

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵԴԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2020

высшей математики ЕГУ. С 1969-го года отдаёт предпочтение научной деятельности и переходит на работу в Институт механики НАН РА в качестве старшего научного сотрудника. В 1980 году в Казанском государственном университете защищает докторскую диссертацию и ему присуждается учёная степень доктора физико-математических наук. В 1987 г. Л.А.Агаловян избирается на должность директора Института механики НАН РА и, неоднократно переизбираясь, почти 20 лет работает на этом посту.

В 1996 году избирается действительным членом НАН РА.

С 2006 года по сей день Л.А.Агаловян является советником директора Института механики НАН РА и заведует отделом «Механика тонкостенных систем», с 2016 года – Академик-секретарём Отделения математических и технических наук НАН РА. Л.А.Агаловян является членом Президиума НАН РА (2000-2006гг., с 2011г.).

Круг научных интересов Л.А.Агаловяна достаточно широк и охватывает теорию анизотропных пластин и оболочек, смешанные краевые задачи теории упругости и вязкоупругости, неклассические статические и динамические краевые задачи тонких тел, проблемы сейсмологии и сейсмостойкого строительства, обоснование прикладных моделей оснований и фундаментов, волновые процессы, распространение волн в слоистых средах и др.

Всеобщее признание получили работы Л.А.Агаловяна, в которых, на основе уравнений трёхмерной теории упругости, впервые была построена асимптотическая теория анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Эта теория положила начало широкомасштабным исследованиям напряжённо-деформированного состояния тонкостенных конструкций, находящихся в стеснённых, с лицевых сторон, условиях. Такие задачи часто встречаются на практике, однако, в силу явного несоответствия гипотезам Кирхгоффа-Лява, не могут быть решены в рамках классической теории пластин и оболочек. Построенная теория позволяет чётко выделить рамки применимости как классической, так и уточнённых теорий пластин и оболочек, построенных на основе гипотез, а также широко используемых для расчёта упругих оснований-фундаментов моделей Винклера-Фукса, Пастернака, Клейна, вычислить коэффициенты постели для слоистых и неоднородных оснований.

Л.А.Агаловян является одним из первоисследователей задач погранслоя для балок, пластин и оболочек. Полученное математически точное решение для погранслоя прямоугольника позволило ему установить связь между погранслоем и принципом Сен-Венана, доказать справедливость этого принципа в случае первой краевой задачи теории упругости и объяснить неприменимость его ко второй и смешанной граничным задачам.

Показана эффективность асимптотического метода при решении динамических задач для анизотропных и слоистых тел. Найдены частоты собственных колебаний слоистых пакетов в виде полос и пластин, содержащих сжимаемые и несжимаемые, а также вязкоупругие слои.

Намечены пути использования этих результатов в сейсмостойком строительстве, в частности, показано, что при надлежащем выборе параметров основания можно максимально разнести частоты собственных колебаний и сейсмических волн и, тем самым, снизить риск разрушения сооружения при землетрясении.

Основные научные достижения Л.А.Агаловяна обобщены в трёх объёмных монографиях (Л.А.Агаловян «Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек». М.: Наука, 1997. 415с., Л.А.Агаловян, Р.С.Геворгян «Неклассические краевые задачи анизотропных балок, пластин и оболочек». Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. и Aghalovyan L.A. «Asymptotic theory of anisotropic plates and shells». Singapore-London. World Scientific Publ. 2015. 376p.) и многочисленных научных статьях. Он – автор свыше 200 научных работ.

Велика заслуга Л.А.Агаловяна и в деле подготовки высококвалифицированных научных кадров. Под его руководством 15 человек защитили кандидатские диссертации, трое из них защитили и докторские диссертации.

Научные заслуги Л.А.Агаловяна признаны мировой научной общественностью. Он является членом European Mechanics Society (EUROMECH), European Association for the Control of Structures, Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, Президиума НАН РА, редколлегии журнала «Известия НАН РА, Механика», международных редакционных советов журналов «Прикладная механика» (Украина), «Механика композитных материалов» (Латвия), редколлегии журнала «Ученые Записки АрГУ» (Республика Арцах), Председатель Специализированного Совета по защитах докторских диссертаций по специальностям «Механика деформируемого твёрдого тела» и «Теоретическая механика» со дня его создания (1990 г.).

За большой вклад в развитие новых научных направлений в механике, решение актуальных проблем механики и прикладной математики, большую научно-организационную работу Л.А.Агаловян награждён грамотами НАН Армении «Говестагир» и «Вастакагир». В 1995 году Ассоциация армянских инженеров и учёных США присудила ему премию им. Виктора Амбарцумяна, в 2009 г. Американский биографический институт вручил Л.А.Агаловяну «Gold Medal For Armenia», а Международным биографическим центром признан одним из «Top 100 Scientists-2009».

Редакция журнала «Известия НАН Армении, Механика», поздравляет Ленсера Абгаровича Агаловяна с юбилеем и желают ему крепкого здоровья, долгих лет жизни, новых творческих успехов.

**PROPAGATION OF HYBRID ELECTROELASTIC WAVES IN
TRANSVERSALLY INHOMOGENEOUS PERIODIC PIEZOELECTRIC
STRUCTURE**

Avetisyan Ara S. , Khachatryan Vazgen M.

Keywords: electro-acoustic hybrid wave, periodic inhomogeneity, piezoelectric medium, wave signal, non-acoustic contact, resonant frequency.

Аветисян Ара С. , Хачатрян В.М.

Распространение гибридных электроупругих волн в периодически поперечно-неоднородной пьезоэлектрической структуре

Ключевые слова: электроакустическая гибридная волна, периодическая неоднородность, пьезоэлектрическая среда, волновой сигнал, не акустический контакт, резонансная частота.

В пьезоэлектрическом композиционном материале обнаружено существование новой гибридной волны, состоящей из сдвиговой электроакустической волны и электроакустической волны плоской деформации. Пьезоэлектрические слои изготовлены из разных материалов и находятся в неакустическом контакте. Доказано, что если один из материалов допускает раздельное возбуждение и распространение электроактивной волны чистого сдвига, а другой материал допускает раздельное возбуждение и распространение электроактивной волны дилатации, то в неоднородной структуре волновой сигнал приводит к распространению гибридной электроакустической волны. Исследованы распределения волновых мод компонент гибридной электроакустической волны, а также допустимые частоты его распространения.

Как частные случаи, также исследованы распространения электроакустического волнового сигнала в разных однородных пьезоэлектрических средах с системой бесконечных поперечных трещин.

Ավետիսյան Արա Ս., Խաչատրյան Վազգեն Մ.

Խաչատրյանի էլեկտրաառաձգական ալիքների տարածումը պարբերականորեն լայնական անհամասեռ այեգոէլեկտրական կառուցվածքում

Հիմնաբառեր. էլեկտրաձայնային խաչատրյան ալիք, պարբերական անհամասեռություն, այեգոէլեկտրական միջավայր, ալիքային ազդանշան, անհպում կապ, ռեզոնանսային հաճախականություն:

Հետազոտված է էլեկտրաառաձգական ալիքային ազդանշանի տարածումը պարբերականորեն անհամասեռ, շերտավոր այեգոէլեկտրական միջավայրում: Շերտերը տարբեր այեգոէլեկտրական նյութերից են, և գտնվում են անհպում կապի մեջ: Ապացուցված է, որ եթե նյութերից մեկը թույլ է տալիս էլեկտրականապես ակտիվ, մաքուր սահքի ալիքի առանձնացված գրգռում և տարածում, իսկ մյուսը թույլ է տալիս էլեկտրականապես ակտիվ մաքուր դիլատացիայի ալիքի առանձնացված գրգռում և տարածում, ապա էլեկտրաառաձգական ալիքային ազդանշանը պարբերականորեն անհամասեռ, շերտավոր այեգոէլեկտրական միջավայրում բերում է խաչատրյան ալիքի տարածման: Հետազոտված են խաչատրյան ալիքի բաղադրիչների բաշխումները շերտերի լայնությամբ, ինչպես նաև դրանց թույլատրելի հաճախականությունները:

Որպես մասնակի դեպքեր, ուսումնասիրված են նաև էլեկտրաձայնային ավիթային ազդանշանի տարածումը լայնական ճաքերի անվերջ համակարգով համասեռ պլեգոէլեկտրական տարբեր միջավայրերում:

In a piezoelectric composite material, existence of a new hybrid wave, which is consisting of shear electroacoustic wave and electroacoustic wave of plane deformation is revealed. In the composite, layers are made of different piezoelectric materials and they are in non-acoustic contact. It is proved that if one of the materials allows separate excitation and propagation of electroactive wave of pure shear, and the other material allows separate excitation and propagation of electroactive wave of dilatation, then the wave signal leads to the propagation of hybrid electro-acoustic wave in the heterogeneous structure. The distributions of the components of hybrid electro-acoustic wave modes, as well as the corresponding permissible frequencies are investigated. As special cases, the propagation of electro-acoustic wave signal in different homogeneous piezoelectric media, with a system of infinite transverse cracks is studied.

Introduction

Inhomogeneous composite waveguides of piezoelectric crystals are widely used in nowadays high-accuracy technologies as transformers, filters and resonators of electroacoustic wave signal. For the comprehensive review of perspectives, current state and future areas of development in analysis of wave processes in periodic structures, see **Hussein et al. [1]**. During the analysis of wave processes in periodic structures, the main attention is paid to the character of these structures as frequency filters or resonators of propagating waves.

Occurrence of frequency locking zones for one-directional wave in periodic elastic structure has been obtained in **Rayleigh [2]**. The analysis of the impedance role on existence of locking zones has been carried out in **Avetisyan & Ghazaryan [3, 4]**. It has been shown also that when the impedance of periodically inhomogeneous 1D structure is constant, then locking zones do not exist.

The Floquet-Lyapunov theory has been applied for analyzing elastic wave propagation in periodic structures in **Lee [5]** and **Lee & Yang [6]**. From mathematical point of view, the spectral theory of transversal vibrations of periodic elastic beams has been developed in **Papanicolaou [7, 8]**. The dispersion relations of SH-waves propagating in periodic piezoelectric layered composites has been derived and studied in **Qian et al [9]**. The spectrum of Floquet-Bloch type waves propagating in elastic periodic waveguides has been studied in **Adams et al. [10, 11]**. In mentioned papers, the wave-field is homogeneous and the character of normal wave propagating in the waveguide does not change.

The phenomenon of coupled (simultaneous) propagation of waves of heterogeneous elastic deformations can be applied in various areas of technical electronics and high-precision measuring equipment.

It is well-known that not in all anisotropic piezoelectric materials, electric vibrations that are accompanied by elastic deformations allow separate excitation and propagation of pure shear electroelastic wave or electroelastic wave of plane strain. The possibility of separate excitation and propagation of electroactive elastic fields in specific sagittal surfaces of anisotropy of piezoelectric crystals has been studied in **Avetisyan [12]** without taking into account the hypotheses of

- i)* undeformed normal of the sagittal surface,
- ii)* absence of pressure of material surfaces onto each other,
- iii)* non-extensible material sagittal surface.

Problems of separate excitation and propagation of electroelastic plane or anti-plane stress-strain states in homogeneous piezoelectric crystals has been studied also in **Avetisyan**

[13]. Formulations of 2D electroacoustic problems in homogeneous piezoelectric crystals are considered taking into account the above hypotheses. Necessary and sufficient conditions for separate excitation and propagation of electroacoustic states of mentioned types in anisotropic piezoelectric media are obtained. Constitutive laws and the quasi-static equations of electro elasticity, for all piezoelectric materials in all three sagittal surfaces of corresponding crystal texture are also received.

The electroactive waves of anti-plane deformation, after their discovery by **Bluestein J. L.** [14], have been extensively investigated. A thousand works are known.

In contrast, electro-elastic waves of plane deformation in piezoelectric crystals (electro-acoustic waves of the Rayleigh type) have been studied relatively little by **Singh B. & Singh R.** [15], **Chaudhary S., Sahu S.A. & Singhal A.** [16], **Vashishth A.K. & Sukhija, H.**, [17] et al.

The problem of propagation of high frequency acoustic waves of plane strain (electro-acoustic Rayleigh waves) at different electric boundary conditions for mechanically free surface of a piezoelectric half-space are discussed in **Avetisyan & Mkrtchyan** [18]. The possibility of a new localization of wave's plane strain, under certain electrical conditions at a surface is shown. It is revealed that the presence of a concomitant electric field, the waves of plane strain result in both quantitative and qualitative changes of the characteristics of a localization of electro-acoustic Rayleigh waves.

In this paper, we suggest a simple scheme for analysis of propagation of 1D electroactive hybrid elastic waves in compound transversally inhomogeneous periodic piezoelectric medium.

1. Problem statement. Electro elasticity equations and main relations for transversally inhomogeneous periodic piezoelectric medium

Let us consider the propagation of electroelastic 1D normal waves in transversally inhomogeneous periodic piezoelectric medium referred to Cartesian coordinate system $Oxyz$ (see Figure 1). The medium consists of alternating infinite plates

$$\begin{aligned} \Omega_{1n}(x, y, z) &\triangleq \{x \in [n(a_1 + a_2); a_1 + n(a_1 + a_2)], y \in (-\infty; +\infty), z \in (-\infty; +\infty)\} \\ \Omega_{2n}(x, y, z) &\triangleq \{x \in [a_1 + n(a_1 + a_2); (n+1)(a_1 + a_2)], y \in (-\infty; +\infty), z \in (-\infty; +\infty)\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

made of piezoelectric crystals. Linear sizes of these plates towards Oy and Oz are much larger than the wavelength of the propagating high-frequency wave.

Above, $n \in \mathbb{N}^+$ is the number of the repeating cell of two sub-layers with section $\Omega_0(x, y) = \Omega_{20}(x, y) \cup \Omega_{10}(x, y)$ in xOy plane, where

$$\Omega_{10}(x, y) \triangleq \{x \in [0, a_1]; y \in (-\infty, +\infty)\}; \quad \Omega_{20}(x, y) \triangleq \{x \in [-a_2, 0]; y \in (-\infty, +\infty)\}. \quad (1.2)$$

For the sake of definiteness, we assume that in xOy plane, the material of layers with sections $\Omega_{1n}(x, y)$ allows separate excitation and propagation of electroactive elastic shear, while the material of layers with sections $\Omega_{2n}(x, y)$ allows separate excitation and propagation of electroactive plane stress-strain state.

It has been shown in [13] that there are 15 possible formulations of electroactive anti-plane states in distinct sagittal planes of piezoelectric crystals. It has also been shown therein that there are 10 possible formulations of electroactive generalized plane stress-strain state in distinct sagittal planes of piezoelectric crystals. Therefore, there are a large number of possible material pairs for preparation of the proposed inhomogeneous structure.

Without losing the generality of reasoning, we assume that the material of layers $\Omega_{1n}(x, y, z)$ allowing electroactive anti-plane stress-strain state is a piezoelectric of

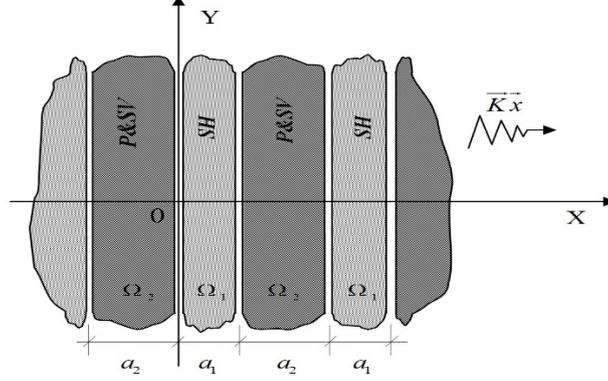


Figure 1. Transversally inhomogeneous periodic composite waveguide with non-acoustic contact between sub-layers

hexagonal symmetry class $6mm$ or is a piezoelectric of tetragonal symmetry class $4mm$. In these piezoelectrics, the anti-plane stress-strain state in x_1x_2 plane is possible when the axis of 6th order symmetry of hexagonal piezocrystal, \bar{p}_6 , or when the axis of 4th order symmetry of tetragonal piezocrystal, respectively, coincide with $0z$ axis. Then, the sagittal plane of piezoelectric crystals x_1x_2 coincides with coordinate plane x_1x_2 .

The non-zero components of mechanical stress tensor and of electric displacement vector in layer with section $\Omega_{10}(x, y) \triangleq \{x \in [0, a_1]; y \in (-\infty, +\infty)\}$ can be written as [13]

$$\sigma_{zx}^{(1)}(x, y, t) = c_{44}^{(1)}(\partial w_1 / \partial x) + e_{15}^{(1)}(\partial \phi_1 / \partial x); \quad \sigma_{xy}^{(1)}(x, y, t) = c_{44}^{(1)}(\partial w_1 / \partial y) + e_{15}^{(1)}(\partial \phi_1 / \partial y) \quad (1.3)$$

$$D_x^{(1)}(x, y, t) = e_{15}^{(1)}(\partial w_1 / \partial x) - \epsilon_{11}^{(1)}(\partial \phi_1 / \partial x); \quad D_y^{(1)}(x, y, t) = e_{15}^{(1)}(\partial w_1 / \partial y) - \epsilon_{11}^{(1)}(\partial \phi_1 / \partial y) \quad (1.4)$$

The quasi-static equations of electroactive anti-plane stress-strain state describing separate propagation of electroelastic waves of SH-type in current layer have the well-known form

$$\begin{aligned} \partial^2 w_1^{(1)} / \partial x^2 + \partial^2 w_1^{(1)} / \partial y^2 &= \tilde{C}_{1r}^{-2} \cdot \partial^2 w_1^{(1)} / \partial t^2 \\ \partial^2 \phi_1 / \partial x^2 + \partial^2 \phi_1 / \partial y^2 &= (e_{15}^{(1)} / \epsilon_{11}^{(1)}) \cdot [\partial^2 w_1^{(1)} / \partial x^2 + \partial^2 w_1^{(1)} / \partial y^2] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Coefficients $c_{44}^{(1)}$, $e_{15}^{(1)}$, $\epsilon_{11}^{(1)}$, ρ_1 and speed $\tilde{C}_{1r} = \sqrt{(c_{44}^{(1)} / \rho_1) [1 + (e_{15}^{(1)})^2 / (c_{44}^{(1)} \epsilon_{11}^{(1)})]}$ of SH-wave in (1.3)-(1.5) characterize the piezoelectric of the class $6mm$.

Without losing the generality of reasoning, we also assume that the material of $\Omega_{2n}(x, y, z)$ is a piezoelectric of hexagonal symmetry class $\bar{6}m2$. In piezocrystal of that class, the excitation of separate plane electroactive stress-strain state is possible both in sagittal plane x_3x_1 and in x_1x_2 . For the sake of clarity, here we consider the case when the electroactive plane stress-strain state is possible in sagittal plane x_3x_1 coinciding with x_1x_2 , and the inverse axis of 6th order symmetry of the hexagonal piezocrystal, \bar{p}_6 , is directed

along $0y$. Then, non-zero components of the mechanical stress tensor and of electric displacement vector in $x0y$ plane of layers $\Omega_{2n}(x, y, z)$ made of piezoelectric of $\bar{6}m2$ class of hexagonal symmetry are as follows [13]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(2)}(x, y, t) &= c_{11}^{(2)}(\partial u_2/\partial x) + c_{13}^{(2)}(\partial v_2/\partial y) + e_{11}^{(2)}(\partial \phi_2/\partial x), \\ \sigma_{yy}^{(2)}(x, y, t) &= c_{13}^{(2)}(\partial u_2/\partial x) + c_{33}^{(2)}(\partial v_2/\partial y),\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(2)}(x, y, t) &= c_{44}^{(2)}(\partial v_2/\partial x) + c_{44}^{(2)}(\partial u_2/\partial y) \\ D_x^{(2)}(x, y, t) &= e_{11}^{(2)}(\partial u_2/\partial x) - \varepsilon_{11}^{(2)}(\partial \phi_2/\partial x), \\ D_y^{(2)}(x, y, t) &= -\varepsilon_{33}^{(2)}(\partial \phi_2/\partial y).\end{aligned}\quad (1.7)$$

Taking into account the compatibility conditions of mechanical stress $\sigma_{zz}^{(2)}(x, y, t) \equiv 0$ and the third components of electric displacement vector $D_z^{(2)}(x, y, t) \equiv 0$ [13], the quasi-static equations of electroactive plane stress-strain state describing the separate excitation and propagation of P&SV-type waves have the following simplified form:

$$\begin{aligned}(c_{11}^{(2)} - c_{13}^{(2)}\mathfrak{G}_{12})(\partial^2 u_2/\partial x^2) + c_{44}^{(2)}(\partial^2 u_2/\partial y^2) - e_{11}^{(2)}(1 + \mathfrak{G}_{12})(\partial^2 \phi_2/\partial x^2) &= \rho_2(\partial^2 u_2/\partial t^2) \\ c_{44}^{(2)}(\partial^2 v_2/\partial x^2) + (c_{33}^{(2)} - c_{12}^{(2)}\mathfrak{G}_{13})(\partial^2 v_2/\partial y^2) - e_{11}^{(2)}\mathfrak{G}_{13}(\partial^2 \phi_2/\partial x \partial y) &= \rho_2(\partial^2 v_2/\partial t^2) \\ \varepsilon_{11}^{(2)}(\partial^2 \phi_2/\partial x^2) + \varepsilon_{33}^{(2)}(\partial^2 \phi_2/\partial y^2) - e_{11}^{(2)}(\partial^2 u_2/\partial x^2) &= 0\end{aligned}\quad (1.8)$$

Coefficients $c_{11}^{(2)}, c_{12}^{(2)}, c_{44}^{(2)}, c_{13}^{(2)}, c_{33}^{(2)}, e_{11}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \varepsilon_{33}^{(2)}, \rho_2, \mathfrak{G}_{12} = (c_{13}^{(2)} + c_{44}^{(2)})/c_{12}^{(2)}, \mathfrak{G}_{13} = (c_{13}^{(2)} + c_{44}^{(2)})/c_{13}^{(2)}$ in (1.6), (1.7) and (1.8) characterize the piezoelectric of the symmetry class $\bar{6}m2$.

It is evident from equations (1.8) that, according to the model of generalized stress-strain state, the reduced elastic extension stiffnesses decrease and have the following form:

$$c_{11}^* = c_{11}^{(2)} \left[1 - \mathfrak{G}_{12} (c_{13}^{(2)}/c_{11}^{(2)}) \right], \quad c_{33}^* = c_{33}^{(2)} \left[1 - \mathfrak{G}_{13} (c_{12}^{(2)}/c_{33}^{(2)}) \right].\quad (1.9)$$

The reduced coefficients of direct piezoelectric effect have the following form:

$$e_{11}^* = e_{11}^{(2)}(1 + \mathfrak{G}_{12}); \quad e_{12}^* = \mathfrak{G}_{12}e_{11}^{(2)};\quad (1.10)$$

Coordinate surfaces of non-acoustic contacts $x_{0n} = -a_2 + n(a_1 + a_2), x_{0n} = 0 + n(a_1 + a_2)$ and $x_{2n} = a_1 + n(a_1 + a_2)$ are free of mechanical stresses:

$$\sigma_{zx}^{(1)}(x, y, t) = 0; \quad \sigma_{xx}^{(2)}(x, y, t) = 0; \quad \sigma_{xy}^{(2)}(x, y, t) = 0;\quad (1.11)$$

and electric field conjugacy conditions are satisfied:

$$\phi_1(x, y, t) = \phi_2(x, y, t); \quad D_x^{(1)}(x, y, t) = D_x^{(2)}(x, y, t).\quad (1.12)$$

2. Solution of the mathematical boundary-value problem

In order to determine the characteristics of propagation of excited 1D forms of electroelastic hybrid waves in transversally inhomogeneous periodic piezoelectric structure, let us apply the Floquet-Lyapunov theory of periodic structures [9, 15]. Then, the

mathematical boundary-value problem of normal wave signal propagation in inhomogeneous structure is formulated for the cell $\Omega_0(x, y) = \Omega_{20}(x, y) \cup \Omega_{10}(x, y)$.

The following system of one-dimensional quasi-static equations of anti-plane electroactive deformation obtained from (1.5) will be solved in layer with section $\Omega_{10}(x, y)$:

$$\partial^2 \mathbf{W}_1^{(1)} / \partial x^2 = -\omega^2 \tilde{C}_{1t}^{-2} \cdot \mathbf{W}_1^{(1)}, \quad \partial^2 \Phi_1^{(1)} / \partial x^2 = (e_{15}^{(1)} / \varepsilon_{11}^{(1)}) \cdot \partial^2 \mathbf{W}_1^{(1)} / \partial x^2 \quad (2.1)$$

Here, $\tilde{C}_{1t}^2 = \tilde{c}_{44}^{(1)} / \rho_1$ is the speed of transverse electroactive wave in the piezoelectric of the symmetry class $6mm$, $\tilde{c}_{44}^{(1)} = c_{44}^{(1)} (1 + \chi_1^2)$ is the reduced shear stiffness and $\chi_1^2 = (e_{15}^{(1)})^2 / c_{44}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)}$ is the electromechanical connection coefficient of the piezoelectric of the symmetry class $6mm$.

The following system of one-dimensional quasi-static equations of plane electroactive deformation obtained from (1.8) will be solved in layer with section $\Omega_{20}(x, y)$:

$$\left(\partial^2 U_2 / \partial x^2 \right) = \left(-\omega^2 / C_{2t}^2 \right) U_2 \quad (2.2)$$

$$\left(\partial^2 \Phi_2 / \partial x^2 \right) = (e_{11}^{(2)} / \varepsilon_{11}^{(2)}) \left(\partial^2 U_2 / \partial x^2 \right)$$

$$\left(\partial^2 V_2 / \partial x^2 \right) = \left(-\omega^2 / C_{2t}^2 \right) V_2 \quad (2.3)$$

Here, $C_{2t}^2 = (1 - \mathfrak{G}_{12} (c_{13}^{(2)} / c_{11}^{(2)}) - \chi_2^2 (1 + \mathfrak{G}_{12})) (c_{11}^{(2)} / \rho_2)$ is the speed of longitudinal electroactive wave, $C_{2t}^2 = c_{44}^{(2)} / \rho_2$ is the speed of transverse elastic wave in the piezoelectric of the symmetry class $\bar{6}m2$.

It is evident from the expression of the longitudinal electroactive wave speed C_{2t}^2 that for values of the electromechanical connection coefficient satisfying

$\chi_2^2 > 1 - [(c_{13}^{(2)} + c_{44}^{(2)}) (c_{11}^{(2)} + c_{13}^{(2)})] / [c_{11}^{(2)} (c_{12}^{(2)} + c_{13}^{(2)} + c_{44}^{(2)})]$, the tensile stiffness (or compression) becomes negative. This is possible in case of relation $c_{11}^{(2)} c_{12}^{(2)} > c_{13}^{(2)} (c_{13}^{(2)} + c_{44}^{(2)})$

because $0 < \chi_2^2 < 1$ always holds.

According to the theory of Floquet-Lyapunov, instead of electromechanical boundary conditions (1.11) and (1.12), considering the periodicity of the structure, on the finite interval $-a_2 \leq x \leq a_1$, boundary conditions of quasi-periodicity of the considered cell are fulfilled.

Then, based on one-dimensional problem, the full system of boundary conditions will have the following form:

$$c_{44}^{(1)} \frac{d\mathbf{W}_1(0)}{dx} + e_{15}^{(1)} \frac{d\Phi_1(0)}{dx} = 0 \quad (2.4)$$

$$c_{11}^{(2)} \frac{dU_2(0)}{dx} + e_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(0)}{dx} = 0 \quad (2.5)$$

$$c_{44}^{(2)} \frac{dV_2(0)}{dx} = 0 \quad (2.6)$$

$$c_{44}^{(1)} \frac{d\mathbf{W}_1(a_1)}{dx} + e_{15}^{(1)} \frac{d\Phi_1(a_1)}{dx} = 0, \quad (2.7)$$

$$c_{11}^{(2)} \frac{dU_2(-a_2)}{dx} + e_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(-a_2)}{dx} = 0 \quad (2.8)$$

$$c_{44}^{(2)} \frac{dV_2(-a_2)}{dx} = 0 \quad (2.9)$$

Conjugacy conditions for the electric field are as follows:

$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0), \quad (2.10)$$

$$\Phi_1(a_1) = \mu \cdot \Phi_2(-a_2) \quad \text{or} \quad \Phi_2(a_1) = \mu \cdot \Phi_1(-a_2) \quad (2.11)$$

$$e_{15}^{(1)} \frac{dW_1(0)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{d\Phi_1(0)}{dx} = e_{11}^{(2)} \frac{dU_2(0)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(0)}{dx}, \quad (2.12)$$

$$e_{15}^{(1)} \frac{dW_1(a_1, y, t)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{d\Phi_1(a_1, y, t)}{dx} = \mu \cdot \left(e_{11}^{(2)} \frac{dU_2(-a_2, y, t)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(-a_2, y, t)}{dx} \right) \quad (2.13)$$

In (2.9) and (2.11), $\mu = \exp[ik(a_1 + a_2)]$ is the Floquet parameter characterizing the periodicity of the structure, $k = 2\pi/\lambda$ is the Floquet-Bloch wave number perpendicular to the interface of sub-layers, λ is the length of propagating wave and $a_1 + a_2 = L$ is the width of repeating cell.

2.1 Formation of electroacoustic hybrid waves in 1D transversally inhomogeneous periodic composite.

Considering the infiniteness of the structure in y direction, wave forms of 1D elastic displacements and electric field potential in homogeneous layers are represented as a plane wave: $f(x, y, t) = f_0 \exp[i(kx - \omega t)]$.

Vibrations of electric shear and corresponding vibrations of electric potential in homogeneous layer $\Omega_{10}(x, y)$ made of piezoelectric of the symmetry class $6mm$ are characterized by system (2.1) along with boundary conditions (2.4) and (2.7) and are given by

$$\begin{aligned} W_1(x) &= D_{1w} \cos(k_{1w}(\omega) \cdot x), \\ \Phi_1(x) &= D_{1\phi} \cos(k_{1\phi}(\omega) \cdot x) + \gamma_1 D_{1w} \cos(k_{1w}(\omega) \cdot x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Here, $k_w(\omega)$ and $k_{\phi}(\omega)$ are formation parameters or moduli of wave numbers of electroactive shear waves in $\Omega_{10}(x, y)$ perpendicular to the surface of non-acoustic contact, $\gamma_1 = (e_{15}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(1)})$ is the piezo-dielectric parameter of the piezoelectric of the symmetry class $6mm$ characterizing the connection of electromechanical fields.

Wave forms of 1D elastic extension and electric field potential in $\Omega_{20}(x, y)$ made of piezoelectric of the symmetry class $\bar{6}m2$ are described by system (2.2) along with the boundary conditions (2.5) and (2.8) and are given by:

$$\begin{aligned} U_2(x) &= D_{2u} \cos(k_u(\omega) \cdot x), \\ \Phi_2(x) &= D_{2\phi} \cos(k_{2\phi}(\omega) \cdot x) + \gamma_2 D_{2u} \cos(k_u(\omega) \cdot x) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Taking into account (2.3) along with boundary conditions (2.6) and (2.9), we obtain

$$V_2(x) = D_{2v} \cos(k_v(\omega) \cdot x) \quad (2.16)$$

In (2.15) and (2.16), $k_u(\omega)$ and $k_{2\phi}(\omega)$ are formation parameters or moduli of wave numbers of dilatation waves in $\Omega_{20}(x, y)$ perpendicular to the surface of non-acoustic contact, $\gamma_2 = (e_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(2)})$ is the piezo-dielectric parameter of the piezoelectric of the symmetry class $\bar{6}m2$ characterizing the connection of electromechanical fields, $k_v(\omega)$ is the formation parameters or modulus of wave numbers of shear waves in $\Omega_{20}(x, y)$ perpendicular to the surface of non-acoustic contact.

The eigenfrequencies of vibrations corresponding to wave forms in sublayers $\Omega_{10}(x, y)$ and $\Omega_{20}(x, y)$ are as follows:

$$\omega_{0w} = n\pi\tilde{C}_{1t}/a_1, \quad \omega_{0u} = n\pi C_{2l^*}/a_2, \quad \omega_{0v} = n\pi C_{2t}/a_2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

It is evident from (2.15) and (2.16) that 1D longitudinal elastic vibrations in $\Omega_{20}(x, y)$ are electroactive, while the transverse vibrations are not related to electric field vibrations. The corresponding electric field in that layer is related only to the displacement $U_2(x) \cdot \exp(-i\omega t)$. The character of connection of extensional (or compressing) displacements with electric potential $\Phi_2(x) \cdot \exp(-i\omega t)$ in $\Omega_{20}(x, y)$ is the same as the character of the connection between $W_1(x) \cdot \exp(-i\omega t)$ and $\Phi_1(x) \cdot \exp(-i\omega t)$ in $\Omega_{10}(x, y)$.

2.2. Propagation of 1D electroacoustic forms in transversally inhomogeneous periodic composite.

Substituting expressions (2.14) ÷ (2.16) into boundary conditions of quasi-periodicity (2.10) ÷ (2.13), we obtain the following dispersion equation of propagation (frequency filtration) of electroacoustic waves (as in [4] and [19]):

$$\cos[(a_1 + a_2) \cdot k(\omega)] = \frac{[1 - (\cos k_w(\omega)a_1)]^2 + [1 - \cos(k_u(\omega)a_2)]^2}{2[1 - \cos(k_w(\omega)a_1)] \cdot [1 - \cos(k_u(\omega)a_2)]} \quad (2.18)$$

Substituting the expressions of formation coefficients $k_w(\omega)$ and $k_u(\omega)$ into (2.18), the solution of the dispersion equation can be represented as

$$k(\omega) = \frac{1}{(a_1 + a_2)} \cdot \arccos \left[\frac{[1 - \cos(\omega a_2 / C_{2l^*})]^2 + [1 - \cos(\omega a_1 / C_{1t})]^2}{2[1 - \cos(\omega a_1 / C_{1t})] \cdot [1 - \cos(\omega a_2 / C_{2l^*})]} \right] \quad (2.19)$$

The region of allowed frequencies in the layered structure is determined from the obvious constraint $|\cos[k(a_1 + a_2)]| \leq 1$. Since for the right-hand side of (2.18), the inequality

$$\frac{[1 - (\cos k_w(\omega)a_1)]^2 + [1 - \cos(k_u(\omega)a_2)]^2}{2[1 - \cos(k_w(\omega)a_1)] [1 - \cos(k_u(\omega)a_2)]} \geq 1, \quad (2.20)$$

holds only when $\cos(k_w(\omega)a_1) = \cos(k_u(\omega)a_2)$, then the set of allowed frequencies consists of the following two groups:

$$\omega_{0u}^* \in \left\{ \frac{2m_2\pi C_{2l^*}}{a_2 [1 - (a_1 C_{2l^*}/a_2 C_{1l})]} \right\}, \omega_{0w}^* \in \left\{ \frac{2m_1\pi \tilde{C}_{1l}}{a_1 [1 - (a_2 C_{1l}/a_1 C_{2l^*})]} \right\}, m_1, m_2 \in \mathbb{N} \quad (2.21)$$

It is evident from the obtained dispersion equation of frequency filtration that the electroacoustic wave signal propagates in the layered composite under study as an electroactive hybrid wave of pure shear and as a wave of pure dilatation with two groups of discrete frequencies (2.21).

Taking into account the values of eigenfrequencies (2.17), from (2.21) it follows that the main allowed frequency ω_{0u}^* with number $m_2 = 1$ is always smaller than main discrete eigenfrequencies ω_{0u} and ω_{0w} with number $n = 1$. Therefore, the main frequency $\omega_{0u}^* (m_2 \geq 2)$ may be of resonant type if and only if

$$\omega_{0u}^* (m_2 \geq 2) \geq \min \left\{ \omega_{0u} (n < m_2) = n\pi C_{2l^*}/a_2; \omega_{0w} (n < m_2) = n\pi \tilde{C}_{1l}/a_1 \right\} \quad (2.22)$$

In electronics and related fields, piezoelectric plates of magnitude of 1.0 mm or even thinner are used for which $\{[a_1]; [a_2]\} \leq 10^{-3}$ m, and elastic wave speed has the amplitude of order $\{[C_{1l}]; [C_{2l^*}]\} \sim 10^3$ m/s. Then, from (2.17) and (2.22) it follows that the first main frequency $\omega_{0u}^* (1)$ of electroacoustic hybrid vibrations has the order $\omega_{0l} \sim 10^6$ Hz. Choosing the parameters of the composite according to $a_1 C_{2l^*} \sim a_2 C_{1l}$, it is possible to achieve greater values for the second main frequency of electroacoustic hybrid vibrations: $\omega_{0h} \sim 10^8 \div 10^{10}$ Hz. In these cases, the second main frequency $\omega_{0w}^* (1)$ of the electroacoustic hybrid vibrations can always be of resonant type, i.e.,

$$\omega_{0w}^* (m_1 \geq 1) \geq \min \left\{ \omega_{0u} (n) = n\pi C_{2l^*}/a_2; \omega_{0w} (n) = n\pi \tilde{C}_{1l}/a_1 \right\} \quad (2.23)$$

Comparably larger values of allowed frequencies $\omega_{0w}^* (1)$ will be of resonant type in sub-layer $\Omega_{10}(x, y)$ when the geometric and material characteristics of the composite satisfy $a_2/a_1 = C_{2l^*}/2C_{1l}$. On the other hand, comparably larger values of allowed frequencies $\omega_{0w}^* (1)$ will be of resonant type in sub-layer $\Omega_{20}(x, y)$ when $a_1/a_2 = 3C_{1l}/C_{2l^*}$.

From (2.19), we obtain the length of propagating mode of electroacoustic hybrid waves as $\lambda_m(\omega) = 4(a_1 + a_2)/(1 + 2m)$. The groups of allowed frequencies are determined as intersection points of phase curves and line $\lambda(0) = 4(a_1 + a_2)$ (see Figure 2).

In numerical computations below, we consider the following values of characteristics:

- for widths of sublayers - $a_1 = 10^{-3}$ m and $a_2 = 2 \times 10^{-3}$ m,
- for the piezoelectric material of hexagonal symmetry class $6mm$ –
 $c_{44}^{(1)} = 1,639 \times 10^{10}$ N/m², $\rho_1 = 5,302 \times 10^3$ kg/m³, $\varepsilon_{11}^{(1)} = 8,786 \times 10^{-11}$ F/m,
 $e_{15}^{(1)} = 0,23$ C/m², $C_{1l} = 1,7585 \times 10^3$ m/s.

- for the piezoelectric of hexagonal symmetry class $\bar{6}m2$ - $c_{11}^{(2)} = 8,612 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$,
 $c_{12}^{(2)} = 4,852 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $c_{13}^{(2)} = 1,045 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $c_{33}^{(2)} = 10,71 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$,
 $c_{44}^{(2)} = 5,86 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho_2 = 2,648 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\varepsilon_{11}^{(2)} = 4,25 \times 10^{-11} \text{ F/m}$,
 $\varepsilon_{11}^{(2)} = 4,63 \times 10^{-11} \text{ F/m}$, $e_{11}^{(1)} = 3,21 \text{ C/m}^2$, $\vartheta_{12} = 1,4231$, $C_{21^*} = 2,189 \times 10^3 \text{ m/s}$.

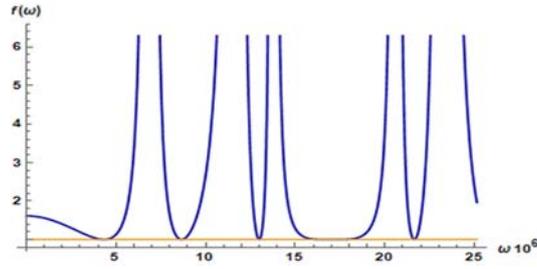
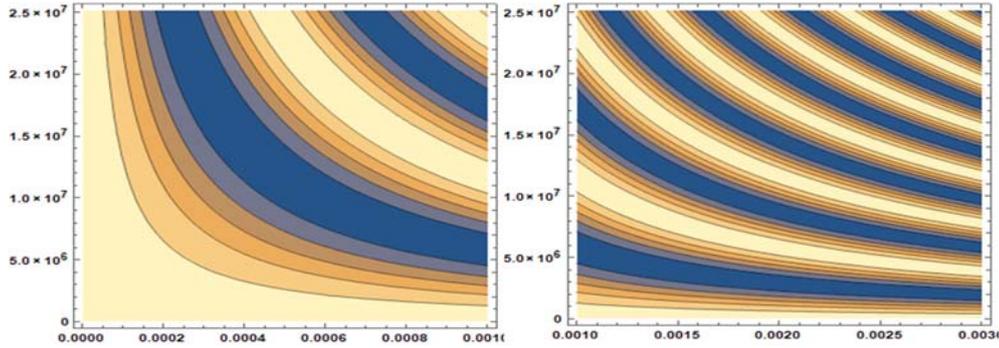


Figure 2. Intersection points of phase curves and the line determines the groups of allowed frequencies



a) Wave surface $W_1(x, \omega)$ of electroelastic shear in sub-layer $\Omega_{10}(x, y)$ b) Wave surface $U_2(x, \omega)$ of electroelastic dilatation in sub-layer $\Omega_{20}(x, y)$

Figure 3. Wave surfaces of elastic displacements of hybrid electroactive wave in composite cells

Distributions of elastic displacements $W_1(x) \cdot \exp(-i\omega t)$ and $U_2(x) \cdot \exp(-i\omega t)$, as well as the potentials of electric field $\Phi_1(x) \cdot \exp(-i\omega t)$, $\Phi_2(x) \cdot \exp(-i\omega t)$ in sub-layers $\Omega_{10}(x, y)$ and $\Omega_{20}(x, y)$ are determined by (2.14) and (2.15), respectively.

In the case of comparably smaller and comparably greater allowed frequencies of wave signal, these distributions are plotted in Figures 3.a, 3.b, 4.a and 4.b, respectively. From boundary-value problem (2.5), (2.7) and (2.14) it follows that in the case of layered piezoelectric medium, the shear displacement $v_2(x, y, t)$ does not occur in the piezoelectric

of the symmetry class $\bar{6}m2$. The corresponding electric field in that sub-layer is connected with $u_2(x, y, t)$ only. The character of the connection between extensional displacement and electric potential in that sub-layer is the same as that between shear displacement $w_1(x, y, t)$ and electric potential in the first sub-layer.

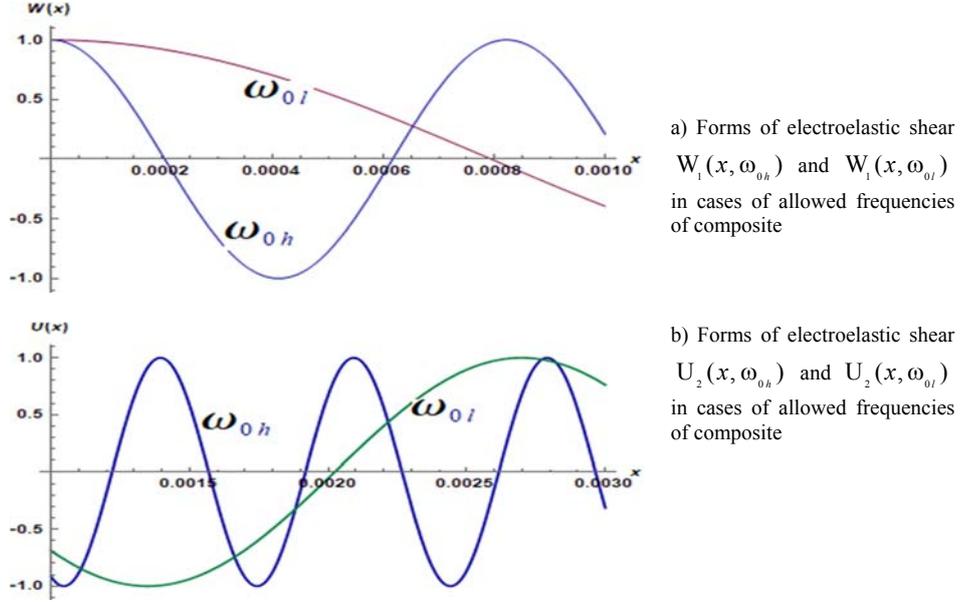


Figure 4. Formation of elastic displacements of hybrid electroactive wave

3.1 Electroactive SH -waves in piezoelectric medium with system of infinite cracks

When the layers of the composite are made of piezoelectric material of the symmetry class $6mm$ (or $4mm$) only, and separated from each other by a system of infinite cracks, planes of which are parallel to the polarization axis of the piezocrystal \vec{p}_6 (resp. \vec{p}_4), then the quasi-periodicity boundary conditions are simplified to

$$e_{15}^{(1)} \frac{dW_1(0_-)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{d\Phi_1(0_-)}{dx} = e_{15}^{(1)} \frac{dW_1(0_+)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{d\Phi_1(0_+)}{dx}, \quad (3.1)$$

$$c_{44}^{(1)} \frac{dW_1(0_\pm)}{dx} + e_{15}^{(1)} \frac{d\Phi_1(0_\pm)}{dx} = 0, \quad (3.2)$$

$$\Phi_1(a_{1\pm}) = \mu \cdot \Phi_1(0_\pm), \quad (3.3)$$

$$e_{15}^{(1)} \frac{dW_1(a_{1\pm})}{dx} - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{d\Phi_1(a_{1\pm})}{dx} = \mu \cdot \left(e_{15}^{(1)} \frac{dW_1(0_\pm)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{d\Phi_1(0_\pm)}{dx} \right). \quad (3.4)$$

Nonetheless, the solution of (2.1) will have the same form (2.14). Note that the continuity conditions of the electric potential, as well as the periodicity conditions of mechanical stresses on all cut-offs $x = na_1$ are fulfilled.

The dispersion equation for determination of phase velocity is obtained by substituting (2.14) into (3.1) ÷ (3.4) and has a simpler form

$$\cos(a_1 k) = \left(1 + \cos^2(\omega a_1 / \tilde{C}_{1t})\right) / 2 \cos(\omega a_1 / \tilde{C}_{1t}) \quad (3.5)$$

From (3.5) it follows that electroactive SH-wave can propagate in this case as well. Solution of dispersion equation (3.5) for wavelengths is obtained as

$$\lambda(\omega) = 2\pi a_1 \cdot \left[\arccos \left[\left(1 + \cos^2(\omega a_1 / \tilde{C}_{1t})\right) / \left(2 \cos(\omega a_1 / \tilde{C}_{1t})\right) \right] \right]^{-1} \quad (3.6)$$

Therefore, the phase velocity will be of dispersion type

$$V_\phi(\omega) = \left[a_1 \omega / \arccos \left[\left(1 + \cos^2(\omega a_1 / \tilde{C}_{1t})\right) / \left(2 \cos(\omega a_1 / \tilde{C}_{1t})\right) \right] \right] \quad (3.7)$$

Despite the case of homogeneous space (space without periodic cracks), in this case, zones of forbidden frequencies occur (see Figure 5.a). Actually for short waves, when they are of the order of width layer, there are two groups of forbidden frequency zones. It is clear that in one group of zones of permissible frequencies, the phase velocity first decreases, and then increases. In the second group of zones of permissible frequencies, the phase velocity first increases and then decreases (see Figure 5.b).

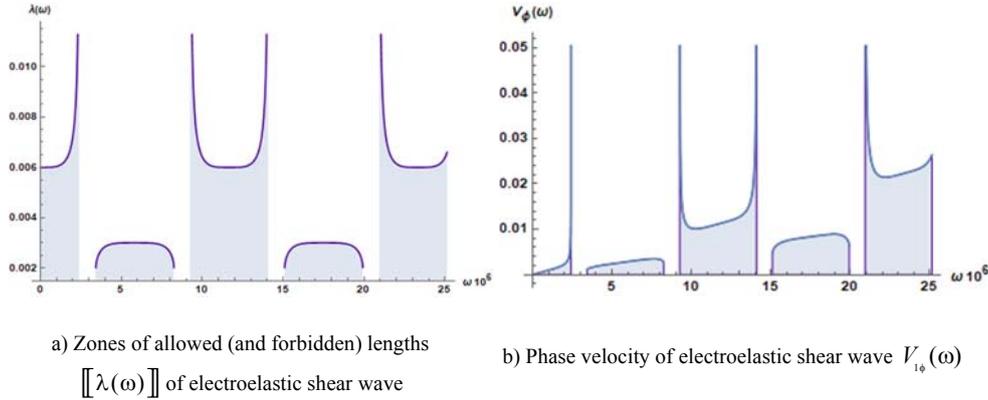
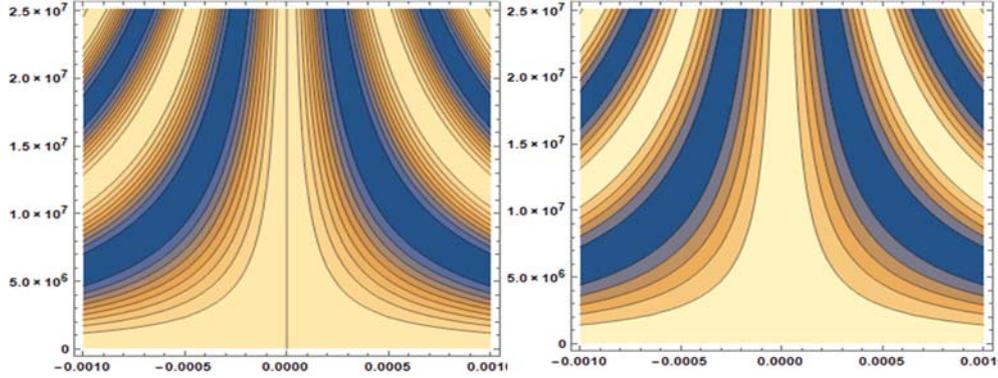


Figure 5. The case of propagation of electroactive shear wave in piezoelectric with a system of infinite parallel cracks

In Figures 6.a and 6.b, distributions of elastic displacements and electric potential along width of two neighboring piezoelectric sub-layers respectively are shown. From the figures it follows that a periodic cell is formed of two identical interlayers. At the edges of cracks $x_{0n} = 0 \pm 2na_1$ between the piezoelectric layers, the elastic displacement has an underlined maximum, and the electric field potential has an increased background.



a) Electroelastic shear displacement $W_1(x, y)$ in two neighboring piezoelectric sub-layers b) Electric potential $\Phi_1(x, y)$ in two neighboring piezoelectric sub-layers

Figure 6. Distributions of elastic displacements and electric potential in case of propagation of electroactive shear wave

At the edges of the cracks $x_m = a_1 \pm 2na_1$ between the piezoelectric layers, the elastic displacement and the electric field potential smoothly pass into the next cell.

A similar picture is obtained in problem of the propagation of electroactive dilatation waves in a piezoelectric medium of the hexagonal symmetry class $\bar{6}m2$, with a system of transverse infinite cracks.

3.2 Electroactive elastic waves of dilatation in piezoelectric medium with system of infinite cracks

When the layers of the composite are made of piezoelectric material of the symmetry class $\bar{6}m2$ only, taking into account one-dimensional solutions (2.13), (2.14) and quasi-periodicity boundary conditions (2.4)÷(2.11), the plane stress-strain state of the layered structure is described by

$$c_{11}^{(2)} \frac{dU_2(0_{\pm})}{dx} + e_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(0_{\pm})}{dx} = 0 \quad (3.8)$$

$$e_{11}^{(2)} \frac{dU_2(0_{-})}{dx} - \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(0_{-})}{dx} = e_{11}^{(2)} \frac{dU_2(0_{+})}{dx} - \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(0_{+})}{dx} \quad (3.9)$$

$$\Phi_2(a_2) = \mu \cdot \Phi_2(0) \quad (3.10)$$

$$e_{11}^{(2)} \frac{dU_2(0)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(0)}{dx} = \mu^{-1} \left(e_{11}^{(2)} \frac{dU_2(a_2)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(a_2)}{dx} \right) \quad (3.11)$$

In this case also, the continuity conditions for electric potential and the periodicity conditions for mechanical stresses are fulfilled on cut-offs $x = 0 \pm na_2$.

The obvious similarity of solutions (2.14) and (2.15) and of boundary conditions (3.8) ÷ (3.11) and (3.1) ÷ (3.4), implies a dispersion equation similar to (3.5). The reduced velocity $\eta_2(\omega)$ takes the form

$$\eta_2(\omega) = \frac{V_{2\phi}(\omega)}{\tilde{C}_{2l^*}} = \frac{(a_2\omega/\tilde{C}_{2l^*})}{\arccos\left[1 + \cos^2(\omega a_2/\tilde{C}_{2l^*})/4 \cos(\omega a_2/\tilde{C}_{2l^*})\right]} \quad (3.12)$$

The wave of dilatation is characterized by the same properties, as the shear wave in the case described in section 3.1.

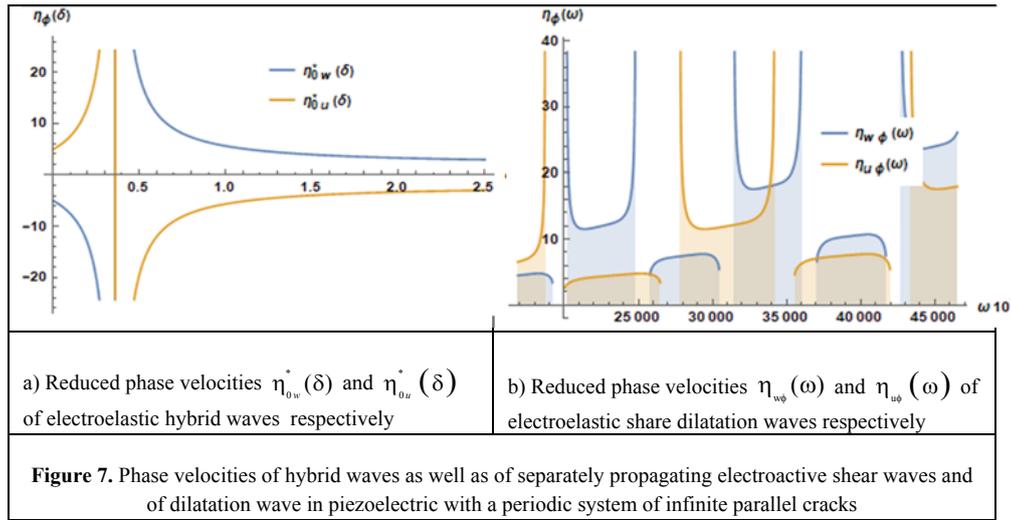
In both cases, phase velocities are dispersive. They differ from phase velocities of hybrid waves as qualitatively, as well as quantitatively. Figure 7.b shows the dependence of the phase velocity of electro-acoustic shear waves in a piezoelectric medium of the symmetry class $6mm$ with an infinite system of transverse periodic cracks

$$\eta_{w\phi}(\omega) = \left[(a_1\omega/\tilde{C}_{1t}) / \arccos\left[(1 + \cos^2(\omega a_1/\tilde{C}_{1t})) / (2 \cos(\omega a_1/\tilde{C}_{1t})) \right] \right] \quad (3.13)$$

and the dependence of the phase velocity of electro-acoustic shear waves in a piezoelectric medium of the symmetry class $\bar{6}m2$, with an infinite system of transverse periodic cracks

$$\eta_{u\phi}(\omega) = \left[(a_2\omega/\tilde{C}_{2l^*}) / \arccos\left[1 + \cos^2(\omega a_2/\tilde{C}_{2l^*}) / 2 \cos(\omega a_2/\tilde{C}_{2l^*}) \right] \right] \quad (3.14)$$

respectively.



The zones of permissible frequencies for phase velocities $\eta_{w\phi}(\omega)$ and $\eta_{u\phi}(\omega)$ from (3.13) and (3.14), respectively, will be $\pi\tilde{C}_{1t}/a_1 \leq \omega_{0w} \leq 2\pi\tilde{C}_{1t}/a_1$ and $\pi\tilde{C}_{2l^*}/a_2 \leq \omega_{0u} \leq 2\pi\tilde{C}_{2l^*}/a_2$. From Figure 7.b it is obvious, that the zones of permissible frequencies of the electro-elastic shear wave can intersect with the zones of permissible frequencies of electro-elastic wave of dilatation.

From (2.21) it follows that the allowed frequencies of hybrid waves are not dispersive. However, they depend on the ratio of widths of piezoelectric sublayers $\delta = (a_2/a_1)$.

The phase velocities of hybrid electro-acoustic waves in an inhomogeneous layered structure constructed of the same piezoelectrics are determined as

$$\eta_{0w}^*(\delta) = \tilde{C}_{1t}(1+\delta) / \left[1 - (C_{1t}/C_{2l*})\delta \right] \quad (3.15)$$

$$\eta_{0u}^*(\delta) = \tilde{C}_{2l*}(1+\delta) / \left[\delta + (\tilde{C}_{2l*}/\tilde{C}_{1t}) \right] \quad (3.16)$$

which are plotted in Figure 7.a.

From the graphs of the phase velocities of the hybrid wave, it is obvious that, depending on the parameter $\delta = (a_2/a_1)$, there is a critical value of frequency $\omega_0^*(\delta)$. In the frequency interval $0 < \omega < \omega_0^*(\delta)$, the hybrid wave propagates with the phase velocity $\eta_{0u}^*(\delta)$, and in the frequency interval $\omega_0^*(\delta) < \omega < \infty$, the hybrid wave propagates with the phase velocity $\eta_{0w}^*(\delta)$.

The shear component of the wave $v_2(x,y,t) \equiv 0$, as in the case of piecewise homogeneous composite.

Conclusions

Non-acoustic contact within the piezoelectric layers results in hybridization of dissimilar electroacoustic waves.

The propagation of 1D electroactive hybrid elastic waves of pure shear and pure dilatation in compound transversally inhomogeneous periodic piezoelectric space made of piezocrystals of hexagonal symmetry class $6mm$ (or of tetragonal symmetry class $4mm$) and $\bar{6}m2$ is possible. There exist two groups of allowed discrete frequencies. When the ratio of widths and elastic wave speeds in layers are inverse to each other, then the allowed discrete frequencies are of resonant type.

The propagation of 1D electroactive shear waves in piezoelectric medium of the symmetry class $6mm$ (or $4mm$) with infinite transverse cut-offs is possible with zones of allowed and forbidden frequencies.

The propagation of 1D electroactive dilatation waves in piezoelectric medium of the symmetry class $\bar{6}m2$ with infinite transverse cut-offs is possible with zones of allowed and forbidden frequencies.

The study was carried out with the financial support of the Committee on Science of the Republic of Armenia within the research project 18T-2C195.

REFERENCES

1. M.I.Hussein, M.J. Leamy, M. Ruzzene, Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook, (2014), Applied Mechanics Reviews, v. 66 (4): p.040802/1-38, <http://doi.org.10.1115/1.4026911>.
2. Lord Rayleigh, On the maintenance of vibrations of forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, Phil. Mag., 24 (1887), pp. 145–159, <http://doi.org.10.1080/14786448708628074>.

3. Аветисян А.С., Казарян К.Б. Волны в «фонон-фотон» кристаллах и импеданс, Сб. «Проблемы механики деформируемого твердого тела» К 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2012, с.15-22. Avetisyan A.S., Ghazaryan K.B., Waves in «phonon-photon» crystals and impedance, Sat. «Problems of the mechanics of a deformable solid», Dedicated 90th anniversary of the academician of NAS of Armenia S.A. Ambartsumian. Yerevan. 2012, pp.15-22, (in Russian).
4. Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B., Piliposyan G.T. and Avetisyan A. S., Wave Propagation in Periodic Piezoelectric Elastic Waveguides, (2012), ASME Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems, Georgia, USA, pp.1-9., <http://doi.org/10.1115/SMASIS2012-7911>.
5. Lee E. H., A survey of variation methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures, in Dynamics of Composite Materials, E.H. Lee, ed., ASME, New York, 1972, pp.122–138.
6. Lee E.H. and Yang W. H., On waves in composite materials with periodic structure, (1973), SIAM Journal on Applied Mathematics, vol.25(3), pp.492–499, <http://doi.org/10.1137/0125049>.
7. Papanicolaou V.G., The periodic Euler–Bernoulli equation, (2003), Trans. AMS 355(09), pp. 3727–3759, , <http://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03315-4>.
8. V.G. Papanicolaou, An Inverse Spectral Result for the Periodic Euler-Bernoulli Equation, Indiana University Mathematics Journal (2003), Volume: 53(1), pp. 223-242, <http://doi.org/10.1512/iumj.2004.53.2493>.
9. Qian Z.H., Jin F., Wang Z.K., Kishimoto K., Dispersion relations for SH-wave propagation in periodic piezoelectric composite layered structures, (2004), Int. J. Eng. Sci., vol. 42(7), pp.673-689, , <http://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2003.09.010>.
10. Adams S., Craster R., Guenneau S., Bloch waves in periodic multi-layered acoustic waveguides, (2008), Proc. Royal Society A Math. Phys. And Engin. Sciences 464 (2098) p.2669-2692, <http://doi.org/10.1098/rspa.2008.0065>.
11. Craster R.V., Guenneau S., Adams S., Mechanism for slow waves near cutoff frequencies in periodic waveguides, (2009), Physical Review B, Condensed matter 79(4), <http://doi.org/10.1103/PhysRevB.79.045129>.
12. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Изв. НАН Армении. Механика. 1985, т.38, №1, с.12-19. Avetisyan A.S., About the Problem of the Propagation of Transversal Waves in Piezoelectric Bodies, Procc. of NAS of Armenia, Mechanics, (1985), vol.38, №1, pp.12-19, (in Russian).
13. Avetisyan Ara S., Two Dimensional Problems of Electro Acoustics in Homogeneous Piezoelectric Crystals, Procc. of NAS of Armenia, Mechanics, (2019), vol.72, №3, pp. 56-79, <http://doi.org/10.33018/72.3.4>.
14. Bluestein, J. L. A New Surface Wave in Piezoelectric Medium. //Appl. Phys. Lett., vol.13 (1968), p. 412-413, <https://doi.org/10.1063/1.1652495>.

15. Singh B., Singh R., Rayleigh wave in a rotating initially stressed piezoelectric half-space (2013), Jour. of Theor. And Appl. Mechanics, vol.43, Iss. 2, <https://doi.org/10.2478/jtam-2013-0014>.
16. Chaudhary S., Sahu S.A., Singhal A., Analytic model for Rayleigh wave propagation in piezoelectric layer overlaid orthotropic substratum, (2017), Acta Mechanica, vol. 228, Iss. 2, pp. 495–529, <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1708-0>.
17. Vashishth, A.K., Sukhija, H., Coupled Rayleigh waves in a 2-mm piezoelectric layer over a porous piezo-thermoelastic half-space, (2017), Acta Mechanica, vol. 228, pp.773–803, <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1733-z>.
18. Аветисян А.С., Мкртчян С.А., Электроупругие волны Рэлея в волноводе с электрически закрытыми или открытыми поверхностями. //Изв. НАН Армении. Механика. 2018, т.71, №1, с.12-30. <http://doi.org/10.33018/71.1.2>
Avetisyan A.S., Mkrtychyan S.H., The electro elastic Rayleigh waves in the waveguide, with an electrically closed or open surfaces. Procc. of NAS of Armenia, Mechanics, (2018), vol. 71, №1, pp. 12-30, (in Russian), <http://doi.org/10.33018/71.1.2>.
19. Piliposyan G.T., Avetisyan A.S., Ghazaryan K.B., Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium, Wave Motion (2012), vol.49(1), pp.125-134 <http://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2011.08.001>.

Information about the authors:

Avetisyan Ara S. – Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, **E-mail:** ara.serg.avetisyan@gmail.com,

Khachatryan Vazgen M. Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, **E-mail:** khachvaz@gmail.com

Received 17.01.2020

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З., Дарбинян А.З.

Ключевые слова: волна Рэлея, поперечное и продольные волны, волновое число, частота, условия затухания, дисперсионное уравнение.

Propagation of Surface Waves in the Composite Half Plane

Amirjanyan H.A., Belubekyan M.V., Gevorgyan G.Z., Darbinyan A.Z.

Keywords: Rayleigh Wave, Transverse and Longitudinal Waves, Wavenumber, Frequency, Damping Conditions, Dispersion Equation

The problem of propagation of Rayleigh type surface waves in the halfplane-layer system along the line of their connection is considered. The dispersion equation of the problem is obtained and the conditions for the propagation of surface waves are obtained depending on the physical and geometric characteristics of the half-plane and layer.

Մակերևութային ալիքների տարածումը բաղադրյալ կիսահարթությունում

Ամիրջանյան Հ.Ա., Բելուբեկյան Մ.Վ., Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ.

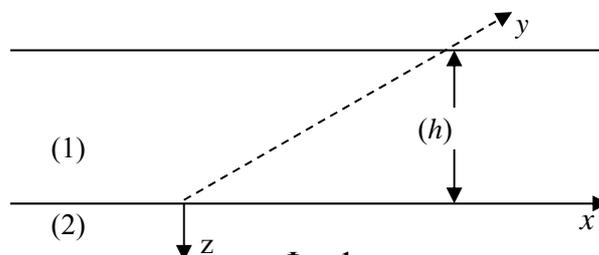
Հիմնաբառեր. Ռելեյի ալիքներ, երկայնական և լայնական ալիքներ, ալիքային թիվ, հաճախություն, մարման պայմաններ, դիսպերսիոն հավասարում:

Դիտարկված է Ռելեյի տիպի մակերևութային ալիքների տարածումը կիսահարթություն-շերտ համակարգում միացման գծի երկայնքով: Ստացվել է խնդրի դիսպերսիոն հավասարումը և մակերևութային ալիքների տարածման պայմանները կախված ֆիզիկական և երկրաչափական բնութագրիչներից:

Рассмотрена задача распространения поверхностных волн типа Рэлея в системе полуплоскость-слой по линии их соединения. Получено дисперсионное уравнение задачи и получены условия распространения поверхностных волн в зависимости от физических и геометрических характеристик полуплоскости и слоя.

Введение. Распространение поверхностных волн типа Рэлея в составной полуплоскости было исследовано многими авторами. Обзор работ по этой тематике можно найти в [1-5]. В работах [6,7] исследовано существование упругих волн, локализованных у границы раздела двух упругих сред, которые экспоненциально затухают по мере удаления от границы. Здесь рассмотрена задача плоской деформации, когда упругие перемещения имеют место в этой плоскости и не зависят от нормального к данной плоскости направления.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача плоской деформации теории упругости для полупространства, контактирующего со слоем (фиг.1)



Фиг. 1

Для компонент упругих перемещений имеем:
 $u_1^{(i)} = u^{(i)}(x, z, t)$, $u_3^{(i)} = w^{(i)}(x, z, t)$, $u_2^{(i)} = 0$ ($i = 1, 2$)

где $i = 1$ относится к слою, а $i = 2$ – к полуплоскости t –время.

Уравнения движения в перемещениях имеют вид [4]

$$\begin{aligned} c_{2i}^2 \Delta u^{(i)} + (c_{1i}^2 - c_{2i}^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2} \\ c_{2i}^2 \Delta w^{(i)} + (c_{1i}^2 - c_{2i}^2) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

где c_{1i} , c_{2i} – скорости распространения продольных и поперечных волн в соответствующих средах, λ_i , μ_i – коэффициенты Ламе слоя ($i = 1$) и полупространства ($i = 2$).

Граничные условия (скользящий контакт- анти-Навье) [5]

$$\sigma_{31}^{(1)} = 0, w^{(1)} = 0 \quad \text{при } z = -h \quad (2)$$

Условия Навье

$$\sigma_{33}^{(1)} = 0, \sigma_{33}^{(2)} = 0, \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)}, u^{(1)} = u^{(2)} \quad \text{при } z = 0 \quad (3)$$

Решение задачи. Посредством скалярных потенциалов [4]

$$u^{(i)} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial z}, \quad w^{(i)} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \quad (4)$$

уравнения (1) сводятся к

$$\Delta \Phi_i = \frac{1}{c_{1i}^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}, \quad \Delta \Psi_i = \frac{1}{c_{2i}^2} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}, \quad (5)$$

При этом, для используемых в дальнейшем напряжений получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(i)} &= \lambda_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} - 2\mu_i \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z \partial x}, \\ \sigma_{31}^{(i)} &= \mu_i \left(2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Общие решения уравнений (5) для полуплоскости, удовлетворяющие условиям затухания [4]:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2 = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Psi_2 = 0 \quad (7)$$

имеют вид

$$\Phi_2 = A_1 e^{-k v_{21} z} \exp i k (x - ct), \quad \Psi_2 = B_1 e^{-k v_{22} z} \exp i k (x - ct) \quad (8)$$

где

$$v_{21} = \sqrt{1 - \xi} \eta_2, \quad v_{22} = \sqrt{1 - \xi}, \quad 0 < \xi < 1, \quad \xi = \frac{\omega^2}{k^2 c_{22}^2}, \quad \eta_2 = \frac{c_{22}^2}{c_{21}^2}, \quad c = \frac{\omega}{k}$$

Для слоя

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= (C_1 \operatorname{sh}(kv_{11}z) + D_1 \operatorname{ch}(kv_{11}z)) \exp ik(x - ct) \\ \Psi_1 &= (E_1 \operatorname{ch}(kv_{12}z) + F_1 \operatorname{sh}(kv_{12}z)) \exp ik(x - ct)\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$v_{11} = \sqrt{1 - \xi c_0 \eta_1}, \quad v_{12} = \sqrt{1 - \xi c_0}, \quad \eta_1 = \frac{c_{12}^2}{c_{11}^2}, \quad c_0 = \frac{c_{22}^2}{c_{12}^2}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2) на внешней границе слоя, получим при $z = -h$:

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad w^{(1)} = 0 \quad (10)$$

отсюда

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \quad \Psi_1 = 0$$

Общие решения уравнений (9), удовлетворяющие условиям (10), имеют вид:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= G_1 c \operatorname{h}(kv_{11}(h + z)) \exp ik(x - ct) \\ \Psi_1 &= G_2 s \operatorname{h}(kv_{12}(h + z)) \exp ik(x - ct)\end{aligned}\quad (11)$$

$$\text{где } G_1 = \frac{D_1}{c \operatorname{h}(kv_{11}h)}, \quad G_2 = \frac{F_1}{c \operatorname{h}(kv_{12}h)}$$

Удовлетворяя условиям (3), получим систему алгебраических однородных уравнений относительно коэффициентов A_1, B_1, G_1, G_2 :

$$\begin{aligned}G_1[-\lambda_1 + (\lambda_1 + 2\mu_1)v_{11}^2] \operatorname{sh}(kv_{11}h) - 2G_2\mu_2iv_{12} \operatorname{sh}(kv_{12}h) &= 0 \\ A_1[-\lambda_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)v_{21}^2] + 2B_1\mu_2iv_{22} &= 0 \\ G_1i \operatorname{ch}(kv_{11}h) + G_2v_{12} \operatorname{ch}(kv_{12}h) - A_1i + B_1v_{22} &= 0 \\ 2G_1i\mu_1v_{11} \operatorname{sh}(kv_{11}h) + \mu_1G_2(1 + v_{12}^2) \operatorname{sh}(kv_{12}h) + 2A_1\mu_2iv_{21} - \mu_2B_1(1 + v_{22}^2) &= 0\end{aligned}\quad (12)$$

Для существования ненулевого решения детерминант этой системы должен быть

равен нулю. Отсюда получается дисперсионное уравнение относительно ξ

$$\begin{aligned}\mu\sqrt{1 - \xi} \left[(2 - \xi c_0)^2 \operatorname{th}(kh\sqrt{1 - \xi c_0}) - \right. \\ \left. - 4\sqrt{(1 - \xi c_0 \eta_1)(1 - \xi c_0)} \operatorname{th}(kh\sqrt{1 - \xi c_0 \eta_1}) \right] + \\ + c_0 \left[(2 - \xi)^2 - 4\sqrt{(1 - \xi)(1 - \xi \eta_2)} \right] \sqrt{1 - \xi c_0} = 0\end{aligned}\quad (13)$$

$$\text{где } \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Рассмотрим частные случаи [6]

1. при $kh \ll 1$, заменяя $\text{th } x \sim x$,

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\xi c_0} \left\{ c_0 \left[(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi\eta_2)} \right] + \right. \\ & \left. + kh\mu\sqrt{1-\xi} \left[(2-\xi c_0)^2 - 4(1-\xi c_0\eta_1) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

которое имеет корни $\xi = 0$, $\xi = 1/c_0 = \frac{c_{12}^2}{c_{22}^2}$; $\Rightarrow v_\phi = c_{12}$.

Уравнение (13) можно представить в виде

$$\xi\sqrt{1-\xi c_0} R(\xi) = 0, \text{ где}$$

$$R(\xi) = c_0 \left[\xi - 4(1-\xi) \frac{1-\eta_2}{\sqrt{1-\xi} + \sqrt{1-\xi\eta_2}} \right] + kh\mu\sqrt{1-\xi} \left[\xi - 4c_0(1-\eta_2) \right] \quad (15)$$

Так как $R(0) < 0$, $R(1) > 0$, существует, по крайней мере, один корень при $0 < \xi < 1$. Расчёты показывают, что

$$\xi = \frac{c_{R1}^2}{c_{22}^2} + O(kh); \quad v_\phi = c_{R1} + O(kh) \text{ при этом } v_\phi < c_{R1}$$

2. $kh \gg 1$

$$2.1 \quad \xi < 1 \quad \frac{1}{c_0} < \xi < \frac{1}{c_0\eta_1}; \quad \left(\frac{c_{12}}{c_{22}} \right)^2 < \xi < \left(\frac{c_{11}}{c_{22}} \right)^2;$$

$$\text{th}(kh\sqrt{1-\xi c_0}) = i \text{tg}(kh\sqrt{\xi c_0 - 1}); \quad \text{th}(kh\sqrt{1-\xi c_0\eta_1}) \sim 1$$

$$\begin{aligned} & c_0 \left[(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi\eta_2)} \right] \sqrt{\xi c_0 - 1} + \\ & + \mu\sqrt{1-\xi} \left[(2-\xi c_0)^2 \text{tg}(kh\sqrt{\xi c_0 - 1}) - 4\sqrt{(1-\xi c_0\eta_1)(\xi c_0 - 1)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{tg}(kh\sqrt{\xi c_0 - 1}) = \frac{4\sqrt{(1-\xi c_0\eta_1)(\xi c_0 - 1)}}{(2-\xi c_0)^2} - \frac{c_0 \left[(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi\eta_2)} \right] \sqrt{\xi c_0 - 1}}{\mu\sqrt{1-\xi}(2-\xi c_0)^2} \quad (16)$$

Так как $\xi < 1$, получим $c_0 > 1$.

Для любого ξ из заданного интервала существует бесконечное множество kh , удовлетворяющих уравнению (13). Т.е. для фазовой скорости $c_{12} < v_\phi < \min(c_{11}, c_{22})$ по слою распространяются волны с разными kh .

$$2.2 \quad \xi < \frac{1}{c_0} < \frac{1}{c_0\eta_1}; \quad \xi < 1 \text{ тогда } \text{th}(kh\sqrt{1-\xi c_0}) \sim \text{th}(kh\sqrt{1-\xi c_0\eta_1}) \sim 1$$

$$\begin{aligned} & \mu\sqrt{1-\xi} \left[(2-\xi c_0)^2 - 4\sqrt{(1-\xi c_0\eta_1)(1-\xi c_0)} \right] + \\ & + c_0\sqrt{1-\xi c_0} \left[(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi\eta_2)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет тривиальный корень $\xi = 0$. Уравнение (9) можно представить в виде

$$\xi R_1(\xi) = 0$$

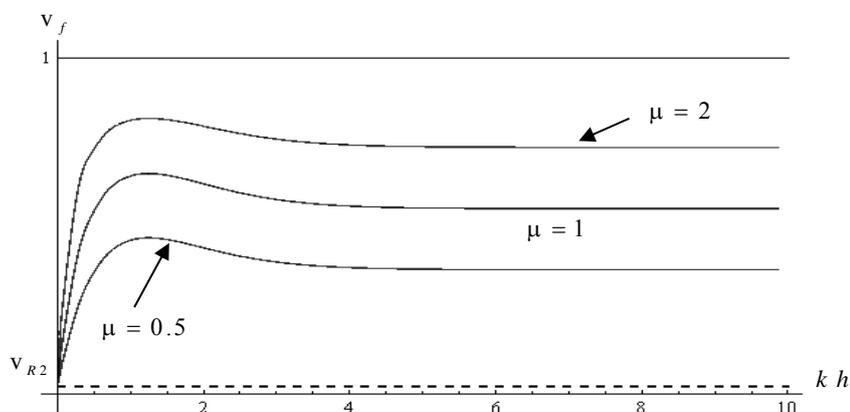
$$\text{где } R_1(\xi) = \mu\sqrt{1-\xi} \left[\xi c_0^2 + 4\sqrt{1-\xi} c_0 \frac{c_0(1-\eta_1)}{\sqrt{1-\xi} c_0 + \sqrt{1-\xi} c_0 \eta_1} \right] + c_0\sqrt{1-\xi} c_0 \left[\xi + 4\sqrt{1-\xi} \frac{(1-\eta_2)}{\sqrt{1-\xi} + \sqrt{1-\xi} \eta_2} \right] = 0 \quad (18)$$

$$R_1(0) = 2((1-\eta_2) + (1-\eta_1)\mu)c_0 > 0$$

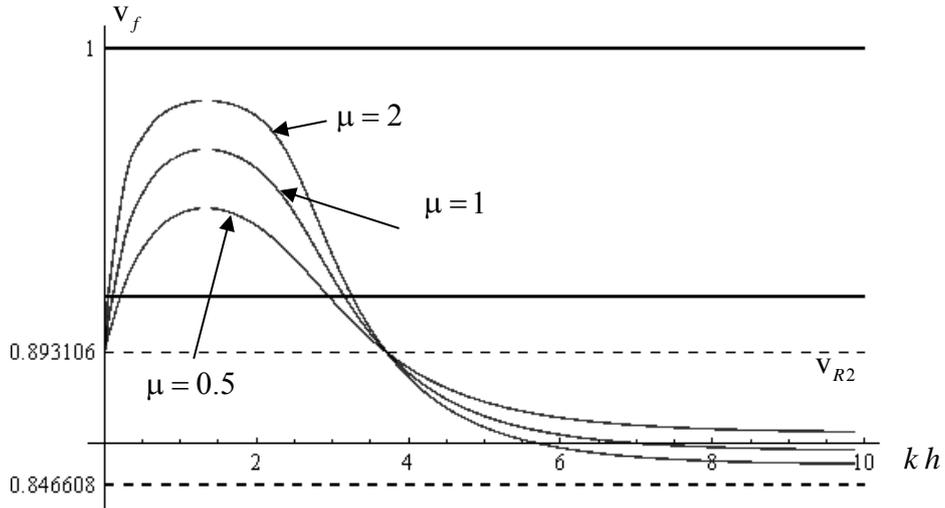
$$\text{При } c_0 < 1 \quad R_1(1) = -c_0\sqrt{1-c_0} < 0.$$

$$\text{При } c_0 > 1 \quad R_1(1/c_0) = -\mu\sqrt{(c_0-1)c_0} < 0.$$

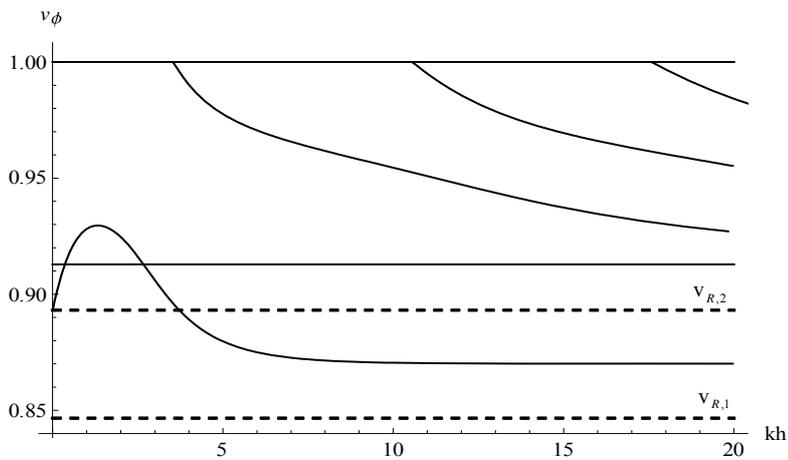
То есть существует, по крайней мере, один корень при $0 < \xi < \min(1, 1/c_0)$ и всегда имеет решение $v_\phi < \min(c_{12}, c_{22})$



Фиг 2. Зависимость фазовой скорости от kh при $\mu = \{0.5, 1, 2\}$ $c_0 = 0.5$; $v_1 = 0.3$; $v_2 = 0.1$;



Фиг. 3 Зависимость фазовой скорости от kh
 $\mu = \{0.5, 1, 2\}$ $c_0 = 1.2$; $v_1 = 0.3$; $v_2 = 0.1$;



Фиг. 4. Зависимость фазовой скорости от kh при
 $\mu = 0.3$; $c_0 = 0.5$; $v_1 = 0.3$; $v_2 = 0.1$;

Заключение. При $kh \ll 1$ (при длинных волнах) получим $v_\phi = c_{R1} + O(kh)$, которое означает, что фазовая скорость близка к скорости волн Рэлея в полуплоскости, оставаясь меньше. При $kh \gg 1$ и $c_0 > 1$ для любого ξ из $1/c_0 < \xi < 1$ существует бесконечное множество kh , удовлетворяющих дисперсионному уравнению. Расчёты показывают, что фазовая скорость достигает

максимального значения при $kh \approx 1.2$ и практически не зависит от физических характеристик, хотя само максимальное значение увеличивается с увеличением μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Chattarjee S.N. Propagation of Rayleigh Waves in a Layer Lying over a Heterogeneous Half Space. // Pure and Applied Geophysics. 1971. V 86. №3. P 69-79.
2. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания упругой изотропной полосы, жёстко связанной с анизотропной полуплоскостью. Современные проблемы механики сплошной среды. // Труды V Межд. конф. Ростов-на Дону. 12-14 окт.1999. Ростов-на Дону. Изд. СКНЦ ВШ. 2000. Т 2. С 31-37.
3. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания в системе: анизотропная полоса-полуплоскость при жёстком и скользящем соединении сред. // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2002. № 3. С.120-121.
4. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // В сб.: «Проблемы механики деформируемого твердого тела». Ереван: Изд-во НАН Армении. 1997. С.79-96.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупространство. //Механика, 58, №2, 2005. С.9-15.
7. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве с усиливающим тонким полубесконечным упругим слоем. /Тр. V международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 2-7 октября 2017, Цахкадзор, Армения, Ер.: НУАСА, 2017, с.69-70.

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович – К.ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА. Тел.:(37410) 27-62-23. **E-mail:** amirjanyan@gmail.com

Белубекян Мелс Вагаршакович – К.ф.-м.н., гл.н.с. Института механики НАН РА

Геворкян Гнун Завенович – К.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА

E-mail: gnungev@gmail.com

Дарбинян Артавазд Завенович – К.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА

E-mail: darbinyan_1954@mail.ru

Поступила в редакцию 10.01.2020

**ФЛАТТЕР КОМПОЗИЦИОННОЙ СЛОИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ ПРИ БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ**

Багдасарян Г.Е.

Ключевые слова: композиционная слоистая цилиндрическая оболочка, флаттер, критическая скорость

Baghdasaryan G.Y.

Flutter of a composite layered cylindrical shell in a supersonic gas flow

Key words: composite laminate cylindrical shell, flutter, critical speed.

The stability problem of a layered cylindrical shell made of monolayers of an orthotropic composite material in a supersonic gas flow is considered. The study was conducted in a linear formulation in the case of a closed elongated shell. The formula for determining the critical speed of flutter is obtained. The minimum value of the critical velocity by wave numbers was found depending on the angles of reinforcement of the layers of the shell material. Based on this, it was shown that a) the minimum value (by wave numbers) of the critical velocity is a function of the angle of reinforcement and takes maximum values when one of the main directions of elasticity of the material of the monolayers forming the shell coincides with the direction of gas flow, b) the minimum values of the minimum (by wave numbers) critical velocity are reached at points within the interval $(0, \pi)$. Therefore, by varying the physical-mechanical parameters of the composite aeroelastic system, especially the angle of reinforcement of the shell material, it is possible to optimally control the critical velocity of flutter.

Բաղդասարյան Գ.Ե.

**Գազի գերձայնային հոսանքով շրջհասվող կոմպոզիցիոն շերտավոր գլանային թաղանթի
կայունությունը**

Հիմնաբառեր՝ կոմպոզիցիոն շերտավոր գլանային թաղանթ, ֆլատեր, կրիտիկական արագություն

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհասվող օրթոտրոպ կոմպոզիցիոն նյութից (ԿԼ) պատրաստված շերտավոր գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը: Հետազոտությունը կատարված է գծային դրվածքով փակ երկար թաղանթի դեպքում: Ստացված է ֆլատերի կրիտիկական արագության որոշման բանաձև: Որոշված է կրիտիկական արագության ըստ ալիքային թվերի մինիմալ արժեքը՝ կախված թաղանթի նյութի շերտերի արմիրավորման անկյունից: Դրա հիման վրա ցույց է տրված, որ ա) կրիտիկական արժեքի (ըստ ալիքային թվերի) մինիմալ արժեքը ըստ արմիրավորման անկյան ֆունկցիա է և ընդունում է մակսիմալ արժեք, երբ թաղանթի նյութի մոնոշերտերի առաձգականության զիսավոր ուղղություններից մեկը համընկնում է գազի ուղղության հետ, բ) կրիտիկական արժեքի (ըստ ալիքային թվերի) մինիմալ արժեքը հասանելի է $(0, \pi)$ միջակայքի ներքին կետերում: Հետևաբար, կոմպոզիցիոն աերոառաձգական համակարգի ֆիզիկական պարամետրերի, և հատկապես թաղանթի նյութի արմիրավորման անկյան համապատասխան ընտրության միջոցով կարելի է օպտիմալ կերպով ղեկավարել ֆլատերի կրիտիկական արագության մեծությունը:

Рассматривается задача устойчивости слоистой цилиндрической оболочки конечной длины, изготовленной из монослоев ортотропного композиционного материала обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено в линейной постановке в случае замкнутой оболочки. Получена формула определения критической скорости флаттера. Найдено минимальное значение критической скорости по волновым числам в зависимости от углов армирования слоев материала оболочки. На этой

основе показано, что а) минимальное значение (по числам волн в окружном направлении) критической скорости является функцией угла армирования и принимает максимальные значения, когда одно из главных направлений упругости материала монослоев, образующих оболочку, совпадает с направлением потока газа; б) минимальные значения минимальной (по волновым числам) критической скорости достигаются в точках внутри интервала $(0, \pi)$. Следовательно, варьируя физико-механическими параметрами композиционной аэроупругой системы, особенно углом армирования материала оболочки, можно оптимально регулировать величину критической скорости флаттера.

Введение

Имеются многочисленные исследования, посвящённые устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. В частности, вопросы сверхзвукового флаттера изотропных, слоистых и анизотропных (некомпозиционных) тонких пластин и оболочек изучены достаточно полностью, и эффекты взаимодействия здесь оказались весьма существенными. Аналогичные вопросы для тонких тел конечных размеров из композиционного материала почти не исследованы.

Настоящая работа посвящена вопросам устойчивости композиционной слоистой цилиндрической оболочки конечной длины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено в линейной постановке в случае замкнутой оболочки, слой которой составлены из монослоев ортотропного композиционного материала. Аэродинамическое давление вычислено на основе приближённой формулы «поршневой теории» при малых возмущениях. Получена формула определения критической скорости флаттера. Найдено минимальное значение критической скорости по волновым числам в зависимости от углов армирования слоёв материала оболочки. Исследован вопрос оптимального регулирования величины минимальной критической скорости при помощи выбора угла армирования и физико-механических параметров рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h , составленную из конечного числа $(2k + 1)$ слоёв, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки. За координатную поверхность принимается срединная поверхность оболочки (срединная поверхность среднего слоя), которая представляется координатами α_1, α_2 (α_1 – вдоль образующей, α_2 – по дуге поперечного сечения) и радиусом кривизны $R = \text{const}$. Третья координатная линия α_3 прямолинейная и представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ до точки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ оболочки. Слои, симметрично расположенные относительно координатной поверхности $\alpha_3 = 0$, имеют одинаковые толщины, одинаковые физико-механические свойства и состоят из $2n_s$ элементарных слоёв ортотропного композиционного материала, уложенных поочерёдно под углами $\pm\varphi_s$ ($s = 1, 2, \dots, 2k + 1$) к оси цилиндра. Таким образом, рассматривается слоистая цилиндрическая оболочка, составленная из нечётного числа однородных ортотропных слоёв, симметрично расположенных относительно срединной поверхности [1,2]. Предполагается, что слои оболочки после деформирования остаются упругими и работают совместно, без скольжения.

Согласно вышеизложенному, упругие характеристики $B_{ij}^{(s)}$ материала S -ого слоя в главных геометрических направлениях оболочки, определяются через упругие характеристики $B_{ij}^{0(s)}$ соответствующих элементарных слоёв в главных физических направлениях по известным формулам поворота [3].

Пусть оболочка обтекается с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью \vec{u} ($|\vec{u}| = U = \text{const}$), направленной по образующим цилиндра. Исследовать устойчивость оболочки под действием избыточного давления газа, появляющегося вследствие малых возмущений обтекаемой поверхности (вследствие возмущённого колебания оболочки).

Для получения основных уравнений и соотношений, описывающих возмущённое движение рассматриваемой аэроупругой системы, принимаются следующие предположения:

- а) гипотеза о недеформируемых нормалях для всего пакета оболочки в целом [3];
- б) избыточное давление Δp вычисляется, используя приближённую формулу «поршневой теории» при малых возмущениях [4].

В силу принятых предположений получаются следующие уравнения и соотношения, описывающие поведение малых возмущений в рассматриваемой оболочке [3]:

уравнения возмущённого состояния:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \alpha_2} &= m^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_{21}}{\partial \alpha_1} &= m^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial \alpha_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1}{R} T_{22} + Z &= m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь m^* – приведённая масса, отнесённая к единице площади срединной поверхности

$$m^* = \frac{2}{g} \left[\gamma_{k+1} \delta_{k+1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i (\delta_i - \delta_{i+1}) \right],$$

где γ_i – удельный вес материала i -ого слоя, δ_i – расстояние верхней поверхности i -ого слоя от срединной поверхности, Z – нормальная составляющая внешней нагрузки, T_{ij} , M_{ij} – возмущения внутренних сил и моментов невозмущённого состояния;

соотношения упругости:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2, & M_{11} &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2, \\
T_{22} &= c_{12}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2, & M_{22} &= D_{12}\chi_1 + D_{22}\chi_2, \\
T_{12} &= T_{21} = c_{66}\omega, & M_{12} &= D_{66}\chi_{12}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь для жёсткостей растяжения c_{ij} и изгиба D_{ij} имеем:

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= 2 \left[B_{ij}^{(k+1)}\delta_{k+1} + \sum_{s=1}^k B_{ij}^{(s)}(\delta_s - \delta_{s+1}) \right], \\
D_{ij} &= \frac{2}{3} \left[B_{ij}^{(k+1)}\delta_{k+1}^3 + \sum_{s=1}^k B_{ij}^{(s)}(\delta_s^3 - \delta_{s+1}^3) \right],
\end{aligned}$$

где упругие постоянные $B_{ij}^{(s)}$ материала s -ого слоя в главных геометрических направлениях оболочки, согласно формулы поворота, имеют следующие представления [3]:

$$\begin{aligned}
B_{11}^{(s)} &= B_{11}^{0(s)} \cos^4 \varphi_s + 2B_0^{(s)} \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + 2B_{22}^{0(s)} \sin^4 \varphi_s, \\
B_{22}^{(s)} &= B_{11}^{0(s)} \sin^4 \varphi_s + 2B_0^{(s)} \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + 2B_{22}^{0(s)} \cos^4 \varphi_s, \\
B_{12}^{(s)} &= B_{12}^{0(s)} + [B_{11}^{0(s)} + B_{22}^{0(s)} - 2B_0^{(s)}] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s, \\
B_{66}^{(s)} &= B_{66}^{0(s)} + [B_{11}^{0(s)} + B_{22}^{0(s)} - 2B_0^{(s)}] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s, \\
B_0^{(s)} &= B_{12}^{0(s)} + 2B_{66}^{0(s)};
\end{aligned} \tag{1.3}$$

геометрические соотношения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha_1}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R}, & \omega &= \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_1}, \\
\chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, & \chi_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, & \chi_{12} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

В (1.1)-(1.4), $u(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $v(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $w(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности оболочки, $B_{ij}^{0(s)}$ – упругие постоянные материала s -ого слоя в главных физических направлениях (упругие постоянные элементарных слоёв, образующих данный слой оболочки), φ_s – угол армирования материала s -ого слоя.

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (1.2) в уравнение (1.1), получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений возмущённого движения оболочки:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} &= m^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_2^2} + c_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_{22}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} &= m^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_2^4} + \\
+ \frac{1}{R} \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + c_{22} \frac{w}{R^2} + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Поперечная нагрузка $Z(\alpha_1, \alpha_2, t)$ возмущённого состояния складывается из сил демпфирования и избыточного аэродинамического давления Δp

$$Z = -\varepsilon m^* \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p, \tag{1.6}$$

где ε – коэффициент затухания.

Используя формулу давления, полученную на основе «поршневой теории», для Δp в линейном приближении получается следующее представление [5]:

$$\Delta p = -\varkappa p_0 \left(\frac{1}{a_0} \frac{\partial w}{\partial t} + M \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right), \quad M = \frac{U}{a_0}, \tag{1.7}$$

где M – число Маха, p_0 – давление, a_0 – величина скорости звука для невозмущённого газа, \varkappa – показатель политропы.

Если частота собственных поперечных колебаний оболочки мала по сравнению с частотой собственных колебаний в своей поверхности, то тангенциальными составляющими сил инерции можно пренебречь. В этом случае, введя функцию $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, t)$, связанную с u, v, w соотношениями [3]

$$\begin{aligned}
u &= L_1 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \Phi, \\
v &= L_2 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[(a_{66} - a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} - a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \right] \Phi, \\
w &= L_3 \Phi = \left[a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \right] \Phi,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

с учётом (1.6) и (1.7), приведём систему (1.5) к одному разрешающему уравнению [6]

$$PL_3 \Phi + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha_1^4} + L_3 \left[m^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(m^* \varepsilon + \frac{\varkappa p_0}{a_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \varkappa p_0 M \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] \Phi = 0, \tag{1.9}$$

где линейный дифференциальный оператор P имеет вид

$$P = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4}.$$

Коэффициенты a_{ik} линейных дифференциальных операторов L_i ($i = 1, 2, 3$) определяются формулами [3]

$$a_{ik} = \frac{c_{ik}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad a_{66} = \frac{1}{c_{66}} \quad (i = 1, 2, \quad k = 1, 2). \quad (1.10)$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа сведена к решению уравнения (1.9) при обычных условиях закрепления краёв оболочки.

2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки, шарнирно опёртой по торцам со свободным смещением в продольном направлении и при отсутствии смещения в дуговом. Тогда имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} v = 0, \quad T_{11} = 0 \\ w = 0, \quad M_{11} = 0 \end{aligned} \quad \text{при } \alpha_1 = 0 \text{ и } \alpha_1 = l \quad (2.1)$$

где l – длина оболочки.

Решение уравнения (1.9), удовлетворяющее условиям (2.1), представим в виде

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \lambda_m \alpha_1 \cos \frac{n}{R} \alpha_2, \quad \left(\lambda_m = \frac{m\pi}{l} \right), \quad (2.2)$$

где m – число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей, n – число волн в окружном направлении, $f_{mn}(t)$ – функции, подлежащие определению.

Представление (2.2) удовлетворяет условиям замкнутости оболочки по координате α_2 .

Подставляя (2.2) в (1.9) и используя обычный процесс ортогонализации, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно безразмерных функций $x_{mn} = f_{mn}/h$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_{mn}}{d\tau^2} + \gamma_n \frac{dx_{mn}}{d\tau} + \Omega_{mn}^2 x_{mn} + \Psi_{mn} = 0, \\ (m = 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\tau = \omega_{1n} t, \quad \gamma_n = \frac{1}{\omega_{1n}} \left(\varepsilon + \frac{\alpha p_0}{m^* a_0} \right), \quad \Omega_{mn}^2 = \frac{\omega_{mn}^2}{\omega_{1n}^2}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{mn}^2 &= \frac{1}{m^*} \left[D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \frac{n^2}{R^2} + D_{22} \frac{n^4}{R^4} + \frac{\lambda_m^4}{R^2 A_{mn}} \right], \\
A_{mn} &= a_{11} \lambda_m^4 + (a_{66} - 2a_{12}) \lambda_m^2 \frac{n^2}{R^2} + a_{22} \frac{n^4}{R^4}, \\
\Psi_{mn} &= \nu K_n \frac{m}{2A_{mn}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{m+k}}{m^2 - k^2} k A_{kn} x_{kn}, \quad K_n = \frac{4\alpha p_0}{m^* h \omega_{1n}^2}, \quad \nu = M \frac{h}{l}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь ω_{mn} – частоты малых собственных колебаний оболочки, ν – приведённый параметр скорости, а штрих над суммой означает, что член $k = m$ отсутствует.

Таким образом, получена система линейных дифференциальных уравнений (2.3), которая внешне не отличается от соответствующих систем уравнений, полученных в работе [7] в случае однослойных изотропных оболочек и в работе [6] в случае слоистых оболочек, слои которых составлены из обычных ортотропных (некомпозиционных) материалов. Однако, коэффициенты уравнений системы (2.3), как и следовало ожидать, зависят от углов армирования φ_s и поэтому, существенно отличаются от соответствующих коэффициентов, полученных в указанных работах.

3. Определение критической скорости флаттера

Будем искать такие значения числа M , при которых тривиальное решение $u \equiv 0$, $v \equiv 0$, $w \equiv 0$ рассматриваемой задачи (1.9), (2.1) (следовательно, и тривиальное решение $x_{mn} \equiv 0$ системы (2.3)) становится неустойчивым, что физически соответствует явлению флаттера. При этом " n " рассматривается как параметр и строится последовательность приближений по m . При $m = 2$, что соответствует первому приближению, система (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y_{1n}}{d\tau^2} + \gamma_n \frac{dy_{1n}}{d\tau} + y_{1n} - \frac{2}{3} \nu K_n y_{2n} &= 0, \\
\frac{d^2 y_{2n}}{d\tau^2} + \gamma_n \frac{dy_{2n}}{d\tau} + \Omega_{2n}^2 y_{2n} + \frac{2}{3} \nu K_n y_{1n} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $y_{1n} = A_{1n} x_{1n}$, $y_{2n} = A_{2n} x_{2n}$.

Представляя решение системы (3.1) в виде $y_{in} = z_{in} e^{\lambda \tau}$ ($i = 1, 2$), получим следующее характеристическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^4 + 2\gamma_n \lambda^3 + (\Omega_{2n}^2 + 1 + \gamma_n^2) \lambda^2 + \gamma_n (\Omega_{2n}^2 + 1) \lambda + \Omega_{2n}^2 + \frac{4}{9} K_n^2 \nu^2 = 0.$$

Невозмущённое состояние оболочки будет устойчиво, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица, записываются в виде:

$$\gamma_n > 0, \quad \gamma_n (1 + \Omega_{2n}^2) > 0, \quad (\Omega_{2n}^2 - 1)^2 + 2\gamma_n^2 (1 + \Omega_{2n}^2) - \frac{16}{9} K_n^2 \nu^2 > 0.$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из третьего неравенства получим следующую формулу (соответствующую первому приближению) для определения предельных значений скорости обтекающего потока газа v_n^*

$$v_n^* = \frac{3}{4} \frac{\Omega_{2n}^2 - 1}{K_n} \left[1 + \frac{2\gamma_n^2 (\Omega_{2n}^2 + 1)}{(\Omega_{2n}^2 - 1)^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

при которых невозмущённое состояние оболочки становится неустойчивым. Критической скоростью флаттера при $m = 2$ является минимальное значение функции v_n^* по n (минимальное значение предельных скоростей).

Аналогичным образом при $m = 4$, в случае отсутствия затухания получается следующее уравнение для определения v_n^* :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{256}{175} \right)^2 K^4 v^4 + \left[\frac{144}{49} (1 - \lambda^2) (\Omega_{2n}^2 - \lambda^2) + \frac{36}{25} (1 - \lambda^2) (\Omega_{4n}^2 - \lambda^2) + \right. \\ & \left. + \frac{16}{225} (\Omega_{2n}^2 - \lambda^2) (\Omega_{3n}^2 - \lambda^2) + \frac{4}{9} (\Omega_{3n}^2 - \lambda^2) (\Omega_{4n}^2 - \lambda^2) \right] K^2 v^2 + \\ & + (1 - \lambda^2) (\Omega_{2n}^2 - \lambda^2) (\Omega_{3n}^2 - \lambda^2) (\Omega_{4n}^2 - \lambda^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отметим, что аналогичные (3.2) и (3.3) формулы и уравнения, получены также в работах [5-7]. Здесь существенное отличие составляет зависимость коэффициентов в (3.2) и (3.3) от углов армирования ϕ_s слоёв оболочки.

Решив уравнение (1.19) относительно v , находим зависимость $v = f(\lambda)$. При этом, критическому параметру v соответствует слияние двух соседних действительных частот λ [5-7]. Следовательно, наибольший интерес представляют те значения параметра n , при которых предельная скорость принимает минимальное значение. Значения n_* , для которых v_n^* принимает минимальное значение, согласно (3.2), в случае отсутствия затухания определяются из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{6(D_{12} + 2D_{66})}{\pi^2} - \frac{1}{R^2 l^2} \left[16 \frac{(a_{66} - 2a_{12}) \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 + 2a_{22} \frac{n^2}{R^2}}{A_{2n}^2} - \right. \\ & \left. - \frac{(a_{66} - 2a_{12}) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + 2a_{22} \frac{n^2}{R^2}}{A_{1n}^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Величина n_* , при которой v_n^* принимает минимальное значение, определяется как одно из двух чисел, ближайших к корню уравнения (3.4). Рассматривая (3.4), легко заметить, что критическое значение параметра n_* существенным образом зависит от упругих коэффициентов материала оболочки и от угла армирования Φ . Отметим, что для однослойной изотропной оболочки оно зависит только от коэффициента Пуассона [7].

Для наглядности и простоты рассматривается случай однослойной оболочки. Тогда, уравнение (3.4) можно привести к виду:

$$\frac{\bar{B}_{66}(\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}^2)}{\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66}} \left[\frac{16(2\pi^2 Q + qx)}{(16\pi^4 \bar{B}_{11}\bar{B}_{66} + 4\pi^2 Qx + qx^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 Q + 2qx}{(\pi^4 \bar{B}_{11}\bar{B}_{66} + \pi^2 Qx + qx^2)^2} \right] = \left(\frac{hR}{2\pi l^2} \right)^2 \quad (3.5)$$

где $\bar{B}_{ik} = \frac{B_{ik}}{B_{11}^0}$, $Q = \bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}^2 - 2\bar{B}_{12}\bar{B}_{66}$, $q = \bar{B}_{22}\bar{B}_{66}$, $x = \gamma^2 n^2$, $\gamma = l/R$.

Таким образом, в случае однослойной ортотропной композиционной оболочки критическое значение параметра n в первом приближении определяется из уравнения (3.5), коэффициенты которого зависят от отношений типа B_{ik}/B_{11}^0 и угла армирования Φ материала оболочки. Следовательно, от указанных параметров, согласно (3.2), зависят также значения функции $v_{cr}^{\min}(\varphi) = \min_{(n)} v_n^*$ (минимальное значение критической скорости v_n^* по n).

Для иллюстрации указанной зависимости приведены числовые расчёты: сперва определены значения n_* , численно решая уравнение (3.5) при определённых значениях угла Φ (таблица 1). Затем, используя найденные $n_*(\varphi)$, из (3.2) при отсутствии затухания вычислены значения функции $v_{cr}^{\min}(\varphi)$. Для расчёта принято $h = 0.01l$ и рассмотрена оболочка, изготовленная из СВМ-ИММ со следующими безразмерными упругими характеристическими $\bar{B}_{ik}^0 = B_{ik}^0/B_{11}^0$ в главных направлениях упругости [9,10]: $\bar{B}_{22}^0 = 0.26$, $\bar{B}_{12}^0 = 0.078$, $\bar{B}_{66}^0 = 0.086$. В табл. 1 приведены те значения n , при которых v_n^* принимает экстремальные значения. При этом, они представлены в виде дроби, числитель которой представляет величину n , при которой v_n^* принимает минимальное значение, а знаменатель – максимальное значение.

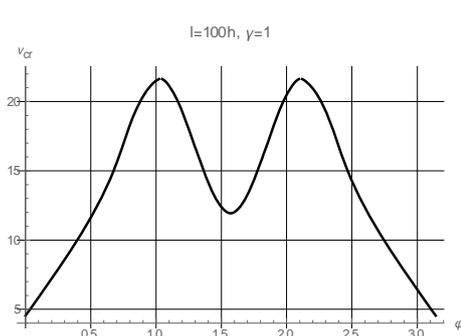
Результаты вычислений для минимальных значений критической скорости в зависимости от угла Φ представлены на фиг.1. Те же самые вычисления произведены

в случае максимальных значений, которые представлены на фиг.2. Кривые на этой фигуре представляют собой зависимости экстремальной безразмерной критической скорости $v_{cr}^{min}(\varphi) = A\tilde{v}(\varphi)$ от угла армирования φ . Здесь

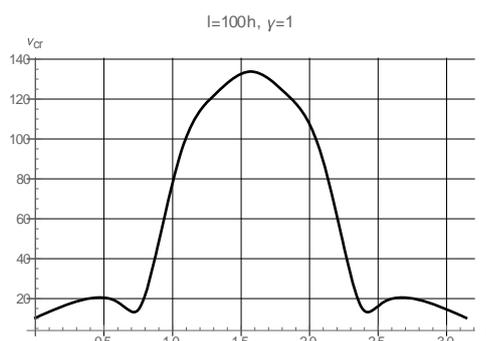
$$A = \frac{1}{3\pi^4} \left(\frac{l}{h}\right)^4 \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{a_0}{c_t}\right)^2, \quad c_t^2 = \frac{B_{11}^0}{\rho}, \quad \rho - \text{плотность материала оболочки, } \rho_0 - \text{плотность газа.}$$

Таблица 1

$\varphi \backslash \gamma$	0.5	0.8	1	2	3
0	15 / 6	13 / 3	12 / 3	8 / 1	7 / 1
$\pi/6$	15 / 10	13 / 7	12 / 5	8 / 3	6 / 2
$\pi/4$	16 / 10	13 / 6	11 / 6	7 / 2	5 / 2
$\pi/3$	16 / 7	12 / 4	11 / 3	7 / 2	5 / 1
$\pi/2$	17 / 3	13 / 2	12 / 1	8 / 1	6 / 1



Фиг.1.



Фиг.2.

Приведённые фигуры показывают, что а) максимальные значения минимальной критической скорости получаются при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$, т.е., когда одно из главных направлений упругости материала монослоев, образующих оболочку, совпадает с направлением потока газа, б) минимальные значения минимальной (по n) критической скорости достигаются в точках внутри интервала $(0, \pi)$, расположение которых существенно зависит от отношений типа B_{ik}^0/B_{11}^0 . Таким образом, варьируя физико-механические параметры композиционной аэроупругой системы, особенно угол армирования материала оболочки, можно оптимально регулировать величину критической скорости флаттера.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 18T-2C149.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёт многослойных пластинок и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials. M.: Mechanical Engineering, 1984. (in Russian).
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. Л.: Машиностроение, 1985. Vasiliev V.V. Mechanics of structures made of composite materials. L.: Engineering, 1985. (in Russian).
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука 1974. Ambartsumyan S.A. The general theory of anisotropic shells. M.: Science 1974. (in Russian).
4. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. Journ. Aeronaut. Sci. 23, N6, 1956.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.:Физматгиз, 1961. Bolotin V.V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. M.: Fizmatgiz, 1961. (in Russian).
6. Багдасарян Г.Е. Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки в потоке газа. Труды IV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Ереван, 1962. Baghdasaryan G.E. Stability of an orthotropic cylindrical shell in a gas stream. Proceedings of the IV All-Union Conference on the Theory of Plates and Shells. Yerevan, 1962. (in Russian).
7. Швейко Ю. Ю. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа. Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Мех. и машиностр., 1960. № 6. С. 74-79.
8. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетере Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига:Зинатне, 1980. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Tetere G.A. Resistance of polymer and composite materials. Riga: Zinatne, 1980. (in Russian).
9. Jones R.M. Mechanics of composite materials. New York, Mc. Craw-Hill Book Co., 1975.

Сведенияобавторе:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН Армении, профессор, ведущий научный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (010) 355308; **E-mail:** gevorg.baghdasaryan@rau.am

Поступила в редакцию 20.01.2020

**К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ РЕБРОМ
ЖЁСТКОСТИ НА СВОБОДНОМ КРАЕ**

Белубекян В.М., Белубекян Э.В.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, локализованная неустойчивость, свободный край, ребро усиления.

Belubekyan V.M., Belubekyan E.V.

On the stability problem of the plate with a rib reinforcement of the free edge

Keywords: rectangular plate, localized nonstability, free edge, rib reinforcement.

The rectangular plate with three simply supported edges and rib reinforced free edge is considered. The plate is preliminary regularly suppressed by the opposite free supported edges. The influence of the reinforcement characteristics on localized instability near the free edges are investigated.

Բելուբեկյան Վ.Մ., Բելուբեկյան Է.Վ.

**Ազատ եզրով կոշտության կողով ուղեկցված սալի կայունության խնդրի մասին
Հիմնաբաներ. Ուղղանկյուն սալ, տեղայնացված անկայունություն, ազատ եզր, ամրացման կող.**

Գիտարկված է ուղղանկյուն առաձգական սալ, որի երեք կողմերը հողակապորեն ամրակցված են և մեկ կողմը ազատ է, բայց ուժեղացված է կողով: Սալը նախապես սեղմված է հավասարաչափ հակադիր հողակապորեն ամրակցված կողմերով: Հետազոտված է կողի բնութագրիչների ազդեցությունը ազատ եզրի շրջակայքում տեղայնացված անկայունության առաջացման պայմանի վրա:

Рассматривается прямоугольная упругая пластинка с тремя шарнирно закреплёнными краями и одним свободным, усиленным ребром жёсткости. Пластинка предварительно равномерно сжата по двум противоположным шарнирно закреплённым сторонам. Исследуется влияние характеристик ребра жёсткости на условия появления локализованной неустойчивости окрестности свободного края.

Введение.

В статье А.Ю. Ишлинского [1] доказано, что пластинка с двумя нагружёнными противоположными шарнирно закреплёнными краями и с двумя другими свободными краями может потерять устйчивость при критической нагрузке меньшей, чем критическая нагрузка потери устойчивости по цилиндрической форме поверхности независимо от отношения сторон пластинки.

Отсюда следует, что возможна потеря устойчивости пластинки, локализованной в окрестности свободного края [2,3]. Известны способы стабилизации нагружённой пластинки при помощи рёбер жёсткости и шпангоутов [4,5]. В настоящей статье показывается возможность устранения локализованной неустойчивости при помощи ребра жёсткости.

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) пластинка занимает область $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h$. Пластинка по кромкам $y = 0, y = b$ предварительно равномерно сжата. При допущениях теории Кирхгофа уравнение статической устойчивости пластинки имеет вид

$$D\Delta^2 w + P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (1.1)$$

где $w(x, y)$ – функция прогиба, Δ – оператор Лапласа,

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad P = 2h\sigma_0 \quad (1.2)$$

– жёсткость пластины на изгиб и усилие, приложенное на кромках $y = 0, b$, соответственно.

Три стороны пластинки шарнирно закреплены:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b. \quad (1.4)$$

По четвёртой стороне пластинка соединена с ребром жёсткости, что приводит к следующим граничным условиям [4,6]:

$$D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + G_0 I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \text{при } x = 0 \quad (1.5)$$

$$D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + E_0 I \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma_0 S \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

В (1.5) $\sigma_0 S, E_0 I$ – жёсткости ребра (балки) на кручение и изгиб, соответственно.

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям шарнирного закрепления ((1.4), представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = n\pi/b. \quad (1.6)$$

Подстановка (1.6) в (1.1) приводит к решению последовательных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_n^{IV} - 2\lambda_n^2 f_n'' + \lambda_n^4 (1 - \eta^2) f_n = 0, \quad (1.7)$$

где

$$\eta^2 = 2h\sigma_0 / (D\lambda_n^2). \quad (1.8)$$

Общее решение уравнения (1.7) получается в виде

$$f_n(x) = A_n \operatorname{sh} P_1 \lambda_n x + B_n \operatorname{ch} P_1 \lambda_n x + C_n \operatorname{sh} P_2 \lambda_n x + D_n \operatorname{ch} P_2 \lambda_n x, \quad (1.9)$$

где

$$p_1 = \sqrt{1+\eta}, \quad p_2 = \sqrt{1-\eta}. \quad (1.10)$$

Требование, чтобы (1.6) с учётом (1.9) удовлетворяло также граничным условиям шарнирного защемления (1.3), даёт

$$f_n(x) = F_n \operatorname{sh} p_1 \lambda_n (a-x) + G_n \operatorname{sh} p_2 \lambda_n (a-x), \quad (1.11)$$

где F_n, G_n – новые произвольные постоянные.

2. Подстановка (1.6), с учётом выражения для функции $f_n(x)$ из (1.11) в граничные условия (1.5), приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных F_n, G_n :

$$\begin{aligned} & \left[(p_1^2 - \nu) \operatorname{sh} \zeta_1 + \gamma_1 p_1 \operatorname{ch} \zeta_1 \right] F_n + \left[(p_2^2 - \nu) \operatorname{sh} \zeta_2 + \gamma_1 p_2 \operatorname{ch} \zeta_2 \right] G_n = 0 \\ & \left[p_1 (p_1^2 - 2 + \nu) \operatorname{ch} \zeta_1 - \gamma_2 p_1 \operatorname{sh} \zeta_1 \right] F_n + \left[p_2 (p_2^2 - 2 + \nu) \operatorname{ch} \zeta_2 - \gamma_2 \operatorname{sh} \zeta_2 \right] G_n = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

В (2.1) приняты новые обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{\lambda_n}{D} \left(E_0 I - \frac{G_0 S}{\lambda_n^2} \right), \quad \zeta_k = p_k \lambda_n a \quad (k=1, 2), \\ \gamma_1 &= \frac{G_0 I_1}{D} \lambda_n, \quad \gamma_2 = \frac{E_0 I}{D} \lambda_n - \frac{G_0 S}{D \lambda_n}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Условие равенств нулю детерминанта системы уравнений (2.1) после преобразований приводится к уравнению

$$\begin{aligned} & p_2 \left[(p_1^2 - \nu)(p_2^2 - 2 + \nu) + \gamma_1 \gamma_2 \right] \operatorname{th} \zeta_1 - p_1 \left[(p_2^2 - \nu)(p_1^2 - 2 + \nu) + \gamma_1 \gamma_2 \right] \operatorname{th} \zeta_1 - \\ & - (p_1^2 - p_2^2) [\gamma_2 \operatorname{th} \zeta_1 \operatorname{th} \zeta_2 + \gamma_1 p_1 p_2] = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.3) для полубесконечной пластинки $a/b \rightarrow c_0$ или в приближении $\operatorname{th} \zeta_k \approx 1$ получается (И – оператор Ишлинского [1])

$$(p_2 - p_1) I(\eta, \nu) = 0, \quad (2.4)$$

где

$$I(\eta, \nu) \equiv p_1^2 p_2^2 + 2(1-\nu) p_1 p_2 - \nu^2 + (p_1 + p_2)(\gamma_2 + \gamma_1 p_1 p_2) + \gamma_1 \gamma_2 = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение, аналогичное уравнению (2.4), получается в задаче локализованных изгибных колебаний пластин, усиленных рёбрами жёсткости [7].

Корень уравнения (2.4) $\eta = 0$ ($p_1 = p_2$) соответствует тривиальному решению

$w \equiv 0$. Функция $I(\eta, \nu)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} I(0, \nu) &= (1-\nu)(3+\nu) + 2(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_1 \gamma_2 > 0 \\ I(1, \nu) &= -\nu^2 + \sqrt{2} \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

В случае отсутствия ребра ($\gamma_1 - \gamma_2 = 0$) из (2.6) следует $I(1, \nu) < 0$ при $\nu \neq 0$ и локализованная неустойчивость имеет место, так как уравнение (2.4) имеет решение, удовлетворяющее условию

$$0 < \eta < 1, \quad (2.7)$$

поэтому из (2.6) получается следующее условие отсутствия локализованной неустойчивости

$$(\sqrt{2} + \gamma_1)\gamma_2 > \nu^2. \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.3) также можно получить условия появления локализованной неустойчивости в зависимости от относительных размеров пластинки. Уравнение (2.3) имеет корень $\eta = 1$, который разделяет решения, удовлетворяющие условию $\eta > 1$ от решений, удовлетворяющих условию (2.8), при котором локализованная неустойчивость существует [8]. Исключив корень $\eta = 1$ ($p_2 = 0$) из уравнения (2.3), получим:

$$\begin{aligned} & \left[(2-\nu)^2 - \gamma_1\gamma_2 \right] \text{th} \sqrt{2} \lambda_n a - \sqrt{2} (\nu^2 - \gamma_1\gamma_2) \lambda_n a + \\ & + 2 \left[\gamma_2 \lambda_n a \text{th} \sqrt{2} \lambda_n a + \sqrt{2} \gamma_1 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) определяет значение корня $\lambda_n a$, с увеличением которого корни уравнения (2.5) – η будут удовлетворять условию (2.7), т.е. условию существования локализованной неустойчивости окрестности свободного края пластинки, усиленной ребром жёсткости. Использование приближения $\text{th} \sqrt{2} \lambda_n a \approx 1$ даёт простое решение для $\lambda_n a$

$$\lambda_n a > \frac{(2-\nu)^2 - \gamma_1\gamma_2 + 2\sqrt{2}\gamma_1}{\sqrt{2}(\nu^2 - \gamma_1\gamma_2 + \sqrt{2}\gamma_2)}, \left(\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \lambda_1 a > \frac{(2-\nu)^2}{\sqrt{2}\nu^2} \right). \quad (2.10)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин. // Докл. СССР. 1954. Т.ХСV. №3. С.477-479. Ishlinskii A.Yu. About the some limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates // Reports of Academy of Sciences 1954, v.95, №3, p.38-46. (in Russian).
2. Белубекян М.В. Задача локализованной неустойчивости пластинки. / В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем». Ереван: Изд.ЕГУ, 1997. С.95-99. Belubekyan M.V. The problem of the plate localized nonstability // In book «The questions of the mechanical sistem optimal contrability, stability and strengths». Yerevan, YSU ed., 1997, pp.95-99 (in Russian).
3. Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластин с учётом поперечных сдвигов. // Изв.РАН. МТТ. 2004. №2. С.126-131. Belubekyan M.V. On the plate stability problem with accounting of the transvers shear // Izv.RAS, 2004, №2, pp126-131. (in Russian).

4. Timoshenko S., Woinovsky-Krieger S. Theory of Plates and Sheis. Me Graw-Hill. 1959.
5. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312с. Alfhutov N.A. The basis of calculation on the mechanical system stability. М.: «Mashinostroenie», 1978. 312p. (in Russian).
6. Белубекян Э.В., Погосян А.Г. Оптимальное проектирование прямоугольной ребристой пластинки из композиционного материала по критерию устойчивости. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.66. №1. С.38-43. Belubekyan E.V., Pogosyan A.G. Optimal desing of the rectangular plate of composite material, rein-focused with rigid ribs by the stability cuterion //Proc. of NAS of Armenia, 2007, v.66, №1, pp.38-43. (in Russian).
7. Attilio Milanese, Pier Mazzocca, Mels Belubekyan, Karen Chazaryan. Effect of the stiffness and inertia of a rib rein foreement on localized bending waves un semi-infinite strips. Intern.Yournal of solids and structures. 2009. 46. P.2126-2135.
8. Белубекян М.В. Условия появления локализованных изгибных колебаний растянутой пластинки. / В сб.: «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела». Ереван: «Гитутюн», 2017. С.93-98. Belubekyan M.V. Localized bending vibration appearence condition of the plate under tension /«Problems of deformable solid body». Yerevan, 2017, pp.93-98. (in Russian).

Сведения об авторах:

Белубекян Вагаршак Мелсович – к.ф.м.н., Институт механики НАН Армении. **E-mail:** vbelub@gmail.com

Белубекян Эрнест Вагаршакович – доктор технических наук, профессор.
E-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 16.12.2019

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ
МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ ПО ГРАДИЕНТНОЙ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Саркисян Л.С., Саркисян С.О.

Ключевые слова: градиентная теория, упругость, асимптотический метод, тонкой стержень, прикладная модель, растяжение-сжатие, изгиб.

Sargsyan L.S., Sargsyan S.H.

Asymptotic method of construction of an applied model of deformation of thin beams by the gradient theory of elasticity

Key words: gradient theory, elasticity, asymptotic method, thin beam, applied model, tension-compression, bending

In the present paper the plane problem of the gradient theory of elasticity in a thin rectangular region is considered. The asymptotic method is applied and an internal iterative process is constructed. Based on the results of the internal iterative process (respectively for the symmetric and inversely symmetric cases), the following is constructed: a) an applied model of the bending deformation of a thin beam according to the gradient theory of elasticity, b) an applied model of the compression tension of a beam according to the gradient theory of elasticity.

The constructed applied models of bending deformation and compression tension of thin beams according to the gradient theory of elasticity will be further used to solve specific boundary value problems.

Մարգարյան Լ.Ս., Մարգարյան Ս.Ն.

Առաձգականության գրադիենտային տեսությամբ բարակ ձողերի կիրառական մոդելների կառուցման ասիմպտոտիկ մեթոդը

Հիմնարարներ: գրադիենտային առաձգականության տեսություն, ասիմպտոտիկ մեթոդ, բարակ ձողեր, կիրառական մոդել, ձգում-սեղմում, ծռում:

Աշխատանքում դիտարկվում է առաձգականության գրադիենտային տեսության հարթ խնդիրը բարակ ուղղանկյուն տիրույթում: Կիրառվում է ասիմպտոտիկ մեթոդը և կառուցվում է ներքին իտերացիոն պրոցեսը: Ներքին իտերացիոն պրոցեսի հիման վրա (սիմետրիկ և հակասիմետրիկ դեպքերին համապատասխան) կառուցվում է ա) ըստ առաձգականության գրադիենտային տեսության բարակ ձողի ծռման դեֆորմացիայի կիրառական մոդելը, բ) ըստ առաձգականության գրադիենտային տեսության բարակ ձողի ձգման-սեղման դեֆորմացիայի մոդելը: Գրադիենտային առաձգականության տեսությամբ բարակ ձողերի ծռման և ձգման-սեղման դեֆորմացիաների մաթեմատիկական մոդելները հետագայում կիրառվելու են որոշակի եզրային խնդիրների լուծման համար:

В работе рассматривается плоская задача градиентной теории упругости в тонкой прямоугольной области. Применяется асимптотический метод и построен внутренний итерационный процесс. На основе результатов внутреннего итерационного процесса (соответственно, для симметричного и антисимметричного случаев), построена: а) прикладная модель изгибной деформации тонкого стержня по градиентной теории упругости, б) прикладная модель растяжения-сжатия стержня по градиентной теории упругости. Построенные прикладные модели изгибной деформации и растяжения сжатий тонких стержней по градиентной теории упругости в дальнейшем будут использованы для решения конкретных краевых задач.

1. Введение. Известно, что модель классической упругости не может учесть микроструктуру материала и масштабный эффект. Микроструктуру материала и масштабный эффект учитываются как в моментной теории упругости, так и в градиентной теории упругости.

Известны две основные формулировки градиентной теории упругости. Первая, это модель Эрингена (Eringen) [1], которая из себя представляет формулировку модели интегрального типа на основе нелокальной теории упругости. Вторая модель, это модель Айфантиса (Aifantis) [2-4], в которой в определяющих соотношениях напряжения зависят от деформаций и от второго градиента деформаций.

В данной статье будет рассмотрена модель Айфантиса.

Система основных уравнений трехмерной градиентной теории упругости для изотропного материала представляет собой [2-4]:

Соотношения упругости

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - l^2 \varepsilon_{kl,mm}), \quad (1.1)$$

где σ_{ij} – напряжения, зависящие от деформаций ε_{kl} и второго градиента деформаций,

D_{ijkl} – тензор упругих коэффициентов четвертого ранга классической теории упругости, l – параметр внутренней длины, связанный с размерами микроструктуры материала.

Уравнения (1), как в классической теории упругости, решаются совместно с уравнениями равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1.2)$$

а связь между деформациями и перемещениями записывается в виде классических геометрических соотношений Коши:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (1.3)$$

Отметим, что все индексы в уравнениях (1.1)-(1.3) принимают значения 1,2,3, а по повторяющимся индексам имеем суммирование, запятой обозначено дифференцирование по соответствующей координате. Отметим, что при $l = 0$, уравнения (1.1)-(1.3) переходят к уравнениям классической теории упругости.

Асимптотический метод построения упругих тонких стержней, пластин и оболочек по классической теории упругости развит в работах К.О. Фридрикса [5], А.Е. Грина [6], А.Л. Голденвейзера [7], И.И. Воровича [8], В. Л. Бердичевского [9], Л.А. Агаловяна [10,11], Ю.Д. Каплунова [12] и др., в магнитоупругости и в моментной теории упругости – в работах С.О. Саркисяна [13-17].

В данной работе используется вариант асимптотического метода, применяемого в работах [7,10, 11, 13-17] и на основе системы уравнений в тонкой прямоугольной области плоского напряжённого состояния градиентной теории упругости, выведены основные уравнения прикладной модели для деформаций растяжения-сжатия и изгиба тонкого стержня.

2. Асимптотический метод построения внутреннего итерационного процесса в тонкой прямоугольной области плоского напряжённого состояния градиентной теории упругости.

Уравнения (1.1)-(1.3) представляют собой основные уравнения пространственной задачи градиентной теории упругости. Основные уравнения плоского напряжённого состояния градиентной теории упругости в области прямоугольника $0 \leq x_1 \leq a$, $-h \leq x_2 \leq h$ представляют собой:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

Физические соотношения упругости

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \left[e_{11} - l^2 \left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} \right) \right] + \lambda \left[e_{22} - l^2 \left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2} \right) \right], \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu) \left[e_{22} - l^2 \left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2} \right) \right] + \lambda \left[e_{11} - l^2 \left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} \right) \right], \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = 2\mu \left[e_{12} - l^2 \left(\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial y^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

Геометрические соотношения

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right). \quad (2.3)$$

Здесь, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21}$ – напряжения, $e_{11}, e_{22}, e_{12} = e_{21}$ – деформации, u_1 и u_2 – перемещения, λ, μ – упругие постоянные Ламе, l – параметр, который имеет размерность длины, характеризует внутреннюю микроструктуру материала.

Будем считать, что на лицевых линиях прямоугольника $y = \pm h$ заданы граничные условия первой граничной задачи градиентной теории упругости, а на краевых кромках прямоугольника $x = 0, x = a$ заданы граничные условия либо I-го, либо II-го, либо смешанного варианта граничных условий градиентной теории упругости.

Считая прямоугольник тонким ($\varepsilon = \frac{h}{a} \ll 1$ малый геометрический параметр задачи), осуществим изменение масштабов:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{y}{h} \quad (2.4)$$

и введём безразмерные величины:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad \bar{\sigma}_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E}, \quad \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \frac{\sigma_{12}}{E}, \quad \bar{u}_1 = \frac{u_1}{a}, \quad \bar{u}_2 = \frac{u_2}{a}. \quad (2.5)$$

После введения безразмерных величин, система уравнений (2.1)-(2.3) примет вид:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial \zeta} = 0, \quad (2.6)$$

Физические соотношения упругости

$$\bar{\sigma}_{11} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{E} e_{11} + \frac{\lambda}{E} e_{22} \right) - \frac{\lambda + 2\mu}{E} \frac{l^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\lambda l^2}{E a^2} \left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial \zeta^2} \right),$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{E} e_{22} + \frac{\lambda}{E} e_{11} \right) - \frac{\lambda + 2\mu}{E} \frac{l^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\lambda}{E} \frac{l^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial \zeta^2} \right), \quad (2.7)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \frac{2\mu}{E} \left[e_{12} - \frac{l^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial \zeta^2} \right) \right],$$

Геометрические соотношения

$$e_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi}, \quad e_{22} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \zeta}, \quad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \zeta} \right). \quad (2.8)$$

Система уравнений (2.6)-(2.8), сингулярно возмущённая с малым параметром ε , следовательно, решение этой системы складывается из двух типов решений: внутреннего (основного), т.е. незатухающего при удалении от границы в глубь области, и типа погранслоя. Решение каждой из этих задач есть сумма решений по ζ (или по y) симметричной (растяжение-сжатие) и антисимметричной (изгиб) задач. В симметричной задаче $u_1, \sigma_{11}, \sigma_{22}$ – чётные, а $u_2, \sigma_{12} = \sigma_{21}$ – нечётные по ζ функции, в антисимметричной задаче, – наоборот.

Нас будет интересовать построение прикладных моделей стержня по градиентной теории упругости при деформациях: а) растяжения-сжатия, б) изгибе. Следовательно, в каждом случае будем строить и изучать внутренний итерационный процесс.

Для безразмерного геометрического малого параметра внутренней микроструктуры материала $\frac{l^2}{a^2}$ примем представление

$$\left(\frac{l}{a} \right)^2 = \varepsilon^2 l_*^2, \quad (2.9)$$

где считается, что порядок $l_* \sim 1$.

Внутреннее решение ищем в виде

$$Q = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q^{(s)}. \quad (2.10)$$

Здесь под Q подразумевается любое из напряжений, деформаций и перемещений, q – целое число, различное для различных отмеченных величин. Целое число q подбирается так, чтобы после подстановки (2.10) в уравнения (2.6)-(2.8) градиентной теории упругости и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях s , получить рекуррентную (итерационную) систему относительно $Q^{(s)}$.

Для $(\bar{\sigma}_{11} \text{ и } \bar{u}_1)$, $\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21}$, $\bar{\sigma}_{22}$ соответственно, имеем $q = 2, 1, 0$, а для $\bar{u}_2 - q = 1$ в симметричной и $q = 3$ – в антисимметричных задачах.

В результате получим следующую систему уравнений:

а) антисимметричная задача

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (2.11)$$

$$e_{22}^{(s)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s)}}{\partial \zeta^2} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{11}^{(s-2)} + l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s-4)}}{\partial \xi^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s-2)}}{\partial \zeta^2} + \frac{E}{\lambda + 2\mu} \sigma_{22}^{(s-4)}, \quad (2.12)$$

$$e_{12}^{(s)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(s)}}{\partial \zeta^2} = l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} + \frac{E}{2\mu} \sigma_{12}^{(s-2)}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_{11}^{(s-2)} = \frac{\lambda}{E} \left(e_{22}^{(s)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s)}}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{E} \left(e_{11}^{(s-2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} \right) - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s-4)}}{\partial \xi^2}, \quad (2.14)$$

$$e_{11}^{(s)} = \frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial \xi}, \quad e_{22}^{(s)} = \frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial \zeta}, \quad e_{12}^{(s)} = \frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial \zeta}, \quad (2.15)$$

б) симметричная задача

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (2.16)$$

$$\sigma_{11}^{(s)} = \frac{\lambda + 2\mu}{E} e_{11}^{(s)} + \frac{\lambda}{E} e_{22}^{(s)} - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s)}}{\partial \zeta^2}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_{22}^{(s-2)} = \frac{\lambda + 2\mu}{E} \left(e_{22}^{(s)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s)}}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\lambda}{E} \left(e_{11}^{(s)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s)}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s-2)}}{\partial \xi^2}, \quad (2.18)$$

$$e_{12}^{(s)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(s)}}{\partial \zeta^2} = \frac{E}{2\mu} \sigma_{12}^{(s-2)} + l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(s-2)}}{\partial \xi^2},$$

из этого последнего уравнения получим

$$\sigma_{12}^{(s-2)} = \frac{2\mu}{E} \left(e_{12}^{(s)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} \right), \quad (2.19)$$

а также

$$e_{11}^{(s)} = \frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial \xi}, \quad e_{22}^{(s)} = \frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial \xi}, \quad e_{12}^{(s)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial \xi} \right). \quad (2.20)$$

Следует отметить, что приближения $s=1$ аналогично приближению $s=0$, а приближение $s=3$ аналогично приближению $s=2$ и т.д. Для построения прикладной модели изгиба и растяжения-сжатия по градиентной теории упругости используем приближения $s=0$ и $s=2$, и в итоге, их сумма.

3. Прикладная модель изгибной деформации стержня по градиентной теории упругости.

Из формул (2.12), (2.13) и (2.14) имеем:

$$e_{22}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\lambda + 2\mu}{E} \left(e_{22}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\lambda}{E} e_{11}^{(0)} - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\lambda + 2\mu}{E} \left(e_{22}^{(4)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(4)}}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\lambda}{E} e_{11}^{(2)} - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(2)}}{\partial \zeta^2} = \sigma_{22}^{(0)}, \quad (3.3)$$

$$e_{12}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{2\mu}{E} \left[\left(e_{12}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right) - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(0)}}{\partial \xi^2} \right] = \sigma_{12}^{(0)}, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \frac{\lambda}{E} \left(e_{22}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{E} \left(e_{11}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \xi^2}, \quad (3.6)$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = \frac{\lambda}{E} \left(e_{22}^{(4)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(4)}}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{E} \left(e_{11}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial \xi^2}. \quad (3.7)$$

На основе уравнений (3.1), (3.4) будем иметь (в дальнейшем построим такие решения, в которых возможна подстановка $l = 0$, т.е. случай перехода к классической теории):

$$e_{22}^{(0)} = 0, \quad e_{12}^{(0)} = 0. \quad (3.8)$$

Используя уравнения (2.15), при $s = 0$ получим:

$$u_2^{(0)} = u_2^{(0)}(\xi), \quad u_1^{(0)} = u_1^{(0)}(\xi)\zeta, \quad u_1^{(0)} = -\frac{d u_2^{(0)}(\xi)}{d \xi}, \quad (3.9)$$

$$e_{11}^{(0)} = e_{11}^{1(0)}(\xi)\zeta, \quad e_{11}^{1(0)}(\xi) = \frac{du_1^{1(0)}(\xi)}{d\xi} = -\frac{d^2 u_2^{0(0)}(\xi)}{d\xi^2}. \quad (3.10)$$

Используя (3.8)-(3.10), уравнение (3.2) и выражение (3.6) примут вид:

$$e_{22}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{11}^{1(0)}(\xi)\zeta, \quad (3.11)$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{11}^{1(0)}(\xi)\zeta, \quad \sigma_{11}^{1(0)}(\xi) = \frac{1}{1-\nu^2} e_{11}^{1(0)}(\xi). \quad (3.12)$$

Из уравнений равновесия (2.11), при $s = 0$ получим:

$$\sigma_{12}^{(0)} = \sigma_{12}^{2(0)}(\xi)\zeta^2 + \sigma_{12}^{0(0)}(\xi), \quad \sigma_{12}^{2(0)}(\xi) = -\frac{1}{2} \frac{d\sigma_{11}^{1(0)}(\xi)}{d\xi}, \quad (3.13)$$

$$\sigma_{22}^{(0)} = \sigma_{22}^{3(0)}(\xi)\zeta^3 + \sigma_{22}^{1(0)}(\xi)\zeta, \quad \sigma_{22}^{3(0)}(\xi) = -\frac{1}{3} \frac{d\sigma_{12}^{2(0)}(\xi)}{d\xi}, \quad \sigma_{22}^{1(0)}(\xi) = -\frac{d\sigma_{12}^{0(0)}(\xi)}{d\xi}. \quad (3.14)$$

С учётом формулы $\sigma_{12}^{(0)}$ (3.13), уравнение (3.5) примет вид:

$$e_{12}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(2)}}{\partial \zeta^2} = \frac{E}{2\mu} (\sigma_{12}^{2(0)}(\xi) \cdot \zeta^2 + \sigma_{12}^{0(0)}(\xi)). \quad (3.15)$$

Решение уравнений (3.11) и (3.15) примем соответственно в виде:

$$e_{22}^{(2)} = e_{22}^{1(2)}(\xi) \cdot \zeta, \quad (3.16)$$

$$e_{12}^{(2)} = e_{12}^{2(2)}(\xi) \cdot \zeta^2 + e_{12}^{0(2)}(\xi), \quad (3.17)$$

тогда будем иметь

$$e_{22}^{1(2)}(\xi) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{11}^{1(0)}(\xi), \quad (3.18)$$

$$e_{12}^{2(2)}(\xi) = \frac{E}{2\mu} \sigma_{12}^{2(0)}(\xi), \quad e_{12}^{0(2)}(\xi) = \frac{E}{2\mu} \left(\sigma_{12}^{0(0)}(\xi) + \frac{E}{\mu} l_*^2 \cdot \sigma_{12}^{2(0)}(\xi) \right). \quad (3.19)$$

Если снова обратиться к уравнениям (2.15), но, на этот раз, при $s = 2$, получим:

$$u_2^{(2)} = u_2^{2(2)}(\xi) \cdot \zeta^2 + u_2^{0(2)}(\xi), \quad u_2^{2(2)}(\xi) = \frac{1}{2} e_{22}^{1(2)}(\xi), \quad (3.20)$$

$$u_1^{(2)} = u_1^{3(2)}(\xi) \cdot \zeta^3 + u_1^{1(2)}(\xi) \cdot \zeta, \quad u_1^{3(2)}(\xi) = \frac{1}{3} \left(e_{12}^{2(2)}(\xi) - \frac{d u_2^{2(2)}(\xi)}{d\xi} \right),$$

$$u_1^{(2)}(\xi) = e_{12}^{(2)}(\xi) - \frac{du_2^{(2)}}{d\xi}, \quad (3.21)$$

$$e_{11}^{(2)}(\xi) = e_{11}^{(3)}(\xi) \cdot \zeta^3 + e_{11}^{(1)}(\xi) \cdot \zeta, \quad e_{11}^{(3)}(\xi) = \frac{du_1^{(3)}(\xi)}{d\xi}, \quad e_{11}^{(1)}(\xi) = \frac{du_1^{(1)}(\xi)}{d\xi}. \quad (3.22)$$

Теперь, обратимся к уравнению (2.12), при $s=4$, будем иметь:

$$e_{22}^{(4)}(\xi) - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(4)}}{\partial \zeta^2} = \frac{E}{\lambda + 2\mu} \left[\sigma_{22}^{(0)} - \frac{\lambda}{E} e_{11}^{(2)} + \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right].$$

Подставляя в (2.14), при $s=4$ для $\sigma_{11}^{(2)}$ получим:

$$\sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{11}^{(3)}(\xi) \cdot \zeta^3 + \sigma_{11}^{(1)}(\xi) \cdot \zeta, \quad (3.23)$$

$$\text{где } \sigma_{11}^{(3)}(\xi) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{22}^{(3)}(\xi) + \frac{1}{1 - \nu^2} e_{11}^{(3)}(\xi), \quad (3.24)$$

$$\sigma_{11}^{(1)}(\xi) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{22}^{(1)}(\xi) + \frac{1}{1 - \nu^2} \left(e_{11}^{(1)}(\xi) - 6l_*^2 \cdot e_{11}^{(3)}(\xi) - l_*^2 \frac{d^2 e_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi^2} \right). \quad (3.25)$$

Как отметили выше, для построения прикладной модели изгиба тонкого стержня по градиентной теории упругости используем сумму приближений $s=0$ и $s=2$.

Поступая так, для напряжения σ_{11} будем иметь:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon^{-2} \cdot (\sigma_{11}^{(0)} + \varepsilon^2 \cdot \sigma_{11}^{(2)}), \quad (3.26)$$

где $\sigma_{11}^{(0)}$ определяется формулой (3.6), а $\sigma_{11}^{(2)}$ – формулой (3.23).

Из уравнения равновесия (2.11)₁, при $s=0$ получим

$$\frac{2}{3} \frac{d\sigma_{11}^{(0)}}{d\xi} + (\sigma_{12}^{(0)} \cdot \zeta) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sigma_{12}^{(0)} d\zeta = 0, \quad (3.27)$$

здесь

$$Q^{(0)} = \int_{-1}^1 \sigma_{12}^{(0)} d\zeta \quad (3.28)$$

– перерезывающая сила в исходном асимптотическом приближении.

Используя граничные условия для $\sigma_{12}^{(0)}$ на лицевых линиях, будем иметь

$$(\sigma_{12}^{(0)} \cdot \zeta) \Big|_{-1}^1 = \sigma_{12}^{(0)} \Big|_{\zeta=1} + \sigma_{12}^{(0)} \Big|_{\zeta=-1} = \frac{1}{2} q_1^{(0)+} + \frac{1}{2} q_1^{(0)-}.$$

Т.к. при изгибе $q_1^{(0)-} = +q_1^{(0)+}$, получим

$$(\sigma_{12}^{(0)} \cdot \zeta) \Big|_{-1}^1 = q_1^{(0)+}, \quad (3.29)$$

$$\text{где } q_1^{(0)+} = \frac{q_1}{E \cdot \varepsilon^{-1}}. \quad (3.30)$$

Таким образом, уравнение (3.27) с учётом (3.28) примет вид:

$$\frac{dM_{11}^{(0)}}{d\xi} + Q^{(0)} = q_1^{(0)+}, \quad (3.31)$$

$$\text{где } M_{11}^{(0)} = -\int_{-1}^1 \sigma_{11}^{(0)} \cdot \zeta d\zeta \quad (3.32)$$

– изгибающий момент в исходном асимптотическом приближении.

Используя второе уравнение равновесия (2.11), при $s = 0$ получим

$$\frac{dQ^{(0)}}{d\xi} + \sigma_{22}^{(0)} \Big|_{-1}^1 = 0. \quad (3.33)$$

С учётом граничных условий для $\sigma_{22}^{(0)}$ на лицевых линиях $\zeta = \pm 1$, будем иметь

$$\sigma_{22}^{(0)} \Big|_{-1}^1 = \sigma_{22}^{(0)+} - \sigma_{22}^{(0)-}, \quad (3.34)$$

т.к. при изгибе

$$\sigma_{22}^{(0)-} = -\sigma_{22}^{(0)+}, \quad (3.35)$$

$$\text{где } \sigma_{22}^{(0)+} = \frac{1}{2} q_2^{(0)+}, \quad q_2^{(0)+} = \frac{q_2}{E}, \quad (3.36)$$

тогда, имея ввиду (3.34)-(3.36), уравнение (3.33) можем записать так:

$$\frac{dQ^{(0)}}{d\xi} = -q_2^{(0)+}. \quad (3.37)$$

Аналогичным образом из уравнений равновесия (2.11), при $s = 2$, получим уравнения типа (3.31) и (3.37):

$$\frac{dM_{11}^{(2)}}{d\xi} + Q^{(2)} = q_1^{(2)+}, \quad (3.38)$$

$$\frac{dQ^{(2)}}{d\xi} = -q_2^{(2)+}, \quad (3.39)$$

$$\text{где } Q^{(2)} = \int_{-1}^1 \sigma_{12}^{(2)} d\zeta, \quad M_{11}^{(2)} = -\int_{-1}^1 \sigma_{11}^{(2)} \cdot \zeta d\zeta. \quad (3.40)$$

Объединяя уравнения (3.31), (3.38) и (3.37), (3.39), в размерном виде получим уравнения равновесия для прикладной модели изгибной деформации тонкого стержня по градиентной теории упругости (которые идентичны уравнениям равновесия изгибной деформации тонкого стержня по классической теории упругости):

$$\frac{dM_{11}}{dx} + Q = h \cdot q_1, \quad \frac{dQ}{dx} = -q_2. \quad (3.41)$$

Исключая из этой системы перерезывающую силу Q , приходим к следующему известному уравнению равновесия относительно изгибающего момента M_{11} :

$$\frac{d^2 M_{11}}{dx^2} = q_2 + h \cdot \frac{dq_1}{dx}. \quad (3.42)$$

Для перемещений на отмеченном выше приближении будем иметь

$$u_2 = a \cdot \varepsilon^{-3} \cdot (u_2^{(0)} + \varepsilon^2 u_2^{(2)}), \quad w(x) = u_2(y=0) = a \cdot \varepsilon^{-3} \left(u_2^{(0)} + \varepsilon^2 u_2^{(2)} \right), \quad (3.43)$$

$$u_1 = a \cdot \varepsilon^{-2} \cdot (u_1^{(0)} + \varepsilon^2 u_1^{(2)}).$$

В размерном виде для перемещений получим выражения

$$u_1 = \psi_1(x) \cdot y + \frac{1}{3} \psi_2(x) \cdot y^3, \quad u_2 = w(x) + \frac{1}{2} \psi_3(x) \cdot y^2, \quad (3.44)$$

где

$$\psi_3(x) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \psi_1(x) = -\frac{dw}{dx}, \quad \psi_2(x) = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{1}{2} \frac{d\psi_3}{dx}, \quad (3.45)$$

w – прогиб стержня при изгибе.

Отметим, что функция $\psi_3(x)$ определяет обжатие стержня e_{22} :

$$e_{22} = \psi_3(x) \cdot y = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot y. \quad (3.46)$$

Для сдвиговой деформации $e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$ имеем выражение

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \right) + \frac{1}{2} \left(\psi_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right) y^2. \quad (3.47)$$

На уровне оси стержня ($y=0$) сдвиговая деформация будет:

$$\gamma = e_{12}|_{y=0} = e_{21}|_{y=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \right). \quad (3.48)$$

Приведём также выражения для относительной продольной деформации e_{11} :

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x} \cdot y + \frac{1}{3} \frac{\partial \psi_2(x)}{\partial x} \cdot y^3. \quad (3.49)$$

Как убедимся, перемещения (а также обжатие, сдвиговая деформация) в прикладной модели изгиба стержня по градиентной теории упругости выражаются через прогибную функцию $w = w(x)$.

Изгибающий момент M_{11} выражается так:

$$\begin{aligned} M_{11} &= - \int_{-h}^h \sigma_{11} \cdot y dy = -h^2 \int_{-1}^1 \sigma_{11} \cdot \zeta d\zeta = -Eh^2 \cdot \varepsilon^{-2} \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{11} \cdot \zeta d\zeta = \\ &= -Eh^2 \cdot \varepsilon^{-2} \int_{-1}^1 \left(\sigma_{11}^{(0)} + \varepsilon^2 \sigma_{11}^{(2)} \right) \cdot \zeta d\zeta. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Здесь $\sigma_{11}^{(0)}$ выражается формулой (3.12), а $\sigma_{11}^{(2)}$ – формулой (3.23) с учётом (3.24) и (3.25).

Ниже приведём некоторые формулы, которые при вычислении M_{11} будут использованы:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(3)} &= \frac{1}{6} \frac{d^2 \sigma_{11}^{(1)}(\xi)}{d\xi^2} = \frac{1}{6(1-\nu^2)} \frac{d^2 e_{11}^{(1)}(\xi)}{d\xi^2}, & e_{11}^{(3)} &= -\frac{1}{6} \frac{d^2 e_{11}^{(1)}(\xi)}{d\xi^2}, \\ \sigma_{22}^{(1)}(\xi) &= q_2^{(0)} - \sigma_{22}^{(3)}(\xi) = q_2^{(0)} - \frac{1}{6(1-\nu^2)} \frac{d^2 e_{11}^{(1)}(\xi)}{d\xi^2}, & q_2^{(0)} &= \frac{q_2}{E}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

В результате, для изгибающего момента M_{11} будем иметь:

$$M_{11} = -D \left[K_{11} + \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{12+\nu}{30} h^2 - l^2 \right) \frac{d^2 K_{11}}{dx^2} \right] - \frac{2h^3}{3(1-\nu)} \frac{dq_1}{dx} - \frac{2\nu}{3(1-\nu)} h^2 \cdot q_2, \quad (3.52)$$

где

$$K_{11} = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.53)$$

представляет кривизну оси стержня при изгибной деформации.

Уравнения равновесия (3.41) (либо уравнение (3.42)), соотношение упругости (3.52) и геометрическое соотношение (3.53) определяют модель изгибной деформации тонкого стержня по градиентной теории упругости.

4. Прикладная модель растяжения-сжатия стержня по градиентной теории упругости.

Теперь рассмотрим систему уравнений, симметричную по y (по ζ) задачи в итерациях: (2.16)-(2.20).

Из уравнений (2.19) при $s = 0$ получим

$$e_{12}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (4.1)$$

откуда будет следовать следующее равенство:

$$e_{12}^{(0)} = 0. \quad (4.2)$$

Из уравнения (2.20)₃ при $s = 0$ с учётом (4.2) будем иметь:

$$e_{12}^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \zeta} = 0.$$

В результате получим

$$u_1^{(0)} = u_1^{(0)}(\xi). \quad (4.3)$$

Рассмотрим уравнение (2.18) при $s = 0$:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{E} \left(e_{22}^{(0)} - l_*^2 \cdot \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\lambda}{E} \left(e_{11}^{(0)} - l_*^2 \cdot \frac{\partial^2 e_{11}^{(0)}}{\partial \zeta^2} \right) = 0. \quad (4.4)$$

Из уравнения (2.20)₁ с учётом формулы (4.3) получим:

$$e_{11}^{(0)} = e_{11}^{0(0)} = \frac{d u_1^{0(0)}(\xi)}{d \xi}. \quad (4.5)$$

Имея ввиду (4.5), уравнение (4.4) примет вид:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{E} \left(e_{22}^{(0)} - l_*^2 \cdot \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta^2} \right) = -\frac{\lambda}{E} e_{11}^{0(0)}(\xi). \quad (4.6)$$

Решение уравнения (4.6) ищем в виде

$$e_{22}^{(0)} = e_{22}^{0(0)}(\xi). \quad (4.7)$$

В результате будем иметь:

$$e_{22}^{(0)} = e_{22}^{0(0)}(\xi) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{11}^{0(0)}(\xi). \quad (4.8)$$

Рассмотрим уравнение (2.20)₂ при $s = 0$

$$e_{22}^{(0)} = \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \zeta},$$

тогда с учётом (4.8) приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \zeta} = e_{22}^{0(0)}(\xi) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{11}^{0(0)}(\xi),$$

откуда получим

$$u_2^{(0)} = u_2^{1(0)}(\xi) \cdot \zeta, \quad u_2^{1(0)} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{11}^{0(0)}(\xi). \quad (4.9)$$

Теперь, при $s = 0$ из уравнения (2.17) с учётом (4.8), для $\sigma_{11}^{(0)}$ приходим к следующей формуле:

$$\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{11}^{0(0)}(\xi) = \frac{1}{1 - \nu^2} e_{11}^{0(0)}(\xi) \quad (4.10)$$

Рассмотрим уравнение равновесия (2.16)₁ при $s = 0$, тогда, с учётом (4.10) будем иметь:

$$\frac{\partial \sigma_{12}^{(0)}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \sigma_{11}^{(0)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \sigma_{11}^{0(0)}(\xi)}{\partial \xi}.$$

В результате получим:

$$\sigma_{12}^{(0)} = \sigma_{12}^{1(0)}(\xi) \cdot \zeta, \quad (4.11)$$

$$\text{где } \sigma_{12}^{(1)}(\xi) = -\frac{d \sigma_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi}. \quad (4.12)$$

Рассматривая уравнение равновесия (2.16)₂, с учётом (4.11), для $\sigma_{22}^{(0)}$ приходим к следующей формуле:

$$\sigma_{22}^{(0)} = \sigma_{22}^{(2)}(\xi) \cdot \zeta^2 + \sigma_{22}^{(0)}(\xi), \quad (4.13)$$

$$\text{где } \sigma_{22}^{(2)}(\xi) = -\frac{1}{2} \frac{d \sigma_{12}^{(1)}(\xi)}{d\xi}. \quad (4.14)$$

Теперь рассмотрим уравнения (2.18) и (2.17), при $s = 0$ с учётом (4.5) и (4.7) будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(0)} = & \frac{\lambda + 2\mu}{E} \left(e_{22}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\lambda}{E} \left(e_{11}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{d^2 e_{22}^{(0)}(\xi)}{d\xi^2} - \\ & - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{d^2 e_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi^2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)} = & \frac{\lambda + 2\mu}{E} \left(e_{11}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\lambda}{E} \left(e_{22}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\lambda + 2\mu}{E} l_*^2 \frac{d^2 e_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi^2} - \\ & - \frac{\lambda}{E} l_*^2 \frac{d^2 e_{22}^{(0)}(\xi)}{d\xi^2}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

Рассмотрим также уравнение (2.19), при $s = 2$ получим

$$e_{12}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(2)}}{\partial \zeta^2} = \frac{E}{2\mu} \sigma_{12}^{(0)},$$

с учётом (4.11), для определения $e_{12}^{(2)}$ приходим к решению следующего уравнения:

$$e_{12}^{(2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(2)}}{\partial \zeta^2} = \frac{E}{2\mu} \sigma_{12}^{(1)}(\xi) \cdot \zeta, \quad (4.17)$$

Решение уравнения (4.17) ищем в виде

$$e_{12}^{(2)} = e_{12}^{(1)}(\xi) \cdot \zeta, \quad (4.18)$$

будем иметь:

$$e_{12}^{(1)} = \frac{E}{2\mu} \sigma_{12}^{(0)}(\xi). \quad (4.19)$$

При $s = 2$ из уравнения (2.20)₃, с учётом (4.18) и (4.9), будем иметь:

$$u_1^{(2)} = \frac{1}{2} \left(2 \sigma_{12}^{1(2)}(\xi) - \frac{d u_2^{1(0)}(\xi)}{d\xi} \right) \zeta^2 + u_1^{0(2)}(\xi), \quad u_1^{(2)} = u_1^{2(2)}(\xi) \cdot \zeta^2 + u_1^{0(2)}(\xi). \quad (4.20)$$

Рассмотрим уравнение (2.20)₁, тогда с учётом (4.20), для $e_{11}^{(2)}$ получим формулу

$$e_{11}^{(2)} = e_{11}^{2(2)}(\xi) \cdot \zeta^2 + e_{11}^{0(2)}(\xi), \quad (4.21)$$

$$\text{где } e_{11}^{2(2)}(\xi) = \frac{d u_1^{2(2)}(\xi)}{d\xi}, \quad e_{11}^{0(2)}(\xi) = \frac{d u_1^{0(2)}(\xi)}{d\xi}, \quad (4.22)$$

$$u_1^{2(2)}(\xi) = \frac{1}{2} \left(2 e_{12}^{1(2)}(\xi) - \frac{d u_2^{1(0)}(\xi)}{d\xi} \right). \quad (4.23)$$

Обратимся к уравнению (4.15), тогда с учётом (4.13) и (4.21), это же уравнение запишем в виде

$$e_{22}^{(2)} - I_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(2)}}{\partial \zeta^2} = \frac{E}{\lambda + 2\mu} \left(\sigma_{22}^{2(0)}(\xi) \cdot \zeta^2 + \sigma_{22}^{0(2)}(\xi) \right) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(e_{11}^{2(2)}(\xi) \cdot \zeta^2 + e_{11}^{0(2)}(\xi) \right) + \\ + 2 \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} I_*^2 e_{11}^{2(2)}(\xi) + I_*^2 \frac{d^2 e_{22}^{0(0)}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} I_*^2 \frac{d^2 e_{11}^{0(0)}(\xi)}{d\xi^2}. \quad (4.24)$$

Решение уравнения (4.24) ищем в виде

$$e_{22}^{(2)} = e_{22}^{2(2)}(\xi) \cdot \zeta^2 + e_{22}^{0(2)}(\xi), \quad (4.25)$$

будем иметь

$$e_{22}^{2(2)}(\xi) = \frac{E}{\lambda + 2\mu} \sigma_{22}^{2(0)}(\xi) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{11}^{2(2)}(\xi), \quad (4.26)$$

$$e_{22}^{0(2)}(\xi) = \frac{E}{\lambda + 2\mu} \left(\sigma_{22}^{0(2)}(\xi) + 2 I_*^2 \sigma_{22}^{2(0)}(\xi) \right) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(e_{11}^{0(2)}(\xi) - I_*^2 \frac{d^2 e_{11}^{0(0)}(\xi)}{d\xi^2} \right) + I_*^2 \frac{d^2 e_{22}^{0(0)}(\xi)}{d\xi^2}. \quad (4.27)$$

Используя уравнение (2.20)₂, при $s = 2$ с учётом (4.25), для перемещения $u_2^{(2)}$ получим формулу

$$u_2^{(2)} = u_2^{3(2)}(\xi) \cdot \zeta^2 + u_2^{1(2)}(\xi) \cdot \zeta, \quad (4.28)$$

где

$$u_2^{3(2)}(\xi) = \frac{1}{3} e_{22}^{2(2)}(\xi), \quad u_2^{1(2)}(\xi) = e_{22}^{0(2)}(\xi). \quad (4.29)$$

Учитывая выражения (4.21), (4.25), после некоторых преобразований для определения $\sigma_{11}^{(2)}$ получим выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)} = & \frac{1}{1-\nu^2} e_{11}^{(2)}(\xi)(\zeta^2 - 2l_*^2) + \frac{1}{1-\nu^2} \left(e_{11}^{(0(2)}(\xi) - l_*^2 \frac{d^2 e_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi^2} \right) + \\ & + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\sigma_{22}^{(2)}(\xi) \cdot \zeta^2 + \sigma_{22}^{(0)}(\xi) \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

В итоге приближений $s = 0, s = 2$, для суммарного напряжения σ_{11} будем иметь

$$\sigma_{11} = E \cdot \varepsilon^{-2} \left(\sigma_{11}^{(0)} + \varepsilon^2 \cdot \sigma_{11}^{(2)} \right), \quad (4.31)$$

где $\sigma_{11}^{(0)}$ определяется формулой (4.10), а $\sigma_{11}^{(2)}$ – формулой (4.30).

Проинтегрировав уравнение равновесия (2.16)₁ по ζ , от -1 до +1 при $s = 0$, получим

$$\frac{dN^{(0)}}{d\xi} + \sigma_{12}^{(0)} \Big|_{\zeta=-1}^{\zeta=+1} = 0, \quad (4.32)$$

где

$$N^{(0)} = \int_{-1}^1 \sigma_{11}^{(0)} d\zeta \quad (4.33)$$

представляет собой нормальное усилие в стержне в исходном асимптотическом приближении.

Учитывая, что в симметричной по ζ задаче

$$\sigma_{12}^{(0)}(\zeta = +1) = -\sigma_{12}^{(0)}(\zeta = -1) = \frac{1}{2} q_1^{(0)}, \text{ уравнение (4.32) можем записать так:}$$

$$\frac{dN^{(0)}}{d\xi} = -q_1^{(0)}. \quad (4.34)$$

Аналогичным образом, из того же уравнения равновесия (2.16)₁, при $s = 2$, будем иметь

$$\frac{dN^{(2)}}{d\xi} = -q_1^{(2)}. \quad (4.35)$$

Для нормального усилия в поперечном сечении стержня в размерном виде получим:

$$\begin{aligned} N = \int_{-h}^h \sigma_{11} dy &= h \int_{-1}^1 \sigma_{11} d\zeta = E h \varepsilon^{-2} \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{11} d\zeta = E h \varepsilon^{-2} \int_{-1}^1 \left(\sigma_{11}^{(0)} + \varepsilon^2 \sigma_{11}^{(2)} \right) d\zeta = \\ &= E h \varepsilon^{-2} \left(N^{(0)} + \varepsilon^2 N^{(2)} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Имея ввиду выражение (4.36), из уравнений (4.34) и (4.35) получим уравнение равновесия в прикладной теории растяжении-сжатия стержня по градиентной теории упругости (которое идентично соответствующему уравнению по классической теории упругости):

$$\frac{dN}{dx} = -q_1. \quad (4.37)$$

(здесь следует иметь ввиду формулу: $q_1 = E\varepsilon^{-1} \left(q_1^{(0)} + \varepsilon^2 q_1^{(2)} \right)$).

Используя формулы для $\sigma_{11}^{(0)}$ ((4.10)) и $\sigma_{11}^{(2)}$ ((4.30)), подставляя их в формулу (4.36) и выполняя интегрирование, приходим к соотношению упругости в модели растяжения-сжатия стержня по градиентной теории упругости:

$$N = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\tilde{\varepsilon}_{11} - \frac{\nu}{6(1-\nu)} h^2 \frac{d^2 \tilde{\varepsilon}_{11}}{dx^2} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} l^2 \frac{d^2 \tilde{\varepsilon}_{11}}{dx^2} \right) + \frac{2}{3(1-\nu)} h^2 \frac{dq_1}{dx} - \frac{4}{1-\nu} l^2 \frac{dq_1}{dx} + \frac{2\nu}{1-\nu} h q_2, \quad (4.38)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = \frac{du}{dx}, \quad u = u(x). \quad (4.39)$$

Уравнение равновесия (4.37), соотношение упругости (4.38) и геометрическое соотношение (4.39) определяют прикладную модель растяжения-сжатия тонкого стержня по градиентной теории упругости.

Вопрос о выводе граничных условий для прикладных моделей изгибной деформации и растяжении-сжатии тонких стержней будет посвящена отдельная статья.

Заключение. В данной работе рассматривается плоское напряжённое состояние градиентной теории упругости в тонкой области прямоугольника, и используя асимптотический метод, построены прикладные модели стержня по градиентной теории упругости при его растяжении-сжатии и изгибе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eringen A.C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves //J. Appl. Phys. 1983. Vol. 54. P. 4703-4710.
2. Aifantis E.C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture //International Journal of Engineering Science. 1992. V1.30. P.1279-1299.
3. Aifantis E.C. Stain gradient interpretation of size effects //Int. J. Fract. 1999. Vol.95. P.299-314.
4. Alten B.S., Aifantis E.C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity//Journal of Mechanical Behavior of Materials.-1997.-Vol. 8.-P.231-282.
5. Fridrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics //Bull. Amer. Soc. 61. 6. 1955. P.485.

6. Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol. 266. N 1325. P. 143-160.
7. Гольденвейзер А.Л. Построение приближённой теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //Прикладная математика и механика. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686.
8. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек //Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методом расчёта оболочек и пластин. Гегечкори, Грузинская ССР, 1-10 октября 1974. Тбилиси: Изд-во ТГУ. 1975. С.51-148.
9. Бердичевский В.Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек //Прикладная математика и механика. 1979. Т.43. Вып.4. С.664-687.
10. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414с.
11. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anizotropic Plates and Shells. World Scientific. 2015. 360p.
12. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера //Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1990. №6. С.127-138.
13. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 260с.
14. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости// Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С.4154.
15. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости //Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147.
16. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек //Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. Вып.2. С.325-343.
17. Sargsyan S.H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells//Advances in Pure Mathematics. 2015. Vol.5. №10. P.629-643.

Информация об авторе:

Саркисян Лусине Самвеловна – канд. физ-мат наук, доцент, Институт механики НАН Армении,

E-mail: slusin@yahoo.com

Саркисян Самвел Оганесович – член-корреспондент НАН РА, доктор физ-мат. наук, профессор. Ширакский государственный университет. (093) 15 16 98

E-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 15.11.2019

**SHEAR WAVE REFLECTION AND TRANSMISSION FROM
SYMMETRICALLY AND ASYMMETRICALLY ARRANGED BI-
MATERIAL LAYER**

Ohanyan S.K.

Key words: shear wave, transmission ratio, reflection, propagator matrix

Оганян С.К.

**Преломление и отражение сдвиговой волны от слоя с двумя симметрично и антисимметрично
расположенными материалами**

Ключевые слова: сдвиговая волна, коэффициент прохождения, отражение, матрица распространения

В данной работе изучается распространение сдвиговой волны в пространстве через слой с симметрично и асимметрично расположенными двумя материалами. Задача решена с помощью метода матрицы распространения и получено решение в общем виде. Для частного случая коэффициенты передачи энергии рассчитаны численно и представлены на графиках.

Օհանյան Ս. Կ.

**Սահքի ալիքների րեկումը և անդրադարձումը սիմետրիկ և հակասիմետրիկ դասավորված երկու
նյութից կազմված շերտում**

Հիմնաբառեր. Սահքի ալիք, ներթափանցման գործակից, անդրադարձում, տարածման մատրից

Հուղվածում ուսումնասիրվում է երկու կիսատարածությունները բաժանող սիմետրիկ և հակասիմետրիկ դասավորված շերտում սահքի ալիքի տարածումը: Դիտարկվող խնդիրը լուծվել է օգտագործելով տարածման մատրիցի մեթոդը, դուրս են բերվել լուծումների ընդհանրացված տեսքերը: Մասնավոր դեպքի համար կատարվել է թվային հաշվարկ և գրաֆիկորեն պատկերվել է ալիքի ներթափանցման էներգիայի գործակիցների կախվածությունը ընկնող ալիքի անկյունից:

In this paper shear wave propagation through a symmetrically and asymmetrically arranged bi-material layer sandwiched between two semi-spaces is studied. The problem was solved by propagator matrix method and solution in general form was obtained. For partial case transmission energy ratios are numerically calculated and graphically represented.

Introduction

Numerous problems of wave propagation in elastic multilayered medium were considered by Brekhovskikh [1]. In this paper special cases of shear wave reflection refraction problem in layered structure is studied. Electromagnetic reflection problems in stratified dielectric media is studied in [2]. SH wave reflection and transmission from elastic/piezoelectric and piezoelectric/piezoelectric interfaces are considered in [3]. Wave transmission through piezoelectric phononic crystal are considered in [4, 5]. Electroacoustic wave transmission

from non-acoustic interface of piezoelectric materials of different symmetries is investigated in [6].

Statement of the problem

Bi-material layer composed of symmetrically and asymmetrically arranged elastic layers sandwiched between elastic semi-spaces are considered. The SH wave propagates from the lower $x \in (-\infty; 0]$ semi-space partially reflects at the interface of layered structure $x = 0$ and partially transmits to upper $x \in [d; \infty)$ semi-space. We consider two cases of layered structure sandwiched between two semi-spaces.

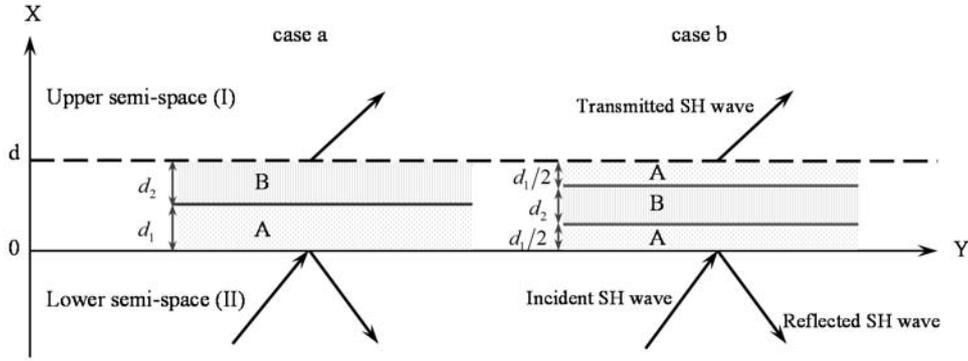


Fig. 1. Wave propagation in bi-material structure, asymmetrical layer (case a) and symmetrical layer (case b)

Layered structure in case *a*) is composed of two sub-layers with thicknesses $h_A = d_1$ and $h_B = d_2$, in case *b*) layer consists of three sub-layers with thicknesses $h_A = d_1/2$, $h_B = d_2$. Sub-layers are under ideal contact conditions with adjacent interfaces.

For anti-plane shear wave we have the following equation of motion

$$\partial_x \sigma_{xz} + \partial_y \sigma_{yz} = \rho \partial_{tt} u_z \quad (1)$$

where stresses obey the Hooke's law

$$\sigma_{xz} = \mu \partial_x u_z, \quad \sigma_{yz} = \mu \partial_y u_z \quad (2)$$

here $u_z(x, y, t)$ is the elastic displacement, μ, ρ are shear modulus and bulk density of material, respectively. For propagating SH wave the solution of equation of motion can be represented as

$$u_z(x, y, t) = u(x) \exp[i(ky - \omega t)] \quad (3)$$

where k, ω are wave number and frequency respectively.

Solution for functions $u^{(s)}(x)$ within $s = A, B$ materials of the layer can be found as

$$u^{(s)}(x) = \alpha_i^{(s)} \exp(iq_s x) + \alpha_r^{(s)} \exp(-iq_s x) \quad (4)$$

here $q_s = \sqrt{\omega^2/c_s^2 - k^2}$, $c_s^2 = \mu_s/\rho_s$, $s = A, B$. μ_s , ρ_s are shear moduli and bulk densities respectively, $\alpha_i^{(s)}, \alpha_r^{(s)}$ are complex amplitudes.

According to (2) one can define $\sigma_{zx}^{(s)}$ as

$$\sigma_{zx}^{(s)} = \tau^{(s)}(x) \exp[i(ky - \omega t)] \quad (5)$$

$$\tau^{(s)}(x) = i\mu_s q_s \left[\alpha_i^{(s)} \exp(iq_s x) - \alpha_r^{(s)} \exp(-iq_s x) \right] \quad (6)$$

At the interfaces of two materials the transmission conditions of the stress and displacement continuities can be imposed as

$$u^{(A)}(x) = u^{(B)}(x), \quad \tau^{(A)}(x) = \tau^{(B)}(x), \quad x = h_A \quad (\text{case a}) \quad (7)$$

For case b) besides of condition (7) we have additional condition

$$u^{(B)}(x) = u^{(A)}(x), \quad \tau^{(B)}(x) = \tau^{(A)}(x), \quad x = h_A + h_B \quad (8)$$

Since the interface continuity conditions are imposed on functions $u^{(s)}(x)$, $\tau^{(s)}(x)$ it is convenient to introduce the following column vectors

$$\bar{U}^{(s)}(x) = \begin{pmatrix} u^{(s)} \\ \tau^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \bar{A}^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_i^{(s)} \\ \alpha_r^{(s)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

In matrix form the solutions (5, 6) can be cast as

$$\bar{U}^{(s)}(x) = \hat{F}^{(s)}(x) \cdot \bar{A}^{(s)} \quad (10)$$

where

$$\hat{F}^{(s)}(x) = \begin{pmatrix} \exp(iq_s x), & \exp(-iq_s x) \\ i\mu_s q_s \exp(iq_s x), & -i\mu_s q_s \exp(-iq_s x) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Let note that the transmission conditions (7,8) lead to the conditions of continuities of the field vectors $\bar{U}^{(s)}(x)$ at separation interfaces of the sub-layers.

Propagator matrix method

The solution of observed problem can be drawn by linking vectors $\bar{U}^{(A)}(x)$, $\bar{U}^{(B)}(x)$ between top $x=d$ and bottom $x=0$ surfaces of the layer with help of propagator matrix method [7]. According to this approach we need to consider first two points $x_1^{(s)}, x_2^{(s)}$ within each material in domains of the sub-layers $s = A, B$. For values of field vectors $\bar{U}^{(s)}(x)$ following conditions are valid

$$\bar{U}^{(s)}(x_1^{(s)}) = \hat{F}^{(s)}(x_1^{(s)}) \cdot \bar{A}^{(s)}, \quad \bar{U}^{(s)}(x_2^{(s)}) = \hat{F}^{(s)}(x_2^{(s)}) \cdot \bar{A}^{(s)} \quad (12)$$

Eliminating vectors $\bar{A}^{(s)}$ from (12) the relation linking $\bar{U}^{(s)}$ vector field values within each material can be found as

$$\bar{U}^{(s)}(x_2^{(s)}) = T^{(s)}(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}) \bar{U}^{(s)}(x_1^{(s)}) \quad (13)$$

herein $\hat{T}^{(s)}(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}) = \hat{F}^{(s)}(x_2^{(s)}) (\hat{F}^{(s)}(x_1^{(s)}))^{-1}$ is the transfer matrix in each sub-layer.

$$T^{(s)}(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}) = \begin{pmatrix} \cos(q_s(x_2^{(s)} - x_1^{(s)})) & (\mu_s q_s)^{-1} \sin(q_s(x_2^{(s)} - x_1^{(s)})) \\ -\mu_s q_s \sin(q_s(x_2^{(s)} - x_1^{(s)})) & \cos(q_s(x_2^{(s)} - x_1^{(s)})) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Let now consider the layer with two sub-layers case of the structure.

In the case *a*) using the continuity conditions of field vectors $\bar{U}^{(s)}(x)$ at interface $x=d_1$ we come to the matrix equations

$$\bar{U}^{(A)}(d) = \hat{M} \bar{U}^{(B)}(0) \quad (15)$$

where

$$\hat{M} = \hat{T}^{(B)}(d_1, d_1 + d_2) \hat{T}^{(A)}(0, d_1) \quad (16)$$

Herein \hat{M} is the propagator matrix for shear wave field, which links the field vectors at the top and bottom of the layered structure.

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

The explicit expressions of the unimodal propagator matrix \hat{M} elements can be derived as

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos(d_1 q_1) \cos(d_2 q_2) - \frac{q_1 \mu_1}{q_2 \mu_2} \sin(d_1 q_1) \sin(d_2 q_2) \\ m_{12} &= \frac{\cos(d_1 q_1) \sin(d_2 q_2)}{q_2 \mu_2} + \frac{\cos(d_2 q_2) \sin(d_1 q_1)}{q_1 \mu_1} \\ m_{21} &= -q_2 \mu_2 \cos(d_1 q_1) \sin(d_2 q_2) - q_1 \mu_1 \cos(d_2 q_2) \sin(d_1 q_1) \\ m_{22} &= \cos(d_1 q_1) \cos(d_2 q_2) - \frac{q_2 \mu_2}{q_1 \mu_1} \sin(d_1 q_1) \sin(d_2 q_2) \end{aligned} \quad (17)$$

For the case *b*) the \hat{M} matrix is constructed in a similar way

$$\hat{M} = \hat{T}^{(A)}(d_1/2 + d_2, d) \hat{T}^{(B)}(d_1/2, d_1/2 + d_2) \hat{T}^{(A)}(0, d_1/2)$$

matrix elements of which are

$$m_{11} = \cos(d_2 q_2) \cos(d_1 q_1) - \frac{\sin(d_2 q_2) \sin(d_1 q_1) (q_1^2 \mu_1^2 + q_2^2 \mu_2^2)}{2 q_1 \mu_1 q_2 \mu_2},$$

$$\begin{aligned}
m_{12} &= \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}d_1q_1\right)\sin(d_2q_2)}{q_2\mu_2} + \frac{q_1\mu_1\cos(d_2q_2)\sin(d_1q_1) - q_2\mu_2\sin^2(d_2q_2)\sin\left(\frac{1}{2}d_1q_1\right)}{q_1^2\mu_1^2} \\
m_{21} &= -q_1\mu_1\cos(d_2q_2)\sin(d_1q_1) - \frac{(q_1^2\mu_1^2(\cos(d_1q_1)-1) + q_2^2\mu_2^2(\cos(d_1q_1)+1))\sin(d_2q_2)}{2q_2\mu_2} \\
m_{22} &= \cos(d_2q_2)\cos(d_1q_1) - \frac{\sin(d_2q_2)\sin(d_1q_1)(q_1^2\mu_1^2 + q_2^2\mu_2^2)}{2q_1\mu_1q_2\mu_2}
\end{aligned} \tag{18}$$

Reflection and transmission coefficients

For shear wave propagating in lower (I) and upper (II) semi-spaces we write solutions in the form

$$u_I(x, y, t) = u_I(x) \exp(i(py - \omega t)), \quad u_{II}(x, y, t) = u_{II}(x) \exp(i(py - \omega t))$$

$$u_I(x) = A_i \exp(iq_I x) + A_r \exp(-iq_I x), \quad u_{II}(x) = A_t \exp(iq_{II} x)$$

$$\tau_I(x) = i\mu_I q_I (A_i \exp(iq_I x) - A_r \exp(-iq_I x))$$

$$\tau_{II}(x) = A_t i\mu_{II} q_{II} \exp(iq_{II} x)$$

where $q_s = \sqrt{\omega^2/c_s^2 - k^2}$, $c_s^2 = \mu_s/\rho_s$, $s = I, II$, A_i, A_r, A_t are amplitudes of incident, reflected, and refracted (transmitted) waves, respectively, μ_s are shear moduli and ρ_s are bulk densities of lower and upper semi-spaces respectively.

At the interfaces $x = 0$, $x = d$ the conditions of stresses and displacements continuities are imposed

$$u_I(0) = u_I(0), \quad \tau_I(0) = \tau_I(0) \tag{19}$$

$$u_{II}(d) = u_{II}(d), \quad \tau_{II}(d) = \tau_{II}(d)$$

or in matrix form

$$\bar{U}^{(A)}(0) = \begin{pmatrix} u_I(0) \\ \tau_I(0) \end{pmatrix}, \quad \bar{U}^{(B)}(d) = \begin{pmatrix} u_{II}(d) \\ \tau_{II}(d) \end{pmatrix} \tag{20}$$

Taking into account the transmission condition (20) and the link relation (15), the amplitudes A_r, A_t via A_i can be found by solving the following matrix equation

$$\hat{M} \begin{pmatrix} A_i + A_r \\ i\mu_I q_I (A_i - A_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_t \exp(iq_{II} d) \\ i\mu_{II} q_{II} A_t \exp(iq_{II} d) \end{pmatrix} \tag{21}$$

Solution of (21) can be found in the form

$$A_r = A_i \frac{(q_I \mu_I q_{II} \mu_{II} m_{12} + m_{21}) + i(m_{22} q_I \mu_I - q_{II} \mu_{II} m_{11})}{(q_I \mu_I q_{II} \mu_{II} m_{12} - m_{21}) + i(m_{22} q_I \mu_I + q_{II} \mu_{II} m_{11})} \quad (22)$$

$$A_t = \frac{2 A_i q_I \mu_I \exp(-iq_{II} d)}{(m_{22} q_I \mu_I + q_{II} \mu_{II} m_{11}) - i(q_I \mu_I q_{II} \mu_{II} m_{12} - m_{21})}$$

Energy flux conservation is then expressed via reflection and refraction amplitudes by the following algebraic identity

$$q_I \mu_I |A_r|^2 + q_{II} \mu_{II} |A_t|^2 = q_I \mu_I |A_i|^2 \quad (23)$$

Here

$$|A_r|^2 = A_i^2 \left(1 - \frac{4q_I q_{II} \mu_I \mu_{II}}{(m_{21})^2 + (m_{11})^2 q_I^2 \mu_I^2 + 2q_I q_{II} \mu_I \mu_{II} + q_{II}^2 \mu_{II}^2 ((m_{22})^2 + (m_{12})^2 q_I^2 \mu_I^2)} \right) \quad (24)$$

$$|A_t|^2 = \frac{4A_i^2 q_I^2 \mu_I^2}{(m_{21})^2 + (m_{11})^2 q_I^2 \mu_I^2 + 2q_I q_{II} \mu_I \mu_{II} + q_{II}^2 \mu_{II}^2 ((m_{22})^2 + (m_{12})^2 q_I^2 \mu_I^2)}$$

From equations (24) the transmission and reflection energy ratios coefficients can be written as

$$R = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2}, T = \frac{|A_t|^2}{|A_i|^2} \quad (25)$$

Numerical calculation results

For numerical calculations we consider that materials of the upper and lower semi-spaces are the same. In this case we have that $R + T = 1$

We will consider the three layouts of material arrangements within layer which is represented in Table 1.

Table 1

Layout	Semi-spaces	Material A	Material B
(1)	Cu	Si	Au
(2)	Au	Cu	Si
(3)	Si	Au	Cu

The material properties are presented in Table 2.

Table 2

	ρ (kg/m ³)	μ (GPa)	c (m/s)
Cu	8960	40	2113
Au	19300	27	5387
Si	2330	68	1183

For different values of the layer dimensionless thickness $h = kd$ on the Fig. 2-7 the energy transmission ratios $R(\theta)$ are presented in dependence of angles of incident wave

$\theta = \arcsin(kc_0/\omega)$, where $c_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ is velocity of the incident wave.

Relative thickness of sub-layers is denoted by $\delta = d_1/d$ where $d = d_1 + d_2$ (see Fig.1).

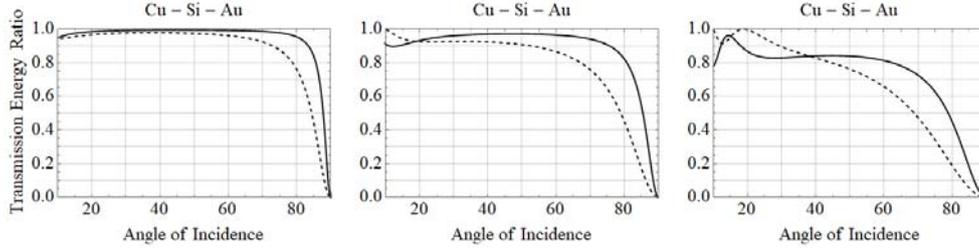


Fig. 2. Layout (1), $h = 0.2$, $h = 0.4$, $h = 0.8$, $\delta = 0.4$ for two layered (solid curve) and $\delta = 0.2$ for three layered cases (dashed curve)

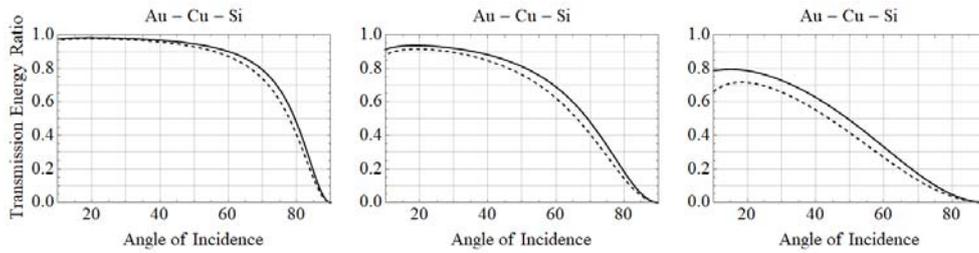


Fig. 3. Layout (2), $h = 0.2$, $h = 0.4$, $h = 0.8$, $\delta = 0.4$ for two layered (solid curve) and $\delta = 0.2$ for three layered cases (dashed curve)

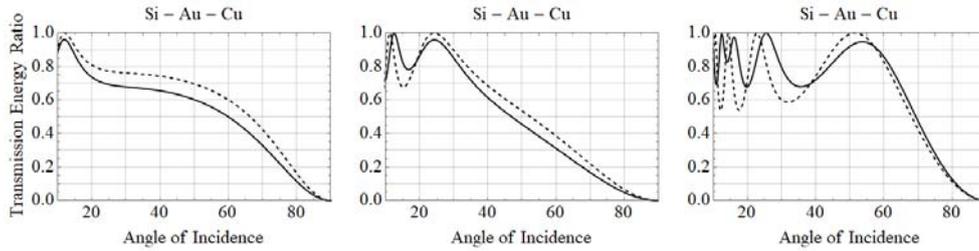


Fig. 4. Layout (3), $h = 0.2$, $h = 0.4$, $h = 0.8$, $\delta = 0.4$ for two layered (solid curve) and $\delta = 0.2$ for three layered cases (dashed curve)

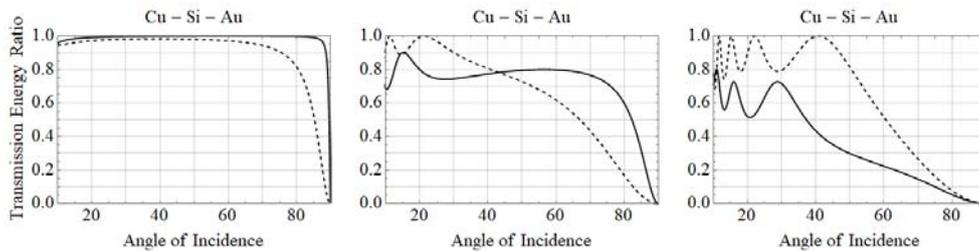


Fig. 5. Layout (1), $h = 0.2$, $h = 1$, $h = 2$, $\delta = 0.5$ for two layered (solid curve) and $\delta = 0.25$ for three layered cases (dashed curve)

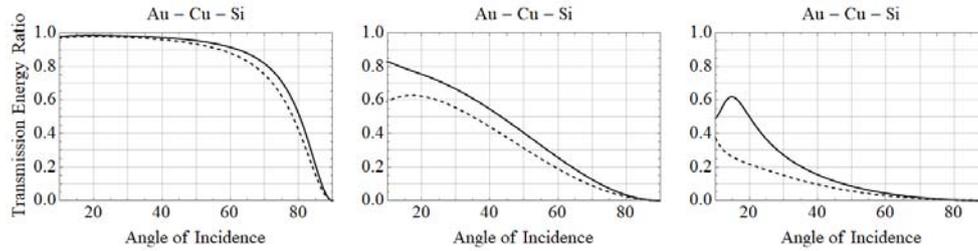


Fig. 6. Layout (2), $h = 0.2$, $h = 1$, $h = 2$, $\delta = 0.5$ for two layered (solid curve) and $\delta = 0.25$ for three layered cases (dashed curve)

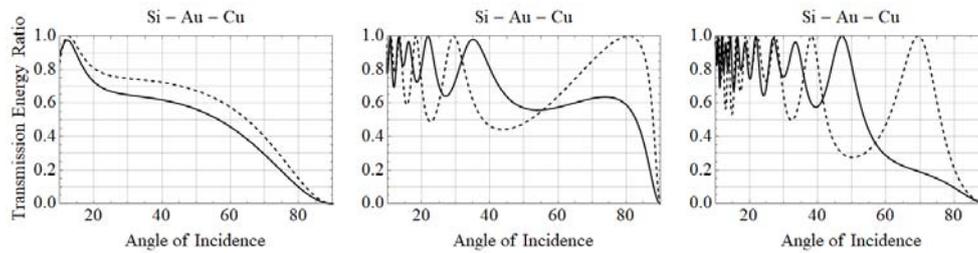


Fig. 7. Layout (3), $h = 0.2$, $h = 1$, $h = 2$, $\delta = 0.5$ for two layered (solid curve) and $\delta = 0.25$ for three layered cases (dashed curve)

As it follows from above data the values of energy transmission ratios qualitatively not considerably differ in the considered cases of symmetrically and asymmetrically arranged materials. By observation of differences between energy transmission ratios we can note that when wave propagate from hard semi-space (material Au) the values of transmission energy ratios are higher in asymmetrical case for all incident wave angles.

Conclusion

The problem of shear elastic wave propagation through a stratified bi-material layer was studied for asymmetrically and symmetrically arranged layers. By means of matrix propagator methods the amplitudes and energy ratios coefficients for incident and transmission waves are obtained analytically both for the symmetrical and asymmetrical layer. The numerical results and analysis are represented. For both cases the energy ratios are also plotted against the angle of incidence. Based on these results it is established that when the SH wave propagates from hard media the values of transmission energy ratios are higher in asymmetrical case comparing with symmetrical case.

Acknowledgement

This work was supported by the RA MES Science Committee, in the frames of the research project № 19YR-2C044

REFERENCES

1. Brekhovskikh L. Waves in layered media. Elsevier, 2012. p.497
2. Lekner J., Light in periodically stratified media, //J. Opt. Soc. Am. A 11, 2892-2899 (1994)
3. Singh B. Propagation of shear waves in a piezoelectric medium, Mechanics of advanced materials and structures ,v.20, 2013. p.434-440.
4. Piliposyan D., Piliposian G., Ghazaryan K.. Propagation and control of shear waves in piezoelectric composite waveguides with metallized interfaces. //International Journal of Solids and Structures 106 (2017), p.119-128.
5. Yan, D.J., Chen, A.L., Wang, Y.-S., Zhang,Ch., Golub, M.V., 2017, Propagation of guided elastic waves in nanoscale layered periodic piezoelectric composites, //European Journal of Mechanics - A Solids, 2017, Vol. 66.
6. Avetisyan A., Khachatryan V. Reflection and transmission of electro-elastic waves at plane non-acoustic contact interface of two different piezoelectric half-spaces, Актуальные проблемы машиностроения, 6-10, 2019.
7. Alshits, V. I., H. O. K. Kirchner, and G. A. Maugin. Elasticity of multilayers: properties of the propagator matrix and some applications. Mathematics and Mechanics of Solids 6,5 (2001), 481-502.

Information about author:

Sergey K. Ohanyan, Science Researcher, Department of Deformable Systems Dynamics and Coupled Fields, Institute of Mechanics. **phone:** (094) 06 32 37

E-mail: sergohnn@gmail.com

Received 04.02.2020

СОДЕРЖАНИЕ №1, 2020 г., том 73

ԱԳԱԼՈՎՅԱՆ ԼԵՆՏԵՐ ԱԲԳԱՐՈՎԻՇ – Կ 80-լетію со дня рождения	3
Ավետիսյան Արա Տ. , Խաչատրյան Վ.Մ. Распространение гибридных электроупругих волн в периодически поперечно-неоднородной пьезоэлектрической структуре.....	6
Ամիրջանյան Ա.Ա., Բелубեկյան Մ.Վ., Գեւորջյան Գ.Յ, Դարբինյան Ա.Յ. Распространение поверхностных волн в составной полуплоскости	23
Բաղдасարյան Գ.Է. Флаттер композиционной слоистой цилиндрической оболочки при больших сверхзвуковых скоростях	30
Բелубեկյան Վ.Մ., Բелубեկյան Է.Վ. К задаче устойчивости пластины, усиленной ребром жёсткости на свободном крае	41
Տարկիսյան Լ.Տ., Տարկիսյան Տ.Օ. Асимптотический метод построения прикладной модели деформаций тонких стержней по градиентной теории упругости	46
Օհանյան Տ.Կ. Преломление и отражение сдвиговой волны от слоя с двумя симметрично и антисимметрично расположенными материалами	63

CONTENTS v.73, №1, 2020

Aghalovyan L.A. 80th anniversary	3
Avetisyan Ara S. , Khachatryan Vazgen M. Propagation of Hybrid Electroelastic Waves in Transversally Inhomogeneous Periodic Piezoelectric Structure	6
Amirjanyan H.A, Belubekyan M.V., Gevorgyan G.Z., Darbinyan A.Z. Propagation of Surface Waves in the Composite Half Plane.....	23
Baghdasaryan G.Y. Flutter of a composite layered cylindrical shell in a supersonic gas flow	30
Belubekyan V.M., Belubekyan E.V. On the stability problem of the plate with a rib reinforcement of the free edge	41
Sargsyan L.S., Sargsyan S.H. Asymptotic method of construction of an applied model of deformation of thin beams by the gradient theory of elasticity	46
Ohanyan S.K. Shear Wave Reflection and Transmission From Symmetrically and Asymmetrically Arranged Bi- Material Layer	63

Աղալովյան Լ.Ա., –Ծննդյան 80-ամյակի առթիվ	3
Ավետիսյան Արա Ս., Խաչատրյան Վազգեն Մ. Խաչասերված էլեկտրատաձգական ալիքների տարածումը պարբերականորեն լայնական անհամասեռ պլեզոէլեկտրական կառուցվածքում.....	6
Ամիրջանյան Հ.Ա., Բելուբեկյան Ս.Վ., Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ. Մակերևութային ալիքների տարածումը բաղադրյալ կիսահարթությունում	23
Բաղդասարյան Գ.Ե. Գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող կոմպոզիցիոն շերտավոր գլանային թաղանթի կայունությունը.....	30
Բելուբեկյան Վ.Ս., Բելուբեկյան Է.Վ. Ազատ եզրով կոշտության կոդով ուղեկցված սալի կայունության խնդրի մասին	41
Սարգսյան Լ.Ս., Սարգսյան Ս.Հ. Առաձգականության գրադիենտային տեսությամբ բարակ ձողերի կիրառական մոդելների կառուցման ասիմպտոտիկ մեթոդը	46
Օհանյան Ս.Կ. Սահքի ալիքների բեկումը և անդրադարձումը սիմետրիկ և հակասիմետրիկ դասավորված երկու նյութից կազմված շերտում	63