

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԿԱՐԵՄԻԱՅԻ ՏԵԴԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2020

ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ
СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ И
ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ
НАГРУЗОК

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: динамическая смешанная задача, трещина, включение, межфазные дефекты, стационарные колебания.

Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L., Amirjanyan H.A.

Plane stress state of an elastic compound plane with interfacial cracks and inclusions under the influence of dynamic loads

Keywords: dynamic mixed boundary value problem, inclusion, crack, interphase defects, vibrations.

This paper considers the plane stress state of piecewise-homogeneous elastic planes from two heterogeneous half-planes with absolutely rigid thin inclusions and cracks located on the interface line. It is assumed that the plane is deformed under the action of a periodically changing concentrated loads acting on inclusions and static distributed loads applied to the crack faces and preventing their closure. In the beginning, discontinuous solutions of the equations of motion of the plane theory of elasticity for the composite plane are constructed to obtain the singular integral equations of governing system of the stated problem. The solution of the governing equations, in the case when a piecewise homogeneous plane contains only one inclusion and one crack, is constructed by the method of mechanical quadrature. The numerical calculation is carried out. Behaviors of amplitudes of stress jumps, intensity coefficients, crack openings and the angle of rotation of inclusions depending on the frequency of the forced vibrations are determined.

Հակոբյան Վ.Ն., Դաշտոյան Լ.Լ., Ամիրջանյան Ա.Ա.

Միջֆազային ճաքեր և ներդրակներ պարունակող բաղադրյալ առաձգական հարթության հարթ
դեֆորմացիոն վիճակը դինամիկ բեռների ազդեցության տակ

Հիմնաբառեր. դինամիկ խառը եզրային խնդիր, ներդրակ, ճաքեր, միջֆազային դեֆեկտ. տատանումներ

Դիտարկված է երկու տարբեր կիսահարթություններից կազմված կտոր առ կտոր համասեռ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն պարունակում է միջֆազային ճաքեր և բացարձակ կոշտ բարակ ներդրակներ: Ենթադրվում է, որ կտոր առ կտոր համասեռ հարթությունը դեֆորմացվում է ներդրակների վրա կիրառված ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող կենտրոնացած բեռների և ճաքերի ափերին կիրառված ու նրանց փակումը արգելափակող նորմալ բաշխված ստատիկ բեռների ազդեցության տակ: Սկզբում կառուցվել են առաձգականության տեսության հարթ խնդրի շարժման հավասարումների խզվող լուծումները, որոնց հիման վրա ստացվել է դիտարկվող խնդրի որոշիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը: Այն դեպքում, երբ կտոր առ կտոր հարթությունը պարունակում է մեկ ներդրակ և մեկ ճաք, որոշիչ հավասարումների լուծումը կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի օգնությամբ: Կատարված է թվային հաշվարկ: Որոշված են լարումների թռիչքների մոդուլների, ինտենսիվության գործակիցների բացարձակ մեծությունների, ճաքի բացվածքի և ներդրակի պտտման անկյան փոփոխման օրինաչափությունները կախված ստիպողական տատանումների հաճախությունից:

Рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости из двух разнородных полуплоскостей, содержащих межфазные трещины и абсолютно жёсткие тонкие включения. Считается, что кусочно-однородная плоскость деформируется под воздействием периодически изменяющихся во времени сосредоточенных нагрузок, приложенных к включениям, и статических нормальных распределённых нагрузок, приложенных к берегам трещин и не допускающих их закрытие. Сначала построены разрывные решения уравнений движения плоской теории упругости для составной плоскости, на основе которых получены определяющие сингулярные интегральные уравнения поставленной задачи. Решение определяющих уравнений, в случае, когда кусочно-однородная плоскость содержит только одно включение и одну трещину, построено методом механических квадратур. Проведён численный расчёт. Определены закономерности изменения модулей амплитуд скачков напряжений, абсолютной величины коэффициентов интенсивности, раскрытия трещины и угла поворота включений в зависимости от частоты вынужденных колебаний.

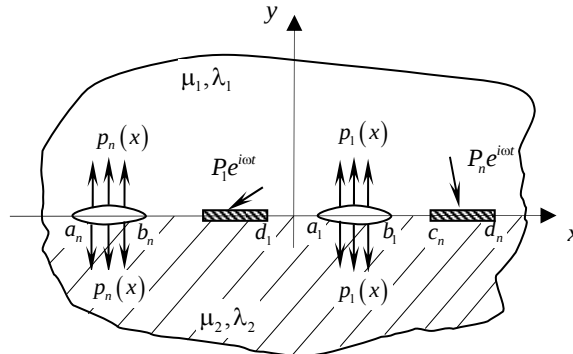
Введение

Динамические смешанные и контактные задачи всегда были и остаются одним из развивающихся и актуальных с практической точки зрения направлений математической теории упругости. Изучению динамического напряжённо-деформированного состояния массивных однородных или составных деформируемых тел, содержащих концентраторы напряжений различного типа посвящено много работ. Многие основополагающие результаты в этом направлении приведены в монографиях [1-3]. В развитие этого направления механики деформируемого твёрдого тела большой вклад внесла российская школа механиков. Академиком РАН В.А.Бабешко и его учениками был поставлен и решён ряд двумерных и трёхмерных задач в этом направлении. Ими разработаны и предложены эффективные методы решения динамических задач для слоистых сред с межфазными дефектами [4-7]. Укажем также на монографию [8], где приведены решения многих плоских и пространственных динамических контактных задач, представляющих практический интерес. Однако, мало работ, где изучено взаимовлияние концентраторов напряжений различного типа, одновременно находящихся в массивных однородных или составных телах, что является актуальной проблемой как с точки зрения сейсмологии, так и сейсмостойкого строительства, сейсморазведки и дефектоскопии. Отметим работы [9-13], где построены решения некоторых антиплоских и плоских задач для составного полупространства и однородной плоскости, одновременно содержащих концентраторы напряжений различного типа и непосредственно связаны с настоящей работой.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть составная упругая плоскость из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламэ μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2 соответственно, отнесённая к декартовой системе Oxy , ось Ox которой направлена по линии стыка полуплоскостей, по линиям $L_1 = \bigcup_{j=1}^N (a_j, b_j)$ и $L_2 = \bigcup_{j=1}^M (c_j, d_j)$, состоящих из конечного числа непересекающихся конечных интервалов, содержит системы межфазных трещин и абсолютно жёстких тонких включений соответственно. Будем считать, что составная плоскость деформируется под воздействием периодически изменяющихся во

времени с частотой ω сосредоточенных нагрузок $P_j e^{i\omega t}$ ($j = 1 \div M$), приложенных к включениям в точках $x_0^{(j)}$ и составляющих угол α_j с осью Oy , а также под воздействием статических нормальных распределенных нагрузок $p_j(x)$ ($j = 1 \div N$), приложенных к берегам трещин и не допускающих их закрытие



Фиг. 1

В рамках линейной теории упругости поставленную задачу можно представить в виде суммы двух задач, в одной из которых составная плоскость деформируется только статическими нормальными распределёнными нагрузками, приложенными к берегам трещин, а во второй – только под воздействием динамических нагрузок, приложенных к включениям. Так как первая из этих задач решена [14], то мы рассмотрим только вторую задачу. Снабдив характерные величины для разнородных полуплоскостей соответственно индексами 1 и 2, поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0, t) = \sigma_y^{(2)}(x, 0, t) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0, t) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0, t) \\ u_1(x, 0, t) = u_2(x, 0, t) \\ v_1(x, 0, t) = v_2(x, 0, t) \end{cases} \quad (x \notin L_1 \cup L_2) \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(j)}(x, 0, t) = \tau_{xy}^{(j)}(x, 0, t) = 0 & (x \in L_j; j = 1, 2) \\ u_j(x, 0, t) = u_m e^{i\omega t} & (c_m < x < d_m; j = 1, 2) \\ v_j(x, 0, t) = (v_m + \delta_m x) e^{i\omega t} & (c_m < x < d_m; j = 1, 2) \end{cases} \quad (1b)$$

где $u_j(x, y, t)$ и $v_j(x, y, t)$ ($j = 1, 2$) – горизонтальные и вертикальные смещения верхней и нижней полуплоскостей соответственно, удовлетворяющие уравнениям

движения, а $\sigma_y^{(j)}(x, y, t)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y, t)$ – компоненты напряжения в этих полуплоскостях, связанные со смещениями известными формулами, u_m и v_m ($m = 1 - M$), соответственно, горизонтальные и вертикальные составляющие жёстких смещений включений, а δ_m – углы поворота включений.

Чтобы построить решение граничной задачи (1) сначала по формулам $f(x, y, t) = f(x, y)e^{i\omega t}$ перейдём к амплитудам искомых функций и введём в рассмотрение амплитуды неизвестных функций разности смещений точек берегов трещин $u(x)$, $v(x)$ и безразмерных скачков напряжений на длинных сторонах включений $\sigma(x)$, $\tau(x)$:

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) - u_2(x, 0) &= u(x) & (x \in L_1) \\ v_1(x, 0) - v_2(x, 0) &= v(x) & (x \in L_1) \\ [\sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0)] / \mu_1 &= \sigma(x) & (x \in L_2) \\ [\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0)] / \mu_1 &= \tau(x) & (x \in L_2) \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, решим вспомогательную задачу, состоящую из условий (1а), (2) и определим амплитуды компонент напряжений и смещений на линии стыка полуплоскостей $y = 0$ через введённые функции. Для этого решения уравнений Лямэ для амплитуд смещений представим в виде следующих интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} u_j(x, y) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ k v_*^{(j)} A_j(k) e^{(-1)^j \chi_1^{(j)} y} - (-1)^j \frac{\chi_2^{(j)}}{k} B_j(k) e^{(-1)^j \chi_2^{(j)} y} \right\} e^{-ikx} dk; \\ v_j(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (-1)^{j+1} v_*^{(j)} \chi_1^{(j)} A_j(k) e^{(-1)^j \chi_1^{(j)} y} + B_j(k) e^{(-1)^j \chi_2^{(j)} y} \right\} e^{-ikx} dk. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда компоненты амплитуд напряжений будут даваться формулами:

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(j)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\lambda_j - 2\mu_j v_*^{(j)} \left(\chi_1^{(j)} \right)^2 \right] A_j e^{(-1)^j \chi_1^{(j)} y} + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^j 2\mu_j \chi_2^{(j)} B_j e^{(-1)^j \chi_2^{(j)} y} \right\} e^{-ikx} dk; \\
\tau_{xy}^{(j)}(x, y) &= -\frac{i\mu_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2(-1)^{j+1} k v_*^{(j)} \chi_1^{(j)} A_j e^{(-1)^j \chi_1^{(j)} y} + \right. \\
&\quad \left. + \left[k + \left(\chi_2^{(j)} \right)^2 / k \right] B_j e^{(-1)^j \chi_2^{(j)} y} \right\} e^{-ikx} dk.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\chi_i^{(j)} &= \sqrt{k^2 - \left(\omega / c_i^{(j)} \right)^2}; \quad v_*^{(j)} = \left(c_1^{(j)} / \omega \right)^2, \quad \eta_n = \left(\omega / k c_2^{(n)} \right)^2; \\
\chi_m^{(n)} &= |k| \alpha_{m,n}; \quad \alpha_{1,n} = \sqrt{1 - \eta_n}; \quad \alpha_{2,n} = \sqrt{1 - \eta_n}; \quad (m, n = 1, 2).
\end{aligned}$$

а $c_i^{(j)}$ ($i, j = 1, 2$) – скорости распространения упругих волн в соответствующих полуплоскостях. При этом, выбраны те ветви функций $\chi_i^{(j)}(k)$ ($i, j = 1, 2$), которые на бесконечности ведут себя как $|k|$, чем и обеспечивается исчезновение напряжений на бесконечности и однозначность обратного преобразования Фурье [15]

Используя приведённые соотношения для амплитуд смещений и напряжений, удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи и определим неизвестные коэффициенты A_j и B_j ($j = 1, 2$) через трансформанты Фурье неизвестных амплитуд функций скачков напряжений и смещений. Затем, подставляя полученные значения коэффициентов A_j, B_j ($j = 1, 2$) в формулы (3) и (4), напишем разрывные решения уравнений движения плоской теории упругости для составной плоскости, выразив напряжения и смещения при помощи неизвестных амплитуд функций скачков. Приведём выражения компонентов амплитуд напряжений и смещений на линии стыка разнородных полуплоскостей $y = 0$, которые нам пригодятся в дальнейшем:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_y^{(2)}(x,0)}{\mu_2} &= l_1 \sigma(x) - l_3 u'(x) + \int_{L_2} K_{11}(s-x) \sigma(s) ds + \\
&+ \frac{l_2}{\pi} \int_{L_2} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \int_{L_2} K_{12}(s-x) \tau(s) ds - \int_{L_1} K_{13}(s-x) u'(s) ds + \\
&+ \frac{l_4}{\pi} \int_{L_1} \frac{v'(s) ds}{s-x} + \int_{L_1} K_{14}(s-x) v'(s) ds;
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{xy}^{(2)}(x,0)}{\mu_2} &= l_1 \tau(x) + l_3 v'(x) - \int_{L_2} K_{21}(s-x) \sigma(s) ds - \\
&- \frac{l_2}{\pi} \int_{L_2} \frac{\sigma(s) ds}{s-x} + \int_{L_2} K_{22}(s-x) \tau(s) ds + \frac{l_4}{\pi} \int_{L_1} \frac{u'(s) ds}{s-x} + \\
&+ \int_{L_1} K_{23}(s-x) u'(s) ds + \int_{L_1} K_{24}(s-x) v'(s) ds;
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
u'_2(x,0) &= -l_5 \sigma(x) + l_7 u'(x) - \int_{L_2} K_{31}(s-x) \sigma(s) ds - \\
&\frac{l_6}{\pi} \int_{L_2} \frac{\tau(s) ds}{s-x} - \int_{L_1} K_{32}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L_1} K_{33}(s-x) u'(s) ds - \\
&- \frac{l_8}{\pi} \int_{L_1} \frac{v'(s) ds}{s-x} - \int_{L_1} K_{34}(s-x) v'(s) ds;
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
v_2(x,0) &= l_5 \tau(x) + l_7 v'(x) - \frac{l_6}{\pi} \int_{L_2} \frac{\sigma(s) ds}{s-x} - \\
&- \int_{L_2} K_{41}(s-x) \sigma(s) ds + \int_{L_2} K_{42}(s-x) \tau(s) ds + \\
&+ \frac{l_8}{\pi} \int_{L_1} \frac{u'(s) ds}{s-x} + \int_{L_1} K_{43}(s-x) u'(s) ds + \int_{L_1} K_{44}(s-x) v'(s) ds.
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0) + \mu_1 \sigma(x); \\
\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) + \mu_1 \tau(x); \\
u_1(x, 0) &= u_2(x, 0) + u(x); \\
v_1(x, 0) &= v_2(x, 0) + v(x).
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь введены обозначения :

$$\begin{aligned}
K_{ij}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{Q_{i,j}(k)}{\Delta(k)} e^{ikx} dk; \quad Q_{1,1}(k) = g_{1,1} - \Delta l_1; \quad \eta_m = (\omega / k c_2^{(m)})^2 \\
Q_{1,2}(k) &= -i(g_{2,2} - \Delta l_2 \operatorname{sgn}(k)); \quad Q_{1,3}(k) = g_3 - \Delta l_3; \\
Q_{1,4}(k) &= -i(g_{4,2} - \Delta l_4 \operatorname{sgn}(k)); \quad Q_{2,1}(k) = -i(g_{2,1} - \Delta l_2 \operatorname{sgn}(k)); \\
Q_{2,2}(k) &= g_{1,2} - \Delta l_1; \quad Q_{2,3}(k) = -i(g_{4,1} - \Delta l_4 \operatorname{sgn}(k)); \\
Q_{2,4}(k) &= g_3 - \Delta l_3; \quad Q_{4,4}(k) = g_{7,2} - \Delta l_7; \\
Q_{3,1}(k) &= Q_{4,2}(k) = g_5 - \Delta l_5; \quad Q_{3,2}(k) = -i(g_{6,2} - \Delta l_6 \operatorname{sgn}(k)); \\
Q_{3,3}(k) &= g_{7,1} - \Delta l_7; \quad Q_{3,4}(k) = -i(g_{8,2} - \Delta l_8 \operatorname{sgn}(k)); \\
Q_{4,1}(k) &= -i(g_{6,1} - \Delta l_6 \operatorname{sgn}(k)); \quad Q_{4,3}(k) = -i(g_{8,1} - \Delta l_8 \operatorname{sgn}(k)); \\
\Delta &= \left(\mu^2 R_{0,1} R_{2,2} + R_{0,2} R_{2,1} - \mu \left(2R_{1,1} R_{1,2} + \frac{1}{4} \eta_1 \eta_2 (\alpha_{1,2} \alpha_{2,1} + \alpha_{1,1} \alpha_{2,2}) \right) \right); \\
d_i &= (-1)^i (1 + \mu) + \theta_i (1 - \mu); \quad l_1 = (1 + \theta_1 \theta_2 + (1 + \theta_1)(1 - \theta_2)\mu) / d_1 d_2; \\
l_2 &= (\theta_1 + \theta_2) / d_1 d_2; \quad l_3 = (\theta_2 (1 - \theta_1) - \mu \theta_1 (1 - \theta_2)) / d_1 d_2; \\
l_4 &= ((1 - \theta_1) + \mu (1 - \theta_2)) / d_1 d_2; \quad l_5 = (\theta_1 (1 + \theta_2) - \mu \theta_2 (1 + \theta_1)) / d_1 d_2; \\
l_6 &= ((1 + \theta_2) + \mu (1 + \theta_1)) / d_1 d_2; \quad l_7 = ((1 + \theta_1 \theta_2)\mu + (1 - \theta_1)(1 + \theta_2)) / d_1 d_2; \\
l_8 &= -\mu (\theta_1 + \theta_2) / d_1 d_2; \quad \mu = \mu_2 / \mu_1; \quad \theta_m = (c_2^{(m)} / c_1^{(m)})^2 \quad (m = 1, 2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{n,i} &= \beta_i^n - \alpha_{1,i} \alpha_{2,i}; \quad g_{1,i} = \frac{1}{4} (4R_{1,1}R_{1,2} + \eta_1 \eta_2 \alpha_{1,i} \alpha_{2,3-i} - 4\mu R_{2,2}R_{0,1}); \\
g_{2,i} &= \frac{1}{2} (\eta_1 R_{1,2} \alpha_{i,1} + \eta_2 R_{1,1} \alpha_{i,2}); \quad g_3 = - (R_{1,2}R_{2,1} - \mu R_{1,1}R_{2,2}); \\
g_{4,i} &= -\frac{1}{2} (\eta_1 \mu R_{2,2} \alpha_{i,1} + \eta_2 R_{2,1} \alpha_{i,2}); \quad g_5 = (R_{0,2}R_{1,1} - \mu R_{0,1}R_{1,2}); \\
g_{6,i} &= \frac{1}{2} (\eta_1 R_{0,2} \alpha_{i,1} + \eta_2 \mu R_{0,1} \alpha_{i,2}); \quad g_{8,i} = -\frac{1}{2} \mu (\eta_1 R_{1,2} \alpha_{i,1} + \eta_2 R_{1,1} \alpha_{i,2}); \\
g_{7,i} &= \frac{1}{4} (4\mu R_{1,1}R_{1,2} + \eta_1 \eta_2 \mu \alpha_{1,i} \alpha_{2,3-i} - 4R_{0,2}R_{2,1}); \quad (i = \overline{1,2}; \quad n = \overline{0,1,2})
\end{aligned}$$

Отметим, что, учитывая поведение подинтегральных функций на бесконечности, в полученных соотношениях выделены сингулярные части ядер. Заметим также, что, как и в работе [6], в случае, когда $\Delta(k)$ не имеет действительных корней, ядра $K_{m,n}(x)$ регулярные функции от x . В случае же, когда $\Delta(k)$ имеет действительные корни, функции $K_{m,n}(x)$ содержат несобственные интегралы Фурье, которые нужно понимать в обобщённом смысле и представить их в виде суммы обычных, хорошо сходящихся, интегралов и специальных функций $Si(x)$, $Ci(x)$ (интегральный синус и косинус).

Теперь, используя формулы (5)-(8), удовлетворим условиям (1b), первоначально перейдя в них к амплитудам и дифференцируя последние два из них по x . В итоге, учитывая, что на L_1 $\sigma(x) = \tau(x) = 0$, а на L_2 $u(x) = v(x) = 0$, для определения амплитуд скачков смещений и напряжений получим следующую систему определяющих сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned}
& -l_3 u'(x) + \int_{L_2} K_{11}(s-x) \sigma(s) ds + \frac{l_2}{\pi} \int_{L_2} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \frac{l_4}{\pi} \int_{L_1} \frac{v'(s) ds}{s-x} + \\
& \int_{L_2} K_{12}(s-x) \tau(s) ds - \int_{L_1} K_{13}(s-x) u'(s) ds + \int_{L_1} K_{14}(s-x) v'(s) ds = 0; \\
& l_3 v'(x) - \frac{l_2}{\pi} \int_{L_2} \frac{\sigma(s) ds}{s-x} + \frac{l_4}{\pi} \int_{L_1} \frac{u'(s) ds}{s-x} - \int_{L_2} K_{21}(s-x) \sigma(s) ds + \\
& + \int_{L_2} K_{22}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L_1} K_{23}(s-x) u'(s) ds + \int_{L_1} K_{24}(s-x) v'(s) ds = 0;
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& -l_5 \sigma(x) - \frac{l_6}{\pi} \int_{L_2} \frac{\tau(s) ds}{s-x} - \frac{l_8}{\pi} \int_{L_1} \frac{v'(s) ds}{s-x} - \int_{L_2} K_{31}(s-x) \sigma(s) ds - \\
& \int_{L_1} K_{32}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L_1} K_{33}(s-x) u'(s) ds - \int_{L_1} K_{34}(s-x) v'(s) ds = 0; \\
& l_5 \tau(x) - \frac{l_6}{\pi} \int_{L_2} \frac{\sigma(s) ds}{s-x} + \frac{l_8}{\pi} \int_{L_1} \frac{u'(s) ds}{s-x} - \int_{L_2} K_{41}(s-x) \sigma(s) ds + \\
& + \int_{L_2} K_{42}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L_1} K_{43}(s-x) u'(s) ds + \int_{L_1} K_{44}(s-x) v'(s) ds = \delta_m.
\end{aligned}$$

Систему (10) нужно рассматривать при условиях непрерывности смещений в концевых точках трещин

$$\int_{a_k}^{b_k} u'(x) dx = 0; \quad \int_{a_k}^{b_k} v'(x) dx = 0 \quad (k = 1 - N) \quad (11)$$

и уравнений движения включений, которые, без учёта их масс, записываются в виде:

$$\begin{aligned}
& \int_{c_k}^{d_k} \sigma(x) dx = \frac{P_k \cos \alpha_k}{\mu_1}; \quad \int_{c_k}^{d_k} \tau(x) dx = \frac{P_k \sin \alpha_k}{\mu_1}; \\
& \int_{c_k}^{d_k} x \sigma(x) dx = \frac{x_0^{(k)} P_k \cos \alpha_k}{\mu_1} \quad (k = 1 - M.)
\end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы построить решение системы (10), приведём её к каноническому виду. С этой целью умножим второе и четвёртое уравнения (10) на $\pm i$ и просуммируем соответственно с первым и третьим уравнениями. Тогда, введя обозначения

$$\varphi_j(x) = \sigma(x) + (-1)^j i \tau(x) \quad (j = 1, 2);$$

$$\varphi_j(x) = u'(x) - (-1)^j i v'(x) \quad (j = 3, 4);$$

$$\Lambda_{11}(x) = \frac{1}{2l_5} \left[K_{31}(x) + K_{42}(x) + i(K_{41}(x) + K_{32}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{12}(x) = -\frac{1}{2l_5} \left[K_{42}(x) - K_{31}(x) + i(K_{32}(x) - K_{41}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{13}(x) = -\frac{1}{2l_5} \left[K_{33}(x) + K_{44}(x) + i(K_{43}(x) + K_{34}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{14}(x) = -\frac{1}{2l_5} \left[K_{33}(x) - K_{44}(x) + i(K_{43}(x) - K_{34}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{21}(x) = -\frac{1}{2l_5} \left[K_{42}(x) - K_{31}(x) - i(K_{32}(x) - K_{41}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{22}(x) = \frac{1}{2l_5} \left[K_{31}(x) + K_{42}(x) - i(K_{41}(x) + K_{32}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{23}(x) = -\frac{1}{2l_5} \left[K_{33}(x) - K_{44}(x) - i(K_{43}(x) - K_{34}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{24}(x) = -\frac{1}{2l_5} \left[K_{33}(x) + K_{44}(x) - i(K_{43}(x) + K_{34}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{31}(x) = -\frac{1}{2l_3} \left[K_{11}(x) + K_{22}(x) + i(K_{21}(x) + K_{12}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{32}(x) = -\frac{1}{2l_3} \left[K_{11}(x) - K_{22}(x) + i(K_{21}(x) - K_{12}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{33}(x) = \frac{1}{2l_3} \left[K_{13}(x) + K_{24}(x) + i(K_{14}(x) + K_{23}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{34}(x) = -\frac{1}{2l_3} \left[-K_{13}(x) + K_{24}(x) + i(K_{14}(x) - K_{23}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{41}(x) = -\frac{1}{2l_3} \left[K_{11}(x) - K_{22}(x) + i(K_{12}(x) - K_{21}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{42}(x) = -\frac{1}{2l_3} \left[K_{11}(x) + K_{22}(x) - i(K_{21}(x) + K_{12}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{43}(x) = \frac{1}{2l_3} \left[K_{13}(x) - K_{24}(x) + i(K_{14}(x) - K_{23}(x)) \right];$$

$$\Lambda_{44}(x) = \frac{1}{2l_3} \left[K_{13}(x) + K_{24}(x) - i(K_{23}(x) + K_{14}(x)) \right];$$

$$q_1 = l_6 / l_5; \quad q_2 = l_8 / l_5; \quad q_3 = l_4 / l_3; \quad q_4 = l_2 / l_3; \quad \delta_m^* = \delta_m / l_6 ,$$

систему (10) запишем в виде:

$$\begin{aligned} & \varphi_j(x) - \frac{(-1)^j i q_1}{\pi} \int_{L_2} \frac{\varphi_j(s) ds}{s-x} + \frac{(-1)^j i q_2}{\pi} \int_{L_1}^a \frac{\varphi_{j+2}(s) ds}{s-x} + \\ & + \sum_{k=1}^2 \int_{L_2} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds + \sum_{k=3}^4 \int_{L_1} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds = i(-1)^j \delta_m^* \\ & \quad (c_m < x < d_m; \quad j=1,2) \\ & \varphi_j(x) - \frac{(-1)^j i q_3}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi_j(s) ds}{s-x} + \frac{(-1)^j i q_4}{\pi} \int_{L_2} \frac{\varphi_{j-2}(s) ds}{s-x} + \\ & + \sum_{k=1}^2 \int_{L_2} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds + \sum_{k=3}^4 \int_{L_1} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds = 0 \\ & \quad (a_m < x < b_m; \quad j=3,4) \end{aligned} \quad (13)$$

Условия (11) и (12) при помощи функций $\varphi_j(x)$ ($j=1-4$) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \int_{c_k}^{d_k} \varphi_j(s) ds = \frac{P_k e^{(-1)^j i \alpha_k}}{\mu_1}; \quad \int_{c_k}^{d_k} s [\varphi_1(s) + \varphi_2(s)] ds = \frac{2x_0^{(k)} P_k \cos \alpha_k}{\mu_1}; \\ & \quad (j=1,2; \quad k=1-M) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\int_{a_k}^{b_k} \varphi_j(x) dx = 0; \quad (j=3,4; \quad k=1-N); \quad (15)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (13) при условиях (14) и (15).

Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с одной трещиной и одним межфазным включением под воздействием динамических нагрузок

Не нарушая общности, с целью более глубокого изучения закономерностей взаимовлияния концентраторов напряжения различных типов, методом механических квадратур построим решение задачи в случае, когда составная

плоскость на интервале (a_1, b_1) линии стыка двух полуплоскостей содержит одну межфазную трещину, а на интервале (c_1, d_1) одно межфазное абсолютно жёсткое включение, т.е. когда $L_1 = (a_1, b_1)$ и $L_2 = (c_1, d_1)$. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием сосредоточенной нагрузки $P_0 e^{i\omega t}$, приложенной к включению в точке X_0 под углом α к оси Oy . В этом случае система (13) примет вид:

(16)

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) - \frac{(-1)^j i q_3}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\varphi_j(s) ds}{s-x} + \frac{(-1)^j i q_4}{\pi} \int_{c_1}^{d_1} \frac{\varphi_{j-2}(s) ds}{s-x} + \\ + \sum_{k=1}^2 \int_{c_1}^{d_1} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds + \sum_{k=3}^4 \int_{a_1}^{b_1} \Lambda_{jk}(s-x) \varphi_k(s) ds = 0 \\ (a_1 < x < b_1; j = 3, 4) \end{aligned}$$

При этом условия (14) и (15) примут вид:

$$\begin{aligned} \int_{c_1}^{d_1} \varphi_j(s) ds = \frac{P_0 e^{(-1)^j i \alpha}}{\mu_1}; \int_{c_1}^{d_1} s [\varphi_1(s) + \varphi_2(s)] ds = \frac{2x_0 P_0 \cos \alpha}{\mu_1} \\ (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi_j(s) ds = 0 \quad (j = 3, 4) \quad (18)$$

Чтобы решить систему (16) методом механических квадратур при помощи замены переменных $x = p_1 \eta + k_1$; $s = p_1 \xi + k_1$ на интервале (c_1, d_1) и $x = p_2 \eta + k_2$; $s = p_2 \xi + k_2$ на интервале (a_1, b_1) сформулируем систему (16) на интервале $(-1, 1)$. Получим:

$$\begin{aligned} \psi_j(\eta) - \frac{(-1)^j m_j}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 \Lambda_{jk}^*(\xi - \eta) \psi_k(\xi) d\xi = \\ = F_j(\eta) \quad (-1 < \eta < 1; j = 1-4) \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь введены обозначения:

$$\psi_j(\eta) = \varphi_j(p_1\eta + k_1) \quad (j=1,2); \quad \psi_j(\eta) = \varphi_j(p_2\eta + k_2) \quad (j=3,4);$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_1 \Lambda_{jk}(p_1(\xi - \eta)) \quad (j, k=1,2);$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_2 \Lambda_{jk}(p_2\xi - p_1\eta + k_2 - k_1) \quad (j=1,2; k \neq j+2);$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_2 \Lambda_{jk}(p_2\xi - p_1\eta + k_2 - k_1) + \frac{(-1)^j i p_2 q_2}{(p_2\xi - p_1\eta + k_2 - k_1)} \\ (j=1,2; k=j+2)$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_2 \Lambda_{jk}(p_2(\xi - \eta)) \quad (j, k=3,4);$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_1 \Lambda_{jk}(p_1\xi - p_2\eta + k_1 - k_2) \quad (j=3,4; k \neq j-2);$$

$$\Lambda_{jk}^*(\xi, \eta) = p_1 \Lambda_{jk}(p_1\xi - p_2\eta + k_1 - k_2) + \frac{(-1)^j i p_1 q_4}{(p_1\xi - p_2\eta + k_1 - k_2)} \\ (j=3,4; k=j-2);$$

$$F_j(\eta) = \begin{cases} (-1)^j i \delta_* & (j=1,2) \\ 0 & (j=3,4) \end{cases}; \quad m_j = \begin{cases} q_1 & (j=1,2) \\ q_3 & (j=3,4) \end{cases};$$

$$p_1 = (d_1 - c_1) / 2; \quad k_1 = (d_1 + c_1) / 2; \quad p_2 = (b_1 - a_1) / 2; \quad k_2 = (b_1 + a_1) / 2.$$

Условия (17) и (18) при помощи новых искомым функций примут следующий вид:

$$\int_{-1}^1 \psi_j(\xi) d\xi = P_0^* e^{(-1)^j i \alpha}; \quad (20)$$

$$\int_{-1}^1 \xi [\psi_1(\xi) + \psi_2(\xi)] d\xi = 2x_0^* P_0^* \cos \alpha \quad (j=1,2);$$

$$\int_{-1}^1 \psi_j(\xi) d\xi = 0 \quad (j=3,4), \quad (21)$$

где

$$P_0^* = \frac{P_0}{p_1 \mu_1}; \quad x_0^* = x_0 / p_1.$$

При помощи результатов А.И.Мусхелишвили о поведении интегралов типа Коши в концевых точках интервала интегрирования нетрудно установить, что искомые функции в концевых точках интервала интегрирования, как и в случае статической задачи, имеют корневую особенность с осцилляцией и их можно представить в виде :

$$\psi_j(\eta) = \frac{\psi_j^*(\eta)}{(1+\eta)^{\alpha_j}(1-\eta)^{\beta_j}}; \quad \alpha_j = \frac{1}{2} + i(-1)^j \gamma_j; \quad \beta_j = \frac{1}{2} - i(-1)^j \gamma_j;$$

$$\left(\gamma_j = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mathfrak{x}_2(\mu_1 + \mathfrak{x}_1\mu_2)}{\mathfrak{x}_1(\mu_2 + \mathfrak{x}_2\mu_1)} \right) \quad (j=1,2); \quad \left(\gamma_j = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + \mathfrak{x}_1\mu_2}{\mu_2 + \mathfrak{x}_2\mu_1} \right) \quad (j=3,4),$$

где $\mathfrak{x}_j = 3 - 4\nu_j$ ($j=1,2$) – постоянная Мусхелишвили, а $\psi_j^*(\eta)$ ($j=1-4$) – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $[-1,1]$.

Подставляя значения функций $\psi_j(\eta)$ ($j=1-4$) в (19), (20) и (21), и используя соотношения, приведённые в [16], по стандартной процедуре, придём к системе из $4n$ алгебраических уравнений относительно значений $\psi_j^*(\xi_i)$ ($j=1-4$), ($i=\overline{1,n}$), где ξ_i – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha_j, \beta_j)}(\xi_i) = 0$.

После определения величин $\psi_j^*(\xi_i)$ ($j=1-4$) нетрудно при помощи интерполяционных многочленов Лагранжа восстановить функции $\psi_j^*(\eta)$, а тем самым, и $\psi_j(\eta)$ ($j=1-4$), и определить напряжённо-деформированное состояние в составной полуплоскости. В частности, безразмерное раскрытие трещины определится по формуле :

$$V_*(\eta) = V(p_2\eta + k_2) / p_2 = \frac{1}{2i} \int_{-1}^{\eta} [\psi_3(\xi) - \psi_4(\xi)] d\xi.$$

Для определения напряжений, действующих на длинных сторонах включений, будем использовать комплексную комбинацию формул (5) и (6), которую при помощи функции $\phi_j(\eta)$ ($j=1-4$) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Omega_j(x) &= \frac{\sigma_y^{(j)}(x, 0) - i\tau_{xy}^{(j)}(x, 0)}{\mu_2} = \omega_j \varphi_1(x) - l_3 \varphi_3(x) + \\
&+ \frac{il_2}{\pi} \int_{c_1}^{d_1} \frac{\varphi_1(s) ds}{s-x} - \frac{il_4}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\varphi_3(s) ds}{s-x} - l_3 \sum_{k=1}^2 \int_{c_1}^{d_1} \Lambda_{3k}(s-x) \varphi_k(s) ds + \\
&+ l_3 \sum_{k=3}^4 \int_{a_1}^{b_1} \Lambda_{3k}(s-x) \varphi_k(s) ds \quad (-\infty < x < \infty; j=1, 2); \\
&(\omega_1 = \mu + l_1; \omega_2 = l_1; \mu = \mu_2 / \mu_1).
\end{aligned} \tag{22}$$

Учитывая, что на включении $\varphi_3(x) = 0$, и переходя на интервал $[-1, 1]$, найдём:

$$\begin{aligned}
\Omega_j^*(\eta) &= \Omega_j(p_1\eta + k_1) = \omega_j \psi_1(\xi) + \frac{il_2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(\xi) d\xi}{\xi - \eta} - \\
&- \sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 l_3 p_1 \Lambda_{3k}(p_1(\xi - \eta)) \psi_k(\xi) d\xi - \frac{il_4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_2 \psi_3(\xi) d\xi}{p_2 \xi - p_1 \eta + k_2 - k_1} - \\
&- \sum_{k=3}^4 \int_{-1}^1 l_3 p_2 \Lambda_{jk}(p_2 \xi - p_1 \eta + k_2 - k_1) \psi_k(\xi) d\xi \quad (j=1, 2)
\end{aligned}$$

Для определения же безразмерного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений опять будем использовать формулу (22), рассматривая её вне интервалов (a_1, b_1) и (c_1, d_1) . Учитывая, что вне этих интервалов функция скачка напряжений равна нулю, в безразмерных величинах её можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Omega_j(p_2\eta + k_2) &= \frac{\sigma_y^{(j)}(p_2\eta + k_2, 0) - \tau_{xy}^{(j)}(p_2\eta + k_2, 0)}{\mu_2} = \\
&= -\frac{il_4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_3(\xi) d\xi}{\xi - \eta} - \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 l_3 \Lambda_{3k}^*(\xi - \eta) \psi_k(\xi) d\xi \quad (|\eta| > 1).
\end{aligned} \tag{23}$$

Очевидно, что функции, находящиеся под знаком суммы, ограничены в концевых точках интервала $[-1, 1]$. Поэтому, подставляя значение функции $\psi_3(\xi)$ в (2.8) и используя значение интеграла [17]:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{(s-a)^{\gamma-1} (b-s)^{-\gamma} ds}{s-x} = \frac{1}{\sin \pi \gamma (b-x)} \left| \frac{a-x}{b-x} \right|^{\gamma-1} \quad (x < a, x > b)$$

(2.8) представим в виде:

$$\Omega_j(p_2\eta + k_2) = -\frac{il_4\psi_3^*(\pm 1)}{\operatorname{ch}(\pi\gamma_3)|1+\eta|^{1/2-i\gamma_3}|1-\eta|^{1/2+i\gamma_3}} + \Phi(\eta) \quad (|\eta| > 1),$$

где

$$\Phi(\eta) = -\frac{il_4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[\psi_3^*(\xi) - \psi_3^*(\pm 1)] d\xi}{(\xi - \eta)(1 + \eta)^{\alpha_3}(1 - \eta)^{\beta_3}} - \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 l_3 \Lambda_{3k}^*(\xi - \eta) \psi_k(\xi) d\eta,$$

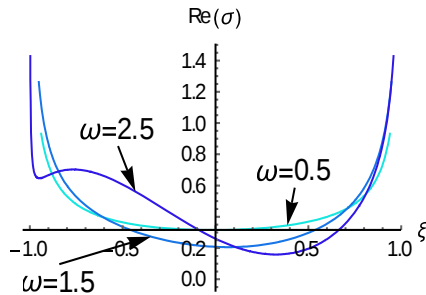
верхний знак соответствуют лучу $\eta > 1$, а нижний – лучу $\eta < -1$.

Тогда, комплексный коэффициент интенсивности разрушающих напряжений будет даваться формулой:

$$\begin{aligned} K_I(\pm 1) - iK_{II}(\pm 1) &= \sqrt{2\pi} \lim_{\kappa \rightarrow \pm 1 \pm 0} |1 + \eta|^{1/2-i\gamma_3} |1 - \eta|^{1/2+i\gamma_3} \chi_j^*(\eta) = \\ &= -\frac{\sqrt{2\pi} il_4 \psi_3^*(\pm 1)}{\operatorname{ch}(\pi\gamma_3)}. \end{aligned}$$

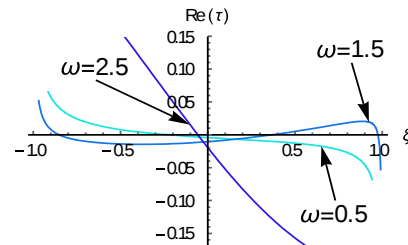
Численные расчёты

Проведён численный расчёт и определены закономерности изменения действительных частей амплитуд скачков нормальных и касательных контактных напряжений, действующих на длинных сторонах включений, раскрытия трещины, абсолютной величины комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений $K_*(\pm 1) = \sqrt{K_I^2(\pm 1) + K_{II}^2(\pm 1)}$ и приведённого угла поворота включений $\delta_* = \delta / l_6$ в зависимости от приведённой частоты вынужденных колебаний $\omega_* = \omega / ac_2^{(1)}$ в двух случаях, когда сосредоточенная нагрузка приложена к центру включения и направлена вдоль включения ($\alpha = \pi / 2$) или перпендикулярно к нему ($\alpha = 0$). При этом полагается, что включение находится на интервале $(-a, a)$, трещина на интервале $(3a, 5a)$, а упругие постоянные разнородных полуплоскостей имеют следующие значения $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\mu = \mu_2 / \mu_1 = 2$, $P_0^* = 1$. На фиг.2а-2б приведены графики действительных частей амплитуд скачков соответственно нормальных и касательных контактных напряжений в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний ω_* , когда нагрузка перпендикулярна включению ($\alpha = 0$).



Фиг.2а. скачок нормальных

напряжений $\alpha = 0$, $\mu = 2$



Фиг.2б. скачок касательных

напряжений $\alpha = 0$, $\mu = 2$

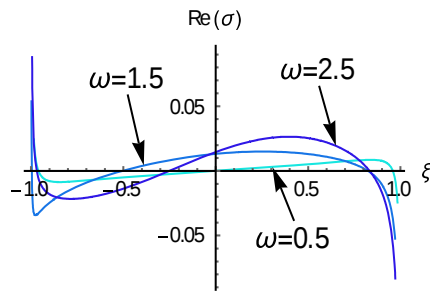
Из них видно, что при увеличении частоты вынужденных колебаний амплитуда скачка нормальных контактных напряжений по абсолютной величине в некоторой части контактной зоны возрастает, а на остальной части убывает и становятся осциллирующими. Амплитуда касательных контактных напряжений при этом по абсолютной величине возрастает и меняет знак на обратный.

В табл. 1. приведены значения приведённого угла поворота включения и абсолютной величины комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в указанном случае. Из них видно, что как действительная часть угла поворота включения, так и абсолютная величина комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений при увеличении частоты вынужденных колебаний сначала по абсолютной величине возрастают, а затем убывают.

Таблица 1. $\alpha = 0$, $\mu = 2$

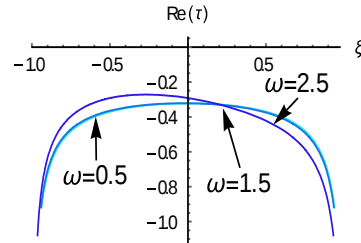
ω_*	0.2	0.5	1	1.5	2.5
$\text{Re} \delta_*$	-0.00055	-0.0038	-0.0039	-0.0334	-0.0214
$ K^*(-1) $	0.0622	0.3180	0.4893	0.5939	0.2857
$ K^*(1) $	0.0739	0.3466	0.8637	0.9143	0.2736

На фиг.3а-3б приведены графики действительных частей амплитуд скачков соответственно нормальных и касательных контактных напряжений в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний ω_* , когда нагрузка направлена вдоль включения ($\alpha = \pi / 2$).



Фиг.3а. скачок нормальных

напряжений $\alpha = \pi / 2$, $\mu = 2$



Фиг.3б. скачок касательных

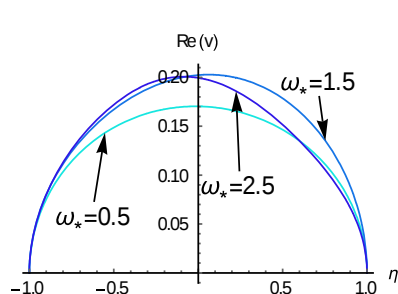
напряжений $\alpha = \pi / 2$, $\mu = 2$

Из них явствует, что увеличение частоты вынужденных колебаний мало влияет на распределение действительной части амплитуд скачков касательных контактных напряжений. Действительная часть же амплитуд скачков нормальных контактных напряжений, при этом, на порядок малы. Однако, их изменение приводит к изменению знака действительной части амплитуды угла поворота включения, что подтверждается результатами расчётов, приведённых в табл.2. В этой таблице приведены также значения абсолютной величины комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений. Они, как и в первом случае, при увеличении частоты вынужденных колебаний сначала возрастают, а затем убывают.

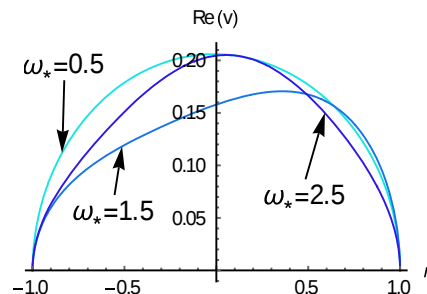
Таблица 2. $\alpha = \pi / 2$, $\mu = 2$

ω_*	0.2	0.5	1	1.5	2.5
$\text{Re} \delta_*$	-0.00396	-0.0039	-0.0038	-0.0008	0.00009
$ K^*(-1) $	0.0404	0.1220	0.2234	0.0673	0.0143
$ K^*(1) $	0.0351	0.1319	0.3029	0.2773	0.3190

На фиг.4а-4б приведены графики действительных частей амплитуд скачков нормальной составляющей смещения берегов трещины в моменты времени $t_k = 2\pi k / \omega$ ($k = 1, 2, \dots$), соответственно в случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi / 2$, когда вместе с динамической сосредоточенной нагрузкой $P_0^* = 1$, действующей на включение, на берега трещины действует статическая распределённая нагрузка интенсивности q_0 , препятствующая закрытию трещины. При этом, принято $q_0^* = q_0 / \mu_2 l_3 = -0.1$.



Фиг.4а. скачок нормальных
смещений $\alpha = 0$, $\mu = 2$



Фиг.4б. скачок нормальных
смещений $\alpha = \pi / 2$, $\mu = 2$

Они показывают, что при выбранных значениях параметров увеличение частоты вынужденных колебаний приводит к потере симметричности формы раскрытия трещины.

Заключение

Таким образом, в работе методом обобщённого преобразования Фурье построены разрывные решения уравнений движения плоской теории упругости для составной плоскости из двух разнородных полуплоскостей с системами непересекающихся, межфазных трещин и абсолютно жёстких включений конечных длин. На основе этих решений получена определяющая система поставленной задачи в виде системы сингулярных интегральных уравнений второго рода, решение которой, в случае одной трещины и одного включения, построено методом механических квадратур. Проведён численный анализ и изучены закономерности изменения действительных частей амплитуд скачков контактных напряжений на длинных сторонах включений, нормальных составляющих смещения точек берегов трещин, амплитуд приведённого угла поворота включений и абсолютной величины комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в зависимости от величины частоты вынужденных колебаний при определённых значениях упругих и геометрических характеристик задачи. Показано, что при выбранных физико-механических и геометрических параметрах, в случае, когда сосредоточенная нагрузка направлена вдоль включения увеличение частоты вынужденных колебаний, приводит к перераспределению амплитуд скачков нормальных контактных напряжений в зоне контакта, вследствие чего изменяется действительная часть амплитуды угла поворота включения. На этой основе можно утверждать, что при помощи выбора частоты вынужденных колебаний можно управлять действительной частью угла поворота включения, в частности достичь исключения его поворота.

Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 18Т-2С290.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович Н.Н., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
2. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
4. Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т.307. №2. С.324–327. Babeshko V.A. On a problem of dynamic destruction of layered bodies with cracks // Proc. Of Academy of Sciences. USSR. 1989. Vol. 207, №2, pp.324–327. (in Russian)
5. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С.5–9. Babeshko V.A. Mediums with heterogeneities (combination of inclusions with heterogeneities) // Proc. RAS. Mechanics of Solids. 2000. №3. Pp.5-9. (in Russian)
6. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т.382. №5. С.625–628. Babeshko V.A., Pavlova A.V., Ratner S.V., Williams R.T. On a solution of problem on vibration of elastic body, containing the system of inner cavities// Proc. Proc. of Academy of Sciences. 2002. Vol.382. №5. Pp. 625-628. (in Russian)
7. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т.68. Вып.3. С.500–507. Pryakhina O.D., Smirnova A.V. The effective method for solution of dynamic problems for layered mediums with discontinuous boundary conditions. // journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2004.Vol.68. Iss.3, pp.500-507. (in Russian)
8. Абрамян Б.Л. Пространственные задачи теории упругости // НАН РА Ереван, 1998, 274с.
9. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами // Известия НАН РА, Механика, т.72, № 2, 2019г, с. 6-23.
10. Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. // Proceedings of the Twelfth 23 International Conference on Composites or Nano Engineering, ICCE-12 August 1-6, 2005, Spain.
11. Hakobyan V. N., Amirjanyan H. A. and Dashtoyan L. L. Forced shift vibrations of stamp on the border of composite half-space with interfacial partially detached thin inclusions from the matrix //Journal of Physics: Conference Series, 2020, volume 1474 <https://iopscience.iop.org/issue/1742-6596/1474/1>
12. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с межфазными включениями под воздействием динамических нагрузок. Труды XX -ой межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов наДону, 18-21 июня 2020, ст. 24-28.
13. Акопян Л.В., Амирджанян А.А., Саакян А.В. Влияние колеблющегося на границе упругой полуплоскости жесткого штампа на напряженное состояние внутреннего жесткого тонкого включения. Труды XX-ой межд. конф.

- «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов наДону, 18-21 июня 2020, ст. 29-33.
14. Sahakyan A.V., Dashtoyan L.L. On one problem for compound plane with crack and inclusion with the existence of temperature field // Proceedings of the 5th international congress on thermal stresses and related topics, TS 2003, 8-11 June 2003, Blacksburg, VA, pp. ТМ411 ТМ414
 15. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа.- Н: Мир, 1962. 279ст. Noble B. Wiener-Hopf method// Mir, 1962, 279p. (in Russian)
 16. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
 17. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series.// Moscow. Nauka. 1981. 738p. (in Russian)

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук., проф., директор Института механики НАН РА, тел.: (37491) 350222, e-mail: vhakobyan@sci.am

Даштоян Л.Л. – к.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН РА, (37410) 52-48-90, e-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 07.08.2020

On the main directions in creep mechanics of metallic materials

Holm Altenbach, Katharina Knappe

Keywords: Creep, Relaxation, Classical Models, Advanced Creep Theories

Хольм Альтенбах, Катарина Кнаппе

Об основных направлениях теории ползучести металлических материалов

Ключевые слова: Ползучесть, релаксация, классические модели, современные теории ползучести

Механика ползучести является частью инженерной механики. Развитие исследований в этой области было мотивировано некоторыми авариями, произошедшими в 19-ом веке. Первые теории были сформулированы как одномерные уравнения с несколькими параметрами. Позже эти уравнения были распространены на трёхмерные уравнения, при этом скалярные напряжения и деформации были заменены тензорными выражениями. Кроме того, для лучшего сравнения с одномерными результатами должны использоваться гипотезы эквивалентности для напряжений и деформаций.

До сих пор не существует теории ползучести, которая была бы настолько строгой, как механика сплошных сред. Однако существует много инженерных теорий, на основе которых получены очень и очень много решений для практических задач. Эта статья представляет собой обзор работ по механике ползучести металлических материалов и конструкций из этих материалов.

Հովմ Ալտենբախ, Կատարինա Կնապե

**Մետաղական նյութերի սողքի տեսության հիմնական ուղղությունների մասին
Հիմնաբառեր.** Սողք, ռելաքսացիա, դասական մոդել, սողքի ժամանակակից տեսություններ

Սողքի մեխանիկան ճարտարագիտական մեխանիկայի մի մասն է։ Այս ոլորտում հետազոտությունների զարգացումը պայմանավորված էր 19-րդ դարում տեղի ունեցած պատահարներով։ Առաջին տեսությունները ձևակերպվել են որպես միաչափ հավասարումներ մի քանի պարամետրերով։ Հետագայում այս հավասարումները ընդհանրացվեցին եռաչափ հավասարումներ համար, փոխարինելով սկալյար լարումները և դեֆորմացիաները տենզորային արտահայտություններով։ Բացի այդ, միաչափ արդյունքների հետ առավել լավ համեմատություն կատարելու նպատակով լարումների և դեֆորմացիաների համար պետք է օգտագործվեն համարժեքության վարկածներ։

Մինչ այժմ գոյություն չունի մի այնպիսի սողքի տեսություն, որը հոծ միջավայրի մեխանիկայի պես խիստ լինի։ Այնուամենայնիվ, կան շատ ճարտարագիտական տեսություններ, որոնց հիման վրա ստացվել են շատ ու շատ կիրառական ծնդիրների լուծումներ։ Այս հոդվածը իրենից ներկայացնում է ակնարկ մետաղական նյութերի և նրանցից պատրաստված կառուցվածքների սողքի մեխանիկայի վերաբերյալ։

Creep mechanics is a part of engineering mechanics. The developments in this research field were motivated by some failure cases in the 19th century. The first theories have been formulated as uniaxial equations with only a few parameters. Later, these equations were extended to three-dimensional equations, substituting the scalar stress and strain by tensorial expressions. In addition,

for better comparison to one-dimensional results, equivalent statements for the stresses and the strains were introduced.

Up to now, there is no creep mechanics theory which is as strict as continuum mechanics. However, there are many engineering theories through which more and more solutions for practical cases can be obtained. The paper is a state of the art report of creep mechanics for metallic materials and structures composed from these materials.

1 Introduction

Creep mechanics is a part of engineering mechanics with a history of more than 100 years and numerous technical applications. In the first part of this paper, the motivation and a brief outline to the history are presented. After that, some approaches in creep mechanics are discussed. In the final part, references to several applications are given. For further reading, [1,2] can be recommended.

In the case of three-dimensional relationships, the direct (symbolic) tensor notations are used. The basics are presented, for example, in [2-4].

1.1 Motivation

Mechanics has been established as a science since antiquity. The first steps in this field were done by Archimedes of Syracuse (born c. 287 BC, Syracuse, Sicily, died c. 212 BC, Syracuse) which today are known as the Archimedes' principle, Archimedes' screw, hydrostatics, levers, infinitesimals, ... But the description of the mechanics' purpose that we are familiar with nowadays only began with the corresponding developments in mathematics during the 17th and 18th century (for example differential and integral calculus). Mechanics is often seen in connection with physics, as a branch of physics but at the same time, there is still a perception that mechanics can be viewed as an application for mathematical theories [5]. This is not correct any more, ever since the development of engineering mechanics for application purposes. Today, engineering mechanics can be seen as an independent scientific discipline, which in a special way, based on a theoretical foundation (increasingly formulated axiomatically), brings the problems of engineering practice to a solution.

If one investigates creep problems, three questions arise:

- A suitable material description must be found first of all. This task is not trivial, since the different concepts, based on considerations of material physics, materials science and continuum mechanics have advantages and disadvantages. It is important to ensure that the effort and benefit are in an appropriate relationship and that the identification of the parameters in the equations describing the material behavior can be solved in a satisfactory manner. It should be noted that not every conceivable experiment to determine material parameters can actually be carried out in the laboratory.
- Another problem is related to the fact that a suitable structural mechanical description must be made. Components are geometrically complex structures. Hence, their geometrical description and the structural mechanical implementation are usually associated with the introduction of models. These simplify reality and thus enable practical problems to be analyzed with less effort. However, it must be clarified if the use of certain models is allowed within the limits of the simplifications. For example, it is known that thin-walled components (they are typical for creep mechanics applications) can often be analyzed with two-dimensional equations. Which theory has to be used e.g. in the case of plates (Kirchhoff, Mindlin, Reissner, Ambartsumyan, von Kármán, ...) has been the subject of numerous studies.

- The third problem - the selection of a suitable numerical analysis method (finite element method, boundary element method, etc.) - is also important, but it is not supposed to be content of this paper. For further reading, [6] is recommended.

In this work, the focus is on creep of components, where typical thin- and thick-walled elements, which can be modeled as beams, plates, pipes, pipe bends, etc., are examined. These components can be found in, for example, power plants and in chemical apparatuses, where moderate mechanical loads but increased operating temperatures are typical. The material behavior of metals and corresponding alloys (these are the main used construction materials) is then characterized by irreversible time-dependent creep processes and material degradation. The long-term behavior is influenced by mechanisms of the time-dependent stress redistribution and the increasing damage, which occur especially in the areas of joints, connecting elements and welds. The continuum damage mechanics, that establishes the constitutive equations for the tensor of creep rates and the evolution equations for the phenomenological damage variables, leads to a nonlinear initial boundary value problem for structural mechanical analysis [7].

Creep analyses are particularly important at those points in a component where several parts have to be connected. Welded connections are often preferred, however this is a complex problem since the different creep behaviors in the base material, in the weld metal and in the heat affected zone have to be taken into account. In [8], it is reported about the lifespan increase in a petrochemical plant with respect to the creep behavior. The pipeline system considered was analyzed with the help of the methods of classic structural mechanics, however, only taking into account the change in thickness and ovality in the pipe bends lead to the additional effects and adjusted the values for the stresses and strains to the values observed in the experiment or in practice. A possible classification of the creep damage and the corresponding measures in operating systems is given in [9]. The starting point is the creep strain-time curve known from materials science. To determine the time-dependent changes of state of the structure, micrographs of the material are generated and evaluated. The following stages can be observed: (A) isolated cavities, (B) oriented cavities, (C) micro cracks, (D) macro cracks, (E) fracture. The following actions should be performed: (A) only observation, (B) observation with fixed inspection intervals, (C) limited operating time until repair, (D) repair. The last stage (E) should always be avoided.

1.2 History

A historical overview of creep mechanics is given for example in [10,11]. There were publications on creep mechanics already in the second half of the 19th century. However, systematic investigations were summarized for the first time in [12,13]. Until today, the Norton-Bailey law can be described as the most important creep law [14,15], which is a power law in the sense of mathematics. Even in this case, it can be shown that the material description in the creep range requires more effort in comparison to the elastic range. The uniaxial Hooke's law contains only one material parameter (elastic or Young's modulus) whereas two parameters are necessary for the Norton-Bailey law (magnitude and creep exponent). Various industrial applications from energy machine construction were initially in the focus of creep mechanics. Already in 1933, Stodola reported about applications in the area of gas turbine construction [16]. Because generally, mechanical loads are multidimensional, the stress and the strain states need to be, too. Therefore, Odqvist (1933-1936) [17] and Bailey [15] suggested a corresponding theory for isotropic material behavior using invariants of the stress and the strain tensors. A consistent tensorial description was made by Prager (1945) and Reiner (1945), which also includes anisotropy. Missing matches with experimental results led to the development of further modifications of the creep equations, e.g. the strain hardening theory presented by Nadai (1938) [18] and Soderberg

(1938) [19]. Due to applications related with stability problems, e.g. discussed by Hoff [20,21], elements of the geometrically nonlinear theory had to be developed. A new class of problems arose with the massive use of polymer materials, where analogies between viscoelasticity and creep can be seen. However, the viscoelastic behavior is often mathematically described with the help of integral equations, see Rabotnov (1948) [22] among others. Another application field is creep in concrete which was studied, for example by N.K. Arutyunyan [23].

There are numerous textbooks and monographs on creep mechanics which mainly contain established research results. The authors prefer the engineering (inductive) approach meaning that based on experimental observations, creep equations in the simplest form are suggested and generalized step by step. It seems that there is no book that represents creep mechanics as strict as continuum mechanics (for the elasticity theory or plasticity theory there are several).

For studying creep mechanics, the following books can be recommended [2,6,10,24-36]. While reading, one notices that theories for static (or quasi-static) applications in the case of monotonous loads and under isothermal conditions are well established. Dynamic loads and their consequences for the creep behavior are under discussion and require further research.

Up to now, creep mechanics is in the focus of many research teams worldwide, selected conferences include presentations about the topics and activities devoted to creep problems. The International Union for Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM) organises an IUTAM symposium *Creep in Structures* since 1960 every 10 years: 1960 - Stanford/U.S.A. [37], 1970 - Göteborg/Sweden [38], 1980 - Leicester/U.K. [39], 1990 - Kraków/Poland [40] and 2000 - Nagoya/Japan [41]. The rather long time interval between two symposia is relatively easy to explain: the research is related to time-dependent processes and their verification in the field of metals and alloys needs long-term tests over several years. Only recently, due to the arising questions concerning creep problems of plastics and composite materials, shorter time periods for experiments are possible, which was also accepted during the Nagoya meeting in 2000. However, this series of symposia is continued, but caused by some technical issues, the next after Nagoya was only held in 2012 in Paris/France [42].

There are more special conferences and courses devoted to selected creep problems, for example [43-45]. The International Association for Applied Mathematics and Mechanics (GAMM) offered plenary lectures and in 2001, one of the main topics was dedicated to creep mechanics [46]. In the next few years, further impulses for research are mainly expected from the following areas: power plant construction, aircraft construction and microsystem technology. The first two represent traditional fields of application. Since the performance and efficiency improvement leads to a further rising of temperature, the tendency to creep and damage also increases. In microsystem technology, the influence of temperature also cannot be neglected, like the different reactions of various materials to the loads and temperatures. In addition, in microsystem technology, all components are arranged in a confined space, so that their interactions become interesting as well.

2 Basic Model

The creep behavior is always analyzed from two different perspectives: of the material and of the component. Material creep always includes creep and creep recovery processes which are both accompanied by time-dependent microstructural modifications in the material as a result of moderate mechanical loads (below the yield limit) at elevated temperatures (> 0.3 of the melting temperature T_m). The creep in components is also a time-dependent process leading to changes in strain and stress states. One differentiates

among other things between creep, recovery and stress redistribution. For this, multi-axial, inhomogeneous stress states are typical.

2.1 Description Possibilities

There are different ways to describe the creep behavior. Considerations of the materials science and physics, macroscopic observations or continuum mechanical methods are the starting point. Until today, special phenomenological approaches based on macroscopic experimental observation remain the beginning of the models. This concept is already described in [12] and still dominates the literature on structural mechanical analyses. The advantages and disadvantages of different description possibilities should be evaluated thoroughly. For example, material science approaches and creep equations based on them are most suitable to characterize processes at the microlevel. At the same time, three-dimensional generalization is often complicated because the necessary equivalent stress concepts only rely on engineering ideas, meaning there is no overriding principle in analogy to the balance equations, etc. The phenomenological description within engineering mechanics is not always strict enough to meet all aspects of the modeling requirements. On the other hand, the corresponding three-dimensional creep equations can be easily implemented into existing commercial finite element codes. A strict continuum mechanics formulation should be preferred but at the moment, we are far from solving this problem of including it into the existing calculation software.

2.2 Three Creep Stages

Creep curves show strains at constant mechanical load over time where the small elastic range is often neglected. Three stages of creep behavior can be observed. The first one (primary or delayed creep) is characterized by a decline in the slope of the creep curve, that means the creep rate decreases. This correlates with microstructural observations, since hardening occurs due to obstruction of dislocation movements. One can also observe relaxation, i.e. rearrangement of lattice defects. The subsequent secondary (or stationary) creep is indicated by an equilibrium of hardening and softening. The resulting creep rate takes a stationary value, which is also its minimum. The tertiary (or accelerated) creep is particularly denoted by damage (formation, growth and coalescence of cavities at the grain boundaries, microstructure aging, etc.). This rough classification, which can be found, for example, in [47-49] is a suitable basis for the formulation of phenomenological models of creep mechanics. Note that temperature effects are either neglected or, for the simplest models, are assumed to be constant because the temperature dependency is often very complex. In addition, the form of these three stages varies for different materials. Generally, in many cases, the secondary stage lasts significantly longer in comparison to the primary and tertiary creep ranges but there are also materials without any secondary creep range [50-53] (only the minimum value of the creep curve can be estimated). Regardless of the arguments given for classification and simplification, creep curves usually provide trustworthy statements for uniaxial creep tests, presuming material isotropy.

3 Extensions

In the case of extending the classical one-dimensional models, two aspects should be considered. Since the loading state is generally three-dimensional, a suitable three-dimensional description of the material behavior is needed. In addition, the anisotropies in material behavior are also important for creep processes. There are originally isotropic materials which may show anisotropic behavior (damage-induced anisotropy) in the tertiary creep stage but there are also *a priori* anisotropic materials (initial anisotropy).

The simplest creep test is an analogy to the tensile test for which only a normal stress is considered in the tensile direction resulting from a constant load (force). Another simple creep test is the torsion test, where a shear stress can be noticed as a result of a constant acting torsional moment. Both tests can be superposed, in this case, one gets a complex stress state described by the following stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ [2]

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \tau (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{e}_\varphi) \quad (3.1)$$

where $\mathbf{k}$ is a unit vector in the normal creep direction and $\mathbf{e}_\varphi$ denotes a unit vector in the circumferential direction. σ and τ are the normal stress in the $\mathbf{k}$ -direction and the shear stress in the circumferential direction $\mathbf{e}_\varphi$, $\otimes$ is dyadic product. The inelastic material behavior is often assumed to be independent from the hydrostatic stress state. In addition to the stress tensor, the stress deviator $\mathbf{s}$ needs to be introduced

$$\mathbf{s} = \sigma \left(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} - \frac{1}{3} \mathbf{E} \right) + \tau (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{e}_\varphi) \quad (3.2)$$

with $\mathbf{E}$ as the second rank unit tensor. Furthermore, to ensure a better comparison of one-dimensional and three-dimensional states, an equivalence hypothesis should be found. In the simplest case, the von Mises equivalent stress can be suggested as

$$\sigma_{\text{vM}} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (3.3)$$

with $\mathbf{s}$ as the stress deviator and the double scalar product $\cdot \cdot$. Considering the three creep stages, the uniaxial description is made based on the secondary stage with the following approach

$$\dot{\epsilon}_{\text{min}}^{\text{cr}} = f(\sigma, T) \quad (3.4)$$

$\dot{\epsilon}_{\text{min}}^{\text{cr}}$ is the minimal creep rate, σ is the existing stress responsible for the creep and T is the temperature which is assumed to be constant in order to simplify the model. The experimental verification is straightforward. From the literature (for example, [2]) several approximations for the function of the minimal creep strain rate are known. The power law is the one used the most. However, there are also reasons to use other approximations like the exponential function or a hyperbolic sine function.

The ansatz for the secondary creep can be extended by a hardening term (H denotes a hardening variable)

$$\dot{\epsilon}^{\text{cr}} = f(\sigma, H, T) \quad (3.5)$$

completed with an evolution equation

$$\dot{H} = \dot{H}(\sigma, H, T) \quad (3.6)$$

For tertiary creep, a damage variable ω can be introduced

$$\dot{\epsilon}^{\text{cr}} = f(\sigma, H, \omega, T) \quad (3.7)$$

and a damage evolution equation is postulated

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\sigma, H, \omega, T) \quad (3.8)$$

The procedure presented here is not limited to uniaxial behavior. By introducing suitable tensor variables for the stress and the strain rate as well as corresponding equivalent variables, multiaxial constitutive and evolution laws can be established. It should still be noted that equivalence concepts for the stresses and the strains are always just engineering hypotheses, therefore, any concept and potential modifications must be

examined again to determine whether the assumptions made are valid. More information on equivalence hypotheses is presented in [54,55]. The procedure is not limited to only one hardening variable and one damage variable, which could only be assigned to one mechanism.

The concept has to be changed, if the anisotropy must be included since anisotropy tensors should be justified and described. For the damage-induced anisotropy, evolution laws have to be added and presented mathematically in a proper manner. Models become very complex and the identification effort is increasing dramatically.

The derivation of the basic equations for isotropic creep behavior can also be performed as follows. Assuming constant temperature and constant or slightly variable loads, the infinitesimal creep rates are first introduced as tensor quantities

$$\dot{\mathbf{D}}^{cr} = \dot{\mathbf{e}}^{cr} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.9)$$

$\mathbf{f}$ is an arbitrary second rank tensor function. The potential hypothesis with the creep condition [56]

$$\dot{\mathbf{D}}^{cr} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.10)$$

and the creep potential W , taking into account the dissipation power

$$P = \dot{\mathbf{D}}^{cr} \cdot \boldsymbol{\sigma} \geq 0$$

then leads to a general isotropic creep equation. In addition, the isotropy conditions must be considered

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T) &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{Q}^T, & \forall \mathbf{Q} : \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = \pm 1 \\ W(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T) &= W(\boldsymbol{\sigma}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$\mathbf{Q}$ is an orthogonal tensor. In the case of isotropy, $\mathbf{Q}$ is

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} \cos \omega + \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} (1 - \cos \omega) + \mathbf{e} \times \mathbf{E} \sin \omega$$

where $\mathbf{e}$ denotes the unit vector along an arbitrary axis of rotation with the arbitrary angle ω . Finally, the following tensorial non-linear creep equation can be established

$$\dot{\mathbf{D}}^{cr} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\alpha}_0 \mathbf{E} + \dot{\alpha}_1 \boldsymbol{\sigma} + \dot{\alpha}_2 \boldsymbol{\sigma}^2, \quad \dot{\alpha}_i = \dot{\alpha}_i(I_1, I_2, I_3), \quad (3.12)$$

with the invariants

$$I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad I_2 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2, \quad I_3 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^3 \quad (3.13)$$

Assuming $W = W(I_1, I_2, I_3)$,

$$\dot{\mathbf{D}}^{cr} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{E} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \boldsymbol{\sigma} + 3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \quad (3.14)$$

can be established. $\text{tr}(\dots)$ denotes the trace of the tensor. The integrity condition for the $\dot{\alpha}_i$ is presented in [33].

The chosen set of invariants is not the only possible one. One can prove that for second rank tensors three linearly independent invariants exist. The different sets of invariants are discussed in the literature (e.g. [56,57]). It can be shown that from the mathematical point of view or material theory, a preference for a certain set of invariants cannot be justified. However, one can easily recognize that the form of presentation has consequences for the experimental verification of the parameters in the constitutive equations. So, the question arises if certain invariants have constructive interpretations for the experiment. It is obvious that the first invariant of the stress tensor relates to the hydrostatic stress state. Same thing

applies to the equivalent stress according to von Mises, which is connected to the second invariant of the stress deviator. Unfortunately, the meaning of the third invariant is not straightforward. In this case, it is better to consider the Lode parameter [58] which has a practical meaning behind it. The considerations for the invariants are trivial in the case of isotropy. Introducing other constitutive laws regarding transverse isotropy or orthotropy, such considerations may help to structure the necessary experimental work since a lot of information can be drawn from the theory for planning the tests [34]. The general form of the isotropic creep law mentioned here is also given in [25,33].

Some special but yet elementary cases can be deduced. Using the separation of the stress tensor into hydrostatic and a deviatoric part

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{E} + \mathbf{s}, \quad \text{tr} \mathbf{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} I_1, \quad (3.15)$$

the following representation of the potential is valid⁴

$$W = W(I_1, J_{2D}, J_{3D}), \quad J_{2D} = -\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{s}^2, \quad J_{3D} = -\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{s}^3 \quad (3.16)$$

Since the set of possible invariants is exchangeable, the invariants of the corresponding stress deviator can be used instead of the stress tensor's. That means the last representation of the potential is equivalent to $W(I_1, I_2, I_3)$. Then the tensor of creep strain rates can be expressed

$$\dot{\mathbf{D}}^{cr} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{E} - \frac{\partial W}{\partial J_{2D}} \mathbf{s} + \frac{\partial W}{\partial J_{3D}} \left(\mathbf{s}^2 - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{s}^2 \mathbf{E} \right) \quad (3.17)$$

It is obvious that the assumption of classic material behavior (inelastic behavior is not influenced by the hydrostatic stress state [59,60]) can be considered directly: the dependence on the first invariant should be eliminated

$$\text{tr} \dot{\mathbf{D}}^{cr} = 3 \frac{\partial W}{\partial I_1} = 0 \quad (3.18)$$

The classic creep equations will result, if the following assumption is still valid

$$\frac{\partial W}{\partial J_{3D}} = 0 \quad (3.19)$$

In this case, no more tensorial non-linearity is considered in the creep law and one gets

$$\dot{\mathbf{D}}^{cr} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{vM}}{\sigma_{vM}} \mathbf{s}, \quad \sigma_{vM}^2 = -3 J_{2D}, \quad \dot{\epsilon}_{vM} \equiv \frac{\partial W(\sigma_{vM})}{\partial \sigma_{vM}} \quad (3.20)$$

This expression does not differ from [11,25,31]. For application purposes, it is important that the latter law is not the only possible expression. For porous materials and materials with a similar microstructure, it is better to also consider the first invariant in order to adapt the results closer to the experiment. For materials that show tensorial nonlinear behavior as well as so-called second-order effects (which cannot be neglected), the inclusion of the third invariant is useful. It can be seen that the constitutive equations discussed here can also be used if large deformations occur. In this case, a suitable choice of the strain and the stress tensor and the time derivative is not trivial [61].

3.1 Anisotropy

There are various application examples for anisotropic creep behavior. These include the fiber-reinforced materials (see e.g. [62,63]) and the single crystal alloys [64,65]. However, the description is associated with numerous problems. The presumed symmetries are difficult to verify, since the scatter of the measurement data may be up to 20%. The symmetries that appear during creep also depend on loads applied in the past and the damage already done [66]. There is also a clear temperature dependence (aluminum alloy D16AT - samples from rolled sheets: at 275°C anisotropic creep, at 300°C isotropic creep [67]).

Symmetry considerations in connection with the direct tensor notation allow an effective way to develop anisotropic creep equations in a simple manner. One has to distinguish between material and physical symmetries. Material symmetries are symmetries on the micro level (crystal symmetries in metals and alloys, symmetries as a result of the arrangement of fibers and particles, etc.) whereas physical symmetries are the symmetries of the constitutive equations and result from the experimental observations. Orthogonal tensors $\mathbf{Q}$ are used to describe them. The following symmetries occur most frequently: the transverse-isotropic symmetry and the orthotropy. In these cases, orthogonal tensors can be specified as follows. For a reflection, there is

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}) = \mathbf{E} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.21)$$

with $\mathbf{n}$ as the normal to the mirror surface. For rotation follows

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \varphi (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \varphi \mathbf{m} \times \mathbf{E} \quad (3.22)$$

with the rotation axis $\mathbf{m}$. Both tensors are sufficient to characterize the corresponding symmetries.

Transverse-isotropic creep equations are discussed briefly below. The starting point is the condition

$$W(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T) = W(\boldsymbol{\sigma}), \quad (3.23)$$

which should be proven for

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \varphi (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \varphi \mathbf{m} \times \mathbf{E} \quad (3.24)$$

with $-\pi < \varphi < \pi$, $\mathbf{m} = \text{const}$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$. At first, one gets

$$(\mathbf{m} \times \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{m}) \cdot \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (3.25)$$

This differential equation yields the following characteristic system [68]

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{m} \quad (3.26)$$

with the general solutions

$$\boldsymbol{\sigma}^k(s) = \mathbf{Q}(s\mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_0^k \cdot \mathbf{Q}^T(s\mathbf{m}), \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.27)$$

and the corresponding integrals lead to

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2), \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3), \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}, \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{m}, \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot (\mathbf{m} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}) \quad (3.28)$$

Such sets of transverse-isotropic invariants are also derived in [69]. From the mathematical viewpoint, the characteristic system only has 5 independent integrals [68]. In [70,71], it was shown that the six integrals introduced are not completely independent from one another.

The creep equations can be presented as follows. Firstly, the stress tensor should be splitted

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\tau}_m \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\tau}_m \quad (3.29)$$

where $\mathbf{m}$ is the direction of the transverse isotropy (normal to the isotropy surface), $\boldsymbol{\sigma}_p$ is the plane part of the tensor $\boldsymbol{\sigma}$ in the surface, which is orthogonal to the direction of the transversal isotropy, and $\boldsymbol{\tau}_m$ is a shear stress vector. With the split of $\boldsymbol{\sigma}_p$

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{s}_p + \frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_p (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}), \quad \text{tr} \mathbf{s}_p = 0 \quad (3.30)$$

the following invariants can be introduced

$$I_{1m} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}, \quad I_{2m} = \frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_p, \quad I_{3m} = \text{tr} \mathbf{s}_p^2, \quad (3.31)$$

$$I_{4m} = \boldsymbol{\tau}_m \cdot \boldsymbol{\tau}_m, \quad I_{5m} = \boldsymbol{\tau}_m \cdot \mathbf{s}_p \cdot \boldsymbol{\tau}_m, \quad I_{6m} = \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\tau}_m \cdot \mathbf{s}_p \times \boldsymbol{\tau}_m)$$

The constraint for the invariants yields

$$I_{6m}^2 = I_{3m} I_{4m} - I_{5m}^2 \quad (3.32)$$

The ansatz for the potential is

$$W = W(I_{1m}, I_{2m}, I_{3m}, I_{4m}, I_{5m}) \quad (3.33)$$

Assuming, incompressibility one gets

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow W = W(2I_{1m} - I_{2m}, I_{3m}, I_{4m}, I_{5m}) \quad (3.34)$$

with $2I_{1m} - I_{2m} = 3\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m} - \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = 3\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{m}$. In addition, if there is an analogy to the classic von Mises-type material, the equivalent stress σ_{eq} will be introduced as quadratic with regard to the arguments: $2I_{1m} - I_{2m}, I_{3m}, I_{4m}, I_{5m}$. Then, the definition is the following

$$\sigma_{eq}^2 = J_0^2 + 3\alpha_1 J_1 + 3\alpha_2 J_2, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0 \quad (3.35)$$

where the abbreviations below were introduced

$$J_0 = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m} - \frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_p, \quad \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_p = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m},$$

$$2J_1 = \text{tr} \mathbf{s}_p^2 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2 - 2\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{m} + (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m})^2 - \frac{1}{2} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}_p)^2, \quad (3.36)$$

$$J_2 = \boldsymbol{\tau}_m \cdot \boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m})^2$$

With the Norton-Bailey-Odqvist potential

$$W = \frac{a}{n+1} \sigma_{eq}^{n+1} \quad (3.37)$$

one gets the creep equation

$$\dot{\mathbf{D}}^{cr} = \frac{3}{2} a \sigma_{eq}^{n-1} \left[J_0 \left(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{3} \mathbf{E} \right) + \alpha_1 \mathbf{s}_p + \alpha_2 (\boldsymbol{\tau}_m \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\tau}_m) \right] \quad (3.38)$$

The classical constitutive equation results from $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. The parameter identification is presented in [34,70].

The anisotropic creep law derived here for transverse isotropy (initial isotropy) can also be extended to the case of tertiary creep. The starting point is the creep law already

discussed and a postulated damage that is described by its evolution. The effective stress concept is used as in the isotropic case

$$\mathbf{D}^{cr} = \frac{3}{2} a \tilde{\sigma}_{eq}^{n-1} \left[\tilde{\mathbf{J}}_0 \left(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{3} \mathbf{E} \right) + \alpha_1 \tilde{\mathbf{s}}_p + \alpha_2 (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_m \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \tilde{\boldsymbol{\tau}}_m) \right] \quad (3.39)$$

$(\tilde{\dots})$ denotes effective values of the variables. However, it should be noted that there are no consistent suggestions on the formulation of these effective variables (see e.g. [72-74]). In addition, evolutionary equations for anisotropic damage have to be found but even here, the variety of options shows that there is still a need for further research. The current state of research is reported in [34,44].

4 Examples

The following examples on the one hand are supposed to demonstrate the application of creep mechanics to lower-dimension structural problems (shells, plates, beams, ...). Sometimes the dimension reduction will yield unexpected difficulties, if initially three-dimensional creep damage laws are used. On the other hand, these examples can be seen as benchmarks for testing commercial finite element software.

4.1 Beams

The classic beam theory according to Euler-Bernoulli is based on simplified kinematics. It is assumed that cross-sections that were orthogonal and straight to the beam axis before the deformation still have these properties after the deformation. The validity of these assumptions can be proven experimentally for classic construction materials and linear-elastic material behavior for small deformations. In connection with creep damage problems, however, one must assume that the above-mentioned effects no longer exist. The reason for this is, among other things, that the creep processes are no longer expected to be distributed uniformly across the cross-section and that the deformations are non-linear in the direction of the cross-sectional coordinates. Therefore, the theory according to Euler-Bernoulli has to be improved. The simplest form is the Timoshenko theory.

If the elastic solution is neglected, the creep problem can be solved analytically in the simplest case. For a beam that is simply supported on both sides and loaded with a constant distributed transverse load, the Euler-Bernoulli theory yields a polynomial of the order $2n + 2$, where n is the creep exponent. It is known from strength of materials theory that the elastic solution is a polynomial of 4th order. For classic creep materials, the value of the creep exponent ranges from $3 \leq n \leq 7$ (there are also examples where n goes up to 12 and higher). In conclusion, it can be said that for tasks about stationary creep treated with variation methods, the test functions need to at least be of $2n + 2$ degree. It should also be emphasized that the degree is material-specific, since the polynomial order also depends on the creep exponent. If the elastic approximation is taken as a starting solution (as is often recommended), the results can be far from reality.

Even in the simplest case, no analytical solutions can be calculated for the creep damage case. The corresponding tasks have to be treated approximately with the use of semi-analytical methods. The qualitative and quantitative statements known from the stationary case are principally still valid.

For the first time, an improved theory considering the transverse shear was proposed in [75]. The basic idea is analogous to the elastic case but with an added rotatory degree of freedom (rotations of the cross section, so that it is plane, but no longer orthogonal after deformation with respect to the beam axis) to the translatory degree of freedom

(deflections). A corresponding theory was derived based on the principle of virtual displacements, assuming specific distributions of the displacements and/or stresses over the thickness. From the classic elasticity theory, it is known that the normal stresses are linearly, the transverse shear stresses are parabolically and the normal stresses are cubically distributed in the transverse direction. Is an initially unspecified distribution law regarding the shear stress over the beam thickness chosen, one will get the usual equilibrium conditions after applying a mixed variational principle. In addition, there is an equation for the transverse shear force, which can be interpreted as a constitutive relationship. If this equation is written in the way known from elastic Timoshenko beams, it can be seen that this constitutive equation contains a correction factor (analogy to shear correction). It depends on the previously introduced and yet not specified distribution function. In the case of the postulated linear law, the value of the correction is $k = 1$. Using a cubic approach, it follows $k = 5/6$, i.e. the Reissner approximation is obtained. The best correction for station creep is

$$k = \frac{3n + 2}{4n + 2} \quad (4.1)$$

It is obvious that the correction of the material-specific creep exponent depends on n . The correction becomes smaller the more the creep exponent grows. The increase of the creep exponent is associated with an increase in the creep rate. Since the damage also is tied to this effect, it can be assumed that this results in a further decrease of the factor.

4.2 Pipe Bend

The second example should give a brief insight into the problems that can be expected when dealing with practical tasks. In [76], the creep damage analysis is extensively presented for a pipe bend. The focus was on the question whether this thin-walled component should be computed with two- or three-dimensional finite elements. The internal pressure load case is assumed, the temperature was kept constant. Just translatory (only displacements), but also the combination of translatory and independent rotatory degrees of freedom were chosen as boundary conditions. The pipe bend was made of 316 steel. The creep damage behavior was described using the Kachanov-Rabotnov-Leckie-Hayhurst model [77-79], whereby all parameters were known from the literature. For the case considered, the evolution of damage can be influenced by two stresses: the maximum tensile stress and the von Mises equivalent stress. It has been confirmed experimentally that the damage for the given steel is mainly influenced by the maximum tensile stress.

All calculations were carried out with the help of the commercial finite element system ANSYS, using the elements SHELL43 and SOLID45 recommended for plastic and creep calculations. First, the elements were tested for the elastic case. Here, the calculations based on the two-dimensional and the three-dimensional elements showed a very good agreement.

The transition to creep damage calculations did not result in such a correspondence any more. The first calculation was made for the correct material model (damage caused by the maximum stress) and the obvious boundary conditions (purely translatory). The results for the stresses and for the damage showed no similarity especially with regard to the critical areas (maximum stress, maximum damage). Further calculations, for which the boundary conditions or the material model were changed, brought a qualitatively and quantitatively satisfactory agreement, i.e. an "incorrect material model" and "non-classical boundary conditions" led to this.

Those effects are difficult to explain. In this case, a brief analysis of the material model shows that the von Mises equivalent stress is not sensitive to tension and pressure or generally to the type of stress state. However, creep damage processes are highly sensitive

to the type of stress state, if the tension stress is increasing, so does the damage while the pressure does not "heal". The effects associated with the change in boundary conditions indicate that the cross sections are simulated too stiff using only translatory boundary conditions. With the introduction of a computational model in the sense of Timoshenko (shear-soft model), the two-dimensional and three-dimensional calculations could be adapted much better. In addition, it was demonstrated that the integration over the thickness using the SHELL43 element is not provided with enough Gauss points (here 5). Test calculations with other commercial software showed that 17 integration points yield a very good match [34]. Other interesting effects in thick-walled pipes are described in [80].

5 Further Developments

As it was shown in the previous sections, the application possibilities of the presented theories are suggested. Below, some brief information is added.

5.1 Rheological Models

The method of rheological modeling is one possibility to establish constitutive equations for complex material behavior. The basics are presented, for example, in [60]. The approach was later developed for general continuum mechanics purposes in [81,82] (note that [82] is the translation of the Russian original book from 1976). In [83], a phase mixture model is suggested for simulating the mechanical behavior of tempered martensitic steels at high temperatures. Assuming only two phases (hard phase and soft phase) with an unified description of the rate-dependent deformation including hardening and softening, the model starts from an iso-strain approach (similar to composite mechanics) along with a hard and a soft constituent. For both phases, a two-element model (elastic and inelastic branch connected in series) was suggested and the elastic part in both branches was assumed to be identical. Finally, they were connected in parallel, the parameters were calibrated for the uniaxial model, which can easily be extended to the three-dimensional case.

After the implementation of the model in a finite element code and testing the correctness of the numerical solution by simple benchmarks, the behavior of an idealized steam turbine rotor during a cold start and a subsequent hot start was simulated. The heat transfer analysis was conducted, while prescribing the nonstationary steam temperature and the heat transfer coefficients. The resulting temperature fields served as input for the structural analysis of the rotor.

The original constitutive and evolution equations were proposed in [50,51], computational tasks were discussed in [84] and the calibration procedure was described in detail in [85]. Note that a similar approach was used in [86] for POM.

5.2 Double Power Law

The Norton-Bailey law is used in many technical applications - the law is simple, so is its calibration and it can easily be extended to the primary and tertiary creep ranges. The disadvantage of this law is the validity in a limited stress range. With respect to the need to simulate creep behavior even for small and moderate stresses, in [87], a double power law was suggested. Published experimental data for advanced heat resistant steels indicate that the high creep exponent (in the range 7–12) may decrease to the low value of approximately unity within the stress range which is relevant for engineering structures like the transition from the power law to the viscous law and vice versa. The double power law matches the behavior in both ranges in an acceptable manner and the transition region itself is described by a smooth function.

5.3 Hyperbolic Sine Stress Response Function

A classic conventional material behavior model can be extended, if varying thermo-mechanical loading should be taken into account in wide stress ranges. In [88], a creep constitutive law in the form of a hyperbolic sine stress response function is used. The original proposal was suggested by Nadai [18]. For the analysis of a failure case in a power plant, the original model was extended assuming a damage process described by a scalar damage parameter and appropriate evolution equation in the sense of Kachanov–Rabotnov [77-78]. In addition, several parameters were added to reflect the hardening and recovery effects under cyclic loading. The uniaxial simulations were compared to cyclic stress–strain diagrams and other experimental data (creep curves, tensile stress–strain diagrams, relaxation curves, etc.) for the austenitic steel AISI type 316 at 600°C in a wide stress range.

6 Outlook

The outlook formulated below is purely subjective and does not claim to be complete. Only perspectives on the questions discussed in the article are given. Likewise important problems, such as the behavior during dynamic load changes, etc., are not taken into account, although there is still a great need for research. Those load changes are the usual case in practice, however, the experimental validation of certain facts and the theoretical basis for their description have not yet been sufficiently developed. Adapting static solutions by modifying the equations to dynamic processes is not the most elegant way out.

6.1 Own Challenges

Creep mechanics is still not entirely discovered, since numerous questions have not been adequately or finally clarified. Taking the three tasks described in the beginning as a starting point, the following main problems can be formulated. In connection with the description of the constitutive behavior, an open question is the formulation of uniform laws for the low, moderate and higher stress ranges. Different creep mechanisms occur in the range of lower stresses in comparison to higher ones. As part of the phenomenological concept, an analytical equation must be formulated which applies to the entire range of stresses. It should be as simple as possible (linear laws are used at low stresses, the power law is usually applied at higher stresses). As simple as possible also means that not too many material parameters have to be determined and that the expansion to three-dimensional stress states and non-isothermal processes can be carried out elementarily. First approaches to include the temperature dependencies are shown in [89-91]. Since creep processes are sensitive to the type of stress state, new ideas concerning this must be employed. Finally, it should be clarified whether the concept treating anisotropy introduced in [70] can also be transferred to all cases of anisotropy. In the contribution named above, only the case of transverse isotropic creep is discussed even though at least the orthotropy would be of special interest for practical applications.

6.2 Open Questions

There are numerous problems with the open questions, from the theoretical point of view which also have not been solved yet. This includes for example a consistent continuum mechanical representation of the theoretical foundation considering thermodynamics and the theoretical justification of creep equations. A lot of creep mechanics problems are related to thin-walled structures, which in the sense of structural mechanics are treated as one-dimensional or two-dimensional models. The starting point for such models is often the three-dimensional theory. The derivation of the governing low-dimensional equations can be realized with the help of hypotheses or mathematical techniques. Also, the direct formulation of one- or two-dimensional structural mechanics equations can be applied. In the case of creep problems, there are still no fully satisfying

approaches. This is due to the fact that creep-damage yields strong inhomogeneities over the thickness. In addition to the known problems with the derivation or the establishment of two- or one-dimensional equations, the direct approach results in the difficulty of finding suitable constitutive laws. Finally, it also is not clear whether micro-macro approaches in analogy to the plasticity theory can be applied. These concept are focused on solving the problem within a reduced representative volume first and then using appropriate homogenizations known from composite mechanics to get the solution on the macro level. However, the limits and possibilities are not yet well enough described so that it remains open whether this approach can be used in creep mechanics.

References

- [1] Altenbach H., Eisenträger J., Introduction to creep mechanics. Encyclopedia of Continuum Mechanics (Eds H. Altenbach & A. Öchsner), 2020, Berlin, Heidelberg, Springer, pp. 1337-1344
- [2] Naumenko K., Altenbach H., *Modeling High Temperature Materials Behavior for Structural Analysis. Part I: Continuum Mechanics Foundations and Constitutive Models*. Cham, Springer, 2016 (Advanced Structured Materials series, vol. 28)
- [3] Lurie A.I., *Theory of Elasticity*. Berlin, Springer, 2005
- [4] Lebedev L., Cloud M., Eremeyev V., *Tensor Analysis with Applications to Mechanics*. World Scientific Publishing Company, 2010
- [5] Altenbach H., Zu einigen Aspekten der klassischen Kontinuumsmechanik und ihrer Erweiterungen// Technische Mechanik 1990, vol. 11, issue 2, pp. 95-105
- [6] Naumenko K., Altenbach H., *Modeling High Temperature Materials Behavior for Structural Analysis. Part II: Solution Procedures and Structural Analysis Examples*. Cham, Springer, 2019 (Advanced Structured Materials series, vol. 112)
- [7] Hayhurst D.R., Wong M.T., Vakili-Tahami F., The use of CDM analysis techniques in high temperature creep failure of welded structures// JSME Int. J. Series A 2002, vol. 45, pp. 90-97
- [8] Le May I., da Silveria T.L., Cheung-Mak S.K.P., Uncertainties in the evaluations of high temperature damage in power stations and petrochemical plant// Int. J. of Pressure Vessels & Piping 1994, vol. 59, pp. 335-343
- [9] Neubauer B., Wedel U., Restlife estimation of creeping components by means of replicas. Advances in Life Prediction Methods (Eds D.A. Woodford & J.R. Whitehead), 1983, ASME, pp. 307-314
- [10] Odqvist F.K.G.; Hult J., *Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe*. Berlin u.a., Springer, 1962
- [11] Odqvist F.K.G.: Historical survey of the development of creep mechanics from its beginnings in the last century to 1970. Creep in Structures (Eds A.R.S. Ponter \& D.R. Hayhurst), 1981, Berlin, Springer, pp. 1-12
- [12] da C. Andrade E.N., On the viscous flow of metals, and allied phenomena// Proc. R. Soc. Lond. A 1910, vol. LXXXIV, issue 567, pp. 1-12
- [13] da C. Andrade E.N., The flow in metals underlarge constant stresses// Proc. R. Soc. Lond. A 1910, vol. XC, issue 619, pp. 329-342

- [14] Norton F.H., *Creep of Steel at high Temperatures*. New York, McGraw-Hill, 1929
- [15] Bailey R.W., The utilization of creep test data in engineering design// *Proc. Inst. Mech. Eng.* 1935, vol. 131, issue 1, pp. 131–349
- [16] Stodola A., Die Kriecherscheinungen, ein neuer technisch wichtiger Aufgabenkreis der Elastizitätstheorie// *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 1933, vol. 13, issue 2, pp. 143-146
- [17] Odqvist F.K.G., *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*. Oxford, Oxford University Press, 1974
- [18] Nadai A., The influence of time upon creep. The hyperbolic sine creep law. Contributions to the Mechanics of Solids dedicated to Stephen Timoshenko by his friends on the occasion of his sixties birthday anniversary. Macmillan, 1938, pp. 155-170
- [19] Soderberg C.R., Plasticity and Creep in Machine Design. Contributions to the Mechanics of Solids dedicated to Stephen Timoshenko by his friends on the occasion of his sixties birthday anniversary. Macmillan, 1938, pp. 197-210
- [20] Hoff N.J., The necking and the rupture of rods subjected to constant tensile loads// *Trans. ASME Journal of Applied Mechanics* 1953, vol. 20, issue 1, pp. 105-108
- [21] Hoff N.J., Buckling at high temperature// *Journal of the Royal Aeronautical Society* 1957, vol. 61, issue 563, pp. 756-774
- [22] Rabotnov Yu.N., *Elements of Hereditary Solid Mechanics*. Moscow, Mir, 1980
- [23] Arutyunyan N.K., *Some Problems in the Theory of Creep*. Oxford, Pergamon Press, 1966
- [24] Hult J.A., *Creep in Engineering Structures*. Waltham, Blaisdell Publishing Company, 1966
- [25] Rabotnov Yu.N., *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam, North-Holland, 1969
- [26] Penny R.K., Marriott D.L., *Design for Creep*. London, Chapman & Hall, 1995
- [27] Kraus H., *Creep Analysis*. New York, Wiley & Sons, 1980
- [28] Malinin N.N., *Raschet na polzuchest' konstrukcionnykh elementov (Creep calculations of structural elements, in Russ.)*. Moskva, Mashinostroenie, 1981
- [29] Boyle J.T., Spence J., *Stress Analysis for Creep*. London, Butterworth, 1983
- [30] Lemaitre J., Chaboche J.-L., *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge, Cambridge University Press, 1990
- [31] Skrzypek J.J., *Plasticity and Creep*. Boca Raton, CRC Press, 1993
- [32] Skrzypek J.J., Gancarski A., *Modelling of Material Damage and Failure of Structures*. Berlin, Springer 1998 (Foundations of Engineering Mechanics)
- [33] Betten J., *Creep Mechanics*. Berlin, Springer, 2005
- [34] Naumenko K., Altenbach, H., *Modeling of Creep for Structural Analysis*. Berlin, Springer, 2007 (Foundations of Engineering Mechanics)
- [35] Hyde T.H., Sun W., Hyde J.C., *Applied Creep Mechanics*. New York, McGraw Hill Education, 2013

- [36] Lokoshchenko A.M., *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov (in Russ., Creep and Long-term Strength of Metals)*. Moscow, FIZMATLIT, 2016
- [37] Hoff N.J. (Ed.), *Creep in Structures*. Berlin, Springer, 1962
- [38] Hult J. (Ed.), *Creep in Structures*. Berlin, Springer, 1972
- [39] Ponter A.R.S., Hayhurst D.R. (Eds), *Creep in Structures*. Berlin, Springer, 1981
- [40] Życzkowski M. (Ed.), *Creep in Structures*. Berlin, Springer, 1991
- [41] Murakami S., Ohno N. (Eds), *IUTAM Symposium on Creep in Structures*. Dordrecht, Kluwer, 2001
- [42] Altenbach H., Kruch S. (Eds), *Advanced Materials Modelling for Structures*. Berlin-Heidelberg, Springer, 2013 (Advanced Structured Materials series, Vol. 19)
- [43] Altenbach H., Skrzypek J.J. (Eds), *Creep and Damage in Materials and Structures*. - Wien, New York, Springer, 1999 (CISM Courses and Lectures No. 399)
- [44] Skrzypek J.J., Ganczarski, A. (Eds), *Anisotropic Behaviour of Damaged Materials*. Berlin, Springer, 2003
- [45] Ohno N., Uehara T. (Eds), *Engineering Plasticity and Its Applications from Nanoscale to Macroscale*. Stafa-Zürich, Trans. Tech. Publications Ltd., 2007
- [46] Altenbach H., Creep analysis of thin-walled structures// *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 2002, vol. 82, issue 8, pp. 507-533
- [47] Ashby M.F., Gandhi C., Taplin D.M.R., Fracture-mechanism maps and their construction for f.c.c. metals and alloys// *Acta Metall.* 1979, vol. 27, pp. 699-729
- [48] Nabarro F.R.N., de Villiers H.L., *The Physics of Creep. Creep and Creep-resistant Alloys*. London, Taylor & Francis, 1995
- [49] Roesler J., Harders H., Baeker M. *Mechanical Behaviour of Engineering Materials - Metals, Ceramics, Polymers, and Composites*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2007
- [50] Naumenko K., Kutschke A., Kostenko Y., Rudolf T. Multi-axial thermo-mechanical analysis of power plant components from 9-12%Cr steels at high temperature// *Engineering Fracture Mechanics* 2011, vol. 78, pp. 1657-1668
- [51] Naumenko K., Altenbach H., Kutschke A. A Combined Model for Hardening, Softening, and Damage Processes in Advanced Heat Resistant Steels at Elevated Temperature// *International Journal of Damage Mechanics* 2011, vol. 20. issue 4, pp. 578–597
- [52] Naumenko K., Gariboldi E. A phase mixture model for anisotropic creep of forged Al–Cu–Mg–Si alloy// *Materials Science and Engineering A* 2014, vol. 618, pp. 368–376
- [53] Eisenträger J., Naumenko K., Altenbach H., Gariboldi E. Analysis of temperature and strain rate dependencies of softening regime for tempered martensitic steel// *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 2017, vol. 52, issue 4, pp. 226-238
- [54] Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V.A., Phenomenological Yield and Failure Criteria. Plasticity of Pressure-Sensitive Materials (Eds H. Altenbach & A. Öchsner). Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, pp. 49-152, (Engineering Materials series)
- [55] Kolupaev V.A. *Equivalent Stress Concept for Limit State Analysis*. Springer, 2018 (Advanced Structured Materials series, Vol. 86)

- [56] Życzkowski, M.: *Combined Loadings in the Theory of Plasticity*. - PWN, Warszawa, 1981
- [57] Altenbach H., Altenbach J., Zolochovsky A., *Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik*. Stuttgart, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1995
- [58] Lode W., Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel// *Zeitung Phys.* 1926, vol. 36, pp. 913-939
- [59] Odqvist F.K.G., *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*. Oxford, Oxford University Press, 1974
- [60] Reiner M., *Deformation and Flow. An Elementary Introduction to Rheology*. London: H.K. Lewis & Co., 1969
- [61] Billington E.W., *Introduction to the Mechanics and Physics of Solids*. - Bristol, Hilger, 1986
- [62] Robinson D.N., Binienda W.K., Ruggles M.B., Creep of polymer matrix composites. I: Norton/Bailey Creep Law for transverse isotropy// *Trans. ASCE. J. Engng Mech.* 2003, vol. 129, issue 3, pp. 310-317
- [63] Robinson D.N., Binienda W.K., Ruggles M.B., Creep of polymer matrix composites. II: Monkman-Grant failure relationship for transverse isotropy// *Trans. ASCE. J. Engng Mech.* 2003, vol. 129, issue 3, pp. 318-323
- [64] Bertram A., Olschewski J., Anisotropic modelling of the single crystal superalloy SRR99// *Comp. Mat. Sci.* 1996, vol. 5, pp. 12-16
- [65] Mahnen R., Anisotropic creep modeling based on elastic projection operators with applications to CMSX-4 superalloy// *Int. J. Mech. Sci.* 1998, vol. 14, pp. 235-280
- [66] El-Magd E., Betten J., Palmen P., Auswirkung der Schädigungsanisotropie auf die Lebensdauer von Stählen bei Zeitstandsbeanspruchung// *Mat.-wiss. u. Werkstofftechn.* 1996, vol. 27, pp. 239-245
- [67] Konkin V.N., Morachkovskij O.K., Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' legkikh splavov, proyavlyayushchikh anizotropnye svoistva (Creep and long-term strength of light alloys with anisotropic properties, in Russ.)// *Problemy prochnosti* 1987, issue 5, pp. 38-42
- [68] Courant R., Hilbert D., *Methods of Mathematical Physics, Partial Differential Equations, Vol. 2*. New York, Wiley Interscience, 1989
- [69] Bruhns O., Xiao H., Meyers A., On representation of yield functions for crystals, quasicrystals and transversely isotropic solids// *Eur. J. Mech. A/Solids* 1999, vol. 18, pp. 47-67
- [70] Naumenko K., Altenbach H. A phenomenological model for anisotropic creep in a multi-pass weld metal// *Arch. Appl. Mech.* 2005, vol. 74, pp. 808-819
- [71] Altenbach H., Naumenko K., Zhilin P.A., A note on transversely-isotropic invariants. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 2006, vol. 86, issue 2, pp. 162-168
- [72] Cordebois J., Sidoroff F., Damage induced elastic anisotropy. *Mechanical Behaviors of Anisotropic Solids* (Ed. J.P. Boehler). Boston, Martinus Nijhoff, 1983. - pp. 761-774

- [73] Betten J., Materialgleichungen zur Beschreibung des sekundären und tertiären Kriechverhaltens anisotroper Stoffe// Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1984, vol. 64, pp. 211-220
- [74] Murakami S., Sanomura Y., Hattori M., Modelling of the coupled effect of plastic damage and creep damage in Nimonic 80A// Int. J. Solids Struct. 1986, vol. 22, issue 4, pp. 373-386
- [75] Naumenko K., On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations// Technische Mechanik 2000, vol. 20, issue 3, pp. 215-226
- [76] Altenbach H., Kushnevsky V., Naumenko K., On the use of solid- and shell-type finite elements in creep-damage predictions of thinwalled structures// Arch. Appl. Mech. 2001, vol. 71, pp. 164-181
- [77] Kachanov L.M., O vremeni razrusheniya v usloviyakh polzuchesti (in Russ., On the time to rupture under creep conditions)// Izv. AN. SSSR. Otd. Tekh. Nauk 1958, issue 8, pp. 26-31
- [78] Rabotnov Yu.N., O mekhanizme dlitel'nogo razrusheniya (in Russ., A mechanism of the long term fracture). Voprosy Prochnosti Materialov i Konstruktsii, AN SSSR, 1959, pp. 5-7
- [79] Hahurst D., Leckie F., The effect of creep constitutive and damage relationships upon rupture time of solid circular torsion bar// Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1973, vol. 21, pp. 431-446
- [80] Altenbach H., Gorash Y., Naumenko K., Steady-state creep of a pressurized thick cylinder in both the linear and the power law ranges// Acta Mechanica 2008, vol. 195, issue 1-4, pp. 263-274
- [81] Krawietz A., *Materialtheorie*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1986
- [82] Palmov V., *Vibrations of Elasto-Plastic Bodies*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1998 (Foundations of Engineering Mechanics)
- [83] Eisenträger, Naumenko K., Kostenko Y., Altenbach H. Analysis of a Power Plant Rotor Made of Tempered Martensitic Steel Based on a Composite Model of Inelastic Deformation. Advances in Mechanics of High-Temperature Materials (Eds K. Naumenko & M. Krüger). Springer, 2020 (Advanced Structured Materials series, Vol. 117)
- [84] Eisenträger J., Naumenko K., Altenbach H., Numerical implementation of a phase mixture model for rate-dependent inelasticity of tempered martensitic steels// Acta Mechanica 2018, vol. 229, pp. 3051–3068
- [85] Eisenträger J., Naumenko K., Altenbach H., Calibration of a phase mixture model for hardening and softening regimes in tempered martensitic steel over wide stress and temperature ranges// J. Strain Anal. Eng. Des. 2018, vol. 53, pp. 156–177
- [86] Altenbach H., Girchenko A., Kutschke A., Naumenko K., Creep Behavior Modeling of Polyoxymethylene (POM) Applying Rheological Models. Inelastic Behavior of Materials and Structures Under Monotonic and Cyclic Loading (Eds H. Altenbach & M. Brünig), Cham, Springer, 2015, pp. 1–15 (Advanced Structured Materials series, vol. 57)
- [87] Naumenko K., Altenbach H., Gorash, Y., Creep analysis with a stress range dependent constitutive model// Archive of Applied Mechanics 2009, vol. 79, issue 6-7, pp. 619–630

- [88] Gorash Y., Altenbach H., Lvov G., Modelling of high-temperature inelastic behaviour of the austenitic steel AISI type 316 using a continuum damage mechanics approach// The Journal of Strain Analysis for Engineering Design 2012, vol. 47, issue 4, pp. 229–243
- [89] Kostenko Y., Lvov G., Gorash E., Altenbach H., Naumenko K., Power plant component design using creep-damage analysis. Proc. of 2006 ASME Int. Mech. Engng Congress and Exposition, ASME, 2006, IMECE2006-13710, pp. 1-10
- [90] Altenbach H., Gorash Y., Naumenko K., Creep analysis for a wide stress range based on relaxation data// Modern Physics Letters B 2008, vol. 22, issue 31 & 32, pp. 5413-5418
- [91] Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y., Creep analysis with a stress range dependent constitutive model// Arch. Appl. Mech. 2009, vol. 79, issue 6/7, pp. 619-630

Information about the authors

Holm Altenbach, Dr. of Technical Sciences, Professor, Dr.h.c.mult., Foreign member of the Russian Academy of Sciences

Affiliation: Chair of Engineering Mechanics, Institute of Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Address: Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg, Germany

Tell: +49 391 67–58814

E-mail: holm.altenbach@ovgu.de

Katharina Knappe, M.Sc.

Affiliation: Chair of Engineering Mechanics, Institute of Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Address: Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg, Germany

Tell: +49 391 67–51985

E-mail: katharina.knappe@ovgu.de

Received 10.08.2020

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРЕССОВАНИЯ
КРУГЛОГО СПЕЧЕННОГО ОБРАЗЦА В КОНИЧЕСКИХ МАТРИЦАХ
Маргарян М.А.

Ключевые слова: спеченный неупрочняемый материал, пористость, прессование, напряженно-деформированное состояние, компьютерное моделирование.

Margaryan M.A.

Computer modeling the process of pressing a round sintered sample in conical die

Keywords: sintered material, porosity, pressing, stress-strain state, computer simulation

The process of pressing a round sintered sample in conical dies with different tapering was modeled in the ABAQUS software environment. On the upper butt-end of the cylindrical sample, displacement in the vertical direction is given, with which it passes through the container, the die, and calibration part of the press mould. The zones of the distribution of Mises stress, the main components of the stress state, the strain intensity and porosity of the material are obtained, from which the data in zone of the conical die are analyzed. The values of the components of the stress state and porosity are determined. The graphs of these quantities were plotted at the entrance to the die and at the exit from the die, as well as graphs of averaged data over the cross section along the die. Based on the obtained data, the features of the effect of the angle tapering of die on the pressing process are revealed and some assumptions used in solving the problem by the analytical method are confirmed.

Մարգարյան Մ.Ա.

Կոնական մամլամայրերում եռակալված կլոր նմուշի
մամլման գործընթացի համակարգչային մոդելավորումը

Հիմնաբառեր. եռակալված նյութ, ծակոտկենություն, մամլում, լարվածադեֆորմացիոն վիճակ, համակարգչային մոդելավորում

Եռակալված կլոր հատույթով նմուշի տարբեր կոնականությամբ մամլամայրերում մամլման գործընթացը մոդելավորվել է «ABAQUS» ավտոմատացված ծրագրային միջավայրում: Գլանական նմուշի վերնի ճակատին տրվել է վերտիկալ ուղղությամբ հավասարաչափ տեղափոխություն, ինչի պատճառով այն անցնում է մամլակաղապարի կոնտեյներով, կոնական մամլամայրով և չափաբերման մասով: Ստացվել են Միզեսի լարման, լարվածային վիճակի հիմնական բաղադրիչների, դեֆորմացիաների ինտենսիվության և նյութի ծակոտկենության բաշխման գոտիները, որոնցից վերլուծվել են միայն մամլակաղապարի կոնական մամլամայրում գտնվող նմուշի տվյալները: Որոշվել են լարվածային վիճակի բաղադրիչների և ծակոտկենության արժեքները և կառուցվել են դրանց մամլամայր մտնելիս և դուրս գալիս, ինչպես նաև մամլամայրի երկայնքով զլանական նմուշների լայնական հատույթներում միջինացված արժեքների բաշխման գրաֆիկները: Ստացված տվյալների հիման վրա բացահայտվել են մամլամայրի կոնականության անկյան մեծության ազդեցության առանձնահատկությունները մամլման գործընթացի վրա և հաստատվել են խնդրի վերլուծական եղանակով լուծման ժամանակ ընդունվող մի քանի ենթադրություններ:

В программной среде «ABAQUS» смоделирован процесс прессования спечённого образца круглого сечения в конических матрицах различной конусности. К его верхнему торцу подается равномерное перемещение в вертикальном направлении, в результате чего образец проходит через контейнер, коническую матрицу и калибровочную части пресс-формы. Получены зоны распределения напряжения Мизеса, основных компонентов напряжённого состояния, интенсивности деформаций и пористости материала, на основе которых были проанализированы только данные для образца, находящегося в конической матрице. Определены значения компонентов напряжённого состояния и пористости, построены

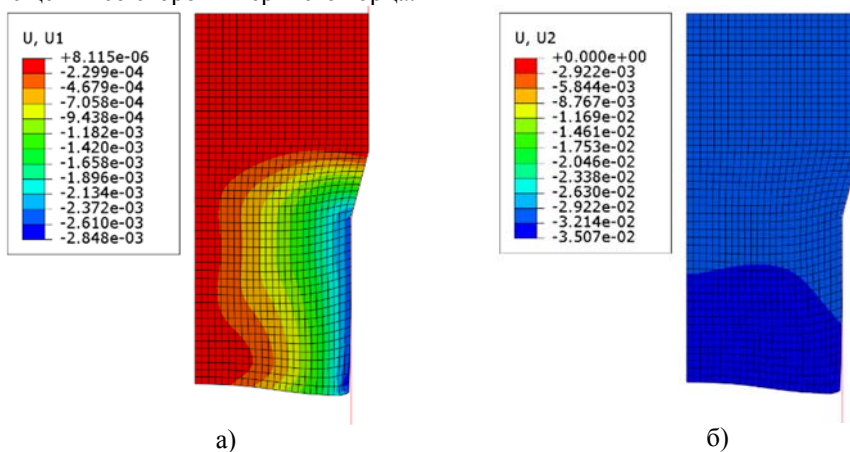
графики этих величин при входе в матрицу и на выходе из неё, а также графики усреднённых данных по поперечному сечению вдоль матрицы. На основе полученных данных выявлены особенности влияния величины угла конусности матрицы на процесс прессования и подтверждены некоторые допущения, используемые при решении задачи аналитическим методом.

Моделирование инженерных задач с использованием автоматизированных программных сред (АПС) позволяет в течение короткого времени получать результаты с достаточно большой точностью. При этом, возникаемые проблемы могут решаться как в области упругих деформаций (расчёт прочности), так и в области пластических деформаций (технологический расчёт). Целесообразность использования АПС подтверждена по результатам многочисленных научно-практических работ. В частности, можно отметить работы, проведённые в среде «ABAQUS» [1,2]. Иногда, в зависимости от типа задач, в их решениях используются методы сопоставления аналитического метода и АПС или сопоставления двух разных АПС [3].

Исследование процессов прессования стержней из спечённого материала аналитическим методом достаточно сложны и мало изучены из-за наличия пористости в материале [4-6]. Что касается компьютерного моделирования этих задач для матриц различной конусности, то таковое практически не применялось, следовательно, работы в этом направлении актуальны.

Цель работы – в автоматизированной программной среде «ABAQUS» исследование распределения напряжённо-деформированного состояния и пористости спечённых стержней при прессовании в матрицах различной конусности и выявление влияния угла конусности на параметры технологического процесса.

На фиг. 1 в трёх частях пресс-формы (контейнере, конической матрице и калибровочной части) показаны зоны перемещения в горизонтальном и вертикальном направлениях цилиндрического образца, полученные путём подачи равномерного перемещения со стороны верхнего торца.



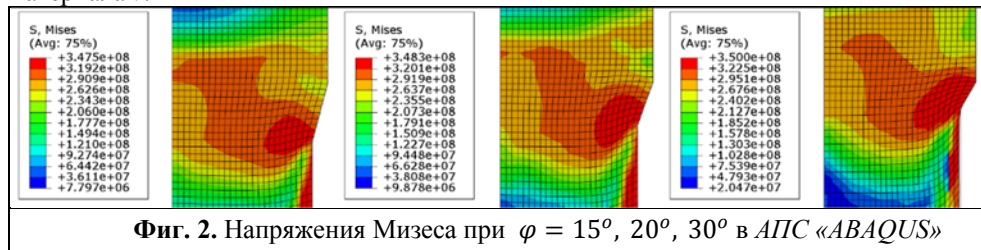
Фиг. 1. Зоны перемещения, полученные в АПС в горизонтальном (а) и вертикальном (б) направлениях

Моделирование задачи в АПС «ABAQUS». Начальные условия задачи: начальный и конечный (готовое изделие) диаметры стержня – $D_0=25$ мм и $d=22,5$ мм, коэффициент контактного трения – $f=0,1$, углы конусности матрицы – $\varphi =$

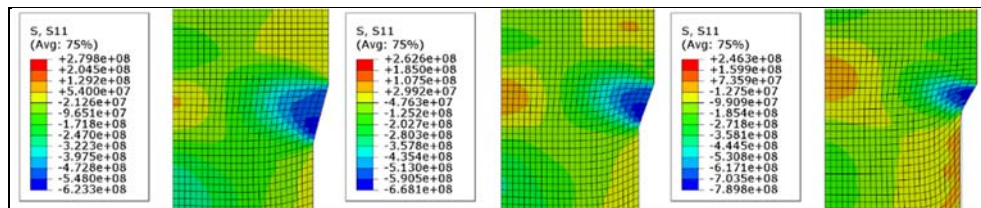
15°, 20°, 30°, тип четырёхугольных элементов сети при делении стержня конечным числом элементов – CAX4R, количество – 1250.

Параметры материала: плотность – 8000 кг/м³, относительная плотность – 0,9 (в соответствии с которой начальная пористость материала – $\nu_0 = 0,1$), модуль Юнга – 210 ГПа, коэффициент Пуассона – 0,3. Для решения задачи был выбран неупрочняемый материал с пределом текучести $\sigma_T = 350$ МПа.

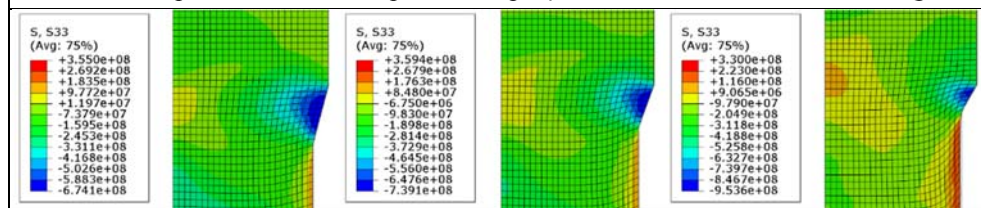
В результате решения задачи были получены все компоненты напряжённо-деформированного состояния. На фиг. 2-8 на половине осевого сечения цилиндра показаны зоны распределения характерных величин его напряжённо-деформационного состояния: интенсивностей напряжений σ_i (напряжения Мизеса) и деформаций ε_i [7], компонентов напряжённого состояния (радиальных $S_{11} = \sigma_r$, окружных $S_{33} = \sigma_\theta$, осевых $S_{22} = \sigma_z$ и касательных $S_{12} = \tau_{rz}$ напряжений) и пористости материала ν .



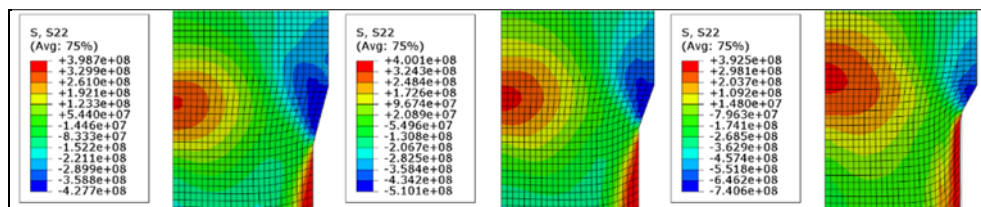
Фиг. 2. Напряжения Мизеса при $\varphi = 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ в АПС «ABAQUS»



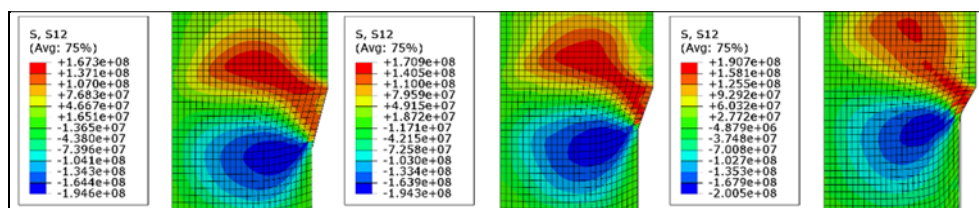
Фиг.3. Зоны радиальных σ_r напряжений при $\varphi = 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ в АПС «ABAQUS»



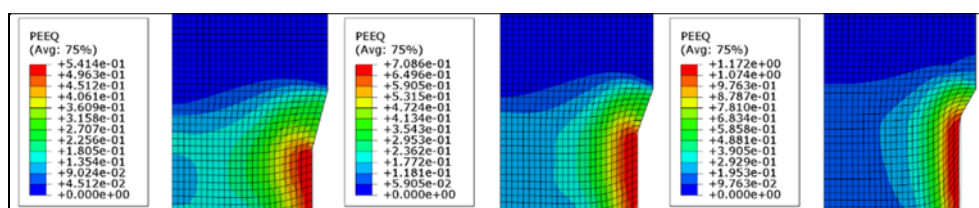
Фиг.4. Зоны окружных σ_θ напряжений при $\varphi = 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ в АПС «ABAQUS»



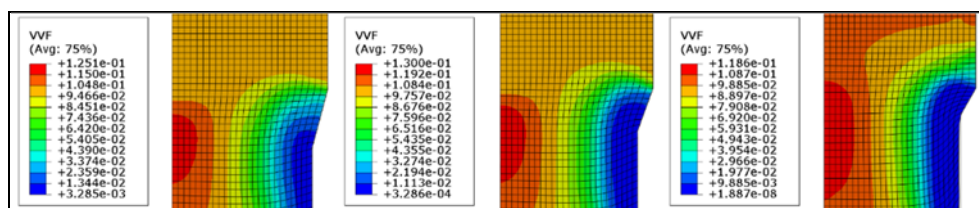
Фиг.5. Зоны осевых σ_z напряжений при $\varphi = 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ в АПС «ABAQUS»



Фиг.6. . Зоны касательных τ_{rz} напряжений при $\varphi = 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ в АПС «ABAQUS»



Фиг.7. . Зоны интенсивности деформаций ϵ_i при $\varphi = 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ в АПС «ABAQUS»

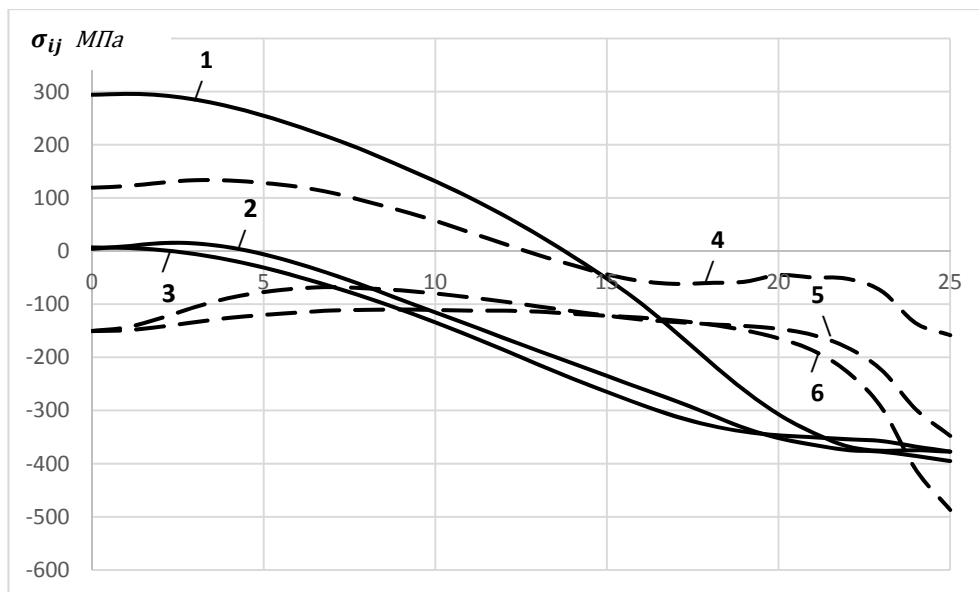


Фиг.8. . Зоны пористости v при $\varphi = 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ в АПС «ABAQUS»

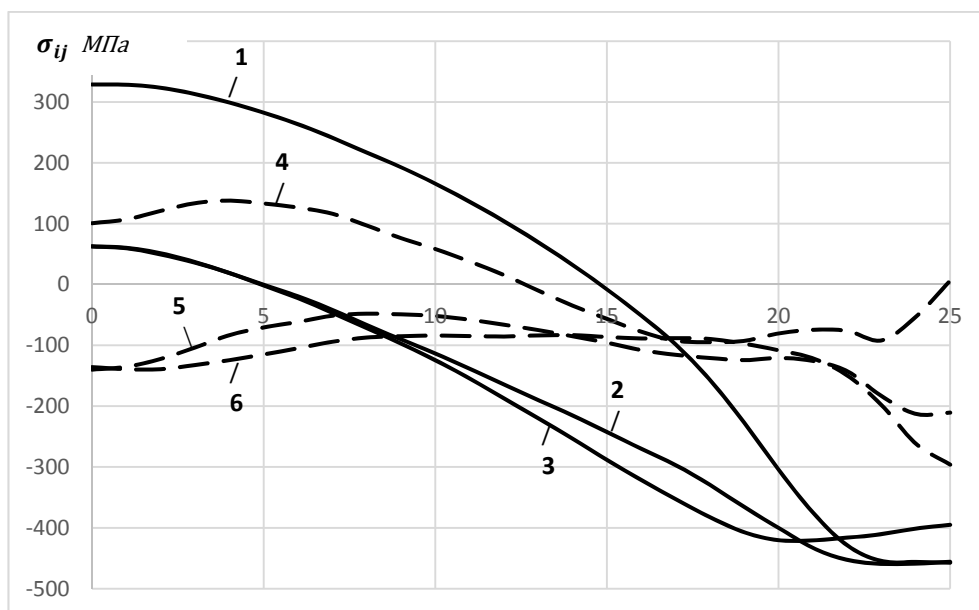
На фиг. 9-11 представлены графики распределения величин нормальных напряжений (величины касательных напряжений не обсуждаются, так как они в несколько раз меньше нормальных) в АПС при входе в матрицу и на выходе из неё (точка 0 находится на оси образца, а точка 25 – на его краевом контуре).

В результате исследования графиков, полученных на фиг 9-11, можно сделать следующие выводы: напряжения σ_θ и σ_r почти одинаковы (что принимается при решении проблемы аналитическим методом [4,8,9]); абсолютные значения напряжений при входе в матрицу значительно выше по сравнению с напряжениями при выходе из матрицы; во всех точках контакта с матрицы все напряжения отрицательные, а на оси – в основном, положительные.

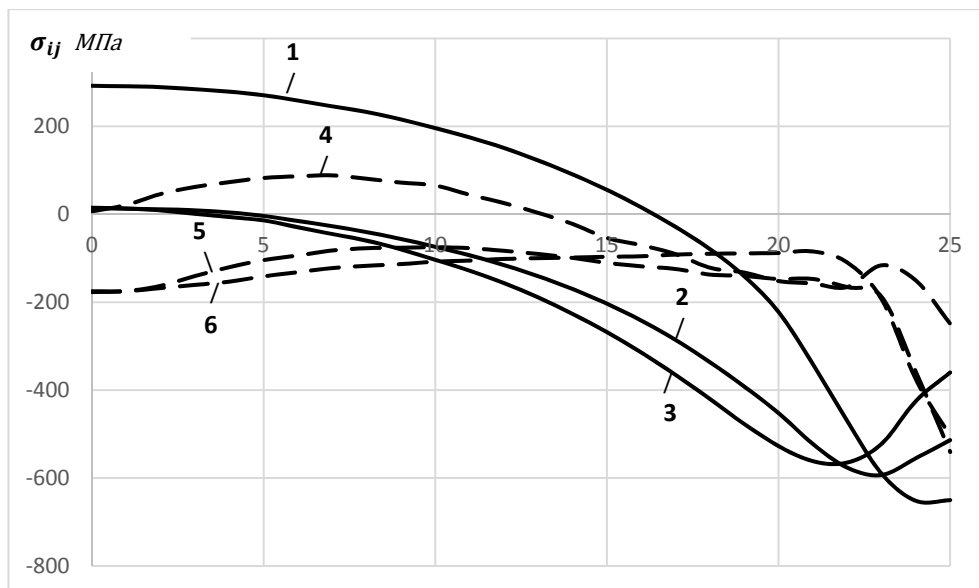
На фиг.12 представлены графики распределения усреднённых значений компонентов напряжённого состояния в поперечных сечениях цилиндрических образцов - вдоль матрицы.



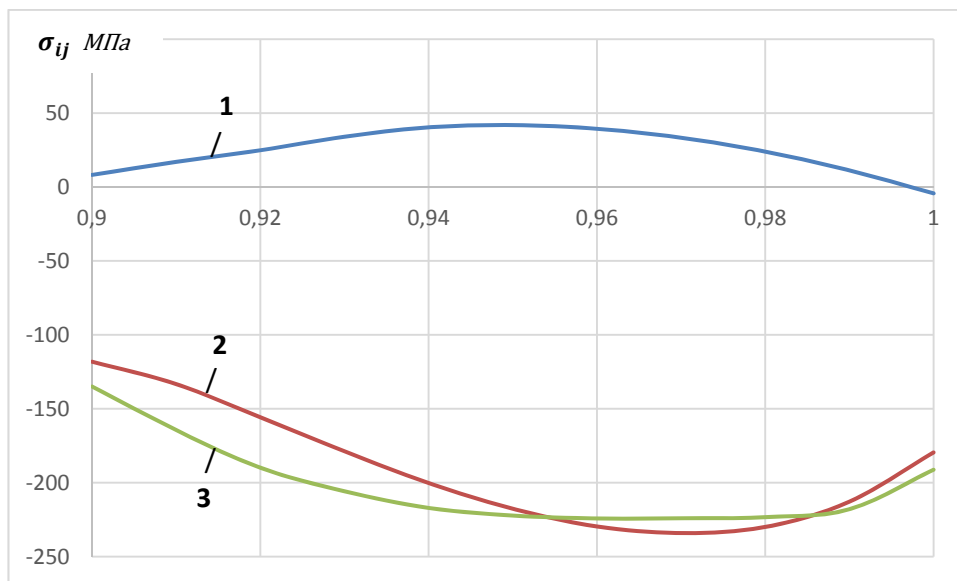
Фиг.9. Кривые компонентов напряжения при входе в матрицу (1 – σ_z , 2 – σ_r , 3 – σ_θ) и на выходе из неё (4 – σ_z , 5 – σ_r , 6 – σ_θ) при $\varphi = 15^\circ$



Фиг.10. Кривые компонентов напряжения при входе в матрицу (1 – σ_z , 2 – σ_r , 3 – σ_θ) и на выходе из неё (4 – σ_z , 5 – σ_r , 6 – σ_θ) при $\varphi = 20^\circ$



Фиг.11. Кривые компонентов напряжения при входе в матрицу (1 – σ_z , 2 – σ_r , 3 – σ_θ) и на выходе из неё (4 – σ_z , 5 – σ_r , 6 – σ_θ) при $\varphi = 30^\circ$



Фиг. 12. Усреднённые значения напряжённого состояния σ_z (1), σ_θ (2) и σ_r (3) в поперечных сечениях цилиндрических образцов вдоль матрицы при $\varphi = 15^\circ$
 Как видно из фиг. 12, в случае $\varphi = 15^\circ$ максимальные значения сжатия напряжений σ_θ и σ_r получаются на отрезке $\sim r/r_0 = 0,97$, то есть в сечениях, близко расположенных к входу конической матрицы, что совпадает с данными [4].

Что касается данных кривой 1 осевых напряжений σ_z (рис. 12), построенной по таблице, то причиной ее малых положительных величин является неравномерное распределение σ_z в поперечном сечении (рис. 9-11). Это результат следующего основного граничного условия деформирования образца: к его верхнему торцу подается равномерное перемещение u_2 (рис. 16). В этом случае в образце сжимающие осевые напряжения возникают только в контактных с матрицей слоях.

Таблица
Данные σ_z (в МПа) вдоль высоты матрицы в шести
линиях сетки конечных элементов по радиусу от оси образца

Номера точек \ Номера линии	1	2	3	4	5	6	Усредненные значения, МПа
1	294	255	131	-52	-307	-378	-9,5
2	325	272	145	-31	-291	-393	4,5
3	340	281	155	-13	-267	-395	16,8
4	337	283	158	2	-230	-402	24,7
5	324	276	155	10	-176	-409	30
6	307	262	145	12	-115	-417	32,3
7	279	237	129	5	-71	-423	26
8	234	205	108	-8	-47	-428	10,7

На фиг. 13-16 показаны кривые распределения пористости в АПС при входе в матрицу и на выходе из неё и усреднённые значения пористости вдоль матрицы при разных φ .

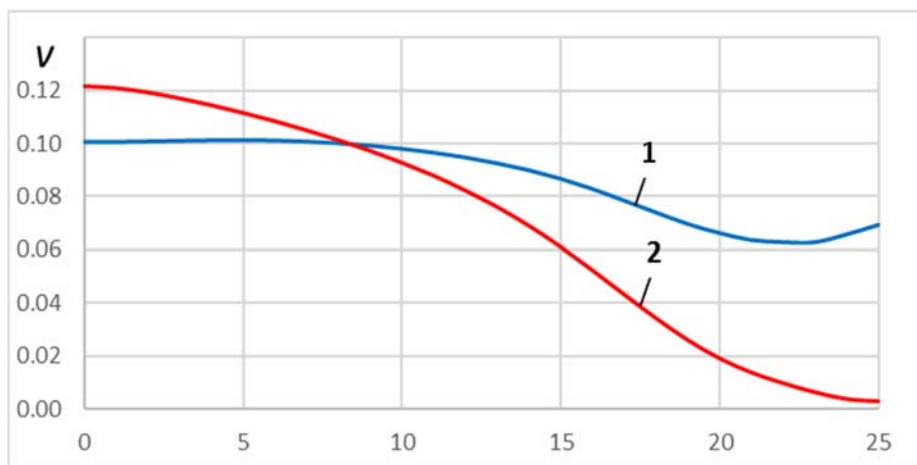


Рис. 13. Значения пористости v в поперечном сечении
при входе в матрицу (1) и на выходе из нее (2) при $\varphi = 15^\circ$

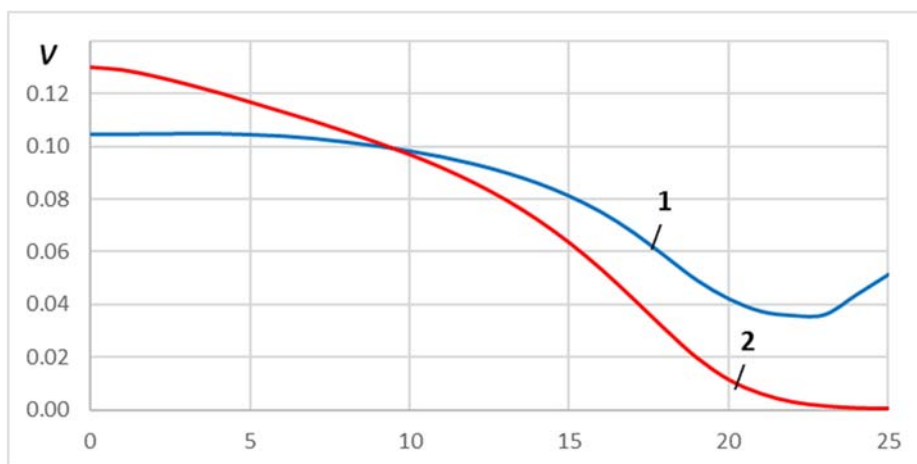


Рис. 14. Изменение значения пористости v при $\varphi = 20^\circ$

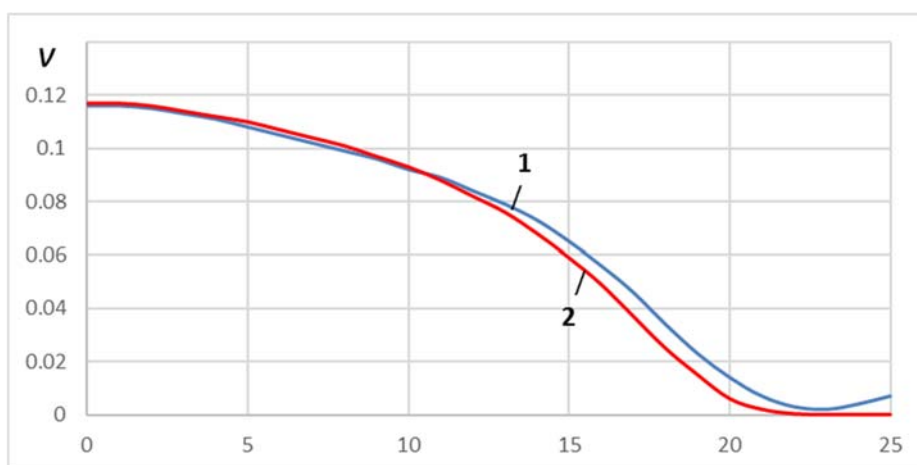


Рис. 15. Изменение значения пористости v при $\varphi = 30^\circ$

Сравнительные данные, приведённые на фиг. 13-15, показывают, что уплотнение образцов начинается с контактирующих с матрицей слоёв, причём при $\varphi = 15^\circ$ на выходе из матрицы эти слои полностью уплотняются, при вхождении в матрицу в центральной части материала пористость не меняется, а при выходе из нее - она увеличивается. При $\varphi = 20^\circ$ на входе в матрицу пористость материала начинает увеличиваться, при $\varphi = 30^\circ$ в результате процесса прессования наружная поверхность материала полностью уплотняется, а в центре пористость увеличивается, и кривые 1 и 2 совпадают. Фактически, при прессовании образца с начальной пористостью $v_0 = 10\%$ в матрице с конусностью $\varphi = 30^\circ$, образец превращается в стержень с переменной пористостью в зависимости от его радиуса.

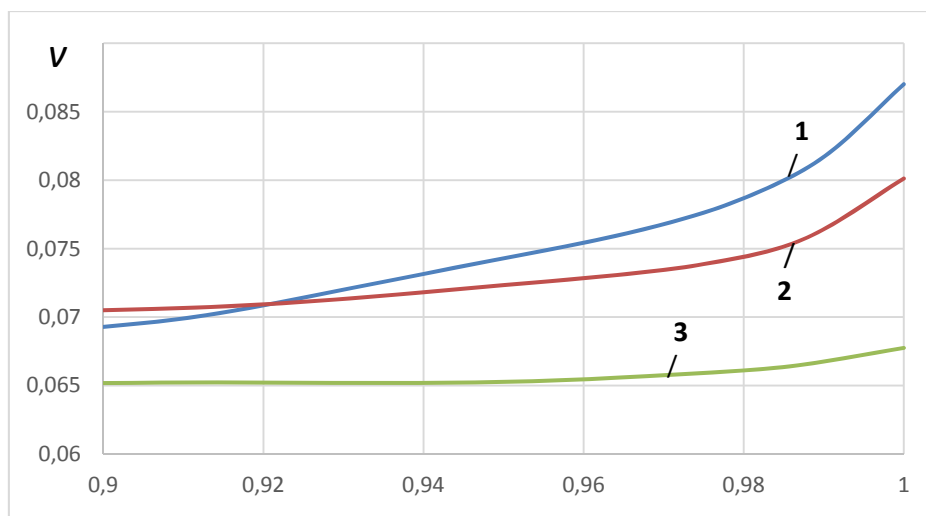


Рис. 16. Усредненные значения распределения пористости вдоль матрицы при $v_0 = 0,1$, $\varphi = 15^\circ$ (1), 20° (2), 30° (3)

Из фиг. 16 видно, что при углах 15° и 20° значения усреднённой пористости при входе в матрицу (v_1) и на выходе из неё (v_2) достаточно различаются ($v_1 > v_2$), а при 30° они почти совпадают ($v_1 \approx v_2$), то есть получается примерно равномерно распределённая вдоль деформированного образца усреднённая пористость и $v_3 = 6,5\%$.

Таким образом, при значениях угла конусности $\varphi = 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ в АПС «ABAQUS» определены значения компонентов напряжённо-деформированного состояния образца и величины распределения пористости при входе в матрицу и на выходе из неё. На основе полученных данных построены соответствующие кривые и проведён анализ полученных результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В автоматизированной программной среде «ABAQUS» выполнено моделирование компонентов напряжённо-деформированного состояния и величин распределения пористости в процессе прессования спечённого цилиндрического образца при различных углах конусности матрицы.

Показано, что напряжения σ_θ и σ_r почти одинаковы, в контактных слоях образца по всей протяжённости матрицы имеются достаточно большие сжимающие напряжения, и при входе в матрицу абсолютные значения напряжения намного больше, чем на выходе из неё. При $\varphi = 15^\circ$ максимальные значения сжатия напряжений $\sigma_\theta \approx \sigma_r$ получаются на близлежащих к входу конической матрицы участках, что совпадает с имеющимися в литературе данными.

Полученные значения изменения пористости свидетельствуют о том, что пористость в поперечном сечении образца распределяется неравномерно: при угле конусности $\varphi = 30^\circ$ и начальной пористости материала $v_0 = 10\%$ в результате прессования внешняя поверхность образца полностью уплотняется - $v \approx 0$, а в центре пористость увеличивается - $v \approx 11,8\%$.

Анализ распределения усреднённой пористости вдоль конической матрицы в деформированном образце при $\varphi = 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ показал, что в случае $\varphi = 30^\circ$

получается примерно равномерное распределение средней пористости в деформированном образце - вдоль матрицы и на выходе из матрицы $v_3=6,5\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Պետրոսյան Գ.Լ., Խաչատրյան Հ.Հ., Պետրոսյան Հ.Գ., Մարգարյան Մ.Ա. Կոնական մամլամայրում զանական եռակաված ձողի հակաճնշմամբ մամլման գործընթացի «ABAQUS»-ով մոդելավորումը // ՀԱՊՀ-ի Լրաբեր. Գիտական հոդվածների ժողովածու. - Երևան, 2015. – Մաս 2.- էջ 295-301:
2. Петросян Г.Л., Хачатрян Г.Г., Сафарян М.Б., Маргарян М.А., Петросян А.Г. Моделирование процесса прессования круглого стержня в конической матрице в условиях больших противодействий // Вестник НПУА: Механика, машиноведение, машиностроение.- Ереван, 2015.- N1. - С. 26-35.
3. Պետրոսյան Գ.Լ., Խաչեկյան Ն.Վ. “ABAQUS” ծրագրային միջավայրում շերտի հարթ դեֆորմացիայի պայմաններում նստեցման իրական գործընթացի մոդելավորումը // Հայաստանի ճարտարագիտական ակադեմիայի Լրաբեր (ՀՃԱԼ). - 2010. - Հ.7, N3.- էջ 499-502:
4. Петросян Г.Л. Пластическое деформирование порошковых материалов. М.: Металлургия, 1988. 153 с.
5. Петросян Г.Л., Мусаелян Г.В. Исследование влияния схемы деформирования на уплотняемость спеченных цилиндрических заготовок // Известия вузов. Машиностроение. 1983. №10. С. 102-105.
6. Петросян Г.Л., Мусаелян Г.В. Напряженное состояние пористых осесимметричных заготовок при выдавливании // Порошковая металлургия. 1984. №11. С. 32-35.
7. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399с.
8. Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов. М.: Машиностроение, 1969. 504с.
9. Hosford W.F., Caddell R.M. Metal forming mechanics and metallurgy - Cambridge, 2007. 312p.

Сведения об авторе:

Маргарян Мигран Арнакович – аспирант Национального политехнического университета Армении, Институт механико-машиностроения, транспортных систем и дизайна.

Тел.: (+374 94) 10 74 36; E-mail: marg.mihran@gmail.com

Поступила в редакцию

PROPAGATION OF MAGNETOELASTIC WAVES IN A PERIODIC MEDIA
Բաբյան Ա. Ա.

Key words: magetoelastic wave, perfectly conductive, periodic structure.

Папьян А. А.
РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН В
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Ключевые слова: магнитоупругие волны, идеальный проводник, периодическая структура.

Рассматривается задача распространения волн в одномерной периодической электропроводящей среде, находящейся во внешнем постоянном магнитном поле. Задача решается на основе теории Флоке. Установлено влияние внешнего магнитного поля на условия существования запретных зон частот.

Պապյան Ա. Ա.
Պարբերական միջավայրում հաստատուն մագնիսական դաշտում մագնիսաառձգական
ալիքների տարածումը

Հիմնաբաներ. մագնիսաառձգական ալիքներ, իդեալական հաղորդիչ, պարբերական միջավայրում:

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է մագնիսաառձգական ալիքների տարածումը միաչափ պարբերական կառուցվածքով ունեցող միջավայրերում: Ֆլոկեի տեսության շրջանակում ստացվել են դիսպերսիոն հավասարումները, որոնք որոշում են ալիքների բաց թողնման եւ կասեցման հաճախականության տիրույթները: Կատարված են դիսպերսիոն առնչությունների վերլուծություններ:

We consider a problem of elastic wave propagation in a perfectly conductive periodic structure in a external magnetic field. In the framework of the Floquet theory the dispersion equations are obtained defining magnetoelastic wave frequency gap bandstructure. The influence of an external magnetic field on the magnetoelastic wave properties and forbidden frequencies are studied.

Introduction:

The presence frequency stop or forbidden gaps in a periodic unidirectional elastic structure was first noted in [1]. The detailed studies of elastic wave propagation in a periodic structures are given in [2-10]. In the [6,7,10] from a mathematical point of view the Floquet-Bloch waves in elastic periodic waveguides are investigated. The spectral theory of transverse vibrations of periodic elastic beams is given in [8-9]. The problems of a magetoelastic wave propagation in electroconducting solid deformable bodies and thin elastic structures are considered in [11,12].

Here we consider a problem of wave propagation in 1D bi-material periodic structure consisting of periodically alternating perfectly conductive materials in an external constant

magnetic field. We will investigate the effect of magnetic field on the properties of the magnetoelastic wave propagation in periodic structure.

The statement of problem:

The purpose of this paper is to investigate properties of magnetoelastic waves in an 1D infinite periodic elastic structure in an external constant magnetic field. The unit cell of a period d consists of two piecewise elastically bonded perfect conducting homogeneous materials (Figure 1).

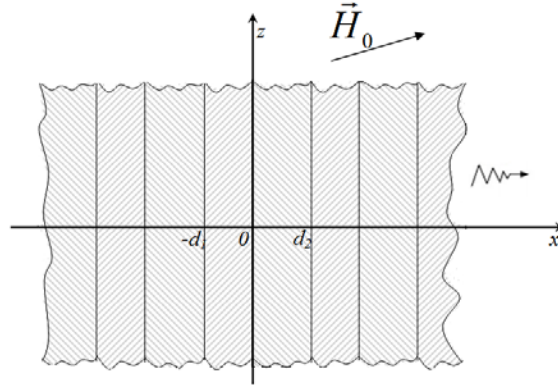


Fig. 1 1D periodic electro-conductive elastic structure in an external constant magnetic field $\vec{H}_0$.

The structure of a periodically repeating unit cell is characterized by the material density and the modulus of elasticity as follows:

$$\begin{aligned} \rho_1, E_1 &\rightarrow -(n-1)d - d_1 < x < (n-1)d, \\ \rho_2, E_2 &\rightarrow (n-1)d < x < nd - d_1 \end{aligned} \quad (1)$$

In the rectangular Cartesian coordinate system $Oxyz$ axis x is directed along wave direction, when axis z can be chosen so, that the displacements to the axis x the component of the magnetic field coincide with the axis z , when $\vec{H}_0 = H_{0x} \vec{i} + H_{0z} \vec{k}$

The ponderomotive force vector for a perfect conductive material is as follows [11].

$$\vec{R} = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \text{rot rot} (\vec{u} \times \vec{H}_0) \right\} \times \vec{H}_0 \quad (2)$$

where $\vec{u}$ is the vector of elastic displacement, μ magnetic permeability of the material.

The components of ponderomotive force vector are as follows:

$$\begin{aligned}
R_x &= \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} H_{0z}^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} H_{0x} H_{0z} \right), \quad R_y = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} H_{0x}^2 \\
R_z &= \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} H_{0x}^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} H_{0x} H_{0z} \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

According to the Floquet theory, we consider solutions only in the elementary cell $-d_1 < x < d_2$ ($n=1$), applying the Floquet–Bloch quasi-periodicity conditions at the ends of the elementary cell.

The motion equation in for 1D waves can be written in the following form

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} R_x = \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + R_y = \rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + R_z = \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}, \tag{4}$$

where σ_{ij} are components of stress tensor.

The motion equation(2) in displacements in the interval $-d_1 < x < d_2$, ($n=1$) can be written as

$$\begin{aligned}
c_{l(s)}^2 \frac{\partial^2 u_{(s)}}{\partial x^2} + \frac{\mu_{(s)}}{4\pi\rho_{(s)}} \left(\frac{\partial^2 u_{(s)}}{\partial x^2} H_{0z}^2 - \frac{\partial^2 w_{(s)}}{\partial x^2} H_{0x} H_{0z} \right) &= \frac{\partial^2 u_{(s)}}{\partial t^2} \\
c_{t(s)}^2 \frac{\partial^2 w_{(s)}}{\partial x^2} + \frac{\mu_{(s)}}{4\pi\rho_{(s)}} \left(\frac{\partial^2 w_{(s)}}{\partial x^2} H_{0x}^2 - \frac{\partial^2 u_{(s)}}{\partial x^2} H_{0x} H_{0z} \right) &= \frac{\partial^2 w_{(s)}}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{5}$$

where indexes $s=1,2$ characterize materials of periodic structure c_l^2 , c_t^2 are the speeds of the longitudinal and transversal waves, correspondingly.

We have the conditions of elastic contact on the boundary of separation of materials

$$\begin{aligned}
u_{(1)}(0,t) &= u_{(2)}(0,t), \quad w_{(1)}(0,t) = w_{(2)}(0,t), \\
\sigma_{xx(1)}(0,t) + t_{xx(1)}(0,t) &= \sigma_{xx(2)}(0,t) + t_{xx(2)}(0,t), \\
\sigma_{xz(1)}(0,t) + t_{xz(1)}(0,t) &= \sigma_{xz(2)}(0,t) + t_{xz(2)}(0,t),
\end{aligned} \tag{6}$$

and the Floquet quasi-periodicity conditions

$$\begin{aligned}
u_{(1)}(-d_1,t) &= \lambda u_{(2)}(d_2,t), \quad w_{(1)}(-d_1,t) = \lambda w_{(2)}(d_2,t), \\
\sigma_{xx(1)}(-d_1,t) + t_{xx(1)}(-d_1,t) &= \lambda \left(\sigma_{xx(2)}(d_2,t) + t_{xx(2)}(d_2,t) \right), \\
\sigma_{xz(1)}(-d_1,t) + t_{xz(1)}(-d_1,t) &= \lambda \left(\sigma_{xz(2)}(d_2,t) + t_{xz(2)}(d_2,t) \right),
\end{aligned} \tag{7}$$

Here $\lambda = \exp(ikd)$, k - Floquet's wave number.

t_{xx}, t_{xz} are components of the Maxwell tensor, that are as follows[11]:

$$\begin{aligned} t_{xx(s)} &= \frac{\mu_{(s)}}{4\pi} \left(\frac{\partial u_{(s)}}{\partial x} H_{0z}^2 - \frac{\partial w_{(s)}}{\partial x} H_{0x}^2 \right) \\ t_{xz(s)} &= \frac{\mu_{(s)}}{4\pi} \left(\frac{\partial w_{(s)}}{\partial x} H_{0x}^2 - \frac{\partial u_{(s)}}{\partial x} H_{0x} H_{0z} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Presenting solutions of equations (3) and (4) in the form

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u_{10}(x) \exp(i\omega t), \quad u_2(x, t) = u_{20}(x) \exp(i\omega t), \\ w_1(x, t) &= w_{10}(x) \exp(i\omega t), \quad w_2(x, t) = w_{20}(x) \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (9)$$

We have

$$\begin{aligned} u_{(s)0}'' - p_{(s)} w_{(s)0}'' + q_{(s)} u_{(s)0} &= 0 \\ u_{(s)0}'' - \alpha_{(s)} p_{(s)} w_{(s)0}'' + \alpha_{(s)} q_{(s)} u_{(s)0} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Here the following notations are made:

$$\begin{aligned} a_{3(s)}^2 &= \frac{\mu_{(s)}}{4\pi\rho_{(s)}} H_{0z}^2, \quad a_{1(s)}^2 = \frac{\mu_{(s)}}{4\pi\rho_{(s)}} H_{0x}^2, \quad a_{3(s)}, a_{1(s)} = \frac{\mu_{(s)}}{4\pi\rho_{(s)}} H_{0x} H_{0z} \\ \alpha_{(s)} &= \frac{c_{l(s)}^2 + a_{3(s)}^2}{c_{l(s)}^2 + a_{1(s)}^2}, \quad p_{(s)} = \frac{a_{3(s)} a_{1(s)}}{c_{l(s)}^2 + a_{3(s)}^2}, \quad q_{(s)} = \frac{\omega^2}{c_{l(s)}^2 + a_{3(s)}^2}; \end{aligned} \quad (11)$$

The solutions of the differential system equations (10) satisfying the conditions of elastic contact and on the boundary of separation materials and the Floquet conditions, we obtain the dispersion equation for

$$\cos(kd) = F(\eta, H_{01}, H_{03}) \quad (12)$$

The dispersion equation (12) determines the wave number k depending on the frequency of η (non dimensionless frequency) and external magnetic field.

Special case:

Let consider a special case when the magnetic field is directed along the axis Z ,

$$\vec{H}_0 = H_{0z} \vec{k}$$

In this case the system of differential equations are separated from each other regard to and we have only one the electro-magneto active equation regard to longitudinal displacement

$$u_{(s)0}''$$

If magnetic field is directed perpendicular to wave propagation direction we will have the electro-magneto active equation regard to transversal displacement $w_{(s)0}$.

We consider now the equation

$$u_{(s)0}'' + q_{(s)} u_{(s)0} = 0 \quad (13)$$

with the conditions of elastic contact on the boundary of separation of materials:

$$u_{(1)}(0, t) = u_{(2)}(0, t), \quad (14)$$

$$\sigma_{xx(1)}(0, t) + t_{xx(1)}(0, t) = \sigma_{xx(2)}(0, t) + t_{xx(2)}(0, t),$$

and Floquet quasi-periodicity conditions

$$u_{(1)}(-d_1, t) = \lambda u_{(2)}(d_2, t), \quad (15)$$

$$\sigma_{xx(1)}(-d_1, t) + t_{xx(1)}(-d_1, t) = \lambda (\sigma_{xx(2)}(d_2, t) + t_{xx(2)}(d_2, t)),$$

The solutions of differential equation (13) can be written as:

$$\begin{aligned} u_{10}(x) &= (B_1 \sin(\sqrt{q_1}x) + B_2 \cos(\sqrt{q_1}x)) \\ \sigma_{10}(x) &= \tilde{E}_1 \sqrt{q_1} (B_1 \cos(\sqrt{q_1}x) - B_2 \sin(\sqrt{q_1}x)) \\ u_{20}(x) &= (C_1 \sin(\sqrt{q_2}x) + C_2 \cos(\sqrt{q_2}x)) \\ \sigma_{20}(x) &= (\lambda_2 + 2G_2) \sqrt{q_2} (C_1 \cos(\sqrt{q_1}x) - C_2 \sin(\sqrt{q_1}x)) \end{aligned} \quad (16)$$

where $\tilde{E}_{(s)} = \lambda_{(s)} + 2G_{(s)}$, λ, G are Lamé constants.

Satisfying the solution (14) conditions of the elastic contact on the line of separation materials and Floquet condition, we obtain homogeneous system equations regard to constants B_1, B_2, C_1, C_2 .

Equating to zero the determinant of this system, we obtain the following dispersion equation

$$\begin{aligned} \cos(kd) &= \cos(d_1 \sqrt{q_1} + d_2 \sqrt{q_2}) \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \frac{\tilde{E}_1 + \frac{\mu_1 H_{03}^2}{4\pi}}{\tilde{E}_2 + \frac{\mu_2 H_{03}^2}{4\pi}} \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_2}} + \frac{\tilde{E}_2 + \frac{\mu_2 H_{03}^2}{4\pi}}{\tilde{E}_1 + \frac{\mu_1 H_{03}^2}{4\pi}} \frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}} \right\} \sin(d_1 \sqrt{q_1}) \sin(d_2 \sqrt{q_2}) \end{aligned} \quad (17)$$

Let note that when magnetic field is directed perpendicular to wave propagation direction we get the same dispersion equation changing $c_{l(s)} \rightarrow c_{t(s)}$.

Discussions and numerical results:

The dispersion equations (17) define ranges of frequencies associated with waves that can propagate in perfectly conductive periodic solid (pass bands), alternated with ranges of frequencies of waves that cannot be transmitted (stop band gaps).

In the case when the material electromagnetic impedances are equal

$$\left(\tilde{E}_1 + \frac{\mu_1 H_{0z}^2}{4\pi} \right) \sqrt{\frac{1}{c_{l1}^2 + a_{3(1)}^2}} = \left(\tilde{E}_2 + \frac{\mu_2 H_{0z}^2}{4\pi} \right) \sqrt{\frac{1}{c_{l2}^2 + a_{3(2)}^2}}$$

we have

$$\cos(kd) = \cos\left(d_1\sqrt{q_1} + d_2\sqrt{q_2}\right) \quad (18)$$

which means that in this case the stop band gaps donot occur.

When the magnetic field is vanished we get the classic result considered in [2]:

The dispersion curves $\eta(kd)$ of dimensionless frequency $\eta = \omega d_1 c_{l2}^{-1}$ in the first Brillouin zone $0 < kd < \pi$ defining the stop band gaps, are illustrated in the Figure.2, Figure. 3 for certain values of dimensionless parameters.

$$\alpha^2 = \frac{a_{3(1)}^2}{c_{l(1)}^2}, \quad \gamma = \frac{c_{l(1)}^2}{c_{l(2)}^2}, \quad \beta = \frac{a_{3(2)}^2}{a_{3(1)}^2}, \quad \theta = \frac{d_2}{d_1}, \quad \zeta = \frac{\rho_1}{\rho_2};$$

characterizing mechanical and geometric properties of periodic structure and the magnitude of the external magnetic field. The dashed curves correspond to magnetoelastic case, the solid curves correspond to the classic elastic case.

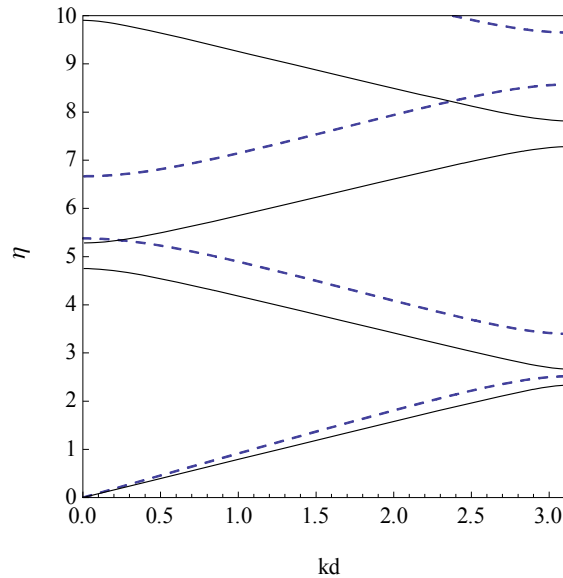


Fig1. Dispersion curves $\eta(kd)$, $\alpha=0.75$; $\xi=0.5$; $\beta=0.55$; $\gamma=0.25$; $\theta=0.25$

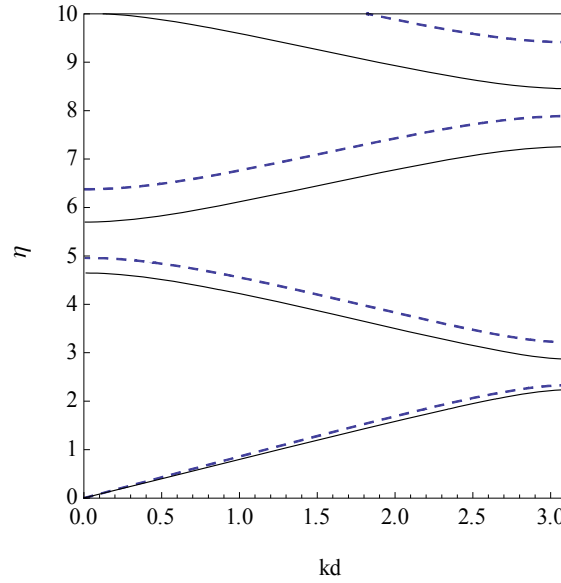


Fig. 2 Dispersion curves $\eta(kd)$, $\alpha=0.5$; $\xi=0.5$; $\beta=0.25$; $\gamma=0.2$; $\theta=0.2$

Analysis of the dispersion curves shows that the external magnetic field change the position and essentially diminish the width of band gaps.

Conclusions: In the framework of the magneto-elasticity equations and the Floquet theory the magnetoelastic wave propagation in 1D perfectly conductive piecewise periodic media is studied. The corresponding dispersion equation are obtained in the case when the direction of magnetic field is perpendicular to the wave propagation direction. The dispersion curves illustrating the magneto elastic wave properties are presented. Analysis of the dispersion curves in the first Brillouin zone shows that the external magnetic field essentially change the positions and diminish the widths of band gaps.

Acknowledgement: This work was supported by the RA MES Science Committee, in the frames of the research project № 19YR-2C044.

Literature

1. Lord Rayleigh, On the maintenance of vibrations of forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, Phil. Mag., 24 (1887), pp. 145–159.
2. E.H. Lee, A survey of variational methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures, in Dynamics of Composite Materials, E. H. Lee, ed., ASME, New York, 1972, pp. 122–138.
3. E.H. Lee and W. H. Yang, On waves in composite materials with periodic structure, SIAM Journal on Applied Mathematics., 25 (1973), pp. 492–499.
4. Mingrong Shen, Wenwu Cao, Acoustic bandgap formation in a periodic structure with multilayer unit cells, Journal Phys. D: Appl. Phys. 33, (2000), p.1150–1154

5. A.Velo, E. Bruder, N. Rodriguez, G. Gazonas, E. Bruder, Recursive Dispersion Relations in One-Dimensional Periodic Elastic Media, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 69, No. 3, pp. 670–689, (2008).
6. S.Adams, R. Craster, S. Guenneau , Bloch waves in periodic multi-layered acoustic waveguides, Proceedings Royal Society London A 464 (2008) p.2669-2692,
7. R.V. Craster, S. Guenneau, S. Adams, Mechanism for slow waves near cutoff frequencies in periodic waveguides, Physical Review B, 2009 79, p.045129-5,.
8. V.G. Papanicolaou, The periodic Euler–Bernoulli equation, Trans. AMS 355 (2003), 3727–3759.
9. V.G. Papanicolaou, An Inverse Spectral Result for the Periodic Euler-Bernoulli Equation, Indiana University Mathematics Journal (2004), Volume: 53, Issue: 1, Pages: 223-242.
10. Аветисян А.С., Казарян К.Б. Волны в “фонон-фотон” кристаллах и импеданс. В сб. “Проблемы механики деформируемого твердого тела” посвящ. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2012. с.15-22.
11. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Изд. Ереванского Университета, Ереван, 2006. с. 491.
12. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания и устойчивость токонесящих упругих пластин.- Ереван, изд-во АН Армении, 1992, 123с.
13. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. -М., Наука, 1977, с.272.

Information about author:

Papyan Ararat Arthur, Researcher at the Institute of Mechanics NAN RA.

Address: Yerevan ave. Marshal Baghramyan 24b, 0019, Yerevan, Armenia.

E-mail: papyanararat11@gmail.com

Received 05.07.2020

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ
ДИФРАКЦИИ НА УЗКОМ ПРЕПЯТСТВИИ С ОСТРОЙ ЗАДНЕЙ
КРОМКОЙ

Сумбатян М.А., Мусатова Н.К.

Ключевые слова: аэроакустика, летательный аппарат, метод граничных интегральных уравнений, метод Симпсона, акустическое давление, бесселевы функции, функция Грина, условие Мейкснера, полное поле, отражённое поле.

Sumbatyan M.A., Musatova N.K.

Boundary elements method in the problem of diffraction at a narrow obstacle with a sharp back edge

Keywords: aeroacoustics, aircraft, boundary element method, Simpson's method, acoustic pressure, Bessel functions, Green function, Meixner condition, total field, reflected field.

The problem of sound radiation by point source located in the tail of an aircraft is studied. The diffraction of sound on the sharp edge of two-dimensional model of the region is investigated. The diffraction problem for an acoustically solid obstacle is reduced to solving the Fredholm integral equation of the second kind. The method of boundary integral equations is applied, due to which the equation over the entire area is reduced to an equation along the boundary curve. The behavior in the vicinity of the corner is determined by the Meixner condition. For the numerical solution of the basic integral equation, discretization is applied to the nodes of the grid selected on the boundary curve. Numerical integration is performed using the Simpson method. A system of linear algebraic equations is formed, from which the total acoustic pressure is found. The influence of the location of the source point and the value of the contour angle on the total acoustic pressure is considered. The reflected field is built at the far receiving point.

Սումբատյան Մ.Ա., Մուսատովա Ն.Կ.

Եզրային ինտեգրալ հավասարումների մեթոդը սուր հետին
եզրով նեղ արգելքի վրա դիֆրակցիայի խնդրում

Հիմնաբաներ՝ աերոակուստիկա, թռչող սարք, եզրային ինտեգրալ հավասարումների մեթոդ, Միմֆսոնի մեթոդ, Բեսելի ֆունկցիա, Գրինի ֆունկցիա, Մեյքսների պայման, լրիվ դաշտ, անդրադարձված դաշտ

Դիտարկված է թռչող սարքի պոչի վրա տեղադրված կետային աղբյուրից ձայնի տարածման խնդիրը: Ուսումնասիրվում է ձայնի դիֆրակցիան սուր անկյունում պարզ երկչափ մոդելում: Կիրառվել է եզրային ինտեգրալ հավասարումների մեթոդը: Թվային ինտեգրումը կատարվել է Միմֆսոնի մեթոդի օգնությամբ: Դիտարկվել է կետային աղբյուրի տեղակայման և կոնտուրի բացվածքի անկյան մեծության ազդեցությունը լրիվ ակուստիկ ճնշման վրա: Կառուցվել է անդրադարձված դաշտը ընդունման հեռու կետում:

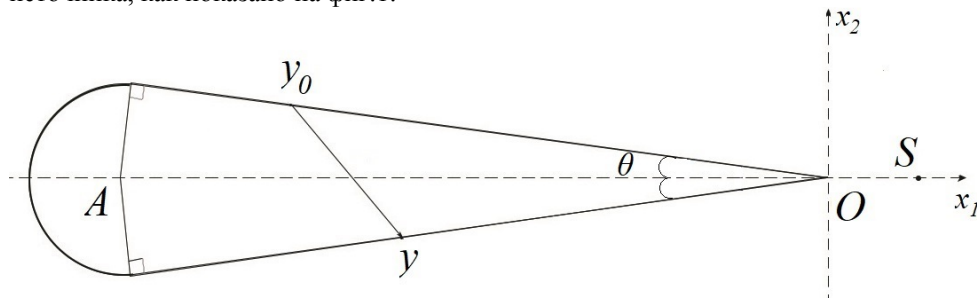
Изучается задача излучения звука точечным источником, расположенным в хвосте летательного аппарата. Исследуется дифракция звука на остром угле простейшей двумерной модели области. Задача дифракции для акустически твёрдого препятствия сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Применяется метод граничных интегральных уравнений, благодаря которому уравнение по всей области сводится к уравнению по граничной кривой. Поведение в окрестности угла определяется условием Мейкснера. Для численного решения основного интегрального уравнения применяется дискретизация по узлам сетки, выбранной на граничной кривой. Численное интегрирование производится с помощью метода Симпсона. Образуется система линейных алгебраических уравнений, из которой находится полное акустическое давление. Рассматривается влияние расположения точки источника и величины угла раствора контура на полное акустическое давление. Строится отражённое поле в дальней точке приёма.

Введение

Задача излучения звука точечным источником, расположенным в хвосте летательного аппарата, является одной из актуальных проблем аэроакустики. На практике данная задача играет важную роль, например, в распространении шума от двигателя летательного аппарата или подводной лодки после взаимодействия с его острой поверхностью. Для изучения этого явления необходимо исследовать дифракцию [1,2] от точечного источника звука на остром угле хвоста летательного или подводного аппарата. Цель данной работы – применение метода граничных интегральных уравнений [3,4] к задаче дифракции на остром угле, изучение влияния острого угла летательного аппарата на величину акустического давления в полном поле, а также поведение давления в рассеянном поле в случае дальней точки приёма.

Постановка задачи

Рассмотрим двумерную задачу дифракции гармонической звуковой волны, излучаемой точечным источником S , расположенным вблизи острого угла некоторого тела (фиг.1). Для оценки влияния острой кромки на дифракцию падающей волны рассматривается двумерная модель летательного аппарата в виде сегмента круга радиуса r , сопряжённого с парой боковых прямолинейных отрезков. Полный угол раствора равен 2θ . Граничный контур – гладкий, кроме острой кромки. Геометрические размеры для рассмотренных численных примеров подробно описаны в разделе «Результаты». Ограничимся рассмотрением акустически жёсткой границы (однородное граничное условие Неймана) и симметричным расположением источника, как показано на фиг.1.



Фиг. 1. Схема летательного аппарата

На фиг. 1 точка S обозначает точечный источник звука; оси x_1 и x_2 соответствуют декартовой системе координат; O – начало координат; A – центр окружности, образующей криволинейную часть контура.

Метод решения

В рамках метода граничных интегральных уравнений (далее ГИУ) задача дифракции для акустически твёрдого препятствия сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$p(y_0) - 2 \int_l p(y) \frac{\partial \Phi(|y - y_0|)}{\partial n_y} dl_y = 2p^{inc}(y_0) \quad (1)$$

Здесь l – граничный контур области; $p(y)$ – акустическое давление на контуре l ; внутренняя точка y и внешняя точка y_0 – двумерные точки на границе; Φ – функция

Грина; n_y – нормаль к контуру в точке y ; dl_y – элементарная длина дуги в точке y ; $p^{inc}(y_0)$ – акустическое давление падающей волны.

При этом поведение в окрестности угла определяется условием Мейкснера [5]:

$$p(y) = D + O(r^\delta), \delta = \frac{\pi}{2(\pi - \theta)} \quad (2)$$

Здесь r – расстояние между текущей точкой и точкой в угле, D – некоторая константа. Решение вблизи угла не является сингулярным, поскольку параметр δ всегда положителен. Благодаря этому свойству, вклад малой окрестности угла в интеграл (1) является малым. Следовательно, нет необходимости помещать узел сетки непосредственно в угол при дискретизации, чтобы получить более точное решение.

Функция Грина для двумерной задачи представляет собой функцию Ханкеля первого рода

$$\Phi(|y - y_0|) = \Phi(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr). \quad (3)$$

Её производная по нормали вычисляется в явном виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n_y} = -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kr) \cdot \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n}_y)}{r}. \quad (4)$$

Падающая волна от точечного источника звука имеет вид

$$p^{inc}(y_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_m^s), \quad (5)$$

где r_m^s – расстояние от источника звука до точки y .

После подстановки производной функции Грина и давления в падающем поле уравнение (1) принимает вид

$$p(y_0) + \frac{ik}{2} \int_l \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n}_y)}{r} H_1^{(1)}(kr) p(y) dl_y = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr_m^s) \quad (6)$$

Перепишем уравнение (6) в виде

$$p(y_0) + \int_l K(y, y_0) p(y) dl_y = 2p^{inc}(y_0), \quad K(y, y_0) = \frac{ik}{2} \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n}_y)}{r} H_1^{(1)}[kr(y, y_0)] \quad (7)$$

Обозначим точку наблюдения y_0 как η , а точку интегрирования как ξ . С учётом этого перепишем основное ГИУ:

$$p(\eta) + \int_l K(\xi, \eta) p(\xi) dl_\xi = 2p^{inc}(\eta) \quad (8)$$

Для численного решения интегрального уравнения применяется дискретизация по узлам сетки граничной кривой. На прямолинейной части верхней границы выберем следующее разбиение:

$$\begin{aligned}\eta_j^{(1)} &= -(j-1/2)h \cdot \cos \theta, \quad j=1, \dots, N \\ \eta_j^{(2)} &= (j-1/2)h \cdot \sin \theta, \quad j=1, \dots, N\end{aligned}\quad (9)$$

с шагом $h = L/N$, где N – количество узлов, расположенных на прямолинейной части контура. При этом, первый узел находится на расстоянии полушага от угла. Здесь и далее верхний индекс (1) соответствует горизонтальной координате, а (2) – вертикальной.

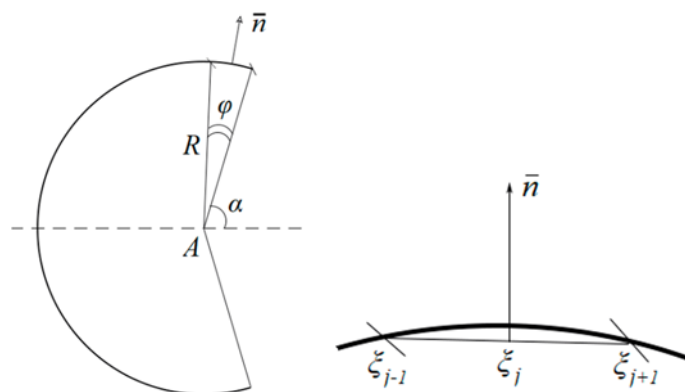
Формула для прямолинейной части нижней границы отличается только знаком вертикальной координаты:

$$\begin{aligned}\eta_j^{(1)} &= -(j-1/2)h \cdot \cos \theta, \quad j=1, \dots, N \\ \eta_j^{(2)} &= -(j-1/2)h \cdot \sin \theta, \quad j=1, \dots, N\end{aligned}\quad (10)$$

Для описания криволинейной части границы введём локальную полярную систему координат с центром в точке A (см. фиг.2). В этой системе координаты точек η_j будут равны

$$\eta_j = (R, \varphi_j), \quad j=1, \dots, M, \text{ где } \varphi_j = \alpha + \varphi \cdot \left(j - \frac{1}{2}\right), \quad (11)$$

$\varphi = \frac{\pi + 2\theta}{2M}$ – элементарный угол, образующийся при разбиении дуги, M – количество узлов, расположенных на полудуге.



Фиг. 2. Схема дискретизации контура криволинейной части границы / элемент дискретизации на криволинейной части

Вернёмся к декартовой системе. В силу того, что полярная система координат «отодвинута» от фактического начала координат на величину AO (см. фиг.1), прибавим эту величину к первой координате:

$$\begin{aligned}\eta_j^{(1)} &= -(AO - R \cos \varphi_j), \quad j = 1, \dots, M \\ \eta_j^{(2)} &= R \sin \varphi_j, \quad j = 1, \dots, M\end{aligned}\quad (12)$$

Координаты нормалей для всего контура определяются формулами

$$n_j^{(1)} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{h_j}, \quad n_j^{(2)} = -\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{h_j}, \quad j = 1, \dots, N \quad (13)$$

Численное интегрирование производится при помощи метода Симпсона [6,7]. Для

этого на интервале $\xi \in \left(\eta_j - \frac{h}{2}; \eta_j + \frac{h}{2} \right)$ введём точки двух концов $\xi_1^j = \eta_j - \frac{h}{2}$ и

$\xi_2^j = \eta_j + \frac{h}{2}$, и одну срединную точку $\xi_0^j = \eta_j$:

$$b_{mj} = \int_{\eta_j - h/2}^{\eta_j + h/2} K(\xi, \eta_m) d\xi \approx \frac{h}{6} \left[K(\xi_1^j, \eta_m) + 4K(\xi_0^j, \eta_m) + K(\xi_2^j, \eta_m) \right]. \quad (14)$$

Дискретизация приводит основное ГИУ к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с комплексными коэффициентами относительно вектора $\mathbf{p}$ с матрицей размером $K \times K$

$$Ap = f, \quad (15)$$

где компоненты СЛАУ определяются как

$$A = (a_{mj}), \quad a_{mj} = \delta_{mj} + b_{mj}, \quad \delta_{mj} - \text{символ Кронекера}$$

$$f = (f_m), \quad f_m = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr_m^s), \quad (16)$$

$$p = (p_j) = p(\eta_j) = p(\xi_j).$$

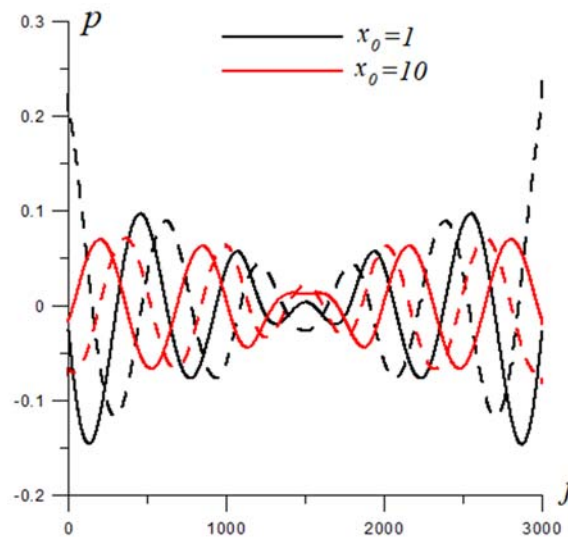
Стоит отметить, что задание такой сетки разбиения граничной кривой позволяет избежать попадания узла в угол клина, что теоретически могло бы быть единственной сингулярной комбинацией, дающей неинтегрируемое поведение функции.

Результаты

Для проведения численных расчётов была разработана программа на языке C++. Рассматриваемая задача дифракции на остром угле аппарата решена методом граничных интегральных уравнений. Для численного интегрирования применялась квадратурная формула Симпсона, которая свела ГИУ к СЛАУ. При дискретизации количество узлов на прямолинейной части контура взято равным $N = 1000$, а на криволинейной части – $M = 500$. Таким образом, мы имеем матрицу комплексных коэффициентов размером 3000×3000 , или вещественных коэффициентов размером 6000×6000 . Для решения СЛАУ использовался алгоритм LSQR [8], который показал хорошую точность и хорошее время работы для указанной размерности.

Для начала рассмотрим влияние расположения точечного источника звука $S(x_0, 0)$ на полное акустическое давление (фиг.3). Зададим следующие параметры: $L = 10$,

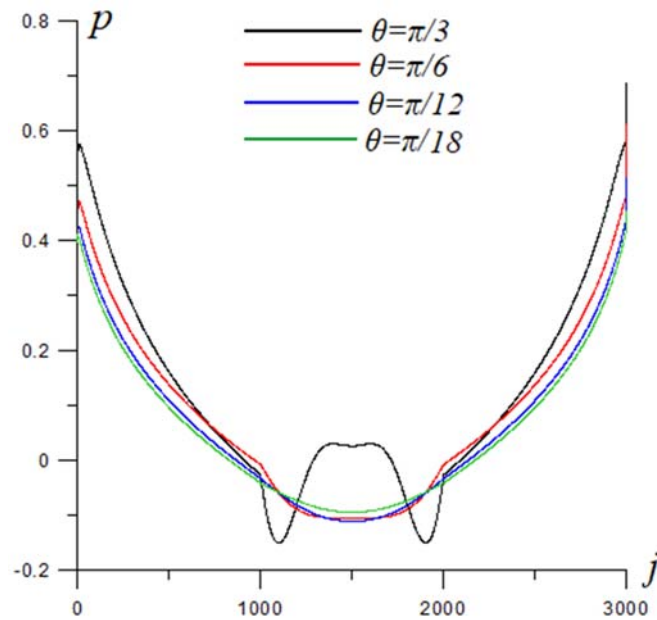
$$\theta = \frac{\pi}{12}, \quad k = 1.$$



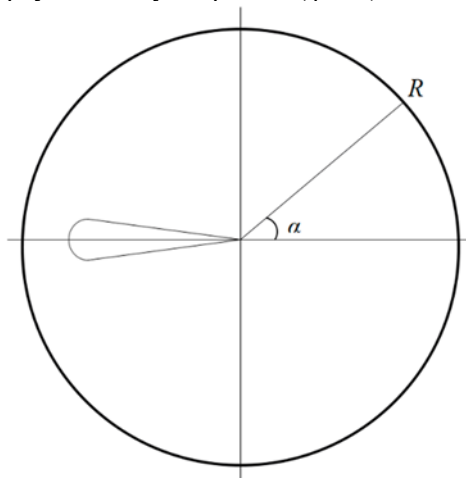
Фиг. 3. Вещественная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части акустического давления p при двух значениях x_0 . По горизонтали отложен j – номер узла

Случай $x_0 = 1$ представляет для нас больший интерес, поэтому далее будем рассматривать только его.

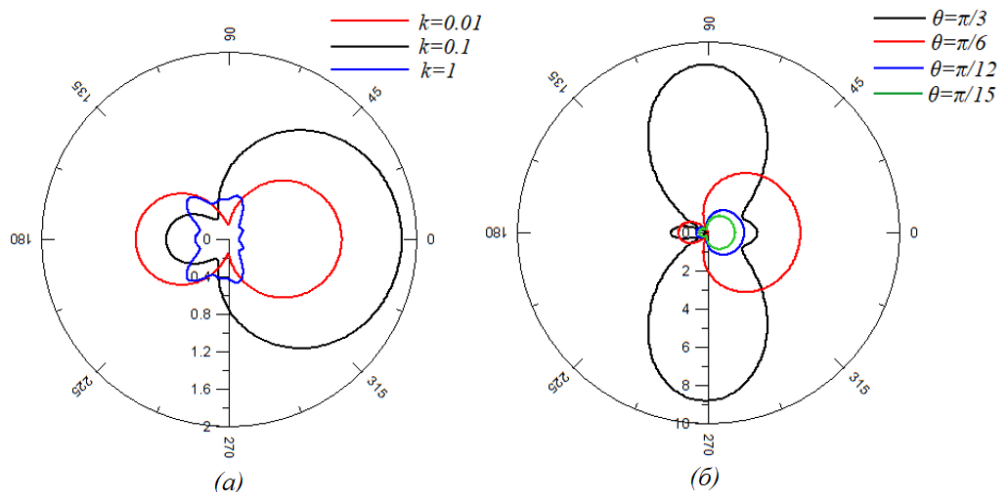
Рассмотрим влияние величины угла раствора контура на акустическое давление при фиксированных параметрах $L = 10$, $k = 0.1$, $x_0 = 1$ (фиг.4).



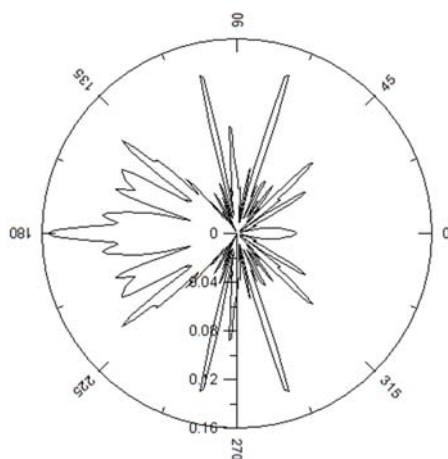
Фиг. 4. Вещественная часть акустического давления p при различных значениях угла θ
Рассмотрим акустическое давление в отражённом поле в дальней точке приёма. Для этого перейдём в полярную систему координат (фиг.5).



Фиг. 5. Область и точка приёма в дальней зоне в полярной системе координат
Для каждого угла α от 0 до 360 градусов вычисляем рассеянное акустическое давление (фиг.6). Расстояние от начала координат до точки приёма берём равным $R = 10000$.



Фиг.6. Давление в отражённом дальнем поле как функция полярного угла наблюдения при (а) фиксированных $L = 10$, $x_0 = 1$, $\theta = \frac{\pi}{12}$ и переменной k ; (б) фиксированных $L = 10$, $x_0 = 1$, $k = 0.1$ и переменной θ



Фиг.7. Давление в отражённом дальнем поле как функция полярного угла наблюдения при

$$L = 10, x_0 = 1, \theta = \frac{\pi}{12}, k = 10$$

Закключение

По результатам проведённого исследования можно сделать следующие выводы:

1. Благодаря условию Мейкснера вклад малой окрестности угла в интегральное уравнение является малым. Следовательно, необходимость помещать узел сетки непосредственно в угол при дискретизации, чтобы получить более точное решение, отсутствует.

2. Рассмотренные результаты для рассеянного поля в дальней зоне показали, что чем меньше угол раствора области, тем меньше она акустически «видна» в дальней точке приёма.

3. На большой частоте диаграмма рассеяния показала некоторые явно выраженные максимумы (фиг.7). На соответствующих углах система аппарат - источник звука акустически «видна» в дальнем поле. По остальным направлениям она практически «не видна». Этот факт даёт теоретическую базу для конструирования систем типа самолет-невидимка или подводная лодка - невидимка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 19-29-06013\19.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommerfeld, Mathematical Theory of Diffraction, Boston: Birkhauser, 2003. 157 p.
2. Сумбатян М.А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013. 328 с.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: пер с англ. М.: Мир, 1984. 494 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 525 с.
5. M.A. Nethercote, R.C. Assier, I.D. Abrahams, Analytical methods for perfect wedge diffraction: A review, Wave Motion, 2020, v. 93. 102479.
6. D. Colton, R. Kress, Integral Equation Methods in Scattering Theory, New York: John Wiley, 1983.
7. K.E. Atkinson, An introduction to numerical analysis. 2nd ed. New York: John Wiley, 1989. 712 p.
8. C.C.Paige, M.A. Saunders, LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares, ACM Trans. Math. Software, 1982. V. 8(1), p. 43-71.

Сведения об авторах:

Сумбатян Межлум Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: masumbatyan@sfedu.ru, тел.: +7(928)139-70-67

Мусатова Наталия Кристиановна – магистр, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: musatova.nataliasfedu.ru@gmail.com, тел.: +7(999)698-66-97

Поступила в редакцию

СОДЕРЖАНИЕ 2020 г., том 73 №3

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Амирджанян А.А. Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с межфазными трещинами и включениями под воздействием динамических нагрузок	3
Хольм Альтенбах, Катарина Кнапе Об основных направлениях теории ползучести металлических материалов.....	24
Маргарян М.А. Компьютерное моделирование процесса прессования круглого спеченного образца в конических матрицах	44
Папьян А.А. Распространение магнитоупругих волн в периодической среде	54
Сумбатян М.А., Мусатова Н.К. Метод граничных интегральных уравнений в задаче дифракции на узком препятствии с острой задней кромкой.....	62

CONTENTS 2020, v. 73 №3,

Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L., Amirjanyan H.A. Plane stress state of an elastic compound plane with interfacial cracks and inclusions under the influence of dynamic loads	3
Holm Altenbach, Katharina Knape On the main directions in creep mechanics of metallic materials	24
Margaryan M.A. Computer modeling the process of pressing a round sintered sample in conical die	44
Papayan A. A. Propagation of magnetoelastic waves in a periodic media	54
Sumbatyan M.A., Musatova N.K. Boundary elements method in the problem of diffraction at a narrow obstacle with a sharp back edge.....	62

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2020, հ.73 №3

Հակոբյան Վ.Ն., Դաշտոյան Լ.Լ., Ամիրջանյան Հ.Ա. Միջֆազային ճաքեր և ներդրակներ պարունակող բաղադրյալ առաձգական հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը դինամիկ բեռների ազդեցության տակ.....	3
Հովս Ալտենբախ, Կատարինա Կնապե Մետաղական նյութերի սողքի տեսության հիմնական ուղղությունների մասին	24
Մարգարյան Մ.Ա. Կոնական մամլամայրերում եռակաված կլոր նմուշի մամլման գործընթացի համակարգչային մոդելավորումը.....	44
Պասյան Ա.Ա. Պարբերական միջավայրում հաստատուն մագնիսական դաշտում մագնիսաառաձգական ալիքների տարածումը	54
Սումբատյան Մ.Ա., Մուսատովա Ն.Կ. Եզրային ինտեգրալ հավասարումների մեթոդը սուր հետին եզրով նեղ արգելքի վրա դիֆրակցիայի խնդրում	62