամասշտաբ մոդելավորում, համասեռացում, մասնիկներով ուժեղացված բաղադրյալ նյութեր, լայնական սահք, Տիմոշենկոյի հեծան

Այս աշխատանքում, համապատասխան միկրո-մասշտաբ հավասարումներից ստացվում են մասնիկներով ուժեղացված Տիմոշենկոյի հեծանի ծռման մեզո-մասշտաբ հավասարումները, երբ մասնիկների շառավղի և հեծանի հաստության հարաբերությունը նկարագրող մասշտաբի պարամետրը ձգտում է զրոյի: Հեծանի մի ծայրը կոշտ ամրակցված է, իսկ դրա մյուս ծայրին կիրառված է հեծանի առանցքով ազդող հաստատուն ուժ:

Մոդելավորված խնդրի լուծումների զուգամիտությունը ցույց տալու համար՝ հեծանի տեղափոխության դաշտը և լարվածադեֆորմացիոն վիճակը հետազոտվում են վերջավոր տարրերի թվային եղանակով՝ մասշտաբի պարամետրի նվազող արժեքների համար:

In this paper, we derive the meso-scale equations of motion for particle reinforced Timoshenko beam from corresponding micro-scale equations by letting the scale parameter denoting the ratio of the particle radius and beam thickness decrease to zero. The beam is cantilevered at one end and is subject to a normal pressure of constant magnitude at the other end. The displacement field and the stress-strain state of the beam are determined for a decreasing sequence of values of the scale parameter to establish the convergence of solutions numerically using the finite element analysis.

Introduction

Materials with new target features and improved properties are of extremely high demand in all areas of engineering ranging from civil to aerospace and even medical. The reason is that most of the current needs of engineering are not fully satisfied by existing homogeneous or even some of the composite materials anymore stimulating new experimental and theoretical research in different areas of materials science.

Usually, composites are reinforced either by fibers or particles. Each of these two types has its own wide area of applications. Current material science has powerful tools of modelling reinforced composites with even very chaotic micro-structure. One of the main modelling tools for finer description of reinforced composites is the so-called multiscale approach [1]. In the most vast description, the multiscale approach develops the micro-scale description of the composite taking into consideration all possible micro-inhomogeneities and micro-defects [2, 3]. Then, the most appropriate homogenization tool [4, 5] is applied to derive the meso-scale of the macro-scale description of the composite. Nevertheless, application of the homogenization for specific cases is not that straightforward and each case may require an extensive research.

Particle-reinforced composites are widely used in many important areas of modern engineering. By appropriate choice of the reinforcing material properties of the volume fraction, it becomes possible to design in some sense optimal structures. This motivates us to study another important factor that may have influence on the desired properties of the composite- spatial distribution of particles. As of now, most of the research about modelling and characterization of PRC materials is carried out when the particle distribution follows a specific random distribution. However, evidences show that the uniform distribution of reinforcements may not always be optimal [20]. In other words, it may be possible to achieve better properties for the composite with a properly chosen particle distribution. For that purpose, the dependence of the target properties of PRCs (such as bending or flexural stiffness) from the particle distribution law must be analyzed. Apparently, this can be easily done in case when that dependence is explicit.

In this short note, we consider the homogenizaiton of a particle-reinforced, cantilever Timoshenko beam and show the convergence of the micro- and meso-scale displacements field numerically. The theory of the particle reinforced composites (PRCs) is well developed and currently includes results allowing to model anisotropic behavior, interface defects, material surface effects, two-phase materials, non-uniform and arbitrary distribution of particles (see [6–19]).

We start from micro-scopic description of the beam and apply the convergence definition given in [18, 19] to derive its meso-scopic description. In the micro-scopic description, the beam is represented as a continuum with spherical inclusions having specific geometry within the beam. The limiting description corresponds to a beam with point inhomogeneities. The finite element method is used to capture the displacement field of the beam for a decreasing sequence of the scale parameter denoting the ratio of the inclusion radius and the beam height. A clear convergence of the micro-scale displacements field to the meso-scale one is observed.

1 Main assumptions and beam model

In Cartesian system $Oxyz$, consider the beam $\mathrm{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le l, 0 \le y \le h_1,$ $0 \le z \le h_2\}$ of constant, rectangular cross section. Let the beam be reinforced by a finite number of spherical particles $\mathrm{b}^{\varsigma} := \bigcup_{n=1}^{N} \mathrm{b}_n^{\varsigma} \subset \mathrm{B}$ with center $\boldsymbol{x}_{0n}$ and radius r_n of the n^{th} particle. Here, $\varsigma > 0$ is a scale parameter allowing to zoom in or zoom out the scale at which the composite is studied.

In order to be able to develop a consistent theory for the beam, we are going to accept the following assumptions.

Assumption 1. Suppose that $\mathrm{B}_b^{\varsigma} := \mathrm{B} \setminus \mathrm{b}$ is connected.

Assumption 2. We assume that both b^{ς} and B_b^{ς} are isotropic, linear elastic, homogeneous and free of all types of defects and voids.

Assumption 3. During the deformation of the beam, particles do not interact mechanically, meaning that for any $n_1 \ne n_2$,

$$\mathrm{b}_{n_1}^{\varsigma} \cap \mathrm{b}_{n_2}^{\varsigma} = \varnothing. \tag{1.1}$$

Assumption 4. For the sake of simplicity, the consideration is limited by infinitesimal strains such that for any $n_1 \ne n_2$,

$$\varepsilon_{ij} \ll \operatorname{dist}\left(\mathrm{b}_{n_1}^{\varsigma}, \mathrm{b}_{n_2}^{\varsigma}\right).$$

Here, ε_{ij} are the components of the strain tensor of the beam, $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ measures the distance in $\mathbb{R}^3$.

In addition to Assumptions above, with respect to the beam, we accept the Timoshenko assumptions [21].

It is important to emphasize that when changing the scale parameter, the volume fraction of the particles remains constant. In other words, by decreasing ς, we change only the visual representation of the composite corresponding to the current scale and not its geometric configuration.

1.1 Beam equations at micro-scale

Assume that the beam is subjected to an axial load of constant intensity F acting at the end of the beam, while its other end is cantilevered. The axial load is distributed uniformly over the whole end-section of the beam, so that, without losing the generality, we assume uniform displacement field over the width of the beam (see Figure 1).

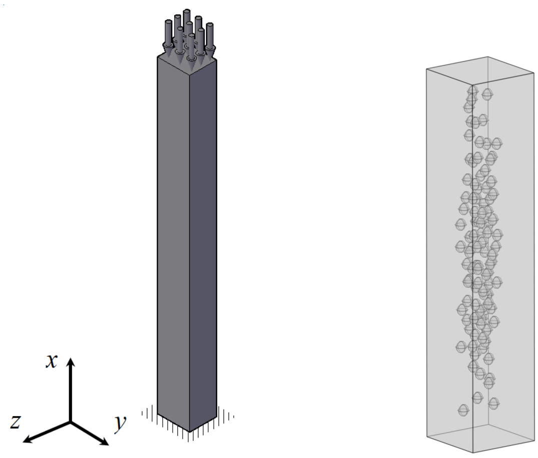


Figure 1: Schematic representation of the beam reinforced by spherical particles

Timoshenko assumptions lead to the following non-zero components of the strain tensor:

$$\varepsilon_{xx}^{\varsigma}(x,y,z) = -z\frac{\partial\varphi^{\varsigma}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xz}^{\varsigma}(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{\varsigma}}{\partial x} - \varphi^{\varsigma}(x)\right).$$

Moreover, since the beam is isotropic, the non-zero stress components will be

$$\sigma_{xx}^{\varsigma}(x,y,z) = E^{\varsigma}(x,y,z)\,\varepsilon_{xx}^{\varsigma}(x,y,z), \quad \sigma_{xz}^{\varsigma}(x,y,z) = 2\mu^{\varsigma}(x,y,z)\,\varepsilon_{xz}^{\varsigma}(x,y,z).$$

Here, E^{ς} and μ^{ς} are the Young and shear moduli of the beam. At that,

$$\mu^{\varsigma} = \frac{E^{\varsigma}}{2(1+\nu)}.$$

Substituting the strain, the bending moment and the shear force are defined as [21]

$$M_{xx}^{\varsigma}(x) = \int\limits_A z\sigma_{xx}^{\varsigma}(x,y,z)\,\mathrm{d}A = -\frac{\partial\varphi^{\varsigma}}{\partial x}\int\limits_A z^2E^{\varsigma}(x,y,z)\,\mathrm{d}A = -E_2^{\varsigma}(x)\frac{\partial\varphi^{\varsigma}}{\partial x}, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} Q_x^{\varsigma}(x) &= \kappa\int\limits_A \sigma_{xz}^{\varsigma}(x,y,z)\,\mathrm{d}A = \frac{\kappa}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w^{\varsigma}}{\partial x} - \varphi^{\varsigma}\right)\int\limits_A E^{\varsigma}(x,y,z)\,\mathrm{d}A = \\ &= \frac{\kappa}{2(1+\nu)}E_0^{\varsigma}(x)\left[\frac{\partial w^{\varsigma}}{\partial x} - \varphi^{\varsigma}\right], \end{aligned} \tag{1.3}$$

where

$$E_k^{\varsigma}(x) = \int\limits_A z^kE^{\varsigma}(x,y,z)\,\mathrm{d}A, \quad k = 0,2. \tag{1.4}$$

Substituting (1.2) and (1.3) into the equilibrium equations of the Timoshenko beam,

$$\frac{\partial M_{xx}^{\varsigma}}{\partial x} - Q_x^{\varsigma} = 0, \qquad \frac{\partial Q_x^{\varsigma}}{\partial x} + F\frac{\partial w^{\varsigma}}{\partial x} = 0,$$

we get

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\left[E_0^{\varsigma}(x)\left(\frac{\partial w^{\varsigma}}{\partial x} - \varphi^{\varsigma}\right)\right] = 0, \\ &F\frac{\partial w^{\varsigma}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[E_2^{\varsigma}(x)\frac{\partial \varphi^{\varsigma}}{\partial x}\right] + \frac{\kappa}{2(1+\nu)}E_0^{\varsigma}(x)\left[\frac{\partial w^{\varsigma}}{\partial x} - \varphi^{\varsigma}\right] = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Here, κ is the Timoshenko shear factor. The cross section of the beam is assumed to be uniform, so that κ is considered to be constant. Hereinafter, it is assumed that [22]

$$\kappa = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}.$$

Taking into account the microstructure of the beam, its Young's modulus at microscale, can be represented as

$$E^{\varsigma}(x,y,z) = \begin{cases} E_b, & (x,y,z) \in \mathrm{B}_b^{\varsigma}, \\ E_p, & (x,y,z) \in \mathrm{b}^{\varsigma}, \end{cases}$$

where E_b and E_p are the Young's moduli of B_b^{ς} and b^{ς}. Moreover, using the definition of the characteristic function $\chi_{\mathrm{b}^{\varsigma}}$, we may write

$$E^{\varsigma}(x,y,z) = E_b\chi_{\mathrm{B}_b^{\varsigma}}(x,y,z) + E_p\chi_{\mathrm{b}^{\varsigma}}(x,y,z). \tag{1.6}$$

1.2 Beam equations at meso-scale

In the context of this paper, we will consider the case $\varsigma = \dfrac{r}{h}$ with $h = \min(h_1, h_2)$. Then, using the theory developed in recent papers [18, 19], we can prove that the meso-limit of system (1.5) with coefficients derived from (1.6) is the system

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\left[E_0^{0}(x)\left(\frac{\partial w^{\varsigma}}{\partial x} - \varphi^{0}\right)\right] = 0, \\ &F\frac{\partial w^{0}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[E_2^{0}(x)\frac{\partial \varphi^{0}}{\partial x}\right] + \frac{\kappa}{2(1+\nu)}E_0^{0}(x)\left[\frac{\partial w^{0}}{\partial x} - \varphi^{0}\right] = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

where E_0^0 and E_2^0 are defined exactly as in (1.4) but using the following expression for E^0:

$$E^0(x,y,z) = (1-\phi_p)E_b + \phi_p \cdot \frac{E_p \mathrm{V_B}}{N}\sum_{n=1}^{N}\delta(x-x_{0n})\,\delta(y-y_{0n})\,\delta(z-z_{0n}).$$

Here, δ is the Dirac function, V_B is the volume of the beam, ϕ_p is the constant volume fraction of particles. See [18, 19] for details.

2 Numerical analysis of a cantilever beam subject to axial load

In order to make sure that solution to (1.5) converges to solution to (1.7), we involve the numerical method of finite elements. The beam is discretized into tetrahedral elements as shown in Figure 2. Note that the beam material is considered to be made from copper, whereas the material of the particles is made from steel.

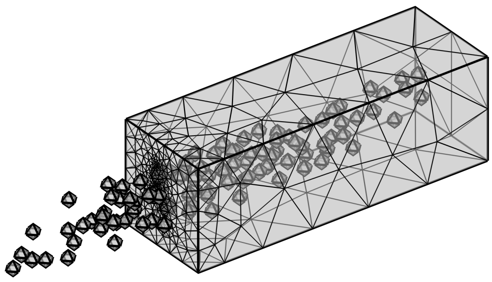


Figure 2: Finite element discretization of the beam and particles

Then, the displacement field of the beam described by (1.5) is captured for $\varsigma = 0.075$, 0.05 and when $\varsigma \to 0$. The latter case is modelled using the discretization of (1.7).

Figures 3-5 show the evolution of the normal displacement u_3^ς, normal stress σ_{xx}^ς and tangential stress σ_{xz}^ς when $\varsigma = 0.075$, 0.05 and when $\varsigma \to 0$.

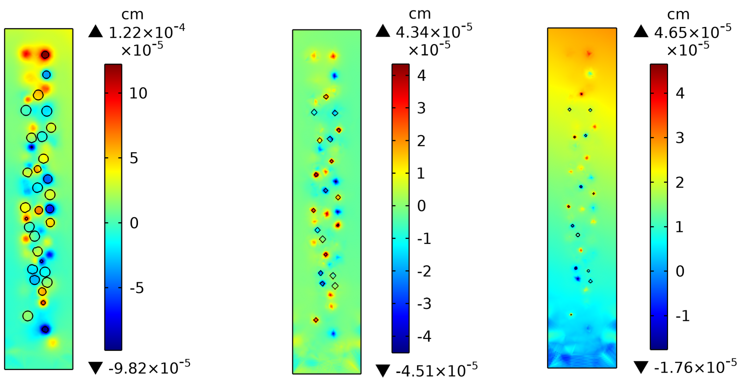


Figure 3: Distribution of w^ς

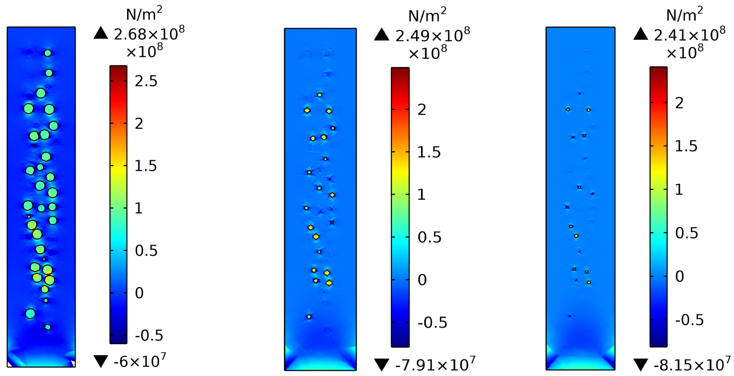


Figure 4: Distribution of σ^{ς}_{xx}

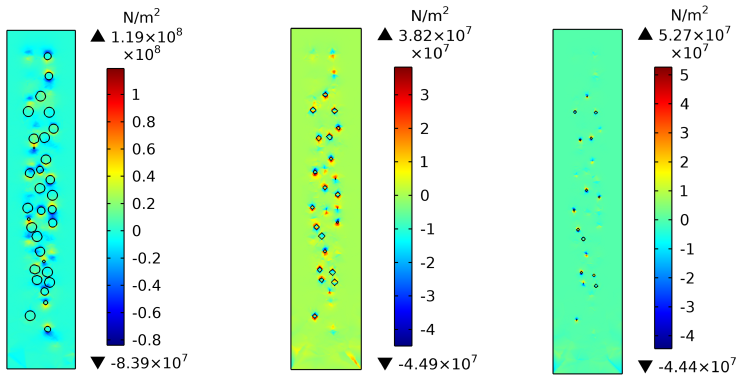


Figure 5: Distribution of σ^{ς}_{xz}

It is evident from the corresponding values of the quantities shown on plots above that as $\varsigma \to 0$

$$w^{\varsigma} \searrow w^0, \quad \sigma^{\varsigma}_{xx} \nearrow \sigma^0_{xx}, \quad \sigma^{\varsigma}_{xz} \searrow \sigma^0_{xz}.$$

3 Conclusions

In this study, we derive explicit dependence of PR Timoshenko beam stiffness on particles distribution and material properties giving enough theoretical base for optimal design of such beams by a proper choice of particles distribution. The method of multi-scale modelling allows to derive the meso-scale model of the beam from corresponding micro-scale model when the scale parameter describing the ratio of the particle radius to the beam thickness tends to zero. Using the numerical method of finite elements, the stress components and the displacement field of the beam are shown to converge to the corresponding quantities at meso-scale.

The model is important for many applications including, e.g., derivation of materials with improved target properties and material or structural optimization of PRC structures.

References

[1] M. O. Steinhauser, Computational Multiscale Modeling of Fluids and Solids: Theory and Applications. 2nd edn. Springer, Berlin (2017).

[2] G. J. Dvorak, Micromechanics of Composite Materials. Springer, Dordrecht (2013).

[3] H. Altenbach, J. Altenbach, W. Kissing, Mechanics of Composite Structural Elements. 2nd ed. Springer Nature, Singapore, 2018.

[4] L. Tartar, The General Theory of Homogenization. A Personalized Introduction. Springer, Heidelberg (2009).

[5] T. Lewiński, J. J. Telega, Plates, Laminates and Shells: Asymptotic Analysis and Homogenization. World Scientific Publishing, Singapore (2000).

[6] R. M. German, Particulate Composites: Fundamentals and Applications. Springer, Switzerland, 2016.

[7] V. Kushnevsky, O. Morachkovsky, H. Altenbach, Identification of effective properties of particle reinforced composite materials. Computational Mechanics 22, 317–325 (1998).

[8] H. Altenbach, Modelling of anisotropic behavior in fiber and particle reinforced composites. In: Sadowski T. (eds) Multiscale Modelling of Damage and Fracture Processes in Composite Materials. CISM International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), vol 474. Springer, Vienna (2005).

[9] L. Nazarenko, H. Stolarski, H. Altenbach, Effective properties of particulate composites with surface-varying interphases. Composites. Part B, vol. 149, pp. 268–284 (2018).

[10] L. Nazarenko, H. Stolarski, H. Altenbach, A statistical interphase damage model of random particulate composites. International Journal of Plasticity, vol. 116, pp. 118–142 (2019).

[11] D. Sokolovski, M. Kamiński, Homogenization of carbon/polymer composites with anisotropic distribution of particles and stochastic interface defects. Acta Mechanica, vol. 229, pp. 3727–3765 (2018).

[12] M. Kamiński, Homogenization of particulate and fibrous composites with some non-Gaussian material uncertainties. Composite Structures, vol. 210, pp. 778–786 (2019).

[13] L. Nazarenko, S. Bargmann, H. Stolarski, Closed-form formulas for the effective properties of random particulate nanocomposites with complete Gurtin-Murdoch model of material surfaces. Continuum Mechanics and Thermodynamics, vol. 29, Issue 1, pp. 77–96 (2017).

[14] A. Muc, M. Barski, Design of particulate-reinforced composite materials. Materials 11, 234 (2018).

[15] Ch.-H. Lin, A. Muliana, Micromechanics models for the effective nonlinear electro-mechanical responses of piezoelectric composites. Acta Mechanica, vol. 224, issue 7, pp. 1471–1492 (2013).

[16] H. Khanbareh, V. Topolov, Ch. Bowen, Piezo-Particulate Composites. Manufacturing, Properties, Applications. Springer Nature, Cham (2019).

[17] S. Sakata, F. Ashida, Hierarchical stochastic homogenization analysis of a particle reinforced composite material considering non-uniform distribution of microscopic random quantities. Comput. Mech., vol. 48, pp. 529–540 (2011).

[18] As. Zh. Khurshudyan, Derivation of a mesoscopic model for nonlinear particle reinforced composites from fully microscopic model. Acta Mechanica, vol. 230, issue 10, pp. 3543 – 3554 (2019).

[19] As. Zh. Khurshudyan, A mesoscopic model for particle-reinforced composites. Continuum Mech. Thermodyn. 32, 1057–1071 (2020).

[20] L. J. Huang, L. Geng, H-X. Peng, Microstructurally inhomogeneous composites: Is a homogeneous reinforcement distribution optimal? Progress in Materials Science, vol. 71, pp. 93–168 (2015).

[21] Bauchau O. A., Craig J. I., Structural Analysis: With Applications to Aerospace Structures. Springer, Dordrecht, 2009.

[22] Cowper G. R., The shear coefficient in Timoshenko's beam Theory. Journal of Applied Mechanics, vol. 33, issue 2, pp. 335–340.

Information about authors

Ara S. Avetisyan, Prof. Dr., Corresponding Member of NAS of Armenia, Head of the Department on Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics, NAS of Armenia.
email: ara.serg.avetisyan@gmail.com

Asatur Zh. Khurshudyan, Institute of Mechanics, NAS of Armenia.
email: khurshudyan@mechins.sci.am

Smbat S. Chopuryan, National Polytechnic University of Armenia, Department of Mechanics and Mechanical Engineering.
email: smbat172@mail.ru

Received 09.02.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, № 1, 2021 Механика

УДК 539.3 DOI:

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО, СЛОИСТОГО ПРОСТРАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ МЕЖФАЗНЫМИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ КОЛЬЦЕОБРАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Акопян В.Н., Григорян А.А., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: периодические смешанные задачи, межфазная трещина, осесимметричная задача, слоистое пространство

Axially symmetrical stress distribution of piecewise-homogeneous, layered space with a periodic system of semi-infinite ring-shaped interfacial cracks

Hakobyan V. N., Grigoryan A. A. Amirjanyan H. A.

Keywords: periodic mixed problems, interface cracks, layered space

This paper considers the axially symmetrical stress distribution of piecewise-homogeneous, equally layered space obtained by alternating connection of two heterogeneous layers of the same thickness, which along the planes of their junction contain semi-infinite interfacial parallel circular ring-shaped cracks, forming a periodic system. With the help of Hankel integral transform and rotation operators the solution of the problem is reduced to a system of singular integral equations, the solution of which is constructed by the method of mechanical quadratures. Some special cases of the problem that are of independent interest have also been considered. For one of them an exact solution of the problem in quadratures was obtained.

Պարբերական միջֆազային կիսաանվերջ օղակաձև ճաքերով կտոր առ կտոր համասեռ շերտավոր տարածության առանցքահամաչափ լարվածային վիճակը

Հակոբյան Վ. Ն., Գրիգորյան Ա. Ա., Ամիրջանյան Հ. Ա.

Հիմնաբառեր. պարբերական խառը եզրային խնդիրներ, միջֆազային ճաքեր, շերտավոր տարածություն

Աշխատանքում դիտարկված է հավասար հաստության տարասեռ շերտերի հաջորդական միացումից ստացված հավասարաչափ կտոր առ կտոր համասեռ տարածության առանցքահամաչափ լարվածային վիճակը, երբ այն տարասեռ շերտերի միացման հարթություններում պարունակում է կիսաանվերջ օղակաձև միջֆազային ճաքերի պարբերական համակարգ: Հանկելի ձևափոխության և պտտման օպերատորների օգնությամբ խնդրի լուծումը հանգեցվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որի լուծումը կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդով: Դիտարկվել են նաև խնդրի որոշ մասնավոր դեպքեր, որոնք ներկայացնում են ինքնուրույն հետաքրքրություն : Դրանցից երկուսում ստացվել են խնդիրների ճշգրիտ լուծումները:

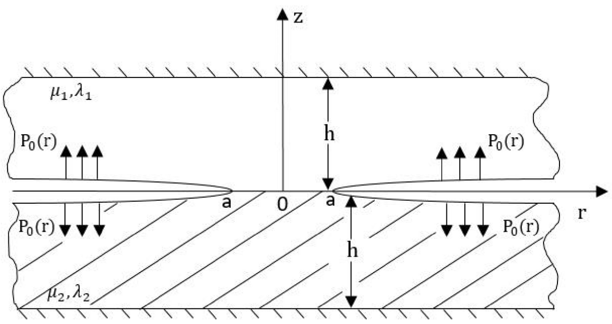
В работе рассмотрено осесимметричное напряжённое состояние кусочно-однородного, равномерно слоистого пространства, полученного при помощи поочерёдного соединения двух разнородных слоёв одинаковой толщины, которое на плоскостях соединения слоёв содержит межфазные полубесконечные, круговые кольцеобразные параллельные трещины, которые образуют периодическую систему. При помощи интегрального преобразования Ханкеля и операторов вращения решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которой построено методом механических квадратур. Рассмотрены также некоторые частные случаи задачи, представляющие самостоятельный интерес. В одном из них получено точное решение задачи в квадратурах.

1 Введение

Контактным и смешанным задачам осесимметричной теории упругости посвящены многие исследования отечественных и зарубежных ученых. Часть из них посвящена изучению осесимметричного напряжённого состояния упругого однородного или составного пространства с дискообразными или кольцеобразными трещинами. Из них отметим работы [1-8], которые непосредственно связаны с настоящей работой. Что же касается исследованию осесимметричного напряжённого состояния кусочнооднородного, равномерно слоистого пространства с периодической системой круговых дискообразных параллельных межфазных или внутренних дефектов, которые на наш взгляд представляют интерес не только с научной, но и с практической точек зрения, началось совсем недавно и опубликовано лишь несколько работ. В этом направлении отметим работы [9-12]. В работе [9] построены разрывные решения осесимметричной теории упругости для равномерно слоистого пространства с периодической системой круговых дискообразных параллельных межфазных дефектов и на их основе получены решения задач в случае, когда дефекты представляют трещину или абсолютно жёсткое включение. В работах [10-12] рассмотрены осесимметричные напряжённые состояния равномерно слоистого пространства с периодической системой круговых дискообразных внутренних трещин и абсолютно жёстких включений.

2 Постановка задачи и вывод разрывных решений

Рассмотрим осесимметричное напряжённое состояние кусочнооднородного упругого пространства, полученного при помощи соединения двух разнородных слоев толщины $2h$ с коэффициентами Ламэ λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2, соответственно, отнесённого к цилиндрической системе координат $Or\varphi z$, начало которой находится на одной из плоскостей стыка разнородных слоёв. Будем считать, что на плоскостях стыка разнородных слоёв $z = 2nh$ $(n \in Z)$ в областях $\{r > a;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ пространство содержит периодическую систему одинаковых круговых кольцеобразных полубесконечных межфазных параллельных трещин и деформируется при помощи осесимметричных нормальных нагрузок интенсивности $p_0\,(r)$ с конечной результирующей P_1, действующих на берега трещин, и нагрузок с результирующей P_2, приложенных на бесконечности. Несложно заметить, что при этом все средние плоскости $z = (2n+1)\,h\,(n \in Z)$ разнородных слоёв будут плоскостями симметрии. Вследствие этого можно отделить базовую ячейку в виде двухкомпонентного составного слоя, занимающего в пространстве область $\Omega = \{|z| \le h; 0 \le r < \infty; 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, и поставленную задачу сформулировать как граничную задачу для этого слоя, на внешних плоскостях $z = \pm h$ которого заданы условия симметрии, а на плоскости $z = 0$ имеется круговая кольцеобразная полубесконечная межфазная трещина. На (Фиг.1) приведено осевое сечение базовой ячейки.



Фиг.1

Требуется определить нормальные и касательные контактные напряжения, действующие в зоне контакта разнородных слоёв, значение модуля комплексного коэффициента интенсивности напряжений на окружности $r = a$.

Снабдив индексами 1 и 2 все величины, описывающие напряжённо-деформированное состояние разнородных слоёв, соответственно, поставленную задачу, в общепринятых обозначениях, для базового слоя представим в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(1)}(r,h) = u_z^{(1)}(r,h) = 0 \\ \tau_{rz}^{(2)}(r,-h) = u_z^{(2)}(r,-h) = 0 \end{cases} \quad (0 \le r < \infty) \tag{1a}$$

$$\begin{cases} u_r^{(1)}\,(r,0) = u_r^{(2)}\,(r,0) & (0 \le r < a) \\ u_z^{(1)}\,(r,0) = u_z^{(2)}\,(r,0) & (0 \le r < a) \\ \sigma_z^{(1)}\,(r,0) = \sigma_z^{(2)}\,(r,0) & (0 \le r < a) \\ \tau_{rz}^{(1)}\,(r,0) = \tau_{rz}^{(2)}\,(r,0) & (0 \le r < a) \end{cases} \tag{1b}$$

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}\,(r,0) = \sigma_z^{(2)}\,(r,0) = -p_0\,(r) & (a \le r < \infty) \\ \tau_{rz}^{(1)}\,(r,0) = \tau_{rz}^{(2)}\,(r,0) = 0 & (a \le r < \infty) \\ \sigma_r^{(j)}\,(r,z) = 0 \;\; r \to \infty & (j = 1,2) \end{cases} \tag{1c}$$

Чтобы построить решение граничной задачи (1), введём в рассмотрение неизвестные нормальные и касательные контактные напряжения $\sigma\,(r)$ и $\tau\,(r)$, решим вспомогательные задачи для каждого из разнородных слоёв на лицевых поверхностях $z = \pm h$ которых заданы условия симметрии (1a), а на плоскости$z = 0$ заданы напряжения:

$$\begin{matrix} \tau_{rz}^{(j)}(x,0) = \begin{cases} \tau(r) & (r<a) \\ 0 & (r>a) \end{cases} = T(r) \\ \sigma_z^{(j)}(x,0) = \begin{cases} \sigma(r) & (r<a) \\ -p_0(r) & (r>a) \end{cases} = P(r) \end{matrix} \quad (j=1,2) \tag{2}$$

и определим смещения точек зоны контакта обоих слоёв через введённые неизвестные контактные напряжения.

Чтобы построить решение вспомогательных граничных задач, представим решения уравнений Ламэ для разнородных слоёв виде интегралов Ханкеля [9]:

$$\begin{aligned} u_r^{(j)}(r,z) &= \int_0^\infty \left[\left(A_j(s) + zB_j^*(s)\right)\operatorname{ch} zs + \left(B_j(s) + zA_j^*(s)\right)\operatorname{sh} zs\right] sJ_1(rs)\,ds; \\ u_z^{(j)}(r,z) &= \int_0^\infty \left[\left(C_j(s) - zA_j^*(s)\right)\operatorname{ch} zs + \left(D_j(s) - zB_j^*(s)\right)\operatorname{sh} zs\right] sJ_0(rs)\,ds - \\ &\quad - \left(z + (-1)^j h\right) w_0^{(j)}, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$A_j^*(s) = \frac{s}{\kappa_j}\left(A_j(s) + D_j(s)\right); \quad B_j^*(s) = \frac{s}{\kappa_j}\left(B_j(s) + C_j(s)\right) \quad (j=1,2),$$

$J_j(x)$ $(j=1,2)$ – функции Бесселя действительного аргумента, $A_j(s)$, $B_j(s)$, $C_j(s)$, $D_j(s)$– неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, $hw_0^{(j)}$–неизвестная константа, κ_j $(j=1,2)$– известные постоянные Мусхелишвили. При этом, напряжения представляются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(j)}(r,z) &= -2\int_0^\infty \Big\{\Big[\vartheta_1^{(j)}A_j(s) - \vartheta_2^{(j)}D_j(s) + \mu_j zB_j^*(s)\Big]\operatorname{ch} zs - \\ &\quad - \Big[\vartheta_2^{(j)}C_j(s) - \vartheta_1^{(j)}B_j(s) - \mu_j zA_j^*(s)\Big]\operatorname{sh} zs\Big\} s^2 J_1(rs)\,ds; \\ \tau_{rz}^{(j)}(r,z) &= 2\int_0^\infty \Big\{\Big[\vartheta_2^{(j)}B_j(s) - \vartheta_1^{(j)}C_j(s) + \mu_j zA_j^*(s)\Big]\operatorname{ch} zs + \\ &\quad + \Big[\vartheta_2^{(j)}A_j(s) - \vartheta_1^{(j)}D_j(s) + \mu_j zB_j^*(s)\Big]\operatorname{sh} zs\Big\} s^2 J_0(rs)\,ds, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\theta_1^{(j)} = \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad \theta_2^{(j)} = \frac{\mu_j\left(\lambda_j + 2\mu_j\right)}{\lambda_j + 3\mu_j} \quad (j=1,2)$$

.

При помощи представлений (3) и (4), удовлетворим условиям вспомогательных граничных задач и определим неизвестные коэффициенты $A_j(s)$, $B_j(s)$, $C_j(s)$ и $D_j(s)$ $(j=1,2)$ через трансформанты Ханкеля функций напряжений $P(r)$ и $T(r)$. Получим:

$$
\begin{aligned}
&A_j^*(s) = \frac{\bar{P}(s)\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta + (-1)^j \bar{T}(s)\operatorname{ch}^2\beta}{2\mu_1(\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta+\beta)};\ (j=1,2;\ \beta = sh);\\
&B_j^*(s) = (-1)^j \frac{\bar{P}(s)\operatorname{sh}^2\beta + (-1)^j \bar{T}(s)\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta}{2\mu_1(\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta+\beta)};\\
&A_j(s) = \frac{{}_j\vartheta_2^{(j)}}{s\mu_j} A_j^*(s) - \frac{\bar{P}(s)}{2s\mu_j};\ B_b(s) = \frac{{}_j\vartheta_1^{(j)}}{s\mu_j} B_j^*(s) + \frac{\bar{T}(s)}{2s\mu_j};\\
&C_j(s) = \frac{{}_j\vartheta_2^{(j)}}{s\mu_j} B_j^*(s) - \frac{\bar{T}(s)}{2s\mu_j};\ D_j(s) = \frac{{}_j\vartheta_1^{(j)}}{s\mu_j} A_j^*(s) + \frac{\bar{P}(s)}{2s\mu_j};
\end{aligned}
$$

где

$$
\bar{P}(s) = \int_0^\infty rP(r)\,J_0(sr)\,dr; \qquad \bar{T}(s) = \int_0^\infty rT(r)\,J_1(sr)\,dr.
$$

Теперь, используя полученные представления коэффициентов по формулам (3), найдём компоненты смещений точек контактной зоны обоих разнородных слоёв, составляющих базовую ячейку через неизвестные контактные напряжения:

$$
\begin{aligned}
u_z^{(j)}(r,0) &= (-1)^j a_1^{(j)} L_{0,0}[\sigma] + b_1^{(j)} L_{0,1}[\tau] + L_{0,0}^{(j,1,1)}[\sigma] + L_{0,0}^{(j,1,2)}[\tau] -\\
&\quad - f_j(r) + (-1)^{j+1} h w_0^{(j)};\\
u_r^{(j)}(r,0) &= b_1^{(j)} L_{1,0}[\sigma] - (-1)^j a_1^{(j)} L_{1,1}[\tau] + L_{1,0}^{(j,2,1)}[\sigma] + L_{1,1}^{(j,2,2)}[\tau] -\\
&\quad - g_j(r) \quad (j=1,2),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь введены обозначения:

$$
L_{m,n}[\varphi] = \int_0^a W_{m,n}(r,\xi)\,\xi\varphi(\xi)d\xi; \quad W_{m,n}(r,\xi) = \int_0^\infty J_m(tr)\,J_n(t\xi)dt;
$$

$$
L_{m,n}^{(k,i,j)}[\varphi] = \int_0^a W_{m,n}^{(k,i,j)}(r,\xi)\,\xi\varphi(\xi)d\xi; \quad W_{m,n}^{(k,i,j)}(r,\xi) = \int_0^\infty K_{i,j}^{(k)}(t)\,J_m(tr)\,J_n(t\xi)dt;
$$

$$
f_j(r) = (-1)^j a_1^{(j)} \bar{L}_{0,0}[p_0] + \bar{L}_{0,0}^{(j,1,1)}[p_0]; \quad g_j(r) = b_1^{(j)} \bar{L}_{1,0}[p_0] + \bar{L}_{1,0}^{(j,2,1)}[p_0];
$$

$$
\bar{L}_{m,n}[\varphi] = \int_a^\infty W_{m,n}(r,\xi)\,\xi\varphi(\xi)d\xi; \quad \bar{L}_{m,n}^{(k,i,j)}[\varphi] = \int_a^\infty W_{m,n}^{(k,i,j)}(r,\xi)\,\xi\varphi(\xi)d\xi;
$$

$$
K_{1,1}^{(j)}(\beta) = a_1^{(j)}(-1)^{j+1}\frac{e^{-\beta}\operatorname{sh}\beta+\beta}{\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta+\beta}; \quad K_{1,2}^{(j)}(\beta) = K_{2,1}^{(j)}(\beta) = -\frac{a_1^{(j)}\beta}{\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta+\beta};
$$

$$K_{2,2}^{(j)}(\beta) = (-1)^j a_1^{(j)} \frac{e^{-\beta}\operatorname{ch}\beta - \beta}{\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta + \beta};\ a_1^{(j)} = \frac{\kappa_j \vartheta_2^{(j)}}{2\mu_j^2};\ b_1^{(j)} = \frac{1}{\lambda_j + \mu_j};\ \beta = hs\ \ (j = 1, 2)\,.$$

В представлениях (5) выделены главные части в виде интегралов Вебера–Сонина. Вследствие этого ядра $W_{m,n}^{(k,i,j)}(r,\xi)$ – регулярные функции от обоих аргументов.

Далее, чтобы получить ключевые уравнения поставленной задачи, при помощи формул (5) удовлетворим условиям контакта двух разнородных слоёв, т.е. первым двум условиям (1b). После некоторых выкладок придём к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} -\left(a_1^{(1)} + a_1^{(2)}\right) L_{0,0}[\sigma] + \left(b_1^{(1)} - b_1^{(2)}\right) L_{0,1}[\tau] + L_{0,0}^{(1,1)}[\sigma] + L_{0,1}^{(1,2)}[\tau] = F_1(r) - \delta; \\ \left(b_1^{(1)} - b_1^{(2)}\right) L_{1,0}[\sigma] + \left(a_1^{(1)} + a_1^{(2)}\right) L_{1,1}[\tau] + L_{1,0}^{(2,1)}[\sigma] + L_{1,1}^{(2,2)}[\tau] = F_2(r) \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} &L_{0,0}^{(1,1)}[\sigma] = L_{0,0}^{(1,1,1)}[\sigma] - L_{0,0}^{(2,1,1)}[\sigma];\ \ L_{0,0}^{(1,2)}[\tau] = L_{0,0}^{(1,1,2)}[\tau] - L_{0,0}^{(2,1,2)}[\tau]; \\ &L_{1,0}^{(2,1)}[\sigma] = L_{0,0}^{(1,2,1)}[\sigma] - L_{0,0}^{(2,2,1)}[\sigma];\ \ L_{1,0}^{(2,2)}[\tau] = L_{0,0}^{(1,2,2)}[\tau] - L_{0,0}^{(2,2,2)}[\tau]; \\ &F_1(r) = -\left(a_1^{(1)} + a_1^{(2)}\right)\bar{L}_{0,0}[p_0] + \bar{L}_{0,0}^{(1,1)}[p_0];\ \ \delta = h\left(w_0^{(1)} + w_0^{(2)}\right); \\ &F_2(r) = \left(b_1^{(1)} - b_1^{(2)}\right)\bar{L}_{1,0}[p_0] + \bar{L}_{1,0}^{(2,1)}[p_0]. \end{aligned}$$

Развернув, систему уравнений (6) напишем в виде:

$$\begin{aligned} &-A^+\int_0^a\left\{\int_0^\infty\left[1 - K_{1,1}^*(\beta)\right]J_0(rs)\,J_0(\xi s)\,ds\right\}\xi\sigma(\xi)\,d\xi + \\ &+\int_0^a\left\{\int_0^\infty\left[B^- - A^- K_{1,1}^*(\beta)\right]J_0(rs)\,J_1(\xi s)\,ds\right\}\xi\tau(\xi)\,d\xi = F_1(r) - \delta; \\ &\int_0^a\left\{\int_0^\infty\left[B^- - A^-(\beta)\right]J_1(rs)\,J_0(\xi s)\,ds\right\}\xi\sigma(\xi)\,d\xi - \\ &-A^+\int_0^a\left\{\int_0^\infty\left[1 + K_{1,1}^*(\beta)\right]J_1(rs)\,J_1(\xi s)\,ds\right\}\xi\tau(\xi)\,d\xi = F_2(r)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$K_{1,1}^*(\beta) = \frac{e^{-\beta}\operatorname{sh}\beta + \beta}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta + \beta};\quad K_{1,2}^*(\beta) = K_{2,1}^*(\beta) = -\frac{\beta}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta + \beta};$$

$$K_{2,2}^*(\beta) = \frac{e^{-\beta}\operatorname{ch}\beta - \beta}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta + \beta};\quad A^{\pm} = a_1^{(1)} \pm a_1^{(2)};\quad B^- = b_1^{(1)} - b_1^{(1)}.$$

Систему интегральных уравнений (7) следует рассматривать при условиях

$$2\pi \int_0^a r\sigma(r)dr = P_0; \quad (P_0 = P_1 + P_2), \tag{8}$$

где P_0– равнодействующая нагрузок, приложенных к полупространствам $z > 0$ или$z < 0$. Чтобы построить решение системы интегральных уравнений (7) при условий (8), следуя работам [4-12], сведём её к системе сингулярных интегральных уравнений. Для этого, как и в указанных работах, введём функции

$$\sigma_*(t) = \frac{2}{\pi}\int_t^a \frac{\xi\sigma(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}}; \quad \tau_*(t) = \frac{2t}{\pi}\int_t^a \frac{\tau(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}},$$

продолжим $\sigma_*(t)$ на интервал $(-a, 0)$ чётным образом, а $\tau_*(t)$– нечётным образом и применяя к обеим частям первого уравнения (7) оператор I, а ко второму – оператор I_1

$$I(\varphi(x)) = \int_0^x \frac{\varphi(r)\,rdr}{\sqrt{x^2 - r^2}}; \quad I_1(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}}\int_0^y \varphi(r)\,dr,$$

после некоторых выкладок, для определения функций $\sigma_*(t)$ и $\tau_*(t)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_*(x) - \frac{B^-}{\pi A^+}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\tau_*(t)dt}{t-x} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} Q_{1,1}(t,x)\,\sigma_*(t)\,dt + \\ + \frac{A^-}{\pi A^+}\int\limits_{-a}^{a} Q_{1,2}(t,x)\,\tau_*(t)\,dt = -F_1^*(x) + \delta_0 \qquad (-1 < x < 1); \\ \tau_*(x) + \frac{B^-}{\pi A^+}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sigma_*(t)dt}{t-x} + \frac{A^-}{\pi A^+}\int\limits_{-a}^{a} Q_{2,1}(t,x)\,\sigma_*(t)\,dt + \\ + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} Q_{2,2}(t,x)\,\tau_*(t)\,dt = -F_2^*(x) \qquad (-1 < x < 1). \end{cases} \tag{9}$$

где

$$Q_{1,1}(t,x) = \int_0^\infty K_{11}^*(\beta)\cos st\cos sx\,ds; \; Q_{1,2}(t,x) = \int_0^\infty K_{12}^*(\beta)\sin st\cos sx\,ds;$$

$$Q_{2,1}(t,x) = \int_0^\infty K_{21}^*(\beta)\cos st\sin sx\,ds; \quad Q_{2,2}(t,x) = \int_0^\infty K_{22}^*(\beta)\sin st\sin sx\,ds;$$

$$F_1^*(x) = \frac{2}{\pi A^+}\left[\frac{d}{dx}I\left[F_1(r)\right]\right]; \quad F_2^*(x) = \frac{2}{\pi A^+}\frac{d}{dx}I_1\left[F_2(r)\right]; \; \delta_0 = \frac{2\delta}{\pi A^+}.$$

При этом, функция $F_1^*(x)$ продолжена на интервале $(-a, 0)$ чётным образом, а функция $F_2^*(x)$– нечётным образом. Используя четность функции $\sigma_*(x)$, нечётность функции $\tau_*(x)$ и условие (8), добавочные условия для решения системы (9) записываются в виде:

$$\pi \int\limits_{-a}^{a} \sigma_*(x)\,dx = P_0; \qquad \int\limits_{-a}^{a} \tau_*(x)\,dx = 0\,. \tag{10}$$

Отметим, что при выводе системы (9) были использованы значения известных интегралов [14]:

$$\int\limits_0^r J_1(rs)\,dr = -\frac{1}{s}\left[J_0(rs) - 1\right]; \int\limits_0^x \frac{J_0(rt)\,rdr}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \frac{\sin xt}{t};$$
$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{J_0(rt) - 1}{\sqrt{x^2 - r^2}}rdr = \cos tx - 1;$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (9) при условиях (10).

3 Составное пространство с полубесконечной межфазной кольцеобразной трещиной

Прежде чем построить решение задачи в общем случае, рассмотрим два частных случая рассматриваемой задачи, представляющих самостоятельный интерес. В первой из этих задач рассмотрим случай, когда высота слоёв h стремится к бесконечности. Несложно проверить, что в этом случае все ядра $Q_{i,j}(x,t)$ в (9) исчезают и мы приходим к системе определяющих сингулярных интегральных уравнений для кусочно-однородного пространства с полубесконечной кольцеобразной межфазной трещиной:

$$\begin{cases} \sigma_*(x) - \dfrac{B^-}{\pi A^+}\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} \frac{\tau_*(t)\,dt}{t - x} = -F_1^*(x) + \delta_0; \\ \tau_*(x) + \dfrac{B^-}{\pi A^+}\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} \frac{\sigma_*(t)\,dt}{t - x} = -F_2^*(x)\,, \end{cases} \tag{11}$$

которую нужно решать при условиях (10). С этой целью умножим второе уравнение (11) на отрицательную мнимую единицу $-i$, просуммируем с первым, перейдем на интервал $(-1,1)$ и введя известную безразмерную комплексную комбинацию напряжений $\chi(x) = a\left[\sigma_*(ax) - i\tau_*(ax)\right]/P_0$, сведём решение системы (11) при условиях (10) к решению следующего сингулярного интегрального уравнения второго рода:

$$\chi(x) + \frac{a_*}{i\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\chi(t)}{t-x}dt = -F(x) + a\frac{\delta_0}{P_0} \qquad (-1 < x < 1), \tag{12}$$

при условии

$$\pi\int\limits_{-1}^{1}\chi(x)\,dx = 1. \tag{13}$$

Здесь

$$a_* = \frac{B^-}{A^+}; \quad F(x) = a\left[F_1^*(ax) - iF_2^*(ax)\right]/P_0 = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x).$$

Для построения замкнутого решения уравнения (12) вводим в рассмотрение комплексную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\chi(t)\,dt}{t-z} \tag{14}$$

и используя формулы Племеля-Сохоцкого [13], сведём его к решению задачи Римана:

$$\Phi^+(x) = G\Phi^-(x) + F_*(x) \qquad (-1 < x < 1). \tag{15}$$

Здесь

$$F_*(x) = C_0\left[-F(x) + a\delta_0/P_0\right] = -C_0F(x) + \delta_*;$$

$$\delta_* = \frac{2aC_0\delta}{\pi P_0A^+}; \quad G = \frac{1-a_*}{1+a_*} = \frac{\mu_{12}+\mu_2}{\mu_{21}+\mu_1} > 0; \quad C_0 = \frac{A^+}{A^+ + B^-}.$$

Так как коэффициент G задачи Римана (14) положительное число, то точки ±1 являются точками автоматической ограниченности [13] и, следовательно, решение уравнений (14) будет даваться формулой :

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{F_*(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} \tag{16}$$

$$\left(X(z) = (1+z)^{i\beta}(1-z)^{-i\beta}; \ \beta = \frac{1}{2\pi}\ln G\right).$$

Отсюда по формулам Племеля-Сохоцкого найдём:

$$\chi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{G+1}{2G}F_*(x) + \frac{(G-1)\,\omega(x)}{2\pi iG}\int\limits_{-1}^{1}\frac{F_*(t)\,dt}{\omega(t)(t-x)} \tag{17}$$

$$\left(\omega(x) = (1+x)^{i\beta}(1-x)^{-i\beta}, \quad -1 < x < 1\right).$$

Для получения точного решения уравнений (12) осталось определить постоянную δ_*, входящую в правую часть определяющего сингулярного интегрального уравнения (12). С этой целью, используя представления (14) и (16) функции $\Phi(z)$, сравним коэффициенты при z^{-1} в разложениях этих представлений в ряд вокруг бесконечно удалённой точки. Получим:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\chi(t)\,dt = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{F_*(t)\,dt}{X^+(t)},$$

где $X^+(t)$ – значение функции $X(z)$ на интервале $(-1,1)$ сверху и даётся формулой:

$$X^+(x) = \sqrt{G}\omega(x) \qquad (-1 < x < 1)\,.$$

Учитывая условие (13) и представление функции $F_*(t)$ через функции $\varphi_j(t)$ $(j=1,2)$ и δ_*, можем написать:

$$\frac{1}{\pi} = \int\limits_{-1}^{1}\frac{\delta_* dt}{X^+(t)} - C_0\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(t)\,dt}{X^+(t)} - iC_0\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(t)\,dt}{X^+(t)},$$

откуда, используя значение интеграла [14]

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{i\beta}dx = \frac{2\pi\beta}{\operatorname{sh}\pi\beta},$$

чётность функции $\varphi_1(t)$ и нечётность функции $\varphi_2(t)$, для определения жёсткого смещения δ получим формулу:

$$\begin{aligned}\delta = \frac{P_0 A^+\sqrt{G}\operatorname{sh}\pi\beta}{4\pi a\beta C_0}\Bigg\{1 + \frac{2\pi}{\sqrt{G}}\int\limits_{0}^{1}\Bigg[\operatorname{Re}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{i\beta}\varphi_1(x)\ -\\ -\ \operatorname{Im}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{i\beta}\varphi_2(x)\Bigg]dx\Bigg\}.\end{aligned} \tag{18}$$

В частном случае, когда берега трещин свободны от нагрузок и кусочно-однородное пространство растягивается только усилиями, приложенными на бесконечности, из (17) и (18) получим:

$$\chi(x) = -\frac{\delta_*}{\sqrt{G}}\omega(x)\,; \quad \delta = \frac{P_2 A^+\sqrt{G}\operatorname{sh}\pi\beta}{4\pi a\beta C_0}.$$

Теперь определим комплексный коэффициент интенсивности в концевых точках трещин. Для этого заметим, что истинные контактные напряжения определяются формулами [8]:

$$\sigma(r) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_r^a \frac{s\sigma_*(s)\,ds}{\sqrt{s^2-r^2}}; \qquad \tau(r) = -\frac{d}{dr}\int\limits_r^a \frac{\tau_*(s)\,ds}{\sqrt{s^2-r^2}},$$

или

$$\frac{a\sigma(ax)}{P_0} = -\frac{1}{P_0 x}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 \frac{s\sigma_*(as)\,ds}{\sqrt{s^2-x^2}} = -\frac{d}{P_0 dx}\int\limits_x^1 \frac{\sigma_*(as)\,ds}{\sqrt{s^2-x^2}} + \Phi_1(x);$$

$$\frac{a\tau(ax)}{P_0} = -\frac{d}{P_0 dx}\int\limits_x^1 \frac{\tau_*(sa)\,ds}{\sqrt{s^2-x^2}}.$$

где $\Phi_1(x)$– ограниченная функция в точке $x = 1$. Тогда будем иметь:

$$\chi_*(x) = \frac{a[\sigma(ax) - i\tau(ax)]}{P_0} = -\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 \frac{\chi(s)\,ds}{\sqrt{s^2-x^2}} + \Phi_1(x). \tag{19}$$

Функцию $\chi(s)$ представим в следующем виде:

$$\chi(x) = \chi_0(x)\,\omega(x)\,; \quad \chi_0(x) = -\frac{F_*(x)}{\sqrt{G}} + \frac{G-1}{2\pi i G}\int\limits_{-1}^1 \frac{F_*(t) - F_*(x)}{\omega(t)(t-x)}dt.$$

Тогда (19) можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_*(x) &= -\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 \frac{\omega(s)\,\chi_0(s)\,ds}{\sqrt{s^2-x^2}} + \Phi_1(x) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\,(1/2 - i\beta)\,\Gamma(1-i\beta)}{\Gamma(3/4 - i\beta)\,(1-x)^{1/2+i\beta}}\psi(1,x) + \Phi(x)\,, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\Phi(x) = -\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 \frac{[\psi(s,x) - \psi(1,x)]\,ds}{(1-s)^{i\beta}\sqrt{s-x}} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-i\beta)}{\Gamma(3/4-i\beta)}(1-x)^{1/2-i\beta}\psi'(1,x) + \Phi_1(x)\,;$$

$$\psi(s,x) = \frac{(1+s)^{i\beta}}{\sqrt{s+x}}\chi_0(s)\,,$$

а $\Gamma(z)$– известная гамма-функция Эйлера. Заметим, что при выводе формулы

(20) было использовано значение интеграла [15]:

$$\int\limits_x^1 \frac{ds}{(1-s)^\alpha \sqrt{s-x}} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(3/4-\alpha)}(1-x)^{1/2-\alpha}.$$

Тогда комплексный коэффициент безразмерных разрушающих напряжений на окружности $r = a$ будет определяться формулой:

$$K_I[a] - iK_{II}[a] = \sqrt{2\pi}\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{1/2+i\beta},$$

$$\chi_*(\eta) = \frac{\sqrt{2}\pi(1/2-i\beta)\Gamma(1-i\beta)}{\Gamma(3/4-i\beta)}\psi(1,1) =$$
$$= \frac{2^{i\beta}\pi(1/2-i\beta)\Gamma(1-i\beta)}{\Gamma(3/4-i\beta)}\left[-\frac{F_*(1)}{\sqrt{G}} + \frac{G-1}{2\pi iG}\int\limits_{-1}^{1}\frac{F_*(t)-F_*(1)}{\omega(t)(t-1)}dt\right].$$

4 Однородное пространство с периодической системой полубесконечных кольцеобразных трещин

Теперь обратимся к ещё одному частному случаю поставленной задачи, когда все слои, составляющие пространство, изготовлены из одного и того же материала с коэффициентами Лямэ μ_1 и λ_1, т.е. рассмотрим осесимметричное напряжённое состояние однородного пространства с периодической системой параллельных полубесконечных кольцеобразных трещин. В этом частном случае коэффициенты A^- и B^- обращаются в ноль и определяющая система (9), как и в плоской задаче, распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned} &\sigma_*(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} Q_{1,1}(t,x)\sigma_*(t)\,dt = -F_1^*(x) + \delta_0; \\ &\tau_*(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} Q_{2,2}(t,x)\tau_*(t)\,dt = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения нужно рассматривать при условиях (10). Из второго уравнения (21) и второго условия (10) сразу следует, что $\tau_*(x) \equiv 0$. Первое же уравнение (21) представляет собой интегральное уравнение Фредгольмского типа и можно решить разными методами, например методом последовательных приближений или методом механических квадратур. Для этого перейдём на интервал (-1,1) и введя обозначения

$$\Lambda(\eta) = \frac{a}{P_0}\sigma_*(a\eta);\ \varphi_1(\eta)_0 = \frac{a}{P_0}F_1^*(a\eta);\ \delta_* = \frac{a}{P_0}\delta_0;\ Q(\xi,\eta) = -\frac{a}{\pi}Q_{11}(a\xi,a\eta),$$

первое уравнение (21) представим в виде:

$$\Lambda(\eta) + \int\limits_{-1}^{1} Q(\xi, \eta)\, \Lambda(\xi)\, d\xi = -\varphi_1(\eta) + \delta_* \quad (-1 < \eta < 1)\,. \tag{22}$$

При этом,

$$\pi \int\limits_{-1}^{1} \Lambda(\xi)\, d\xi = 1. \tag{23}$$

Решение уравнения (22) запишем в виде суммы двух решений:

$$\Lambda(\eta) = \Lambda_1(\eta) + \delta_* \Lambda_2(\eta)\,, \tag{24}$$

где $\Lambda_1(\eta)$– решение уравнений (22) при правой части $-\varphi_1(\eta)$, а $\Lambda_2(\eta)$– решение уравнений (22), когда правая часть равна единице. Подставляя представление (24) в условие (23), выразим приведённое жёсткое смещение δ_* через указанные решения:

$$\delta_* = \frac{1 - \pi I_1}{\pi I_2} \qquad \left(I_j = \int\limits_{-1}^{1} \Lambda_j(\eta)\, d\eta; \quad j = 1, 2 \right).$$

Приведём также формулу для определения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$. С этой целью заметим, что истинные контактные напряжения определяются через функцию $\sigma_*(x)$ по формуле:

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_*(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \Phi(r) \qquad \left(\Phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int\limits_{r}^{a} \frac{s\left[\sigma_*(s) - \sigma_*(a)\right] ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \right).$$

Следовательно,

$$K_I(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \to a-0} \sqrt{a - r}\, \sigma(r) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sigma_*(a) = P_0 \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Lambda(1)\,,$$

а безразмерный коэффициент интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$ будет даваться формулой:

$$K_I^*(a) = \frac{\sqrt{a} K_I(a)}{P_0} = \sqrt{\pi} \Lambda(1)\,.$$

Отметим, что в первом уравнении (21), устремляя высоту однородных слоёв h к бесконечности, придём к замкнутому решению задачи об осесимметричном напряжённом состоянии упругого пространства с полубесконечной кольцеобразной трещиной. Действительно, несложно проверить, что в этом случае ядро $Q_{11}(t, x)$ исчезает и мы приходим к соотношению:

$$\sigma_*(x) = -F_1^*(x) + \delta_0 \quad (-a < x < a)\,, \tag{25}$$

где, на этот раз

$$F_1^*(x) = -\frac{2}{\pi a_1}\left[\frac{d}{dx} I\left[f_1(r)\right]\right] = -\frac{2}{\pi}\int_a^\infty \left\{\int_0^\infty \cos sx\, J_0(s\xi)\, ds\right\} \xi q(\xi)\, d\xi.$$

Отсюда, используя формулу обращения оператора вращения, найдём

$$\sigma(r) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{s\sigma_*(s)\, ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{s\left[-F_1^*(x) + \delta_0\right] ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = \frac{\delta_0 - F_1^*(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \Phi(r),$$

где

$$\Phi(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{s\left[F_1^*(x) - F_1^*(a)\right] ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}$$

– ограниченная функция на окружности $r = a$.

Тогда, для коэффициента интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$ получим выражение:

$$K_I(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \to a-0} \sqrt{a - r}\,\sigma(r) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left[\delta_0 - F_1^*(a)\right].$$

Приведём также формулы для контактных напряжений и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в случае, когда на берега трещин действуют равномерно распределённые по окружности $r = r_0 > a$ нагрузки с результирующей P_0, т.е. когда $(r) = P_0 \dfrac{\delta(r - r_0)}{2\pi r_0}$. При помощи формулы [14]:

$$\int_0^\infty \cos sx\, J_0(\xi s)\, ds = \begin{cases} 0 & \xi < x, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} & \xi > x \end{cases}$$

нетрудно установить, что в этом частном случае

$$F_1^*(x) = -\frac{P_0}{\pi^2\sqrt{r_0^2 - x^2}}; \quad \sigma_*(x) = \frac{P_0}{\pi^2\sqrt{r_0^2 - x^2}} + \delta_0 \qquad (-a < x < a).$$

Далее, из условий равновесия (10) для приведённого жёсткого смещения δ_0 получим:

$$\delta_0 = \frac{P_0}{2\pi a}\left[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{a}{r_0}\right)\right].$$

Тогда, используя значение интеграла [14,15]

$$\int_r^a \frac{2sds}{\sqrt{\left(s^2 - r^2\right)\left({r_0}^2 - s^2\right)}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{{r_0}^2 + r^2 - 2a^2}{{r_0}^2 - r^2}$$

для истинных напряжений получим выражение:

$$\sigma(r) = \frac{P_0}{2\pi a\sqrt{a^2-r^2}}\left[1-\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{a}{r_0}\right)+\frac{2a\sqrt{r_0^2-a^2}}{\pi\left(r_0^2-r^2\right)}\right] \qquad (0<r<a)\,.$$

Коэффициент интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$ при этом будет даваться формулой:

$$K_I(a) = \sqrt{2\pi}\lim_{x\to a-0}\sqrt{a-r}\sigma(r) = \frac{P_0}{2a\sqrt{\pi a}}\left[1-\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{a}{r_0}\right)+\frac{2a}{\pi\sqrt{r_0^2-a^2}}\right].$$

Отсюда видно, что когда $r_0 \to \infty$, т.е. когда радиус окружности, где приложена нагрузка, стремится к бесконечности контактные напряжения и коэффициент интенсивности разрушающих напряжений принимают соответственно следующие виды:

$$\sigma(r) = \frac{P_0}{2\pi a\sqrt{a^2-r^2}} \qquad (0<r<a)\,; \qquad K_I(a) = \frac{P_0}{2a\sqrt{\pi a}},$$

которые соответствуют значениям контактных напряжений и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в случае, когда нагрузка с равнодействующей P_0 приложена на бесконечности и точностью совпадают с результатами, приведёнными в монографии [16] для осесимметричного гладкого контакта двух тел, когда они изготовлены из одного и того же материала.

5 Решение определяющей системы уравнений в общем случае

Теперь построим решение системы определяющих уравнений (9) в общем случае. Для этого, как и выше, умножим второе уравнение (9) на $-i$, просуммируем с первым и при помощи замены переменных $\{x,t\} = \{a\eta, a\xi\}$ перейдём на интервал $(-1,1)$. В итоге, введя обозначения

$$\chi(\eta) = \frac{1}{P_0}\left[\sigma_*(a\eta) - i\tau_*(a\eta)\right]; \quad \delta_* = \frac{\delta_0}{P_0};$$

$$a_* = \frac{B^-}{A^+}; \quad F(\eta) = \frac{1}{P_0}\left[f_1^*(a\eta) - if_2^*(a\eta)\right] = \varphi_1(\eta) - i\varphi_2(\eta)\,.$$

$$R_1(\eta,\xi) = \frac{a}{2\pi}\left[Q_{22}(a\eta,a\xi) - Q_{11}(a\eta,a\xi) + \frac{iA^-}{A^+}\left(Q_{12}(a\eta,a\xi) - Q_{21}(a\eta,a\xi)\right)\right];$$

$$R_2(\eta,\xi) = -\frac{a}{2\pi}\left[Q_{22}(a\eta,a\xi) + Q_{11}(a\eta,a\xi) + \frac{iA^-}{A^+}\left(Q_{12}(a\eta,a\xi) + Q_{21}(a\eta,a\xi)\right)\right];$$

придём к следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$\chi(\eta) + \frac{a_*}{i\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\chi(\xi)}{\xi-\eta}d\xi + \int\limits_{-1}^{1}R_1(\eta,\xi)\,\chi(\xi)\,d\xi + \int\limits_{-1}^{1}R_2(\eta,\xi)\,\bar{\chi}(\xi)\,d\xi = \\ = -F(\eta) + \delta_* \qquad (-1 < x < 1)\,, \tag{26}$$

которое нужно рассматривать при условии (13). Заметим, что аналогичные уравнения были получены в работе [9], в случае когда кусочно-однородное равномерно слоистое пространство расслаблено периодической системой круговых дискообразных межфазных трещин или включений. Следуя этой работе, решение уравнения (23) представим в виде суммы двух функций $\chi(\eta) = \delta_*\chi_1(\eta) + \chi_2(\eta)$, где $\chi_j(\eta)$ $(j = 1,2)$ – решения интегрального уравнения (23), когда его правая часть соответственно равна $-F(\eta)$ и 1. Тогда из условия (13) для определения приведённого жёсткого смещения δ_*, которое является одним из важных механических характеристик задачи, как и в [9], получим следующую формулу:

$$\delta_* = \frac{1-I_2}{I_1}; \quad I_j = \pi\int\limits_{-1}^{1}\chi_j(\eta)\,d\eta \qquad (j = 1,2)\,. \tag{27}$$

Решение уравнения (23) при условии (13) построим методом механических квадратур. С этой целью, учитывая особенность решения в концевых точках трещин, полученное выше, функции $\chi_j(\eta)$ $(j = 1,2)$ представим в виде:

$$\chi_j(\eta) = \chi_j^*(\eta)\,\omega(\eta) \qquad (j = 1,2)\,, \tag{28}$$

где функция $\omega(\eta)$ та же самая, что и выше, а $\chi_j^*(\eta)$ $(j = 1,2)$– непрерывные функции, ограниченные вплоть до концов отрезка $[-1,1]$.

Подставляя представления функций $\chi_j(\eta)$ $(j = 1,2)$ из (25) в (23) и (13), используя соотношения, приведённые в [17], по стандартной процедуре, для каждой из правых частей, придём к системе из $2n$ алгебраических уравнений относительно значений $\chi_j^*(\xi_i)$ и $\bar{\chi}_j^*(\xi_i)$ $\left(j = 1,2; i = \overline{1,n}\right)$. После определения $\chi_*(\xi_i)$ при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа восстанавливаются функции $\chi_j(\eta)$ и определяются все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в кусочно-однородном равномерно слоистом пространстве. В частности, для определения безразмерных комплексных коэффициентов интенсивности приведенных разрушающих напряжений в концевых точках трещин получим формулу:

$$K_I[a] - iK_{II}[a] = \sqrt{2\pi}\lim_{\eta\to 1-0}(1-\eta)^{1/2+i\beta}\chi_*(\eta) = \\ = \frac{2^{i\beta}\pi\,(1/2-i\beta)\,\Gamma(1-i\beta)\,[\delta_*\chi_1^*(1) + \chi_2^*(1)]}{\Gamma(3/4-i\beta)}.$$

6 Численные результаты

Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения безразмерных комплексных коэффициентов интенсивности приведённых разрушающих напряжений в концевых точках трещин и приведённого жёсткого смещения δ_* в зависимости от параметра $l = h/a$ и отношения упругих харак¬теристик $\mu_1/\mu_2 = \mu$ в случае, когда на берега трещин действует равномерно распределённая по окружности $r = r_0 > a$ нагрузка величины P_0. При этом, функция $F(\eta)$, входящая в правую часть уравнения (23), будет даваться формулой:

$$F(\eta) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{\eta_0^2-\eta^2}} + \frac{1}{l\pi^2}\int\limits_0^\infty K_{11}^*(\beta)\, J_0\left(\frac{\eta_0\beta}{l}\right)\cos\left(\frac{\eta\beta}{l}\right)d\beta -$$

$$-\frac{iA^-}{l\pi^2 A^+}\int\limits_0^\infty K_{21}^*(\beta)\, J_0\left(\frac{\eta_0\beta}{l}\right)\sin\left(\frac{\eta\beta}{l}\right)d\beta.$$

При вычислительных работах принято также $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$ и $\eta_0 = 2$.

Результаты вычислительных работ приведены в виде таблиц и фигур. В таблицах 1 и 2 приведены значения модуля комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в зависимости от параметров μ и l соответственно в случаях, когда $l = 2$ и $\mu = 2$.

μ	0.1	0.5	1	3	5	50	100	120
$\lvert K(a)\rvert$	0.3141	0.2984	0.2962	0.3160	0.3303	0.3766	0.3807	0.3807

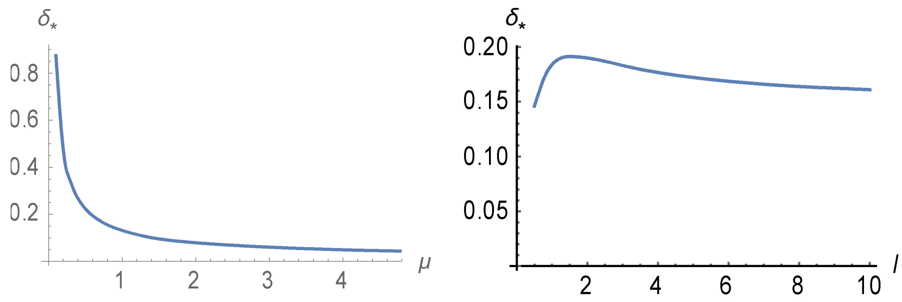
Таблица 1

μ	0.5	1	2	4	7	10
$\lvert K(a)\rvert$	0.2719	0.2942	0.3051	0.3058	0.3063	0.3065

Таблица 2

Они показывают, что модуль комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений при увеличении параметра μ сначала убывает, а затем возрастает, стремясь к определённому пределу. При увеличении же параметра l модуль комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений монотонно возрастает, стремясь к определённому пределу.

На Фиг. 2 приведены графики зависимости приведённого жёсткого смещения соответственно от параметра μ при $l = 2$ и параметра l при $\mu = 2$. Из них видно, что при увеличении параметра μ приведённое жёсткое смещение уменьшается, стремясь к определённому пределу, соответствующему случаю, когда первый слой жёсткий. В случае же, когда увеличивается высота слоёв, при постоянном радиусе контактной зоны, приведённое жёсткое смещение сначала возрастает, а затем уменьшается стремясь к определённому пределу, соответ-ствующему случаю двухкомпонентного пространства.



Фиг. 1

Заключение

Таким образом, в работе получено эффективное решение задачи об осесимметричном напряжённом состоянии кусочнооднородного, равномерно слоистого пространства с периодической системой круговых кольцеобразных полубесконечных, параллельных межфазных трещин. Получены простые формулы для определения важных механических характеристик задачи, каковыми являются контактные напряжения и модуль их комплексного коэффициента интенсивности. В случае, когда высота слоёв стремится к бесконечности, при помощи предельного перехода, получена определяющая система сингулярных интегральных уравнений задачи для двухкомпонентного пространства с круговой полубесконечной кольцеобразной межфазной трещиной и построено её точное решение. При помощи численного анализа выявлены закономерности изменения модуля комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений и жёсткого смещения слоёв в зависимости от физикомеханических и геометрических характеристик задачи.

Литература

[1] Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials containing circular or ring-shaped cavities. Trans ASME, Ser. E, J. Appl. Mech. 1964, 32, №4, p. 829-836.

[2] Mossakovskii V.I. and Rybka M.T. Generalization of the Griffith-Sneddon Criterion for the Case of a Nonhomogeneous Body, Journal of Applied Mathematics And Mechanics,Vol. 28, №6, 1964,pp1061-1069.

[3] Willis J.R. The penny-shaped crack on an interface. Quart J. Mech. and Appl. Math., 1972, 25, №3, p. 367-385

[4] Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения.- В сб.: "Современные проблемы механики и авиации", посвященном И.Ф. Образцову. 1980, с. 156-162.

[5] Акопян В. Н., Даштоян Л. Л. Об одной осесимметричной задаче для составного пространства, ослабленного полубесконечной кольцеобразной трещиной. Изв. НАН РА, «Механика », т. 59, No1, 2006г, с. 3-10.

[6] Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жесткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве. Сб. трудов межд. конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды », посв. 95-летию со дня рожд. Акад. Н.Х.Арутюняна, Ереван-2007, с. 45-51.

[7] Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной. Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №3. С. 31-46.

[8] Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Издательство Гитутюн НАН РА, Ереван, 2014, 322с.

[9] Акопян В.Н., Акопян Л.В., Даштоян Л.Л. Разрывные решения осесимметричной теории упругости для кусочно-однородного, равномерно слоистого пространства с периодическими межфазными дискообразными дефектами. Механика композитных материалов, т. 55, № 1, 2019г. стр.2-24.

[10] Акопян В.Н. Осесимметричное напряжённое состояние кусочно-однород–ного, слоистого пространства с параллельными монетообразными трещинами. Труды XVIII межд. конференции "Современные проблемы механики сплошной среды", Ростов-на-Дону, том 1, 2016, с. 35-39.

[11] Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Мурашкин Е.В. Об осесимметричном напряжённом состоянии равномерно слоистого пространства, содержащего систему периодических внутренних дискообразных трещин. Известия НАН РА, Механика, 2019, т.72, № 4, с.27-37.

[12] Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Казаков К. Осесимметричное напряжённое состояние равномерно слоистого пространства с периодическими системами внутренних дискообразных трещин и включений. Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2020. №2, с.25-40.

[13] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640с

[14] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1110с.

[15] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 738с.

[16] Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л., Гостехтеориздат, 1949. 270с.

[17] A.V.Sahakyan, H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi:10.1088/1742-6596/991/1/012070

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович - доктор физ.-мат. наук, проф., главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Тел.: (+374 10) 56 81 88, **email**: vhakobyan@sci.am

Григорян Арам Арутюнович - аспирант Института механики НАН РА
email: grigoryan.aram.4@gmail.com

Амирджанян Арутюн Арменович - канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА
email: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию ...

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա | Том 74, № 1, 2021 | Механика

УДК 517.977: 534.112 http://doi.org/10.33018/74.1.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАДАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Барсегян В. Р.

Ключевые слова: колебания струны, граничное управление, оптимальное управление колебаниями, промежуточные условия, разделение переменных

Optimal boundary control of string vibrations with given values of the velocities of the points at the intermediate moments of time

Barseghyan V. R.

Keywords: string vibrations, boundary control, optimal control of vibrations, intermediate conditions, separation of variables

We consider the problem of optimal boundary control for the equation of string vibrations with given initial and final conditions and given velocities of the points of the string at intermediate moments of time and with a quality criterion specified over the entire time interval. Using the method of separation of variables and methods of optimal control theory with multipoint intermediate conditions, optimal boundary controls are constructed for arbitrary numbers of the first harmonics. As an application of the proposed constructive approach, an optimal boundary control is constructed with given values of the velocities of the points of the string at some intermediate moments of time.

Եզրային տեղափոխություններով լարի փափանումների օպտիմալ ղեկավարումը, երբ ժամանակի միջանկյալ պահերին տրված են լարի կետերի արագությունները

Բարսեղյան Վ. Ռ.

Հիմնաբառեր. լարի տատանում, եզրային ղեկավարում, տատանումների օպտիմալ ղեկավարում, միջանկյալ պայմաններ, փոփոխականների անջատում

Դիտարկված է տրված սկզբնական և վերջնական պայմաններով, ժամանակի միջանկյալ պահերին լարի կետերի արագությունների տրված արժեքներով եզրերի տեղափոխություններով տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը, երբ որակի հայտանիշը տրված է ամբողջ ժամանակահատվածի վրա: Փոփոխականների անջատման և միջանկյալ բազմակետային պայմաններով օպտիմալ ղեկավարման տեսությունների կիրառմամբ առաջին կամայական թվով հարմոնիկների համար կառուցված է օպտիմալ եզրային ղեկավարումները: Որպես առաջարկված կոնստրուկտիվ մոտեցման կիրառություն կառուցված է օպտիմալ եզրային ղեկավարումը, երբ ժամանակի միջանկյալ որևէ պահի տրված են լարի կետերի արագությունները:

Рассматривается задача оптимального граничного управления для уравнения колебаниями струны с заданными начальным, конечным условиями и задаными скоростями точек струны в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Используя метод разделения переменных и методы теории оптимального управления с многоточечными промежуточными условиями, для произвольных чисел первых гормоник построены оптимальные граничные управления. В качестве приложения предложенного конструктивного подхода построено граничное оптимальное управление с заданным значением скоростей точек струны в некотором промежуточном моменте времени.

Введение

Управляемые колебательные системы широко распространены в различных теоретических и прикладных областях науки. Необходимость управления и оптимального управления колебательными процессами как распределенными, так и граничными воздействиями, является актуальной задачей, решению которой уделяют внимание многие исследователи [1-14]. На практике часто возникают задачи граничного управления и оптимального управления, в частности, когда нужно сгенерировать с заранее заданными (желаемыми) промежуточными параметрами (формой прогиба, скоростью точек струны и т.д.) колебания. Моделирование и управление динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с частными производными, с промежуточными условиями являются активно развиваемым направлением в современной теории управления. К исследованиям таких задач посвящены, в частности, работы [8-16]. В работе [12] рассмотрена задача оптимального граничного управления колебаниями струны со смещением одного конца при закрепленном другом конце с заданными ограничениями в промежуточные моменты времени. В работе [13] предложен конструктивный подход построения граничного управления колебаниями струны с заданными начальным и конечным условиями, который позволяет установить в промежуточные моменты времени заданные значения функции прогиба. Данная работа примыкает к работам [12, 13].

Цель данной статьи состоит в разработке конструктивного подхода построения функции оптимального граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными значениями скоростей точек струны в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями и, используя метод разделения переменных, полученная задача сводится к задаче оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и многоточечными промежуточными условиями. Методом проблем моментов для произвольных чисел первых гормоник построены оптимальные граничные управления. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

1 Постановка задачи

Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q\,(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $t > 0$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \le x \le l \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$Q(0,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

где функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ - граничные управления.

В уравнении (1.1) $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, где T_0 - натяжение струны, ρ - плотность однородной струны. Предполагается, что функция $Q\,(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, где множество $\Omega_T = \{(x,t): \; x \in [0,l]\,, \; t \in [0,T]\}$.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, ..., m)$,

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы значения функции прогиба струны

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_i} = \psi_i(x), \quad 0 \le x \le l, \quad i = 1, ..., m. \tag{1.4}$$

Задача граничного оптимального управления колебаниями струны с заданными значениями производной функции прогиба (скоростей точек струны) в промежуточные моменты времени ставится следующим образом: среди возможных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, требуется найти оптимальные управления, переводящие систему из заданного начального состояния (1.2), удовлетворяя промежуточным условиям (1.4), в конечное состояние

$$Q(x,T) = \varphi_T(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \le x \le l \tag{1.5}$$

и минимизирующие функционал

$$\int\limits_0^T \left(\mu^2(t) + \nu^2(t)\right) dt. \tag{1.6}$$

Будем предполагать, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_T(x)$ принадлежат пространству

$C^2[0,l]$, а функции $\psi_i(x)$ $(i = 0, 1, \dots, m, m{+}1)$ принадлежат пространству $C^1[0,l]$. Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования, которые приведены ниже.

Отметим, что так как в отдельные промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \dots, m)$ заданы только значения производной функции прогиба (1.4) струны, то использовать подход поэтапного решения задачи оптимального управления не целесообразно. Поэтому в работе предлагается такой подход решения рассмотренной задачи оптимального управления, в котором учитывается специфика промежуточных условий (1.4).

2 Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями

Так как граничные условия (1.3) неоднородны, решение поставленной задачи сводим к задаче с нулевыми граничными условиями.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде суммы

$$Q(x,t) = V(x,t) + W(x,t) \tag{2.1}$$

где $V(x,t)$ - неизвестная функция с однородными граничными условиями

$$V(0,t) = V(l,t) = 0 \tag{2.2}$$

и предстоящая определению, а $W(x,t)$ - решение уравнения (1.1) с неоднородными граничными условиями

$$W(0,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = \nu(t). \tag{2.3}$$

Функция $W(x,t)$ имеет вид

$$W(x,t) = (\nu(t) - \mu(t))\frac{x}{l} + \mu(t). \tag{2.4}$$

Подставив (2.1) в (1.1) и учитывая (2.4), получим уравнение для функции $V(x,t)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{2.5}$$

где

$$F(x,t) = (\ddot{\mu}(t) - \ddot{\nu}(t))\frac{x}{l} - \ddot{\mu}(t). \tag{2.6}$$

В силу начальных, промежуточных и граничных условий, соответственно (1.2), (1.4) и (1.5), функция должна удовлетворять следующим начальным условиям

$$\begin{aligned} V(x,0) &= \varphi_0(x) - (\nu(0) - \mu(0))\frac{x}{l} - \mu(0), \\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} &= \psi_0(x) - (\dot{\nu}(0) - \dot{\mu}(0))\frac{x}{l} - \dot{\mu}(0), \end{aligned} \tag{2.7}$$

промежуточным условиям

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_i} = \psi_i(x) - (\dot\nu(t_i) - \dot\mu(t_i))\frac{x}{l} - \dot\mu(t_i), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.8}$$

и конечным условиям

$$\begin{aligned} &V(x,T) = \varphi_T(x) - (\nu(T) - \mu(T))\frac{x}{l} - \mu(T), \\ &\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) - (\dot\nu(T) - \dot\mu(T))\frac{x}{l} - \dot\mu(T). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Из условий (2.7) - (2.9), с учетом (2.2), получим следующие условия согласования

$$\mu(0) = \varphi_0(0), \quad \dot\mu(0) = \psi_0(0), \quad \nu(0) = \varphi_0(l), \quad \dot\nu(0) = \psi_0(l), \tag{2.10}$$

$$\dot\mu(t_i) = \psi_i(0), \quad \dot\nu(t_i) = \psi_i(l), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.11}$$

$$\mu(T) = \varphi_T(0), \quad \dot\mu(T) = \psi_T(0), \quad \nu(T) = \varphi_T(l), \quad \dot\nu(T) = \psi_T(l). \tag{2.12}$$

Следовательно, с учетом условий (2.10)-(2.12), условия (2.7)-(2.9) запишутся следующим образом, соответственно:

$$\begin{aligned} &V(x,0) = \varphi_0(x) - (\varphi_0(l) - \varphi_0(0))\frac{x}{l} - \varphi_0(0), \\ &\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x) - (\psi_0(l) - \psi_0(0))\frac{x}{l} - \psi_0(0), \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_i} = \psi_i(x) - (\psi_i(l) - \psi_i(0))\frac{x}{l} - \psi_i(0), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &V(x,T) = \varphi_T(x) - (\varphi_T(l) - \varphi_T(0))\frac{x}{l} - \varphi_T(0), \\ &\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) - (\psi_T(l) - \psi_T(0))\frac{x}{l} - \psi_T(0). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Таким образом, решение задачи оптимального граничного управления колебаниями струны с заданными значениями производной функции прогиба в промежуточные моменты времени сведена к задаче управления (2.5), (2.6) с граничными условиями (2.2) и минимизируемым функционалом (1.6), которая формулируется следующим образом: требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$ при $0 \le t \le T$, переводящие колебание, описываемое уравнением (2.5) с граничными условиями (2.2) из заданного начального состояния (2.13) через промежуточные состояния (2.14) в конечное состояние (2.15) и минимизирующие функционал (1.6).

3 Сведение решения задачи с нулевыми граничными условиями к проблеме моментов

Учитывая, что в задаче (2.5), (2.6) граничные условия (2.2) однородны, предположение выполнения условий согласованности (2.10)-(2.12) и принадлежность используемых функций указанным соответствующим пространствам, согласно теории рядов Фурье, решение уравнения (2.5) ищем в виде

$$V(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} V_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x, \quad \text{где} \quad V_k(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l V(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}x dx. \tag{3.1}$$

Представим функции $F(x,t)$, $\psi_i(x)$, $(i=0,1,\dots,m+1)$, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_T(x)$ в виде рядов Фурье и, подставив их выражения вместе с $V(x,t)$ из (3.1) в уравнения (2.5), (2.6) и в условия (2.13)-(2.15), получим

$$\ddot{V}_k(t)+\lambda_k^2 V_k(t)=F_k(t), \quad \lambda_k^2=\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} V_k(0)&=\varphi_k^{(0)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\left[\varphi_0(0)-\varphi_0(l)(-1)^k\right],\\ \dot{V}_k(0)&=\psi_k^{(0)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\left[\psi_0(0)-\psi_0(l)(-1)^k\right], \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\dot{V}_k(t_i)=\psi_k^{(i)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\left[\psi_i(0)-\psi_i(l)(-1)^k\right], \quad i=1\dots,m, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} V_k(T)&=\varphi_k^{(T)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\left[\varphi_T(0)-\varphi_T(l)(-1)^k\right],\\ \dot{V}_k(T)&=\psi_k^{(T)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\left[\psi_T(0)-\psi_T(l)(-1)^k\right], \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$F_k(t)=\frac{2a}{\lambda_k l}\left[\ddot{\nu}(t)(-1)^k-\ddot{\mu}(t)\right]. \tag{3.6}$$

Здесь через $\psi_k^{(i)}$ $(i=0,1,\dots,m,m+1)$, $\varphi_k^{(0)}$ и $\varphi_k^{(T)}$ обозначены коэффициенты Фурье, соответственно функциям $\psi_i(x)$ $(i=0,1,\dots,m,m+1)$, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_T(x)$.

Общее решение уравнения (3.2) с начальными условиями (3.3) имеет вид

$$V_k(t)=V_k(0)\cos\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau. \tag{3.7}$$

Теперь учитывая промежуточные (3.4) и конечные (3.5) условия, из (3.7) получим, что функции $F_k(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T F_k(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau = \tilde{C}_{1k}(T),\\
&\int\limits_0^T F_k(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = \tilde{C}_{2k}(T),\\
&\int\limits_0^{t_j} F_k(\tau)\cos\lambda_k(t_j-\tau)d\tau = \tilde{C}_{2k}(t_j), \quad j=1,\ldots,m,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{1k}(T) &= \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k T,\\
\tilde{C}_{2k}(T) &= \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k T,\\
\tilde{C}_{2k}(t_j) &= \dot{V}_k(t_j) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t_j - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k t_j.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (3.6) в (3.8) и интегрируя по частям, с учетом условий (2.10)-(2.12), получим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}(T),\\
&\int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{2k}(T),\\
&\int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(1)}\,(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)g_k^{(1)}\,(\tau)\,d\tau = C_{2k}(t_1),\\
&\ldots\\
&\int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(m)}\,(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)g_k^{(m)}\,(\tau)\,d\tau = C_{2k}(t_m), \quad k=1,2,\ldots,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned}
C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} - (-1)^k Y_{1k}\right],\\
C_{2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} - (-1)^k Y_{2k}\right],\\
C_{2k}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} - (-1)^k Y_{2k}^{(j)}\right], \quad j=1,\ldots,m,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$
\begin{aligned}
&X_{1k} = \lambda_k \varphi_T(0) - \psi_0(0)\sin\lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(0)\cos\lambda_k T,\\
&X_{2k} = \psi_T(0) - \psi_0(0)\cos\lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(0)\sin\lambda_k T,\\
&Y_{1k} = \lambda_k \varphi_T(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(l)\cos\lambda_k T,\\
&Y_{2k} = \psi_T(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(l)\sin\lambda_k T,\\
&X_{2k}^{(j)} = \psi_j(0) - \psi_0(0)\cos\lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_0(0)\sin\lambda_k t_j,\\
&Y_{2k}^{(j)} = \psi_j(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_0(l)\sin\lambda_k t_j,\\
&g_k^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \cos\lambda_k(t_j - \tau), & 0 \le \tau \le t_j,\\ 0, & t_j < \tau \le T, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Из соотношения (3.10) следует, что для каждой гармоники движение (т.е. для каждого $k = 1, 2, \ldots$), описываемое уравнением (3.2), (3.6) с условиями (3.3)-(3.5) вполне управляема тогда и только тогда, когда для любых заданных значений постоянных $C_{1k}(T), C_{2k}(T), C_{2k}(t_1), \ldots, C_{2k}(t_m)$ в (3.11) можно найти управление $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, удовлетворяющее условию (3.10).

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&H_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin\lambda_k\,(T-\tau) & (-1)^{k+1}\sin\lambda_k\,(T-\tau)\\ \cos\lambda_k\,(T-\tau) & (-1)^{k+1}\cos\lambda_k\,(T-\tau)\\ g_k^{(1)}\,(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(1)}\,(\tau)\\ \cdots & \cdots\\ g_k^{(m)}\,(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(m)}\,(\tau) \end{pmatrix},\\
&C_k(t_1, \ldots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T)\\ C_{2k}(T)\\ C_{2k}(t_1)\\ \vdots\\ C_{2k}(t_m) \end{pmatrix}, \quad U\,(\tau) = \begin{pmatrix} \mu(\tau)\\ \nu(\tau) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Тогда соотношение (3.10) запишется следующим образом

$$
\int\limits_0^T H_k(\tau)U(\tau)d\tau = C_k(t_1, \ldots, t_m, T), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.14}
$$

Следовательно, для нахождения функции $U\,(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получаются бесконечные интегральные соотношения (3.14).

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению таких граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, которые для каждого $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют интегральным соотношениям (3.10) (или (3.14)) и доставляют минимум функционалу (1.6). Задачу оптимального управления при функционале (1.6) с интегральными условиями (3.10) (или (3.14)) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления.

4 Решение задачи

Так как функционал (1.6) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, а интегральные соотношения (3.10) (или (3.14)), порожденные функциями $\mu(t)$ и $\nu(t)$, линейны, то задачу определения оптимального управления для каждого $k = 1, 2, \ldots$ можно рассматривать как проблему моментов [1, 15, 17]. Следовательно, решение можно построить с помощью алгоритма решения проблемы моментов.

На практике обычно выбираются несколько первых n гармоник упругих колебаний и решается задача синтеза управлений, используя методы теории управления конечномерыми системами. Поэтому построим решение задачи (1.6) и (3.10) при $k = 1, 2, \ldots, n$ с помощью алгоритма решения проблемы моментов. Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \ldots, n$) проблемы моментов (1.6) и (3.10), следуя [17], нужно найти величины p_k, q_k, γ_{ik}, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^{n} \left[p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} C_{1k}(t_i) \right] = 1, \tag{4.1}$$

для которых

$$\left(\rho_n^0\right)^2 = \min_{(4.1)} \int\limits_0^T \left[h_{1n}^2(\tau) + h_{2n}^2(\tau) \right] d\tau, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned} h_{1n}(\tau) &= \sum_{k=1}^{n} \left[p_k \sin \lambda_k \left(T - \tau\right) + q_k \cos \lambda_k \left(T - \tau\right) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} g_k^{(i)}(\tau) \right], \\ h_{2n}(\tau) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[p_k \sin \lambda_k \left(T - \tau\right) + q_k \cos \lambda_k \left(T - \tau\right) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} g_k^{(i)}(\tau) \right]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для определения величин p_k^0, q_k^0, γ_{ik}^0, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, минимизирующих (4.2), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$\begin{aligned} f_n = &\int\limits_0^T \left[\left(h_{1n}(\tau)\right)^2 + \left(h_{2n}(\tau)\right)^2 \right] d\tau + \\ &+ \beta_n \left[\sum_{k=1}^{n} \left(p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} C_{1k}(t_i) \right) - 1 \right], \end{aligned}$$

где β_n - неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по p_k, q_k, γ_{ik}, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$ функции f_n и приравнивая к нулю, с учетом обозначения (4.3), (3.12) и присоединяя к полученным уравнениям условие (4.1), получим замкнутую систему $2n+mn+1$ алгебраических уравнений относительно стольких же неизвестных величин p_k, q_k, γ_{ik}, $k = 1, \ldots, n$, $i =$

$1, \ldots, m$ и β_n:

$$\sum_{j=1}^{n} I_j \left[a_{jk} p_j + b_{jk} q_j + \sum_{\alpha=1}^{m} c_{\alpha k}^{(\alpha)} \gamma_{\alpha j}\right] = -\frac{\beta_n}{2} C_{1k}(T),$$

$$\sum_{j=1}^{n} I_j \left[d_{jk} p_j + e_{jk} q_j + \sum_{\alpha=1}^{m} f_{\alpha k}^{(\alpha)} \gamma_{\alpha j}\right] = -\frac{\beta_n}{2} C_{2k}(T), \tag{4.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} I_j \left[a_{jk}^{(i)} p_j + b_{jk}^{(i)}{}_{jk} q_j + \sum_{\alpha=1}^{m} g_{\alpha k}^{(\alpha i)} \gamma_{\alpha j}\right] = -\frac{\beta_n}{2} C_{2k}(t_i),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} C_{2k}(t_i)\right] = 1,$$

$$k = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где

$$a_{jk} = \int_0^T \sin \lambda_j (T-\tau) \sin \lambda_k (T-\tau)\, d\tau, \quad b_{jk} = \int_0^T \cos \lambda_j (T-\tau) \sin \lambda_k (T-\tau)\, d\tau,$$

$$c_{jk}^{(\alpha)} = \int_0^T g_j^{(\alpha)}(\tau) \sin \lambda_k (T-\tau)\, d\tau, \quad d_{jk} = \int_0^T \sin \lambda_j (T-\tau) \cos \lambda_k (T-\tau)\, d\tau,$$

$$e_{jk} = \int_0^T \cos \lambda_j (T-\tau) \cos \lambda_k (T-\tau)\, d\tau, \tag{4.5}$$

$$a_{jk}^{(i)} = \int_0^T \sin \lambda_j (T-\tau)\, g_k^{(i)}(\tau)\, d\tau, \quad b_{jk}^{(i)} = \int_0^T \cos \lambda_j (T-\tau)\, g_k^{(i)}(\tau)\, d\tau,$$

$$f_{jk}^{(\alpha)} = \int_0^T g_j^{(\alpha)}(\tau) \cos \lambda_k (T-\tau)\, d\tau, \quad g_{jk}^{(\alpha i)} = \int_0^T g_j^{(\alpha)}(\tau)\, g_k^{(i)}(\tau)\, d\tau.$$

Пусть величины p_k^0, q_k^0, γ_{ik}^0, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$ и β_n^0, являются решением замкнутой системы алгебраических уравнений (4.4). Тогда, согласно (4.3), (4.2) будем иметь

$$h_{1n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \left[p_k^0 \sin \lambda_k (T-\tau) + q_k^0 \cos \lambda_k (T-\tau) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik}^0 g_k^{(i)}(\tau)\right],$$

$$h_{2n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[p_k^0 \sin \lambda_k (T-\tau) + q_k^0 \cos \lambda_k (T-\tau) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik}^0 g_k^{(i)}(\tau)\right], \tag{4.6}$$

$$
\left(\rho_n^0\right)^2 = \int\limits_0^T \left[\left(h_{1n}^0(\tau)\right)^2 + \left(h_{2n}^0(\tau)\right)^2\right] d\tau.
$$

Следуя [17], оптимальные граничные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ представятся в виде:

$$
\mu_n^0(\tau) = \frac{1}{\left(\rho_n^0\right)^2} h_{1n}^0(\tau), \quad \nu_n^0(\tau) = \frac{1}{\left(\rho_n^0\right)^2} h_{2n}^0(\tau).
$$

Таким образом, оптимальные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$, $\tau \in [0,\, T]$, согласно формулам (3.12) и (4.6), записываются в виде:

$$
\mu_n^0(\tau) = \begin{cases}
\frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right) + \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_{ik}^0 \cos\lambda_k\left(t_i - \tau\right)\right], & 0 \le \tau \le t_1 \\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right) + \sum\limits_{i=2}^{m} \gamma_{ik}^0 \cos\lambda_k\left(t_i - \tau\right)\right], & t_1 < \tau \le t_2 \\
\quad \ldots & \\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right) + \gamma_{mk}^0 \cos\lambda_k\left(t_m - \tau\right)\right], & t_{m-1} < \tau \le t_m \\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right), \quad t_m < \tau \le t_{m+1} = T &
\end{cases}
$$

$$
\nu_n^0(\tau) = \begin{cases}
\frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right) + \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_{ik}^0 \cos\lambda_k\left(t_i - \tau\right)\right], \\
\hfill 0 \le \tau \le t_1 \\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right) + \sum\limits_{i=2}^{m} \gamma_{ik}^0 \cos\lambda_k\left(t_i - \tau\right)\right], \\
\hfill t_1 < \tau \le t_2 \\
\quad \ldots \\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right) + \gamma_{mk}^0 \cos\lambda_k\left(t_m - \tau\right)\right], \\
\hfill t_{m-1} < \tau \le t_m \\
\frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right), \quad t_m < \tau \le t_{m+1} = T
\end{cases}
$$

где $G_k\left(p_k^0,\, q_k^0,\, \lambda_k,\, T,\, \tau\right) = \left[p_k^0 \sin\lambda_k\left(T - \tau\right) + q_k^0 \cos\lambda_k\left(T - \tau\right)\right]$.

Теперь построим функцию прогиба, соответствующую оптимальным управлениям $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$. Подставляя полученные выражения для оптимальных управлений $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ в (3.6), а полученное для $F_k^0(t)$ выражение – в (3.7), получим функцию $V_k^0(t)$, $t \in [0,\, T]$, $k = 1, \ldots, n$. Далее, из формулы (3.1) будем иметь

$$
V_n^0(x,t) = \sum_{k=1}^{n} V_k^0(t) \sin\frac{\pi k}{l} x, \tag{4.7}
$$

а из (2.4) функция $W_n^0(x,t)$ имеет вид

$$W_n^0(x,t) = (\nu_n^0(t) - \mu_n^0(t))\frac{x}{l} + \mu_n^0(t). \tag{4.8}$$

Таким образом, согласно (2.1), для первых n гармоник оптимальная функция прогиба струны $Q_n^0(x,t)$, с учетом (4.7) и (4.8) запишется в виде

$$Q_n^0(x,t) = V_n^0(x,t) + W_n^0(x,t). \tag{4.9}$$

5 Построение решения в случае $m = 1$

Для иллюстрации вышеизложенного предположим, что в граничных условиях (1.3) $Q(l,t) = 0$, $0 \le t \le T$ (т.е. $\nu(t) = 0$), и в промежуточный момент времени t_1 $(0 = t_0 < t_1 < t_2 = T)$ заданы значения скоростей точек струны в виде:

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_1} = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{5.1}$$

В этом случае из формулы (3.6) следует $F_k(t) = -\frac{2a}{\lambda_k l}\ddot{\mu}(t)$, а согласно формулам (3.10) будем иметь следующие интегральные соотношения

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}(T),\\ \int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{2k}(T),\\ \int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(1)}\,(\tau)\,d\tau = C_{2k}(t_1),\end{gathered} \tag{5.2}$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k}\right], \quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k}\right],$$

$$C_{2k}(t_1) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(t_1) + X_{2k}^{(1)}\right].$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(t_1)$ определяются из формулы (3.9), а X_{1k}, X_{2k}, $X_{2k}^{(1)}$ из (3.12).

Применяя вышепредложенный подход, построим оптимальное граничное управление $\mu_n^0(\tau)$ при $n = 1$ (следовательно $k = 1$).

Для определения значения величин p_1, q_1, γ_{11}, и β_1, согласно (4.5) и (4.6), будем иметь следующую систему алгебраических уравнений:

$$a_{11}p_1 + b_{11}q_1 + c_{11}^{(1)}\gamma_{11} = -\frac{\beta_1}{2}C_{11}(T), \quad d_{11}p_1 + e_{11}q_1 + f_{11}^{(1)}\gamma_{11} = -\frac{\beta_1}{2}C_{21}(T),$$
$$a_{11}^{(1)}p_1 + b_{11}^{(1)}q_1 + g_{11}^{(11)}\gamma_{11} = -\frac{\beta_1}{2}C_{21}(t_1), \quad C_{11}(T)p_1 + C_{21}(T)q_1 + C_{21}(t_1)\gamma_{11} = 1 \tag{5.3}$$

где

$$a_{11} = \int\limits_0^T \sin\lambda_1 (T-\tau)\sin\lambda_1 (T-\tau)\, d\tau = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\ \sin 2\lambda_1 T,$$

$$b_{11} = d_{11} = \int\limits_0^T \cos\lambda_1 (T-\tau)\sin\lambda_1 (T-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\lambda_1}\sin^2\lambda_1 T,$$

$$a_{11}^{(1)} = c_{11}^{(1)} = \int\limits_0^T g_1^{(1)}(\tau)\sin\lambda_1 (T-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \sin\lambda_1 T + \frac{t_1}{2}\sin\lambda_1 (T-t_1),$$

$$e_{11} = \int\limits_0^T \cos\lambda_1 (T-\tau)\cos\lambda_1 (T-\tau)\, d\tau = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1}\ \sin 2\lambda_1 T,$$

$$b_{11}^{(1)} = f_{11}^{(1)} = \int\limits_0^T g_1^{(1)}(\tau)\cos\lambda_1 (T-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\lambda_1}\ \sin\lambda_1 t_1 \cos\lambda_1 T + \frac{t_1}{2}\cos\lambda_1 (T-t_1),$$

$$g_{11}^{(11)} = \int\limits_0^T g_1^{(1)}(\tau)\, g_1^{(1)}(\tau)\, d\tau = \frac{t_1}{2} + \frac{1}{4\lambda_1}\ \sin 2\lambda_1 t_1.$$

Для простоты, предположим, что $t_1 = 4\dfrac{l}{a}$, $T = 8\dfrac{l}{a}$. Тогда, с учетом $\lambda_1 = \dfrac{a\pi}{l}$ получим $t_1\lambda_1 = 4\pi$, $T\lambda_1 = 8\pi$, $\lambda_1(T-t_1) = 4\pi$, следовательно, будем иметь

$$a_{11} = e_{11} = \frac{4l}{a}, \quad b_{11} = d_{11} = a_{11}^{(1)} = c_{11}^{(1)} = 0, \quad b_{11}^{(1)} = f_{11}^{(1)} = g_{11}^{(11)} = \frac{2l}{a}.$$

В этом случае решая систему уравнений (5.3) для величин p_1, q_1, γ_{11}, получим

$$p_1^0 = \frac{A}{2}C_{11}(T), \quad q_1^0 = A\left[C_{21}(T) - C_{21}(t_1)\right], \quad \gamma_{11}^0 = -A\left[C_{21}(T) - 2C_{21}(t_1)\right],$$

где

$$A^{-1} = \frac{1}{2}C_{11}^2(T) + C_{21}^2(t_1) + \left[C_{21}(T) - C_{21}(t_1)\right]^2,$$

$$C_{11}(T) = \frac{l}{2a}\left(V_1(T) - V_1(0)\right) + \frac{\varphi_T(0) - \varphi_0(0)}{\lambda_1},$$

$$C_{21}(T) = \frac{l}{2a\lambda_1}\left(\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0)\right) + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0)}{\lambda_1^2},$$

$$C_{21}(t_1) = \frac{l}{2a\lambda_1}\left(\dot{V}_1(t_1) - \dot{V}_1(0)\right) + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0)}{\lambda_1^2}.$$

Следовательно, оптимальное граничное управление $\mu_1^0(\tau)$ записывается в виде:

$$\mu_1^0(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(\rho_1^0)^2}\left[p_1^0 \sin\lambda_1 (T-\tau) + q_1^0 \cos\lambda_1 (T-\tau) + \gamma_{11}^0 \cos\lambda_1 (t_1 - \tau)\right], & 0 \le \tau \le t_1, \\ \frac{1}{(\rho_1^0)^2}\left[p_1^0 \sin\lambda_1 (T-\tau) + q_1^0 \cos\lambda_1 (T-\tau)\right], & t_1 < \tau \le T, \end{cases}$$

где

$$\left(\rho_1^0\right)^2 = \int_0^{t_1} \left[p_1^0 \sin\lambda_1 (T-\tau) + q_1^0 \cos\lambda_1 (T-\tau) + \gamma_{11}^0 \cos\lambda_1 (t_1 - \tau)\right]^2 d\tau +$$

$$+ \int_{t_1}^{T} \left[p_1^0 \sin\lambda_1 (T-\tau) + q_1^0 \cos\lambda_1 (T-\tau)\right]^2 d\tau.$$

Далее, согласно приведенным формулам (4.7)-(4.9), будем иметь

$$Q_1^0(x,t) = V_1^0(x,t) + W_1^0(x,t) = V_1^0(t) \sin\frac{\pi}{l}x + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1^0(t).$$

Заключение

Предложен конструктивный метод построения оптимального граничного управления процессом колебаний однородной струны с заданной скоростью точек струны в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Предложенный подход оптимального граничного управления колебаниями струны, с использованием метода Фурье вместо метода Даламбера, допускает распространение на другие неодномерные колебательные системы.

Литература

[1] Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.

[2] Абдукаримов М.Ф. Об оптимальном граничном управлении смещениями процесса вынужденных колебаний на двух концах струны. ДАН РТ, 2013, т. 56, №8, с. 612-618.

[3] Андреев А.А., Лексина С.В. Задача граничного управления для системы волновых уравнений. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16), с. 5-10.

[4] Гибкина Н.В., Сидоров М.В., Стадникова А.В. Оптимальное граничное управление колебаниями однородной струны. Радиоэлектроника и информатика. Научно-технический журнал ХНУРЭ. 2016, № 2. С. 3-11.

[5] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. Успехи математических наук. 2005. т. 60, вып. 6 (366). с. 89-114.

[6] Моисеев Е.И., Холомеева А.А. Об одной задаче оптимального граничного управления с динамическим граничным условием. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 667-671.

[7] Копец М.М. Задача оптимального управления процессом колебания струны. Теория оптимальных решений. Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2014. С. 32-38.

[8] Барсегян В. Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени. Автоматика и телемеханика. 2020, № 2, 36–47.

[9] Barseghyan V.R. About One Problem of Optimal Control of String Oscillations with Non-separated Multipoint Conditions at Intermediate Moments of Time. In: Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Cham. 2020. pp. 13-25.

[10] Barsegyan V.R. The Problem of Optimal Control of String Vibrations. International Applied Mechanics, Vol. 56, No. 4, 2020, pp. 471-480.

[11] Барсегян В.Р., Саакян М.А. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времении. Известия НАН РА. Механика. 2008. т. 61, № 2. с. 52 – 60.

[12] Барсегян В.Р. Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени. "Аналитическая механика, устойчивость и управление": труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 3. Ч. I. Казань, 13–17 июня 2017г. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 119-125.

[13] Барсегян В.Р., Солодуша С.В. Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени. Вестник российских университетов. Математика. Тамбов, 2020. Т. 25, № 130. с. 131-146.

[14] Barseghyan V.R., Movsisyan L.A. Optimal control of the vibration of elastic systems described by the wave equation. International Applied Mechanics, Vol. 48, № 2, 2012, pp. 234-239.

[15] Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016. 230 с.

[16] Корзюк В.И., Козловская И.С., Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. т. 19, № 1, с. 62–70.

[17] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Сведения об авторе

Барсегян Ваня Рафаелович, доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор ЕГУ, факультет математики и механики.
Тел. (+374 91) 20 32 20 **email**: barseghyan@sci.am

Поступила в редакцию 07.02.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, № 1, 2021 Механика

УДК 539.376 http://doi.org/10.33018/74.1.4

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ГРУНТОВ

Петросян Т. Л.

Ключевые слова: гистерезис, диссипация, ползучесть, периодическое нагружение

Influence of temperature on the dissipative properties of soils

Petrosjan T. L.

Keywords: hysteresis, dissipation, creep, periodic loading

In order to study the effect of temperature changes on the dissipative properties of soils, a certain temperature function is introduced under the integral sign in the equation of the theory of heredity and at the same time takes into account the dependence of the elastic modulus on temperature. As a result, on the basis of experimental data on the thermal creep of soils, an expression was obtained for determining the hysteresis energy losses with periodic voltage changes depending on the temperature change.

Ջերմաստիճանի ազդեցությունը գրունտների դիսիպատիվ հատկությունների վրա

Պետրոսյան Տ .Լ.

Հիմնաբառեր. հիստերեզիս, ցրում, սողք, պարբերական բեռնավորում

Գրունտների դիսիպատիվ հատկությունների ջերմաստիճանից կախվախության ուսումնասիրման նպատակով սողքի ժառանգականության տեսության հավասարման մեջ ինտեգրալի նշանի տակ մտցված է որոշակի ջերմաստիճանային ֆունկցիա և միաժամանակ հաշվի է առնված առաձգականության մոդուլի կախվածությունը ջերմաստրճանից: Արդյունքում գրունտների ջերմոսողքի փորձարարական տվյալների հիման վրա ստացված է պարբերական բեռնավորման ժամանակ, կախված ջերմաստիճանից, հիստերեզիսային էներգետիկ կորուստների որոշման համար արտահայտություն:

В работе с целью исследования влияния изменений температуры на диссипативные свойства грунтов под знак интеграла в уравнении теории наследственности вводится некоторая функция температуры и одновременно учитывается зависимость модуля упругости от температуры. В результате чего на основе экспериментальных данных о термоползучести грунтов получено выражение для определения гистерезисных энергетических потерь при периодических изменениях напряжения в зависимости от изменения температуры.

Введение

Во многих работах ([1 - 4] и др.) при исследовании рассеяния механической энергии и затухания собственных колебаний делается попытка найти связь между рассеянием энергии и параметрами характеристик материала. В работе [5] показано, что рассеяние энергии от цикла к циклу существенно изменяется, а параметры нагружения сильно влияют на величину коэффициента поглощения. В работе [6] на основе данных о ползучести грунта при использовании теории старения и теории наследственности построены петли гистерезиса в сравнении с экспериментальными данными при малоцикловой ползучести, и на примере грунтов показано, что теория наследственности, в общем, может быть рекомендована для описания поглощения энергии. В работе [7] дан анализ зависимости коэффициента поглощения от периода циклических нагружений, степени асимметрии цикла и от номера цикла для материала, деформирующегося согласно линейной теории наследственности. В рассмотренных работах не учитываются условия (температура, влажность, старение и др.), воздействие которых приводит к изменению деформационных и диссипативных свойств материалов.

При проектировании и расчёте конструкций, элементы которых представляют собой материалы с ярко выраженными реологическими свойствами (ползучесть, релаксация напряжений, диссипация), часто возникает необходимость знания о влиянии вышеуказанных условий на поведение материалов.

Можно отметить ряд работ [8, 9, 10], посвящённых экспериментальному исследованию влияния температуры на проч¬ност¬ные и диссипативные свойства металлов, сплавов и полимерных материалов. В них получено, что повышение температуры металлов и сплавов приводит к увеличению коэффициента поглощения, причём, при высоких температурах наблюдаются пики коэффициента Ψ, которые соответствуют различным темпера¬турам для разных металлов. В работе [10] исследовались втулки из полиуретана, выполненные из трёх химических систем, в диапазоне температур от -40^0C до $+60^0C$. Из диаграмм $K = f(T)$ видно, что все исследуемые типы нестабильны по коэффициенту потерь во всем диапазоне температур.

Влияние изменения температуры на поведение материалов обычно исследуют с помощью температурно-временной аналогии [12, 13, 14, 15]. Принцип температурно-временной аналогии состоит в том, что в уравнение состояния вводится приведённое время, которое приводит лишь к изменению масштаба времени, вследствие чего можно рассматривать термореологические тождественные процессы. Анализ вышеприведённых работ показывает, что при исследовании влияния температуры на деформационные свойства материалов с помощью наследственной теории вязкоупругой среды, подобный подход часто оказывается неудобным, поскольку для неизотермических процессов вычисления весьма затруднительны, а для нелинейных процессов фактор температурного сдвига зависит как от температуры, так и от напряжения [12, 13]. Это приводит к введению в определяющие уравнения большого числа неизвестных параметров.

В работе [16] предлагается иной подход к исследованию деформаций наследственных вязкоупругих сред при разных температурах. В определяющее уравнение, предложенное в [17], вводится некоторая функция $f(T)$, после чего уравнение записывается в виде

$$\phi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int\limits_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau) f[T(t), T(\tau)]d\tau$$

где $\phi\,(\varepsilon)$– уравнение кривой мгновенного деформирования.

Согласно данным, приведённым в [16], поведение материала зависит лишь от температуры в данный момент времени. Поэтому, далее функция $f[T(\tau)]$ в уравнении не рассматривается.

Постановка задачи

Целью данной работы является исследование влияния изменений температуры на диссипативные свойства грунтов. Для этого в уравнении теории наследственности под знак интеграла введём некоторую функцию температуры $F[\theta(t)]$ (по аналогии с работой [16]), одновременно учитывая зависимость модуля упругости E от температуры θ [18]. В итоге, основываясь на экспериментальных данных о термоползучести грунтов, должны получить выражение для определения гистерезисных энергетических потерь при периодических изменениях напряжения в зависимости от изменения температуры.

1 Решение

Пусть деформация ползучести при напряжении $\sigma = 1$ (мера ползучести) описывается формулой [19]

$$C(t) = C_0(1 - e^{-\alpha t}) + \nu t, \tag{1.1}$$

где C_0, α и ν – параметры ползучести.

Для описания деформаций при переменных напряжениях $\sigma(t)$, согласно теории наследственности с учётом изменения температуры будем иметь [16,18]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(\theta)} + \int\limits_0^t F[\theta(t)]\sigma(\tau)[C_0\alpha e^{-\alpha(t-\tau)} + \nu]d\tau, \tag{1.2}$$

где $E(\theta)$ – функция зависимости модуля упругости от температуры, $F(\theta)$–функция температуры.

Виды функций $E(\theta)$ и $F(\theta)$, которые использовались в настоящей работе, представлены в работе [20], в которой они были получены при различных фиксированных температурах для глинистых грунтов в рамках исследований мгновенной компрессионной деформации и их модулей и компрессионной термоползучести:

$$E(\theta) = E_0 - \beta\theta, \tag{1.3}$$

$$F(\theta) = \theta^m. \tag{1.4}$$

Соотношение (1.3) получено путём аппроксимации экспериментальной кривой, приведённой в работе [20] (рис.4.1б, стр. 108).

Рассмотрим действие циклического нагружения

$$\sigma(t) = \sigma_0[\sin(\omega t + \phi_0) + \lambda], \tag{1.5}$$

где ω – циклическая частота, ϕ_0 – начальная фаза, λ – постоянная, определяющая степень асимметрии циклического нагружения.

Для определения площади петли гистерезиса, представляющей собой энергию $\Delta W(n)$, рассеянную за один цикл, используется формула [4]

$$\Delta W(n,\theta) = \int\limits_{Tn}^{T(n+1)} \sigma(t)\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}dt, \tag{1.6}$$

где $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ – период цикла, n – номер цикла.

Для определения полной механической энергии $W(n)$, затраченной за один цикл деформирования, используем формулу [6,7]

$$W(n,\theta) = \int\limits_{Tn}^{T(n+\frac{1}{2})} \sigma(t)\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}dt. \tag{1.7}$$

Коэффициент поглощения $\psi(n,\theta)$ определяется [3]

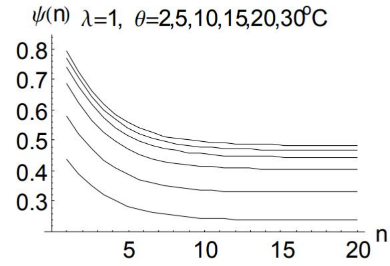
$$\psi(n,\theta) = \frac{\Delta W(n,\theta)}{W(n,\theta)}. \tag{1.8}$$

Используя (1.2), (1.5) и (1.8), согласно теории наследственности, после ряда преобразований получим выражение для $\psi(n,\theta)$ в изотермических условиях при разной температуре:

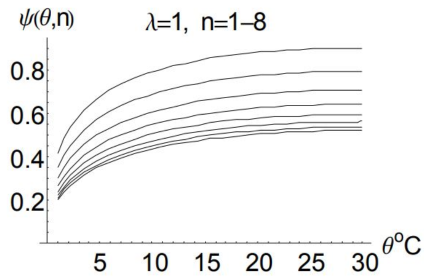
$$\begin{gathered}\psi(n,\theta) = \theta^m\{C_0 e^{-\alpha T n}(1 - e^{-\alpha T})[\frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}(\alpha^2\sin^2\varphi_0 - \omega^2\cos^2\varphi_0) + \\ + \frac{2\lambda\alpha^2\sin\varphi_0}{\alpha^2+\omega^2} + \lambda^2] + \frac{C_0\pi\omega\alpha}{\alpha^2+\omega^2} + \frac{\pi\nu(1+\lambda^2)}{\omega}\}/ \\ /\{\theta^m C_0 e^{-\alpha T n}(\frac{\alpha^2\sin\varphi_0 - \alpha\omega\cos\varphi_0}{\alpha^2+\omega^2} + \lambda)[\frac{\alpha^2\sin\varphi_0 + \alpha\omega\cos\varphi_0}{\alpha^2+\omega^2} \\ (1 + e^{-\alpha T/2}) + \lambda(1 - e^{-\alpha T/2})] - \frac{2\theta^m C_0\lambda}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha^2\sin\varphi_0 - \alpha\omega\cos\varphi_0) + \\ + \frac{\theta^m C_0\alpha\omega\pi}{2(\alpha^2+\omega^2)} + \frac{\nu\theta^m}{\omega}(\frac{\pi}{2} + \lambda^2\pi + 4\lambda\cos\varphi_0) - \frac{2\lambda\sin\varphi_0}{E_0 - \beta\theta}\}\end{gathered} \tag{1.9}$$

Ниже рассматривается графическое представление зависимости коэффициента поглощения ψ от ряда характеристик согласно формуле (1.9) в условиях, когда $\phi_0 = -\pi/2$, $\nu = 0$, при следующих данных, полученных для глины [6,7], $E_0 = 21.5$

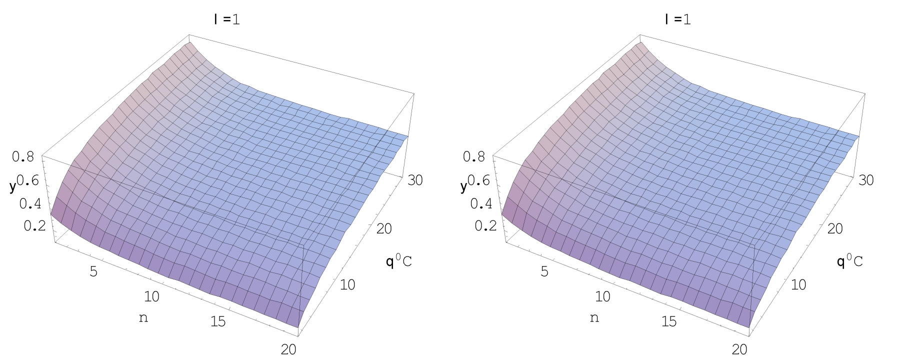
МПа, $\alpha = 0.8 \frac{1}{\text{сут}}$ $C_0 = 0.00955$ и $m = 0.45$.



Фиг. 1: Кривые зависимости $\psi(n, \theta)$ от n при разных температурах θ ($\lambda = 1$)



Фиг. 2: Графики зависимости коэффициента поглощения ψ от температуры θ, при разных циклах нагружениях



Фиг. 3: Поверхности в координатах $\psi - n - \theta$ при разных значениях степени асимметрии λ

На Фиг. 1 в качестве примера приведены графики зависимости коэффициента диссипации ψ от номера цикла n в изотермических условиях при разных температурах, построенные по формуле (1.9) (при $\lambda = 1$).

На Фиг. 2 приведены графики зависимости коэффициента диссипации ψ от температуры θ для разных циклов нагрузки-разгрузки.

На Фиг. 3 приведены поверхности, описывающие зависимость коэффициента ψ от номера цикла n и температуры θ при разных значениях степени асимметрии λ.

Заключение

Как можно заключить из данных, приведённых на фиг. 2 и 3, коэффициент диссипации у глинистого грунта с возрастанием температуры растёт, а чем выше номер цикла нагружения, тем ниже коэффициент диссипации.

Литература

[1] Гурев А.В., Мирошников Э.В. О форме механического гистерезиса и влияние предварительной пластической деформации на рассеяние энергии. Киев: Наукова думка, 1974, с.203-209.

[2] Мицкевич З.А. Исследование внутреннего поглощения в металлах. Изв. высших учебных заведений. М.: Машиностроение, 1961, №6, с.749-756.

[3] Давиденков Н.Н. О рассеянии при вибрациях, ЖТФ АН СССР, 1938, т.8, вып.6, с.483-496.

[4] Шилькрут Д.И. Единая реологическая гипотеза для описания совместного влияния гистерезиса и наследственных явлений на колебательные процессы в невполне упругих систен. Киев: Изд-во АН УССР, 1963, с.93-109.

[5] Петросян Т.Л. Экспериментальное исследование влияния степени асимметрии цикла на формы и площади петли гистерезиса водонасыщенных глинистых грунтов при компрессии. Изв. НАН Армении, Науки о Земле, 1993. Т.46, № 2, с. 60-63.

[6] Петросян Т.Л. Симонян А.М. Исследование гистерезиса при малоцикловой ползучести. Изв. НАН Армении, Механика. 2007. Т.60. №2. С.114-121.

[7] Симонян А.М. Петросян Т.Л. Исследование гистерезисных энергетических потерь в зависимости от характеристик периодического нагружения на базе теории наследственности. Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. №2. С.73-77.

[8] Постников В.С. Температурная зависимость внутреннего трения чистых металлов и сплавов. Успехи физических наук АН СССР. 1958. Т.46, вып.1, с.43-78.

[9] Шаповал Б.И. О внутреннем трении металлов при высоких температурах. Физика металлов и металловедение. 1964. Т. 18. Вып. 2, с.306-308.

[10] Славиков С.В. Совершенствование экспериментального метода исследования диссипативных и прочностных свойств полиуретана. Вестник ПНИПУ. 2013. № 2. С.145-153.

[11] Ферри Дж. Вязкоупругие свойства материалов. Изд. Иностранной литературы. М.: 1963. 535 с.

[12] Максимов Р.Д., Даугсте Ч.Л., Соколов Е.А. Особенности соблюдения температурно-временной аналогии при физически нелинейной ползучести полимерного материала. Механика полимеров. 1974. № 3. С.415-426.

[13] Даугсте Ч.А. Совместное применение температурно-врвменной и напряжённо-временной аналогии для построения обобщённых кривых. Механика полимеров. 1974. №3. С.427-431.

[14] Колтунов М.А., Трояновский И.Е. Условия существования температурно-временной аналогии. Механика полимеров. 1970. № 2. С.217-222.

[15] Ильясов М.Х. Нестационарные вязкоупругие волны. Баку: 2011. 230 с.

[16] Суворова Ю. В. Учёт температуры в наследственной теории упруго-пластических сред. Проблемы прочности. 1977. №2. С.43-48.

[17] Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В. О законе деформирования металлов при одноосном нагружении. МТТ. 1972. №4. С.41-54.

[18] Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

[19] Гарофало Ф. Законы ползучести и длительной прочности металлов. М.: 1968. 304 с.

[20] Месчян С.Р. Реологические процессы в глинистых гринтах (с учётом особых воздействий). Ереван: Изд-во Айастан, 1992. 296 с.

Сведения об авторе

Петросян Тигран Людвикович - к.т.н., научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Тел. (+374 99) 16 50 38 **email**: tlpetrosyan@mail.ru

Поступила в редакцию 09.12.2020.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, № 1, 2021 Механика

УДК 539.3 http://doi.org/10.33018/74.1.5

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ДЕФОРМАЦИОННОЙ КОНЦЕПЦИЕЙ «СДВИГ ПЛЮС ПОВОРОТ»

Саркисян С. О.

Ключевые слова: модель оболочки, моментная теория, деформационная концепция «сдвиг плюс поворот», энергетические теоремы, вариационные принципы

Energy theorems and variation principles of the shell model based on the momental theory of elasticity with the deformation concept “shear plus rotation”

Sargsyan S. H.

Keywords: shell model, moment theory, deformation concept “shear plus rotation”, energy theorems, variation principles

In this paper for the model of a thin shell, which obeys the deformation concept of “shear plus rotation” and which is built using the moment theory of elasticity, energy theorems are proved and variation principles of Lagrange and Castiliano type are established.

«Սահք գումարած պտույտ» դեֆորմացիոն կոնցեպցիայով օժտված մոմենտային առաձգականության տեսությամբ թաղանթների մոդելի էներգետիկ թեորեմները և վարիացիոն սկզբունքներըը

Սարգսյան Ս. Հ.

Հիմնաբառեր. թաղանթի մոդել, մոմենտային տեսություն, «սահք գումարած պտույտ» դեֆորմացիոն կոնցեպցիա, էներգետիկ թեորեմներ, վարիացիոն սկզբունքներ

Աշխատանքում, բարակ թաղանթի այն մոդելի համար, որն օժտված է «սահք գումարած պտույտ» դեֆորմացիոն կոնցեպցիայով և որը կառուցված է առաձգականության մոմենտային տեսության հիման վրա, ապացուցվում են էներգետիկ թեորեմները և հաստատվում են Լագրանժի ու Կաստիլիանոյի տիպի վարիացիոն սկզբունքները:

В работе для модели тонкой оболочки, которая подчиняется деформационной концепции «сдвиг плюс поворот» и которая построена на основе моментной теории упругости, доказываются энергетические теоремы и устанавливаются вариационные принципы типа Лагранжа и Кастилиано.

Введение

Энергетические теоремы, методы и вариационные принципы статики для линейно деформируемых систем составляют основу механики деформируемого твёрдого тела. Эти теоретические разделы в классической теории упругости и строительной механике [1-4] получили всеобщие признания, нашли широкие применения и в теории оболочек и пластин [4-6]. Энергетические теоремы, методы и вариационные принципы установлены также в моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [7]. Важность вариационных принципов стало ясно благодаря развитию метода конечных элементов и, в итоге, они стали мощным средством при математической формулировке этого метода.

В работах [8,9] на основе метода гипотез, который имеет асимптотическое обоснование, построена прикладная модель оболочек в рамках моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» (иначе, эту модель можно назвать также моментно-мембранной моделью оболочек).

В данной работе для указанной моментно-мембранной модели оболочек [8,9] устанавливаются энергетические теоремы и вариационные принципы типа Лагранжа и Кастилиано. На основе вариационного принципа Кастилиано для моментно-мембранной модели оболочек выводятся соотношения неразрывности деформации (условия сплошности и гладкости) срединной поверхности оболочки.

1 Постановка задачи

В работе [8], принимая за основу трёхмерные уравнения моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, формируются гипотезы, которые имеют асимптотическую обоснованность, построена модель оболочки с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» (моментно-мембранная теория оболочек), уравнения которой имеют вид:

Уравнения равновесия

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jT_{ii})}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_iS_{ji})}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}S_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}T_{jj}+\frac{N_{i3}}{R_i}=\\
=-(p_i^+-p_i^-),\\
\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2}=\left(p_3^+-p_3^-\right),\\
\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jL_{ii})}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_iL_{ji})}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}L_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}L_{jj}+\\
+\frac{L_{i3}}{R_i}+(-1)^jN_{j3}=-(m_i^+-m_i^-)+(-1)^jh(p_j^++p_j^-),\\
\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial\alpha_2}-(S_{12}-S_{21})=\\
=(m_3^+-m_3^-),\\
i\neq j=1,2;
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Соотношения упругости

$$
\begin{aligned}
& T_{ii} = \frac{2h}{1-\nu^2}(\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}), \quad S_{ij} = 2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij} + (\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\right], \\
& N_{i3} = 2G^* h\Gamma_{i3}, \quad L_{ii} = 2h\frac{2\gamma}{\beta+2\gamma}[2(\beta+\gamma)k_{ii} + \beta k_{jj}], \\
& L_{ij} = 2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{ij} + (\gamma-\varepsilon)k_{ji}\right], \quad L_{i3} = 2Bhk_{i3}, \\
& \qquad i \neq j = 1, 2;
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Геометрические соотношения

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ii} = {} & \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j + \frac{w}{R_i}, \\
\Gamma_{ij} = {} & \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i + (-1)^i\Omega_3, \\
\Gamma_{i3} = {} & \frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i} + (-1)^j\Omega_j, \\
k_{ii} = {} & \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i}, \ k_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i, \\
k_{i3} = {} & \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, \\
& \qquad i \neq j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Здесь T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}- усилия; L_{ii}, L_{ij}, $L_{i3}-$ моменты от моментных напряжений; Γ_{ii}, Γ_{ij}, $\Gamma_{i3}-$ деформации; k_{ii}, k_{ij}, $k_{i3}-$изгибы-кручения срединной поверхности оболочки; u_i, $w-$перемещения, Ω_i, Ω_3-свободные повороты точек срединной поверхности оболочки; $p_i^{\pm}$, $p_3^{\pm}$, $m_i^{\pm}$, $m_3^{\pm}-$усилия и моменты, приложенные на лицевых поверхностях $(z = \pm h)$ оболочки; A_i, R_i-коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки; α_1, α_2-представляют собой линии главных кривизн срединной поверхности оболочки. Все величины в уравнениях (1.1)-(1.3) являются функциями от (α_1, α_2).

Следует сказать, что когда известны усилия и моменты (T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}), напряжения (σ_{ii}, σ_{ij}, σ_{i3}) и моментные напряжения (μ_{ii}, μ_{ij}, μ_{i3}) будут определяться по формулам [8]:

$$
\sigma_{ii} = \frac{T_{ii}}{2h}, \quad \sigma_{ij} = \frac{S_{ij}}{2h}, \quad \sigma_{i3} = \frac{N_{i3}}{2h},
$$

$$
\mu_{ii} = \frac{L_{ii}}{2h}, \quad \mu_{ij} = \frac{L_{ij}}{2h}, \quad \mu_{i3} = \frac{L_{i3}}{2h},
$$

т.е. они распределены по толщине оболочки равномерным образом (имея в виду эти свойства распределения напряжений и моментных напряжений), прикладная модель моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» была названа также иначе: «прикладная модель моментно-мембранных оболочек».

К системе уравнений (1.1)-(1.3) прикладной модели моментно-мембранных оболочек следует присоединить граничные условия.

На части границы Γ' области срединной поверхности оболочки (S), где заданы усилия и моменты, граничные условия имеют вид (например, для края, совпадающего с координатной линией α_2):

$$\begin{aligned} &T_{11} = T_{11}^*, \quad S_{12} = S_{12}^*, \quad N_{13} = N_{13}^*, \\ &L_{11} = L_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^*, \quad L_{13} = L_{13}^*. \end{aligned} \tag{1.4}$$

На части границы Γ'' области срединной поверхности оболочки (S), где заданы перемещения и свободные повороты, граничные условия будут выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned} &u_1 = u_1^*, \quad u_2 = u_2^* \quad w = w^*, \\ &\Omega_1 = \Omega_1^*, \quad \Omega_2 = \Omega_2^*, \quad \Omega_3 = \Omega_3^*. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Могут иметь место также граничные условия смешанного вида. Таким образом, уравнения (1.1)-(1.3) и граничные условия (1.4), (1.5) представляют собой моментно-мембранной прикладной моделью оболочек. Отметим, что в работе [9] выведены соотношения неразрывности деформаций (соотношения сплошности и гладкости) срединной поверхности моментно-мембранной прикладной модели оболочек.

Теперь, наша цель для моментно-мембранной прикладной модели оболочек (1.1)-(1.5) установить энергетические теоремы и вариационные принципы.

2 Энергетические теоремы

Рассмотрим напряжённое состояние (T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, $i \neq j = 1,2$) и соответствующее ему деформированное состояние (Γ_{ii}, Γ_{ij}, Γ_{i3}, k_{ii}, k_{ij}, k_{i3}, $i \neq j = 1,2$) моментно-мембраной прокладной модели оболочек, которые удовлетворяют основным уравнениям (1.1)-(1.3). Система уравнений равновесия (1.1) состоит из 6-ти уравнений, эти уравнения, умножая, соответственно, на u_1, u_2, w, Ω_1, Ω_2, Ω_3, суммируем полученные выражения и результат интегрируем по области (S) срединной поверхности оболочки, после некоторых преобразований приходим к уравнению закона сохранения энергии (т.е. к теореме типа Клапейрона):

$$\iint\limits_{(S)} W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \frac{1}{2} A_0, \tag{2.1}$$

где W_0– поверхностная плотность потенциальной энергии деформации оболочки, а $\frac{1}{2}A_0$– работа приложенных к оболочке внешних усилий и моментов:

$$\begin{aligned} W_0 = \frac{1}{2}(&T_{11}\Gamma_{11} + T_{22}\Gamma_{22} + S_{12}\Gamma_{12} + S_{21}\Gamma_{21} + N_{13}\Gamma_{13} + N_{23}\Gamma_{23} + \\ &+ L_{11}k_{11} + L_{22}k_{22} + L_{12}k_{12} + L_{21}k_{21} + L_{13}k_{13} + L_{23}k_{23}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$
\begin{aligned}
A_0 = \iint\limits_{(S)} & \left[\left(p_1^+ - p_1^-\right) u_1 + \left(p_2^+ - p_2^-\right) u_2 + \left(p_3^+ - p_3^-\right) w + \right. \\
& + \left(\left(m_1^+ - m_1^-\right) - h\left(p_2^+ + p_2^-\right)\right) \Omega_1 + \left(\left(m_2^+ - m_2^-\right) + h\left(p_1^+ + p_1^-\right)\right) \Omega_2 + \\
& \left. + \left(m_3^+ - m_3^-\right) \Omega_3 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int\limits_{\Gamma} \left[(T_{11}u_1 + S_{12}u_2 + N_{13}w + L_{11}\Omega_1 + \right. \\
& + L_{12}\Omega_2 + L_{13}\Omega_3) A_2 d\alpha_2 - (S_{21}u_1 + T_{22}u_2 + N_{23}w + L_{21}\Omega_1 + \\
& \left. + L_{12}\Omega_2 + L_{23}\Omega_3) A_1 d\alpha_1 \right],
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

где (Г)– контур области срединой поверхности оболочки (S).

Учитывая соотношения упругости (1.2), плотность потенциальной энергии деформации оболочки W_0 можем представить в виде:

$$
\begin{aligned}
W_0 = \frac{1}{2} 2h & \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\nu\Gamma_{11}\Gamma_{22}) + (\mu + \alpha) \left(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2\right) + \right. \\
& + 2(\mu - \alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21} + G^*(\Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2) + \frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta + 2\gamma}(k_{11}^2 + k_{22}^2) + \\
& \left. + \frac{4\gamma\beta}{\beta+2\gamma} k_{11}k_{22} + (\gamma + \varepsilon)(k_{12}^2 + k_{21}^2) + 2(\gamma - \varepsilon)k_{12}k_{21} + B(k_{13}^2 + k_{23}^2) \right],
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

которая из себя представляет положительно определённую квадратичную форму.

На основании закона сохранения энергии (2.1), для модели моментно-мембранных оболочек известным способом можем доказать, что краевая задача (1.1)-(1.5) имеет только единственное решение (т.е. для рассматриваемой модели оболочек имеет место теорема типа Кирхгофа).

Рассмотрим для моментно-мембранной модели (областью S и контуром Г) два состояния равновесия, называемые соответственно I и II, характеризуемые величинами $u_1^I, u_2^I, w^I, \Omega_1^I, \Omega_2^I, \Omega_3^I, T_{11}^I, \ldots, L_{23}^I, \Gamma_{11}^I, \ldots, k_{23}^I$, вызванными усилиями и моментами $(p_1^{I+} + p_1^{I-}), \ldots, (m_3^{I+} + m_3^{I-})$, а также, u_1^{II}, u_2^{II}, w^{II}, Ω_1^{II}, Ω_2^{II}, Ω_3^{II}, $T_{11}^{II}, \ldots, L_{23}^{II}, \Gamma_{11}^{II}, \ldots, k_{23}^{II}$, вызванными усилиями и моментами $(p_1^{II+} + p_1^{II-}), \ldots,$ $(m_3^{II+} + m_3^{II-})$.

Прежде всего справедливо тождество

$$
T_{11}^I\Gamma_{11}^{II} + T_{22}^I\Gamma_{22}^{II} + ... + L_{23}^I k_{23}^{II} = T_{11}^{II}\Gamma_{11}^I + T_{22}^{II}\Gamma_{22}^I + ... + L_{23}^{II}k_{23}^I \tag{2.5}
$$

которое легко можно проверить с помощью применения соотношений упругости (1.2). Формула (2.5) является одной из форм теоремы типа Бетти для рассматриваемой модели оболочек.

Интегрируя равенство (2.5) по области срединной поверхности оболочки (S), после некоторых преобразований, приходим к теореме о взаимности работ (к теореме типа Бетти) для моментно-мембранной модели оболочек:

$$
A_{12} = A_{21}. \tag{2.6}
$$

Если физические соотношения упругости (1.2) будем решать относительно деформаций и изгиб-кручений

$$\begin{gathered}
\Gamma_{ii} = \frac{1}{2Eh}\left(T_{ii} - \nu T_{ji}\right), \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{2h}\left[\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}S_{ij} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}S_{ji}\right], \\
\Gamma_{i3} = \frac{1}{2G^{*}h}N_{i3}, \quad k_{ii} = \frac{1}{2h}\cdot\frac{1}{2\gamma\left(3\beta+2\gamma\right)}\left[2\left(\beta+\gamma\right)L_{ii} - \beta L_{jj}\right], \\
k_{ij} = \frac{1}{2h}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}L_{ij} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}L_{ji}\right], \quad k_{i3} = \frac{1}{2Bh}L_{i3}, \quad i \neq j = 1,2,
\end{gathered} \tag{2.7}$$

плотность потенциальной энергии деформации (2.2) можем выражать через усилия и моменты:

$$\begin{gathered}
\overset{*}{W}_0 = W_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2h}\left\{\frac{1}{E}\left(T_{11}^2 + T_{22}^2\right) - \frac{2\nu}{E}\,T_{11}T_{22} + \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\left(S_{12}^2 + S_{21}^2\right) - \right. \\
- 2\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}S_{12}S_{21} + \frac{1}{G^{*}}\left(N_{13}^2 + N_{23}^2\right) + \frac{2\left(\beta+\gamma\right)}{2\gamma\left(3\beta+2\gamma\right)}\left(L_{11}^2 + L_{22}^2\right) - \\
- \frac{2\beta}{2\gamma\left(3\beta+2\gamma\right)}L_{11}L_{22} + \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(L_{11}^2 + L_{22}^2\right) - \\
\left. - \frac{2\left(\gamma-\varepsilon\right)}{4\gamma\varepsilon}L_{11}L_{22} + \frac{1}{B}\left(L_{13}^2 + L_{23}^2\right)\right\}.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Используя выражение плотности потенциальной энергии деформации (2.4), легко получить формулы типа Грина:

$$T_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial \Gamma_{11}}, \quad T_{22} = \frac{\partial W_0}{\partial \Gamma_{22}}, \quad \ldots, \quad L_{23} = \frac{\partial W_0}{\partial k_{23}}, \tag{2.9}$$

и, наоборот, используя формулу (2.8), легко получить формулы типа Кастилиано:

$$\Gamma_{11} = \frac{\partial \overset{*}{W}_0}{\partial T_{11}}, \quad \Gamma_{22} = \frac{\partial \overset{*}{W}_0}{\partial T_{22}}, \quad \ldots, \quad k_{23} = \frac{\partial \overset{*}{W}_0}{\partial L_{23}}. \tag{2.10}$$

3 Вариационный принцип возможных перемещений типа Лагранжа

Возможные перемещения δu_i, δw и повороты $\delta\Omega_i$, $\delta\Omega_3$ являются произвольными непрерывными функциями точки срединной поверхности оболочки, следствием которых являются возможные деформации $\delta\Gamma_{ii}$, …, $\delta\Gamma_{i3}$ и изгибы-кручения δk_{ii}, …, δk_{i3} (тем самым, они удовлетворяют геометрическим соотношениям (1.3) и условиям неразрывности срединной поверхности [9], кроме того, они находятся в согласии с кинематическими связями, наложенными на оболочку.

Для деформированной оболочки (область срединной поверхности (S) с граничным контуром $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$), находящейся в равновесии, справедливы уравнения равновесия (1.1) и граничные условия на Γ. Уравнения равновесия соответственно умножим на δu_1, δu_2, δw, $\delta\Omega_1$, $\delta\Omega_2$, $\delta\Omega_3$, полученные уравнения сложим, результат проинтегрируем по (S), после некоторых преобразований приходим к уравнению:

$$
\begin{aligned}
&\delta \iint_{(S)} W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \iint_{(S)} \left[(p_1^+ - p_1^-)\delta u_1 + \ldots + \right. \\
&+ \left. (m_3^+ - m_3^-)\delta\Omega_3 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
&+ \int\limits_{\Gamma'} \left[(T_{11}\delta u_1 + \ldots + L_{13}\delta\Omega_3) A_2 d\alpha_2 - (S_{21}\delta u_1 + \ldots + L_{23}\delta\Omega_3) A_1 d\alpha_1 \right]
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

на Γ'', где заданы перемещения и независимые повороты, возможные перемещения и повороты равны нулю. Здесь,

$$
\begin{aligned}
\delta \iint\limits_{(S)} W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \iint\limits_{(S)} & (T_{11}\delta\Gamma_{11} + T_{22}\delta\Gamma_{22} + S_{12}\delta\Gamma_{12} + S_{21}\delta\Gamma_{21} + \\
& + N_{13}\delta\Gamma_{13} + N_{23}\delta\Gamma_{23} + L_{11}\delta k_{11} + L_{22}\delta k_{22} + L_{12}\delta k_{12} + \\
& + L_{21}\delta k_{21} + L_{13}\delta k_{13} + L_{23}\delta k_{23})\, A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Уравнение (3.1) выражает принцип возможных перемещений Лагранжа для моментно-мембранной модели оболочек. По этому принципу, для деформируемой оболочки, находящейся в состоянии равновесия, полная возможная работа внешних сил и моментов, равна возможной работе внутренних усилий и моментов на любых кинематически допустимых перемещениях и свободных поворотах. Отметим, что из вариационного уравнения будут следовать уравнения движения оболочки (1.1) и граничные условия (1.4) на контуре Γ', где заданы внешние усилия и моменты. Так как усилия и моменты, которые действуют в точках области (S) и на контуре Γ'-этой области, нам заданы и, следовательно, не варьируются, тогда уравнение (3.1) можно переписать в форме

$$
\delta\Pi_0 = 0,
\tag{3.3}
$$

где Π_0 есть потенциальная энергия всей системы:

$$
\begin{aligned}
\Pi_0 = & \iint\limits_{(S)} W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \iint\limits_{(S)} \left[(p_1^+ - p_1^-)\, u_1 + \ldots + (m_3^+ - m_3^-)\, \Omega_3 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \int\limits_{\Gamma'} \left[(T_{11} u_1 + \ldots + L_{13}\Omega_3) A_2 d\alpha_2 - (S_{21} u_1 + \ldots + L_{23}\Omega_3) A_1 d\alpha_1 \right].
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Вариационное уравнение (3.3) будет выражать принцип стационарности полной потенциальной энергии, который гласит: из всех допустимых перемещений и свободных поворотов, удовлетворяющих заданными граничными условиями на Γ'', истинные перемещения и свободные повороты, которые соответствуют состоянию равновесия оболочки, доставляют полной потенциальной энергии стационарное значение или короче: если деформируемая оболочка находится в равновесии, то полная потенциальная энергия имеет стационарное значение. Взяв вторую вариацию Π_0, можем показать, что в рассматриваемом нами случае потенциальная энергия имеет минимальное значение ($\Pi_0' > \Pi_0$). Т.е. в случае устойчивого равновесия оболочки стационарное значение полной потенциальной энергии соответствует минимуму. Это составляет принцип минимума полной потенциальной энергии для моментно-мембранной модели оболочек.

Указанный минимальный принцип имеет большое значение прежде всего потому, что он лежит в основе важных приближённых и численных методов решения соответствующих граничных задач, в частности, при развитии метода конечных элементов.

4 Вариационный принцип типа Кастилиано

Геометрические соотношения (1.3) моментно-мембранной модели оболочек перепишем так:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{ii} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j + \frac{w}{R_i}\right) = 0,\\
&\Gamma_{ij} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i + (-1)^i\Omega_3\right) = 0,\\
&\Gamma_{i3} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i} + (-1)^j\Omega_j\right) = 0,\\
&k_{ii} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i}\right) = 0,\\
&k_{ij} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i\right) = 0,\\
&k_{i3} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}\right) = 0,\ i \neq j = 1,2.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Предположим, что усилия и моменты в оболочке испытывают малые вариации от положения равновесия (δT_{ii}, δS_{ij}, δN_{i3}, δL_{ii}, δL_{ij}, δL_{i3}). Тогда можем написать равенство:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{(S)} \left\{\left[\Gamma_{11} - \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_2 + \frac{w}{R_1}\right)\right]\delta T_{11} + \ldots +\right.\\
&\left.+\left[k_{23} - \left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\Omega_2}{R_2}\right)\right]\delta L_{23}\right\} A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 +\\
&+\int\limits_{\Gamma''}\left[\left(u_1 - \overset{0}{u}_1\right)\delta T_{11} + \left(u_2 - \overset{0}{u}_2\right)\delta S_{12} + \left(w - \overset{0}{w}\right)\delta N_{13} +\right.\\
&\left.+\left(\Omega_1 - \overset{0}{\Omega}_1\right)\delta L_{11} + \left(\Omega_2 - \overset{0}{\Omega}_2\right)\delta L_{12} + \left(\Omega_3 - \overset{0}{\Omega}_3\right)\delta L_{13}\right] A_2 d\alpha_2 -
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$-\int\limits_{\Gamma''}\left[\left(u_1-\overset{0}{u}_1\right)\delta S_{21}+\left(u_2-\overset{0}{u}_2\right)\delta T_{22}+\left(w-\overset{0}{w}\right)\delta N_{23}+\right.$$
$$\left.+\left(\Omega_1-\overset{0}{\Omega}_1\right)\delta L_{21}+\left(\Omega_2-\overset{0}{\Omega}_2\right)\delta L_{22}+\left(\Omega_3-\overset{0}{\Omega}_3\right)\delta L_{23}\right]A_1 d\alpha_1=0,$$

которое после интегрирования по частям переходит в соотношение

$$\begin{gathered}
\iint\limits_{(S)}\left\{(\Gamma_{11}\delta T_{11}+\Gamma_{22}\delta T_{22}+...+k_{23}\,\delta L_{23})+\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\,(A_2\delta T_{11})}{\partial\alpha_1}++\right.\right.\\
\left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1\delta S_{ji})}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\delta S_{12}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\delta T_{22}+\frac{\delta N_{13}}{R_1}\right]u_1+\\
+\ldots+\left[-\frac{\delta L_{11}}{R_1}-\frac{\delta L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\,(A_2\delta L_{13})}{\partial\alpha_1}+\right.\\
\left.\left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1\delta L_{23})}{\partial\alpha_2}-(\delta S_{12}-\delta S_{21})\right]\Omega_3\right\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2-\\
-\int\limits_{\Gamma'}[\,(u_1\delta T_{11}+u_2\delta S_{12}+w\delta N_{13}+\Omega_1\delta L_{11}+\Omega_2\delta L_{12}+\Omega_3\delta L_{13})\,A_2d\alpha_2-\\
-(u_1\delta S_{21}+u_2\delta T_{22}+w\delta N_{23}+\Omega_1\delta L_{21}+\Omega_2\delta L_{22}+\Omega_3\delta L_{23})A_1d\alpha_1\,]-\\
-\int\limits_{\Gamma''}[(\overset{0}{u}_1\delta T_{11}+\overset{0}{u}_2\delta S_{12}+\overset{0}{w}\delta N_{13}+\overset{0}{\Omega}_1\delta L_{11}+\overset{0}{\Omega}_2\delta L_{12}+\overset{0}{\Omega}_3\delta L_{13})A_2d\alpha_2-\\
-(\overset{0}{u}_1\delta S_{21}+\overset{0}{u}_2\delta T_{22}+\overset{0}{w}\,\delta N_{23}+\overset{0}{\Omega}_1\delta L_{21}+\overset{0}{\Omega}_2\delta L_{22}+\overset{0}{\Omega}_3\delta L_{23})A_1\;d\alpha_1]=0.
\end{gathered}\tag{4.3}$$

Выберём теперь виртуальные усилия и моменты так, чтобы уравнения равновесия и граничные условия в усилиях и моментах не нарушались, а именно: чтобы виртуальные усилия и моменты удовлетворяли однородным уравнениям равновесия (1.1) в (S) и однородным граничным условиям (1.4) на Γ'. Тогда (4.3) сводится к равенству

$$\begin{gathered}
\delta\iint\limits_{(S)}\overset{*}{W}_0A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2=\\
=\int\limits_{\Gamma''}[(\overset{0}{u}_1\delta T_{11}+\overset{0}{u}_2\delta S_{12}+\overset{0}{w}\delta N_{13}+\overset{0}{\Omega}_1\delta L_{11}+\overset{0}{\Omega}_2\delta L_{12}+\overset{0}{\Omega}_3\delta L_{13})A_2d\alpha_2-\\
-(\overset{0}{u}_1\delta S_{21}+\overset{0}{u}_2\delta T_{22}+\overset{0}{w}\,\delta N_{23}+\overset{0}{\Omega}_1\delta L_{21}+\overset{0}{\Omega}_2\delta L_{22}+\overset{0}{\Omega}_3\delta L_{23}\,)A_1d\alpha_1]\,,
\end{gathered}\tag{4.4}$$

где

$$\begin{gathered}
\delta\iint\limits_{(S)}\overset{*}{W}_0A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2=\iint\limits_{(S)}(\Gamma_{11}\delta T_{11}+\Gamma_{22}\delta_{22}+\Gamma_{12}\delta S_{12}+\Gamma_{21}\delta S_{21}+\\
+\Gamma_{13}\delta N_{13}+\Gamma_{23}\delta N_{23}+k_{11}\delta L_{11}+k_{22}\delta L_{22}+k_{12}\delta L_{12}+k_{21}\delta L_{21}+\\
+k_{13}\delta L_{13}+k_{23}\delta L_{23})\,A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2.
\end{gathered}\tag{4.5}$$

Уравнение (4.4) перепишем в следующем виде:

$$\delta\overset{*}{\Pi}_0 = 0, \qquad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned}
\overset{*}{\Pi}_0 = &\iint\limits_{(S)} \overset{*}{W}_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
&- \int\limits_{\Gamma''} \Bigg[\left(\overset{0}{u}_1 T_{11} + \overset{0}{u}_2 S_{12} + \overset{0}{w} N_{13} + \overset{0}{\Omega}_1 L_{11} + \overset{0}{\Omega}_2 L_{12} + \overset{0}{\Omega}_3 L_{13} \right) A_2 d\alpha_2 - \\
&- \left(\overset{0}{u}_1 S_{21} + \overset{0}{u}_2 T_{22} + \overset{0}{w} N_{23} + \overset{0}{\Omega}_1 L_{21} + \overset{0}{\Omega}_2 L_{22} + \overset{0}{\Omega}_3 L_{23} \right) A_1 d\alpha_1 \Bigg].
\end{aligned} \qquad (4.7)$$

Выражение (4.7) представляет собой полную дополнительную потенциальную энергию системы.

Теперь, вариационное уравнение (4.6) можем представить как принцип стационарности полной дополнительной потенциальной энергии: из всех усилий и моментов, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, т.е. которые соответствуют истинному деформированному состоянию оболочки, сообщают полной дополнительной потенциальной энергии стационарное значение.

На основании этого принципа можно известным образом заключить, что в случае устойчивого равновесия, стационарное значение $\overset{*}{\Pi}_0$ соответствует минимуму. Это и есть принцип типа Кастилиано для моментно-мембранной модели оболочек.

Литература

[1] Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.-Л.: ГИТТЛ. 1947. 464с.

[2] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872с.

[3] Розин Л.А. Теоремы и методы статики деформируемых систем Л.: Изд-во Ленинградского ун-та. 1986. 276 с.

[4] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

[5] Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью. Киев: Ноукова думка. 1973. 248 с.

[6] Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне. 1988. 284 с.

[7] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon. 1986. 383p.

[8] Саркисян С.О. Тонкие оболочки по моментной теории упругости как деформационные модели наноматериалов. Доклады НАН Армении. 2020. Т.120. № 4. С. 239-248.

[9] Саркисян С.О. Соотношения неразрывности деформаций срединной поверхности моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот». Изв. НАН Армении. Механика. 2020. Т.73. № 4. С.48-57.

Сведения об авторе

Саркисян Самвел Оганесович- член-корреспондент НАН РА, доктор физмат. наук, профессор. Ширакский государственный университет.
Тел. (+374 93) 15 16 98 **email**: s_sargsyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 03.02.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

Մեխանիկա Volume 74, Issue 1, 2021 Mechanics

UDC 517.934 http://doi.org/10.33018/74.1.6

HYBRID CONTROL OF LINEAR MODEL OF AN UNMANNED AERIAL VEHICLE CARRYING A PENDULUM

Shahinyan A. S.

Keywords: dynamical Systems, Control, Optimal Stabilization, Quadcopter UAV

Гибридное управление линейной модели беспилотнлвго летательнвго аппарата, несущего маятника

Шагинян А. С.

Ключевые слова: Динамические системы, управление, оптимальная стабилизация, квадрокоптер БЛА

Проблемы управления беспилотниками имеют важное теоретическое и прикладное назначение. В этой статье рассматривается задача управления беспилотного ЛА, когда под ним находится маятник. Представлена динамика как БПЛА, так и маятника. После линеаризации модели в системе применяется новый гибридный метод управления для решения задачы управления. Полученные результаты, то есть управляющие воздействия и фазовые траектории, показаны в виде графиков, которые были сгенерированы из виртуального моделирования.

Ճոճանակ կրող անօդաչու թռչող սարքի գծային մոդելի հիբրիդային ղեկավարում

Շահինյան Ա. Ս.

Հիմնաբառեր.դինամիկ համակարգեր, ղեկավարում, օպտիմալ ստաբիլացում, քառաթև ԱԹՍ

Անօդաչու թռչող սարքերի ղեկավարման խնդիրներն ունեն կարևոր տեսական և կիրառական նշանակություն: Աշխատանքում դիտարկվում է քառաթև անօդաչու թռչող սարքի ղեկավարման խնդիրը, երբ այն կրում է իրենից կախված ճոճանակ: Ներկայացված է և՛ ԱԹՍ-ի, և՛ ճոճանակի դինամիկան: Բերված հավասարումների գծային մոտավորության համար կիրառված է նոր՝ հիբրիդային ղեկավարման եղանակ և լուծված է համակարգի ղեկավարման խնդիրը: Ստացված են ղեկավարող ազդեցությունները և փազային հետագծերը: Կառուցված են դրանց գրաֆիկները:

Control problems of UAVs have important applications in both science and life. In this paper a control problem of UAV is considered when it has a pendulum hanging from it. The dynamics of both UAV and the pendulum is presented. After linearizing the model, a novel hybrid method of control is applied to the system to solve the control problem. The results we gained i.e. the control inputs and state trajectories are shown in form of graphs which were generated from virtual simulations.

1 Introduction

Control problems of UAVs have important applications in both science and life. The history of UAVs, the examination and the research about the UAVs is thoroughly discussed in [1]. In this paper dynamics of a UAV is considered alongside with a pendulum hanging below from the UAV. The dynamics of the pendulum is presented with respect to the UAV and then both models are combined into one. After linearizing the model, a novel hybrid method of control is applied to the system to solve the control problem.

The hybrid model we applied is as follows. We first stabilize optimally the pendulum using the motion of the UAV as control inputs and then we use the optimal stabilizing control inputs to drive the UAV-Pendulum system to a desired position.

The results we gained i.e., the control inputs and state trajectories are shown in form of graphs which were generated from virtual simulations. The results are compared with the case when an inverted pendulum is sticked to the top of the UAV. Used energy is calculated for same values for both cases (UAV with inverted pendulum and UAV with hanging pendulum) and it is shown that in the case when the pendulum is inverted the energy cost is almost two times as high as in the case when the pendulum is hanging down from the UAV.

2 Modelling of the System

To derive the pure theoretical dynamics of a UAV let us fix a coordinate system . Let be the origin. We will also need another coordinate system fixed in the center of mass of the UAV (Figure 1). The torques and forces generated by each of the propellers are shown in the Figure 1. The propellers are numbered 1 to 4 [2].

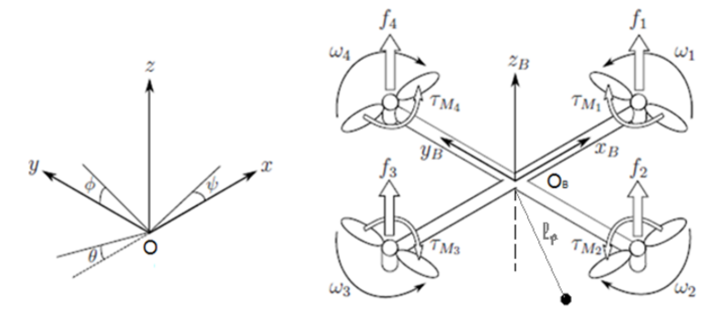


Figure 1

Let $\xi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ be the coordinates of the center of mass of the UAV with respect to the system $Oxyz$. As mentioned above, the center of the mass of the UAV coincides with the origin of the coordinate system $O_B x_B y_B z_B$. Let us describe the inclined position of the UAV about the point O_B using yaw, pitch and roll angles. Let Φ be the pitch angle, Θ be the roll angle and, finally, let Ψ be the yaw angle.

Then we will have two vectors describing the position of the UAV. Those are the following:

$$\xi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T, \qquad \eta = \begin{pmatrix} \Phi & \Theta & \Psi \end{pmatrix}^T \tag{1}$$

In the coordinate system the linear velocities $\bar{V}_B$ and the angular velocities $\bar{\upsilon}$ are the following

$$\bar{V}_B = \begin{pmatrix} V_{Bx} & V_{By} & V_{Bz} \end{pmatrix}^T, \qquad \bar{\upsilon} = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^T \tag{2}$$

In this setup we will have the dynamics of the system as given below [2; 3].

$$\begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{T}{M} c_\Psi s_\Theta c_\Phi + \frac{T}{M} s_\Psi s_\Phi, \ \ddot{y} = \frac{T}{M} s_\Psi s_\Theta c_\Phi - \frac{T}{M} c_\Psi s_\Phi, \ \ddot{z} = -g + \frac{T}{M} c_\Theta c_\Phi, \\ \dot{\Phi} = p + \frac{s_\Phi s_\Theta}{c_\Theta} q + \frac{c_\Phi s_\Theta}{c_\Theta} r, \ \dot{\Theta} = c_\Phi q - s_\Phi r, \ \dot{\Psi} = \frac{s_\Phi}{c_\Theta} q + \frac{c_\Phi}{c_\Theta} r, \\ \dot{p} = \frac{(I_{yy} - I_{zz}) qr}{I_{xx}} - I_r \frac{q}{I_{xx}} \omega_\Gamma + \frac{\tau_\Phi}{I_{xx}}, \ \dot{q} = \frac{(I_{zz} - I_{xx}) pr}{I_{yy}} - I_r \frac{p}{I_{yy}} \omega_\Gamma + \frac{\tau_\Theta}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{(I_{xx} - I_{yy}) pq}{I_{zz}} - I_r \frac{q}{I_{zz}} \omega_\Gamma + \frac{\tau_\Psi}{I_{zz}} \end{array} \tag{3}$$

where the following notations are used:

$$C_\alpha := \cos\alpha, \ S_\alpha := \sin\alpha, M = m_{UAV} + m_P$$

$$\tau_B = \begin{pmatrix} \tau_\Phi \\ \tau_\Theta \\ \tau_\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk\left(-\omega_2^2 + \omega_4^2\right) \\ lk\left(-\omega_1^2 + \omega_3^2\right) \\ \sum_i \tau_i \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$T = \sum_i F_i = \sum_i k\omega_i^2, \ \ \vec{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & T \end{pmatrix}^T$$

As for the mathematical model of the pendulum we will consider its dynamics in the coordinate system $O_B x_B y_B z_B$. So, the dynamics of the pendulum will be as shown below. [4]

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}_p = \frac{1}{\left(L^2 - y_p^2\right)\zeta^2} \left(-x_p^4 \ddot{x} - \left(L^2 - y_p^2\right)\ddot{x} - 2x_p^2 \left(y_p \dot{x}_p \dot{y}_p - \left(L^2 - y_p^2\right)\ddot{x}\right) + \right. \\ +x_p^3 \left(\dot{y}_p^2 + y_p \ddot{y}_p + \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right) + x_p \left(-L^2 y_p \ddot{y}_p + y_p^3 \ddot{y}_p + y_p^2 \left(\dot{x}_p^2 + \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right) + \right. \\ \left. \left. + \ L^2 \left(-\dot{x}_p^2 - \dot{y}_p^2 - \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right)\right)\right) \\ \ddot{y}_p = \frac{1}{\left(L^2 - x_p^2\right)\zeta^2} \left(-y_p^4 \ddot{y} - \left(L^2 - x_p^2\right)\ddot{y} - 2y_p^2 \left(x_p \dot{x}_p \dot{y}_p - \left(L^2 - x_p^2\right)\ddot{y}\right) + \right. \\ +y_p^3 \left(\dot{x}_p^2 + x_p \ddot{x}_p + \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right) + \\ \left. +y_p \left(-L^2 x_p \ddot{x}_p + x_p^3 \ddot{x}_p + x_p^2 \left(\dot{y}_p^2 + \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right) + L^2 \left(-\dot{x}_p^2 - \dot{y}_p^2 - \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right)\right)\right) \end{array} \right. \tag{5}$$

Using the formula of center of mass of a system

$$\bar{X}_C = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2}$$

where $\bar{r}_1 = \bar{\xi} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ and $\bar{r}_2 = \bar{r}_p = \begin{pmatrix} x + x_p & y + y_p & z - \xi \end{pmatrix}^T$, we can find the coordinates of center of mass of our UAV-Pendulum system in the coordinate system $Oxyz$. Let $m_1 = m_2 = 1$, then we will have

$$\begin{cases} x_c = x + \frac{1}{2}x_p \\ y_c = y + \frac{1}{2}y_p \\ z_c = z - \frac{1}{2}\sqrt{l_p^2 - x_p^2 - y_p^2} \end{cases}$$

To get the state space model of the UAV-Pendulum system we introduce the notations as shown below

$$\begin{aligned} &x_1 = x_c,\ x_2 = \dot{x}_c,\ x_3 = y_c,\ x_4 = \dot{y}_c,\ x_5 = z_c,\ x_6 = \dot{z}_c,\ x_7 = \Phi,\ x_8 = \Theta, \\ &x_9 = \Psi,\ x_{10} = p,\ x_{11} = q,\ x_{12} = r,\ x_{13} = x_p,\ x_{14} = \dot{x}_p,\ x_{15} = y_p,\ x_{16} = \dot{y}_p \end{aligned} \tag{6}$$

We linearize the dynamics around the origin of the fixed coordinate system. So, we finally get.

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = \tfrac{g}{2l_p}x_{13},\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = \tfrac{g}{2l_p}x_{15},\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = u_1,\ \dot{x}_7 = x_{10}, \\ &\dot{x}_8 = x_{11},\ \dot{x}_9 = x_{12},\ \dot{x}_{10} = \tfrac{u_2}{I_{xx}} - \tfrac{g}{I_{xx}}x_{15},\ \dot{x}_{11} = \tfrac{u_3}{I_{yy}} - \tfrac{g}{I_{yy}}x_{13},\ \dot{x}_{12} = \tfrac{u_4}{I_{zz}}, \\ &\dot{x}_{13} = x_{14},\ \dot{x}_{14} = -gx_8 - \tfrac{g}{l_p}x_{13},\ \dot{x}_{15} = x_{16},\ \dot{x}_{16} = gx_7 - \tfrac{g}{l_p}x_{15} \end{aligned} \tag{7}$$

where $u_1 = \frac{T}{M} - g$, $u_2 = \tau_\Phi$, $u_3 = \tau_\Theta$, $u_4 = \tau_\Psi$.
Using Kalman's rule one can check that the system (7) is fully controllable. So, now we are in a point where we can define the problem and we can go ahead to show the way we solved it.

3 Problem Definition

Given the system (7), the initial position of the system $x_1(0) = x_{1,0}, x_3(0) = x_{3,0}, x_5(0) = x_{5,0}$ and the final position $x_1(t_1) = x_{1,1}, x_3(t_1) = x_{3,1}, x_5(t_1) = x_{5,1}$, find control inputs u_1, u_2, u_3 such that it drives the system from the given initial position to the given final.

As one can notice this control problem is not an optimal control problem.

Solution: Our approach to the problem solution was the following. First, we ensure that the pendulum remains at its lower equilibrium position. We do this by applying optimal control input stabilizers inside the coordinate system $O_B x_B y_B z_B$. And after we know that the pendulum will remain stable (will not oscillate with respect to the UAV) we proceed to the control problem. Let us now define a subproblem of optimal stabilization for the subsystem

$$\begin{cases} \dot{x}_{13} = x_{14} \\ \dot{x}_{14} = -gu_5 - \frac{g}{l_p}x_{13} \\ \dot{x}_{15} = x_{16} \\ \dot{x}_{16} = gu_6 - \frac{g}{l_p}x_{15} \end{cases} \tag{8}$$

Note that here we use the notation

$$\begin{cases} x_8 = u_5 \\ x_7 = u_6 \end{cases} \tag{9}$$

Now the subproblem will be the defined as follows.

4 Problem Definition

Given the system (8), the initial position of the system $x_i(0) = x_{i,0},\ i = \overline{13, 16}$, find control inputs $u^0 = \begin{pmatrix} u_5^0 & u_6^0 \end{pmatrix}^T$ such that it drives the system from the given initial position to asymptotically stable position while minimizing the linear quadratic regulator

$$J[\bullet] = \int_0^\infty \left(x_{14}^2 + x_{16}^2 + u_5^2 + u_6^2\right) d\tau$$

Solution: Notice that the system (8) can be divided into two subsystems which are

$$\begin{cases} \dot{x}_{13} = x_{14} \\ \dot{x}_{14} = -\frac{g}{l_p} x_{13} - g u_5 \end{cases} \tag{8.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{15} = x_{16} \\ \dot{x}_{16} = -\frac{g}{l_p} x_{15} + g u_6 \end{cases} \tag{8.2}$$

With optimality constraints

$$J[\bullet] = \int_0^\infty \left(x_{14}^2 + u_5^2\right) d\tau \text{ and } J[\bullet] = \int_0^\infty \left(x_{16}^2 + u_6^2\right) d\tau$$

respectively. We will show the solution steps for one of the systems (say (8.1)) as both of them are solved absolutely identically.

We choose to solve the optimal stabilization problem by using Lyapunov-Bellman method. In general, the method says that the optimal control input has to satisfy the optimization equation as given below

$$\min_u \left(\nabla V(x)(Ax + Bu) + \left(x^T Q x + u^T R u\right)\right) = 0 \tag{10}$$

Where

$$\mathfrak{B}[\bullet] = \nabla V(x)(Ax + Bu) + \left(x^T Q x + u^T R u\right) \tag{11}$$

(11) is Bellman's expression for the linear time-invariant control systems. So, in our case for the system (8.1) we will have

$$\mathfrak{B}[\bullet] = \frac{\partial V}{\partial x_{13}} x_{14} + \frac{\partial V}{\partial x_{14}} \left(-\frac{g}{l_p} x_{13} - g u_5\right) + x_{14}^2 + u_5^2 \tag{12}$$

It is obvious that the value of u_5^0 which optimizes (10) is the extremum of (12). Thus, we will have

$$u_5^0 = \frac{g}{2} \frac{\partial V}{\partial x_{14}} \tag{13}$$

By substituting (13) back into (12) we get the following.

$$\frac{\partial V}{\partial x_{13}}x_{14}-\frac{g}{l_p}x_{13}\frac{\partial V}{\partial x_{14}}-\frac{g^2}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x_{14}}\right)^2+x_{14}^2=0 \tag{14}$$

Here $V=V\left(x_{13},x_{14}\right)$ is the Lyapunov function for the system (8.1) and we search for it in the form

$$V=\frac{1}{2}\left(c_{11}x_{13}^2+2c_{12}x_{13}x_{14}+c_{22}x_{14}^2\right) \tag{15}$$

Putting (15) into (14) we get an equation which have the form

$$\begin{aligned}&\left(c_{11}x_{13}+c_{12}x_{14}\right)x_{14}-\frac{g}{l_p}\left(c_{12}x_{13}+c_{22}x_{14}\right)x_{13}-\\&-\frac{g^2}{4}\left(c_{12}x_{13}+c_{22}x_{14}\right)^2+x_{14}^2=0\end{aligned} \tag{16}$$

From (16) the following system of algebraic equations will follow

$$\begin{cases}-\frac{g}{l_p}c_{12}-\frac{g^2}{4}c_{12}^2=0\\ c_{12}-\frac{g^2}{4}c_{22}^2+1=0\\ c_{11}-\frac{g}{l_p}c_{22}-\frac{g^2}{2}c_{12}c_{22}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_{11}=\frac{2}{l_p}\\ c_{12}=0\\ c_{22}=\frac{2}{g}\end{cases} \tag{17}$$

Where the shown solutions are the ones which make $V=V\left(x_{13},x_{14}\right)$ positive definite. Finally, to get $u_5^0=u_5^0\left(x_{13},x_{14}\right)$ we put (17) into (15) and put what we get into (13). That gives us

$$u_5^0=x_{14} \tag{18}$$

To obtain $u_5^0=u_5^0\left(t\right)$ we simply need to substitute (18) into (8.1) and integrate the system. Under the initial conditions

$$x_{13}\left(0\right)=0.5,\ \ x_{14}\left(0\right)=0$$

we will get

$$u_5^0=\frac{0.5\left(\mathrm{e}^{\frac{\left(-gl_p-\sqrt{gl_p}\sqrt{-4+gl_p}\right)t}{2l_p}}-\mathrm{e}^{\frac{\left(-gl_p+\sqrt{gl_p}\sqrt{-4+gl_p}\right)t}{2l_p}}\right)\sqrt{g}}{\sqrt{l_p}\sqrt{-4+gl_p}} \tag{19}$$

Taking the exact same steps for the system (8.2) we will get $u_6^0=-x_{16}$, and finally $u_6^0=u_6^0\left(t\right)$ which will be.

$$u_6^0=-\frac{0.5\left(\mathrm{e}^{\frac{\left(-gl_p-\sqrt{gl_p}\sqrt{-4+gl_p}\right)t}{2l_p}}-\mathrm{e}^{\frac{\left(-gl_p+\sqrt{gl_p}\sqrt{-4+gl_p}\right)t}{2l_p}}\right)\sqrt{g}}{\sqrt{l_p}\sqrt{-4+gl_p}} \tag{20}$$

Under the initial conditions $x_{15}\left(0\right)=0.5,\ \ x_{16}\left(0\right)=0.$

5 Back to Core Problem

Now, that we have the solution for the subproblem, we can proceed to our main problem. Recall that the control inputs in the sub problem which are $u_5^0 = u_5^0\,(t)$ and $u_6^0 = u_6^0\,(t)$ are actually x_7 andx_8 in the system (7). In that case one can notice that two subsystems of (7) can be simply integrated. Those subsystems are the following.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g}{2l_p} x_{13} \\ \dot{x}_8 = x_{11} \\ \dot{x}_{11} = \frac{u_3}{I_{yy}} - \frac{g}{I_{yy}} x_{13} \end{cases} \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{g}{2l_p} x_{15} \\ \dot{x}_7 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = \frac{u_2}{I_{xx}} - \frac{g}{I_{xx}} x_{15} \end{cases} \tag{7.2}$$

As we already have $x_7 = x_7\,(t)$ and $x_8 = x_8\,(t)$ we can simply derive $x_{11} = x_{11}\,(t)$ from system (7.1) and $x_{10} = x_{10}\,(t)$ from system (7.2). As for $x_i = x_i\,(t)\,,\ i = \overline{1,4}$ we will obtain by integrating $\dot{x}_2 = \frac{g}{2l_p} x_{13}$ and $\dot{x}_4 = \frac{g}{2l_p} x_{15}$ under the consideration of desired edge conditions. As a result, we will have the desired state trajectories of the UAV and the control inputs $u_2 = u_2\,(t)$ and $u_3 = u_3\,(t)$ which will drive the system through the desired trajectories. Of course, those control inputs are not optimal because of the absence of constraint.

Only the first of the remaining two subsystems of (7) which are

$$\begin{cases} \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = u_1 \end{cases} \tag{7.3}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_9 = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \frac{u_4}{I_{zz}} \end{cases} \tag{7.4}$$

are discussed in this paper. The reason is that the second subsystem will have trivial solution for in the scope of this problem and, hence will not affect the energy spent for the control process. What refers to the subsystem (7.3) is that it describes the movement of the system along Z-axis. We will assume the system goes up the Z-axis with a constant speed for simplicity.

6 Simulating the Results

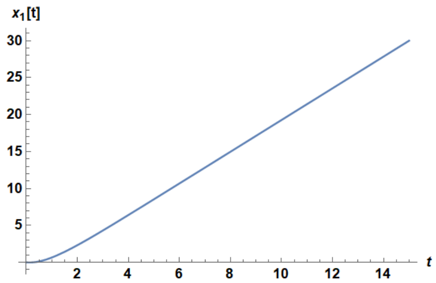
We have chosen to check the theoretical result of this paper by simulating the motion of the UAV and recording state trajectories in form of graphs with time being the independent variable. For the simulation purposes the following values have been chosen for the parameters.

$$g = 9.81\ m\ s^{-2}, \quad l_p = 1\ m, \quad I_{xx} = I_{yy} = 0.4856\ Kgm^2 \tag{21}$$

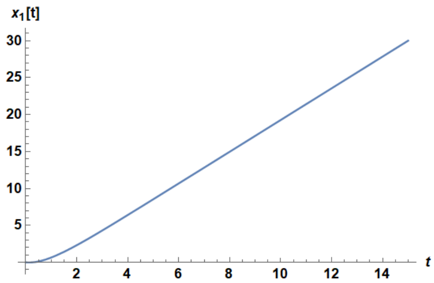
As for the initial and final positions of the system we have chosen the following values.

$$x_1(0) = 0, x_3(0) = 0, x_5(0) = 0, x_6(0) = 1\ x_1(15) = 30, x_3(15) = 30, x_5(15) = 15$$

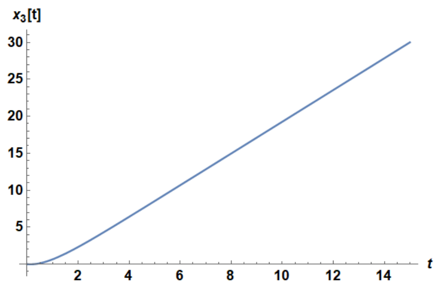
Finally, we are ready to present the graphs describing the motion of the quadcopter (shown below).



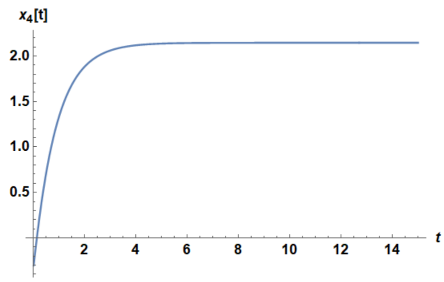
(a) The trajectory of $x_1(t)$



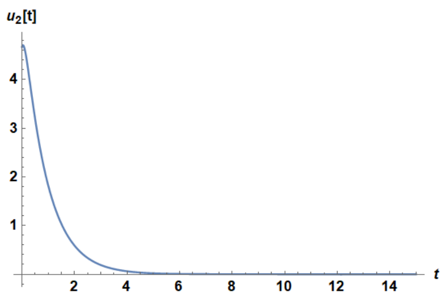
(b) The trajectory of $x_2(t)$



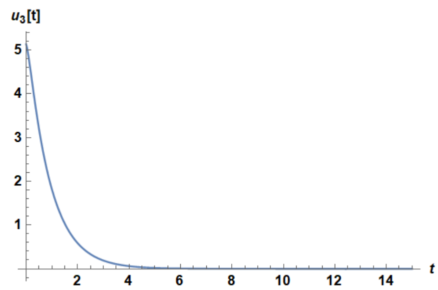
(a) The trajectory of $x_3(t)$



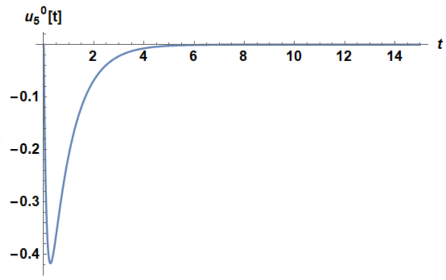
(b) The trajectory of $x_4(t)$



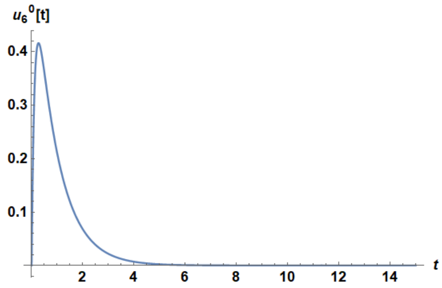
(a) The graph of $u_2(t)$



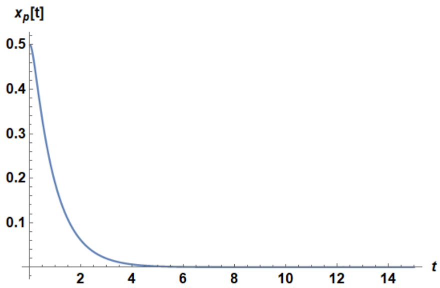
(b) The graph of $u_3(t)$



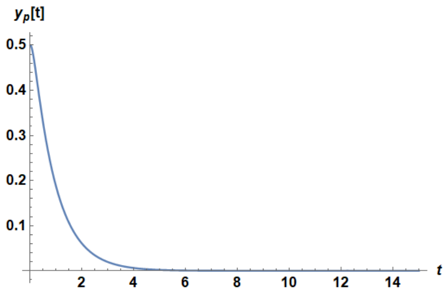
(a) The graph of $u_5^0\,(t)$



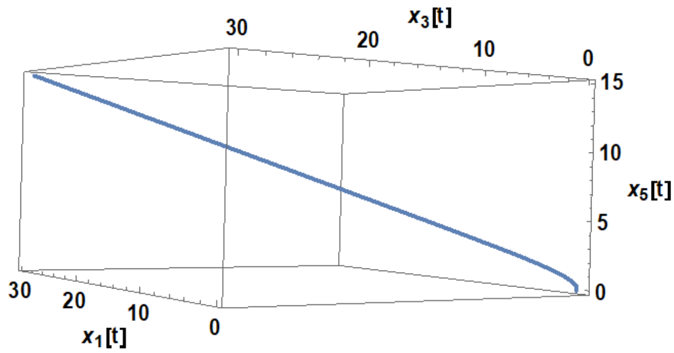
(b) The graph of $u_6^0\,(t)$



(a) Trajectory of pendulum along x-axis on the coordinate system $Oxyz$



(b) Trajectory of pendulum along y-axis on the coordinate system $Oxyz$



The real Trajectory of the UAV in 3D Space.

Now, that we have seen a numerical example, we can proceed to compare the results with another case scenario that is when the UAV carries an inverted pendulum. Namely we are interested in comparing the energy usage in both cases. For the case of current paper, we can calculate energy usage using the energy integral as shown below

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{16} x_i^2 + \sum_{j=1}^{4} u_j^2 \right) dt = 9699.85 \text{ units.} \tag{22}$$

As for the other case scenario we can use the result of [1] to calculate the amount of energy used. Using again the energy integral we will have

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{16} x_i^2 + \sum_{j=1}^{4} u_j^2 \right) dt = 18427.4 \text{ units.} \tag{23}$$

So, we see that the energy consumed for controlling the UAV with a pendulum hanging underneath is almost twice as easy as in the case when the UAV carries the pendulum inverted on its top. Of course, this result was expected and it is quite natural, that we have this huge difference.

Conclusion

The dynamics of the pendulum is presented with respect to the UAV and then both models are combined into one. The model is then linearized and the control problem is solved using proposed hybrid method, which means, we first stabilized optimally the pendulum using the motion of the UAV as control inputs and then we used the optimal stabilizing control inputs to drive the UAV-Pendulum system to a desired position. The results we gained are shown in form of graphs which were generated from virtual simulations. Then, we calculated the energy spent during the control process for the same values of parameters for both cases: when the UAV carries an inverted pendulum on top of it and when the UAV carries a pendulum hanging down from it. It is shown that the amount of energy used to control the UAV with an inverted pendulum is almost twice the energy used to control the UAV with a hanging pendulum.

References

[1] Shahinyan A.S., Hybrid control of a motion of an unmanned aerial vehicle, carrying an inverted pendulum. Proceedings of NAS RA, Mechanics, Vol. 73, №2, 2020, pp. 69-78.

[2] Luukkonen T., Modelling and Control of Quadcopter. School of Science, Mat-2.4108, Independent Research project in applied mathematics, Espoo, August 22, 2011, 26 p.

[3] Buchholz, N.N., The Main Course of Theoretical Mechanics, M.: the Science, h. 2, 1972, 332p. [in Russian].

[4] Hehn, Markus and D'Andrea, Raffaello. (2011). A flying inverted pendulum. Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation. 763-770. 10.1109/ICRA.2011.5980244.

[5] Bouabdallah S, editor. Design and control of quadrotor with application to autonomous flying [dissertation]. École Polytechnique Fédérale de Lausanne; 2007.

Information about authors

Arman Smbat Shahinyan, PhD candidate in mechanics, Yerevan State University, Faculty of Mathematics and Mechanics
Tel. (+374 55) 66 37 41, **email**: a.s.shahinyan@gmail.com

Received 03.02.2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, №1, 2021 Механика

ЛАВРЕНТИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ МОВСИСЯН

12 октября 2020 года скончался известный учёный-механик, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении Мовсисян Лаврентий Александрович.

Мовсисян Л.А. родился 24 октября 1933г. в с. Арачадзор НКР в семье учителей. Духовные ценности и высокие моральные принципы, присущие жизнедеятельности сельской интеллигенции, оказали определяющее влияние на формирование мировоззрения юбиляра. После окончания школы в 1951г. поступил на физико-математический факультет Ереванского Государственного Университета. По завершению учёбы в 1956г. направлен на работу в Институт математики и механики АН Арм.ССР, где началась его научная деятельность в области механики деформируемых сред. В 1959г. продолжил учёбу в аспирантуре Института машиноведения АН Украинской ССР (г.Харьков), которую закончил представлением к защите кандидатской диссертации в 1962г. С 1963г. – кандидат технических наук, с 1975г. – доктор технических наук. В 1985г. присуждено звание профессора. Под его научным руководством подготовлены и защищены 5 кандидатских диссертаций. Долгие годы занимался преподавательской работой по подготовке молодых специалистов-механиков на факультете математики и механики ЕГУ. Является автором более 150 научных публикаций в различных академических журналах и научных сборниках как в Армении, так и за рубежом.

Круг научных интересов Л.А.Мовсисяна был широк и разнообразен. Его исследования посвящены, в основном, развитию теории пластин и оболочек. Им был поставлен и решён вопрос рационального использования возможностей материала (анизотропии) цилиндрической оболочки, а именно, определение тех ориентаций главных направлений упругости, при которых получается наименьший прогиб или наибольшая критическая сила, а также наибольшие собственные частоты. Предложенный подход в дальнейшем был применён к практическим задачам проектирования оболочек из композитов. Исследованы нестационарные вынужденные колебания ортотропной цилиндрической оболочки, когда демпфирование происходит согласно законам Фохта и Сорокина, а также задачи устойчивости стержней и цилиндрических изотропных и ортотропных оболочек при ударных нагружениях с различными граничными условиями.

Совместно с А.Г.Багдоевым рассматривались задачи устойчивости распространения ударных волн и волн модуляций в нелинейно-упругих и геометрически нелинейных пластинах и оболочках. При этом нелинейная упругость была взята степенной по Каудереру, а геометрическая нелинейность – по теории Кармана. В геометрически нелинейной пластине пренебрежение продольным инерционным членом приводит к устойчивости волнового пакета, в то время как при его учёте волновой пакет всегда неустойчив. В различных постановках исследовалась плоская задача о распространении полубесконечной трещины в изотропной вязкоупругой среде, когда на её берегах заданы постоянные нормальные напряжения.

Последние публикации посвящены, в частности, исследованию задач оптимального управления колебаниями упругих, термоупругих и вязкоупругих систем. В этих задачах управление осуществляется через внешние распределённые воздействия или через граничные условия при условии минимума квадратичного функционала, заданного для произвольного интервала времени.

Научная общественность Армении и редакция журнала "Известия НАН Армении. Механика"глубоко скорбят по поводу тяжёлой утраты профессора Лаврентия Александровича Мовсисяна. Светлая память о Л.А.Мовсисяне навсегда сохранится в наших сердцах.