ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2020

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №2, 2020 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.2.1

HYBRID OF RAYLEIGH AND GULYAEV-BLUESTEIN ELECTRO-ACOUSTIC WAVES NEAR THE INNER SURFACE OF A LAYERED PIEZOELECTRIC COMPOSITE

Ara S. Avetisyan, Hakob S. Jilavyan

Аветисян Ара С., Джилавян Акоп С.

Гибрид электроакустических волн Рэлея волн Гуляева-Блюстейна около внутренней поверхности слоистого пьезоэлектрического композита

Ключевые слова: гибрид волн, пьезоэлектрическая среда, неакустический контакт, электроакустическая поперечная волна, плоская деформация, локализация энергии волны, дисперсионное уравнение, фазовая скорость.

Исследуется гибридизация локализованных электроакустических волн Рэлея и Гуляева-Блюстейна у поверхности не акустического контакта двух пьезоэлектриков. Предложена простая схема двухслойного волновода, допускающая гибрид электроактивных локализованных волн Гуляева-Блюстейна и Рэлея. Показывается, что индуцированная, локализованная у свободной поверхности электроупругая сдвиговая волна Гуляева-Блюстейна в одном слое, может генерировать электроупругую волну Рэлея плоской деформации в другом слое и наоборот. Показано также, что соответствующий выбор материалов прилегающих полупространств может привести к усилению или ослаблению локализации энергии электроупругих волн вбизи поверхности немеханического контакта пьезоэлектриков.

Выявлено, что индуцированная в одном из слоев волна с нерезонансной частотой может вызвать внутренний резонанс или образование зон запрещенных частот в волноводе данной структуры.

Проведен сравнительный анализ результатов со случаями отсутствия пьезоэлектрического эффекта в одном из слоев композита.

Ավետիսյան Արա Ս., Ջիլավյան Հակոբ Ս.

Ռելեյի և Գուլյաև-Բլյուստեյնի էլեկտրաառաձգական ալիքների խաչասերումը շերտավոր բաղադրյալ պյեզոէլեկտրիկի ներքին մակերևույթի մոտ

Հիմնաբառեր. Ալիքների խաչասերում, պյեզոէլեկտրական միջավայր, անհպում կապ, էլեկտրաձայնային լայնական ալիք, հարթ դեֆորմացիա, ալիքային էներգիայի տեղայնացում, դիսպերսիայի հավասարում, ֆազային արագություն:

Հետազոտվում է Ռելեյի և Գուլյաև-Բլյուստեյնի էլեկտրաառաձգական տեղայնացված ալիքների խաչասեռումը երկու պյեզոէլեկտրիկների անհպում կապի հարթության մոտ: Ցույց է տրվում, որ մի պյեզոէլեկտրիկի ազատ եզրի մոտ հարուցելով Գուլյաև-Բլյուստեյնի տեղայնացված էլեկտրաառաձգական սահքի ալիք, կարելի է գրգռել Ռելեյի տեղայնացված հարթ դեֆորմացիայի էլեկտրաառաձգական ալիք մյուս պյեզոէլեկտրիկում, և հակառակը: Ցույց է տրված նաև, որ սահմանակցող պյեզոէլեկտրիկ նյութերի համապատասխան ընտրությանը կարող է բերել անհպում կապի հարթության մոտ էլեկտրաառաձգական ալիքների էներգիայի տեղայնացման մեծացմանը կամ թուլացմանը: Բացահայտված է, որ մի պյեզոէլեկտրիկում հարուցված ոչ ռեզոնանսային հաճախականությամբ ալիքը կարող է առաջացնել ներքին ռեզոնանս, կամ առաջացնել արգելված հաճախականությունների գոտի:

Կատարված են ստացված արդյունքների համեմատական վերլուծություն, շերտերից մեկն ու մեկում պյեզոէլեկտրական հատկության բացակայության դեպքերի հետ:

PPThe hybridization of localized electro-acoustic Rayleigh and Gulyaev-Bluestein waves at the surface of non-acoustic contact of two piezoelectrics is investigated. A simple scheme of a two-layer waveguide, which allows a hybrid of electro active localized waves of Gulyaev-Bluestein and Rayleigh is proposed. It is shown that the induced, localized near the free surface, Gulyaev-Bluestein shear wave in one layer can generate a Rayleigh electro-elastic plane strain wave in another layer and vice versa. It is also shown that the corresponding choice of materials of adjacent half-spaces can lead to an increase or decrease in the localization of the energy of electroelastic waves near the surface of the non-mechanical contact of piezoelectrics. It was revealed that a wave with a non-resonant frequency induced in one of the layers can cause internal resonance or the formation of bands of forbidden frequencies in the waveguide of this structure.
A comparative analysis of the results with cases of the absence of a piezoelectric effect in one of the layers of the composite is carried out.
Keywords: wave hybrid, piezoelectric medium, non-acoustic contact, electroacoustic shear wave, plane deformation, wave energy localization, dispersion equation, phase velocity.

Introduction.
In modern electronics, heterogeneous composite (in particular layered, piecewise homogeneous) waveguides made of piezoelectric crystals are widely used as converters, filters, or resonators of an electro-acoustic high-frequency wave signal. Qualitatively different interests are cases when the electro-acoustic signal overpasses through a transversely inhomogeneous layered structure, and when the electro-acoustic signal flows along the interface between the homogeneous layers of the structure.
Piezoelectric crystals are essentially anisotropic materials. Depending on the crystallographic symmetry of the piezoelectric, it is possible to excite a purely electroactive wave of pure shear or an electroactive wave of plane deformation in it. In the articles by Avetisyan A.S. **[1,2]** issues of separate excitation and propagation of electroelastic plane or electroelastic antiplane stress-strain states in homogeneous piezoelectric crystals are investigated. Necessary and sufficient conditions for the texture of piezoelectric crystals that allow separate excitation and propagation of an electroelastic wave signal of a specific type are determined. Material relations and quasistatic equations are derived for all piezoelectric textures in the corresponding sagittal planes.
If we also take into account the possibility of localizing wave energy under different boundary conditions near the surfaces of the composite elements of the composite waveguide, then these waves will be heterogeneous not only in the composition of the components, but also in the physicomechanical characteristics.
In 1968 **Bleustein J.L. [3]**, and in 1969 **Gulyaev Yu.V. [4]** showed that it is possible to localize the energy of an electroelastic shear wave near the mechanically free surface of a piezoelectric medium of certain symmetry, under different boundary conditions on accompanying electric field. The features of the localization of wave energy of purely shear electro-elastic wave of Gulyaev-Bluestein type are still being studied. Thousands of works are known, in parts of which the patterns of propagation of electroelastic shear waves in composite structures, or in media with complicated properties, are studied.
In particular, **Yang J.S. [5]** investigated the propagation of waves of the Gulyaev – Bluestein type in materials with complicated piezoelectric properties.
The propagation of waves of the Gulyaev-Bluestein type in a prestressed layered piezoelectric structure was considered by **Liu H., Kuang Z.B. & Cai Z.M. [6]**.
Vashishth A.K., Dahiya A., & Gupta V. [7] studied the propagation of a Bluestein-Gulyaev wave in a structure consisting of several layers and a half-space of porous piezoelectric materials. The specific form of waves that can propagate only in the layer above the half-space is investigated.

The propagation of transverse surface waves in a functionally graduated substrate carrying a layer of piezoelectric material of hexagonal symmetry 6mm was studied by **Li P. & Jin F. [8].**

Avetisyan A.S., & Kamalyan A.A. [9] considered the propagation of an electro-elastic monochromatic wave signal in an inhomogeneous piezoelectric of hexagonal symmetry class 6mm.

The propagation of the Bluestein – Gulyaev waves in an unbounded piezoelectric half-space loaded with a layer of viscous fluid of finite thickness was considered in the framework of linear elasticity theories in **[10] Qian Z.-H., Jin F., Li P., Hirose S. ..**

By solving the equilibrium equations of piezoelectric materials and the diffusion equations of viscous fluid, exact solutions of the phase velocity equations are obtained both in the case of electrically open and in the case of electrically closed boundaries.

Although the localization of wave energy for plane deformation waves in the isotropic half-space **Rayleigh J.W. [11]** was discovered earlier than others, electroactive waves of Rayleigh type are relatively little studied.

In particular, **Singh B. & Singh R. [12]** examined the propagation of Rayleigh wave in a rotating initially strained piezoelectric half-space.

In the article by **Chaudhary S., Sahu S.A., Singhal A. [13]**, the authors proposed an analytical model for studying the propagation of Rayleigh waves in an orthotropic half-space with a piezoelectric layer.

The propagation of bound Rayleigh waves in a piezoelectric layer of the material of rhombic symmetry class 2mm over a porous piezo-thermoelastic half-space is investigated by **Vashishth, A.K., Sukhija, H. [13]**.

In the work by **Avetisyan A.S., Mkrtchyan S.H. [14]** the patterns of propagation of an electro-acoustic wave of plane deformation in a piezoelectric half-space are investigated. The problem of propagation of high-frequency electro-acoustic waves of plane deformation (electro-acoustic waves of Rayleigh type) under different electric boundary conditions on the mechanically free surface of a piezoelectric half-space is solved.

These electro-acoustic waves, which are heterogeneous in the composition of their components and physicomechanical characteristics, have different applications in technology. But the question of the possible hybrid of these dissimilar electro-acoustic waves is also obvious.

In **[15] Kuznetsova I.E., Zaitsev B.D., Borodina I.A., Teplykh A.A.,** conditions of hybridization of zero and high order acoustic radiation in a piezoelectric crystal plate are studied. It was found that hybridization occurs when the conductivity of the sheet exceeds a certain value, which can vary widely depending on the plate material and orientation.

The scheme of organization of a hybrid medium in a layered hydro-elastic waveguide is proposed in **[16] Choi H.K., Kim B.H. et al**. In this study, a hybrid of surface acoustic and electrohydrodynamic **(SAW-EHDA)** waves was introduced.

In **[17], Chow D.M., Beugnot J.-C., et al** the presence of surface and hybrid acoustic waves at various locations of conical fibers is experimentally confirmed and the first measurement of the distribution of surface acoustic waves is shown.

Obviously, with mechanical contact of piezoelectric and other elements of structure that allow heterogeneous electromechanical fields, lacking components of elastic displacements will appear in adjacent bodies. Foreign wave fields in adjacent bodies mix. In this case, the simultaneous localization of electro-acoustic waves of pure shear and waves of plane deformation, or the joint propagation of these foreign waves in one composite, becomes impossible.

In **[18] Avetisyan A.S., Khachatryan V.M.** the existence of a hybrid of one-dimensional electro-acoustic waves of pure shear and waves of pure dilatation in a composite, periodically transversely inhomogeneous piezoelectric medium from piezocrystals of hexagonal symmetry class $6mm$ (or tetragonal symmetry class $4mm$) and hexagonal symmetry class $\bar{6}m2$ is proved. It is shown that there are two groups of permissible discrete frequencies. Permissible discrete frequencies are resonant if the ratios of the widths of the bands and the velocities of the elastic waves in the bands are inverse.

A simple two-layer waveguide scheme is proposed here, allowing hybridization of localized waves of electroactive anti-plane deformation and electroactive plane deformation.

1. Problem modeling. Formulation of the mathematical boundary value problem.

We consider the propagation of high-frequency electroelastic waves in a two-layer piezoelectric body assigned to the Cartesian coordinate system $0xyz$. Composite piezoelectric waveguide $\Omega(x,y,z) = \Omega_1(x,y,z) \cup \Omega_2(x,y,z)$, where

$$\Omega_1(x,y,z) \triangleq \{|x| < \infty;\ 0 \le y < h;\ |z| < \infty\},\ \Omega_2(x,y,z) \triangleq \{|x| < \infty;\ -h < y \le 0;\ |z| < \infty\}, \quad (1.1)$$

are designed so that the piezoelectric layers border the surface $y = 0$ without acoustic contact (Fig. 1).

The crystallographic sections and orientations of the crystallographic axes of the strip materials are compared with the Cartesian coordinate system $0xyz$ so that in the coordinate plane $x0y$ of the adjacent layers $\Omega_1(x,y,z)$ and $\Omega_2(x,y,z)$ there are separate electroactive waves of antiplane and plane deformations, respectively.

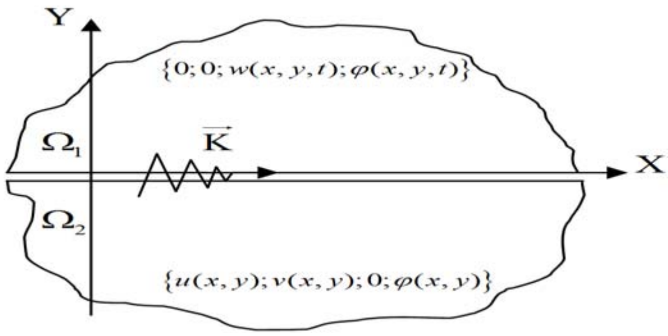


Fig. 1 Propagation pattern of a normal electroelastic wave signal in adjacent piezoelectric half-spaces without acoustic contact

Without disturbing the generality of reasoning, it is assumed that the material of the layer $\Omega_1(x,y,z)$ belongs to hexagonal symmetry class $6mm$, or tetragonal symmetry class $4mm$. The axis of symmetry of the sixth order $\vec{p}_6$ of the hexagonal piezocrystal, or, respectively, the axis of symmetry of the fourth order $\vec{p}_4$ of the tetragonal piezocrystal are aligned with the coordinate axis $0z$.

Then, the isotropic sagittal plane $x_1 0 x_2$ of the piezoelectric crystals is aligned with the coordinate plane $x0y$. In the case of antiplane deformation, for the above piezoelectric crystals, nonzero components of the tensor of mechanical stresses and the electric displacement vector on the coordinate plane $x0y$ are represented similarly [2]

$$\sigma_{zx}^{(1)}(x,y,t) = c_{44}^{(1)} \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial x} + e_{15}^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \sigma_{xy}^{(1)}(x,y,t) = c_{44}^{(1)} \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial y} + e_{15}^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \tag{1.2}$$

$$D_x^{(1)}(x,y,t) = e_{15}^{(1)} \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial x} - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad D_y^{(1)}(x,y,t) = e_{15}^{(1)} \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial y} - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \tag{1.3}$$

The quasistatic equations of the electroactive antiplane stress-strain state describing the separate excitation and propagation of electro-elastic shear waves of type ***SH*** in this band are written as

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathrm{w}_1(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{w}_1(x,y,t)}{\partial y^2} = \tilde{C}_{1t}^{-2} \cdot \frac{\partial^2 \mathrm{w}_1(x,y,t)}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial^2 \varphi_1(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1(x,y,t)}{\partial y^2} = \left(e_{15}^{(1)} / \varepsilon_{11}^{(1)}\right) \cdot \left[\frac{\partial^2 \mathrm{w}_1(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{w}_1(x,y,t)}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \tag{1.4}$$

where $\tilde{C}_{1t} = \sqrt{\tilde{c}_{44}^{(1)} / \rho_1}$ is the velocity of the electroelastic shear wave, $\tilde{c}_{44}^{(1)} = c_{44}^{(1)}(1+\chi_1^2)$ is reduced shear stiffness, $c_{44}^{(1)}$ is shear stiffness, $\chi_1^2 = (e_{15}^{(1)})^2 / \left(c_{44}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)}\right)$ is the coefficient of electro-mechanical coupling, $e_{15}^{(1)}$ is the piezoelectric module, $\varepsilon_{11}^{(1)}$ is the relative dielectric constant, ρ_1 is the density of the piezoelectric crystal.

For clarity, it is also assumed that the material of the layer $\Omega_2(x,y,z)$ belongs to hexagonal symmetry class $\overline{6}m2$. An electroactive plane stress-strain state is possible in the sagittal plane $x_3 0 x_1$ of the piezocrystal, combined with the coordinate plane $x0y$. The sixth-order inversion axis $\vec{\mathrm{p}}_{\overline{6}}$ of symmetry of the hexagonal piezocrystal is directed along the coordinate axis $0y$.

In the case of the plane stress-strain state, for the above piezoelectric crystals, nonzero components of the tensor of mechanical stresses and the vector of electric displacement in the coordinate plane $x0y$ of the strips $\Omega_2(x,y,z)$ of a piezoelectric of hexagonal symmetry class $\overline{6}m2$ are presented in the form [2]

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx}^{(2)}(x,y) = c_{11}^{(2)} \frac{\partial \mathrm{u}_2(x,y)}{\partial x} + c_{13}^{(2)} \frac{\partial \mathrm{v}_2(x,y)}{\partial y} + e_{11}^{(2)} \frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial x}, \\ &\sigma_{yy}^{(2)}(x,y) = c_{13}^{(2)} \frac{\partial \mathrm{u}_2(x,y)}{\partial x} + c_{33}^{(2)} \frac{\partial \mathrm{v}_2(x,y)}{\partial y}, \\ &\sigma_{xy}^{(2)}(x,y) = c_{44}^{(2)} \frac{\partial \mathrm{v}_2(x,y)}{\partial x} + c_{44}^{(2)} \frac{\partial \mathrm{u}_2(x,y)}{\partial y}, \\ &D_x^{(2)}(x,y) = e_{11}^{(2)} \frac{\partial \mathrm{u}_2(x,y)}{\partial x} - \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial x}, \\ &D_y^{(2)}(x,y) = -\varepsilon_{33}^{(2)} \frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Taking into account the compatibility conditions for the axial stress $\sigma_{zz}^{(2)}(x,y,t)\equiv 0$ and the third component of the displacement of the electric field $D_z^{(2)}(x,y,t)\equiv 0$ in the formulation of two-dimensional problem of electro elasticity [2], in the plane $x0y$ leads to the relationship between the characteristics of the electro-acoustic field

$$c_{12}^{(2)}\frac{\partial \mathrm{u}_2(x,y)}{\partial x}+c_{13}^{(2)}\frac{\partial \mathrm{v}_2(x,y)}{\partial y}-e_{11}^{(2)}\frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial x}=0 \tag{1.6}$$

The quasistatic equations of the electroactive plane stress-strain state, with respect to elastic displacements $\mathrm{u}_2(x,y,t)$, $\mathrm{v}_2(x,y,t)$ and the potential of the electric field $\varphi_2(x,y,t)$ are written in the simplified form

$$\left(c_{11}^{(2)}-\vartheta_2 c_{12}^{(2)}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{u}_2}{\partial x^2}+c_{44}^{(2)}\frac{\partial^2 \mathrm{u}_2}{\partial y^2}-e_{11}^{(2)}\left(1+\vartheta_2\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=\rho_2\frac{\partial^2 \mathrm{u}_2}{\partial t^2} \tag{1.7}$$

$$c_{44}^{(2)}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_2}{\partial x^2}+\left(c_{33}^{(2)}-\vartheta_1 c_{13}^{(2)}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{v}_2}{\partial y^2}-e_{11}^{(2)}\vartheta_1\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x\partial y}=\rho_2\frac{\partial^2 \mathrm{v}_2}{\partial t^2} \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_{11}^{(2)}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}+\varepsilon_{33}^{(2)}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}-e_{11}^{(2)}\frac{\partial^2 \mathrm{u}_2}{\partial x^2}=0\,. \tag{1.9}$$

In relations (1.7)÷(1.9) $c_{11}^{(2)}$, $c_{12}^{(2)}$, $c_{44}^{(2)}$, $c_{13}^{(2)}$ and $c_{33}^{(2)}$ are the elastic stiffnesses, $e_{11}^{(2)}$ is the piezoelectric modulus, $\varepsilon_{11}^{(2)}$ and $\varepsilon_{33}^{(2)}$ are the relative permittivities, and ρ_2 is the density of the piezoelectric crystal. The introduced dimensionless coefficients $\vartheta_1=\left(c_{13}^{(2)}+c_{44}^{(2)}\right)/c_{12}^{(2)}$ and $\vartheta_2=\left(c_{13}^{(2)}+c_{44}^{(2)}\right)/c_{13}^{(2)}$ characterize the anisotropy of the piezoelectric of the class $\overline{6}m2$ in the plane $x0y$.

From equations (1.7)÷(1.9) it can be seen that according to the model of the generalized stress-strain state [2], the reduced elastic tensile stiffnesses decrease with respect to the natural axial stiffnesses c_{11} and c_{33}, accordingly,

$$c_{11}^{*}=c_{11}^{(2)}-\vartheta_2 c_{12}^{(2)},\qquad c_{33}^{*}=c_{33}^{(2)}-\vartheta_1 c_{13}^{(2)}\,. \tag{1.10}$$

The reduced coefficients of the direct piezoelectric effect increase accordingly

$$e_{11}^{*}=e_{11}^{(2)}\left(1+\vartheta_2\right),\qquad e_{12}^{*}=\vartheta_1 e_{11}^{(2)}\,. \tag{1.11}$$

When the piezoelectric layers in the composite are in non-acoustic contact, the conditions of the mechanically free surface for both piezoelectric half-spaces are satisfied on the surface $y=0$

$$\left.c_{44}^{(1)}\frac{\partial \mathrm{w}_1(x,y,t)}{\partial y}+e_{15}^{(1)}\frac{\partial \varphi_1(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \tag{1.12}$$

$$\left(\vartheta_5 c_{44}^{(2)}\frac{\partial \mathrm{u}_2(x,y,t)}{\partial x}+e_{11}^{(2)}\frac{\partial \varphi_2(x,y,t)}{\partial x}\right)_{y=0}=0 \tag{1.13}$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{u}_2(x,y,t)}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}_2(x,y,t)}{\partial x}\right)_{y=0}=0\,. \tag{1.14}$$

Condition (1.13), in which the notation $\vartheta_5=\left[(c_{13}^{(2)})^2-c_{12}^{(2)}c_{33}^{(2)}\right]/(c_{33}^{(2)}c_{44}^{(2)})$ is introduced, is obtained taking into account the second equation of material relations (1.5) and the compatibility condition for mechanical stresses (1.6).

The conditions for the conjugation of the electric field on the surfaces of the crack $y=0$ between adjacent half-spaces, taking into account the zero gap width, can be written as

$$\left[\varphi_1(x,y,t)-\varphi_2(x,y,t)\right]\Big|_{y=0}=0\,, \tag{1.15}$$

$$\left[e_{15}^{(1)}\frac{\partial \mathrm{w}_1(x,y,t)}{\partial y}-\varepsilon_{11}^{(1)}\frac{\partial \varphi_1(x,y,t)}{\partial y}+\varepsilon_{33}^{(2)}\frac{\partial \varphi_2(x,y,t)}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=0}=0 \tag{1.16}$$

Due to the conjugation of the electric field on the surfaces of the crack, the oscillations of the electric field, accompanying the wave signal of one type in the first medium, leak through the vacuum gap into another piezoelectric medium. In the second medium, another type of electroelastic wave is already generated (and vice versa)

$\{0;\ 0;\ \mathrm{w}_1(x,y,t);\ \varphi_1(x,y,t)\}\rightleftarrows\{\mathrm{u}_2(x,y,t);\ \mathrm{v}_2(x,y,t);\ 0;\ \varphi_2(x,y,t)\}$.

Hybridization of elastic heterogeneous waves, associated with the accompanying oscillations of the electric field, occurs.

In case of the propagation of high-frequency electromechanical waves (the propagation of ultrashort waves in thick layers, when the wavelength is much less than the thicknesses of adjacent layers $\lambda \ll \min\{h_1;h_2\}$), the above equations (1.4) and (1.7) ÷ (1.9) together with the boundary conditions (1.12) ÷ (1.16) and the damping conditions deep into half-spaces from the common surface of non-acoustic contact $y=0$

$$\lim_{y\to\infty}\mathrm{w}_1(x,y,t)=0, \qquad \lim_{y\to\infty}\varphi_1(x,y,t)=0 \tag{1.17}$$

$$\lim_{y\to-\infty}\mathrm{u}_2(x,y,t)=0; \qquad \lim_{y\to-\infty}\mathrm{v}_2(x,y,t)=0; \qquad \lim_{y\to-\infty}\varphi_2(x,y,t)=0 \tag{1.18}$$

constitute the complete boundary-value problem of the two-layer piezoelectric composite.

2. Solution of the boundary value problem of electro elasticity.

From the formulated mixed boundary-value problem, it is obvious that the induced normal electroelastic waves of elastic shear

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{w}_1(x,y,t)\\ \varphi_1(x,y,t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathrm{w}_0(y)\\ \varphi_0(y)\end{Bmatrix}\cdot\exp[i(kx-\omega t)] \tag{2.1}$$

in the half-plane $\Omega_{10}(x,y)\triangleq\{|x|<\infty;\ 0\le y<\infty\}$ as solutions of the system of equations (1.4), due to the conjugation of electric fields at the interface between half-spaces (1.15) and (1.16), can generate an electroelastic wave of plane deformation

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{u}_2(x,y,t)\\ \mathrm{v}_2(x,y,t)\\ \varphi_2(x,y,t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathrm{u}_{20}(y)\\ \mathrm{v}_{20}(y)\\ \varphi_{20}(y)\end{Bmatrix}\cdot\exp[i(kx-\omega t)]\,. \tag{2.2}$$

in the half plane $\Omega_{20}(x,y)\triangleq\{|x|<\infty;\ -\infty<y\le 0\}$.

Taking into account the attenuation conditions (1.17), the solutions (2.1), damping deep into the half-space $\Omega_{10}(x,y)$, are written in the known form

$$\mathrm{w}_1(x,y,t)=A_1\exp(-k\alpha_{1\mathrm{w}}(\omega,k)\cdot y)\cdot\exp[i(kx-\omega t)] \tag{2.3}$$

$$\varphi_1(x,y,t)=\left[C_1\exp(-ky)+(e_{15}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(1)})A_1\exp(-k\alpha_{1\mathrm{w}}(\omega,k)\cdot y)\right]\cdot\exp[i(kx-\omega t)] \tag{2.4}$$

In relations (2.3) and (2.4), the well-known notations are used: $\alpha_{1\mathrm{w}} = \sqrt{1-\omega^2/k^2\tilde{C}_{1t}^2}$ - damping coefficient of elastic transverse vibrations in an antiplane deformation wave, $\tilde{C}_{1t}^2 = (\tilde{c}_{44}^{(1)}/\rho_1)$ - velocity of the electroelastic shear wave.
The permissible values of the phase velocity, as in the case of Gulyaev-Bluestein wave, have the form $\eta(\omega,k) = \omega/k < \tilde{C}_{1t}$.
Taking into account the decay conditions (1.18), solutions (2.2), which decay deep into the half-plane $\Omega_{20}(x,y)$, can be written as

$$\mathrm{u}_2(x,y,t) = \left[A_\mathrm{u}\exp[kq_{2\mathrm{u}}(\omega,k)\cdot y] + a_{\mathrm{u}\varphi}C_\varphi\exp[kq_{2\varphi}(\omega,k)\cdot y]\right]\cdot\exp[i(kx-\omega t)] \tag{2.5}$$

$$\mathrm{v}_2(x,y,t) = \begin{bmatrix} B_\mathrm{v}\exp[kq_{2\mathrm{v}}(\omega,k)\cdot y] + \\ +b_{\mathrm{vu}}A_\mathrm{u}\exp[kq_{2\mathrm{u}}(\omega,k)\cdot y] + b_{\mathrm{v}\varphi}C_\varphi\exp[kq_{2\varphi}(\omega,k)\cdot y]\end{bmatrix}\cdot\exp[i(kx-\omega t)] \tag{2.6}$$

$$\varphi_2(x,y,t) = \left[C_\varphi\exp[kq_{2\varphi}(\omega,k)\cdot y] + c_{\varphi u}A_\mathrm{u}\exp[kq_{2\mathrm{u}}(\omega,k)\cdot y]\right]\cdot\exp[i(kx-\omega t)] \tag{2.7}$$

The coefficients of the formation of an electroelastic wave of Rayleigh type $q_{2u}(\omega,k)$, $q_{2\mathrm{v}}(\omega,k)$ and $q_{2\varphi}(\omega,k)$ are obtained from the characteristic equation of the system (1.7)÷(1.9)

$$\left[q^2 - \left(\alpha_{2t}^2/\vartheta_3\right)\right]\cdot\left[\left(q^2-\alpha_{2\varphi}^2\right)\left[q^2 - \left(\alpha_{2l*}^2/\vartheta_4\right)\right] - \tilde{\chi}_2^2\left(1+\vartheta_2\right)\right] = 0 \tag{2.8}$$

where $\vartheta_3 = \left(c_{33}^{(2)} - \vartheta_1 c_{13}^{(2)}\right)/c_{44}^{(2)}$ and $\vartheta_4 = c_{44}^{(2)}/\left(c_{11}^{(2)} - \vartheta_2 c_{12}^{(2)}\right)$ are the dimensionless anisotropy characteristics, and $\chi_2^2 = \left(e_{11}^{(2)}\right)^2/c_{44}^{(2)}\varepsilon_{11}^{(2)}$ and $\tilde{\chi}_2^2 = \left(\varepsilon_{11}^{(2)}/\varepsilon_{33}^{(2)}\right)\cdot\chi_2^2 = \left(e_{11}^{(2)}\right)^2/c_{44}^{(2)}\varepsilon_{33}^{(2)}$ are the reduced electromechanical coupling coefficients in the second medium

$$q_{2u}(\omega,k) = \sqrt{\frac{\left(\alpha_{2l*}^2/\vartheta_4\right)+\alpha_{2\varphi}^2}{2} + \sqrt{\frac{\left[\left(\alpha_{2l*}^2/\vartheta_4\right)-\alpha_{2\varphi}^2\right]^2}{4} + \tilde{\chi}_2^2\left(1+\vartheta_2\right)}}\ , \tag{2.9}$$

$$q_{2\mathrm{v}}(\omega,k) = \sqrt{\alpha_{2t}^2(\omega,k)/\vartheta_3}\ , \tag{2.10}$$

$$q_{2\varphi}(\omega,k) = \sqrt{\frac{\left(\alpha_{2l*}^2/\vartheta_4\right)+\alpha_{2\varphi}^2}{2} - \sqrt{\frac{\left(\left(\alpha_{2l*}^2/\vartheta_4\right)-\alpha_{2\varphi}^2\right)^2}{4} + \tilde{\chi}_2^2\left(1+\vartheta_2\right)}}\ . \tag{2.11}$$

In solutions (2.5)÷(2.7), notations of amplitude coefficients are introduced, which characterize the connection of the components of the electromechanical field in the second piezoelectric

$$b_{\mathrm{v}\varphi}(\omega,k) = i\frac{\left(e_{11}^{(2)}/c_{44}^{(2)}\right)\left(\vartheta_1/\vartheta_3\right)\cdot q_{2\varphi}(\omega,k)}{q_{2\varphi}^2(\omega,k) - q_{2\mathrm{v}}^2(\omega,k)}\ , \tag{2.12}$$

$$b_{\mathrm{vu}}(\omega,k) = i\frac{\chi_2^2\cdot\left(\vartheta_1/\vartheta_3\right)}{q_{2\mathrm{u}}^2(\omega,k) - q_{2\mathrm{v}}^2(\omega,k)}\cdot\frac{\alpha_{2\varphi}^2\cdot q_{2\mathrm{u}}(\omega,k)}{\alpha_{2\varphi}^2 - q_{2\mathrm{u}}^2(\omega,k)}\ , \tag{2.13}$$

$$a_{u\varphi}(\omega,k) = \frac{\left(1+\vartheta_2\right)\left(e_{11}^{(2)}/c_{44}^{(2)}\right)}{\left(\alpha_{2l*}^2(\omega,k)/\vartheta_4\right) - q_{2\varphi}^2(\omega,k)}\ , \qquad c_{\varphi u}(\omega,k) = \frac{\left(e_{11}^{(2)}/\varepsilon_{33}^{(2)}\right)}{\alpha_{2\varphi}^2 - q_{2u}^2(\omega,k)}\ . \tag{2.14}$$

In the expressions (2.9)÷(2.11) of the attenuation coefficients of the components of the electro-acoustic wave and the amplitude coefficients (2.12)÷(2.13), the attenuation coefficients of elastic dilatation $\alpha_{2l*}=\sqrt{1-\omega^2 C_{2l*}^{-2}/k^2}$, the attenuation coefficient of the transverse displacement $\alpha_{2t}=\sqrt{1-\omega^2 C_{2t}^{-2}/k^2}$, the attenuation coefficient of the electric field oscillations $\alpha_{2\varphi}=\sqrt{\varepsilon_{11}^{(2)}/\varepsilon_{33}^{(2)}}$, are written without taking into account the piezoelectric effect of the second medium. In these notations, $C_{2l*}=\sqrt{\left(c_{11}^{(2)}-\vartheta_2 c_{12}^{(2)}\right)/\rho_2}$ and $C_{2t}=\sqrt{c_{44}^{(2)}/\rho_2}$ are the velocities of purely elastic waves of dilatation and shear in the second medium.

From solutions (2.5)÷(2.7) it follows that in the second piezoelectric, the induced electroactive wave of dilatation $\mathrm{u}_2(x,y,t)$ and the oscillations of the accompanying electric field $\varphi_2(x,y,t)$ coincide in the propagation phase. The induced electroactive shear wave $\mathrm{v}_2(x,y,t)$ (second and third terms) is shifted from them by the propagation phase $\pi/2$.

From the solutions (2.5)÷(2.7) it is also obvious that the components of the induced electroelastic wave in the second piezoelectric are damped along the depth of the half-space in the zone of permissible phase velocities, when

$$\eta(\omega,k)<\min\left\{C_{2t}/\sqrt{\vartheta_3};\ C_{2l*}\cdot\sqrt{1-\chi_2^2\left(1+\vartheta_2\right)\vartheta_4}\right\} \quad \text{if} \quad \vartheta_3>0 \tag{2.15}$$

or

$$C_{2t}\sqrt{1-\vartheta_3}<\eta(\omega,k)<C_{2l*}\cdot\sqrt{1-\chi_2^2\left(1+\vartheta_2\right)\vartheta_4} \quad \text{if} \quad \vartheta_3<0 \tag{2.16}$$

The existence of the second variant of conditions (2.16), when in an elastic medium $\vartheta_3<0$, is associated with the choice of the model of a plane stress-strain state in the statements of two-dimensional problems of electroacoustic in homogeneous piezoelectric crystals [2]. For the isotropic medium $\vartheta_3\equiv 1$, and the longitudinal wave velocity will be $C_{2l}=\sqrt{c_{11}^{(2)}/\rho_2}$.

From the conditions for the existence of electroactive waves of the Rayleigh type (2.15) and (2.16) it follows that such waves in a medium can exist only in the case of a small value of the piezoelectric effect

$$\chi_2^2<\left(c_{11}^{(2)}-\vartheta_2 c_{12}^{(2)}\right)/c_{44}^{(2)}\left(1+\vartheta_2\right) \tag{2.17}$$

In elastic media (taking into account the piezoelectric effect or not) of the class $\bar{6}m2$ with anisotropy $c_{11}^{(2)}-\vartheta_2 c_{12}^{(2)}<0$, Rayleigh waves do not exist.

In elasticity problems, when the piezoelectric effect in the medium is not taken into account $\tilde{\chi}_2^2\equiv 0$, and the existing pressure of the selected coordinate surface on neighboring surfaces is not taken into account (condition (1.6)), the zone of permissible phase velocities (2.15) turns into the known relation $\eta(\omega,k)<\min\{\sqrt{c_{44}^{(2)}/\rho_2};\ \sqrt{c_{11}^{(2)}/\rho_2}\}$.

Substituting the decaying solutions (2.3)÷(2.7) into the boundary conditions (1.12)÷(1.16), we obtain the dispersion equation of electroelastic hybrid ***R&GB*** waves in the following form

$$\frac{\alpha_{1\mathrm{w}}-\tilde{\chi}_1^2}{\alpha_{1\mathrm{w}}}=-\left(\varepsilon_{11}^{(1)}/\varepsilon_{33}^{(2)}\right)\begin{pmatrix} c_{\varphi u} & 1 \\ \left(\vartheta_5+e_{11}^{(2)}c_{\varphi u}\right) & \left(e_{11}^{(2)}+\vartheta_5 a_{u\varphi}\right)\end{pmatrix}\Big/\begin{pmatrix} q_{2\mathrm{u}}c_{\varphi u} & q_{2\varphi} \\ \left(\vartheta_5+e_{11}^{(2)}c_{\varphi u}\right) & \left(e_{11}^{(2)}+\vartheta_5 a_{u\varphi}\right)\end{pmatrix} \tag{2.18}$$

If the piezoelectric effect is not taken into account in the second piezoelectric, i.e. when $e_{11}^{(2)} \equiv 0$, $\chi_2^2 \equiv 0$ and $\chi_{2*}^2 \equiv 0$, all amplitude coefficients (2.12)÷(2.14) are zero. The expressions of the shaping coefficients (2.9)÷(2.11) of the electro-elastic Rayleigh wave $q_{2u}(\omega,k) = \alpha_{2l*}(\omega,k)\big/\sqrt{\vartheta_4}$ and $q_{2\varphi}(\omega,k) = \alpha_{2\varphi} \equiv \sqrt{\varepsilon_{11}^{(2)}/\varepsilon_{33}^{(2)}}$ are also simplified.
To maintain solutions (2.3) and (2.4) in the first piezoelectric half-space, and the accompanying oscillations of the electric field in the second piezoelectric half-space

$$\varphi_2(x,y,t) = C_{2\varphi}\exp[k\alpha_{2\varphi}\cdot y]\cdot\exp[i(kx-\omega t)], \tag{2.19}$$

from the dispersion equation (2.17) of the hybrid wave, the dispersion equation of the Gulyaev – Bluestein problem remains [3],

$$\alpha_{1t} = \tilde{\chi}_1^2 \cdot \frac{\varepsilon_{33}^{(2)}}{\varepsilon_{33}^{(2)} + \varepsilon_{11}^{(1)}} \tag{2.20}$$

with the difference in the dielectric constant of the media $\varepsilon_{33}^{(2)} \rightleftarrows \varepsilon^{(e)} = 0.885\times10^{-11}\,F/m$.
If the piezoelectric effect is not taken into account in the first piezoelectric half-space $e_{15}^{(1)} \equiv 0$ and $\tilde{\chi}_1^2 \equiv 0$, the dispersion equation (2.17) is simplified, taking the form of the dispersion equation of the electro-acoustic Rayleigh problem

$$\begin{gathered}\left[q_*^2(\omega,k) + \vartheta_5\left(1+\vartheta_2\right)\right]\cdot q_{2u}(\omega,k) - \left[q_*^2(\omega,k) + \vartheta_5\left(1+\vartheta_2\right)\theta\right]\cdot q_{2\varphi}(\omega,k) - \\ -\vartheta_5\left(1+\vartheta_2\right)\left(\theta-1\right)(\varepsilon_{11}^{(1)}/\varepsilon_{33}^{(2)}) = 0\end{gathered} \tag{2.21}$$

in order to maintain the solutions (2.5) and (2.7) in the second piezoelectric half-space, and associated electrical vibrations in the first piezoelectric half-space

$$\varphi_1(x,y,t) = C_{1\varphi}\exp[-k\alpha_{2\varphi}\cdot y]\cdot\exp[i(kx-\omega t)] \tag{2.22}$$

From the form of dispersion equation (2.17) it follows that it has a solution in the case of permissible wave signal frequencies at which the dispersion function in the second piezoelectric takes on values

$$\begin{pmatrix} \dfrac{c_{\varphi u}}{\left(\vartheta_5 + e_{11}^{(2)}c_{\varphi u}\right)} & \dfrac{1}{\left(e_{11}^{(2)} + \vartheta_5 a_{u\varphi}\right)} \end{pmatrix} \Bigg/ \begin{pmatrix} \dfrac{q_{2u}c_{\varphi u}}{\left(\vartheta_5 + e_{11}^{(2)}c_{\varphi u}\right)} & \dfrac{q_{2\varphi}}{\left(e_{11}^{(2)} + \vartheta_5 a_{u\varphi}\right)} \end{pmatrix} \le \left(\varepsilon_{33}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(1)}\right)\cdot\left(1-\tilde{\chi}_1^2\right) \tag{2.23}$$

Relation (2.22) determines the zone of permissible phase velocities $\Omega_0\left(\omega/k(\omega)\right)$. The phase velocity of the formed electro-acoustic hybrid wave is determined by solving the dispersion equation of the hybrid of waves ***R&GB*** (2.17), taking into account the function (2.18).
From the form of solutions (2.3)÷(2.7) it follows that the wave electroacoustic signal of the type $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}_1(x,y,t);\ \varphi_1(x,y,t)\}$ in the first piezoelectric of the class $6mm$ induces an electro-acoustic wave of dilatation of the type $\{\mathrm{u}_2(x,y,t);\ 0;\ 0;\ \varphi_2(x,y,t)\}$ in the second piezoelectric of the class $\overline{6}m2$, followed by a shear component $\mathrm{v}_2(x,y,t)$, with the phase shift $\pi/2$.

3. Numerical comparative analysis of the results.
The determination of the zones of permissible phase velocities and phase function of the resulting electro-acoustic hybrid wave is carried out by selecting neighboring materials with different physicomechanical constants (Table 1). Choosing the following material constants, we calculate the dimensionless parameters of the anisotropy and wave velocity in

these materials for piezoelectrics of the class $\bar{6}m2$, P_{21}: $\vartheta_1 = 1.4297$, $\vartheta_2 = 1.2679$, $\vartheta_3 = 1.3819$, $\vartheta_4 = 0.6808$, $\theta = 0.4305$, $C_{2t} = 2.3358\times 10^3\ m/s$ $C_{2l} = 6.0938\times 10^3\ m/s$, $C_{2l*} = 3.9118\times 10^3\ m/s$ и P_{22}: $\vartheta_1 = 3.4306$, $\vartheta_2 = 2.0756$, $\vartheta_3 = -0.6269$, $\vartheta_4 = 0.6131$, $\theta = 0.4465$, $C_{2t} = 2.6644\times 10^3\ m/s$, $C_{2l} = 5.8498\times 10^3\ m/s$, $C_{2l*} = 5.0924\times 10^3\ m/s$ respectively.

Table 1. The different physicomechanical constants for piezoelectric materials

Physico mechanical constants	Piezoelectric materials			
	P_{11}, class $6mm$	P_{12}, class $6mm$	P_{21}, class $\bar{6}m2$	P_{22}, class $\bar{6}m2$
$c_{11}(N/m^2)$			8.682×10^{10}	6.17×10^{10}
$c_{12}(N/m^2)$			4.0258×10^{10}	0.72×10^{10}
$c_{13}(N/m^2)$			4.762×10^{10}	1.19×10^{10}
$c_{33}(N/m^2)$			8.571×10^{10}	3.28×10^{10}
$c_{44}(N/m^2)$	1.639×10^{10}	14.330×10^{10}	1.2756×10^{10}	1.28×10^{10}
$\rho(kg/m^3)$	5.302×10^3	4.820×10^3	2.338×10^3	1.803×10^3
$\varepsilon_{11}(F/m)$	$8,786\times 10^{-11}$	9.312×10^{-11}	9.312×10^{-11}	49.8938×10^{-11}
$\varepsilon_{33}(F/m)$			19.293×10^{-11}	14.5081×10^{-11}
$e_{15}(C/m^2)$	0.534	2.723		
$e_{11}(C/m^2)$			0.576	1.225
$\tilde{\chi}_1^2$	0.1980	0.5556		
χ_2^2			0.6120	0.2349

For piezoelectric class: $6mm$ and P_{11}: $\tilde{C}_{1t} = 2.1063\times 10^3\ m/s$ and P_{12}: $\tilde{C}_{1t} = 8.4822\times 10^3\ m/s$.

From the expressions (2.3) and (2.4) it is obvious that when choosing different piezoelectrics of the class $6mm$, the coefficients of the Gulyaev-Bluestein wave components differ only quantitatively.

When choosing different piezoelectrics from a class $\bar{6}m2$ outside the hybrid, the coefficients of the components of a Rayleigh wave type differ both quantitatively and qualitatively.

The forming coefficients of the components of the constituents of the hybrid of Gulyaev-Bluestein type waves $\alpha_{1w}(\omega,k)$ from (2.3), (2.4) and Rayleigh type waves $q_{2u}(\omega,k)$, $q_{2v}(\omega,k)$ and $q_{2\varphi}(\omega,k)$ from (2.9), (2.10) and (2.11), are functions of the phase velocity $\omega/k(\omega)$. From their expressions, it is obvious that when choosing different piezoelectrics of the class $6mm$, the coefficients of the components of the constituents of the wave of Gulyaev-Bluestein type outside the hybrid, change only quantitatively. When choosing different piezoelectrics of the class $\bar{6}m2$, the coefficients of constituents the components of Rayleigh type wave outside the hybrid change both quantitatively and qualitatively.

From the numerical data it follows that conditions (2.16) and (2.17) are fulfilled for a piezoelectric P_{22} , and conditions (2.17) are not fulfilled for a piezoelectric P_{21} of hexagonal symmetry class $\bar{6}m2$. Consequently, the induced electro-acoustic wave in the second piezoelectric P_{21} will not decrease in depth of half-space.

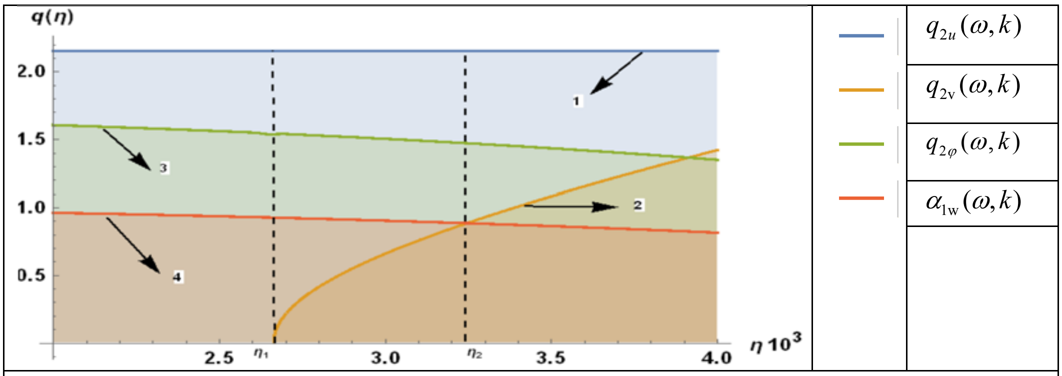


Fig. 2 ***Forming coefficients of the components of the hybrid wave and the zone of permissible phase velocities*** $[\eta_1(\omega);\ \eta_2(\omega)]$ ***in a composite of pairs of piezoelectrics -*** P_{12} ***of the class*** $6mm$ ***and*** P_{22} ***- of hexagonal symmetry class*** $\bar{6}m2$

Although in a composite of a pair of piezoelectrics P_{11} of the class $6mm$ and P_{22} of hexagonal symmetry class $\bar{6}m2$, wave forms decaying along the depth of half-spaces are formed, but the zones of permissible phase velocities for them are different. In a composite of a pair of piezoelectrics P_{12} of the class $6mm$ and P_{22} of hexagonal symmetry class $\bar{6}m2$, electroactive wave forms that decay along the depth of half-spaces have a common zone of permissible phase velocities (Fig. 2).

From Figure 2 it follows that in a piezoelectric P_{22} of the class $\bar{6}m2$, the second decaying form of elastic shear with the coefficient $q_{2v}(\omega,k)$ is formed, starting from a certain value of the wave propagation velocity $\eta_1(\omega_0) = C_{2t} = 2.6644\times 10^3\ m/s$. Highlighted by vertical lines in Figure 2, the zone of permissible phase velocity values $\eta(\omega)\in[\eta_1(\omega);\ \eta_2(\omega)]$ is determined by condition (2.16).

From Figure 2 it also follows that the corresponding frequency ω_{01} , when $q_{2v}(\omega_{01},k_r) = \alpha_{1w}(\omega_{01},k_r)$ for the limiting phase velocity $\eta_2(\omega_{01})$, will be resonant in the second piezoelectric P_{22} .

The formation of the electro-acoustic hybrid ***R&GB*** (a combination of electro-acoustic waves of the Rayleigh type and the Gulyaev-Bluestein type) is determined by the solution of dispersion equation (2.18) in the zone of permissible values of the phase velocity of the decaying components of the hybrid wave (2.16) and relation (2.23). Consequently, for different duets of adjacent piezoelectric materials, the zones of permissible frequencies of the electro-acoustic wave hybrid are determined differently.

The numerical solution of dispersion equation (2.18) in the case of a pair of piezoelectrics P_{12} of the class $6mm$ and P_{22} of hexagonal symmetry class $\overline{6}m2$ is shown in Figure 3. The figure shows that in the case of the selected pair of media, we have the solution of the dispersion equation in the zone of permissible phase velocities $\eta_0(\omega) \in [\eta_1(\omega);\ \eta_2(\omega)]$.

The phase velocity of the hybrid $\eta_0(\omega,k)$, which satisfies the conditions for localization of electro-acoustic components (2.16), leads to the joint propagation of electroactive waves of Gulyaev-Bluestein type in piezoelectrics P_{12} of the class $6mm$ and electroactive waves of Rayleigh type in piezoelectrics P_{22} of the class $\overline{6}m2$.

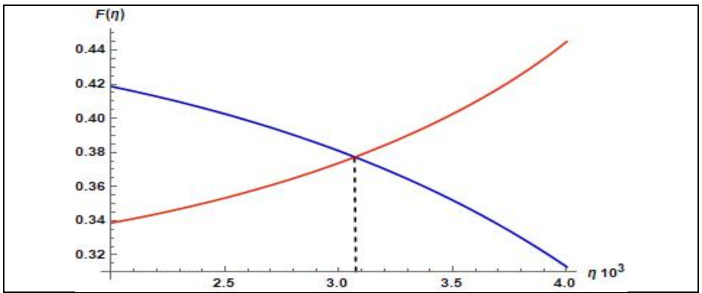
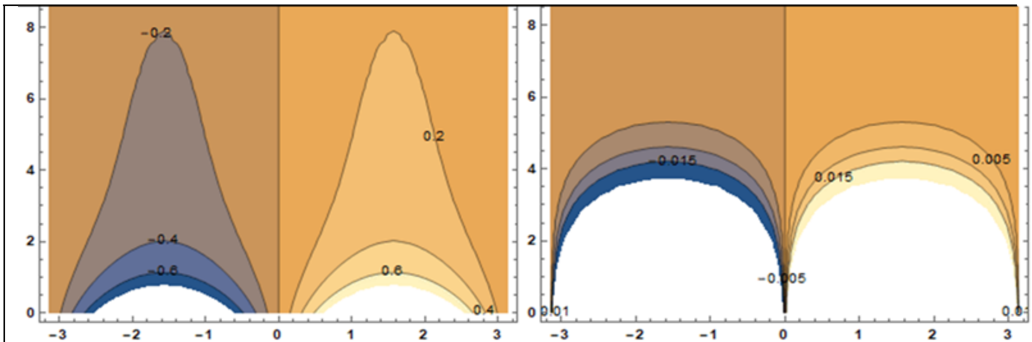


Fig. 3 ***Numerical solution of the dispersion equation of an electro-acoustic hybrid wave*** $\eta_0(\omega,k) = 3.074\times10^3\ m/s$

In the piezoelectric P_{12} of the class $6mm$, electroactive shear waves of length $\lambda < 8.4822(2\pi/\omega)$ will propagate. In the piezoelectric P_{22} of the class $\overline{6}m2$ electroactive waves of plane deformation of length $3.3984\cdot(2\pi/\omega) < \lambda < 4.5103\cdot(2\pi/\omega)$ will propagate.



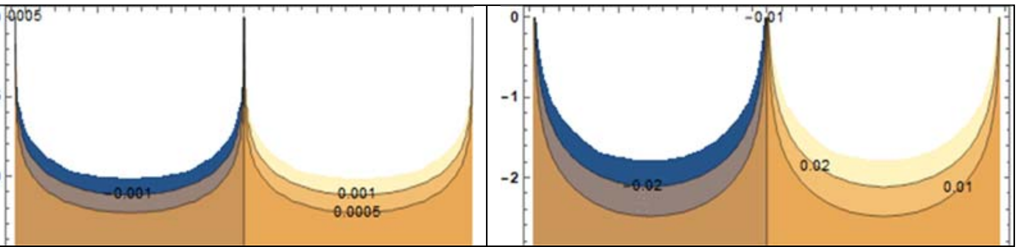
a) in the case of the free surface of the piezoelectric	***b) in the composition of the hybrid wave in the composite***

Fig. 4 ***Type of localization of accompanying oscillations of the electric field in piezoelectric*** P_{12} ***of the class*** $6mm$

Taking into account the obtained numerical values of the forming coefficients of the components of the hybrid electro-acoustic wave, the figures below show the comparative analysis of the changes in the distribution of wave components.

When propagating, the electro-acoustic wave signal of Gulyaev-Bluestein type strongly changes the form of localization near the non-acoustic contact between piezoelectrics (Fig. 4.a), 4.b) and Fig. 6.a), 6.b)).

Near the surface of the piezoelectric P_{12} of the class $6mm$, the oscillations of the electric field, accompanying the elastic shear signal in the hybrid, are localized at shallow depth and with a smaller amplitude (Fig. 4.b) than in the case of the free surface of the piezoelectric (Fig. 4.a).



a) in the case of the free surface of the piezoelectric

b) in the composition of the hybrid wave in the composite

Fig. 5 ***Localization of accompanying oscillations of the electric field in a piezoelectric*** P_{22} ***of the class*** $\overline{6}m2$

Along with this, in the piezoelectric P_{22} of the class $\overline{6}m2$, the localization of the accompanying electric field oscillations in the case of the free surface of the piezoelectric occurs at a depth of approximately $3.5 \cdot \lambda$ (Fig. 5.a)), and in the composition of the hybrid, the localization of the accompanying electric field oscillation occurs quickly, already at a depth of approximately $0.75 \cdot \lambda$ (Fig. 5 b).

In the composition of the hybrid, the localization of both components of displacements occurs near the non-acoustic contact of piezoelectrics (Fig. 7.a) and Fig. 7.b)).

Figures 6.a) and 6.b) show the types of localization of the electro-acoustic displacement of the shear in the piezoelectric P_{12} of the class $6mm$ and the electro-acoustic dilatation in the piezoelectric P_{22} of the class $\overline{6}m2$ in the case of the free surface of the piezoelectrics.

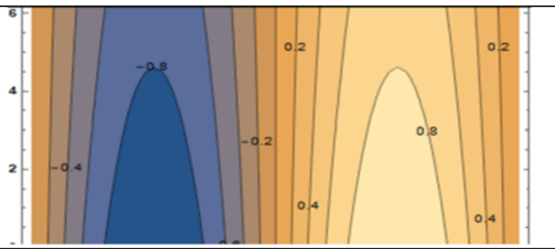


Fig. 6.a ***Localization of the electro-acoustic displacement of the shear in the piezoelectric*** P_{12} ***of the class*** $6mm$ ***in the case of the free surface of the piezoelectric***

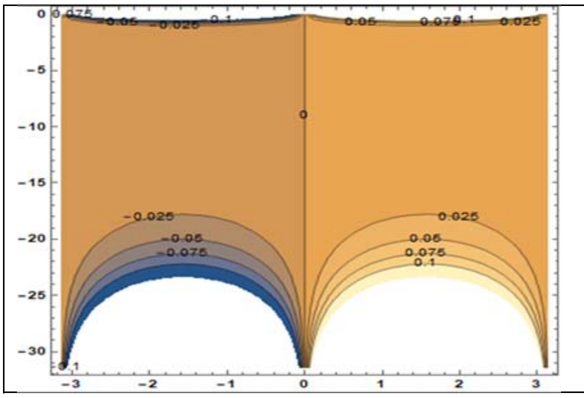


Fig. 6.b ***Localization of electro-acoustic dilatation in the piezoelectric P_{22} of the class $\bar{6}m2$ in the case of the free surface of the piezoelectric***

If the electro-acoustic displacement of the shear in the piezoelectric P_{12} has a canonical localization form, then the electro-acoustic displacement of the dilatation in the piezoelectric P_{22} has localization both near the free surface of the piezoelectric and in the depth of about 5λ of the half-spaces.

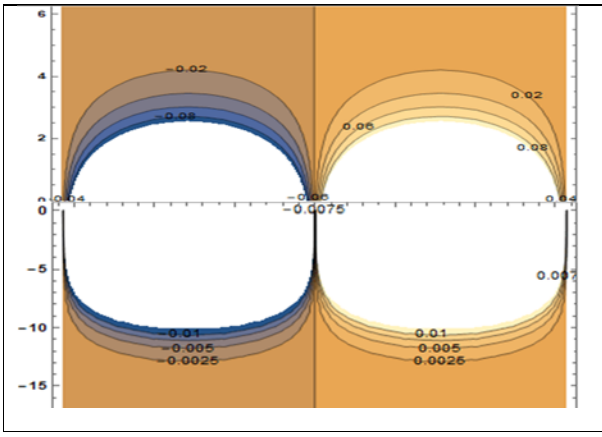


Fig. 7.a ***Localization of the electro-acoustic displacement of the shear as part of the hybrid wave in the piezoelectric P_{12} of the class $6mm$ in the composition of the hybrid wave***

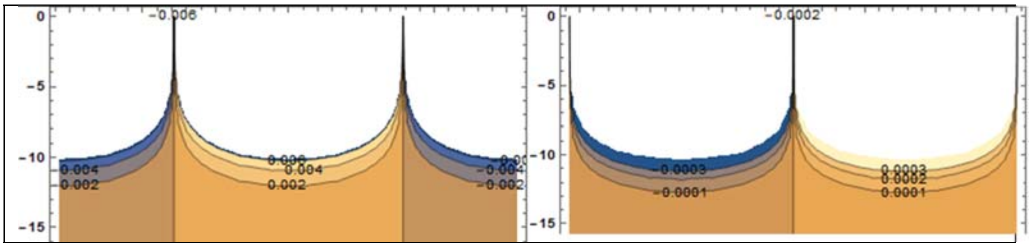
Fig. 7.b ***Localization of electro-acoustic dilatation as part of the hybrid wave in the piezoelectric P_{22} of the class $\bar{6}m2$ in the composition of the hybrid wave***

Moreover, the localization of the electro-acoustic shift in the composition of the hybrid is located approximately at the depth $1.25 \cdot \lambda$ of the first half-space, and the localization of the electro-acoustic dilation in the composition of the hybrid is located approximately at the depth $4.0 \cdot \lambda$ of the second half-space.

The phase velocity of the hybrid wave is about 2.5 times less than the speed of the Gulyaev-Bluestein wave in the first piezoelectric with the free surface.

From Figure 7.b) it can be seen that in the piezoelectric P_{22} of the class $\bar{6}m2$ the form of electro-acoustic dilatation in the composition of the hybrid qualitatively changes compared to the form of electro-acoustic dilatation in the composition of the Rayleigh electro-acoustic wave (Fig. 6.b)).

The phase velocity of the hybrid wave is approximately 1.5 times lower than the dilatation velocity in the Rayleigh electro-acoustic wave in the piezoelectric P_{22} with the free surface. In the piezoelectric P_{22} of the class $\overline{6}m2$, two electroactive forms of shear propagate in the composition of the hybrid. One term propagates simultaneously with dilatation, and the second term propagates with a phase shift $\pi/2$ (Fig. 7). Moreover, the amplitude of the late form is greater than the amplitude of the synchronous form about 20 times.
The phase velocity of the hybrid wave is approximately 13.3% higher than the velocity of the shear component in the Rayleigh electro-acoustic wave in the piezoelectric P_{22} with the free surface. In the absence of the piezoelectric effect in the medium of the second half-space, when $e_{11}^{(2)} \equiv 0$, the elastic plane deformation and the electric field in this medium are separated.



a) the form propagates with a phase shift $\pi/2$

b) the form is propagates simultaneously with the dilatation

Fig. 8 ***Localization of the electro-acoustic displacement of shear in the piezoelectric*** P_{22} ***of the class*** $\overline{6}m2$***, in the composition of the electro-acoustic hybrid wave***

With this in mind, the formation coefficients of the electro-elastic Rayleigh wave $q_{2u}(\omega,k)$ and $q_{2\varphi}(\omega,k)$ are simplified.

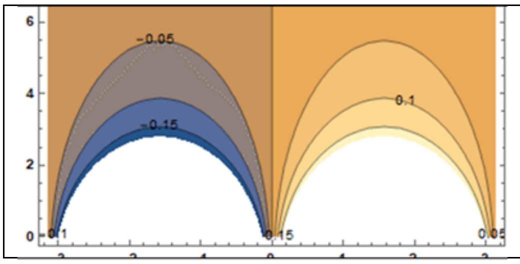


Fig. 9.a ***Localization of accompanying oscillations of the electric field in the piezoelectric*** P_{12} ***of the class*** $6mm$***, in the case of the presence of a dielectric near the free surface of the piezoelectric***

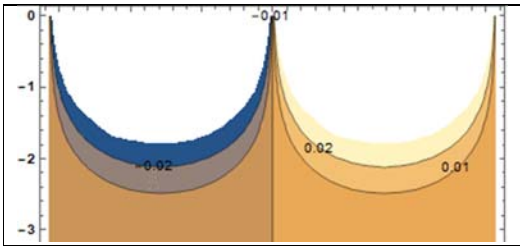


Fig. 9.b ***Localization of the accompanying oscillations of the electric field in the piezoelectric*** P_{22} ***of the class*** $\bar{6}m2$ ***, in the case of the presence of a dielectric near the free surface of the piezoelectric***

In this case, in the first half-space of the piezoelectric P_{12} of the class $6mm$, a two-component electro-elastic Gulyaev-Bluestein wave (2.3) and (2.4) propagates and the accompanying oscillations of the electric field in the second layer

$$\varphi_2(x,y,t) = C_{2\varphi}\exp[k\,(\varepsilon_{11}^{(2)}/\varepsilon_{33}^{(2)})\cdot y]\cdot\exp[i(kx-\omega t)] \tag{2.24}$$

The phase velocity of this wave is determined from the dispersion equation

$$\sqrt{1-\left(V_{GB}^2/\tilde{C}_{1t}^2\right)} = \tilde{\chi}_1^2\cdot\varepsilon_{33}^{(2)}/\left(\varepsilon_{11}^{(1)}+\varepsilon_{33}^{(2)}\right) \tag{2.25}$$

The distributions of the accompanying electroactive shear $\mathrm{w}_{01}(x,y)$ of electrical vibrations $\varphi_{01}(x,y)$ and $\varphi_2(x,y)$ are shown in Figures 9.a) and 9.b), respectively.

Conclusion.

In a layered piezoelectric composite, by choosing pairs of different piezoelectrics with a non-acoustic contact, a hybrid of localized electro-acoustic waves of the Rayleigh and Gulyaev-Bluestein types can be obtained at the surface of the non-acoustic contact.

It is shown that the localized electroelastic shear wave signal of the Gulyaev-Bluestein wave type near the surface of the non-acoustic contact in one medium can generate an electroelastic plane deformation wave of the Rayleigh wave type in another medium and vice versa.

It is also shown that the corresponding choice of materials of adjacent half-spaces can lead to an increase or decrease of the localization of the energy of electroelastic waves in the vicinity of the no mechanical contact surface of two piezoelectrics.

It was revealed that an electro-acoustic wave signal induced with the non-resonant frequency in one of the media can cause internal resonance, or the formation of forbidden frequency bands in the waveguide of given structure.

This work was supported by the RA MES State Committee of Science, in the frames of the research project № 18T-2C195

References

1. Avetisyan A.S., About the Problem of the Propagation of Transversal Waves in Piezoelectric Bodies, Mechanics, Procc. of NAS of Armenia, (1985), vol. 38, №1, pp. 12-19, (in Russian)

   Аветисян А.С., К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде, Изв. НАН Армении, Механика, (1985), т. 38, №1, стр.12-19,

2. Avetisyan Ara S., Two Dimensional Problems of Electro Acoustics in Homogeneous Piezoelectric Crystals, Mechanics, Procc. of NAS of Armenia, (2019), vol. 72, №3, pp. 56—79, http://doi.org/10.33018/72.3.4
3. Bleustein J.L., A new surface wave in piezoelectric materials, Appl. Phys. Lett. (1968), vol.13, №12. pp. 412–413, https://doi.org/10.1063/1.1652495
4. Gulyaev Yu. V., Surface ultrasonic waves in solids. - Letters to JETP, 1969, vol. 9, issue 1, p. 63-65, (in Russian).
Гуляев Ю.В. Поверхностные ультразвуковые волны в твердых телах. - Письма в ЖЭТФ, 1969, т.9, вып.1, с.63-65.
5. Yang, J. S., Bleustein-Gulyaev Waves in Piezo-electro- magnetic Materials. Int. J. Appl. Elect. Mech., vol.12(3), (2000), p.235-240, https://doi.org/10.3233/JAE-2000-201
6. Liu, H., Kuang Z.B., Cai Z.M., Propagation of Bleustein - Gulyaev Waves in a Pre-stressed Layered Piezoelectric Structure. (2003), Ultrasonic, vol.41 (5), pp.397-405, https://doi.org/10.1016/s0041-624x(03)00104-5
7. Vashishth A.K., Dahiya A., & Gupta V., Generalized Bleustein-Gulyaev type waves in layered porous piezoceramic structure, (2015), Appl. Math. and Mechanics, vol. 36, pp. 1223-1242, https://doi.org/10.1007/s10483-015-1976-6
8. Li P, & Jin F., Bleustein–Gulyaev waves in a transversely isotropic piezoelectric layered structure with an imperfectly bonded interface, (2012), Smart Materials and Structures, vol. 21, №4, pp.1315-1322, doi.org/10.1088/0964-1726/21/4/045009
9. Avetisyan A. S., Kamalyan A. A., On Propagation of Electroelastic Shear Wave in 6mm Class Piezodielectric Inhomogeneous Layer, Reports of NAS Armenia, (2014), vol. 114, №2, pp.108-115, (in Russian).
Аветисян А.С., Камалян А.А., О распространении электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое класса 6mm, Докл. НАН Апмении, (2014), vol. 114, №2, pp.108-115,
10. Qian Z.-H., Jin F., Li P., Hirose S., Bleustein–Gulyaev waves in 6mm Piezoelectric Materials Loaded with a Viscous Liquid Layer of Finite Thickness, Int. J. of Solids and Structures, (2010), vol. 47, Iss. 25-26, pp. 3513-3518, https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.08.025
11. Rayleigh J.W., On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. //Proc. Math. Soc. London. 1885/1886. vol. 17. p. 4-11, https://doi.org/10.1112/plms/s1-17.1.4
12. Baljeet Singh, Ranbir Singh, Rayleigh wave in a rotating initially stressed piezoelectric half-space, Jour. of Theory and Appl. Mechanics, vol.43, Issue 2, https://doi.org/10.2478/jtam-2013-0014
13. Chaudhary S., Sahu S.A., Singhal A., Analytic model for Rayleigh wave propagation in piezoelectric layer overlaid orthotropic substratum, (2017), Acta Mechanica, vol. 228, Iss.2, pp. 495–529 , https://doi.org/10.1007/s00707-016-1708-0

14. Vashishth, A.K., Sukhija, H., Coupled Rayleigh waves in a 2-mm piezoelectric layer over a porous piezo-thermoelastic half-space, (2017), Acta Mechanica, vol. 228, Iss.3, pp. 773–803, https://doi.org/10.1007/s00707-016-1733-z
15. Avetisyan A.S., Mkrtchyan S.H., The electro elastic Rayleigh waves in the waveguide, with an electrically closed or open surfaces. Procc. of NAS of Armenia, Mechanics, (2018), vol. 71, №1, pp. 12-30, (in Russian), http://doi.org/10.33018/71.1.2
Аветисян А.С., Мкртчян С.А., Электроупругие волны Рэлея в волноводе с элрктрически закрытыми или открытыми поверхностями, Изв. НАН Армении, Механика, (2018), т. 71, №1, стр. 12-30, http://doi.org/10.33018/71.1.2
16. Kuznetsova I.E., Zaitsev B.D., Borodina I.A., Teplykh A.A., Hybrid acoustic waves in piezoelectric plates, IEEE Symposium on Ultrasonics, (2003), Vol.2., pp. 1420-1423, Honolulu, HI, USA, http://doi.org/10.1109/ULTSYM.2003.1293170
17. Choi K.H., Kim B.H., Doh H. and all 11 authors, Hybrid Surface Acoustic Wave-Electro Hydrodynamic Atomization (SAW-EHDA) For the Development of Functional Thin Films, Scientific Reports, (2015), https://doi.org/10.1038/srep15178
18. Chow D.M., Beugnot J.-C., Godet A., Huy K.P., Soto M.A., and Thévenaz L., Local activation of surface and hybrid acoustic waves in optical micro wires, (2018), Optics Letters, vol. 43, Iss.7, pp. 1487-1490, https://doi.org/10.1364/OL.43.001487,
19. Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., Propagation of Hybrid Electroelastic Waves in Transversally Inhomogeneous Periodic Piezoelectric Structure, (2020), Mechanics. Proceedings of NAS of Armenia, 73 (1). pp. 6-22, http://doi.org/10.33018/73.1.1

Information about the authors:
Avetisyan Ara S. – Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E: mail **- ara.serg.avetisyan@gmail.com,**
Jilavyan Hakob S. Yerevan State University, Master of Physics, E: mail **- hakobjilavyan@gmail.com**

Received 14.04.2020

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №2, 2020 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.2.2

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В СОСТАВНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ[1]

Агаян К.Л.

Ключевые слова . Упругие волны, трещина, факторизация, дифракция.

Diffraction of shear flat waves on a semi-infinite crack in a compound elastic half-space

K.L.Aghayan

Keywords: Elastic waves, crack, factorization, diffraction.

The problems of dynamic elasticity theory related to the processes of vibration, propagation and diffraction of stress waves in composite elastic bodies containing various type stress concentrators are an urgent problem from both a scientific and practical point of view. The paper investigates a dynamic contact problem of propagation and diffraction of shear plane waves in a composite elastic half-space consisting of elastic half-space and a layer and weakened by a semi-infinite tunnel crack on the contact surface of the material interface. The solution of the mixed diffraction problem is reduced to a Riemann-type boundary value problem on the real axis. Obtained solution of the defining equation in generalized functions allows us to obtain the distribution of the wave field in the considered inhomogeneous structure.

Աղայան Կ. Լ.

Սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ ճաքով բաղադրյալ առաձգական կիսատարածությունում

Հիմնաբառեր՝ առաձգական ալիքներ, ճաք, ֆակտորիզացիա, դիֆրակցիա

Լարումների տարաբնույթ կուտակիչներ պարունակող բաղադրյալ առաձգական մարմիններում տատանումների գործընթացների, ալիքների տարածման և դիֆրակցիայի հետ կապված առաձգականության տեսության դինամիկ խնդիրները թե գիտական, և թե գործնական տեսակետից շատ արդիական են: Աշխատանքում ուսումնասիրվում է առաձգական կիսատարածությունից ևճձյ շերտից բաղկացած բաղադրյալ առաձգական կիսատարածությունում սահքի հարթ ալիքների տարածման և դիֆրակցիայի դինամիկ կոնտակտային խնդիր: Կիսատարածությունը թուլացված է մարմինների կոնտակտային մակերևույթով տարածվող թունելային ճաքով: Դիֆրակցիայի խառը խնդրի լուծումը բերվում է իրական առանցքի վրա Ռիմանի տիպի եզրային խնդրի: Ընդհանրացված ֆունկցիաներով ստացված բնութագրիչ հավասարման լուծումը թույլ է տալիս բացահայտ տեսքով ներկայացնել դիտարկվող անհամասեռ տիրույթներում տեղափոխությունների դաշտը՝ ալիքային բաղադրիչների գումարի տեսքով:

Задачи динамической теории упругости, связанные с процессами колебаний, распространения и дифракции волн напряжений в составных упругих телах, содержащих разнородные концентраторы напряжений, являются актуальной проблемой как с научной, так и с практической точки зрения. В работе исследуется динамическая контактная задача о распространении и дифракции сдвиговых плоских волн в составном упругом полупространстве, состоящем из упругих полупространства и слоя и ослабленном полубесконечной туннельной трещиной по контактной поверхности раздела материалов. Решение смешанной задачи дифракции сводится к краевой задаче типа Римана на действительной оси. Полученное

[1] Статья посвящается 100-летнему юбилею академика И.И.Воровича.

в обобщённых функциях решение определяющего уравнения позволяет найти в явном виде распределение волнового поля в рассматриваемой неоднородной конструкции.

1.Введение. Многие фундаментальные исследования и основополагающие результаты в областях теории смешанных и контактных задач и динамической теории упругости с большой полнотой были отражены в многочисленных работах и монографиях академика И.И. Воровича и его соратников – учеников из ростовской школы механиков. В предлагаемой работе рассматривается динамическая контактная задача о направленном (волноводном) распространении и излучении гармонических сдвиговых плоских волн из слоя в упругое полупространство и, наоборот, из полупространства в слой. Конструктивная неоднородность и наличие трещины в среде являются причиной дифракции и появления локализованных поверхностных волн. Одной из актуальных отраслей применения результатов таких задач является идентификация и при определённом изменении параметров, входящих в контактирующие тела, упорядочить число и волновые параметры отражённых, проходящих и дифрагированных волн. По родственным вопросам исследования характерных особенностей распространения и дифракции гармонических волн в различных неоднородных упругих средах с разными конфигурациями посвящено много работ, особенно ростовских ученых – механиков. Останавливаться на всех этих работах не представляется возможным. Поэтому, исходя из собственных побуждений, отметим лишь монографии [1-5]. Обращаясь теперь к более близким к рассматриваемой здесь задаче работам, отметим монографии [6-8], обзорные статьи [9-10] и работы [11-18]. Рассмотренные в них задачи, особенно последние, по постановке, методам решения определяющих уравнений и анализу полученных решений тесно связаны с решаемой здесь задачей.

2. Постановка и решение задачи. Рассмотрим, отнесённое к декартовой системе координат $Oxyz$, составное упругое полупространство, составленное из упругих слоя (волновод) и полупространства. Слой с модулем сдвига μ_0 и плотностью ρ_0, занимающий область $\Omega_0(-\infty < x, z < \infty; 0 \le y \le h)$, по своей граничной полуплоскости $S_+\left(x \ge 0, -\infty < z < \infty; y = h\right)$ соединён (жёсткий контакт) с полупространством $\Omega_1(-\infty < x, z < \infty; y \ge h)$ с упругими характеристиками μ_1, ρ_1. Слой и полупространство по полуплоскости $S_-\left(x \le 0, -\infty < z < \infty; y = h\right)$ не контактируют (разделены туннельной трещиной) и свободны от напряжений. Относительно поверхности $\omega_0\left(|x, \mathrm{z}| < \infty, y = 0\right)$ предполагается, что она свободна от напряжений.

Внутри свободной части ($x < 0$) волновода, по направлению оси $0x$ распространяется плоская сдвиговая волна с амплитудой

$$w_{0N}\left(x, y\right) = A_N e^{i\gamma_N x} \cos\frac{\pi N}{h}\left(y - h\right), \qquad |x| < \infty, \quad 0 \le y \le h \tag{2.1}$$

$$\gamma_N = \sqrt{k_0{}^2 - \left(\pi N/h\right)^2}, \qquad k_0 > \pi N/h, \qquad N = 1, 2, ... \tag{2.2}$$

а в полупространстве Ω_1 из бесконечности под углом φ распространяется заданная сдвиговая плоская волна с амплитудой

$$w_{1n}(x,y) = A_1 e^{ip_1 x}\cos(q_1 y), \qquad |x| < \infty,\ y \ge h, \tag{2.3}$$

где $p_1 = \cos k_1\varphi$, $q_1 = \sin k_1\varphi$ – волновые компоненты падающей волны.

В (2.1)-(2.3) A_N и A_1 – постоянные, $k_j = \omega/c_j$ – волновые числа, а $c_j = \sqrt{\mu_j/\rho_j}$ – скорости распространения сдвиговых упругих волн в слое $(j=0)$ и полупространстве $(j=1)$. N является неотрицательным целым числом, удовлетворяющим условию $N < hk_0/\pi$, обеспечивающему распространяемость волн (2.1) по волноводу.

Предполагая, что составное полупространство находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить распределение полного волнового поля в рассматриваемой кусочно-однородный конструкции.

Гармонический множитель, как обычно, опускается, т.е. задача решается в амплитудах. Тогда, уравнения движения в амплитудах перемещений в базовой плоскости $z=0$ примут вид [19]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \begin{Bmatrix} k_1^2 \\ k_0^2 \end{Bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_0 \end{Bmatrix} = 0, \qquad (x,y) \in \begin{Bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_0 \end{Bmatrix}, \tag{2.4}$$

где $w_1(x,y)$ и $w_0(x,y)$ – подлежащие определению амплитуды упругих перемещений в областях Ω_1 и Ω_0 соответственно. Для формирования граничных условий заметим, что на свободных поверхностях отсутствуют напряжения τ_{yz}, а на поверхности соприкасания выполняются условия полного контакта. Так что, граничные и контактные условия при помощи $w_1(x,y)$ и $w_0(x,y)$ запишутся в виде:

$$\mu_0 \left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=h-0} = \mu_1 \left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=h+0} = 0,\ x < 0 \tag{2.5}$$

$$w_0(x,h-0) = w_1(x,h+0),\ x \ge 0 \tag{2.6}$$

$$\mu_0 \left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=h-0} = \mu_1 \left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=h-0},\quad x > 0 \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad |x| < \infty \tag{2.8}$$

Решение задачи должно удовлетворять ещё и условиям уходящей волны.

Решение краевой задачи (2.4)-(2.8) в областях Ω_0 и Ω_1 представим в виде

$$w_0(x,y) = W_0(x,y) + w_{0N}(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega_0, \tag{2.9}$$

$$w_1(x,y) = W_1(x,y) + w_{1n}(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega_1, \tag{2.10}$$

где $w_{0N}(x,y)$ и $w_{1n}(x,y)$ даются формулами (2.1) и (2.3), соответственно.

Подставляя (2.9) и (2.10) в (2.4) по обычной процедуре, решение задачи при помощи интегрального преобразования Фурье представим в виде:

$$\begin{gathered}\overline{w}_0(\sigma,y) = C_0\mathrm{ch}(\gamma_0 y) + D_0\mathrm{sh}(\gamma_0 y) + \\ +2\pi A_N \cos\frac{\pi N}{h}(y-h)\delta(\sigma+\gamma_N) \qquad 0 \le y \le h,\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\overline{w}_1(\sigma,y) = B_1(\sigma)e^{-\gamma_1 y} + 2\pi A_1\cos(p_1 y)\delta(\sigma+p_1), \quad h \le y < \infty, \tag{2.12}$$

где C_0, D_0, B_1 – неизвестные функции, а $\delta(\sigma)$ – известная дельта – функция Дирака, $\gamma_j(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_j^2}$ $(j = 0,1)$. Отметим, что в дальнейшем, для определённости, будем предполагать $k_1 < k_0$, т.е. будем придерживаться пределов появления локализованных поверхностных волн Лява [19].

Относительно двузначных функций $\gamma_0(\sigma)$ и $\gamma_1(\sigma)$ предполагается, что $\sqrt{\sigma^2 - k_j^2} \to |\sigma|$ при $|\sigma| \to \infty$, а для $|\sigma| < k_j$ имеет место равенство $\sqrt{\sigma^2 - k_j^2} = -i\sqrt{k_j^2 - \sigma^2}$, $j = 0,1$, что позволяет обеспечить выполнение условия уходящей волны в (2.11)-(2.12). Для выбора таких ветвей двузначной функции $\gamma_0(\sigma)$ и $\gamma_1(\sigma)$ следует провести в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ разрезы до бесконечности от точек $\sigma = k_1, \sigma = k_0$ в верхней полуплоскости и от точек $\sigma = -k_0, \sigma = -k_1$ в нижней полуплоскости. В таком случае действительная ось обходит точки $\sigma = -k_0$, $\sigma = -k_1$ сверху, а точки $\sigma = k_0$, $\sigma = k_1$ – снизу [6,7].

Применив теперь преобразование Фурье к граничным и контактным условиям (2.5) и (2.8) и удовлетворяя им при помощи представлений (2.11) и (2.12), приходим к следующему функциональному уравнению типа Винера-Хопфа на действительной оси:

$$\overline{\Phi}^-(\sigma) + \overline{K}(\sigma)\overline{\Psi}^+(\sigma) = \overline{F}(\sigma) \tag{2.13}$$

$$\overline{K}(\sigma) = \frac{1+\mu_*}{2}\frac{\overline{R}(\sigma)}{\gamma_1}; \qquad \overline{R}(\sigma) = \frac{\mu_* + \gamma_1\gamma_0^{-1}\mathrm{cth}(\gamma_0 h)}{1+\mu_*}, \quad \mu_* = \frac{\mu_0}{\mu_1} \tag{2.14}$$

$$\overline{F}(\sigma) = \pi A_1 e^{hq_1}\delta(\sigma+p_1) - \pi A_N\delta(\sigma+\gamma_N) \tag{2.15}$$

где $\overline{\Phi}^-(\sigma)$и $\overline{\Psi}^+(\sigma)$ – трансформанты Фурье функций $\varphi^-(x)$ и $\psi^+(x)$, которые связаны с амплитудами $w_j(x,y)$ $(j = 0,1)$ зависимостями

$$w_0\left(x,h-0\right)-w_1\left(x,h+0\right)=2\varphi^-\left(x\right),\qquad \left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=h-0}=\psi^+\left(x\right),\qquad \left|x\right|<\infty \tag{2.16}$$

где $\varphi^-\left(x\right)=0$ при $x>0,$ а $\psi^+\left(x\right)=0$ при $x<0.$

Неизвестные функции C_0,D_0 и B_1 из (2.11), (2.12) определяются решением функционального уравнения (2.14) следующим образом:

$$\begin{gathered}C_0\left(\sigma\right)=\frac{1}{\gamma_0\operatorname{sh}\left(\gamma_0 h\right)}\bar{\Psi}^+\left(\sigma\right),\qquad D_0=0,\\ B_1\left(\sigma\right)e^{-\gamma h}=-\mu_*\gamma^{-1}\bar{\Psi}^+\left(\sigma\right)+2\pi A_N\cos\frac{\sigma N}{h}\left(y-h\right)\delta\left(\sigma+\gamma_N\right),\end{gathered} \tag{2.17}$$

Таким образом, решение вышепоставленной задачи свелось к решению функционального уравнения (2.14).

Используя известные представления [20] $\gamma_1\left(\sigma\right)=\sqrt{\left(\sigma-k_1\right)\left(\sigma+k_1\right)}$, $2\pi i\delta\left(\sigma-\sigma_0\right)=\dfrac{1}{\sigma-\sigma_0-i0}-\dfrac{1}{\sigma-\sigma_0+i0}$, методом факторизации [6] получим решение уравнения (2.14) в виде

$$\begin{gathered}\bar{\Psi}^{/+}\left(\sigma\right)=\frac{\sqrt{\mu_*\left(\sigma+k_1\right)}}{\bar{R}^+\left(\sigma\right)}\left[\frac{A_1^*}{\sigma+p_1+i0}-\frac{A_N^*}{\sigma+\gamma_N+i0}\right],\\ \bar{\Phi}^{/+}\left(\sigma\right)=\frac{\bar{R}^-}{\sqrt{\bar{\mu}_*\left(\sigma-k_1\right)}}\left[\frac{A_1^*}{\sigma+p_1-i0}+\frac{A_N^*}{\sigma+\gamma_N-i0}\right],\end{gathered} \tag{2.18}$$

где

$$\begin{gathered}\bar{\mu}_*=\frac{2}{1+\mu_*},\quad A_N^*=A_N\frac{\sqrt{\bar{\mu}_*\left(k_1+\gamma_N\right)}}{\bar{R}^+\left(\gamma_N\right)},\quad A_1^*=A_1\frac{\sqrt{2\bar{\mu}_*k_1}\cos\left(\varphi/2\right)}{2\bar{R}^+\left(p_1\right)}\\ \bar{R}\left(\sigma\right)=\bar{R}^+\left(\sigma\right)\bar{R}^-\left(\sigma\right),\quad \bar{R}^\pm\left(\sigma\right)=\exp\left(F_\pm\left(\sigma\right)\right),\\ \bar{F}_+\left(\sigma\right)=\int_0^\infty F\left(x\right)e^{ix\left(\sigma+i0\right)}dx;\quad \bar{F}_-\left(\sigma\right)=\int_{-\infty}^0 F\left(x\right)e^{ix\left(\sigma+i0\right)}dx;\end{gathered} \tag{2.19}$$

$$F\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[1+\frac{1-\gamma_1\gamma_0^{-1}cth\left(\gamma_0 h\right)}{1+\mu_*}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{2.20}$$

Из (2.19) нетрудно заметить, что $\overline{F}_{+}(\sigma)=\overline{F}_{-}(-\sigma)$, следовательно, $\overline{R}^{+}(\sigma)=\overline{R}^{-}(-\sigma)$. Отметим, что для вычисления $\overline{F}_{+}(\sigma)$ можно использовать формулу $\overline{F}_{+}(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\ln\overline{R}(\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\overline{R}(t)\frac{dt}{t-\sigma}$.

В (2.19) $\overline{R}^{\pm}(\sigma)$ являются граничными значениями функций $\overline{R}^{\pm}(\alpha)$ в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+it$, регулярных и не имеющих нулей, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях. При этом, $\overline{R}^{\pm}(\alpha)\to 1$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности [6].

Теперь, имея решение (2.18), при помощи (2.10) из (2.11), (2.12), после обратного преобразования, для амплитуд упругих перемещений в областях Ω_0 и Ω_1 получим следующие представления:

$$w_0(x,y)=A_N\cos\frac{\pi N}{h}(y-h)e^{i\gamma_N x}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{cth}(\gamma_0 y)}{\gamma_0}\frac{\sqrt{\sigma+k_1}}{\overline{R}^{+}(\sigma)}\left[\frac{\sqrt{\mu_*}A_1^*}{\sigma+p_1+i0}-\frac{\sqrt{\mu_*}A_N^*}{\sigma+\gamma_N+i0}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma,\ (x,y)\in\Omega_0, \tag{2.21}$$

$$w_1(x,y)=A_1\cos(q_1 y)e^{ip_1 x}+$$
$$+\frac{\mu_*}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma+k_1}}{\overline{R}^{+}(\sigma)}\frac{e^{-\gamma_1(y-h)}}{\gamma_1}\left[\frac{\sqrt{\mu_*}A_1^*}{\sigma+p_1+i0}-\frac{\sqrt{\mu_*}A_N^*}{\sigma+\gamma_N+i0}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma,\ (x,y)\in\Omega_1, \tag{2.22}$$

которые дают решение вышепоставленной задачи.

3. Анализ волнового поля в подобластях. Для полного изучения характерных особенностей волнового поля упругих перемещений в составном полупространстве, следует детально исследовать интегральные составляющие, входящие в решения (2.22), (2.23), в каждой подобласти Ω_0 и Ω_1 и, тем самым, получить конкретные формулы, определяющие волновые поля в этих областях.

Рассмотрим подобласть $\Omega_{01}(x<0;\ \ 0\le y\le h)$, где амплитуда перемещений даётся формулой (2.22). Для исследования интегрального составляющего из (2.22), как обычно, переходим в разрезанную вышеуказанным способом, комплексную плоскость и замыкаем контур интегрирования в верхней полуплоскости. Из представления [5]

$$\frac{\operatorname{sh}\left[h\gamma_0(\alpha)\right]}{\gamma_0(\alpha)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\alpha^2-k_0^2\right)^{n+1}h^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.1}$$

следует, что подынтегральные функции в (2.21) имеют только простые полюса в точках

$$\alpha_m = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \left(\pi m/h\right)^2}, & k_0 > \pi m/h \\ i\sqrt{\left(\pi m/h\right)^2 - k_0^2}, & k_0 < \pi m/h \end{cases} \qquad m = 0,1,2,.... \tag{3.2}$$

При этом, действительная ось вышеуказанным образом обходит, так точки ветвления функции $\gamma_j(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_j^2}$ $(j = 0,1)$, так и нули функции (3.1), представляющие единственные полюса подынтегральных функций из (2.21).

Вычисляя интегралы, в итоге, для амплитуды перемещений $w_{01}(x, y)$ в области Ω_{01} получим:

$$w_{01}(x,y) = A_N \cos\frac{\pi N}{h}(y-h)e^{i\gamma_N x} + \tag{3.3}$$

$$+\frac{1}{1+\mu_*}\frac{\sqrt{k_0+k_1}e^{-ik_0x}}{2k_0h\bar{R}^+(k_0)}\left[\frac{A_1\sqrt{2k_1}\cos(\beta/2)}{\bar{R}^+(p_1)(k_0+p_1)} - \frac{A_N\sqrt{\gamma_N+k_1}}{\bar{R}^+(\gamma_N)(k_0+\gamma_N)}\right] + \frac{i}{2(1+\mu_*)}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\sqrt{\alpha_m+k_1}}{h\alpha_m\bar{R}^+(\alpha_m)}\left[\frac{A_1\sqrt{2k_1}\cos(\beta/2)}{\bar{R}^+(p_1)(\alpha_m+p_1)} - \frac{A_N\sqrt{\gamma_N+k_1}}{\bar{R}^+(\gamma_N)(\alpha_m+\gamma_N)}\right]\cos\left(\frac{\pi m}{h}y\right)e^{-i\alpha_m x}$$

При рассмотрении подобласти $\Omega_{02}(x > 0,\ 0 \le y \le h)$ для вычисления интегральной составляющей из (2.21), путь интегрирования в разрезанной комплексной плоскости следует замкнуть в нижней полуплоскости и перейти от ,+' функций к ,-' функциям. После этих преобразований и соответствующих вычислений, перемещение в Ω_{02} можно представить в виде

$$w_{02}(x,y) = -A_1 i\sin(q_1h)e^{iq_1(y-h)}e^{ip_1x} + C_A iq_1\cos(\chi y)e^{ip_1x} +$$

$$+\frac{\mu_*}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha_1\alpha_0\sin(\alpha_0h)\cos(\alpha_1y)\bar{R}_*^-(-it)}{\left[\mu_*\alpha_0\sin(\alpha_0h)\right]^2 + \left[\alpha_1\cos(\alpha_0h)\right]^2}\left[A_N\frac{\sqrt{\gamma_K+k_1}}{(\gamma_N-i\tau)\bar{R}^+(\gamma_N)} - \right.$$

$$\left. - A_1\frac{\sqrt{2k_1}\cos(\varphi/2)}{(p_1-i\tau)\bar{R}^+(p_1)}\right]e^{-\tau x}d\tau + \tag{3.4}$$

$$+\frac{\mu_*}{\pi}\int_0^{K_1}\frac{\beta_1\beta_0\sin(\beta_0h)\cos(\beta_0y)\bar{R}_*^-(-\sigma)}{\left[\mu_*\beta_0\sin(\beta_0h)\right]^2 + \left[\varphi\cos(\varphi_0h)\right]^2}\left[A_N\frac{\sqrt{\gamma_K+k_1}}{(\gamma_N-\sigma)\bar{R}^+(\gamma_N)} - \right.$$

$$\left. - A_1\frac{\sqrt{2k_1}\cos(\beta_1/2)}{(p_1-\sigma)\bar{R}^+(p_1)}\right]e^{i\sigma x}d\sigma + \Lambda_0(x,y), \qquad x > 0,\ 0 \le y \le h$$

где

$$\alpha_j = \sqrt{k_j^2 + \tau^2},\ \beta_j = \sqrt{k_j^2 - \sigma^2} \quad (j = 0,1);\ \ \chi = \sqrt{k_0^2 - p_1^2} \tag{3.5}$$

$$C_A = A_1 \frac{\mu_* \chi \sin(\chi h) - i q_1 \cos(\chi h)}{\left[\mu_* \alpha_0 \sin(\alpha_0 h)\right]^2 + \left[\alpha_0 \cos(\alpha_0 h)\right]^2} \tag{3.6}$$

$$\Lambda_0(x, y) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_1 \sqrt{\sigma_j^2 - k_1^2} \cos\left(\sqrt{k_0^2 - \sigma_j^2}\, y\right) e^{i\sigma_j x} \tag{3.7}$$

$$a_j = \frac{\bar{R}^+(\sigma_j)}{\sqrt{\sigma_j + k_1} L_1'(-\sigma_j)} \left[\frac{\bar{A}_1}{p_1 - \sigma_j} - \frac{\bar{A}_N}{\gamma_N - \sigma_j}\right] \tag{3.8}$$

$$\bar{A}_1 = A_1 e^{-iq_1 h} \frac{\sqrt{2k_1} \cos(\varphi/2)}{\bar{R}^+ p_1}, \qquad \bar{A}_N = A_N \frac{\sqrt{\gamma_N + k_1}}{\bar{R}^+ \gamma_N} \tag{3.9}$$

$L_1'(\sigma) = \partial L_1 / \partial\sigma;\ L_1(\sigma) = \mu_0 \gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0 h) + \mu_1 \gamma_1 \operatorname{ch}(\gamma_0 h);\ \sigma_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ – положительные корни уравнения.

Функция $L_1(\sigma)$ из (3.9) имеет симметрично расположенные действительные корни $\pm\sigma_j$ при $k_1 < \sigma < k_0$, а число этих корней и их расположение существенно зависит от параметра $h\sqrt{k_0^2 - k_1^2}$ [11,14].

В подобластях области Ω_1, для амплитуд перемещений аналогичным путём получим:

в области $\Omega_{11}(x < 0, y \ge h)$

$$\begin{aligned} w_{11}(x, y) &= A_1\left[\cos(q_1 y) - i\sin(q_1 h) e^{iq_1(y-h)}\right] e^{ip_1 x} + \\ &+ \frac{\mu_*}{\pi i(1 + \mu_*)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{k_1 + i\tau} \cos(\alpha_1 (y - h))}{\alpha_1 \bar{R}^+(i\tau)} \left[\frac{\bar{A}_1}{p_1 + i\tau} - \frac{\bar{A}_N}{\gamma_N + i\tau}\right] e^{-\tau|x|} d\tau + \\ &+ \frac{\mu_*}{\pi i} \int_0^{k_1} \frac{\sqrt{k_1 + \sigma} \cos(p_1 (y - h))}{\beta_1 \bar{R}^+(\sigma)} \left[\frac{\bar{A}_1}{p_1 + \sigma} - \frac{\bar{A}_N}{\gamma_N + \sigma}\right] e^{i\sigma x} d\sigma, \end{aligned} \tag{3.10}$$

в области $\Omega_{12}(x > 0, y \ge h)$

$$\begin{aligned} w_{12}(x, y) &= A_1\left[\cos(q_1 y) - i\sin(q_1 h) e^{iq_1(y-h)}\right] e^{ip_1 x} + C_A \mu_* \chi \sin(\chi h) e^{iq_1(y-h)} e^{ip_1 x} - \\ &- \frac{\mu_*}{\pi i} \int_0^\infty \frac{\alpha_0 \sin(\alpha_0 h)\left[\mu_* \alpha_0 \sin(\alpha_0 h) - \alpha_1 \cos(\alpha_0 h) \cos(2(y - h))\right]}{\left[\mu_* \alpha_0 \sin(\alpha_0 h)\right]^2 + \left[\alpha_1 \cos(\alpha_0 h)\right]^2} \times \end{aligned}$$

$$\times\overline{R}^{+}(i\tau)\left[\frac{\overline{A}_1}{p_1-i\tau}-\frac{\overline{A}_N}{\gamma_N-i_0}\right]e^{-\tau|x|}d\tau+$$

$$+\frac{i\mu_*}{\pi}\int_0^{K_1}\frac{\beta_0\sin(\beta_0 h)\left[\mu_*\beta_0\sin(\beta_0 h)\sin(\beta_1(y-h))-\beta_1\cos(\beta_1 h)\cos\beta_0(y-h)\right]}{\left[\mu_*\beta_0\sin(\beta_0 h)\right]^2+\left[\beta_1\cos(\beta_0 h)\right]^2}\times$$

$$\times\overline{R}_*^{+}(\sigma)\left[\frac{\overline{A}_1}{p_1-\sigma}-\frac{\overline{A}_N}{\gamma_N-\sigma}\right]e^{i\sigma x}d\sigma+\Lambda_1(x,y) \tag{3.11}$$

$$\Lambda_1(x,y)=-\sum_{j=1}^{n}a_j\mu_0\sqrt{k_0^2-\sigma_j^2}\,\sin\left(\sqrt{k_0^2-\sigma_j^2}\,h\right)e^{-\sqrt{\sigma_j^2-k_1^2}(y-h)}e^{i\sigma_j x}, \tag{3.12}$$

где a_j даётся формулой (3.8).

При помощи полученных решений нетрудно убедиться, что граничные и контактные условия (2.5) - (2.8) удовлетворяются точно.

В (3.4) и (3.12), составляющие $\Lambda_0(x,y)$ и $\Lambda_1(x,y)$ представляют собой излучённые волны с волновыми числами σ_j, распространяющиеся по несвободной части слоя, $\Lambda_1(x,y)$ – локализованные поверхностные волны Лява, распространяющиеся в подобласти Ω_{12}.

Перейдя к общей характеристике волнового поля, заметим, что формулами (3.3), (3.4), (3.10) и (3.12) в явном виде представлены все компоненты волнового поля с определёнными волновыми параметрами в каждой подобласти. При помощи этих формул, благодаря экспоненциально убывающим множителям в интегралах с бесконечными пределами с достаточной точностью можно определить волновое поле, как в ближней зоне, так и в дальних зонах при помощи асимптотических формул.

Из (3.2) видно, что в $\Omega_{10}(x<0,\ 0\le y\le h)$ помимо падающей волны распространяются отражённые от сечения $x=0$ волны и проходящие по тому же сечению излучённые волны с волновыми числами α_m. При этом, как следует из (3.2), из всех α_m лишь конечное число вещественно. Следовательно, в волноводе $x<0$ будет возбуждено конечное число дифрагированных, отражённых и проходящих-излучённых волн.

В подобласти $\Omega_{02}(x>0,\ 0\le y\le h)$ волновое поле представляется в виде суммы конечного числа локализованных волн $\Lambda_0(x,y)$, объёмных распространяющихся излучённых волн с волновыми числами $p_1=k_1\cos\varphi$, обусловленных падающей в полупространстве $y>h_1$ волной, и нераспространяющихся объёмных волн, которые в асимптотике $x\to\infty$ распространяются со скоростью c_1. Последнее указывает, что в асимптотике $x \to \infty$ полупространство как бы «диктует» собственную скорость распространения волн в слое.

В $\Omega_1\left(|x|<\infty,\ y>h\right)$, как следует из (3.10), (3.12), кроме падающей и отражённых распространяются также излученные дифрагированные объёмные волны и локализованные поверхностные волны Лява $\Lambda_1(x,y)$. Следуя [21], получены асимптотические формулы с вполне определёнными коэффициентами при первом члене разложения. Так, для точек $y=h+0$ берега трещины при $x \to -\infty$ имеем:

$$w_{11}\left(x,h+0\right)=\frac{\mu_*\left[\overline{R}^+(k_1)\right]^{-1}}{\sqrt{\pi}\left(1+\mu_*\right)}\left[\frac{A_1\left[\overline{R}^+(\mathrm{p}_1)\right]^{-1}}{\sqrt{2k_1}\cos\left(\varphi/2\right)}-\frac{A_0\left[\overline{R}^+(\gamma_N)\right]^{-1}}{\sqrt{\gamma_N+k_1}}\right]\frac{1}{\sqrt{|x|}}e^{-ik_1x}+$$

$$+\mathrm{O}(|x|^{-\frac{3}{2}}),\quad x\to-\infty$$

Аналогичная формула для контактного участка $y=h\pm 0$ указывает, что дифрагированная объёмная волна убывает со скоростью $|x|^{-\frac{3}{2}}$ (как в слое), а не $|x|^{-\frac{1}{2}}$ (как в полупространстве).

4. Частный случай. Коротко остановимся на одном частном случае рассмотренной задачи. Принимая в её постановке $\mu_1=\infty$, придём к динамической задаче о направленном распространении плоских сдвиговых волн в слое-волноводе $\left\{-\infty<x,z<\infty;0\le y\le h\right\}$ с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=0}=0;\qquad \theta(-x)\left.\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=h}+\theta(x)w_0(x,h)=0,\qquad |x|<\infty, \tag{4.1}$$

где $w_0(x,y)$ – амплитуда перемещений, $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Предполагая, как и выше, что по свободной части волновода набегает сдвиговая волна (2.1) – (2.2), по аналогичной процедуре из (2.21) для амплитуд перемещений в волноводе получим:

для $x<0$

$$\begin{aligned} w_{01}\left(x,y\right)&=w_{0N}\left(x,y\right)-A_N\left[\overline{K}_0^+(\gamma_N)\overline{K}_0^+(k_0)\right]^{-1}e^{-i\alpha_0x}-\\ &-A_N\frac{i(\gamma_N+k_0)}{2\overline{K}_0^+(\gamma_N)}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(\alpha_m+k_0)\cos(\frac{\pi m}{h}y)}{h\alpha_m\overline{K}_0^+(\alpha_m)(\alpha_m+\gamma_N)}e^{-i\alpha_mx}, \end{aligned}\tag{4.2}$$

а для $x>0$

$$w_{02}(x,y)=A_N\frac{\pi h(\gamma_N+k_0)}{2\bar{K}_0^+(\gamma_N)}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m(2m-1)}{h^3\beta_m(k_0-\beta_m)}\frac{\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{h}y\right)}{\left[\bar{K}_0^+(\beta_m)\right]^{-1}(\gamma_N-\beta_m)}e^{i\beta_m x} \quad (4.3)$$

где $\beta_m=\sqrt{k_0^2-\left(\frac{\pi(2m-1)}{h}\right)^2}$, а α_m дается формулой (3.2).

Отметим, что при получении (4.2.) и (4.3) следует в (2.22) заменить

$$\bar{R}^+(\sigma)=\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\sqrt{h}(\sigma+k_0)}\bar{K}_0^+(\sigma) \quad (4.4)$$

где [6]

$$\bar{K}_0(\sigma)=\gamma_0 h\,\mathrm{cth}(\gamma_0 h)=\bar{K}_0^+(\sigma)\bar{K}_0^-(\sigma) \quad (4.5)$$

$$\bar{K}_0^{\pm}(\sigma)=\sqrt{\frac{k_0 h\cos(k_0 h)}{\sin(k_0 h)}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\pm i\sigma h_0\left((n-1/2)^2-(k_0 h_0)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{1\pm i\sigma h_0\left(n^2-(k_0 h_0)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}\right),\qquad h_0=h/\pi$$

Здесь знаки берутся одновременно или верхние, или нижние. При этом имеет место асимптотическое представление при $\alpha\to\infty$ в верхней полуплоскости,

$$\bar{K}_0^+(k_0)=1-2ik_0\ln 2 \quad \text{при} \quad k_0\to 0. \quad (4.6)$$

Имея в виду, что из всевозможных α_m и β_m лишь конечное число вещественно при заданном k_0, из (4.2) и (4.3) можно определить число отражённых и проходящих волн и их волновые параметры в зависимости от параметров падающей волны.

Так, из (4.2) следует, что независимо от волнового числа падающей волны γ_N, от сечения $x=0$ в области $x<0$ распространяется отражённая волна с волновым числом K_0 и с амплитудой $A_N\left[\bar{K}_0^+(\gamma_N)\bar{K}_0^+(k_0)\right]^{-1}$.

Количество, волновые числа и амплитуды остальных распространяющихся отражённых и проходящих волн зависят от волновых параметров падающей волны. Если, например, $1{,}5\pi<k_0 h<2\pi$, то число N может принимать значения $N=0,1,2,3,$ а из волновых чисел положительными будут только $k_0,\alpha_1,\beta_1,\beta_2$. Тогда, при каждой моде (N) для отражённых и проходящих волн получим [18]

N	Отраж.	Проход.
0	k_0, α_1	β_1
1	k_0, β_1	α_1
2	k_0, α_1	β_1
3	k_0, β_1, β_2	α_1

5. Заключение. Построено замкнутое решение динамической контактной задачи о распространении сдвиговых плоских волн в упругом полупространстве при излучении падающей волны из упругого слоя (волновода) в полупространство и в упругом слое при излучении падающей волны из упругого полупространства в волновод. Полученные для амплитуд упругих перемещений формулы содержат все волновые компоненты, определяющие весь спектр волнового поля. С другой стороны, полученные решения позволяют из сравнительного анализа волновых параметров падающей волны и возбуждаемых волн сделать определённые выводы о упругих характеристиках контактирующих массивных тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 324 с.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный Мир, 1999. 274 с.
3. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого тела. – М.: Физмат-лит. 2007. – 223 с.
4. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред. М.: Физмат-лит. 2006. 272с.
5. Сумбатян М.А., А. Скалия. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013. 328 с.
6. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Мир, 1962. 294 с.
7. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
8. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
9. Мелешко В.В., Бондаренко А.А. и др. Упругие волноводы. История и современность - I, II. Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т.51. №2. С.86-104.
10. Мелешко В.В., Бондаренко А.А. и др. Упругие волноводы. История и современность – I, II. Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51. № 4. С.163-180.
11. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. //Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т.56. № 4. С.3-17.
12. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство. Изв. НАН РА. Механика. Т. 60, № 3, 2007 с. 23-38.

13. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Дифракция сдвиговой плоской волны в составном упругом пространстве с полубесконечной трещиной, параллельной линии неоднородности. МТТ. № 1. 2013. С.60-67.
14. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А. Дифракция локализованной сдвиговой волны на крае полубесконечной трещины в составном упругом пространстве. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67, № 4. С.10-20.
15. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача упругого волновода с прямоугольным поперечным сечением. Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.65. № 4. С.3-8.
16. Piliposyan D.G., Ghazaryan R.A., Ghazaryan K.B. Shear waves in periodic waveguide with alternating boundary conditions. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2014. T.67. №3. C.40-48.
17. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. Ampliyude-phase distortion of the normal high–frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics. 2017. Vol.70. №2. P.28-42.
18. Агаян К.Л. Плоская сдвиговая волна в слое с неоднородными граничными условиями. //Тр. IX Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», Горис, 1-6 октября, 2018, с.19-23.
19. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 452 с.
20. Шилов Г.Е. Математичекий анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 275с.
21. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн. //Докл. НАН Армении. 2010. № 3. С.361-371.

Сведения об авторе:
Агаян Каро Леренцович – д.ф.м.н., проф., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Адреса: домашний: ул. Башинджагяна, 2, пер.12, кв.15, Ереван, 0087, Армения.
Служебный: пр. Маршала Баграмяна, 24/2, Ереван, 0019, Армения.
E-mail: karo.aghayan@gmail.com
Тел.: (37491) 485566 (моб.)

Поступила в редакцию 20.05.2020

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №2, 2020 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.2.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА С ПОКРЫТИЕМ

Ватульян А.О., Плотников Д.К.

Ключевые слова:индентирование, функционально-градиентный материал, контактная задача, приближенная модель.

Vatulyan A. O., Plotnikov D. K.

Contact problem for an inhomogeneous rectangle with coating

Keywords: indentation, functionally graded material, contact problem, approximate model.

The approximate model of deformation of an elastic rectangle inhomogeneous along the vertical coordinate is presented. The model is based on hypotheses about the nature of changes in the components of the displacement field, depending on the properties of the material. The model allows to consider both continuous and discontinuous laws of heterogeneity. Based on an approximate model, the contact problem is investigated.Solutions for different laws of heterogeneity are constructed. The applicability region of the elastic rectangle model is described. A comparative analysis of the results of solutions based on approximate and finite element models.

Վատուլյան Ա.Հ., Պլոտնիկով Դ.Կ.

Անհամասեռ ծածկույթով ուղանկյան կոնտակտային խնդիր

Հիմնաբառեր՝ կոնտակտային խնդիր, անհամասեռ ուղղանկյուն, մոտավոր մեթոդ

Աշատանքում առաջարկված է ըստ ուղղահայաց կորդինատի անհամասեռ ուղղանկյան դեֆորմացիայի մոդել: Մոդելը կառուցված է նյութի հատկություններից կախված տեղափոխությունների դաշտի փոփոխման՝ բնույթի վրա հիմնված վարկածների օգնությամբ: Կատարված է համեմատական անալիզ մոտավոր և վերջավոր էլեմենտների վրա հիմնված լուծումների արդյունքների միջև:

В работе представлена приближённая модель деформирования неоднородного по вертикальной координате упругого прямоугольника. Модель построена на основе гипотез о характере изменения компонент поля перемещений, зависящих от свойств материала. Модель позволяет рассматривать как непрерывные законы неоднородности, так и законы, имеющие разрыв или сильную градиентность. На основе приближённой модели исследована контактная задача, построены решения для разных законов неоднородности. Описана область применимости модели для упругого прямоугольника. Проведён сравнительный анализ результатов решений, построенных на основе приближённой и конечно-элементной моделей.

Введение Область практических приложений теории контактных взаимодействий довольно широка. Необходимость решения контактных задач возникает, например, при применении стремительно развивающихся методов индентирования, которые широко используются для определения свойств различных материалов [1]. В современной инженерной практике актуальным в настоящее время является использование материалов, для которых характерно изменение механических свойств по координатам. Широко используются многослойные конструкции, активно развиваются технологии создания функционально-градиентных материалов (ФГМ) с непрерывным изменением свойств [2]. Отсутствие разрывов в свойствах материала позволяет избежать образования областей концентрации напряжений и повысить прочностные характеристики изготавливаемых элементов конструкций. Одной из актуальных областей применения таких материалов является изготовление градиентных покрытий. Применение методов индентирования в проблеме идентификации свойств неоднородных структур требует исследования ряда контактных задач для неоднородных тел.

Задачи механики контактных взаимодействий в плоской постановке, как правило, сводятся к решению интегрального уравнения первого рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Эффективным способом аналитического решения контактных задач теории упругости являются асимптотические методы [3, 4]. Однако, в случае неоднородного материала ядра интегральных уравнения не могут быть найдены в явном виде и строятся численно, либо с помощью численно-аналитических подходов [5–7]. Другим способом исследования контактных задач является разработка приближённых моделей [8–10]. Среди работ, посвящённых исследованию контактных задач для тел, усиленных накладками и стрингерами, отметим [11–12].

В работах [13,14] построен ряд приближённых моделей для неоднородной упругой полосы, в основе которых лежат гипотезы о характере компонент поля перемещений. В настоящей работе этот подход развит на случай конечной прямоугольной области.

1. Контактная задача для прямоугольника

Рассмотрим задачу о действии жёсткого штампа с основанием параболической формы на неоднородный по вертикальной координате упругий прямоугольник, жёстко сцеплённый с недеформируемым основанием по нижней границе. Параметры Ляме прямоугольника являются произвольными положительными функциями вертикальной координаты: $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$, в том числе и имеющими разрывы первого рода. Полагая, что трение между контактными поверхностями штампа и прямоугольника отсутствует, сформулируем смешанную краевую задачу для прямоугольной области $S = [-L, L] \times [0, h]$. Уравнения равновесия и определяющие соотношения для изотропного тела имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \qquad i, j = 1,3$$

$$\varepsilon_{ij} = \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)/2$$

$$\sigma_{ij} = \lambda(x_3) u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu(x_3)\varepsilon_{ij}$$

Граничные условия контактной задачи имеют вид:

$$u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h) = 0,$$

$$\sigma_{33}(x_1,h)=0,\quad a<|x_1|\le L,\quad u_3(x_1,h)=\delta-\frac{1}{2R}x_1^2,\quad |x_1|\le a,$$

где a – размер площадки контакта, δ – величина внедрения, R – радиус кривизны параболического штампа.

Будем считать, что боковые границы прямоугольника свободны от напряжений:

$$\sigma_{11}(\pm L,x_3)=0,\quad \sigma_{13}(\pm L,x_3)=0.$$

Постановку задачи дополняет условие равновесия штампа, которое позволяет определить связь между силой и внедрением.

Рассмотрим вспомогательную задачу о действии нормальной нагрузки на отрезке $[-a,\ a]$ верхней границы прямоугольника. Введём следующие безразмерные параметры:

$$\xi_i=h^{-1}x_i,\quad \hat{u}_i=h^{-1}u_i,\quad \beta=h^{-1}a,\quad r=h^{-1}R,\quad l=h^{-1}L,$$
$$\hat{\sigma}_{ij}=\mu_0^{-1}\sigma_{ij},\quad f_1=\mu_0^{-1}\lambda,\quad f_2=\mu_0^{-1}\mu,\quad \delta_*=h^{-1}\delta,$$

где $\mu_0=\max\limits_{x_3\in[0,h]}\mu(x_3)$.

2. Формулировка приближённой модели

Для исследования краевой задачи применим подход, сформулированный в [13, 14]. Сравнительный анализ, проведённый в [13], показал, что из предложенных гипотез наибольшее соответствие КЭ-модели позволяют получить гипотезы, зависящие от законов неоднородности полосы, поэтому в данной задаче в качестве гипотез о характере компонент поля перемещений примем следующие:

$$\begin{gathered}\hat{u}_1=\psi_1(\xi_3)u(\xi_1),\quad \hat{u}_3=\psi_3(\xi_3)w(\xi_1),\\ \psi_1(\xi_3)=g_1(\xi_3)/g_1(1),\quad \psi_3(\xi_3)=g_3(\xi_3)/g_3(1),\\ g_1(\xi_3)=\int\limits_0^{\xi_3}\frac{1}{f_2(\eta)}d\eta,\quad g_3(\xi_3)=\int\limits_0^{\xi_3}\frac{1}{f_1(\eta)+2f_2(\eta)}d\eta.\end{gathered}\tag{2.1}$$

Для определения введённых функций $u(\xi_1)$, $w(\xi_1)$ используем вариационный принцип Лагранжа. Запишем функционал потенциальной энергии, подставим в него соотношения (2.1), проинтегрируем по ξ_3 и построим упрощённый функционал

$$\Pi=\frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left(A_{11}u'^2+2(A_{12}u'w+A_{21}uw')+A_{20}w^2+A_{10}u^2+A_{22}w'^2\right)d\xi_1-\int\limits_{-\beta}^{\beta}qwd\xi_1,\tag{2.2}$$

где q – безразмерное контактное давление, коэффициенты A_{ij} определяются формулами

$$A_{10}=\int_0^1 f_2\psi_1'^2 d\xi_3,\quad A_{11}=\int_0^1 (f_1+2f_2)\psi_1^2 d\xi_3,\quad A_{12}=\int_0^1 f_1\psi_1\psi_3' d\xi_3,$$
$$A_{20}=\int_0^1 (f_1+2f_2)\psi_3'^2 d\xi_3,\quad A_{21}=\int_0^1 f_2\psi_1'\psi_3 d\xi_3,\quad A_{22}=\int_0^1 f_2\psi_3^2 d\xi_3.$$

Применим вариационный принцип Лагранжа к функционалу (2.2). Имеем

$$\delta\Pi=\left(A_{11}u'+A_{12}w\right)\delta u\,\Big|_{-l}^{l}+\left(A_{21}u+A_{22}w'\right)\delta w\,\Big|_{-l}^{l}+$$
$$+\int_{-l}^{l}\Big[\left(A_{10}u+A_{21}w'-(A_{11}u')'-(A_{12}w)'\right)\delta u+$$
$$+\left(A_{20}w+A_{12}u'-(A_{21}u)'-(A_{22}w')'\right)\delta w\Big]d\xi_1-\int_{-\beta}^{\beta}q\delta w d\xi_1=0.$$

Приравнивая коэффициенты при независимых вариациях, получим систему дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами относительно компонент смещения верхней границы прямоугольника, которая имеет такой же вид, как и в задаче для полосы

$$\begin{aligned}&-A_{11}u''-(A_{12}-A_{21})w'+A_{10}u=0,\\&-A_{22}w''+(A_{12}-A_{21})u'+A_{20}w=q\end{aligned}\qquad(2.3)$$

и естественные граничные условия в виде

$$\left(A_{11}u'+A_{12}w\right)\Big|_{\xi_1=\pm l}=0,\quad\left(A_{21}u+A_{22}w'\right)\Big|_{\xi_1=\pm l}=0.\qquad(2.4)$$

На границах контактной области $\xi_1=\pm\beta$ должны быть выполнены стыковые условия

$$\begin{aligned}&u_-(\pm\beta)=u_+(\pm\beta),\quad w_-(\pm\beta)=w_+(\pm\beta),\\&u_-'(\pm\beta)=u_+'(\pm\beta),\quad w_-'(\pm\beta)=w_+'(\pm\beta),\end{aligned}\qquad(2.5)$$

где индексами «-» и «+» обозначены решения системы (2.3) в области контакта и вне её.

Исключая из системы (2.3) перемещение u, получим операторное уравнение, связывающее вертикальное смещение на верхней границе полосы с нормальной нагрузкой

$$b_2w^{IV}-b_1w''+b_0w=-a_1q''+a_0q\qquad(2.6)$$

Причем,

$$u=\frac{1}{A_{12}-A_{21}}\left(\frac{b_2}{a_0}w'''+\left(\frac{b_2}{a_1}-\frac{b_1}{a_0}\right)w'+q'\right)\qquad(2.7)$$

где коэффициенты a_i, b_i определяются формулами

$a_0 = A_{10}, \quad a_1 = A_{11}, \quad b_0 = A_{10}A_{20}, b_1 = A_{10}A_{22} + A_{11}A_{20} - \left(A_{12} - A_{21}\right)^2, \quad b_2 = A_{11}A_{22}$.

В области контакта $\left|\xi_1\right| \le \beta$, полагая в уравнении (2.6) $w_-\left(\xi_1\right) = \delta_* - \frac{1}{2r}\xi_1^{\ 2}$, найдём контактное давление в виде

$$q\left(\xi_1\right) = C_0 \operatorname{ch}\left(k\xi_1\right) + B_1\xi_1^2 + B_0 \tag{2.8}$$

где

$$B_0 = \frac{1}{ra_1k^2}\left(b_1 - \frac{b_0}{k^2} + b_0\delta_* r\right), \quad B_1 = -\frac{b_0}{2ra_1k^2}, \quad k^2 = \frac{a_0}{a_1}.$$

Смещения верхней границы прямоугольника вне контактной области найдём из решения уравнения (2.6), полагая в нём $q_* = 0$ для $\xi_1 > 0$:

$$w_+\left(\xi_1\right) = C_1 \exp\left(-\lambda_1\xi_1\right) + C_2 \exp\left(-\lambda_2\xi_1\right) + C_3 \exp\left(\lambda_1\xi_1\right) + C_4 \exp\left(\lambda_2\xi_1\right) \tag{2.9}$$

Горизонтальная компонента смещения определяется формулой (2.7), где вне контактной зоны $q = 0$ и q определяется выражением (2.8) в области контакта. Неизвестные константы, а также связь величины площадки контакта с глубиной внедрения найдём из условий (2.4), (2.5). Окончательный вид решений не приводится ввиду громоздкости. Отметим, что при $l \to \infty$ коэффициенты $C_3, C_4 \to 0$ и решение (2.9) стремится к решению для полосы. Условие равновесия штампа даёт зависимость силы, действующей на штамп, от глубины внедрения.

3. Результаты вычислительных экспериментов

При проведении вычислительных экспериментов были выбраны четыре пары безразмерных законов неоднородности прямоугольника:

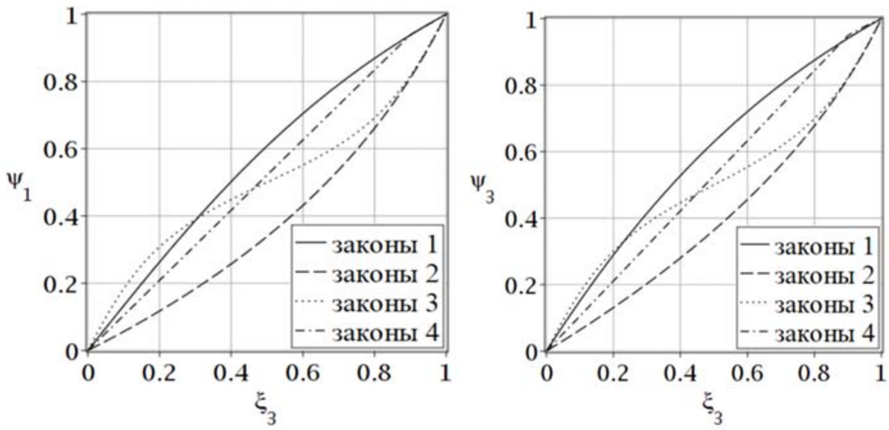
1. возрастающие $f_1^{(1)}\left(\xi_3\right) = 0.2 + 0.8\xi_3$, $f_2^{(1)}\left(\xi_3\right) = 0.4375 + 0.5625\xi_3^2$;
2. убывающие $f_1^{(2)}\left(\xi_3\right) = -0.4\xi_3^3 + 0.7$, $f_2^{(2)}\left(\xi_3\right) = -0.75\xi_3 + 1$;
3. немонотонные
   $f_1^{(3)}\left(\xi_3\right) = 0.6 - 0.3\cos\left(2\pi\xi_3\right)$, $f_2^{(3)}\left(\xi_3\right) = 0.625 - 0.375\cos\left(2\pi\xi_3\right)$;
4. разрывные

$$f_1^{(4)}\left(\xi_3\right) = \begin{cases} 0.5, & \xi_3 \in \left[0, 0.9\right) \\ 10\xi_3 - 8, & \xi_3 \in \left[0.9, 1\right] \end{cases}, \quad f_2^{(4)}\left(\xi_3\right) = \begin{cases} 0.584, & \xi_3 \in \left[0, 0.9\right) \\ 0.088\xi_3 + 0.912, & \xi_3 \in \left[0.9, 1\right] \end{cases}$$

Законы неоднородности имеют одинаковые средние значения, т.е.

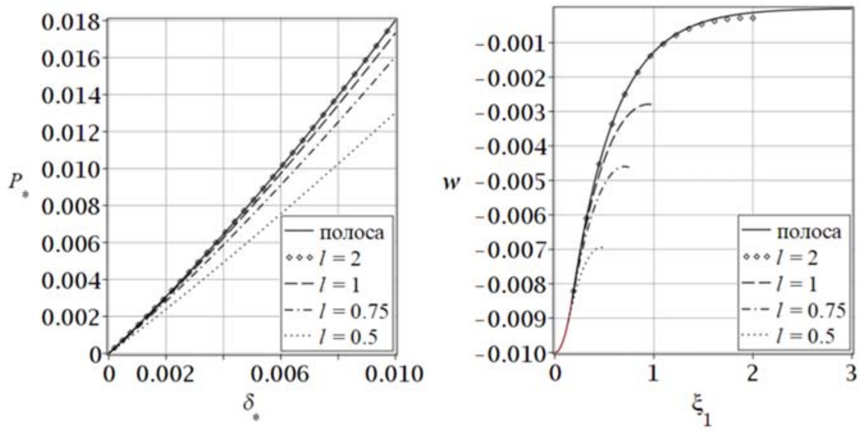
$$\int_0^1 f_1^{(j)}\left(\xi_3\right)d\xi_3 = 0.6, \quad \int_0^1 f_2^{(j)}\left(\xi_3\right)d\xi_3 = 0.625, \quad j = \overline{1,4}.$$

Поскольку гипотезы (2.1) зависят от свойств прямоугольника, характер изменения компонент вектора перемещений по вертикальной координате будет различным для каждого из законов неоднородности. На фиг.1 представлены графики функций $\psi_1\left(\xi_3\right)$ и $\psi_3\left(\xi_3\right)$ для законов 1–4.



а) б)

Фиг.1: Характер изменения смещений по ξ_3 : а) $\psi_1(\xi_3)$; б) $\psi_3(\xi_3)$.



а) б)

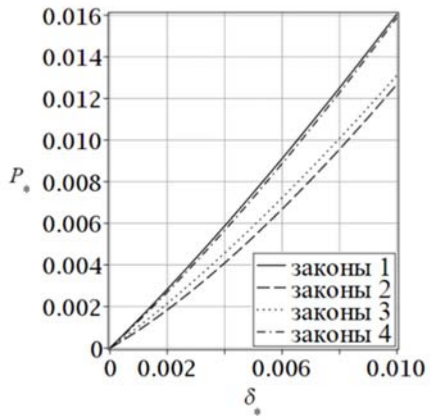
Фиг. 2: Сравнение решений контактной задачи для полосы и прямоугольников различной длины: а) сила-внедрение; б) вертикальное смещение верхней границы.

На фиг.2 приведено сравнение решений контактной задачи для полосы и прямоугольника с различными соотношениями геометрических параметров. Вычисления проведены для возрастающих законов неоднородности 1 при значении безразмерного радиуса кривизны штампа $r = 10$. Анализ результатов показал, что для вертикального смещения верхней границы наибольшая разница решений полосы и прямоугольника наблюдается в точке $\xi_1 = l$, что обусловлено структурой решения (2.9), и составляет 5% при $l = 0.7332$. Разница 5% для значений безразмерной силы $P_* = P / \mu_0 h$, действующей на штамп, для внедрения $\delta_* = 0.01$ достигается при $l = 0.9389$. Значения l , при которых разность в значениях силы и вертикального смещения в точке $\xi_1 = l$ при $\delta_* = 0.01$ достигает 5% и 10% для законов неоднородности 1–4 приведены в Табл. 1.

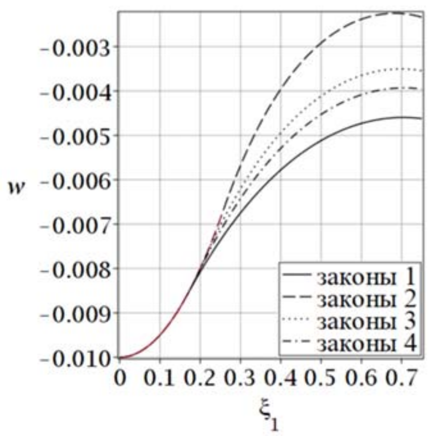
Таблица 1.

Законы неоднородности	$\Delta_P = 5\%$	$\Delta_P = 10\%$	$\Delta_w = 5\%$	$\Delta_w = 10\%$
1	0.9389	0.7727	0.7332	0.5111
2	0.6569	0.5522	0.6750	0.5611
3	0.7927	0.6569	0.7101	0.5476
4	0.8419	0.6962	0.7129	0.5298

На фиг. 3 представлено сравнение решений контактной задачи для прямоугольника на основе приближённой модели для законов неоднородности 1–4 при $r = 10$, $l = 0.75$. Несмотря на одинаковые средние значения функций $f_1^{(j)}(\xi_3)$, $f_2^{(j)}(\xi_3)$, результаты решения контактной задачи различны и данная модель может быть использована для идентификации упругих свойств прямоугольника по данным индентирования. Графики зависимости сила-внедрение для законов 1 и 4 значительно отличаются от аналогичных зависимостей для законов 2 и 3, так как максимальные значения безразмерных модулей $f_1^{(1)}(\xi_3)$, $f_2^{(1)}(\xi_3)$ и $f_1^{(4)}(\xi_3)$, $f_2^{(4)}(\xi_3)$ достигаются на верхней границе прямоугольника $\xi_3 = 1$. Таким образом, для зависимости сила-внедрение существенными характеристиками являются значения упругих модулей материала на верхней границе.



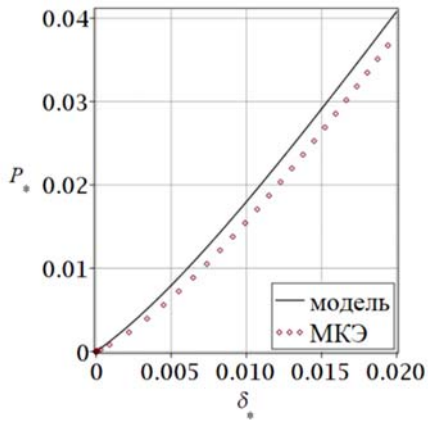
а)



б)

Фиг. 3: Решения контактной задачи для законов 1–4.

Построено решение контактной задачи с помощью МКЭ. Неоднородный прямоугольник смоделирован с помощью КЭ-пакета Ansys в виде многослойной области для количества слоёв $N = 21$. Сравнение решений приближённой модели с решениями, полученными на основе КЭ-модели, представлено на фиг. 4. Вычисления проведены для разрывных законов неоднородности 4 при значениях параметров $r = 20$, $l = 0.75$. Как и для полосы, приближённая модель даёт завышенное значение при одинаковом внедрении по сравнению с решением на основе КЭ-модели. Разница решений составляет12.5% при глубине внедрения $\delta_* = 0.01$ и 6.4% при внедрении $\delta_* = 0.02$.



Фиг. 4. Сравнение решений на основе приближённой и КЭ моделей для законов 4.

Заключение

Построена приближённая модель деформирования неоднородного по вертикальной координате упругого прямоугольника. Сформулированы граничные условия на боковых сторонах прямоугольника. В рамках модели решена задача контактного взаимодействия неоднородного упругого прямоугольника и жёсткого штампа параболической формы. Проведено сравнение решений контактной задачи для прямоугольника с решениями для полосы. Проведён сравнительный анализ решений для разных законов неоднородности, который показал чувствительность модели к характеру изменения упругих свойств, что говорит о возможности исследования задач об оценке свойств неоднородного тела в рамках представленной модели. Основной информацией при решении обратных задач может служить зависимость сила-внедрение. Проведён сравнительный анализ результатов решений, построенных на основе приближённой и конечно-элементной моделей, обсуждены границы применимости модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borodich F.M., Bull S.J., Epshtein S.A. Nanoindentation in Studying Mechanical Properties of Heterogeneous Materials // J. Mining Science. 2015. Vol. 51. No.3 P. 470–476.
2. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Applied Materials Today. 2016. Vol. 5. P. 223–245.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

4. Механика контактных взаимодействий (ред. Ворович И. И., Александров В. М.). М.: Физматлит, 2001. 672 с.
5. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
6. Волков С.С., Васильев А. С, Айзикович С.М., Селезнев Н.М., Леонтьева А.В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2016. № 4. С. 20–34.
7. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Контактная задача для упругого полупространства с трещинами и накладками при антиплоской деформации // Известия НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. № 1. С.6–15.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
9. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение. 1980, 411с.
10. Саркисян С.О. О цилиндрическом изгибе пластинки жесткими штампами. //Доклады АН Арм. ССР, 1977, вып. LXIV, № 4, с. 216–223.
11. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полосы и бесконечной пластины с двумя конечными упругими накладками при наличии сдвиговых прослоек. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №1. С.22-34.
12. Григорян М.С., Мхитарян С.М. О контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров с упругой полубесконечной пластиной. // Доклады НАН Армении. 2018. Т.118. №1. С.49–59.
13. Ватульян А.О., Плотников Д.К., Поддубный А.А. О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т.18, вып. 4. С 421–432.
14. Ватульян А.О., Плотников Д.К. Об одной модели индентирования функционально-градиентной полосы // Доклады РАН. 2019. Т.485. №5. С. 564–567.

Сведения об авторах:

Ватульян Александр Ованесови, д.ф.м.н., проф., зав. Каф. теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Адрес: Россия,Ростов-на-Дону, 344015, ул. Зорге, дом 27/3 кв.48
Тел:+7 (918) 589-60-75, **E-mail:**vatulyan@math.rsu.ru

Плотников Дмитрий Константинович, м.н.с. ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ
Адрес: Россия, Аксай, 346720, ул. Садовая, дом 5, кв. 21
Тел:+7 (909) 412-48-07, **E-mail:**dustheap@mail.ru

Поступила в редакцию 23.04.2020

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №2, 2020 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.2.4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ С ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ УРАВНЕНИЕМ МЕТОДОМ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР

Саакян А.В.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, квадратурная формула, весовая функция Якоби, метод механических квадратур, краевая трещина, гиперсингулярное интегральное уравнение.

Sahakyan A.V.

Solution a problem for edge crack with a hypersingular governing equation by the mechanical quadrature method

Keywords: hypersingular integral, quadrature formula, Jacobi weight function, mechanical quadrature method, edge crack, hypersingular integral equation

The mechanical quadrature method, which has proven itself to efficiently solve singular integral equations of various types, is also quite effective in solving the hypersingular integral equation. A unified quadrature formula is obtained for a hypersingular integral with the weight function of the Jacobi polynomials. Formula is applicable for all admissible values, both real and complex, of the exponents of the weight function.

The method has been tested to solve a simple model problem for an elastic half-plane containing an edge crack of finite length in the framework of the plane problem of the elasticity theory, the defining equation of which can be written in the form of a hypersingular integral equation for crack opening. The convergence of the method is shown, and the results of solving the problem are presented in the form of a graph and a table.

Ա.Վ.Սահակյան

Եզրային ճաքի համար հիպերսինգուլյար որոշիչ հավասարումով խնդրի լուծումը քառակուսացման բանաձևերի մեթոդով

Հիմնաբառեր՝ հիպերսինգուլյար ինտեգրալ, քառակուսացման բանաձև, Յակոբիի կշռային ֆունկցիա, քառակուսացման բանաձևերի մեթոդ, եզրային ճաք, հիպերսինգուլյար ինտեգրալ հավասարում:

Տարբեր տիպի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար որպես արդյունավետ եղանակ դրսևորած քառակուսացման բանաձևերի մեթոդը բավականին արդյունավետ է նաև հիպերսինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար: Յակոբիի բազմանդամների կշռային ֆունկցիա պարունակող հիպերսինգուլյար ինտեգրալի համար ստացված է միասնական քառակուսացման բանաձև, որը օգտագործելի է կշռային ֆունկցիայի ցուցիչների բոլոր, ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս, թույլատրելի արժեքների համար:

Մեթոդը փորձարկված է վերջավոր երկարության եզրային ճաք պարունակող առաձգական կիսահարթության համար պարզ մոդելային խնդրի լուծման վրա: Խնդրի որոշիչ հավասարումը կարելի է ձևակերպել որպես հիպերսինգուլյար ինտեգրալ հավասարում ճաքի բացվածքի նկատմամբ: Ցույց է տրված մեթոդի զուգամիտությունը, ինչպես նաև խնդրի լուծման արդյունքները գրաֆիկով և աղյուսակով:

Метод механических квадратур, хорошо зарекомендовавший себя для эффективного решения сингулярных интегральных уравнений разного типа, достаточно эффективен и при решении гиперсингулярного интегрального уравнения. Получена единая квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла с плотностью, содержащей весовую функцию многочленов Якоби, применимая при всех допустимых, как вещественных, так и комплексных, значениях показателей весовой функции.

Метод опробирован на решении простой модельной задачи для упругой полуплоскости, содержащей краевую трещину конечной длины в рамках плоской задачи теории упругости, определяющее уравнение которой можно выписать в виде гиперсингулярного интегрального уравнения относительно раскрытия трещины. Показана сходимость метода, а также представлены результаты решения задачи в виде графика и таблицы.

Введение. Широкое развитие теории гиперсингулярных интегральных уравнений в последние десятилетия обусловлено тем, что ими описываются определяющие уравнения многих прикладных задач в различных областях: теории упругости, механике разрушения, теории дифракции волн, теории вибраторных антенн, аэродинамике и др., например [1-4]. За редким исключением, решение этих уравнений строится приближенными методами, развитию которых посвящено очень много работ, в частности [5-12]. Следует отметить, что подавляющее большинство работ относится к наиболее распространенному частному случаю, когда поведение плотности сингулярного или гиперсингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования описывается корневой функцией. Существенно меньше число работ, посвященных приближенному вычислению указанных интегралов, плотности которых содержат весовую функцию многочленов Якоби с произвольными допустимыми вещественными показателями. В работе [13] приведены квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные.

В настоящей работе строятся интерполяционные квадратурные формулы для гиперсингулярного интеграла при предположении, что плотность этого интеграла содержит множителем весовую функцию Якоби с произвольными, в том числе и комплексными, допустимыми показателями. В отличие от работы [14], где выделены случаи равенства нулю хотя бы одного из показателей весовой функции Якоби, здесь получена единая квадратурная формула для всех допустимых значений показателей.

Для иллюстрации применения полученной квадратурной формулы к решению гиперсингулярного интегрального уравнения, рассмотрена известная, например [20], задача для упругой полуплоскости, содержащей перпендикулярную к границе краевую трещину. Определяющее уравнение задачи сформулировано в виде гиперсингулярного интегрального уравнения относительно раскрытия трещины. При помощи полученной квадратурной формулы определяющее уравнение сведено к системе линейных алгебраических уравнений и найдена функция, описывающая форму раскрытия трещины.

Вывод квадратурной формулы. Для полноты изложения здесь частично, главным образом, в вводной части, повторим изложение работы [14]. Рассмотрим интеграл

$$J_0(z)=\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(x)}{(x-z)^2}dx \qquad (z\in C,\ z\neq\pm 1), \tag{1}$$

который при $z\in(-1,1)$ понимается в смысле конечного значения по Адамару [15]

$$J_0(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{z-\varepsilon}\frac{\Phi(x)}{(x-z)^2}dx+\int_{z+\varepsilon}^{1}\frac{\Phi(x)}{(x-z)^2}dx-\frac{2\Phi(z)}{\varepsilon}.\right]$$

Интегрируя интегралы в последнем выражении по частям и устремляя ε к нулю, нетрудно получить

$$J_0(z) = -\frac{\Phi(1)}{1-z} - \frac{\Phi(-1)}{1+z} + \int_{-1}^{1} \frac{\Phi'(x)}{x-z} dx , \tag{2}$$

то есть интеграл $J_0(z)$ можно понимать как результат формального интегрирования по частям и, следовательно, вычисление гиперсингулярного интеграла сведётся к вычислению интеграла

$$I(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\Phi'(x)}{x-z} dx . \tag{3}$$

Предположим, что

$$\Phi(x) = \varphi(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \qquad \left(\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) \geq 0\right), \tag{4}$$

Здесь $\varphi(x)$ – гельдеровская функция на замкнутом отрезке $[-1,1]$, которую можно заменить интерполяционным многочленом

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(\xi_j) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_j) P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)} ,$$

где $\xi_j \left(j = \overline{1,n}\right)$– корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Эти корни, в общем случае, будут комплексными и возникает вопрос, что понимать под $\varphi(\xi_j)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, если функция $\varphi(x)$ определена на отрезке $[-1,1]$. В общем случае, под $\varphi(\xi_j)$ целесообразно понимать значения многочлена порядка $(n-1)$, интерполирующего функцию $\varphi(x)$ по узлам на отрезке $[-1,1]$, например, чебышевским. В случае же, если функция $\varphi(x)$ аналитически продолжается в комплексную плоскость, то $\varphi(\xi_j)$ можно считать значениями и самой функции $\varphi(x)$. Однако, следует заметить, что в последнем случае, точность аппроксимации будет существенно зависеть от величины мнимых частей показателей.

Поскольку интерполяционный многочлен $\varphi_n(x)$ по сути является многочленом порядка $n-1$, то в случае, если $\varphi(x)$ будет многочленом порядка $m < n$, будем иметь $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x)$.

Тогда для $\Phi(x)$ будем иметь:

$$\Phi(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_j)P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \tag{5}$$

Воспользовавшись равенством, непосредственно вытекающим из формулы 10.8(38) [16],

$$\frac{d}{dx}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\right]=-2(n+1)(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)$$

производную функции $\Phi(x)$ запишем в виде

$$\Phi'(x)=-(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}\left[\frac{2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)}{x-\xi_j}+(1-x^2)\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_j)^2}\right]$$

Подставляя полученное представление в интеграл $I(z)$ и меняя порядок интегрирования и суммирования, будем иметь:

$$I(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}\left[2(n+1)\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}}{(x-z)(x-\xi_j)}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)dx+\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(x-z)(x-\xi_j)^2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx\right]$$

Пользуясь формулой Кристоффеля-Дарбу для многочленов Якоби, откуда получим

$$\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-\xi_j}=A(\xi_j)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{h_m^{(\alpha,\beta)}}$$

$$A(\xi_j)=\frac{(2n+\alpha+\beta)}{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}\frac{2^{\alpha+\beta}\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

и равенством

$$\frac{1}{(x-z)(x-\xi_j)}=\left[\frac{1}{x-z}-\frac{1}{x-\xi_j}\right]\frac{1}{z-\xi_j},$$

получим

$$I(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{2(n+1)\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)(z-\xi_j)}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}}{x-y}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)dx\right|_{y=\xi_j}^{y=z}+$$

$$\left.+\frac{A(\xi_j)}{2(n+1)}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{h_m^{(\alpha,\beta)}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{x-z}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx\right|_{y=\xi_j}^{y=z}\Bigg\} \tag{6}$$

Здесь

$$h_m^{(\alpha,\beta)}=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1)\Gamma(m+1)\Gamma(m+\alpha+\beta+1)},$$

а также, для простоты записи, использовано обозначение $f(y)\Big|_{y=b}^{y=a}=f(a)-f(b)$.

Введём в рассмотрение функцию

$$R_k^{(a,b)}(z)=\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{a}(1+x)^{b}}{x-z}P_k^{(a,b)}(x)dx, \tag{7}$$

которая тесно связана с функцией Якоби второго рода $Q_k(z)$

$$Q_k(z)=\frac{R_k^{(a,b)}(z)}{2(z-1)^a(z+1)^b}$$

и определена во всей комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1,1]$. При условии $(a>-1,b>-1)$ эта функция имеет много различных представлений [16], из которых представим только одно:

$$R_k^{(a,b)}(z)=-\left(\frac{2}{z-1}\right)^{k+1}2^{a+b}B(k+a+1,k+b+1)\times$$
$$\times F\left[k+1,k+a+1;2k+a+b+2;\frac{2}{1-z}\right] \tag{8}$$

Здесь $B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ – известная бета-функция, а $F(a,b;c;z)$ – гипергеометрический ряд [17].

Отметим, что функция $R_k^{(a,b)}(z)$ принимает различные значения в зависимости от того, стремится ли точка z к точке ξ разреза из верхней полуплоскости $(\xi+i0)$ или из нижней полуплоскости $(\xi-i0)$. На самом разрезе функция $R_k^{(a,b)}(z)$ определяется как полусумма этих значений:

$$R_k^{(a,b)}(\xi)=\frac{1}{2}\Big[R_k^{(a,b)}(\xi+i0)+R_k^{(a,b)}(\xi-i0)\Big]\qquad\qquad(-1<\xi<1).$$

Поскольку, согласно (4), показатели α и β могут принимать и нулевые значения, то для первого интеграла в выражении (6) представления (7) и (8), в общем случае, неприменимы. Используя разные соотношения между многочленами Якоби, преобразуем этот интеграл так, чтобы и в этих случаях можно было бы использовать представление (8).

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}}{x-y}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)\,dx=\\
&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)P_{n+1}^{(\alpha,\beta-1)}(x)}{(x-y)(1+x)}dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta)}(x)}{(x-y)(1-x)}dx=\\
&=\frac{1}{2(1+y)}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)}{(x-y)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta-1)}(x)dx+\frac{1}{2(1-y)}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)}{(x-y)}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta)}(x)dx-\\
&-\frac{1}{2(1+y)}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)}{(1+x)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta-1)}(x)dx+\frac{1}{2(1-y)}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)}{(1-x)}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta)}(x)dx
\end{aligned}\tag{9}$$

Первые два интеграла в последнем выражении определены при любых α и β, а вот последние два при ненулевых значениях α и β равны нулю в силу ортогональности многочленов Якоби и принимают конечные значения соответственно при $\beta=0$ и $\alpha=0$. Найдём эти значения на примере второго из этих интегралов.

Пусть $\alpha=0$, тогда этот интеграл примет вид

$$I_\alpha=\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{\beta}}{1-x}P_{n+1}^{(-1,\beta)}(x)dx.$$

Нетрудно проверить, что $P_{n+1}^{(-1,\beta)}(1)=0$, следовательно, многочлен $P_{n+1}^{(-1,\beta)}(x)$ можно представить в виде

$$P_{n+1}^{(-1,\beta)}(x)=(1-x)\sum_{k=0}^{n}a_kP_k^{(0,\beta)}(x).\tag{10}$$

Для определения коэффициентов a_k воспользуемся известным соотношением между многочленами Якоби и реккурентной формулой для них, выписанными для случая $\alpha=0$:

$$P_{n+1}^{(-1,\beta)}(x)=\frac{(n+\beta+1)}{2n+\beta+2}\Big[P_{n+1}^{(0,\beta)}(x)-P_n^{(0,\beta)}(x)\Big]$$

$$P_{n+1}^{(0,\beta)}(x)=\frac{(2n+\beta+1)\left[(2n+\beta+2)(2n+\beta)x-\beta^2\right]}{2(n+1)(n+\beta+1)(2n+\beta)}P_n^{(0,\beta)}(x)-$$

$$-\frac{n(n+\beta)(2n+\beta+2)}{(n+1)(n+\beta+1)(2n+\beta)}P_{n-1}^{(0,\beta)}(x)$$

Подставив $P_{n+1}^{(0,\beta)}(x)$ из реккурентной формулы в первое соотношение и группируя так, чтобы выделить множитель $(1-x)P_n^{(0,\beta)}(x)$, получаем другую реккурентную формулу:

$$\frac{(n+\beta+1)}{2n+\beta+2}\left[P_{n+1}^{(0,\beta)}(x)-P_n^{(0,\beta)}(x)\right]=\frac{n(n+\beta)}{(n+1)(2n+\beta)}\left[P_n^{(0,\beta)}(x)-P_{n-1}^{(0,\beta)}(x)\right]-$$

$$-\frac{2n+\beta+1}{2(n+1)}(1-x)P_n^{(0,\beta)}(x)$$

n, кратное использование которой приводит к разложению (10) с коэффициентами

$$a_k=-\frac{2k+\beta+1}{2(n+1)}\quad (k=0,1,...,n).$$

Подставляя (10) в интеграл I_α и учитывая ортогональность многочленов Якоби, будем иметь:

$$I_\alpha=\sum_{k=0}^{n}a_k\int_{-1}^{1}(1+x)^\beta P_k^{(0,\beta)}(x)dx=a_0h_0^{(0,\beta)}=-\frac{2^\beta}{n+1}\tag{11}$$

Таким образом, для интеграла I_α в общем случае будем иметь:

$$I_\alpha=\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{(1-x)}P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta)}(x)dx=-\frac{2^\beta}{n+1}\delta(\alpha,0)\tag{12}$$

где $\delta(a,b)$ – символ, подобный символу Кронекера и равный 1 только при $a=b$.

Аналогичным образом для второго интеграла будем иметь:

$$I_\beta=\int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{(1+x)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta-1)}(x)dx=(-1)^n\frac{2^\alpha}{n+1}\delta(\beta,0)\tag{13}$$

Численный анализ показал, что сумма первых двух слагаемых выражения (9) равна $R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(y)$ в виде представления (8) независимо от значений показателей α и β. Следовательно, формулу (6) можно переписать в виде

$$I(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{2(n+1)\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)(z-\xi_j)}\left\{R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(y)\Big|_{y=\xi_j}^{y=z}-\frac{2^{\beta}\delta(\alpha,0)}{2(n+1)(1-y)}\Big|_{y=\xi_j}^{y=z}+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+1}\frac{2^{\alpha}\delta(\beta,0)}{2(n+1)(1+y)}\Big|_{y=\xi_j}^{y=z}+\frac{A(\xi_j)}{2(n+1)}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{h_m^{(\alpha,\beta)}}R_m^{(\alpha,\beta)}(y)\Big|_{y=\xi_j}^{y=z}\right\}$$

или

$$I(z)=-\frac{2}{n+\alpha+\beta+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_j)(z-\xi_j)}\left\{2(n+1)R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(y)\Big|_{y=\xi_j}^{y=z}+\right.$$
$$\left.+A(\xi_j)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{h_m^{(\alpha,\beta)}}R_m^{(\alpha,\beta)}(y)\Big|_{y=\xi_j}^{y=z}\right\}+\frac{\Phi(1)}{1-z}+\frac{\Phi(-1)}{1+z} \qquad (14)$$

Полученная квадратурная формула (14) при ненулевых α и β, очевидно, должна совпасть с соответствующей формулой, приведённой в работе [14], которая имеет более компактный и простой для вычислений вид

$$I(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}\left[\frac{2(n+1)}{z-\xi_j}R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z)+\frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z)-R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)^2}\right] \qquad (15)$$

Следовательно, формулу (14) можно записать в виде

$$I(z)=\frac{\Phi(1)}{1-z}+\frac{\Phi(-1)}{1+z}-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}\left[\frac{2(n+1)}{z-\xi_j}R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z)+\frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z)-R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)^2}\right] \qquad (16)$$

Численный анализ показывает, что последняя формула верна и при нулевых α и β. Подставляя формулу (16) в представление (2), для гиперсингулярного интеграла $J_0(z)$ (1) будем иметь:

$$J_0(z)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j\varphi(\xi_j)}{z-\xi_j}\left[2(n+1)R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z)+\frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z)-R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)}\right] \qquad (17)$$

где $c_j=2\left[(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_j)\right]^{-1}$, а функции $R_k^{(a,b)}(y)$ определяются формулой (8).

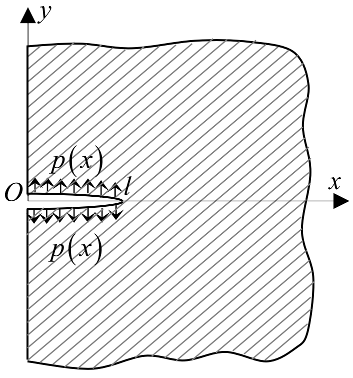
Таким образом, получена единая квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла $J_0(z)$, применимая как при ненулевых, так и при нулевых значениях показателей α и β.

При необходимости вычисления интеграла $J_0(z)$ в узловой точке $z=\xi_m$ $(m=\overline{1,n})$ следует в соответствующем слагаемом квадратурной формулы (17) использовать предельное значение:

$$\lim_{z\to\xi_m}\left[\frac{2(n+1)}{z-\xi_m}R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z)+\frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z)-R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_m)}{(z-\xi_m)^2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{d^2R_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{dz^2}\bigg|_{z=\xi_m}$$

Численный анализ сходимости квадратурной формулы (17) здесь не приводится, поскольку, он в точности повторяет данные, приведённые в работе [14] в достаточном количестве.

Решение гиперсингулярного интегрального уравнения. В качестве примера рассмотрим плоскую задачу теории упругости для упругой полуплоскости, содержащей трещину конечной длины l, перпендикулярно выходящую на границу. Полуплоскость деформируется под воздействием равномерно распределённой по берегам трещины сжимающей нагрузки $p(x)$ (фиг.1).



Фиг.1 Схематическое представление задачи

Предлагаемая задача рассматривалась неоднократно и многими авторами, в частности, отметим книгу [20]. Обычно определяющие уравнения для задач с трещинами выписываются относительно производной скачка перемещений берегов трещины, который, по сути, является мерой раскрытия трещины.

Согласно работе [20], после введения безразмерных величин

$$t=\frac{l}{2}(\tau+1);\qquad x=\frac{l}{2}(\xi+1);\qquad \frac{\kappa+1}{2\mu}p\left(\frac{l}{2}(\xi+1)\right)=f(\xi);$$
$$\frac{d}{d\tau}\left[v^+\left(\frac{l}{2}(\tau+1)\right)-v^-\left(\frac{l}{2}(\tau+1)\right)\right]=\varphi(\tau);\qquad (-1<\tau,\xi<1) \tag{18}$$

определяющее уравнение задачи, выписанное относительно скачка производной нормальной компоненты перемещения берегов трещины $\varphi(\tau)$, принимает вид:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}d\tau+\int_{-1}^{1}K(\xi,\tau)\varphi(\tau)d\tau=\pi f(\xi)\qquad(-1<\xi<1) \tag{19}$$

где

$$K(\xi,t) = -\frac{1}{t+\xi+2} - 6(1+\xi)\frac{d}{d\xi}(t+\xi+2)^{-1} - 2(1+\xi)^2\frac{d^2}{d\xi^2}(t+\xi+2)^{-1}. \quad (20)$$

Здесь $k = 3-4\nu$ – в случае плоской деформации, $k = (3-\nu)/(1+\nu)$ – в случае плоского напряжённого состояния, μ, ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала полуплоскости.

Введём в рассмотрение функцию $v(t)$, представляющую раскрытие трещины и являющуюся интегралом функции $\varphi(t)$, т.е. $v'(t) = \varphi(t)$. Подставив последнее представление в уравнение (19) и проинтегрировав интегралы по частям, с учётом того, что $v(1) = 0$, получим:

$$\left[\frac{1}{1+\xi} - K(\xi,-1)\right]v(-1) + \int_{-1}^{1}\frac{v(\tau)}{(\tau-\xi)^2}d\tau - \int_{-1}^{1}\frac{\partial K(\xi,\tau)}{\partial\tau}v(\tau)d\tau = \pi f(\xi) \quad (|\xi|<1)$$

Нетрудно проверить, что внеинтегральный член в левой части уравнения тождественно равен нулю, следовательно, придём к следующему гиперсингулярному интегральному уравнению:

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1}\frac{v(\tau)}{(\tau-\xi)^2}d\tau + \int_{-1}^{1}\frac{v(\tau)}{(\tau+\xi+2)^2}d\tau + 6(1+\xi)\frac{d}{d\xi}\int_{-1}^{1}\frac{v(\tau)}{(\tau+\xi+2)^2}d\tau + \\ +2(1+\xi)^2\frac{d^2}{d\xi^2}\int_{-1}^{1}\frac{v(\tau)}{(\tau+\xi+2)^2}d\tau = \pi f(\xi) \qquad (|\xi|<1)\end{gathered} \quad (21)$$

Учитывая, что, исходя из физических соображений, раскрытие трещины в точке $t=-1$ принимает конечное значение, а в точке $t=1$ обращается в ноль как корневая функция, искомую функцию $v(t)$ можно представить в виде

$$v(t) = g(t)\sqrt{1-t} \qquad (|t|<1) \quad (22)$$

Подставляя (22) в интегралы уравнений (21) и используя квадратурную формулу (17) при $\alpha = 0.5;\ \beta = 0$, получим:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} c_j g(\xi_j)\left\{\frac{B_j(\xi)}{\xi_j-\xi} - \frac{B_j(-\xi-2)}{\xi_j+\xi+2} - \right. \\ \left. -6(1+\xi)\frac{d}{d\xi}\frac{B_j(-\xi-2)}{\xi_j+\xi+2} - 2(1+\xi)^2\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{B_j(-\xi-2)}{\xi_j+\xi+2}\right\} = \pi f(\xi)\end{gathered} \quad (23)$$

где $\xi_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ – корни полинома $P_n^{(0.5,0)}\left(x\right)$, $c_j=2\left[\left(n+1.5\right)P_{n-1}^{(1.5,1)}\left(\xi_j\right)\right]^{-1}$, $g\left(\xi_j\right)$ – искомые константы, представляющие значения искомой функции $g\left(x\right)$ в узлах квадратурной формулы,

$$B_j\left(z\right)=2\left(n+1\right)R_{n+1}^{(-0.5,-1)}\left(z\right)+\frac{R_n^{(0.5,0)}\left(z\right)-R_n^{(0.5,0)}\left(\xi_j\right)}{\left(z-\xi_j\right)}.$$

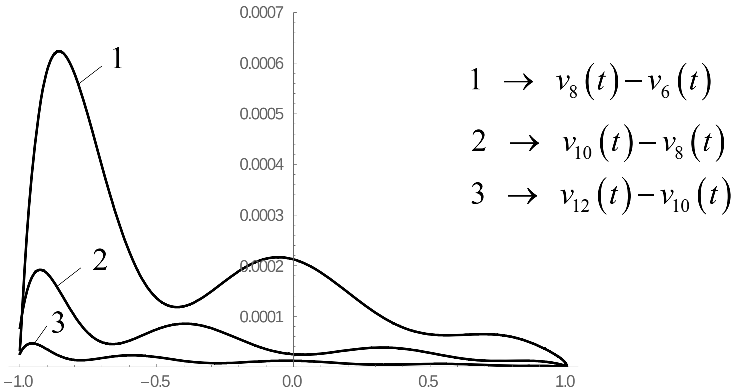
В качестве точек коллокации для сведения уравнения (23) к системе линейных алгебраических уравнений и определения констант $g\left(\xi_j\right)$ выберем корни многочлена Чебышева первого рода $T_n\left(\zeta_k\right)$. В итоге придём к следующей с.л.а.у.:

$$\sum_{j=1}^{n}c_j g\left(\xi_j\right)\left\{\frac{B_j\left(\zeta_k\right)}{\xi_j-\zeta_k}-\frac{B_j\left(-\zeta_k-2\right)}{\xi_j+\zeta_k+2}-6\left(1+\zeta_k\right)\frac{d}{d\xi}\frac{B_j\left(-\xi-2\right)}{\xi_j+\xi+2}\bigg|_{\xi->\zeta_k}-\right.$$
$$\left.-2\left(1+\zeta_k\right)^2\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{B_j\left(-\xi-2\right)}{\xi_j+\xi+2}\bigg|_{\xi->\zeta_k}\right\}=\pi f\left(\zeta_k\right) \qquad (24)$$

После определения констант $g\left(\xi_j\right)$, раскрытие трещины $v\left(t\right)$ выразим более удобной, чем (5), формулой

$$v(t)=\sqrt{1-t}\sum_{i=1}^{n}w_i g\left(\xi_i\right)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m^{(0.5,0)}\left(\xi_i\right)P_m^{(0.5,0)}\left(t\right)}{h_m^{(0.5,0)}} \qquad (25)$$

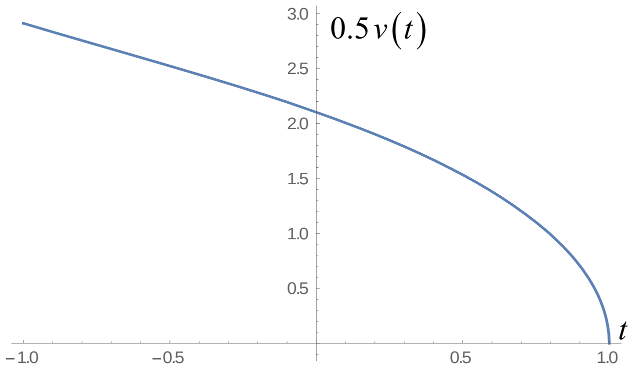
где $$w_i=\frac{8\sqrt{2}}{\left(1-\xi_i^2\right)\left[\left(n+1.5\right)P_{n-1}^{(1.5,1)}\left(\xi_i\right)\right]^2}$$



Фиг. 2. Относительная погрешность вычислений

Проведён численный анализ сходимости системы (24) по порядку аппроксимации n при $f(\xi) = -1$. На фиг.2 представлены графики разницы между функциями $v(t)$, рассчитанными при различных n, которые представим с индексом, указывающим на порядок аппроксимации $v_n(t)$.

Ввиду симметрии относительно оси Ox, на фиг.3 показан график функции $0.5\,v(t)$, который показывает реальную форму раскрытой трещины.



Фиг.3. Форма раскрытия трещины

Нетрудно найти, что коэффициент концентрации напряжений у внутреннего конца трещины определяется формулой

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i g(\xi_i) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{P_m^{(0.5,0)}(\xi_i) P_m^{(0.5,0)}(1)}{h_m^{(0.5,0)}} \tag{26}$$

Для сравнения в таблице приведены значения коэффициента концентрации напряжений, приведённые в [20] и рассчитанные по формуле (26).

Таблица

Формула (26)	n	6	8	10	12
	K	1.12145	1.12150	1.12152	1.12152
Работа [20]	n	30	40	50	60
	$k_1 / p\sqrt{l}$	1.1213	1.1214	1.1214	1.1215

Графики на фиг.2 и данные, приведённые в таблице, очевидным образом указывают на эффективность применения метода механических квадратур для решения гиперсингулярных интегральных уравнений.

Заключение. Получена единая квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла, плотность которого содержит весовую функцию многочленов Якоби с комплексными показателями степени. Формула применима при любых допустимых значениях показателей. На примере плоской задачи теории упругости для полуплоскости с краевой трещиной показано, что приведённая квадратурная формула вкупе с квадратурными формулами для других интегралов, представленными в [18,19], позволяет с успехом применить метод механических квадратур [19] к решению и гиперсингулярных интегральных уравнений на отрезке.

Автор выражает благодарность к.ф.м.н. А.А.Амирджаняну за полезное обсуждение работы и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линьков А.М., Могилевская С.Т. Гиперсингулярные интегралы в плоских задачах теории упругости. //ПММ. 1990. Т.54, в.1. С.116-122.
2. Lu, J., Hanyga, A. Scattering of SH wave by a crack terminating at the interface of a bimaterial. Computational Mechanics 34, 74–85 (2004). https://doi.org/10.1007/s00466-004-0555-3
3. A. Whye-Teong, Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis, Woodhead Publishing House, Oxford (2013).
4. Boykov I. and Aikashev P., To the numerical method for synthesis of fractal antennas, 2019 International Seminar on Electron Devices Design and Production (SED), Prague, Czech Republic, 2019, pp. 1-6.
5. P. Linz, On the approximate computation of certain strongly singular integrals. Computing, 35 (1985), pp. 345-353
6. A.C. Kaya, F. Erdogan On the solution of integral equations with strongly singular kernels. Quart. Appl. Math., 45 (1987), pp. 105-122
7. M. Diligenti, G. Monegato, Finite-part integrals: their occurence and computation. F. Altomare, G. Mastroianni (Eds.), Proc. 2nd Int. Conf. in Functional Analysis and Approximation Theory, Suppl. Rend. Circ. Matem. Palermo Ser. II, 33 (1993), pp. 39-61.
8. Бойков И.В., Добрынина Н.Ф., Домнин Л.Н. Приближённые методы вычисления интегралов Адамара и решение гиперсингулярных интегральных уравнений. Пенза: Изд-во Пенз. гос.ун-та, 1996. 188с.
9. Criscuolo G. A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals. J. of Comp. and App. Math., 1997, Vol. 78, Iss. 2, pp. 255-275, https://doi.org/10.1016/S0377-0427(96)00142-2
10. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Изд-во «Янус-К», 2001, 508 с.
11. Плиева Л.Ю. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования. //Сиб. журн. вычисл. матем., 2016, том 19, № 4, 419–428 DOI: https://doi.org/10.15372/SJNM20160406
12. Бойков И.В., Сёмов М.А. Об одном методе вычисления гиперсингулярных интегралов. // Изв. вузов. Матем., 2016, № 3, С.3–17.
13. Саакян А.В. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные. //Известия РАН, Механика твёрдого тела. 2012. №6. С.116-121.
14. Саакян А.В. Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла, содержащего весовую функцию многочленов Якоби с комплексными показателями.

//Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2020, № 2, с. 94-100.
15. Адамар Ж. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. СМБ, том 2. М.: Наука, 1974. 296 с.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, СМБ, том 1. М.: Наука, 1973. 296 с.
18. Саакян А.В., Амирджанян А.А. Метод механических квадратур для решения сингулярных интегральных уравнений разного типа. Тр. V межд. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, 2-7 октября 2017, Цахкадзор, Армения, Ер.: НУАСА, 2017, с.117-118.
19. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi:10.1088/1742-6596/991/1/012070
20. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова Думка, 1976. 443 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Саакян Аветик Вараздатович
Д.ф.м.н., зам.директора Института механики НАН Армении,
Тел.: (37410) 568188, (37494)579348
E-mail: avetik.sahakyan@sci.am

Поступила в редакцию 24.05.2020

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №2, 2020 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/73.2.5

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Хачатрян А.М., Петросян Г.А.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропная двухслойная цилиндрическая оболочка, смешанные условия, внутренняя задача.

Khachatryan A.M., Petrosyan G.A.

Asymptotic solution of one mixed boundary value problem two-layera anisotropic cylindrical shell

Key words: asymptotic method, two-layer anisotropic cylindrical shell, mixed conditions, interior problem.

The question of determining the stress-strain state in a three-dimensional problem for an anisotropic two-layer cylindrical shell, on the outer surface of which the values of normal stress and tangential displacements are specified, and on the inner surface – values of normal displacement and tangential stresses is discussed. Using the asymptotic method, the solution of the internal problem is constructed.

Խաչատրյան Ա.Մ., Պետրոսյան Գ.Ա.

Երկշերտ անիզոտրոպ գլանային թաղանթի մի խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը

Հիմնաբառեր. ասիմպտոտիկ մեթոդ, երկշերտ անիզոտրոպ գլանային թաղանթ, խառը եզրային պայմաններ, ներքին խնդիր:

Ասիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության եռաչափ հավասարումներից դուրս են բերված մասնական ածանցյալներով երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ գլանային թաղանթի հաշվարկման համար, շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի դեպքում: Գլանիա րտաքին մակերևույթի վրա տրված են նորմալ լարման և տանգենցիալ տեղափոխությունների, իսկ ներքին մակերևույթի վրա՝ նորմալ տեղափոխության և տանգենցիալ լարմումների արժեքները:

Обсуждается вопрос определения напряжённо-деформированного состояния в трёхмерной задаче для анизотропной двухслойной цилиндрической оболочки, изготовленной из материалов, обладающих свойством общей анизотропии. Предполагается, что на внешней поверхности оболочки заданы значения нормального напряжения и тангенциальных перемещений, на внутренней поверхности – значения нормального перемещения и тангенциальных напряжений, на поверхности контакта – условия полного контакта. Асимптотическим методом построен итерационный процесс, позволяющий определить внутреннее напряжённо-деформированное состояние двухслойной анизотропной цилиндрической оболочки с заранее заданной асимптотической точностью. Рассмотрены конкретные примеры.

Введение. Теория анизотропных слоистых оболочек на основе гипотезы Кирхгоффа-Лява для пакета в целом, а также уточнённые теории анизотропных слоистых пластин и оболочек построены и развиты в известных монографиях С.А. Амбарцумяна [1,2]. Асимптотический метод определения напряжённо-деформированного состояния произвольной изотропной оболочки разработан А.Л. Гольденвейзером [3,4]. Л.А. Агаловян распространил асимптотический метод на анизотропные пластинки и оболочки, выявив характерные особенности, связанные с анизотропией. На основе уравнений теории упругости, асимптотическим методом, классические и некоторые классы неклассических краевых задач для тонких тел рассмотрены в монографиях [5,6]. Вопрос определения напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки с общей анизотропией рассмотрен в работе [7]. На основе асимптотического метода построены итерационные процессы, описывающие возможные напряжённые состояния в первой краевой задаче для цилиндрической оболочки. Вопрос определения напряжённо-деформированного состояния в трёхмерной задаче для анизотропной цилиндрической оболочки, на внешней и внутренней поверхностях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, обсуждён в работе [8]. Та же задача для анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, обсуждена в работе [9]. В этих работах с применением асимптотического метода построены решения внутренней задачи.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассматривается трёхмерная задача теории упругости для анизотропной двухслойной цилиндрической оболочки длиной L, толщиной $2h$ и радиусом соприкосновения слоёв R. Воспользуемся цилиндрической системой координат r, θ, x, при этом, $x \in [0; L]$, $r \in [R-h_2; R+h_1], \theta \in [0; \Theta]$. Материалы оболочки обладают цилиндрической анизотропией общего вида, а ось анизотропии совпадает с осью цилиндра. Величины, относящиеся к верхнему слою, отметим индексом (1), а к нижнему слою – индексом (2). Предполагается, что толщины и коэффициенты упругости слоёв разные и равны, соответственно, h_k и $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя. Здесь и в последующем, $k = 1,2$. На внешней и внутренней поверхностях оболочки заданы следующие условия теории упругости:

$$\begin{aligned} &u_x^{(1)} = u_x^+,\ u_\theta^{(1)} = u_\theta^+,\ \sigma_r^{(1)} = \varepsilon^{-1}\sigma_r^+ \quad \text{при } r = R + h_1, \\ &\sigma_{rx}^{(2)} = \varepsilon^{-1}\sigma_{rx}^-,\ \sigma_{r\theta}^{(2)} = \varepsilon^{-1}\sigma_{r\theta}^-,\ u_r^{(2)} = u_r^- \quad \text{при } r = R - h_2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

а на торцах $x = 0, L$ и краях $\theta = 0, \Theta$ $(0 < \Theta \le 2\pi)$ могут быть заданы произвольные краевые условия. При $\Theta = 2\pi$ имеем замкнутую цилиндрическую оболочку и вместо краевых условий при $\theta = 0, \Theta$ необходимо задать условие периодичности напряжений и перемещений, то есть $Q^{(k)}(r, \theta + 2\pi) = Q^{(k)}(r, \theta)$, где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений и перемещений.

Между слоями при $r = R$ выполняется условие полного контакта:

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, u_x^{(1)} = u_x^{(2)}, u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)},\ \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}, \sigma_{rx}^{(1)} = \sigma_{rx}^{(2)}, \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \tag{1.2}$$

Для определения напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки будем исходить из трёхмерных уравнений теории упругости в цилиндрических координатах, в которые вводятся безразмерные координаты по формулам [2,5]

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{Rh}},\ \zeta = \frac{r-R}{h},\ \varphi = \theta\sqrt{\frac{R}{h}} \tag{1.3}$$

и безразмерные перемещения $U_r^{(k)} = u_r^{(k)} \big/ R, U_\theta^{(k)} = u_\theta^{(k)} \big/ R, U_x^{(k)} = u_x^{(k)} \big/ R,$ в результате чего уравнения теории упругости будут содержать малый геометрический параметр $\varepsilon = \sqrt{h/R}$, где $2h = h_1 + h_2$.

Решение данной задачи складывается из решения внутренней задачи и решения типа пограничного слоя. Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде суммы по степеням малого параметра [3-8]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)} \tag{1.4}$$

Целые числа q_k подбирается так, чтобы после подстановки (1.4) в преобразованные уравнения теории упругости получить рекуррентную систему относительно искомых величин. В рассматриваемой задаче эта цель достигается при [5,6]

$$q_k = 1 \text{ для } \sigma_r^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)}, \sigma_x^{(k)}, \sigma_{\theta x}^{(k)}, \sigma_{rx}^{(k)}, \sigma_{r\theta}^{(k)}, \quad q_k = 0 \text{ для } U_r^{(k)}, U_\theta^{(k)}, U_x^{(k)}. \tag{1.5}$$

Подставляя (1.4) в преобразованные уравнения теории упругости, с учёом (1.5), получим следующую систему (здесь и в последующем, для удобства записи, запятыми выделены частные производные):

$$\begin{aligned}
&\sigma_{r,\zeta}^{(k,s)} + \zeta\sigma_{r,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{r\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta\sigma_{rx,\xi}^{(k,s-3)} + \sigma_{rx,\xi}^{(k,s-1)} + \sigma_r^{(k,s-2)} - \sigma_\theta^{(k,s-2)} = 0, \\
&\sigma_{r\theta,\zeta}^{(k,s)} + \zeta\sigma_{r\theta,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta\sigma_{x\theta,\xi}^{(k,s-3)} + \sigma_{x\theta,\xi}^{(k,s-1)} + 2\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} = 0, \\
&\sigma_{rx,\zeta}^{(k,s)} + \zeta\sigma_{rx,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{x\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta\sigma_{x,\xi}^{(k,s-3)} + \sigma_{x,\xi}^{(k,s-1)} + \sigma_{rx}^{(k,s-2)} = 0, \\
&U_{x,\xi}^{(k,s)} = a_{11}^{(k)}\sigma_x^{(k,s)} + a_{12}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s)} + a_{13}^{(k)}\sigma_r^{(k,s)} + a_{14}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s)} + a_{15}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s)} + a_{16}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s)}, \\
&U_{\theta,\varphi}^{(k,s)} + U_r^{(k,s-1)} = a_{12}^{(k)}\sigma_x^{(k,s)} + a_{22}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s)} + a_{23}^{(k)}\sigma_r^{(k,s)} + a_{24}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s)} + a_{25}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s)} + \\
&\qquad + a_{26}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s)} + \zeta\Big(a_{12}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-2)} + a_{22}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)} + a_{23}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-2)} \\
&\qquad + a_{24}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} + a_{25}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s-2)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-2)}\Big), \\
&U_{r,\zeta}^{(k,s)} = a_{13}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-1)} + a_{33}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s-1)} + a_{36}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-1)} \\
&U_{\theta,\zeta}^{(k,s)} + U_{r,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta U_{\theta,\zeta}^{(k,s-2)} - U_\theta^{(k,s-2)} = \\
&\quad = a_{14}^{(k)}\sigma_x^{(k,s)} + a_{24}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s)} + a_{34}^{(k)}\sigma_r^{(k,s)} + a_{44}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s)} + a_{45}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s)} + a_{46}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s)} + \\
&+\zeta\Big(a_{14}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-3)} + a_{24}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-3)} + a_{34}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-3)} + \\
&\qquad + a_{44}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-3)} + a_{45}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s-3)} + a_{46}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-3)}\Big),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$U_{x,\zeta}^{(k,s)} + U_{r,\xi}^{(k,s-1)} = a_{15}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-1)} + $$
$$+ a_{45}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-1)} + a_{55}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s-1)} + a_{56}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-1)},$$
$$U_{\theta,\xi}^{(k,s)} + U_{x,\varphi}^{(k,s)} + \zeta U_{\theta,\xi}^{(k,s-2)} = a_{16}^{(k)}\sigma_x^{(k,s)} + a_{26}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s)} + a_{36}^{(k)}\sigma_r^{(k,s)} + a_{46}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s)} +$$
$$+ a_{56}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s)} + a_{66}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s)} + \zeta\Big(a_{16}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-2)} + a_{26}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)} +$$
$$+ a_{36}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-2)} + a_{46}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} + a_{56}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s-2)} + a_{66}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-2)}\Big)$$

Интегрируя систему (1.6) по ζ, получим:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rx}^{(k,s)} = \sigma_{rx0}^{(k,s)} + \sigma_{rx}^{*(k,s)},\ (x,\theta),\ \sigma_r^{(k,s)} = \sigma_{r0}^{(k,s)} + \sigma_r^{*(k,s)},\\
&U_x^{(k,s)} = U_{x0}^{(k,s)} + U_x^{*(k,s)},\ (x,\theta,r),\\
&\sigma_{x\theta}^{(k,s)} = c_3^{(k)}\sigma_{r0}^{(k,s)} + c_4^{(k)}\sigma_{r\theta0}^{(k,s)} + c_5^{(k)}\sigma_{rx0}^{(k,s)} + \tau_{x\theta0}^{(k,s)} + \sigma_{x\theta1}^{*(k,s)},\\
&\sigma_x^{(k,s)} = a_3^{(k)}\sigma_{r0}^{(k,s)} + a_4^{(k)}\sigma_{r\theta0}^{(k,s)} + a_5^{(k)}\sigma_{rx0}^{(k,s)} + \tau_{x0}^{(k,s)} + \sigma_{x1}^{*(k,s)},\ (x,\theta;a,b;4,5),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$\begin{aligned}
&\tau_{x0}^{(k,s)} = B_{11}^{(k)}\varepsilon_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)}\varepsilon_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)}\omega^{(k,s)} \quad (x,\theta;1,2)\\
&\tau_{\theta x0}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)}\varepsilon_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)}\varepsilon_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)}\omega^{(k,s)}\\
&\varepsilon_1^{(k,s)} = U_{x0,\xi}^{(k,s)},\ \varepsilon_2^{(k,s)} = U_{\theta0,\varphi}^{(k,s)},\ \omega^{(k,s)} = U_{\theta0,\xi}^{(k,s)} + U_{x0,\varphi}^{(k,s)},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Коэффициенты $B_{ij}^{(k)}$, $a_i^{(k)}, b_i^{(k)}$, $c_i^{(k)}$ определяются по известным формулам [1,2,7], а величины со звездочками, входящие в формулы (1.7), как обычно, известны для каждого приближения s и определяются по формулам:

$$\sigma_r^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta \Big[\sigma_{r\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \sigma_{rx,\xi}^{(k,s-1)} + \sigma_r^{(k,s-2)} - \sigma_\theta^{(k,s-2)} + \zeta\Big(\sigma_{r,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{xr,\xi}^{(k,s-3)}\Big)\Big] d\zeta,$$

$$\sigma_{r\theta}^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta \Big[\sigma_{\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \sigma_{x\theta,\xi}^{(k,s-1)} + 2\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} + \zeta\Big(\sigma_{r\theta,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{x\theta,\xi}^{(k,s-3)}\Big)\Big] d\zeta,$$

$$\sigma_{rx}^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta \Big[\sigma_{x\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \sigma_{x,\xi}^{(k,s-1)} + \sigma_{xr}^{(k,s-2)} + \zeta\Big(\sigma_{rx,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{x,\xi}^{(k,s-3)}\Big)\Big] d\zeta,$$

$$U_\theta^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \Big[a_{14}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-1)} + a_{44}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)}\sigma_{xr}^{(k,s-1)} +$$
$$+ a_{46}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-1)} + U_\theta^{(k,s-2)} + \zeta\Big(a_{14}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-3)} + a_{24}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-3)} + a_{34}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-3)} +$$

$$+a_{44}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-3)}+a_{45}^{(k)}\sigma_{xr}^{(k,s-3)}+a_{46}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-3)}+U_{\theta,\zeta}^{(k,s-2)}\Big)-U_{r,\varphi}^{(k,s-1)}\Big]d\zeta,$$

$$U_r^{*(k,s)}=\int_0^\zeta\Big[a_{13}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{23}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-1)}+a_{33}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-1)}+$$

$$+a_{43}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-1)}+a_{35}^{(k)}\sigma_{xr}^{(k,s-1)}+a_{36}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-1)}\Big]d\zeta, \tag{1.9}$$

$$U_x^{*(k,s)}=\int_0^\zeta\Big[a_{15}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{25}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-1)}+a_{35}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-1)}+a_{45}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-1)}+$$

$$+a_{55}^{(k)}\sigma_{xr}^{(k,s-1)}+a_{56}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-1)}-U_{r,\xi}^{(k,s-1)}\Big]d\zeta,$$

$$\sigma_{x1}^{*(k,s)}=a_3^{(k)}\sigma_r^{*(k,s)}+a_4^{(k)}\sigma_{r\theta}^{*(k,s)}+a_5^{(k)}\sigma_{rx}^{*(k,s)}+\tau_x^{*(k,s)}+B_{12}U_r^{(k,s-1)}+$$

$$+\zeta B_{16}U_{\theta,\xi}^{(k,s-2)}+\zeta\Big(a_1'^{(k)}\sigma_x^{(k,s-2)}+a_2'^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)}+a_3'^{(k)}\sigma_r^{(k,s-2)}$$

$$+a_4'^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}+a_5'^{(k)}\sigma_{xr}^{(k,s-2)}+a_6'^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-2)}\Big),$$

$$\sigma_{\theta1}^{*(k,s)}=b_3^{(k)}\sigma_r^{*(k,s)}+b_4^{(k)}\sigma_{r\theta}^{*(k,s)}+b_5^{(k)}\sigma_{rx}^{*(k,s)}+\tau_\theta^{*(k,s)}+B_{22}U_r^{(k,s-1)}+$$

$$+\zeta B_{26}U_{\theta,\xi}^{(k,s-2)}+\zeta\Big(b_1'^{(k)}\sigma_x^{(k,s-2)}+b_2'^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)}+b_3'^{(k)}\sigma_r^{(k,s-2)}+$$

$$+b_4'^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}+b_5'^{(k)}\sigma_{xr}^{(k,s-2)}+b_6'^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-2)}\Big),$$

$$\sigma_{x\theta1}^{*(k,s)}=c_3^{(k)}\sigma_r^{*(k,s)}+c_4^{(k)}\sigma_{r\theta}^{*(k,s)}+c_5^{(k)}\sigma_{rx}^{*(k,s)}+\tau_{x\theta}^{*(k,s)}+B_{26}U_r^{(k,s-1)}+$$

$$+\zeta B_{66}U_{\theta,\xi}^{(k,s-2)}+\zeta\Big(c_1'^{(k)}\sigma_x^{(k,s-2)}+c_2'^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)}+c_3'^{(k)}\sigma_r^{(k,s-2)}+$$

$$+c_4'^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}+c_5'^{(k)}\sigma_{xr}^{(k,s-2)}+c_6'^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-2)}\Big),$$

$$\tau_x^{*(k,s)}=B_{11}^{(k)}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{12}^{(k)}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{16}^{(k)}\omega^{*(k,s)},\big(x,\theta;1,2\big),$$

$$\tau_{x\theta}^{*(k,s)}=B_{16}^{(k)}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{26}^{(k)}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{66}^{(k)}\omega^{*(k,s)},$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)}=U_{x,\xi}^{*(k,s)},\ \varepsilon_2^{*(k,s)}=U_{\theta,\varphi}^{*(k,s)},\ \omega^{*(k,s)}=U_{\theta,\xi}^{*(k,s)}+U_{x,\varphi}^{*(k,s)},\ \varepsilon_0^{(k,s)}=U_{\theta,\xi}^{(k,s)}$$

$$a_i'^{(k)}=-\Big(a_{2i}^{(k)}B_{12}^{(k)}+a_{4i}^{(k)}B_{16}^{(k)}\Big),\ b_i'^{(k)}=-\Big(a_{2i}^{(k)}B_{22}^{(k)}+a_{4i}^{(k)}B_{26}^{(k)}\Big),$$

$$c_i'^{(k)}=-\Big(a_{2i}^{(k)}B_{26}^{(k)}+a_{4i}^{(k)}B_{66}^{(k)}\Big),\ \big(i=1,2,...,6\big).$$

Предполагается, что $Q^{(s-i)}\equiv 0$, если $s<i$.

Неизвестные функции интегрирования $\tau_{rx0}^{(k,s)},\tau_{r\theta0}^{(k,s)},\tau_{r0}^{(k,s)},U_{x0}^{(k,s)},U_{\theta0}^{(k,s)},\ U_{r0}^{(k,s)}$ определяются из условий (1.1) и (1.2).

Удовлетворив условиям полного контакта слоёв (1.2), получим:

$$\tau_{rx0}^{(1,s)}=\tau_{rx0}^{(2,s)},\tau_{r\theta0}^{(1,s)}=\tau_{r\theta0}^{(2,s)},\tau_{r0}^{(1,s)}=\tau_{r0}^{(2,s)},$$
$$U_{x0}^{(1,s)}=U_{x0}^{(2,s)},U_{\theta0}^{(1,s)}=U_{\theta0}^{(2,s)},U_{r0}^{(1,s)}=U_{r0}^{(2,s)}. \tag{1.10}$$

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования:

$$\sigma_{rx0}^{(2,s)}=\sigma_{rx}^{-(s)}-\sigma_{rx}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2),(x,\theta),\ \sigma_{r0}^{(1,s)}=\sigma_{r}^{+(s)}-\sigma_{r}^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1),$$
$$U_{x0}^{(1,s)}=u_x^{+(s)}-U_x^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1),(x,\theta),\ U_{r0}^{(2,s)}=U_r^{-(s)}-U_r^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2). \tag{1.11}$$

Из (1.7), с учетом (1.11), получим окончательное решение поставленной задачи:

$$\sigma_r^{(k,s)}=\sigma_r^{+(s)}+\sigma_r^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)-\sigma_r^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1),$$
$$\sigma_{rx}^{(k,s)}=\sigma_{rx}^{-(s)}+\sigma_{rx}^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)-\sigma_{rx}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2),\ (x,\theta),$$
$$U_r^{(k,s)}=u_r^{-(s)}+U_r^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)-U_r^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2),$$
$$U_x^{(k,s)}=u_x^{+(s)}+U_x^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)-U_x^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1),(x,\theta), \tag{1.12}$$
$$\sigma_x^{(k,s)}=a_3^{(k)}\sigma_r^{+(s)}+a_4^{(k)}\sigma_{r\theta}^{-(s)}+a_5^{(k)}\sigma_{rx}^{-(s)}+$$
$$+B_{11}^{(k)}u_{x,\xi}^{+(s)}+B_{12}^{(k)}u_{\theta,\varphi}^{+(s)}+B_{16}^{(k)}\left(u_{\theta,\xi}^{+(s)}+u_{x,\varphi}^{+(s)}\right)+\sigma_x^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)$$
$$(x,\theta;a,b;a',b';1,2),$$
$$\sigma_{x\theta}^{(k,s)}=c_3^{(k)}\sigma_r^{+(s)}+c_4^{(k)}\sigma_{r\theta}^{-(s)}+c_5^{(k)}\sigma_{rx}^{-(s)}+$$
$$+B_{16}^{(k)}u_{x,\xi}^{+(s)}+B_{26}^{(k)}u_{\theta,\phi}^{+(s)}+B_{66}^{(k)}\left(u_{\theta,\xi}^{+(s)}+u_{x,\phi}^{+(s)}\right)+\sigma_{x\theta}^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)$$

где

$$\sigma_x^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)=\sigma_{x1}^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)-a_3^{(k)}\sigma_r^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)-a_4^{(k)}\sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)$$
$$-a_5^{(k)}\sigma_{rx}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)-B_{11}^{(k)}U_{x,\xi}^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)-B_{12}^{(k)}U_{\theta,\varphi}^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)-$$
$$-B_{16}^{(k)}\left(U_{\theta,\xi}^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)+U_{x,\varphi}^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)\right),(x,\theta;a,b;a',b';1,2),$$
$$\sigma_{x\theta}^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)=\sigma_{x\theta1}^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)-c_3^{(k)}\sigma_r^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)-$$
$$-c_4^{(k)}\sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)-c_5^{(k)}\sigma_{rx}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)-B_{16}^{(k)}U_{x,\xi}^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)-$$
$$-B_{26}^{(k)}U_{\theta,\varphi}^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)-B_{66}^{(k)}\left(U_{\theta,\xi}^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)+U_{x,\varphi}^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)\right)$$

В формулах (1.11), (1.12) необходимо учитывать, что

$$\sigma_r^{+(0)}=\sigma_r^{+},\sigma_{rx}^{-(0)}=\sigma_{rx}^{-},\ \sigma_{r\theta}^{-(0)}=\sigma_{r\theta}^{-},\ u_x^{+(0)}=u_x^{+},\ u_\theta^{+(0)}=u_\theta^{+},\ u_r^{-(0)}=u_r^{-},$$
$$\sigma_r^{+(s)}=\sigma_{rx}^{-(s)}=\sigma_{r\theta}^{-(s)}=0,\ u_x^{+(s)}=u_\theta^{+(s)}=u_r^{-(s)}=0\ \text{ при }\ s>0$$

Выведенные выше формулы (1.7) – (1.12) носят итерационный характер и позволяют найти значения всех компонент тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной точностью. Таким образом, условия (1.1) – (1.2) оказались достаточными для определения всех искомых величин во внутренней задаче. Это решение, как правило, не будет удовлетворять торцевым условиям и условиям на краях цилиндрической оболочки. Для удовлетворения условиям на торцах $x = 0, L$ и на краях $\theta = 0, \Theta$ необходимо построить решения типа пограничного слоя вблизи этих торцов и краёв [3-6].

2. Примеры. В качестве иллюстрации рассмотрим частные примеры.

а) Пусть имеем анизотропную цилиндрическую оболочку, на внешней и внутренней поверхностях которой заданы следующие условия для напряжений и перемещений:

$$\sigma_r^+ = -q, u_x^+ = 0,\ u_\theta^+ = 0,\ \sigma_{rx}^- = 0,\ \sigma_{r\theta}^- = 0,\ \ u_r^- = 0. \tag{2.1}$$

Учитывая, что $Q_r^{*(k,0)} = 0$ и ограничившись нулевым приближением, с помощью рекуррентных формул (1.7) – (1.12) получим решение

$$\begin{gathered}\sigma_r^{(k)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}q, \sigma_x^{(k)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}a_3^{(1)}q, \sigma_\theta^{(k)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}b_3^{(1)}q, \sigma_{x\theta}^{(k)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}c_3^{(1)}q, \\ u_x^{(k)} = u_\theta^{(k)} = u_r^{(k)} = 0,\ \sigma_{rx}^{(k)} = \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0,\ \ k = 1,2.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Вычисляя все приближения до $s = 2$ включительно, получим решение внутренней задачи с точностью $O\left(\varepsilon^2\right)$:

$$\sigma_r^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}q - \sqrt{\frac{1}{Rh}}\left(b_3^{(1)} - 1\right)\left(r - R - h_1\right)q,\ \ \sigma_{rx}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}a_3^{(1)}q - \Bigg[& B_{12}^{(1)}\left(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}} + \\ & + B_{12}^{(1)}\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)}\right)\frac{h_2}{h} + a_3^{(1)}\left(b_3^{(1)} - 1\right)\frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + \\ & + \left(a_1'^{(1)}a_3^{(1)} + a_2'^{(1)}b_3^{(1)} + a_6'^{(1)}c_3^{(1)} + a_3'^{(1)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}}\Bigg]q,\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}b_3^{(1)}q - \Bigg[& B_{22}^{(1)}\left(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}} + \\ & + B_{22}^{(1)}\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)}\right)\frac{h_2}{h} + b_3^{(1)}\left(b_3^{(1)} - 1\right)\frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + \\ & + \left(b_1'^{(1)}a_3^{(1)} + b_2'^{(1)}b_3^{(1)} + b_6'^{(1)}c_3^{(1)} + b_3'^{(1)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}}\Bigg]q,\end{aligned}$$

$$\sigma_{x\theta}^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}} c_3^{(1)} q - \left[B_{26}^{(1)} \left(a_{13}^{(1)} a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)} b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)} c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)} \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} + \right.$$

$$+ B_{26}^{(1)} \left(a_{13}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) \frac{h_2}{h} + c_3^{(1)} \left(b_3^{(1)} - 1 \right) \frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} +$$

$$\left. + \left(c_1'^{(1)} a_3^{(1)} + c_2'^{(1)} b_3^{(1)} + c_6'^{(1)} c_3^{(1)} + c_3'^{(1)} \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} \right] q,$$

$$u_x^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}} \left(a_{15}^{(1)} a_3^{(1)} + a_{25}^{(1)} b_3^{(1)} + a_{56}^{(1)} c_3^{(1)} + a_{35}^{(1)} \right) \left(r - R - h_1 \right) q \, , \left(x, \theta; 4, 5 \right)$$

$$u_r^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}} \left[\left(a_{13}^{(1)} a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)} b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)} c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)} \right) \left(r - R \right) + \right.$$

$$\left. + \left(a_{13}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) h_2 \right] q \, ,$$

Для второго слоя имеем:

$$\sigma_r^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}} q - \sqrt{\frac{1}{Rh}} \left[\left(b_3^{(2)} - 1 \right) \left(r - R \right) - \left(b_3^{(1)} - 1 \right) h_1 \right] q, \quad \sigma_{rx}^{(2)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} = 0$$

$$\sigma_x^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}} a_3^{(2)} q - \left[B_{12}^{(2)} \left(a_{13}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) \frac{r-R+h_2}{\sqrt{Rh}} + \right.$$

$$+ a_3^{(2)} \left(b_3^{(2)} - 1 \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} - a_3^{(2)} \left(b_3^{(1)} - 1 \right) \frac{h_1}{\sqrt{Rh}} +$$

$$\left. + \left(a_1'^{(2)} a_3^{(2)} + a_2'^{(2)} b_3^{(2)} + a_6'^{(2)} c_3^{(2)} + a_3'^{(2)} \right) \frac{r-R}{\sqrt{Rh}} \right] q,$$

$$\sigma_{\theta}^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}} b_3^{(2)} q - \left[B_{22}^{(2)} \left(a_{13}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) \frac{r - R + h_2}{\sqrt{Rh}} + \right.$$

$$+ b_3^{(2)} \left(b_3^{(2)} - 1 \right) \frac{r - R}{\sqrt{Rh}} - b_3^{(2)} \left(b_3^{(1)} - 1 \right) \frac{h_1}{\sqrt{Rh}} +$$

$$\left. + \left(b_1'^{(2)} a_3^{(2)} + b_2'^{(2)} b_3^{(2)} + b_6'^{(2)} c_3^{(2)} + b_3'^{(2)} \right) \frac{r - R}{\sqrt{Rh}} \right] q,$$

$$\sigma_{x\theta}^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}} c_3^{(2)} q - \left[B_{26}^{(2)} \left(a_{13}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) \frac{r - R + h_2}{\sqrt{Rh}} + \right.$$

$$+ c_3^{(2)} \left(b_3^{(2)} - 1 \right) \frac{r - R}{\sqrt{Rh}} - c_3^{(2)} \left(b_3^{(1)} - 1 \right) \frac{h_1}{\sqrt{Rh}} +$$

$$\left. + \left(c_1'^{(2)} a_3^{(2)} + c_2'^{(2)} b_3^{(2)} + c_6'^{(2)} c_3^{(2)} + c_3'^{(2)} \right) \frac{r - R}{\sqrt{Rh}} \right] q,$$

$$u_r^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}} \left(a_{13}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)} \right) \left(r - R + h_2 \right) q ,$$

$$u_x^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}} \left[\left(a_{15}^{(2)} a_3^{(2)} + a_{25}^{(2)} b_3^{(2)} + a_{56}^{(2)} c_3^{(2)} + a_{35}^{(2)} \right) \left(r - R \right) - \right.$$

$$\left. - \left(a_{15}^{(1)} a_3^{(1)} + a_{25}^{(1)} b_3^{(1)} + a_{56}^{(1)} c_3^{(1)} + a_{35}^{(1)} \right) h_1 \right] q, \left(x, \theta; 4, 5 \right).$$

Если материалы слоёв ортотропные, то полученные формулы намного упрощаются. В частности, $u_x^{(k)} = u_{\theta}^{(k)} = 0$.

б) Пусть имеем ортотропную цилиндрическую оболочку, на внешней и внутренней поверхностях которой заданы следующие условия:

$$\sigma_r^+ = 0, u_x^+ = 0,\ u_{\theta}^+ = 0,\ \sigma_{rx}^- = \tau_1,\ \sigma_{r\theta}^- = \tau_2,\ \ u_r^- = 0 . \tag{2.4}$$

Вычисляя все приближения до $s = 4$ включительно, получим решение внутренней задачи с точностью $O\left(\varepsilon^4\right)$:

$$\sigma_r^{(k)} = \sigma_x^{(k)} = \sigma_{\theta}^{(k)} = \sigma_{x\theta}^{(k)} = 0 , u_r^{(k)} = 0 ,$$

$$\sigma_{rx}^{(k)} = \sqrt{\frac{R}{h}} \tau_1 + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{1}{Rh}} \left(r - R + h_2 \right) \left(r - 2R \right) \tau_1 ,$$

$$\sigma_{r\theta}^{(k)} = \sqrt{\frac{R}{h}} \tau_2 + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{1}{Rh}} \left(r - R + h_2 \right) \left(3r - 5R + h_2 \right) \tau_2 , \tag{2.5}$$

$$u_x^{(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Rh}}a_{55}^{(1)}\left[2R\left(r-R-h_1\right)-\left(r-R+h_2\right)^2+\left(h_1+h_2\right)^2\right]\tau_1,$$

$$u_x^{(2)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Rh}}\left[a_{55}^{(2)}\left(2R\left(r-R\right)-\left(r-R+h_2\right)^2\right)-a_{55}^{(1)}\left(2h_1R-\left(h_1+h_2\right)^2\right)\right]\tau_1.$$

$$u_\theta^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{hR}}\,a_{44}^{(1)}\left(R-h_1-2h_2\right)\left(r-R-h_1\right)\tau_2,$$

$$u_\theta^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{Rh}}\left[a_{44}^{(2)}\left(R-2h_2\right)\left(r-R\right)-a_{44}^{(1)}\left(r-h_1-2h_2\right)h_1\right]\tau_2,$$

В заключение отметим, что решение типа пограничного слоя можно построить с помощью функций типа пограничного слоя [5-7,9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. M.: Nauka, 1987. 360p.(inRussian).
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.Ambartsumyan S.A. General Theory of Anisotropic Shells. M.: Nauka, 1987. 360p.(inRussian).
3. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.//ПММ. 1963. Т.27. Вып.4. С.593-608.Goldenveizer A.L. The construction of the approximate theory of shells by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory //J.Appl.Math.Mech. 1963.Vol.27.Issue 4.pp. 593-608 (in Russian).
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с. Goldenveiser A.L. Theory of elastik thin shells. M.: Nauka, 1976. 512p. (in Russian).
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с. Aghalovian L.A. Asimptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore-London. World Scientific Publ. 2015. 376p.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с. Aghalovian L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-volue problems of asymptotic layered beams, plates and shells. Yerevan. 2005. 468p. (in Russian).
7. Хачатрян Ш.М. О напряженных состояниях и их определяющих уравнениях цилиндрических оболочек с общей анизотропией// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1979. Т. 32. №3. С. 26-41. Khachatryan Sh.M. On stress states and the eguations to describe them for cylindrical shell of general anisotropy. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1979. Vol. 32. № 3. pp. 26-41 (in Russian).
8. ХачатрянА.М., Петросян Г.А. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной цилиндрической оболочки. Труды VI Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 01-06 октября, 2019. Дилижан, Армения. С.340-344. Khachatryan A.M., Petrosyan G.A. Asymptotic solution of one mixed boundary value problem anisotropic cylindrical shell. //Proceedings of VI International Conference «Topical Problems of Continiuum Mechanics».Dilijan, Armenia. October 01-6, 2019. pp. 340-344 (in Russian).

9. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009.Т.62. №4. С.65-72. Petrosyan G.A. Khachatryan A.M. Asimptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic plate. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2009. Vol. 62. № 4. pp. 65-72 (in Russian).

Сведения об авторах:
Хачатрян Александр Мовсесович, д.ф.м.н., проф., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Адрес: РА, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.
Тел.: (37499)21-19-49. **E-mail:** alexkhach49@yandex.ru

Петросян Гаянэ Альбертовна, к.ф.м.н., доцент кафедры математики АрГУ.
Адрес: Республика Арцах, г. Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5.
Тел.: (37497)23-83-10. **E-mail:** gayan-petrosian@mail.ru

Поступила в редакцию 8.05.2020.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №2, 2020 Механика
УДК 517. 934 Doi- http://doi.org/10.33018/73.2.6

HYBRID CONTROL OF A MOTION OF AN UNMANNED AERIAL VEHICLE, CARRYING AN INVERTED PENDULUM

Shahinyan A. S.

Keywords: Dynamical systems, hybrid control, optimal stabilization, quadcopter, inverted pendulum, phase trajectories, virtual modeling.

Шагинян А. С.

Гибридное управление движением беспилотного летательного аппарата, несущего перевернутый маятник

Ключевые слова: динамические системы, гибридное управление, оптимальная стабилизация, квадрокоптер перевернутый маятник, фазовые траектории, виртуальное моделирование.

Рассматривается проблема управления движением беспилотного летательного аппарата (БПЛА), несущего перевернутый маятник. Описана взаимосвязанная динамика беспилотного летательного аппарата и перевернутого маятника. Для решения, линеаризованной на основе виртуального моделирования системы математической задачи управления, применен новый: гибридный метод управления системой. Решена линеаризованная задача управления системой.
Управляющие воздействия на систему, а также фазовые траектории движения составляющих системы приведены в виде графиков функций.

Շահինյան Ա. Ս.

Շրջված ճոճանակ կրող անօդաչու թռչող սարքի շարժման հիբրիդային ղեկավարում

Հիմնաբառեր` դինամիկ համակարգեր, ղեկավարում, օպտիմալ ստաբիլացում, քառաթև ԱԹՍ, շրջված ճոճանակ, փուլային հետագծեր, վիրտուալ մոդելավորում:

Դիտարկվում է շրջված ճոճանակ կրող, քառաթև անօդաչու թռչող սարքի շարժման ղեկավարման խնդիրը: Նկարագրված է անօդաչու թռչող սարքի և ճոճանակի փոխկապակցված դինամիկան: Շարժման ընդհանուր հավասարումների գծային մոտավորության համար կիրառված է համակարգի շարժման ղեկավարման նոր` հիբրիդային եղանակ: Լուծված է համակարգի ղեկավարման խնդիրը: Ստացված են ղեկավարող ազդեցությունները և շարժման ֆազային հետագծերը: Կառուցված են դրանց գրաֆիկները:

The control problem of the movement of an unmanned aerial vehicle (UAV) carrying an inverted pendulum is considered. The interconnected dynamics of an unmanned aerial vehicle and an inverted pendulum are described.
To solve the control mathematical linearized problem on the basis of virtual modeling of the system, a new one was applied: a hybrid method of the system control.
The linearized system control problem is solved. The control actions on the system, as well as phase trajectories of the components of the system are given in the form of graphs of functions.

1. Introduction

Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) are, in general, flying vehicles which do not require a person onboard to be controlled. UAVs can be also considered as flying robots. The history of UAVs starts from 1880s when those robots were used mainly in military purposes. One of the first ways people used UAVs was as high-altitude photographers. However, these extremely simple flying drones were not popular until the times of first world war. Several years after drones acquired popularity they were applied in military missions like

elimination of unexploded bombs, assessment damaged buildings in an area, exploration of enemy forces, etc. [1].
Decades later when science and technology developed side by side UAVs also became more advanced and they are capable of completing much more complex missions not only in military forces but also for civilians. Nowadays applications of UAVs include missions like mapping, pollution and land monitoring, powerline inspection, fire detection, agriculture, and among other applications.
Among all UAVs, the quadrotors of most interest amongst scientists and researchers because of their structure simplicity, cheap price and extremely huge dynamic potential. A decent amount of papers are dedicated to dynamics and control of these kind of robots namely papers present control techniques like Proportional Differential (PD) control [2, 3], Proportional Integral Differential (PID) control [4, 5], control of position and orientation by vision [6], sliding mode control [1, 7], fuzzy logic [8, 9], and adaptive control in [10].
In [12] a UAV is considered with an inverted pendulum mounted on its body. The paper makes trajectory constraints on the UAV-Pendulum system and, hence derives a Linear Quadratic Regulator (LQR) controller to stabilize the system along the trajectory or the hover point. First, they make the system hover in a point and stabilize around that point and then they want the UAV to move around a point center in a circular trajectory
In this paper dynamics of a UAV is considered alongside with an inverted pendulum mounted on the UAV. The dynamics of the pendulum is presented with respect to the UAV and then both models are combined into one using some rules and theorems of the Theoretical Mechanics. After linearizing the model, a novel hybrid method of control is applied to the system to solve the control problem.
The hybrid model we applied is as follows. We first stabilize optimally the pendulum using the motion of the UAV as control inputs and then we use the optimal stabilizing control inputs to drive the UAV-Pendulum system to a desired position.
The results we gained i.e. the control inputs and state trajectories are shown in form of graphs which were generated from virtual simulations.

2. Modelling of the System
To derive the pure theoretical dynamics of a UAV let us fix a coordinate system $Oxyz$. Let O be the origin. We will also need another coordinate system $O_B x_B y_B z_B$ fixed in the center of mass O_B of the UAV (fig. 1). The torques and forces generated by each of the propellers are shown in the Figure 1. The propellers are numbered 1 to 4 [13].

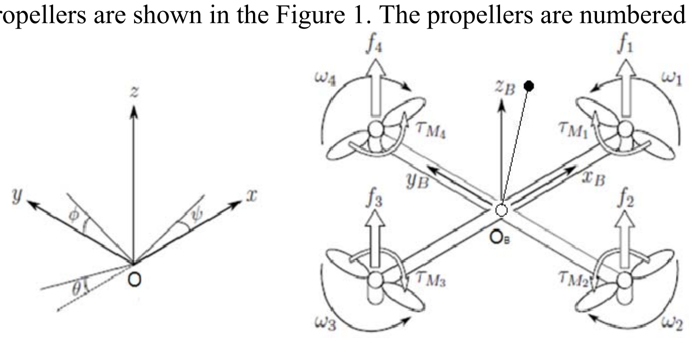


Figure 1.

Let $\xi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ be the coordinates of the center of mass of the UAV with respect to the system $Oxyz$. As mentioned above, the center of the mass of the UAV coincides with the origin of the coordinate system $O_B x_B y_B z_B$. Let us describe the inclined position of the UAV about the point O_B using yaw, pitch and roll angles. Let Φ be the pitch angle, Θ be the roll angle and, finally, let Ψ be the yaw angle. Then we will have two vectors describing the position of the UAV. Those are the following:

$$\xi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T, \ \eta = \begin{pmatrix} \Phi & \Theta & \Psi \end{pmatrix}^T \tag{1}$$

In the coordinate system the linear velocities $\bar{V}_B$ and the angular velocities $\bar{v}$ are the following

$$\bar{V}_B = \begin{pmatrix} V_{Bx} & V_{By} & V_{Bz} \end{pmatrix}^T, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^T \tag{2}$$

In this setup we will have the dynamics of the system as given below [13; 15].

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{T}{m} c_\Psi s_\Theta c_\Phi + \dfrac{T}{m} s_\Psi s_\Phi; \quad \ddot{y} = \dfrac{T}{m} s_\Psi s_\Theta c_\Phi - \dfrac{T}{m} c_\Psi s_\Phi; \quad \ddot{z} = -g + \dfrac{T}{M} c_\Theta c_\Phi; \\ \dot{\Phi} = p + \dfrac{s_\Phi s_\Theta}{c_\Theta} q + \dfrac{c_\Phi s_\Theta}{c_\Theta} r; \quad \dot{\Theta} = c_\Phi q - s_\Phi r; \quad \dot{\Psi} = \dfrac{s_\Phi}{c_\Theta} q + \dfrac{c_\Phi}{c_\Theta} r; \\ \dot{p} = \dfrac{\left(I_{yy} - I_{zz}\right) qr}{I_{xx}} - I_r \dfrac{q}{I_{xx}} \omega_\Gamma + \dfrac{\tau_\Phi}{I_{xx}}; \quad \dot{q} = \dfrac{\left(I_{zz} - I_{xx}\right) pr}{I_{yy}} - I_r \dfrac{p}{I_{yy}} \omega_\Gamma + \dfrac{\tau_\Theta}{I_{yy}}; \\ \dot{r} = \dfrac{\left(I_{xx} - I_{yy}\right) pq}{I_{zz}} - I_r \dfrac{q}{I_{zz}} \omega_\Gamma + \dfrac{\tau_\Psi}{I_{zz}}; \end{cases} \tag{3}$$

Where the following notations are used:

$C_\alpha := \cos\alpha$, $S_\alpha := \sin\alpha$, $M = m_{UAV} + m_P$

$$\tau_B = \begin{pmatrix} \tau_\Phi \\ \tau_\Theta \\ \tau_\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk\left(-\omega_2^2 + \omega_4^2\right) \\ lk\left(-\omega_1^2 + \omega_3^2\right) \\ \sum_i \tau_i \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$T = \sum_i F_i = \sum_i k\omega_i^2, \ \vec{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & T \end{pmatrix}^T$$

As for the mathematical model of the pendulum we will consider its dynamics in the coordinate system $O_B x_B y_B z_B$.

So, the dynamics of the pendulum will be as shown below. [4]

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = \dfrac{1}{\left(L^2 - y_p^2\right)\zeta^2} \cdot \begin{pmatrix} -x_p^4 \ddot{x} - \left(L^2 - y_p^2\right)\ddot{x} - 2x_p^2\left(y_p \dot{x}_p \dot{y}_p - \left(L^2 - y_p^2\right)\ddot{x}\right) \\ +x_p^3\left(\dot{y}_p^2 + y_p \ddot{y}_p - \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right) \end{pmatrix} \\ +x_p\left(-L^2 y_p \ddot{y}_p + y_p^3 \ddot{y}_p + y_p^2\left(\dot{x}_p^2 - \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right) + L^2\left(-\dot{x}_p^2 - \dot{y}_p^2 + \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right)\right)\Big) \\ \ddot{y}_p = \dfrac{1}{\left(L^2 - x_p^2\right)\zeta^2} \cdot \begin{pmatrix} -y_p^4 \ddot{y} - \left(L^2 - x_p^2\right)\ddot{y} - 2y_p^2\left(x_p \dot{x}_p \dot{y}_p - \left(L^2 - x_p^2\right)\ddot{y}\right) \\ +y_p^3\left(\dot{x}_p^2 + x_p \ddot{x}_p - \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right) \end{pmatrix} \\ +y_p\left(-L^2 x_p \ddot{x}_p + x_p^3 \ddot{x}_p + x_p^2\left(\dot{y}_p^2 - \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right) + L^2\left(-\dot{x}_p^2 - \dot{y}_p^2 + \zeta\left(g + \ddot{z}\right)\right)\right)\Big) \end{cases} \tag{5}$$

Using the formula of center of mass of a system

$$\overline{X}_C = \frac{m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

where $\overline{r}_1 = \overline{\xi} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ and $\overline{r}_2 = \overline{r}_p = \begin{pmatrix} x_p & y_p & z_p \end{pmatrix}^T$, we can find the coordinates of center of mass of our UAV-Pendulum system in the coordinate system $Oxyz$. Let $m_1 = m_2 = 1$, then we will have

$$\left\{ x_c = x + \frac{1}{2}x_p;\ y_c = y + \frac{1}{2}y_p;\ z_c = z + x + \frac{1}{2}\sqrt{l_p^2 + x_p^2 + y_p^2} \right.$$

To get the state space model of the UAV-Pendulum system we introduce the notations as shown below

$$\begin{cases} x_1 = x_c; & x_2 = \dot{x}_c; & x_3 = y_c; & x_4 = \dot{y}_c; \\ x_5 = z_c; & x_6 = \dot{z}_c; & x_7 = \Phi; & x_8 = \Theta; \\ x_9 = \Psi; & x_{10} = p; & x_{11} = q; & x_{12} = r; \\ x_{13} = x_p; & x_{14} = \dot{x}_p; & x_{15} = y_p; & x_{16} = \dot{y}_p; \end{cases} \tag{6}$$

We linearize the dynamics around the origin of the fixed coordinate system. So, we finally get.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; & \dot{x}_2 = \dfrac{g}{2l_p}x_{13}; & \dot{x}_3 = x_4; & \dot{x}_4 = \dfrac{g}{2l_p}x_{15}; \\ \dot{x}_5 = x_6; & \dot{x}_6 = u_1; & \dot{x}_7 = x_{10}; & \dot{x}_8 = x_{11}; \\ \dot{x}_9 = x_{12}; & \dot{x}_{10} = \dfrac{u_2}{I_{xx}} - \dfrac{g}{I_{xx}}x_{15}; & \dot{x}_{11} = \dfrac{u_3}{I_{yy}} - \dfrac{g}{I_{yy}}x_{13}; & \dot{x}_{12} = \dfrac{u_4}{I_{zz}}; \\ x_{13} = x_{14}; & x_{14} = -gx_8 + \dfrac{g}{l_p}x_{13}; & x_{15} = x_{16}; & x_{16} = gx_7 + \dfrac{g}{l_p}x_{15}. \end{cases} \tag{7}$$

where $u_1 = \frac{T}{M} - g$, $u_2 = \tau_\Phi$, $u_3 = \tau_\Theta$, $u_4 = \tau_\Psi$.

Using Kalman's rule one can check that the system (7) is fully controllable. So, now we are in a point where we can define the problem and we can go ahead to show the way we solved it.

3. Problem Definition:

Given the system (7), the initial position of the system $x_i(0) = x_{i,0}$, $i = \overline{1,16}$ and the final position $x_i(t_1) = x_{i,1}$, $i = \overline{1,16}$, find control inputs u_i, $i = \overline{1,4}$ such that it drives the system from the given initial position to the given final.

As one can notice this control problem is not an optimal control problem.

Problem Solution.

Our approach to the problem solution was the following. First, we ensure that the pendulum remains where it should be. We do this by applying optimal control input stabilizers inside the coordinate system $O_B x_B y_B z_B$. And after we know that the pendulum will remain inverted (will not drop) we proceed to the control problem. Let us now define a subproblem of optimal stabilization for the subsystem

$$\begin{cases} x_{13} = x_{14};\ x_{14} = -gu_5 + \dfrac{g}{l_p} x_{13};\ x_{15} = x_{16};\ x_{16} = gu_6 + \dfrac{g}{l_p} x_{15} \end{cases} \tag{8}$$

Note that here we use the notation

$$\{ x_8 = u_5;\ x_7 = u_6 \tag{9}$$

Now the subproblem will be the defined as follows.

4. Problem Definition: Given the system (8), the initial position of the system $x_i(0) = x_{i,0}$, $i = \overline{13,16}$, find control inputs $u^0 = \begin{pmatrix} u_5^0 & u_6^0 \end{pmatrix}^T$ such that it drives the system from the given initial position to asymptotically stable position while minimizing the linear quadratic regulator

$$J[\bullet] = \int_0^\infty \left(x_{14}^2 + x_{16}^2 + u_5^2 + u_6^2 \right) d\tau$$

Solution: Notice that the system (8) can be divided into two subsystems which are

$$\begin{cases} x_{13} = x_{14};\ x_{14} = \dfrac{g}{l_p} x_{13} - gu_5 \end{cases} \tag{8.1}$$

$$\begin{cases} x_{15} = x_{16};\ x_{16} = \dfrac{g}{l_p} x_{15} + gu_6 \end{cases} \tag{8.2}$$

We will show the solution steps for one of the systems (say (8.1)) as both of them are solved absolutely identically.

We choose to solve the optimal stabilization problem by using Lyapunov-Bellman method. In general, the method says that the optimal control input u^0 has to satisfy the optimization equation as given below

$$\min_u \left(\nabla V(x)(Ax + Bu) + \left(x^T Q x + u^T R u \right) \right) = 0 \tag{10}$$

Where

$$\mathfrak{B}[\bullet] = \nabla V(x)(Ax + Bu) + \left(x^T Q x + u^T R u \right) \tag{11}$$

(11) is Bellman's expression for the linear time-invariant control systems. So, in our case for the system (8.1) we will have

$$\mathfrak{B}\ [\bullet] = \frac{\partial V}{\partial x_{13}} x_{14} + \frac{\partial V}{\partial x_{14}} \left(\frac{g}{l_p} x_{13} - gu_5 \right) + x_{14}^2 + u_5^2 \tag{12}$$

It is obvious that the value of u_5^0 which optimizes (10) is the extremum of (12). Thus, we will have

$$u_5^0 = \frac{g}{2} \frac{\partial V}{\partial x_{14}} \tag{13}$$

By substituting (13) back into (12) we get the following.

$$\frac{\partial V}{\partial x_{13}} x_{14} + \frac{g}{l_p} x_{13} \frac{\partial V}{\partial x_{14}} - \frac{g^2}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{14}} \right)^2 + x_{14}^2 = 0 \tag{14}$$

Here $V = V(x_{13}, x_{14})$ is the Lyapunov function for the system (8.1) and we search for it in the form

$$V = \frac{1}{2}\left(c_{11}x_{13}^2 + 2c_{12}x_{13}x_{14} + c_{22}x_{14}^2\right) \tag{15}$$

Putting (15) into (14) we get a algebraic equation which have the form

$$\left(c_{11}x_{13} + c_{12}x_{14}\right)x_{14} + \frac{g}{l_p}\left(c_{12}x_{13} + c_{22}x_{14}\right)x_{13} - \frac{g^2}{4}\left(c_{12}x_{13} + c_{22}x_{14}\right)^2 + x_{14}^2 = 0 \tag{16}$$

From (16) the following system of equations will follow

$$\begin{cases} \dfrac{g}{l_p}c_{12} - \dfrac{g^2}{4}c_{12}^2 = 0 \\ c_{12} - \dfrac{g^2}{4}c_{22}^2 + 1 = 0 \\ c_{11} + \dfrac{g}{l_p}c_{22} - \dfrac{g^2}{2}c_{12}c_{22} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_{11} = \dfrac{2}{l_p}\sqrt{\dfrac{gl_p + 4}{gl_p}} \\ c_{12} = \dfrac{4}{gl_p} \\ c_{22} = \dfrac{2}{g}\sqrt{\dfrac{gl_p + 4}{gl_p}} \end{cases} \tag{17}$$

Here the shown solutions are the ones which make $V = V\left(x_{13}, x_{14}\right)$ positive definite. Finally, to get $u_5^0 = u_5^0\left(x_{13}, x_{14}\right)$ we put (17) into (15) and put what we get into (13). That gives us

$$u_5^0 = \frac{2}{l_p}x_{13} + \sqrt{\frac{gl_p + 4}{gl_p}}x_{14} \tag{18}$$

To obtain $u_5^0 = u_5^0\left(t\right)$ we simply need to substitute (18) into (8.1) and integrate the system. We will get

$$\begin{aligned} u_5^0 = {} & \sqrt{\frac{gl_p + 4}{gl_p}}\,\frac{\left(e^{\frac{t\left(-gl_p - gl_p\sqrt{\frac{gl_p+4}{gl_p}}\right)}{2l}} - e^{\frac{t\left(gl_p - gl_p\sqrt{\frac{gl_p+4}{gl_p}}\right)}{2l_p}}\right)}{2l_p} - \\ & -\sqrt{\frac{gl_p + 4}{gl_p}}\,\frac{\left(e^{\frac{t\left(-gl_p - gl_p\sqrt{\frac{gl_p+4}{gl_p}}\right)}{2l_p}} - e^{\frac{t\left(gl_p - gl_p\sqrt{\frac{gl_p+4}{gl_p}}\right)}{2l_p}}\right)}{2l_p} - \frac{e^{\frac{t\left(-gl_p - gl_p\sqrt{\frac{gl_p+4}{gl_p}}\right)}{2l_p}} + e^{\frac{t\left(gl_p - gl_p\sqrt{\frac{gl_p+4}{gl_p}}\right)}{2l_p}}}{2l_p} \end{aligned} \tag{19}$$

Taking the exact same steps for the system (8.2) we will get $u_6^0 = u_6^0\left(t\right)$ which will be

$$\begin{aligned} u_6^0 = {} & -\frac{\left(e^{\frac{t\left(-gl - gl\sqrt{\frac{gl+4}{gl}}\right)}{2l}} - e^{\frac{t\left(gl - gl\sqrt{\frac{gl+4}{gl}}\right)}{2l}}\right)}{l^2} \\ & +\frac{1}{4}\sqrt{\frac{gl+4}{gl}}\left(\sqrt{\frac{gl+4}{gl}}e^{\frac{t\left(-gl - gl\sqrt{\frac{gl+4}{gl}}\right)}{2l}} - \sqrt{\frac{gl+4}{gl}}e^{\frac{t\left(gl - gl\sqrt{\frac{gl+4}{gl}}\right)}{2l}} - e^{\frac{t\left(-gl - gl\sqrt{\frac{gl+4}{gl}}\right)}{2l}} - e^{\frac{t\left(gl - gl\sqrt{\frac{gl+4}{gl}}\right)}{2l}}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

5. Back to Core Problem.

Now, that we have the solution for the subproblem, we can proceed to our main problem. Recall that the control inputs in the sub problem which are $u_5^0 = u_5^0\left(t\right)$ and $u_6^0 = u_6^0\left(t\right)$ are actually x_7 and x_8 in the system (7). In that case one can notice that two subsystems of (7) can be simply integrated. Those subsystems are the following.

$$\left\{ \dot{x}_1 = x_2;\ \dot{x}_2 = \frac{g}{2l_p} x_{13};\ \dot{x}_8 = x_{11};\ \dot{x}_{11} = \frac{u_3}{I_{yy}} - \frac{g}{I_{yy}} x_{13} \right. \tag{7.1}$$

$$\left\{ \dot{x}_3 = x_4;\ \dot{x}_4 = \frac{g}{2l_p} x_{15};\ \dot{x}_7 = x_{10};\ \dot{x}_{10} = \frac{u_2}{I_{xx}} - \frac{g}{I_{xx}} x_{15} \right. \tag{7.2}$$

As we already have $x_7 = x_7(t)$ and $x_8 = x_8(t)$ we can simply derive $x_{11} = x_{11}(t)$ from system (7.1) and $x_{10} = x_{10}(t)$ from system (7.2). As for $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, we will obtain by integrating $\dot{x}_2 = \frac{g}{2l_p} x_{13}$ and $\dot{x}_4 = \frac{g}{2l_p} x_{15}$ under the consideration of desired edge conditions. As a result, we will have the desired state trajectories of the UAV and the control inputs $u_2 = u_2(t)$ and $u_3 = u_3(t)$ which will drive the system through the desired trajectories. Of course, those control inputs are not optimal because of the absence of constraint.

The remaining two subsystems of (7) which are

$$\left\{ \dot{x}_5 = x_6;\ \dot{x}_6 = u_1 \right. \tag{7.3}$$

$$\left\{ \dot{x}_9 = x_{12};\ \dot{x}_{12} = \frac{u_4}{I_{zz}} \right. \tag{7.4}$$

in this paper are not discussed. The reason is that these are independent of the dynamics of the pendulum in the linearized model of the system we have.

Another reason is that (7.3) and (7.4) are of no interest because of the simplicity of their solutions.

6. Simulating the Results.

We have chosen to check the theoretical result of this paper by simulating the motion of the UAV and recording state trajectories in form of graphs with time being the independent variable. For the simulation purposes the following values have been chosen for the parameters

$$g = 9.81\ m\,s^{-2}, \qquad l_p = 1\ m, \qquad I_{xx} = I_{yy} = 0.4856\ Kg\,m^2 \tag{21}$$

Finally, we are ready to present the graphs describing the motion of the quadcopter (shown below).

In the Figures 2÷5 the phase trajectories of quadrotor are shown, and in the Figure 10 and Figure 11 the phase trajectories of inverted pendulum are shown.

From the figures it follows that in this problem of controlling the movement of the system a quadrotor-inverted pendulum, the coordinates of the center of gravity of the quadrotor and the coordinates of the inverted pendulum increase (Figure 2 and Figure 4, Figure 10 and Figure 11) and the phase velocities of the center of gravity of the quadrotor are stabilized (Figure 3 and Figure 5).

In the Figure 6 and Figure 7 the control inputs $u_2(t)$ and $u_3(t)$ are given, that bring the system from a given initial position to a given final position. In the Figure 8 and Figure 9 the control inputs $u_5^0(t)$ and $u_6^0(t)$ are given, that bring the system from a given initial position to an asymptotically stable position while minimizing the linear quadratic controller.

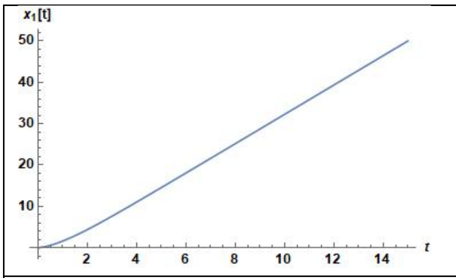


Figure 2. The trajectory of $x_1(t)$

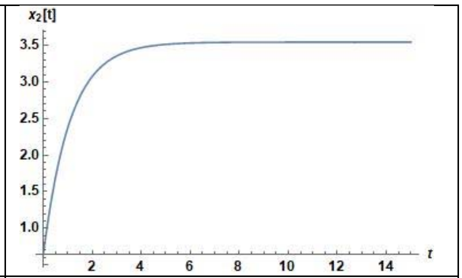


Figure 3. The trajectory of $x_2(t)$

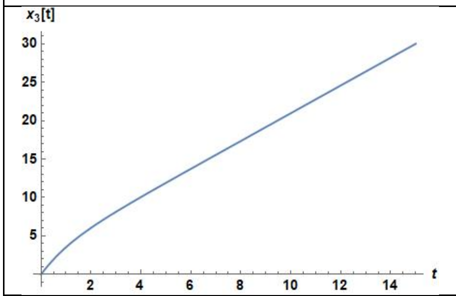


Figure 4. The trajectory of $x_3(t)$

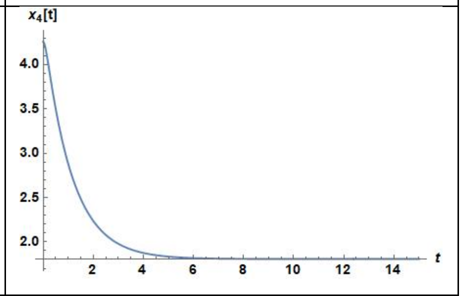


Figure 5. The trajectory of $x_4(t)$

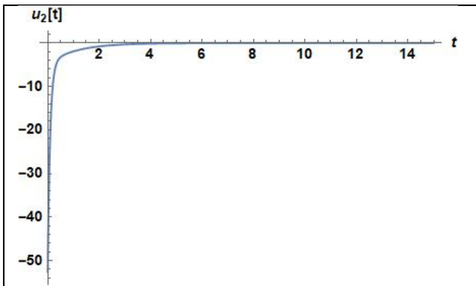


Figure 6. The graph of $u_2(t)$

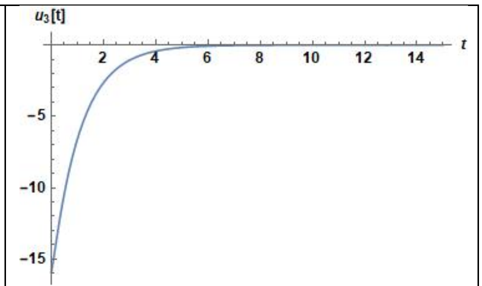


Figure 7. The graph of $u_3(t)$

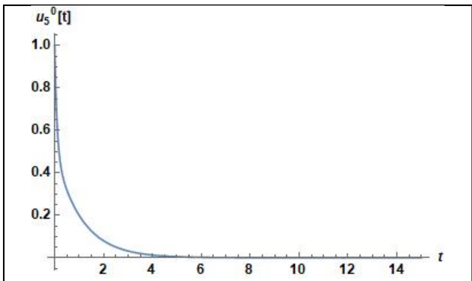


Figure 8. The graph of $u_5^0(t)$

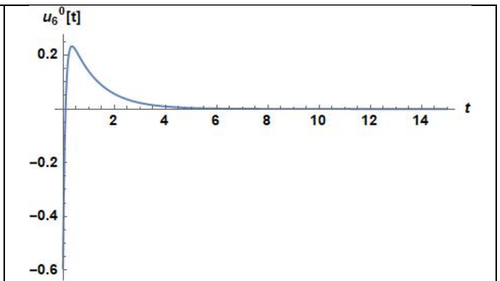


Figure 9. The graph of $u_6^0(t)$

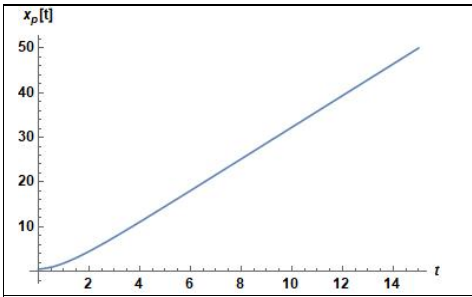


Figure 10. Trajectory of pendulum along x -axis on the coordinate system $Oxyz$

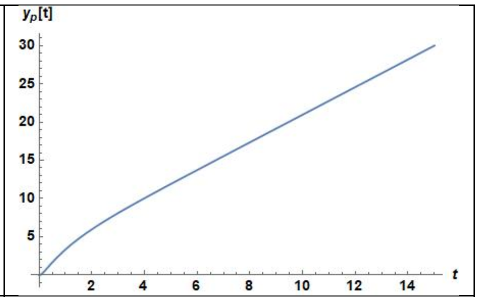


Figure 11. Trajectory of pendulum along y -axis on the coordinate system $Oxyz$

Obviously, the control inputs control inputs $u_2(t)$, $u_3(t)$ and $u_5^0(t)$, quickly converge to zero. The control input $u_6^0(t)$ also quickly converges to zero, but after impulsive increase.
Figure 12 and Figure 13 show that how different the real trajectory of the UAV and optimal trajectory of a Pendulum-Free UAV in 3D space.

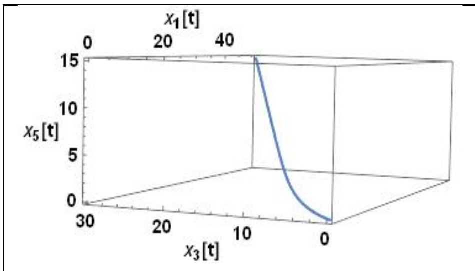


Figure 12. The real Trajectory of the UAV in 3D Space

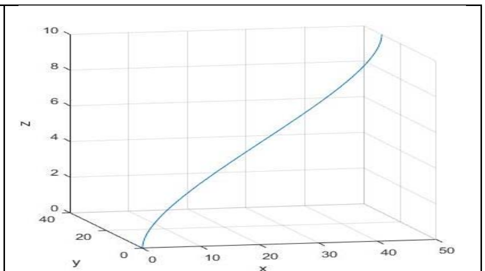


Figure 13. The optimal trajectory of a Pendulum-Free UAV in 3D space

To compare this result with the case when there is no pendulum mounted on top of the UAV we will present the optimal trajectory of a free-of-pendulum UAV which is driven from the same initial point to the same final position.

Conclusion

The dynamics of the pendulum is presented with respect to the UAV and then both models are combined into one. The model is then linearized and the control problem is solved using proposed hybrid method, which means, we first stabilized optimally the pendulum using the motion of the UAV as control inputs and then we used the optimal stabilizing control inputs to drive the UAV-Pendulum system to a desired position. The results we gained are shown in form of graphs which were generated from virtual simulations.

REFERENCES

1. Ramiro Ibarra Pérez, Gerardo Romero Galvan, Aldo Jonathan Muñoz Vázquez, Silvia Florida Melo and David Lara Alabazares: Attitude Control of a Quadcopter Using Adaptive Control Technique: December 20th 2017 DOI: 10.5772/intechopen.71382.
2. Austin R. Unmanned Aircraft Systems: UAVS Design, Development and Deployment. John Wiley & Sons. United Kingdom; 2010. p. 372 DOI: 10.1002/9780470664797

3. Jeong S et al. Position Control of a Quad-Rotor System. In: Kim J-H, Matson ET, Myung H, Xu P, editors. Robot Intelligence Technology and Applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag; 2013; 2012. p. 971-981. DOI: doi.org/10.1007/978-3-642-37374-9_94.
4. Bouabdallah S, editor. Design and control of quadrotor with application to autonomous flying [dissertation]. École Polytechnique Fédérale de Lausanne; 2007.
5. Jithu G, Jayasree PR. Quadrotor modelling and control. International Conference on Electrical, Electronics, and Optimization Techniques (ICEEOT)—2016.
6. Jun L, Yuntang Li. Dynamic analysis and PID control for a quadrotor. In: Proceedings of the 2011 IEEE. 2011.
7. Changlong L, Jian P, Chang Y. PID and LQR trajectory tracking control for an unmanned quadrotor helicopter: Experimental studies. In: Proceedings of the 35th Chinese Control Conference. 2016; DOI: 10.1109/ChiCC.2016.7555074.
8. Salazar S, Romero H, et al. Real-time stereo visual serving control of an UAV having eight rotors, In: 6th International Conference on Electrical engineering, computing science and automatic control, CCE 2009. DOI: 10.1109/ICEEE.2009.5393423.
9. Bouabdallah S, Siegwart R. Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. In: Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2005. DOI: 10.1109/ROBOT.2005.1570447.
10. Abeywardena DMW, Amaratunga LAK, Shakoor SAA, Munasinghe SR. A velocity feedback fuzzy logic controller for stable hovering of a quadrotor UAV. In: International ConfDerence on Industrial and Information Systems (ICIIS), 2009. DOI: 10.1109/ICIINFS.2009.5429800.
11. Theerasak S, Pined L, Wonlop C, et al. Path tracking of UAV using self-tuning PID controller based on fuzzy logic, In: Proceedings of SICE Annual Conference 2010.
12. Hehn, Markus & D'Andrea, Raffaello. (2011). A flying inverted pendulum. Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation. 763-770. 10.1109/ICRA.2011.5980244.
13. Luukkonen T., Modelling and Control of Quadcopter. School of Science, Mat-2.4108, Independent Research project in applied mathematics, Espoo, August 22, 2011, 26 p.
14. Shahinyan A.S., An Optimal Control Problem with Energy Constraint for an Unmanned Aerial Vehicle, IX international conference The Problems of Interaction of Deformable Media, Dedicated to the 75th anniversary of NAS RA, October 1-6, 2018, Goris
15. Buchholz, N.N., The Main Course of Theoretical Mechanics, M.: the Science, h. 2, 1972, 332p. [in Russian].

Сведение об авторе

Шагинян Арман Смбатович – аспирант кафедры механики,

Ереванский государственный университет, факультет математики и механики,
(374 55) 66-37-41 E-mail armanshah1995@gmail.com Received 11.03.2020

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 73, №2, 2020 Механика

СОДЕРЖАНИЕ №2, 2020 г., том 73

CONTENTS v. 73, №2, 2020

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ h.**73, №2, 2020**

Сдано в производство 18.06.2020 г.
Формат 70 x 100 $^1/_{16}$. Печ. лист – 5
Заказ № 1016. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24