ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2019

МХИТАРЯН СУРЕН МАНУКОВИЧ

(К 80-летию со дня рождения)

4-ого мая 2019 года крупному ученому в области смешанных краевых задач механики сплошной среды и математической физики, члену-корреспонденту НАН РА, доктору физико-математических наук, профессору Сурену Мануковичу Мхитаряну исполнилось 80 лет.

С.М.Мхитарян родился 4-ого мая 1939 года в селе Карчахпюр Варденисского района Армении. В 1963 году с отличием окончил механико-математический факультет Ереванского государственного университета и был оставлен на работу ассистентом на кафедре «Механика». В 1964-67 годы проходил аспирантское обучение на кафедре теоретической механики Одесского строительного института под руководством известного математика члена-корреспондента АН Украины, профессора М.Г.Крейна. С 1967-ого года работает в Институте механики НАН РА. В 1969 г. защитил кандидатскую, а в 1991 году – докторскую диссертации. В 2010 году был избраном членом-корреспондентом НАН РА.

Фундаментальные научные исследования профессора С.М.Мхитаряна, направленные на развитие аналитических и численных методов решения контактных и смешанных краевых задач теорий упругости, вязкоупругости и ползучести, получение замкнутых решений для новых задач из этого класса, несомненно внесли существенный вклад в развитие механики деформируемого твердого тела. В этих исследованиях четко прослеживается строгая математическая последовательность и стремление привлечь к решению задач механики всё новые элементы из богатейшего арсенала высшей математики, что, безусловно, является ценнейшим приобретением аспирантского обучения. При этом получены и новые результаты в области математики, например, новые спектральные соотношения для сингулярных интегральных операторов.

Профессором С.М. Мхитаряном опубликовано более 150 научных статей как в республиканских, так и в авторитетных зарубежных периодических изданиях. Особо следует отметить книгу «Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками», написанную им в соавторстве с профессором В.М.Александровым и изданную в 1983 году издательством «Наука», которая содержит достаточно широкий класс контактных задач для массивных тел с концентраторами напряжений и поистине является настольной книгой для механиков-контактщиков.

Обширна и научно-педагогическая деятельность профессора С.М.Мхитаряна. Более тридцати лет он является фактическим руководителем научного направления контактных и смешанных задач теории упругости и вязкоупругости в Институте механики НАН РА. Совместно с научной деятельностью проф. С.М.Мхитарян преподавал в различных ВУЗ-ах республики. Уже более десяти лет С.М.Мхитарян возглавляет кафедру высшей математики Национального университета архитектуры и строительства Армении. Под его научным руководством и непосредственном консультативном участии защищены более 25 диссертаций.

Профессор С.М.Мхитарян долгие годы является членом редакционной коллегии журнала Известия НАН Армении ”Механика”.

Редакция журнала Известия НАН Армении ”Механика” сердечно поздравляет дорогого Сурена Мануковича со славным юбилеем, желает крепкого здоровья, новых творческих успехов, всяческих благ в жизни.

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

20-го апреля 2019 г. исполнилось 60 лет ведущему научному сотруднику Института механики НАН РА, д.ф.м.н., проф. Барсегяну Ване Рафаеловичу. После окончания с отличием ЕГУ в 1985 г. он поступил в аспирантуру СПбГУ под научным руководством проф. В.С. Новоселова. С 1989г. работает в ЕГУ. Свою научную деятельность Барсегян В.Р. совмещал с научно-огранизационной деятельностью: был зам. декана ф-та механики ЕГУ, зав. кафедрой теоретической механики ЕГУ, первым директором Центра оценки и тестирования Армении. В настоящее время Барсегян В.Р. является руководителем отдела Президиума НАН РА, профессором ЕГУ и членом спецсовета 047 по присуждению ученых степеней. Круг его научных интересов включает в себя проблемы управления, стабилизации и наблюдения динамических систем, дифференциальные игры, а также их приложения для конкретных механических систем. В.Р. Барсегян является автором более 120 научных работ, монографии «Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями» (М.: «Наука» 2016 г.) и шести учебно-методических пособий. В.Р. Барсегян в течение 30 лет непрерывно ведет научно-педагогическую работу в ЕГУ. Под его руководством были защищены три кандидатские диссертации. Проф. Барсегян В.Р. является лауреатом премии Президента РА.

13-го мая 2019 г. исполнилось 60 лет ведущему научному сотруднику Института механики НАН РА, д.ф.м.н, проф. Аветисяну Вагану Вардгесовичу. После окончания ЕГУ в 1981г. он поступил на работу в Институт механики АН. Свою научную деятельность В.В.Аветисян совмещал с преподавательской, преподавая на разных факультетах ЕГУ. Был приглашенным исследователем в нац. исслед. институте информатики и автоматизации (Франция) и в Иллинойском университете (США). Круг его научных интересов включает в себя проблемы управления динамическими системами, в том числе манипуляторами, вопросы оптимального поиска целевых объектов в игровых задачах динамики, проблемы построения оптимальных управлений динамическими объектами, избегающих столкновения. В.В. Аветисян является автором около 80 научных работ, соавтором монографии «Оптимальное управление электроприводами промышленных роботов» (М., ИПМ АН СССР, 1986г.), под его руководством защищены три кандидатских диссертаций. Являлся исполнителем международного гранта EGIDE ECO-NET. В настоящее время профессор ЕГУ, руководитель научной темы Госкома по науке РА и член спецсовета 047 по присуждению учёных степеней.

Редакция журнала «Известия НАН РА, Механика» сердечно поздравляет юбиляров со славным юбилеем и желает им крепкого здоровья, плодотворной научной деятельности и новых творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №2, 2019 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/72.2.1

ВЫНУЖДЕННЫЕ СДВИГОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШТАМПА НА ГРАНИЦЕ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С МЕЖФАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В.

Ключевые слова: динамическая смешанная задача, штамп, межфазные дефекты, стационарные колебания.

Hakobyan V.N., Amirjanyan A.A., Hakobyan L.V.

Forced shift vibrations of stamp on the border of composite half-space with interphase defects

Keywords: dynamic mixed boundary value problem, die, interphase defects, vibrations.

This paper considers the antiplane stress state of a composite half-space obtained by junction a homogeneous layer and half-space with interphase tunnel cracks and absolutely rigid inclusions, which is deformed by an absolutely rigid die with a plane base acting on the boundary plane of the half-space under the influence of periodically changing loads in time. The governing system of SIE with respect to the amplitudes of the contact stresses acting under the die, the jump of stresses acting on the long sides of the inclusions and the dislocation of the points of the crack edges was obtained. In some particular cases, the method of mechanical quadratures carried out a numerical analysis and revealed patterns of change in stress fields and deformations depending on the physical and mechanical and geometric characteristics of the problem.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա., Հակոբյան Լ.Վ.

Դրոշմի ստիպողական սահքի տատանումները միջֆազային դեֆեկտներ պարունակող բաղադրյալ կիսահարթության եզրին

Հիմնաբառեր: դինամիկ խառը խնդիր, միջֆազային դեֆեկտներ, ներդրակ, ստացիոնար տատանումներ

Ուսումնասիրված է միջֆազային ճաքերի և բացարձակ կոշտ ներդրակների համակարգ պարունակող տարբեր նյութերից պատրաստված կիսատարածության և շերտի միացումից ստացված բաղադրյալ կիսատարածության հակահարթ լարվածային վիճակը, երբ այն դեֆորմացվում է ժամանակի ընթացքում պարբերական օրենքով փոփոխվող բեռների ազդեցության տակ գտնվող հարթ հիմքով բացարձակ կոշտ դրոշմի օգնությամբ: Ստացվել է խնդրի որոշիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը դրոշմի տակ գործող կոնտակտային լարումների ամպլիտուդների, ներդրակների երկար կողմերի տակ գործող լարումների թռիչքների ամպլիտուդների և ճաքերի ափերի կետերի կետերի դիսլոկացիաների խտությունների ամպլիտուդների նկատմամբ: Որոշ մասնավոր դեպքերում մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդով կատարվել են թվային վերլուծություն և բացահայտվել են լարվածային և դեֆորմացիոն դաշտերի փոփոխման օրինաչափությունները կախված խնդրի ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական բնութագրիչներից:

Рассмотрено антиплоское напряжённое состояние составного полупространства, полученного при помощи соединения однородного слоя и полупространства с межфазными туннельными трещинами и абсолютно жёсткими включениями, деформируемым абсолютно жёстким штампом с плоским основанием, действующим на граничной плоскости полупространства под воздействием периодически изменяющихся во времени нагрузок. Получена определяющая система СИУ относительно амплитуд контактных напряжений, действующих под штампом, скачка напряжений, действующих на длинные стороны включений и дислокации точек берегов трещин. В некоторых частных случаях методом механических квадратур

проведён численный анализ и выявлены закономерности изменения полей напряжений и деформаций в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи.

Введение

Изучению актуальных с практической точки зрения задач о вынужденных стационарных колебаниях многослойных систем с межфазными дефектами типа трещин и абсолютно жёстких включений, посвящено много работ. В развитии этого направления механики деформируемого твёрдого тела большой вклад внесла Ростовская школа механиков. Академиком РАН В.А.Бабешко и его учениками были поставлены и решены ряд двумерных и трёхмерных задач в этом направлении. Ими разработаны и предложены эффективные методы решения динамических задач для слоистых сред с межфазными дефектами [1-4]. Однако, мало известно работ, посвящённых динамическим задачам о напряжённо-деформированном состоянии слоистых структур, одновременно содержащих разные межфазные дефекты. С другой стороны, с точки зрения сейсмологии, сейсмоустойчивого строительства, сейсморазведки и дефектоскопии одной из важных задач является выявление закономерностей взаимовлияния этих концентраторов напряжений в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задач, а также частоты вынужденных колебаний, чему и посвящена настоящая работа. Отметим также работы [5-7], которые непосредственно связаны с настоящей работой.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть составное упругое полупространство, отнесённое к декартовой системе координат $Oxyz$ и составленное из слоя толщины h и полупространства, изготовленных из разнородных материалов с модулями сдвига μ_1 и μ_2, соответственно, заполняющих соответственно области $0 \le y \le h$ и $y \le 0$, на плоскости их стыка $y = 0$, ослаблено магистральными межфазными трещинами, занимающими область $\left\{ y = 0;\ -\infty < z < \infty;\ x \in L_1 = \bigcup_{n=1}^{N} \left(c_n, d_n \right) \right\}$ и усилена межфазными, магистральными, абсолютно жёсткими, тонкими включениями, занимающими область $\left\{ y = 0;\ -\infty < z < \infty;\ x \in L_2 = \bigcup_{n=2}^{M} \left(a_n, b_n \right) \right\}$. Будем полагать, что составное полупространство деформируется при помощи абсолютно жёсткого полосового штампа с плоским основанием, приложенным к свободной поверхности слоя в области $\left\{ a_1 \le x \le b_1;\ -\infty < z < \infty \right\}$ и находящимся под воздействием периодически изменяющейся касательной сосредоточенной нагрузки $T_0 e^{i\omega t}$, а также касательных напряжений интенсивности $q(x) e^{i\omega t}$, приложенных соответственно к верхнему и нижнему берегам межфазных трещин. При этом, массами штампа и включений будем пренебрегать.

Ставится задача: определить закономерности изменения контактных напряжений, действующих под штампом и под длинными сторонами включений, раскрытия трещин и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи, а также частоты вынужденных колебаний.

Снабдив характерные величины слоя и полупространства соответственно индексами 1 и 2, поставленную задачу в базовой плоскости Oxy можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$
\begin{aligned}
&W_1(x,0,t) = W_2(x,0,t) && (x \notin L_1 \cup L_2) \\
&\tau_{yz}^{(1)}(x,\ 0,\ t) = \tau_{yz}^{(2)}(x,\ 0,\ t) && (x \notin L_1 \cup L_2) \\
&\tau_{yz}^{(1)}(x,\ h,\ t) = 0 && (x < a_1; x > b_1) \\
&\tau_{yz}^{(j)}(x,\ 0,\ t) = q(x)e^{i\omega t} && (x \in L_1;\ j = 1,2) \\
&W_j(x,0,t) = \mathrm{const}\, e^{i\omega t} && (x \in L_2;\ j = 1,2) \\
&W_1(x,h,t) = \mathrm{const}\, e^{i\omega t} && (a_1 < x < b_1)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь $W_j(x,y,t)(j=1,2)$ – соответственно, смещения точек слоя и полупространств по направлению оси Oz, удовлетворяющие, каждое в области своего определения, уравнению

$$
\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = \frac{1}{(c_2^{(j)})^2}\frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2}, \tag{1.2}
$$

где $c_2^{(j)}$ $(j=1,2)$ – скорости распространения сдвиговых волн, соответственно, в слое и полупространстве, а $\tau_{yz}^{(j)}(x,y,t)$ $(j=1,2)$ – касательные напряжения, действующие в слое и полупространстве связанные со смещениями известными формулами:

$$
\tau_{yz}^{(j)}(x,y,t) = \mu_j \frac{\partial W_j(x,y,t)}{\partial y} \quad (j=1,2). \tag{1.3}
$$

Как и в работе [7], представим искомые функции в виде $f(x,y,t) = f(x,y)\,e^{i\omega t}$. Тогда, амплитуды функций смещений $W_j(x,y)$ будут удовлетворять уравнениям

$$
\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = \left(\frac{\omega}{c_2^{(j)}}\right)^2 W_j(x,y) \quad (j=1,2). \tag{1.4}
$$

Решения уравнений (1.4) представим в виде интегралов Фурье

$$
\begin{aligned}
&W_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_1(s)e^{-\chi_1(s)y} + B_1(\lambda)e^{\chi_1(s)y}\right]e^{-isx}ds; \\
&W_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_2(\lambda)e^{\chi_2(s)y}e^{-isx}ds
\end{aligned}
\quad ; \tag{1.5}
$$

где $\chi_j(s)=\sqrt{s^2-k_j^2}$ $\left(k_j=\omega/c_2^j,\ j=1,2\right)$, а $A_j(s)$ $(j=1,2)$ и $B_1(s)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. При этом, выбраны те ветви функций $\chi_j(s)$ $(j=1,2)$ [8], которые обеспечивают затухание колебаний на бесконечности. Амплитуды напряжений будут выражены формулами:

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,y)=-\frac{\mu_1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\chi_1(\lambda)\left[A_1(\lambda)e^{-\chi_1(\lambda)y}-B_1(\lambda)e^{\chi_1(\lambda)y}\right]e^{-i\lambda x}d\lambda;$$
$$\tau_{yz}^{(2)}(x,y)=\frac{\mu_2}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\chi_2(\lambda)A_2(\lambda)e^{\chi_2(\lambda)y}e^{-i\lambda x}d\lambda \tag{1.6}$$

Введём неизвестные функции амплитуд контактных напряжений под штампом $\tau(x)$, разности амплитуд смещений на берегах трещин $W(x)$ и разности амплитуд напряжений, действующих на длинных сторонах включений $T(x)$ по формулам:

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,h)=\tau(x)\quad(a<x<b);$$
$$W_1(x,0)-W_2(x,0)=W(x)\ \ (x\in L_1); \tag{1.7}$$
$$\tau_{yz}^{(1)}(x,0)-\tau_{yz}^{(2)}(x,0)=T(x)\ \ (x\in L_2).$$

Решим вспомогательную граничную задачу, состоящую из первых трёх условий задачи (1.1) и условий (1.7). Используя соотношения (1.5) – (1.6), удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи и выразим коэффициенты $A_j(s)$ $(j=1,2)$ и $B_1(s)$ через трансформанты Фурье $\overline{W}(s)$, $\overline{\tau}(s)$ и $\overline{T}(s)$ функций $W(x)$, $\tau(x)$ и $T(x)$. Получим:

$$A_1(s)=\frac{\mu\chi_2(s)e^{\chi_1(s)h}\overline{W}(\lambda)}{\Delta(s)}+\frac{\left[\chi_1(s)-\mu\chi_2(s)\right]\overline{\tau}(s)}{\mu_1\Delta(s)}-\frac{e^{\chi_1(s)h}\overline{T}(s)}{\mu_1\Delta(s)};$$
$$B_1(s)=\frac{\mu\chi_2(s)e^{-\chi_1(s)h}\overline{W}(\lambda)}{\Delta(s)}+\frac{\left[\chi_1(s)+\mu\chi_2(s)\right]\overline{\tau}(s)}{\mu_1\Delta(s)}-\frac{e^{-\chi_1(s)h}\overline{T}(s)}{\mu_1\Delta(s)};$$
$$A_2(s)=\frac{2\mu\chi_1(s)\operatorname{sh}\left(\chi_1(s)h\right)\overline{W}(\lambda)}{\Delta(s)}+\frac{2\overline{\tau}(s)}{\mu_1\Delta(s)}-\frac{2\operatorname{ch}\left(\chi_1(s)h\right)\overline{T}(s)}{\mu_1\Delta(s)},$$

где

$$\Delta(s)=2\left[\chi_1(s)\operatorname{sh}(\chi_1h)+\mu\chi_2(s)\operatorname{ch}(\chi_1h)\right];\quad\mu=\mu_2/\mu_1\ .$$

При помощи полученных значений коэффициентов $A_j(s)$ $(j=1,2)$ и $B_1(s)$ вычислим значения функций $W_1'(x,h)$ и $\tau_{yz}^{(j)}(x,0)$ $(j=1,2)$. Получим:

$$W_1'(x,h)=\frac{1}{\pi\mu_1}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\tau(s)\,ds}{s-x}+\int_{a_1}^{b_1}K_{11}(s-x)\tau(s)\,ds+\int_{L_1}K_{12}(s-x)W'(s)\,ds+$$

$$+\int_{L_2}K_{13}(s-x)T(s)\,ds\quad(-\infty<x<\infty);$$

$$\tau_{yz}^{(2)}(x,0)=-\frac{\mu T(x)}{1+\mu}+\frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)}\int_{L_1}\frac{W'(s)\,ds}{s-x}+\int_{a_1}^{b_1}K_{2,1}(s-x)\tau(s)\,ds+$$

$$+\int_{L_1}K_{2,2}(s-x)W'(s)\,ds+\int_{L_1}K_{2,3}(s-x)T(s)\,ds\ (-\infty<x<\infty); \qquad (1.8)$$

$$W_1'(x,0)=\frac{\mu W'(x)}{1+\mu}-\frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)}\int_{L_2}\frac{T(s)\,ds}{s-x}+\int_{a_1}^{b_1}K_{3,1}(s-x)\tau(s)\,ds+$$

$$+\int_{L_1}K_{3,2}(s-x)W'(s)\,ds+\int_{L_2}K_{3,3}(s-x)T(s)\,ds\ \ (-\infty<x<\infty);$$

$$W_2'(x,0)=W_1'(x,0)-W'(x);\quad \tau_{yz}^{(1)}(x,0)=\tau_{yz}^{(2)}(x,0)+T(x).$$

Здесь $K_{ij}(t)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_{ij}(s)}{\Delta(s)}e^{ist}ds\quad(i,j=1-3);$

$$Q_{11}(s)=\frac{2s\left(\chi_1\operatorname{ch}(\chi_1 h)+\mu\chi_2\operatorname{sh}(\chi_1 h)\right)-\operatorname{signs}\chi_1(s)\Delta(s)}{2i\mu_1\chi_1(s)};$$

$$Q_{12}(s)=Q_{21}(s)=\mu\chi_2(s);\quad Q_{13}(t)=-Q_{31}(s)=-\frac{s}{i\mu_1}:$$

$$Q_{23}(s)=\frac{\mu\left[2(1+\mu)\chi_2(s)\operatorname{ch}(\chi_1 h)-\Delta(s)\right]}{2(1+\mu)};$$

$$Q_{22}(s)=\frac{\mu_2\left[2(1+\mu)\chi_1(s)\chi_2(s)\operatorname{sh}(\chi_1 h)-|s|\Delta(s)\right]}{2i(1+\mu)s};$$

$$Q_{32}(s)=\frac{\mu\left[2(1+\mu)\chi_2(s)\operatorname{ch}(\chi_1 h)-\Delta(s)\right]}{2(1+\mu)};$$

$$Q_{33}(s)=-\frac{\left[2(1+\mu)s\operatorname{ch}(\chi_1 h)-\operatorname{sgn}(s)\Delta(s)\right]}{2i\mu_1(1+\mu)}$$

Заметим, что в случае, когда $\Delta(s)$ не имеет действительных корней, ядра $K_{ij}(t)$ – регулярные функции от t. В случае же, когда $\Delta(s)$ имеет действительные корни, интегралы Фурье, при помощи которых представлены эти функции, нужно понимать в смысле главного значения Коши. При этом, так как $\Delta(s)$ – чётная функция от s, то она будет иметь пары действительных нулей, симметрично расположенных относительно начала координат $\pm s_k$ $(k=1-K)$. Следовательно, $\Delta(s)$ около каждой из этих точек можно представить в виде $\Delta(s)=\left(s^2-s_k^2\right)\Delta_k(s)$, где функция $\Delta_k(s_k)\neq 0$. Тогда, используя значения интегралов [9]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ist}ds}{\left(s^2-s_0^2\right)}=-\pi\frac{\sin s_0|t|}{s_0};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign}(s)e^{ist}ds}{\left(s^2-s_0^2\right)}=\frac{2i}{s_0}\left[Si(s_0t)\cos(s_0t)-ci\left(s_0|t|\right)\sin\left(s_0|t|\right)\right]$$

функции $K_{ij}(t)$ можно представить в виде:

$$K_{ij}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{Q_{ij}(s)}{\Delta(s)}-\sum_{k=1}^{K}\frac{\operatorname{sign}(s)Q_{ij}(s_k)}{\Delta_k(s_k)\left(s^2-s_k^2\right)}e^{s_k^2-s^2}\right]e^{ist}ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{K}\frac{Q_{ij}(s_k)}{\Delta_k(s_k)}e^{s_k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign}(s)\left(e^{-s^2}-e^{s_k^2}\right)}{\left(s^2-s_k^2\right)}e^{ist}ds+$$

$$+\frac{2i}{\pi}\sum_{k=1}^{K}\frac{Q_{ij}(s_k)}{s_k\Delta_k(s_k)}\left[Si(s_kt)\cos(s_kx)-ci\left(s_k|t|\right)\sin\left(s_k|t|\right)\right],$$

в случае, когда функции $Q_{ij}(s)$ – нечётные, и в виде

$$K_{ij}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{Q_{ij}(s)}{\Delta(s)}-\sum_{k=1}^{K}\frac{Q_{ij}(s_k)}{\Delta_k(s_k)\left(s^2-s_k^2\right)}e^{s_k^2-s^2}\right]e^{ist}ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{K}\frac{Q_{ij}(s_k)}{\Delta_k(s_k)}e^{s_k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{-s^2}-e^{s_k^2}\right)}{\left(s^2-s_k^2\right)}e^{ist}ds-\sum_{k=1}^{K}\frac{Q_{ij}(s_k)}{s_k\Delta_k(s_k)}\sin s_k|t|,$$

когда функции $Q_{ij}(s)$ – чётные. Нетрудно заметить, что в приведённых представлениях ядер $K_{ij}(t)$ интегралы в любой точке интервала интегрирования сходятся в обычном смысле и их можно использовать при вычислениях.

Теперь, используя представления (1.8), удовлетворим последним трём условиям (1.1), первоначально перейдя в них к амплитудам и дифференцируя последние два из этих условий по x. В итоге, учитывая, что на трещинах скачки напряжений, а на включениях функции дислокации равны нулю, для определения неизвестных контактных напряжений $\tau(x)$, функции дислокации точек берегов трещины $W'(x)$ и скачка контактных напряжений на длинных сторонах включений $T(x)$, придём к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений первого рода:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\pi\mu_1}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\dfrac{\tau(s)\,ds}{s-x}+\int_{a_1}^{b_1}K_{11}(s-x)\tau(s)\,ds+\int_{L_1}K_{12}(s-x)W'(s)\,ds+ \\
\qquad +\displaystyle\int_{L_2}K_{13}(s-x)T(s)\,ds=0 \qquad (a<x<b); \\
\dfrac{\mu_2}{\pi(1+\mu)}\displaystyle\int_{L_1}\dfrac{W'(s)\,ds}{s-x}+\int_{a_1}^{b_1}K_{21}(s-x)\tau(s)\,ds+\int_{L_1}K_{22}(s-x)W'(s)\,ds+ \\
\qquad +\displaystyle\int_{L_2}K_{23}(s-x)T(s)\,ds=q(x) \qquad (x\in L_1); \\
-\dfrac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)}\displaystyle\int_{L_2}\dfrac{T(s)\,ds}{s-x}+\int_{a_1}^{b_1}K_{31}(s-x)\tau(s)\,ds+\int_{L_1}K_{32}(s-x)W'(s)\,ds+ \\
\qquad +\displaystyle\int_{L_2}K_{33}(s-x)T(s)\,ds=0 \quad (x\in L_2).
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

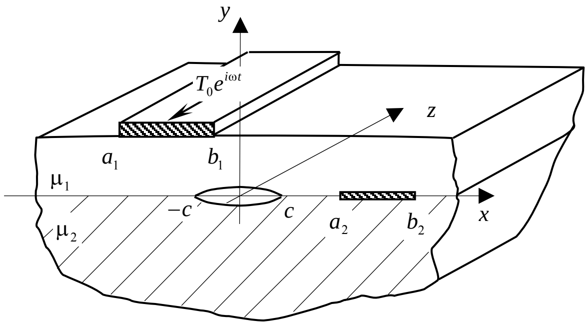
Полученную систему нужно рассматривать с учётом уравнений движения штампа и включений при условиях непрерывности смещений в концевых точках трещин, которые в рассматриваемом случае можно записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1}\tau(x)\,dx=T_0;\ \int_{a_j}^{b_j}T(x)\,dx=0;\ \left(j=2-M\right); \\
&\int_{c_j}^{d_j}W'(x)\,dx=0\ \left(j=1-N\right);
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Систему определяющих сингулярных интегральных уравнений (1.9) при условиях (1.10) в общем случае можно решать как методом ортогональных многочленов Чебышева, сведя к квазивполне регулярным бесконечным системам алгебраических уравнений из $M+N$ уравнений, так и численно-аналитическим методом механических квадратур [9]. Не останавливаясь на этом, рассмотрим некоторые частные случаи поставленной задачи, которые, на наш взгляд, представляют самостоятельный интерес.

2. Антиплоские стационарные колебания штампа на границе составного полупространства с межфазной трещиной и абсолютно жёстким включением

Рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда составное полупространство расслаблено одной магистральной межфазной трещиной, занимающей область $\{y=0;-\infty<z<\infty;\ x\in(-c,c)\}$, усилено одним межфазным включением, занимающим область $\{y=0;-\infty<z<\infty;\ x\in(a_2,b_2)\}$ и деформируется при помощи абсолютно жёсткого полосового штампа с плоским основанием, приложенного к свободной поверхности слоя в области $\{y=h;\ a_1\le x\le b_1;\ -\infty<z<\infty\}$ (фиг.1).



Фиг.1

В этом частном случае система определяющих сингулярных интегральных уравнений (1.9) и условия (1.10) примут вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\pi\mu_1}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\tau(s)\,ds}{s-x}+\int_{a_1}^{b_1}K_{1,1}(s-x)\tau(s)\,ds+\int_{-c}^{c}K_{1,2}(s-x)W'(s)\,ds+ \\
+\int_{a_2}^{b_2}K_{1,3}(s-x)T(s)\,ds=0 \qquad (a_1<x<b_1); \\
\frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)}\int_{-c}^{c}\frac{W'(s)\,ds}{s-x}+\int_{a_1}^{b_1}K_{2,1}(s-x)\tau(s)\,ds+\int_{-c}^{c}K_{2,2}(s-x)W'(s)\,ds \\
+\int_{a_2}^{b_2}K_{2,3}(s-x)T(s)\,ds=q(x) \qquad (-c<x<c) \\
-\frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)}\int_{a_2}^{b_2}\frac{T(s)\,ds}{s-x}+\int_{a_1}^{b_1}K_{31}(s-x)\tau(s)\,ds+\int_{-c}^{c}K_{32}(s-x)W'(s)\,ds+ \\
+\int_{a_2}^{b_2}K_{33}(s-x)T(s)\,ds=0 \quad (a_2<x<b_2).
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

$$
\int_{a_1}^{b_1}\tau(x)\,dx=T_0;\quad \int_{a_2}^{b_2}T(x)\,dx=0;\quad \int_{-c}^{c}W'(x)\,dx=0. \tag{2.2}
$$

Систему определяющих сингулярных интегральных уравнений (2.1) при условиях (2.2) будем решать численно-аналитическим методом механических квадратур. Для этого при помощи замены переменных $x=p_j t+q_j$ $\left(p_j=(c_j-b_j)/2,\ q_j=(c_j+b_j)/2\right)$ $(j=1,2)$ в первом и последнем уравнениях (2.1) и $x=ct$ во втором уравнении (2.1) перейдём на интервал (-1,1) и введя обозначения

$$\varphi_1(t)=p_1\tau(p_1t+q_1)/T_0;\quad \varphi_2(t)=W'(ct);\ \varphi_3(t)=p_1T(p_2t+q_2)/T_0;$$
$$\mathrm{R}_{11}(\xi,t)=p_1\mu_1K_{11}((\xi-t)p_1);\ \mathrm{R}_{12}(\xi,t)=cp_1\mu_1K_{12}(c\xi-p_1t-q_1)/T_0;$$
$$\mathrm{R}_{13}(\xi,t)=p_2\mu_1K_{13}(p_2\xi+q_2-p_1t-q_1);$$
$$\mathrm{R}_{21}(\xi,t)=\frac{(1+\mu)T_0}{\mu_2}K_{21}(p_1\xi+q_1-ct);$$
$$\mathrm{R}_{22}(\xi,t)=\frac{c(1+\mu)}{\mu_2}K_{22}(c(\xi-t));$$
$$\mathrm{R}_{23}(\xi,t)=\frac{p_2(1+\mu)T_0}{p_1\mu_2}K_{23}(p_2\xi+q_2-ct);$$
$$\mathrm{R}_{31}(\xi,t)=-\mu_1p_1(1+\mu)K_{31}(p_1\xi+q_1-p_2t-q_2);$$
$$\mathrm{R}_{32}(\xi,t)=-\frac{p_1\mu_1(1+\mu)}{T_0}K_{32}(c\xi-p_2t-q_2);$$
$$\mathrm{R}_{33}(\xi,t)=-\mu_1(1+\mu)p_2K_{33}(p_2(\xi-t));$$
$$f_1(t)=f_3(t)=0;\quad f_2(t)=(1+\mu)q(ct)/\mu_2,$$
перепишем в виде:
$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_j(s)\,ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{3}\int_{-1}^{1}R_{ji}(s,x)\varphi_i(s)\,ds=f_j(x) \qquad (2.3)$$
$$(-1<x<1;\ j=1-3)$$
При этом, условия (2.2) запишутся в виде:
$$\int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\,dx=1;\quad \int_{-1}^{1}\varphi_j(x)\,dx=0\quad (j=2,3). \qquad (2.4)$$
Легко проверить, что функции $\varphi_j(t)$ $(j=1-3)$ в концевых точках интервала интегрирования ±1 имеют корневую особенность и их можно представить в виде:
$$\varphi_j(t)=\frac{\varphi_j^*(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ (j=1-3), \qquad (2.5)$$
где $\varphi_j^*(x)$ – непрерывные функции, ограниченные вплоть до концов интервала $[-1,1]$.

Подставляя значения функций $\varphi_j(x)$ $(j=1-3)$ в (2.3)-(2.4) и используя соотношения, приведённые в [9], по стандартной процедуре, придём к системе из $3n$ алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_j^*(\xi_i)$ $\left(j=1-2;\ i=\overline{1,n}\right)$. После определения функций $\varphi_j^*(\xi_i)$ нетрудно при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа восстановить функции $\varphi_j(x)$ $(j=1-3)$ и определить все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в слое и полупространстве.

Приведём формулу для определения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины. С этой целью используем второе и последнее из соотношений (1.8), когда $\left(|x|>c\right)$. Далее сформулируем это соотношение на интервале $(-1,1)$ и представим в виде:

$$\tau_{yz}^{(2)}(at,0)=\frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(\xi)\,d\xi}{\xi-t}+F_2(t)\quad\left(|t|>1\right),\tag{2.6}$$

где $F_2(t)=T_0\int_{-1}^{1}K_{21}\left(p_1\xi+q_1-ct\right)\varphi_1(\xi)\,d\xi+c\int_{-1}^{1}K_{22}\left(a(\xi-t)\right)\varphi_2(\xi)\,d\xi+$

$$+T_0\frac{p_2}{p_1}\int_{-1}^{1}K_{23}\left(p_2\xi+q_2-ct\right)\varphi_3(\xi)\,d\xi;$$

– ограниченная функция в обоих концах трещины.

Подставляя в (2.6) значение функции $\varphi_2(t)$ из (2.5) и учитывая соотношение [10]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{ds}{\sqrt{c^2-s^2}\,(s-x)}=-\frac{\operatorname{sign}(x)}{\sqrt{x^2-c^2}}\quad\left(|x|>c\right),$$

для определения амплитуд безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины получим выражения:

$$K_{III}^{*}(\pm c)=\frac{K_{III}^{(1)}(\pm c)+iK_{III}^{(2)}(\pm c)}{\mu_2}=\sqrt{2\pi}\lim_{\eta\to\pm1\pm0}\sqrt{|t\mp1|}\,\tau_{yz}^{(j)}(ct,0)/\mu_2=\mp\frac{\sqrt{\pi}\varphi_2^{*}(\pm1)}{(1+\mu)}.$$

Тогда [12]

$$K_{III}(\pm c,t)=K_{III}^{*}(\pm c)e^{i\omega t}=\left|K_{III}^{*}(\pm c)\right|e^{i(\omega t-\delta)}\quad\left(\delta=-\operatorname{arctg}\left(K_{III}^{(2)}/K_{III}^{(1)}\right)\right).$$

Для определения же амплитуды безразмерного раскрытия трещины будем использовать формулу:

$$w_*(t)=w(ct)/\mathrm{c}=\int_{-1}^{t}\varphi_2(\xi)\,d\xi.$$

Для определения же контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения, опять будем использовать второе и последнее из соотношений (1.8), когда $x\in(a_2,b_2)$. Написав его на интервале $(-1,1)$, для безразмерных контактных напряжений получим формулы:

$$\tau_2^{*}(t)=\frac{p_1\tau_{yz}^{(2)}\left(p_2t+q_2,0\right)}{T_0}=-\frac{\mu\varphi_3(t)}{1+\mu}+\sum_{i=1}^{3}\int_{-1}^{1}K_{2,i}^{*}(s,t)\varphi_i(s)\,ds;$$

$$\left(-1<t<1;\;\; j=1-3\right)$$

$$\tau_1^*\left(t\right)=\frac{p_1\tau_{yz}^{(1)}\left(p_2t+q_2,0\right)}{T_0}=\tau_2^*\left(t\right)+\varphi_3\left(t\right),$$
$$K_{2,1}^*\left(s,t\right)=p_1K_{2,1}\left(p_1s+q_1-p_2t-q_2\right);$$
$$K_{2,2}^*\left(s,t\right)=\frac{p_1\mu_2}{\pi T_0\left(1+\mu\right)\left(s-p_2t/c-q_2/c\right)}+\frac{p_1c}{T_0}K_{2,2}\left(cs-p_2t-q_2\right);$$
$$K_{2,3}^*\left(s,t\right)=p_2K_{2,3}\left(p_2\left(s-t\right)\right);$$

Численный анализ.

В некоторых частных случаях проведён численный расчёт и выявлены закономерности изменения важных механических характеристик задачи в зависимости от места расположения концентраторов напряжений и частоты вынужденных колебаний.

Сначала приведём результаты численных расчётов поставленной задачи, когда включение отсутствует, составное полупространство расслаблено одной магистральной межфазной трещиной, занимающей область $\left\{y=0;-\infty<z<\infty;\ x\in\left(-c,c\right)\right\}$, и деформируется при помощи абсолютно-жёсткого полосового штампа с плоским основанием, приложенного к свободной поверхности слоя в области $\left\{y=h;\ a_1\le x\le b_1;\ -\infty<z<\infty\right\}$. Заметим, что определяющая система сингулярных интегральных уравнений этой задачи получена в работе [7]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_j\left(s\right)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{-1}^{1}R_{ji}\left(s-x\right)\varphi_i\left(s\right)ds=f_j\left(x\right)\quad\left(-1<x<1;\ j=1,2\right)\qquad(2.7)$$

Эту систему нужно рассматривать при условиях

$$\int_{-1}^{1}\varphi_1\left(x\right)dx=1;\quad\int_{-1}^{1}\varphi_2\left(x\right)dx=0.\qquad(2.8)$$

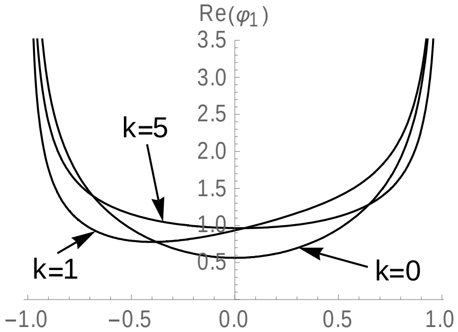
Проведён численный расчёт задачи, когда $T_0/p_1\mu_2=0.05;\ \mu=2/3;$ $c/h=p_1/h=1$, $c_2^{(1)}/c_2^{(2)}=2$, $q\left(x\right)=0$ и выявлены закономерности изменения амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины, их аргумента δ, действительной части амплитуд контактных напряжений под штампом и раскрытия трещины в зависимости от параметров $k=q_1/h$ и $\lambda=h\omega/c_2^{(1)}$. Результаты численных расчётов приведены в виде таблиц 1-2 и графиков фиг. 2-3. В табл.1 приведены значения модулей амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины и её аргумента при $\lambda=0,5$ в зависимости от k. Из них явствует, что при удалении штампа от трещины амплитуды коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в обоих концах трещины уменьшаются, в то время как их аргумент у левого конца трещины по абсолютной величине возрастает, а у правого конца трещины сначала убывает, а затем также возрастает.

На фиг.2 и 3 приведены графики соответственно действительной части безразмерных амплитуд контактных напряжений под штампом и абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины в случае, когда $k = 0; 1; 5$.

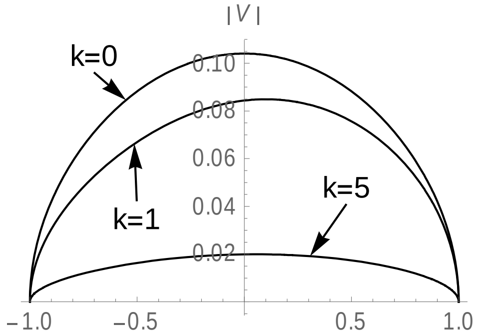
Таблица 1

k	0	0.5	1	3	5
$\lvert K_{III}(-c)\rvert$	0.10075	0.08812	0.07218	0.03201	0.018018
$\lvert K_{III}(c)\rvert$	0.10075	0.10107	0.09174	0.01475	0.00468
$\delta(-c)$	0.17892	0.2396	0.3323	1.0527	2.3043
$\delta(c)$	0.1789	0.1641	0.1897	0.6618	1.7929

На (фиг.2) видно, что при удалении штампа от трещины происходит перераспределение амплитуд контактных напряжений: сначала нарушается их симметрия относительно оси симметрии штампа, а затем постепенно, по мере удаления штампа, симметрия восстанавливается. При этом, амплитуды контактных напряжений в средней части штампа увеличиваются, а у концов уменьшаются, тогда как абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины при удалении штампа от трещины уменьшается (фиг.3).



Фиг.2



Фиг.3

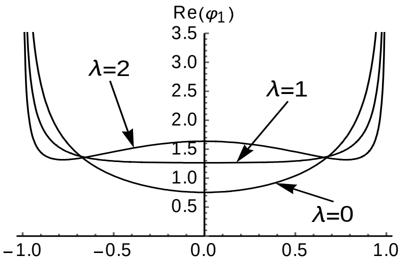
В табл. 2 приведены значения модулей амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины и её аргумента в случае, когда штамп находится прямо над трещиной, т.е. при $k = 0$ в зависимости от λ. Из них явствует, что при увеличении параметра λ модули амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений и их аргументы на обоих концах трещины сначала увеличиваются, а затем уменьшаются.

На фиг.4–5 приведены графики соответственно действительных частей безразмерных амплитуд контактных напряжений под штампом и абсолютные величины амплитуд раскрытия трещины в случае, когда $\lambda = 0; 1; 2$.

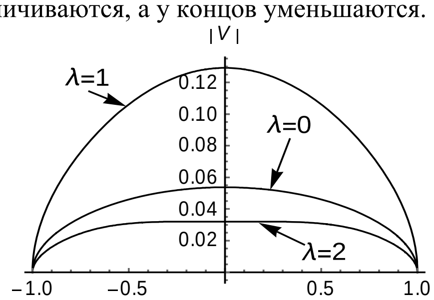
Таблица 2

λ	0	0.5	0.79	1	1.5	2	5
$\left\|K_{III}(\pm c)\right\|$	0.05395	0.10075	0.17360	0.111323	0.04747	0.037524	0.00449
$\delta(\pm c)$	0	0.17892	1.2654	2.04936	2.48655	2.78636	0.71198

На графиках (фиг.4) видно, что при увеличении параметра λ, который при постоянных значениях толщины слоя h и скорости распространения сдвиговой волны в слое $c_2^{(1)}$ можно трактовать как увеличение частоты вынужденных колебаний ω, опять происходит перераспределение амплитуд действительных частей контактных напряжений: они в средней части штампа увеличиваются, а у концов уменьшаются.



Фиг.4



Фиг.5

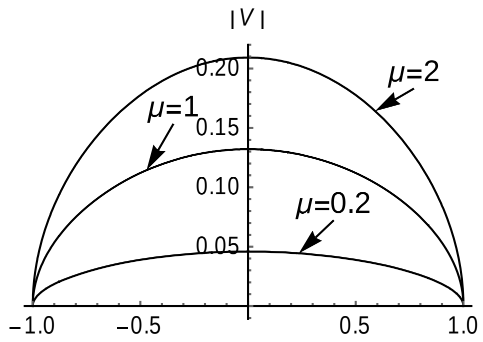
При этом, абсолютные величины амплитуд раскрытия трещины колеблятся вокруг состояния равновесия, если таковым считать раскрытие трещины при $\lambda = 0$ (фиг.5).

Исследована также зависимость указанных величин от параметра μ. Результаты вычислений в случае, когда $k = 0$ и $\lambda = 0.5$, приведены в табл. 3 и представлены в виде графиков (фиг. 6).

В табл. 3 приведены значения модулей амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины и её аргумента при различных значениях μ. Из них явствует, что при увеличении параметра μ амплитуды коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений на обоих концах трещины увеличиваются, в то время как их аргумент уменьшается.

Таблица 3

μ	0.25	0.5	1	2	5
$\left\|K_{III}(\pm c)\right\|$	0.04002	0.08194	0.17348	0.37747	0.81715
$\delta(\pm c)$	2.1141	2.0779	1.9835	1.7427	1.0093



Фиг.6

На фиг. 6 приведены графики абсолютных величин амплитуд раскрытия трещины в зависимости от параметра μ. Из них видно, что при увеличении параметра μ абсолютные величины амплитуд раскрытия трещины также увеличиваются. Вычисления показывают, что контактные напряжения под штампом мало зависят от параметра μ.

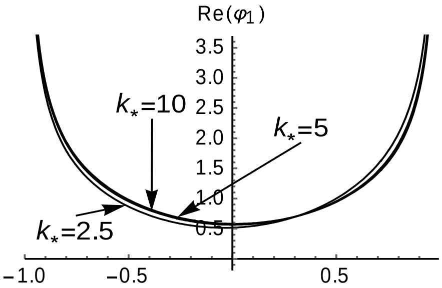
Теперь приведём результаты численных расчётов поставленной задачи, когда включение присутствует. При этом принято $T_0 / p_1\mu_2 = 0.05;\ \mu = 2/3;$ $c/h = p_1/h = 1,\ c_2^{(1)}/c_2^{(2)} = 2,\ \ p_2/h = 1,\ k = 0$ и выявлены закономерности изменения амплитуд контактных напряжений, действующих под штампом, скачка напряжений, действующих на длинные стороны включений, абсолютной величины амплитуд раскрытия трещины и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от относительного расстояния включения от трещины $k_* = q_2/h$ и приведённой частоты вынужденных колебаний $\lambda = h\omega/c_2^{(1)}$. Результаты численных расчётов приведены в виде таблиц 4-5 и графиков фиг.8-13.

В табл. 3 приведены значения модулей амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины при $\lambda = 0,5$ в зависимости от k_*. Из них видно, что присутствие включений мало влияет на модули амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в обоих концах трещины и при удалении включений стремится к определённому значению, соответствующему случаю, когда включение отсутствует.

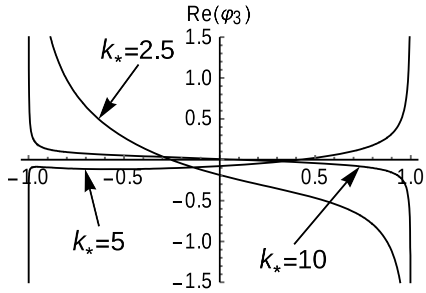
Таблица 4

k_*	2.1	2.5	3.5	5	10	20
$\lvert K_{III}(-c)\rvert$	0.10636	0.10650	0.10314	0.09862	0.100643	0.10075
$\lvert K_{III}(c)\rvert$	0.10625	0.10748	0.10510	0.09856	0.10049	0.10074

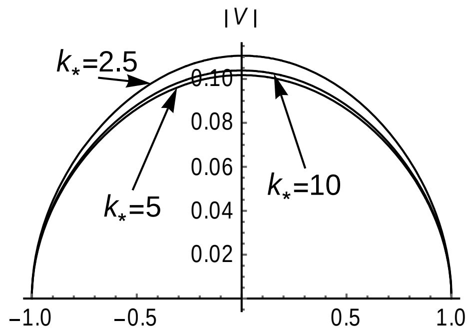
На фиг. 7-9 приведены графики соответственно действительной части безразмерных амплитуд контактных напряжений под штампом, скачка напряжений, действующих на длинные стороны включений и абсолютные величины амплитуд раскрытия трещины при $k=0$ и $\lambda=0.5$ в зависимости от k_*.



Фиг.7



Фиг.8



Фиг.9

Из них видно, что при удалении включения от штампа и трещины действительная часть амплитуд контактных напряжений и абсолютная величина амплитуд раскрытия трещины почти не терпят изменений, тогда как действительная часть скачка напряжений, действующих на длинные стороны включений, уменьшается, стремясь к нулю.

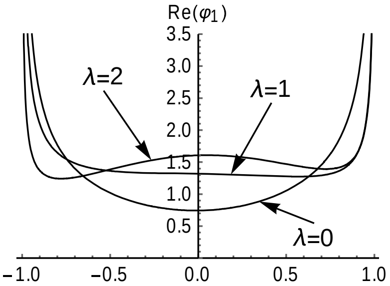
В табл. 5 приведены значения модулей амплитуд коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины при $k=0$, $k_*=3$ в зависимости от изменения приведённой частоты вынужденных колебаний λ.

Таблица 5

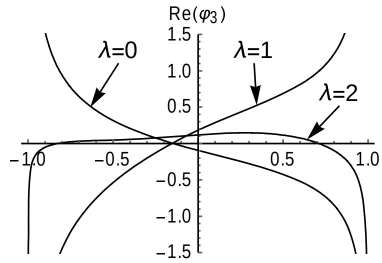
λ	0	0.5	0.72	1	2	5
$\left\|K_{III}(-c)\right\|$	0.05469	0.10538	0.1668	0.08884	0.02991	0.00474
$\left\|K_{III}(c)\right\|$	0.05587	0.10715	0.1791	0.10525	0.04135	0.00401

Полученные результаты показывают, что присутствие включения опять мало влияет на концентрацию напряжений в концевых точках трещины.

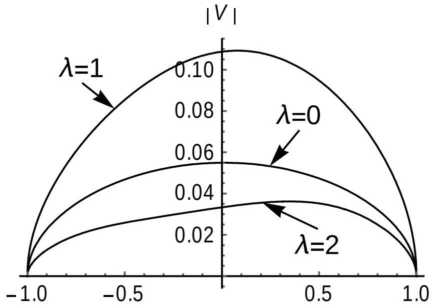
А на фиг. 10-12 приведены графики соответственно действительной части безразмерных амплитуд контактных напряжений под штампом, действительной части скачка напряжений, действующих на длинные стороны включений, и абсолютной величины амплитуд раскрытия трещины при $k=0$, $k_*=3$ в случае, когда $\lambda = 0;1;2$.



Фиг.10



Фиг.11



Фиг.12

Видно, что закономерность изменения действительных частей контактных напряжений и абсолютной величины амплитуды раскрытия трещины та же самая, что и в случае отсутствия включения, т.е. при увеличении параметра λ опять происходит перераспределение амплитуд действительных частей контактных напряжений: они в средней части штампа увеличиваются, а у концов уменьшаются (фиг.11), тогда как абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины при этом колеблется вокруг состояния равновесия (фиг.13). Что же касается действительной части скачка контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения, то они при увеличении параметра λ меняют знак (фиг.12).

Заключение

Таким образом, в антиплоской постановке исследованы закономерности взаимовлияния межфазных трещин и абсолютно жёстких включений, находящихся в составном полупространстве, изготовленного при помощи соединения слоя и полупространства из разных материалов, и деформирующегося при помощи абсолютно жёсткого штампа, на который действует гармоническая по времени сосредоточенная нагрузка. При помощи численных расчётов показано, что в случае отсутствия включения, когда штамп находится прямо над трещиной, при выбранных значениях параметров абсолютная величина коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины при увеличении частоты вынужденных колебаний возрастают и принимают максимальное значение при

$\omega = 0.79c_2^{(1)} / h$. При дальнейшем увеличении частоты вынужденных колебаний они уменьшаются, стремясь к нулю. Выяснено, что при уменьшении параметра μ, что можно трактовать как увеличение жёсткости слоя μ_1 при постоянной μ_2, коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины по абсолютной величине уменьшаются.

В случае, когда вместе с трещиной присутствует также абсолютно жёсткое включение, указанные закономерности сохраняются, однако, значение параметра ω, при котором абсолютная величина коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений принимают максимальное значение, меняется в зависимости от соотношения сдвиговых жёсткостей слоя и полупространства, а также от местоположения штампа и расстояния включения от трещины. В частности, при выбранных значениях параметров, когда $k = 0$ и $k_* = 3$, абсолютная величина коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений принимают максимальное значение при $\omega = 0.72c_2^{(1)} / h$.

Показано также, что при выбранных значениях параметров, присутствие включения мало влияет как на распределение контактных напряжений, действующих под штампом, так и на абсолютную величину коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18T-2C290.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т.207. №2. С.324–327. Babeshko V.A. On a problem of dynamic destruction of layered bodies with cracks // Proc. Of Academy of Sciences. USSR. 1989. Vol. 207, №2, pp.324–327. (in Russian)
2. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С.5–9. Babeshko V.A. Mediums with heterogeneities (combination of inclusions with heterogeneities) // Proc. RAS. Mechanics of Solids. 2000. №3. Pp.5-9. (in Russian)
3. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т.382. №5. С.625–628. Babeshko V.A., Pavlova A.V., Ratner S.V., Williams R.T. On a solution of problem on vibration of elastic body, containing the system of inner cavities// Proc. Proc. of Academy of Sciences. 2002. Vol.382. №5. Pp. 625-628. (in Russian)
4. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т.68. Вып.3. С.500–507. Pryakhina O.D., Smirnova A.V. The effective method for solution of dynamic problems for layered mediums with discontinuous boundary conditions. // journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2004.Vol.68. Iss.3, pp.500-507. (in Russian)
5. Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. // Proceedings of the Twelfth

International Conference on Composites or Nano Engineering, ICCE-12 August 1-6, 2005, Spain.
6. Акопян В.Н., Саргсян А.О. Об одной динамической смешанной задаче для составного пространства с трещиной при антиплоской деформации. //В сб. статей «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести», посв. 75-летию академика М.А. Задояна, Ереван, «Гитутюн» 2006, с.50-56. On one dynamic mixed boundary value problem for compound space with crack under antiplane deformation // In coll. «Selected problems of the elasticity theory, plasticity and creep», dedicated to 75-anniversary of acad. M.A.Zadoyan. (in Russian)
7. Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Антиплоская динамическая контактная задача для составного полупространства с межфазной трещиной. // В сб. трудов 9-ой межд. Конференции: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», октябрь 1-6, 2018, Горис, с. 44-48. Amirjanyan H.A., Hakobyan L.V. Antiplane dynamic contact problem for compound semi-space with interphase crack. // Proc. of IX international conference «The problems of interaction of deformable media», October 1-6, 2018, Goris, pp.44-48. (in Russian)
8. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа.- Н: Мир, 1962. 279ст. Noble B. Wienner-Hopff method// Mir, 1962, 279p. (in Russian)
9. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Известия НАН Армении, Механика. 2000. Т.53. №3. С.12-19. Sahakyan A.V. Application of the method of discrete singularities for solving the singular integral equations with unmoved singularities. // Proc. NAS RA. Mechanics. 2000. Vol.53. №3. Pp. 12-19. (in Russian)
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series.// Moscow. Nauka. 1981. 738p. (in Russian)
11. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций.- М.: Наука, 1977.- 287с. Brychkov A., Prudnikov A.P. Integral transformations of generalized functions. // M.: Nauka, 1977. 287 p. (in Russian)
12. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения.- М.: Наука, 1974.- 416с. Parton V.Z., Morozov Ye. M. Elastic-plastic mechanics fracture. // M.: Nauka, 1974. 416 p. (in Russian)

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович - доктор физ.-мат. наук., проф., директор Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** amirjanyan@gmail.com

Акопян Лусине Ваграмовна – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90

Поступила в редакцию 21.03.2019

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №2, 2019 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/72.2.2

О СВЕРХЗВУКОВОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ ПАНЕЛИ, РАСТЯНУТОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОТОКА ГАЗА, НАБЕГАЮЩЕГО НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, растягивающие усилия, стабилизация, дивергенция панели, локализованная дивергенция, сверхзвуковое обтекание

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

On divergence of the panel, stretched on the direction of supersonic gas flow, an accumulating on its free edge

Key words: stability, the stretching forces, stabilizing effect, divergence of a panel, localized divergence, supersonic overrunning

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the loss stability phenomenon of the overrunning of the gas flow at is free edge under the assumption of presence of stretced forces at the free und hinged edges. Critical velocities of divergence of the panel and localized divergence are found. It is established that the stretced forces leads to the stabilizing of unperturbed equilibrium state of a plate in supersonic gas flow.

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ ձգված առաձգական ուղղանկյուն սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ կայունություն, ձգող ուժեր, դիվերգենցիա, տեղայնացված դիվերգենցիա, գերձայնային շրջհոսում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում մեկ ազատ եզրով ձգված առաձգական ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է սալի ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը, որոնք բեռնված են ձգող ուժերով, զուգահեռ մյուս երկու նույնպես հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տրված սալի դիվերգենցիայի և ազատ եզրի միջակայքում տեղայնացված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են դիվերգենցիայի և տեղայնացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները:

В статье в линейной постановке исследуется зависимость видов потери статической устойчивости от характера первоначального напряжённого состояния на примере обтекаемой сверхзвуковым потоком газа тонкой упругой прямоугольной пластинки со свободным краем, растянутой по направлению потока, набегающего на её свободный край.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка–поток». Произведено разбиение многопараметрического пространства системы на области устойчивости и статической неустойчивости в виде дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края панели. Исследована граница области устойчивости. Определён явный вид зависимостей критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции от параметров системы.

Установлено, что при обтекании пластинки умеренными и большими сверхзвуковыми скоростями первоначальное напряжённое состояние приводит к существенной стабилизации её невозмущённого состояния равновесия.

Введение. Как известно [1, 2], выпучивание пластинки в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих, как и растягивающих усилий, расположенных в срединной поверхности пластинки. При этом, так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, намного мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки. Поэтому, задача об устойчивости пластинок при равномерном сжатии или растяжении является той «классической задачей», решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

В работе исследуется зависимость видов потери статической устойчивости панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, от характера первоначального напряжённого состояния.

Исследованию зависимости видов потери устойчивости от характера первоначального напряжённого состояния пластин и оболочек как необтекаемых, так и обтекаемых, посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях [1-4]. Однако, здесь, за исключением работ А.А. Мовчана, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой статье, в отличие от вышеуказанных работ, к решению задачи статической устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа панели с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, равномерно растянутой по направлению скорости потока газа, набегающим на её свободный край, применён новый аналитический метод, подробно изложенный в работе [7], удобный для нахождения точного решения широкого класса подобных задач.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V.

Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. Предполагается, что шарниры идеальны.

Будем полагать, что пластинка растянута в своей срединной плоскости силами $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределёнными по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; растягивающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y)$ [1(с. 285), 2 (с. 245)]. Прогиб пластинки $w = w(x, y)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [5]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать также, что прогибы w малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка) в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен одновременно соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными растягиваающими силами $N_x = 2h\sigma_x$ вдоль краев $x = 0$ и $x = a$ пластинки.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба растянутой тонкой изотропной прямоугольной пластинки описывается соотношением [2 (с. 245)]

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1, 2(с. 27,101)]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - N_x D^{-1}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0,\ y = b; \tag{1.4}$$

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки с нагруженными краями $x = 0$ и $x = a$ в предположении, что напряжения σ_x малы по сравнению с предельным значением $(\sigma_x)_{pr.}$, которое не превосходит нижнюю границу текучести: при $V \geq V_{cr}$ устойчивое невозмущённое состояние равновесия пластинки становится статически неустойчивым. Иными словами, требуется определить значения параметра V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2) – (1.4). При этом, предполагается, что

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \; M_0 = \sqrt{2}, \; M_{2\cos m.} \approx 33.85, \tag{1.5}$$

где M_0 и $M_{2\cos m.}$ – граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1].

Заметим, что в работе [9] исследована задача устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа прямоугольной пластинки с нагруженными шарнирно закреплёнными краями в нелинейной постановке.

2. Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка–поток» общее решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x)\cdot \sin(\mu_n y),\ \mu_n = \pi n b^{-1}; \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b.

Подставляя решение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток», описываемое алгебраическим уравнением четвёртой степени:

$$r^4 - 2\cdot(1+\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0, \tag{2.2}$$

где

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \tag{2.3}$$

– параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки;

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2}, \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.} \tag{2.4}$$

– коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки; $(\beta_x^2)_{pr}$ – значение коэффициента напряжения β_x^2, соответствующее предельному значению напряжения $(\sigma_x)_{pr.}$.

Ясно, что

$$\alpha_н^3 \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3},\ a_0^2 \rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1} \mu_n^{-3}), \tag{2.5}$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.3).

Исследуем характеристическое уравнение (2.2).

В соответствии с решением Феррари уравнение (2.2), как алгебраическое уравнение четвёртой степени, можно свести к следующим двум квадратным уравнениям:

$$r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r + q - \sqrt{q^2-1} = 0, \tag{2.6}$$

$$r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r + q + \sqrt{q^2-1} = 0, \tag{2.7}$$

где q – действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(q+1+\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0,\ q \in (q_0,\ \infty). \tag{2.8}$$

Отсюда, в силу обозначения (2.3), очевидно, что параметр q характеризует скорость потока газа V: $q = q(V) \in (q_0,\ \infty)$ при фиксированных значениях остальных параметров системы.

Корни $r_k = r_k(q, \beta_x^2)$ характеристического уравнения (2.2), в соответствии с выражениями (2.6) и (2.7), могут быть как действительными, так и комплексно сопряжёнными числами.

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), записанного в эквивалентной форме (2.6) – (2.8), найден «допустимый» интервал значений параметра скорости q, определяющий границу области устойчивости в пространстве «существенных параметров» исходной системы «пластинка–поток» при фиксированных значениях остальных параметров:

$$q \in \left(q_0,\, \infty\right), q_0 = \left(-(\beta_x^2+1)+2\sqrt{(\beta_x^2+1)^2+3}\right)\Big/3, \text{ для всех } \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}\,. \qquad (2.9)$$

Из условия (1.5) следует, что

$$V(q,n,\gamma,\beta_x^2) \subseteq (V(q_0,n,\gamma,\beta_x^2),\; a_0 M_{2\cos m.}) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\,. \qquad (2.10)$$

Как оказалось, при значениях (2.9) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных и пару комплексно-сопряжённых корней, которые легко находятся, являясь решением квадратных уравнений (2.6) и (2.7):

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1-\beta_x^2)}\;,\;\; r_1<0\,,\;\; r_2<0\,; \qquad (2.11)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1-\beta_x^2)}\;,\;\; q \in \left(q_0,\, \infty\right). \qquad (2.12)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.11) и (2.12), общее решение (2.1) уравнения (1.1) представится двойным рядом вида:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\cdot \exp(\mu_n r_k x)\cdot \sin(\mu_n y)\,. \qquad (2.13)$$

Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.8), после простых преобразований получаем явный вид выражения зависимости скорости потока газа V от существенных параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q,n,\gamma,\beta_x^2) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)\cdot(q^2-1)}\cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1} \qquad (2.14)$$

для прямоугольных пластинок умеренных размеров и достаточно длинных ($a \ll b$) и

$$V(q,n,\beta_x^2) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)\cdot(q^2-1)}\cdot \pi^3 n^3 D (a_0 \rho_0 b^3)^{-1} \qquad (2.15)$$

для достаточно широких пластинок ($a \gg b$).

Здесь через γ обозначено отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b:

$$\gamma = ab^{-1}\,. \qquad (2.16)$$

Общее решение (2.13) исходной задачи, удовлетворяющее необходимому условию существования локализованной неустойчивости [6, 8]

$$\operatorname{Re} r_1 < 0\,,\;\; \operatorname{Re} r_2 < 0\,, \qquad (2.17)$$

представится в виде

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n1}\exp(\mu_n r_1 x) + C_{n2}\exp(\mu_n r_2 x)\right)\cdot \sin(\mu_n y)\,, \qquad (2.18)$$

где r_1 и r_2 определены выражениями (2.11).

В согласии с необходимым условием (2.17) из выражений (2.11) следует, что невозмущённое состояние равновесия как обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластинок $(\gamma \gg 1)$, так и полубесконечной пластины–полосы $(\gamma = \infty)$, может потерять статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$.

Обозначим через γ_* граничное значение параметра отношения сторон γ прямоугольной пластинки, начиная с которого при всех

$$\gamma \geq \gamma_* \gg 1 \tag{2.19}$$

можно считать поведение достаточно широких прямоугольных пластин ($\gamma \geq \gamma_*$) аналогичным поведению полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$) при обтекании сверхзвуковым потоком газа.

Следует отметить, что граничное значение $\gamma = \gamma_*$ определяется на основе анализа численных результатов исследования соответствующих дисперсионных уравнений дивергенции панели и локализованной дивергенции.

2.1. При отсутствии обтекания $V = 0$ ($\alpha_n^3 = 0$) характеристическое уравнение (2.2) запишется в виде

$$r^4 - 2 \cdot (1 + \beta_x^2) \cdot r^2 + 1 = 0 \tag{2.20}$$

или

$$(r^2 + \sqrt{2 \cdot (2 + \beta_x^2)} \cdot r + 1) \cdot (r^2 - \sqrt{2 \cdot (2 + \beta_x^2)} \cdot r + 1) = 0\,. \tag{2.21}$$

Приравнивая нулю каждый из сомножителей соотношения (2.21), находим корни r_k характеристического уравнения (2.18), определяемые следующими выражениями:

$$r_{1,2} = -\sqrt{1 + 0.5\beta_x^2} \pm \sqrt{0.5\beta_x^2}\,, \; r_{3,4} = \sqrt{1 + 0.5\beta_x^2} \pm \sqrt{0.5\beta_x^2}\,. \tag{2.22}$$

В силу необходимого условия (2.17), отсюда следует, что невозмущённое состояние равновесия необтекаемых достаточно широких растянутых прямоугольных пластинок ($\gamma \gg 1$), а также необтекаемой полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$), при всех значениях $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}$ может потерять статическую устойчивость в виде локализованной неустойчивости, при которой «выпучивается» узкая полоса вдоль края $x = 0$ пластинки.

Таким образом, при всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr}$ необтекаемые и обтекаемые достаточно широкие пластинки могут потерять статическую устойчивость, соответственно, в виде локализованной неустойчивости и в виде локализованной дивергенции, в отличие от необтекаемых и обтекаемых пластин достаточно удлинённых или умеренных размеров, которым присуще потеря статической устойчивости в виде неустойчивости панели и в виде дивергенции панели, соответственно.

3. Перейдём к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков статической неустойчивости как обтекаемых, так и необтекаемых пластинок.

3.1. Подставляя общее решение (2.13) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.11) и (2.12), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель имеет вид

$$F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = \sqrt{2(q + 1 + \beta_x^2)} \cdot \tag{3.1}$$

$$\cdot\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)\right\}B_1B_2-$$

$$-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1}\right)\right\}\cdot$$

$$\cdot B_1B_2\cdot\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma)+2\cdot\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}-\right.\right.$$

$$-(2q^2-4q+1)(q+1)+(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$

$$\left.-2((2q-1)(q+1)-q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu+(q+1+\sqrt{q^2-1}+\beta_x^2)\nu^2\right]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$\left.+2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}(q+1+\beta_x^2)\sqrt{q^2-1}\cdot B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\right\}B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot$$

$$\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma)+2\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\cdot\sqrt{q^2-1}+\right.\right.$$

$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$

$$\left.+2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu-(q+1-\sqrt{q^2-1}+\beta_x^2)\nu^2\right]\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)-$$

$$\left.-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot(3(q^2-1)-2q\beta_x^2-\beta_x^4)\sqrt{q^2-1}\cdot\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\right\}\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot$$

$$\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)=0,$$

где

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1-\beta_x^2)},\quad B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1-\beta_x^2)}\ . \tag{3.2}$$

Очевидно, что $B_1>0$ и $B_2>0$ при всех допустимых значениях q и β_x^2.

В уравнении (3.1) предполагается, что $\gamma\in(0,\infty)$. В соответствии с обозначением (2.16), значения $\gamma=0$ и $\gamma=\infty$ соответствуют двум предельным случаям исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки: условие $\gamma=0$ соответствует бесконечно удлинённой пластинке, а условие $\gamma=\infty$ – полубесконечной пластине–полосе.

3.2. Подставляя общее решение рассматриваемой задачи устойчивости в виде (2.17), в котором корни r_1 и r_2 определены выражениями (2.11), в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{n1} и C_{n2}.

Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению, соответствующему локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластинок $(\gamma>\gamma_*\gg 1)$:

$$F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu)=\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\cdot\nu-(1-\nu)^2+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)=0 \tag{3.3}$$

Можно показать, что

$$\lim_{\gamma\to\infty}(F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=0)=F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu)=0 \text{ для всех } n\,. \tag{3.4}$$

Заметим, что непосредственной подстановкой значения $\beta_x^2=0$ в уравнения (3.1) и (3.3) можно убедиться в их тождественности соответствующим дисперсионным уравнениям, полученных в работе [7] при исследовании задачи устойчивости, соответственно, обтекаемых полубесконечной пластины–полосы и прямоугольной пластинки с ненагруженными краями.

3.3. Численные исследования дисперсионного уравнения (3.1) показали, что его решения, начиная с значения $\gamma=\gamma_{**}=10^{-2}$, удовлетворяют условию

$$q\gg 1 \text{ при всех } \gamma\le\gamma_{**}\ll 1\,. \tag{3.5}$$

Можно показать, что дисперсионное уравнение, соответствующее системе «достаточно удлинённая прямоугольная пластинка–поток», описывается соотношением

$$\lim_{\gamma\to\gamma_{**}}F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=FU(q,n,\gamma_{**},\beta_x^2)= \tag{3.6}$$

$$=\left(-\exp(-1.5\sqrt{2(q+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma_{**})+\cos(\sqrt{0.5(3q-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma_{**})\right)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{(3q-\beta_x^2)\cdot(q+\beta_x^2)^3}-(3q^2-\beta_x^4)\cdot\sin(\sqrt{0,5(3q-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma_{**})=0\,,$$

в силу условия (3.5).

Отсюда следует, что значение параметра отношения сторон панели

$$\gamma=\gamma_{**}=10^{-2} \tag{3.7}$$

определяет границу, начиная с которого поведение невозмущённого состояния растянутых достаточно удлинённых прямоугольных пластинок ($\gamma\le\gamma_{**}\ll 1$), обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, в смысле потери статической устойчивости можно изучить, исследуя дисперсионное уравнение (3.6).

В соответствии с условием (3.5) выражение (2.14) для всех $\gamma\le\gamma_{**}\ll 1$ перепишется в виде

$$V=2\sqrt{2(q+\beta_x^2)}\cdot q\cdot\pi^3 n^3\gamma^3\cdot D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,. \tag{3.8}$$

В соответствии с выражениями (3.6) и (3.8) можно сказать, что для всех $\gamma\le\gamma_{**}\ll 1$ приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr.div}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ достаточно удлинённой панели с точностью до порядка высокой степени малости не зависит от коэффициента Пуассона ν.

3.4. Особо рассмотрим случай обтекаемой растянутой бесконечно удлинённой пластинки.

Нетрудно показать, что дисперсионное уравнение, соответствующее системе «растянутая бесконечно удлинённая пластинка – поток», описывается соотношением:

$$FU(\tilde q,\tilde\beta_x^2)=\left(-\exp(-1.5\sqrt{2(\tilde q+\tilde\beta_x^2)})+\cos\sqrt{0.5(3\tilde q-\tilde\beta_x^2)}\right)\cdot \tag{3.9}$$

$$\cdot\sqrt{(3\tilde q-\tilde\beta_x^2)\cdot(\tilde q+\tilde\beta_x^2)^3}-(3\tilde q^2-\tilde\beta_x^4)\cdot\sin(\sqrt{0,5(3\tilde q-\tilde\beta_x^2)})=0;\ \ \tilde q>\frac{\beta_x^2}{\sqrt3}\,.$$

Здесь $\tilde{q}$ – параметр скорости потока газа V, являющийся действительным корнем кубического уравнения

$$8\cdot\tilde{q}^2\cdot(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)-S^6=0\,,\tilde{\beta}_x^2=h\sigma_x D^{-1}a^2\,,\ S^3=a_0\rho_0 VD^{-1}a^3\,,\ \tilde{q}>\frac{\beta_x^2}{\sqrt{3}}\,. \qquad (3.10)$$

В самом деле, дифференциальное уравнение изгиба обтекаемой растянутой по потоку газа бесконечно удлинённой пластинки и граничные условия при принятых способах закрепления краёв, соответственно, описываются соотношениями [1, 2]:

$$D\frac{d^4w}{dx^4}-N_x\frac{d^2w}{dx^2}+a_0\rho_0 V\frac{dw}{dx}=0\,, \qquad (3.11)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}=0\,,\ D\cdot\frac{d^3w}{dx^3}-N_x\frac{dw}{dx}=0 \text{ при } x=0 \text{ и } w=0\,,\ \frac{d^2w}{dx^2}=0 \text{ при } x=a\,. \qquad (3.12)$$

Подставляя общее решение в виде $w(x)=C\cdot\exp(rx/a)$, где C – произвольная постоянная, в дифференциальное уравнение (3.11), получаем характеристическое уравнение системы «бесконечно удлинённая пластинка–поток», описываемое алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$r^4-2\tilde{\beta}_x^2 r^2+S^3 r=0\,,\ \tilde{\beta}_x^2=h\sigma_x D^{-1}a^2\,,\ S^3=a_0\rho_0 VD^{-1}a^3\,. \qquad (3.13)$$

Уравнение (3.13) в соответствии с решением Феррари можно свести к следующим двум квадратным уравнениям:

$$r^2+\sqrt{2(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\cdot r=0 \quad \text{и} \quad r^2-\sqrt{2(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\cdot r+2\tilde{q}=0 \qquad (3.14)$$

при условии, что $\tilde{q}$ – действительный корень кубического уравнения (3.10).

С помощью графоаналитических методов анализа можно показать, что из четырёх корней r_k характеристического уравнения (3.13) двое – $r_{3,4}$ являются комплексно сопряжёнными числами при условии

$$\tilde{q}>\tilde{\beta}_x^2\big/\sqrt{3}\ . \qquad (3.15)$$

Тем самым, корни r_k характеристического уравнения (3.13), являясь решениями квадратных уравнений (3.14), будут определяться, соответственно, выражениями:

$$r_1=-\sqrt{2(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\,,\ r_2=0\,,\ r_{3,4}=0.5\sqrt{2(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\pm i\cdot\sqrt{0.5\cdot(3\tilde{q}-\tilde{\beta}_x^2)}\,. \qquad (3.16)$$

Тогда, подставляя общее решение дифференциального уравнения (3.11) в виде $w(x)=\sum_{k=1}^{4}C_k\exp(r_k x)$, в котором r_k определены выражениями (3.16), в граничные условия (3.12), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_k. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению (3.9).

Из соотношений (3.10) находим явный вид зависимости скорости потока газа от параметров системы «бесконечно удлинённая пластинка–поток»

$$V=2\sqrt{2(\tilde{q}+\tilde{\beta}_x^2)}\cdot\tilde{q}\cdot D(a_0\rho_0 a^3)^{-1},\ \ \tilde{q}>\tilde{\beta}_x^2\big/\sqrt{3}\,. \qquad (3.17)$$

В силу ограничения (1.5) следует, что

$$\tilde{q} \in \left(\tilde{q}_0, \tilde{q}(a_0 M_{2\cos m.})\right) \subseteq \left(\tilde{q}(a_0 M_0), \tilde{q}(a_0 M_{2\cos m.})\right),\ \tilde{q}_0 = \frac{\tilde{\beta}_x^2}{\sqrt{3}}. \tag{3.18}$$

Результаты численного анализа уравнения (3.9) показали, что влияние первоначального напряжённого состояния на плоскую форму равновесия бесконечно удлинённой пластинки весьма незначительно. Можно принять, что нули функции (3.9) и её интервалы монотонности одни и те же при всех $\tilde{\beta}_x^2$:

$$FU(\tilde{q}, \tilde{\beta}_x^2) < 0\,,\ \tilde{q} \in (\tilde{q}_0, \tilde{q}_1) \cup (\tilde{q}_{cr.}^{(1)}, \tilde{q}(a_0 M_{2\cos m.}))\,; \tag{3.19}$$

$$FU(\tilde{q}, \tilde{\beta}_x^2) > 0\,,\ \tilde{q} \in (\tilde{q}_1, \tilde{q}_{cr.}^{(1)})\,, \tag{3.20}$$

откуда следует, что

$$FU(\tilde{q}_1, \tilde{\beta}_x^2) = 0\,,\ FU(\tilde{q}_{cr.}^{(1)}, \tilde{\beta}_x^2) = 0\,. \tag{3.21}$$

Здесь

$$\tilde{q}_1 \approx 9.1\,,\ \tilde{q}_{cr.}^{(1)} \approx 31.01 \text{ при всех } \tilde{\beta}_x^2\,. \tag{3.22}$$

Подставляя значения (3.22) в выражение (3.17), находим

$$V(\tilde{q}_1) \approx 76.37 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1},\ V(\tilde{q}_{\text{cr.}}^{(1)}) \approx 488.42 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}\,. \tag{3.23}$$

При этом, $V(\tilde{q}_1) > a_0 M_0$, примерно, в $1.5 - 7$ раз для стальной пластинки с $2ha^{-1} = 0.006 - 0.015$ при всех $\tilde{\beta}_x^2$.

Из соотношений (3.19)–(3.23) следует, что равновесное состояние системы «бесконечно удлинённая растянутая пластинка–поток», являясь при малых сверхзвуковых скоростях потока газа $V(\tilde{q}_0) \ge a_0 M_0$ статически неустойчивым в виде дивергенции панели, при скоростях $V \ge V(\tilde{q}_1)$ становится устойчивым, которую вновь теряет при $V \ge V(\tilde{q}_{cr.}^{(1)})$.

3.5. Получим дисперсионные уравнения, описывающие достаточные признаки статической неустойчивости необтекаемых растянутых прямоугольных пластинок, для последующего анализа решения задачи (1.1)–(1.4).

Подставляя общее решение (2.12) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k определяются выражениями (2.20), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$F_{unst.}(n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = \sqrt{\frac{\beta_x^2}{2}} \left(4 + 2\beta_x^2 - (1+\nu)^2\right) \cdot \text{sh}\left(2\pi n \gamma \sqrt{1 + \frac{\beta_x^2}{2}}\right) + \tag{3.24}$$

$$+ \sqrt{1 + \frac{\beta_x^2}{2}} \cdot \left(2\beta_x^2 + (1-\nu)^2\right) \cdot \text{sh}\left(2\pi n \gamma \sqrt{\frac{\beta_x^2}{2}}\right) = 0\,.$$

Переходя к пределу в соотношении (3.24) при условии $\gamma \to \infty$, получаем дисперсионное уравнение локализованной неустойчивости необтекаемой полубесконечной пластины-полосы:

$$\lim_{\gamma\to\infty}(F_{unst.}(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=0)=F_{loc.unst}(\nu,\beta_x^2)=4+2\beta_x^2-(1+\nu)^2=0\,. \qquad (3.25)$$

Из выражений (3.24) и (3.25) очевидно, что $F_{unst.}(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)>0$ и $F_{loc.unst}(\nu,\beta_x^2)>0$ при всех значениях параметров n, $\gamma\in(0,\infty]$, $0<\beta_x^2<(\beta_x^2)_{pr}$ и коэффициента Пуассона ν; и $F_{unst.}(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=0$ при $\beta_ь^2=0$. Это означает, что невозмущённая форма равновесия необтекаемой растянутой пластинки устойчива при всех допустимых значениях параметров задачи, в отличие от необтекаемой пластинки с ненагруженными краями.

Нетрудно показать, что дисперсионное уравнение необтекаемой бесконечно удлинённой растянутой пластинки имеет вид:

$$F_\infty(\tilde\beta_x^2)=\operatorname{sh}\sqrt{2\tilde\beta_x^2}=0 \text{ при всех } \tilde\beta_x^2<(\tilde\beta_x^2)_{pr}\,. \qquad (3.26)$$

Так как $\operatorname{sh}\sqrt{2\tilde\beta_x^2}>0$, то необтекаемая бесконечно удлинённая растянутая пластинка устойчива.

4. Перейдем теперь к анализу устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой растянутой прямоугольной пластинки при допустимых значениях параметра скорости потока газа

$$q\in(q_0,\infty)\subseteq(q(a_0M_0),q(a_0M_{2\cos m.}))\,. \qquad (4.1)$$

Исследуем численными методами уравнения (3.1), (3.3), (3.6) и (3.9).

В пространстве «существенных» параметров рассматриваемой задачи $\Im=\left\{q(V),n,\gamma,\beta_x^2,\nu\right\}$ введём в рассмотрение область устойчивости $\Im_0$ и области статической неустойчивости $\Im_1$, $\Im_2$, соответствующие дивергенции растянутой панели и локализованной дивергенции соответственно.

Из способа разбиения пространства параметров $\Im$ системы на области устойчивости и статической неустойчивости следует, что область устойчивости $\Im_0\in\Im$ невозмущённого состояния равновесия системы «растянутая пластинка–поток» будет определяться неравенствами:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)>0\,,\ F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu)\ >0\,, \qquad (4.2)$$

а области неустойчивости $\Im_1$, $\Im_2$ определяются, соответственно, соотношениями:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)<0\,,\ F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu)<0\,. \qquad (4.3)$$

Границами области устойчивости $\Im_0$ в пространстве её параметров $\Im$ являются гиперповерхности:

$$F(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=0\,, \qquad (4.4)$$

$$F_{locdiv}(q,\beta_x^2,\nu)=0\,. \qquad (4.5)$$

На границе (4.4) области устойчивости $\Im_0$ невозмущённое состояние равновесия растянутой пластинки теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели, а на границе (4.5) – в виде локализованной дивергенции.

Критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n, \gamma, \nu, \beta_x^2)$, полученные подстановкой значений первых корней $q_{cr.div.}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, \nu, \beta_x^2)$ уравнения (4.4) в выражение (2.14), разграничивают области устойчивости $\Im_0$ и статической неустойчивости в виде дивергенции панели $\Im_1$. При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к статической неустойчивости в виде дивергенции панели. В растянутой прямоугольной пластинке при обтекании возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её формы – поверхность пластинки «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости $V_{loc.div} = V_{loc.div}(n, \nu, \beta_x^2)$, полученные подстановкой значений корня $q_{loc.div.} = q_{loc.div}(\nu, \beta_x^2)$ уравнения (4.5) в выражение (2.15), разграничивают области устойчивости $\Im_0$ и статической неустойчивости $\Im_2$ в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ достаточно широкой пластинки и полубесконечной пластины–полосы. При скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к неустойчивости в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ растянутой достаточно широкой пластинки. Вследствие обтекания в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к «выпучиванию» узкой полосы поверхности пластинки вдоль её свободного края $x = 0$.

Границей между областями статической неустойчивости $\Im_1$ и $\Im_2$ является гиперповерхность

$$\lim_{\gamma \to \gamma_*} F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = F_{locdiv}(q, \nu, \beta_x^2) = 0, \ \gamma_* = \gamma_*(\nu, \beta_x^2) \gg 1, \tag{4.6}$$

$\gamma_* = \gamma_*(\nu, \beta_x^2)$ – значение параметра $\gamma \in (0, \infty)$, разграничивающее области неустойчивости $\Im_1$ и $\Im_2$: при значениях $\gamma < \gamma_*$ возможна потеря статической устойчивости только в виде дивергенции панели, а при значениях $\gamma \geq \gamma_*$ – в виде локализованной дивергенции. При этом, в силу условия (4.6) уравнение (3.1) имеет один действительный корень $q_{crdiv} = q_{cr.div}(\nu, \beta_x^2)$, равный корню $q_{loc.div}(\nu, \beta_x^2)$ уравнения (3.3). Тем самым, плоская форма равновесия растянутых достаточно широких прямоугольных пластинок ($\gamma \geq \gamma_*$) при значениях скорости потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенци в окрестности свободного края $x = 0$.

Следует отметить, что критические скорости $V_{cr.div.}(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)$ и $V_{loc.div.}(n,\nu,\beta_x^2)$ системы «пластинка-поток», соответствующие первым корням уравнения (3.1) и решению уравнения (3.3), определяются по формулам (2.14) и (2.15) с достаточной точностью.

5. В данной работе с помощью методов графоаналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)\}$, параметризованных надлежащим образом. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому ограничимся иллюстрациями типичных случаев, выделяя наиболее представительные из семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,\beta_x^2)\}$ в многопараметрическом пространстве $\Im$.

Найдены множества $\left\{q^{(1)}_{\text{cr.div}} = q^{(1)}_{\text{cr.div}}(n,\gamma,\beta_x^2,\nu)\right\}$ и $\left\{q_{\text{loc.div}} = q_{\text{loc.div}}(\beta_x^2,\nu)\right\}$ значений первых корней уравнения (3.1) и единственного корня уравнения (3.3) при различных значениях параметров n, β_x^2, γ и ν системы «пластинка–поток» в интервале допустимых значений параметра q (4.1), подставляя которые в выражения (2.14) и (2.15) находим соответствующие значения приведённых критических скоростей дивергенции панели $V_{cr.div.}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и локализованной дивергенции $V_{\text{loc}.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$.

Ясно, что

$$V_{cr.div}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\in(V_{cr.div}(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m}\Psi_1)\subseteq \tag{5.1}$$

$$\subseteq(a_0 M_0\Psi_1, a_0 M_{2\cos m.}\Psi_1),$$

$$V_{\text{loc}.div}D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)\in(V_{\text{loc}.div}(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3), a_0 M_{2\cos m.}\Psi_2)\subseteq \tag{5.2}$$

$$\subseteq(a_0 M_0\Psi_2, a_0 M_{2\cos m.}\Psi_2),$$

$$\Psi_1 = 12(1-\nu^2)a_0\rho_0 E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ \Psi_2 = 12(1-\nu^2)a_0\rho_0 E^{-1}(2hb^{-1})^{-3},$$

$$M_0=\sqrt{2},\ M_{2\cos m.}\approx 33.85;$$

в соответствии с значением цилиндрической жёсткости и ограничений (1.5), (4.1). При этом, как показал численный анализ, наименьшему значению приведённых критических скоростей $V_{cr.div}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $V_{\text{loc}.div}D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ соответствует значение $n=1$ при фиксированных значениях остальных параметров.

Далее, в соответствии с условием (4.6), находим границу перехода из области дивергенции панели $\Im_1$ в область локализованной дивергенции $\Im_2 : \gamma_* = \gamma_*(\nu,\beta_x^2)$, которую с точностью порядка малости 10^{-4} можно принять зависящей только от коэффициента напряжения: $\gamma_* = \gamma_*(\beta_x^2)$ (табл.1). При значениях $\gamma < \gamma_*$ растянутая прямоугольная пластинка теряет устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях потока газа $V \ge V^{(1)}_{cr.div.}$, а при значениях $\gamma \ge \gamma_*$ – в виде локализованной дивергенции при скоростях потока газа $V \ge V_{loc.div.}$.

Таблица 1

β_x^2	0	1.5	1.8	3.6
γ_*	2.0	2.0	1.8	1.2

Из данных, приведённых в табл.1, следует, что пластинкам с большим коэффициентом напряжения β_x^2 соответствует меньшее граничное значение γ_*: область дивергенции панели $\Im_1$ сужается, а область локализованной дивергенции $\Im_2$, наоборот, расширяется. Иными словами, напряжённое состояние при больших значениях β_x^2 приводит к существенной стабилизации состояния невозмущённого равновесия системы «растянутая пластинка–поток», в сравнении с системой с пластинкой с ненагруженными краями [7].

В табл. 2 представлены значения приведённых критических скоростей локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ для некоторых значений ν и β_x^2 при $n=1$.

Из данных табл.2 следует, что при фиксированных значениях коэффициента напряжения β_x^2 приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, а при фиксированных значениях коэффициента Пуассона ν возрастает примерно в 8 – 15 раз с ростом коэффициента напряжения β_x^2 в промежутке [0, 10]. При этом, привёденная критическая скорость локализованной дивергенции возрастает в большее число раз при больших значениях ν, что также указывает на существенную стабилизацию равновесного состояния растянутой достаточно широкой пластинки при обтекании, в сравнении с достаточно широкой обтекаемой панели с ненагруженными краями $(\beta_x^2 = 0)$ [7].

Таблица 2

β_x^2 \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.0	295.777	169.893	143.905	114.913	79.668
0.1	320.066	185.137	157.851	125.899	89.376
0.3	367.460	215.164	184.005	149.031	108.644
0.5	413.830	245.339	210.785	172.568	127.929
0.8	483.527	289.741	250.989	207.322	156.927
1.0	528.912	320.157	277.443	230.348	176.110
1.5	640.968	393.519	343.019	287.734	224.311
2.0	751.660	465.175	408.495	345.000	272.232
5.0	1392.069	892.701	791.151	680.904	556.008
10.0	2410.499	1573.018	1408.433	1228.270	1218.119

Из результатов численного анализа следует равносильность дисперсионных уравнений (3.1), (3.6) и (3.9) при значениях $\gamma \le \gamma_{**} = 0.01$ и при всех допустимых значениях остальных параметров системы с точностью до порядка 10^{-5}. Следовательно, поведение систем «достаточно длинные растянутые пластинки–поток» аналогично поведению системы «бесконечно удлинённая растянутая пластинка–поток» в смысле потери статической устойчивости их равновесного состояния. Это означает, что влиянием первоначального напряжённого состояния на устойчивость систем «достаточно длинные растянутые пластинки–поток» можно пренебречь. Заметим, что в соответствии с соотношениями (3.19)–(3.23), равновесное состояние этих систем, являясь при малых сверхзвуковых скоростях $V(q_0) \geq V_{por.} = a_0 M_0$ статически неустойчивыми в виде дивергенции панели, при скоростях потока газа $V \geq V(q_1) \approx 76.37 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$, больших на порядок порогового значения $V_{por.} = a_0 M_0$, становятся устойчивыми, которую вновь теряют при скоростях потока газа $V \geq V_{crdiv} \approx 488.42 \cdot D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$.

В табл.3 представлены некоторые значения приведённой критической скорости дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, соответствующие панелям умеренных размеров: $\gamma \in (0.2, 2)$. При этом, значения приведённых скоростей дивергенции панели, взятые в фигурные скобки, соответствуют значениям 0.125, 0.25, 0.3, 0.375 и 0.5 коэффициента Пуассона ν соответственно.

Как следует из данных табл.3, приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, зависящая от параметров γ, β_x^2 и ν, меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, возрастает примерно на два порядка ростом с γ в интервале $(0.2, 2)$ при фиксированных

Таблица 3

γ \ β_x^2	0.0	0.3	0.5	1.0	1.5	5.0
0.3	$\begin{Bmatrix} 3.826 \\ 3.287 \\ 3.078 \\ 2.757 \\ 2.215 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.077 \\ 4.526 \\ 4.301 \\ 3.968 \\ 3.407 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.949 \\ 5.384 \\ 5.150 \\ 4.809 \\ 4.225 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 8.222 \\ 7.607 \\ 7.381 \\ 7.001 \\ 6.381 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.621 \\ 9.975 \\ 9.723 \\ 9.329 \\ 8.686 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 29.598 \\ 28.692 \\ 28.314 \\ 27.767 \\ 26.879 \end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix} 14.650 \\ 12.613 \\ 11.710 \\ 10.448 \\ 8.405 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 18.886 \\ 16.601 \\ 15.713 \\ 14.354 \\ 12.142 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 21.837 \\ 19.445 \\ 18.500 \\ 17.061 \\ 14.740 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 29.602 \\ 26.887 \\ 25.816 \\ 24.239 \\ 21.657 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 37.840 \\ 34.812 \\ 33.656 \\ 31.872 \\ 29.010 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 105.578 \\ 99.701 \\ 97.685 \\ 94.553 \\ 89.679 \end{Bmatrix}$
0.8	$\begin{Bmatrix} 81.466 \\ 59.421 \\ 54.086 \\ 46.171 \\ 35.167 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 102.765 \\ 76.187 \\ 68.915 \\ 60.668 \\ 48.453 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 118.628 \\ 87.526 \\ 80.128 \\ 70.625 \\ 57.489 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 165.402 \\ 117.202 \\ 107.909 \\ 96.533 \\ 81.124 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 655.057 \\ 148.087 \\ 136.958 \\ 123.733 \\ 105.925 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 954.171 \\ 389.850 \\ 367.326 \\ 336.481 \\ 301.080 \end{Bmatrix}$

1.0	$\begin{Bmatrix} 522.743 \\ 156.951 \\ 128.462 \\ 102.093 \\ 72.910 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 577.560 \\ 206.272 \\ 165.615 \\ 133.979 \\ 100.260 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 612.285 \\ 239.197 \\ 190.252 \\ 155.561 \\ 118.173 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 702.632 \\ 319.434 \\ 255.029 \\ 208.950 \\ 164.256 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 794.346 \\ 394.027 \\ 319.214 \\ 264.243 \\ 215.791 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1466.163 \\ 872.372 \\ 762.195 \\ 660.346 \\ 563.034 \end{Bmatrix}$
1.2	$\begin{Bmatrix} 608.684 \\ 323.260 \\ 256.209 \\ 194.600 \\ 135.373 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 713.798 \\ 408.329 \\ 328.369 \\ 254.355 \\ 182.085 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 782.798 \\ 461.774 \\ 376.024 \\ 294.199 \\ 208.667 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 957.383 \\ 590.000 \\ 492.236 \\ 393.071 \\ 285.947 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1134.885 \\ 713.690 \\ 604.458 \\ 491.163 \\ 378.257 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
1.5	$\begin{Bmatrix} 975.760 \\ 595.152 \\ 498.939 \\ 391.691 \\ 268.879 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1204.589 \\ 745.462 \\ 636.079 \\ 509.933 \\ 366.083 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1356.662 \\ 847.229 \\ 726.570 \\ 588.654 \\ 430.925 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1741.238 \\ 1094.372 \\ 949.285 \\ 783.893 \\ 593.118 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2126.033 \\ 1341.000 \\ 1170.403 \\ 976.159 \\ 755.080 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$

значениях β_x^2 и ν, а с ростом β_x^2 на промежутке $[0, 5]$ – возрастает более, чем на порядок при фиксированных значениях γ и ν. Это свидетельствует о существенной стабилизации равновесного состояния обтекаемой растянутой пластинки в сравнении с пластинкой, с ненагруженной краями.

6. Оценим результаты вычислений, приведённых в табл. 2 и 3, применительно к интервалу сверх– и гиперзвуковых скоростей (1.5) для стальной пластинки при значениях параметра $2ha^{-1}$ (или $2hb^{-1}$)$\in[0.006, 0.015]$.

Таблица 4

ν / $2ha^{-1}(2hb^{-1})$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81, 1311.78)	(52.03, 1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70, 1141.58)	(41.63, 996.35)
0.010	(11.84, 283.45)	(11.24, 269.09)	(10.91, 261.25)	(10.30, 246.70)	(8.99, 215.32)
0.012	(6.85, 164.01)	(6.50, 155.72)	(6.32, 151.20)	(5.96, 142.69)	(5.20, 124.60)
0.015	(3.51, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

Подставляя значения параметров $2ha^{-1}$ и $2hb^{-1}$ из промежутка $[0.006, 0.015]$, соответственно, в выражения (5.1) и (5.2), получаем интервалы допустимых значений приведённых скоростей дивергенции панели $V_{cr.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и локализованной дивергенции $V_{\text{loc.div.}}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ применительно к интервалу сверх– и гиперзвуковых скоростей (1.5) (табл. 4).

Из сопоставления данных табл. 2 и 3 с данными табл. 4 следует, что с ростом параметра $2ha^{-1}\in[0.006, 0.015]$ область дивергенции панели значительно сужается. При этом, при значениях $2ha^{-1}$ ($2hb^{-1}$) >0.012 локализованная дивергенция отсутствует при всех $\beta_x^2 \in [0,10]$, начиная с $\gamma = 2$ (табл.1): равновесное состояние пластинок с параметром $\gamma \geq 2$ не теряет статической устойчивости.

Таким образом, с ростом параметра $2ha^{-1}$ (или $2hb^{-1}$) равновесное состояние растянутых обтекаемых пластинок, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5), становится существенно устойчивым, что обусловлено сужением областей дивергенции панели и локализованной дивергенции.

7. Основные результаты. В работе получено аналитическое решение задачи статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия растянутой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край, в предположении, что пластинка растянута по направлению потока газа.

Найдено аналитическое решение задачи статической устойчивости растянутой пластинки при отсутствии обтекания с целью получения строгой и полной оценки влияния первоначального напряжённого состояния на невозмущённое состояние равновесия пластинки при обтекании.

С помощью графоаналитических методов анализа произведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и статической неустойчивости, в которых невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет устойчивость, соответственно, как в виде дивергенции панели, так и в виде локализованной дивергенции. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. При этом, как оказалось, напряжённое состояние, обусловленное растягивающими силами, приводит к смещению границы между областями дивергенции панели и локализованной дивергенции в направлении уменьшения параметра отношения сторон панели в сравнении с обтекаемой панелью с ненагруженными краями [7], а также нагруженной сжимающими силами [8].

Найдены критические значения коэффициента напряжения и критические скорости потока газа, при превышении которых плоская форма равновесия обтекаемой пластинки теряет статическую устойчивость, соответственно, или в виде дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, в зависимости от параметров системы, в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба. Как оказалось, при умеренных и больших значениях параметра отношения сторон пластинки критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции возрастают, примерно, на порядок. При меньших значениях параметра отношения сторон пластинки, примерно, порядка одной десятой и менее, соответствующих достаточно удлинённым прямоугольным пластинкам, первоначальное напряжённое состояние оказывает незначительное влияние на поведение системы «пластинка–поток».

Установлена зависимость видов потери статической устойчивости системы «пластинка–поток» от относительной толщины пластинки применительно к рассматриваемому интервалу сверхзвуковых скоростей потока газа. Найдено граничное значение относительной толщины пластинки, начиная с которого её равновесное состояние теряет устойчивость только лишь в виде дивергенции панели, а локализованная дивергенция отсутствует в предполагаемом интервале сверхзвуковых скоростей: плоская форма равновесия достаточно широких пластинок не теряет статической устойчивости.

Таким образом, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное растягивающими силами, направленными по потоку газа, приводит, в целом, к существенной стабилизации плоской формы равновесия обтекаемых прямоугольных пластинок – к «скачкообразному» росту значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции в сравнении с соответствующими значениями критических скоростей дивергенции и локализованной дивергенции обтекаемой панели с ненагруженными краями [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем .– М.: Физматгиз, 1963. 880 с. Volmir A.S. The Stability of the elastic system. M.: Physmathgiz, 1963. 880 p. (in Russian).
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с. Bolotin V.V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. M.: Science. 1961. 329p. (in Russian).
3. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит, 1995. 320с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic metods. // M.: Science. Physmathlit, 1995. 320 p. (in Russian).
4. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
1. Algazin S.D., Kiyko I.A. Flutter of plates and shells. M.: Science. 2006. 247p.(in Russian).
5. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. №6. С.733–755. Ilyushin A.A. Law of plane sections at high supersonic velocity // PMM. 1956. V.20. № 6. Pp. 733-755. (in Russian).
6. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа //Акустический журнал. 1960. Т.6. №1. С.124–126. Konenkov Yu.K. A Rayleigh–Type Flexural Wave // Soviet Physics. Akoustic Journal. 1960. V.6, №1. Pp.124–126. (in Russian).
7. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №2. С.12–42. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge // Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V.67. №2. P.12–42. (in Russian).
8. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т.71. №4. С.44–68. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge. // Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2018. V.71. №4. P.44–68. (in Russian).
9. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Характер нелинейных колебаний гибких пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Изв. НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. № 4. С. 20–40. Baghdasaryan G. E., Mikilyan M.A., Saghoyan R. O. Character of nonlinear vibrations of elastic plates streamlined by a supersonic gas flow// Reports of NAS of Armenia. Mechanics. 2016. V.69. № 4. P.20-40. (in Russian).

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096 **E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 13.02.2019 г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №2, 2019 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/72.2.3

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЭЛЕЯ

Дарбинян А.З., Саакян А.А.

Ключевые слова: волна Рэлея, поперечная и продольная волны, теплопроводность, волновое число, частота, дисперсионное уравнение, условия затухания, гармоническая волна.

Darbinyan A.Z., Sahakyan A.A.
The effect of temperature on the propagation of Rayleigh surface waves.

Keywords: Rayleigh wave, transverse and longitudinal wave, thermal conductivity, wave number, frequency, dispersion equation, damping conditions, harmonic wave.
An elastic semi-space with a free surface, which is in a plane deformed state, is considered and the possibility of the appearance of Rayleigh-type surface waves depending on the temperature changing is investigated. The dependence curves of the velocity of the surface wave on the parameter, which includes the elastic and temperature coefficients, as well as the wave number and temperature increment, are plotted.

Դարբինյան Ա.Զ., Սահակյան Ա.Ա.
Ջերմության փոփոխության ազդեցությունը Ռելեյի մակերևույթային ալիքների տարածման վրա

Հիմնաբառեր: Ռելեյի ալիքներ, ընդլայնական և երկայնական ալիքներ, ալիքային թիվ, ջերմահաղորդականություն, հաճախականություն, դիսպերսիոն հավասարում, մարման պայման, հարմոնիկ ալիք.
Հետազոտվում է Ռելեյի մակերևույթային ալիքների առաջացման խնդիրը կախված ջերմաստիճանի փոփոխությունից: Առաձգական հարթ խնդրի տեսության շրջանակներում քննարկվում է առաձգական ազատ մակերևույթով կիսատարածություն, որում տարածվում են հարթ ալիքներ: Կառուցվել են գրաֆիկներ, որոնք ցուցադրում են մակերևույթային ալիքի արագության կախվածությունը մի պարամետրից, որի մեջ մտնում են առաձգական և ջերմային գործակիցները, ինչպես նաև ալիքային թիվը և ջերմության փոփոխությունը:

Рассматривается упругое полупространство со свободной поверхностью, находящееся в условиях плоского деформированного состояния. Построены графики зависимости скорости поверхностной волны от параметра, включающего в себя упругие и температурные коэффициенты, а также волновое число и перепад температуры. Исследуется возможность появления поверхностных волн типа Рэлея в зависимости от перепада температуры.

Введение. Упругие поверхностные волны хорошо изучены учёными и инженерами из-за их практической применимости к таким дисциплинам, как сейсмология, акустика, геофизика, материаловедение и другие [1-4]. Эти волны имеют особое значение в сейсмологии, так как, главным образом, они являются причиной разрушений во время землетрясения и, тем самым, наносят наибольший урон. И в настоящее время упругие поверхностные волны привлекают внимание инженеров-строителей, геологов и геофизиков, заинтересованных в сейсмологических приложениях.

Постановка задачи. Рассмотрим упругое полупространство $x_1 \geq 0$ и предположим, что поверхностная волна распространяется в направлении оси x_2. Такого рода волна может возникнуть, если вызывающее её возмущение не зависит от переменной x_3 [5]. Поэтому $u_3 = 0$ и $\varepsilon_{33} = 0$, $\varepsilon_{13} = 0$, $\varepsilon_{32} = 0$, то есть имеем плоско-деформированное состояние.

Предполагаем, что поверхность $x_1 = 0$ свободна от нормальных и касательных напряжений.

Уравнения движения в перемещениях с учётом температуры $T(x_1, x_2, t)$ и уравнения теплопроводности будут:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\mu\Delta u_1-(3\lambda+2\mu)\alpha_t T=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\mu\Delta u_2-(3\lambda+2\mu)\alpha_t T=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \qquad (1)$$

$$\Delta T-\frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=0\ ,$$

где u_1 и u_2 – компоненты перемещения, λ, μ – постоянные Ламе, α_t – коэффициент линейного расширения, ρ – плотность материала полуплоскости, $c_3 = \sqrt{\lambda_t/(\tau_r c_v)}$ – скорость распространения тепла, λ_t – коэффициент теплопроводности, c_v – объёмная теплоёмкость, τ_r – время релаксации теплового потока, которое для металлов имеет величину $\tau_r = 10^{-11}$ сек. [6].

Имеем граничные условия свободной поверхности:

$$\sigma_{11}=\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-(3\lambda+2\mu)\alpha_t=0$$

$$\sigma_{12}=\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=0. \qquad (2)$$

Относительно граничного условия для уравнения теплопроводности отметим, что оно получается путём упрощения уравнения теплопроводности, выписанного для очень тонкого слоя на поверхности полуплоскости. Предполагается, что коэффициент линейного расширения для слоя α_{tb} отличается от коэффициента α_t полуплоскости, а температура по толщине изменяется слабо. Тогда, из уравнения связанной теплопроводности $\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}+\frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}-\eta\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t}=0$ [6,7] придём к следующему граничному условию:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}-\eta\frac{\partial u_1}{\partial t}=0, \qquad (3)$$

где $\eta = \dfrac{3\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_{t1}} \alpha_{tb} \delta T_0$, δT_0 – начальный перепад температуры [6].

Решение задачи.

Посредством скалярных потенциалов [5], $u_1 = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}$, $u_2 = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}$ уравнения (1) сводятся к уравнениям:

$$\Delta\phi - \alpha_0 T = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \Delta\psi = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \Delta T = \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \tag{4}$$

где $c_1^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, $c_2^2 = \dfrac{\mu}{\rho}$, $\alpha_0 = \dfrac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\alpha_t$.

Граничные условия запишутся в виде

$$2\mu\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2{}^2}\right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_t T(x_1, x_2, t) = 0,$$

$$2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2{}^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1{}^2} = 0 \qquad \text{при } x_1 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} - \eta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) = 0.$$

Решение уравнений (2) будем искать в виде гармонических волн:

$$\phi = \phi_1(x_1)e^{-i(\omega t - kx_2)}, \ \psi = \psi_1(x_1)e^{-i(\omega t - kx_2)}, \ T = T_1(x_1)e^{-i(\omega t - kx_2)}, \tag{6}$$

где ω – частота, а k – волновое число.

Необходимо обеспечить выполнение условий затухания на бесконечности в направлении x_1:

$$\lim_{x_1\to\infty} \phi_1(x_1) = 0; \ \lim_{x_1\to\infty} \psi_1(x_1) = 0; \ \lim_{x_1\to\infty} T_1(x_1) = 0. \tag{7}$$

Подставляя представления (6) в уравнения (4), получаем

$$\begin{gathered} \phi_1''(x_1) - k^2\nu_1^2\phi_1(x_1) = \alpha_0 T_1(x_1) \\ \psi_1''(x_1) - k^2\nu_2^2\psi_1(x_1) = 0 \\ T_1''(x_1) - k^2\nu_3^2 T_1(x_1) = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{gathered} \xi = \frac{c^2}{c_2^2}, \quad \vartheta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad \vartheta_1 = \frac{c_2^2}{c_3^2}, \quad \nu_1{}^2 = 1 - \vartheta\xi, \\ \nu_2{}^2 = 1 - \xi, \quad \nu_3{}^2 = 1 - \vartheta_1\xi, \quad c = \omega/k. \end{gathered} \tag{9}$$

Очевидно, что для обеспечения условий затухания (7) необходимо выполнение условия

$$\operatorname{Re}\sqrt{1-\xi} > 0\,. \tag{10}$$

Общее решение уравнений (8), удовлетворяющее условиям затухания (7), будет:

$$\phi_1(x_1) = Ae^{-k\nu_1 x_1} + \frac{\alpha_0}{k^2\left(\nu_3^2-\nu_1^2\right)}Be^{-k\nu_3 x_1}\,,$$

$$\psi_1(x_1) = Ce^{-k\nu_2 x_1}, \quad T_1(x_1) = Be^{-kx_1\nu_3}\,. \tag{11}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2) и (3), получим систему однородных уравнений относительно коэффициентов A, B, C:

$$\left(2-\xi\right)A + \frac{\alpha_0}{k^2}\frac{2-\xi}{\xi\left(\vartheta-\vartheta_1\right)}B - 2i\sqrt{1-\xi}C = 0$$

$$-2i\sqrt{1-\vartheta\xi}A + \frac{2i\alpha_0\sqrt{1-\vartheta_1\xi}}{k^2\left(\vartheta_1-\vartheta\right)\xi}B - \left(2-\xi\right)C = 0 \tag{12}$$

$$i\eta\omega\sqrt{1-\vartheta\xi}A + \sqrt{1-\vartheta_1\xi}\left(1+\frac{i\eta\alpha_0\omega}{k^2\xi\left(\vartheta-\vartheta_1\right)}\right)B + \eta\omega C = 0\,.$$

Для существования ненулевого решения однородных линейных уравнений (12) необходимо равенство нулю главного детерминанта. Это условие приводит к следующему дисперсионному уравнению относительно ξ:

$$\sqrt{1-\vartheta_1\xi}\left[4\sqrt{\left(1-\xi\right)\left(1-\vartheta\xi\right)}-\left(2-\xi\right)^2\right]+i\frac{\eta_1\left(2-\xi\right)\sqrt{\xi}}{\vartheta-\vartheta_1}\left(\sqrt{1-\vartheta_1\xi}-\sqrt{1-\vartheta\xi}\right)=0 \tag{13}$$

где $\quad \eta_1 = \dfrac{c_2\left(3\lambda_1+2\mu_1\right)\alpha_{tb}}{\lambda_{t1}}\dfrac{\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t}{\left(\lambda+2\mu\right)k}\delta T_0\,.$

Действительная часть полученного уравнения в качестве множителя содержит известное уравнение Рэлея [1,5].

Выделив нулевой корень, будем иметь:

$$\sqrt{1-\vartheta_1\xi}\left[\xi+4\sqrt{\left(1-\xi\right)}\frac{\vartheta-1}{\sqrt{1-\xi}+\sqrt{1-\vartheta\xi}}\right]+i\frac{\eta_1\left(2-\xi\right)}{\left(\vartheta-\vartheta_1\right)\sqrt{\xi}}\left(\sqrt{1-\vartheta_1\xi}-\sqrt{1-\vartheta\xi}\right)=0$$

Очевидно, что при наличии температурного поля, обусловленного тепловым потоком, распространяющимся с конечной скоростью, существование поверхностной волны будет зависеть от параметра η_1 во втором слагаемом уравнения (13).

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть коэффициент линейного расширения полуплоскости α_t равен нулю, а, следовательно, и $\eta_1 = 0$. Тогда, очевидно, напряжённо-деформированное состояние полуплоскости не будет зависеть от изменения температуры и дисперсионное уравнение (13) перейдёт в известное уравнение Рэлея:

$$\sqrt{1-\vartheta_1\xi}\left[4\sqrt{(1-\xi)(1-\vartheta\xi)}-(2-\xi)^2\right]=0\,. \qquad (14)$$

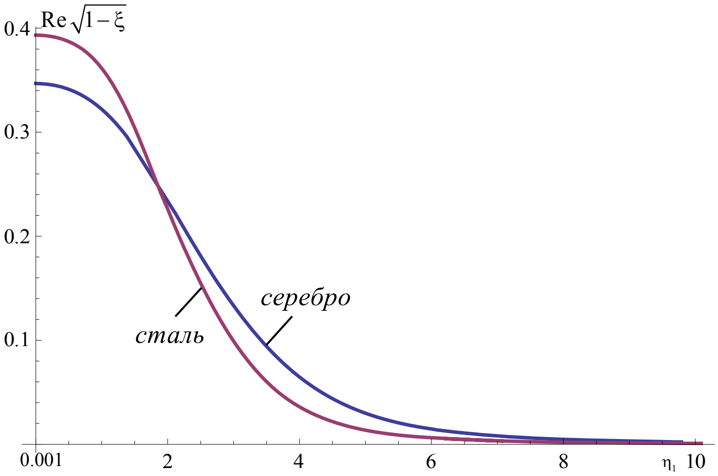
2. На свободной поверхности заданы условия Навье:

$$\sigma_{11}=\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-(3\lambda+2\mu)\alpha_t=0$$

$$u_2=0,\ \ \frac{\partial T}{\partial x_1}-\eta\frac{\partial u_1}{\partial t}=0 \qquad (15)$$

В этом случае дисперсионное уравнение будет

$$\sqrt{1-\xi}\left[\xi\sqrt{(1-\vartheta_1\xi)}-i\frac{\eta_1\sqrt{\xi}}{\vartheta-\vartheta_1}\left(\sqrt{1-\vartheta\xi}-\sqrt{1-\vartheta_1\xi}\right)\right]=0 \qquad (16)$$



Фиг.1. Зависимость показателя убывания амплитуды поверхностной волны от η_1 в общем случае (формула (13)).

Расчёты показывают, что полученное дисперсионное уравнение имеет только два корня: $\xi=0$ и $\xi=1$, ни один из которых не допускает волнового процесса. Таким образом, при задании на границе полуплоскости условий Навье распространение поверхностной волны невозможно.

На фиг. 1 представлена зависимость показателя убывания амплитуды поверхностной волны от параметра η_1, характеризующего влияние изменения температуры, когда корень ξ определяется из уравнения (13).

Выявлен диапазон появления поверхностных волн в зависимости от температуры для стали и серебра. Расчёты показывают, что при значении $\eta_1>1.226$ для стали и $\eta_1>1.34$ для серебра существует дополнительная поверхностная волна, скорость

которой лежит между скоростями продольной и поперечной волн, подобный результат при наличии импеданса в граничных условиях получен и в работе [8].
Заключение. Показано, что наличие изменяющегося температурного поля приводит к расширению зоны локализации поверхностной волны, распространяя её влияние в глубь полупространства.

Авторы выражают благодарность профессору М.В.Белубекяну за постановку задачи и ценные указания при её решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh L. On waves propagating along the plane surface of an elastic solid. Proc. R. Soc. London. A17 (1885) 4-11.
2. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. North- Holland, Amsterdam, 1973, 465p.
3. Harris J.G. Linear Elastic Waves, Cambridge, New-York: 2001, 162p.
4. X.-F. Li On approximate analytic expressions for the velocity of Rayleigh waves. Wave Motion 44 (2006) 120-127.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: «Мир», 1975. 872с.
6. Лыков А.В. Тепломассобмен. М.: Энергия, 1971. 309с.
7. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван –1997. С.79-96.
8. Eduardo Goday, Mario Duran, Jean-Claude Nedelec. On the existence of surface waves in on elastic half-space with impedance boundary conditions. Wave Motion 49(2012)585-594.

Сведения об авторах:

Дарбинян Артавазд Завенович - к.ф.м.н., с.н.с. Института механики НАН Армении.
E-mail: darbinyan_1954@mail.ru,

Саакян Арег Аветикович - к.ф.м.н., н.с. Института механики НАН Армении
E-mail: areg1992@gmail.com

Поступила в редакцию 22. 02. 2019 г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №2, 2019 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/72.2.4

О ВОЗМОЖНОСТИ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА СДВИГОВЫХ ЧАСТОТ УПРУГОГО ВОЛНОВОДА, ОБУСЛОВЛЕННОГО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Саакян С.Л.

Ключевые слова: сдвиговые волны, волновод, резонанс.

Sahakyan S. L.
About the possibility of internal resonance of shear frequencies of elastic waveguide due to mixed boundary conditions
Keywords: shear waves, waveguide, resonance.
The study of purely shear waves in a flat layer began by Love's work in 1911 [1]. Then many problems were solved for elastic waveguides with various boundary conditions and in a dynamic formulation (problems with initial conditions). A survey of these papers is given in the monograph [2] and in [3]. In [4], localized shear waves are considered in the vicinity of the edge of a semi-infinite waveguide. The paper [5] is devoted to the case when the plane boundary of the semi-infinite part of the waveguide passes into a periodically varying boundary. In [6], resonance oscillations in a plane finite composite waveguide were investigated. In [11], the propagation of shear waves in elastic waveguide with the periodically changed boundary conditions is investigated.
In this paper we consider waveguides under different boundary conditions on the planes and at the edges bounding the waveguide. It is established that the localization of shear waves in the neighborhood of the junction of different parts of the waveguides is possible. It is also shown that the possibility of the appearance of resonant phenomena in waveguides depends essentially on the boundary conditions.

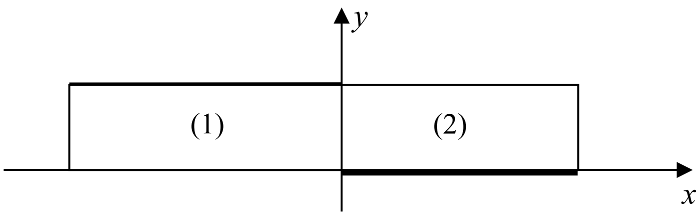
Սահակյան Ս.Լ.
Խառը եզրային պայմաններով պայմանավորված առաձգական ալիքատարի սահքի հաճախականությունների ներքին ռեզոնանսի հնարավորության մասին
Հիմնաբառեր. սահքի ալիքներ, ալիքատար, ռեզոնանս:

Հարթ շերտում մաքուր սահքի ալիքների ուսումնասիրության սկիզբը դրվել է 1911-ին [1]: Հետագայում առաձգական ալիքատարների վերաբերյալ դինամիկ դրվածքով լուծվել են բազմաթիվ խնդիրներ՝ տարբեր եզրային պայմանների դեպքում (խնդիրներ սկզբնական պայմաններով): Այսպիսի աշխատանքների ամփոփում տրված է [2] մենագրությունում և [3] հոդվածում: Կիսաանվերջ ալիքատարի եզրի մոտ տեղայնացված սահքի ալիքներ դիտարկված են [4] հոդվածում: [5] հոդվածը նվիրված է այն դեպքին, երբ ալիքատարի կիսաանվերջ հատվածի հարթ եզրը վեր է ածվում պարբերաբար փոփոխվող եզրի: [6]-ում հետազոտված են ռեզոնանսային տատանումները վերջավոր հարթ բաղադրյալ ալիքատարում: [11] հոդվածում դիտարկվել է առաձգական ալիքատարում սահքի ալիքների տարածման խնդիրը պարբերաբար փոփոխվող եզրային պայմանների դեպքում:
Այս հոդվածում դիտարկվում են ալիքատարներ՝ դրանք սահմանափակող հարթություններում և դրանց եզրերում տարբեր պայմանների դեպքում: Հաստատվել է ալիքատարների տարբեր մասերի անցման (կցման) շրջակայքում սահքի ալիքների տեղայնացման հնարավորությունը: Ցույց է տվել նաև, որ ալիքատարներում ռեզոնանսային երևույթների առաջացման հավանականությունը զգալիորեն կախված է եզրային պայմաններից:

Начало исследованию чисто сдвиговых волн в плоском слое было положено работой Лява 1911г. [1]. В дальнейшем были решены многочисленные задачи для упругих волноводов с различными граничными условиями и в динамической постановке (задачи с начальными условиями). Обзор этих работ приводится в монографии [2] и в статье [3]. В статье [4] рассматриваются локализованные сдвиговые волны в окрестности края полубесконечного волновода. Статья [5] посвящена случаю, когда плоская граница полубеско-

нечной части волновода переходит в периодически изменяющуюся границу. В [6] исследованы резонансные колебания в плоском конечном составном волноводе. В статье [11] рассмотрена задача распространения сдвиговых волн в упругом волноводе с периодически меняющимися граничными условиями.
В настоящей статье рассматриваются волноводы при разных граничных условиях на плоскостях и на краях, ограничивающих волновод. Устанавливается, что возможна локализация сдвиговых волн в окрестости перехода (стыка) разных частей волноводов. Также показано, что возможность появления резонансных явлений в волноводах существенно зависит от краевых условий.

1. Постановка задачи. Пусть плоский волновод состоит из двух частей. В прямоугольной декартовой системе координат первая часть волновода с индексом (1) занимает область $-a_1 \le x < 0$, $0 \le y < b$, $-\infty < z < \infty$; вторая часть с индексом (2) занимает область $0 < x < a_2$, $0 \le y < b$, $-\infty < z < \infty$ (фиг.1).



Фиг.1

Рассматриваются чисто сдвиговые упругие колебания (антиплоская деформация)

$$u = 0,\ v = 0,\ w = w(x, y, t). \tag{1.1}$$

Уравнения распространения волн для частей волновода имеют вид [2, 7]:

$$c_t^2 \Delta w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2},\ c_t^2 = \frac{\mu}{\rho};\ i = 1,2, \tag{1.2}$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, μ – модуль сдвига, ρ – плотность материала волновода, c_t – скорость объёмной сдвиговой волны. Предполагается, что поверхность волновода $y = 0$ свободна ($\sigma_{yz}^{(1)} = 0$) при $x < 0$ и закреплена при $x > 0$, а поверхность $y = b$ свободна при $x > 0$ и закреплена при $x < 0$, т.е.

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = 0,\ w_2 = 0 \ \text{ при } y = 0; \qquad w_1 = 0,\ \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0 \ \text{ при } y = b. \tag{1.3}$$

На стыке волноводов (на месте сочленения) должны быть удовлетворены условия непрерывности перемещений и касательных напряжений σ_{xz}:

$$w_1 = w_2,\ \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x} \ \text{ при } x = 0. \tag{1.4}$$

Для выявления возможного внутреннего резонанса в зависимости от условий на краях волновода, рассмотрим две задачи:

а) когда край волновода $x = -a_1$ свободен, а край $x = a_2$ закреплён:

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|_{x=-a_1} = 0\,,\; \left. w_2\right|_{x=a_2} = 0\,; \tag{1.5}$$

б) когда оба края волновода свободны:

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|_{x=-a_1} = 0\,,\; \left.\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{x=a_2} = 0\,. \tag{1.6}$$

2. Получение соответствующих систем уравнений. Решения уравнений (1.2) для частей волновода, удовлетворяющие граничным условиям (1.3), представляются следующим образом:

$$w_1 = e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\cos\lambda_n y\,,\quad \lambda_n = \frac{\pi + 2\pi n}{2b}\,; \tag{2.1}$$

$$w_2 = e^{i\omega t}\sum_{m=0}^{\infty} g_m(x)\sin\lambda_m y\,,\quad \lambda_m = \frac{\pi + 2\pi m}{2b}\,. \tag{2.2}$$

Подстановка (2.1), (2.2) в уравнения (1.2) приводит к последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_n(x),\ g_m(x)$. Общие решения этих уравнений получаются в виде:

$$f_n(x) = a_n\sin\lambda_n p_n x + b_n\cos\lambda_n p_n x\,,\; g_m(x) = c_m\sin\lambda_m p_m x + d_m\cos\lambda_m p_m x \tag{2.3}$$

Здесь a_n, b_n, c_m, d_m – произвольные постоянные,

$$p_n = \sqrt{\eta_n^2 - 1}\,,\; \eta_n^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_n^2 c_t^2}\,,\; p_m = \sqrt{\eta_m^2 - 1}\,,\; \eta_m^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_m^2 c_t^2}\,. \tag{2.4}$$

Когда край волновода $x = -a_1$ свободен, а край $x = a_2$ закреплён, то с учётом условий (1.5), решения (2.3) приводятся к виду:

$$f_n(x) = F_n\cos[\lambda_n p_n(a_1 + x)]\,,\quad g_m(x) = G_m\sin[\lambda_m p_m(a_2 - x)]\,, \tag{2.5}$$

где F_n, G_m – новые произвольные постоянные. Тогда, (2.1) и (2.2) перепишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty} F_n\cos[\lambda_n p_n(a_1 + x)]\cos\lambda_n y,\\ w_2 &= e^{i\omega t}\sum_{m=0}^{\infty} G_m\sin[\lambda_m p_m(a_2 - x)]\sin\lambda_m y. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Из (1.4) и (2.6) следует

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} F_n\cos\lambda_n p_n a_1\cos\lambda_n y = \sum_{m=0}^{\infty} G_m\sin\lambda_m p_m a_2\sin\lambda_m y,\\ &-\sum_{n=0}^{\infty} F_n\lambda_n p_n\sin\lambda_n p_n a_1\cos\lambda_n y = -\sum_{m=0}^{\infty} G_m\lambda_m p_m\cos\lambda_m p_m a_2\sin\lambda_m y. \end{aligned} \tag{2.7}$$

С учётом разложения в ряд Фурье

$$\sin\lambda_m y = \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} \cos\lambda_n y \tag{2.8}$$

из (2.7) получим следующую систему бесконечных уравнений:

$$\begin{aligned} &F_n \cos\lambda_n p_n a_1 = \sum_{m=0}^{\infty} G_m b_{mn} \sin\lambda_m p_m a_2, \\ &F_n \lambda_n p_n \sin\lambda_n p_n a_1 = \sum_{m=0}^{\infty} G_m b_{mn} \lambda_m p_m \cos\lambda_m p_m a_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Исключая неизвестные F_n из системы (2.9), относительно неизвестных G_m мы придём к системе бесконечных уравнений:

$$\begin{cases} a_{00}G_0 + a_{10}G_1 + a_{20}G_2 + \cdots + a_{m0}G_m + \cdots = 0 \\ a_{01}G_0 + a_{11}G_1 + a_{21}G_2 + \cdots + a_{m1}G_m + \cdots = 0 \\ a_{02}G_0 + a_{12}G_1 + a_{22}G_2 + \cdots + a_{m2}G_m + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{0n}G_0 + a_{1n}G_1 + a_{2n}G_2 + \cdots + a_{mn}G_m + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{2.10}$$

где

$$a_{mn} = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+m+n)\pi}\left(\lambda_n p_n \operatorname{tg}\lambda_n p_n a_1 \operatorname{tg}\lambda_m p_m a_2 - \lambda_m p_m\right); \ m+n \quad \textit{чётно} \\ \dfrac{2}{(m-n)\pi}\left(\lambda_n p_n \operatorname{tg}\lambda_n p_n a_1 \operatorname{tg}\lambda_m p_m a_2 - \lambda_m p_m\right); \ m+n \quad \textit{нечётно} \end{cases} \tag{2.11}$$

Когда же оба края волновода свободны, то используя условия (1.6), относительно неизвестных G_m аналогичном образом приходим к бесконечной системе вида (2.10), где

$$a_{mn} = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+m+n)\pi}\left(\lambda_n p_n \operatorname{tg}\lambda_n p_n a_1 + \lambda_m p_m \operatorname{tg}\lambda_m p_m a_2\right); \ m+n \quad \textit{чётно} \\ \dfrac{2}{(m-n)\pi}\left(\lambda_n p_n \operatorname{tg}\lambda_n p_n a_1 + \lambda_m p_m \operatorname{tg}\lambda_m p_m a_2\right); \ m+n \quad \textit{нечётно} \end{cases} \tag{2.12}$$

В (2.11) и (2.12) обозначения определяются из (2.4).

3. Решение поставленных задач. Для выявления возможного резонанса в волноводе вместо бесконечных систем будут рассматриваться соответствующие усечённые системы. Тогда, в приближении m-ого порядка $(m = 0,1,2,\cdots)$, из условия нетривиальности решения усечённой системы получим дисперсионное уравнение для определения частоты ω:

$$\det\begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{m0} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0m} & a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = 0. \tag{3.1}$$

а) Один край волновода свободен, а другой закреплён. Согласно (2.11) и (3.1), в нулевом приближении ($m = 0$) имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{2}{\pi}\lambda_0 p_0 \left(\operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_1 \operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_2 - 1\right) = 0. \tag{3.2}$$

Используя обозначения (2.4), получаются следующие частоты:

$$\frac{\omega}{c_t} = \frac{\pi}{2b},\ \frac{\omega}{c_t} = \sqrt{\frac{(\pi + 2\pi k)^2}{4(a_1 + a_2)^2} + \frac{\pi^2}{4b^2}}\ \ \left(k = 0,1,2,...\right). \tag{3.3}$$

Бесконечное число решений устанавливает наличие частот для соответствующих мод колебаний. Из (3.3) следует, что ни при каких значениях a_1, a_2 и b частоты не будут совпадать, т.е. появление внутреннего резонанса невозможно.

В приближении первого порядка ($m = 1$) из (3.1) с учётом (2.11) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{gathered} \lambda_0 p_0 \lambda_1 p_1 \left(\operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_1 \operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_2 - 1\right)\left(\operatorname{tg}\lambda_1 p_1 a_1 \operatorname{tg}\lambda_1 p_1 a_2 - 1\right) + \\ +3\left(\lambda_0 p_0 \operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_1 \operatorname{tg}\lambda_1 p_1 a_2 - \lambda_1 p_1\right)\left(\lambda_1 p_1 \operatorname{tg}\lambda_1 p_1 a_1 \operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_2 - \lambda_0 p_0\right) = 0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

В длинноволновом (низкочастотном) приближении

$$\lambda_0 p_0 a_1 << 1,\ \lambda_1 p_1 a_1 << 1,\ \lambda_0 p_0 a_2 << 1,\ \lambda_1 p_1 a_2 << 1 \tag{3.5}$$

из (3.4) получаются четыре частоты:

$$\frac{\omega^2}{c_t^2} = \frac{\pi^2}{4b^2},\ \frac{\omega^2}{c_t^2} = \frac{9\pi^2}{4b^2},\ \frac{\omega^2}{c_t^2} = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{\pi^2}{4b^2},\ \frac{\omega^2}{c_t^2} = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{9\pi^2}{4b^2}. \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что при условии

$$b^2 = 2a_1 a_2 \pi^2 \tag{3.7}$$

две частоты совпадают, т.е. возможно появление внутреннего резонанса [4, 6, 8, 9].

В приближении второго порядка ($m = 2$) из (3.1) получим следующее дисперсионное уравнение относительно частоты ω:

$$\det\begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = 0, \tag{3.8}$$

где a_{mn} определяются по (2.11) с использованием обозначений (2.4). В длинноволновом (низкочастотном) приближении, применяя вместе с (3.5) также $\lambda_2 p_2 a_1 << 1$, $\lambda_2 p_2 a_2 << 1$, уравнение (3.8) принимает следующий вид:

$$256\lambda_0 p_0 \lambda_1 p_1 \lambda_2 p_2 \left(a_1 a_2 \lambda_0^2 p_0^2 - 1\right)\left(a_1 a_2 \lambda_1^2 p_1^2 - 1\right)\left(a_1 a_2 \lambda_2^2 p_2^2 - 1\right) = 0 . \qquad (3.9)$$

Уравнение (3.9) устанавливает наличие шести частот для соответствующих мод колебаний:

$$\frac{\omega^2 b^2}{c_t^2} = \frac{\pi^2}{4}\ddot{x}, \ \frac{\omega^2 b^2}{c_t^2} = \frac{9\pi^2}{4}, \ \frac{\omega^2 b^2}{c_t^2} = \frac{25\pi^2}{4}, \qquad (3.10)$$

$$\frac{\omega^2 b^2}{c_t^2} = \frac{b^2}{a_1 a_2} + \frac{\pi^2}{4}, \ \frac{\omega^2 b^2}{c_t^2} = \frac{b^2}{a_1 a_2} + \frac{9\pi^2}{4}, \ \frac{\omega^2 b^2}{c_t^2} = \frac{b^2}{a_1 a_2} + \frac{25\pi^2}{4} .$$

Здесь $\omega b c_t^{-1}$ – безразмерная характеристика частоты. Первые три частоты не зависят от размеров частей a_1, a_2 и от ширины b волновода. Из (3.10) следует, что при определённых геометрических характеристиках волновода возможно совпадение частот. Совпадение частот происходит при выполнении условий:

$$b = \pi\sqrt{2a_1 a_2}\ , \ b = 2\pi\sqrt{a_1 a_2} \ \text{ и } \ b = \pi\sqrt{6a_1 a_2}\ , \qquad (3.11)$$

что приводит к появлению внутреннего резонанса.

При приближении k -го порядка ($k \geq 1$, $m = k$) предположим, что $\lambda_m p_m a_1 << 1$, $\lambda_m p_m a_2 << 1$, $\left(m = 0,1,\ldots,k\right)$. Тогда a_{mn} будут определяться следующим образом:

$$a_{mn} = \left(\lambda_n^2 p_n^2 a_1 a_2 - 1\right) b_{mn}, \ b_{mn} = \begin{cases} \dfrac{2\lambda_m p_m}{\left(1 + m + n\right)\pi}; \ m + n \quad \textit{чётно} \\ \dfrac{2\lambda_m p_m}{\left(m - n\right)\pi}; \ m + n \quad \textit{нечётно} \end{cases} \qquad (3.12)$$

Следовательно, усечением и приближением уравнений (2.10) получим:

$$\left(\lambda_i^2 p_i^2 a_1 a_2 - 1\right)\sum_{m=0}^{k} b_{mi} \lambda_m p_m G_m = 0 \ \left(i = 0,1,\ldots,k\right). \qquad (3.13)$$

Эта система уравнений имеет нетривиальное решение относительно неизвестых G_0, $G_1, \ldots, G_к$, когда:

а) $\quad \left(i = 0,1,\ldots,k\right)$, (3.14)

$$\text{б) } \lambda_0 p_0 \lambda_1 p_1 \cdots \lambda_k p_k \begin{vmatrix} b_{00} & b_{10} & \cdots & b_{k0} \\ b_{01} & b_{11} & \cdots & b_{k1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{0k} & b_{1k} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (3.15)$$

Отсюда получаем следующие решения (безразмерные частоты):

$$\frac{\omega^2 b^2}{c_t^2} = \pi^2 \left(\frac{1+2i}{2} \right)^2, \ \frac{\omega^2 b^2}{c_t^2} = \frac{b^2}{a_1 a_2} + \pi^2 \left(\frac{1+2m}{2} \right)^2 \ \left(i, m = 0,1,\ldots,k \right) \tag{3.16}$$

Появление внутреннего резонанса возможно при совпадении частот, что имеет место при условиях:

$$b = \pi \sqrt{(i-m)(1+i+m)} \sqrt{a_1 a_2} \ \ \left(i, m = 0,1,\ldots,k; i-m \ge 1 \right). \tag{3.17}$$

Таким образом, когда один край волновода свободен, а другой закреплён, то в волноводе возможно появление резонанса.

б) Оба края волновода свободны. В нулевом приближении ($m = 0$) из (3.1) с учётом (2.12) имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{2}{\pi} \lambda_0 p_0 \left(\operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 + \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2 \right) = 0 . \tag{3.18}$$

Используя обозначения (2.4), из (3.18) получаются следующие частоты:

$$\frac{\omega}{c_t} = \frac{\pi}{2b}, \quad \frac{\omega}{c_t} = \sqrt{\frac{(\pi + 2\pi k)^2}{(a_1 + a_2)^2} + \frac{\pi^2}{4b^2}} \ \ (k = 0,1,2,... \ ). \tag{3.19}$$

Так как эти частоты не могут совпадать, то появление внутреннего резонанса невозможно.

В приближении первого порядка ($m = 1$) из (3.1) с учётом (2.12) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{gathered} \lambda_0 p_0 \lambda_1 p_1 \left(\operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 + \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2 \right) \left(\operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_1 + \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_2 \right) + \\ +3 \left(\lambda_0 p_0 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_1 + \lambda_1 p_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_2 \right) \left(\lambda_1 p_1 \operatorname{tg} \lambda_1 p_1 a_1 + \lambda_0 p_0 \operatorname{tg} \lambda_0 p_0 a_2 \right) = 0 \end{gathered} \tag{3.20}$$

Допустим, что

$$\lambda_0 p_0 a_1 << 1, \ \lambda_1 p_1 a_1 << 1, \ \lambda_0 p_0 a_2 << 1, \ \lambda_1 p_1 a_2 << 1 . \tag{3.21}$$

Тогда уравнение (3.20) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_0^2 p_0^2 \lambda_1^2 p_1^2 \left(a_1 + a_2 \right)^2 + 3 \left(\lambda_0^2 p_0^2 a_2 + \lambda_1^2 p_1^2 a_1 \right) \left(\lambda_0^2 p_0^2 a_1 + \lambda_1^2 p_1^2 a_2 \right) = 0 . \tag{3.22}$$

Решения биквадратного уравнения (3.22) есть:

$$\frac{\omega^2}{c_t^2 b^2} = \frac{5 \left(a_1 + a_2 \right)^2 - 4 \left(a_1 + a_2 \right) \sqrt{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2}}{4 \left(a_1 + a_2 \right)^2 b^4} \pi^2 , \tag{3.23}$$

$$\frac{\omega^2}{c_t^2 b^2} = \frac{5 \left(a_1 + a_2 \right)^2 + 4 \left(a_1 + a_2 \right) \sqrt{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2}}{4 \left(a_1 + a_2 \right)^2 b^4} \pi^2 \tag{3.24}$$

Совпадение величин частот $\omega b c_t^{-1}$ невозможно, что означает отсутствие внутреннего резонанса.

В приближении второго порядка ($m = 2$) из (2.10) и (2.12) получим следующую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных G_0, G_1 и G_2:

$$\frac{2}{\pi}\lambda_0 p_0\left(\operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_1+\operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_2\right)G_0+\frac{2}{\pi}\left(\lambda_0 p_0\operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_1+\lambda_1 p_1\operatorname{tg}\lambda_1 p_1 a_2\right)G_1+$$
$$+\frac{2}{3\pi}\left(\lambda_0 p_0\operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_1+\lambda_2 p_2\operatorname{tg}\lambda_2 p_2 a_2\right)G_2=0$$
$$-\frac{2}{\pi}\left(\lambda_1 p_1\operatorname{tg}\lambda_1 p_1 a_1+\lambda_0 p_0\operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_2\right)G_0+\frac{2}{3\pi}\lambda_1 p_1\left(\operatorname{tg}\lambda_1 p_1 a_1+\operatorname{tg}\lambda_1 p_1 a_2\right)G_1+$$
$$+\frac{2}{\pi}\left(\lambda_1 p_1\operatorname{tg}\lambda_1 p_1 a_1+\lambda_2 p_2\operatorname{tg}\lambda_2 p_2 a_2\right)G_2=0 \qquad (3.25)$$
$$\frac{2}{3\pi}\left(\lambda_2 p_2\operatorname{tg}\lambda_2 p_2 a_1+\lambda_0 p_0\operatorname{tg}\lambda_0 p_0 a_2\right)G_0-\frac{2}{\pi}\left(\lambda_2 p_2\operatorname{tg}\lambda_2 p_2 a_1+\lambda_1 p_1\operatorname{tg}\lambda_1 p_1 a_2\right)G_1+$$
$$+\frac{2}{5\pi}\lambda_2 p_2\left(\operatorname{tg}\lambda_2 p_2 a_1+\operatorname{tg}\lambda_2 p_2 a_2\right)G_2=0$$

В длинноволновом приближении, беря в расчёт условия (3.21) и добавляя также условия $\lambda_2 p_2 a_1 << 1$, $\lambda_2 p_2 a_2 << 1$, из условия нетривиальности решения системы (3.25) получим дисперсионное уравнение:

$$y^3-8y^2+(12+z)y-z=0, \qquad (3.26)$$

где

$$z=18\frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2},\; y=\frac{b^2}{\pi^2}\left(\frac{\omega^2}{c_t^2}-\frac{9\pi^2}{4b^2}\right). \qquad (3.27)$$

Из формул Кардано условием кратности двух корней кубического уравнения является равенство нулю дискриминанта уравнения. Отсюда следует следующее условие:

$$z=\frac{1}{12}\left[37-\frac{955}{\sqrt[3]{25}\sqrt[3]{8293+2496\sqrt{39}}}+\sqrt[3]{25}\sqrt[3]{8293+2496\sqrt{39}}\right]\approx 5.375\,. \qquad (3.28)$$

Однако, z не может принимать такое значение при $a_1>0$ и $a_2>0$. Это означает, что уравнение (3.26) не может иметь кратных корней. Таким образом, можно предположить, что для задачи со свободными краями кратных корней не будет также при более больших порядках приближений. Это означает, что появление внутреннего резонанса в волноводе невозможно.

4. Заключение. В работе устанавливается возможность локализации сдвиговых волн в окрестности стыка разных частей плоского волновода. В зависимости от граничных условий, показана возможность совпадения локализованных частот колебаний, приводяшее к эффекту внутреннего резонанса.

Отметим, что частный вариант задачи с симметричным расположением граничных условий относительно срединной плоскости слоя рассмотрен в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Love A.E.H. Some Problems of Geodynamics. Cambridge University Press. 1911, pp. 165-178.
2. Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides. North-Holland. 1984. 618 p.
3. Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Довгий С.А., Трофимчук А.Н., ван Хейст Г.Я. Упругие волноводы: история и современность. Математическе методы и физико-механические поля. Львов, НАН Украины, 2008, т.51, №2, с.86-104. Meleshko V. V., Bondarenko A.A., Dovgiy S.A., Trofimchuk A.N., Heijst G.J.F. van. The elastic waveguides: the history and the present-day. Mathematical methods and physico-mechanical fields, 2008, vol. 51, №2, pp. 86-104 (in Russian).
4. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением. //Доклады НАН Армении. 2015. Т.115. №1. С.40-43. Belubekyan V.M., Belubekyan M.V., Resonanse and Localized Shear Vibration in the Layer with Rectangular Cross Section //Reports of NAS of Armenia, 2015, v.115, №1, pp. 40-43 (in Russian).
5. Nazarov S.A. Wave scattering in the joint of a straight and a periodic waveguide //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. T.81. № 2, pp.129-147.
6. Ghazaryan K.B., Papyan A.A. Rezonance and localized shear vibration of bi-material elastic rezonator //Proc. of NAS of Armenia, Mechanics, v.70, №2, 2017, pp. 52-67.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975, 256 с. Novatsky V. Theory of elasticity, M.: Mir, 1975, pp. 256 (in Russian).
8. Belubekyan M.V. On the condition of planar localized vibration appearance in the vicinity of the free edge of a thin rectangular plate. //Proc. of the YSU, Physical and Mathematical Sciences 2017, v.51, №1, pp. 42-45.
9. Белубекян М.В. Об условиях существования волн Лява с неоднородным слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. №3. С. 7-10. Belubekyan M.V. On the Love waves existence condition in the case of nonhomogeneous layer //Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, v.44, №3, 1991, pp. 7-10 (in Russian).
10. Белубекян В.М., Белубекян М.В., Берберян А.Х. Локализация упругих сдвиговых волн в окрестности стыка плоских волноводов //Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тр. IX межд. конф., 01-06 окт, Горис, Армения, 2018, с. 76-79. Belubekyan M.V., Belubekyan V.M., Berberyan A.Kh., Localization of elastic shear waves in the vicinity of the junction of planar waveguides //The problems of dynamics of interaction if deformable media, Proceed. of IX Int. Conf., 01-06 Oct, Goris, Armenia, 2018, pp. 76-79 (in Russian).
11. Piliposyan D.G., Ghazaryan R.A., Ghazaryan K.B. Shear waves in periodic waveguide with alternating boundary conditions //Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, v.67, №3, 2014, pp. 40-48.

Сведения об авторе:

Саакян Саак Левонович – к.ф.-м.н., ЕГУ, факультет Информатики и прикладной математики. **Тел.:** (+374 77) 002-408; **e-mail:** ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 04. 12. 2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №2, 2019 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/72.2.5

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ НА КРАЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СЛОЕМ

Саргсян А.С.

Ключевые слова: пьезоэлектрик, дифракция, сдвиг, полубесконечная трещина, поверхностные волны, электроупругость, металлический слой.

Sargsyan A.S.

Diffraction of plane shear wave at the edge of semi-infinite crack in piezoelectric composite space with a metallic layer

Keywords: piezoelectric, diffraction, shear, surface waves, semi-infinit crack, metallic layer, electro-elasticity.

The diffraction of a plane electro-elastic shear wave in the piezoelectric space with a semi-infinite crack between half-spaces is considered, when an electrically conductive metallic thin layer is glued together at the interface of the half-spaces. The problem is reduced to solving a Riemann-type problem on the real axis in the theory of analytic functions. The presence of a semi-infinite crack leads to the propagation of diffracted bulk and surface (localized) electro-elastic waves in piezoelectric half-spaces. We study the distribution of the wave field in half-spaces using the methods of the integral Fourier transform, the theory of functions of complex variable and contour integration.

Սարգսյան Ա.Ս.

Մետաղական շերտով պիեզոէլեկտրական բաղադրյալ տարածությունում սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ ճաքի վրա

Հիմնաբառեր. պիեզոէլեկտրիկ, դիֆրակցիա, էլեկտրաառաձգականություն, մակերևութային ալիք, սահք, կիսաանվերջ ճաք:

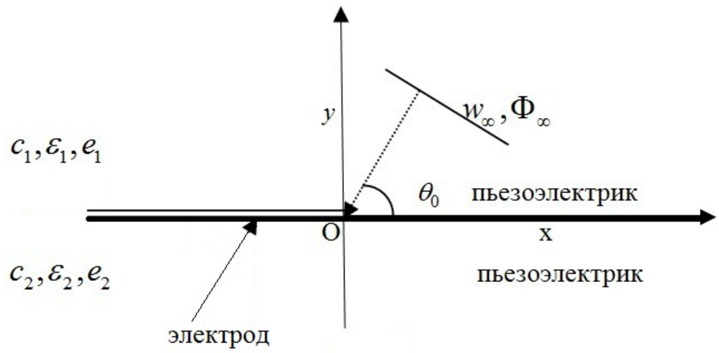
Դիտարկվում է սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան պիեզոէլեկտրական տարածությունում՝ կիսատարածությունների միջև կիսաանվերջ ճաքի առկայությամբ, երբ տարբեր բնութագրիչներով օժտված երկու կիսատարածությունների բաժանման մակերևույթը պատված է էլեկտրահաղորդիչ մետաղական բարակ շերտով: Խնդիրը բերվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսությունում իրական առանցքի վրա Ռիմանի տիպի խնդրի լուծման. Պիեզոէլեկտրական կիսատարածություններում տարածվում են կիսաանվերջ ճաքով պայմանավորված դիֆրակցված, ծավալային և մակերևութային (տեղայնացված) էլեկտրաառաձգական ալիքները: Հետազոտվում է ալիքային դաշտի բաշխումը կիսատարածություններում՝ օգտագործելով Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության, կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության և կոնտուրային ինտեգրման մեթոդները:

Рассматривается дифракция плоской электроупругой волны сдвига в пьезоэлектрическом пространстве при полубесконечной трещине между полупространствами, когда на границе раздела полупространств склеен электропроводящий металлический тонкий слой. Задача сводится к решению задачи типа Римана на действительной оси в теории аналитических функций. Наличие полубесконечной трещины приводит к распространению дифрагированных объёмных и поверхностных (локализованных) электроупругих волн в пьезоэлектрических полупространствах. Исследуется распределение волнового поля в полупространствах, используя методы интегрального преобразования Фурье, теории функций комплексного переменного и контурного интегрирования.

Введение. Задачи дифракции электроупругих волн на неоднородностях, на крае трещин и металлических слоёв являются актуальными задачами электроупругости, и результаты, полученные в этой области науки, имеют теоретическую значимость для развития методов математической физики. С практической точки зрения эти задачи тесно связаны с развитием прикладных задач механики сплошных сред, электроакустики, пьезотехники и измерительных приборов. Электроупругие волны в диэлектрических средах, обладающих пьезоэффектом, возникающие при некоторых условиях взаимодействия физических полей и при определённых структурных строениях этих сред, локализованные волны имеют фундаментальные значения при изучении волновых процессов в этих средах [1–6]. В [2,3] рассмотрены задачи дифракции плоской электроупругой волны сдвига падающей из бесконечности на полубесконечный металлический слой или на полубесконечную трещину в пьезоэлектрическом пространстве. Задача дифракции плоской электроупругой сдвиговой волны в среде пьезоэлектрик-диэлектрик на тонком полубесконечном, металлическом слое в диэлектрике без пьезоэффекта рассмотрена в [4]. В пьезоэлектрической среде по причине дифракции возбуждаются поверхностные волны сдвига и проявляются новые волновые явления. Распространение поверхностных сдвиговых волн, локализованных у граничной плоскости раздела двух пьезоэлектрических полупространств, склеенных электропроводящим тонким слоем, исследуется в работе [5]. Получено условие распространения электроупругих поверхностных волн при полном контакте полупространств с разными электроупругими характеристиками, которое использовано и в данной задаче дифракции. В работах [6-9] исследованы задачи распространения электроупругих волн в средах сложной, неоднородной структуры. Изучены процессы дифракции плоских электроупругих волн на полубесконечной трещине между скреплёнными по остальной части контактной плоскости диэлектрическими полупространствами. Исследуется дифракция электроупругой волны сдвига на полубесконечном электроде в пространство из двух одинаковых пьезоэлектрических полупространств, разделённых вакуумным слоем. В этой работе исследуется волновое сдвиговое поле в составном пьезоэлектрическом пространстве при металлическом слое между полупространствами. Выявлены особенности, обусловленные наличием пьезоэффекта и дифракцией распространяющейся сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине между полупространствами.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача дифракции падающей из бесконечности сдвиговой электроупругой волны в составной пьезоэлектрической среде. Дифракция обусловлена наличием полубесконечной трещины между пьезоэлектрическими полупространствами с разными электроупругими характеристиками. Рассматриваемая электроупругая среда приведена к декартовой системе координат $Oxyz$, пьезоэлектрические полупространства – пьезоэлектрики класса 6mm гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла, занимают полупространства $y>0$ и $y<0$. Тонкий металлический слой занимает граничную плоскость Oxz, из-за малой толщины пренебрегается жёсткость. Электропроводящий слой можно рассматривать как электрод. Пьезоэлектрические полупространства скреплены по плоскости $y=0,\ x>0,\ -\infty<z<\infty$, т.е. считаем, что между полупространствами осуществляется акустический контакт в плоскости Oxz при $x>0$. В плоскости Oxz при $x<0$ $\left(y=0, x<0, -\infty<z<\infty\right)$ между пьезоэлектрическими полупространствами взаимодействие происходит без акустического контакта. Принимается, что рассматриваемая составная диэлектрическая среда с пьезоэффектом имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x<0$ [12,13]. Таким образом, в пьезоэлектрическом полупространстве из бесконечности под углом

$\theta_0\left(0<\theta_0<\pi/2\right)$ к плоскости $y=0$ распространяется плоская электроупругая волна сдвига



со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала, соответственно [2,3]

$$w_\infty(x,y)=e^{-ik_1x\cos\theta_0-ik_1y\sin\theta_0},\ \ \Phi_\infty(x,y)=\frac{e_1}{\varepsilon_1}e^{-ik_1x\cos\theta_0-ik_1y\sin\theta_0}. \qquad (1.1)$$

Задача заключается в определении волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах, учитывая гармоническую зависимость от времени всех составляющих волнового поля – временной множитель $e^{-i\omega t}$. Здесь ω – частота колебаний, t –параметр времени, $k_i=\omega/C_i$, $C_i=\sqrt{c_{44}^{(i)}(1+\chi_i)/\rho_i}$, $\chi_i=e_i^2/c_i\varepsilon_i$ – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в пьезоэлектрических средах $y>0$ и $y<0$, соответственно. В этих соотношениях $c_i=c_{44}^{(i)}, \varepsilon_i=\varepsilon_{11}^{(i)}, e_i=e_{15}^{(i)}$ – упругая, диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные в пьезоэлектрических полупространствах , ρ_i – плотность, $i=1,2$.

Среда находится в условиях антиплоской деформации. Принимаются дифференциальные уравнения динамической теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатическом приближении. Для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах имеем следующие уравнения [2–5]:

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}+k_i^2 w_i=0,\ \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}+k_i^2\frac{e_i}{\varepsilon_i}w_i=0 \qquad i=1,2 \qquad (1.2)$$

В приведённых уравнениях $w_1(x,y),\Phi_1(x,y)$ – функции амплитуд перемещения и электрического потенциала пьезоэлектрика $y>0,-\infty<x<\infty$, а $w_2(x,y),\Phi_2(x,y)$ – пьезоэлектрика $y<0,-\infty<x<\infty$.

Амплитуды электрического потенциала удовлетворяют следующим контактным условиям из-за наличия металлического слоя в плоскости контакта [2–5]:

$$\Phi_1(x,y)=\Phi_2(x,y)=0 \qquad \text{при} \quad y=0. \tag{1.3}$$

На берегах трещины для амплитуд напряжений $\sigma_{yz}^{(1)},\sigma_{yz}^{(2)}$ имеем условия:

$$\sigma_{yz}^{(1)}=c_1\frac{\partial w_1}{\partial y}+e_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}=0,\ \sigma_{yz}^{(2)}=c_2\frac{\partial w_2}{\partial y}+e_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}=0 \qquad y=0, x<0 \tag{1.4}$$

Разница перемещений на берегах трещины – неизвестная пока величина

$$w_1(x,+0)-w_2(x,-0)=w_0(x) \qquad \text{при} \ x<0. \tag{1.5}$$

Решения уравнений (1.3) должны удовлетворять контактным условиям скрепления при $y=0, x>0$ [4–7]

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x,+0)=\sigma_{yz}^{(2)}(x,-0)=q_0(x),\quad w_1(x,+0)=w_2(x,-0). \tag{1.6}$$

Функции $q_+(x)=q_0(x)\vartheta(x)$ и $\psi_-(x)=w_0(x)\vartheta(-x)$, $\vartheta(x)$– функция Хевисайда, представляют касательное напряжение при $y=0$ и разницу перемещений на $y=\pm 0$, соответственно. Контактные условия на граничной плоскости раздела полупространств (1.4)–(1.6) принимают вид [6,7]:

$$c_1\frac{\partial w_1}{\partial y}+e_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}=c_2\frac{\partial w_2}{\partial y}+e_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}=q_+(x) \qquad \text{при} \qquad y=0 \tag{1.7}$$

$$w_1(x,+0)-w_2(x,-0)=\psi_-(x). \tag{1.8}$$

Задача определения дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пьезоэлектрическом пространстве при дифракции падающей из бесконечности плоской электроупругой волны сдвига (1.1) сведена к решению дифференциальных уравнений (1.2) при контактных условиях (1.3), (1.7), (1.8).

2. Решение задачи. Применяется интегральное преобразование Фурье по переменной x, и выражения для искомых функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах получим после обратного преобразования Фурье в виде

$$\begin{aligned} w_i(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{w}_i(\sigma,y)e^{-i\sigma x}d\sigma \\ \Phi_i(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\Phi}_i(\sigma,y)e^{-i\sigma x}d\sigma \end{aligned} \qquad i=1,2, \tag{2.1}$$

где трансформанты Фурье искомых функций представляются в виде

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(\sigma,y)&=A_1(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,y}+2\pi e^{-ik_1 y\sin\theta_0}\delta(\sigma-k_1\cos\theta_0) \\ \bar{\Phi}_1(\sigma,y)&=B_1(\sigma)e^{-|\sigma|y}+\frac{e_1}{\varepsilon_1}\bar{w}_1 \end{aligned} \qquad y>0 \tag{2.2}$$

$$\bar{w}_2(\sigma,y)=A_2(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}\,y},\ \bar{\Phi}_2(\sigma,y)=B_2(\sigma)e^{|\sigma|y}+\frac{e_2}{\varepsilon_2}\bar{w}_2 \qquad y<0, \tag{2.3}$$

здесь

$$A_1(\sigma)=-\frac{\bar{q}_+(\sigma)}{c_1|\sigma|K_1(\sigma)}+2\pi\left(1+\frac{2\chi_1}{K_1(k_1\cos\theta_0)}\right)\delta(\sigma-k_1\cos\theta_0) \tag{2.4}$$

$$B_1(\sigma)=-\frac{e_1}{\varepsilon_1}A_1-2\pi\frac{e_1}{\varepsilon_1}\delta(\sigma-k_1\cos\theta_0),\ A_2(\sigma)=\frac{\bar{q}_+(\sigma)}{c_2|\sigma|K_2(\sigma)},\quad B_2(\sigma)=-\frac{e_2}{\varepsilon_2}A_2,$$

$\delta(\sigma)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sigma x}dx$ – функция Дирака.

Трансформанты функций амплитуд перемещения и потенциала электрического поля для пьезоэлектрических полупространств удовлетворяют как соответствующим уравнениям, так и следующим контактным условиям на плоскости раздела двух сред

$$\bar{w}_1(\sigma+0)-\bar{w}_2(\sigma,-0)=\bar{\psi}_-(\sigma)$$

$$c_1\frac{d\bar{w}_1}{dy}+e_1\frac{d\bar{\Phi}_1}{dy}=c_2\frac{d\bar{w}_2}{dy}+e_2\frac{d\bar{\Phi}_2}{dy}=\bar{q}_+(\sigma)\qquad \text{при } y=0 \tag{2.5}$$

$$\bar{\Phi}_1(\sigma,+0)=\bar{\Phi}_2(\sigma,-0)=0$$

$\bar{\psi}_-(\sigma),\bar{q}_+(\sigma)$ – трансформанты Фурье функций $\psi_-(x)$ и $q_+(x)$.

Характеристические функции $K_1(\sigma)$, $K_2(\sigma)$, как известно [1–3], представляются в виде

$$K_1(\sigma)=(1+\chi_1)\frac{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}{|\sigma|}-\chi_1;\quad K_2(\sigma)=(1+\chi_2)\frac{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}}{|\sigma|}-\chi_2 \tag{2.6}$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\gamma_1(\sigma)\to|\sigma|$, $\gamma_2(\sigma)\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, действительная ось обходит точки ветвления $\sigma=-k_1$, $\sigma=-k_2$ сверху, а $\sigma=k_1$, $\sigma=k_2$ – снизу, $\gamma_1(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_1^2}=-i\sqrt{k_1^2-\sigma^2}$, $\gamma_2(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_2^2}=-i\sqrt{k_2^2-\sigma^2}$ [10].

Относительно функций $\bar{\psi}_-(\sigma),\bar{q}_+(\sigma)$ получим из (2.5) следующее уравнение:

$$\begin{gathered}c_1c_2|\sigma|K_1(\sigma)K_2(\sigma)\bar{\psi}_-(\sigma)+(c_1+c_2)K(\sigma)\bar{q}_+(\sigma)+\\+4\pi ik_1c_1c_2\sin\theta_0(1+\chi_1)K_2(k_1\cos\theta_0)\delta(\sigma-k_1\cos\theta_0)=0\end{gathered} \tag{2.7}$$

здесь характеристическая функция данной задачи со смешанным условием на контактной плоскости имеет вид [5,7]:

$$K(\sigma)=\frac{c_1K_1(\sigma)+c_2K_2(\sigma)}{c_1+c_2}$$

Функциональное уравнение (2.7) рассматривается как краевая задача типа Римана в теории аналитических функций на действительной оси. Функции $K_1(\sigma),K_2(\sigma)$ имеют нули только в точках $\pm\sigma_1$ и $\pm\sigma_2$, соответствено, при этом [1–3],

$$\sigma_i = k_i \frac{1+\chi_i}{\sqrt{1+2\chi_i}} > k_i > 0 \qquad i = 1,2.$$

Функция $K(\sigma)$ имеет нули только в точках $\pm\sigma_0$ [5,7], σ_0 – единственный положительный корень уравнения $K(\sigma)=0$ при $\sigma=\sigma_0>k_2>k_1>0$, если

$$\sqrt{1-\frac{k_1^{\,2}}{k_2^{\,2}}} < \frac{\chi_1}{1+\chi_1}\left(1+\frac{c_2\chi_2}{c_1\chi_1}\right), \tag{2.8}$$

при $k_1>k_2$, $\sigma_0>k_1$ условие имеет вид $\sqrt{1-\frac{k_2^{\,2}}{k_1^{\,2}}} < \frac{\chi_2}{1+\chi_2}\left(1+\frac{c_1\chi_1}{c_2\chi_2}\right)$.

Рассматривая области монотонности функций $K(\sigma), K_1(\sigma), K_2(\sigma)$, доказывается, что $\sigma_1<\sigma_0<\sigma_2$ или $\sigma_2<\sigma_0<\sigma_1$.

Для определения искомых функций $\overline{q}_+(\sigma), \overline{\psi}_-(\sigma)$ функциональное уравнение (2.7) решается, используя методику, развитую в [2–4,9], решения строятся, факторизуя функцию $L(\sigma)$, представляя её в виде

$$L(\sigma) = L^+(\sigma)L^-(\sigma), \quad L(\sigma) = \frac{K_1(\sigma)K_2(\sigma)}{K(\sigma)}. \tag{2.9}$$

Функции $K(\sigma)\to 1,\ \ K_1(\sigma)\to 1,\ \ \mathrm{K}_2(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$,

$K_i^{\pm}(\alpha)\to 1,\ K(\alpha)\to 1$ при $|\alpha|\to\infty$,

где функции $L^{\pm}(\alpha),\ \alpha=\sigma+i\tau$ регулярны и не имеют нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$ и $\operatorname{Im}\alpha<0$, соответственно. $L^{\pm}(\sigma)$ – граничные значения этих функций.

$L^+(\sigma)=\exp(F^+(\sigma))$, $L^-(\sigma)=\exp(F^-(\sigma))$,

$F^+(\sigma)=\int\limits_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx$, $F^-(\sigma)=F^+(-\sigma)$,

$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln L(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$, $L^-(-\sigma)=L^+(\sigma)$.

При решении функционального уравнения (2.7) и факторизации функции $L(\sigma)$ принимается, что действительная ось обходит, как точки ветвления $\pm k_1, \pm k_2$ функций $\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)$, так и нули функций $K(\sigma), K_1(\sigma), K_2(\sigma)$ $\pm\sigma_0$, $\pm\sigma_1$ и $\pm\sigma_2$, т.е. действительная ось обходит точки $\sigma=-\sigma_0, \sigma=-\sigma_1, \sigma=-\sigma_1$ сверху, а точки $\sigma=\sigma_0, \sigma=\sigma_1, \sigma=\sigma_1$ – снизу, обеспечивая условия уходящей волны [2, 3, 10].

Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется $|\alpha| = \alpha$ при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $|\alpha| = -\alpha$ – при $\operatorname{Re}\alpha < 0$. При контурном интегрировании имеется в виду, что

$$\frac{1}{s-(\sigma - i0)} = \frac{1}{s-\sigma} - i\pi\delta(s-\sigma),$$

используется формула

$$2\pi i\delta(\sigma - k\cos\theta_0) = \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 + i0}.$$

Имея в виду (2.9) и представление

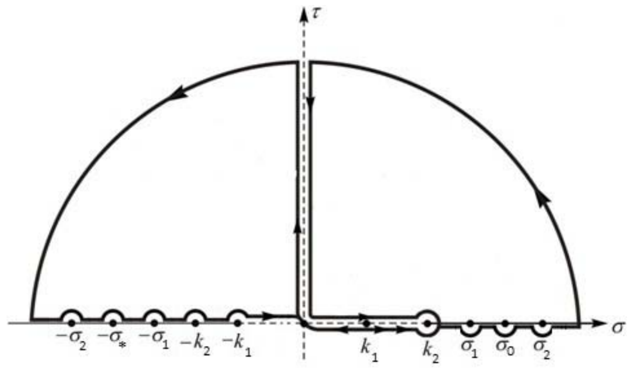
$$|\sigma| = (\sigma - i0)^{\frac{1}{2}}(\sigma + i0)^{\frac{1}{2}},$$

выражения искомых функций принимают вид

$$\begin{gathered}
\bar{\psi}_-(\sigma) = \frac{(c_1+c_2)b}{c_1c_2(\sigma - i0)^{1/2} L^-(\sigma)(\sigma - k_1\cos\theta_0 - i0)} \\
\bar{q}_+(\sigma) = -\frac{b(\sigma + i0)^{1/2} L^+(\sigma)}{\sigma - k_1\cos\theta_0 + i0},
\end{gathered} \tag{2.10}$$

где

$$b = -\frac{2c_1c_2k_1\sin\theta_0(1+\chi_1)K_2(k_1\cos\theta_0)}{(c_1+c_2)\sqrt{k_1\cos\theta_0}K(k_1\cos\theta_0)L^+(k_1\cos\theta_0)}$$



Функции амплитуд перемещения в пьезоэлектрических полупространствах при $x < 0$ принимают вид:

$$\begin{gathered}
w_1(x,y) = e^{-ik_1x\cos\theta_0 - ik_1y\sin\theta_0} + A^{(1)}e^{-ik_1x\cos\theta_0 + ik_1y\sin\theta_0} - \\
-\frac{b}{2\pi c_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sigma + i0)^{1/2}L^+(\sigma)e^{-i\sigma x}e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}y}d\sigma}{|\sigma|K_1(\sigma)(\sigma - k_1\cos\theta_0 + i0)}
\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$w_2(x,y)=\frac{b}{2\pi c_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sigma+i0)^{1/2}L^{+}(\sigma)e^{-i\sigma x}e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}y}d\sigma}{|\sigma|K_2(\sigma)(\sigma-k_1\cos\theta_0+i0)}$$

$$A^{(1)}=1+\frac{2\chi_1}{K_1(k_1\cos\theta_0)}=\frac{i(1+\chi_1)\sin\theta_0-\chi_1\cos\theta_0}{i(1+\chi_1)\sin\theta_0+\chi_1\cos\theta_0},$$

а при $x>0$

$$w_1(x,y)=e^{-ik_1x\cos\theta_0-ik_1y\sin\theta_0}+A^{(2)}e^{-ik_1x\cos\theta_0+ik_1y\sin\theta_0}+$$

$$+\frac{b}{2\pi c_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_2(\sigma)e^{-i\sigma x}e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}d\sigma}{(\sigma-i0)^{1/2}K(\sigma)L^{-}(\sigma)(\sigma-k_1\cos\theta_0-i0)}$$

$$w_2(x,y)=\left(1+A^{(2)}\right)e^{-ik_1x\cos\theta_0-i\sqrt{k_2^2-k_1^2\cos^2\theta_0}y}- \tag{2.12}$$

$$-\frac{b}{2\pi c_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1(\sigma)e^{-i\sigma x}e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}y}d\sigma}{(\sigma-i0)^{1/2}K(\sigma)L^{-}(\sigma)(\sigma-k_1\cos\theta_0-i0)}$$

$$A^{(2)}=-1-2i\frac{c_1(1+\chi_1)\,\mathrm{tg}\theta_0}{(c_1+c_2)K(k_1\cos\theta_0)}.$$

Отметим, что в частном случае, при контакте пьезоэлектрического полупространства $y>0$ с диэлектрическим полупространством $y<0$ без пьезоэффекта, следует в вышеприведённых формулах принять $e_2=0$ [4,6].

Интегралы преобразуются методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$. Показаны разрезы в комплексной плоскости и путь интегрирования. Путь интегрирования при $x<0$ замыкается в верхней полуплоскости и действительная ось обходит точки $\mp\sigma_1$, $\mp\sigma_2$ сверху и снизу, соответственно, для полупространств $y>0$ и $y<0$. Аналитические продолжения функций $K_1(\sigma)$, $K_2(\sigma)$, т.е. функции $K_1(\alpha)$, $K_2(\alpha)$, при таких разрезах в комплексной плоскости, не имеют чисто мнимых, а также комплексных нулей, это следует из постановки задачи (принцип уходящей волны). Особые точки являются простыми полюсами $\sigma=\sigma_1$ и $\sigma=\sigma_2$. Интеграл представляется в виде суммы регулярных интегралов [3,4,8]. Волновое поле состоит из падающей и отражённой волн, дифрагированных затухающих объёмных волн, а также дифрагированной поверхностной волны Гуляева–Блюстейна, локализованной у контактной плоскости

$$\begin{aligned} &w_{1*}(x,y)=A_*^{(1)}e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k_1^2}y}e^{-i\sigma_1x} && y>0\\ &w_{2*}(x,y)=A_*^{(2)}e^{\sqrt{\sigma_2^2-k_2^2}y}e^{-i\sigma_2x} && y<0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

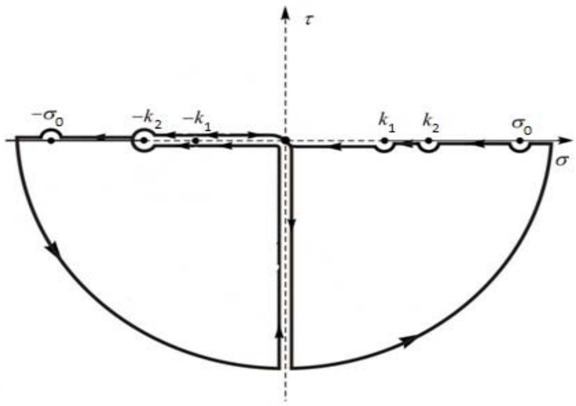
$$A_*^{(1)} = -\frac{ibL^+(\sigma_1)}{c_1\sqrt{\sigma_1}K_1'(\sigma_1)(\sigma_1 - k_1\cos\theta_0)},\ A_*^{(2)} = \frac{ibL^+(\sigma_2)}{c_2\sqrt{\sigma_2}K_2'(\sigma_2)(\sigma_2 - k_1\cos\theta_0)}$$

Эта волна распространяется по оси x с волновым числом σ_1 и σ_2, со скоростью ω/σ_1 и ω/σ_2 в полупространствах $y>0$ и $y<0$, соответственно, и затухает при $|y|\to\infty$. Дифрагированные волны обусловлены наличием полубесконечной трещины, а появление поверхностной волны обусловлено также пьезоэффектом. Асимптотическое представление перемещений на граничной плоскости $y=+0$ при $x\to-\infty$ имеет вид [2–4,11]

$$w_1(x,0) = \left(1 + A^{(1)}\right)e^{-ik_1 x\cos\theta_0} + A_*^{(1)}e^{i\sigma_1|x|} + e^{i(kx-\frac{\pi}{4})}O(|kx|^{-\frac{3}{2}}) + O(|kx|^{-\frac{3}{2}}),$$

а на граничной плоскости $y=-0$ при $x\to-\infty$

$$w_2(x,0) = A_*^{(2)}e^{i\sigma_2|x|} + e^{i(kx-\frac{\pi}{4})}O(|kx|^{-\frac{3}{2}}) + O(|kx|^{-\frac{3}{2}})$$



Функция перемещений точек полупространства $x>0$ представляется в виде суммы регулярных интегралов, падающей, отражённой и проходящей волн, и дифрагированной поверхностной волны, локализованной у контактной плоскости

$$w_{10}(x,y) = A_0 e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2}\,y}e^{i\sigma_0 x},\qquad w_{20}(x,y) = A_0 e^{\sqrt{\sigma_0^2 - k_2^2}\,y}e^{i\sigma_0 x} \tag{2.14}$$

$$A_0 = -\frac{ibK_2(-\sigma_0)}{c_1\sqrt{\sigma_0}K'(-\sigma_0)L^-(-\sigma_0)(\sigma_0 - k_1\cos\theta_0)}.$$

Действительная ось обходит точки $\mp\sigma_0$ сверху и снизу, соответственно. При некоторых значениях электроупругих характеристик составного пространства – условия (2.8), $-\sigma_0$ является корнем уравнения $K(\sigma)=0$. Путь интегрирования замыкается в нижней полуплоскости [6,7]. Аналитическое продолжение подынтегральной функции при таких разрезах в комплексной плоскости имеет только единственную особую точку – простой полюс $\sigma=-\sigma_0$. Асимптотическое представление на контактной плоскости $y=0$ при $x\to\infty$

$$w_1(x,0)=\left(1+A^{(2)}\right)e^{-ik_1x\cos\theta_0}+A_0^{(1)}e^{i\sigma_0x}+e^{i(kx+\frac{\pi}{4})}O((kx)^{-\frac{3}{2}})+O((kx)^{-\frac{3}{2}}).$$

Волновое поле перемещений состоит из падающей волны, отражённой и проходящей волны, дифрагированных затухающих объёмных волн и распространяющаяся по направлению x к $+\infty$ со скоростью ω/σ_0 (σ_0 – волновое число) локализованной волны. Следует отметить, что $\omega/\sigma_1<\omega/\sigma_0<\omega/\sigma_2$, если $\sigma_1>\sigma_2$ и $\omega/\sigma_2<\omega/\sigma_0<\omega/\sigma_1$, если $\sigma_2>\sigma_1$, т.е. если локализованная сдвиговая волна существует, электромеханические характеристики удовлетворяют условию (2.8), то значение её скорости распространения находится между значениями скоростей поверхностной волны Гуляева–Блюстейна $w_{1*}(x,y)$ и $w_{2*}(x,y)$, распространяющаяся по x к $-\infty$, когда между полупространствами отсутствует акустический контакт. Как видно из (2.11), (2.12) и асимптотических представлений, вместе с цилиндрической волной появляется и волна, распространяющаяся от контактной плоскости и имеющая неволновой характер на этой плоскости.

Заключение. Результаты работы могут быть использованы при рассмотрении других задач механики сплошных сред и объяснения физико-технических и экспериментальных результатов при проектировании и создании новых инженерных приборов и устройств. Пьезоэффект в твёрдой диэлектрической составной среде и дифракция падающей сдвиговой волны на полубесконечной трещине приводят к появлению сдвиговых поверхностных – локализованных у контактной плоскости, электроупругих волн с разными скоростями распространения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с. Balakirev M.K., Gilinskiy I.A. Waves in piezocrystals. Novosibirsk: Nauka, 1982. 240p. (in Russian)
2. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краю полубесконечного металлического слоя. //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №4. С.43–52. Grigoryan E.Kh., Melkumyan A.S. Diffraction of shear plane wave in piezoelectric media on the edge of semi-infinite metallic strip. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2004. Vol. 57. Issue 4. Pp.43–52. (in Russian)
3. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38–50. Grigoryan E.Kh., Jilavyan S.H. Diffraction of a plane shear wave on semi infinite crack in a piezoelectric space. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2005. Vol. 58. Issue 1. Pp.38–50. (in Russian)
4. Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлектрике. //Известия НАН Армении. Механика. Mechanics. 2015. Т.68. №1. С.45–56. Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of plane shear wave in piezoelectric semi-space at a semi-infinite metallic layer in the dielectric medium.

//Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2015. Vol. 68. Issue 1. Pp.45–56. (in Russian)
5. Аветисян А.С., Маргарян Дж.М. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. //Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №3–4. С.31–36. Avetisyan A.S., Margaryan J.M. Electro-elastic surface shear waves on an division surface of two piezoelectric half-space. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1994. V.47. Iss. 3–4. P. 31–36. (in Russian)
6. Григорян Э.Х., Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик–диэлектрик. //Тр. 7–ой межд.конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: 2011. С.137–143. Grigoryan E.Kh., Jilayvan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of a plane shear wave on semi–infinite crack in a piezoelectric–dielectric space. //Proc. of the VII int. conf. «Problems of interaction dynamics of deformable media». Yerevan: 2011. P.137–143. (in Russian)
7. Джилавян С.А., Саргсян А.С. Дифракция поверхностной волны сдвига на полубесконечной трещине в составном пьезоэлектрическом пространстве. // Материалы 5–ой межд.конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван: 2017. С.79–80. Jilayvan S.H., Sargsyan A.S. Diffraction of a plane shear wave on semi–infinite crack in piezoelectric composite space. //The proc. of the V int. conf. «Topical problems of continuum mechanics». Yerevan: 2017. P.79–80. (in Russian).
8. Belubekyan M.V., Belubekyan V.M. Surface waves in piezoactive elastic system of a layer on a semi-space. //Proc. of the Yerevan State University. Phys. & Math. Sei. 2013. 3. P. 45-48.
9. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Известия НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50–69. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh. Diffraction of shear plane electroelastic wave on the semi-infinite electrode in the piezoelectric space with crack. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2010. Vol. 63. Issue 1. Pp.50–69. (in Russian)
10. Нобль Б. Метод Винера–Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с. Noble. B. Methods Based on the Wiener-Hopf Technique. M.: Mir, 1962. 294p. (in Russian)
11. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн. // Доклады НАН Армении. 2010. Т.110. №3. С.261–271. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh. On New Methods of Asymptotic Formulas Determination in Waves Diffraction Problems. //Reposts of NAS RA. 2010. Vol. 110. Issue 3. Pp. 261–271 (in Russian).
12. Jiao F.Y., Wei P.J., Li L. Wave propagation through an inhomogeneous slab sandwiched by the piezoelectric and the piezomagnetic half spaces. Ultrasonics **73**, 22–33 (2017).
13. Zhang P., Wei P.J., Li Y.Q. In-plane wave propagation through a microstretch slab sandwiched by two half-spaces. Eur. J. Mech. A Solid 63, 136–148 (2017)

Сведения об авторе:

Саргсян Арсен Сурикович – аспирант кафедры механики, Ереванский Гоуниверситет.
Тел.: (+374 77) 124310. **E–mail:** arsensargsyan777@gmail.com

Поступила в редакцию 12. 03. 2019 г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №2, 2019 Механика
УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/72.2.6

О ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ, КОГДА СЛОИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮТ ПО ЗАКОНУ СУХОГО ТРЕНИЯ

Саркисян Н.С., Хачатрян А.М.

Ключевые слова: асимптотический метод, двухслойная анизотропная пластинка, смешанные условия, неполный контакт, кулоновое сухое трение, геометрическая нелинейность, внутренняя задача.

Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M.

About two-dimensional equations of two-layer anisotropic plate when the layers interact by law dry friction

Key words: asymptotic method, two-layer anisotropic plate, mixed conditions, non full contact, dry friction law, geometrically nonlinear, interior problem.

Asymptotic method is applied and two dimension differential equations with partial derivatives from geometrically nonlinear equations of three dimension problem of elasticity theory for two-layer anisotropic plate are received. In the one surface of plate are given values of tensor of stress and in the other surface- mixed conditions of elasticity theory. Between the layers non full contacts conditions are given. Elastic layers interact according to the Coulomb dry friction law or the law of constant friction force.

Սարգսյան Ն.Ս., Խաչատրյան Ա.Մ.

Երկշերտ անիզոտրոպ սալի երկչափ հավասարումների մասին երբ շերտերը փոխազդում են չոր շփման օրենքով

Հիմնաբառեր: Ասիմպտոտիկ մեթոդ, երկշերտ անիզոտրոպ սալ, խառը եզրային պայմաններ, ոչ լրիվ կոնտակտ, կուլոնյան չոր շփում, երկրաչափորեն ոչ գծային, ներքին խնդիր:

Ասիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված մասնական ածանցյալներով երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ սալի հաշվարկման համար: Սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների թենզորի համապատասխան բաղադրիչների արժեքները, մյուսի վրա՝ առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերը փոխազդում են չոր շփման օրենքով:

Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоёв заданы условия неполного контакта: упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона или по закону постоянной силы трения. Полное напряжённое состояние пластинки образуется из основного (внутреннего) и краевого напряжённых состояний.

Введение. Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [2,3]. Впоследствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [3-4]. Асимптотическая теория изотропных и анизотропных пластин и оболочек построена в [1,5]. Решения задач определения НДС анизотропных слоистых пластин, на одной лицевой стороне которой заданы компоненты вектора перемещения, а на другой–

условия первой, второй или смешанной задач теории упругости, изложены в [8]. Двумерные уравнения двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями приведены в [9]. В работе [10] асимптотическим методом построено решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной анизотропной термоупругой пластинки в нелинейной постановке. Двумерные уравнения двухслойной анизотропной пластинки при полном контакте слоёв приведены в [11], а при заданных тангенциальных напряжениях на плоскости раздела слоёв – в [12]. Задачи деформирования упругого тела, на границе которого поставлены условия сухого трения, рассмотрены в [13].

В настоящей работе на основе геометрически нелинейных уравнений теории упругости асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче двухслойной пластинки, когда на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. Предполагается, что упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона или по закону постоянной силы трения. Рассмотрены конкретные примеры.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку $\Omega=\{(x,y,z):0\le x\le a, 0\le y\le b,\ -h_2\le z\le h_1\}$, где a – длина, b – ширина, составленную из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя. Здесь и последующем индекс k принимает значения $k=1,2$. Общая толщина полосы – $2h$. Плоскость отсчёта Oxy совпадает с плоскостью раздела слоёв, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки. Условия на лицевых плоскостях $z=h_k$ задаются формулами

$$\begin{gathered}\sigma_{xz}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma_{xz}^{+}(x,y),\ \sigma_{yz}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma_{yz}^{+}(x,y),\ \sigma_{z}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma_{z}^{+}(x,y),\quad z=h_1\\ w=\left(\frac{h}{l}\right)^3 w^{-}(x,y),\ \sigma_{xz}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma_{xz}^{-}(x,y),\ \sigma_{yz}=\left(\frac{h}{l}\right)^4\sigma_{yz}^{-}(x,y),\quad z=-h_2\end{gathered}\tag{1.1}$$

На плоскости раздела $z=0$ заданы условия неполного контакта

$$\sigma_z^{(1)}=\sigma_z^{(2)},\ w^{(1)}=w^{(2)},\ \sigma_{xz}^{(1)}=\sigma_{xz}^{(2)}=f_1(x,y),\quad \sigma_{yz}^{(1)}=\sigma_{yz}^{(2)}=f_2(x,y)\tag{1.2}$$

В зависимости от выбранной модели контакта, функции $f_k(x,y)$ считаются заданными. В частности, случаю $f_k(x,y)\equiv 0$ соответствует отсутствие силы трения между слоями.

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1), условиях неполного контакта слоёв (1.2) и условиях на боковой поверхности пластинки. Краевые условия на торцах $x=0,a$ и $y=0,b$ – пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости [3,6,7]

В уравнения теории упругости введём безразмерные переменные $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l – характерный тангенциальный размер пластинки $(h << l)$.

Решение внутренней задачи ищется в виде [1,5,8-10]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \tag{1.3}$$

где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений, s – номер приближения, k – номер слоя $(k = 1,2)$, S – количество приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}$:

$$q_k = 3 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}, \; q_k = 4 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \tag{1.4}$$

Эта асимптотика, по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [8]. В нелинейной задаче, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.4) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра [9-10]. Поэтому, было принято $q = q_0 + 4$, где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости.

Асимптотике (1.3), (1.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (1.3) в преобразованные, введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, уравнения теории упругости анизотропного тела, с учётом (1.4), получим систему для определения $Q^{(s)}$.

Асимптотическое решение этой системы получено в работах [11].

$$\sigma_z^{(k,s)} = \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)}, \; U^{(k,s)} = u^{(k,s)} + u^{*(k,s)}, \; (U, V, W),$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{16}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + a_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)},$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(k,s)} = & -\left[L_{11}\left(B_{ij}^{(k)} \right) u^{(k,s)} + L_{12}\left(B_{ij}^{(k)} \right) v^{(k,s)} \right] \zeta - \\ & - \left(a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right) \zeta + \sigma_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$(x, y;\, 1, 2;\, a, b)$$

Величины со звездочками, входящие в формулы (1.5), как обычно, известны для каждого приближения s, поскольку выражаются через предыдущие приближения.

Сюда же входят члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Они были выведены в работе [11] и определяются по формулам

$$\sigma_z^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \sigma_3^{*(k,)} \right) d\zeta,$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta} \Big(a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} +$$
$$+ a_{56}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - U_{\xi\zeta}^{(k,s-3)} - V_{\xi\zeta}^{(k,s-3)} - W_{\xi\zeta}^{(k,s-3)} \Big) d\zeta$$

$$v^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta} \Big(a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} +$$
$$+ a_{46}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - U_{\eta\zeta}^{(k,s-3)} - V_{\eta\zeta}^{(k,s-3)} - W_{\eta\zeta}^{(k,s-3)} \Big) d\zeta$$

$$w^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta} \Big(a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)}$$
$$+ a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - U_{\zeta}^{(s-2)} - V_{\zeta}^{(s-2)} - W_{\zeta}^{(s-2)} \Big) d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{*(k,s)}$$
$$+ a_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + a_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{*(k,s)} +$$
$$+ c_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + c_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + c_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_{xz}^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \sigma_1^{*(k,s)} \right) d\zeta, \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi}^{(k,s-3)} + V_{\xi}^{(k,s-3)} + W_{\xi}^{(k,s-3)}, \quad \left(1,2;\ x,y;\ \xi,\eta; a,b\right)$$

$$\omega^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + V_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}.$$

Предполагается, что $Q^{(s-m)} \equiv 0$, если $s < m,\ m \in N$.

Члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений, в свою очередь, определяются по формулам

$$\sigma_1^{*(k,s)}=\sigma_{11}^{(k,s-3)}+\sigma_{12}^{(k,s-2)},\ \sigma_2^{*(k,s)}=\sigma_{22}^{(k,s-3)}+\sigma_{21}^{(k,s-2)},\ \sigma_3^{*(k,s)}=\sigma_{33}^{(k,s-4)}+\sigma_{13}^{(k,s-2)}$$

$$\sigma_{11}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\left[\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(k,s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial\xi}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\sigma_y^{(k,s-i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\xi^2}\sigma_x^{(k,s-i)}+$$

$$\left.+\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\eta^2}\sigma_y^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\xi\partial\eta}\sigma_{xy}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\xi\partial\zeta}\sigma_{xz}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\eta\partial\zeta}\sigma_{yz}^{(k,s-i)}\right]$$

$$\sigma_{12}^{(k,s)}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\zeta^2}\sigma_z^{(k,s-i)}+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma_z^{(k,s-i)}}{\partial\zeta}\right]\quad(1,2,3;U,V,W;\xi,\eta,\zeta)\qquad(1.7)$$

$$U_\xi^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\xi},\quad U_{\xi\eta}^{(k,s)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad(U,V,W)$$

$$U_\eta^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\eta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad U_{\zeta\eta}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad(U,V,W)$$

$$U_\zeta^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\zeta},\quad U_{\xi\zeta}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\zeta},\quad(U,V,W).$$

Представив функции $f_k(x,y)$ в виде рядов по степенам малого параметра ε и удовлетворив условиям неполного контакта (1.2), получим

$$w^{(1,s)}=w^{(2,s)}=w^{(s)},\ \sigma_{z0}^{(1,s)}=\sigma_{z0}^{(2,s)},$$

$$\begin{gathered}\sigma_{xz0}^{(1,s)}=\sigma_{xz0}^{(2,s)}=f_1^{(s)}(\xi,\eta),\ \sigma_{yz0}^{(1,s)}=\sigma_{yz0}^{(2,s)}=f_2^{(s)}(\xi,\eta),\\ f_k^{(0)}(\xi,\eta)=f_k(x/l,y/l),\ f_k^{(s)}(\xi,\eta)=0,\ s>0,\ k=1,2;\end{gathered}\qquad(1.8)$$

С учётом (1.8) удовлетворив поверхностным условиям (1.1), получим следующие формулы для определения неизвестных функций интегрирования $\sigma_{z0}^{(k,s)}$, $w^{(k,s)}$

$$w^{(s)}=w^{-(s)}-w^{*(2,s)}(\xi,\eta,\zeta_2),\ \sigma_{z0}^{(k,s)}=\sigma_z^{+(s)}-\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)\qquad(1.9)$$

а также систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(k.s)},v^{(k,s)}$

$$\begin{gathered}L_{11}\left(C_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)}+L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)}-f_1^{(s)}(\xi,\eta)=p_1^{(k,s)}\\ L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)}+L_{22}\left(C_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)}-f_2^{(s)}(\xi,\eta)=p_2^{(k,s)}\end{gathered}\qquad(1.10)$$

Обобщённые нагрузки $p_1^{(k,s)}$ и $p_2^{(k,s)}$ определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
p_1^{(k,s)} &= -\sigma_{xz}^{\pm(s)}\left(\xi,\eta\right)-\sigma_{xz}^{*(k,s)}\left(\xi,\eta,\zeta_k\right)-\left(a_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\xi}+c_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\eta}\right)\zeta_k \\
p_2^{(k,s)} &= -\sigma_{yz}^{\pm(s)}\left(\xi,\eta\right)-\sigma_{yz}^{*(k,s)}\left(\xi,\eta,\zeta_k\right)-\left(b_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\eta}+c_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\xi}\right)\zeta_k
\end{aligned}
\qquad (1.11)
$$

где

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)},\sigma_{yz}^{\pm(0)},\sigma_{z}^{\pm(0)}=\sigma_{xz}^{\pm},\sigma_{yz}^{\pm},\sigma_{z}^{+};\ w^{-(0)}=w^{-};\ w^{-(s)},\sigma_{xz}^{\pm(s)},\sigma_{yz}^{\pm(s)},\sigma_{z}^{+(s)}=0,\ s>0$$

$$\zeta_1=h_1/h,\ \zeta_2=-h_2/h,\ h=\left(h_1+h_2\right)/2$$

Операторы $L_{ij}\left(C_{ij}^{(k)}\right)$определяются по известным формулам [3,5].

Система уравнений (1.7) при $s=0$ распадается на две системы относительно $u^{(1,0)},v^{(1,0)}$ и $u^{(2,0)},v^{(2,0)}$, которые совпадают с уравнениями обобщюнной плоской задачи, теории упругости, когда имеется плоскость упругой симметрии [2,3]. Однако, вместо двух уравнений, здесь имеем систему из четырёх уравнений. Для приближений $s>0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

2. Взаимодействие слоёв по закону сухого трения.

Закон сухого трения (трение без смазки) означает, что на контактной поверхности поставлены такие условия, при которых величина касательных напряжений определяется только величиной нормальных напряжений, то есть касательная и нормальная составляющие вектора внешних сил связаны соотношением [13,14]

$$\left|\tau\right|=\tau\left(\left|\sigma_n\right|,\gamma_i\right),\quad i=\overline{1,N} \qquad (2.1)$$

Здесь τ – некоторая положительная функция, γ_i – набор параметров, характеризующих шероховатость поверхности контакта, прочностные свойства контактирующих тел и т.п. Функция $\tau\left(\left|\sigma_n\right|,\gamma_i\right)$ в (2.1) определяет конкретный закон сухого трения на поверхности контакта.

К простейшим вариантам математического моделирования процесса трения следует отнести однопараметрические ($N=1$) законы

$$\tau\left(\left|\sigma_n\right|,\tau_s\right)=\tau_s \qquad (2.2)$$

$$\tau\left(\left|\sigma_n\right|,\chi\right)=\chi\left|\sigma_n\right| \qquad (2.3)$$

Первое соотношение – закон постоянной силы трения, второе – закон трения Амонтона–Кулона. Указанные законы трения исследованы теоретически и широко применяются в расчётах [13,14].

а) ***Взаимодействие слоёв по закону постоянной силы трения.***

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону постоянной силы трения. Закон постоянной силы трения предполагает, что на контактной поверхности величина касательных напряжений постоянная, т.е. имеется

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = \tau_{1s} = \mathrm{const}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \tau_{2s} = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

Параметры τ_{1s}, τ_{2s} можно интерпретировать как предел текучести контактного слоя [15].

Из (1.6), как следствие, получим

$$f_k^{(s)}(\xi,\eta) = \tau_{ks}^{(s)}, \ k = 1,2, \tag{2.5}$$

где

$$\tau_{ks}^{(0)} = \tau_{ks}, \ \tau_{ks}^{(s)} = 0 \ (k = 1,2) \text{ при } s > 0 \tag{2.6}$$

Подставив значения $f_k^{(s)}(\xi,\eta)$ из (2.2), (2.3) в (1.7), получим новую систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} L_{11}\left(C_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)} + L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)} &= \overline{p}_1^{(k,s)} \\ L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)} + L_{22}\left(C_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)} &= \overline{p}_2^{(k,s)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\overline{p}_1^{(k,s)} = p_1^{(k,s)} + \tau_{1s}^{(s)}, \ \overline{p}_2^{(k,s)} = p_2^{(k,s)} + \tau_{2s}^{(s)} \tag{2.8}$$

б) *Взаимодействие слоёв по закону трения Амонтона – Кулона.*

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Амонтона –Кулона. Тогда

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = \chi_1 \frac{l}{h}\sigma_z(x,y,0), \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \chi_2 \frac{l}{h}\sigma_z(x,y,0) \tag{2.9}$$

и, как следствие, получим

$$f_k^{(s)}(\xi,\eta) = \chi_k f^{(s)}(\xi,\eta), \ k = 1,2, \tag{2.10}$$

где

$$f^{(s)}(\xi,\eta) = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1) \tag{2.11}$$

Коэффициенты χ_k – постоянные величины. В частности, если χ_1 или χ_2 равны нулю, то это означает, что отсутствует сила трения между слоями по направлению Ox или Oy. Если одновременно χ_1, χ_2 равны нулю, то силы трения отсутствуют по всей плоскости контакта.

Подставив значения $f_k^{(s)}(\xi,\eta)$ из (2.10), (2.11) в (1.7), снова получим систему уравнений (2.7), где

$$\begin{aligned} \overline{p}_1^{(k,s)} &= p_1^{(k,s)} + \chi_k\left(\sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)\right) \\ \overline{p}_2^{(k,s)} &= p_2^{(k,s)} + \chi_k\left(\sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Заметим, что когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона, то при условиях на лицевых плоскостях (1.1), в отличие первой краевой задачи теории упругости [10], не происходит повышение порядка разрешающих дифференциальных уравнений. В случае, когда коэффициенты $\chi_1 = \chi_2 = 0$, в системе уравнений (2.7) меняются лишь правые части, куда не входят внешние нагрузки $\sigma_z^{+(s)}$ и $\sigma_z^{-(s)}$. Значения произвольных постоянных, появившихся при интегрировании системы (2.7), могут быть определены из граничных условий при $x = 0, a$ и $y = 0, b$ с привлечением решения пограничного слоя.

Отметим, что при $s = 0$ правые части системы уравнений (2.7), т.е. обобщённые нагрузки $\overline{p}_1^{(s)}$ и $\overline{p}_2^{(s)}$ не содержат члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений. Как видно из формул (1.6), нелинейность проявляется, начиная с приближения $s \geq 2$. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

Если внешние нагрузки $\sigma_{xz}^{\pm}(x, y), \sigma_{yz}^{\pm}(x, y)$, $\sigma_z^{+}(x, y)$, а так же $w^{-}(x, y)$ как функции двух переменных, удовлетворяют условиям разложения в двойные ряды Фурье, то систему уравнений (2.7) можно решать методом разложения искомых функций в ряды Фурье. Покажем это на примере.

3. Частные решения. Рассмотрим частные решения задачи для пластин из ортотропных материалов.

Пример 1. Пусть пластина нагружена только нормальной нагрузкой $\sigma_z^{+}(x, y)$, меняющейся по синусоидальному закону, а упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона (2.9). Имеем

$$\sigma_z^{+} = q_0 \sin \lambda\xi,\ \xi = \frac{\pi l}{a},\ \sigma_{xz}^{\pm} = \sigma_{yz}^{\pm} = 0,\ w^{-} = 0 \tag{3.1}$$

Тогда, по формулам (1.6) получим

$$\sigma_{z0}^{(0)} = \sigma_z^{+} = q_0 \sin \lambda\xi,\ w^{(0)} = 0, \tag{3.2}$$

а из (2.9)–(2.11)

$$\sigma_{xz0}^{(k,0)} = \chi_1 q_0 \sin \lambda\xi,\ \sigma_{yz0}^{(k,0)} = \chi_2 q_0 \sin \lambda\xi\ . \tag{3.3}$$

Из (1.8) и (2.12) получим

$$\overline{p}_1^{(k,0)} = -a_3^{(k)} \lambda q_0 \cos \lambda\xi + \chi_1 q_0 \sin \lambda\xi,\ \overline{p}_2^{(k,0)} = \chi_2 q_0 \sin \lambda\xi\,. \tag{3.4}$$

Решение системы (2.7) ищем в виде функций

$$u^{(k,0)} = u_{01}^{(k,0)} \sin \lambda\xi + u_{02}^{(k,0)} \cos \lambda\xi,\ v^{(k,0)} = v_0^{(k,0)} \sin \lambda\xi \tag{3.5}$$

где $u_{01}^{(k,0)}, u_{02}^{(k,0)}, v_0^{(k,0)}$ – неизвестные коэффициенты.

Подставив (3.4) и (3.5) в систему (2.7) и приравнивая коэффициенты при $\sin \lambda\xi$ и $\cos \lambda\xi$, получим

$$u_{01}^{(k)} = -\frac{\chi_1 q_0}{C_{11}^{(k)} \lambda^2},\ u_{02}^{(k)} = \frac{a_3^{(k)} q_0}{C_{11}^{(k)} \lambda},\ v_0^{(k)} = -\frac{\chi_2 q_0}{C_{66}^{(k)} \lambda^2} \tag{3.6}$$

Учитывая, что $Q^{*(k,0)} = 0$, в нулевом приближении получим решение

$$U^{(k,0)} = \frac{q_0}{C_{11}^{(k)}\lambda^2}\left(\chi_1 \sin\lambda\xi + a_3^{(k)}\lambda\cos\lambda\xi\right),$$

$$V^{(k,0)} = -\frac{\chi_2 q_0}{C_{66}^{(k)}\lambda^2}\sin\lambda\xi,\ W^{(k,0)} = 0 \tag{3.7}$$

$$\sigma_x^{(k,0)} = q_0\frac{\chi_1}{\lambda}\frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}\cos\lambda\xi + a_3^{(k)}q_0\left(1-\frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}\right)\sin\lambda\xi$$

$$\sigma_y^{(k,0)} = -q_0\frac{\chi_1}{\lambda}\frac{B_{12}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}\cos\lambda\xi + q_0\left(b_3^{(k)} - \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}a_3^{(k)}\right)\sin\lambda\xi \tag{3.8}$$

$$\sigma_{xy}^{(k,0)} = -q_0\frac{\chi_2}{\lambda}\frac{B_{66}^{(k)}}{C_{66}^{(k)}}\sin\lambda\xi$$

$$\sigma_{xz}^{(k,0)} = q_0\left(1-\frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}\zeta\right)\left(\chi_1\sin\lambda\xi - a_3^{(k)}\lambda\cos\lambda\xi\right)$$

$$\sigma_{yz}^{(k,0)} = \chi_2 q_0\left(1-\frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}^{(k)}}\zeta\right)\sin\lambda\xi \tag{3.9}$$

Найденное решение удовлетворяет граничным условиям $u = 0,\ w = 0$ на торцах $x = 0,\ x = a$. Чтобы удовлетворить граничным условиям на торцах $y = 0,\ y = a$, необходимо иметь также решение типа пограничного слоя.

Так как $Q^{*(k,1)} = 0$, то $\overline{p}_1^{(k,1)} = p_2^{(k,1)} = 0$, следовательно, и $Q^{(k,1)} = 0$.

Как уже отмечалась, нелинейность проявляется, начиная с приближения $s \geq 2$. Следующие приближения вычисляются аналогичным образом.

Пример 2. Рассмотрим двухслойную пластину из ортотропных материалов. Предполагаем, что отсутствуют силы трения по всей плоскости контакта, то есть, одновременно χ_1, χ_2 равны нулю, а на лицевых поверхностях пластинки заданы только касательные усилия:

$$\sigma_{xz}^{\pm} = \tau_1 \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},\ \sigma_{yz}^{\pm} = \tau_2\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$\sigma_z^{+} = 0,\quad w^{-} = 0 \tag{3.10}$$

Пусть пластина заделана по краям, то есть имеем следующие граничные условия:

$$u = 0,\ w = 0 \quad \text{при}\ x = 0,\ x = a$$

$$v = 0,\ w = 0 \quad \text{при}\ y = 0,\ y = b \tag{3.11}$$

Тогда обобщённые нагрузки $\overline{p}_1^{(s)}$ и $\overline{p}_2^{(s)}$ в нулевом приближении равны

$$\overline{p}_1^{(0)} = \tau_1 \sin\pi\xi\cos m\eta,\ \overline{p}_2^{(0)} = \tau_2 \cos\pi\xi\sin m\eta,\ m = \frac{a}{b}, \tag{3.12}$$

где τ_1 и τ_2 – постоянные величины.

Решение системы (2.4) в нулевом приближении будем искать в виде

$$\begin{aligned} u^{(k,0)} &= f_u^{(k)} \cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} = f_u^{(k)} \sin\pi\xi\cos m\eta \\ v^{(k,0)} &= f_v^{(k)} \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} = f_v^{(k)} \cos\pi\xi\sin m\eta,\ m = \frac{a}{b} \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $f_u^{(k)}$ и $f_v^{(k)}$ – неизвестные постоянные.

Подставив (3.12) и (3.13) в систему (2.7), приравнивая коэффициенты при $\sin\pi\xi\cos m\eta$ и $\cos\pi\xi\sin m\eta$, получим систему алгебраических уравнений относительно $f_u^{(k)}$ и $f_v^{(k)}$, решив которую, получим:

$$f_u^{(k)} = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ f_v^{(k)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(C_{11} + m^2 C_{66}\right)\left(m^2 C_{22} + C_{66}\right) - m^2\left(C_{12} + C_{66}\right)^2 \\ \Delta_1 &= \left(m^2 C_{12} + C_{66}\right)\tau_1 - m\left(C_{12} + C_{66}\right)\tau_2, \\ \Delta_2 &= \left(C_{11} + m^2 C_{66}\right)\tau_2 - m\left(C_{12} + C_{66}\right)\tau_1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Подставив значения перемещений из (3.4) в формулы (1.5) для остальных величин, получим

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(k,0)} = 0,\ W^{(k,0)} = 0, \\ &\sigma_x^{(k,s)} = \left(f_u^{(k)} B_{11}^{(k)} + m f_v^{(k)} B_{12}^{(k)}\right)\cos\pi\xi\cos m\eta, \\ &\sigma_y^{(k,0)} = \left(m f_v^{(k)} B_{22}^{(k)} + f_u^{(k)} B_{12}^{(k)}\right)\cos\pi\xi\cos m\eta, \\ &\sigma_{xy}^{(k,0)} = B_{66}^{(k)}\left(m f_u^{(k)} + f_v^{(k)}\right)\sin\pi\xi\sin m\eta \\ &\sigma_{xz}^{(k,0)} = -\left[\left(B_{11}^{(k)} + m^2 B_{66}^{(k)}\right) f_u^{(k)} + m\left(B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}\right) f_v^{(k)}\right]\zeta\sin\pi\xi\cos m\eta \\ &\sigma_{yz}^{(k,0)} = -\left[\left(B_{12}^{(k)} + m^2 B_{22}^{(k)}\right) f_v^{(k)} + m\left(B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}\right) f_u^{(k)}\right]\zeta\cos\pi\xi\sin m\eta \end{aligned} \tag{3.16}$$

Найденное решение удовлетворяет граничным условиям (3.11).

Как в первом примере $Q^{*(k,1)} = 0$, $\overline{p}_1^{(k,1)} = p_2^{(k,1)} = 0$, следовательно, и $Q^{(k,1)} = 0$.

Нелинейность проявляется, начиная с приближения $s \geq 2$. Следующие приближения вычисляются аналогичным образом.

Заключение. В работе из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, а на плоскости раздела слоёв – закон сухого трения Кулона или закон постоянной силы трения.

Построено решение внутренней задачи и показано, что когда на плоскости раздела слоёв задан закон сухого трения Кулона, то, в отличие от первой краевой задачи, это не приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений. Также показано, что члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений, проявляются в последующих приближениях и будут существенными особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686. Goldenveizer A.L. The construction of the plate bending approximate theory by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory // J. Appl. Math. Mech. 1962. Vol. 26. Issue 4, pp 668-686 (in Russian).
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с. Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates. M.: Gostekhizdat. 1957. 463 p. (in Russian).
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. M.: Nauka, 1987. 360 p. (in Russian).
4. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. //ПМ. 1972. Т.8. Вып. 6. С.3-17. Grigolyuk E.I., Kogan F.A. The present state of the theory of multilayer shells. //PM. 1972. Vol.8. Issue 6, pp.3-17 (in Russian).
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore-London. World Scientific Publ. 2015. 376 p. (in Russian).
6. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948. 211с. Novozhilov V.V. The foundations of non-linear theory of elasticity. L.-M. OGIZ, 1948. 211p. (in Russian).
7. Черных К.Ф., Литвененкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988. Chernykh K.F., Litvenenkova Z.N. The theory of large elastic deformations. L.-M: Publishing. LSU, 1988 (in Russian).
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. Aghalovian L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-value problems of asymptotic layered beams, plates and shells. Erevan. 2005. 468p. (in Russian).
9. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями// В сб. «Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела». Ереван.1999. С.23-29. Aghalovian L.A., Khachatryan A.M. On two-dimensional equations two-layer anisotropic plate, with non full contact between the layers //«The

Contact and Mixed Boundary Problems of Mechanics of a deformable media». Yerevan.1999. pp.23-29 (in Russian).
10. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение трехмерной внутренней задачи анизотропной термоупругой пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С. 42-49. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asymptotic solution of three-dimensional interior problem of anisotropic termoelasticity plate on basis of geometrical non-linear theory of elasticity. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2010. Vol. 66. № 1. pp. 42-49 (in Russian).
11. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки по нелинейной теории упругости// Изв. АН Армении. Механика. 2017. Т.70. №1. С.64-73. Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M. On two-dimentional equations two-layer anisotropic plate with full contact between the layers. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. Vol.70. №1. pp.64-73 (in Russian).
12. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при заданных тангенциальных напряжениях на плоскости раздела слоёв. /Тр. IX Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис. 01-06 октября 2018. Ереван–2018. С.268-272. Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M. On two-dimensional equations of a two-layer anisotropic plate for given tangential stresses on the plane of separation of layers//. Proceedings of IX International Conference «The problems of interaction of deformable media» dedicated to the 75-th anniversary of NAS RA. October 1-6, 2018, Goris, Armenia**,** p. 268-272 (in Russian).
13. Алексеев А.Е. Нелинейные законы сухого трения в контактных задачах линейной теории упругости. ПМиТФ. 2002. Т.43. №4. С.161-169. Alekseev A.E. Nonlinear laws of dry friction in contact problems of the linear theory of elasticity. Applied Mathematics and Theoretical Physics. 2002. Vol.43. №4. pp.161-169 (in Russian).
14. Дюво Г. Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М: Наука, 1980. 384с. G. Duvaud, J.-L. Lions. Les inèquation en mècanique et en physique. Dunod. Paris. 1972. 384 p.
15. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с. Kachanov L.M. Fundamentals of the theory of plasticity. M.: Nauka, 1969. 420 p. (in Russian).

Сведения об авторах:
Хачатрян Александр Мовсесович – д. ф.-м. н., проф., вед. науч. сотрудник Института механики НАН РА. **Тел.:** (+37499) 21-19-49. **E-mail:** alexkhach49@yandex.ru
Саркисян Нарине Суреновна – преподаватель каф. математики АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (+37497) 21-00-78. **E-mail:** narine_sargsyan_2012@mail.ru

Поступила 04.04.2019

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №2, 2019 Механика
УДК 517. 934 Doi- http://doi.org/10.33018/72.2.7

A PROBLEM OF OPTIMAL STABILIZATION OF A QUADCOPTER UAV FLIGHT

Shahinyan A.S.

Keywords: Dynamical Systems, Optimal Control, Optimal Stabilization, Quadcopter UAV.

Шагинян А. С.

Об одной задаче оптимальной стабилизации полёта квадрокоптера

Ключевые слова: Динамические системы, оптимальное управление, оптимальная стабилизация, квадрокоптер БЛА.

В работе рассматривается задача оптимальной стабилизации безпилотного летательного аппарата (квадрокоптера) в линейном приближении. Приведена система дифференциальных уравнений, опысивающая динамика вадрокоптера, проверена полная управляемость линейного приближения полученной управляемой системы, поставлена и решена задача оптимальной стабилизации этой системы методом Ляпунова-Беллмана. Получены оптимальная функция Ляпунова, оптимальные управляющие воздействия. Построены графики оптимальных управлений и оптимальных движений.

Շահինյան Ա.Ս.

Քառաթև անօդաչու թռչող սարքի օպտիմալ ստաբիլացման մի խնդիր

Հիմնաբառեր՝ դինամիկ համակարգեր, օպտիմալ ղեկավարում, օպտիմալ ստաբիլացում, քառաթև ԱԹՍ:

Աշխատանքում դիտարկվում է քառաթև անօդաչու թռչող սարքի (ԱԹՍ) օպտիմալ ստաբիլացման խնդիրը գծային մոտավորությամբ: Բերված է ԱԹՍ դինամիկան նկարագրող դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը, ստուգված է ստացված ղեկավարվող համակարգի գծային մոտավորության լրիվ ղեկավարելիությունը, ձևակերպված և լուծված է այդ համակարգի համար օպտիմալ ստաբիլացման խնդիրը Լյապունով-Բելմանի եղանակով: Ստացված են Լյապունովի օպտիմալ ֆունկցիան և օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները: Կառուցված են օպտիմալ ղեկավարումների և օպտիմալ շարժումների գրաֆիկները:

This paper discusses an optimal stabilization problem of a quadcopter unmanned aerial vehicle (UAV). The dynamics of the UAV is presented and the linear time invariant (LTI) model of it is considered. The controllability of the LTI model is checked and an optimal stability problem is defined and solved for the LTI system using Lyapunov-Bellman method. The Lyapunov optimal function and optimal control inputs are gained. The graphs of optimal control inputs and optimal trajectories are constructed and presented.

1. Introduction: In this paper we are going to discuss a stabilization problem of a quadcopter (also called a quadrotor) unmanned aerial vehicle (UAV). A quadcopter is a helicopter equipped with four engines each of which have a propeller attached. Quadcopters are of high interest among researchers because of their simple structure. Moreover, quadcopters are agile and maneuverable which makes it easy to experiment complex control algorithms using them.

There are several papers which study the stabilization problem of quadcopters while approaching the problem from different view angles. Some papers use PID controllers, others do the job using just PD controllers, some researchers solved the problem using LQR regulator method. A short description of such papers is given in [1].

In [2] an Optimal Control problem is stated and solved for the linearized model. A numerical example is also given by presenting optimal control inputs calculated analytically and optimal trajectories of the motion.

Here in this paper we are going to approach the problem using so called Lyapunov-Bellman method. Using this method for Linear Time Invariant (LTI) systems we can find a Lyapunov optimal function, optimal control inputs and optimal trajectories.

What follows the introduction are three sections which are modelling of the system, problem definition and solution and discussion of results. The discussed system is a quadcopter, and the model is derived theoretically. Then the problem is defined and solved. The results are discussed by providing some simulations results and comments.

2. Model of the System: To derive the pure theoretical dynamics of a UAV let us fix a coordinate system $Oxyz$. Let O be the origin. We will also need another coordinate system $O_B x_B y_B z_B$ fixed in the center of mass O_B of the UAV (fig.1). The torques and forces generated by each of the propellers are shown in the Figure 1. The propellers are numbered 1 to 4 [1].

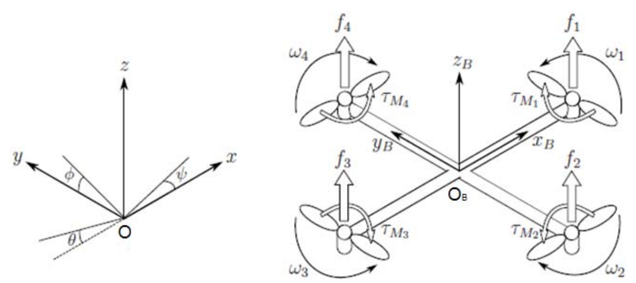


Figure 1.

Let $\xi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ be the coordinates of the center of mass of the UAV with respect to the system $Oxyz$. As mentioned above, the center of the mass of the UAV coincides with the origin of the coordinate system $O_B x_B y_B z_B$. Let us describe the inclined position of the UAV about the point O_B using yaw, pitch and roll angles. Let Φ be the pitch angle, Θ be the roll angle and, finally, let Ψ be the yaw angle. Then we will have two vectors describing the position of the UAV. Those are the following:

$$\xi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T, \quad \eta = \begin{pmatrix} \Phi & \Theta & \Psi \end{pmatrix}^T \tag{1}$$

In the coordinate system the linear velocities V_B and the angular velocities v are the following

$$V_B = \begin{pmatrix} V_{Bx} & V_{By} & V_{Bz} \end{pmatrix}^T, \qquad v = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^T \tag{2}$$

In this setup we will have the dynamics of the system as given below [1; 3].

$$\ddot{x} = \frac{T}{m} c_\Psi s_\Theta c_\Phi + \frac{T}{m} s_\Psi s_\Phi \,, \quad \ddot{y} = \frac{T}{m} s_\Psi s_\Theta c_\Phi - \frac{T}{m} c_\Psi s_\Phi \,, \quad \ddot{z} = -g + \frac{T}{m} c_\Theta c_\Phi \,,$$

$$\dot{\Phi} = p + \frac{s_\Phi s_\Theta}{c_\Theta} q + \frac{c_\Phi s_\Theta}{c_\Theta} r, \ \dot{\Theta} = c_\Phi q - s_\Phi r, \ \dot{\Psi} = \frac{s_\Phi}{c_\Theta} q + \frac{c_\Phi}{c_\Theta} r,$$

$$\dot{p} = \frac{\left(I_{yy} - I_{zz}\right) qr}{I_{xx}} - I_r \frac{q}{I_{xx}} \omega_\Gamma + \frac{\tau_\Phi}{I_{xx}}, \tag{3}$$

$$\dot{q} = \frac{\left(I_{zz} - I_{xx}\right) pr}{I_{yy}} - I_r \frac{p}{I_{yy}} \omega_\Gamma + \frac{\tau_\Theta}{I_{yy}},$$

$$\dot{r} = \frac{\left(I_{xx} - I_{yy}\right) pq}{I_{zz}} - I_r \frac{q}{I_{zz}} \omega_\Gamma + \frac{\tau_\Psi}{I_{zz}}.$$

Where the following notations are used: $C_\alpha := \cos\alpha,\ S_\alpha := \sin\alpha$,

$$\tau_B = \begin{pmatrix} \tau_\Phi \\ \tau_\Theta \\ \tau_\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk\left(-\omega_2^2 + \omega_4^2\right) \\ lk\left(-\omega_1^2 + \omega_3^2\right) \\ \sum_i \tau_i \end{pmatrix} \text{ and } T = \sum_i F_i = \sum_i k\omega_i^2,\ \vec{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & T \end{pmatrix}^T$$

Let us do the following notations and linearize the system around the origin.

$$\begin{aligned} &x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ x_3 = y,\ x_4 = \dot{y},\ x_5 = z,\ x_6 = \dot{z}, \\ &x_7 = \Phi,\ x_8 = \Theta,\ x_9 = \Psi,\ x_{10} = p,\ x_{11} = q,\ x_{12} = r \end{aligned} \tag{4}$$

We will have

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = gx_8,\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = -gx_7,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = u_1 \\ &\dot{x}_7 = x_{10},\ \dot{x}_8 = x_{11},\ \dot{x}_9 = x_{12},\ \dot{x}_{10} = \frac{u_2}{I_{xx}},\ \dot{x}_{11} = \frac{u_3}{I_{yy}},\ \dot{x}_{12} = \frac{u_4}{I_{zz}} \end{aligned} \tag{5}$$

Where $u_1 = \frac{T}{m} - g$, $u_2 = \tau_\Phi$, $u_3 = \tau_\Theta$, $u_4 = \tau_\Psi$

In [2] it is discussed and shown that the system (5) is fully controllable.

3. Stabilization Problem: Let us now define the stabilization problem that we want to solve.

Problem: Given the system (1.8), the initial position of the system $x(0) = x_0$, find control inputs $u^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 & u_2^0 & u_3^0 & u_4^0 \end{pmatrix}^T$ such that it drives the system from the given initial position to asymptotically stable state, while minimizing the given linear quadratic regulator

$$J[\bullet] = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{12} x_i^2 + \sum_{i=1}^{4} u_i^2 \right) d\tau. \tag{6}$$

Solution: We will follow Lyapunov-Bellman method to solve this problem. Notice that the system (5) can be decomposed into 4 systems which are the following.

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = gx_8,\ \dot{x}_8 = x_{11},\ \dot{x}_{11} = \frac{u_3}{I_{yy}} \tag{7}$$

$$\dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = -gx_7,\ \dot{x}_7 = x_{10},\ \dot{x}_{10} = \frac{u_2}{I_{xx}} \tag{8}$$

$$\dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = u_1 \tag{9}$$

$$\dot{x}_9 = x_{12},\ \dot{x}_{12} = \frac{u_4}{I_{zz}} \tag{10}$$

So, we will have 4 independent systems which are fully controllable. This means we can solve the problem for each of these systems separately. In this case (6) will be written as

$$J[\bullet] = J_1[\bullet] + J_2[\bullet] + J_3[\bullet] + J_4[\bullet]$$

where

$$J_1[\bullet] = \int_0^\infty \left(x_5^2 + x_6^2 + u_1^2 \right) d\tau,\ J_2[\bullet] = \int_0^\infty \left(x_3^2 + x_4^2 + x_7^2 + x_{10}^2 + u_2^2 \right) d\tau,$$

$$J_3[\bullet] = \int_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + x_8^2 + x_{11}^2 + u_3^2 \right) d\tau,\ J_4[\bullet] = \int_0^\infty \left(x_9^2 + x_{12}^2 + u_4^2 \right) d\tau.$$

As we see that system (5) can be divided into four subsystems then it is convenient to search for a Lyapunov function in the form

$$V(x_1,...,x_{12}) = V_1(x_5,x_6) + V_2(x_3,x_4,x_7,x_{10}) + \\ + V_3(x_1,x_2,x_8,x_{11}) + V_4(x_9,x_{12})$$

We will show the steps for one of the above subsystems (say (7)) and will present the solutions of other three systems instantly.

So, for (7) Bellman equation will be as follows.

$$\mathfrak{B}[\bullet] = \frac{\partial V_3}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} gx_8 + \frac{\partial V_3}{\partial x_8} x_{11} + \frac{\partial V_3}{\partial x_{11}} au_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_8^2 + x_{11}^2 + u_3^2 \tag{11}$$

Where $a = \frac{1}{I_{xx}} = \frac{1}{I_{yy}}$. Now differentiating (11) and making it equal to 0 we get that

$$u_3^0 = -\frac{1}{2} a \frac{\partial V_3}{\partial x_{11}} \tag{12}$$

Then we will have

$$\mathfrak{B}[\bullet]\big|_{u_3 = u_3^0} = \frac{\partial V_3}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} gx_8 + \frac{\partial V_3}{\partial x_8} x_{11} - \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_{11}} \right)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_8^2 + x_{11}^2 = 0 \tag{13}$$

We are looking for Lyapunov function in the form shown below.

$$V_3(x_1,x_2,x_8,x_{11}) = \frac{1}{2}(c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{88}x_8^2 + c_{1111}x_{11}^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{18}x_1x_8 + \\ + 2c_{111}x_1x_{11} + 2c_{28}x_2x_8 + 2c_{211}x_2x_{11} + 2c_{811}x_8x_{11}) \tag{14}$$

Substituting (14) into (13) leads us to following equation.

$$
\begin{aligned}
&\left(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{18}x_8 + c_{111}x_{11}\right)x_2 + \left(c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + c_{28}x_8 + c_{211}x_{11}\right)gx_8 + \\
&+\left(c_{18}x_1 + c_{28}x_2 + c_{88}x_8 + c_{811}x_{11}\right)x_{11} - \frac{1}{4}a^2\left(c_{111}x_1 + c_{211}x_2 + c_{811}x_8 + c_{1111}x_{11}\right)^2 + \\
&+x_1^2 + x_2^2 + x_8^2 + x_{11}^2 = 0
\end{aligned} \tag{15}
$$

Because the coefficients of polynomials in opposite sides of an equity must be equal, then from (15) it simply follows that

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}a^2c_{111}^2 + 1 = 0,\ -\frac{1}{4}a^2c_{211}^2 + c_{12} + 1 = 0, \\
&-\frac{1}{4}a^2c_{811}^2 + gc_{28} + 1 = 0,\ -\frac{1}{4}a^2c_{1111}^2 + c_{811} + 1 = 0, \\
&-\frac{1}{2}a^2c_{111}c_{211} + c_{11} = 0,\ -\frac{1}{2}a^2c_{111}c_{811} + gc_{12} = 0, \\
&-\frac{1}{2}a^2c_{111}c_{1111} + c_{18} = 0,\ -\frac{1}{2}a^2c_{211}c_{811} + c_{18} + gc_{22} = 0, \\
&-\frac{1}{2}a^2c_{211}c_{1111} + c_{111} + c_{28} = 0,\ -\frac{1}{2}a^2c_{811}c_{1111} + gc_{211} + c_{88} = 0
\end{aligned} \tag{16}
$$

Here the parameters have the values $a = 205.93,\ g = 9.81$. The solution of (16) that makes $V_3(x)$ a positive definite function is the following:

$$
\begin{aligned}
&c_{11} = 2.912,\ c_{22} = 1.423,\ c_{88} = 11.148,\ c_{1111} = 0.00997,\ c_{12} = 1.121 \\
&c_{18} = 2.053,\ c_{111} = 0.00971,\ c_{28} = 2.979,\ c_{211} = 0.0141,\ c_{811} = 0.0534
\end{aligned} \tag{17}
$$

It only remains to substitute values from (17) into (14) and then substitute into (12). Thus, we will have u_3^0.

By doing the same steps we will get also $V_1,\ V_2, V_4$ and $u_1^0,\ u_2^0, u_4^0$. For $V_1,\ V_2, V_3, V_4$ we will have.

$$
\begin{aligned}
&V_1\left(x_5, x_6\right) = 1.732x_5^2 + 2x_5x_6 + 1.732x_6^2 \\
&V_2(x_3, x_4, x_7, x_{10}) = 1.457x_3^2 + 0.712x_4^2 + 5.574x_7^2 + 0.00499x_{10}^2 + 1.121x_3x_4 - \\
&-2.053x_3x_7 - 0.00971x_3x_{10} - 2.979x_4x_7 - 0.0141x_4x_{10} + 0.0534x_7x_{10} \\
&V_3(x_1, x_2, x_8, x_{11}) = 1.457x_3^2 + 0.712x_4^2 + 5.574x_7^2 + 0.00499x_{10}^2 + 1.121x_3x_4 + \\
&+2.053x_3x_7 + 0.00971x_3x_{10} + 2.979x_4x_7 + 0.0141x_4x_{10} + 0.0534x_7x_{10} \\
&V_4\left(x_9, x_{12}\right) = 1.009x_9^2 + 0.0176x_9x_{12} + 0.0089x_{12}^2
\end{aligned} \tag{18}
$$

Hence, optimal control inputs will be:

$$
\begin{aligned}
&u_1^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial x_6} = -x_5 - 1.732x_6, u_2^0 = -\frac{1}{2}a\frac{\partial V_2}{\partial x_{10}} = 1.00082x_3 + 1.452x_4 - 5.498x_7 - 1.0276x_{10} \\
&u_3^0 = -\frac{1}{2}a\frac{\partial V_3}{\partial x_{11}} = -1.00082x_1 - 1.452x_2 - 5.498x_8 - 1.0276x_{11}, u_4^0 = -\frac{1}{2}b\frac{\partial V_4}{\partial x_{12}} = -x_9 - 1.0112x_{12}
\end{aligned} \tag{19}
$$

Where $b = \dfrac{1}{I_{zz}} = 113.62$. And Lyapunov function for the system (5) will be the sum of Lyapunov functions of subsystems (7) -(10). That is

$$
V^0\left(x_1, ..., x_{12}\right) = V_1^0\left(x_5, x_6\right) + V_2^0\left(x_3, x_4, x_7, x_{10}\right) + V_3^0\left(x_1, x_2, x_8, x_{11}\right) + V_4^0\left(x_9, x_{12}\right)
$$

And the minimal value of (6) is [5]

$$J^0[\bullet] = V^0(x_{1,0}, \ldots, x_{12,0})$$

Where $x_{i,0} = x_i(0)$, $i = 1, \ldots, 12$.

4. Discussion of Results: To visualize the results, we did some simulations. To do this, we simply substituted the optimal control inputs into the system (5) and get a system of first order ordinary differential equations. By solving that system, we will get the analytic forms of optimal trajectories. It is not convenient to show them in the paper because of their enormous sizes. The initial conditions and values of the parameters are assumed to be the following:

$$x_{1,0} = 50,\ x_{2,0} = 0,\ x_{3,0} = 30,\ x_{4,0} = 0,\ x_{5,0} = 10,\ x_{6,0} = 0,\ x_{7,0} = 0,\ x_{8,0} = 0,$$
$$x_{9,0} = \frac{\pi}{2},\ x_{10,0} = 0,\ x_{11,0} = 0,\ x_{12,0} = 0,\ a = \frac{1000}{4.856},\ b = \frac{1000}{8.801}$$

So, for these initial conditions we will have our constraint optimal value equal to $J^0[\bullet] = 8766.99$. The trajectories of states will have the form given below. The results of the simulation are presented below by presenting some of the graphs of optimal trajectories numbered as Fig.2 to Fig.5.

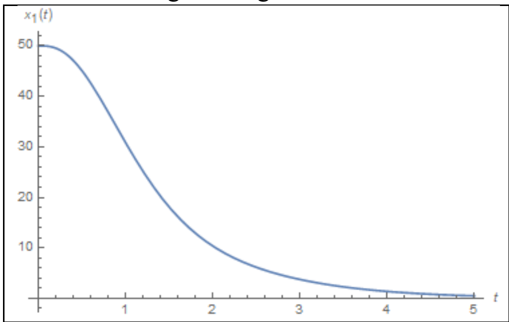


Fig. 2: Trajectory of state $x_1(t)$

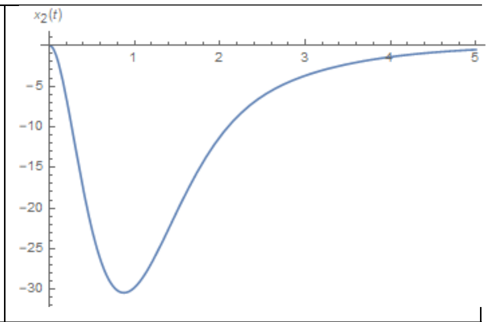


Fig. 3: Trajectory of state $x_2(t)$

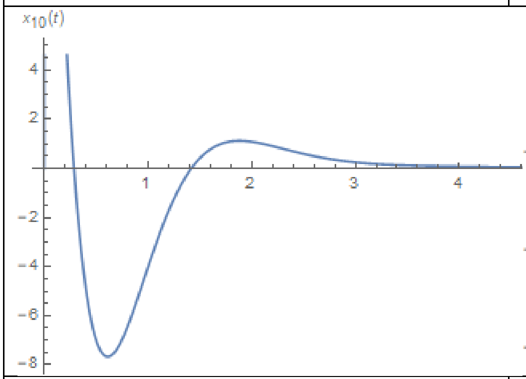


Fig. 4: Trajectory of state $x_{10}(t)$

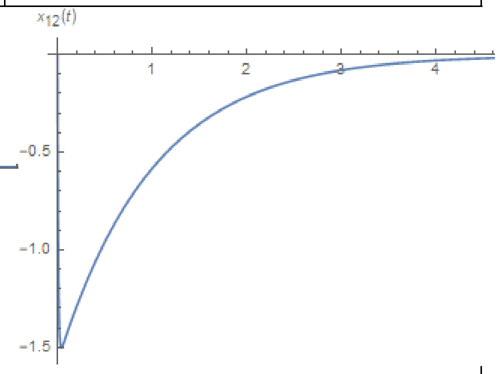


Fig. 5: Trajectory of state $x_{12}(t)$

Conclusion

The problem discussed in this paper is solved using Lyapunov-Bellman method. Lyapunov Optimal function is acquired, and the optimal control inputs are constructed. Using those results we also constructed the optimal trajectories of UAV including both geometrical coordinates and their velocities. Also, the optimal value of the energy constraint is calculated and given in discussion of results section. The results are then discussed by simulating them in MATLAB R2018a. Finally, the simulation results are shown in form of graphs.

REFERENCES

1. Luukkonen T. Modelling and Control of Quadcopter. School of Science, Mat-2.4108, Independent Research project in applied mathematics, Espoo, August 22, 2011, 26 p.
2. Shahinyan A.S. An Optimal Control Problem with Energy Constraint for an Unmanned Aerial Vehicle, IX international conference The Problems of Interaction of Deformable Media, Dedicated to the 75th anniversary of NAS RA, October 1-6, 2018, Goris.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1972, ч.2. 332с. Buchholz N.N. The Main Course of Theoretical Mechanics. M.: Nauka 1972, h.2. 332p. [in Russian]
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с. Krasovskii N. N. Control Theory of Motion. M.: Nauka, 1968, 476 p. [in Russian]
5. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск: 1972. 274с. Al'brekht, E.G., Shelement'ev G.S., Lectures on the Stabilization Theory, Sverdlovsk, 1972, 274p. [in Russian]
6. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. В книге Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966, с.475-514. Krasovskii N.N. «Stabilization Problems of Controlled Motions», In the I.G. Malkin’s book; Stability Theory of Motion, Add. 4. M.: Nauka, pp. 475-517, 1966. [in Russin]

Сведения об авторе:

Шагинян Арман Смбатович – магистрант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (374 55) 66-37-41;
E-mail: armanshah1995@gmail.com

Received 25.01.2019

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №2, 2019 Механика

Содержание 2-го номера за 2019 г., том 72

CONTENTS №2, 2019

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2019, №2

Сдано в производство 10.06.2019 г.
Формат 70 х 100 $^1/_{16}$. Печ. лист – 51/2
Заказ № 949. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24