ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2019

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №1, 2019 Механика
УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГО-СПИНОВЫХ ВОЛН В МАГНИТО-УПОРЯДОЧЕННЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ

Агаян К.Л., Атоян Л.А., Терзян С.А.

Ключевые слова: упруго-спиновые волны, двухслойная структура, волны Лява.

Aghayan K.L., Atoyan L.A., Terzyan S.H.

Propagation of elastic-spin waves in magneto-ordered two-layer structures

Key words: elastic-spin waves, bilayer structure, Love waves.

In this paper we study the propagation of elastic-spin waves of the Love type in two-layer magnet-nonmagnet media. The case is considered when one edge is free and the other is fixed. The condition for the existence of the elastic-spin waves is found and the corresponding dispersion equation is obtained. A comparative numerical analysis was then carried out to determine the degree of influence of the magnetic properties of the layer on the dispersion picture.

Աղայան Կ.Լ., Աթոյան Լ.Հ., Թերզյան Ս.Հ.

Առաձգասպինային ալիքների տարածումը մագնիսական երկշերտանի կառույցներում

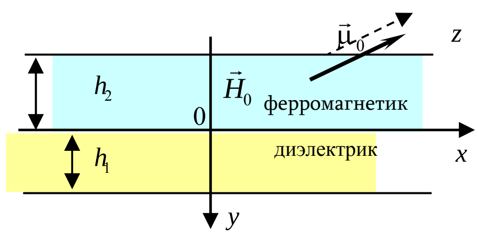
Հիմնաբառեր՝ Առաձգա–սպինային ալիքներ, երկշերտ կառույց, Լյավի ալիքներ

Այս հոդվածում ուսումնասիրվում է առաձգա-սպինային Լյավի տեսքի ալիքների տարածումը երկշերտ մագնիս-ոչմագնիս կառուցվածքում: Կառուցվածքի մի եզրը ազատ է, իսկ մյուսը ամրակցված: Ստացված են առաձգա-սպինային ալիքների գոյության պայմանը և համապատասխան դիսպերսիոն հավասարումը: Այնուհետեւ կատարվել է համեմատական թվային վերլուծություն, որոշելու համար շերտի մագնիսական հատկությունների ազդեցությունը դիսպերսիոն պատկերի վրա:

В данной работе исследуется распространение упруго-спиновых волн в двухслойных средах магнит-немагнит. Рассматривается случай, когда один край свободен, а другой закреплен. Найдено условие существования упруго-спиновых волн и получено соответствующее дисперсионное уравнение. Далее проведён сравнительный численный анализ с целью определения степени влияния магнитных свойств слоя на дисперсионную картину.

1. Введение. В магнито-упорядоченных средах, как известно, могут распространяться взаимосвязанные упруго-спиновые волны, поскольку существует связь между колебаниями спинов и колебаниями ионов кристаллической решётки магнетика, т.е. имеет место магнон-фононное взаимодействие [1-4, 10, 12]. Данная работа посвящена вопросам существования и распространения упруго-спиновых волн типа Лява в слоистой структуре ферромагнит-диэлектрик. Задача решается с использованием уравнений, учитывающих взаимосвязь спиновых (магнитных) и упругих возмущений [1-9], а также уравнения механического движения среды, уравнения Ландау-Лифшица, описывающие движение плотности магнитного момента.

2. Постановка задачи. Рассматривается двухслойная конструкция, состоящая из упругих ферромагнитного и диэлектрического (не электромагнитоактивного) слоёв конечных толщин, находящаяся во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$, направленном по оси Z (фиг.1), которая совпадает с осью легкого намагничивания ферромагнетика [1-4].



Фиг. 1.

Полагаем, что область $0 \le y \le h_1$ немагнитная, а область $-h_2 \le y \le 0$ – ферромагнетик. Через $\vec{M}_0$ обозначим объёмную намагниченность насыщения ферромагнетика, а массовую намагниченность насыщения обозначим через $\vec{\mu}_0 = \vec{M}_0 / \rho$, ρ – плотность ферромагнетика. Через μ и ν обозначим компоненты вектора намагниченности $\vec{\mu}(\mu, \nu, 0)$. Полагаем, что намагниченность насыщения ферромагнетика $\vec{M}_0$ не зависит от интенсивности внешнего поля $\vec{H}_0$.

Нижнюю границу структуры $\left(y = h_1\right)$ будем считать закреплённой, а верхнюю $\left(y = -h_2\right)$ – свободной. Из компонент перемещений в обеих средах будем считать отличными от нуля только компоненты w_1 и w_2, т.е. рассматриваются сдвиговые волны.

Уравнения, описывающие динамические процессы в структуре, представляются в следующем виде:

а) немагнитный слой:

$$\ddot{w}_1 = S_1^2 \Delta w_1, \tag{1}$$

b) магнитный слой:

$$\ddot{w}_2 = S_2^2 \Delta w_2 + f \mu_0 (\mu_x + \nu_y), \ \dot{\mu} = \omega_M (\hat{b}\nu + f \mu_0 w_{2y}), \ \dot{\nu} = -\omega_M (\hat{b}\mu + f \mu_0 w_{2x}). \tag{2}$$

S_1 и S_2 – скорости упругих волн, f – коэффициент магнитоупругой связи, $\hat{b} = H_0 / M_0$ – величина, обратная магнитной восприимчивости, $\omega_M = \gamma M_0$, $\gamma = 1.8 * 10^7$ *1/(э*с) – гиромагнитное отношение, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Уравнения (2) выписаны без учёта обменного взаимодействия, магнитного потенциала, а также магнитной анизотропии $(b = 0)$, что, к примеру, верно для широко использующегося на практике, железо-иттриевого граната (ЖИГ) [2,9].

Граничные условия:

$$\begin{aligned} &a)\, w_1 |_{y=0} = w_2 |_{y=0},\ c)\, \sigma_{yz}^{(2)} |_{y=-h_2} = 0, \\ &b)\, \sigma_{yz}^{(1)} |_{y=0} = \sigma_{yz}^{(2)} |_{y=0},\ d)\, w_1 |_{y=h_1} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$\sigma_{yz}^{(1,2)}$ – напряжения в соответствующих средах, они представляются в виде:

$\sigma_{yz}^{(1)} = G_1 w_{1y}$; $\sigma_{yz}^{(2)} = G_2 w_{2y} + fM_0\nu$, где G_1 и G_2 – модули сдвига.

3. Решение задачи. Решения задач (1), (2) ищутся в виде:

$$(w_1, w_2, \mu, \nu) = (W_1(y), W_2(y), M(y), N(y))\exp(i(\omega t - px)) \qquad (4)$$

p – компонента искомого волнового вектора, ω – круговая частота. Подставим (4) в (1), (2). Для амплитуд W_1 и W_2 получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2W_1}{dy^2} + a^2W_1 = 0,\ a^2 = \omega^2 / S_1^2 - p^2; \qquad (5)$$

$$\frac{d^2W_2}{dy^2} + c^2W_2 = 0, \qquad (6)$$

$$c^2 = \frac{(\Omega^2 - \hat{b}^2)(\omega^2 - p^2S_2^2) - f^2\mu_0^2\hat{b}p^2}{S_2^2(\Omega^2 - \hat{b}^2) + f^2\mu_0^2\hat{b}}, \qquad (7)$$

где $\Omega = \omega / \omega_M$. Решения уравнений (5), (6) имеют вид:

$$W_1(y) = A\sin(h_1 - y)a, \qquad (8)$$

$$W_2(y) = B_1\cos yc + B_2\sin yc \qquad (9)$$

A, B_1, B_2 – неизвестные постоянные. Заметим, что при нахождении решения (8) было использовано граничное условие (3)d. Далее, воспользовавшись условием (3)c, найдём связь между постоянными B_1 и B_2 :

$$B_2 = \beta B_1,\ \text{где}\ \ \beta = \frac{c(p^2\eta\varsigma_1 - 1 + \varsigma)\mathrm{tg}h_2c + \xi p^2\sqrt{\eta\varsigma_1}}{\xi p^2\sqrt{\eta\varsigma_1}\ \mathrm{tg}h_2c - c(p^2\eta\varsigma_1 - 1 + \varsigma)}. \qquad (10)$$

Здесь и далее будем пользоваться обозначениями:

$$\eta = \frac{S^2}{S_1^2},\ \varsigma = \frac{f^2\mu_0^2}{\hat{b}S_2^2},\ \varsigma_1 = \frac{S_1^2}{\gamma^2H_0^2},\ \vartheta = \frac{S_1^2}{S_2^2},\ \vartheta\eta = \frac{S^2}{S_2^2},$$

$$\frac{\Omega^2}{\hat{b}^2} = p^2\eta\varsigma_1,\ a = p\sqrt{\eta - 1},\ c = p\sqrt{\frac{(\vartheta\eta - 1)(1 - p^2\eta\varsigma_1) + \varsigma}{1 - p^2\eta\varsigma_1 - \varsigma}},$$

S – скорость искомой волны, ς характеризует намагниченность насыщения ферромагнетика, ς_1 характеризует внешнее поле H_0. Для определения постоянных A, B_1 воспользуемся граничными условиями (3) a и (3) b :

$$A\sin h_1a = B_1,\ -aAG_1\cos h_1a = B_1\left[\frac{f^2\mu_0^2(p\Omega - \beta\hat{b}c)}{\Omega^2 - \hat{b}^2} - c\beta G_2\right] \qquad (11)$$

Из этой системы следует характеристическое уравнение:

$$\operatorname{tg} h_1 a = \frac{a(p^2\eta\varsigma_1 - 1)G_1 G_2^{-1}}{c\beta(p^2\eta\varsigma_1 - 1 + \varsigma) - \varsigma p^2\sqrt{\eta\varsigma_1}} \ . \tag{12}$$

Если пренебречь магнитными свойствами слоя, т.е. положить $\varsigma = 0$, то придём к соотношению:

$$\operatorname{tg} h_1 a \operatorname{tg} h_2 \bar{c} = \frac{aG_1}{\bar{c}G_2}; \ \bar{c} = \sqrt{\frac{\omega^2}{S_2^2} - p^2} = p\sqrt{\theta\eta - 1}\,. \tag{13}$$

Из (13), в свою очередь, легко получить известное уравнение Лява для немагнитных мягкого слоя и полупространства при $h_1 \to \infty$:

$$\operatorname{tg} h_2 \bar{c} = \frac{G_1\sqrt{p^2 - \omega^2 / S_1^2}}{G_2\sqrt{\omega^2 / S_2^2 - p^2}} = \frac{G_1\sqrt{1-\eta}}{G_2\sqrt{\theta\eta - 1}} \tag{14}$$

Для магнитного слоя и примыкающего к нему немагнитного полупространства соответствующее дисперсионное уравнение можно получить из (12) аналогично при $h_1 \to \infty$:

$$\operatorname{tg} h_2 c = \frac{c(p^2\eta\varsigma_1 - 1 + \varsigma)R}{c^2(p^2\eta\varsigma_1 - 1 + \varsigma)^2 + R\varsigma p^2\sqrt{\eta\varsigma_1}} \ , \tag{15}$$

где

$$R = \varsigma p^2\sqrt{\eta\varsigma_1} + p\sqrt{1-\eta}(p^2\eta\varsigma_1 - 1)G_1 G_2^{-1}.$$

Если пренебречь намагниченностью, то из (15) опять же следует классическое уравнение Лява (14). Перейдём к определению условий существования сдвиговой упруго-спиновой волны в конструкции «магнитный слой - немагнитное полупространство».

Из (15) заключаем, что условием существования поверхностной упруго-спиновой волны является следующее неравенство:

$$\frac{(\theta\eta - 1)(1 - p^2\eta\varsigma_1) + \varsigma}{1 - p^2\eta\varsigma_1 - \varsigma} > 0\,. \tag{16}$$

Заметим, что это условие вместе с условием затухания волны в полупространстве переходит в классическое условие Лява, если положить $\varsigma = 0$, т.е. пренебречь магнитными свойствами слоя: $S_2 < S < S_1$.

Рассмотрим вначале частный случай, когда в (16) можно пренебречь членом $p^2\eta\varsigma_1$, т.е. считать, что

$$p^2\eta\varsigma_1 \ll 1\,. \tag{17}$$

Условие (17) в исходных переменных представляется в следующем виде:

$$\omega \ll \omega_H = \gamma H_0\,. \tag{18}$$

Как известно [1-3], γH_0 есть собственная частота прецессии спина (намагниченности) в постоянном, внешнем магнитном поле H_0. Таким образом, для диапазона частот меньших собственной частоты прецессии спина, условие (16) принимает вид:

$$\frac{\theta\eta - 1 + \varsigma}{1-\varsigma} > 0\,. \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что при $1-\varsigma < 0$ неравенство (19) не выполняется, т.е. волнового процесса нет, поэтому будем полагать, что $1-\varsigma > 0$, тогда из (19) следует:

$$\sqrt{1-\varsigma}S_2 < S\,.$$

Далее, учтя условие затухания волн в подложке, получим условие существования упруго-спиновых волн типа Лява в диапазоне частот $\omega \ll \omega_H$:

$$\sqrt{1-\varsigma}S_2 < S < S_1\,. \tag{20}$$

Отсюда следует, что для возникновения упруго-спиновых волн в нашей конструкции необходимо, чтобы магнитная характеристика слоя подчинялась следующему неравенству: $\varsigma > 1 - S_1^2 / S_2^2$.

Из (20) видно, что в том случае, когда обычные условия существования волн Лява для немагнитных сред не выполняются, для магнитного слоя при соответствующем выборе параметров магнитного слоя и интенсивности внешнего магнитного поля, чт что и является условием возникновения упруго-спиновых волн типа Лява.

Рассмотрим теперь общий случай (16). Условие (16) эквивалентно двум системам неравенств:

$$\eta < \frac{1-\varsigma}{p^2\varsigma_1} = \eta_0; \quad \theta p^2\varsigma_1\eta^2 - (\theta + p^2\varsigma_1)\eta + (\varsigma - 1) < 0 \tag{21}$$

$$\eta > \frac{1-\varsigma}{p^2\varsigma_1}; \quad \theta p^2\varsigma_1\eta^2 - (\theta + p^2\varsigma_1)\eta + (\varsigma - 1) > 0 \tag{22}$$

Рассмотрим сначала систему (21), корни квадратного трёхчлена во втором неравенстве этой системы имеют вид:

$$\eta_{1,2} = \frac{\theta + p^2\varsigma_1 \pm \sqrt{(\theta + p^2\varsigma_1)^2 - 4\theta p^2\varsigma_1(\varsigma - 1)}}{2\theta p^2\varsigma_1}\,.$$

Отсюда видно, что если $\eta_0 < \eta_2$, то система (21) не имеет решения, если же $\eta_0 > \eta_2$, то условие существования волн представляется так:

$$\eta_2 < \eta < \min(\eta_0; \eta_1)\,. \tag{23}$$

Иначе это условие можно записать в следующем виде:

$$S_1\sqrt{\eta_2} < S < S_1\sqrt{\min(\eta_0; \eta_1)}. \tag{24}$$

Перейдём к решению системы (22), оно представляется в следующем виде:

а) при $\eta_0 < \eta_2; \eta \in [\eta_0; \eta_2] \cup [\eta_1; +\infty)$ (25)

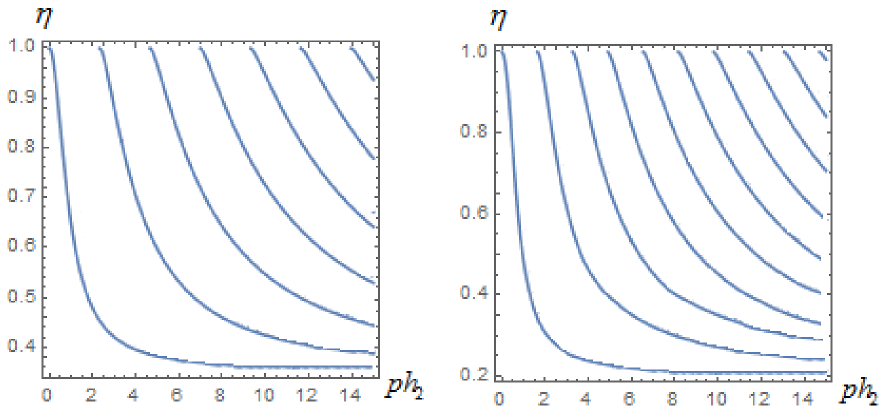
б) при $\eta_0 > \eta_2; \eta \in [\max(\eta_0; \eta_1), +\infty)$ (26)

Таким образом, в структуре магнитный слой-немагнитная подложка при выполнении условий (23-26) существуют упруго-спиновые волны.

Приведём некоторые результаты численного исследования в диапазоне частот $\omega < \omega_H$, когда $p^2\eta\varsigma_1$ можно пренебречь по отношению к единице. В этом случае дисперсионное уравнение (15) принимает вид:

$$\operatorname{tg} ph_2\sqrt{\frac{\theta\eta-1+\varsigma}{1-\varsigma}} = \frac{\sqrt{1-\eta}G_1G_2^{-1}}{\sqrt{1-\varsigma}\sqrt{\theta\eta-1+\varsigma}}. \tag{27}$$

На фиг.2 приведены результаты сравнительного численного эксперимента для структуры слой-полупространство в диапазоне частот $\omega \ll \omega_H$. Сравниваются дисперсионные картины для магнитного слоя и немагнитного слоя, в обоих случаях подложка та же (см. фиг.2). В качестве материала для магнитного слоя рассматривается железо-иттриевый гранат (ЖИГ): $S_2 = 3,8\cdot10^3$ м/с, $\rho_2 = 5,17\cdot10^3$ г/см ^{3}, $G_2 = 7,64\cdot10^{10}$ дин/см ^{2}, $\mu_0 = 139,3\cdot10^{-4}$ Тл, $H_0 = 870\cdot10^{-4}$ Тл [9], а материал немагнитной подложки имеет параметры $S_1 = 5,03\cdot10^3$ см/с, $\rho_1 = 4,5\cdot10^3$ г/см ^{3}, $G_1 = 1,14\cdot10^{12}$ дин/см ^{2}.



Фиг. 2.

На первом рисунке фиг.2 изображена дисперсионная картина для немагнитного слоя, на втором – для магнитного слоя. Анализ результатов, представленных на фиг. 2, приводит к заключению, что в конструкции с магнитным слоем в отличие от немагнитного слоя, происходит расширение скоростного диапазона упруго-спиновых волн, одновременно с этим происходит сближение ветвей разных мод упруго-спиновых волн.

В заключение хотелось бы выразить благодарность проф. Белубекяну М.В. за огромную помощь, которую он оказал при работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.I. Akhiezer, V.G. Baryakhtar and Peletminskii. Spin Waves, vol.1, North-Holland, Amsterdam, 1968, p.368.

2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. 1991, с.560. G. Maugin. Continuum mechanics of electromagnetic solids. 1991, p.560. (In Russian).
3. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках.Москва, Наука,1973, с.591. A.G.Gourevich. Magnetic Resonance in ferrites and ferromagnetics. Moscow, Nauka, 1973, p.591. (In Russian).
4. Maugin G. A., Hakmi A. Magnetoelastic surface waves in elastic ferromagnets.-J. Acoust. Soc. Amer., 77, p.1010-1026, (1985).
5. Белубекян М.В., "О поверхностных волнах Лява в случае композиционного слоя". Сбор. Статей "Актуальные проблемы неоднородной механики", Ереван, 1991 г., стр.25-29. Belubekyan M.V., "On the surface waves of Love in the case of a composite layer". Collection of Articles "Actual problems of inhomogeneous mechanics", Yerevan, 1991, pp. 25-29. (In Russian).
6. S. A. Nikitov, Ph. Tailhades, C. S. Tsai. Spin waves in Periodic Magnetic Structures – Magnonic cristals. J.Magnet.Mater., v.23, 3, 2001, pp.320-331.
7. Багдасарян Г.Е. Существование и характер распространения пространственных спиновых поверхностных волн в ферромагнетиках.- Изв.АН РА, Физика, 2009, 6, с. 405-416. Bagdasaryan G.E. The existence and nature of the propagation of spatial spin surface waves in ferromagnets. - Izv. AN RA, Fizika, 2009, 6, p. 405-416. (In Russian).
8. Danoyan Z.N., Piliposian G.T., Hasanyan D. J. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half-space. Waves in Random and Complex Media. - Vol. 19, No. 4, November 2009, pp. 567–584.
9. Hasanyan D.J., Batra R.C. Antiplane shear waves in two contacting ferromagnetic half spaces. J.Elast (2011) 103: 189-203.
10. Camley R.E. Magnetoelastic waves in a ferromagnetic film on a nonmagnetic substrate. J. Appl. Phys.,50 (8), 1979, pp. 5272-5284.
11. Van de Vaart, Mathews Magnetoelastic Love waves in a magnetic layered nonmagnetic substrate. Appl. Phys. Lett. V.16, 5, pp. 222-224, (1970).
12. Геворкян А.В. Магнитоупругие волны Лява при наличии продольного магнитного поля. Ученые записки Ереванск. Госунта, 1981, т.1, с.137-140. Gevorkyan A.V. Magnetoelastic Love waves in the presence of a longitudinal magnetic field. Scientific notes Yerevan SU, 1981, Vol.1, pp.137-140. (In Russian).

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович – Д.ф.-м.н., ведущий науч.сотр. Института механики НАН Армении. **Адрес:** РА, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: karoagayan@mail.ru

Атоян Левон Арутюнович – К.ф.-м.н., ст.науч. сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: levous@mail.ru

Терзян Саркис Арутюнович – К.ф.-м.н., ст.науч. сотр. Института механики НАН Армении. **Адрес:** РА, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24,/2.
E-mail: sat-and21@yahoo.com

Поступила в редакцию 08.11.2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №1, 2019 Механика

УДК 539.3

ХАРАКТЕР НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ОБТЕКАЕМЫХ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А.

Ключевые слова: Пологие цилиндрические оболочки, сверхзвуковой поток газа, критическая скорость, зависимость амплитуда-скорость.

Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Vardanyan I.A.

Character of non-linear vibrations of cylindrical shells in a supersonic gas flow

Keywords: Shallow shells; supersonic gas flow; critical speed; dependence amplitude-speed.

The problem of nonlinear oscillations of isotropic shallow cylindrical shell placed in a supersonic gas flow is considered. The study was conducted taking into account both types of nonlinearity: aerodynamic and geometric (both quadratic and cubic). Taking into account the aerodynamic nonlinearity (especially its asymmetric quadratic part), it was established that the dependence «amplitude – speed» in the certain intervals of variation of velocity parameter is multi-valued. This fact is illustrated in the figures brought in the text, mainly in the form of two branches, the lower of which, probably, are unstable. Unstable branches separate the areas of two neighboring sustainable solutions. From here it is easy to find the perturbation value necessary to transfer the system from one stable branch into another. Existence of certain segments of speed of flowing stream is shown, at which it is impossible to excite flutter oscillations both at subcritical speeds and in the postcritical stage (zone of silence). It has been established that both existence of various types of dependencies «amplitude-speed», bifurcation points and areas of silence, and transition from one dependency into another can be reached by the optimal choice of the frequency parameter of vibration.

Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Վարդանյան Ի.Ա.

Գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող գլանային թաղանթի ոչ գծային տատանումների բնույթը

Հիմնաբառեր. Գլանային թաղանթներ, գազի գերձայնային հոսանք, ամպլիտուդա-արագություն կախվածություն

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող իզոտրոպ գլանային թաղանթի ոչ գծային տատանումների խնդիրը: Հետազոտությունը կատարված է երկու տիպի ոչգծայինությունների հաշվառմամբ. Աէրոառաձգական և երկրաչափական (քառակուսային և խորանարդային): Աէրոառաձգական ոչգծայնության (և հատկապես նրա աչ սիմետրիկ քառակուսային մասի) հաշվարման շնորհիվ ցույց է տրված, որ «ամպլիտուդա-արագություն» կախվածությունը բազմարժեք է արագության պարամետրի փոփոխության որոշակի հատվածներում: Այդ փաստը ցույց է տրված հոդվածում բերված գծագրերում հիմնականում երկու ճյուղերի տեսքով, որոնցից ստորինները, ամենայն հավանականությամբ, անկայուն են: Անկայուն ճյուղերը բաժանում են երկու հարևան կայուն լուծումների ձգողականության տիրույթները: Այստեղից հեշտությամբ ստացվում է գրգռման այն մեծությունը, որն անհրաժեշտ է համակարգը մի կայուն ճյուղից մյուսին տեղափոխելու համար: Ցույց է տրված շրջհոսման արագության մեծության փոփոխության որոշակի տիրույթների գոյությունը, որտեղ չմարող ֆլատերային տատանումներ հնարավոր չէ գրգռել ինչպես մինչկրիտիկական, այնպես էլ հետկրիտիկական վիճակներում (լռության տիրույթներ):

Рассматривается задача нелинейных колебаний изотропной пологой цилиндрической оболочки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейности: аэродинамической и геометрической (как квадратичной, так и кубической). Благодаря учёту аэродинамической нелинейности (особенно её несимметричной квадратичной части) установлено, что зависимость амплитуда–скорость в определённых интервалах изменения параметра скорости является многозначной. Этот факт иллюстрирован на приведённых в тексте фигурах, в основном, в виде двух ветвей, нижние из которых, по всей вероятности, являются неустойчивыми. Неустойчивые ветви отделяют области тяготения двух соседних устойчивых решений. Отсюда легко находится величина возмущения, необходимого для того, чтобы перебросить систему с одной устойчивой ветви на другую. Показаны существования определённых областей изменения величины скорости обтекающего потока, при которых невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания как при докритических скоростях, так и в послекритической стадии (зоны молчания). Приведём некоторые, на наш взгляд, наиболее существенные, новые результаты, полученные в данной работе. Они являются следствием влияния набегающего сверхзвукового потока газа на характер нелинейных колебаний рассматриваемой аэроупругой системы и сформулируются следующим образом.

Для толстых оболочек: существует интервал изменения скорости потока, в котором невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания). При этом: а) с увеличением относительной частоты колебаний, зона молчания в виде конечной области перемещается в сторону больших скоростей, б) если относительные частоты колебаний достаточно малы, то зона молчания, будучи примыкающей к области малых скоростей, с увеличением относительного радиуса оболочки существенно расширяется, в) если же частоты колебаний достаточно близки к критической, то в этом случае также существует зона молчания и зависимость амплитуда-скорость имеет следующий характер: в области левее указанной зоны зависимость амплитуды колебаний от скорости потока является монотонно убывающей, стремящейся к нулю на левой границе зоны. На правом конце зоны значение амплитуды скачком возрастает до определённого конечного значения, после чего зависимость амплитуда-скорость является двухзначной, одна ветвь которой убывает, а вторая (неустойчивая ветвь) – имеет максимум, при скоростях, больших критической, после чего также является монотонно убывающей функцией; г) за счёт выбора геометрических параметров и частоты колебаний возможно существование такого интервала изменения скорости обтекающего потока, где зависимость амплитуда-скорость является однозначной функцией, имеющая точку минимума.

Для тонких оболочек: при малых значениях параметра частоты флаттерных колебаний существует определённое значение обтекающего потока, что а) при скоростях, меньших указанной, невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания); б) при значениях скорости, больших указанной, зависимость «амплитуда-скорость» является однозначной монотонно убывающей функцией, аналогичной соответствующей зависимости, полученной при толстых оболочках, в) с увеличением относительной частоты колебаний, зона молчания в виде конечной области перемещается в сторону больших скоростей; при частотах, близких к критической, характер зависимости амплитуда-скорость существенно меняется. В этом случае, если постепенно увеличить скорость потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до определённого значения скорости потока («верхняя» критическая скорость), где колебания «сорвутся» и восстанавливается невозмущённое состояние оболочки. При снижении скорости невозмущённое состояние является устойчивым, пока скорость потока больше критической скорости флаттера, найденная на основе линейной теории («нижняя» критическая скорость). При «нижней» критической скорости амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до определённого значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает. При малых значениях частоты флаттерных колебаний показана возможность существования точки бифуркации.

Введение

Имеются многочисленные исследования, посвящённые устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1,11,13,27,31] и в обзорных статьях [19,22,26]. Исследования проведены как в линейной, так и в нелинейной постановке. Решением линейных задач получены те наименьшие (критическое) значения величины скорости обтекающего потока $\vec{u}$, при которых рассматриваемая аэроупругая система теряет устойчивость. Линейные задачи были решены как точно [12,17,24,25], так и приближённо (в основном, используя метод Галеркина) [2,3,5-11,15,29]. Нелинейные задачи решены приближёнными методами и предметом исследований, в основном, было изучение зависимости амплитуды A колебаний от параметра скорости обтекающего потока ν т.е. исследование функции $A(\nu)$. Эти вопросы, связанные с изучением свойств функции $A(\nu)$ в задачах флаттера, когда пластинка обтекается с двух сторон с равными скоростями (тогда квадратичная нелинейность отсутствует), детально исследованы в работах [10,11]. В этих работах, когда величина скорости потока находится в достаточно малой окрестности критической скорости флаттера, показано, что: нелинейные флаттерные колебания существуют либо только в докритической стадии, где $A(\nu)$ монотонно убывающая функция, либо только при послекритических скоростях, где $A(\nu)$ – монотонно возрастающая функция. В работах [6,7] показано, что аэродинамическая нелинейность (особенно её несимметричная квадратичная часть) в случае гибких пластин приводит к появлению новых типов зависимостей $A(\nu)$ как в докритической стадии, так и послекритических скоростях, мало отличающихся от критической. В работе [5] исследованы влияния геометрической нелинейности на зависимость «амплитуда-скорость» в случае цилиндрической панели. Показано, что зависимость амплитуды нелинейных флаттерных колебаний от величины скорости обтекающего потока может иметь многозначный характер.

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов зависимости амплитуды нелинейных колебаний от величины скорости обтекающего потока при докритических частотах. В отличие от опубликованных основных научных исследований здесь, как и в наших работах [6,7], посвященных тонким пластинкам, исследование провоится методом, предложенным в работе [5]. В этой работе учитывается, что невозможно выявлять влияния квадратичных нелинейностей, если принимать, что физическая система совершает колебания вокруг невозмущённого состояния. В связи с этим, в [5] рекомендуется: а) отказаться от указанного типа колебаний и б) принимать, что система совершает нелинейные колебания с конечной амплитудой вокруг состояния, достаточно близкого к невозмущённому. Такой подход дал возможность получить систему нелинейных алгебраических уравнений для определения амплитуды колебаний, в которые входят члены, учитывающие квадратическую нелинейность. Нелинейная система алгебраических уравнений решена численно и на основе этого изучены влияния частоты нелинейных колебаний и геометрических параметров оболочки на зависимость $A(\nu)$. Установлено, что благодаря учёту квадратичной нелинейности характер функции $A(\nu)$ в зависимости от указанных параметров существенно изменяется как количественно, так и качественно. Некоторые характерные результаты аналитическо-численного решения представлены на фигурах 1-11.

1. Постановка задачи устойчивости

Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную в плане цилиндрическую панель постоянной толщины h. Оболочка отнесена к ортогональным криволинейным координатам x, y, z, где координатные линии x и y совпадают с линиями кривизны срединной поверхности. Третья координатная линия z прямолинейная и представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(x, y, 0)$ до точки (x, y, z) оболочки.

Пусть оболочка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с постоянной невозмущённой скоростью $\vec{u}$, направленной вдоль оси $0x$. Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэроупругой системы.

На основе исследований принимаются следующие предположения:

1) гипотеза Кирхгофа-Лява, согласно которой [30]

$$
\begin{aligned}
&u_1(x,y,z,t)=u(x,y,t)-z\frac{\partial w}{\partial x},\\
&u_2(x,y,z,t)=\mathrm{v}(x,y,t)-z\frac{\partial w}{\partial y},\\
&u_3(x,y,z,t)=w(x,y,t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где u_i – компоненты перемещения точек оболочки $(i=1,2,3)$;

2) давление газа учитывается по приближённой формуле «поршневой теории» [4,18]

$$
p=p_\infty\left(1+\frac{æ-1}{2}\frac{\mathrm{v}_3}{a_\infty}\right)^{\frac{2æ}{æ-1}};
\tag{2}
$$

3) основные положения теории весьма пологих гибких оболочек с большим показателем изменяемости, считая, что прогибы $w(x,y,t)$ сравнимы с толщиной оболочки [31].

На основе принятых предположений получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения пологой оболочки [11]:

$$
\begin{aligned}
&D\Delta^2 w+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æp_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}+æp_\infty M\frac{\partial w}{\partial x}=\\
&=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{1}{R}-\\
&-æp_\infty\frac{æ+1}{4}M^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{M}{3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\frac{1}{Eh}\Delta^2 F=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},
\tag{4}
$$

где $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, $M=\dfrac{u}{a_\infty}$, $a_\infty=\dfrac{æp_\infty}{\rho_\infty}$, $F(x,y,t)$ – функция напряжений $\left(T_{11}=\partial^2 F/\partial y^2, T_{22}=\partial^2 F/\partial x^2, T_{12}=-\partial^2 F/\partial x\partial y\right)$, T_{ik} – внутренние усилия, ε – коэффициент линейного затухания, $M=U/a_\infty$ – число Маха, p_∞ – давление невозмущённого потока газа, a_∞ – величина скорости звука для невозмущённого газа, $æ$ – показатель политропы, t – время, R – радиус оболочки, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, ρ_0 – плотность материала оболочки.

При исследовании вопросов устойчивости к уравнениям (3)–(4) присоединяются также условия на контуре оболочки. Здесь рассматривается шарнирно опертая по

всему контуру пологая оболочка $\left(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\right)$, края которой свободно смещаются в плане. Тогда, следуя [11], граничные условия принимаются в виде:
при $x = 0$, $x = a$

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

$$\overline{T}_{11} = 0,\quad \overline{T}_{12} = 0, \tag{6}$$

при $y = 0$, $y = b$

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{7}$$

$$\overline{T}_{22} = 0,\quad \overline{T}_{21} = 0, \tag{8}$$

где $\overline{T}_{ik}$ – осреднённые значения усилий на кромках оболочки.

2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Приближённое решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (5) и (7), будем искать в виде [11]

$$w\left(x, y, t\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \sin \lambda_k x\right) \sin \mu_1 y; \qquad \lambda_k = k\pi/a,\ \mu_1 = \pi/b, \tag{9}$$

Подставив (9) в (4), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции F. Решение указанного уравнения, удовлетворяющего граничным условиям (6) и (8) при $n = 2$, представляется в виде:

$$\begin{aligned} F(x, y, t) = Eh\Bigg[& \frac{\lambda_1^2 \sin(\lambda_1 x) \sin(\mu_1 y)}{R\Delta_{11}} f_1(t) + \\ & + \frac{\left(\mu_1^4 \cos(\lambda_2 x) + \lambda_1^4 \cos(\mu_2 y)\right)}{2\lambda_4^2 \mu_1^2} f_1^2(t) + \\ & + \frac{\lambda_2^2 \sin(\lambda_2 x) \sin(\mu_1 y)}{R\Delta_{21}} f_2(t) + \frac{\left(\mu_1^4 \cos(\lambda_4 x) + \lambda_2^4 \cos(\mu_2 y)\right)}{2\lambda_4^2 \mu_2^2} f_2^2(t) + \\ & + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}\Big(\cos(\lambda_3 x) - 9\cos(\lambda_1 x) + \\ & + \lambda_3^4 \left(\frac{\cos(\lambda_1 x)}{\Delta_{12}} - \frac{\cos(\lambda_3 x)}{9\Delta_{32}}\right) \cos(\mu_2 y) f_1(t) f_2(t) \Big)\Bigg] \equiv F_2(x, y, t). \end{aligned} \tag{10}$$

Аналогичным образом определяется $F\left(x, y, t\right)$ при $n = 3$ и $n = 4$. Выражение функции напряжения F при трёхчленной аппроксимации имеет вид:

$$F(x,y,t)=F_2(x,y,t)+Eh\left[\frac{\mu_1^2}{\lambda_8^2}\left(\cos(\lambda_4 x)-4\cos(\lambda_2 x)\right)+\right.$$

$$+\lambda_2^4\left(\frac{\cos(\lambda_2 x)}{\Delta_{12}}-\frac{\cos(\lambda_4 x)}{4\Delta_{21}}\right)\cos(\mu_2 y)f_1(t)f_3(t)+$$

$$+\frac{\mu_1^2}{\lambda_{10}^2}\left(\cos(\lambda_5 x)-25\cos(\lambda_1 x)\right. \tag{11}$$

$$\left.\left.+\lambda_5^4\left(\frac{\cos(\lambda_1 x)}{\Delta_{12}}-\frac{\cos(\lambda_5 x)}{25\Delta_{51}}\right)\cos(\mu_2 y)f_2(t)f_3(t)\right)\right]\equiv$$

$$\equiv F_3(x,y,t)$$

При четырёхчленной аппроксимации для F получается следующее представление:

$$F(x,y,t)=F_3(x,y,t)+Eh\left[\frac{\mu_1^2}{\lambda_{30}^2}\left(9\cos(\lambda_5 x)-25\cos(\lambda_3 x)+\right.\right.$$

$$\left.+\lambda_{15}^4\left(\frac{\cos(\lambda_3 x)}{9\Delta_{32}}-\frac{\cos(\lambda_5 x)}{25\Delta_{52}}\right)\cos(\mu_2 y)\right)f_1(t)f_4(t)+$$

$$+\frac{\mu_1^2}{\lambda_{12}^2}\left(\cos(\lambda_6 x)-9\cos(\lambda_2 x)+\right.$$

$$\left.+\lambda_3^4\left(\frac{\cos(\lambda_2 x)}{\Delta_{11}}-\frac{\cos(\lambda_6 x)}{9\Delta_{31}}\right)\cos(\mu_2 y)\right)f_2(t)f_4(t)+ \tag{12}$$

$$+\frac{\mu_1^2}{\lambda_{14}^2}\left(\cos(\lambda_7 x)-49\cos(\lambda_1 x)+\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_7^4\left(\frac{\cos(\lambda_1 x)}{\Delta_{12}}-\frac{\cos(\lambda_7 x)}{49\Delta_{72}}\right)\cos(\mu_2 y)\right)f_3(t)f_4(t)\right],$$

где

$$\Delta_{ij}=\frac{1}{Eh}\left(\lambda_i^2+\mu_j^2\right)^2.$$

Для определения $f_i(t)$ воспользуемся уравнением (3). Подставляя (9) и найденное выражение для F при $n=2$ в (3) и применяя метод Бубнова-Галеркина для определения безразмерных неизвестных функций $x_1=f_1(t)/h$, $x_2=f_2(t)/h$, получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [5,11,20,21]:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_1}{d\tau}+x_1-\frac{2}{3}k\nu x_2+k\nu^2\left[\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{12}x_2^2+\nu x_2\left(\beta_{11}x_1^2+\beta_{12}x_2^2\right)\right]+$$
$$+Qx_1\left(\gamma_{11}x_1^2+\gamma_{12}x_2^2\right)+L\left(\delta_{11}x_1^2+\delta_{12}x_2^2\right)=0$$
$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_2}{d\tau}+\gamma_2^2x_2+\frac{2}{3}k\nu x_2+k\nu^2\left[\alpha_{21}x_1x_2+\nu x_1\left(\beta_{21}x_1^2+\beta_{22}x_2^2\right)\right]+$$
$$+Qx_2\left(\gamma_{21}x_1^2+\gamma_{22}x_2^2\right)+L\delta_{21}x_1x_2=0. \tag{13}$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau=\omega_1 t$, введены обозначения

$$k=\frac{4æp_\infty}{\rho_0\omega_1^2h^2},\quad Q=\frac{4}{16\rho_0\omega_1^2},\quad L=\frac{1}{\rho_0h\omega_1^2},$$
$$\nu=M\frac{h}{a},\quad \gamma_2=\frac{\omega_2}{\omega_1},\quad \chi=\frac{1}{\omega_1}\left(\varepsilon+\varepsilon_a\right), \tag{14}$$

а также коэффициенты α_{ik} и β_{ik}, учитывающие аэродинамическую нелинейность

$$\alpha_{11}=\frac{2}{9}(æ+1),\quad \alpha_{12}=\frac{56}{45}(æ+1),\quad \alpha_{21}=\frac{16}{45}(æ+1),$$
$$\beta_{11}=\beta_{21}=\frac{\pi^2}{40}(æ+1),\quad \beta_{22}=\frac{11\pi^2}{70}(æ+1),\quad \beta_{12}=-\frac{9\pi^2}{70}(æ+1), \tag{15}$$

и коэффициенты γ_{ik} и δ_{ik}, учитывающие геометрическую нелинейность

$$\gamma_{11}=Eh\left(\lambda_1^4+\mu_1^4\right),\ \gamma_{12}=\gamma_{21}=4\gamma_{11}+\frac{81\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{12}}+\frac{\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{22}},\ \gamma_{22}=Eh\left(\lambda_2^4+\mu_1^4\right),$$
$$\delta_{11}=-\frac{8\lambda_1^2\mu_1^4}{3\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{Eh}{\lambda_2^2}+\frac{4\lambda_1^2}{\Delta_{11}}\right),\ \delta_{12}=-\frac{32\lambda_1^2\mu_1^4}{15\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{Eh}{\lambda_4^2}+\frac{12\lambda_1^2}{\Delta_{21}}\right), \tag{16}$$
$$\delta_{21}=-\frac{8\lambda_1^2\mu_1^4}{3\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{8Eh}{15\lambda_2^2}+\frac{16\lambda_1^2}{5\Delta_{11}}+\frac{\lambda_1^2}{\Delta_{12}}+\frac{16\lambda_2^2}{5\Delta_{21}}+\frac{\lambda_3^2}{15\Delta_{32}}\right).$$

В (13) ν – приведённый параметр скорости, χ – приведённый параметр демпфирования, ω_i – частоты малых собственных колебаний оболочки, определяемые формулами:

$$\omega_i^2=\frac{1}{\rho h}\left[D\left(\lambda_i^2+\mu_1^2\right)^2+\frac{\lambda_i^4}{R^2\Delta_{i1}}\right]\qquad (i=1,2). \tag{17}$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (13) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра ν).

Выведены также системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случаях $n=3$ и $n=4$, они получились довольно громоздкими для аналитического исследования и здесь не приводятся. Они в дальнейшем будут использованы при решении линейной задачи и при численных исследованиях.

3. Решение линейной задачи

Решению нелинейной задачи, как правило, будет предшествовать анализ соответствующей линейной задачи. Это объясняется тем, что: а) на основе линейной задачи можно найти критическое значение параметра $\nu=\nu_{cr}$ (следовательно, и критическое значение скорости обтекающего потока $u_{cr}=ah^{-1}\nu_{cr}a_{\infty}$ или критическое значение числа Маха $M_{cr}=ah^{-1}\nu_{cr}$), при котором невозмущённое состояние оболочки становится неустойчивым относительно малых возмущений, и б) указанное критическое значение u_{cr} (или M_{cr} или ν_{cr}), будет необходимым и при исследовании задачи устойчивости в нелинейной постановке.

Итак, соответствующая (13) линейная система имеет вид:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_1}{d\tau}+x_1-\frac{2}{3}k\nu x_2=0, \quad \frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_2}{d\tau}+\gamma_2^2x_2+\frac{2}{3}k\nu x_1=0. \tag{18}$$

Представляя решение системы (18) в виде

$$x_1=y_1e^{\lambda\tau}, \quad x_2=y_2e^{\lambda\tau},$$

получим следующее характеристическое уравнение относительно λ:

$$\lambda^4+2\chi\lambda^3+\left(\gamma_2^2+1+\chi^2\right)\lambda^2+\chi\left(\gamma_2^2+1\right)\lambda+\gamma_2^2+\frac{4}{9}k^2\nu^2=0.$$

Невозмущённая форма оболочки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица [23], записываются в виде:

$$\chi>0, \quad \chi\left(1+\gamma_2^2\right)>0, \quad \left(\gamma_2^2-1\right)^2+2\chi^2\left(1+\gamma_2^2\right)-\frac{16}{9}k^2\nu^2>0.$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из третьего неравенства следует, что в случае малых значений ν, все характеристические показатели λ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, и тривиальное решение $w\equiv 0$ асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям. Значение параметра $\nu=\nu_{cr}$, при котором два из характеристических показателей становятся чисто мнимыми, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическим, соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи. Согласно этому, из третьего неравенства получается следующая формула определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости оболочки [11,28]:

$$\nu_{cr} = \frac{3}{4}\frac{\gamma_2^2 - 1}{k}\sqrt{1 + \frac{2\chi^2\left(\gamma_2^2 + 1\right)}{\left(\gamma_2^2 - 1\right)^2}}. \tag{19}$$

Принимая $\nu = \nu_{cr}$ из характеристического уравнения, найдём следующее значение θ_{cr} частоты колебания оболочки при линейном флаттере $\left(\lambda_{cr} = \pm i\theta_{cr}\right)$

$$\theta_{cr}^2 = \frac{1}{2}\left(\gamma_2^2 + 1\right). \tag{20}$$

Формулы, аналогичные (19) и (20), получены многими авторами (см. литературу, приведённую в [11,28]) и являются первыми приближениями для ν_{cr} и θ_{cr}.

Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случаях $n = 3$ и $n = 4$ имеют вид:

в случае трёхчленной аппроксимации $\left(n = 3\right)$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3}k\nu x_2 = 0,\\
&\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{2}{3}k\nu x_1 + \gamma_2^2 x_2 - \frac{6}{5}k\nu x_3 = 0,\\
&\frac{d^2x_3}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_3}{d\tau} + \frac{6}{5}k\nu x_2 + \gamma_3^2 x_3 = 0;
\end{aligned} \tag{21}$$

в случае четырёхчленной аппроксимации $\left(n = 4\right)$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3}k\nu x_2 - \frac{4}{15}k\nu x_4 = 0,\\
&\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{2}{3}k\nu x_1 + \gamma_2^2 x_2 - \frac{6}{5}k\nu x_3 = 0,\\
&\frac{d^2x_3}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_3}{d\tau} + \frac{6}{5}k\nu x_2 + \gamma_3^2 x_3 - \frac{12}{7}k\nu x_4 = 0,\\
&\frac{d^2x_4}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_4}{d\tau} + \frac{4}{15}k\nu x_1 + \frac{12}{7}k\nu x_3 + \gamma_4^2 x_4 = 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_1},\ \omega_i^2 = \frac{1}{\rho h}\left[D\left(\lambda_i^2 + \mu_1^2\right)^2 + \frac{\lambda_i^4}{R^2\Delta_{i1}}\right] \quad \left(i = 3, 4\right).$$

Аналогично случаю $n=2$ в случае $n=3$ получаются следующие условия устойчивости (для определения критического значения параметра скорости ν):

$$\chi>0,\ -\alpha_{11}\left(k^2\nu^2\right)+\alpha_{12}>0,\ -\alpha_{21}\left(k^2\nu^2\right)^2-\alpha_{22}\left(k^2\nu^2\right)+\alpha_{13}>0,$$
$$-\alpha_{31}\left(k^2\nu^2\right)^3-\alpha_{31}\left(k^2\nu^2\right)^2-\alpha_{32}\left(k^2\nu^2\right)+\alpha_{33}>0, \tag{23}$$

где выражения для коэффициентов α_{ij} являются довольно громоздкими и здесь не приводятся.

Таким же образом получены также условия устойчивости при $n=4$. Они также достаточно громоздкие и здесь не приводятся. Полученные при различных n условия устойчивости исследованы численно и результаты (значения критической скорости ν_{cr}) приведены в табл. 1.

Таблица 1.

h/a	$n=2$	$n=3$	$n=4$
b=a, R=5a			
1/100	0.494	0.392	0.498
1/200	0.043	0.03	0.044
1/300	0.017	0.008	0.019
b=a, R=30a			
1/100	0.166	0.243	0.221
1/200	0.011	0.018	0.015
1/300	0.002	0.005	0.003
b=2a, R=10a			
1/100	0.149	0.153	0.148
1/200	0.008	0.01	0.009
1/300	0.002	0.002	0.002
b=10a, R=20a			
1/100	0.117	0.151	0.146
1/200	0.01	0.007	0.009
1/300	0.002	0.002	0.002

Приведённые численные вычисления показывают, что когда оболочка достаточно тонкая и $b/a>1$, то можно ограничиваться случаем $n=2$. Аналогичное утверждение приведено также в работах [13,14].

4. Исследование нелинейной задачи

Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (13). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости тонких пластин наличием членов с квадратичными нелинейностями, имеющие как аэродинамическое так и геометрическое происхождение. Указанные члены характеризуют несимметричность нелинейности и, поэтому, приближенное периодическое решение системы (13), следуя работам [5,16], будем искать в виде

$$x_1=A_1\cos\theta\tau+B_1\sin\theta\tau+C_1+\ldots,\quad x_2=A_2\cos\theta\tau+B_2\sin\theta\tau+C_2+\ldots \tag{24}$$

Здесь A_i, B_i, C_i и $\theta = \omega\omega_1^{-1}$ $(i = 1,2)$ – неизвестные постоянные; ω – неизвестная частота нелинейных колебаний; точками обозначены члены, содержащие гармоники. Структура решения (24) отличается от существующих [10,11] наличием свободных членов $C_i \neq 0$, присутствие которых даёт возможность учитывать влияния квадратичной нелинейности.

Подставим решение (24) в систему (13) и приравняем к нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos\theta\tau$ и $\sin\theta\tau$ (члены, содержащие гармоники пренебрегаются). Получающаяся при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближённого решения этой системы предполагается, что [5]: а) затухание системы достаточно мало ($\chi|B_i| << |A_i|$, $|B_i| << |A_i|$; $(i = 1,2)$), и б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившееся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния, бесконечно мало отличающегося от невозмущённого $\left(|A_j| >> |C_j|;\ j = 1,2\right)$. Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведения величин B_1, B_2, C_1 и C_2, указанная нелинейная система представится следующими подсистемами:

уравнения, полученные приравниванием к нулю свободных членов –

$$\begin{gathered}
C_1 - \frac{2}{3}k\nu C_2 + \frac{1}{2}k\nu^2\left(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2\right) + k\nu^3 A_2\left(\beta_{11}A_1C_1 + \beta_{12}A_2C_2\right) + \\
+\frac{1}{2}k\nu^3 C_2\left(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2\right) + QA_1\left(\gamma_{11}A_1C_1 + \gamma_{12}A_2C_2\right) + \\
+\frac{1}{2}QC_1\left(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2\right) + \frac{1}{2}L\left(\delta_{11}A_1^2 + \delta_{12}A_2^2\right) = 0, \\
\gamma^2 C_2 + \frac{2}{3}k\nu C_1 + \frac{1}{2}k\nu^2\alpha_{21}A_1A_2 + k\nu^3 A_1\left(\beta_{21}A_1C_1 + \beta_{22}A_2C_2\right) + \\
+\frac{1}{2}k\nu^3 C_1\left(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2\right) + QA_2\left(\gamma_{21}A_1C_1 + \gamma_{22}A_2C_2\right) + \\
+\frac{1}{2}QC_2\left(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2\right) + \frac{1}{2}L\delta_{12}A_1A_2 = 0;
\end{gathered} \tag{25}$$

уравнения, полученные приравниванием к нулю коэффициентов при $\cos\theta\tau$ –

$$\left(1-\theta^2\right)A_1+\chi\theta B_1-\frac{2}{3}k\nu A_2+2k\nu^2\left(\alpha_{11}A_1C_1+\alpha_{12}A_2C_2\right)+$$
$$+\frac{3}{4}k\nu^3A_2\left(\beta_{11}A_1^2+\beta_{12}A_2^2\right)+\frac{3}{4}QA_1\left(\gamma_{11}A_1^2+\gamma_{12}A_2^2\right)+$$
$$+2L\left(\delta_{11}A_1C_1+\delta_{12}A_2C_2\right)=0,$$
$$\left(\gamma^2-\theta^2\right)A_2+\chi\theta B_2+\frac{2}{3}k\nu A_1+\alpha_{21}k\nu^2\left(A_1C_2+A_2C_1\right)+ \tag{26}$$
$$+\frac{3}{4}k\nu^3A_1\left(\beta_{21}A_1^2+\beta_{22}A_2^2\right)+\frac{3}{4}QA_2\left(\gamma_{21}A_1^2+\gamma_{22}A_2^2\right)+$$
$$+L\delta_{12}\left(A_1C_2+A_2C_1\right)=0;$$

уравнения, полученные приравниванием к нулю коэффициентов при $\sin\theta\tau$ –

$$A_1\left(1-\theta^2\right)-\frac{2}{3}k\nu A_2+2k\nu^2\left(\alpha_{11}A_1C_1+\alpha_{12}A_2C_2\right)+$$
$$+\frac{3}{4}k\nu^3A_2\left(\beta_{11}A_1^2+\beta_{12}A_2^2\right)+\frac{3}{4}QA_1\left(\gamma_{11}A_1^2+\gamma_{12}A_2^2\right)+$$
$$+2L\left(\delta_{11}A_1C_1+\delta_{12}A_2C_2\right)=0,$$
$$A_2\left(\gamma^2-\theta^2\right)+\frac{2}{3}k\nu A_1+k\nu^2\alpha_{21}\left(A_1C_2+A_2C_1\right)+ \tag{27}$$
$$+\frac{3}{4}k\nu^3A_1\left(\beta_{21}A_1^2+\beta_{22}A_2^2\right)+\frac{3}{4}QA_2\left(\gamma_{21}A_1^2+\gamma_{22}A_2^2\right)+$$
$$+L\delta_{21}\left(A_1C_2+A_2C_1\right)=0.$$

Третья подсистема учитывает эффект демпфирования. Согласно принятому предположению о малости затухания, указанная подсистема имеет следующее приближённое решение:

$B_1\approx 0,\ \ B_2\approx 0$ при $\chi\approx 0$.

Пользуясь первой подсистемой, выразим C_1 и C_2 через A_1 и A_2 (см. (29)). Тогда, вторая подсистема, определяющая характеристики A_1 и A_2 амплитуды колебаний рассматриваемой аэроупругой системы в зависимости от параметров θ и ν, при $\chi\approx 0$ принимает вид:

$$A_1(1-\theta^2)-\frac{2}{3}k\nu A_2+2k\nu^2\alpha_{11}A_1C_1+2k\nu^2\alpha_{12}A_2C_2+$$
$$+\frac{3}{4}k\nu^3A_2(\beta_{11}A_1^2+\beta_{12}A_2^2)+\frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2+\gamma_{12}A_2^2)=0, \tag{28}$$

$$A_2(\gamma^2-\theta^2)+\frac{2}{3}k\nu A_1+k\nu^2\alpha_{21}(A_1C_2+A_2C_1)+$$
$$+\frac{3}{4}k\nu^3A_1(\beta_{21}A_1^2+\beta_{22}A_2^2)+\frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2+\gamma_{22}A_2^2)=0$$

Здесь

$$C_1=-K\nu^2\left[\left(L\left(\delta_{11}A_1^2+\delta_{12}A_2^2\right)+\alpha_{11}A_1^2+\alpha_{12}A_2^2\right)\Delta_2-\right.$$
$$\left.-\left(L\delta_{21}+\alpha_{21}\right)A_1A_2\Delta_4\right]\Big/2\Delta$$
$$C_2=-K\nu^2\left[\left(L\delta_{21}+\alpha_{21}\right)A_1A_2\Delta_1-L\left(\delta_{11}A_1^2+\delta_{12}A_2^2\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\alpha_{11}A_1^2+\alpha_{12}A_2^2\right)\Delta_3\right]\Big/2\Delta \tag{29}$$

где

$$\Delta_1=1+\frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2+\frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2+K\nu^3\beta_{11}A_1A_2,$$
$$\Delta_2=\gamma^2+K\nu^3\beta_{22}A_1A_2+\frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2+\frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2,$$
$$\Delta_3=\frac{2}{3}K\nu+\frac{3}{2}K\nu^3\beta_{21}A_1^2+\frac{1}{2}K\nu^3\beta_{22}A_2^2+Q\gamma_{21}A_1A_2,$$
$$\Delta_4=-\frac{2}{3}K\nu+\frac{3}{2}K\nu^3\beta_{12}A_2^2+\frac{1}{2}K\nu^3\beta_{11}A_1^2+Q\gamma_{12}A_1A_2,\ \Delta=\Delta_1\Delta_2-\Delta_3\Delta_4\,.$$

Отметим, что если ν находится в достаточно малой окрестности ν_{cr}, то $A_1\approx -A_2$ Действительно, из третьей подсистемы после линеаризации (учитывая достаточную малость затухания) получается

$$(1-\theta^2)B_1-\frac{2}{3}k\nu B_2-\chi\theta A_1=0,\ (\gamma^2-\theta^2)B_2+\frac{2}{3}k\nu B_1-\chi\theta A_2=0. \tag{30}$$

Имея в виду, что на границе области флаттера $\nu=\nu_{cr}$ и $\theta=\theta_{cr}$, из (25), (26) и (30) находим

$$\chi\theta_{cr}A_1=\frac{1-\gamma^2}{2}\left(B_1+B_2\right),\ -\chi\theta_{cr}A_2=\frac{1-\gamma^2}{2}\left(B_1+B_2\right).$$

Следовательно $A_1\approx -A_2$, если ν достаточно близок к ν_{cr} и θ к θ_{cr}. Отметим также, что исследования, проведённые в [6,7,11], базированы на приближённом равенстве $A_1\approx -A_2$. Такое заключение содержится также в [10].

Исследуем нелинейную систему (28), решая её численно при следующих исходных данных: $E=7.3\cdot10^{10}$ Н/м^2; $\mu=0.34$; ρ_0=$2.79\cdot10^3$кг/м^3 (дюралюминий), æ=1.4; $\rho_\infty=1.29\,кг/м^3$; $a_\infty=340.29\,м/с$ (воздух). Исследована зависимость амплитуды установившихся флаттерных колебаний A в точке $(a/2,\ b/2,\ 0)$ оболочки (в рассматриваемом случае $A = A_1$) от параметра ν, характеризующий скорость набегающего потока при различных значениях геометрических параметров R/a, h/a, a/b и частоты θ.

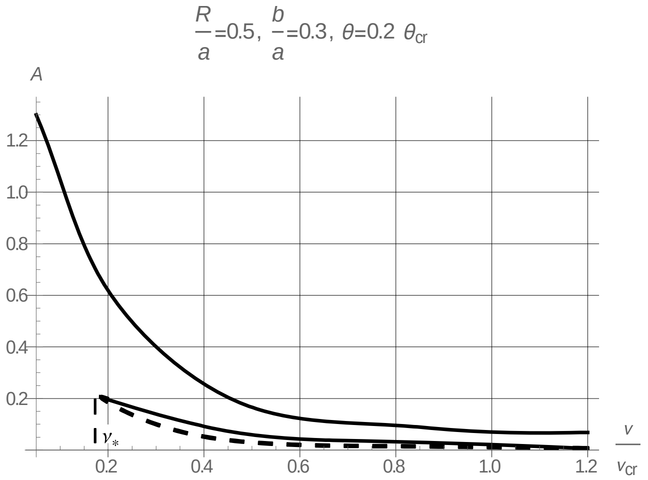
Численные исследования, приведённые в [6,7], в случае прямоугольных пластин показывают, что отношение h/a имеет существенное влияние (как качественное, так и количественное) на характер зависимости амплитуда-скорость $A(\nu)$. Поэтому, здесь также случаи сравнительно толстых и достаточно тонких оболочек рассматриваются отдельно. Для простоты и наглядности здесь рассматриваются нелинейные флаттерные колебания с частотой $\theta < \theta_{cr}$. Для остальных θ будет отдельное исследование.

4.1. Влияние сверхзвукового потока на характер зависимиости $A(\nu)$ при достаточно толстых оболочках

Результаты численного решения системы (15) при фиксированных $\theta < \theta_{cr}$, $a = 70h$ и различных значениях геометрических параметров R/a, b/a, представляющие зависимость значения амплитуды флаттерных колебаний от параметра скорости ν, приведены на фиг. 1–5. На основе этого легко обнаружить, что установившиеся флаттерные колебания разного характера (как однозначность, так и многозначность зависимости $A(\nu)$, существование областей изменения ν, в которых невозможно возбудить флаттерные колебания и т.д.) возможны как при докритических скоростях потока $(\nu < \nu_{cr})$, так и послекритической стадии $(\nu > \nu_{cr})$. Аналогичный результат в качественном смысле было получено в наших работах [6,7], посвящённых флаттеру прямоугольных пластин. Характер функции $A(\nu)$ в случае прямоугольных пластин на основе приближённого равенства $A_1 \approx -A_2$ детально исследовано в работах [10,11]. В этих работах установлено, что при конкретно выбранных параметрах задачи можно возбудить флаттерные колебания либо только при послекритических скоростях (где $A(\nu)$ является монотонно возрастающей функцией в области $\nu > \nu_{cr}$), либо только при докритических скоростях (где $A(\nu)$ является монотонно убывающей функцией в области $\nu < \nu_{cr}$). Причинами отмеченного расхождения по всей вероятности являются учёт квадратичной аэродинамической нелинейности и отказ от предположения $A_1 \approx -A_2$.

Приведенные фиг.1–5 показывают также, что для произвольно выбранных значений геометрических параметров задачи изменение частоты θ имеет существенное как качественное, так и количественное влияние на зависимость амплитуда-скорость. А именно:

- если $b/a<1$ и θ достаточно меньше θ_{cr}, то существует такое значение скорости обтекающего потока ν_*, что при $\nu \in [0, \nu_*]$ функции $A(\nu)$ являются однозначной и монотонно убывающей, а при $\nu > \nu_*$ она является трёхзначной и её поведение аналогично случаю, когда $\nu \in (0, \nu_*)$ (фиг.1).



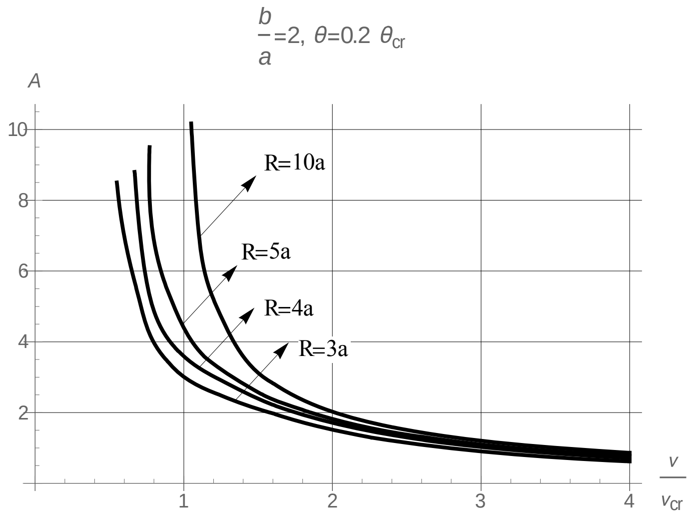
Фиг.1. График функции $A(\nu)$ для относительно малых значений частоты θ и R/a

Таблица 2. Значение амплитуды флаттерных колебаний при $b=a, \ \theta = 0.2\theta_{cr}$

ν/ν_{cr}	R/a=1	R/a=2	R/a=3	R/a=4	R/a=5
0.2	6.38189	–	–	–	–
0.4	3.24185	9.54353	–	–	–
0.6	2.23344	3.54653	8.358	20.4917	–
0.8	1.59198	3.04073	1.93813	2.48484	6.14789
1	1.19275	2.52427	1.63909	2.00512	4.08441
1.2	0.931257	2.09655	1.39422	1.70755	3.3233
1.4	0.751039	1.76075	1.19457	1.46998	2.78953
1.6	0.621387	1.49839	1.03444	1.27875	2.38404
1.8	0.524768	1.29155	0.906032	1.12461	2.068
2	0.450648	1.12635	0.802285	0.94577	1.81703

- Характер функции $A(\nu)$ в зависимости от параметра кривизны R/a при $b/a \geq 1$ приведён на фиг.2 и в табл. 2. Они показывают, что: а) значения функции $A(\nu)$ при фиксированном ν монотонно возрастают в зависимости от R/a. Более того, расчёты показывают, что с увеличениям значения как геометрических параметров b/a и R/a, так и частоты θ величины скорости ν_* увеличиваются (фиг.2); б) при малых значениях параметра θ функция $A(\nu)$ является однозначной, монотонно убывающей функцией. В этих случаях, при фиксированных b/a с увеличением R/a значение амплитуды увеличивается (табл. 2, фиг.2);

Отметим, что в табл. 2 знак «-» означает, что система (28) имеет только тривиальное решение.



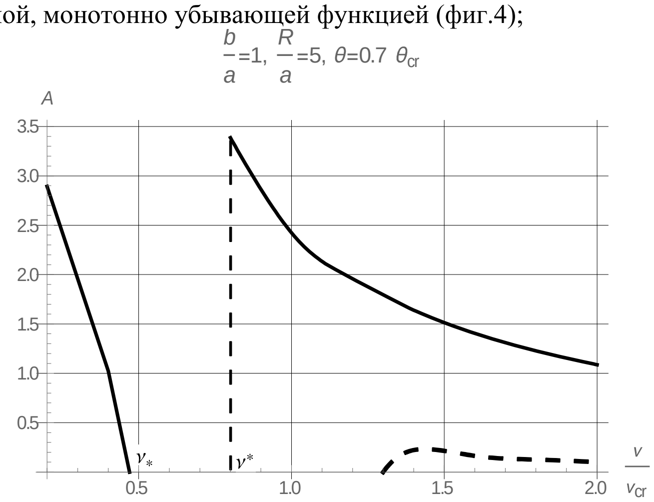
Фиг.2. График функции $A(\nu)$ в зависимости от R/a при малых частотах

Фиг. 3 и 4 указывают влияние параметра b / a на поведение функции $A(\nu)$.

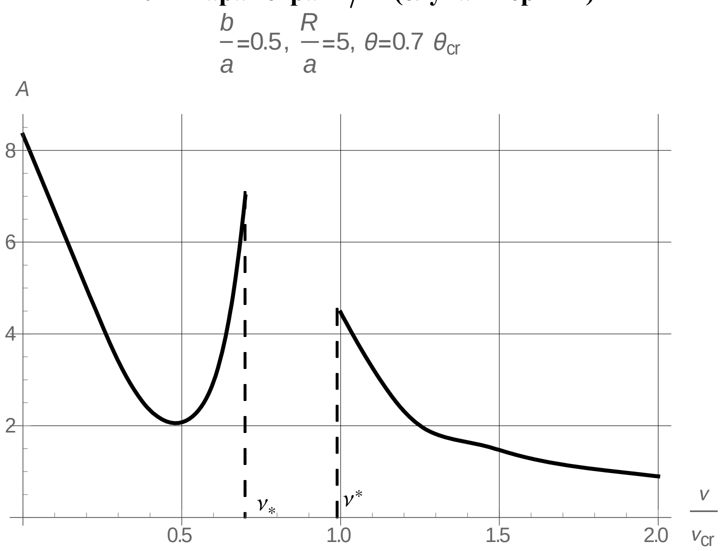
- при сравнительно больших значениях частоты θ и параметра R/a характер функции $A(\nu)$ существенно меняется. Здесь в зависимости от b/a, в основном, имеют место следующие два случая: 1) если отношение b/a порядка единицы, то: а) существует интервал $[0,\nu_*]$ изменения ν, где $A(\nu)$ является однозначной монотонно убывающей функцией, б) существует такое определённое значение $\nu^* > \nu_*$, что в интервале $[\nu_*,\nu^*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания), в) при $\nu = \nu^*$ значение амплитуды скачком возрастает до определённого конечного значения, а при $\nu > \nu^*$ устойчивая ветвь зависимости $A(\nu)$ является монотонно убывающей функцией (фиг.3);

  2) если же $b/a \le 0.5$, то: а) существует интервал $[0,\nu_*]$, где $A(\nu)$ является однозначной функцией, которая имеет точку минимума, б) существует значение ν^* такое, что в интервале $[\nu_*,\nu^*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания), в) при $\nu = \nu^*$ значение амплитуды скачком возрастает до

определённого конечного значения, а при $\nu > \nu^*$ зависимость $A(\nu)$ является однозначной, монотонно убывающей функцией (фиг.4);



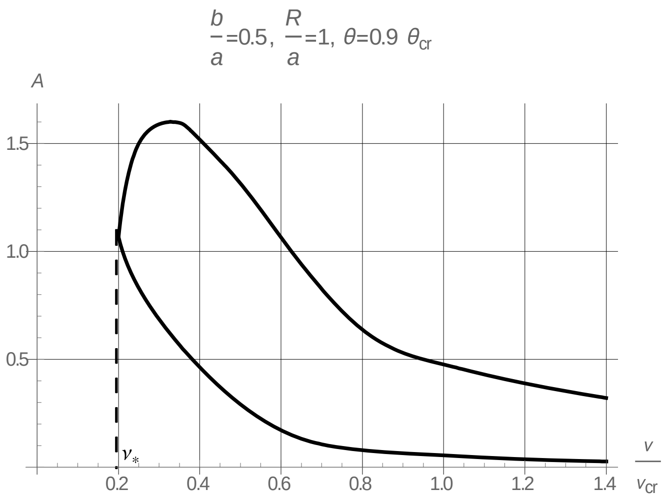
Фиг.3. График функции $A(\nu)$ при сравнительно больших значениях частоты θ и параметра R/a (случай первый)



Фиг.4. График функции $A(\nu)$ при при сравнительно больших значениях частоты θ и параметра R/a (случай второй)

Фиг.3 и 4 указывают влияние параметра $b\,/\,a$ на поведение функции $A(\nu)$.

- при частотах колебаний θ, близких к θ_{cr} и в зависимости от геометрических параметров оболочки существует определённое значение ν_* параметра ν $(\nu_* < \nu_{cr})$, что: а) при $\nu \in [0, \nu_*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания), при $\nu = \nu_*$ значение амплитуды скачком возрастает до определённого конечного значения, после чего функция $A(\nu)$ является двухзначной, одна ветвь которой убывает, а вторая имеет точку максимума (фиг.5);



Фиг.5. График функции $A(\nu)$ при $R/a < 1$ и при частотах, близких к θ_{cr}

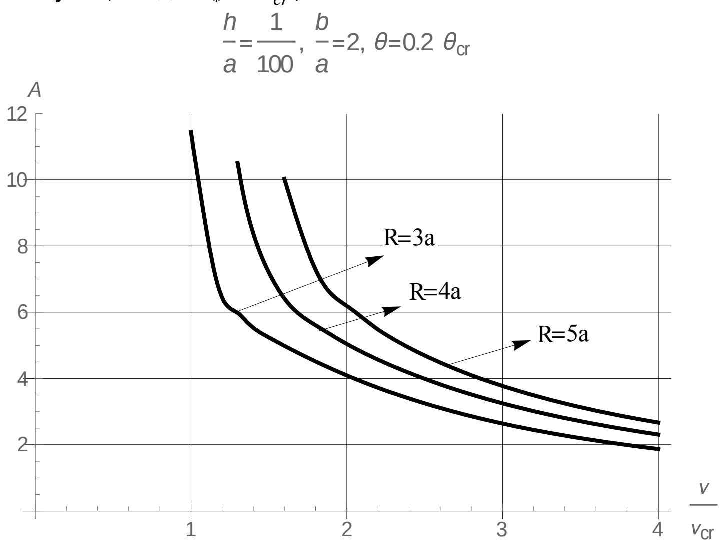
Вычисления показывают также, что с увеличением R/a значение амплитуды флаттерных колебаний увеличивается.

4.2. Влияние сверхзвукового потока на характер нелинейных колебаний при тонких и достаточно тонких оболочках

Здесь также приведены численные исследования характера функции $A(\nu)$ от параметров θ, R/a и b/a при фиксированных различных h/a. Результаты численных решений приведены на фиг. 6 –11, которые показывают, что зависимость $A(\nu)$ в случае тонких пологих оболочек имеет новые представления по сравнению со случаем толстых оболочек.

Приведём некоторые из них:

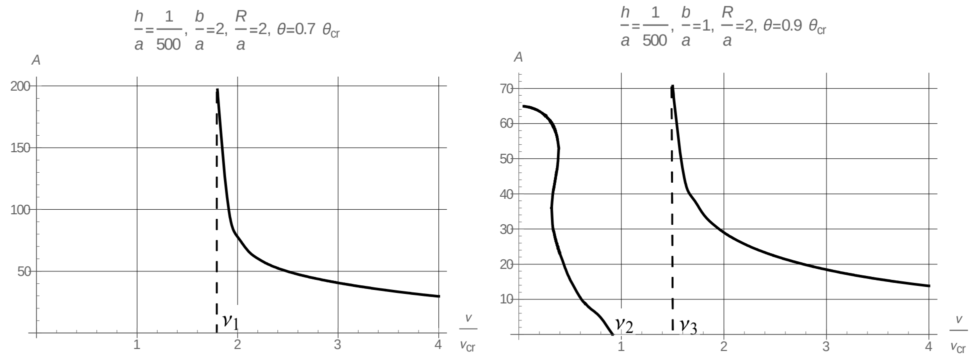
- при малых значениях параметра θ существует значение обтекающего потока ν_* такое, что а) область $\nu < \nu_*$ является зоной молчания; б) при $\nu > \nu_*$ зависимость «амплитуда-скорость» является однозначной монотонно убывающей функцией, аналогичной соответствующей зависимости, полученной при толстых оболочках; в) с увеличением значения параметра R/a, как и в случае толстых оболочек, величина ν_* увеличивается (фиг.6). Отметим, что при сравнительно малых R/a возможен случай, когда $\nu_* < \nu_{cr}$;



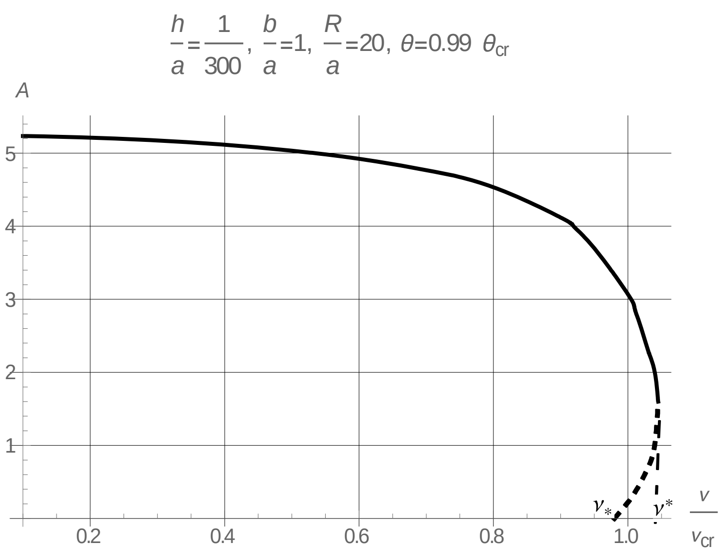
Фиг.6. График функции $A(\nu)$ в случае сравнительно тонких оболочек при малом значении θ/θ_{cr}

- с увеличением частоты θ картина зависимости амплитуды нелинейных флаттерных колебаний оболочки от скорости набегающего потока меняется. Характер функции $A(\nu)$ для достаточно тонких оболочек и для разных θ приведён на фиг.7, который показывает, что а) с увеличением частоты колебаний θ, ширина зоны молчания, примыкающейся к области малых скоростей ($\nu \in (0, \nu_1)$), уменьшается и занимает область $\nu \in (\nu_2, \nu_3)$, б) при $0 < \nu < \nu_2$ функция $A(\nu)$, будучи монотонно убывающей, может быть как однозначной, так и двузначной, г) если $\nu > \nu_3$, то $A(\nu)$ – монотонно убывающая функция. Фиг.6 и 7 показывают, что уменьшение относительной толщины оболочки (как и следовало ожидать) приводит к существенному увеличению амплитуды и возможности возбуждения флаттерных колебаний как при докритических скоростях, так и послекритических.
- при частотах, близких к θ_{cr} и достаточно больших R/a, характер функции $A(\nu)$ существенно меняется. В этом случае, если постепенно увеличить скорость потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до определённого значения скорости потока ν^*, где колебания «сорвутся» и восстанавливается невозмущённое состояние оболочки. При снижении скорости невозмущённое

состояние является устойчивым, пока $\nu > \nu_*$, где $\nu_* < \nu^*$. При $\nu = \nu_*$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до определённого значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает (фиг.8);

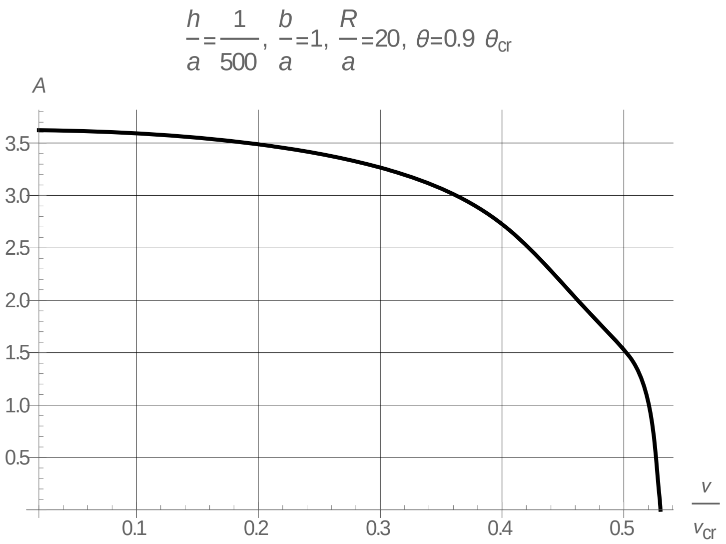


Фиг.7. График функции $A(\nu)$ для достаточно тонких оболочек при различных значениях частоты θ флаттерных колебаний



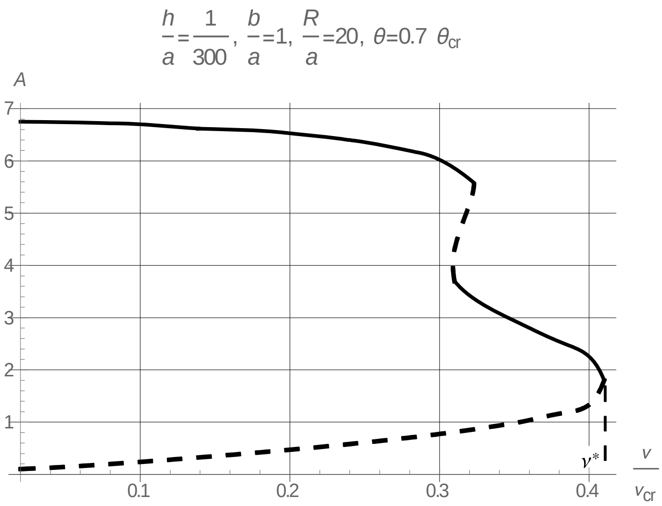
Фиг.8. Влияние параметра R/a на характер функции $A(\nu)$ при достаточно тонких оболочках

- с уменьшением относительной толщины оболочки существует значение $\overline{\theta}$, близкое к θ_{cr}, при котором $\nu_* = \nu^*$ и зависимость амплитуды колебаний от скорости потока (функция $A(\nu)$) является однозначной и монотонно убывающей (фиг.9). Причем, такой характер ранее выявлен в [6-11], когда $A_2 \approx -A_1$;

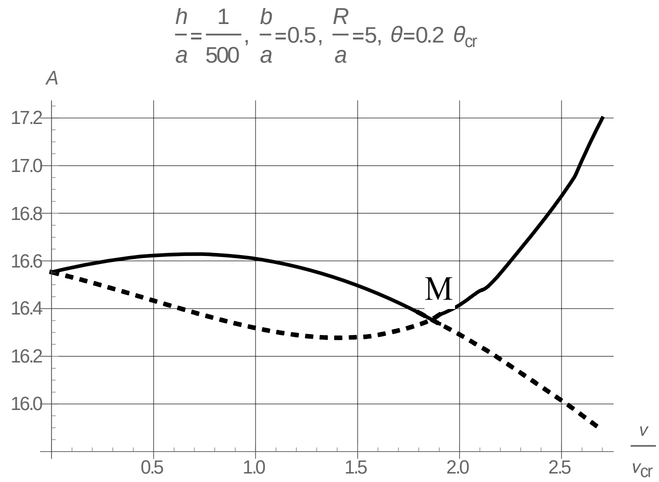


Фиг.9. График функции $A(\nu)$ при достаточно тонких оболочках, когда частота нелинейных колебаний близка к критической

- при достатчно тонких оболочек, у которых R/a достаточно велика, существует такое умеренное значение частоты θ, что возможен вариант зависимости $A(\nu)$, приведенный на Рис.10, который показывает, что устойчивая ветвь $A(\nu)$ является некоторым обобщением зависимостей представленных на рисунках 8 и 9;
- проведено численное исследование $A(\nu)$ в случае тонкой оболочки, когда частота флаттерного колебания достаточно мала и $b/a < 1$. Результаты расчётов приведены на фиг.11, который показывает возможность существования точки бифуркации (точка M).



Фиг.10. График функции $A(\nu)$ при достаточно тонких оболочках, когда частота нелинейных колебаний близка к критической



Фиг.11. График функции $A(\nu)$ для достаточно тонких оболочек при малых значениях параметра частоты θ

Таким образом (при фиксированной оболочке и газа), как существования различных типов зависимостей $A(\nu)$, точек бифуркации и областей молчания, так и переход из одной зависимости $A(\nu)$ к другой можно урегулировать оптимальным выбором параметра θ частоты колебаний.

5. Заключение

В статье рассматривается задача нелинейных колебаний изотропной пологой цилиндрической оболочки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Основным предметом исследования – изучение зависимости амплитуды установившихся флаттерных колебаний от скорости обтекающего потока. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейностей: аэродинамической и геометрической (как квадратичной, так и кубической). Благодаря учёту аэродинамической нелинейности (особенно её несимметричной квадратичной части) установлено, что зависимость амплитуда-скорость в определённых интервалах изменения параметра скорости, является многозначной. Этот факт иллюстрирован на приведённых в тексте фигурах, в основном, в виде двух ветвей, нижние из которых, по всей вероятности, являются неустойчивыми. Неустойчивые ветви отделяют области тяготения двух соседних устойчивых решений. Отсюда легко находится величина возмущения, необходимого для того, чтобы перебросить систему с одной устойчивой ветви на другую. Показаны существования определённых областей изменения величины скорости обтекающего потока, при которых: а) зависимость амплитуда-скорость может быть как однозначной, так и двухзначной, б) невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания (зоны молчания) как при докритических скоростях, так и в послекритической стадии, в) показана возможность существования точки бифуркации. Установлено, что как существования различных типов зависимостей амплитуда-скорость, точек бифуркации и областей молчания, так и переход из одной зависимости к другой можно урегулировать оптимальным выбором параметра частоты колебаний.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 18T-2C149.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с. (Algazin S.D., Kiyko I.A. (2006) «Flutter plates and shells». Moscow, Nauka, 2006, 247p.)(in Russian)
2. Amabili M, Pellicano F. «Multimode approach to nonlinear supersonic flutter of imperfect circular cylindrical shells». //J. Appl. Mech. 2002; 69: 117–126.
3. Amabili M, Pellicano F. «Nonlinear supersonic flutter of circular cylindrical shells». //AIAA J. 200; 39: 564–73.
4. Ashley H., Zartarian C. «Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician». //Journ. Aeronaut. Sci. 23, №6, 1956.
5. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв.АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, №1, с.92-98. (Baghdasaryan, G.Y. (1961). «On stability of orthotropic shells in supersonic gas flow». //Izv.AN USSR. OTN. Mechanics and Engineering, vol.4, p.92-98.)(in Russian)
6. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. & Marzocca P. «On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post- Critical Flight Conditions». //Journal of Aerospace Engineering, 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000246 (Jul. 19, 2012), ISSN: 0893-1321, 2012.
7. Г.Е. Багдасарян, М.А. Микилян, Р.О. Сагоян Нелинейный флаттер ортотропной прямоугольной пластинки. /В сб.: научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 2010, т.1, стр. 118-123.

(Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. Saghoyan R.O. «Non-linear flutter of orthotropic rectangular plate», Collection of scientific papers of the international conference, Actual problems of continuum mechanics, 2010, V.1, pp.118-123.)(in Russian)

8. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Saghoyan R., Cestino E. Frulla G., Marzocca P. (2015). «Nonlinear LCO «amplitude–frequency» characteristics for plates fluttering at supersonic speeds» //International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 77, 51–60.
9. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O. «Behavior of Nonlinear Flutter-Type Oscillations of Flexible Plates in Supersonic Gas Flow». //Journal of Aerospace Engineering, 2017, 30(5).
10. Болотин В.В., Гаврилов Ю.В., Макаров Б.П. и Швейко Ю.Ю. Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях. //Изв. АН СССР. ОТН. «Механика и машиностроение». 1959. № 3. С.3-14. (Bolotin V.V., Gavrilov Y.V., Makarov B.P., Schweiko Y.Y. «Nonlinear stability problem of flat panels at high supersonic speeds». Math. AN SSSR, OTN, Mechanics and Mechanical Engineering, №. 3, 1959, pp.3-14.)(in Russian)
11. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.- М.: Физматгиз, 1961. -339 с. (Bolotin, V.V. (1963). «Non-conservative problems of the theory of elastic stability». 1st edition, 488 Corrected and Authorized edition, edited by G.Herrmann, Pergamon, New York, (translated from 489 Russian).)
12. Carter L.L., Stearman R.O. «Some aspects of cylindrical shell panel flutter». //AIAA J. 1968; 6: 37–43.
13. Dowell E.H. «Aeroelasticity of Plates and Shells». Leyden : Noordhoff International Publishing, 1975.
14. Dowell E.H. «Panel flutter - A review of the aeroelastic stability of plates and shells». //AIAA Journal, Vol. 8, № 3 (1970), pp. 385-399.
15. Fung Y.C. (1958) «On two-dimensional panel flutter». //Journ. Aeronaut. Sci. 25, № 3.
16. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек. //Изв. АН Арм.ССР, 13, №1, 1960, стр.29-36 (Gnuni V.Ts. «On the theory of dynamic stability of laminated anisotropic shallow shells». Proceedings of the AS of the Arm.SSR, 13, N1, 1960, pp.29-36.)(in Russian)
17. Hedzhpet D. «Flutter rectangular simply supported panels at high supersonic speeds». Mechanics IL, №2. 1958. p.103-125.
18. Илюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.XX. Вып.6. (Ilyushin A.A. «The law of plane cross sections at high supersonic speeds». //Appl. Math. Mech., vol. XX, № 6, 1956.) (in Russian)
19. Johns D.J. «A Review of Panel Flutter at Low Supersonic Speeds». //The Aeronautical Journal, Vol. 69, Issue 657, September 1965, pp. 627-631.
20. Kim D.-H., Lee I., Marzocca P., Librescu L., Schober S. «Nonlinear Aeroelastic Analysis of an Airfoil Using CFD-Based Indicial Approach». //Journal of Aircraft, Vol. 42, №.5, September–October 2005, pp. 1340-1344.
21. Marzocca P., Librescu L., Kim D.H., Lee I., Schober S. «Generalized Transonic Unsteady Aerodynamics via Computational-Fluid-Dynamics Indicial Approach». //AIAA Journal, Vol. 43, № 4, April 2005, pp.915-921.
22. Mei Chuh, Abdel-Motagaly K. and Chen R. «Review of Nonlinear Panel Flutter at Supersonic and Hypersonic Speeds». Appl. Mech. Rev 52(10), (Oct 01, 1999), 321-332
23. Merkin D.P. «Introduction to the theory of stability of motion». M.: Nauka, 1971. 312p.
24. Miles J. W. «Supersonic flutter of a cylindrical shell». //Journ. Aeronaut. Sci. 24, № 2 (1957); 25, № 5 (1958).

25. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. //ПММ. 1956. -Т.20.-Вып.2. С.211-222. (Movchan A.A. «Oscillations of a plate moving in a gas». //PMM. 1956. Vol.20, Issue 2, pp.211-222.)
26. Novichkov Y.N. «Flutter of plates and shells». Results of science and technology. Mechanics of deformable solids. M.: Nauka, 1978. Vol. 11, pp. 67-122.
27. Olson M.D. (1966) «Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells». Dissertation (Ph.D.), California Institute of Technology.
28. Швейко Ю.Ю. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа. //Изв. АН СССР. ОТН. 1960. №6, с.112-116. (Schweiko Y.Y. «Stability of circular cylindrical shell in a gas flow».// Math. AN SSSR, OTN, 1960, №6, pp.112-116.)
29. Shen. S.F. «An Approximate Analysis of Nonlinear Flutter Problems». //Journal of the Aerospace Sciences, Vol. 26, №1, 1959, pp.25-32.
30. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехтеориздат, 1949. (Vlasov, V.Z. (1949). «The general theory of shells». Moscow, Gostekhizdat.)(in Russian)
31. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с. (Volmir, A.S. (1972). «Nonlinear dynamics of plates and shells». M.: Nauka. (in Russian).

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН Армении, профессор, ведущий научный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (010) 355308; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Микилян Марине Александровна – к.ф.-м.н., доцент, старший научный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (091) 191129; **E-mail:** mikilyan@rau.am

Варданян Ирэн Арменовна – внештатный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (077) 325313; **E-mail:** irena_123@bk.ru.

Поступила в редакцию 28.12.2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №1, 2019 Механика
УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ СДВИГА В СОСТАВНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Джилавян С.А., Саргсян А.С.

Ключевые слова: пьезоэлектрик, дифракция, сдвиг, поверхностные волны, трещина, электроупругость.

Jilavyan S.H., Sargsyan A.S.

Diffraction of plane shear wave in piezoelectric composite space

Key words: piezoelectric, diffraction, shear, surface waves, crack, electro-elasticity.

The problem of diffraction of a plane electro-elastic shear wave at the edge of a semi–infinite crack in a composite piezoelectric space is reduced to a problem of the Riemann type on the real axis in the theory of analytic functions. The problem is solved by the method of integral Fourier transform using the factorization method, the apparatus of generalized functions and methods of the theory of functions of complex variable and contour integration. The distribution of the diffracted wave field in half–spaces is obtained. Some features of the wave field that manifest themselves as a result of the interaction of physical fields are revealed. The presence of a semi–infinite crack between the half–spaces and the piezoelectric effect lead to the propagation of surface electro–elastic shear waves in the half–spaces.

Ջիլավյան Ս.Հ., Սարգսյան Ա.Ս.

Սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան պիեզոէլեկտրական բաղադրյալ տարածությունում

Հիմնաբառեր. պիեզոէլեկտրիկ, դիֆրակցիա, էլեկտրաառաձգականություն, մակերևութային ալիք, սահք, ճաք:

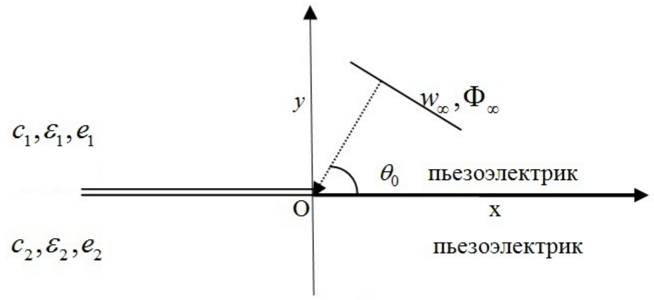
Պիեզոէլեկտրական բաղադրյալ տարածությունում կիսատարածությունների բաժանման հարթությունում գտնվող կիսաանվերջ ճաքի եզրի վրա սահքի էլեկտրաառաձգական հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը բերվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի տիպի խնդրի իրական առանցքի վրա: Դիֆրակցիայի խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով՝ օգտագործելով ֆակտորիզացիայի մեթոդը, ընդհանրացված ֆունկցիաների ապարատը և կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության ու կոնտուրային ինտեգրման մեթոդները: Ստացված է դիֆրակցված ալիքային դաշտի բաշխումը կիսատարածություններում: Բացահայտվել են ալիքային դաշտի մի քանի առանձնահատկություններ՝ պայմանավորված ֆիզիկական դաշտերի փոխազդեցությամբ: Կիսաանվերջ ճաքի առկայությունը և պիեզոէֆեկտը բերում են կիսատարածություններում էլեկտրաառաձգական մակերևութային սահքային ալիքների տարածում:

Задача дифракции плоской электроупругой волны сдвига на крае полубесконечной трещины в составном пьезоэлектрическом пространстве сводится к задаче типа Римана на действительной оси в теории аналитических функций. Поставленная задача дифракции решается методом интегрального преобразования Фурье, используя метод факторизации, аппарат обобщённых функций и методы теории функций комплексного переменного и контурного интегрирования. Получено распределение дифрагированного волнового поля в полупространствах. Выявлены некоторые особенности волнового поля, проявляющиеся в результате взаимодействия физических полей. Наличие полубесконечной трещины между полупространствами и пьезоэффект приводят к распространению поверхностных электроупругих сдвиговых волн в полупространствах.

Введение. Исследования волновых процессов в диэлектрических средах, обладающих свойством пьезоэффекта, приобрели актуальность в связи с требованиями науки и техники к изучению физико-математических моделей, корректно отражающих закономерности и основные свойства физических процессов. Взаимодействия различных физических полей, пьезоэффект и конструктивная неоднородность существенно влияют на волновое поле в деформируемых твёрдых средах сложной структуры. Они порождают новые эффекты, имеющие фундаментальные значения при изучении волновых процессов в пьезоупругих средах – электроупругие сдвиговые поверхностные (локализованные) волны [1–6]. Для дальнейшего развития механики сплошных сред и объяснения физико-технических и экспериментальных результатов при проектировании и создании новых приборов и устройств необходимо исследовать задачи распространения сдвиговых волн в слоистых пьезоэлектрических средах в новой постановке, при разных электроупругих условиях на поверхностях разделов сред. Исследованию распространения поверхностных сдвиговых волн на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств, склеенных электропроводящим тонким слоем, посвящена работа [6]. Здесь получены условия существования и некоторые особенности распространения электроупругих поверхностных волн. Следует отметить что полубесконечные металлические слои и трещины в электроупругой среде становятся причиной дифракции волн сдвига. В [2] рассмотрена дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны, падающей из бесконечности на полубесконечную трещину в пьезоэлектрическом пространстве. Рассмотрена задача дифракции плоской волны сдвига в электроупругой составной среде (пьезоэлектрик–диэлектрик) при наличии тонкого полубесконечного, металлического, заземлённого слоя (электрода) в диэлектрике без пьезоэффекта [3]. Этот слой является причиной дифракции электроупругой волны, при этом, в пьезоэлектрическом полупространстве возбуждаются поверхностные волны сдвига и проявляются некоторые особые волновые явления. В [4] рассматривается пьезоэлектрическая среда из двух одинаковых пьезоэлектрических полупространств, разделённых вакуумным слоем, и исследуется дифракция электроупругой волны сдвига на полубесконечном электроде. Рассмотрена дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине между пьезоэлектрическим и упругим диэлектрическим полупространствами, когда по остальной части контактной плоскости они скреплены [5]. Наличие полубесконечной трещины и пьезоэффекта является причиной возбуждения одной или двух электроупругих поверхностных волн. Построено электроупругое сдвиговое волновое поле в составном диэлектрическом пространстве. В данной работе исследуется волновое сдвиговое поле в составном пьезоэлектрическом пространстве, выявляются поверхностные–локализованные у контактной плоскости полупространств, волны и другие особенности, обусловленные наличием пьезоэффекта и дифракцией распространяющейся сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине между полупространствами. Анизотропия пьезоэлектриков и ряд новых свойств, проявляющихся в результате взаимодействия физических полей разной природы, усложняют исследование волнового процесса, но приводят к важным результатам с теоретической точки зрения математической физики. Исследования процессов распространения электроупругих волн в неоднородной среде обладающей пьезоэффектом, тесно связаны с развитием электроакустики, пьезотехники и измерительных приборов.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача определения волнового поля в неоднородном (составном) пьезоэлектрическом пространстве, отнесённом к декартовой системе координат $Oxyz$, при распространении электроупругой плоской волны сдвига из бесконечности в полупространстве $y>0$. Неоднородность среды обусловлена наличием двух пьезоэлектрических полупространств $y>0$ и $y<0$ – пьезоэлектриков класса 6mm гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz

главной осью кристалла, с разными электроупругими характеристиками. Отметим, что в настоящее время повысились возможности технологии создания конструктивно неоднородных материалов для инженерной практики. Пьезоэлектрические полупространства скреплены по плоскости $y=0, x>0, -\infty<z<\infty$, т.е. считаем, что между полупространствами осуществляется акустический контакт в плоскости Oxz при $x>0$. В плоскости Oxz при $x<0$ пьезоэлектрические полупространства взаимодействуют без акустического (механического) контакта. Можно принять, что рассматриваемая составная среда имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x<0$. В пьезоэлектрическом полупространстве $y>0$ из бесконечности под углом $\theta_0 \left(0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}\right)$ к плоскости раздела $y=0$ распространяется плоская электроупругая волна сдвига



$$
\begin{aligned}
u_z^\infty(x,y,t) &= w_\infty(x,y)e^{-i\omega t} \\
\Phi^\infty(x,y,t) &= \Phi_\infty(x,y)e^{-i\omega t}
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического поля, соответственно

$$
\begin{aligned}
w_\infty(x,y) &= e^{-ik_1 x\cos\theta_0 - ik_1 y\sin\theta_0} \\
\Phi_\infty(x,y) &= \frac{e_1}{\varepsilon_1}e^{-ik_1 x\cos\theta_0 - ik_1 y\sin\theta_0}
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Здесь ω – частота колебаний, t – параметр времени, $k_i=\omega/C_i$, $C_i=\sqrt{c_{44}^{(i)}(1+\chi_i)/\rho_i}$, $\chi_i=e_i^2/c_i\varepsilon_i$, $i=1,2$ – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в пьезоэлектрических средах $y>0$ и $y<0$, соответственно. В этих соотношениях $c_i = c_{44}^{(i)}, \varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}, e_i = e_{15}^{(i)}$ – упругая, диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные в пьезоэлектрических полупространствах , а ρ_i – плотность, $i = 1,2$.

Рассматривается обусловленная наличием полубесконечной трещины, дифракция падающей сдвиговой плоской электроупругой волны (1.1) в составной среде. Для рассматриваемого класса гексагональной симметрии задача распространения электроупругих волн в пьезоэлектрических средах разделяется на плоскую и антиплоскую. По постановке задачи среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах. Изучается линейное взаимодействие электрического и механического полей при контакте двух пьезоэлектрических полупространств. Учитывая гармоническую зависимость от времени (временной множитель $e^{-i\omega t}$) всех составляющих волновго поля, для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах, имеем следующие уравнения [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + k_i^2 w_i = 0 \\ &\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + k_i^2 \frac{e_i}{\varepsilon_i} w_i = 0 \end{aligned} \qquad i = 1,2 \tag{1.3}$$

Понятно, что в приведённых уравнениях $w_1(x,y), \Phi_1(x,y)$ функции амплитуд перемещения и электрического потенциала пьезоэлектрика $y > 0, -\infty < x < \infty$, а $w_2(x,y), \Phi_2(x,y)$ – пьезоэлектрика $y < 0, -\infty < x < \infty$.

На берегах трещины для амплитуд напряжений $\sigma_{yz}^{(1)}, \sigma_{yz}^{(2)}$, соответственно для пьезоэлектриков $y > 0$ и $y < 0$, имеем условия

$$\begin{aligned} &\sigma_{yz}^{(1)} = c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0 \\ &\sigma_{yz}^{(2)} = c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0 \end{aligned} \qquad y = 0, x < 0 \tag{1.4}$$

Разница перемещений на берегах трещины – пока неопределённая величина

$$w_1(x,+0) - w_2(x,-0) = w_0(x) \qquad \text{при } x < 0 \tag{1.5}$$

Решения уравнений (1.3) должны удовлетворять контактным условиям скрепления при $y = 0, x > 0$

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x,+0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x,-0) = q_0(x), w_1(x,+0) = w_2(x,-0) \tag{1.6}$$

Функции $q_+(x) = q_0(x)\vartheta(x)$ и $\psi_-(x) = w_0(x)\vartheta(-x)$, где $\vartheta(x)$ – известная функция Хевисайда, представляют касательное напряжение при $y = 0$ и разницу перемещений на $y = \pm 0$, соответственно. Тогда, условия на граничной (контактной) плоскости разнородных полупространств (1.4)–(1.6) принимают вид:

$$c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = q_+(x) \qquad \text{при} \quad y = 0 \tag{1.7}$$

$$w_1(x,+0) - w_2(x,-0) = \psi_-(x) \tag{1.8}$$

Из физических соображений ясно, что для характеристических функций электрического поля данного составного пространстваимеют место условия непрерывности по плоскости $y = 0$. Амплитуды электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции в полупространствах удовлетворяют следующим контактным условиям:

$$\Phi_1(x,0) = \Phi_2(x,0),\ D_1(x,0) = D_2(x,0) \qquad \text{при} \quad y = 0 \tag{1.9}$$

$$D_i = e_i \frac{\partial w_i}{\partial y} - \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \qquad i = 1,2 \tag{1.10}$$

Таким образом, поставленная задача определения дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пространстве при дифракции падающей из бесконечности плоской электроупругой волны сдвига (1.1), (1.2) на полубесконечной трещине в рассматриваемой пьезосреде, сведена к решению дифференциальных уравнений (1.3) при контактных условиях (1.7)–(1.9). Задаче дифракции плоской электроупругой волны на полубесконечней трещине между скрепленными диэлектрическими полупространствами, когда только одно из полупространств обладает пьезоэффектом, посвящена работа [5].

2. Решение задачи. Применяется интегральное преобразование Фурье по переменной x, и относительно трансформантов Фурье искомых функций из (1.3) получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k_1^2)\bar{u} = 0,\ \frac{d^2\bar{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2\bar{\varphi} + k_1^2 \frac{e_1}{\varepsilon_1}\bar{u} = 0 \qquad y > 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2\bar{w}_2}{dy^2} - (\sigma^2 - k_2^2)\bar{w}_2 = 0,\ \frac{d^2\bar{\Phi}_2}{dy^2} - \sigma^2\bar{\Phi}_2 + k_2^2 \frac{e_2}{\varepsilon_2}\bar{w}_2 = 0 \qquad y < 0 \tag{2.2}$$

Здесь введены функции:

$$u(x,y) = w_1(x,y) - w_\infty(x,y),\ \varphi(x,y) = \Phi_1(x,y) - \Phi_\infty(x,y) \qquad y > 0 \tag{2.3}$$

следовательно,

$$\left.\begin{aligned} &\bar{w}_1(\sigma,y) = \bar{u}(\sigma,y) + 2\pi e^{-ik_1 y \sin\theta_0}\delta(\sigma - k_1\cos\theta_0) \\ &\bar{\Phi}_1(\sigma,y) = \bar{\varphi}(\sigma,y) + 2\pi \frac{e_1}{\varepsilon_1} e^{-ik_1 y \sin\theta_0}\delta(\sigma - k_1\cos\theta_0) \end{aligned}\right\} \quad y > 0 \tag{2.4}$$

$\delta(\sigma)$ – функция Дирака.

Решения уравнений (2.1), (2.2) должны удовлетворять следующим условиям на граничной плоскости раздела двух сред, т.е. контактным условиям:

$$\bar{w}_1(\sigma+0) - \bar{w}_2(\sigma,-0) = \bar{\psi}_-(\sigma), \quad \bar{\Phi}_1(\sigma,+0) = \bar{\Phi}_2(\sigma,-0)$$

$$e_1\frac{d\overline{w}_1}{dy}-\varepsilon_1\frac{d\overline{\Phi}_1}{dy}=e_2\frac{d\overline{w}_2}{dy}-\varepsilon_2\frac{d\overline{\Phi}_2}{dy} \qquad \text{при } y=0 \tag{2.5}$$

$$c_1\frac{d\overline{w}_1}{dy}+e_1\frac{d\overline{\Phi}_1}{dy}=c_2\frac{d\overline{w}_2}{dy}+e_2\frac{d\overline{\Phi}_2}{dy}=\overline{q}_+(\sigma) \qquad \text{при } y=0$$

$\overline{\psi}_-(\sigma),\overline{q}_+(\sigma)$ – трансформанты Фурье функций $\psi_-(x)$ и $q_+(x)$.

Выражения для искомых функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах получим после обратного преобразования Фурье:

$$\left\{w_i(x,y),\Phi_i(x,y)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\overline{w}_i(\sigma,y),\overline{\Phi}_i(\sigma,y)\right\}e^{-i\sigma x}d\sigma \quad i=1,2$$

Трансформанты функций амплитуд перемещения и потенциала электрического поля для пьезоэлектрических полупространств представляются в виде

$$\begin{aligned}\overline{w}_1&=A_1(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,y}+2\pi e^{-ik_1y\sin\theta_0}\delta(\sigma-k_1\cos\theta_0)\\ \overline{\Phi}_1&=B_1(\sigma)e^{-|\sigma|y}+\frac{e_1}{\varepsilon_1}\overline{w}_1\end{aligned} \qquad y>0 \tag{2.6}$$

$$\overline{w}_2=A_2(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}\,y},\ \overline{\Phi}_2=B_2(\sigma)e^{|\sigma|y}+\frac{e_2}{\varepsilon_2}\overline{w}_2 \qquad y<0 \tag{2.7}$$

где $A_1(\sigma)=-\dfrac{e_2\varepsilon_1}{e_1\varepsilon_2-e_2\varepsilon_1}\overline{\psi}_-(\sigma)-\dfrac{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{e_1\varepsilon_2-e_2\varepsilon_1}B_1-2\pi\delta(\sigma-k_1\cos\theta_0)$

$$B_1(\sigma)=\frac{K_3(\sigma)}{|\sigma|K_1(\sigma)}\overline{q}_+(\sigma)-4\pi\frac{e_1}{\varepsilon_1}\frac{\delta(\sigma-k_1\cos\theta_0)}{K_1(k_1\cos\theta_0)} \tag{2.8}$$

$$A_2(\sigma)=A_1(\sigma)-\overline{\psi}_-(\sigma)+2\pi\delta(\sigma-k_1\cos\theta_0),\quad B_2(\sigma)=-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}B_1(\sigma)$$

$$K_3(\sigma)=\frac{\chi_1}{e_1(1+\chi_1)}\frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}+\frac{\chi_2}{e_2(1+\chi_2)}\frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}}$$

Характеристические функции данной задачи со смешанным условием на контактной плоскости имеют вид:

$$\begin{aligned}K_1(\sigma)&=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_2}-\frac{\chi_1}{1+\chi_1}\frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\chi_2}{1+\chi_2}\frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}}\\ K_2(\sigma)&=c_1(1+\chi_1)\frac{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}{|\sigma|}+c_2(1+\chi_2)\frac{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}}{|\sigma|}-\frac{(e_1\varepsilon_2-e_2\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\end{aligned} \tag{2.9}$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\gamma_1(\sigma) \to |\sigma|$, $\gamma_2(\sigma) \to |\sigma|$ при $|\sigma| \to \infty$ и $\gamma_1(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} = -i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2}$, $\gamma_2(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} = -i\sqrt{k_2^2 - \sigma^2}$, т.е. предполагается, что действительная ось обходит точки ветвления $\sigma = -k_1$, $\sigma = -k_2$ функций комплексного переменного $\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)$ сверху, а $\sigma = k_1$, $\sigma = k_2$ – снизу [7].

Относительно неизвестных функций $\overline{\psi}_-(\sigma), \overline{q}_+(\sigma)$ в формулах (2.6), (2.7) получим из (2.5) следующее уравнение:

$$
\begin{gathered}
c_1\sqrt{\sigma^2 - k_1{}^2}\,\Lambda_1(\sigma)\overline{\psi}_-(\sigma) + \mu_0\Lambda_2(\sigma)\overline{q}_+(\sigma) + \\
+4\pi i k_1 c_1 \frac{\mu_1}{1+\varepsilon_0}\sin\theta_0\delta(\sigma - k_1\cos\theta_0) = 0
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

здесь

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1(\sigma) &= \frac{(1+\chi_1)(1+\chi_2)\varepsilon_2}{\varepsilon_1(1+\chi_1)+\varepsilon_2(1+\chi_2)}K_1(\sigma) \\
\Lambda_2(\sigma) &= \frac{1}{(c_1+c_2)(1+\chi_0)}\frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_2{}^2}}K_2(\sigma)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

$$
\lambda_0 = \frac{e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1}{e_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{\chi_2}{1+\chi_2}\frac{ik_1\cos\theta_0}{\sqrt{k_2{}^2 - k_1{}^2\cos^2\theta_0}},
$$

$$
\mu_0 = \frac{(1+c_0)(1+\chi_0)}{1+\varepsilon_0},\ \mu_1 = (1+\chi_1)(1+\chi_2)(1+\lambda_0),
$$

$$
c_0 = \frac{c_1}{c_2},\ \chi_0 = \frac{(e_1+e_2)^2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(c_1+c_2)},\ \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1\chi_1 + \varepsilon_2\chi_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}
$$

Рассмотрим частный случай, когда между пьезоэлектрическими полупространствами осуществляется только электрический контакт – они взаимодействуют без акустического контакта, т.е. в составном пьезоэлектрическом пространстве существует бесконечная трещина по плоскости $y = 0$, следует принять, что $q_+(x) = 0$. Тогда получим значения функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в пьезоэлектрическом полупространстве $y > 0$

$$
\begin{aligned}
w_1(x,y) &= e^{-ik_1x\cos\theta_0 - ik_1y\sin\theta_0} + A_{1*}e^{-ik_1x\cos\theta_0 + ik_1y\sin\theta_0} \\
\Phi_1(x,y) &= \frac{e_1}{\varepsilon_1}w_1(x,y) - \frac{2e_1}{\varepsilon_1K_1(k_1\cos\theta_0)}e^{-ik_1x\cos\theta_0}e^{-k_1y\cos\theta_0}
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

а в пьезоэлектрической среде $y<0$

$$w_2(x,y)=A_{2*}e^{-ik_1x\cos\theta_0-i\sqrt{k_2^2-k_1^2\cos^2\theta_0}\,y}$$

$$\Phi_2(x,y)=\frac{e_2}{\varepsilon_2}w_2(x,y)+\frac{2e_1}{\varepsilon_2K_1(k_1\cos\theta_0)}e^{-ik_1x\cos\theta_0}e^{k_1y\cos\theta_0}, \tag{2.13}$$

где

$$A_{1*}=1+2i\frac{\chi_1}{1+\chi_1}\frac{\mathrm{ctg}\theta_0}{K_1(k_1\cos\theta_0)}$$

$$A_{2*}=-2i\frac{\chi_2}{e_2\left(1+\chi_2\right)}\frac{e_1k_1\cos\theta_0}{K_1(k_1\cos\theta_0)\sqrt{k_2^2-k_1^2\cos^2\theta_0}}.$$

Как и следовало ожидать, $w_2=0$ как при отсутствии пьезоэффекта в среде $y<0$, так и при отсутствии пьезоэффекта в полупространстве $y>0$ $A_{1*}=1, A_{2*}=0$. Как видно из полученных формул, электроупругое волновое поле в составном пьезоэлектрическом пространстве, в данном случае, состоит из падающей, отражённой и проходящей волн. Наличие локализованной волны для электрических потенциалов обусловлено падающей волной и особенностями уравнений электростатики.

Необходимо рассматривать и другой частный случай, когда пьезоэлектрические полупространства скреплены по всей плоскости $y=0$. В этом случае имеет место полный электромеханический (акустический) контакт между пьезоэлектриками. Уже следует принять $\psi_-\left(x\right)=0$, и для этой задачи отражения и преломления волн получим значения функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в пьезоэлектрическом полупространстве $y>0$ в виде

$$w_1(x,y)=e^{-ik_1x\cos\theta_0-ik_1y\sin\theta_0}-A_{10}e^{-ik_1x\cos\theta_0+ik_1y\sin\theta_0}$$

$$\Phi_1(x,y)=\frac{e_1}{\varepsilon_1}w_1(x,y)-B_{10}e^{-ik_1x\cos\theta_0}e^{-k_1y\cos\theta_0} \tag{2.14}$$

а в полупространстве $y<0$

$$w_2(x,y)=\left(1-A_{10}\right)e^{-ik_1x\cos\theta_0-i\sqrt{k_2^2-k_1^2\cos^2\theta_0}\,y}$$

$$\Phi_2(x,y)=\frac{e_2}{\varepsilon_2}w_2(x,y)-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}B_{10}e^{-ik_1x\cos\theta_0}e^{k_1y\cos\theta_0}, \tag{2.15}$$

где

$$A_{10}=1+\frac{2ic_1\left(1+\chi_1\right)tg\theta_0}{K_2(k_1\cos\theta_0)},\quad B_{10}=\frac{e_1\varepsilon_2-e_2\varepsilon_1}{\varepsilon_1\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\left(A_{10}-1\right)$$

Таким образом, и в этой частной задаче электроупругое волновое поле сдвига состоит из падающей и отражённой волн в пьезоэлектрическом полупространстве

$y > 0$ и из проходящей в пьезоэлектрическом полупространстве $y < 0$. Локализованные (поверхностные) у поверхности контакта электроупругие волны, как и в первом частном случае, не возбуждаются.

В случае отсутствия пьезоэффекта в пространстве

$$A_{10} = \frac{c_2\sqrt{k_2^2 - k_1^2\cos^2\theta_0} - c_1 k_1 \sin\theta_0}{c_2\sqrt{k_2^2 - k_1^2\cos^2\theta_0} + c_1 k_1 \sin\theta_0},$$

очевидно, что при $\cos\theta_0 = \dfrac{k_2}{k_1} < 1$ формулы соответствуют известному случаю полного внутреннего отражения $(A_{10} = -1)$

$$w_1(x,y) = e^{-ik_1 x\cos\theta_0 - ik_1 y\sin\theta_0} + e^{-ik_1 x\cos\theta_0 + ik_1 y\sin\theta_0},\ \ w_2(x,y) = 2e^{-ik_1 x\cos\theta_0}.$$

Функциональное уравнение для определения искомых функций $\overline{q}_+(\sigma), \overline{\psi}_-(\sigma)$ (2.10) рассматривается как краевая задача типа Римана в теории аналитических функций на действитвльной оси [2–4]. Анализируя функцию $K_1(\sigma)$, доказывается, что $K_1(\sigma)$ имеет нули только в точках $\pm\sigma_*$, σ_* – единственный положительный корень уравнения $K_1(\sigma) = 0$. Рассматривая нули функции $K_2(\sigma)$, доказывается, что уравнение $K_2(\sigma) = 0$ имеет единственный положительный корень $\sigma = \sigma_0 > k_2$, для определённости принимается $k_2 > k_1$, если

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1+\chi_1}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\left(1 - \frac{e_2\varepsilon_1}{e_1\varepsilon_2}\right)^2. \tag{2.16}$$

Функция $K_2(\sigma)$ при приведённом выше условии имеет нули только в точках $\pm\sigma_0$. Рассматривая области монотонности функций $K_i(\sigma)$, $i = 1,2$, доказывается, что $\sigma_0 < \sigma_*$. При решении функционального уравнения (2.10) и факторизации функции $L(\sigma) = \Lambda_1(\sigma)/\Lambda_2(\sigma)$ принимается, что действительная ось обходит, как точки ветвления $\pm k_1, \pm k_2$ функций $\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)$, так и нули функций $K_1(\sigma)$, $K_2(\sigma)$ $\pm\sigma_*$ и $\pm\sigma_0$, т.е. действительная ось обходит точки $\sigma = -\sigma_*$, $\sigma = -\sigma_0$ сверху, а точки $\sigma = \sigma_0$, $\sigma = \sigma_*$ – снизу, обеспечивая условия уходящей волны [3,5]. В случае, когда диэлектрическое полупространство $y < 0$ не обладает пьезоэффектом $e_2 = 0$, то для нулей соответствующих функций $K_1(\sigma)$, $K_2(\sigma)$ $\pm\sigma_{*1}$ и $\pm\sigma_{01}$, доказывается, что $\sigma_{01} < \sigma_{*1}$, при этом, $\sigma_0 < \sigma_{01}$, $\sigma_{*1} < \sigma_*$.

Функциональное уравнение (2.10) решается, используя методику, развитую в [2–5], решения строятся, факторизуя функцию $L(\sigma)$, представляя её в виде

$$L(\sigma) = L^{+}(\sigma)L^{-}(\sigma), \tag{2.17}$$

функции $\Lambda_1(\sigma) \to 1,\ \Lambda_2(\sigma) \to 1$ при $|\sigma| \to \infty,$

$\Lambda_i^{\pm}(\alpha) \to 1,$ при $|\alpha| \to \infty,$

где функции $L^{\pm}(\alpha),\ \alpha = \sigma + i\tau$ регулярны и не имеют нулей при $\operatorname{Im}\alpha > 0$ и $\operatorname{Im}\alpha < 0$, соответственно. $L^{\pm}(\sigma)$ – граничные значения этих функций.

$$L^{+}(\sigma) = \exp(F^{+}(\sigma)),\ L^{-}(\sigma) = \exp(F^{-}(\sigma)),$$

$$F^{+}(\sigma) = \int_{0}^{\infty} F(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx,\ F^{-}(\sigma) = F^{+}(-\sigma),$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln L(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma,\ L^{-}(-\sigma) = L^{+}(\sigma),$$

Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется $|\alpha| = \alpha$ при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $|\alpha| = -\alpha$ при $\operatorname{Re}\alpha < 0$. При контурном интегрировании имеется в виду, что

$$\frac{1}{s-(\sigma - i0)} = \frac{1}{s-\sigma} - i\pi\delta(s-\sigma),$$

используется формула

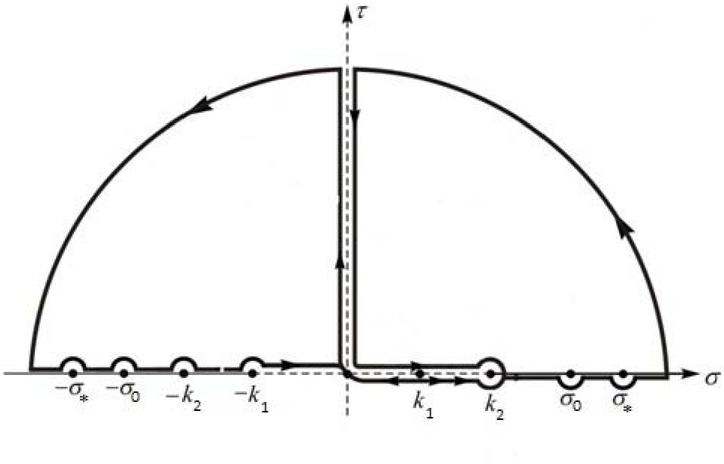
$$2\pi i\delta(\sigma - k\cos\theta_0) = \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 + i0}.$$

Выражения искомых функций принимают вид:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_{-}(\sigma) &= -\frac{b}{\sqrt{\sigma - k_1}L^{-}(\sigma)(\sigma - k_1\cos\theta_0 - i0)},\\
\bar{q}_{+}(\sigma) &= \frac{c_1 b\sqrt{\sigma + k_1}L^{+}(\sigma)}{\mu_0(\sigma - k_1\cos\theta_0 + i0)},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где

$$b = \frac{2\sqrt{2k_1}\mu_1\sin\frac{\theta_0}{2}}{\Lambda_2(k_1\cos\theta_0)L^{+}(k_1\cos\theta_0)(1+\varepsilon_0)},$$



Функции амплитуд перемещения в пьезоэлектрических полупространствах при $x<0$ принимают вид:

$$w_1(x,y)=e^{-ik_1x\cos\theta_0-ik_1y\sin\theta_0}+A_{1*}e^{-ik_1x\cos\theta_0+ik_1y\sin\theta_0}-$$

$$-\frac{b}{2\pi\mu_0\left(1+\chi_1\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-e_1\frac{K_3(\sigma)}{K_1(\sigma)}\right)\frac{\sqrt{\sigma+k_1}L^+\left(\sigma\right)e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}e^{-i\sigma x}d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\left(\sigma-k_1\cos\theta_0+i0\right)},$$

$$w_2(x,y)=A_{2*}e^{-ik_1x\cos\theta_0-i\sqrt{k_2^2-k_1^2\cos^2\theta_0}y}- \tag{2.19}$$

$$-\frac{bc_1}{2\pi c_2\mu_0\left(1+\chi_2\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+e_2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{K_3(\sigma)}{K_1(\sigma)}\right)\frac{\sqrt{\sigma+k_1}L^+\left(\sigma\right)e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}y}e^{-i\sigma x}d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}\left(\sigma-k_1\cos\theta_0+i0\right)}$$

а при $x>0$

$$w_1(x,y)=e^{-ik_1x\cos\theta_0-ik_1y\sin\theta_0}-A_{10}e^{-ik_1x\cos\theta_0+ik_1y\sin\theta_0}+$$

$$+\frac{b}{2\pi}\frac{e_2\varepsilon_1}{e_1\varepsilon_2-e_2\varepsilon_1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{e_1}{\varepsilon_1}\frac{K_4(\sigma)}{K_2(\sigma)}\right)\frac{e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}e^{-i\sigma x}d\sigma}{\sqrt{\sigma-k_1}L^-\left(\sigma\right)\left(\sigma-k_1\cos\theta_0-i0\right)},$$

$$w_2(x,y)=\left(1-A_{10}\right)e^{-ik_1x\cos\theta_0-i\sqrt{k_2^2-k_1^2\cos^2\theta_0}y}+ \tag{2.20}$$

$$+\frac{b}{2\pi}\frac{e_1\varepsilon_2}{e_1\varepsilon_2-e_2\varepsilon_1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{e_2}{\varepsilon_2}\frac{K_4(\sigma)}{K_2(\sigma)}\right)\frac{e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}y}e^{-i\sigma x}d\sigma}{\sqrt{\sigma-k_1}L^-\left(\sigma\right)\left(\sigma-k_1\cos\theta_0-i0\right)}.$$

$$K_4(\sigma)=e_1\frac{1+\chi_1}{\chi_1}\frac{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}{|\sigma|}+e_2\frac{1+\chi_2}{\chi_2}\frac{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}}{|\sigma|}$$

Распределение контактного напряжения при $x\to+0$

$$\sigma_{yz}(x,0)=C\frac{\sin\theta_0/2}{\sqrt{k_1 x}}+O(1),$$

Интегралы преобразуются методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$. Показаны разрезы в комплексной плоскости и путь интегрирования. Путь интегрирования при $x<0$ замыкается в верхней полуплоскости и действительная ось обходит точки $\mp\sigma_*$ сверху и снизу, соответственно. Аналитическое продолжение функции $K_1(\sigma)$, т.е. функция $K_1(\alpha)$, при таких разрезах в комплексной плоскости не имеет чисто мнимых, а также комплексных нулей, это следует из постановки задачи (принцип уходящей волны). Единственная особая точка – простой полюс $\sigma=\sigma_*$. Интеграл представляется в виде суммы регулярных интегралов [3,4,8]. Волновое поле состоит из падающей и отражённой волн, дифрагированных затухающих объёмных волн, а также дифрагированной поверхностной волны, локализованной у контактной поверхности

$$\begin{aligned} w_{1*}(x,y)&=A_*^{(1)}e^{-\sqrt{\sigma_*^2-k_1^2}\,y}e^{-i\sigma_* x} \qquad y>0 \\ w_{2*}(x,y)&=A_*^{(2)}e^{\sqrt{\sigma_*^2-k_2^2}\,y}e^{-i\sigma_* x} \qquad y<0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$A_*^{(1)}=-\frac{ie_1 b}{\mu_0\left(1+\chi_1\right)}\frac{\sqrt{\sigma_*+k_1}\,L^+(\sigma_*)K_3(\sigma_*)}{\sqrt{\sigma_*^2-k_1^2}\,K_1'(\sigma_*)(\sigma_*-k_1\cos\theta_0)} \qquad A_*^{(2)}=\frac{e_1\chi_2}{e_2\chi_1}A_*^{(1)}$$

Эта волна распространяется по оси x с волновым числом σ_* и скоростью ω/σ_* и затухает при $|y|\to\infty$. Дифрагированные волны обусловлены наличием полубесконечной трещины, а появление поверхностной волны обусловлено также пьезоэффектом. Асимптотическое представление перемещений на граничной плоскости $y=+0$ при $x\to-\infty$ имеет вид

$$w_1(x,0)=\left(1+A_{1*}\right)e^{-ik_1 x\cos\theta_0}+A_*^{(1)}e^{i\sigma_*|x|}+e^{i(kx-\frac{\pi}{4})}O(|kx|^{-\frac{3}{2}})+O(|kx|^{-\frac{3}{2}}).$$

Функция перемещений точек полупространства $x>0$ представляется в виде суммы регулярных интегралов, падающей и отраженной волн,а также дифрагированной поверхностной волны, локализованной у контактной поверхности

$$\begin{aligned} w_{10}(x,y)&=A_0^{(1)}e^{-\sqrt{\sigma_0^2-k_1^2}\,y}e^{i\sigma_0 x} \qquad y>0 \\ w_{20}(x,y)&=A_0^{(1)}e^{\sqrt{\sigma_0^2-k_2^2}\,y}e^{i\sigma_0 x} \qquad y<0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$A_0^{(1)}=\frac{ie_1e_2\varepsilon_1 b}{e_1\varepsilon_2-e_2\varepsilon_1}\frac{\sqrt{k_1+\sigma_0}\,K_4(-\sigma_0)}{\sqrt{\sigma_0^2-k_1^2}\,L^-(-\sigma_0)K_2'(-\sigma_0)(\sigma_0+k_1\cos\theta_0)}$$

Действительная ось обходит точки $\mp\sigma_0$ сверху и снизу, соответственно. При некоторых значениях электроупругих характеристик составного пространства –

условия (2.16), $-\sigma_0$ является корнем уравнения $K_2(\sigma)=0$. Путь интегрирования замыкается в нижней полуплоскости [3,4]. Аналитическое продолжение подынтегральной функции при таких разрезах в комплексной плоскости имеет только единственную особую точку – простой полюс $\sigma=-\sigma_0$. Асимптотическое представление на контактной плоскости $y=0$ при $x\to\infty$

$$w_1(x,0)=\left(1-A_{10}\right)e^{-ik_1x\cos\theta_0}+A_0^{(1)}e^{i\sigma_0 x}+e^{i(kx+\frac{\pi}{4})}O((kx)^{-\frac{3}{2}})+O((kx)^{-\frac{3}{2}}).$$

Волновое поле перемещений состоит из падающей волны, отражённой волны и дифрагированных затухающих объёмных волн и распространяющаяся по направлению x к $+\infty$ со скоростью ω/σ_0 (σ_0 – волновое число) локализованной волны. Следует отметить, что $\omega/\sigma_0>\omega/\sigma_*$, т.е. если локализованная волна существует, электромеханические характеристики удовлетворяют условию (2.16), то её скорость распространения больше, чем скорость поверхностной волны $w_{1*}(x,y)$, распространяющаяся по x к $-\infty$, когда между полупространствами отсутствует акустический контакт.

В случае $e_2=0$ (отсутствует пьезоэффект в полупространстве $y<0$) для скоростей поверхностных волн имеем $\omega/\sigma_{01}>\omega/\sigma_{*1}$, при этом $\omega/\sigma_0>\omega/\sigma_{01}>\omega/\sigma_{*1}>\omega/\sigma_*$, как уже следует из приведённых выше соотношений.

Заключение. Связанностью физических полей – пьезоэффектом, обусловлены распространения поверхностных (локализованных) волн со смещениями частиц в направлении симметрии кристалла. Исследование волнового процесса позволило выявить новые, обусловленные дифракцией и пьезоэффектом, свойства и особенности, присущие взаимосвязанным средам и полям. Наличие полубесконечной трещины приводит к существенному изменению волнового поля в составном пьезоэлектрическом пространстве–могут возбуждаться две поверхностные, локализованные у граничной плоскости, волны с разными скоростями распространения, а также появляются цилиндрическая волна и волна, распространяющаяся от контактной поверхности и имеющая неволновой характер на этой поверхности. Результаты рассматриваемой в представленной работе задачи о распространении сдвиговых волн в составном пьезоэлектрическом пространстве с полубесконечной трещиной, могут быть использованы при изучении прикладных задач распространения электроупругих локализованных и объёмных волн. Проблема взаимодействия различных полей физического происхождения в твёрдых телах интересна с точки зрения механики сплошной среды и математической физики, и, конечно, очень важна при проектировании инженерно-физических приборов и при изучении принципов работы новых современных акустоэлектрических устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с. BalakirevM.K., GilinskiyI.A. Waves in piezocrystals. Novosibirsk: Nauka, 1982. 240p. (in Russian)
2. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38–50. GrigoryanE.Kh., Jilavyan S.H. Diffraction of a plane shear wave on semi infinite crack in a piezoelectric space. //Proceedings of NAS of Armenia. 2005. Vol. 58. Issue 1. pp.38–50. (in Russian)
3. Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлекрике. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №1. С.45–56. Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of plane shear wave in piezoelectric semi-space at a semi-infinite metallic layer in the dielectric medium. //Proceedings of NAS of Armenia. 2015. Vol. 68. Issue 1. pp.45–56. (in Russian)
4. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Известия НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50–69. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh. Diffraction of shear plane electroelastic wave on the semi-infinite electrode in the piezoelectric space with crack. //Proceedings of NAS of Armenia. 2010. Vol. 63. Issue 1. pp.50–69. (in Russian)
5. Григорян Э.Х., Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик–диэлектрик. //Тр. 7-ой межд.конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: 2011. С.137–143. GrigoryanE.Kh., Jilayvan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of a plane shear wave on semi–infinite crack in a piezoelectric–dielectric space. //Proc. of the VII int. conf. “Problems of interaction dynamics of deformable media”. Yerevan: 2011. pp. 137–143.(in Russian)
6. Аветисян А.С., Маргарян Дж.М. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. //Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №3–4. С.31–36. Avetisyan A.S., Margaryan J.M. Electroelastic surface shear waves on an division surface of two piezoelectric half-space. //Proceedings of NAS of Armenia. 1994. Vol. 47. Issue 3–4. pp.31–36. (in Russian)
7. Нобль Б. Метод Винера–Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с. Noble. B. Methods Based on the Wiener-Hopf Technique. M.: Mir, 1962. 294p. (in Russian)
8. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн. // Доклады НАН Армении. 2010. Т.110. №3. С.261–271. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh. On New Methods of Asymptotic Formulas Determination in Waves Diffraction Problems. //Reposts of NAS RA. 2010. Vol. 110. Issue 3. pp. 261–271 (in Russian)

<u>Сведения об авторах:</u>

Джилавян Самвел Акопович – к.ф.–м.н.,доцент, кафедра механики, Ереванский госуниверситет.**Тел.:** (+374 91) 500770. **E–mail:** samjilavyan@ysu.am

Саргсян Арсен Сурикович – аспирант кафедры механики, Ереванский госуниверситет. **Тел.:** (+374 77) 124310. **E–mail:** arsensargsyan777@gmail.com

Поступила в редакцию 22.01.2019 г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №1, 2019 Механика

УДК 678.057:620.17:539.4

ЗАВИСИМОСТЬ ДЕФОРМАТИВНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ТРУБ ОТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО КРУЧЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Карапетян К.А., Валесян С.Ш., Мурадян Н.С.

Ключевые слова: стеклопласт, трубчатый элемент, крутящий момент, внутреннее гидростатическое давление, прочность, сопротивление деформированию, несущая способность.

Karapetyan K.A., Valesyan S.Sh., Muradyan N.S.

Dependence of deformability and destruction of glass fiber pipes from initial torsion under the action of internal pressure

Keywords: glass-plastic, tubular element, twisting moment, inner hydrostatic pressure, strength, resistance to deformation, load-carrying capability.

The research results of the resistance to the deformation and destruction of fiber glass-plastic tubular elements with the reinforcement angle $\varphi=0^0$ (the direction of glass-fiber warp and the tube axis are coincided) subjected to the complex loading of twisting moment and inner hydrostatic pressure are brought and discussed.
The following is determined that the increase of the twisting moment rate acting during the testing constantly is led to the decrease of resistance to destruction with valuable damping speed for glass-plastic tubes subjected to inner hydrostatic pressure.
It is detected that during the loading by inner hydrostatic pressure for tubes subjected to constant twisting moment, shear and longitudinal strains along with the basic radial strain are appearing and developing.
The characteristic properties of the resistance to the deformation and destruction of fiber glass-plastic tubes subjected to the consequent loading by twisting moment and inner hydrostatic pressure for the case of twisting moment applied primarily are discussed.

Կարապետյան Կ.Ա., Վալեսյան Ս.Շ., Մուրադյան Ն.Ս.

Ներքին ճնշման ազդեցության դեպքում ապակեպլաստե խողովակների դեֆորմատիվության և քայքայման կախվածությունը նախնական ոլորումից

Հիմնաբառեր. ապակեպլաստ, խողովակաձև տարր, ոլորող մոմենտ, ներքին հիդրոստատիկ ճնշում, ամրություն, դեֆորմացվելուն դիմադրողականություն, կրողականություն

Բերվում և քննարկվում են զրոյական անկյամբ ամրանավորված գործվածքային ապակեպլաստե խողովակաձև տարրերի (ապակե-թելեգործվածքի հենքի թելիկների և խողովակների առանցքների ուղղությունները համընկնում են, $\varphi=0^0$) դեֆորմացվելուն և քայքայվելուն դիմադրելու ուսումնասիրման արդյունքները նրանց ոլորող մոմենտով և ներքին հիդրոստատիկ ճնշմամբ բարդ բեռնավորման դեպքում: Հաստատված է, որ փորձարկման ընթացքում գործող հաստատուն ոլորող մոմենտի մակարդակի ավելացումը բերում է ապակեպլաստե խողովակների ներքին հիդրոստատիկ ճնշմամբ քայքայվելու դիմադրողականության էապես նվազող արագությամբ փոքրացմանը: Բացահայտված է, որ ներքին հիդրոստատիկ ճնշմամբ բեռնավորման պրոցեսում հաստատուն ոլորող մոմենտի ազդեցության տակ գտնվող խողովակներում առաջանում և զարգանում են հիմնական շառավղային դեֆորմացիաներին ուղեկցող սահքի, ինչպես նաև ընդերկայնական դեֆորմացիաներ: Փորձ է արվում մեկնաբանել գործվածքային ապակեպլաստե խողովակների քայքայվելուն դիմադրելու և դեֆորմացման վարքի դրսևորած առանձնահատկությունները նրանց հաջորդաբար ոլորող մոմենտով և ներքին ճնշմամբ բեռնավորելիս, երբ սկզբում կիրառվում է ոլորող մոմենտը:

Приводятся и обсуждаются результаты исследований сопротивления деформированию и разрушению тканевых стеклопластиковых трубчатых элементов с углом армирования $\varphi=0^0$ (направления основы

стеклоткани и оси трубы совпадают) в условиях сложного нагружения крутящим моментом и внутренним гидростатическим давлением. Установлено, что увеличение уровня постоянно действующего в ходе испытания крутящего момента приводит к уменьшению с существенно затухающей скоростью сопротивления разрушению стеклопластиковых труб при внутреннем гидростатическом давлении. Выявлено, что в процессе нагружения внутренним гидростатическим давлением у труб, находящихся под воздействием постоянного крутящего момента, появляются и развиваются сдвиговые, а также продольные деформации, сопутствующие основным радиальным деформациям. Сделана попытка прокомментировать особенности сопротивления разрушению и деформационного поведения тканевых стеклопластиковых труб, подвергнутых последовательному приложению крутящего момента и внутреннего гидростатического давления в случае, если сначала прикладывается кручение.

Введение. Считается, что исследования механического поведения тонкостенных трубчатых элементов из армированных композитов при двух вариациях нагрузок – растяжение с кручением и сжатие с кручением, являются наиболее актуальными. Это связано с тем, что напряжения, возникающие в таких элементах в реальных условиях эксплуатации довольно успешно можно воссоздать применением соответствующей схемы растягивающих или сжимающих усилий и крутящих моментов [1,2]. При этом, в случае последовательного приложения крутящего момента и осевого растягивающего усилия, если сначала прикладывается кручение, наблюдается слабая тенденция увеличения сопротивления разрушению при растяжении у тканевых стеклопластиковых труб с основой, направленной вдоль продольной оси [3,4].

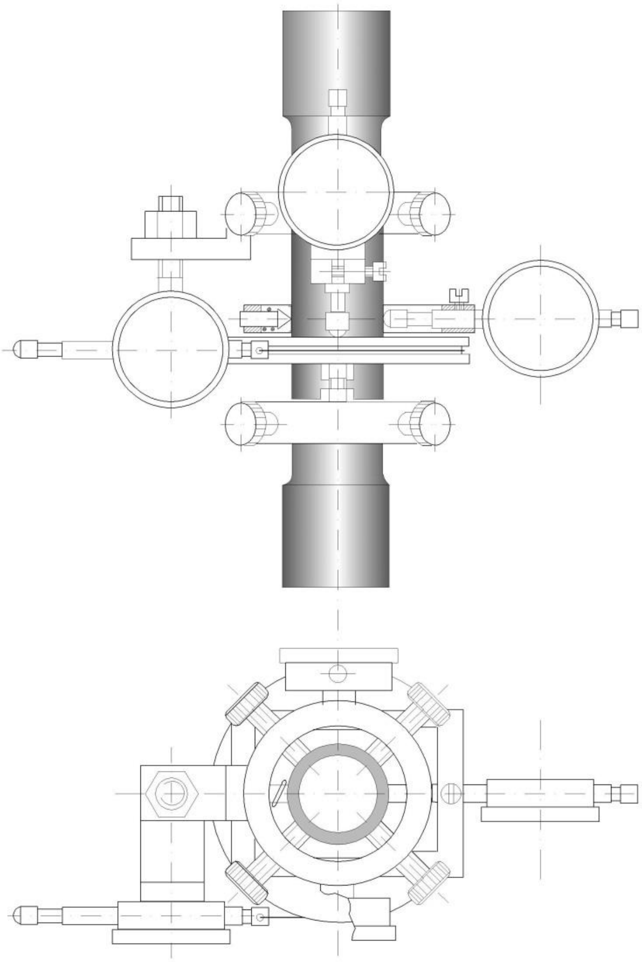
Здесь рассматривается вопрос сопротивления деформированию и разрушению трубчатых элементов из слоистого стеклопластика при раздельном и комбинированном, в условиях сложного нагружения, воздействии крутящего момента и внутреннего гидростатического давления (растяжение в кольцевом направлении).

Экспериментальная часть. В качестве опытных образцов были использованы стеклопластиковые трубы (фиг. 1), которые при помощи шлифования были получены из исходных трубчатых элементов с внутренним диаметром 38 мм, толщиной стенки 2.25 мм и длиной 285 мм. Величины внешнего диаметра и длины рабочей зоны опытных трубчатых образцов составляют 39,7 мм и 60 мм, соответственно. Исходные трубы были изготовлены методом намотки стеклоткани, предварительно пропитанной модифицированной эпоксидной смолой, на металлическую оправку с последующим горячим прессованием по всей боковой поверхности в специальных формах [5]. Была использована стеклоткань полотняного переплетения с основным перекрытием [6] марки Т-23 (ТУ 6-11-231-76) с плотностью (число нитей на 1см^2 ткани) 36:20 (основа : уток), производимая Севанским заводом «Электростеклоизоляция» (Республика Армения). Величина коэффициента армирования стеклопластика составляет μ=0,45 ($\mu_{основа}$=0.29, $\mu_{уток}$=0.16). Направление основы стеклоткани совпадает с направлением продольной оси трубы ($\varphi = 0^0$). Для создания внутреннего гидростатического давления в опытных трубчатых образцах, передаваемого из соответствующего агрегата (фиг. 2) трёхосной разрывной машины ZDe 30, на которой осуществлялись испытания, было сконструировано и изготовлено специальное приспособление (фиг.3).

Ниже приводятся краткие сведения о методике проведения исследований.

Предварительно на одной части из общего количества опытных трубчатых образцов были определены пределы прочности (временного сопротивления) при внутреннем гидростатическом давлении ($\sigma_{\theta\theta}^{B} = 458.2 МПа$) и при простом кручении ($\tau_{\theta Z}^{B} = 36.2 МПа$).

Другая часть опытных образцов-близнецов была нагружена крутящим моментом определённого уровня (соответствующего 0.4; 0.6; 0.8 $\tau^{в}_{\theta z}$), а затем, сохраняя эту нагрузку постоянной, образцы были доведены до разрушения путём применения ступенчато повышающегося внутреннего гидростатического давления. С целью получения сравнительно полной информации о деформационном поведении стеклотканевых трубчатых образцов, каждая ступень увеличивающейся в процессе испытания нагрузки, соответствовала 0.05…0.07 долям сопротивления разрушению образцов при внутреннем гидростатическом давлении. Это позволило получить данные о деформации до уровня кольцевого напряжения, составляющего 0.88-0.90 части от разрушающего его значения.



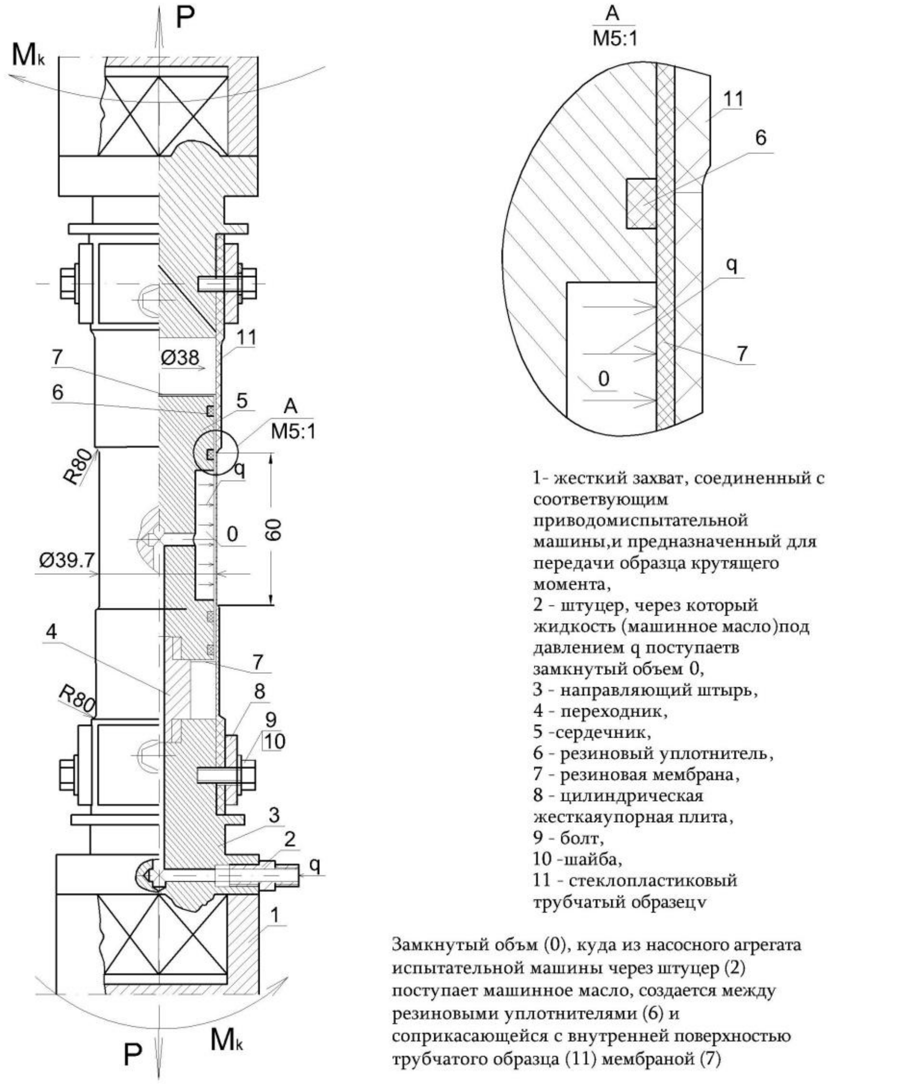
Фиг.1. Чертёж опытного трубчатого образца с установленным приспособлением, предназначенным для измерения радиальных, продольных и сдвиговых деформаций

Выдержка образцов на каждой ступени нагрузки соответствовала лишь времени, необходимому для снятия данных деформаций с индикаторов часового типа. Измерения деформаций осуществлялись с помощью прибора, предоставляющего возможность одновременного снятия отсчётов радиальных, осевых и угловых деформаций (фиг.1 и 2). Продолжительность испытаний опытных образцов, осуществлённых по вышеописанной программе, составляла примерно 6-10 мин. В каждом случае испытаний были использованы данные 4…6 опытных образцов-близнецов, разрушение которых имело место в рабочей зоне.

Фиг.2. Опытный трубчатый образец, установленный на испытательной машине ZDe30

Отметим, что опытные образцы выточены и соответственные экспериментальные исследования проведены через 30 лет после изготовления исходных стеклопластиковых трубчатых элементов.

Результаты и их обсуждение. Данные испытаний на внутреннее гидростатическое давление стеклотканевых труб, предварительно нагружённых крутящим моментом, соответствующим различным уровням относительного касательного напряжения $\tau_{\theta z} / \tau_{\theta z}^{B}$ приведены в таблице и на фиг. 4–6. В упомянутой таблице в числителях представлены абсолютные величины сопротивления разрушению труб в кольцевом направлении $\sigma_{\theta\theta}^{'B}$, а в знаменателях они выражены в процентах. За 100% принято значение предела прочности (временного сопротивления) стеклотканевых труб в кольцевом направлении $\sigma_{\theta\theta}^{B}$, т.е. при $\tau_{\theta z} = 0$.



Фиг.3. Чертеж приспособления, предназначенного для испытания трубчатых образцов на внутреннее гидростатическое давление.

Таблица

Значения $\sigma'^{B}_{\theta\theta}$ (МПа) при уровнях относительного напряжения $\tau_{\theta z} / \tau_{\theta z}^{B}$			
0	0.4	0.6	0.8
$\frac{458.2}{100}$	$\frac{445.6}{97}$	$\frac{350.3}{76}$	$\frac{331.4}{72}$

Согласно данным, приведённым в таблице, влияние предварительно приложенного крутящего момента, соответствующего $0.4\,\tau_{\theta z}^{B}$, на сопротивление разрушению стеклотканевых труб в кольцевом направлении $\sigma_{\theta\theta}^{'B}$, оказывается несущественным.

Из данных этой же таблицы следует, что действующий в процессе испытания постоянный крутящий момент, соответствующий $0.6\tau_{\theta z}^{B}$, приводит к снижению значения $\sigma_{\theta\theta}^{'B}$ примерно на 24% по сравнению со значением предела прочности труб в кольцевом направлении $\sigma_{\theta\theta}^{B}$. Спад величины $\sigma_{\theta\theta}^{'B}$ наблюдается и у опытных образцов, находящихся под постоянным воздействием крутящего момента, соответсвующего $\tau_{\theta z} / \tau_{\theta z}^{B} = 0.8$, однако, величина этого спада по сравнению с зафиксированным спадом в предыдущем случае испытания труб, оказывается несущественной (всего 4%, табл.).

Наблюдения, проведенные в ходе описываемых здесь испытаний, показали, что характер разрушения стеклотканевых труб, подвергнутых ступенчато возрастающему внутреннему гидростатическому давлению в условиях $\tau_{\theta z} = 0.8\tau_{\theta z}^{B}$, соответствует характеру разрушения труб, подобному разрушению от воздействия только крутящего момента, а при низких уровнях $\tau_{\theta z}$ – от воздействия только внутреннего гидростатического давления.

Упомянутый выше спад сопротивления разрушению в кольцевом направлении тканевых стеклопластиковых труб, находящихся под воздействием постоянного крутящего момента, можно объяснить, в основном, продолжающимся, в процессе увеличения внутреннего гидростатического давления, неравномерным развитием внутренних напряжений в армирующем компоненте композита, приводящим тем самым к образованию очагов концентрации напряжений. Здесь подразумевается, что, вследствие предварительного приложения на трубы крутящего момента, происходит начальное искажение взаиморасположения волокон армирующей стеклоткани и это явление находит свое продолжение в процессе повышения внутреннего гидростатического давления в трубах.

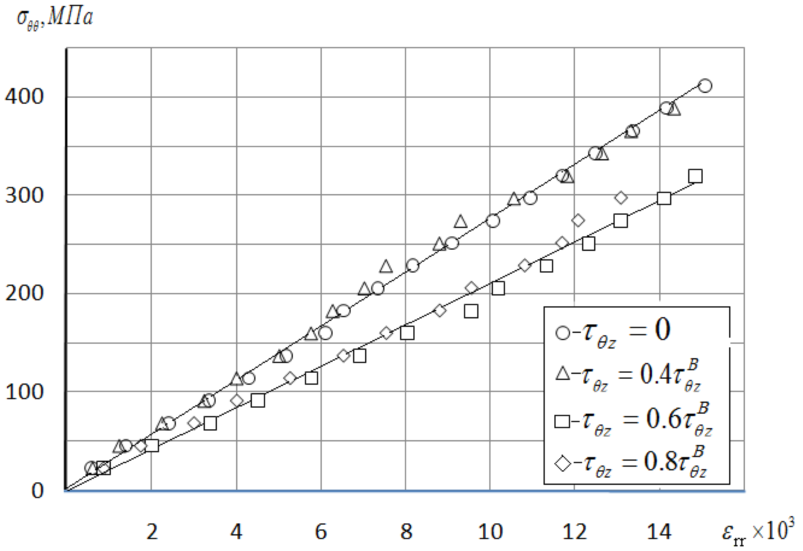
Приведённые на фиг.4 кривые зависимости построены между напряжениями $\sigma_{\theta\theta}$ и деформациями в радиальном направлении ε_{rr}, рассчитанными на основе отсчётов, снятых с показаний соответствующего датчика (поз.14, фиг.1).

Основываясь на данные этой фигуры, замечаем, что связь между растягивающими напряжениями в кольцевом направлении $\sigma_{\theta\theta}$ и радиальными деформациями ε_{rr} для рассматриваемых здесь всех случаев испытаний стеклотканевых труб носит прямолинейный характер, что можно объяснить структурной особенностью волокон утка стеклоткани типа полотняного переплетения с основным перекрытием [6].

В связи со сказанным отметим, что согласно приведённым в работе [7] данным, при осевом растяжении стеклопластиковых труб на основе ткани полотняного переплетения, с основой, направленной вдоль оси, связь между растягивающими напряжениями и продольными деформациями оказывается нелинейной. При этом, указанное явление также объясняется структурной особенностью стеклоткани типа полотняного переплетения с основным перекрытием [6], а именно, технологически регулярно искривленностью волокон основы ткани.

Сравнение данных фиг.4 показывает, что при одном и том же уровне напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ величины деформаций ε_{rr} стеклотканевых труб, испытанных при $\tau_{\theta Z} = 0$ и $\tau_{\theta Z} = 0,4\tau_{\theta Z}^{B} = \text{const}$, мало отличаются друг от друга. Подобное указанной закономерность наблюдается и в случаях аналогичных испытаний труб, осуществлённых в условиях $\tau_{\theta Z} = 0,6\tau_{\theta Z}^{B} = \text{const}$ и $\tau_{\theta Z} = 0,8\tau_{\theta Z}^{B} = \text{const}$ (фиг. 4). При этом, в указанных последних случаях испытаний при одном и том же уровне напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ значения деформаций ε_{rr} оказываются на 30-35% большими по сравнению с одноименными деформациями, полученными в отмеченных выше первых двух случаях испытания стеклотканевых труб.

Рассмотрим поведение деформаций сдвига $\gamma_{\theta Z}$, сопровождающее основным радиальным деформациям ε_{rr}, в процессе нагружения стеклотканевых труб внутренним гидростатическим давлением в условиях постоянно действующего крутящего момента M_K различных уровней. Отметим, что в случае M_K деформации сдвига $\gamma_{\theta Z}$ у труб не наблюдаются.



Фиг. 4. Кривые деформирования в радиальном направлении стеклотканевых труб, подвергнутых внутреннему гидростатическому давлению в условиях отсутствия или наличия постоянно действующего крутящего момента

Как показывают наблюдения, повышение в процессе испытания уровня внутреннего гидростатического давления приводит к развитию с возрастающей скоростью, сдвиговых деформаций $\gamma_{\theta Z}$ и оно тем интенсивнее, чем больше величина крутящего момента, предварительно приложенного к стеклотканевому трубчатому образцу (фиг.5).

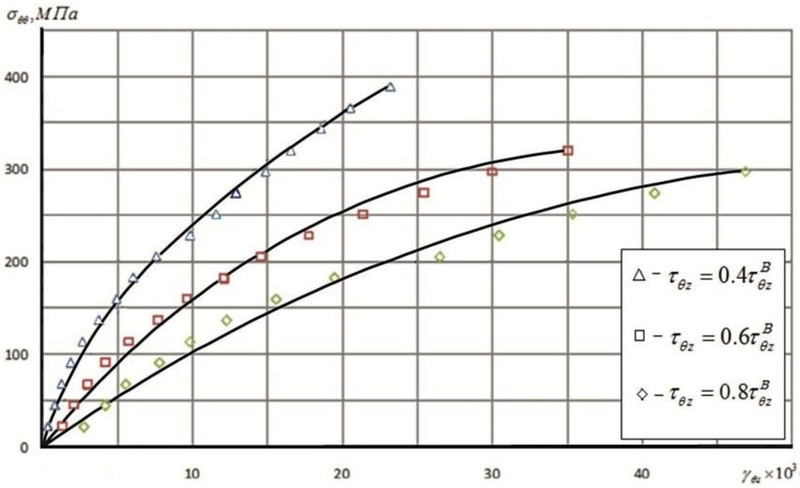
Появление и развитие в процессе нагружения внутренним гидростатическим давлением, деформаций сдвига стеклотканевых труб, находящихся под воздействием постоянно действующего крутящего момента, обусловлено, в основном, проявляющимися в течение этого процесса сдвиговыми деформациями ползучести. При этом, предполагается, что пошаговое повышение внутреннего давления может существенным образом повысить податливость труб относительно сдвиговых деформаций.
Здесь уместно отметить приведённые ниже данные, полученные в результате экспериментального исследования ползучести при сдвиге тканевых тонкостенных стеклопластиковых труб с основой, направленной вдоль оси, осуществлённого в возрасте (время, отсчитываемое после изготовления образцов) 12 лет [8]. В этих экспериментах в качестве опытных образцов были использованы трубы, близнецы которых, в дальнейшем (в возрасте 30 лет) служили исходными элементами, из которых методом шлифования были получены опытные образцы, применяемые при проведении рассматриваемых в данной работе исследований.

Согласно данным работы [8], величина сдвиговых деформаций ползучести труб через 10 мин. после приложения крутящего момента M_K, составляющего 0.4, 0.6 и 0.7 доли от разрушающего момента M_P, достигает до значения, примерно, $4x10^{-3}$, $13x10^{-3}$ и $20x10^{-3}$, соответственно. А по данным, приведённым на фиг.5, в процессе повышения внутреннего давления, продолжающемся 6-10 мин., приобретённое трубами максимальное значение деформации сдвига $\gamma_{\theta Z}$, в случаях их нахождения под воздействием крутящего момента, составляющего 0.4, 0.6 и 0.8 доли от разрушающего момента, достигает величин $23x10^{-3}$, $35x10^{-3}$ и $47x10^{-3}$, соответственно.

Обсудим поведение продольных деформаций , сопровождающих основным радиальным деформациям ε_{rr}, тканевых стеклопластиковых труб в процессе их испытания по рассматриваемой здесь программе.

По данным фиг.6, в случае одноосного внутреннего давления ($\tau_{\theta Z} = 0$), увеличение напряжения в кольцевом направлении до величины $\sigma_{\theta\vartheta} = 205.7$ МПа (в этом случае $\sigma_{\theta\theta} / \sigma^{B}_{\theta\theta} \approx 0,45$) приводит к монотонному укорочению стеклопластиковых труб. Продольная деформация при этом достигает величины $\varepsilon_{ZZ} \approx 0,63x10^{-3}$. При дальнейшем увеличении $\sigma_{\theta\vartheta}$ до уровня 411.4 МПа наблюдается удлинение труб, достигая до $\varepsilon_{ZZ} \approx 0,81x10^{-3}$.

Качественно аналогичное вышеуказанному явление наблюдается и в процессе нагружения труб внутренним гидростатическим давлением при $\tau_{\theta Z} = 0,4\tau^{B}_{\theta Z} = \text{const}$ и при $\tau_{\theta Z} = 0$, $6\tau^{B}_{\theta Z} = c\ o$ (фиг. 6). В этих случаях, однако, максимальное укорочение труб, составляющее соответственно $\varepsilon_{ZZ} \approx 0,13x10^{-3}$ и $\varepsilon_{ZZ} \approx 0,04x10^{-3}$, наблюдается при сравнительно низких уровнях напряжения в кольцевом направлении:



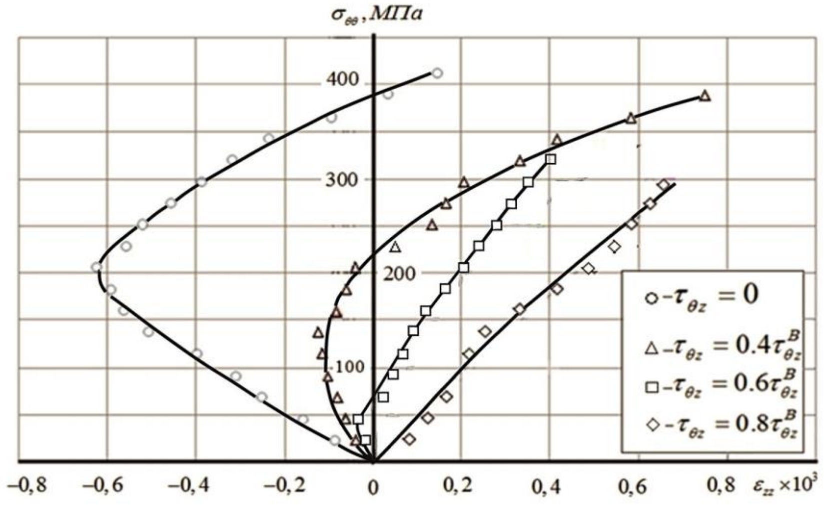
Фиг.5. Кривые сдвиговых деформирмаций стеклотканевых труб, подвергнутых внутреннему гидростатическому давлению в условиях постоянно действующего крутящего момента

$\sigma_{\theta\theta}=137.1$ МПа ($\sigma_{\theta\theta}/\sigma^{B'}_{\theta\theta}\approx 0.31$)– в вышеуказанном первом случае испытания и $\sigma_{\theta\theta}=45.7$ МПа ($\sigma_{\theta\theta}/\sigma^{B'}_{\theta\theta}\approx 0.13$) – во втором случае. В процессе дальнейшего увеличения кольцевого напряжения до значения $\sigma_{\theta\theta}=338.5$ МПа, в случае испытания труб в условиях $\tau_{\theta Z}=0,4\tau^{B}_{\theta Z}$, и до $\sigma_{\theta\theta}=319.3$ МПа – при $\tau_{\theta Z}=0,6\tau^{B}_{\theta Z}$, наблюдается монотонное удлинение стеклотканевых труб, достигая до значения $\varepsilon_{ZZ}\approx 0.88x10^{-3}$ и $\varepsilon_{ZZ}\approx 0.45x10^{-3}$, соответственно.

При пошаговом нагружении внутренним гидростатическим давлением труб, находящихся под воздействием крутящего момента, соответствующем $0.8\tau^{\mathrm{B}}_{\theta Z}$, наблюдается практически линейное их удлинение (фиг.6).

Описанному выше поведению продольных деформаций, сопутствующих основным радиальным деформациям тканевых стеклопластиковых труб с основой, направленной вдоль оси, можно дать изложенное ниже объяснение.

Деформации в продольном направлении стеклотканевых труб, подвергнутых только внутреннему гидростатическому давлению ($\tau_{\theta Z}=0$), складываются, в основном, из слагаемых, образовавшихся в результате параллельно развивающихся в ходе нагружения процессов приобретения трубами некоторой бочкообразной формы и выпрямления технологически регулярно искривленных волокон основы стекло-ткани. При этом, в начальный период процесса повышения внутреннего гидростатического давления в деформационном поведении в продольном направлении доминирующую роль играет приобретение трубами бочкообразной формы, приводящей к их укорочению. В ходе дальнейшего повышения гидростатического давления фактор выпрямления технологически регулярно искривленных волокон основы вязки стек-лоткани начинает все больше превалировать над фактором приобретения трубами бочкообразной формы, в результате чего появляется и развивается с возрастающей скоростью процесс удлинения труб.



Фиг.6. Кривые деформирования в продольном направлении стеклотканевых труб, подвергнутых внутреннему гидростатическому давлению в условиях отсутствия или наличия постоянно действующего крутящего момента

В случае же рассматриваемого здесь сложного нагружения на деформационное поведение в продольном направлении, кроме упомянутых выше факторов, существенную роль могут сыграть и деформации сдвига, возникающие в результате предварительного нагружения труб постоянным крутящим моментом, а также сдвиговая ползучесть, имевшая место в процессе по-шагового повышения внутреннего гидростатического давления, продолжающегося, как уже отмечалось, 6-10 мин.

Соотношением величин отмеченных выше слагаемых деформаций и обусловлен характер деформирования в продольном направлении (подразумевается предварительное укорочение и последующее удлинение или только удлинение) стеклотканевых труб с нулевым углом армирования, подвергнутых сложному нагружению крутящим моментом и внутренним гидростатическим давлением по рассматриваемой здесь программе.

Следует особенно обратить внимание на характер деформирования в продольном направлении тканевых стеклопластиковых труб с углом армирования $\varphi=0^0$, появляющийся в процессе их нагружения только внутренним гидростатическим давлением. В процессе такого нагружения, как уже отмечалось, трубы сначала подвергаются укорочению, а затем - удлинению. При этом, изменение направления деформирования происходит при уровне кольцевого напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, не превышающего 0,45 доли от предела прочности труб в кольцевом направлении $\sigma_{\theta\theta}^{\text{в}}$. Сказанное указывает на то, что в случае эксплуатации упомянутых выше композитных трубчатых элементов в условиях повторно-циклического (пульсирующего) внутреннего гидростатического давления, кроме циклических радиальных деформаций, возникают и продольные деформации с циклически изменяющимся направлением деформирования.

Вероятно, наблюдаемый эффект укорочение-удлинение тонкостенных труб при пульсирующем внутреннем давлении присущ аналогичным эффектам, наблюдаемым в природных тонкостенных сосудах, испытывающих внутреннее пульсирующее давление.

Заключение. Образующиеся в технологическом процессе изготовления остаточные и появляющиеся при эксплуатации непредусмотренные касательные напряжения $\tau_{\theta Z}$, если сумма их величин не превышает 0,4 доли от значения временного сопротивления при сдвиге $\tau^{B}_{\theta Z}$, практически не могут повлиять на несущую способность тонкостенных трубчатых элементов из тканевых пластиков с углом армирования $\varphi=0^0$, эксплуатирующихся в условиях постоянно действующего внутреннего гидростатического давления

В случае эксплуатации в условиях действия пульсирующего внутреннего гидростатического давления у трубчатых изделий, подобных указанным выше элементам (напр., балоны из композитов или металлические, усиленные тканевыми пластиками), кроме циклических радиальных деформаций могут возникнуть и продольные деформации с циклически изменяющимся направлением. Это означает, что матрица композитного материала, являющаяся самым уязвимым его звеном, в упомянутом случае эксплуатации будет находиться в условиях циклически изменяющегося сложного напряжённо-деформированного состояния, а в некоторых случаях и знакопеременного. Одновременно известно, что в большинстве случаев, именно разрушение матрицы, а не разрушение армирующих волокон является причиной преждевременного выхода из строя изделий из композитов [9].

Для обеспечения облегчённых условий эксплуатации упомянутых выше трубчатых изделий, а также долговечности их безотказной работы, целесообразно ставить ограничение на величину внутреннего рабочего давления например, соблюдать условие $\sigma_{\theta\theta} \leq 0,45\sigma^{B}_{\theta\theta}$, т.е. до уровня $\sigma_{\theta\theta}$, при котором изделия пока что подвергаются только циклическому укорочению (фиг.6).

Сведение к минимуму отрицательных явлений, приводящих к скорому выходу из строя тонкостенных трубчатых изделий из тканевых пластиков, эксплуатирующихся в условиях пульсирующего внутреннего гидростатического давления, можно достичь и конструктивным методом решения задачи. А именно, для таких элементов целесообразно предусмотрение как кольцевых, так и симметрично, относительно оси, расположенных рёбер жёсткости таким образом, чтобы обеспечивалось максимальное сопротивление относительно возникновения как радиальных, так и продольных деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шнейдерович Р.М. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружениях. М.: Машиностросние, 1968. 343с. (Shneyderovich R.M. Strength at the static and repeated-static loading. M.: Mashinostroenie, 1968, 343p.) (in Russian)
2. Лимонов В.А., Разин А.Ф., Микельсон М.Я. Прочность и сопротивление усталости композитов на основе ткани при комбинированном воздействии статических напряжений сдвига и циклических напряжений сжатия.//Мех. композит. мат. 1992, №3, с.332-340. (Limonov V.A., Razin A.F., Mikelson M.Ja. Strength and fatigue strength of composites based on the fabric subjected to the

combined static stresses of shear and cyclic stresses of compression. // Mech of composite materials. 1992, №3. С. 332-340.)(in Russian)

3. Карапетян К.А., Саркисян Н.Е., Хачикян А.Г. Прочность и деформативность слоистых пластиков при сложном нарушении.// Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 1998, T.LI, №2. С.127-132. (Karapetyan K.A., Sarkisyan N.E., Hachikyan A.G. Strength and deformability of layered plastics subjected to complex loading. // Proc. of NAS RA and SEUA. Tech. Sci. Ser. 1998. vol. LI. №2. P. 127-132.)(in Russian)
4. Karapetyan K.A. The influence of axial tension on the strength, creeping deformations and dissipative proprieties of glass reinforced tubes under the shear conditions.// Proc. of VI International conference. «The problems of dynamics of interaction of deformable media». September 21-26, Goris-Stepanakert: 2008. P. 232-236,
5. Мартиросян М.М. Получение прессованных тонкостенных труб из стеклопластиков.// Промышленность Армении. 1971. №10. С.56-57. (Martirosyan M.M. Manufacturing of the pressed thin-walled tubes from glass-plastic. // Promishlennost Armenia. 1971. №10. P. 56-57.) (in Russian)
6. Мартынова А.А., Ятченко О.Ф., Васильев А.В. Технология изготовления тканей. М.: Академия, 2007, 304с. (Martinova A.A., Jatchenko O.F., Vasilev A.V. Technology of fabric manufacture. M.: Academia, 2007. 304p.) (in Russian)
7. Карапетян К.А. Влияние начальной разориентации армирования на механическое поведение слоистых стеклопластиков при статических нагружениях. // Докл. НАН Армении. 2005. Т.10.5. №3. с. 249-255. (Karapetyan K.A. Influence of the initial reinforcement disorientation on the mechanical behavior of layered glass-plastics subjected to static loading. // Reports of NAS RA. 2005. vol. 105. №3. P. 249-255.) (in Russian)
8. Карапетян К.А., Хачикян А.Г. Ползучесть тонкостенных стеклопластиковых труб, подверженных кручению. //Изв. НАН Армении Механика. 2000. Т.53. №2. С. 66-70. (Karapetyan K.A., Hachikyan A.G. Creepage of thin-walled glass-plastic tubes subjected to torsion. // Proc. of NAS RA. Mechanics. 2000. vol. 53. №2. P. 66-70.)(in Russian)
9. Hahn H.T. A Note on Determination of the Shear Stress- Strin Response of Unidirectional Composites // J.Compos.Marer. 1973. №7. P.383-386.

Сведения об авторах:

Карапетян Корюн Ашотович – д.т.н., зав. лабораторией экспериментальных исследований Института механики НАН Армении, Ереван, Армения,
Тел.: (+374 10) 524852; **E-mail:** koryan@mechins.sci.am

Валесян Сона Шантовна – к. т.н., научн. сотр. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения; **E-mail:** svalesyan@yahoo.com

Мурадян Нарине Сергеевна – инженер Ин-та механики НАН Армении, Ереван, Армения. **Тел.:** (+374 10) 527831; **E-mail:** narine-muradyan@mail.ru

Поступила в редакцию 20. 12. 2018 г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №1, 2019 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С ОДИНАКОВЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ УСИЛИЯМИ

Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, балка, устойчивость, начально неоднородное напряжённое состояние, критическое напряжение.

Movsisyan L.A.
The stability of the plate with equality critical stresses

Key words: rectangulare plate, nonhomogeneous inital stressed state, critical stress.

On an initially homogeneous stress state, existing the various cases of boundary conditions for which the same critical forces are obtained. However, in the article is considered nonhomogeneous initial stress states for which the critical efforts are already different.

Մովսիսյան Լ.Ա.
Նույն կրիտիկական ճիգերով սալի կայունության մասին

Հիմնաբառեր՝ Ուղղանկյուն սալ, հեծան, կայունություն, նախնական անհամասեռ լարվածային վիճակ, կրիտիկական լարում

Համասեռ նախնական լարվածային վիճակում կան եզրային պայմանների տարբեր դեպքեր, երբ ստացվում է նույն կրիտիկական ճիգը: Դիտարկվում է անհամասեռ նախնական լարվածային վիճակ, երբ տարբեր են ստացվում կրիտիկական ճիգերը:

При начально однородном напряжённом состоянии существуют различные случаи граничных условий, для которых получаются одинаковые критические усилия. Рассматриваются неоднородные начальные напряжённые состояния, для которых уже критические усилия различные.

Введение. Как известно, в задачах устойчивости балки при однородном сжатии имеется пара случаев граничных условий, когда критические силы получаются одинаковыми. Такая же картина имеет место и для устойчивости пластинки. Однако, при неоднородном начальном напряжённом состоянии различными будут критические усилия. Приводится решение такой задачи для прямоугольной пластинки и для балки. В [1] подобная задача рассматривалась для балки и цилиндрической оболочки.

1. Постановка задачи. Уравнение устойчивости пластинки, сжатой в одном направлении

$$D\Delta^2 w + \frac{\partial}{\partial x}\left(T_1^0 \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Обозначения общепринятые, поэтому нет необходимости их приводить, укажем только, что сжимающееe усилие T_1^0 будем считать зависящим от координаты x_1. Изучать будем устойчивость прямоугольной пластинки для двух случаев граничных условий. Во всех случаях края $y = 0$ и $y = b$ свободно опёрты $\left(w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \right)$, а на других сторонах $x = 0$ и $x = a^2$ – два случая:

a) свободное опирание $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ (1.2)

b) скользящий контакт $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$ (1.3)

Первый – популярный случай свободного опирания, а второй – так называемая «плавающая заделка» [2].
Для первого случая функция прогиба, удовлетворяющая всем граничным условиям, будет:

$$w = \sin \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{mn}{a}, \ \ \mu_n = \frac{mn}{b} \ , \tag{1.4}$$

для второго случая –

$$w = \sin \mu_n y \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos \lambda_m x \, . \tag{1.5}$$

Если искомое T_1^0 также представить в виде ряда

$$T_1^0 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \lambda_m x \, , \tag{1.6}$$

то, учитывая (1.4) и (1.5), для неизвестных f_m получится однородная система

$$\begin{gathered}\left[D\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2 - \left(a_0 \pm a_{2m}\right)\lambda_m^2 \right] f_m - \\ -\frac{1}{2}\lambda_m \left[\sum_{q=1}^{m-1} \left(a_{m-q} \pm a_{m+q}\right)\lambda_q f_q \right] + \left[\sum_{q=m+1}^{\infty} \left(a_{q-m} \pm a_{m+q}\right)\lambda_q f_q \right] = 0\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь знак «+» относится к случаю (1.4), а «–» – к случаю (1.5).

Критическая нагрузка определится из условия разрешимости системы (1.7).

В качестве примера рассмотрим такую задачу. Пластинка равномерно сжата у одного из концов, а края $y = 0$ и $y = b$ свободные:

$T_1^0 = -P, \ \ 0 \le x \le x_0, \ T_1^0 = 0$ при $x_0 < x \le a$.

$$a_0 = -P\frac{s_0}{a}, \quad a_m = -P\frac{2}{m\pi}\sin\lambda_m x_0 \tag{1.8}$$

Минимальное значение критического усилия равномерно сжатой квадратичной пластинки $(a = b)$ –

$$P_{\text{кр}}^{(0)} = 4D\frac{\pi^2}{a^2} \tag{1.9}$$

Вот значения относительного критического сжатия: $P_{\text{кр}} \Big/ P_{\text{кр}}^{(0)}$ – во втором приближении, соответственно, для $\frac{x_0}{a} = 0,25$ и $0,75$.

$$\begin{aligned} &2.25;\ \ 1.61\ \ (+) \\ &1.15;\ \ 1.08\ \ (-) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Первая строка относится к (1.5), а вторая – к (1.6). Как и можно было ожидать, для шарнирно закреплённых концов критическое давление больше, чем для случая со свободными концами.

2. Рассмотрим теперь подобную задачу для балки. Сосредоточенные силы (P_0) действуют симметрично относительно середины длины балки. При этом, рассмотрим два случая:

a) направлены друг к другу

b) направлены к опорам.

Края балки в продольном направлении свободны в первом случае и заделаны во втором.

Если выражение продольной силы представить в виде

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{\pi}{l}, \tag{2.1}$$

то для первого случая коэффициентами a_n будут:

$$a_0 = -P_0\left(1 - \frac{2x_0}{l}\right), \quad a_m = -\frac{2P}{m\pi}\left[\left(-1\right)^{m+1} - 1\right]\sin\lambda_m x_0 \tag{2.2}$$

и для второго случая –

$$a_0 = -\frac{2x_0}{l}P_0, \quad a_m = -\frac{2P_0}{m\pi}\left[1 + \left(-1\right)^m\right]\sin\lambda_m x_0. \tag{2.3}$$

Для свободно опёртой балки

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\lambda_m x, \tag{2.4}$$

а для случая скользящего контакта –

$$W=\sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos\lambda_m x\,. \tag{2.5}$$

Здесь «+» относится к (2.4), а «-» – к (2.5).

Критические силы определятся из условия разрешимости системы

$$\begin{aligned}&\left[EJ\lambda_m^3+\left(a_0\pm\frac{1}{2}a_{2m}\right)\lambda_m\right]f_m+\\&+\frac{1}{2}\left\{\sum_{q=1}^{m-1}\left(a_{m-q}\pm a_{m+q}\right)\lambda_q f_q+\sum_{q=m+1}^{\infty}\left(a_{q-m}\pm a_{q+m}\right)\lambda_q f_q\right\}=0\end{aligned}, \tag{2.6}$$

когда силы направлены друг к другу, а вторые – наоборот.

Вот значения относительных критических сил $\left(\lambda=P_0\big/P_{\text{кр}},\ P_{\text{кр}}=EJ\pi^2\big/l^2\right)$

$x_0\ /\ l$	0.125	0.25
+	2.02:1.95	3.75:1.11
–	1.04:14.14	1.22:3.88

В каждой клетке первые числа относятся к (2.2), а вторые – к (2.3).

Как видно из приведённой таблицы, если для случая свободного опирания с уменьшением расстояния между силами, в случае (2.2) критические силы увеличиваются, а в (2.3) уменьшаются, то для случая следящего контакта, наоборот.

Заключение. Как известно, в задачах устойчивости для балки и пластин имеются пары граничных условий, когда при однородном начальном напряжённом состоянии одинаковыми получаются критические усилия. Однако, если начальное состояние неоднородное, то это не имеет место. Приводятся такие задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. К устойчивости вязкоупругих балок и цилиндрических оболочек. //Известия НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №4. С.38-45.
2. Вибрация в технике. Т.1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович – д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН

Адрес: 0019, Ереван-19, Пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** 56-82-01

Поступила в редакцию 19. 12.2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №1, 2019 Механика
УДК 539.3

ВОЛНЫ В УПРУГОМ СЛОЕ С ИНЕРЦИОННОЙ МАССОЙ НА ГРАНИЦЕ

Саркисян А.С., Саркисян С.В.

Ключевые слова: волноводы; фазовая скорость; дисперсионное уравнение; инерционная масса; существование.

Sarkisyan A.S., Sarkisyan S.V.

Waves in an elastic layer with inertial mass on the border

Key words: waveguides; phase velocity; dispersion equation; inertial mass;existence.

The paper proposes a model for studying the influence of a concentrated mass distributed along the plane of an elastic layer on the characteristics of an elastic waveguide. Dispersion equations are obtained for the phase velocity of symmetric and antisymmetric vibrations. The limiting cases are considered and numerical calculations are given for the phase velocity of the wave. The influence of a concentrated mass on the velocity of a surface wave is shown.

Սարգսյան Ա.Ս., Սարգսյան Ս.Վ.

Ալիքները իներցիոն զանգվածով բաշխված եզրով առաձգական շերտում

Հիմնաբառեր. ալիքատարներ; փուլային արագություն; դիսպերսիոն հավասարում; իներցիոն զանգված;գոյություն:

Աշխատանքում առաջարկված է մի մոդել, որի միջոցով կարելի է հետազոտել առաձգական շերտի հարթությամբ բաշխված կենտրոնացված զանգվածի ազդեցությունը առաձգական ալիքատարի բնութագրիչների վրա:Համաչափ և շեղհամաչափ տատանումների փուլային արագությունների համար ստացված են դիսպերսիոն հավասարումներ:Դիտարկված են սահմանային դեպքեր և կատարված են թվային հաշվարկներ ալիքի փուլային արագության համար: Ցույց է տրված կենտրոնացված զանգվածի ազդեցությունը մակերևութային ալիքի արագության վրա:

В работе предлагается модель для исследования влияния сосредоточенной массы, распределённой по плоскости упругого слоя, на характеристики упругого волновода. Для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний получены дисперсионные уравнения. Рассмотрены предельные случаи и приведены числовые расчёты для фазовой скорости волны. Показано влияние сосредоточенной массы на скорость поверхностной волны.

Введение. При изучении процесса распространения волн в упругих телах особую роль играет выбор граничных условий. В основном, принимается одно из предположений: границы тела жёстко закреплены или границы тела свободны. Однако, на практике существует множество ситуаций, когда нельзя пренебречь реальными свойствами сред, окружающих тело [1].

Распространению поверхностных волн с неклассическими граничными условиями посвящены многочисленные исследования [1-7,9-13,17] и др. Волны Рэлея в изотропном упругом полупространстве с импендансными граничными условиями были исследованы в работах [14-16]. В работе [4] вместо граничных условий свободной поверхности для упругого изотропного полупространства рассмотрены два варианта усложнённых граничных условий. Установлены условия, при которых поверхностная волна не может существовать.

Задачам о распространении волн в изотропном слое с упруго закреплёнными границами посвящены работы [17-22]. Периодические волны в упругом слое, когда на границах слоя нормальное и касательное напряжения стесненны, исследовано в [23,24], где показано влияние коэффициента стеснённости на фазовую скорость симметричных и антисимметричных колебаний слоя.

В настоящей работе предлагается модель для исследования влияния сосредоточенной массы, распределённой по плоскости упругого слоя, на характеристики упругого волновода. Для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний получены дисперсионные уравнения. Рассмотрены предельные случаи и приведены числовые расчёты для фазовой скорости волны. Показано влияние сосредоточенной массы на скорость поверхностной волны.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругий изотропный слой толщиной *2h*. Слой в прямоугольной декартовой системе координат $0xyz$ занимает область $L=\{(x,y,z);\ x,y\in(-\infty,\infty), z\in[-h,h]\ \}$. В этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью *c*. Для плоско-напряжённого состояния бесконечного упругого слоя ($\vec{u}\left(u(x,z,t),0,w(x,z,t)\right)$, где *u*, *w* – проекции упругих перемещений на координатные оси *x, z*) при помощи преобразований

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial z},\qquad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.1}$$

динамические уравнения теории упругости приводятся к автономным волновым уравнениям относительно динамических потенциалов $\varphi(x,z,t)$ и $\psi(x,z,t)$ [6]:

$$c_1^2\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\quad c_2^2\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\quad \Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{1.2}$$

При математическом моделировании физических явлений важнейшую роль играет выбор граничных условий. В основном, при изучении процесса распространения волн в упругих телах принимается одно из предположений: границы тела жёстко закреплены (условия Дирихле) или границы тела свободны (условия Неймана). Однако, на практике существует множество ситуаций, когда нельзя пренебречь реальными свойствами сред, окружающих тело [1].

Здесь примем, что на плоскостях $z=\pm h$, ограничивающих слой, заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{zz}=0,\ \sigma_{zx}=\mp m_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

где $m_0>0$ – сосредоточенная (инерционная) масса. Второе граничное условие (1.3) может появиться вследствие либо наличия тонкого слоя из материала с отличными от материала слоя характеристиками [5], либо наличия сосредоточенной массы, распределённой по плоскостям $z=\pm h$. При $m_0=0$ граничные условия (1.3) соответствуют случаю свободных границ, а при $m_0 \to \infty$ получаем смешанные граничные условия.

С использованием закона Гука и преобразования (1.1) граничные условия (1.3) при $z = \pm h$ приводятся к виду:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 0, \\
&2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \pm \frac{m_0}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

2. Решение задачи. Поставим следующую задачу. Найти решения двумерных волновых уравнений (1.2), удовлетворяющих граничным условиям (1.4).

Решения уравнений (1.2) можно представить в виде [6]:

$$
\begin{aligned}
&\varphi = \left(A\,\mathrm{sh}(\nu_1 z) + B\,\mathrm{ch}(\nu_1 z)\right)\exp ik(x - ct), \\
&\psi = \left(C\,\mathrm{sh}(\nu_2 z) + D\,\mathrm{ch}(\nu_2 z)\right)\exp ik(x - ct),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где *A, B, C* и *D* – произвольные постоянные, λ и μ – упругие постоянные

$$\nu_1^2 = k^2(1-\eta\theta), \quad \nu_2^2 = k^2(1-\eta), \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \theta = \frac{c_2^2}{c_1^2},$$

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2} = \frac{c^2}{c_2^2}.$$

Любое решение для u и w может быть представлено, как линейная комбинация четырёх интегралов, связанных с корнями характеристического уравнения $\nu_i \left(i = \overline{1,4}\right)$.

Подставляя (2.1) в граничные условия (1.4), получим систему четырёх линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Приравнивание определителя этой системы уравнений нулю приводит к характеристическому уравнению, из которого при заданных значениях ρ, μ, λ, α, β, m_0 и ω можно найти фазовую скорость *c*. Упростим задачу, рассмотрев две системы частных решений:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 = B\,\mathrm{ch}(\nu_1 z)\exp ik(x - ct), \\
&\psi_1 = C\,\mathrm{sh}(\nu_2 z)\exp ik(x - ct)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\varphi_2 = A\,\mathrm{sh}(\nu_1 z)\exp ik(x - ct), \\
&\psi_2 = D\,\mathrm{ch}(\nu_2 z)\exp ik(x - ct).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Решение (2.2) соответствует симметричному виду колебаний, а решение (2.3) – антисимметричному виду колебаний. При (2.2) перемещение u, напряжение σ_{zz}

симметричны; перемещение w, напряжение σ_{zx} антисимметричны относительно плоскости $z = 0$; а при (2.3) перемещение u, напряжение σ_{zz} антисимметричны; перемещение w, напряжение σ_{zx} симметричны относительно плоскости $z = 0$ [6].

Подставляя (2.2) в граничные условия (1.4) при $z = h$ для симметричных мод получим следующее дисперсионное уравнение относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости η:

$$(2-\eta)^2 \operatorname{th}\left(H\sqrt{1-\eta}\right)-4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\operatorname{th}\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)+\frac{\alpha}{H}\eta\sqrt{1-\eta}=0, \tag{2.4}$$

$H = kh,\ \alpha = m_0\omega^2 h\mu^{-1}.$

Уравнение (2.4) при $\alpha = 0$ совпадает с дисперсионным уравнением Рэлея–Лэмба [6]. Для антисимметричных колебаний, удовлетворяя граничным условиям (1.4), относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости η получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(2-\eta)^2 \operatorname{cth}\left(H\sqrt{1-\eta}\right)-4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\operatorname{cth}\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)+\frac{\alpha}{H}\eta\sqrt{1-\eta}=0 \tag{2.5}$$

3. Исследование дисперсионного уравнения и численные результаты.

1) Симметричные колебания

Рассмотрим предельные случаи. Пусть длина волны $l = 2\pi / k$ очень велика по сравнению с толщиной слоя $2h$. В этом случае величины $H\sqrt{1-\eta\theta}$ и $H\sqrt{1-\eta}$ будут малы при конечном значении c. Заменяя гиперболические тангенсы их аргументами, получим:

$$c = 2c_2\sqrt{1-\theta-0.25\alpha H^{-2}} \tag{3.1}$$

Если $\mu = \lambda\ \left(\nu = \dfrac{1}{4}\right)$, то $c_1^2 = 3c_2^2$ и из формулы (3.1) получим:

$$c = c_{ps} \equiv 2c_2\sqrt{\frac{2}{3}\left(1-\frac{3\alpha}{8H^2}\right)}. \tag{3.2}$$

Предположим, что длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя *2h*. Тогда из уравнения (2.4) получим:

$$(2-\eta)^2 - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)} + \frac{\alpha}{H}\eta\sqrt{1-\eta} = 0. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) при $\alpha = 0$ совпадает с классическим уравнением Рэлея [8]. В отличие от уравнения Рэлея, уравнение (3.3) дисперсионное, т.е. фазовая скорость η зависит от волнового числа k. Следует отметить, что аналогичное дисперсионное уравнение получено для задачи Рэлея, когда граница полупространства упруго стеснена либо по направлению нормали, либо по касательному направлению в [4]. В работе [4] также установлены условия, при которых поверхностная волна не может существовать и условия существования поверхностной волны в зависимости от коэффициента, характеризующего стеснение и от длины волны.

Уравнение (3.3) имеет корень $\eta = 0$, которому соответствует тривиальное решение. Следуя работе [4], исключая корень $\eta = 0$, уравнение (3.3) сводится к виду:

$$D(\eta) \equiv \eta - \frac{4(1-\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta}+\sqrt{1-\theta\eta}} + \frac{\alpha}{H}\sqrt{1-\eta} = 0. \tag{3.4}$$

Исследуем свойства функции $D(\eta)$. $D(\eta)$ при $\eta = 0$ и $\eta = 1$ принимает следующие значения:

$$D(0) = -2(1-\theta) + \alpha H^{-1}, \ D(1) = 1.$$

Уравнение (3.4) будет иметь решение в интервале $\eta \in (0,1)$, если $D(0) < 0$. При этом, решение будет единственным, если $\frac{dD}{d\eta} > 0$. Выбирая значения α и H, удовлетворяющие условию $D(0) < 0$, можно получить значения фазовой скорости поверхностной волны. При отсутсвии сосредоточенной массы m_0, как следует из дисперсионного уравнения (3.4), при $\left(\nu = \frac{1}{4}\right)$ получим $c_R \approx 0.9194 c_2$. Наличие сосредоточенной массы и при невыполнении условия $\alpha < 2H(1-\theta)$ приводит к тому, что в слое с данной толщиной поверхностная волна не распространяется. В общем случае симметричных колебаний фазовую скорость c требуется определить из полного дисперсионного уравнения (2.4). Из обсуждения предельных случаев следует, что для первой формы симметричных колебаний фазовая скорость лежит в пределах $c_{ps} \geq c \geq c_{Rs}$ (c_{Rs} − корень дисперсионного уравнения (3.3)).

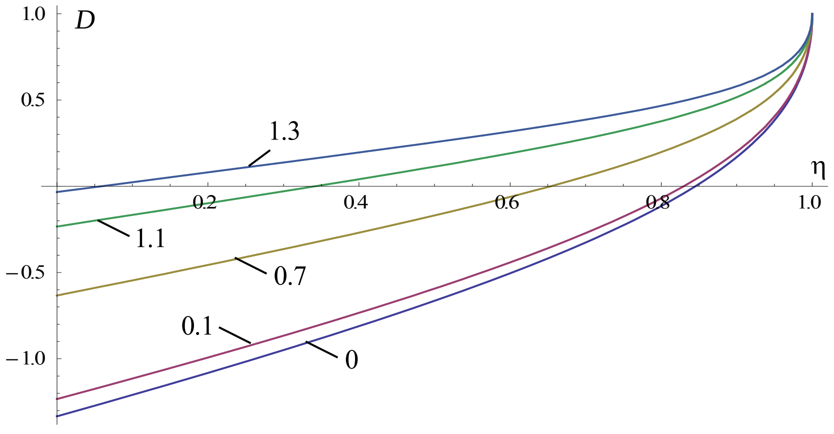
2) Антисимметричные колебания

В предельном случае, когда длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя и при $kh \to \infty$ $c < c_2 < c_1$ уравнение (2.5) сводится к уравнению (3.3). При другом предельном случае из уравнения (2.5) можно определить фазовую скорость волн изгиба для первой формы антисимметричных колебаний.

В табл. 1 приводятся численные результаты, вычисленные по уравнению (3.4) для параметра η, характеризующего квадрат фазовой скорости поверхностной волны в зависимости от параметров α и $H = kh$, удовлетворяющих условию $\alpha < 2H(1-\theta)$ при $\theta = 1/3$. На фиг.1 приводится поведение функции $D(\eta)$ при различных значениях α / H. Численный анализ показывает влияние сосредоточенной массы на скорость поверхностной волны. Увеличение значения сосредоточенной массы, распределённой по плоскостям слоя $z = \pm h$, приводит к тому, что скорость поверхностной волны при заданных значениях толщины слоя уменьшается.

Таблица 1. Значения фазовой скорости поверхностной волны в зависимости от параметров α и $H = kh$.

α/H	η
0	0.8453
0.01	0.8438
0.03	0.8409
0.05	0.8378
0.1	0.8298
0.3	0.7904
0.5	0.7348
0.7	0.6536
1	0.4464
1.1	0.3421
1.3	0.0583



Фиг.1. Поведение функции $D(\eta)$ при различных значениях α/H .

Заключение.

Таким образом, показано влияние сосредоточенной массы, распределённой по плоскости упругого слоя, на характеристики упругого волновода. Для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний получены дисперсионные уравнения. Рассмотрены предельные случаи и приведены числовые расчёты для фазовой скорости волны. Установлено, что в случае симметричных колебаний сосредоточенная масса приводит к тому, что в слое с заданной толщиной, которая находится из условия существования решения дисперсионного уравнения, поверхностная волна не распространяется. Показано, что возрастание значения сосредоточенной массы, распределённой по плоскостям слоя, приводит к убыванию скорости поверхностной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коссович Л.Ю. и др. Распространение волн в упруго-закреплённом изотропном слое //Вестник СамГУ. Естественно-научная сер.: Механика: 2008. № 8/2 (67). – С.78–89. Kossovich L.Y., Mukhomodyarov R.R., Parfenova Y.A. Wave propagation in an elastically restrained isotropic layer. Vestnik of Samara University. Natural Science Series. Mechanics, 2008, № 8/2 (67), pp. 78–89. (in Russian).
2. Мелешко В.В. и др. Упругие волноводы: история и современность // Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51. № 2. – С.86–104. Meleshko V.V., Bondarenko A.A., Dovgiy S.A., Trofimchuk A.N., van Heijst G.J. F. The elastic waveguides: the history and the present-day. // Mathematical Methods and Physico-Mechanical Fields. 2008, vol. 51, № 2, pp. 86–104. (in Russian).
3. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280 с. Vilde M.V., Kaplunov Yu. D., Kossovich L.Yu. Boundary and interface resonance phenomena in elastic bodies. Moscow: Fizmatlit, 2010. (in Russian).
4. Белубекян М.В. Волна Рэлея в случае упруго–стеснённой границы. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С. 3 – 6. Belubekyan M.V. The Rayleigh waves in the case of the elastically restrained boundary.//Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. 2011.V.64. №4.P.3–6 (in Russian).
5. Белубекян В.М., Оганян С.К., Казарян К.Б., Можаровский В.В., Марьина Н.А. Распространение сдвиговых волн в плоском изотропном слое с тонкими покрытиями. //Проблемы физики, математики и техники. 2017. № 4(33), С.40-43. Belubekyan V.M., Ohanyan S.K., Ghazaryan K.B., Mozharovski V.V., Marina N. A. Propagation of shear waves in a plane isotropic layer with thin covers. Problems of Physics, Mathematics and Technics, vol. 4 (33), 2017, pp. 40-43. (in Russian).
6. Miklovitz J. The theory of elastic wave and wavequides / J. Miklovitz. – Amsterdam: North-Holland, 1978. 618 p.
7. Sarkisyan S.V., Jilavyan S.H., Khurshudyan As. Zh. Structural Optimization of an Inhomogeneous Infinite Layer in Problems on Propagation of Periodic Waves. //Mechanics of Composite Materials. 2015. Vol. 51, issue 3, pp. 277-284.
8. Rayleigh J. On waves propagated along the surface of an elastic solid //Proc. Lond. Math.Soc. 1885. V.17. №253, p.4-11.
9. Knowles J.K. A note on surface waves // J. of Geophys. Res. 1966. Vol. 21. № 22. P.5480-5481.
10. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. North-Holland, 1984, 425 p.
11. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача поверхностных волн Рэлея // Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. № 4. С.362-369. Belubekyan V.M., Belubekyan M.V. Three-dimensional Problem of Reyleight Wave Propagation. // NAS RA Repors. 2005. V.105. №4, p.362-369 (in Russian).
12. Ардазишвили Р.В. Трёхмерная волна Рэлея в случае смешанных граничных условий на поверхности полупространства // В сб. научных тр. межд. конф.: «Механика», посв. 70-летию основания НАН Армении. Цахкадзор, 2013, с.74-78. Ardazishvili R.V. Three-dimensional Rayleigh' wave in case of mixed boundary conditions on the surface of half-space //«Mechanics 2013». Proceedings of International School- Conference of Young Scientists dedicated to the 70th of the National Academy of Sciences of Armenia, 1– 4 October, Tsakhkadzor, 2013, p.74-78 (in Russian).
13. Belubekyan M.V., Sarkisyan S.V. Three-dimensional problem of Rayleigh waves propagating in a half-space with restrained boundary. Z Angew Math Mech. 2018; 98: 1623–1631. https://doi.org/10.1002/zamm.201700157.

14. Pham Chi Vinh, Trinh Thi Thanh Hue, Rayleigh waves with impedance boundary conditions in incompressible anisotropic half-spaces. //Int. J. Eng. Sci. 85 (2014), 175-185.
15. Pham Chi Vinh, Nguyen Quynh Xuan, Rayleigh waves with impedance boundary condition: Formula for the velocity, Existence and Uniqueness. //European Journal of Mechanics-A/Solids 61 (2017), 180-185.
16. Baljeet Singh, Reflection of Elastic Waves from Plane Surface of a Half-space with Impedance Boundary Conditions, Geosciences Research, Vol. 2, № 4, November 2017. https://dx.doi.org/10.22606/gr.2017.24004
17. Mindlin,R.D. Waves and vibrations in isotropic, elastic plates. In J.N. Goodier and N.J. Hoff, Eds., Structural Mechanics, pages 199–232.Pergamon Press, Inc., Oxford, New York, 1960.
18. Kaplunov, J.D. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies / J.D. Kaplunov, L.Y.Kossovich, E.V. Nolde. – Academic Press, New York, 1998.
19. Kaplunov J.D. A low frequency model for dynamic motion in prestressed incompressible elastic structures / J.D. Kaplunov, E.V. Nolde, G.A. Rogerson // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 456. (2003): 2589–2610, 2000.
20. Kaplunov J.D. Long-wave vibrations of a thin-walled body with fixed faces /D.Kaplunov // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. V. 48(3). 1995. P. 311—327.
21. Kossovitch L.Y., Moukhomodiarov R.R. and Rogerson G.A. Analysis of the dispersion relation for an incompressible transversely isotropic elastic plate. //Acta Mechanica, 153(1-2): 89–111, 2002.
22. Pichugin A.V. A two-dimensional model for extensional motion of a pre-stressed incompressible elastic layer near cut-off frequencies /A.V. Pichugin, G.A.Rogerson // IMA Journal of Applied Mathematics. V.66(4). 2001. P. 357—385.
23. Саркисян А.С., Саркисян С.В. Распространение волн в слое с упруго-стеснёнными границами. /В сборнике трудов IV Международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 21– 26 сентября 2015 г. Цахкадзор, Армения, с.362-364. Sarkisyan A.S., Sarkisyan S.V. Waves propagation in layer with the elastic-restrained boundaries. //Proceedings of International of IV International conference «Topical problems of continuum mechanics», 21–26 September 2015, Tsakhkadzor, Armenia, p.362-364 (in Russian).
24. Саркисян С.В., Саркисян А.С. Волны в слое с упруго-стеснёнными границами / В сб. трудов Международной конференции «Young Scientists School-Conference», MECHANICS-2016, 3–7 October, 2016, Tsakhkadzor, Armenia с.124-127. Sarkisyan S.V., Sarkisyan A.S. Waves in a layer with the elastic- restrained boundaries.Proceedings of International School-Conference of Young Scientists, MECHANICS-2016, 3–7 October, 2016, Tsakhkadzor, Armenia, p.124-127 (in Russian).

Сведения об авторах:

Саркисян Арег Самвелович – старший лаборант кафедры механики, ЕГУ, факультет математики и механики.

Саркисян Самвел Владимирович – доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. механики, ЕГУ, факультет математики и механики.

Адрес: ул. Алека Манукяна 1, ЕГУ, Ереван, Армения **Тел.:** (+37499) 57-09-13; **E–mail:** vas@ysu.am

Поступила в редакцию 19. 09. 2018 г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №1, 2019 Механика

AXISYMMETRIC STABILITY OF CIRCULAR RING PLATE SUBJECTED TO MECHANICAL AND THERMAL LOADS

Avetisyan A.S., Aleksanyan R.K., Aleksanyan D.R.

Keywords: circular ring plate, elastic stability, boundary load, critical value, plate deflection.

Аветисян А.С., Алексанян Р.К., Алексанян Д.Р.

Осесимметричная устойчивость круглой кольцевой плиты, подверженной механическим и термическим нагрузкам

Ключевые слова: круглая кольцевая пластина, упругая устойчивость, предельная нагрузка, критическое значение, прогиб.

Исследована возможность потери осесимметричной устойчивости круглой кольцевой пластины, подвергнутого воздействию равномерно изменяющегося по радиусу кольца теплового поля. Внутренняя кромка кольца зажата или подвержена воздействию внешних механических сил. На внешнем крае круглого кольца равномерно распределенние силы действуют как растягивающая или сжимающая нагрузки. С учетом сформированного плоского напряженного состояния в круговом кольце для всех случаев внутренних напряжений в зонах сжатия определены значения продольного смещения. В случае общей нагрузки кольца напряжения выражаются как функциями Бесселя первого и второго порядка, так и цилиндрической функцией мнимых аргументов с действительными индексами. В некоторых частных случаях нагружения колец, уравнения устойчивости пластины перестраиваются в уравнения типа Эйлера, а напряжения в пластине выражаются через элементарные функции.

Ավետիսյան Ա.Ս., Ալեքսանյան Ռ.Կ., Ալեքսանյան Դ.Ռ.

Մեխանիկական և ջերմային բեռնավորված շրջանային օղակաձև սալի առանցքասիմետրիկ կայունությունը

Հիմնաբառեր: շրջանային օղակաձև սալ, առաձգական կայունություն, սահմանային բեռ, կրիտիկական արժեք, սալի ճկվածք:

Հետազոտվում է, շրջանային օղակաձև սալի առանցքասիմետրիկ կայունության կորուստի հնարավորությունը, երբ սալի շառավղով ազդում է հավասարաչափ փոփոխվող ջերմային դաշտ: Սալի ներքին եզրը ամրակցված է, կամ ենթարկված է արտաքին մեխանիկական ուժերի ազդեցությանը, իսկ արտաքին եզրում ազդում են հավասարաչափ բաշխված սեղմող կամ ձգող ուժեր: Կլոր շրջանային սալում ձևավորված հարթ լարվածային վիճակից ներքին լարումների բոլոր դեպքերի համար, սեղման տիրույթներում որոշվում են շառավղային տեղափոխությունների արժեքները: Կլոր սալի ընդհանուր բեռնավորման դեպքում, լարումները արտահայտվում են ինչպես Բեսսելի առաջին և երկրորդ սեռի, այնպես էլ իրական ինդեքսներով, կեղծ փոփոխականի գլանային ֆունկցիաների միջոցով: Կլոր սալի մասնակի բեռնավորման որոշ դեպքերում, սալի կայունության հավասարումը ստանում է Էյլերի հավասարման տեսք, իսկ լարումները սալում արտահայտվում են էլեմենտար ֆունկցիաներով:

The possibility of loss of the axisymmetric stability of a circular ring plate is investigated, when uniformly varying thermal field impacts over plate radius. The inner border of the plate is clamped or is exposed to the impact of external mechanical forces. Uniformly distributed tensile or compressive forces impact at the outer border of the plate. Taking into account the formed flat stress state in the circular ring plate, the values of the longitudinal displacements are determined for all cases of internal stresses in the compression zones. In the case of the general loading of the ring plate, the stresses are expressed by both first-order and second-order Bessel's functions, as well as by cylindrical functions of imaginary arguments with real indices. In the cases of ring plate

partial loading, the equations of plate stability get the look of Euler type equations, and the stresses in the plate are expressed by elementary functions.

Introduction

The problem of circular ring plate stability subjected to the compressive forces at the mid-plane first time was investigated in [1]. The problem of axisymmetric stability loss of the circular ring plate subjected to the uniformly distributed compressive forces is considered in [2]. The general case of the above-mentioned problem is in paper [3]. The investigations of the problems of axisymmetric and non-axisymmetric stability of ring plate have been done in [4, 5] for two different cases: a) the circular ring plate is subjected to the uniformly distributed compressive forces along the outer border of the plate; b) the circular ring plate is subjected to the uniformly distributed tensile (radial) forces along the inner border of the plate.

The generalized problem of stability of the circular ring plate subjected to the uniformly distributed tensile and compressive (radial) forces along the outer and inner borders is considered in [6]. In this article, the various cases of boundary conditions are satisfied taking into account the longitudinal displacements determined from the formulas of plate stability problem. Equations of critical values of unknown parameters are received from the conditions of non-zero solution of the homogeneous equations' system for integration constants.

In technical report [7], an analysis of the stability of circular ring plates under uniformly distributed radial load is presented. It was found that, in general, the critical mode shapes are combinations of in- and out-of-plane displacements and they occur when loads considerably are below the classical (in-plane) critical load. In paper [8], the stability of circular ring plate, pre-stressed by temperature-like intrinsic deformation, is studied using the equations of the nonlinear theory of rods. The temperature gradient in the radial direction results in a bending moment. The analytical solutions are successfully compared against results of finite element simulations for a shell model of the ring.

In papers [9,10] the linearized problems on the stability of a circular ring sandwich of symmetric structure under axially symmetric temperature field, inhomogeneous through the core thickness, are stated and their analytical solutions are given. The deformation processes for the load-carrying layers are described by the Kirchhoff-Love model. For the core of arbitrary thickness, the deformation process is described - by two models, namely by the equations of the plane problem of elasticity theory and by the model of a transversely soft layer of arbitrary thickness.

1. The problem statement. Plane stress state of circular ring plate.

Let us consider a circular ring plate with the thickness h, which is clamped at the inner border $r = b$, and is subjected to the tensile or compressive uniformly distributed load with intensity P at outer border $r = a$. The plate is also exposed to uniformly varying temperature along radius of the ring plate. The plane stress state of axisymmetric circular ring plate is characterized by the direction of radius via the non-zero component of displacement $\boldsymbol{u}$ at the middle plane of the plate [11].

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad b \le r \le a \tag{1.1}$$

Corresponding to the arising internal stresses σ_r and σ_θ, the arising at the circular ring plate internal efforts $N_r(r)$, $N_\theta(r)$ and $N_{r\theta}(r)$ are determined by the following formulas

$$N_r(r) = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{du_r}{dr} + \nu\frac{u_r}{r} - (1+\nu)\alpha T\right]$$

$$N_\theta(r) = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{u_r}{r} + \nu\frac{du_r}{dr} - (1+\nu)\alpha T\right] \tag{1.2}$$

$$N_{r\theta}(r) \equiv 0 .$$

Here, E is the modulus of elasticity, ν is the Poisson's ratio, α is the coefficient of thermal expansion, T is the temperature change correspondingly for a plate material. Based on (1.1) and (1.2), as well as satisfying the boundary conditions on the edge of the circular ring plate

$$u\big|_{r=b} = 0, \quad N_r\big|_{r=a} = p, \tag{1.3}$$

we obtain the following relations for the cutting forces:

$$N_r(r) = \frac{Eh}{(1+\nu)\delta}\left[P_0(1+\frac{b^2\nu^*}{r^2}) + \alpha T l^2(\frac{a^2}{r^2}-1)\right],$$

$$N_\theta(r) = \frac{Eh}{(1+\nu)\delta}\left[P_0(1-\frac{b^2\nu^*}{r^2}) - \alpha T l^2(\frac{a^2}{r^2}+1)\right] . \tag{1.4}$$

Here, $\nu^* = (1-\nu)/(1+\nu)$, $\delta = 1+\nu^* l^2$, $P_0 = P(1+\nu)/Eh$, and $l = b/a$ are dimensionless parameters of the circular ring plate.

If either tensile or compressive forces ($P > 0$ or $P < 0$) impact on the outer border of the circular ring plate and either steady increase or steady decrease of temperature ($T > 0$ or $T < 0$) is influencing the thermal expansion of the circular ring plate, the forces defined by equation (1.4) on the plane of the circular ring plate can be tensile or compressive, i.e. the strips (zones) of tension or compression forces are located on the circular ring plate. For any force, the presence of compressive zone is pointing out the lost of stability of the circular ring plate. Therefore, if $P_0 > 0$ and $T > 0$ then $N_r > 0$ for $r \in [b;a]$, meanwhile N_θ for $[b;a]$ can have a compressive zone. Furthermore, if $P_0 < 0$ and $T < 0$ then $N_r < 0$ for $r \in [b;a]$, meanwhile N_θ can change the sign.

Similar to the above-mentioned consideration, it is easy to prove that for P_0 and T having opposite signs, N_r and N_θ in the interval $[b;a]$ can contain compressive zones. Consequently, in any case, the circular ring plate can lose the stability.

The forces defined by formula (1.4) can be expressed as follows:

$$N_{r;\theta}(r) = \frac{Eh}{(1+\nu)\delta}\left[(P_0 - \alpha T l^2) \pm (P_0 \nu^* + \alpha T)\frac{b^2}{r^2}\right] \tag{1.5}$$

2. The problem of stability lost of axisymmetric circular ring plate

In the problem of stability lost of the axisymmetric circular ring plate losing its stability, the deflection $\mathrm{w}(r)$ satisfies to the following equation [2-6]

$$D\Delta\Delta \mathrm{w}(r) = N_r \frac{d^2\mathrm{w}(r)}{dr^2} + N_\theta \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{w}(r)}{dr}, \tag{2.1}$$

where $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ is cylindrical flexural rigidity of the circular ring plate, and $\Delta(\circ) = \left(d^2/dr^2\right) + \left(1/r\right)\cdot\left(d/dr\right)$ is a one-dimensional differential operator.

Based on expressions (1.5), the equation (2.1) can be expressed in the following way:

$$\Delta\Delta \mathrm{w}(r) = \frac{Eh(P_0 - \alpha T l^2)}{D(1+\nu)\delta}\left[\left(1 \pm \frac{\gamma^2 b^2}{r^2}\right)\frac{d^2\mathrm{w}(r)}{dr^2} + \left(1 \mp \frac{\gamma^2 b^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{w}(r)}{dr}\right] \tag{2.2}$$

where "+" sign should be chosen for the values $(P_0 - \alpha T l^2)$ and $(P_0\nu^* + \alpha T)$ having the same sign; "-" sign should be chosen for the values having opposite signs, and $\gamma^2 = \left|P_0\nu^* + \alpha T\right| / \left|P_0 - \alpha T l^2\right|$.

The following status options of equation (2.2) determining for $\mathrm{w}(r)$ are considered:

I. if $P_0 - \alpha T l^2 > 0$, and $P_0\nu^* + \alpha T > 0$ then

$$\Delta\Delta \mathrm{w}(r) - \beta^2\left[\left(1 + \frac{\gamma^2 b^2}{r^2}\right)\frac{d^2\mathrm{w}(r)}{dr^2} + \left(1 - \frac{\gamma^2 b^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{w}(r)}{dr}\right] = 0. \tag{2.3}$$

II. if $P_0 - \alpha T l^2 > 0$ and $P_0\nu^* + \alpha T < 0$ then

$$\Delta\Delta \mathrm{w}(r) - \beta^2\left[\left(1 - \frac{\gamma^2 b^2}{r^2}\right)\frac{d^2\mathrm{w}(r)}{dr^2} + \left(1 + \frac{\gamma^2 b^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{w}(r)}{dr}\right] = 0. \tag{2.4}$$

where $\beta^2 = 12(1-\nu)(P_0 - \alpha T l^2)/h^2\delta$.

III. if $P_0 - \alpha T l^2 < 0$ and $P_0\nu^* + \alpha T < 0$ then

$$\Delta\Delta \mathrm{w}(r) + \beta_1^2\left[\left(1 + \frac{\gamma^2 b^2}{r^2}\right)\frac{d^2\mathrm{w}(r)}{dr^2} + \left(1 - \frac{\gamma^2 b^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{w}(r)}{dr}\right] = 0. \tag{2.5}$$

IV. if $P_0 - \alpha T l^2 < 0$ and $P_0 \nu^* + \alpha T > 0$ then

$$\Delta\Delta \mathrm{w}(r) + \beta_1^2 \left[\left(1 - \frac{\gamma^2 b^2}{r^2}\right) \frac{d^2 \mathrm{w}(r)}{dr^2} + \left(1 + \frac{\gamma^2 b^2}{r^2}\right) \frac{1}{r} \frac{d\mathrm{w}(r)}{dr} \right] = 0, \tag{2.6}$$

where $\beta_1^2 = 12(1-\nu)\left|P_0 - \alpha T l^2\right| / h^2 \delta$.

It is evident that here the following limiting cases are possible.

1. In case of $P_0 - \alpha T l^2 = 0$ and $P_0 \nu^* + \alpha T \neq 0$, the equation (2.1) can be expressed as follows

$$\Delta\Delta \mathrm{w}(r) - H^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d^2 \mathrm{w}(r)}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\mathrm{w}(r)}{dr} \right) = 0, \text{ for } P_0 \nu^* + \alpha T > 0, \tag{2.7}$$

where $H^2 = 12(1-\nu) b^2 (P_0 \nu^* + \alpha T) / h^2 \delta$, and as follows

$$\Delta\Delta \mathrm{w}(r) + \bar{H}^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d^2 \mathrm{w}(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\mathrm{w}(r)}{dr} \right) = 0, \text{ for } P_0 \nu^* + \alpha T < 0, \tag{2.8}$$

where $\bar{H}^2 = 12(1-\nu) b^2 \left|P_0 \nu^* + \alpha T\right| / h^2 \delta$.

2. In the case of $P_0 - \alpha T l^2 \neq 0$ and $P_0 \nu^* + \alpha T = 0$: if $P_0 - \alpha T l^2 > 0$ then $N_r = N_\theta = Eh\left(P_0 - \alpha T l^2\right) / \delta(1+\nu) > 0$, in $r \in [a, b]$. Therefore, the plate is subjected to all-around tension; meanwhile, the plate doesn't lose the stability.

3. If $P_0 - \alpha T l^2 < 0$ and $P_0 \nu^* + \alpha T = 0$ then $N_r = N_\theta = Eh\left(P_0 - \alpha T l^2\right) / (1+\nu)\delta < 0$. In this case, the circular ring plate is subjected to all-around compression. Consequently, the circular ring plate can lose the stability [12]. For this purpose, the equation (2.1) should be expressed as follows

$$\Delta\Delta \mathrm{w} + H_1^2 \Delta \mathrm{w} = 0, \quad \text{where } H_1^2 = 12(1-\nu)\left|P_0 - \alpha T l^2\right| / (1+\nu)\delta \tag{2.9}$$

4. If $P_0 - \alpha T l^2 = 0$ and $P_0 \nu^* + \alpha T = 0$ then $P_0 = 0$ and $\alpha T = 0$.

In this case, the circular ring plate is free from external mechanical and thermal actions and it will by stabile.

3. Integration of stability equations of the circular ring plate.

Replacing variables $x = \beta \cdot r$, equations (2.3) and (2.4) can be expressed as follows:

$$\Delta_x \Delta_x \mathrm{w}(x) - \left[\left(1 + \frac{d^2 \beta^2}{x^2}\right) \frac{d^2 \mathrm{w}(x)}{dx^2} + \left(1 - \frac{d^2 \beta^2}{x^2}\right) \frac{1}{x} \frac{d\mathrm{w}(x)}{dx} \right] = 0, \tag{3.1}$$

$$\Delta_x\Delta_x \mathrm{w}(x)-\left[\left(1-\frac{d^2\beta^2}{x^2}\right)\frac{d^2\mathrm{w}(x)}{dx^2}+\left(1+\frac{d^2\beta^2}{x^2}\right)\frac{1}{x}\frac{d\mathrm{w}(x)}{dx}\right]=0\,, \tag{3.2}$$

where $d^2=\gamma^2b^2$, $\Delta_x=\left(d^2/dx^2\right)+\left(1/x\right)\left(d/dx\right)$ - is a one-dimensional differential operator. If denote $z(x)=d\mathrm{w}(x)/dx$, the equations (3.1) and (3.2) can be represented as follows:

$$x\left[x^2z''+xz'-(\eta_1^2+x^2)z\right]'-\left[x^2z''+xz'-(\eta_1^2+x^2)z\right]=0\,, \tag{3.3}$$

$$x\left[x^2z''+xz'-(\eta_2^2+x^2)z\right]'-\left[x^2z''+xz'-(\eta_2^2+x^2)z\right]=0\,, \tag{3.4}$$

where $\eta_{1,2}^2=1\pm d^2\beta^2$.

Integrating equations (3.3) and (3.4), the following equations can be obtained:

$$x^2z''+xz'-(\eta_1^2+x^2)z=Cx\,, \tag{3.5}$$

$$x^2z''+xz'-(\eta_2^2+x^2)z=\overline{C}x\,, \tag{3.6}$$

here C and $\overline{C}$ are integration constants. The solution of equations (3.5) and (3.6) should be determined by the following expressions.

$$\begin{aligned} z&=C_1(x)I_{\eta_1}(x)+C_2(x)K_{\eta_1}(x)\\ z&=E_1(x)I_{\eta_2}(x)+E_2(x)K_{\eta_2}(x)\end{aligned}, \tag{3.7}$$

where $I_\eta(x)$ and $K_\eta(x)$ are the cylindrical function of imaginary arguments with the real indexes; $C_i(x),\ E_i(x)\ \ (i=1{,}2)$ are arbitrary functions defined by the variation method of arbitrary constants.

The solutions of equations (3.5) and (3.6) can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} z&=\overline{C_1}I_{\eta_1}(x)+\overline{C_2}K_{\eta_1}(x)+Cf_1(x)\\ z&=\overline{E_1}I_{\eta_2}(x)+\overline{E_2}K_{\eta_2}(x)+\overline{C}f_2(x)\end{aligned}. \tag{3.8}$$

The corresponding deflections can be defined by the following equations:

$$\begin{aligned} \mathrm{w}(x)&=\int[\overline{C_1}I_{\eta_1}(x)+\overline{C_2}K_{\eta_1}(x)]dx+C\int f_1(x)dx+H_1\\ \mathrm{w}(x)&=\int[\overline{E_1}I_{\eta_2}(x)+\overline{E_2}K_{\eta_2}(x)]dx+\overline{C}\int f_2(x)dx+H_2\end{aligned}, \tag{3.9}$$

where $\overline{C}_i;\overline{E}_i;\overline{H}_i(i=1,2)$ are integration constants, and

$$f_i(x)=I_{\eta_i}(x)\int K_{\eta_i}(x)dx-K_{\eta_i}(x)\int I_{\eta_i}(x)dx\quad (i=1,2)\,.$$

Denoting $x_1=\beta_1 r$, equations (2.5) and (2.6) can be represented as follows:

$$\Delta_x \Delta_x \mathrm{w}(x_1) + \left(1 + \frac{d^2\beta_1^2}{x_1^2}\right)\frac{d^2\mathrm{w}(x_1)}{dx_1^2} + \left(1 - \frac{d^2\beta_1^2}{x_1^2}\right)\frac{1}{x_1}\frac{d\mathrm{w}(x_1)}{dx_1} = 0, \quad (3.10)$$

$$\Delta_x \Delta_x \mathrm{w}(x_1) + \left(1 - \frac{d^2\beta_1^2}{x_1^2}\right)\frac{d^2\mathrm{w}(x_1)}{dx_1^2} + \left(1 + \frac{d^2\beta_1^2}{x_1^2}\right)\frac{1}{x_1}\frac{d\mathrm{w}(x_1)}{dx_1} = 0. \quad (3.11)$$

The integration of equations (3.10) and (3.11) can be reduced to the integration of Bessel's non-homogeneous equations.

$$x_1^2 z'' + x_1 z' - (\xi_1^2 - x_1^2)z = C_0 x_1,$$
$$x_1^2 z'' + x_1 z' - (\xi_2^2 - x_1^2)z = \bar{C}_0 x_1, \quad (3.12)$$

where $z(x_1) = d\mathrm{w}(x_1)/dx_1$, C_0, $\bar{C}_0$ are integration constants.

The generalized solutions of equations (3.12) are the following

$$z(x_1) = \bar{E}_1 J_{\xi_1}(x_1) + \bar{E}_2 Y_{\xi_1}(x_1) + \left(\pi C_0/2\right)\phi_1(x_1)$$
$$z(x_1) = \bar{H}_1 J_{\xi_2}(x_1) + \bar{H}_2 Y_{\xi_2}(x_1) + \left(\pi \bar{C}_0/2\right)\phi_2(x_1) \quad (3.13)$$

The corresponding deflections can be obtained from the following relations

$$\mathrm{w}(x_1) = \int\left[\overline{E_1} J_{\xi_1}(x_1) + \overline{E_2} Y_{\xi_1}(x_1)\right]dx_1 + \frac{\pi C_0}{2}\int \phi_1(x_1)dx_1 + E_0$$
$$\mathrm{w}(x_1) = \int\left[\overline{H_1} J_{\xi_2}(x_1) + \overline{H_2} Y_{\xi_2}(x_1)\right]dx_1 + \frac{\pi \overline{C_0}}{2}\int \phi_2(x_1)dx_1 + H_0, \quad (3.14)$$

where $J_\xi(x_1)$ and $Y_\xi(x)$ are the first-order and the second-order Bessel's functions; $\bar{E}_i, \bar{H}_i, E_0, H_0$ $(i = 1,2)$ are integration constants; and

$\phi_i(x_1) = Y_{\xi i}(x_1)\int J_{\xi i}(x_1)dx_1$ - $J_{\xi i}(x_1)\int Y_{\xi i}(x_1)dx_1$ (*i*=*1*,*2*).

For the first limiting case ($P_0 - \alpha T l^2 = 0$, $P_0 \nu^* + \alpha T \neq 0$) and $P_0 \nu^* + \alpha T > 0$, the force $\mathrm{w}(x_1)$ is obeying equation (2.7). Meanwhile, for $P_0 \nu^* + \alpha T < 0$, the force $\mathrm{w}(x_1)$ is obeying equation (2.8). The equation (2.7) is an equation of Eulerian kind:

$$\mathrm{w}^{IV} + \frac{2}{r}\mathrm{w}^{III} - (1 + H^2)\frac{1}{r^2}\mathrm{w}^{II} + (1 + H^2)\frac{1}{r^3}\mathrm{w}^{I} = 0, \quad (3.15)$$

where $H^2 = 12(1-\nu)b^2(P_0\nu^* + \alpha T)/h^2(1 + \nu^* l^2)$.

Denoting $x = r/a$, $l \le x \le 1$, $l = b/a$, equation (3.15) can be represented as follows:

$$x^3\mathrm{w}^{IV} + 2x^2\mathrm{w}^{III} - x(1 + H^2)\mathrm{w}^{II} + (1 + H^2)\mathrm{w}^{I} = 0. \quad (3.16)$$

The generalized solution of eq. (3.16) is the following

$$\mathrm{w}(x) = C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^{1+k} + C_4 x^{1-k}, \tag{3.17}$$

where $k = \sqrt{1+H^2}$.

In case of $P_0 \nu^* + \alpha T < 0$, the equation (2.8) can be represented as follows

$$x^3 \mathrm{w}^{IV}(x) + 2x^2 \mathrm{w}^{III}(x) - x(1-\bar{H}^2)\mathrm{w}^{II} + (1-\bar{H}^2)\mathrm{w}^{I}(x) = 0, \tag{3.18}$$

where $\bar{H}^2 = 12(1-\nu)b^2 \left| P_0 \nu^* + \alpha T \right| / h^2 (1+\nu^* l^2)$

In the case of $1-\bar{H}^2 > 0$, the deflection can be written using the generalized solution of equation (3.18)

$$\mathrm{w}(x) = B_1 + B_2 x^2 + B_3 x^{1+k} + B_4 x^{1-k}. \tag{3.19}$$

Similarly, in the case of $1-\bar{H}^2 < 0$, the corresponding solution of equation (3.18) can be obtained as

$$\mathrm{w}(x) = D_1 + D_2 x^2 + x \cdot [D_3 \cos(\beta \ln x) + D_4 \sin(\beta \ln x)], \tag{3.20}$$

where $\beta^2 = \bar{H}^2 - 1$.

For $1-\bar{H}^2 = 0$, deflections can be defined as

$$\mathrm{w}(x) = C_1 x \cdot \ln x + C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \tag{3.21}$$

For the second limiting case $P_0 - \alpha T l^2 \neq 0$ and $P_0 \nu^* + \alpha T = 0$, the circular ring plate can lose its stability, if $P_0 - \alpha T l^2 < 0$. For this case, the deflection can be determined by equation (2.9). Replacing variables $\rho = r/a$, $l \le \rho \le 1$, equation (2.9) can be represented as follows [12]:

$$\Delta_\rho \Delta_\rho \mathrm{w}(x) + k^2 \Delta_\rho \mathrm{w}(x) = 0, \tag{3.22}$$

Where $k^2 = 12a^2(1-\nu)\left| P_0 - \alpha T l^2 \right| / h^2 \left(1+\nu^* l^2\right)$,

$\Delta_\rho = d^2/d\rho^2 + (1/\rho)(d/d\rho)$,

Denoting $x = k\rho$, the following equation is obtained:

$$\Delta_x \Delta_x \mathrm{w}(x) + \Delta_x \mathrm{w}(x) = 0. \tag{3.23}$$

Meanwhile, denoting $w' = z$, the following equation is obtained:

$$x\left[x^2 z''(x) + xz'(x) - (1-x^2)z(x)\right]' - \left[x^2 z''(x) + xz'(x) - (1-x^2)z(x)\right] = 0.$$

Integrating the last equation, the following equation is obtained:

$$x^2 z''(x) + xz'(x) - (1-x^2)z(x) = C_0 x, \tag{3.24}$$

where C_0 is an integration constant.

The generalized solution of equation (3.24) can be defined in the following way:

$$z(x) = A_1 J_1(x) + B_1 Y_1(x) + C_0/x. \tag{3.25}$$

Taking into account $z(x) = d\mathrm{w}(x)/dx$ and integrating eq. (3.25), the following equation can be obtained:

$$\mathrm{w}(x) = A_0 J_0(x) + B_0 Y_0(x) + C_0 \ln x + D_0 , \tag{3.26}$$

where A_0, B_0, C_0, and D_0 are integration constants.

4. Determination of parameters critical values

Longitudinal displacements defined by the integration of stability equations of the circular ring plate should satisfy the boundary conditions on the plate borders.

In practice, the following cases of boundary conditions are considered (Figure 1. ÷ Figure 4.)

1.

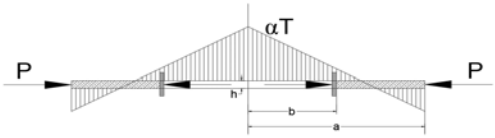


Figure 1. The internal border of the plate $r = b$ is clamped, and the external border of the plate $r = a$ is free

with the following boundary conditions,

$$\mathrm{w}\big|_{r=b} = 0 , \quad \frac{d\mathrm{w}}{dr}\Big|_{r=b} = 0 , \quad M_r\big|_{r=a} = 0 , \quad Q_r\big|_{r=a} = 0 \tag{4.1}$$

2.

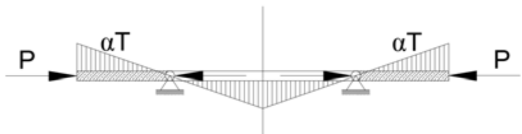


Figure 2. The internal border of the plate $r = b$ is hinged, and the external border of the plate $r = a$ is free.

with the following boundary conditions,

$$\mathrm{w}\big|_{r=b} = 0 , \quad M_r\big|_{r=b} = 0 , \quad M_r\big|_{r=a} = 0 , \quad Q_r\big|_{r=a} = 0 \tag{4.2}$$

3.

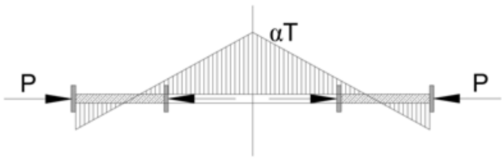


Figure 3. The borders of the plate are clamped.

with the following boundary conditions,

$$\mathrm{w}\big|_{r=b}=0\,,\quad \frac{d\mathrm{w}}{dr}\Big|_{r=b}=0\,,\quad \mathrm{w}\big|_{r=a}=0\,,\quad \frac{d\mathrm{w}}{dr}\Big|_{r=a}=0 \tag{4.3}$$

4.

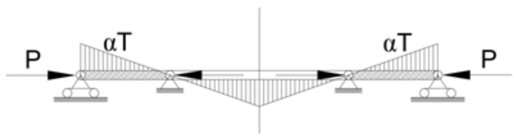


Figure 4. The borders of the plate are hinged

with the following boundary conditions,

$$\mathrm{w}\big|_{r=b}=0\,,\quad M_r\big|_{r=b}=0\,,\quad M_r\big|_{r=a}=0\,,\quad \mathrm{w}\big|_{r=a}=0 \tag{4.4}$$

In the problem of axisymmetric stability of the plate, bending moments and cutting forces through forces $\mathrm{w}(r)$ can be defined by the following equations:

$$M_r=-D\left(\frac{d^2\mathrm{w}}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{d\mathrm{w}}{dr}\right)\,,\qquad Q_r=-D\frac{d}{dr}\left(\Delta\mathrm{w}\right)\quad \text{, or}$$

$$M_r=-D\beta^2\left(\frac{d^2\mathrm{w}}{dx^2}+\frac{\nu}{x}\frac{d\mathrm{w}}{dx}\right)=-\frac{D\beta^2}{x}\left(xz'+\nu z\right); \tag{4.5}$$

$$Q_r=-D\beta^2\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2\mathrm{w}}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\mathrm{w}}{dx}\right)=-\frac{D\beta^2}{x}\left(x^2z''+xz'-z\right);\ x=\beta r\frac{\delta y}{\delta x}.$$

In the view of the determination of critical values of parameters, let’s consider the fourth option ($P_0-\alpha Tl^2<0$, $P_0\nu^*+\alpha T>0$). In this case, from equations (3.13) and (3.14), $z=\mathrm{w}'(x_1)$ and $\mathrm{w}(x_1)$ can be expressed as follows:

$$z(x_1) = \bar{H}_1 J_{\xi_2}(x_1) + \bar{H}_2 Y_{\xi_2}(x_1) + \frac{\pi \bar{C}_0}{2}\phi_2(x_1)\,; \tag{4.6}$$

$$\mathrm{w}(x_1) = \int_{\beta_1 b}^{x_1}\left[\bar{H}_1 J_{\xi_2}(x_1) + \bar{H}_2 Y_{\xi_2}(x_1) + \frac{\pi \bar{C}_2}{2}\phi_2(x_1)\right]dx_1 + \bar{H}_0\,, \tag{4.7}$$

Where $x_1 = \beta_1 r, \quad \xi_2 = \beta^2{}_1 d^2, \quad d^2 = \gamma^2 b^2, \quad \beta_1 d \le x_1 \le \beta_1 a$, and

$$\phi_2(x_1) = -J_{\xi_2}(x_1)\int_{\beta_1 b}^{x_1} Y_{\xi_2}(x)dx + Y_{\xi_2}(x_1)\int_{\beta_1 b}^{x_1} J_{\xi_2}(x)dx$$

Satisfying the boundary conditions (4.1) and based on equations (4.6) - (4.7), we can receive the following system of equations:

$$\begin{cases} H_0 = 0 \\ \bar{H}_1 J_{\xi_2}(\beta_1 b) + \bar{H}_2 Y_{\xi_2}(\beta_1 b) = 0 \\ \bar{H}_1 J_{\xi_2}(\beta_1 a) + \bar{H}_2 Y_{\xi_2}(\beta_1 a) + \\ +\dfrac{\pi \bar{C}_0}{2}\left[-J_{\xi_2}(\beta_1 a)\displaystyle\int_{\beta_1 b}^{\beta_1 a} Y_{\xi_2}(x)dx + Y_{\xi_2}(\beta_1 a)\displaystyle\int_{\beta_1 b}^{\beta_1 a} J_{\xi_2}(x)dx\right] - \dfrac{\bar{C}_0}{\beta_1 a(1-\gamma^2 l^2)} = 0 \\ \bar{H}_1 J'_{\xi_2}(\beta_1 a) + \bar{H}_2 Y'_{\xi_2}(\beta_1 a) + \\ +\dfrac{\pi \bar{C}_0}{2}\left[-J'_{\xi_2}(\beta_1 a)\displaystyle\int_{\beta_1 b}^{\beta_1 a} Y_{\xi_2}(x)dx + Y'_{\xi_2}(\beta_1 a)\displaystyle\int_{\beta_1 b}^{\beta_1 a} J_{\xi_2}(x)dx\right] + \dfrac{\nu \bar{C}_0}{\beta^2{}_1 a^2(1-\gamma^2 l^2)} = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

For the boundary condition (4.2), the following system of equations can be obtained:

$$\begin{cases} \bar{H}_0 = 0 \\ \left[J'_{\xi_2}(\beta_1 b) + \nu J_{\xi_2}(\beta_1 b)\right]\bar{H}_1 + \left[Y'_{\xi_2}(\beta_1 b) + \nu Y_{\xi_2}(\beta_1 b)\right]\bar{H}_2 = 0 \\ \bar{H}_1 J'_{\xi_2}(\beta_1 a) + \bar{H}_2 Y'_{\xi_2}(\beta_1 a) + \\ +\dfrac{\pi \bar{C}_0}{2}\left[-J'_{\xi_2}(\beta_1 a)\displaystyle\int_{\beta_1 b}^{\beta_1 a} Y_{\xi_2}(x)dx + Y'_{\xi_2}(\beta_1 a)\displaystyle\int_{\beta_1 b}^{\beta_1 a} J_{\xi_2}(x)dx\right] + \dfrac{\nu \bar{C}_0}{\beta^2{}_1 a^2(1-\gamma^2 l^2)} = 0 \\ \bar{H}_1 J_{\xi_2}(\beta_1 a) + \bar{H}_2 Y_{\xi_2}(\beta_1 a) + \\ +\dfrac{\pi \bar{C}_0}{2}\left[-J_{\xi_2}(\beta_1 a)\displaystyle\int_{\beta_1 b}^{\beta_1 a} Y_{\xi_2}(x)dx + Y_{\xi_2}(\beta_1 a)\displaystyle\int_{\beta_1 b}^{\beta_1 a} J_{\xi_2}(x)dx\right] - \dfrac{\bar{C}_0}{\beta_1 a(1-\gamma^2 l^2)} = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

Based on the existence condition of non-zero solution of the system of homogeneous equations for the integration constants obtained by equations (4.8) and (4.9), the transcendent equation for any random parameter can be determined taking into account that the rest of parameters have received specified values.

For the first limiting case ($P_0 - \alpha T l^2 = 0$, $P_0 \nu^* + \alpha T \neq 0$), the force $w(x)$ can be obtained by equations (3.17) and (3.19) in case of $P_0 \nu^* - \alpha T l^2 < 0$. Determining the force $w(x)$ by equation (3.19) and satisfying the boundary conditions (4.3), for the determination of integration parameters B_i the following system of homogeneous equations will be received.

$$\begin{cases} B_1 + B_2 l^2 + B_3 l^{1+\bar{k}} + B_4 l^{1-\bar{k}} = 0 \\ 2lB_2 + B_3(1+\bar{k})l^{\bar{k}} + B_4(1-\bar{k})l^{-k} = 0 \\ B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 0 \\ 2B_2 + (1+\bar{k})B_3 + (1-\bar{k})B_4 = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Taking into account that

$$\begin{cases} P_0 - \alpha T l^2 = 0 \\ P_0 \nu^* + \alpha T < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} P_0 = \alpha T l^2 \\ \alpha T(1+\nu^* l^2) > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_0 > 0 \\ T < 0 \end{cases},$$

and based on the existence condition of non-zero solution of the system of homogeneous equations (4.10), the following equation can be obtained:

$$-4\bar{k}l + (1+\bar{k}^2)(1-l^2)\mathrm{sh}(\bar{k}\ln l) + 2\bar{k}(1+l^2)\mathrm{ch}(\bar{k}\ln l) = 0\,. \tag{4.11}$$

Consequently, for the plate losing the plane stability, either P_0 or the minimal critical value $|T|$ can be determined.

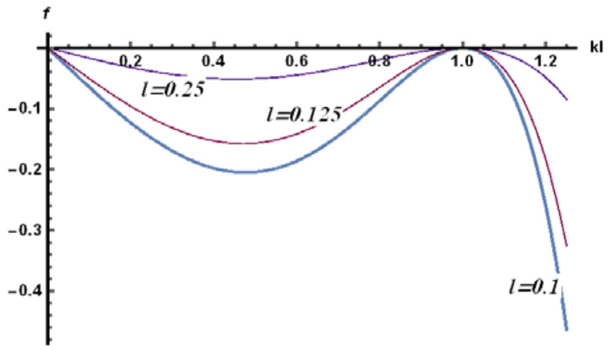


Figure 5. Characteristic stability curves of a circular ring plate with a joint thermo mechanical load from equation (4.11) and satisfying the boundary conditions (4.3)

Replacing B_i with C_i and $\bar{k}$ with k in equations (4.10) and (4.11), C_i constants and the critical values of parameters can be determined if the force is stated by equation (3.17).

The characteristic lines in accordance with equation (4.11), for different linear dimensions $l = b/a$ of a circular disc, are shown in Figure 5.

Taking into account that

$$\begin{cases} P_0 - \alpha T l^2 < 0 \\ P_0 \nu^* + \alpha T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0 (1 + \nu^* l^2) < 0 \\ \alpha T = -P_0 \nu^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0 < 0 \\ \alpha T > 0 \end{cases},$$ and based on the second limiting case of the plate, the deflection $\mathrm{w}(x)$ and $z = \mathrm{w}'(x)$ obtained from the equations (3.25) - (3.26), as well as, satisfying the boundary condition (4.1), the following system of equations can be defined:

$$A_0 J_0(kl) + B_0 Y_0(kl) + C_0 \ln(kl) + D_0 = 0$$

$$A_0 J_1(kl) + B_0 Y_1(kl) - \frac{C_0}{kl} = 0$$

$$A_0 J_1(k) + B_0 Y_1(k) = 0$$

$$A_0 J_1'(k) + B_0 Y_1'(k) - C_0 \frac{1-\nu}{k^2} = 0, \tag{4.12}$$

where $k^2 = 12(1-\nu)\left|P_0\right| a^2 / h^2 = 12(1-\nu)\alpha T a^2 / h^2 \nu^*$ (4.13)

Based on the existence condition of non-zero solution of the system of homogeneous equations (4.12), the following transcendent equation can be obtained:

$$J_1(kl) Y_1(k) - J_1(k) Y_1(kl) = \frac{2}{\pi l (1-\nu)}. \tag{4.14}$$

Based on the known physical mechanical constants and geometrical parameters, the minimal positive value of k can be gotten from the equation (4.14), and either the value of the force $\left|P_0\right|_{cr}$ or the value of temperature T_{cr} corresponding to the value of k can be obtained from equation (4.13).

The characteristic lines in accordance with equation (4.14), for different linear dimensions $l = b/a$ of a circular disc, are shown in Figure 6.

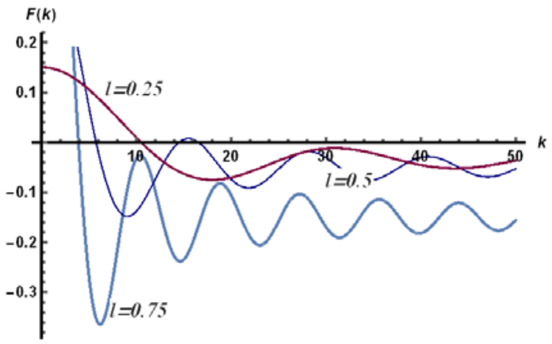


Figure 6. Characteristic stability curves of a circular ring plate with a joint thermo mechanical load from equation (4.14) and satisfying the boundary conditions (4.1)

Therefore, if the inner radius of circular ring plate $b \to 0$, i.e. the circular ring plate is reduced to the circular plate, the components of displacement $u(r)$ and internal forces corresponding to $u(r)$ will act on the mid-plane of the plate.

Then, we will have the following values:

$$u = C_1 r \ , \ N_r = N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu}(C_1 - \alpha T) \ , \ N_{r\theta} = 0 \ , \ 0 \le r \le a$$

Satisfying the boundary condition $N_r\big|_{r=a} = \underline{P}$, the following expressions are obtained:

$$C_1 = P(1-\nu)/Eh + \alpha T \ , \ N_r = N_\theta = P \quad 0 \le r \le a .$$

Therefore, the internal forces are not dependent on the changes of temperature (in the case of uniform thermal variations, stresses do not emerge in the body). The circular plate can lose its stability if $P < 0$, so that the plate is subjected to the uniformly distributed compression $N_r = N_\theta = P < 0$.

The problem of axisymmetric stability loss of the circular plate clamped on the border subjected to the uniformly distributed forces in the direction of the diameter edge is considered by Bryan [13]. The problem of plate clamped on the border is investigated by Dinnik [14].

Conclusion.

The values of the longitudinal displacement are determined based in the formed flat stress state in a circular ring plate for all cases of internal stresses in the compression zones.

In the case of a general load, the stress rings are expressed by both first-order and second-order Bessel functions, and by cylindrical functions of imaginary arguments with real indices. In the cases of partial loading of the ring plates, the stability equations of the plate take the look of Euler type equations, and the stresses in the plate are expressed by elementary functions.

The internal forces are not dependent on the changes of temperature (in the case of uniform thermal variations, stresses don't emerge in the body free of the external constrains). The circular plate can lose its stability if $P < 0$, so that the plate is subjected to the uniformly distributed compression $N_r = N_\theta = P < 0$.

REFERENCES

1. Dean W.R., The elastic stability of an annular plate, Proc. of the Royal Society of London, Ser. A, (1924), vol.106, pp.268-284.
2. Makushin V.M., Critical values of intensity of the radial compressive forces for circular thin plates, Strength calculation, (1959), N4, pp.271-298, (1960), N5, pp.236-248, (1960), N6, pp.171-181. [in Russian].
   Макушин В.М., Критические значения интенсивности радиальных сжимающих сил для круглых тонких пластин// Расчеты на прочность.-М.:Машгиз, (1959), N4, стр. 271-298, (1960), N5, стр. 236-248, (1960), N6, стр. 171-181.

3. Yamaki H., Buckling of a thin annual plate under uniform compression. Theory of Applied Mechanics, (1958), vol. 25, N 2, pp.266-273.
4. Khachatryan A.A., Stability of circular ring plate compressed by the radial forces applied by the external contour, Proc. of AS Arm. SSR, Mechanics, (1966), vol. 19, N6, pp.9-16. [in Russian],

   Хачатрян А.А., Устойчивость круговой кольцевой пластинки, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру. Изв. НАН Армении Механика, (1966), т. 19, №6, стр. 9-16,
5. Khachatryan A.A., Stability of circular ring plate subjected to tensile forces applied by the internal contour, Proc. of NAS RA, Mechanics, (1997), vol. 50, N2, pp.46-53, [in Russian],

   Хачатрян А.А., Об устойчивости кольцевой пластинки под действием растягивающих сил, приложенных по внутреннему контуру, Изв. НАН Армении Механика, (1997), т. 50, №2, стр. 46-53,
6. Avetisyan A.S., Aleksanyan D.R., About a problem of circular ring plane stability subjected to the uniformly distributed normal load by the external and internal contours Proc. of NAS RA, Mechanics, (2006), vol. 59, N3, pp.13-20. [in Russian],

   Аветисян А.С., Алексанян Д.Р., Об одной задаче устойчивости круговой кольцевой пластинки под действием равномерно распределенной по внутреннему и внешнему контурам нормальной нагрузки, Изв. НАН Армении Механика, (2006), т. 59, №3, стр. 13-20,
7. Williams H.E., The stability of circular rings under a uniformly distributed radial load Technical report, Jan 15, 1970, 34p.
8. Vetyukov Y., Stability and Supercritical Deformation of a Circular Ring with Intrinsic Curvature, (2017), In book: Irschik H., Belyaev A., Krommer M., (eds) Dynamics and Control of Advanced Structures and Machines, Springer, Cham, https: //doi.org/10.1007/978-3-319-43080-5_3
9. Paimushin, V.N., Ivanov, V.A., Stability of a Circular Sandwich Ring under an Axially Symmetric Temperature Field Inhomogeneous across the Thickness, Mechanics of Composite Materials (2001) vol. 37, iss. 5-6, pp. 495-510, https://doi.org/10.1023/A:1014273415
10. V.N. Paimushin, V.A. Ivanov, S.N. Bobrov, and T.V. Polyakova, “Stability problem of a circular sandwich ring under uniform external pressure,” (2000)Mech. Compos. Mater., **36**, No.3, 185-192.
11. Timoshenko S.P., Guder J., Theory of elasticity, (1979), Trans. from English. Edited by. Shapiro G.S., M: Nauka, 560 p, [in Russian],

    Тимошенко С.П., Гудер Ж. Теория упругости, (1979), пер. с английского. под Ред. Шапиро Г.С., М.: Наука, 560 с.
12. Timoshenko S.P., Stability of bars, plates and shells, (1971). Nauka, Moscow, [in Russian],

    Тимошенко С.П., Устойчивость стержней, пластин и оболочек, (1971).

13. G.H. Bryan, On the stability of a plane plate under thrust in its own plan, with applications the 'buckling' of the sides of a ship, Proc. of the London Math. Soc., (1891), vol. 22, pp. 54-67.
14. A.Ch. Dinnik, About the stability of the compressed circular plate, Proc. of Kiev Polytech. Institute, Ukraine (1911), [in Russian]
Динник А.Х., Об устойчивости сжатой круглой пластины, Учеб. киевский политех. Институт, Украина (1911).

Information about the authors:

A.S. Avetisyan - Institute of Mechanics of NAS of Armenia, Doctor of Science, Prof., **e-mail:** ara.serg.avetisyan@gmail.com

R.K. Aleksanyan - Yerevan State University of Architecture and Construction, Doctor of Science, Prof., **e-mail:** davidaleksanyan@gmail.com

D.R. Aleksanyan Yerevan State University of Architecture and Construction,
e-mail: davidaleksanyan@gmail.com

Received 31.01.2019

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 72, №1, 2019 Механика

Содержание 1-го номера за 2019 г., том 72

CONTENTS

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Сдано в производство 18.03.2019 г.
Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$. Печ. лист – 5 5/8
Заказ № 929. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24