

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻՍԻՆԵՂԵՂԵՎԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

2019

**О РЕШЕНИЯХ ТИПА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ОДНОЙ  
СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ АНИЗОТРОПНОЙ  
ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ**

**Баласанян Е.С., Гулгазарян Л.Г., Хачатрян А.М.**

**Ключевые слова:** асимптотический метод, анизотропная двухслойная пластинка, полный контакт, смешанные граничные условия, решение типа пограничного слоя.

**Balasyan E.S., Ghulghazaryan L.G., Khachatryan A.M.**

**On solutions of the boundary layer type one mixed boundary problem of anisotropic  
two-layered plate**

**Keywords:** asymptotic method, anisotropic two-layered plate, full contact, mixed boundary conditions, boundary layer type solution.

The question of constructing a solution of the boundary layer type for a rectangular orthotropic double-layer plate is discussed, on the face planes of which mixed homogeneous conditions are specified. Using the asymptotic method, solutions of the boundary layer type are constructed, a transcendental equation is derived to determine the eigenvalues, which characterize the decay rates of the found solution. It is shown that for orthotropic materials the solution of the type of the boundary layer disintegrated into flat and anti-flat boundary layers

**Բալասանյան Ե.Ս., Դուլգազարյան Լ.Գ., Խաչատրյան Ա.Մ.**

**Անիզոտրոպ երկշերտ սալի մի խառը եզրային խնդրում սահմանային շերտի տիպի  
լուծումների մասին**

**Հիմնաբառեր.** սահմանային մեթոդ, անիզոտրոպ երկշերտ սալ, լրիվ կոնտակտ, խառը եզրային պայմաններ, սահմանային շերտի տիպի լուծում:

Աշխատանքը նվիրված է երկշերտ անիզոտրոպ սալի սահմանային շերտի տիպի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի նկարագրմանն ու վերլուծությանը: Ենթադրվում է, որ սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են համասեռ խառը եզրային պայմաններ, իսկ մյուս հարթությունների վրա կարող են տրված լինել առաձգականության տեսության տարբեր եզրային պայմաններ: Այդ լուծումները բերվում են սեփական արժեքների սեփական ֆունկցիաների որոշման խնդրի: Դրական իրական մաս ունեցող սեփական թվերից ամենափոքրն էլ հենց որոշում է սահմանային շերտի լուծման մարման արագությունը:

Օրթոտրոպ նյութերի դեպքում սահմանային շերտի տիպի լարվածային վիճակի հավասարումները տրոհվում են երկու հավասարումների համակարգերի, որոնք նկարագրում են հարթ և հակահարթ սահմանային շերտի տիպի արվածային վիճակները:

Обсуждается вопрос построения решения типа пограничного слоя для прямоугольной ортотропной двухслойной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные однородные условия. С помощью асимптотического метода построены решения типа пограничного слоя, выведено трансцендентное уравнение для определения собственных чисел, характеризующих скорости затухания найденного решения. Показано, что для ортотропных материалов решение типа пограничного слоя распадается на плоский и антиплоский пограничные слои.

**Введение.** Классические краевые задачи для изотропных пластин и оболочек асимптотическим методом рассмотрены в [1,2]. Классические и неклассические краевые задачи для анизотропных однослойных и многослойных балок, пластин и оболочек асимптотическим методом рассмотрены в [3,4]. Напряжённо-деформированное состояние пластин с общей анизотропией в первой краевой задаче теории упругости исследовано в [5]. Решение для анизотропной термоупругой пластинки построено в [6]. Внутреннее решение в смешанной краевой задаче для анизотропной однослойной пластинки асимптотическим методом построено в [7]. Асимптотические решения смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки при полном и неполном контакте между слоями приведены в [10,11].

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку  $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1\}$ , где  $a$  – длина,  $b$  – ширина, составленную из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины  $h_k$ , коэффициенты упругости  $a_{ij}^{(k)}$ ,  $k$  – номер слоя и  $k = 1, 2$ . Общая толщина полосы  $2h$ . Плоскость отсчёта  $Oxy$  совпадает с плоскостью раздела слоёв, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки.

Обсуждается вопрос решения задачи типа пограничного слоя в одной смешанной краевой задаче для анизотропной прямоугольной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы следующие однородные условия:

$$\begin{aligned} u^{(1)} = 0, \quad v^{(1)} = 0, \quad \sigma_z^{(1)} = 0 \quad \text{при } z = h_1, \\ \sigma_{xz}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{yz}^{(2)} = 0, \quad w^{(2)} = 0 \quad \text{при } z = -h_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Краевые условия на торцах  $x = 0, a$  и  $y = 0, b$  – пока произвольные, а между слоями выполняется полный контакт, то есть:

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)} \quad \text{при } z = 0 \quad (1.2)$$

Для построения решения типа пограничного слоя вблизи края  $x = 0$  в трёхмерных уравнениях теории упругости анизотропного тела [3,8,9] вводятся безразмерные координаты  $t = x/h$ ,  $\eta = y/l$ ,  $\zeta = z/h$  и безразмерные перемещения  $U = u/l$ ,  $V = v/l$ ,  $W = w/l$ , в результате чего получаем сингулярно-возмущённую систему уравнений относительно малого геометрического параметра  $\varepsilon = h/l$ , где  $l = \min(a, b)$ ,  $2h = h_1 + h_2$ . Эту систему уравнений удобно решать методом асимптотического интегрирования [3-6].

Решение полученных уравнений отыскивается в виде функций типа пограничного слоя [3,4]

$$R_p^{(k)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{\chi_p + s} R_p^{(k,s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda t), \quad (1.3)$$

где  $R_p^{(k)}$  – любая из компонент напряжений и перемещений  $k$ -ого слоя ( $k = 1, 2$ ), при этом,  $\text{Re} \lambda > 0$ .

Непротиворечивые значения для  $\chi_p$  подбираются следующим образом:

$$\chi_{\sigma_i} = \chi, \quad \chi_{u_i} = \chi + 1, \quad (1.4)$$

где  $\chi$  – произвольное число, которое определится из условия взаимодействия пограничного слоя с внутренним напряжённым состоянием,  $\lambda$  характеризует изменяемость напряжений и перемещений пограничного слоя.

Подставляя (1.3), с учётом (1.4), в преобразованные уравнения теории упругости и выразив все неизвестные величины пограничного слоя через напряжения  $\sigma_{yzp}^{(k,s)}$  и  $\sigma_{zpz}^{(k,s)}$ , получим известные формулы [3-6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xp}^{(k,s)} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + R_x^{(k,s-1)}, \quad \sigma_{xyp}^{(k,s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + R_{xy}^{(k,s-1)}, \\ \sigma_{xzp}^{(k,s)} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + R_{xz}^{(k,s-1)}, \\ \sigma_{yp}^{(k,s)} &= -\frac{1}{a_{22}^{(k)}} \left( \frac{a_{12}^{(k)}}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{a_{25}^{(k)}}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \frac{a_{26}^{(k)}}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \right. \\ &\quad \left. + a_{23}^{(k)} \sigma_{zpz}^{(k,s)} + a_{24}^{(k)} \sigma_{yzp}^{(k,s)} \right) + R_y^{(k,s-1)}, \\ u_p^{(k,s)} &= -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{A_{15}^{(k)}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{16}^{(k)}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - \\ &\quad - \frac{A_{13}^{(k)}}{\lambda} \sigma_{zpz}^{(k,s)} - \frac{A_{14}^{(k)}}{\lambda} \sigma_{yzp}^{(k,s)} + R_u^{(k,s-1)}, \\ v_p^{(k,s)} &= -\frac{A_{16}^{(k)}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{A_{56}^{(k)}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{66}^{(k)}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - \\ &\quad - \frac{A_{36}^{(k)}}{\lambda} \sigma_{zpz}^{(k,s)} - \frac{A_{46}^{(k)}}{\lambda} \sigma_{yzp}^{(k,s)} + R_v^{(k,s-1)}, \\ w_p^{(k,s)} &= -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^4} \frac{\partial^3 \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta^3} - \frac{A_{16}^{(k)}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\lambda^2} (A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}) \frac{\partial \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - \\ &\quad - \frac{2A_{15}^{(k)}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{zpz}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\lambda^2} (A_{14}^{(k)} + A_{56}^{(k)}) \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{35}^{(k)}}{\lambda} \sigma_{zpz}^{(k,s)} - \frac{A_{45}^{(k)}}{\lambda} \sigma_{yzp}^{(k,s)} + R_w^{(k,s-1)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где использованы следующие обозначения [3,5]:

$$A_{ij}^{(k)} = (a_{22}^{(k)} a_{ij}^{(k)} - a_{2i}^{(k)} a_{2j}^{(k)}) (a_{22}^{(k)})^{-1}, \quad (i, j = 1, 3, 4, 5, 6). \quad (1.6)$$

Величины  $R_k^{(k,s)}$  известны и определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned}
R_x^{(k,s)} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{xyp}^{(k,s)}}{\partial \eta}, & R_{xy}^{(k,s)} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yp}^{(k,s)}}{\partial \eta}, & R_{xz}^{(k,s)} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,s)}}{\partial \eta}, \\
R_y^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{22}^{(k)}} \left( a_{12}^{(k)} R_x^{(k,s)} + a_{25}^{(k)} R_{xz}^{(k,s)} + a_{26}^{(k)} R_{xy}^{(k,s)} - \frac{\partial v_p^{(k,s)}}{\partial \eta} \right), \\
R_u^{(k,s)} &= \frac{1}{\lambda} \left( a_{11}^{(k)} R_x^{(k,s)} + a_{12}^{(k)} R_y^{(k,s)} + a_{15}^{(k)} R_{xz}^{(k,s)} + a_{16}^{(k)} R_{xy}^{(k,s)} \right), \\
R_v^{(k,s)} &= \frac{1}{\lambda} \left( a_{16}^{(k)} R_x^{(k,s)} + a_{26}^{(k)} R_y^{(k,s)} + a_{56}^{(k)} R_{xz}^{(k,s)} + a_{66}^{(k)} R_{xy}^{(k,s)} - \frac{\partial u_p^{(k,s)}}{\partial \eta} \right), \\
R_w^{(k,s)} &= \frac{1}{\lambda} \left( a_{15}^{(k)} R_x^{(k,s)} + a_{25}^{(k)} R_y^{(k,s)} + a_{55}^{(k)} R_{xz}^{(k,s)} + a_{56}^{(k)} R_{xy}^{(k,s)} + \frac{\partial R_u^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Для определения же неизвестных функций  $\sigma_{yzp}^{(k,s)}$  и  $\sigma_{zp}^{(k,s)}$  получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
L_{11}^{(k)} \sigma_{zp}^{(k,s)} + L_{12}^{(k)} \sigma_{yzp}^{(k,s)} &= R_1^{(k,s-1)}, \\
L_{12}^{(k)} \sigma_{zp}^{(k,s)} + L_{22}^{(k)} \sigma_{yzp}^{(k,s)} &= R_2^{(k,s-1)}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Дифференциальные операторы  $L_{ij}^{(k)}$  и обобщённые нагрузки  $R_1^{(k,s-1)}$ ,  $R_2^{(k,s-1)}$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
L_{11}^{(k)} &= A_{11}^{(k)} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} + 2A_{15}^{(k)} \lambda \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + \left( 2A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)} \right) \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2A_{35}^{(k)} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{33}^{(k)} \lambda^4, \\
L_{12}^{(k)} &= A_{16}^{(k)} \lambda \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + \left( A_{14}^{(k)} + A_{56}^{(k)} \right) \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \left( A_{36}^{(k)} + A_{45}^{(k)} \right) \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{34}^{(k)} \lambda^4, \\
L_{22}^{(k)} &= A_{66}^{(k)} \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2A_{46}^{(k)} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{44}^{(k)} \lambda^4, \\
R_1^{(k,s-1)} &= - \left( \frac{\partial R_w^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} + a_{13}^{(k)} R_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)} R_y^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} R_{xz}^{(k,s-1)} + a_{36}^{(k)} R_{xy}^{(k,s-1)} \right) \lambda^4, \\
R_2^{(k,s-1)} &= - \left( \frac{\partial R_v^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_p^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + a_{14}^{(k)} R_x^{(k,s-1)} + \right. \\
&\quad \left. + a_{24}^{(k)} R_y^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)} R_{xz}^{(k,s-1)} + a_{46}^{(k)} R_{xy}^{(k,s-1)} \right) \lambda^4.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Нужно учесть, что  $R_i^{(k,s-m)} \equiv 0$  при  $s < m$ .

При  $s = 0$  уравнения (1.8) становятся однородными.

В дальнейшем подробно рассмотрена задача для ортотропных материалов.

**2. Пограничный слой двухслойной ортотропной пластинки.** Если слои пластинки состоят из ортотропных материалов, то  $a_{ij}^{(k)} = 0, (i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 4, 5, 6)$ , а коэффициенты  $A_{ij}^{(k)}$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} A_{14}^{(k)} = A_{15}^{(k)} = A_{16}^{(k)} = A_{34}^{(k)} = A_{35}^{(k)} = A_{36}^{(k)} = A_{45}^{(k)} = A_{46}^{(k)} = A_{56}^{(k)} = 0 \\ A_{44}^{(k)} = a_{44}^{(k)}, A_{55}^{(k)} = a_{55}^{(k)}, A_{66}^{(k)} = a_{66}^{(k)}, \\ A_{11}^{(k)} = \left( a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - \left( a_{12}^{(k)} \right)^2 \right) / a_{22}^{(k)}, A_{13}^{(k)} = \left( a_{13}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)} \right) / a_{22}^{(k)}. \end{aligned}$$

В результате, формулы для напряжений и перемещений (1.5) упрощаются и делятся на две группы:

$$\begin{aligned} \sigma_{xp}^{(k,0)} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial \zeta^2}, \quad \sigma_{xzp}^{(k,0)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial \zeta}, \\ \sigma_{yp}^{(k,0)} = -\frac{1}{a_{22}^{(k)}} \left( \frac{a_{12}^{(k)}}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial \zeta^2} + a_{23}^{(k)} \sigma_{zp}^{(k,0)} \right), \\ w_p^{(k,0)} = -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^4} \frac{\partial^3 \sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial \zeta^3} - \frac{1}{\lambda^2} (A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}) \frac{\partial \sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial \zeta}, \\ u_p^{(k,s)} = -\frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{A_{13}^{(k)}}{\lambda} \sigma_{zp}^{(k,s)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

и

$$\sigma_{xyp}^{(k,0)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,0)}}{\partial \zeta}, \quad v_p^{(k,0)} = -\frac{a_{66}^{(k)}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(k,0)}}{\partial \zeta}. \quad (2.2)$$

Оператор  $L_{12}^{(k)}$  тождественно превращается в нуль, а система уравнений (1.8) распадается на два самостоятельных уравнения, которым соответствуют решения типа *плоского* и *антиплоского пограничных слоёв* [3–5]. При этом, поверхностные условия (1.1) и условия контакта (1.2) также распадутся на две группы.

При  $s = 0$  будем иметь:

а) *плоский пограничный слой*

$$L_{11} \sigma_{zp}^{(k,0)} = 0 \quad (2.3)$$

$$\sigma_{xz}^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_2) = 0, \quad w^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_2) = 0, \quad (2.4)$$

$$u^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1) = 0, \quad \sigma_z^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1) = 0.$$

б) *антиплоский пограничный слой*

$$L_{22}\sigma_{yzp}^{(k,0)} = 0 \quad (2.5)$$

$$\sigma_{yz}^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_2) = 0, \quad v^{(1)}(\xi, \eta, \zeta_1) = 0. \quad (2.6)$$

Посредством формул (2.1), (2.2) и (1.9) задачу (2.3) – (2.4) представим в виде

$$A_{11}^{(k)} \frac{\partial^4 \sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial \zeta^4} + (2A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}) \lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(k,0)}}{\partial \zeta^2} + A_{33}^{(k)} \lambda^4 \sigma_{zp}^{(k,0)} = 0, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{zp}^{(1,0)} \Big|_{\zeta=\zeta_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(1,0)}}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=\zeta_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zp}^{(2,0)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \sigma_{zp}^{(2,0)}}{\partial \zeta^3} \Big|_{\zeta=\zeta_2} = 0, \quad (2.8)$$

а задачу (2.5)-(2.6) – в виде

$$A_{66}^{(k)} \lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(k,0)}}{\partial \zeta^2} + A_{44}^{(k)} \lambda^4 \sigma_{yzp}^{(k,0)} = 0, \quad (2.9)$$

$$\sigma_{yzp}^{(2,0)} \Big|_{\zeta=\zeta_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(1,0)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_1} = 0. \quad (2.10)$$

Краевые задачи (2.7)–(2.8) и (2.9)–(2.10) являются задачами на собственные значения и собственные функции. После того, как будут найдены собственные значения  $\lambda_n$ , соответствующие собственные функции можно будет определить с помощью формул (2.1) или (2.2).

### 3. Плоский пограничный слой двухслойной ортотропной пластинки.

Уравнению однородного плоского пограничного слоя (2.5) соответствует характеристическое уравнение

$$A_{11}^{(k)} r^4 + (2A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}) \lambda^2 r^2 + A_{33}^{(k)} \lambda^4 = 0. \quad (3.1)$$

Это уравнение может иметь корни трёх типов в зависимости от значения

$$D^{(k)} = (2A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)})^2 - 4A_{11}^{(k)} A_{33}^{(k)} \quad [3,9].$$

а) Пусть  $D^{(k)} > 0$ . Тогда, корни характеристического уравнения (3.1), что чаще имеет место для реальных ортотропных материалов – мнимые и отличны друг от друга

$$r_{1,2}^{(k)} = \pm i q_1^{(k)} \lambda, \quad r_{3,4}^{(k)} = \pm i q_2^{(k)} \lambda, \quad (q_{1,2}^{(k)})^2 = \frac{(2A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)}) \mp \sqrt{D^{(k)}}}{2A_{11}^{(k)}} < 0 \quad (3.2)$$

Корням (3.2) соответствует следующее решение уравнения (2.7):

$$\sigma_{zp}^{(k,0)} = C_1^{(k,0)} \cos q_1^{(k)} \lambda \zeta + C_2^{(k,0)} \sin q_1^{(k)} \lambda \zeta + C_3^{(k,0)} \cos q_2^{(k)} \lambda \zeta + C_4^{(k,0)} \sin q_2^{(k)} \lambda \zeta,$$

где  $C_i^{(k,0)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – неизвестные постоянные интегрирования.

Тогда, из формул (2.1) для остальных величин получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xp}^{(k,0)} &= -C_1^{(k,0)} \left( q_1^{(k)} \right)^2 \cos q_1^{(k)} \lambda \zeta - C_2^{(k,0)} \left( q_1^{(k)} \right)^2 \sin q_1^{(k)} \lambda \zeta - \\
&\quad - C_3^{(k,0)} \left( q_2^{(k)} \right)^2 \cos q_2^{(k)} \lambda \zeta - C_4^{(k,0)} \left( q_2^{(k)} \right)^2 \sin q_2^{(k)} \lambda \zeta \\
\sigma_{xzp}^{(k,0)} &= -C_1^{(k,0)} q_1^{(k)} \sin q_1^{(k)} \lambda \zeta + C_2^{(k,0)} q_1^{(k)} \cos q_1^{(k)} \lambda \zeta - \\
&\quad - C_3^{(k,0)} q_2^{(k)} \sin q_2^{(k)} \lambda \zeta + C_4^{(k,0)} q_2^{(k)} \cos q_2^{(k)} \lambda \zeta, \\
\sigma_{yp}^{(k,0)} &= \frac{1}{a_{22}^{(k)}} \left[ C_1^{(k,0)} \left( a_{12}^{(k)} \left( q_1^{(k)} \right)^2 - a_{23}^{(k)} \right) \cos q_1^{(k)} \lambda \zeta + \right. \\
&\quad + C_2^{(k,0)} \left( a_{12}^{(k)} \left( q_1^{(k)} \right)^2 - a_{23}^{(k)} \right) \sin q_1^{(k)} \lambda \zeta + \\
&\quad + C_3^{(k,0)} \left( a_{12}^{(k)} \left( q_2^{(k)} \right)^2 - a_{23}^{(k)} \right) \cos q_2^{(k)} \lambda \zeta + \\
&\quad \left. + C_4^{(k,0)} \left( a_{12}^{(k)} \left( q_2^{(k)} \right)^2 - a_{23}^{(k)} \right) \sin q_2^{(k)} \lambda \zeta \right], \tag{3.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_p^{(k,0)} &= \frac{1}{\lambda} \left( m_1^{(k)} \left( C_1^{(k,0)} \cos q_1^{(k)} \lambda \zeta + C_2^{(k,0)} \sin q_1^{(k)} \lambda \zeta \right) + \right. \\
&\quad \left. + m_2^{(k)} \left( C_3^{(k,0)} \cos q_2^{(k)} \lambda \zeta + C_4^{(k,0)} \sin q_2^{(k)} \lambda \zeta \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_p^{(k,0)} &= -\frac{1}{\lambda} \left( m_3^{(k)} \left( C_1^{(k,0)} \sin q_1^{(k)} \lambda \zeta - C_2^{(k,0)} \cos q_1^{(k)} \lambda \zeta \right) + \right. \\
&\quad \left. + m_4^{(k)} \left( C_3^{(k,0)} \sin q_2^{(k)} \lambda \zeta - C_4^{(k,0)} \cos q_2^{(k)} \lambda \zeta \right) \right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
m_1^{(k)} &= A_{11}^{(k)} \left( q_1^{(k)} \right)^2 - A_{13}^{(k)}, \quad m_3^{(k)} = \left( A_{11}^{(k)} \left( q_1^{(k)} \right)^2 - \left( A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)} \right) \right) q_1^{(k)}, \\
m_2^{(k)} &= A_{11}^{(k)} \left( q_2^{(k)} \right)^2 - A_{13}^{(k)}, \quad m_4^{(k)} = \left( A_{11}^{(k)} \left( q_2^{(k)} \right)^2 - \left( A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)} \right) \right) q_2^{(k)}.
\end{aligned}$$

Удовлетворим условиям полного контакта (1.2) и неизвестные величины с верхним индексом «2» выразим через величины с индексом «1»:

$$\begin{aligned}
C_1^{(2,0)} &= k_5 C_1^{(1,0)} + k_6 C_3^{(1,0)}, \quad C_2^{(2,0)} = k_3 C_2^{(1,0)} + k_4 C_4^{(1,0)} \\
C_3^{(2,0)} &= (1 - k_5) C_1^{(1,0)} + (1 - k_6) C_3^{(1,0)}, \quad C_4^{(2,0)} = k_1 C_2^{(1,0)} + k_2 C_4^{(1,0)},
\end{aligned}$$

где

$$k_1 = \frac{m_3^{(1)} q_1^{(2)} - m_3^{(2)} q_1^{(1)}}{m_3^{(2)} q_2^{(2)} + m_4^{(2)} q_1^{(2)}}, \quad k_2 = \frac{m_4^{(1)} q_1^{(2)} + m_3^{(2)} q_2^{(1)}}{m_3^{(2)} q_2^{(2)} + m_4^{(2)} q_1^{(2)}}, \quad k_5 = \frac{m_1^{(1)} - m_2^{(2)}}{m_1^{(2)} - m_2^{(2)}},$$

$$k_3 = \frac{m_4^{(2)} q_1^{(1)} + m_3^{(1)} q_2^{(2)}}{m_3^{(2)} q_2^{(2)} + m_4^{(2)} q_1^{(2)}}, k_4 = \frac{m_4^{(1)} q_2^{(2)} - m_4^{(2)} q_2^{(1)}}{m_3^{(2)} q_2^{(2)} + m_4^{(2)} q_1^{(2)}}, k_6 = \frac{m_2^{(1)} - m_2^{(2)}}{m_1^{(2)} - m_2^{(2)}}.$$

Удовлетворив однородным условиям (2.4), получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных  $C_1^{(1,0)}, C_2^{(1,0)}, C_3^{(1,0)}, C_4^{(1,0)}$ :

$$\begin{aligned} C_1^{(1,0)} \varphi_1 + C_2^{(1,0)} \varphi_2 + C_3^{(1,0)} \varphi_3 + C_4^{(1,0)} \varphi_4 &= 0, \\ C_1^{(1,0)} (q_1^{(1)})^2 \varphi_1 + C_2^{(1,0)} (q_1^{(1)})^2 \varphi_2 + C_3^{(1,0)} (q_2^{(1)})^2 \varphi_3 + C_4^{(1,0)} (q_2^{(1)})^2 \varphi_4 &= 0, \\ C_1^{(1,0)} [k_5 q_1^{(2)} \varphi_6 + (1 - k_5) q_2^{(2)} \varphi_8] - C_2^{(1,0)} [k_3 q_1^{(2)} \varphi_5 + k_1 q_2^{(2)} \varphi_7] + \\ + C_3^{(1,0)} [k_6 q_1^{(2)} \varphi_6 + (1 - k_6) q_2^{(2)} \varphi_8] - C_4^{(1,0)} [k_4 q_1^{(2)} \varphi_5 + k_2 q_2^{(2)} \varphi_7] &= 0, \\ C_1^{(1,0)} [k_5 q_1^{(2)} \varphi_6 + (1 - k_5) q_2^{(2)} \varphi_8] - C_2^{(1,0)} [k_3 q_1^{(2)} \varphi_5 + k_1 q_2^{(2)} \varphi_7] + \\ + C_3^{(1,0)} [k_6 q_1^{(2)} \varphi_6 + (1 - k_6) q_2^{(2)} \varphi_8] - C_4^{(1,0)} [k_4 q_1^{(2)} \varphi_5 + k_2 q_2^{(2)} \varphi_7] &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где для упрощения записи введены обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \cos q_1^{(1)} \lambda \zeta_1, \varphi_2 = \sin q_1^{(1)} \lambda \zeta_1, \varphi_3 = \cos q_2^{(1)} \lambda \zeta_1, \varphi_4 = \sin q_2^{(1)} \lambda \zeta_1, \\ \varphi_5 &= \cos q_1^{(2)} \lambda \zeta_2, \varphi_6 = \sin q_1^{(2)} \lambda \zeta_2, \varphi_7 = \cos q_2^{(2)} \lambda \zeta_2, \varphi_8 = \sin q_2^{(2)} \lambda \zeta_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Однородная система уравнений (3.4) будет иметь нетривиальное решение только в том случае, когда её определитель  $\Delta(\lambda)$  равен нулю.

Элементы определителя  $\Delta(\lambda)$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \varphi_1, d_{12} = \varphi_2, d_{13} = \varphi_3, d_{14} = \varphi_4, \\ d_{21} &= (q_1^{(1)})^2 \varphi_1, d_{22} = (q_1^{(1)})^2 \varphi_2, d_{23} = (q_2^{(1)})^2 \varphi_3, d_{24} = (q_2^{(1)})^2 \varphi_4, \\ d_{31} &= k_5 q_1^{(2)} \varphi_6 + (1 - k_5) q_2^{(2)} \varphi_8, d_{32} = -k_3 q_1^{(2)} \varphi_5 - k_1 q_2^{(2)} \varphi_7, \\ d_{33} &= k_6 q_1^{(2)} \varphi_6 + (1 - k_6) q_2^{(2)} \varphi_8, d_{34} = -k_4 q_1^{(2)} \varphi_5 - k_2 q_2^{(2)} \varphi_7, \\ d_{41} &= k_5 (q_1^{(1)})^3 \varphi_6 + (1 - k_5) (q_2^{(1)})^3 \varphi_8, d_{42} = -k_3 (q_1^{(1)})^3 \varphi_5 - k_1 (q_2^{(1)})^3 \varphi_7, \\ d_{43} &= k_6 (q_1^{(1)})^3 \varphi_6 + (1 - k_6) (q_2^{(1)})^3 \varphi_8, d_{44} = -k_4 (q_1^{(1)})^3 \varphi_5 - k_2 (q_2^{(1)})^3 \varphi_7 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Приравнивая определитель системы (3.4) нулю

$$\Delta(\lambda) = \det \|d_{ij}\| = 0,$$

получим следующее трансцендентное уравнение для определения  $\lambda$ .

$$\begin{aligned}
& a_1 \cos q_1^{(1)} \lambda \zeta_1 \cos q_2^{(1)} \lambda \zeta_1 \cos q_1^{(2)} \lambda \zeta_2 \cos q_2^{(2)} \lambda \zeta_2 + \\
& + a_2 \sin q_1^{(1)} \lambda \zeta_1 \cos q_2^{(1)} \lambda \zeta_1 \cos q_1^{(2)} \lambda \zeta_2 \sin q_2^{(2)} \lambda \zeta_2 + \\
& + a_3 \sin q_1^{(1)} \lambda \zeta_1 \cos q_2^{(1)} \lambda \zeta_1 \cos q_1^{(2)} \lambda \zeta_2 \cos q_2^{(2)} \lambda \zeta_2 + \\
& + a_4 \sin q_1^{(1)} \lambda \zeta_1 \sin q_2^{(1)} \lambda \zeta_1 \cos q_1^{(2)} \lambda \zeta_2 \sin q_2^{(2)} \lambda \zeta_2 + \\
& + a_5 \sin q_1^{(1)} \lambda \zeta_1 \sin q_2^{(1)} \lambda \zeta_1 \sin q_1^{(2)} \lambda \zeta_2 \sin q_2^{(2)} \lambda \zeta_2 + \\
& + a_6 \cos q_1^{(1)} \lambda \zeta_1 \sin q_2^{(1)} \lambda \zeta_1 \cos q_1^{(2)} \lambda \zeta_2 \sin q_2^{(2)} \lambda \zeta_2 + \\
& + a_7 \cos q_1^{(1)} \lambda \zeta_1 \sin q_2^{(1)} \lambda \zeta_1 \sin q_1^{(2)} \lambda \zeta_2 \cos q_2^{(2)} \lambda \zeta_2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где коэффициенты  $a_i$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
a_1 &= k_2 k_3 - k_1 k_4, \quad a_2 = -k_4(1 - k_5), \quad a_3 = k_2 k_5, \\
a_4 &= k_3(1 - k_6), \quad a_5 = (k_5 - k_6), \quad a_6 = k_1(1 - k_5), \quad a_7 = -k_1 k_6.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Трансцендентное уравнение (3.7) имеет бесконечное множество корней [1,3]. Их можно решать численными или асимптотическими методами. Из комплексных корней нас интересуют только корни, удовлетворяющие условию  $\text{Re} \lambda > 0$ .

Отметим, что для однослойной пластинки

$$\zeta_1 = -\zeta_2 = 1, \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)}, \quad q_i^{(1)} = q_i^{(2)} = q_i, \quad k_1 = k_4 = k_6 = 0, \quad k_2 = k_3 = k_5 = 1,$$

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 1, \quad a_3 = a_6 = a_7 = 0$$

трансцендентное уравнение (3.7) упрощается и примет вид:

$$\begin{aligned}
& \cos^2 q_1^{(1)} \lambda \cos^2 q_2^{(1)} \lambda - \sin^2 q_2^{(1)} \lambda \cos^2 q_1^{(1)} \lambda + \\
& + \sin^2 q_1^{(1)} \lambda \sin q_2^{(1)} \lambda - \sin^2 q_1^{(1)} \lambda \cos^2 q_2^{(1)} \lambda = 0.
\end{aligned}$$

После несложных преобразований получим [7]:

$$\cos 2q_1 \lambda \cdot \cos 2q_2 \lambda = 0. \tag{3.9}$$

Пусть  $\lambda_n$  – корень уравнения (3.7).

Поскольку определитель  $\Delta(\lambda)$  равен нулю, то между её строками существует линейная зависимость. Отбросив последнее уравнение системы (3.4), получим систему из трёх уравнений с четырьмя неизвестными. Она позволяет первые три константы выразить через четвертую по формулам:

$$C_1^{(1,0)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} D_n^{(0)}, \quad C_2^{(1,0)} = \frac{\Delta_2}{\Delta} D_n^{(0)}, \quad C_3^{(1,0)} = \frac{\Delta_3}{\Delta} D_n^{(0)}, \tag{3.10}$$

где  $\Delta$  – основной, а  $\Delta_i$  – вспомогательные определители следующей матрицы:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \end{array} \right)$$

а  $D_n^{(0)}$  – новая неизвестная постоянная, соответствующая собственному значению  $\lambda_n$  и будет определяться из боковых условий.

Тогда, для первого слоя напряжения и перемещения плоского пограничного слоя будут определяться по формулам (им припишем дополнительный нижний индекс « $P$ »):

$$\begin{aligned}
\sigma_{zpp}^{(1,0)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta} \left\{ \Delta_1 \cos q_1^{(1)} \lambda_n \zeta + \Delta_2 \sin q_1^{(1)} \lambda_n \zeta + \right. \\
&\quad \left. + \Delta_3 \cos q_2^{(1)} \lambda_n \zeta + \Delta \sin q_2^{(1)} \lambda_n \zeta \right\} D_n^{(0)}, \\
\sigma_{xpp}^{(1,0)} &= - \sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta} \left\{ \Delta_1 \left( q_1^{(1)} \right)^2 \cos q_1^{(1)} \lambda_n \zeta + \Delta_2 \left( q_1^{(1)} \right)^2 \sin q_1^{(1)} \lambda_n \zeta + \right. \\
&\quad \left. + \Delta_3 \left( q_2^{(1)} \right)^2 \cos q_2^{(1)} \lambda_n \zeta + \Delta \left( q_2^{(1)} \right)^2 \sin q_2^{(1)} \lambda_n \zeta \right\} D_n^{(0)}, \\
\sigma_{xppp}^{(1,0)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta} \left\{ -\Delta_1 q_1^{(1)} \sin q_1^{(1)} \lambda_n \zeta + \Delta_2 q_1^{(1)} \cos q_1^{(1)} \lambda_n \zeta - \right. \\
&\quad \left. - \Delta_3 q_2^{(1)} \sin q_2^{(1)} \lambda_n \zeta + \Delta q_2^{(1)} \cos q_2^{(1)} \lambda_n \zeta \right\} D_n^{(0)}, \\
\sigma_{ypp}^{(1,0)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_{22}^{(1)}} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Delta} \left( a_{12}^{(1)} \left( q_1^{(1)} \right)^2 - a_{23}^{(1)} \right) \cos q_1^{(1)} \lambda_n \zeta + \right. \\
&\quad + \frac{\Delta_2}{\Delta} \left( a_{12}^{(1)} \left( q_1^{(1)} \right)^2 - a_{23}^{(1)} \right) \sin q_1^{(1)} \lambda_n \zeta + \\
&\quad + \frac{\Delta_3}{\Delta} \left( a_{12}^{(1)} \left( q_2^{(1)} \right)^2 - a_{23}^{(1)} \right) \cos q_2^{(1)} \lambda_n \zeta + \\
&\quad \left. + \left( a_{12}^{(1)} \left( q_2^{(1)} \right)^2 - a_{23}^{(1)} \right) \sin q_2^{(1)} \lambda_n \zeta \right\} D_n^{(0)}, \\
u_{pp}^{(1,0)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Delta} m_1^{(1)} \cos q_1^{(1)} \lambda_n \zeta + \frac{\Delta_2}{\Delta} m_1^{(1)} \sin q_1^{(1)} \lambda_n \zeta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Delta_3}{\Delta} m_2^{(1)} \cos q_2^{(1)} \lambda_n \zeta + m_2^{(1)} \sin q_2^{(1)} \lambda_n \zeta \right\} D_n^{(0)}, \\
w_{pp}^{(1,0)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \left\{ -\frac{\Delta_1}{\Delta} m_3^{(1)} \sin q_1^{(1)} \lambda_n \zeta + \frac{\Delta_2}{\Delta} m_3^{(1)} \cos q_1^{(1)} \lambda_n \zeta - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Delta_3}{\Delta} m_4^{(1)} q_2^{(1)} \sin q_2^{(1)} \lambda_n \zeta + m_4^{(1)} \cos q_2^{(1)} \lambda_n \zeta \right\} D_n^{(0)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Напряжения и перемещения плоского погранслоя второго слоя запишутся аналогичным образом.

Если  $\lambda_n$  – корень уравнения (3.7), то из (2.9) и (2.10) следует  $\sigma_{xzpp}^{(k,0)} = \sigma_{xypp}^{(k,0)} = \nu_{pp}^{(k,0)} \equiv 0$ .

$$\text{б) Пусть } D^{(k)} = (2A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)})^2 - 4A_{11}^{(k)}A_{33}^{(k)} = 0.$$

Тогда, корни характеристического уравнения (2.11) – мнимые и кратные:

$$r_{1,2}^{(k)} = \pm iq^{(k)}\lambda, \quad r_{3,4}^{(k)} = \pm iq^{(k)}\lambda, \quad (q^{(k)})^2 = \frac{A_{55}^{(k)} + 2A_{13}^{(k)}}{2A_{11}^{(k)}} = \sqrt{\frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}}. \quad (3.12)$$

Решение задачи (2.7)–(2.8) представится в виде:

$$\sigma_{zp}^{(k,0)} = (C_1^{(k,0)} + \zeta C_2^{(k,0)}) \cos q^{(k)}\lambda\zeta + (C_3^{(k,0)} + \zeta C_4^{(k,0)}) \sin q^{(k)}\lambda\zeta. \quad (3.13)$$

в) Пусть  $D^{(k)} < 0$ . Тогда корни характеристического уравнения (2.11) – комплексно-сопряжённые:

$$r_{1,2}^{(k)} = (p^{(k)} \pm iq^{(k)})\lambda, \quad r_{3,4}^{(k)} = (-p^{(k)} \pm iq^{(k)})\lambda$$

$$(p^{(k)})^2 = \frac{2\sqrt{A_{11}^{(k)}A_{33}^{(k)} - A_{55}^{(k)}} + 2A_{13}^{(k)}}{2A_{11}^{(k)}}, \quad (q^{(k)})^2 = \frac{2\sqrt{A_{11}^{(k)}A_{33}^{(k)} - A_{55}^{(k)}} - 2A_{13}^{(k)}}{2A_{11}^{(k)}}. \quad (3.14)$$

Решение задачи (2.7)–(2.8) представится в виде:

$$\sigma_{zp}^{(k,0)} = C_1^{(k,0)}\varphi_1^{(k,0)} + C_2^{(k,0)}\varphi_2^{(k,0)} + C_3^{(k,0)}\varphi_3^{(k,0)} + C_4^{(k,0)}\varphi_4^{(k,0)}, \quad (3.15)$$

где

$$\varphi_1^{(k,0)} = \text{ch} p^{(k)}\lambda\zeta \cos q^{(k)}\lambda\zeta, \quad \varphi_2^{(k,0)} = \text{sh} p^{(k)}\lambda\zeta \sin q^{(k)}\lambda\zeta,$$

$$\varphi_3^{(k,0)} = \text{ch} p^{(k)}\lambda\zeta \sin q^{(k)}\lambda\zeta, \quad \varphi_4^{(k,0)} = \text{sh} p^{(k)}\lambda\zeta \cos q^{(k)}\lambda\zeta$$

Собственные числа  $\lambda_n$  в (3.13) и (3.15) определяются из соответствующих трансцендентных уравнений. Общий интеграл плоского погранслоя для случаев б) и в) запишется аналогичным образом. Они здесь не рассматриваются.

Отметим, что соответствующие трансцендентные уравнения, а также общие интегралы плоского погранслоя для однослойной ортотропной пластинки приведены в [7].

**Численные расчёты.** В общем случае трансцендентное уравнение (3.7) имеет счётное множество как комплексно-сопряжённых, так и действительных корней, которые возрастают достаточно быстро. Приведём значения нескольких корней, расположенных в возрастающем порядке  $\text{Re}\lambda > 0$ , для некоторых ортотропных материалов. Упругие характеристики этих материалов приведены в табл. 1 [3].

Таблица 1

Наименование материалов	
Упругие	

характеристики	Стеклопластик АСТТ (б) –С <sub>2</sub> -О и ПН-3	СВАМ 10:1	СВАМ 2:1	Графито-эпоксидный материал (ГЭМ)
$E_1 \cdot 10^{-9}$ Па	17,6	38,26	36,0	7,26
$E_2 \cdot 10^{-9}$ Па	12,9	17,65	26,3	7,26
$E_3 \cdot 10^{-9}$ Па	4,2	8,61	10,8	84,66
$G_{12} \cdot 10^{-9}$ Па	2,7	5,2	4,9	2,75
$G_{23} \cdot 10^{-9}$ Па	2,4	3,14	4,0	4,21
$G_{13} \cdot 10^{-9}$ Па	2,4	3,83	4,4	4,21
$\nu_{12}$	0,15	0,22	0,105	0,323
$\nu_{23}$	0,31	0,31	0,431	0,0257
$\nu_{13}$	0,08	0,07	0,405	0,3002

С помощью программного пакета Wolfram Mathematica вычислены значения первых восьми корней уравнения (3.7) для некоторых материалов. Они приведены в табл. 2.

Таблица 2

Корни уравнения	Наименование материалов I слой – СВМ 2:1; II слой –ГЭМ				
	Толщины слоёв в метрах				
	$h_1 = 0,1$ $h_2 = 0,1$	$h_1 = 0,1$ $h_2 = 0,5$	$h_1 = 0,1$ $h_2 = 1$	$h_1 = 0,1$ $h_2 = 10$	$h_1 = 0,1$ $h_2 = 100$
$\lambda_1$	0.993475 +0.046941 <i>i</i>	0.696414	0.6397	0.589155	0.584122
$\lambda_2$	2.139626 +0.207307 <i>i</i>	2.15426	1.92793	1.76755	1.75237
$\lambda_3$	3.461697	3.10981 +0.511703 <i>i</i>	3.27566	2.94671	2.92062
$\lambda_4$	3.757270	4.14044 +0.464828 <i>i</i>	3.99713 +0.979963 <i>i</i>	3.47207	3.42575
$\lambda_5$	5.385286 +0.819447 <i>i</i>	5.12115	4.64684	4.12277	4.08884
$\lambda_6$	5.785335	6.42381	5.79124	5.3019	5.2571
$\lambda_7$	5.958607	7.20376	7.01281	6.4807	6.42534
$\lambda_8$	6.984753	7.76791	8.28427	7.65981	7.5936
	I слой – Стеклопластик АСТТ (б) –С <sub>2</sub> -О и ПН-3; II слой – СВМ 10:1				
	$h_2 = 0,1$ $h_1 = 0,1$	$h_2 = 0,1$ $h_1 = 0,5$	$h_2 = 0,1$ $h_1 = 1$	$h_2 = 0,1$ $h_1 = 10$	$h_2 = 0,1$ $h_1 = 100$
$\lambda_1$	0.552327	0.664174	0.595621	0.539892	0.53453
$\lambda_2$	1.20738	1.1829 +0.273232 <i>i</i>	1.1232	0.958029	0.947397
$\lambda_3$	1.25807 +0.485119 <i>i</i>	1.57878	1.21233	1.18468	1.17661
$\lambda_4$	1.9309	2.18521	1.99342	1.83545	1.81924
$\lambda_5$	2.56509	2.99793	2.76475 +0.418209 <i>i</i>	2.48721	2.46196
$\lambda_6$	2.81385	3.54196 +0.399207 <i>i</i>	2.857	2.87409	2.84207

$\lambda_7$	3.66728 +0.0320142 $i$	4.3653	3.47546	3.12497	3.10345
$\lambda_8$	4.82472 +0.0426689 $i$	4.60452 +0.20938 $i$	4.11947	3.77996	3.74642

Отметим, что для однослойной пластинки соответствующее трансцендентное уравнение (3.8) имеет только действительные корни.

#### 4. Антиплоский пограничный слой двухслойной ортотропной пластинки.

В краевой задаче (2.9) и (2.10) корни характеристического уравнения:

$$A_{66}^{(k)}\lambda^2 r^2 + A_{44}^{(k)}\lambda^4 = 0 \quad (4.1)$$

– мнимые и им соответствует следующее решение (им припишем дополнительный нижний индекс «а»):

$$\sigma_{yzpa}^{(k,0)} = C_1^{(k,0)} \cos \mu^{(k)} \lambda \zeta + C_2^{(k,0)} \sin \mu^{(k)} \lambda \zeta$$

$$\sigma_{xyra}^{(k,0)} = -C_1^{(k,0)} \mu^{(k)} \sin \mu^{(k)} \lambda \zeta + C_2^{(k,0)} \mu^{(k)} \cos \mu^{(k)} \lambda \zeta$$

$$v_{pa}^{(k,0)} = C_1^{(k,0)} \frac{a_{66}^{(k)} \mu^{(k)}}{\lambda} \sin \mu^{(k)} \lambda \zeta - C_2^{(k,0)} \frac{a_{66}^{(k)} \mu^{(k)}}{\lambda} \cos \mu^{(k)} \lambda \zeta,$$

где

$$\mu^{(k)} = \sqrt{\frac{A_{44}^{(k)}}{A_{66}^{(k)}}} = \sqrt{\frac{a_{44}^{(k)}}{a_{66}^{(k)}}}. \quad (4.2)$$

Из условий контакта (1.2) вытекает

$$C_1^{(2,0)} = C_1^{(1,0)}, \quad C_2^{(2,0)} = \mu C_2^{(1,0)},$$

где

$$\mu = \frac{a_{66}^{(1)} \mu^{(1)}}{a_{66}^{(2)} \mu^{(2)}} = \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)} a_{66}^{(1)}}{a_{44}^{(2)} a_{66}^{(2)}}}. \quad (4.3)$$

Удовлетворив однородным условиям (2.6), получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных  $C_1^{(1,0)}, C_2^{(1,0)}$ :

$$\begin{aligned} C_1^{(1,0)} \cos \mu^{(2)} \lambda \zeta_2 + \mu C_2^{(1,0)} \sin \mu^{(2)} \lambda \zeta_2 &= 0 \\ -C_1^{(1,0)} \frac{a_{66}^{(1)} \mu^{(1)}}{\lambda} \sin \mu^{(1)} \lambda \zeta_1 + C_2^{(1,0)} \frac{a_{66}^{(1)} \mu^{(1)}}{\lambda} \cos \mu^{(1)} \lambda \zeta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Приравнявая определитель системы (4.4) к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение для определения  $\lambda$ :

$$\mu \operatorname{tg} \mu^{(1)} \lambda \zeta_1 \operatorname{tg} \mu^{(2)} \lambda \zeta_2 + 1 = 0. \quad (4.5)$$

Отметим, что для однослойной пластинки

$$\zeta_1 = -\zeta_2 = 1, \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)} = a_{ij}, \quad \mu = 1, \quad \mu^{(k)} = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}},$$

трансцендентное уравнение (4.5) упрощается и примет вид:

$$\operatorname{tg}^2 \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \lambda - 1 = 0, \quad (4.6)$$

которое имеет только вещественные корни [7]

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} \frac{\pi}{4} (1 + 2n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отбросив второе уравнение системы (4.4) и выразив  $C_1^{(1,0)}$  через  $C_2^{(1,0)}$ , получим:

$$C_1^{(1,0)} = -\mu \operatorname{tg} \mu^{(2)} \lambda \zeta_2 \cdot C_2^{(1,0)}. \quad (4.7)$$

Поскольку каждому значению  $\lambda = \lambda_n$  соответствует одна неизвестная постоянная  $C_n^{(1,0)}$ , то с учётом (4.7) для величин антиплоского пограничного слоя пластинки получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{yzpa}^{(1,0)} &= \sum_{n=1}^N \left\{ -\mu \operatorname{tg} \mu^{(2)} \lambda_n \zeta \cos \mu^{(1)} \lambda_n \zeta + \sin \mu^{(1)} \lambda_n \zeta \right\} C_n^{(1,0)} \\ \sigma_{yzpa}^{(2,0)} &= \sum_{n=1}^N \left\{ -\mu \operatorname{tg} \mu^{(2)} \lambda_n \zeta \cos \mu^{(2)} \lambda_n \zeta + \mu \sin \mu^{(2)} \lambda_n \zeta \right\} C_n^{(1,0)} \\ \sigma_{xyra}^{(1,0)} &= \sum_{n=1}^N \left\{ \mu \mu^{(1)} \operatorname{tg} \mu^{(2)} \lambda_n \zeta \sin \mu^{(1)} \lambda_n \zeta + \mu^{(1)} \cos \mu^{(1)} \lambda_n \zeta \right\} C_n^{(1,0)} \\ \sigma_{xyra}^{(2,0)} &= \sum_{n=1}^N \mu \mu^{(2)} \left\{ \operatorname{tg} \mu^{(2)} \lambda_n \zeta \sin \mu^{(2)} \lambda_n \zeta + \cos \mu^{(2)} \lambda_n \zeta \right\} C_n^{(1,0)} \\ v_{pa}^{(1,0)} &= -\sum_{n=1}^N \frac{a_{66}^{(1)} \mu^{(1)}}{\lambda_n} \left\{ \mu \operatorname{tg} \mu^{(2)} \lambda_n \zeta \sin \mu^{(1)} \lambda_n \zeta + \cos \mu^{(1)} \lambda_n \zeta \right\} C_n^{(1,0)} \\ v_{pa}^{(2,0)} &= -\sum_{n=1}^N \frac{a_{66}^{(2)} \mu^{(2)}}{\lambda_n} \left\{ \operatorname{tg} \mu^{(2)} \lambda_n \zeta \sin \mu^{(2)} \lambda_n \zeta + \cos \mu^{(2)} \lambda_n \zeta \right\} C_n^{(1,0)} \\ \sigma_{zpa}^{(k,0)} &= \sigma_{xpa}^{(k,0)} = \sigma_{xpra}^{(k,0)} = \sigma_{ypa}^{(k,0)} = u_{pa}^{(k,0)} = w_{pa}^{(k,0)} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

При решении задачи (2.7) – (2.8), которое соответствует антиплоскому пограничному слою, будем также иметь:

$$\sigma_{zpa}^{(k,0)} = \sigma_{xpa}^{(k,0)} = \sigma_{xpra}^{(k,0)} = \sigma_{ypa}^{(k,0)} = u_{pa}^{(k,0)} = w_{pa}^{(k,0)} = 0.$$

Уравнения (2.7) и (2.9) при  $s \geq 1$  становятся неоднородными и они должны быть решены при двух различных вариантах. В первом варианте  $\lambda$  есть корень трансцендентного уравнения (3.7), а во втором варианте – корень трансцендентного уравнения – (4.5). Решения уравнений (2.7) и (2.9) в каждом варианте запишутся в виде [3]:

$$Q_p^{(s)} = Q_{0p}^{(s)} + Q_{*p}^{(s)}, \quad (p, a) \quad (4.9)$$

где  $Q_{0p}^{(s)}$  является решением однородного уравнения, а  $Q_{*p}^{(s)}$  – частное решение неоднородного уравнения. Решения однородных систем плоского погранслоя первого варианта и антиплоского погранслоя второго варианта будут тождественно удовлетворять граничным условиям (1.1) в силу неизменности структуры решения однородной задачи для каждого  $S$  и удовлетворения этих условий при  $S = 0$ .

Аналогичным образом можно построить решения типа пограничного слоя вблизи торцов  $x = a$  и  $y = 0, b$ .

Решение пространственной краевой задачи есть сумма внутренней задачи и пограничных слоёв:

$$J = Q_{вн} + Q_p + Q_a, \quad (4.10)$$

где  $Q_{вн}$ ,  $Q_p$ ,  $Q_a$  – соответственно, решение внутренней задачи, интегралы плоского и антиплоского пограничных слоёв.

Представление (4.9) содержит достаточное количество неизвестных констант, позволяющие удовлетворить торцевым условиям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с. Goldenveizer A.L. Theory of elastic thin shells. М.: Nauka, 1976. 510p. (in Russian).
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПИММ. 1962. Т.26. Вып.4. С. 668-686. Goldenveizer A.L. The construction of the plate bending approximate theory by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory // J. Appl. Math. Mech. 1962. Vol.26. Issue 4, pp. 668-686 (in Russian).
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore-London. World Scientific Publ. 2015. 376p. (in Russian).
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. Aghalovyan L.A., Gevorkyan R.S. Non-classical boundary value problems for anisotropic layered beams, plates and shells. Er: Publishing house «Gitutюн» NAS RA. 2005. 468с. (in Russian).
5. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией // В сб.: XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Тезисы докладов. М.: 1977, с.5. Aghalovyan L.A., Khachatryan A.M. To the question of determining the stress-strain state of plates with a common anisotropy // In Proc.: XI All-Union conf. on the theory of shells and plates. Theses of reports. М.: 1977, p. 5. (in Russian).
6. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки // Изв. АН Армении. Механика. 1993. №3-4. С.3-11.

- Aghalovyan L.A., Tovmasyan A. B. Asymptotic solution of a mixed three-dimensional internal problem for an anisotropic thermoelastic plate // Proceedings Academy of Sciences of Armenia. Mechanics. 1993. №3-4. Pp. 3-11. (in Russian).
7. Петросян Г.А., Хачатрян А. М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.65-72.  
Petrosyan G.A., Khachatryan A.M. Asymptotic Solution of a Mixed Boundary Value Problem of an Anisotropic Plate. Proceedings of NAS RA. Mechanics. 2009. T.62. №4. P.65-72. (in Russian).
  8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с.  
Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic shells. M.: Science. 1967. 268p. (in Russian).
  9. Лехницкий С.Г. Теории упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с.  
Lekhnitsky S.G. Theories of elasticity of anisotropic body. M.: Science, 1977. 416 p. (in Russian).
  10. Баласанян Е.С., Петросян Г.А. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки. /Труды междуш. школы-конф. молодых учёных «Механика-2013», посвящённой 70-летию НАН РА. Ереван–2013. С.88-92. Balasanyan E.S., Petrosyan G.A. Asymptotic solution of one mixed boundary value problem of an anisotropic two-layer plate. Works inter. school conf. young scientists «Mechanics–2013», dedicated to the 70th anniversary of the National Academy of Sciences of Armenia. Yerevan, 2013. pp. 88-92. (in Russian).
  11. Баласанян Е.С. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки при неполном контакте между слоями //Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т.71. №1. С.47–60. Balasanyan E.S. Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic two-layer plate, with not full contact between the layers. // Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2018. Vol.71. Issue 1, pp. 47-60 (in Russian).

#### **Сведения об авторах:**

**Баласанян Евгения Самвеловна** – преподаватель кафедры математики АрГУ, Арцах, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5. **Тел.:** (37497) 170620,  
**Е- mail:** [majvazjan@mail.ru](mailto:majvazjan@mail.ru)

**Гулгазарян Лусине Гургеновна** – д.ф.-м.н., проф. кафедры математики и методики её преподавания АГПУ, вед. науч. сотр. Института механики НАН Армении. **Тел.:** (37491) 302554, **Е- mail:** [iusina@mail.ru](mailto:iusina@mail.ru)

**Хачатрян Александр Мовсесович** – д.ф.м.-н., проф., вед. науч. сотрудник Института механики НАН Армении. **Тел.:** (37499) 211949,  
**Е-mail:** [alexkhach49@yandex.ru](mailto:alexkhach49@yandex.ru)

Поступила в редакцию 04.04.2019

## О СВЕРХЗВУКОВОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ СЖАТОЙ ПАНЕЛИ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

**Ключевые слова:** устойчивость, сжимающие усилия, дестабилизация, дивергенция панели, локализованная дивергенция, сверхзвуковое обтекание.

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

About a problem of the supersonic divergence of a compressed panel

**Key words:** stability, compressive forces, destabilizing effect, divergence of the panel, localized divergence, supersonic overrunning

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate with one free and clumped edges streamlined by supersonic gas flows, we study the loss stability phenomenon of the overrunning of the gas flow at its free edge under the assumption of presence of compressed forces at the two hinged edges. Critical velocities of divergence of the panel and localized divergence are found. It is established that the compressed forces leads to the destabilizing of unperturbed equilibrium state of a plate in supersonic gas flow.

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ր.

Գերձայնային զազի հոսքում սեղմված սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին

**Հիմնարարներ՝** կայունություն, սեղմող ուժեր, դիվերգենցիա, տեղայնացված դիվերգենցիա, գերձայնային շրջհոսում

Դիտարկված է գերձայնային զազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր կոշտ ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հողակապրեն ամրակցված եզրերին, բեռնված սեղմող ուժերով: Ցույց է տրված սալի դիվերգենցիայի և ազատ եզրի միջակայքում լոկալիզացված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են դիվերգենցիայի և լոկալիզացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները: Ցույց է տրված, որ սեղմող ուժերը նպաստում են ապակայունացման:

В статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния на потерю статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия сжатой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающего на её свободный край, в предположении, что сжимающие силы направлены перпендикулярно к скорости потока газа.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка-поток» в линейной постановке. Установлена зависимость, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего её потока газа, позволяющая в пространстве «существенных» параметров системы выделить области устойчивости и неустойчивости: области дивергенции панели и локализованной дивергенции. Показано, что при обтекании первоначальное напряжённое состояние приводит к существенной дестабилизации состояния невозмущённого равновесия пластинки.

**Введение.** Как известно [1, 3], выпучивание пластинки в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих усилий, расположенных в срединной поверхности пластинки. При этом, так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, на много мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать сжимающие усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки. Поэтому, задача об устойчивости пластинок при равномерном сжатии является той

«классической задачей», решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

В предлагаемой статье исследуется зависимость видов потери статической устойчивости панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, от характера первоначального напряжённого состояния. Исследованию этих задач посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях [1,3–6]. Однако здесь, за исключением работ А.А. Мовчана, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой статье, в отличие от вышеуказанных работ, к решению задачи статической устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа панели с двумя шарнирно закреплёнными краями, с одним свободным и противоположным ему жёстко закреплённым краями, равномерно сжатой по направлению скорости потока газа, набегающего на её свободный край, применён новый аналитический метод, подробно изложенный в работе [7], удобный для нахождения точного решения широкого класса подобных задач.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат  $Oxyz$  область  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq h$ . Декартова система координат  $Oxyz$  выбирается так, что оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось  $Oz$  перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси  $Ox$  с невозмущённой скоростью  $V$ . Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край  $x = 0$  пластинки свободен, край  $x = a$  жёстко закреплён, а параллельные потенциальному потоку газа края  $y = 0$  и  $y = b$  шарнирно закреплены. При этом полагаем, что шарниры идеальны.

Пластинка подвержена действию сжимающих сил  $N_y = 2h\sigma_y$  в срединной плоскости панели, являющимися результатом нагрева или каких-либо других причин; сжимающие усилия  $\sigma_y$  можно считать равномерно распределёнными по ширине пластинки  $a$  (сторона пластинки по потоку), постоянными во всей срединной поверхности и неменяющимися с изменением прогиба пластинки  $w = w(x, y)$  [1,5].

Прогиб пластинки  $w = w(x, y)$  вызовет избыточное давление  $\Delta p$  на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [2]:  $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$ ,

$a_0$  – скорость звука в невозмущённой газовой среде,  $\rho_0$  – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать, что прогибы  $w = w(x, y)$  пластинки малы относительно толщины пластинки  $2h$ .

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна смежная с ней искривлённая форма равновесия, которая сопровождается резким монотонным выпучиванием пластинки (дивергенция панели) либо выпучиванием малой окрестности свободного края пластинки (локализованная дивергенция), в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен одновременно соответствующими аэродинамическими нагрузками  $\Delta p$  и сжимающими силами  $N_y = 2h\sigma_y$  в срединной плоскости панели в предположении, что усилия  $\sigma_y$  малы по сравнению с критическими  $(\sigma_y)_{cr}$ , которые могут произвести выпучивание пластинки при отсутствии обтекания.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба тонкой изотропной прямоугольной пластинки, сжатой в направлении, перпендикулярном к потоку газа, описывается соотношением [1, 3]:

$$D\Delta^2 w + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$ ,  $\Delta w$  – оператор Лапласа;  $D$  – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления краёв пластинки имеют вид [1, 3]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad (1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = a; \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b; \quad (1.4)$$

$\nu$  – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость  $V_{cr}$ , приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки, подверженной действию сжимающих сил  $N_y$  в срединной поверхности панели, в предположении, что усилия  $\sigma_y$  малы по сравнению с критическими  $(\sigma_y)_{cr}$ , которые могут произвести выпучивание пластинки при отсутствии обтекания. Иными словами, анализ устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки, сжатой усилиями  $\sigma_y < (\sigma_y)_{cr}$ , сводится к нахождению минимального значения скорости потока газа  $V$ , при котором краевая задача (1.1)–(1.4) имеет решения, отличные от тривиального, соответствующие разветвлению форм равновесия.

2. Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка–поток» общее решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде двойного ряда:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \exp(\mu_n r_k x) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

$C_{nk}$  – произвольные постоянные;  $n$  – число полуволн вдоль стороны  $b$  пластинки;  
 $r_k$  – корни характеристического уравнения

$$r^4 - 2 \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1 - \beta_y^2) = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}, \quad \beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2}, \quad (2.2)$$

которое в соответствии с решением Феррари можно представить в виде [12]:

$$\left( r^2 + \sqrt{2(q+1)r + q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}} \right) \cdot \left( r^2 - \sqrt{2(q+1)r + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}} \right) = 0, \quad (2.3)$$

где  $q$  – параметр скорости потока газа,  $V$  – действительный корень кубического уравнения

$$8 \cdot (q+1)(q^2 - 1 + \beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0, \quad (2.4)$$

$$q \in \left( \left( -1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2} \right) / 3, \infty \right) \text{ при } \beta_y^2 \leq 4/3 \text{ и } q \in (1, \infty) \text{ при } \beta_y^2 > 4/3; \quad (2.5)$$

$\alpha_n^3$  и  $\beta_y^2$  – параметры, характеризующие неконсервативную и консервативную составляющие нагрузки, соответственно.

Как показано в работе [12], в интервале (2.5) значений параметра  $q$  характеристическое уравнение (2.2) имеет два действительных корня:  $r_1$ ,  $r_2$  и пару комплексно сопряжённых корней  $r_{3,4}$  с положительной вещественной частью, которые легко находятся, будучи решением квадратных уравнений – сомножителей уравнения (2.3):

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} - 0.5(q-1)}, \quad (2.6)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + 0.5(q-1)}. \quad (2.7)$$

При этом имеем:

$$r_1 < 0, \quad r_2 < 0, \quad \text{когда } \beta_y^2 \in [0, 1) \text{ и } q \in \left( \left( -1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2} \right) / 3, \infty \right); \quad (2.8)$$

$$r_1 < 0, \quad r_2 > 0, \quad \text{когда } \beta_y^2 \in (1, 4/3], \quad q \in \left( \left( -1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2} \right) / 3, \infty \right) \text{ и} \quad (2.9)$$

$$\beta_y^2 \in (4/3, \infty), \quad q \in (1, \infty);$$

$$r_1 < 0, \quad r_2 = 0, \quad \text{когда } \beta_y^2 = 1 \text{ и } q \in (1/3, \infty). \quad (2.10)$$

Корни  $\tilde{r}_k$  характеристического уравнения  $\tilde{r}^4 - 2 \cdot \tilde{r}^2 + (1 - \beta_y^2) = 0$ , соответствующего краевой задаче (1.1)-(1.4) при отсутствии обтекания ( $V = 0$ ), будут вида [1,12]:

$$\tilde{r}_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}}, \quad \tilde{r}_2 = -\sqrt{1 - \sqrt{\beta_y^2}}, \quad \tilde{r}_3 = \sqrt{1 - \sqrt{\beta_y^2}}, \quad \tilde{r}_4 = \sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}} \text{ при } \beta_y^2 < 1; \\ \tilde{r}_1 = -\sqrt{2}, \quad \tilde{r}_{2,3} = 0, \quad \tilde{r}_4 = \sqrt{2} \text{ при } \beta_y^2 = 1; \quad (2.11)$$

$$\tilde{r}_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}}, \quad \tilde{r}_{2,3} = \pm i\sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1}, \quad \tilde{r}_4 = \sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}} \quad \text{при } \beta_y^2 > 1.$$

В соответствии с необходимым условием потери устойчивости в виде локализованной неустойчивости [9,12]:

$$\operatorname{Re} r_1 < 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} r_2 < 0, \quad (2.12)$$

из выражений (2.6)–(2.11) следует, что невозмущённое состояние равновесия достаточно широких прямоугольных пластин ( $\gamma \geq \gamma_{gr.} \gg 1$ ) может потерять статическую устойчивость в виде локализованной неустойчивости в окрестности свободного края  $x = 0$  только лишь при значениях  $\beta_y^2 < 1$ . Здесь  $\gamma_{gr.}$  – граничное значение параметра  $\gamma$  – отношения ширины пластинки  $a$  (сторона пластинки по потоку) к её длине  $b$ :

$$\gamma = ab^{-1}, \quad (2.13)$$

начиная с которого поведение достаточно широких прямоугольных пластин ( $\gamma \geq \gamma_{gr.}$ ) можно считать аналогичным поведению полубесконечной пластины–полосы ( $\gamma = \infty$ ). А, соответственно, при значениях  $\beta_y^2 \geq 1$  существует возможность потери статической устойчивости только лишь в виде дивергенции панели при обтекании, а в отсутствии обтекания – в виде неустойчивости панели. Этот результат качественно согласуется с результатом, полученным в [12], для другого случая закрепления краёв пластинки как при потенциальном обтекании, так и в отсутствии обтекания.

Общее решение (2.1), удовлетворяющее необходимому условию локализованной неустойчивости (2.12), в силу условия затухания колебаний на крае  $x = a$  пластинки, при котором  $C_{n3} = C_{n4} = 0$ , представится в виде [6,9,12]:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n1} \exp(\mu_n r_1 x) + C_{n2} \exp(\mu_n r_2 x)) \cdot \sin(\mu_n y). \quad (2.14)$$

Из соотношения (2.4), в соответствии с обозначением (2.2), получаем явный вид выражения зависимости скорости потока газа  $V$  от существенных параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q, n, \gamma, \beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1) \cdot (q^2 - 1 + \beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1} \quad (2.15)$$

для прямоугольных пластинок умеренных размеров и достаточно длинных ( $\gamma \ll 1$ ) и

$$V(q, n, \beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1) \cdot (q^2 - 1 + \beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 D(a_0 \rho_0 b^3)^{-1} \quad (2.16)$$

для достаточно широких пластин ( $\gamma \gg 1$ ).

**3.** Перейдём к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков статической неустойчивости прямоугольных пластин как при обтекании, так и в его отсутствии.

**3.1.** Подставляя общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни  $r_k$  характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.6) и (2.7), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему

алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных  $C_{nk}$ . Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель имеет вид:

$$\begin{aligned}
F(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = & \left\{ \left( q+1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 \right\} B_1 B_2 + \quad (3.1) \\
& + \left\{ \left( q+1 + \sqrt{q^2 - 1} \right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 \right\} \cdot B_1 B_2 \cdot \exp(-2\sqrt{2(q+1)} \cdot \pi n \gamma) + \\
& + 2B_2 \left\{ \sqrt{2(q+1) \cdot (q^2 - 1 + \beta_y^2)} \cdot \left( q+1 + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right) \cdot \text{sh}(\pi n \gamma B_1) + \right. \\
& + B_1 (4q^2 + 2q - 1 + \beta_y^2 + 2q\nu + \nu^2) \text{ch}(\pi n \gamma B_1) \left. \right\} \exp\left(-\sqrt{2(q+1)} \pi n \gamma\right) \cdot \\
& \cdot \cos(\pi n \gamma B_2) + \left\{ 2\sqrt{2(q+1) \cdot (q^2 - 1 + \beta_y^2)} \left( q+1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right) \text{ch}(\pi n \gamma B_1) + \right. \\
& + \left( 2q^2 + 3q - 1 - q\beta_y^2 + \beta_y^2 - 2(3q(q+1) - 2(1-\beta_y^2))\nu + (3q+1)\nu^2 \right) \cdot \\
& \cdot \text{sh}(\pi n \gamma B_1) \left. \right\} \cdot \exp\left(-\sqrt{2(q+1)} \pi n \gamma\right) \cdot \sin(\pi n \gamma B_2) = 0; \\
B_1 = & \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} - 0.5(q-1)}, \quad B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + 0.5(q-1)}. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Очевидно, что  $B_1 > 0$  и  $B_2 > 0$  при всех допустимых значениях  $q$  и  $\beta_y^2$ , определяемых соотношениями (2.5);  $\gamma \in (0, \infty)$  – параметр отношения сторон пластинки;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В соответствии с обозначением (2.13), значения  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \infty$  соответствуют двум предельным случаям исходной задачи устойчивости, соответственно, бесконечно удлиненной пластинке и полубесконечной пластине–полосе.

Подставляя общее решение рассматриваемой задачи устойчивости в виде (2.14), в котором корни  $r_1$  и  $r_2$  определены выражениями (2.6), в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных  $C_{n1}$  и  $C_{n2}$ . Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению, соответствующему локализованной дивергенции в окрестности свободного края  $x = 0$  достаточно широких прямоугольных пластин ( $\gamma > \gamma_* \gg 1$ ):

$$F_{locdiv}(q, \nu, \beta_y^2) = \left( q+1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 = 0, \quad \beta_y^2 < 1. \quad (3.3)$$

Можно показать, что, начиная с некоторого значения параметра  $\gamma = \gamma_*$  для всех  $n$  имеет место условие:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_*} (F(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2)) = F_{locdiv}(q, \nu, \beta_y^2) = 0 \quad \text{при } \beta_y^2 < 1, \quad (3.4)$$

$\gamma_* = \gamma_*(v, \beta_y^2)$  – граничное значение параметра  $\gamma$ , разграничивающее области дивергенции панели и локализованной дивергенции, определяемое численными методами анализа дисперсионных уравнений (3.1) и (3.3).

Отметим, что уравнение (3.3) тождественно уравнению локализованной дивергенции, полученному в работе [12], при исследовании задачи устойчивости панели в случае, в котором край  $x = a$  – шарнирно закреплён, в силу условия затухания колебаний на крае  $x = a$  пластинки.

**3.2.** Аналогично, подставляя общее решение (2.1), в котором корни  $r_k$  определяются выражениями (2.11), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем три однородных системы алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных  $C_{nk}$ , соответственно, при  $\beta_y^2 < 1$ ,  $\beta_y^2 = 1$  и  $\beta_y^2 > 1$ . Приравненный нулю определитель каждой из этих систем уравнений – характеристический определитель  $\Delta_k = \Delta_k(n, \gamma, v, \beta_y^2) = 0$ ,  $k = \overline{1, 3}$  приводит к соответствующему дисперсионному уравнению неустойчивости панели [1]:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & 2\sqrt{1-\beta_y^2} \cdot (\beta_y^2 - (1-v)^2) + (1-\sqrt{1-\beta_y^2}) \cdot \left( (1+\sqrt{1-\beta_y^2})^2 - \right. \\ & \left. - 2(1+\sqrt{1-\beta_y^2})v - (1-v)^2 \right) \cdot \text{ch} \left( \pi n \gamma \left( \sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}} + \sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}} \right) \right) - \\ & - (1+\sqrt{1-\beta_y^2}) \left( (1-\sqrt{1-\beta_y^2})^2 - 2(1-\sqrt{1-\beta_y^2})v - \right. \\ & \left. - (1-v)^2 \right) \cdot \text{ch} \left( \pi n \gamma \left( \sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}} - \sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}} \right) \right) = 0 \quad \text{при } \beta_y^2 < 1; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & 4(1-(1-v)^2) + 2(1+(1-v)^2) \text{ch}(\sqrt{2}\pi n \gamma) - \\ & - \sqrt{2}\pi n \gamma \cdot \text{sh}(\sqrt{2}\pi n \gamma) \cdot v^2 = 0 \quad \text{при } \beta_y^2 = 1; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & \sqrt{\beta_y^2-1} \left( \beta_y^2 - 1 - (\sqrt{\beta_y^2}-1)v \right) + \sqrt{\beta_y^2-1} \cdot (\beta_y^2 + (1-v)^2) \cdot \\ & \cdot \text{ch}(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}) \cdot \cos(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}) + (\beta_y^2 - 2\beta_y^2 v - (1-v)^2) \cdot \\ & \cdot \text{sh}(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2}+1}) \cdot \sin(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1}) = 0 \quad \text{при } \beta_y^2 > 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Соответственно, приравненный нулю определитель системы уравнений, полученной подстановкой общего решения в виде (2.14), в котором корни  $r_1$  и  $r_2$  определены выражениями (2.11) при значении  $\beta_y^2 < 1$ , в граничные условия (1.2), приводит к дисперсионному уравнению

$$\Delta_{loc.inst.}(v, \beta_y^2) = \left( 1 + \sqrt{1-\beta_y^2} \right)^2 - 2v \left( 1 + \sqrt{1-\beta_y^2} \right) - (1-v)^2 = 0, \quad \beta_y^2 < 1, \quad (3.8)$$

соответствующему локализованной неустойчивости в окрестности свободного края  $x = 0$  не обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластин  $\gamma > \gamma_{**} \gg 1$ . Здесь,  $\gamma_{**}$  – граничное значение параметра  $\gamma$ , начиная с которого поведение прямоугольной пластинки аналогично поведению полубесконечной пластины-полосы ( $\gamma = \infty$ ) в смысле потери статической устойчивости. Иными словами, имеем:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{**}} \Delta_1(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = \Delta_{loc.inst}(\nu, \beta_y^2) \text{ при всех } n, \nu, \beta_y^2 < 1. \quad (3.9)$$

Заметим, что уравнение (3.8) тождественно уравнению локализованной неустойчивости, полученному в работах [6,8,11,12], при исследовании задачи устойчивости панели в случаях, в которых край  $x = a$  – свободен или закреплён другими способами, что обусловлено условием затухания колебаний на крае  $x = a$  пластинки.

**3.3.** Результаты численного анализа уравнений (3.5) – (3.8) показали следующее.

Уравнение (3.5) в интервале значений  $\gamma < \gamma_{**} = 80$  решения не имеет, так как  $\Delta_1 = \Delta_1(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) > 0$ . Это означает, что плоская форма равновесия необтекаемой пластинки умеренных размеров ( $\gamma < \gamma_{**} = 80$ ) устойчива.

Начиная с значения  $\gamma_{**} = 80$ , уравнения (3.5) и (3.8) в интервале  $\beta_y^2 \in (0,1)$  равносильны с точностью до порядка  $10^{-5}$  и имеют единственное решение  $(\beta_y^2)_{locinst}$  (табл.1) при всех  $\gamma \geq \gamma_{**}$ ,  $n, \nu$ . Это означает, что в интервале значений  $\beta_y^2 \in ((\beta_y^2)_{locinst}, 1)$  достаточно широкие пластинки ( $\gamma \geq \gamma_{**} = 80$ ) теряют статическую устойчивость в виде локализованной неустойчивости, при котором изгиб локализован в окрестности её свободного края  $x = 0$ .

Таблица 1

$\nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$(\beta_y^2)_{locinst}$	0.9998	0.9983	0.9962	0.9889	0.9567

Решение  $\gamma_{cr} = \gamma_{cr}(n, \nu)$  уравнения (3.6), соответствующего значению  $\beta_y^2 = 1$ , является монотонно убывающей функцией от  $n$  при фиксированном значении параметра  $\nu$ , а также от  $\nu$  при фиксированном значении параметра  $n$ . Ясно, что для всех значений параметра  $n$  и коэффициента Пуассона  $\nu$  в случае, в котором  $\beta_y^2 = 1$ , при значениях  $\gamma(n, \nu) \geq \gamma_{cr}(n, \nu)$ , плоская форма равновесия необтекаемой прямоугольной пластинки теряет устойчивость в виде неустойчивости панели, при которой «выпучивается» вся срединная поверхность пластинки.

В таблице 2 приведены значения корня  $\gamma_{cr}$  уравнения (3.6) для различных значений  $\nu$ , когда  $n = 1$ .

В табл. 3 приведены значения критического коэффициента напряжения  $(\beta_y^2)_{inst.}$  – первого корня уравнения (3.7) в интервале  $\beta_y^2 > 1$  при различных значениях параметров  $\gamma$ ,  $\nu$  и при значении  $n = 1$ .

Таблица 2

$\nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\gamma_{cr.}$	50.82	11.20	7.51	4.45	2.24

Таблица 3

$\nu \backslash \gamma$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.1	1348.0	1332.0	1325.0	1316.0	1300.0
0.3	25.00	23.40	22.70	21.82	20.0
0.5	5.99	5.45	5.21	4.90	4.23
0.8	2.40	2.22	2.15	2.03	1.77
1.0	1.78	1.69	1.65	1.55	1.40
1.2	1.52	1.45	1.39	1.35	1.22
1.5	1.29	1.26	1.23	1.19	1.11
2.0	1.15	1.13	1.11	1.09	1.02
2.5	1.09	1.07	1.06	1.04	1.01
5.0	1.02	1.012	1.008	1.00	1.00

При значениях коэффициента напряжения  $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{inst.} > 1$  плоская форма равновесия необтекаемой прямоугольной пластинки теряет статическую устойчивость в виде неустойчивости панели, при котором срединная поверхность пластинки резко «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Как следует из данных табл.3, критический коэффициент напряжения  $(\beta_y^2)_{unst}$  при умеренных значениях  $\gamma \in [0.1; 5]$  зависит от параметра  $\gamma$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ : убывает с возрастанием  $\gamma$  и меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона  $\nu$ . В случае достаточно длинных пластин ( $\gamma \ll 1$ ) зависимость критического коэффициента напряжения  $(\beta_y^2)_{unst}$  от параметра  $\nu$  незначительна, поэтому можно принять, что  $(\beta_y^2)_{unst}$  зависит только от параметра  $\gamma$ . В случае достаточно широких пластин ( $\gamma \gg 1$ ), в отличие от пластинок умеренных размеров, зависимость  $(\beta_y^2)_{unst}$  как от параметра  $\gamma$ , так и от параметра  $\nu$  является незначительной: начиная с значения  $\gamma = 10$  с точностью порядка  $10^{-4}$  и менее  $(\beta_y^2)_{unst} \approx 1$ .

Легко показать, что среди множества  $\{\gamma_{cr.}(n, \nu)\}$  решений уравнения (3.6) и первых корней  $\{(\beta_y^2)_{unst}(n, \gamma, \nu)\}$  уравнения (3.7), полученных при различных  $n$  и при фиксированных значениях остальных параметров, наименьшему значению критического сжимающего усилия  $(\sigma_y)_{cr.}$ , в силу обозначения (2.2), соответствуют значения  $\gamma_{cr.}$  и  $(\beta_y^2)_{unst}$  при  $n=1$ , приведённых в табл. 2 и 3 соответственно.

Заметим, что устойчивость сжатых прямоугольных пластинок при различных граничных условиях и различных значениях отношения сторон  $\gamma = ab^{-1}$  в отсутствии обтекания рассмотрена, в частности, в работах [1, 5, 6, 8, 12]. В статьях [8, 12] и в монографии [6], в которых рассмотрена устойчивость сжатой пластинки, соответственно, с двумя свободными краями и с одним свободным и жёстко заделанным краями, получено при  $\nu = 0.3$  и  $\gamma = \infty$  то же значение  $(\beta_y^2)_{locinst} = 0.9962$ , что и в данной работе (табл. 1). Это совпадение связано с локализацией прогиба  $w(x, y)$  в окрестности свободного края  $x = 0$  пластинки при достаточно больших значениях  $\gamma \geq \gamma_{**} = 80$ , в результате которой граничные условия на крае  $x = a$  пластинки перестают оказывать влияние.

Таким образом, при всех значениях  $\gamma \in (0, \infty)$ , когда  $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{cr} > 1$  (табл. 3), и при  $\gamma \in [\gamma_{cr.}, \infty)$  (табл. 2), когда  $\beta_y^2 = 1$ , сжатая прямоугольная пластинка теряет статическую устойчивость в виде неустойчивости панели, а при значениях  $\gamma \in [\gamma_{**}, \infty)$  и  $\beta_y^2 \in ((\beta_y^2)_{locinst}, 1)$  – в виде локализованной неустойчивости.

4. Перейдём к анализу устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой сжатой прямоугольной пластинки при допустимых значениях параметра скорости потока

$$q \in (q_0, \infty) \subseteq (q(a_0 M_0), q(a_0 M_{2\cos m})), \quad (4.1)$$

где  $M_0 = \sqrt{2}$  и  $M_{2\cos m} \approx 33.85$  – граничные значения числа Маха  $M$ , соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 14].

Исследуем численными методами дисперсионное уравнение (3.1), при значениях  $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1, (\beta_y^2)_{cr})$ ,  $\gamma \in (0, \infty)$  и при всех  $\nu$ , а также дисперсионное уравнение (3.3) при значениях  $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst})$  и при всех  $\nu$ , являющиеся достаточными признаками неустойчивости плоской формы равновесия прямоугольных пластинок достаточно длинных и умеренных размеров, и, соответственно, достаточно широких. Критические значения  $(\beta_y^2)_{locinst} < 1$  и  $(\beta_y^2)_{cr} \geq 1$  коэффициента напряжения  $\beta_y^2$  приведены в таблицах 1 и 3 соответственно. При этом, в соответствии с условиями (2.8) – (2.10), ясно, что

$$q \in \left( (-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right) \text{ при } \beta_y^2 \leq 4/3 \text{ и } q \in (1, \infty) \text{ при } \beta_y^2 > 4/3. \quad (4.2)$$

Введём в рассмотрение в пространстве «существенных» параметров исходной задачи  $\mathfrak{T} = \{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_y^2\}$  область устойчивости  $\mathfrak{T}_0$  и области статической неустойчивости  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ , соответствующие дивергенции панели и локализованной дивергенции соответственно.

Из способа разбиения пространства  $\mathfrak{T}$  параметров системы «сжатая пластинка–поток» на области устойчивости и статической неустойчивости следует, что область устойчивости  $\mathfrak{T}_0 \in \mathfrak{T}$  невозмущённого состояния равновесия системы будет описываться соотношениями:

$$F(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) > 0, \quad F_{locdiv}(q, \beta_x^2, \nu) > 0, \quad (4.3)$$

а области неустойчивости  $\mathfrak{T}_1$  и  $\mathfrak{T}_2$  – соответственно, соотношениями

$$F(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) < 0 \text{ и } F_{locdiv}(q, \nu, \beta_y^2) < 0. \quad (4.4)$$

Границами области устойчивости  $\mathfrak{T}_0$  в пространстве её параметров  $\mathfrak{T}$  являются гиперповерхности:

$$F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = 0, \quad (4.5)$$

$$F_{locdiv}(q, \beta_x^2, \nu) = 0, \quad (4.6)$$

определяемые выражениями (3.1) и (3.3) соответственно.

Гиперповерхность (4.5) разграничивает область устойчивости  $\mathfrak{T}_0$  и область дивергенции панели  $\mathfrak{T}_1$  в пространстве «существенных» параметров системы «пластинка – поток»  $\mathfrak{T} = \{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_y^2\}$ .

Гиперповерхность (4.6) разграничивает область устойчивости  $\mathfrak{T}_0$  и область локализованной дивергенции  $\mathfrak{T}_2$  в пространстве  $\mathfrak{T} = \{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_y^2\}$ .

На границе (4.5) области устойчивости  $\mathfrak{T}_0$  невозмущённое состояние равновесия сжатой пластинки теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели, а на границе (4.6) – в виде локализованной дивергенции.

Границей между областями статической неустойчивости  $\mathfrak{T}_1$  и  $\mathfrak{T}_2$  является гиперповерхность:

$$F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = F_{locdiv}(q, \beta_x^2, \nu) = 0 \text{ при условии } \gamma > \gamma_* \gg 1 \text{ для всех } n, \quad (4.6)$$

где  $\gamma = \gamma_*$  – граничное значение параметра  $\gamma$ , разграничивающее области неустойчивости  $\mathfrak{T}_1$  и  $\mathfrak{T}_2$ .

Критические скорости дивергенции панели  $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$ , получаемые подстановкой значений первых корней  $q_{cr.div}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$  уравнения

(4.5) в выражение (2.15), разграничивают области устойчивости  $\mathfrak{S}_0$  и статической неустойчивости в виде дивергенции панели  $\mathfrak{S}_1$ . При скоростях потока газа  $V \geq V_{cr.div}$  происходит «мягкий» переход от устойчивости к статической неустойчивости в виде дивергенции панели. В первоначально сжатой прямоугольной пластинке усилиями  $\sigma_y < (\sigma_y)_{cr.}$  при обтекании возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её формы – поверхность пластинки резко «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Здесь, в соответствии с обозначением (2.2),  $(\sigma_y)_{cr.} = \pi^2 n^2 \gamma^2 D (2ha^2)^{-1} \cdot (\beta_y^2)_{inst.}$  (табл.2 и 3).

Критические скорости  $V_{loc.div} = V_{loc.div}(n, \nu, \beta_x^2)$ , получаемые подстановкой значений корня  $q_{loc.div} = q_{loc.div}(\nu, \beta_x^2)$  уравнения (4.6) в выражение (2.16), разграничивают области устойчивости  $\mathfrak{S}_0$  и статической неустойчивости  $\mathfrak{S}_2$  в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края  $x = 0$  достаточно широкой пластинки при условии  $\gamma \geq \gamma_*$ . При скоростях потока газа  $V \geq V_{loc.div}$  происходит «мягкий» переход от устойчивости к неустойчивости в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края  $x = 0$  первоначально сжатой достаточно широкой пластинки усилиями  $\sigma_y < (\sigma_y)_{cr.}$ ,  $(\sigma_y)_{cr.} = \pi^2 n^2 D (2hb^2)^{-1} \cdot (\beta_y^2)_{locinst.}$  (табл. 1). Аналогично, вследствие обтекания в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к «выпучиванию» узкой полосы поверхности пластинки вдоль её свободного края  $x = 0$ .

Следует отметить, что критические скорости  $V_{cr.div}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$  и  $V_{loc.div}(n, \nu, \beta_y^2)$  системы «пластинка–поток», соответствующие первым корням уравнения (3.1) и решению уравнения (3.3), определяются по формулам (2.15) и (2.16) с достаточной точностью.

5. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых  $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)\}$ , параметризованных надлежащим образом. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому ограничимся иллюстрациями типичных случаев, выделяя наиболее представительные из семейства кривых  $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)\}$  в многопараметрическом пространстве  $\mathfrak{S}$ .

Найдены множества  $\{q_{cr.div}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, \beta_y^2, \nu)\}$  и  $\{q_{loc.div} = q_{loc.div}(\nu, \beta_y^2)\}$  значений первых корней уравнения (3.1) и единственного корня уравнения (3.3) при различных значениях параметров  $n$ ,  $\beta_y^2$ ,  $\gamma$  и  $\nu$  системы «пластинка–поток» в интервале (4.2) допустимых значений параметра  $q$  соответственно. Далее,

подставляя значения  $q_{cr.div.}^{(1)}$  и  $q_{loc.div.}$ , соответственно, в выражения (2.15) и (2.16), находим приведённые критические скорости дивергенции панели  $V_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$  и локализованной дивергенции  $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ . При этом, как показал численный анализ, наименьшему значению приведённых критических скоростей  $V_{cr.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$  и  $V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$  соответствует значение  $n = 1$  при фиксированных значениях остальных параметров.

В соответствии с значением цилиндрической жёсткости  $D$ , допустимые интервалы изменения значений приведённых скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (4.1) имеют вид [14]:

$$V_{cr.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (V_{cr.div.}(q_0) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3), a_0 M_{2cosm.} \Psi_1) \subseteq (a_0 M_0 \Psi_1, a_0 M_{2cosm.} \Psi_1), \quad (5.1)$$

$$V_{loc.div.} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3) \in (V_{loc.div.}(q_0) D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3), a_0 M_{2cosm.} \Psi_2) \subseteq (a_0 M_0 \Psi_2, a_0 M_{2cosm.} \Psi_2), \quad (5.2)$$

$$\Psi_1 = 12(1 - \nu^2) a_0 \rho_0 E^{-1} (2ha^{-1})^{-3}, \quad \Psi_2 = 12(1 - \nu^2) a_0 \rho_0 E^{-1} (2hb^{-1})^{-3},$$

$$M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2cosm.} \approx 33.85;$$

Таблица 4

$\nu \backslash \tilde{\beta}_y^2$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.00	324.761	173.371	149.854	120.741	77.398
$1 \cdot 10^{-4}$	315.780	169.907	143.878	114.922	76.865
$1 \cdot 10^{-2}$	289.523	168.325	142.374	113.390	75.732
0.10	267.024	160.853	131.075	106.909	72.643
0.20	249.954	146.091	125.277	95.056	71.283
0.30	229.367	132.122	117.723	86.243	57.706
0.40	207.652	115.081	99.107	78.311	47.424
0.50	183.146	103.084	87.564	67.196	43.956
0.60	152.743	86.676	71.532	53.324	34.241
0.70	124.604	68.526	57.471	41.562	27.147
0.80	95.948	53.077	42.506	30.817	15.352
0.85	82.261	37.475	33.923	24.164	–
0.90	60.942	32.161	–	–	–
0.95	41.193	–	–	–	–

В табл. 4 представлены приведённые критические скорости локализованной дивергенции  $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$  для некоторых значений  $\nu$  и  $\tilde{\beta}_y^2$  при  $n = 1$ .

Из данных табл. 4 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции  $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ , зависящая от параметров  $\tilde{\beta}_y^2$  и

$\nu$ , уменьшается примерно в 4 – 5 раз с ростом коэффициента напряжения  $\beta_y^2$  в интервале  $(0, 0.95)$  и меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Далее, из сопоставления данных таблиц 1 и 4, следует, что критические значения коэффициента напряжения  $(\beta_y^2)_{locinst}$ , найденные в отсутствии обтекания (табл.1), оказываются больше примерно на 14%, чем критические значения коэффициента напряжения (табл. 4), найдённых при обтекании. Иными словами, в случае достаточно широких пластин при обтекании происходит занижение порога критического значения коэффициента напряжения сжатия, примерно, на 14%. Отсюда следует, что первоначальное напряжённое состояние приводит к существенной дестабилизации равновесного состояния обтекаемой сжатой достаточно широкой пластинки.

Таблица 5

$\gamma \backslash \beta_y^2$	0.0	0.1	0.3	0.5	0.8	0.9
0.3	$\begin{Bmatrix} 10.765 \\ 9.946 \\ 9.697 \\ 9.202 \\ 8.408 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.732 \\ 9.919 \\ 9.511 \\ 9.120 \\ 8.394 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.667 \\ 9.806 \\ 9.502 \\ 9.081 \\ 8.193 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.605 \\ 9.757 \\ 9.458 \\ 9.045 \\ 8.116 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.457 \\ 9.689 \\ 9.340 \\ 8.823 \\ 8.093 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.370 \\ 9.610 \\ 9.321 \\ 8.810 \\ 8.086 \end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix} 22.042 \\ 19.357 \\ 17.988 \\ 16.613 \\ 13.788 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 21.423 \\ 18.786 \\ 17.724 \\ 16.115 \\ 13.643 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 20.288 \\ 18.028 \\ 17.021 \\ 15.502 \\ 12.925 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 19.771 \\ 17.278 \\ 16.213 \\ 14.792 \\ 12.405 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 18.510 \\ 16.151 \\ 15.307 \\ 13.844 \\ 11.169 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 18.161 \\ 15.690 \\ 14.674 \\ 13.494 \\ 11.151 \end{Bmatrix}$
0.8	$\begin{Bmatrix} 71.435 \\ 58.835 \\ 54.086 \\ 47.945 \\ 37.330 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 67.112 \\ 55.885 \\ 51.237 \\ 45.221 \\ 35.483 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 60.359 \\ 49.695 \\ 45.838 \\ 40.140 \\ 30.883 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 52.780 \\ 42.803 \\ 39.717 \\ 34.406 \\ 26.358 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 43.240 \\ 35.706 \\ 32.328 \\ 27.163 \\ 19.852 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 40.332 \\ 32.703 \\ 30.377 \\ 25.116 \\ 18.096 \end{Bmatrix}$
1.0	$\begin{Bmatrix} 193.506 \\ 126.227 \\ 112.615 \\ 96.085 \\ 72.910 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 165.073 \\ 118.027 \\ 104.641 \\ 88.323 \\ 67.944 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 132.125 \\ 98.124 \\ 88.437 \\ 74.946 \\ 55.022 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 105.004 \\ 81.603 \\ 73.480 \\ 60.689 \\ 43.954 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 74.655 \\ 58.135 \\ 53.053 \\ 44.302 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 65.353 \\ 50.544 \\ 44.561 \\ 36.912 \\ - \end{Bmatrix}$
1.2	$\begin{Bmatrix} 729.920 \\ 267.470 \\ 225.828 \\ 178.466 \\ 130.726 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 703.051 \\ 241.328 \\ 203.951 \\ 164.914 \\ 117.407 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 583.17 \\ 288.88 \\ 222.77 \\ 176.87 \\ 122.07 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 546.92 \\ 217.80 \\ 178.67 \\ 137.43 \\ 95.07 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 123.345 \\ 91.676 \\ 79.644 \\ 67.001 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 119.398 \\ 75.670 \\ 63.785 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$

В табл. 5 и 6 приведены значения приведённой критической скорости дивергенции панели  $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ . Здесь значения критической скорости  $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ , взятые в фигурные скобки, соответствуют значениям коэффициента Пуассона  $\nu$ , равным 0.125, 0.25, 0.3, 0.375, 0.5, соответственно.

Таблица 6

$\beta_y^2 \backslash \gamma$	0.95	1.00	1.21	1.44	2.25	5.0
0.3	$\left\{ \begin{array}{c} 10.305 \\ 9.599 \\ 9.312 \\ 8.808 \\ 8.028 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} 10.244 \\ 9.532 \\ 9.275 \\ 8.796 \\ 8.024 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} 10.186 \\ 9.503 \\ 9.057 \\ 8.672 \\ 7.868 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} 10.110 \\ 9.331 \\ 9.055 \\ 8.628 \\ 7.838 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} 9.797 \\ 9.026 \\ 8.676 \\ 8.189 \\ 7.441 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} 8.512 \\ 7.819 \\ 7.543 \\ - \\ - \end{array} \right\}$
0.5	$\left\{ \begin{array}{c} 18.103 \\ 15.204 \\ 14.500 \\ 13.342 \\ 10.912 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} 17.848 \\ 15.092 \\ 14.330 \\ 13.206 \\ 10.683 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$
0.8	$\left\{ \begin{array}{c} 39.138 \\ 31.714 \\ 28.748 \\ 23.859 \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} 37.430 \\ 30.369 \\ 27.453 \\ 19.254 \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$
1.0	$\left\{ \begin{array}{c} 60.281 \\ 46.600 \\ 42.123 \\ 34.361 \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} 56.767 \\ 43.822 \\ 38.852 \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$
1.2	$\left\{ \begin{array}{c} 89.913 \\ 66.454 \\ 59.375 \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \right\}$

Как следует из данных таблиц 5 и 6, приведённая критическая скорость дивергенции панели  $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ , зависящая от параметров  $\gamma$ ,  $\beta_y^2$  и  $\nu$ , возрастает с ростом  $\gamma$  на интервале (0.2, 2) примерно на два порядка при фиксированных значениях параметров  $\beta_y^2$  и  $\nu$ , падает в примерно 1.2–3.8 раза с ростом  $\beta_y^2 \in [0, 5)$  при фиксированных значениях  $\gamma$ ,  $\nu$  и меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Это свидетельствует о существенной

дестабилизации равновесного состояния сжатой прямоугольной пластинки умеренных размеров при обтекании, в сравнении с пластинкой с ненагруженными краями [7].

Наиболее ярко эффект дестабилизации проявляется при значениях  $\gamma \in (0.8, 2)$  и  $\beta_y^2 \in (0.95, 1)$ , при которых обтекание приводит к «скачкообразному» увеличению коэффициента напряжения до значений, больших  $(\beta_y^2)_{inst.}$  (табл. 3): происходит «мгновенная» потеря устойчивости плоской формы равновесия прямоугольной пластинки в виде дивергенции панели.

Несмотря на то, что граничное значение  $\gamma_* = \gamma_*(\nu, \beta_y^2)$ , однако, как показали результаты численных исследований, зависимость  $\gamma_*$  от коэффициента Пуассона  $\nu$  является незначительной, в отличие от зависимости  $\gamma_*$  от коэффициента напряжения  $\beta_y^2$ : с увеличением коэффициента напряжения  $\beta_y^2 \in [0, 0.95)$  граничное значение  $\gamma_*$  растёт от 2 до 3, что также указывает на существенную дестабилизацию плоской формы равновесия обтекаемой пластинки при больших значениях коэффициента напряжения  $\beta_y^2$ , характеризующего первоначальное напряжённое состояние пластинки.

В случае достаточно длинных пластин  $\gamma < 0.01$  приведённая критическая скорость дивергенции панели  $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$  с точностью до порядка  $10^{-6}$  одна и та же для всех значений параметров  $\nu$ ,  $\beta_y^2$  и равна значению приведённой критической скорости дивергенции бесконечно удлиненной консольной пластинки:  $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) = 6.33$ , полученной А.А. Мовчаном в работе [13].

Далее, из оценки полученных численных результатов (табл. 4–6), применительно к допустимым интервалам (5.1) и (5.2) значений  $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$  и  $V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$  соответственно, следует, что с ростом параметра относительной толщины, соответственно,  $2ha^{-1}$  и  $2hb^{-1}$ , равновесное состояние сжатых прямоугольных пластин становится существенно устойчивым.

**6. Основные результаты.** В работе получено аналитическое решение задачи статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающего на её свободный край, в предположении, что первоначально в срединной поверхности пластинки имеются сжимающие силы, направленные перпендикулярно к скорости потока газа.

Найдено аналитическое решение задачи статической устойчивости сжатой пластинки при отсутствии обтекания, с целью получения строгой и полной оценки влияния первоначального напряжённого состояния на невозмущённое состояние равновесия пластинки при обтекании.

С помощью графоаналитических методов анализа произведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и статической неустойчивости, в которых невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет устойчивость, соответственно, как в виде дивергенции панели, так и в виде локализованной дивергенции. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости.

Как оказалось, в сравнении с обтекаемой панелью с ненагруженными краями [7], первоначальное напряжённое состояние сжатой панели при обтекании приводит к смещению границы между областями дивергенции панели и локализованной дивергенции в направлении увеличения параметра отношения сторон панели – к расширению области дивергенции панели и сужению области локализованной дивергенции.

Найдены критические значения коэффициента напряжения и критические скорости потока газа, при превышении которых форма равновесия обтекаемой пластинки теряет статическую устойчивость, соответственно, или в виде дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, в зависимости от параметров системы, в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба.

Показано, что критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции, соответствующие, соответственно, пластинкам умеренных размеров и достаточно широким, падают примерно на порядок с ростом коэффициента напряжения.

В случае достаточно длинных пластин первоначальное напряжённое состояние оказывает незначительное влияние на поведение системы «пластинка–поток»: критическая скорость дивергенции панели равна, примерно, значению критической скорости дивергенции бесконечно удлиненной консольной пластинки, полученной в работе [13].

Исследована зависимость видов потери статической устойчивости системы «пластинка–поток» от относительной толщины пластинки применительно к рассматриваемому интервалу сверхзвуковых скоростей потока газа. Показано, что с ростом параметра относительной толщины сжатых прямоугольных пластин их равновесное состояние становится существенно устойчивым при фиксированных значениях остальных параметров системы.

Таким образом, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими силами, направленными перпендикулярно к потоку газа, приводит, в целом, к существенной дестабилизации плоской формы равновесия обтекаемых прямоугольных пластинок – к «скачкообразному» падению значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции в сравнении с соответствующими значениями критических скоростей дивергенции и локализованной дивергенции обтекаемой панели с ненагруженными краями [7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем.– М.: Физматгиз, 1963. 880 с. Volmir A.S. The Stability of the elastic system. M.: Physmathgiz. 1963. 880p. (in Russian).
2. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. №6. С.733–755. Ilyushin A.A. Law of plane sections at high supersonic velocity // PMM. 1956. V.20. № 6. Pp. 733-755. (in Russian).

3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука, 1961. 329 с. Bolotin V.V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. M.: Science, 1961. 329p. (in Russian).
4. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука, 2006. 247 с. Algazin S.D., Kiyko I.A. Flutter of plates and shells. M.: Science, 2006. 247p. (in Russian)
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. //Справочник в 3-х том. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г.Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Strength. Stability. Vibrations. Directory in 3 v. // Under the editorship of I.A. Birger and Ya.G. Panovko. – M.: Mechanical Engineering, 1968. (in Russian).
6. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. – М.: Наука. Физматлит, 1995. 320с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic methods. // Moscow: Science. Physmathlit, 1995. 320 p. (in Russian).
7. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №2. С.12–42. M.V.Belubekyan, S.R.Martirosyan. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge. //Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V.67. №2. P.12–42. (in Russian).
8. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т.95. № 3. С.38–46. Ishlinskii A.Yu. About the same limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates // Reports of USSR Academy of Sciences. 1954. V.95. № 3. Pp.38-46. (in Russian).
9. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С.124–126. Konenkov Yu.K. A Rayleigh–Type Flexural Wave. // Soviet Physics. Akoustic Journal. 1960, v.6, № 1, pp.124–126. (in Russian).
10. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.29–34. Proceed. NAS of Armenia. Mechanics. 2012. V.65. №1. P. 29–34.
11. Белубекян М.В., Чил-Акопян Э.О. Задачи локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем // Известия НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.34–39. Belubekyan M.V., Chil–Акопян E.O. Problems of localized instability of a plate with free edge // Proceed. NAS of Armenia. Mechanics. 2004. V.57. №2. P.34–39. (in Russian).
12. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегающем сверхзвуковом потоке газа на её свободный край // Изв. НАН Армении. Механика. 2017. Т.70. №4. С.12–34. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge// Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V.70. №4. P.12–34. (in Russian).
13. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. № 2. С.231–243. Movchan A. A. Oscillations of a panel moving in a gas // Proceed. of USSR Academy of Sciences. PMM. 1956. V.20. № 2. Pp. 231-243. (in Russian).
14. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, растянутой по направлению потока газа, набегающего на её свободный край //

Изв. НАН Армении. Механика. 2019. Т.72. № 2. С.24-41. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On divergence of the panel, stretched on the direction of supersonic gas flow, an accumulating on its free edge // Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2019. V.72. №2. P.24-41. (in Russian).

**Сведения об авторах:**

**Белубекян Мелс Вагаршакович** – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096

**E-mail:** [mbelubekyan@yahoo.com](mailto:mbelubekyan@yahoo.com)

**Мартirosян Стелла Размиковна** – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

**E-mail:** [mehinsstella@mail.ru](mailto:mehinsstella@mail.ru)

Поступила в редакцию 10.06.2019.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ ПО  
ТЕОРИИ СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ**

**Саркисян С.О., Хачатрян М.В.**

**Ключевые слова:** микрополярный, стеснённое вращение, упругий, стержень, круговая ось, математическая модель, метод конечных элементов.

**Sargsyan S.H., Khachatryan M.V.**

**Mathematical model of static deformation of micropolar elastic beam with a circular axis on the theory with constrained rotation and the finite element method**

**Key words:** micropolar, constrained rotation, elastic, beam, circular axis, mathematical model, finite element method.

In present paper the applied (one-dimensional) model of micropolar elastic thin beam with a circular axis is constructed including the variation principles, on the basis of the two-dimensional equations of micropolar theory of elasticity with constrained rotation written in the polar coordinate system and previously developed hypotheses for thin bodies. Within the framework of this mathematical model, boundary problems with applied values are formulated, which are solved in the final form. Further, the scheme of application of finite element method (FEM) is developed for the boundary problems of micropolar elastic beam with a circular axis with constrained rotation. The boundary problems stated above are solved by using the FEM and on the basis of an analysis obtained through the numerical results, the specific property of micropolarity of the material is established, that it raises the rigidity of the beam as compared with the classical theory.

**Սարգսյան Ս. Հ., Խաչատրյան Մ. Վ.**

**Շրջանային կորությամբ միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողի ստատիկ դեֆորմացիայի մաթեմատիկական մոդելը ըստ կաշկանդված պտույտներով տեսության և վերջավոր տարրերի մեթոդը**

**Հիմնաբառեր:** միկրոպոլյար, կաշկանդված պտույտներ, առաձգական, ձող, շրջանագծային առանցք, մաթեմատիկական մոդել, վերջավոր տարրերի մեթոդ

Աշխատանքում, հիմք ընդունելով կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար տեսության երկչափ հավասարումները գրված բևեռային կոորդինատական համակարգում և նախապես մշակված վարկածները բարակ մարմինների համար, կառուցվել է շրջանագծային կորությամբ առանցքով միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողի կիրառական (միաչափ) մոդելը՝ վարիացիոն սկզբունքներով հանդերձ: Մաթեմատիկական այս մոդելի շրջանակում ձևակերպվում են կիրառական նշանակության եզրային խնդիրներ, որոնք տեսականորեն լուծվում են բանաձևային տեսքերով: Այնուհետև, կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական շրջագծային կորությամբ առանցքով կոր ձողերի կիրառական մոդելի եզրային խնդիրների լուծման համար մշակվում է վերջավոր տարրերի մեթոդի (ՎՏՄ) կիրարկման սխեման: ՎՏՄ մեթոդի կիրառմամբ լուծվում են վերևում դիտարկված եզրային խնդիրները և ստացված թվային արդյունքների անալիզի հիման վրա հաստատվում է նյութի միկրոպոլյարության հաշվառման այն յուրահատկությունը, որ այն բարձրացնում է ձողի կոշտությունը՝ համեմատած դասական տեսության հետ:

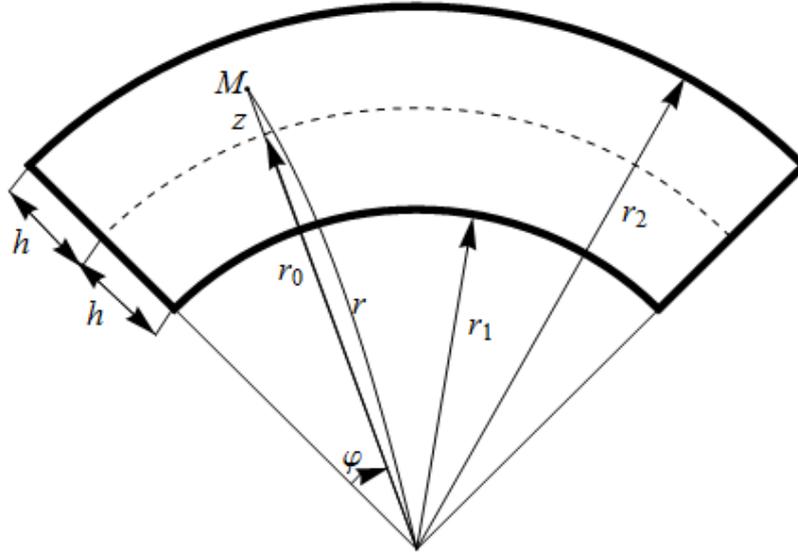
В работе на основании двумерных уравнений микрополярной теории упругости со стеснённым вращением, написанными в полярной системе координат и ранее разработанными гипотезами для тонких тел, построена (включая вариационные принципы) прикладная (одномерная) модель микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью. В рамках этой математической модели формулируются граничные задачи, имеющие прикладные значения, которые решаются в конечном виде. Далее, для граничных задач микрополярных со стеснённым вращением упругих кривых стержней с круговой осью разрабатывается схема применения метода конечных элементов (МКЭ). С применением МКЭ изучаются поставленные наверху граничные задачи и на основе анализа полученных численных результатов устанавливается то специфическое свойство учёта микрополярности материала, что она возвышает жёсткость стержня по сравнению с классическим случаем.

**Введение.** В строительной механике важное место занимает построение математических моделей и расчёт упругих тонких стержней с круговой осью [1-3]. В прикладной микрополярной теории упругости актуально построение моделей упругих тонких стержней с круговой осью как по теории с независимыми полями перемещений и вращений, так и по теории со стеснённым вращением.

В работах [4-7], на основе метода гипотез (которые были сформулированы адекватно со свойствами асимптотического решения соответствующих трёхмерных граничных задач в тонких областях [8]), построены прикладные теории микрополярных упругих тонких прямолинейных стержней, пластин и оболочек. В работах [9-11] развивается этот подход и в результате, построена модель микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью по теории с независимыми полями перемещений и вращений и разработан вариант метода конечных элементов (МКЭ) для решения соответствующих граничных задач. В работах [12,13] аналогичным подходом построена классическая модель тонкого стержня с круговой осью с учётом поперечных сдвиговых деформаций и разработан МКЭ для решения соответствующих краевых задач.

В данной работе аналогичным подходом построена прикладная модель микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью по теории со стеснённым вращением и разработан соответствующий вариант метода конечных элементов. Рассматриваются некоторые прикладные граничные задачи по указанной модели, для которых построены как теоретические решения, так и численные решения при помощи разработанного МКЭ. На основе анализа численных результатов устанавливается основное свойство учёта микрополярности материала о повышении жёсткости упругого стержня по сравнению с классическим случаем.

**1. Вывод основной системы уравнений микрополярного упругого стержня с круговой осью со стеснённым вращением.** Рассмотрим стержень с круговой осью (фиг. 1), имеющий постоянное поперечное сечение: высотой  $2h = r_2 - r_1$  и шириной  $b$ . Ось стержня – дуга окружности радиуса  $r_0$ ; материал стержня – изотропный, микрополярно-упругий. Ширина  $b$  этого стержня настолько мала, что её деформирование возможно рассматривать как задачу обобщённого плоского напряжённого состояния в его срединной плоскости.



Фиг. 1

Таким образом, в срединной плоскости стержня, в полярной системе координат  $(r, \varphi)$   $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ , имеют место уравнения обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости со стеснённым вращением [14]:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{21} + \sigma_{12}) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_{13}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mu_{23} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}], \quad \gamma_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}], \quad \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \\ \chi_{13} = \frac{1}{B} \mu_{13}, \quad \chi_{23} = \frac{1}{B} \mu_{23} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} V_2, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial r}, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{1}{r} V_1, \\ \chi_{13} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_3}{\partial \varphi}, \quad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial r}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{1}{r} V_1 \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$  – силовые (обычные) напряжения;  $\mu_{13}, \mu_{23}$  – моментные напряжения;  $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \tilde{\gamma}_{12}$  – деформации;  $\chi_{13}, \chi_{23}$  – изгиб-кручения;  $V_1, V_2$  – перемещения;  $\omega_3$  – поворот точек срединной плоскости вокруг оси, перпендикулярной к срединной плоскости (этот поворот определяется по соответствующей формуле классической теории [15]);  $E, \nu$  ( $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ),  $B$  – упругие постоянные микрополярного материала.

Будем считать, что на лицевых линиях  $r=r_1, r=r_2$  заданы внешние усилия и моменты:

$$\sigma_{21} = q_1^-, \sigma_{22} = q_2^-; \mu_{23} = m^- \text{ на } r = r_1, \quad (1.4)$$

$$\sigma_{21} = q_1^+, \sigma_{22} = q_2^+; \mu_{23} = m^+ \text{ на } r = r_2,$$

а на крайних сечениях области ( $\varphi = 0, \varphi = \varphi_1$ ) имеют место один из следующих вариантов граничных условий:

$$\text{а) } \sigma_{11} = \sigma_{11}', \sigma_{12} = \sigma_{12}', \mu_{13} = \mu_{13}' \text{ при } \varphi = 0; \quad (1.5)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}'', \sigma_{12} = \sigma_{12}'', \mu_{13} = \mu_{13}'' \text{ при } \varphi = \varphi_1,$$

$$\text{б) } V_1 = V_1', V_2 = V_2', \omega_3 = \omega_3' \text{ при } \varphi = 0; \quad (1.6)$$

$$V_1 = V_1'', V_2 = V_2'', \omega_3 = \omega_3'' \text{ при } \varphi = \varphi_1,$$

$$\text{в) } \sigma_{11} = \sigma_{11}', V_2 = V_2', \mu_{13} = \mu_{13}' \text{ при } \varphi = 0; \quad (1.7)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}'', V_2 = V_2'', \mu_{13} = \mu_{13}'' \text{ при } \varphi = \varphi_1.$$

Удельная потенциальная энергия деформации микрополярного упругого изотропного тела со стесненным вращением выражается следующей формулой:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{11} \gamma_{11} + \sigma_{22} \gamma_{22} + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \tilde{\gamma}_{12} + \mu_{13} \chi_{13} + \mu_{23} \chi_{23} \right) \quad (1.8)$$

или

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2) + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \gamma_{11} \gamma_{22} + \mu \tilde{\gamma}_{12}^2 + \frac{1}{B} (\chi_{13}^2 + \chi_{23}^2) \right\}. \quad (1.9)$$

Для построения прикладной модели микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью со стесненным вращением в основу будем принимать гипотезы, которые изложены в работах [7].

1. В качестве исходной кинематической гипотезы для перемещений, примем гипотезу прямой линии, т.е. гипотезу Тимошенко; это означает, что линейный элемент, первоначально перпендикулярный к средней линии срединной плоскости стержня до

деформации, остаётся после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии, а поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие указанных допущений будем иметь следующий линейный закон изменения перемещений и поворота по толщине срединной плоскости кругового стержня:

$$V_1 = u(\varphi) + z\psi(\varphi), \quad V_2 = w(\varphi), \quad (1.10)$$

где  $u(\varphi)$  и  $w(\varphi)$  – перемещения точек средней линии в направлениях по её касательной и по нормали (т.е.  $w(\varphi)$  – это прогиб стержня);  $\psi(\varphi)$  – угол поворота первоначально нормального элемента.

Для поворота точек срединной плоскости вокруг оси, перпендикулярной к срединной плоскости, используя формулу (1.3)<sub>6</sub> и (1.10), получим:

$$\omega_3 = \Omega_3(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \psi \right) \quad (1.11)$$

Формулы (1.10) и (1.11) выражают кинематическую картину деформаций упругого стержня с круговой осью по теории со стеснённым вращением.

2. Гипотеза о тонкостенности стержня, при которой будем принимать приближённое равенство:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + z} = \frac{1}{r_0 \left( 1 + \frac{z}{r_0} \right)} \approx \frac{1}{r_0}.$$

3. Предположения о малости в первом уравнении закона Гука ((1.2)<sub>1</sub>) нормального напряжения  $\sigma_{22}$  относительно нормального напряжения  $\sigma_{11}$ .

4. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для касательного напряжения  $\sigma_{21}$  примем:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(\varphi). \quad (1.12)$$

После определения вышеуказанных величин, формулу для  $\sigma_{21}$  будем уточнять следующим образом. Проинтегрируем по  $z$  второе из (1.1) ((1.1)<sub>2</sub>) уравнение равновесия и при определении постоянного интегрирования (вернее функции от  $\varphi$ ) будем требовать равенство нулю интеграла от  $-h$  до  $h$  от полученного выражения. После указанного интегрирования полученное окончательное выражение прибавим к формуле (1.12).

Теперь переходим к определению деформаций и напряжений.

На основании формул (1.10), (1.13) и (1.3) для деформаций и изгибов-кручений будем иметь:

$$\gamma_{11} = \left( \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w \right) + z \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad (1.13)$$

$$\chi_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}, \quad \chi_{23} = 0. \quad (1.14)$$

Если принять обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \tilde{\Gamma}_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u + \psi, \\ \mathbf{K}_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

то для деформаций, изгибов-кручений получим:

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11} + z\mathbf{K}_{11}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \tilde{\Gamma}_{12}, \quad \chi_{13} = k_{13}, \quad \chi_{23} = 0. \quad (1.16)$$

Здесь  $\Gamma_{11}$  представляет собой продольную относительную деформацию средней линии;  $\mathbf{K}_{11}$  – изменение кривизны средней линии (от силовых напряжений);  $\tilde{\Gamma}_{12}$  – сдвиговая деформация;  $k_{13}$  – изменение кривизны средней линии (от моментных напряжений).

Используя гипотезу 3) о малости нормального напряжения  $\sigma_{22}$  и формулу (1.16)<sub>1</sub>, из формулы (1.2)<sub>1</sub> для напряжений  $\sigma_{11}$  будем иметь:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0(\varphi) + z\sigma_{11}^1(\varphi), \quad (1.17)$$

где

$$\sigma_{11}^0(\varphi) = E\Gamma_{11}, \quad \sigma_{11}^1(\varphi) = E\mathbf{K}_{11}. \quad (1.18)$$

Используя формулы (1.2)<sub>3</sub>, (1.14)<sub>3</sub>, (1.15)<sub>2</sub>, получим также:

$$\sigma_{12} + \sigma_{21} = 2\mu\tilde{\Gamma}_{12}. \quad (1.19)$$

Рассмотрим второе уравнение равновесия ((1.1)<sub>2</sub>), которое проинтегрируем по  $r$  с учётом тонкостенности области и граничных условий из (1.4) для  $\sigma_{22}$ , окончательно получим:

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}(q_2^+ + q_2^-) - \frac{h^2}{2} \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^1 + z \left( \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^0 - \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{12}^0}{d\varphi} \right) + \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^1 \frac{z^2}{2}. \quad (1.20)$$

Для моментного напряжения  $\mu_{13}$  на основании формулы (1.2)<sub>5</sub> и с учётом формулы из (1.16) для  $\chi_{13}$ , будем иметь:

$$\mu_{13} = Bk_{13}. \quad (1.21)$$

Значение для моментного напряжения  $\mu_{23}$  получим из третьего уравнения равновесия ((1.1)<sub>3</sub>) и соответствующих граничных условий из (1.4) :

$$\mu_{23} = \frac{1}{2}(m^+ + m^-) - z \left( \frac{1}{r_0} \frac{d\mu_{13}^0}{d\varphi} + \sigma_{12}^0 - \sigma_{21}^0 \right). \quad (1.22)$$

В основу принимая гипотезу 4), в результате, окончательно для  $\sigma_{21}$  получим:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(\varphi) + \frac{h^2}{6} \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}^1}{d\varphi} - z \left( \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}^0}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} \sigma_{12}^0 \right) - \frac{z^2}{2} \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}^1}{d\varphi}. \quad (1.23)$$

В прикладной теории микрополярного упругого стержня с круговой осью со стеснённым вращением, вместо компонент силовых и моментных напряжений будем вводить статически эквивалентные им интегральные характеристики: усилия  $N$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{21}$  и моменты:  $M_{11}$ ,  $L_{13}$ , которые выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} N &= \int_{-h}^h \sigma_{11} dz, \quad Q_{12} = \int_{-h}^h \sigma_{12} dz, \quad Q_{21} = \int_{-h}^h \sigma_{21} dz, \\ M_{11} &= \int_{-h}^h \sigma_{11} z dz, \quad L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dz. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Теперь, на основе формулы для  $\sigma_{21}$  ((1.23)),  $\sigma_{22}$  ((1.20)) и  $\mu_{23}$  ((1.22)), удовлетворяя граничным условиям (1.4), с учётом формул (1.24), приходим к следующей системе уравнений равновесия прикладной модели микрополярного упругого стержня с круговой осью со стеснённым вращением:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} N - \frac{1}{r_0} \frac{dQ_{12}}{d\varphi} &= q_2^+ - q_2^-, \quad \frac{1}{r_0} Q_{12} + \frac{1}{r_0} \frac{dN}{d\varphi} = -(q_1^+ - q_1^-) \\ Q_{21} - \frac{1}{r_0} \frac{dM_{11}}{d\varphi} &= h(q_1^+ + q_1^-), \quad Q_{21} - Q_{12} - \frac{1}{r_0} \frac{dL_{13}}{d\varphi} = m^+ - m^-. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Далее при помощи формул (1.17), (1.19), (1.21) получим соотношения упругости для указанной модели:

$$\begin{aligned} N &= 2Eh\Gamma_{11}, \quad Q_{12} + Q_{21} = 4h\mu\tilde{\Gamma}_{12}, \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3} K_{11}, \quad L_{13} = 2Bhk_{13}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Присоединим к уравнениям равновесия (1.25) и соотношениям упругости (1.26) ещё и геометрические уравнения (1.15):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \tilde{\Gamma}_{12} = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u + \psi, \\ K_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \psi \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Уравнения равновесия (1.24), соотношения упругости (1.26) и геометрические соотношения (1.27) представляют собой основные уравнения прикладной модели микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью со стеснённым вращением. К этой системе уравнений следует присоединить соответствующие граничные условия.

$W_0$  – плотность потенциальной энергии деформации построенной прикладной модели плоского изгиба микрополярного упругого изотропного стержня с круговой осью по теории со стеснённым вращением получим на основе формулы (1.8) и полученные выше выражения:

$$W_0 = \frac{1}{2} \left[ N\Gamma_{11} + M_{11}K_{11} + \frac{1}{2}(Q_{12} + Q_{21})\tilde{\Gamma}_{12} + L_{13}k_{13} \right] \quad (1.28)$$

или

$$W_0 = Eh\Gamma_{11}^2 + E\frac{h^3}{3}K_{11}^2 + h\mu\tilde{\Gamma}_{12}^2 + Bhk_{13}^2. \quad (1.29)$$

Общий вид функционала потенциальной энергии деформации (потенциальная энергия деформации стержня плюс потенциал внешних усилий) при прикладном плоском изгибе упругого стержня с круговой осью будет выражаться так:

$$U = \int_0^a (W_0 - 2hq_2\psi - 2qw - 2q_1u - 2m\Omega_3) ds - \left( (Q_{12}w + Nu + M_{11}\psi + L_{13}\Omega_3) \Big|_{s=a} - (Q_{12}w + Nu + M_{11}\psi + L_{13}\Omega_3) \Big|_{s=0} \right), \quad (1.30)$$

где введены следующие обозначения:  $q = \frac{1}{2}(q_2^+ - q_2^-)$ ,  $q_1 = \frac{1}{2}(q_1^+ - q_1^-)$ ,

$$q_2 = \frac{1}{2}(q_1^+ + q_1^-).$$

Отметим, что система уравнений прикладной модели плоского изгиба упругого стержня по теории со стеснённым вращением (1.25)-(1.27) представляет собой систему неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которой складывается из общего решения однородной системы ( $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$ ,  $m = 0$ ,) и частного решения неоднородной системы.

Подставляя (1.26) в (1.25), имея в виду (1.27), из уравнений равновесия получим следующую систему однородных дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно функций  $u, w, \psi$ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left( E + \frac{B}{4r_0^2} \right) \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{r_0} (E + \mu) \frac{dw}{ds} - \frac{B}{4r_0} \frac{d^3 w}{ds^3} + \frac{B}{4r_0} \frac{d^2 \psi}{ds^2} - \\
-\frac{\mu}{r_0^2} u + \frac{\mu}{r_0} \psi = 0 \\
\left( \frac{Eh^2}{3} + \frac{B}{4} \right) \frac{d^2 \psi}{ds^2} - \frac{B}{4} \frac{d^3 w}{ds^3} + \frac{B}{4r_0} \frac{d^2 u}{ds^2} - \mu \frac{dw}{ds} + \frac{\mu}{r_0} u - \mu \psi = 0 \\
\frac{1}{r_0} (E + \mu) \frac{du}{ds} + \frac{E}{r_0^2} w + \frac{B}{4} \frac{d^4 w}{ds^4} - \frac{B}{4r_0} \frac{d^3 u}{ds^3} - \frac{B}{4} \frac{d^3 \psi}{ds^3} - \\
-\mu \frac{d^2 w}{ds^2} - \mu \frac{d\psi}{ds} = 0, \quad s = r_0 \phi.
\end{array} \right. \quad (1.31)$$

Решение системы уравнений (1.31) можно привести к решению дифференциального уравнения шестого порядка относительно функции  $\psi$  :

$$\frac{d^6 \psi}{ds^6} - \frac{4\mu r_0^2 (Eh^2 + 3B) - BEh^2}{r_0^2 BEh^2} \frac{d^4 \psi}{ds^4} - \frac{4\mu (Eh^2 + 3B)}{r_0^2 BEh^2} \frac{d^2 \psi}{ds^2} = 0, \quad (1.32)$$

характеристическое уравнение которой, в итоге, представляет собой биквадратное уравнение.

Общее решение этого уравнения будет:

$$\psi = C_1 + C_2 s + C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s + C_5 e^{k_{5,6} s} + C_6 e^{-k_{5,6} s}, \quad (1.33)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  – постоянные интегрирования,

$$\beta = \frac{1}{r_0}; \quad k_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{4\mu (Eh^2 + 3B)}{BEh^2}}.$$

Из (1.31) после некоторых преобразований получим связь между  $\psi$  и  $w$  :

$$\begin{aligned}
\frac{2\mu}{E + 2\mu} \left( \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{r_0^2} w \right) &= -\frac{r_0^2 h^2 B}{3(4\mu r_0^2 - B)} \frac{d^5 \psi}{ds^5} - \\
-\frac{Eh^2 (-8\mu r_0^2 (E + \mu) + EB) - 12\mu r_0^2 B (E + 2\mu)}{3E(E + 2\mu)(4\mu r_0^2 - B)} \frac{d^3 \psi}{ds^3} - \frac{2\mu}{E + 2\mu} \frac{d\psi}{ds}.
\end{aligned} \quad (1.34)$$

Теперь, (1.33), подставляя в (1.34), для функции  $W$  получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{r_0^2} w = D_1 2\beta (C_3 \cos \beta s - C_4 \sin \beta s) + D_2 (k_5^2 + \beta^2) (C_5 k_5 e^{k_5 s} + C_6 k_6 e^{k_6 s}) - C_2, \quad (1.35)$$

где

$$D_1 = \frac{E + 2\mu}{4\mu} \left( -\frac{\beta^4 h^2 B}{3(4\mu - B\beta^2)} + \frac{h^2 \beta^2 (-8\mu(E + \mu) + EB\beta^2)}{3(E + 2\mu)(4\mu - B\beta^2)} - \frac{4\mu B}{E(4\mu - B\beta^2)} - \frac{2\mu}{E + 2\mu} \right),$$

$$D_2 = \frac{E + 2\mu}{4\mu} \left( -\frac{h^2 B}{3(4\mu - B\beta^2)} k_5^4 - \left( \frac{h^2 (-8\mu(E + \mu) + EB\beta^2)}{3(E + 2\mu)(4\mu - B\beta^2)} - \frac{4\mu B}{E(4\mu - B\beta^2)} \right) k_5^2 - \frac{2\mu}{E + 2\mu} \right)$$

Общее решение дифференциального уравнения (1.35) имеет вид:

$$w = C_7 \cos \beta s + C_8 \sin \beta s + D_1 (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) s + D_2 (C_5 k_5 e^{k_5 s} + C_6 k_6 e^{k_6 s}) - r_0^2 C_2, \quad (1.36)$$

где  $C_7$  и  $C_8$  – новые постоянные интегрирования.

Далее, из систем дифференциальных уравнений (1.31), получим также следующую формулу для перемещения  $u$  через  $w$  и  $\psi$ :

$$u = -\frac{r_0^3 h^2 E^2}{6\mu(E + 2\mu)} \frac{d^4 \psi}{ds^4} + \frac{E r_0^3}{E + 2\mu} \frac{d^3 w}{ds^3} + \frac{6E\mu r_0^3 - Eh^2 r_0 (E + 2\mu)}{6\mu(E + 2\mu)} \frac{d^2 \psi}{ds^2} + \frac{2r_0(E + \mu)}{E + 2\mu} \frac{dw}{ds} + r_0 \psi \quad (1.37)$$

Подставляя (1.33) и (1.36) в (1.37), получим окончательное выражение для  $u$ :

$$u = D_3 (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) + D_1 (C_3 \cos \beta s - C_4 \sin \beta s) s + D_4 (C_5 e^{k_5 s} + C_6 e^{k_6 s}) + \frac{1}{\beta} C_1 + \frac{1}{\beta} C_2 s - C_7 \sin \beta s + C_8 \cos \beta s. \quad (1.38)$$

При помощи (1.33), (1.36) и (1.37), (1.11), получим выражения также для  $\Omega_3$ :

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & \left( \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{2r_0} D_3 \right) (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) + \\ & + \left( \frac{1}{2} D_2 k_5^2 - \frac{1}{2r_0} D_4 - \frac{1}{2} \right) (C_5 e^{k_5 s} + C_6 e^{k_6 s}) - C_2 s - C_1, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где

$$\begin{aligned} D_3 = & \frac{1}{E+2\mu} \left( -\frac{E^2 h^2 \beta}{6\mu} - \frac{3E}{\beta} D_1 - \frac{6\mu E - E h^2 \beta^2 (E+2\mu)}{6\mu\beta} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\beta} (E+\mu) D_1 + \frac{1}{\beta} \right), \\ D_4 = & \frac{1}{E+2\mu} \left( -\frac{E^2 h^2}{6\mu\beta^3} k_5^4 - \frac{E}{\beta^3} k_5^4 D_2 + \frac{6\mu E - E h^2 \beta^2 (E+2\mu)}{6\mu\beta^3} k_5^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\beta} (E+\mu) k_5^2 D_2 + \frac{1}{\beta} \right) \end{aligned}$$

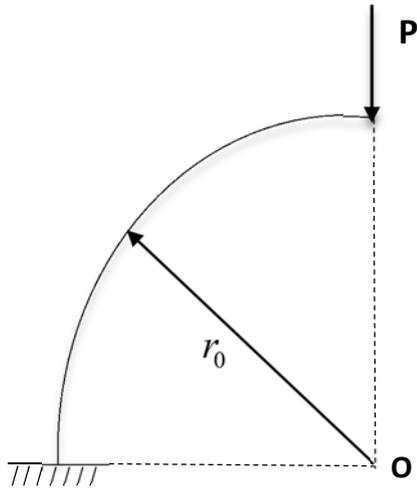
Таким образом, построено общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (1.31). Для определения частного решения неоднородной системы (1.25)-(1.27), в каждой частной задаче будем рассматривать отдельно.

Для определения постоянных интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$  удовлетворим граничным условиям. Понятно, что в результате получим восемь линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно искомых постоянных интегрирования. После решения алгебраической системы уравнений получим все значения постоянных интегрирования и окончательно выражения для искомых основных функций  $w, u, \psi$  и  $\Omega_3$ .

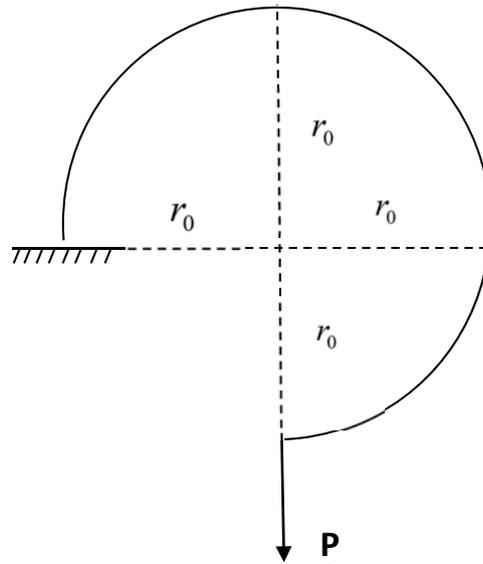
## 2. Постановка и решение некоторых прикладных граничных задач микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью по теории со стеснённым вращением.

Будем изучать задачи изгиба тонкого стержня с круговой осью при следующих нагружениях и граничных условиях: 1) когда один конец стержня жёстко закреплён, а на другом конце приложена вертикальная сосредоточенная сила, а  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  (фиг.1а), 2) когда один конец жёстко закреплён, а на другом конце приложена вертикальная сосредоточенная сила, а  $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$  (фиг.1б), 3) когда один конец жёстко закреплён, а на другом конце приложена горизонтальная сосредоточенная сила, а  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (фиг.1в), 4) когда один конец жёстко закреплён, а другой конец –

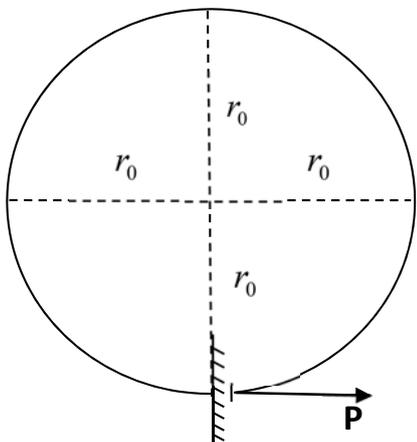
свободный: на стержень действует равномерно распределённая нормальная нагрузка, а  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  (фиг.1г).



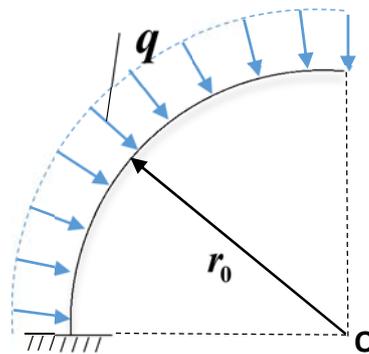
Фиг.1а



Фиг.1б



Фиг.1в



Фиг.1г

Для решения задач 1а-1в используем общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (1.31) (т.е. выражения (1.33), (1.36), (1.38), (1.39)) и для

определения постоянных интегрирования удовлетворим следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{Задача 1а,1б: } w = 0, u = 0, \psi = 0, \Omega_3 = 0 \text{ при } s = 0; \\ Q_1 = P, N = 0, M_{11} = 0, L_{13} = 0 \text{ при } s = a. \end{aligned} \quad (2.1_1)$$

$$\begin{aligned} \text{Задача 1в: } w = 0, u = 0, \psi = 0, \Omega_3 = 0 \text{ при } s = 0; \\ Q_1 = 0, N = -P, M_{11} = 0, L_{13} = 0 \text{ при } s = a. \end{aligned} \quad (2.1_2)$$

Для решения задачи 1г, во-первых, необходимо к общему решению однородной системы ((1.33), (1.36), (1.38), (1.39)) прибавить частное решение неоднородной системы (1.25)-(1.27). Это частное решение для задачи 1г легко построить и тогда общее решение неоднородной задачи можем представить в виде:

$$\psi = C_1 + C_2 s + C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s + C_5 e^{k_5 s} + C_6 e^{k_6 s}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} w = C_7 \cos \beta s + C_8 \sin \beta s + D_1 (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) s + \\ + D_2 (C_5 k_5 e^{k_5 s} + C_6 k_6 e^{k_6 s}) - r_0^2 C_2 + \frac{q}{Eh\beta^2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} u = D_3 (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) + D_1 (C_3 \cos \beta s - C_4 \sin \beta s) s + \\ + D_4 (C_5 e^{k_5 s} + C_6 e^{k_6 s}) + \frac{1}{\beta} C_1 + \frac{1}{\beta} C_2 s - C_7 \sin \beta s + C_8 \cos \beta s. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \Omega_3 = \left( \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{2r_0} D_3 \right) (C_3 \sin \beta s + C_4 \cos \beta s) + \\ + \left( \frac{1}{2} D_2 k_5^2 - \frac{1}{2r_0} D_4 - \frac{1}{2} \right) (C_5 e^{k_5 s} + C_6 e^{k_6 s}) - C_2 s - C_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Удовлетворим следующим граничным условиям для задачи 1г:

$$w = 0, u = 0, \psi = 0, \Omega_3 = 0 \text{ при } s = 0;$$

$$Q_1 = 0, N = 0, M_{11} = 0, L_{13} = 0 \text{ при } s = a.$$

### 3. Развитие метода конечных элементов для краевых задач микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью по модели со стеснённым вращением. Построение матрицы жёсткости конечного элемента.

Основными кинематическими параметрами в задаче изгиба микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью по модели со стеснённым вращением являются: прогиб -  $w(s)$ , осевое перемещение -  $u(s)$  и угол поворота нормального элемента -  $\psi(s)$ . Распределение основных кинематических переменных вдоль элемента дуги оси стержня аппроксимируем полиномами:

$$\begin{aligned} w(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3, \quad u(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3, \\ \psi(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3, \quad s = r_0 \varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $a_i, b_i, c_i$  – коэффициенты, которые ниже будем выражать через узловые перемещения и повороты. Для узловых перемещений примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
w(0) &= \delta_1, & w'(0) &= \delta_2, & u(0) &= \delta_3, & u'(0) &= \delta_4, \\
\psi(0) &= \delta_5, & \psi'(0) &= \delta_6, & w(a) &= \delta_7, & w'(a) &= \delta_8, \\
u(a) &= \delta_9, & u'(a) &= \delta_{10}, & \psi(a) &= \delta_{11}, & \psi'(a) &= \delta_{12}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Как видим, данный конечный элемент имеет двенадцать степеней свободы.

Подставим разложения (3.1) в (3.2), выразим коэффициенты  $a_i, b_i, c_i$  через узловые перемещения и повороты  $\delta_k$ . Подставив таким образом определённые  $a_i, b_i, c_i$  в (3.1), для перемещений и поворотов имеем аппроксимации:

$$w(s) = \sum_{i=1,2,7,8} \delta_i N_i(s), \quad u(s) = \sum_{i=3,4,9,10} \delta_i N_i(s), \quad \psi(s) = \sum_{i=5,6,11,12} \delta_i N_i(s), \tag{3.3}$$

где  $N_i(s)$  – функции формы элемента, которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
N_1 = N_3 = N_5 &= 1 - \frac{3}{a^2} s^2 + \frac{2}{a^3} s^3, & N_2 = N_4 = N_6 &= s - \frac{2}{a} s^2 + \frac{1}{a^2} s^3, \\
N_7 = N_9 = N_{11} &= \frac{3}{a^2} s^2 - \frac{2}{a^3} s^3, & N_8 = N_{10} = N_{12} &= -\frac{1}{a} s^2 + \frac{1}{a^2} s^3.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Подставив (3.3) в функционал (1.30), после выполнения интегрирования получим функцию от двенадцати независимых переменных  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots, \delta_{12}$ . Минимизация функционала (1.30) приводит к нахождению минимума функции двенадцати независимых переменных. Вычислив соответствующие частные производные, обращая их в ноль, приходим к следующему матричному уравнению:

$$[K] \cdot \{\delta\} = [P]. \tag{3.5}$$

Здесь  $K$  – матрица жёсткости элемента размером  $12 \times 12$ , представляющего собой важнейшее понятие метода конечных элементов;  $\{\delta\}^T = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots, \delta_{12})$  – вектор узловых перемещений и поворотов; а вектор узловых нагрузок выражается так: Задача 1а, 1б:  $\{P\}^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, P, 0, 0, 0, 0, 0\}$ ,

$$\text{Задача 1в: } \{P\}^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -P, 0, 0, 0\},$$

$$\text{Задача 1г: } \{P\}^T = \left\{ aq, \frac{a^2 q}{6}, 0, 0, 0, 0, aq, -\frac{a^2 q}{6}, 0, 0, 0, 0 \right\}.$$

В результате, решение системы (3.5) с учётом соответствующих граничных условий даст величины узловых обобщённых перемещений. Для повышения точности решений, понятно, что необходимо разбивать стержень на несколько конечных элементов.

Результат вычислений приведём для случая, когда физические постоянные и геометрические размеры балки имеют значения:

$$\mu = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}, E = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}, r_0 = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$h = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}, B = 3 \cdot 10^4 \text{ Н}. P = 10^4 \text{ Н} \text{ (для задачи 1а,б,в)}, q = 10^5 \text{ Па} \text{ (для задач 1г)},$$

Приведём также результаты по классической теории упругого тонкого стержня с круговой осью при её изгибе с учётом поперечных сдвигов [12,13].

**Таблица 1.** Максимальные прогибы микрополярного и классического упругого тонкого стержня для задачи 1а).

Количество элементов	$w$ (м) при $s = a = 15 \cdot 10^{-3}$ (м)	
	Микрополярная ( $\times 10^4$ )	Классическая ( $\times 10^4$ )
2	2,381	10,61
4	2,395	10,87
Точное решение	2,395	10,88

**Таблица 2.** Максимальные прогибы микрополярного и классического упругого тонкого стержня для задачи 1б).

Количество элементов	$w$ (м) при $s = a = 45 \cdot 10^{-3}$ (м)	
	Микрополярная ( $\times 10^4$ )	Классическая ( $\times 10^3$ )
2	2,129	0,394
4	6,563	2,361
8	7,168	3,231
Точное решение	7,187	3,265

**Таблица 3.** Максимальные прогибы микрополярного и классического упругого тонкого стержня для задачи 1в).

Количество элементов	$u$ (м) при $s = a = 60 \cdot 10^{-3}$ (м)	
	Микрополярная ( $\times 10^3$ )	Классическая ( $\times 10^3$ )
2	-2,086	-5,61
4	-2,712	-11,43
8	-2,888	-13,04
Точное решение	-2,896	-13,18

**Таблица 4.** Максимальные прогибы микрополярного и классического упругого тонкого стержня для задачи 1г).

Количество элементов	$w$ (м) при $s = a = 15 \cdot 10^{-3}$ (м)	
	Микрополярная ( $\times 10^5$ )	Классическая ( $\times 10^4$ )
2	2,895	1,288
4	2,911	1,321
Точное решение	2,911	1,322

Как можно убедиться, учёт микрополярности материала приводит к повышению жёсткости стержня.

**Заключение.** Построена прикладная модель микрополярного тонкого стержня с круговой осью на основе теории со стеснённым вращением и для этой модели разработана расчётная схема метода конечных элементов. На основе анализа численных результатов установлено специфическое свойство учёта микрополярности материала о повышении жёсткости стержня по сравнению с классическим случаем.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместных научных программ 18RF-106 и 18-53-05022, соответственно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трёх томах. Под общей редакцией: И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. Т.1. М.: Изд-во «Машиностроение». 1968. 832с. Strength, stability, fluctuations. Handbook in three volumes. Under total editorship: Birger I.A., Panovka Ya.G. Vol.1. M.: Pub. of Mech. Eng.1968. 832p. (in Russian).
2. Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г. Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. 341с. Kuzmin M.A., Lebedev D.L., Popov B.G. Strength calculations of the elements of multilayer composite structures. M.: Pub.of BMSTU after N.E. Bauman. 2012. 341p. (in Russian).
3. Лурье А. И. Теория упругости М.:Изд-во «Наука». 1970. 940с. Lurie A. I. Theory of Elasticity M.: Pub. of Science. 1970. 940p. (in Russian).
4. Sargsyan S. H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
5. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып.2. С.148-155. Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar elastic thin plates and their strength and stiffness characteristics// Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol.53. №2. P. 275-282. (in Russian).
6. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells // Journal of Physical MezoMechanics. 2012. Vol.15. №1-2. P.69-79. (in Russian).
7. Саркисян С.О. Общая теория тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости со стесненным вращением// Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящённой 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва: 20-21 января 2011 года. С. 231-235. Sargsyan S.H. General theory of thin shells on the basis of asymmetric elasticity theory with constrained rotation// Elasticity and inelasticity. Proceedings of the International Scientific Symposium on the Problems of Mechanics of Deformable Bodies dedicated to the 100th anniversary of the birth of A. A. Ilyushin. Moscow. 20-21 January 2011. P. 231-235. (in Russian).

8. Sargsyan S.H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells // *Advances in Pure Mathematics*. 2015. №5. P.629-642.
9. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. Mathematical model of static deformation of micropolar elastic circular thin bar// *Proceedings of the XLIV Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics»*. St. Petersburg: Ins. for problems in mechanical engineering. 2016. P. 367-374.
10. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Вариационный принцип и энергетика деформаций прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня// *Изв. НАН Армении. Механика*. 2016. Т.69. №2. С.55-66. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. Variation principle and energetics of deformation of applied model of micropolar elastic circular thin bar// *Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics*. 2016. V.69. №2. P. 55-66. (in Russian).
11. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью и метод конечных элементов // *Актуальные проблемы прочности. Монография*. Витебск: НАН Беларуси. Т.1. Глава 14. 2018. С. 258-271. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. Mathematical model of static deformation of micropolar elastic beam with a circular axis and the finite element method// *Actual problems of strength. Monograph*. Vitebsk: NAS of Belarus.V.1. Chapter 14. 2018. P.258-271. (in Russian).
12. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций// *Докл. НАН Армении*. 2016. Т.116. №1. С.34-42. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. Mathematical model of elastic plane curve beam (circular) with consideration of shear deformations on the basis of the classical theory of elasticity// *Reports of NAS of Armenia*. 2016. Vol.116. №1. P.34-42. (in Russian).
13. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Классическая модель статики упругих тонких стержней с круговой осью с учетом поперечных сдвигов и метод конечных элементов// *В сб. науч. Тр. V международной конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды»*. Цахкадзор, окт.02-07. Армения. Изд-во НАН РА. 2017. С.125-126. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. The classical model of the statics of elastic thin beams with a circular axis with account of transverse shears and the finite element method// *The proceeding of V international conference. Topical problems of continuum mechanics*. Tsakhkadzor, oct.02-07.Armenia. Publishing of NAS of RA. 2017. P.125–126. (in Russian).
14. Савин Г.Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киевск. Ун-та. 1965. 162с. Savin G.N. Basics of the plane moment theory of elasticity. Kiev. Publishing of Kiev. University. 1965. 162p. (in Russian).
15. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с. Novatsky V. Theory of elasticity. M.: Mir, 1975. 862p. (in Russian).

**Сведения об авторах:**

**Саркисян Самвел Оганесович** – член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор, (+374 93) 15 16 98. **E-mail:** [s\\_sargsyan@yahoo.com](mailto:s_sargsyan@yahoo.com)

**Хачатрян Мелине Вардановна** – аспирант кафедры Математики, физики и информационных технологий Ширакского государственного университета им. М. Налбандяна, (+374 94) 61 82 13. **E-mail:** [khachatryanmeline@mail.ru](mailto:khachatryanmeline@mail.ru)

Поступила в редакцию 12.02.2019

УДК 539.3

Doi- <http://doi.org/10.33018/72.3.4>

## TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELECTROACOUSTICS IN HOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC CRYSTALS

**Avetisyan Ara S.**

**Keywords:** electroelasticity, stress-deformed electroactive state, anisotropy of piezocrystal, refined material relations, quasistatic equations.

**Аветисян Ара С.**

**Двумерные задачи электроакустики в однородных пьезоэлектрических кристаллах**

**Ключевые слова:** электроупругость, электроактивное напряжённо-деформированное состояние, анизотропия пьезокристалла, уточнённые материальные соотношения, квазистатические уравнения.

Исследуются вопросы возможности отдельного возбуждения и распространения электроупругого плоского или электроупругого антиплоского напряжённо-деформированных состояний в однородных пьезоэлектрических кристаллах.

Получены необходимые и достаточные условия отдельного возбуждения и распространения электроупругого плоского и электроупругого антиплоского напряжённо-деформированных состояний в пьезоэлектрических кристаллах.

Определены текстуры пьезодиэлектрических кристаллов, структуры обобщённого тензора электроупругости которых позволяют разделить плоское напряжённо-деформированное электроактивного состояния от неэлектроактивного антиплоского упругого состояния.

В рассматриваемых задачах получены материальные соотношения и квазистатические уравнения электроупругости для всех пьезоэлектрических текстур в каждой из всех трёх сагиттальных плоскостей соответствующей кристаллической решётки. Проведён сравнительный анализ вновь полученных соотношений напряжённо деформированных состояний с соответствующими соотношениями электроактивных состояний плоской и антиплоской деформаций.

**Արա Ս. Ավետիսյան**

**Էլեկտրաառաձգական երկչափ խնդիրները համասեռ պիեզոէլեկտրական բյուրեղներում**

**Հիմնաբառեր.** Էլեկտրաառաձգականություն, էլեկտրականապես ակտիվ լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակ, պիեզոբյուրեղի անիզոտրոպիա, ճշգրտված նյութական առնչություններ, քվազիստատիկ հավասարումներ:

Էլեկտրականապես ակտիվ, համասեռ պիեզոէլեկտրական բյուրեղներում հետազոտվում են հարթ կամ հակահարթ էլեկտրաառաձգական լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակների առանձին-առանձին գրգռման և տարածման հնարավորության հարցերը:

Ստացված են առաձգական դեֆորմացվող միջավայրի անիզոտրոպիայով պայմանավորված էլեկտրաառաձգական հարթ լարվածադեֆորմացիոն վիճակի անջատ գրգռման և տարածման հնարավորության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

Բացահայտված են պիեզոբյուրեղների այն դասերը, որոնց էլեկտրաառաձգականության թենզորի կառուցվածքը թույլ է տալիս էլեկտրականապես ակտիվ հարթ լարվածադեֆորմացիոն վիճակի անջատումը էլեկտրականապես ոչ ակտիվ հակահարթ դեֆորմացիայի վիճակից:

Ստացված են առաձգական դեֆորմացվող միջավայրի անիզոտրոպիայով պայմանավորված էլեկտրաառաձգական հակահարթ լարվածադեֆորմացիոն վիճակի անջատ գրգռման և տարածման հնարավորության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

Բացահայտված են նաև պիեզոբյուրեղների այն դասերը, որոնց էլեկտրաառաձգականության թենզորի կառուցվածքը թույլ է տալիս էլեկտրականապես ակտիվ հակահարթ լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի անջատումը էլեկտրականապես ոչ ակտիվ հարթ դեֆորմացիայի վիճակից:

Բերված խնդիրներում ստացված են էլեկտրաառաձգականության նյութական առնչությունները և քվազի-ստատիկ հավասարումները պիեզոէլեկտրական միջավայրերի համար՝ պիեզոբյուրեղային կառուցվածքի բոլոր երեք ընտրված հարթություններում: Կատարված է նշված խնդիրներում ստացված առնչությունների ու էլեկտրականապես ակտիվ հարթ և հակահարթ դեֆորմացիոն վիճակների համապատասխան առնչությունների համեմատական վերլուծություն:

The problems of the possibility of separate excitation and propagation of electroelastic planar, or electroelastic anti-plane stress-strain states in homogeneous piezoelectric crystals are investigated.

The necessary and sufficient conditions for the separate excitation and propagation of electroelastic plane and electroelastic antiplane stress-strain states in piezoelectric crystals are obtained.

The textures of piezodielectric crystals are determined, the structures of the generalized electroelasticity tensor of which allow the separation of the plane stress-strain electroactive state from the non-electroactive anti-plane elastic state.

The textures of piezodielectric crystals, the structures of the generalized electroelasticity tensors of which allow the separation of the anti-flat stress-deformed electroactive state from the non-electroactive flat elastic state, are also determined.

In the considered problems, the material relations and quasistatic equations of electro elasticity for all the piezoelectric textures in each of all three sagittal planes of corresponding crystal lattice are obtained. A comparative analysis of the newly obtained ratios of stress-strain states with the corresponding ratios of electroactive states of plane and anti-plane deformations is carried out.

**Introduction.** In many structural schemes of modern electronic technology, various new crystalline elements, layered composite waveguides, formed from various natural or artificially grown piezoelectric materials with different physical and mechanical properties, are widely used. The operation of these elements is often based on the emission (or delay) of only electro-acoustic waves of a plane stress-strain state or only on the emission (or delay) of an electro-acoustic wave of anti-plane deformation (pure shear waves). As a rule, structural elements used in modern technology are thin-walled and in the formulation of two-dimensional problems, we must take into account possible approaches that allow separate formulations of the problems of electroactive plane deformation and electroactive anti-plane deformation.

In applied problems of studying stress-strain states in thin-walled elastic structural elements, two-dimensional problems of elasticity theory were modeled. In order to avoid taking into account the violation of the plane stress-strain state in the middle surface of a thin-walled element, scientists adopted various hypotheses Kirchhoff G. [1], Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. [2], Reissner E. [3], Ambartsumian S.A. [4]: the hypothesis of direct normals, the hypothesis of the absence of pressure of the plate layers on each other, the hypothesis of the inextensibility of the middle surface of the plate.

Hypotheses were accepted as additional restrictions, based on the nature of the distribution of the mechanical load on the element and the conditions of fastening of the end face of the elastic element.

The hypothetical approach has also been successfully implemented in the problems of electro-magneto-elasticity of thin plates and shells [5], where, along with hypothetical distributions of mechanical characteristics over the thickness of a thin-walled element, characteristic distributions of the electromagnetic field are also accepted.

In piezoelectric media, the electroelastic wave field is four-component. In addition to elastic displacements, the electric field potential is also a characteristic component. Separate excitation and propagation of electro-elastic waves of plane or anti-plane deformations in the composite continuum suggests the formation of different groups of interconnected wave components. It is obvious that in the case of a possible separation of elastic wave fields into

plane or anti-plane stress-strain states, the electric field potential can be present only in one of the formed groups of elastic wave components. Then the divided second group of components will be non-electroactive.

The question of the possible separation of the electroactive wave of plane elastic deformation from the purely shear elastic (non-electroactive) wave in infinite homogeneous piezoelectric media, depending on the anisotropy of the physical properties of the material, was investigated in [6]. The question of the possible separation of the wave of electroactive antiplane elastic deformation from the wave of purely elastic plane deformation was also studied there. However, the material relationships and the equations of electroelasticity in all three sagittal planes of crystals are not given in the work.

The results of these studies are also given in the monograph [7].

In these studies, as in solving many specific problems of the separate excitation and propagation of the electroactive plane strain wave, the problem of the occurrence of the non-planar electroelastic stress state is not discussed. The occurrence of the third axial mechanical stress and the third component of the electric displacement vector will obviously violate the picture of planar changes in the parameters of the separated wave fields.

Naturally, the need to introduce additional restrictions (hypotheses) also arises when modeling two-dimensional problems on the propagation of electroelastic waves of plane or antiplane deformations in model semi-infinite waveguides. The formulation of the two-dimensional problem in the plane  $x_\alpha \text{O}x_\beta$  also implies the invariance of deformations of any linear element perpendicular to this surface and each sagittal plane as a thin material layer should be in a plane stress state. These conditions make it possible to formulate the generalized plane stress-strain state equivalent to the state of plane deformation also in semi-infinite waveguides.

Similar to the hypothesis that the elastic surface is inextensible, when there are no acting forces in its plane, the assumption allows us to formulate the equivalent generalized antiplane stress-strain state.

The introduction of additional restrictions eliminates the possibility of simultaneous excitation and propagation of separated electroactive stress-strain states in homogeneous piezoelectric composites. The question of the possible separation of electroelastic wave fields into plane and anti-plane stress-strain states is naturally complicated in the case of composite, piecewise homogeneous bodies. This issue is relevant because in modern electronic technology there is a technical need: by exciting an electroactive wave of anti-plane deformation in a composite waveguide, obtain an electroactive wave of plane deformation from the receiver (or vice versa).

In the following works, it will be shown that this problem can be solved in layered, piecewise homogeneous composite waveguides, by choosing layers of different piezoelectric materials that are in the state of non-acoustic contact.

In this paper, we study the statements of two-dimensional problems of electroelasticity:

1. In what textures of homogeneous piezoelectrics is it possible to separately excite and propagate electroactive plane deformation, in which the electroelasticity problem will be plane-stress in the selected sagittal plane of the piezoelectric crystal?
2. In which textures of homogeneous piezoelectrics is it possible to separately excite and propagate electroactive antiplane deformation, in which there are no acting forces in the selected sagittal plane?

### 1. Basic concepts and relations of an electroelastic stress-strain state in homogeneous piezoelectric media

In the linear theory of electroelasticity of homogeneous piezoelectric media, we use the complete system of quasistatic equations

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \rho(\partial^2 u_i/\partial t^2), \quad \partial D_n/\partial x_n = 0, \quad (1.1)$$

taking into account the potentiality of the electric field  $E_n = -(\partial\varphi/\partial x_n)$  and linear material relations of the medium

$$\sigma_{ij} = c_{(ij)(nk)}(\partial u_n/\partial x_k) + e_{m(ij)}(\partial\varphi/\partial x_m), \quad D_m = e_{m(nk)}(\partial u_n/\partial x_k) - \varepsilon_{mk}(\partial\varphi/\partial x_k), \quad (1.2)$$

where the mechanical and electric fields are interconnected by the piezoelectric coefficient tensor  $(\hat{e}_{j(mn)})$ .

Physicomechanical constants of a homogeneous piezoelectric medium: elastic stiffness  $c_{(ij)(mn)}$ , piezoelectric coefficients  $e_{j(mn)}$  and dielectric constant  $\varepsilon_{ik}$ , form a generalized electroelastic tensor of piezoelectric materials of the type

$$\begin{pmatrix} (\hat{\gamma}_{jn})_{9 \times 9} \\ (\hat{c}_{ij})_{6 \times 6} \\ (\hat{e}_{mn})_{3 \times 6} \\ (\hat{\varepsilon}_{ik})_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{c}_{(ij)(nk)})_{6 \times 6} & (\hat{e}_{(ij)m})_{6 \times 3} \\ (\hat{e}_{m(ij)})_{3 \times 6} & (\hat{\varepsilon}_{ik})_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad [9,10] \quad (1.3)$$

In the equations of electroelasticity (1.1), in the material relations (1.2) and in the generalized tensor of linear electroelasticity of piezoelectric materials (1.3) the notations and known transitions from four-digit indices to two-digit indices  $(\alpha\gamma) \rightleftharpoons \alpha$  if  $\alpha = \gamma$  and  $(\alpha\gamma) \rightleftharpoons 9 - \alpha - \gamma$  if  $\alpha \neq \gamma$  are used. It is also assumed that the indices  $\{\alpha; \beta; \gamma\} \in \{1; 2; 3\}$ ,  $\alpha \neq \beta$ ,  $\beta \neq \gamma$  and  $\gamma \neq \alpha$  indicated by the Greek letters, are dumb, and summation over them is not carried out.

The conditions permitting separate excitation and propagation of a plane or anti flat stress strain states in the uniform piezoelectric medium of this anisotropy, are imposed on the structure tensor of elastic material stiffness  $(\hat{c}_{ij})_{6 \times 6}$ , as well as the corresponding structure tensor of piezoelectric coefficients  $(\hat{e}_{nj})$  and the coefficients of permittivity  $(\hat{\varepsilon}_{ik})_{3 \times 3}$ .

The generalized linear electroelastic tensor of piezoelectric materials (1.3), as well as the material relations and basic equations are given following the rules for installing crystals according to syngonies (table 1) and according to the rules for choosing crystallographic axes in them (table 2) [9, 10]. These tables describe the order of the axes of symmetry (and / or inversion) and the anisotropy planes of the piezocrystals, the commensurability of the unit vectors and angles of the selected orthogonal system of base coordinates, as well as the order of alignment of the coordinate system with the base axes and planes of piezocrystals.

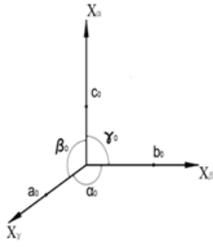
Without loss of generality, we will formulate the problem in one of the sagittal planes  $x_\alpha 0x_\beta$ , where all the components of the electroelastic field depend on the coordinates  $x_\alpha$  and  $x_\beta$ , and there are no changes in the third base coordinate  $\partial/\partial x_\gamma \equiv 0$ .

It should be noted that in the quasistatic problem of electroelasticity, the two-dimensional electric field is potential and plane

$$\begin{aligned} E_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t) &= -\partial\varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha, \\ E_\beta(x_\alpha, x_\beta, t) &= -\partial\varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta, \quad E_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t) \equiv 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Naturally, in the main relations (1.1) and (1.2), the electric field potential  $\varphi(x_\alpha, x_\beta, t)$  can be present either only in the group of wave components characterizing the electroactive state of antiplane deformation  $\{0; 0; u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t); \varphi(x_\alpha, x_\beta, t)\}$ , or only in the group of wave components characterizing the state of electroactive plane deformation  $\{u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t); u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t); 0; \varphi(x_\alpha, x_\beta, t)\}$ .

**Table 1. Crystal installation rules by symgonies**

	<i>Triclinic</i>	<i>Monoclinic</i>	<i>Rhombic</i>
		$X_\alpha, X_\beta, X_\gamma \Leftrightarrow 1; \bar{1};$ $a_0 \neq b_0 \neq c_0,$ $\alpha_0 \neq \beta_0 \neq \gamma_0 \neq 90^0$	$X_\beta \Leftrightarrow 2 \text{ or } m$ $a_0 \neq b_0 \neq c_0,$ $\alpha_0 = \gamma_0 = 90^0 \neq \beta_0$
	<i>Tetragonal</i>	<i>Trigonal and Hexagonal</i>	<i>Cubic</i>
$\{X_\alpha, X_\beta, X_\gamma\}$ – <i>crystallographic axis of the texture,</i> $\{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$ – <i>angles in the sagittal planes,</i> $\{a_0, b_0, c_0\}$ – <i>measures of axial unit vectors</i>	$x, y \Leftrightarrow 2; m;$ $z \Leftrightarrow 4; \bar{4}$ $a_0 = b_0 \neq c_0,$ $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 90^0$	$x, y \Leftrightarrow 2; m;$ $z \Leftrightarrow 3; \bar{3}; 6; \bar{6};$ $a_0 = b_0 \neq c_0,$ $\alpha_0 = \beta_0 = 90^0,$ $\gamma_0 = 120^0$	$x, y, z \Leftrightarrow 4; \bar{4}; 2;$ $a_0 = b_0 = c_0,$ $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 90^0$

Therefore, in the case of the possible separate excitation and propagation of waves of elastic strains in an electroelastic medium, only one of them will be electroactive. In both cases, a group of wave components separated from a given electroelastic wave will already characterize the non-electroactive state of deformation.

The problems of the possible separate excitation and propagation of the wave of electroactive plane deformation from the non-electroactive elastic wave of anti-plane deformation, as well as the separate excitation and propagation of the wave of electroactive anti-plane deformation from the wave of non-electroactive elastic plane deformation in homogeneous piezoelectric materials, were studied in [1]. The article shows that if in elastic anisotropic homogeneous media the separation of the plane elastic deformation wave from the anti-plane elastic deformation wave in a selected sagittal plane  $x_\alpha \ 0x_\beta$  of the crystalline medium is ensured by

$$c_{\alpha(\gamma\alpha)} = c_{\alpha(\beta\gamma)} = c_{\beta(\beta\gamma)} = c_{\beta(\gamma\alpha)} = c_{(\alpha\beta)(\gamma\alpha)} = c_{(\alpha\beta)(\beta\gamma)} \equiv 0 \quad (1.5)$$

then it is possible to separate the wave of electroactive plane deformation from the non-electroactive elastic wave of anti-plane deformation when, along with conditions (1.5), the conditions for the absence of piezoelectric coefficients are satisfied

$$e_{\alpha(\gamma\alpha)} = e_{\alpha(\gamma\beta)} = e_{\beta(\gamma\alpha)} = e_{\beta(\gamma\beta)} \equiv 0 \quad (1.6)$$

**Table 2.** Rules for selecting crystallographic axes in

<i>Syngony</i>	$x_\alpha$	$x_\beta$	$x_\gamma$
<i>Triclinic</i>	In a plane perpendicular to the direction [001]		[001]
<i>Monoclinic</i>	[100]	[010]	[001]
<i>Rhombic</i>	[100]	[010]	[001]
<i>Tetragonal</i>	[100]	[010]	[001]
<i>Trigonal and Hexagonal</i>	[100]	[010]	[001]
<i>Cubic</i>	[100]	[010]	[001]

Separation of the wave of electroactive anti-plane deformation from the non-electro-active elastic wave of plane deformation is possible when, along with conditions (1.5), the following conditions are satisfied in the piezoelectric coefficient tensor of the material

$$e_{\alpha\alpha} = e_{\alpha\beta} = e_{\alpha(\alpha\beta)} = e_{\beta\alpha} = e_{\beta\beta} = e_{\beta(\beta\alpha)} \equiv 0 \quad (1.7)$$

The problem of separate excitation and propagation of elastic waves of plane and antiplane deformation in a selected sagittal plane  $x_\alpha \mathbf{O} x_\beta$  of anisotropic homogeneous media (without taking into account any kind of coupled physical fields) was raised in [4]. The author showed that in elastic anisotropic homogeneous media, the separation of a plane elastic strain wave from an anti-plane elastic strain wave in a selected sagittal plane  $x_\alpha \mathbf{O} x_\beta$  of a crystalline medium is ensured by the absence of material constants in the tensor  $(\hat{c}_{ij})$  of elastic stiffness (1.5).

The above conditions (1.5) and (1.6), or (1.5) and (1.7), as restrictions on the anisotropy of the medium for separate excitation and propagation of plane or antiplane stress-strain states, are necessary, but not sufficient.

Below we will discuss conditions additional to relations (1.5) and (1.6), in which case separate excitation and propagation of the plane electroactive stress-strain state is possible, when all components of the electroelastic field belong to the sagittal plane. We will also discuss conditions additional to relations (1.5) and (1.7), in which case separate excitation and propagation of antiplane electroactive deformation is possible, when all other components of the electroelastic field belong to the sagittal plane.

## 2. Electroactive plane stress-strain state in homogeneous piezoelectric textures

When only the conditions for the absence of the third component of elastic displacement  $u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t) \equiv 0$  and derivatives of all other wave field characteristics  $\partial/\partial x_\gamma \equiv 0$  are accepted, the basic relations of general planar electroactive deformation  $\{u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t); u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t); 0; \varphi(x_\alpha, x_\beta, t)\}$  are obtained from the quasistatic equations of electroelasticity (1.1), material relations (1.2), taking into account the structure of the generalized tensor of electroelasticity of piezoelectric materials (1.3). From the material relations obtained, taking into account the form of the electric field (1.4) and the corresponding conditions (1.5) and (1.6), it follows that, along with the non-zero stresses

$\sigma_{\alpha\alpha}(x_\alpha, x_\beta, t)$ ,  $\sigma_{\beta\beta}(x_\alpha, x_\beta, t)$  и  $\sigma_{\alpha\beta}(x_\alpha, x_\beta, t)$  characteristic to the plane stress state, axial mechanical stress also arises in the case of electroactive plane

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t) = & c_{\gamma\alpha} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + c_{\gamma\beta} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} \right) + \\ & + c_{\gamma(\alpha\beta)} \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) + \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \right] + e_{\alpha(\gamma\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\beta(\gamma\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Along with the nonzero components of the electric displacement of the plane electric field  $D_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t)$  and  $D_\beta(x_\alpha, x_\beta, t)$ , the third component of the electric displacement vector can also arise

$$D_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t) = e_{\gamma(\alpha\alpha)} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\gamma(\beta\beta)} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} \right) + e_{\gamma(\alpha\beta)} \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) + \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \right] \quad (2.2)$$

In all piezoelectric crystals for which conditions (1.5) and (1.6) are satisfied, the dielectric constant tensors  $(\hat{\epsilon}_{ik})_{3 \times 3}$  are diagonal. Therefore, in expression (2.2), the third component of the electric displacement is represented only by the elastic elongations  $(\partial u_\alpha / \partial x_\alpha)$ ,  $(\partial u_\beta / \partial x_\beta)$  and the shift  $(\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha)$  in the sagittal plane.

It is known that in any basic plane  $x_\alpha 0x_\beta$  the elastic stiffnesses  $c_{\gamma\alpha} \neq 0$  and  $c_{\gamma\beta} \neq 0$ , as well as the elastic compliance coefficients  $s_{\gamma\alpha} = (-1)^{\alpha+\gamma} \cdot \Delta c_{\alpha\gamma} / \Delta^c$  and  $s_{\gamma\beta} = (-1)^{\beta+\gamma} \cdot \Delta c_{\beta\gamma} / \Delta^c$  cannot be zeros. Therefore, the existence of a non-zero axial stress  $\sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t)$  can lead to the axial tensions (compressions)  $r_{\gamma\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t)$  in the direction of the axis  $0x_\gamma$ , violating the planar deformed state.

The existence of a non-zero axial component of the electric displacement vector  $D_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)$  along the axis  $0x_\gamma$  violates the plane electric field.

From relation (2.2) it is obvious that, taking into account the arbitrariness of elastic elongations  $(\partial u_\alpha / \partial x_\alpha)$ ,  $(\partial u_\beta / \partial x_\beta)$ , and elastic shear  $(\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha)$  in the sagittal plane, the axial component of the electric displacement vector  $D_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)$  disappears in the piezoelectric crystals in which

$$e_{\gamma(\alpha\beta)} \equiv 0, \quad e_{\gamma(\alpha\alpha)} \equiv 0, \quad e_{\gamma(\beta\beta)} \equiv 0. \quad (2.3)$$

The fulfillment of identity (2.3) means the absence of a direct piezoelectric effect in the perpendicular direction to a given sagittal plane of the piezocrystal. Then the condition for compatibility of axial elastic elongations (compressions) and polarizations of the electric field in the basal plane  $x_\alpha 0x_\beta$  relative to axial elongations (compressions) can be written as

$$\begin{aligned} c_{\gamma\alpha} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + c_{\gamma\beta} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} \right) + c_{\gamma(\alpha\beta)} \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) + \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \right] = \\ = -e_{\alpha(\gamma\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right) - e_{\beta(\gamma\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

If we take into account that in all piezocrystals for which conditions (1.5) and (1.6) are satisfied, there are no constants  $c_{\gamma(\alpha\beta)}$  in the elastic stiffness tensor:

$$c_{\gamma(\alpha\beta)} \equiv 0, \quad (2.5)$$

then, the compatibility ratio of elastic non-zero axial elongations (compressions) is finally written in the form

$$(\partial u_\alpha / \partial x_\alpha) = -\left(c_{\gamma\beta} / c_{\gamma\alpha}\right) (\partial u_\beta / \partial x_\beta) - \left[ e_{\alpha(\gamma\gamma)} (\partial \varphi / \partial x_\alpha) + e_{\beta(\gamma\gamma)} (\partial \varphi / \partial x_\beta) \right] / c_{\gamma\alpha} \quad (2.6)$$

If there is also no inverse piezoelectric effect in the perpendicular direction to a given sagittal plane  $x_\alpha 0x_\beta$  of the piezocrystal, when  $e_{\alpha(\gamma\gamma)} \equiv 0$  and  $e_{\beta(\gamma\gamma)} \equiv 0$ , the compatibility condition for elastic non-zero axial elongations (compressions) is written as in the case of non-electroactive elastic anisotropic medium

$$c_{\gamma\alpha} (\partial u_\alpha / \partial x_\alpha) = -c_{\gamma\beta} (\partial u_\beta / \partial x_\beta) \quad (2.7)$$

**Statement -1:** Electro-elastic state of plane deformation

$$\left\{ u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t); \quad u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t); \quad 0; \quad \partial \varphi(x_\alpha, x_\beta, t) / \partial x_\alpha; \quad \partial \varphi(x_\alpha, x_\beta, t) / \partial x_\beta; \quad 0 \right\} \quad (2.8)$$

in the sagittal plane  $x_\alpha 0x_\beta$  of a homogeneous piezoelectric medium induces an electroactive generalized plane stress state

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\alpha}(x_\alpha, x_\beta, t); \quad \sigma_{\beta\beta}(x_\alpha, x_\beta, t); \quad 0; \quad 0; \quad 0; \quad \sigma_{\alpha\beta}(x_\alpha, x_\beta, t) \\ D_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t); \quad D_\beta(x_\alpha, x_\beta, t); \quad 0; \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

in piezoelectric crystals, in the generalized electroelastic tensor of which the following conditions are satisfied

$$\begin{aligned} c_{\alpha(\gamma\alpha)} \equiv 0, \quad c_{\alpha(\beta\gamma)} \equiv 0, \quad c_{\beta(\beta\gamma)} \equiv 0, \quad c_{\beta(\gamma\alpha)} \equiv 0, \quad c_{(\alpha\beta)(\gamma\alpha)} \equiv 0, \quad c_{(\alpha\beta)(\beta\gamma)} \equiv 0, \quad c_{\gamma(\alpha\beta)} \equiv 0, \\ e_{\alpha(\gamma\alpha)} \equiv 0, \quad e_{\alpha(\gamma\beta)} \equiv 0, \quad e_{\beta(\gamma\alpha)} \equiv 0, \quad e_{\beta(\gamma\beta)} \equiv 0, \quad e_{\gamma(\alpha\beta)} \equiv 0, \quad e_{\gamma(\alpha\alpha)} \equiv 0, \quad e_{\gamma(\beta\beta)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

The compatibility condition for elastic non-zero axial elongations (compressions) in the sagittal plane, in this case, has the form

$$(\partial u_\alpha / \partial x_\alpha) = -\left(c_{\gamma\beta} / c_{\gamma\alpha}\right) (\partial u_\beta / \partial x_\beta) - \left[ e_{\alpha(\gamma\gamma)} (\partial \varphi / \partial x_\alpha) + e_{\beta(\gamma\gamma)} (\partial \varphi / \partial x_\beta) \right] / c_{\gamma\alpha} \quad (2.11)$$

The electroactive generalized planar stress-strain state of type (2.8) and (2.9), taking into account conditions (2.10) and compatibility conditions of elastic axial elongations (compressions) (2.11), is represented by the nonzero components of electromechanical stresses

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}(x_\alpha, x_\beta) = c_{\alpha\alpha}^* (\partial u_\alpha / \partial x_\alpha) + c_{\alpha(\alpha\beta)} \left[ (\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha) \right] + \\ + e_{\alpha\alpha}^* (\partial \varphi / \partial x_\alpha) + e_{\beta\alpha}^* (\partial \varphi / \partial x_\beta) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta}(x_\alpha, x_\beta) = c_{\beta\beta}^* (\partial u_\beta / \partial x_\beta) + c_{\beta(\alpha\beta)} \left[ (\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha) \right] + \\ + e_{\alpha\beta}^* (\partial \varphi / \partial x_\alpha) + e_{\beta\beta}^* (\partial \varphi / \partial x_\beta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(x_\alpha, x_\beta) = & c_{(\alpha\beta)\alpha}^* (\partial u_\alpha / \partial x_\alpha) + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} \left[ (\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha) \right] + \\ & + e_{\alpha(\alpha\beta)}^* (\partial \varphi / \partial x_\alpha) + e_{\beta(\alpha\beta)}^* (\partial \varphi / \partial x_\beta) \end{aligned} \quad (2.14)$$

and the non-zero components of electric displacement

$$\begin{aligned} D_\alpha(x_\alpha, x_\beta) = & e_{\alpha\alpha}^{**} (\partial u_\alpha / \partial x_\alpha) + e_{\alpha(\alpha\beta)} \left[ (\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha) \right] - \\ & - \varepsilon_{\alpha\alpha}^* (\partial \varphi / \partial x_\alpha) - \varepsilon_{\beta\alpha}^* (\partial \varphi / \partial x_\beta) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} D_\beta(x_\alpha, x_\beta) = & e_{\beta\beta}^{**} (\partial u_\alpha / \partial x_\alpha) + e_{\beta(\alpha\beta)} \left[ (\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha) \right] - \\ & - \varepsilon_{\beta\alpha}^* (\partial \varphi / \partial x_\alpha) - \varepsilon_{\beta\beta}^* (\partial \varphi / \partial x_\beta) \end{aligned} \quad (2.16)$$

In the newly obtained material relations (2.12)÷(2.16), the physico-mechanical constants corresponding to the two-dimensional electroelastic problem are indicated with asterisks (table 3).

**Table 3.** Reduced physico-mechanical constants of electroelastic generalized plane stress-strain state

$c_{\alpha\alpha}^*$	$c_{\alpha\alpha} - c_{\alpha\beta} (c_{\gamma\alpha} / c_{\gamma\beta})$	$e_{\alpha(\alpha\beta)}^*$	$e_{\alpha(\alpha\beta)} - (c_{\alpha\beta) \beta} / c_{\gamma\beta}) e_{\alpha\gamma}$
$c_{\beta\beta}^*$	$c_{\beta\beta} - c_{\beta\alpha} (c_{\gamma\beta} / c_{\gamma\alpha})$	$e_{\beta(\alpha\beta)}^*$	$e_{\beta(\alpha\beta)} - (c_{\alpha\beta) \beta} / c_{\gamma\beta}) e_{\beta\gamma}$
$c_{(\alpha\beta)\alpha}^*$	$c_{(\alpha\beta)\alpha} - c_{(\alpha\beta)\beta} (c_{\gamma\alpha} / c_{\gamma\beta})$	$e_{\alpha\alpha}^{**}$	$e_{\alpha\alpha} - (c_{\gamma\alpha} / c_{\gamma\beta}) e_{\alpha\beta}$
$e_{\alpha\alpha}^*$	$e_{\alpha\alpha} - (c_{\alpha\beta} / c_{\gamma\beta}) e_{\alpha\gamma}$	$e_{\beta\beta}^{**}$	$e_{\beta\beta} - (c_{\gamma\beta} / c_{\gamma\alpha}) e_{\beta\alpha}$
$e_{\beta\beta}^*$	$e_{\beta\beta} - (c_{\beta\alpha} / c_{\gamma\alpha}) e_{\beta\gamma}$	$\varepsilon_{\alpha\alpha}^*$	$\varepsilon_{\alpha\alpha} + (e_{\alpha\beta} e_{\alpha\gamma} / c_{\gamma\beta})$
$e_{\beta\alpha}^*$	$e_{\beta\alpha} - (c_{\alpha\beta} / c_{\gamma\beta}) e_{\beta\gamma}$	$\varepsilon_{\beta\beta}^*$	$\varepsilon_{\beta\beta} + (e_{\beta\alpha} e_{\beta\gamma} / c_{\gamma\alpha})$
$e_{\alpha\beta}^*$	$e_{\alpha\beta} - (c_{\beta\alpha} / c_{\gamma\alpha}) e_{\alpha\gamma}$	$\varepsilon_{\alpha\beta}^*$	$(e_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma} / c_{\gamma\beta})$
		$\varepsilon_{\beta\alpha}^*$	$(e_{\beta\alpha} e_{\alpha\gamma} / c_{\gamma\alpha})$

From (2.12)÷(2.16) and from Table 3 it follows that the electroactive planar stress-strain state in the sagittal plane is formulated with reduced anisotropy. The reduced anisotropy in the selected sagittal plane differs from the natural anisotropy both qualitatively and quantitatively. New piezoelectric coefficients and dielectric coefficients may appear. The electromechanical properties of the medium in the modeled material plane can also change.

Taking into account the material relations (2.12)÷(2.16) and the expression of the new constants in Table 3, the quasistatic equations of the electroelastic plane stress-strain state can be written in a single form

$$\begin{aligned} & \left[ c_{\alpha\alpha} - (c_{\alpha\beta} + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)}) (c_{\gamma\alpha} / c_{\gamma\beta}) \right] (\partial^2 u_\alpha / \partial x_\alpha^2) + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} (\partial^2 u_\alpha / \partial x_\beta^2) + \\ & + c_{\alpha(\alpha\beta)} (\partial^2 u_\beta / \partial x_\alpha^2) + \left[ c_{(\alpha\beta)\beta} - (c_{\alpha(\alpha\beta)} + c_{(\alpha\beta)\alpha}) (c_{\gamma\beta} / c_{\gamma\alpha}) \right] (\partial^2 u_\beta / \partial x_\beta^2) + \\ & + \left[ e_{\alpha\alpha} - e_{\alpha\gamma} (c_{\alpha\beta} + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)}) / c_{\gamma\beta} \right] (\partial^2 \varphi / \partial x_\alpha^2) + \left[ e_{\beta\alpha} + e_{\alpha(\alpha\beta)} \right] (\partial^2 \varphi / \partial x_\alpha \partial x_\beta) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ e_{\alpha\gamma} (c_{\alpha(\alpha\beta)} + c_{(\alpha\beta)\beta}) / c_{\gamma\alpha} + e_{\beta\gamma} (c_{\alpha\beta} + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)}) / c_{\gamma\beta} \right] (\partial^2 \varphi / \partial x_\alpha \partial x_\beta) + \\
& + \left[ e_{\beta(\alpha\beta)} - 2e_{\beta\gamma} (c_{\alpha(\alpha\beta)} / c_{\gamma\alpha}) \right] (\partial^2 \varphi / \partial x_\beta^2) = \rho (\partial^2 u_\alpha / \partial t^2),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ c_{(\alpha\beta)\alpha}^* - c_{\beta(\alpha\beta)} (c_{\gamma\alpha} / c_{\gamma\beta}) \right] (\partial^2 u_\alpha / \partial x_\alpha^2) + c_{\beta(\alpha\beta)} (\partial^2 u_\alpha / \partial x_\beta^2) + \\
& + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} (\partial^2 u_\beta / \partial x_\alpha^2) + \left[ c_{\beta\beta} - (c_{\beta\alpha} + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)}) (c_{\gamma\beta} / c_{\gamma\alpha}) \right] (\partial^2 u_\beta / \partial x_\beta^2) + \\
& + \left[ e_{\alpha(\alpha\beta)} - (e_{\alpha\gamma} / c_{\gamma\beta}) (c_{(\alpha\beta)\beta} + c_{\beta(\alpha\beta)} + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)}) \right] (\partial^2 \varphi / \partial x_\alpha^2) + \\
& + \left[ e_{\beta\beta} - (e_{\beta\gamma} / c_{\gamma\alpha}) (c_{\beta\alpha} + c_{\alpha(\alpha\beta)} + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)}) \right] (\partial^2 \varphi / \partial x_\beta^2) + \\
& + (e_{\alpha\beta}^* + e_{\beta(\alpha\beta)}^* - e_{\alpha\gamma} (c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} / c_{\gamma\alpha}) - e_{\beta\gamma} (c_{\beta(\alpha\beta)} / c_{\gamma\beta})) (\partial^2 \varphi / \partial x_\alpha \partial x_\beta) = \rho (\partial^2 u_\beta / \partial t^2)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ e_{\alpha\alpha}^{**} - e_{\beta(\alpha\beta)} (c_{\gamma\alpha} / c_{\gamma\beta}) \right] (\partial^2 u_\alpha / \partial x_\alpha^2) + e_{\beta(\alpha\beta)} (\partial^2 u_\alpha / \partial x_\beta^2) + \\
& + \left[ e_{\beta\beta}^{**} - e_{\alpha(\alpha\beta)} (c_{\gamma\beta} / c_{\gamma\alpha}) \right] (\partial^2 u_\beta / \partial x_\beta^2) + e_{\alpha(\alpha\beta)} (\partial^2 u_\beta / \partial x_\alpha^2) - \\
& - \left[ \varepsilon_{\alpha\alpha}^* + (e_{\beta(\alpha\beta)} e_{\alpha\gamma} / c_{\gamma\beta}) \right] (\partial^2 \varphi / \partial x_\alpha^2) - \left[ \varepsilon_{\beta\beta}^* + (e_{\alpha(\alpha\beta)} e_{\beta\gamma} / c_{\gamma\alpha}) \right] (\partial^2 \varphi / \partial x_\beta^2) - \\
& - \left[ \varepsilon_{\alpha\beta}^* + \varepsilon_{\beta\alpha}^* + (e_{\alpha(\alpha\beta)} e_{\alpha\gamma} / c_{\gamma\alpha}) (e_{\beta(\alpha\beta)} e_{\beta\gamma} / c_{\gamma\beta}) \right] (\partial^2 \varphi / \partial x_\alpha \partial x_\beta) = 0.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

From the deduced quasistatic equations of the plane stress-strain state (2.17)÷(2.19) it can be seen that, taking into account the compatibility conditions of axial elastic elongations (compressions) (2.11):

- the equations do not contain mixed derivatives of the components of the elastic displacement,
- non-diagonal reduced coefficients  $\varepsilon_{\alpha\beta}^*$  and  $\varepsilon_{\beta\alpha}^*$  of permittivity may appear in the equations.

In non-piezoelectric anisotropic media, for which  $e_{j(mm)} \equiv 0$  the necessary and sufficient conditions for the possible separation of the plane stress-strain state are the conditions of the first row (2.10) and the compatibility ratio of axial elastic elongations (compressions) (2.7).

In this case, in Table 3 there are only expressions of reduced elastic stiffnesses. The material relation (2.12)÷(2.14) and equations of electroelasticity (2.17) ÷ (2.19) are simplified.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\alpha}(x_\alpha, x_\beta) &= c_{\alpha\alpha}^* (\partial u_\alpha / \partial x_\alpha) + c_{\alpha(\alpha\beta)} \left[ (\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha) \right], \\
\sigma_{\beta\beta}(x_\alpha, x_\beta) &= c_{\beta\beta}^* (\partial u_\beta / \partial x_\beta) + c_{\beta(\alpha\beta)} \left[ (\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha) \right], \\
\sigma_{\alpha\beta}(x_\alpha, x_\beta) &= c_{(\alpha\beta)\alpha}^* (\partial u_\alpha / \partial x_\alpha) + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} \left[ (\partial u_\alpha / \partial x_\beta) + (\partial u_\beta / \partial x_\alpha) \right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

The equations of electro elasticity (2.17) and (2.18) take the form

$$\begin{aligned} & \left[ c_{\alpha\alpha}^* - c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} (c_{\gamma\alpha}/c_{\gamma\beta}) \right] (\partial^2 u_\alpha / \partial x_\alpha^2) + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} (\partial^2 u_\alpha / \partial x_\beta^2) + \\ & + c_{\alpha(\alpha\beta)} (\partial^2 u_\beta / \partial x_\alpha^2) + c_{(\alpha\beta)\beta} (\partial^2 u_\beta / \partial x_\beta^2) = \rho (\partial^2 u_\alpha / \partial t^2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & c_{(\alpha\beta)\alpha} (\partial^2 u_\alpha / \partial x_\alpha^2) + c_{\beta(\alpha\beta)} (\partial^2 u_\alpha / \partial x_\beta^2) + c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} (\partial^2 u_\beta / \partial x_\alpha^2) + \\ & + \left[ c_{\beta\beta}^* - c_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)} (c_{\gamma\beta}/c_{\gamma\alpha}) \right] (\partial^2 u_\beta / \partial x_\beta^2) = \rho (\partial^2 u_\beta / \partial t^2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

In the two other sagittal planes of piezoelectric crystals  $x_\gamma 0 x_\alpha$  and  $x_\beta 0 x_\gamma$ , the conditions for the existence of an electroelastic generalized plane stress-strain state, the material relations of non-zero electromechanical components, the reduced electromechanical coefficients, as well as the quasistatic equations of electroelasticity for the corresponding plane stress-strain states of the type (2.8) and (2.9)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\alpha(x_\gamma, x_\alpha, t); 0; u_\gamma(x_\gamma, x_\alpha, t); \partial\varphi(x_\gamma, x_\alpha, t)/\partial x_\alpha; 0; \partial\varphi(x_\gamma, x_\alpha, t)/\partial x_\gamma; \\ \sigma_{\alpha\alpha}(x_\gamma, x_\alpha, t); 0; \sigma_{\gamma\gamma}(x_\gamma, x_\alpha, t); 0; \sigma_{\alpha\gamma}(x_\gamma, x_\alpha, t); 0; D_\alpha(x_\gamma, x_\alpha, t); 0; D_\gamma(x_\gamma, x_\alpha, t) \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{l} 0; u_\beta(x_\beta, x_\gamma, t); u_\gamma(x_\beta, x_\gamma, t); 0; 0; \partial\varphi(x_\beta, x_\gamma, t)/\partial x_\beta; \partial\varphi(x_\beta, x_\gamma, t)/\partial x_\gamma \\ 0; \sigma_{\beta\beta}(x_\beta, x_\gamma, t); \sigma_{\gamma\gamma}(x_\beta, x_\gamma, t); \sigma_{\beta\gamma}(x_\beta, x_\gamma, t); 0; 0; 0; D_\beta(x_\beta, x_\gamma, t); D_\gamma(x_\beta, x_\gamma, t) \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

are obtained by rotating silent indexes  $\{\gamma, \alpha, \beta\} \rightleftharpoons \{\alpha, \beta, \gamma\} \rightleftharpoons \{\beta, \gamma, \alpha\}$  in relations (2.1)–(2.19), respectively.

### 2.1. Material relations and quasistatic equations of an electroelastic generalized plane stress-strain state in the sagittal plane $x_1 0 x_2$ .

In this sagittal plane of piezocrystalline textures, the conditions for the existence of an electroelastic plane stress-strain state (2.10) take the form

$$\begin{aligned} c_{14} &\equiv 0, c_{15} \equiv 0, c_{24} \equiv 0, c_{25} \equiv 0, c_{64} \equiv 0, c_{65} \equiv 0, c_{36} \equiv 0, \\ e_{14} &\equiv 0, e_{15} \equiv 0, e_{24} \equiv 0, e_{25} \equiv 0, e_{36} \equiv 0, e_{31} \equiv 0, e_{32} \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Only the generalized tensors of electroelasticity of piezoelectric media from classes  $\bar{6}$ ,  $\bar{6}m2$  of hexagonal symmetry correspond to such restrictions.

Taking into account the compatibility conditions of elastic non-zero axial elongations (compressions)

$$(\partial u_1 / \partial x_1) = -(c_{23}/c_{31})(\partial u_2 / \partial x_2) - (e_{13}/c_{31})(\partial\varphi / \partial x_1) - (e_{23}/c_{31})(\partial\varphi / \partial x_2), \quad (2.26)$$

the material relations of non-zero electromechanical components in these media can be written in the general form

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (c_{11} - c_{12})(\partial u_1 / \partial x_1) + e_{11}^* (\partial\varphi / \partial x_1) + e_{21}^* (\partial\varphi / \partial x_2), \\ \sigma_{22} &= (c_{11} - c_{12})(\partial u_2 / \partial x_2) + e_{12}^* (\partial\varphi / \partial x_1) + e_{22}^* (\partial\varphi / \partial x_2), \\ \sigma_{12} &= c_{44}^* [(\partial u_1 / \partial x_2) + (\partial u_2 / \partial x_1)] + e_{16}^* (\partial\varphi / \partial x_1) + e_{26}^* (\partial\varphi / \partial x_2). \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= e_{11}^* (\partial u_1 / \partial x_1) + e_{12}^* (\partial u_2 / \partial x_2) + e_{16}^* [(\partial u_1 / \partial x_2) + (\partial u_2 / \partial x_1)] - \varepsilon_{11} (\partial \varphi / \partial x_1), \\
D_2 &= e_{21}^* (\partial u_1 / \partial x_1) + e_{22}^* (\partial u_2 / \partial x_2) + e_{26}^* [(\partial u_1 / \partial x_2) + (\partial u_2 / \partial x_1)] - \varepsilon_{11} (\partial \varphi / \partial x_2).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

In the selected sagittal plane of these classes of media, it is also convenient to write down the quasistatic equations of electro elasticity (2.17)–(2.19) in general form

$$\begin{aligned}
& c_{66}^* (\partial^2 u_1 / \partial x_1^2) + c_{66}^* (\partial^2 u_1 / \partial x_2^2) - \rho (\partial^2 u_1 / \partial t^2) = \\
& = -e_{11}^* (\partial^2 \varphi / \partial x_1^2) - (e_{21}^* + e_{16}^*) (\partial^2 \varphi / \partial x_1 \partial x_2) - e_{26}^* (\partial^2 \varphi / \partial x_2^2), \\
& c_{66}^* (\partial^2 u_2 / \partial x_1^2) + c_{66}^* (\partial^2 u_2 / \partial x_2^2) - \rho (\partial^2 u_2 / \partial t^2) = \\
& = -e_{16}^* (\partial^2 \varphi / \partial x_1^2) - (e_{26}^* + e_{12}^*) (\partial^2 \varphi / \partial x_1 \partial x_2) - e_{22}^* (\partial^2 \varphi / \partial x_2^2), \\
& (e_{11}^* - e_{26}^* - e_{12}^*) (\partial^2 u_1 / \partial x_1^2) + e_{26}^* (\partial^2 u_1 / \partial x_2^2) + e_{16}^* (\partial^2 u_2 / \partial x_1^2) + \\
& + (e_{22}^* - e_{16}^* - e_{21}^*) (\partial^2 u_2 / \partial x_2^2) = \varepsilon_{11} (\partial^2 \varphi / \partial x_1^2) + \varepsilon_{11} (\partial^2 \varphi / \partial x_2^2).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

The coefficients with asterisks in the relations (2.23)–(2.25) are given in Table 4.

**Table 4.** Values of reduced coefficients with asterisks of the simulated two-dimensional problem in the sagittal plane  $x_1 O x_2$

		$c_{66}^*$	$e_{11}^*$	$e_{12}^*$	$e_{21}^*$	$e_{22}^*$	$e_{16}^*$	$e_{26}^*$
<b>Classes</b>	$\bar{6}$	$(c_{11} - c_{12})/2$	$e_{11}$	$-e_{11}$	$-e_{22}$	$e_{22}$	$-e_{22}$	$-e_{11}$
	$\bar{6}m2$	$(c_{11} - c_{12})/2$	$e_{11}$	$-e_{11}$	0	0	0	$e_{11}$

In view of Table 4, it is obvious that the material relations of the non-zero electromechanical components (2.23) and (2.24), as well as the equations of electroelasticity (2.25) for simulated two-dimensional problems in the sagittal plane  $x_1 O x_2$  of the media of class  $\bar{6}m2$  have more simplified forms than for the media of class  $\bar{6}$ . Despite this, from the derived material relations and the equations of electroelasticity it follows that in the media of class  $\bar{6}m2$ , axial elongations (compression)  $\partial u_1 / \partial x_1 = -\partial u_2 / \partial x_2$  lead to electric polarization with induction  $D_1(x_1, x_2, t) = e_{11} (\partial u_1 / \partial x_1)$ , and the elastic shear  $(\partial u_1 / \partial x_2) + (\partial u_2 / \partial x_1)$  leads to electric polarization with induction  $D_2(x_1, x_2, t) = e_{11} [(\partial u_1 / \partial x_2) + (\partial u_2 / \partial x_1)]$ .

## 2.2. Material relations and quasistatic equations of the electroelastic generalized plane stress-strain state in the sagittal plane $x_2 O x_3$ .

In this sagittal plane of piezocrystalline textures, the conditions for the existence of an electroelastic plane stress-strain state (2.10) take the form

$$\begin{aligned}
c_{25} &\equiv 0, \quad c_{26} \equiv 0, \quad c_{35} \equiv 0, \quad c_{36} \equiv 0, \quad c_{45} \equiv 0, \quad c_{46} \equiv 0, \quad c_{14} \equiv 0, \\
e_{25} &\equiv 0, \quad e_{26} \equiv 0, \quad e_{35} \equiv 0, \quad e_{36} \equiv 0, \quad e_{14} \equiv 0, \quad e_{12} \equiv 0, \quad e_{13} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Such restrictions on the anisotropy of the medium correspond to the structure of the generalized tensors of electroelasticity of piezoelectric media, only from the classes  $6mm$  of hexagonal,  $4mm$  of tetragonal and  $mm2$  of rhombic symmetries.

Taking into account the compatibility condition of elastic non-zero axial elongations (compressions)

$$(\partial u_2 / \partial x_2) = -(c_{13} / c_{12})(\partial u_3 / \partial x_3) - (e_{21} / c_{12})(\partial \varphi / \partial x_2) - (e_{31} / c_{12})(\partial \varphi / \partial x_3) \quad (2.31)$$

the material relations of non-zero electromechanical components in these media can be written in the general form

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= c_{11}(\partial u_2 / \partial x_2) + c_{13}(\partial u_3 / \partial x_3) + e_{32}^*(\partial \varphi / \partial x_3), \\ \sigma_{33} &= c_{13}(\partial u_2 / \partial x_2) + c_{33}(\partial u_3 / \partial x_3) + e_{33}^*(\partial \varphi / \partial x_3), \\ \sigma_{23} &= c_{44}((\partial u_3 / \partial x_2) + (\partial u_2 / \partial x_3)) + e_{24}^*(\partial \varphi / \partial x_2). \\ D_2 &= e_{24}^*((\partial u_3 / \partial x_2) + (\partial u_2 / \partial x_3)) - \varepsilon_{22}^*(\partial \varphi / \partial x_2), \\ D_3 &= e_{32}^*(\partial u_2 / \partial x_2) + e_{33}^*(\partial u_3 / \partial x_3) - \varepsilon_{33}^*(\partial \varphi / \partial x_3). \end{aligned} \quad (2.32)$$

In the selected sagittal plane of these classes of media, it is also convenient to write down the quasistatic equations of electroelasticity (2.17)÷(2.19) in general form

$$\begin{aligned} (c_{11} - c_{12}^*)(\partial^2 u_2 / \partial x_2^2) + c_{44}^*(\partial^2 u_2 / \partial x_3^2) - \rho(\partial^2 u_2 / \partial t^2) &= -(e_{32}^* + e_{24}^* - e_{31}^*)(\partial^2 \varphi / \partial x_2 \partial x_3), \\ (c_{33} - c_{13}^*)(\partial^2 u_3 / \partial x_3^2) + c_{44}^*(\partial^2 u_3 / \partial x_2^2) - \rho(\partial^2 u_3 / \partial t^2) &= \\ = -e_{24}^*(\partial^2 \varphi / \partial x_2^2) - (e_{33}^* - e_{31}^*)(\partial^2 \varphi / \partial x_3^2), \\ \varepsilon_{22}^*(\partial^2 \varphi / \partial x_2^2) + [\varepsilon_{33} - e_{31}(e_{24}^* + e_{32}^*) / c_{12}] (\partial^2 \varphi / \partial x_3^2) &= \\ = e_{24}^*(\partial^2 u_3 / \partial x_2^2) + (e_{33}^* - (e_{24}^* + e_{32}^*) \vartheta_{23}) (\partial^2 u_3 / \partial x_3^2). \end{aligned} \quad (2.33)$$

The coefficients with asterisks in the relations (2.32)÷(2.33) are given in Table 5.

**Table 5.** Values of reduced coefficients with asterisks of a simulated two-dimensional problem in the sagittal plane  $x_2 0 x_3$

		$c_{13}^*$	$c_{12}^*$	$e_{31}^*$	$e_{32}^*$	$e_{24}^*$	$\varepsilon_{22}^*$
Classes	$6mm$	$(c_{13} + c_{44})$	$(c_{12} c_{13}^*) / c_{13}$	$e_{31}(c_{13}^* / c_{12})$	$e_{31}$	$e_{15}$	$\varepsilon_{11}$
	$4mm$	$(c_{13} + c_{44})$	$(c_{12} c_{13}^*) / c_{13}$	$e_{31}(c_{13}^* / c_{12})$	$e_{31}$	$e_{15}$	$\varepsilon_{11}$
	$mm2$	$(c_{13} + c_{44})$	$(c_{12} c_{13}^*) / c_{13}$	$e_{31}(c_{13}^* / c_{12})$	$e_{32}$	$e_{24}$	$\varepsilon_{22}$

In view of Table 5, it is obvious that the material relations of the non-zero electromechanical components (2.32) and the electroelasticity equations (2.33) of the simulated two-dimensional problems for the classes  $6mm$  of hexagonal and  $4mm$  of tetragonal symmetries in the sagittal plane  $x_2 0 x_3$  coincide.

From the derived material relations and equations of electroelasticity it also follows that axial elongations (compression) in these media lead to the electric polarization with induction  $D_3(x_2, x_3, t)$ , and the elastic shear  $(\partial u_3/\partial x_2) + (\partial u_2/\partial x_3)$  leads to the electric polarization with induction  $D_2(x_2, x_3, t)$ . The equations also include the compatibility coefficient of axial elongations (compressions)  $\mathfrak{G}_{23} = (c_{13}/c_{12})$  (Poisson's ratio).

### 2.3. Material relations and quasistatic equations of the electroelastic generalized plane stress-strain state in the sagittal plane $x_3, 0x_1$ .

In this sagittal plane of piezocrystalline textures, the conditions for the existence of an electroelastic plane stress-strain state (2.10) take the form

$$\begin{aligned} c_{14} \equiv 0, \quad c_{16} \equiv 0, \quad c_{34} \equiv 0, \quad c_{36} \equiv 0, \quad c_{54} \equiv 0, \quad c_{56} \equiv 0, \quad c_{25} \equiv 0, \\ e_{14} \equiv 0, \quad e_{16} \equiv 0, \quad e_{34} \equiv 0, \quad e_{36} \equiv 0, \quad e_{25} \equiv 0, \quad e_{23} \equiv 0, \quad e_{21} \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Such restrictions on the anisotropy of the medium correspond to the structures of the generalized tensors of electroelasticity of piezoelectric media, only from the classes  $6mm$  and  $\bar{6}m2$  of hexagonal,  $4mm$  and  $422$  of tetragonal and  $mm2$  of rhombic symmetries.

Taking into account the compatibility condition of elastic non-zero axial elongations (compressions)

$$(\partial u_1/\partial x_1) = -(c_{23}/c_{21})(\partial u_3/\partial x_3) - (e_{12}/c_{21})(\partial \varphi/\partial x_1) - (e_{32}/c_{21})(\partial \varphi/\partial x_3) \quad (2.35)$$

the material relations of non-zero electromechanical components in these media can be written in the general form:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} (\partial u_1/\partial x_1) + c_{13} (\partial u_3/\partial x_3) + e_{11}^* (\partial \varphi/\partial x_1) + e_{31}^* (\partial \varphi/\partial x_3), \\ \sigma_{33} &= c_{13} (\partial u_1/\partial x_1) + c_{33} (\partial u_3/\partial x_3) + e_{33}^* (\partial \varphi/\partial x_3), \\ \sigma_{31} &= c_{55}^* [(\partial u_3/\partial x_1) + (\partial u_1/\partial x_3)] + e_{15}^* (\partial \varphi/\partial x_1). \\ D_1 &= e_{11}^* (\partial u_1/\partial x_1) + e_{15}^* [(\partial u_3/\partial x_1) + (\partial u_1/\partial x_3)] - \varepsilon_{11} (\partial \varphi/\partial x_1), \\ D_3 &= e_{31}^* (\partial u_1/\partial x_1) + e_{33}^* (\partial u_3/\partial x_3) - \varepsilon_{33} (\partial \varphi/\partial x_3). \end{aligned} \quad (2.36)$$

In the selected sagittal plane of these classes of media, it is also convenient to write down the quasistatic equations of electro elasticity (2.17)÷(2.19) in general form

$$\begin{aligned} [c_{11} - c_{12} (c_{13} + c_{55}^*)/c_{13}] (\partial^2 u_1/\partial x_1^2) + c_{55}^* (\partial^2 u_1/\partial x_3^2) - \rho (\partial^2 u_1/\partial t^2) = \\ = [e_{11}^* - e_{12}^* (c_{13} + c_{55}^*)/c_{23}] (\partial^2 \varphi/\partial x_1^2) - [e_{15}^* - e_{31}^* (c_{55}^*/c_{13})] (\partial^2 \varphi/\partial x_1 \partial x_3), \\ c_{55}^* (\partial^2 u_3/\partial x_1^2) + [c_{33} - c_{23}^* (c_{13} + c_{55}^*)/c_{12}] (\partial^2 u_3/\partial x_3^2) + \\ + e_{15}^* (\partial^2 \varphi/\partial x_1^2) + [e_{33}^* - e_{32}^* (c_{13} + c_{55}^*)/c_{12}] (\partial^2 \varphi/\partial x_3^2) + \\ + [e_{12}^* (c_{13} + c_{55}^*)/c_{12}] (\partial^2 \varphi/\partial x_1 \partial x_3) = \rho (\partial^2 u_3/\partial t^2), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{11}(\partial^2\varphi/\partial x_1^2) + (\varepsilon_{33} - e_{31}^*(e_{15}^* + e_{31}^*)/c_{12})(\partial^2\varphi/\partial x_3^2) - e_{11}^*(e_{15}^* + e_{31}^*)/c_{12}(\partial^2\varphi/\partial x_1\partial x_3) \\ & = e_{11}^*(\partial^2 u_1/\partial x_1^2) + e_{15}^*(\partial^2 u_3/\partial x_1^2) + (e_{33}^* - (e_{15}^* + e_{31}^*)(c_{13}/c_{12}))(\partial^2 u_3/\partial x_3^2). \end{aligned}$$

The coefficients with asterisks in the ratios (2.36) and (2.37) are given in Table 6.

From the material relations of non-zero electromechanical components (2.36) and electroelastic equations (2.37), taking into account Table 5 it follows that in the sagittal plane  $x_3 0 x_1$  of piezoelectric classes  $\bar{6}m2$  of hexagonal and  $422$  of tetragonal symmetry classes, direct and inverse piezoelectric effects are formed by axial polarization  $\partial\varphi/\partial x_1$ .

**Table 6.** Values of the reduced coefficients with asterisks of the simulated two-dimensional problem in the sagittal plane  $x_2 0 x_3$

		$c_{23}^*$	$c_{55}^*$	$e_{11}^*$	$e_{12}^*$	$e_{15}^*$	$e_{31}^*$	$e_{32}^*$	$e_{33}^*$
Chryso-graphic classes	$6mm$	$c_{13}$	$c_{44}$	0	0	$e_{15}$	$e_{31}$	$e_{31}$	$e_{33}$
	$\bar{6}m2$	$c_{13}$	$c_{44}$	$e_{11}$	$-e_{11}$	0	0	0	0
	$4mm$	$c_{13}$	$c_{44}$	0	0	$e_{15}$	$e_{31}$	$e_{31}$	$e_{33}$
	$422$	$c_{13}$	$c_{44}$	0	0	$e_{15}$	0	0	0
	$mm2$	$c_{13}$	$c_{55}$	0	0	$e_{15}$	$e_{31}$	$e_{32}$	$e_{33}$

In media with the  $\bar{6}m2$  hexagonal symmetry class texture, the axial polarization  $\partial\varphi/\partial x_1$  results in axial elongations only. In media with the  $422$  tetragonal symmetry class texture, the axial polarization  $\partial\varphi/\partial x_1$  leads only to elastic shear  $(\partial u_3/\partial x_1) + (\partial u_1/\partial x_3)$  in the plane  $x_3 0 x_1$ .

### 3. Anti-flat electroactive stress-strain state in homogeneous piezoelectric textures

When the conditions for the absence of two components of elastic displacement  $u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t) \equiv 0$  and  $u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t) \equiv 0$  and derivatives of all other characteristics of the electroactive stress-strain field  $\partial[\cdot]/\partial x_\gamma \equiv 0$  are accepted only, the main relations of electroactive antiplane deformation

$$\{0; 0; u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t); E_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t); E_\beta(x_\alpha, x_\beta, t); 0\} \quad (3.1)$$

in the sagittal plane  $x_\alpha 0 x_\beta$  of an anisotropic piezoelectric medium are obtained from the equations of electroelasticity (1.1) and material relations (1.2), taking into account the structure of the tensor (1.3). Taking into account only the corresponding conditions (1.5) and (1.7), it follows that in this case, along with the nonzero pure shear stresses  $\sigma_{\gamma\alpha}(x_\alpha, x_\beta, t)$ ,  $\sigma_{\beta\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t)$  characteristic to antiplanar stress state and nonzero components of electric displacement  $D_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t)$  and  $D_\beta(x_\alpha, x_\beta, t)$

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t) &= \\ &= c_{(\beta\gamma)(\alpha\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \right) + c_{(\gamma\beta)(\beta\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \right) + e_{\alpha(\beta\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\beta(\beta\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\alpha}(x_\alpha, x_\beta, t) &= \\ &= c_{(\alpha\gamma)(\beta\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \right) + c_{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\alpha(\alpha\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\beta(\alpha\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$D_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t) = e_{\alpha(\gamma\alpha)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\alpha(\beta\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \right) - \varepsilon_{\alpha\alpha} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right) \quad (3.4)$$

$$D_\beta(x_\alpha, x_\beta, t) = e_{\beta(\alpha\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\beta(\gamma\beta)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \right) - \varepsilon_{\beta\beta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \right) \quad (3.5)$$

axial mechanical stress  $\sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t)$  and the third component of the electric displacement vector  $D_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)$  also occur

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t) &= \\ &= c_{\gamma(\gamma\beta)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \right) + c_{\gamma(\alpha\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\alpha(\gamma\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\beta(\gamma\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$D_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t) = e_{\gamma(\alpha\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\gamma(\beta\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \right) \quad (3.7)$$

As in the case of an electroactive plane stress-strain state, the existence of axial stress  $\sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t)$  can lead to axial tensions (compressions) disrupting the anti-plane strain state. The existence of the axial component of the electric displacement vector  $D_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)$  can lead to axial polarization, violating the plane electric field.

To exclude the violation of the antiplanar stress-strain state of the sagittal plane, it is necessary, similarly to the hypothesis that there are no pressure of the thin layers (sagittal planes  $x_\alpha \perp x_\beta = \text{const}$ ) of the continuum on each other, to accept the compatibility of elastic shears and the third component of the axial polarization of the electric field.

The compatibility condition is obtained from the condition for the existence of nontrivial solutions of the system of algebraic equations

$$\begin{cases} c_{\gamma(\alpha\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \right) + c_{\gamma(\beta\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \right) + e_{\alpha(\gamma\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\beta(\gamma\gamma)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \right) = 0 \\ e_{\gamma(\alpha\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \right) + e_{\gamma(\beta\gamma)} \left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

From (3.8) it follows that nonzero elastic shifts  $\left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \right)$  and  $\left( \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \right)$  are possible in piezoelectrics, in the electroelastic tensor (1.3) of which there are no coefficients of piezoelectric constants  $e_{\gamma(\alpha\gamma)}$  and  $e_{\gamma(\beta\gamma)}$

$$e_{\gamma(\alpha\gamma)} \equiv 0, \quad e_{\gamma(\beta\gamma)} \equiv 0. \quad (3.9)$$

In contrast to the case of plane deformation, included in the first equation of system (3.8), the elastic stiffnesses  $c_{\gamma(\alpha\gamma)}$  and  $c_{\gamma(\beta\gamma)}$  are not imperatively nonzero. Therefore, the linear

relation with respect to arbitrary non-zero elastic shifts  $(\partial u_\gamma / \partial x_\alpha)$ ,  $(\partial u_\gamma / \partial x_\beta)$ , and electric field strengths  $(\partial \varphi / \partial x_\alpha)$  and  $(\partial \varphi / \partial x_\beta)$ , is equal to zero at zero coefficients

$$c_{\gamma(\alpha\gamma)} \equiv 0, \quad c_{\gamma(\gamma\beta)} \equiv 0, \quad e_{\alpha(\gamma\gamma)} \equiv 0, \quad e_{\beta(\gamma\gamma)} \equiv 0. \quad (3.10)$$

In the cases of restrictions (3.9) and (3.10) on the anisotropy of the medium, the compatibility condition for nonzero elastic shifts and the electric field under which there are no pressures of the thin layers (sagittal planes  $x_\alpha \mathbf{0} x_\beta = \text{const}$ ) of the continuum on each other is automatically satisfied.

If in the electroelastic tensor (1.3) of the piezoelectrics at least one of the elastic stiffnesses  $c_{\gamma(\alpha\gamma)}$  and  $c_{\gamma(\gamma\beta)}$ , or the piezoelectric constants  $e_{\alpha(\gamma\gamma)}$ ,  $e_{\beta(\gamma\gamma)}$ ,  $e_{\gamma(\alpha\gamma)}$  and  $e_{\gamma(\beta\gamma)}$  is nonzero, then the elastic displacements  $(\partial u_\gamma / \partial x_\alpha)$ ,  $(\partial u_\gamma / \partial x_\beta)$  and the electric field strength  $(\partial \varphi / \partial x_\alpha)$  и  $(\partial \varphi / \partial x_\beta)$  will not correspond to the non-zero antiplane stress-strain state.

In the absence of the piezoelectric effect in the medium, the compatibility condition of elastic shifts becomes the hypothesis that there is no pressure of the thin layers (sagittal planes  $x_\alpha \mathbf{0} x_\beta = \text{const}$ ) of the continuum on each other, when

$$c_{\gamma(\alpha\gamma)} \equiv 0, \quad c_{\gamma(\gamma\beta)} \equiv 0. \quad (3.11)$$

**Statement-2:** State of electro-elastic anti-flat deformation

$$\{0; 0; u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t); \partial \varphi(x_\alpha, x_\beta, t) / \partial x_\alpha; \partial \varphi(x_\alpha, x_\beta, t) / \partial x_\beta; 0\} \quad (3.12)$$

in the sagittal plane  $x_\alpha \mathbf{0} x_\beta$  of the homogeneous piezoelectric medium induces an electroactive generalized antiplane stress state

$$\{0; 0; 0; \sigma_{\gamma\beta}(x_\alpha, x_\beta, t); \sigma_{\gamma\alpha}(x_\alpha, x_\beta, t); 0; D_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t); D_\beta(x_\alpha, x_\beta, t); 0\} \quad (3.13)$$

in piezoelectric crystals, in the generalized electroelastic tensor of which the following conditions are satisfied

$$c_{\alpha(\gamma\alpha)} \equiv 0, \quad c_{\alpha(\beta\gamma)} \equiv 0, \quad c_{\beta(\beta\gamma)} \equiv 0, \quad c_{\beta(\gamma\alpha)} \equiv 0, \quad c_{(\alpha\beta)(\gamma\alpha)} \equiv 0, \quad c_{(\alpha\beta)(\beta\gamma)} \equiv 0, \\ e_{\alpha\alpha} \equiv 0, \quad e_{\alpha\beta} \equiv 0, \quad e_{\alpha(\alpha\beta)} \equiv 0, \quad e_{\beta\alpha} \equiv 0, \quad e_{\beta\beta} \equiv 0, \quad e_{\beta(\beta\alpha)} \equiv 0, \quad (3.14)$$

$$c_{\gamma(\alpha\gamma)} \equiv 0, \quad c_{\gamma(\gamma\beta)} \equiv 0, \quad e_{\gamma(\alpha\gamma)} \equiv 0, \quad e_{\gamma(\beta\gamma)} \equiv 0, \quad e_{\alpha(\gamma\gamma)} \equiv 0, \quad e_{\beta(\gamma\gamma)} \equiv 0.$$

Compatibility conditions for elastic non-zero shifts and electric field strength in the sagittal plane, in this case, are performed automatically.

The electroactive generalized antiplane stress-strain state of the type (3.12) and (3.13), taking into account conditions (3.14), is represented by the nonzero components of electromechanical stresses

$$\sigma_{\beta\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t) = c_{(\gamma\beta)(\beta\gamma)} (\partial u_\gamma / \partial x_\beta) + e_{\alpha(\gamma\beta)} (\partial \varphi / \partial x_\alpha) + e_{\beta(\gamma\beta)} (\partial \varphi / \partial x_\beta) \quad (3.15)$$

$$\sigma_{\gamma\alpha}(x_\alpha, x_\beta, t) = c_{(\alpha\gamma)(\alpha\gamma)} (\partial u_\gamma / \partial x_\alpha) + e_{\alpha(\gamma\alpha)} (\partial \varphi / \partial x_\alpha) + e_{\beta(\gamma\alpha)} (\partial \varphi / \partial x_\beta) \quad (3.16)$$

and nonzero components of the displacement of the electric field

$$D_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t) = e_{\alpha(\gamma\beta)} (\partial u_\gamma / \partial x_\beta) + e_{\alpha(\gamma\alpha)} (\partial u_\gamma / \partial x_\alpha) - \varepsilon_{\alpha\alpha} (\partial \varphi / \partial x_\alpha) \quad (3.17)$$

$$D_\beta(x_\alpha, x_\beta, t) = e_{\beta(\gamma\beta)} (\partial u_\gamma / \partial x_\beta) + e_{\beta(\gamma\alpha)} (\partial u_\gamma / \partial x_\alpha) - \varepsilon_{\beta\beta} (\partial \varphi / \partial x_\beta) \quad (3.18)$$

The form of material relations (3.15)÷(3.18) allows us to formally preserve the general form of the system of quasistatic equations of the electroactive antiplane stress-strain state

$$c_{(\alpha\gamma)(\alpha\gamma)} (\partial^2 u_\gamma / \partial x_\alpha^2) + c_{(\gamma\beta)(\beta\gamma)} (\partial^2 u_\gamma / \partial x_\beta^2) + e_{\alpha(\gamma\alpha)} (\partial^2 \varphi / \partial x_\alpha^2) + (e_{\alpha(\gamma\beta)} + e_{\beta(\gamma\alpha)}) (\partial^2 \varphi / \partial x_\alpha \partial x_\beta) + e_{\beta(\gamma\beta)} (\partial^2 \varphi / \partial x_\beta^2) = \rho (\partial^2 u_\gamma / \partial t^2) \quad (3.19)$$

$$e_{\alpha(\gamma\alpha)} (\partial^2 u_\gamma / \partial x_\alpha^2) + (e_{\alpha(\gamma\beta)} + e_{\beta(\gamma\alpha)}) (\partial^2 u_\gamma / \partial x_\alpha \partial x_\beta) + e_{\beta(\gamma\beta)} (\partial^2 u_\gamma / \partial x_\beta^2) - \varepsilon_{\alpha\alpha} (\partial^2 \varphi / \partial x_\alpha^2) - \varepsilon_{\beta\beta} (\partial^2 \varphi / \partial x_\beta^2) = 0 \quad (3.20)$$

Obviously, the material relations (3.17)÷(3.20) and the quasistatic equations (3.21) and (3.22) of the generalized antiplanar stress-strain state coincide, respectively, with the material relations and the equations of electroelastic antiplane deformation [1].

The automatic fulfillment of the compatibility conditions for nonzero elastic shifts and electric field strength in the sagittal plane of the chosen piezoelectric textures does not change the material relations and quasistatic equations, but can narrow the quantity of textures where an anti-plane stress-strain state is possible.

In the other two sagittal planes of piezoelectric crystals  $x_\gamma 0 x_\alpha$  and  $x_\beta 0 x_\gamma$ , the conditions for the existence of an antiplane stress-strain state, the material relations of nonzero electromechanical components, the reduced elastic stiffnesses and piezoelectric coefficients, as well as the equations of electroelasticity for the corresponding antiplane stress-strain states of the type (3.13) and (3.14)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0; \quad u_\beta(x_\alpha, x_\gamma, t); \quad 0; \quad \partial \varphi(x_\alpha, x_\gamma, t) / \partial x_\alpha; \quad 0; \quad \partial \varphi(x_\alpha, x_\gamma, t) / \partial x_\gamma \\ 0; \quad 0; \quad 0; \quad \sigma_{\gamma\beta}(x_\alpha, x_\gamma, t); \quad 0; \quad \sigma_{\alpha\beta}(x_\alpha, x_\gamma, t); \quad D_\alpha(x_\alpha, x_\gamma, t); \quad 0; \quad D_\gamma(x_\alpha, x_\gamma, t) \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

or

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\alpha(x_\beta, x_\gamma, t); \quad 0; \quad 0; \quad 0; \quad \partial \varphi(x_\beta, x_\gamma, t) / \partial x_\beta; \quad \partial \varphi(x_\beta, x_\gamma, t) / \partial x_\gamma; \\ 0; \quad 0; \quad 0; \quad 0; \quad \sigma_{\gamma\alpha}(x_\beta, x_\gamma, t); \quad \sigma_{\alpha\beta}(x_\beta, x_\gamma, t); \quad 0; \quad D_\beta(x_\beta, x_\gamma, t); \quad D_\gamma(x_\beta, x_\gamma, t) \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

are obtained by rotating silent indexes  $\{\gamma, \alpha, \beta\} \rightleftharpoons \{\alpha, \beta, \gamma\} \rightleftharpoons \{\beta, \gamma, \alpha\}$  in all relations (3.1)÷(3.22).

### 3.1. Material relationships and quasistatic equations of the electroelastic generalized antiplanar stress-strain state in the sagittal plane $x_1 0 x_2$ .

In this sagittal plane of piezocrystalline textures, the conditions for the existence of an electroelastic antiplane stress-strain state (3.14) take the form

$$c_{14} \equiv 0, \quad c_{15} \equiv 0, \quad c_{24} \equiv 0, \quad c_{25} \equiv 0, \quad c_{64} \equiv 0, \quad c_{65} \equiv 0, \quad c_{35} \equiv 0, \quad c_{34} \equiv 0, \quad e_{34} \equiv 0, \quad (3.23)$$

$$e_{11} \equiv 0, \quad e_{12} \equiv 0, \quad e_{13} \equiv 0, \quad e_{16} \equiv 0, \quad e_{21} \equiv 0, \quad e_{22} \equiv 0, \quad e_{23} \equiv 0, \quad e_{26} \equiv 0, \quad e_{35} \equiv 0.$$

Only the generalized tensors of electroelasticity of piezoelectric media from the classes  $\bar{4}3m$  and  $23$  of cubic,  $622$ ,  $6$ ,  $6mm$  of hexagonal,  $4$ ,  $\bar{4}$ ,  $4mm$ ,  $\bar{4}2m$  of tetragonal and  $222$ ,  $mm2$  of rhombic symmetries correspond to these restrictions.

Material relationships of non-zero electromechanical components in these media can be written in the general form

$$\sigma_{23}(x_1, x_2, t) = c_{44}(\partial u_3/\partial x_2) + e_{14}^*(\partial\varphi/\partial x_1) + e_{24}^*(\partial\varphi/\partial x_2) \quad (3.24)$$

$$\sigma_{31}(x_\alpha, x_\beta, t) = c_{55}^*(\partial u_3/\partial x_1) + e_{15}^*(\partial\varphi/\partial x_1) + e_{25}^*(\partial\varphi/\partial x_2) \quad (3.25)$$

$$D_1(x_1, x_2, t) = e_{14}^*(\partial u_3/\partial x_2) + e_{15}^*(\partial u_3/\partial x_1) - \varepsilon_{11}(\partial\varphi/\partial x_1)$$

$$D_2(x_1, x_2, t) = e_{24}^*(\partial u_3/\partial x_2) + e_{25}^*(\partial u_3/\partial x_1) - \varepsilon_{22}(\partial\varphi/\partial x_2)$$

In the selected sagittal plane of these classes of media, it is convenient to write down also the quasistatic equations of electroelasticity in general form

$$\begin{aligned} & c_{55}^*(\partial^2 u_3/\partial x_1^2) + c_{44}(\partial^2 u_3/\partial x_2^2) + (e_{14}^* + e_{25}^*)(\partial^2 \varphi/\partial x_1 \partial x_2) + \\ & + e_{15}^*(\partial^2 \varphi/\partial x_1^2) + e_{24}^*(\partial^2 \varphi/\partial x_2^2) = \rho(\partial^2 u_3/\partial t^2) \\ & e_{15}^*(\partial^2 u_3/\partial x_1^2) + (e_{14}^* + e_{25}^*)(\partial^2 u_3/\partial x_1 \partial x_2) + e_{24}^*(\partial^2 u_3/\partial x_2^2) - \\ & - \varepsilon_{11}(\partial^2 \varphi/\partial x_1^2) - \varepsilon_{22}(\partial^2 \varphi/\partial x_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

The coefficients with asterisks in the relations (3.24)–(3.26) are given in Table 7.

**Table 7.** Values of physico-mechanical coefficients with asterisks for the problem of antiplane stress-strain state in the sagittal plane  $x_1Ox_2$

		$c_{55}^*$	$e_{14}^*$	$e_{15}^*$	$e_{24}^*$	$e_{25}^*$	$\varepsilon_{22}^*$
<b>Piezoelectric Textures</b>	$\bar{4}3m/23$	$c_{44}$	$e_{14}$	0	0	$e_{14}$	$\varepsilon_{11}$
	$6mm$	$c_{44}$	0	$e_{15}$	$e_{15}$	0	$\varepsilon_{11}$
	$6$	$c_{44}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$e_{15}$	$-e_{14}$	$\varepsilon_{11}$
	$622$	$c_{44}$	$e_{14}$	0	0	$-e_{14}$	$\varepsilon_{11}$
	$4$	$c_{44}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$e_{15}$	$-e_{14}$	$\varepsilon_{11}$
	$\bar{4}$	$c_{44}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$-e_{15}$	$e_{14}$	$\varepsilon_{11}$
	$4mm$	$c_{44}$	0	$e_{15}$	$e_{15}$	0	$\varepsilon_{11}$
	$\bar{4}2m$	$c_{44}$	$e_{14}$	0	0	$e_{14}$	$\varepsilon_{11}$
	$222$	$c_{55}$	$e_{14}$	0	0	$e_{25}$	$\varepsilon_{22}$
	$mm2$	$c_{55}$	0	$e_{15}$	$e_{24}$	0	$\varepsilon_{22}$

From Table 7 it is seen that the material relations of the electromechanical components (3.24) and (3.25), as well as the equations of electroelasticity (3.26) of the problems of the antiplanar stress-strain state in the sagittal plane  $x_1Ox_2$  for media from the classes  $\bar{4}3m$  and  $23$  of cubic,  $622$  of hexagonal,  $\bar{4}2m$  of tetragonal and  $222$  of rhombic symmetries fundamentally coincide.

In the sagittal plane  $x_1 0 x_2$ , the material relationships and the equations of electroelasticity of the problems of antiplanar stress-strain state for media from the classes  $6mm$  of hexagonal,  $4mm$  of tetragonal and  $mm2$  of rhombic symmetries also fundamentally coincide.

### 3.2. Material relationships and quasistatic equations of the electroelastic generalized antiplanar stress-strain state in the sagittal plane $x_2 0 x_3$ .

In this sagittal plane of piezocrystalline textures, the conditions for the existence of an electroelastic antiplane stress-strain state

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x_2, x_3, t); 0; 0; 0; \partial\varphi(x_2, x_3, t)/\partial x_2; \partial\varphi(x_2, x_3, t)/\partial x_3; \\ 0; 0; 0; 0; \sigma_{13}(x_2, x_3, t); \sigma_{12}(x_2, x_3, t); 0; D_2(x_2, x_3, t); D_3(x_2, x_3, t) \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

are written as follows

$$c_{16} \equiv 0, c_{15} \equiv 0, c_{26} \equiv 0, c_{25} \equiv 0, c_{35} \equiv 0, c_{36} \equiv 0, c_{46} \equiv 0, c_{45} \equiv 0, \quad (3.28)$$

$$e_{14} \equiv 0, e_{16} \equiv 0, e_{21} \equiv 0, e_{22} \equiv 0, e_{23} \equiv 0, e_{24} \equiv 0, e_{31} \equiv 0, e_{32} \equiv 0, e_{33} \equiv 0, e_{34} \equiv 0.$$

Only the generalized tensors of electroelasticity of piezoelectric media from the classes  $\bar{6}m2$  of hexagonal and  $422$  of tetragonal symmetries correspond to these restrictions.

Material relationships of non-zero electromechanical components in these media can be written in the general form

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, t) = c_{55}^* (\partial u_1 / \partial x_3) + e_{15}^* (\partial \varphi / \partial x_1) + e_{35}^* (\partial \varphi / \partial x_3) \quad (3.29)$$

$$\sigma_{12}(x_\alpha, x_\beta, t) = c_{66}^* (\partial u_1 / \partial x_2) + e_{16}^* (\partial \varphi / \partial x_1) + e_{36}^* (\partial \varphi / \partial x_2)$$

$$D_1(x_1, x_3, t) = e_{15}^* (\partial u_1 / \partial x_3) + e_{16}^* (\partial u_1 / \partial x_2) - \varepsilon_{11} (\partial \varphi / \partial x_2) \quad (3.30)$$

$$D_3(x_1, x_2, t) = e_{35}^* (\partial u_1 / \partial x_3) + e_{36}^* (\partial u_1 / \partial x_2) - \varepsilon_{33} (\partial \varphi / \partial x_1)$$

In the selected sagittal plane of these classes of media, it is convenient to write down also the quasistatic equations of electroelasticity in general form

$$\begin{aligned} & c_{66}^* (\partial^2 u_1 / \partial x_2^2) + c_{55}^* (\partial^2 u_1 / \partial x_3^2) + (e_{25}^* + e_{36}^*) (\partial^2 \varphi / \partial x_2 \partial x_3) + \\ & + e_{26}^* (\partial^2 \varphi / \partial x_2^2) + e_{35}^* (\partial^2 \varphi / \partial x_3^2) = \rho (\partial^2 u_1 / \partial t^2) \\ & e_{36}^* (\partial^2 u_1 / \partial x_2^2) + (e_{36}^* + e_{25}^*) (\partial^2 u_1 / \partial x_2 \partial x_3) + e_{35}^* (\partial^2 u_1 / \partial x_3^2) - \\ & - \varepsilon_{22}^* (\partial^2 \varphi / \partial x_2^2) - \varepsilon_{33}^* (\partial^2 \varphi / \partial x_3^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

**Table 8.** Values of physicochemical coefficients with asterisks of the problem of antiplanar stress-strain state in the sagittal plane  $x_2 0 x_3$

		$c_{55}^*$	$c_{66}^*$	$e_{15}^*$	$e_{16}^*$	$e_{35}^*$	$e_{36}^*$	$\varepsilon_{22}^*$	$\varepsilon_{33}^*$
Classes	$\bar{6}m2$	$c_{44}$	$c_{66}$	0	0	0	0	$\varepsilon_{11}$	$\varepsilon_{33}$
	422	$c_{44}$	$c_{66}$	$e_{15}$	0	0	0	$\varepsilon_{11}$	$\varepsilon_{33}$

The coefficients with asterisks in the relations (3.24)–(3.26) are given in Table 8.

Table 8 shows that the problem of an antiplane stress-strain state in the sagittal plane  $x_2 0 x_3$  is not electroactive for media of the hexagonal symmetry class  $\bar{6}m2$ .

### 3.3. Material relationships and quasistatic equations of the electroelastic generalized antiplane stress-strain state in the sagittal plane $x_3 0 x_1$ .

In this sagittal plane of piezocrystalline textures, the conditions for the existence of an electroelastic antiplane stress-strain state

$$\left\{ \begin{array}{l} 0; \quad u_2(x_1, x_3, t); \quad 0; \quad \partial\varphi(x_1, x_3, t)/\partial x_1; \quad 0; \quad \partial\varphi(x_1, x_3, t)/\partial x_3 \\ 0; \quad 0; \quad 0; \quad \sigma_{23}(x_1, x_3, t); \quad 0; \quad \sigma_{12}(x_1, x_3, t); \quad D_1(x_1, x_3, t); \quad 0; \quad D_3(x_1, x_3, t) \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

take the following form

$$\begin{aligned} c_{14} \equiv 0, \quad c_{16} \equiv 0, \quad c_{24} \equiv 0, \quad c_{26} \equiv 0, \quad c_{34} \equiv 0, \quad c_{36} \equiv 0, \quad c_{54} \equiv 0, \quad c_{56} \equiv 0, \quad e_{24} \equiv 0, \\ e_{11} \equiv 0, \quad e_{12} \equiv 0, \quad e_{13} \equiv 0, \quad e_{15} \equiv 0, \quad e_{31} \equiv 0, \quad e_{32} \equiv 0, \quad e_{33} \equiv 0, \quad e_{35} \equiv 0, \quad e_{26} \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

Only the generalized tensors of electroelasticity of piezoelectric media from the classes  $\bar{4}3m$  and  $23$  of cubic,  $\bar{4}2m$  of tetragonal, and  $222$  of rhombic symmetries correspond to these restrictions.

Material relationships of non-zero electromechanical components in these media can be written in general form

$$\sigma_{23}(x_1, x_3, t) = c_{44}(\partial u_2/\partial x_3) + e_{14}^*(\partial\varphi/\partial x_1) + e_{34}^*(\partial\varphi/\partial x_3) \quad (3.34)$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_3, t) = c_{66}^*(\partial u_2/\partial x_1) + e_{16}^*(\partial\varphi/\partial x_1) + e_{36}^*(\partial\varphi/\partial x_3)$$

$$D_1(x_1, x_3, t) = e_{14}^*(\partial u_2/\partial x_3) + e_{16}^*(\partial u_2/\partial x_1) - \varepsilon_{11}(\partial\varphi/\partial x_1) \quad (3.35)$$

$$D_3(x_1, x_3, t) = e_{34}^*(\partial u_2/\partial x_3) + e_{36}^*(\partial u_2/\partial x_1) - \varepsilon_{33}(\partial\varphi/\partial x_3)$$

In the selected sagittal plane of these classes of media, it is convenient to write down also the quasistatic equations of electroelasticity in general form

$$\begin{aligned} c_{66}^*(\partial^2 u_2/\partial x_1^2) + c_{44}(\partial^2 u_2/\partial x_3^2) + (e_{14}^* + e_{36}^*)(\partial^2 \varphi/\partial x_1 \partial x_3) + \\ + e_{16}^*(\partial^2 \varphi/\partial x_1^2) + e_{34}^*(\partial^2 \varphi/\partial x_3^2) = \rho(\partial^2 u_2/\partial t^2) \\ e_{16}^*(\partial^2 u_2/\partial x_1^2) + (e_{14}^* + e_{36}^*)(\partial^2 u_2/\partial x_1 \partial x_3) + e_{34}^*(\partial^2 u_2/\partial x_3^2) - \\ - \varepsilon_{11}(\partial^2 \varphi/\partial x_1^2) - \varepsilon_{33}(\partial^2 \varphi/\partial x_3^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

The coefficients with asterisks in the relations (3.34)–(3.36) are given in Table 9.

**Table 9.** Values of the physicomechanical coefficients with asterisks of the problem of anti-planar stress-strain state in the sagittal plane  $x_1 0 x_3$

		$c_{66}^*$	$e_{14}^*$	$e_{16}^*$	$e_{34}^*$	$e_{36}^*$	$\varepsilon_{33}^*$
Classes	$\bar{4}3m/23$	$c_{44}$	$e_{14}$	0	0	$e_{14}$	$\varepsilon_{11}$
	$\bar{4}2m$	$c_{66}$	$e_{14}$	0	0	$e_{36}$	$\varepsilon_{33}$
	222	$c_{66}$	$e_{14}$	0	0	$e_{36}$	$\varepsilon_{33}$

From Table 9 it follows that in all three cases in the equations of electroelasticity (3.36) of the anti-planar stress-strain state for media from the classes  $\bar{4}3m$  and  $23$  of cubic,  $\bar{4}2m$  of tetragonal and  $222$  of rhombic symmetries, the coupling of the elastic and electric fields occurs through mixed derivatives of the electric field potential and elastic displacement, respectively. From the equations of electroelasticity (3.36) it also follows that in problems of the antiplanar stress-strain state for media from the classes  $\bar{4}3m$  and  $23$  of cubic symmetry, in contrast to problems for media from the classes  $\bar{4}2m$  of tetragonal and  $222$  of rhombic symmetries, the piezoelectric effect is equivalent in coordinates  $x_1$  and  $x_3$ .

#### 4. Comparative analysis.

Comparative analysis shows that, taking into account the conditions of compatibility of nonzero elastic axial elongations (compressions) and electric field strengths (2.11) and (3.8), the sets of piezocrystalline classes of anisotropy, which allow separate excitation and propagation of electroelastic planar or electroelastic antiplane stress deformed states in piezoelectric media do not change accordingly.

Taking into account the conditions of compatibility of nonzero elastic axial elongations (compressions) and electric field strength, leads to refinement of the notation of material relations, electroelastic equations, and necessary and sufficient conditions that allow separate excitation and propagation of a plane (or anti-planar) electro-elastic stress-strain state in the corresponding problems.

Using the simple interaction of mechanical and electric fields as an example, we see that the two-dimensional problem of plane deformation in the sagittal plane  $x_3 0 x_1$  for the class  $\bar{6}m2$  is formulated by material relations of non-zero electro-mechanical characteristics

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}(\partial u_1/\partial x_1) + c_{13}(\partial u_3/\partial x_3) + e_{11}(\partial \varphi/\partial x_1), \\ \sigma_{22} &= c_{12}(\partial u_1/\partial x_1) + c_{13}(\partial u_3/\partial x_3) - e_{11}(\partial \varphi/\partial x_1), \\ \sigma_{33} &= c_{13}(\partial u_1/\partial x_1) + c_{33}(\partial u_3/\partial x_3), \quad \sigma_{31} = c_{44}[(\partial u_3/\partial x_1) + (\partial u_1/\partial x_3)], \\ D_1 &= e_{11}(\partial u_1/\partial x_1) - \varepsilon_{11}(\partial \varphi/\partial x_1), \quad D_3 = -\varepsilon_{33}(\partial \varphi/\partial x_3).\end{aligned}\tag{3.37}$$

Quasistatic equations in this case are written as follows

$$\begin{aligned}c_{11}(\partial^2 u_1/\partial x_1^2) + c_{44}(\partial^2 u_1/\partial x_3^2) + (c_{13} + c_{44})(\partial^2 u_3/\partial x_1 \partial x_3) + \\ + e_{11}(\partial^2 \varphi/\partial x_1^2) = \rho(\partial^2 u_1/\partial t^2)\end{aligned}\tag{3.38}$$

$$c_{44}(\partial^2 u_3/\partial x_1^2) + c_{33}(\partial^2 u_3/\partial x_3^2) + (c_{13} + c_{44})(\partial^2 u_1/\partial x_1 \partial x_3) = \rho(\partial^2 u_3/\partial t^2)\tag{3.39}$$

$$e_{11}(\partial^2 u_1/\partial x_1^2) - \varepsilon_{11}(\partial^2 \varphi/\partial x_1^2) - \varepsilon_{33}(\partial^2 \varphi/\partial x_3^2) = 0\tag{3.40}$$

The problem of the plane stress-strain state in the same plane for the class  $\bar{6}m2$  is formulated by the material relations of non-zero electromechanical characteristics (4.1) with the compatibility condition of elastic non-zero axial elongations (compressions)  $\sigma_{22} \equiv 0$ :

$$c_{12}(\partial u_1/\partial x_1) + c_{13}(\partial u_3/\partial x_3) - e_{11}(\partial \varphi/\partial x_1) = 0\tag{3.41}$$

In view of (4.5), equations (4.2)-(4.4) can be written as follows

$$\begin{aligned}
& (c_{11} - c_{12}^*) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - e_{11} \left[ 1 + (c_{12}^*/c_{12}) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
& c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (c_{33} - c_{13}^*) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - e_{11} (c_{13}^*/c_{13}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\
& e_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

where it is clearly seen that both the new stiffness coefficients  $c_{13}^* = (c_{13} + c_{44})c_{13}/c_{12}$  and  $c_{12}^* = (c_{13} + c_{44})c_{12}/c_{13}$  “soften” the longitudinal stiffnesses and “tighten” the direct piezoelectric effect in the medium.

The equivalence of two-dimensional problems of electroelasticity of plane deformation and plane stress-strain state is ensured by taking into account the electro-mechanical conditions in the infinitely distant ends  $x_\gamma = \pm \infty$  of a long waveguide.

## 5. Conclusion.

The necessary and sufficient conditions are derived that allow separate excitation and propagation of the electroelastic plane and also anti-plane stress-strain states in piezoelectric media:

- Conditions of type (2.10) and the compatibility condition of non-zero elastic axial elongations (compressions) and electric field strength (2.11) allow separate excitation and propagation of a plane electroelastic stress-strain state of type {(2.8), (2.9)} in the sagittal plane  $x_\alpha \mathbf{0} x_\beta$ .
- Conditions of the type (3.14) allow separate excitation and propagation of the antiplane electroelastic stress-strain state {(3.12), (3.13)} in the sagittal plane  $x_\alpha \mathbf{0} x_\beta$ .

The introduced compatibility conditions for elastic non-zero axial elongations (compressions) and electric field strengths (2.11) and (3.8) correspond to the requirements of hypotheses about the nature of the distribution of the mechanical field in thin-walled structural elements:

- In the case of a plane electroelastic stress-strain state of the type {(2.8), (2.9)}, all the characteristics of the wave field lie in the sagittal plane  $x_\alpha \mathbf{0} x_\beta$  and there is no pressure of parallel material planes  $x_\gamma = \text{const}$  on each other.
- In the case of an antiplane electroelastic stress-strain state of the type {(3.12), (3.13)}, the mechanical characteristics of the wave field do not distort the sagittal plane  $x_\alpha \mathbf{0} x_\beta$ , the characteristics of the electric field lie in the sagittal plane and there is no pressure of parallel material planes  $x_\gamma = \text{const}$  on each other.

In all sagittal planes of all textures of piezoelectric crystals, the material relations of nonzero electromechanical components and quasistatic equations of electroelasticity are derived. This allows to choose different combinations of piezoelectric materials in layered waveguides in studies of the joint propagation of electroactive waves of plane and antiplane stress-strain state.

## REFERENCES

1. Kirchhoff G., Lectures on Mathematics, Physics, Mechanics, Leipzig, (1883), Vol. 1 is in 3d. Edition. 485 p.,  
Kirchhoff G., Vorlesungen über Mathematik. Physik, Mechanik, Leipzig, (1883), Bd. 1 in 3d. Auflage. 485 p., (in German)
2. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., Theory of Plates and Shells, 2-nd edition, McGraw Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1959, 636 p.
3. Reissner E., On the theory of bending of elastic plates. (1944), J. Math. And Phys., vol. 23, 1, pp. 184-191, <https://doi.org/10.1002/sapm1944231184>
4. Ambartsumian S.A., Theory of anisotropic Plates: Strength, Stability and Vibrations, Volume 11 of the Progress in Materials Science series, Technomic Publishing Co., Inc., Stamford, U.S.A., 1970, 276 p.
5. Ambartsumian S.A., Bagdasaryan G.E., Belubekyan M.V., Magnetoelasticity of thin plates and shells, Moscow; Nauka, 1977, 272p. (in Russian)
6. Avetisyan A.S., About the problem of the propagation of transversal waves in piezoelectric solid, Proceed. of NAS of Armenia, (1985), vol.38, Iss.1, pp. 3-11, [in Russian]  
Аветисян А.С., К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Известия НАН Армении. Механика. (1985), Т.38. № 1. С. 3-11,
7. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A., Electro-magneto-elasticity: piezoelectrics and electrically conductive solids, (1988), New York: Gordon and Breach Science Publishers, 503 p.,  
Translated from the Russian by E.G. Strel'chenko.  
Партон В.З., Кудрявцев Б.А., Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел, (1988), М.: Наука, 472 с.
8. Ara S. Avetisyan, Vazgen M. Khachatryan, Converters of electro-acoustic waves. Vacuum-Crystalline filters and resonators, Modern problems of Mechanics and Mathematics: collection of scientific papers in 3 vol. / Edited by A.M. Samoilenko, R.M. Kushnir, (2018), vol. 1, L'viv pp. 47-49,
9. Най Дж., Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц, (1967), 2-е изд. М.: "Мир", 386 с.  
Nye J., Physical properties of crystals and their description using tensors and matrices, (1967), 2nd ed. - М.: "Mir", 386 p.
10. Шаскольская М.П., Кристаллография М.: Высш. Шк., 1984, 376 с.  
Shaskolskaya M.P., (1984), Crystallography, М.: "Higher. Sc.", 376 p.
11. Хзарджян А.А. О плоской и антиплоской задачах теории упругости в однородных анизотропных средах /Ученые Записки ЕГУ, (1982), №2, С. 24-29.  
Khazardzhyan A.A., On the plane and anti-flat problems of the theory of elasticity in homogeneous anisotropic media, YSU Scientific Notes, (1982), №2, p.
12. Новожилов В.В. Теория упругости М: Судпромгиз, 1958. 371 с.  
Novozhilov V.V. Theory of elasticity, М: Sudpromgiz, 1958. 371 p.

### **Information about the author:**

**Ara S. Avetisyan**– Corresponding Member of NAS, Prof., Institute of Mechanics, NAS of Armenia, **Address:** 0019, Yerevan, ave. Baghramyan, 24/2 .

**Phone:** (+37493) 00-44-55; **E-mail:** ara.serg.avetisyan@gmail.com

Received 03.06.2019

СОДЕРЖАНИЕ 3-го номера за 2019 г., том 72

**Баласаниян Е.С., Гулгазарян Л.Г., Хачатряна А.М.** О решениях типа пограничного слоя в одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной пластинки..... 3  
**Белубекяна М.В., Мартиросян С.Р.** О сверхзвуковой дивергенции сжатой панели..... 20  
**Саркисяна С.О., Хачатряна М.В.** Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью по теории со стеснённым вращением и метод конечных элементов ..... 39  
**Аветисяна А.С.** Двумерные задачи электроакустики в однородных пьезоэлектрических кристаллах..... 56

CONTENTS №3, 2019

**Balasanian E.S., Ghulghazaryan L.G., Khachatryan A.M.** On solutions of the boundary layer type one mixed boundary problem of anisotropic two-layered plate ..... 3  
**Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.** About a problem of the supersonic divergence of a compressed panel ..... 20  
**Sargsyan S.H., Khachatryan M.V.** Mathematical model of static deformation of micropolar elastic beam with a circular axis on the theory with constrained rotation and the finite element method..... 39  
**Avetisyan Ara S.** Two-Dimensional Problems of Electroacoustics in Homogeneous Piezoelectric Crystals ..... 56

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ №3, 2019

**Բալասանյան Ե.Ս., Դուլղազարյան Լ.Գ., Խաչատրյան Ա.Մ.** Անիզոտրոպ երկշերտ սալի մի խառը եզրային խնդրում սահմանային շերտի տիպի լուծումների մասին..... 3  
**Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ր.** Գերձայնային գազի սեղմված սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին ..... 20  
**Սարգսյան Ս.Չ., Խաչատրյան Մ.Վ.** Շրջանային կորությամբ միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողի ստատիկ դեֆորմացիայի մաթեմատիկական մոդելը ըստ կաշկանդված պտույտներով տեսության և վերջավոր տարրերի մեթոդը..... 39  
**Ավետիսյան Արա Ս.** Էլեկտրաակուստիկայի երկչափ խնդիրները համասեռ պիեզոէլեկտրական բյուրեղներում..... 56

Сдано в производство 17.09.2019 г.  
Формат 70 x 100 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ. лист – 5  
Заказ № 968. Тираж 150.  
Цена договорная.  
Типография Издательства НАН РА  
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24