ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика
УДК 539.3

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРТОТРОПНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Амбарцумян С.А.

Ключевые слова: изотропный материал, ортотропная электропроводность, неоднородная деформация, малые возмущения, линейные функциональные связи.

Ambartsumian S.A.

Theoretical Basics of the Orthotropic Electrical Conductivity of Isotropic Materials

Key words: isotropic material, orthotropic electrical conductivity, inhomogeneous deformation, small perturbations, linear functional connections.

The problem of the influence of deformation properties of elastic elements on specific electric resistance of isotropic electrically conductive materials is considered. It is shown that when in isotropic elastic elements inhomogeneity of elastic deformation is taken into account the electric current density is changed, which in its turn leads to anisotropy of electrical conductivity of material. The anisotropic properties of electrical conductivity σ_i along material anisotropy principal axes are characterized by both of deformation influence and new physical constants α_i .

Համբարձումյան Ս.Ա.

Իզոտրոպ նյութերի օրթոտրոպ էլեկտրահաղորդականության տեսական հիմունքները

Հիմնաբառեր. իզոտրոպ նյութ, օրթոտրոպ էլեկտրական հաղորդականություն, անհամասեռ դեֆորմացիա, փոքր գրգռումներ, գծային ֆունկցիոնալ կապեր:

Դիտարկվում է էլեկտրական հաղորդիչ նյութերից իզոտռոպ առաձգական տարրերի դեֆորմացիոն հատկությունների ազդեցությունը նյութի էլեկտրական դիմադրության վրա: Ցույց է տրվում, որ դեֆորմացիայի անհամասեռությունը ըստ նյութի անիզոտրոպիայի առանցքների բերում է էլեկտրական հոսանքի խտության փոփոխությունների, որոնք էլ իրենց հերթին հանգեցնում են նյութի էլեկտրական հաղորդականության անիզոտրոպայի: Անիզոթրոպ էլեկտրական հաղորդականությունը նյութի անիզոտրոպիայի գլխավոր առանցքների վրա σ_i բնութագրվում է դեֆորմացիայի անհամասեռությամբ եւ նոր՝ ֆիզիկական α_i գործակիցների ազդեցությամբ:

Рассматривается задача влияния деформативных свойств упругих элементов на удельное электрическое сопротивление изотропных электропроводящих материалов. Показывается, что при учёте неоднородности упругой деформации в изотропных упругих элементах меняется плотность электрического тока, что, в свою очередь, приводит к анизотропии электропроводности материала. Анизотропия электропроводности σ_i по главным осям анизотропии материала характеризуется влиянием деформации и новыми физическими постоянными α_i .

Введение. Прецизионные эксперименты [1÷3] показывают, что в однородных электропроводящих материалах коэффициент электропроводности $\sigma = R^{-1}$ (R - удельное электрическое сопротивление), линейно зависит не только от величины деформации

[1,2,5], но и от знака этой деформации. В работе [6] исследуется влияние изменения объёмного расширения металлических материалов на величину удельного электрического сопротивления. Приводятся решения задач для токопроводов с учётом зависимости электропроводности от изменения поперечного сечения.

1. Основные утверждения. Классические уравнения электродинамики при отсутствии поверхностных токов и сторонних зарядов в гауссовой системе координат имеют вид [3-5]:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad && \operatorname{div}\,\vec{B} = 0, \\ &\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, && \operatorname{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho_e, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\bar{E}$ – вектор напряжённости электрического поля, $\bar{H}$ – вектор напряжённости магнитного поля , $\bar{B}$ – вектор магнитной индукции, $\bar{J}$ – вектор плотности полного электрического тока, ρ_e – плотность электрического заряда, c – электродинамическая постоянная , t – время.

Уравнения (1.1) частично замыкаются материальными представлениями [4-5]

$$\begin{aligned} &\vec{B} = \mu\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\vec{V}\times\vec{E}, \\ &\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\vec{V}\times\vec{B}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где μ – магнитная проницаемость, ε – диэлектрическая постоянная, $\vec{V} = \partial\vec{\mathrm{u}}/\partial t$ – вектор скорости перемещения частиц тела $\vec{\mathrm{u}}=(\mathrm{u,v,w})$. Для полного замыкания системы уравнений (1.1) предлагается совершенно новое представление для компонент вектора плотности электрического тока $\bar{J}\left(i_1,\, i_2, i_3\right)$,

$$\begin{aligned} &i_1 = \sigma\left(1 - \alpha_1\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{B}\right) + \rho_e\vec{V} \\ &i_2 = \sigma\left(1 - \alpha_2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{B}\right) + \rho_e\vec{V} \\ &i_3 = \sigma\left(1 - \alpha_3\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{B}\right) + \rho_e\vec{V} \end{aligned} \tag{1.3}$$

где σ – коэффициент электропроводности недеформирумого изотропного тела, α_i – новые постоянные, характеризующие влияние деформации на коэффициент электропроводности σ, в частности, при

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} > 0,\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} > 0,\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} > 0, \qquad \alpha_i = \alpha_\rho$$
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} < 0,\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} < 0,\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} < 0, \qquad \alpha_i = \alpha_c \tag{1.4}$$

где $\mathrm{u}(x,y,z)$, $\mathrm{v}(x,y,z)$, $\mathrm{w}(x,y,z)$ – компоненты перемещения, α_c – новый коэффициент при деформации сжатия, α_ρ – новый коэффициент при деформации растяжения.

Для полного замыкания общей системы приведём также соответствующие уравнения движения [3-5]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + R_j = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$
$$\sigma_{ij} = 2G\ \varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\,\varepsilon_{ij}, \qquad i,j = 1,2,3 \Leftrightarrow x,y,z \tag{1.5}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжения, ρ – плотность материала, $G = E/2(1+\nu)$, $\lambda = \nu E/(1+\nu)(1-2\nu)$ – постоянные Ламе (E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона), $\vec{F}_j$ – объёмная сила, которая при наличии электрического тока и электрического заряда имеет вид [5]

$$\vec{F}_j = \frac{1}{c}\left(\dot{\vec{\eta}} + \vec{B}\right) + \rho_e^{\vec{E}}. \tag{1.6}$$

2. Соотношения при малых возмущениях. Ограничиваясь исследованием электромагнитных полей при малых возмущениях [2], векторы возмущённого электрического поля, а также вектор соответствующего перемещения, будут представлены следующим образом [4]:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}, \qquad \vec{E} = \vec{e}, \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$$
$$\vec{D} = \vec{d}, \qquad \vec{j} = \vec{j}', \qquad \vec{\mathrm{u}} = \vec{\mathrm{u}}_0 + \vec{\mathrm{u}}' \tag{2.1}$$

где

$$\vec{h}(h_1,h_2,h_3), \qquad \vec{e}(e_1,e_2,e_3), \qquad \vec{b}(b_1,b_2,b_3),$$
$$\vec{d}(d_1,d_2,d_3), \qquad \vec{j}(j_1,j_2,j_3), \qquad \vec{\mathrm{u}}'(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w}) \tag{2.2}$$

(в дальнейшем штрихи над $\vec{j}$ и $\vec{\mathrm{u}}$ опускаются).

Согласно (2.1), преобразуя соотношения (1.2), (1.3), получим следующие линейные функциональные связи для возмущённого магнитного поля:

$$\vec{b} = \mu\vec{h} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial t} \times \vec{H}_0,\ \vec{d} = \varepsilon\vec{e} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial t} \times \vec{H}_0, \tag{2.3}$$

а также, следующие нелинейные представления:

$$\vec{i}_1 = \sigma\left(1-\alpha_1\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)J_1,\ \ \vec{i}_2 = \sigma\left(1-\alpha_2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)J_2,$$
$$\vec{i}_3 = \sigma\left(1-\alpha_3\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)J_3,\ \ \vec{J} = \bar{e} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial t}\times H_0 \tag{2.4}$$

Линейные уравнения электродинамики для среды (вакуума), окружающей электропроводящее тело, имеют вид [4]

$$\mathrm{rot}\ h^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial e^{(e)}}{\partial t},\ \ \mathrm{rot}\, e^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h^{(e)}}{\partial t},$$
$$\mathrm{div}\ h^{(e)} = 0,\ \ \mathrm{div}\ e^{(e)} = 0. \tag{2.5}$$

Граничные условия на поверхности, которая разделяет внутреннюю и внешнюю области (вакуум), имеют следующий вид [4]:

$$n\times\left[H^{(e)} - H\right] = -\frac{v_n}{c}\left[E^{(e)} - \varepsilon E\right]$$
$$n\times\left[E^{(e)} - E\right] = -\frac{v_n}{c}\left[H^{(e)} - \mu H\right], \tag{2.6}$$

где V_n – макроскопические скорости поверхности контакта двух сред при малости изменения вектора нормали поверхности разрыва двух областей

$$\vec{\mathrm{n}} = \vec{\mathrm{n}} + \vec{\mathrm{n}}', \tag{2.7}$$

где $\vec{\mathrm{n}}'$ – малое возмущение нормали.

Представляя объёмные силы электродинамического происхождения при условии отсутствия сторонних токов и сторонних зарядов, согласно (1.5) и (2.4), получим [3-5]:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial z} + \rho K_1 = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial z} + \rho K_2 = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \tag{2.8}$$
$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial z} + \rho K_3 = \rho\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t^2}$$

При этом, для объёмных сил электродинамического происхождения, согласно (2.4), будем иметь:

$$\rho K_1 = \frac{\sigma}{c}\left(1-\alpha_1\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)R_1$$
$$\rho K_2 = \frac{\sigma}{c}\left(1-\alpha_2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)R_2$$
$$\rho K_3 = \frac{\sigma}{c}\left(1-\alpha_3\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)R_3,\quad \bar{R} = \mu\bar{J}\times\bar{H}_0 \tag{2.9}$$

Заключение. Показывается, что неоднородность упругих осевых удлинений (сжатия) в изотропных упругих элементах приводит к изменениям плотности электрического тока по этим осям. Это, в свою очередь, приводит к анизотропии электропроводности материала. На основании вышеизложенной общей теории ортотропной электропроводности изотропных материалов можно решать, интересные с точки зрения приложений, многочисленные конкретные задачи. При этом, вводом новых безразмерных коэффициентов α_i, задачи электромагнитоупругости становятся нелинейными. Учёт этих безразмерных характеристик материала архиважен для композиционных материалов со сеточной анизотропией.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Елецкий А.В.** Транспортные свойства углеродных нанотрубок. //Успехи Физических Наук, (2009), т.179, №3, стр.226-242., **Eletskii A.V.** Transport properties of carbon nanotubes. Uspekhi Pizicheskikh nauk, (2009) vol.179, №3, pp.226-242, DOI 10.3367/UFNr.0179.200903a.0225 (in Russian)
2. **Улыбин А.В.** Применение резистивного электроконтактного метода для мониторинга состояния стальных конструкций. //Инженерно-строительный журнал, (2010), №7, стр. 21-24. **Ulybin A.V.** Application of a Resistive Electro Contact Method for Monitoring the State of Steel Structures, Magazine of Civil Engineering, (2010), № 7, pp.21-24, (in Russian).
3. **Созыкин С.А., Бескачко В.П.** Зависимость электрического сопротивления углеродной нанотрубки с металлическим типом проводимости от механического нагружения и интеркалирования серой. //Вестник Южно-Уральского университета: Сер. Математика, Механика, Физика, (2011), вып. 5, стр.115-119, **Sozikin S.A., Beskachko V.P.** Electrical Resistance of Carbone Nanotube with a Metallic Type of Conductivity During Mechanical Loading and Intercalation by Sulfur, Bulletin of the South Ural University: Ser. Mathematics, Mechanics, Physics; (2011), vol.5, pp. 115-119, (in Russian).
4. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.**, Колебание и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1992. **Ambartsumyan S.A., Belubekyan M.V.** Oscillation and stability of current-carrying elastic plates, (1992), Yerevan: Publishing house of the National Academy of Sciences of Armenia, (in Russian)..
5. **Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.** Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. Москва: Наука, 1977. **Ambartsumian S.A., Bagdasaryan G.E., Belubekyan M.V.** Magneto elasticity of Thin Shells and Plates. Moscow: Nauka, 1977. (in Russian).
6. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** О проблеме электромагнитоупругости тел с «ортотропной» электропроводностью. //Доклады НАН Армении, (2017), том.117. №2, стр.132-138. **Ambartsumian S.A., Belubekyan M.V.** On the Electro magneto elasticity Problem of the Body with «Orthotropic» Electro conductivity, Reports of the NAS of Armenia, (2017), vol.117, №2, pp.132-138, (in Russian).

About autor:

Segrey A. Ambartsumian – Institute of Mechanics of NAS of Armenia,
E-mail: samb@gmail.com

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика
УДК 539.3

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПО ПРОГНОЗУ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Агаловян Л.А., Тагворян В.В.

Ключевые слова: Неклассическая краевая задача, асимптотический метод, внешняя задача, слоистый пакет.

Aghalovyan L.A., Tagvoryan V.V.

On a class of non-classical three-dimensional problems of the elasticity theory for earthquake prediction

Keywords: The non-classical boundary value problem, asymptotic method, the outer problem, layered packet.

A three-dimensional non-classical boundary-value problem of the theory of elasticity for a layered packet of orthotropic plates, which has essential importance in seismology is solved. The case, when the measuring devices used to obtain the values of the displacement vector components are placed between the layers of the packet with the numbers (k-1) and (k), and separation occurs between the layers with the numbers (p-1) and (p) (p > k) is studied. An asymptotic solution of the outer problem is found. The case when the solution becomes mathematically exact is emphasized. An illustrative example is given.

Աղալովյան Լ.Ա., Թագվորյան Վ.Վ.

Երկրաշարժերի կանխատեսման վերաբերյալ առաձգականության տեսության ոչ դասական եռաչափ խնդիրների մեկ դասի մասին

Հիմնաբառեր. Ոչ դասական եզրային խնդիր, ասիմպտոտիկ մեթոդ, արտաքին խնդիր, շերտավոր փաթեթ:

Օրթոտրոպ սալերից բաղկացած շերտավոր փաթեթի համար ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է առաձգականության տեսության տարածական ոչ դասական եզրային խնդիր, որն ունի էական նշանակություն սեյսմոլոգիայում: Ուսումնասիրված է այն դեպքը, երբ չափիչ սարքերը, որոնց օգնությամբ ստացվում են տվյալներ տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների արժեքների վերաբերյալ, տեղադրված են փաթեթի (k-1)-րդ և (k)-րդ շերտերի միջև, իսկ (p-1)-րդ և (p)-րդ շերտերի միջև (p > k) առկա է խզում: Գտնված է արտաքին խնդրի ասիմպտոտիկական լուծումը: Ընդգծված է, թե երբ այդ լուծումը կհանդիսանա մաթեմատիկորեն ճշգրիտ: Բերված է իլյուստրացիոն օրինակ:

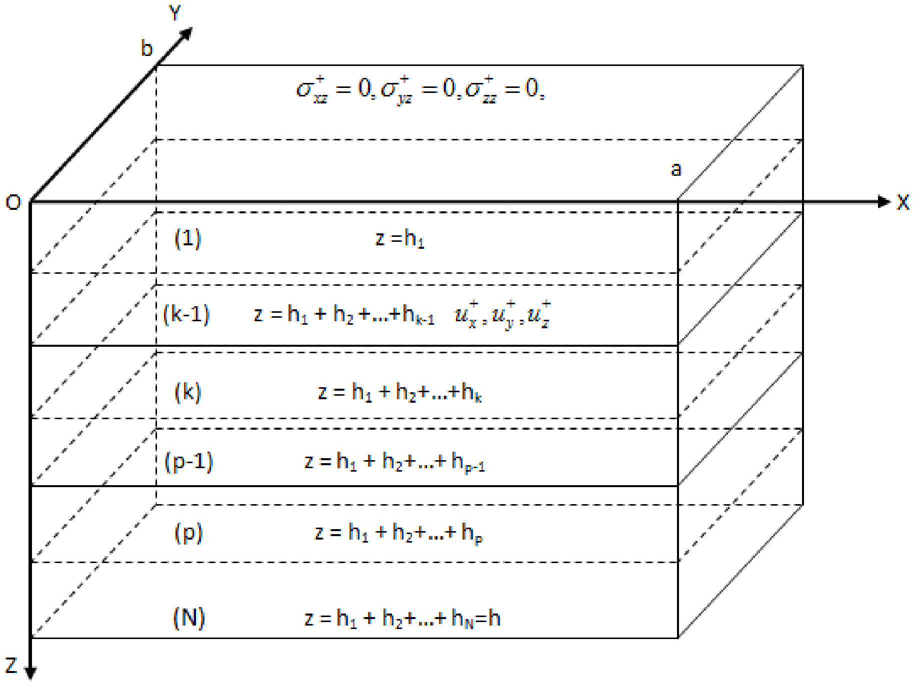
Решена трёхмерная неклассическая краевая задача теории упругости для слоистого пакета из ортотропных пластин, которая имеет существенное значение в сейсмологии. Изучен тот случай, когда измерительные приборы, при помощи которых определяются значения компонент вектора перемещения, помещены между слоями пакета с номерами (k-1) и (k), а между слоями с номерами (p-1) и (p) имеет место отрыв ($p > k$). Найдено асимптотическое решение внешней задачи. Подчёркнут случай, когда решение становится математически точным. Приведён иллюстрационный пример.

Введение. Слоистые структуры являются естественными и искусственными. Одними из естественных слоистых структур являются литосферные плиты Земли и отдельные блоки земной коры. Исследования по прогнозу землетрясений показали, что сильные землетрясения являются результатом тектонических движений литосферных плит Земли (≈95% землетрясений) [1-3]. Выделяют связанные с возникновением землетрясений две стадии тектонических движений: медленные (вековые) и быстротечные (скачкообразные). Вековые движения являются квазистатическими и могут длиться десятки лет, в результате, в литосферных плитах и отдельных блоках земной коры накапливаются деформации, которые, достигнув критического значения порядка 10^{-4}, а по данным известного японского сейсмолога Rikitake [1] – порядка $4.7 \cdot 10^{-5}$, приводят к глобальному разрушению (землетрясению) и основная часть накопленной с годами огромной потенциальной энергии деформации выделяется в виде объёмных упругих продольных P и сдвиговых S – волн, а также поверхностных волн Релея и Лява. Всегда скорость V_P больше скорости V_S. Фиксируя время прихода этих волн в заданную точку, по их разности удаётся установить расстояние очага землетрясения от заданной станции, а по данным трёх станций – его расположение.

Быстрые (скачкообразные) движения возникают в результате форшока, самого землетрясения и афтершока. Таким образом, землетрясение – есть результат глобального разрушения. Следовательно, для предсказания землетрясений необходимо найти напряжённо-деформированные состояния литосферных плит Земли и отдельных блоков земной коры, которые также являются слоистыми, и проследить за их изменением во времени. Поэтому, определение напряжённо-деформированных состояний таких слоистых структур представляет большой теоретический и практический интерес.

В середине двадцатого столетия были зафиксированы заметные деформации (перемещения точек) поверхности Земли до землетрясения [1]. Тогда же возникла естественная задача – используя эти данные, определить напряжённо-деформированное состояние (НДС) литосферной плиты или соответствующего блока земной коры и провести мониторинг его изменения во времени, по данным новых измерений с целью обнаружения критических деформационных состояний и мест их проявления. Возникающая задача оказалась неклассической задачей теории упругости, поскольку на лицевую поверхность приходится ставить шесть условий: поверхность свободна, т.е. три компоненты тензора напряжений равны нулю, но известны значения перемещений точек этой поверхности (три условия). В классической же задаче теории упругости на поверхности ставятся три условия. Асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений [4] позволил решить эту проблему [5].

Чтобы уменьшить влияние изменений внешних аномальных (в основном, атмосферных) факторов на данные истинно происходящих процессов внутри пакета (литосферной плиты), в сейсмологии начали измерительные приборы (наклономеры, деформографы и др.) помещать внутри пакета на некотором расстоянии от лицевой поверхности. С другой стороны, на основе периодически проводимых измерений и анализа соответствующего решения становится возможным обнаруживать место и время, когда прочность соединения между некоторыми слоями будет нарушена и будет происходить расслоение между отдельными слоями пакета и перераспределение НДС с последующим процессом накопления критических деформаций. В данной работе решена соответствующая квазистатическая задача теории упругости, когда измерительные приборы помещены внутри пакета, а между некоторыми слоями имеет место отрыв.



Фиг. 1 Слоистый пакет из ортотропных пластин

1. Основные уравнения и постановка краевой задачи. Рассмотрим слоистый пакет из N ортотропных пластин, который моделирует поведение литосферных плит Земли и отдельных блоков земной коры в процессе подготовки землетрясений. Пакет занимает область $D=\{(x,y,z): 0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le h,$ $h=h_1+h_2+\ldots+h_N,\ \min(a,b)=l, h<<l\}$, где $h_n\ (1\le n\le N)$ – толщины пластин (фиг.1).

Требуется найти решение уравнений и соотношений упругости (состояния) пространственной задачи теории упругости для слоистого пакета из N ортотропных пластин, когда лицевая поверхность $z=0$ пакета свободна:

$$\sigma_{jz}^{(1)}\left(x,y,0,t\right)=0, \qquad j=x,y,z, \tag{1.1}$$

между слоями до слоя с номером (k-1) контакт полный:

$$\begin{cases}\sigma_{jz}^{(n-1)}\left(x,y,H_{n-1},t\right)=\sigma_{jz}^{(n)}\left(x,y,H_{n-1},t\right)\\ u_j^{(n-1)}\left(x,y,H_{n-1},t\right)=u_j^{(n)}\left(x,y,H_{n-1},t\right)\end{cases} \qquad j=x,y,z,\ 2\le n\le k-1, \tag{1.2}$$

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} h_i, \qquad 2 \le n \le k-2,$$

заданы значения перемещений точек поверхности контакта $z = H_{k-1}$ между слоями с номерами (k-1) и (k), как данные наклономеров и других измерительных средств:

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(k-1)}\left(x, y, H_{k-1}, t\right) = \sigma_{jz}^{(k)}\left(x, y, H_{k-1}, t\right) \\ u_j^{(k-1)}\left(x, y, H_{k-1}, t\right) = u_j^{(k)}\left(x, y, H_{k-1}, t\right) = u_j^{+}\left(x, y, H_{k-1}, t\right) \end{cases} \quad j = x, y, z, \tag{1.3}$$

для последующих слоёв до слоя с номером (p-1) контакт полный:

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(n-1)}\left(x, y, H_{n-1}, t\right) = \sigma_{jz}^{(n)}\left(x, y, H_{n-1}, t\right) \\ u_j^{(n-1)}\left(x, y, H_{n-1}, t\right) = u_j^{(n)}\left(x, y, H_{n-1}, t\right) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad k+1 \le n \le p-1, \tag{1.4}$$

между слоями с номерами (p-1) и (p) есть отрыв:

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(p-1)}\left(x, y, H_{p-1}, t\right) = \sigma_{jz}^{(p)}\left(x, y, H_{p-1}, t\right) \\ u^{(p)}\left(x, y, H_{p-1}, t\right) - u^{(p-1)}\left(x, y, H_{p-1}, t\right) = k_1 f_1\left(x, y, H_{p-1}, t\right) \\ v^{(p)}\left(x, y, H_{p-1}, t\right) - v^{(p-1)}\left(x, y, H_{p-1}, t\right) = k_2 f_2\left(x, y, H_{p-1}, t\right) \\ w^{(p-1)}\left(x, y, H_{p-1}, t\right) = w^{(p)}\left(x, y, H_{p-1}, t\right) \end{cases} \quad j = x, y, z, \tag{1.5}$$

и при условиях полного контакта между всеми остальными слоями:

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(n-1)}\left(x, y, H_{n-1}, t\right) = \sigma_{jz}^{(n)}\left(x, y, H_{n-1}, t\right) \\ u_j^{(n-1)}\left(x, y, H_{n-1}, t\right) = u_j^{(n)}\left(x, y, H_{n-1}, t\right) \end{cases} \quad j = x, y, z, \quad p+1 \le n \le N, \tag{1.6}$$

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} h_i, \quad n = 1, 2, ..., N-1,$$

где σ_{jz} – компоненты тензора напряжений, u_x, u_y, u_z – компоненты вектора перемещения, f_1, f_2 – заданные функции, время t входит как параметр (квазистатическая задача), фиксирующий момент времени проведения измерений.

2. Асимптотическое решение задачи. Чтобы решить сформулированную задачу, в уравнениях и соотношениях трёхмерной задачи теории упругости ортотропного тела перейдём к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = x/l,\ \eta = y/l,\ \zeta = z/h = \varepsilon^{-1} z/l,\ u = u_x/l,\ v = u_y/l,\ w = u_z/l, \tag{2.1}$$

В результате получим сингулярно-возмущённую малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(k)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k)}}{\partial\zeta}+lF_x^{(k)}=0,\qquad (x,y;\xi,\eta)$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(k)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{zz}^{(k)}}{\partial\zeta}+lF_z^{(k)}=0,$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\xi}=e_1^{(k)}+\alpha_{11}^{(k)}\theta^{(k)},\ \frac{\partial v^{(k)}}{\partial\eta}=e_2^{(k)}+\alpha_{22}^{(k)}\theta^{(k)},\ \varepsilon^{-1}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta}=e_3^{(k)}+\alpha_{33}^{(k)}\theta^{(k)}, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\eta}=a_{44}^{(k)}\sigma_{yz}^{(k)},\ \varepsilon^{-1}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\xi}=a_{55}^{(k)}\sigma_{xz}^{(k)},\ \frac{\partial v^{(k)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\eta}=a_{66}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k)},$$

$$e_m^{(k)}=a_{1m}^{(k)}\sigma_{xx}^{(k)}+a_{2m}^{(k)}\sigma_{yy}^{(k)}+a_{3m}^{(k)}\sigma_{zz}^{(k)},\ m=1,2,3.$$

где a_{ij} – постоянные упругости, α_{ij} – коэффициенты температурного расширения, $\theta^{(k)}=T^{(k)}(x,y,z,t)-T_0^{(k)}(x,y,z,t_0)$ – разность температур, F_j – объёмная сила, для случая учёта веса слоёв $F_x^{(k)}=F_y^{(k)}=0,\ \ F_z^{(k)}=\rho_k g,\ \ \rho_k$ – плотность, g – ускорение силы тяжести. Решение системы (2.2) складывается из решений внешней задачи $\left(I^{out}\right)$ и пограничного слоя $\left(I_b\right)$. Решение внешней задачи отыскивается в виде:

$$\sigma_{ij}^{(k)out}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{(k,s)},\ (i,j=x,y,z),\ u^{(k)out}=\varepsilon^s u^{(k,s)},\ (u,v,w),\ s=\overline{0,S}. \tag{2.3}$$

Обозначение $s=\overline{0,S}$ (Эйнштейна) означает, что в (2.3) и в последующем по повторяющемуся (немому) индексу s происходит суммирование от нуля до числа приближений S. Подставив (2.3) в (2.2) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε, получим новую систему, откуда однозначно определяются $\sigma_{ij}^{(k,s)},u^{(k,s)},v^{(k,s)},w^{(k,s)}$:

$$\sigma_{jz}^{(k,s)}=\sigma_{jz0}^{(k,s)}(\xi,\eta)+\sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta),\ j=x,y,z$$

$$\sigma_{xx}^{(k,s)}=-\frac{A_{23}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\sigma_{zz0}^{(k,s)}-\frac{\gamma_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\theta^{(k,s)}+\sigma_{xx*}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$\sigma_{yy}^{(k,s)}=-\frac{A_{13}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\sigma_{zz0}^{(k,s)}-\frac{\gamma_{22}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\theta^{(k,s)}+\sigma_{yy*}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(k)}}\left[\frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \eta}\right], \tag{2.4}$$

$$u^{(k,s)} = a_{55}^{(k)}\zeta\sigma_{xz0}^{(k,s)} + u_0^{(k,s)}(\xi,\eta) + u_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$v^{(k,s)} = a_{44}^{(k)}\zeta\sigma_{yz0}^{(k,s)} + v_0^{(k,s)}(\xi,\eta) + v_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$w^{(k,s)} = \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\zeta\sigma_{zz0}^{(k,s)} + w_0^{(k,s)}(\xi,\eta) + \int_0^{\zeta}\frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\theta^{(k,s)}d\zeta + w_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

где

$$\sigma_{jz*}^{(k,s)} = -\int_0^{\zeta}\left[F_j^{(k,s)} + \frac{\partial\sigma_{jx}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial\sigma_{jy}^{(k,s-1)}}{\partial \eta}\right]d\zeta,\ j = x, y, z,$$

$$\sigma_{xx*}^{(k,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(k)}}\left[a_{22}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - a_{12}^{(k)}\frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - A_{23}^{(k)}\sigma_{zz*}^{(k,s)}\right],$$

$$\sigma_{yy*}^{(k,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(k)}}\left[a_{11}^{(k)}\frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - a_{12}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(k)}\sigma_{zz*}^{(k,s)}\right],$$

$$u_*^{(k,s)} = \int_0^{\zeta}\left[a_{55}^{(k)}\sigma_{xz*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \xi}\right]d\zeta,\quad v_*^{(k,s)} = \int_0^{\zeta}\left[a_{44}^{(k)}\sigma_{yz*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \eta}\right]d\zeta, \tag{2.5}$$

$$w_*^{(k,s)} = \int_0^{\zeta}\left[a_{13}^{(k)}\sigma_{xx*}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)}\sigma_{yy*}^{(k,s)} + a_{33}^{(k)}\sigma_{zz*}^{(k,s)}\right]d\zeta,$$

$$A_{11}^{(k)} = a_{11}^{(k)}a_{22}^{(k)} - \left(a_{12}^{(k)}\right)^2,\ A_{13}^{(k)} = a_{11}^{(k)}a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)}a_{13}^{(k)},$$

$$A_{23}^{(k)} = a_{22}^{(k)}a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)}a_{13}^{(k)},\ A_{33}^{(k)} = a_{33}^{(k)}A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)}A_{23}^{(k)} - a_{23}^{(k)}A_{13}^{(k)},$$

$$\gamma_{11}^{(k)} = \alpha_{11}^{(k)}a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)}\alpha_{22}^{(k)},\ \gamma_{22}^{(k)} = \alpha_{22}^{(k)}a_{11}^{(k)} - a_{12}^{(k)}\alpha_{11}^{(k)},$$

$$B_{11}^{(k)} = \alpha_{33}^{(k)}A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)}\gamma_{11}^{(k)} - a_{23}^{(k)}\gamma_{22}^{(k)},\ Q^{(k,m)} \equiv 0 \ \text{ при } m < 0.$$

Решение (2.4) содержит 6N неизвестных функций $\sigma_{jz0}^{(k,s)}$, $u_0^{(k,s)}$, $v_0^{(k,s)}$, $w_0^{(k,s)}$, которые однозначно определяются из условий (1.1) - (1.6). Для первого слоя имеем:

$$\sigma_{jz0}^{(1,s)}=0,\qquad \sigma_{jz}^{(1,s)}=\sigma_{jz*}^{(1,s)}(\xi,\eta,\zeta),\qquad j=x,y,z,$$

$$u^{(1,s)}=u_0^{(1,s)}(\xi,\eta)+u_*^{(1,s)}(\xi,\eta,\zeta), \tag{2.6}$$

$$v^{(1,s)}=v_0^{(1,s)}(\xi,\eta)+v_*^{(1,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$w^{(1,s)}=w_0^{(1,s)}(\xi,\eta)+\int_0^{\zeta}\frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}}\theta^{(1,s)}d\zeta+w_*^{(1,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

для величин слоёв до (k-1) получаются:

$$\sigma_{jz}^{(n,s)}=\sigma_{jz0}^{(n-1,s)}(\xi,\eta)+\sigma_{jz*}^{(n-1,s)}(\xi,\eta,\zeta_{n-1})-\sigma_{jz*}^{(n,s)}(\xi,\eta,\zeta_{n-1})+$$

$$+\sigma_{jz*}^{(n,s)}(\xi,\eta,\zeta),\qquad j=x,y,z,$$

$$u^{(n,s)}=a_{55}^{(n)}\sigma_{xz0}^{(n,s)}(\zeta-\zeta_{n-1})+a_{55}^{(n-1)}\zeta_{n-1}\sigma_{xz0}^{(n-1,s)}+u_0^{(n-1,s)}(\xi,\eta)+$$

$$+u_*^{(n-1,s)}(\xi,\eta,\zeta_{n-1})-u_*^{(n,s)}(\xi,\eta,\zeta_{n-1})+u_*^{(n,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$v^{(n,s)}=a_{44}^{(n)}\sigma_{yz0}^{(n,s)}(\zeta-\zeta_{n-1})+a_{44}^{(n-1)}\zeta_{n-1}\sigma_{yz0}^{(n-1,s)}+v_0^{(n-1,s)}(\xi,\eta)+$$

$$+v_*^{(n-1,s)}(\xi,\eta,\zeta_{n-1})-v_*^{(n,s)}(\xi,\eta,\zeta_{n-1})+v_*^{(n,s)}(\xi,\eta,\zeta), \tag{2.7}$$

$$w^{(n,s)}=\frac{A_{33}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}}\sigma_{zz0}^{(n,s)}(\zeta-\zeta_{n-1})+\frac{A_{33}^{(n-1)}}{A_{11}^{(n-1)}}\zeta_{n-1}\sigma_{zz0}^{(n-1,s)}+$$

$$+\int_0^{\zeta_{n-1}}\left(\frac{B_{11}^{(n-1)}}{A_{11}^{(n-1)}}\theta^{(n-1,s)}-\frac{B_{11}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}}\theta^{(n,s)}\right)d\zeta+\int_0^{\zeta}\frac{B_{11}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}}\theta^{(n,s)}d\zeta+$$

$$+w_0^{(n-1,s)}(\xi,\eta)+w_*^{(n-1,s)}(\xi,\eta,\zeta_{n-1})-w_*^{(n,s)}(\xi,\eta,\zeta_{n-1})+$$

$$+w_*^{(n,s)}(\xi,\eta,\zeta),\qquad 2\le n\le k-1,$$

для слоя с номером (k) имеем:

$$\sigma_{jz}^{(k,s)} = \sigma_{jz0}^{(k-1,s)}(\xi,\eta) + \sigma_{jz*}^{(k-1,s)}(\xi,\eta,\zeta_{k-1}) - \sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta_{k-1}) +$$
$$+\sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta), \qquad j = x, y, z,$$

$$\begin{aligned}
u^{(k,s)} &= a_{55}^{(k)}\sigma_{xz0}^{(k,s)}(\zeta-\zeta_{k-1}) + u^{+(s)}(\xi,\eta,\zeta_{k-1}) - u_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta_{k-1}) + \\
&\quad + u_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta), \\
v^{(k,s)} &= a_{44}^{(k)}\sigma_{yz0}^{(k,s)}(\zeta-\zeta_{k-1}) + v^{+(s)}(\xi,\eta,\zeta_{k-1}) - v_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta_{k-1}) + \\
&\quad + v_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta),
\end{aligned} \qquad (2.8)$$

$$w^{(k,s)} = \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\sigma_{zz0}^{(k,s)}(\zeta-\zeta_{k-1}) + w^{+(s)}(\xi,\eta,\zeta_{k-1}) - \int_0^{\zeta_{k-1}} \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\theta^{(k,s)}d\zeta -$$
$$-w_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta_{k-1}) + \int_0^{\zeta} \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\theta^{(k,s)}d\zeta + w_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

для последующих слоёв до (p-1), удовлетворив условиям полного контакта (1.4), снова получим формулы (2.7) с той разницей, что уже параметр n будет принимать значения $k+1 \le n \le p-1$.

Для слоя с номером (p) имеем:

$$\sigma_{jz}^{(p,s)} = \sigma_{jz0}^{(p-1,s)}(\xi,\eta) + \sigma_{jz*}^{(p-1,s)}(\xi,\eta,\zeta_{p-1}) - \sigma_{jz*}^{(p,s)}(\xi,\eta,\zeta_{p-1}) +$$
$$+\sigma_{jz*}^{(p,s)}(\xi,\eta,\zeta), \qquad j = x, y, z,$$

$$\begin{aligned}
u^{(p,s)} &= a_{55}^{(p)}\sigma_{xz0}^{(p,s)}(\zeta-\zeta_{p-1}) + a_{55}^{(p-1)}\zeta_{p-1}\sigma_{xz0}^{(p-1,s)} + k_1 f_1^{(s)}(\xi,\eta,\zeta_{p-1}) + \\
&\quad + u_0^{(p-1,s)}(\xi,\eta) + u_*^{(p-1,s)}(\xi,\eta,\zeta_{p-1}) - u_*^{(p,s)}(\xi,\eta,\zeta_{p-1}) + u_*^{(p,s)}(\xi,\eta,\zeta), \\
v^{(p,s)} &= a_{44}^{(p)}\sigma_{yz0}^{(p,s)}(\zeta-\zeta_{p-1}) + a_{44}^{(p-1)}\zeta_{p-1}\sigma_{yz0}^{(p-1,s)} + k_2 f_2^{(s)}(\xi,\eta,\zeta_{p-1}) + \\
&\quad + v_0^{(p-1,s)}(\xi,\eta) + v_*^{(p-1,s)}(\xi,\eta,\zeta_{p-1}) - v_*^{(p,s)}(\xi,\eta,\zeta_{p-1}) + v_*^{(p,s)}(\xi,\eta,\zeta),
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

$$w^{(p,s)} = \frac{A_{33}^{(p)}}{A_{11}^{(p)}}\sigma_{zz0}^{(p,s)}(\zeta-\zeta_{p-1}) + \frac{A_{33}^{(p-1)}}{A_{11}^{(p-1)}}\zeta_{p-1}\sigma_{zz0}^{(p-1,s)} +$$
$$+\int_0^{\zeta_{p-1}}\left(\frac{B_{11}^{(p-1)}}{A_{11}^{(p-1)}}\theta^{(p-1,s)} - \frac{B_{11}^{(p)}}{A_{11}^{(p)}}\theta^{(p,s)}\right)d\zeta + \int_0^{\zeta}\frac{B_{11}^{(p)}}{A_{11}^{(p)}}\theta^{(p,s)}d\zeta +$$
$$+w_0^{(p-1,s)}(\xi,\eta) + w_*^{(p-1,s)}(\xi,\eta,\zeta_{p-1}) - w_*^{(p,s)}(\xi,\eta,\zeta_{p-1}) + w_*^{(p,s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

для всех остальных слоёв, начиная с (p+1), после удовлетворения условиям (1.6) получаются снова формулы (2.7) с той разницей, что $p + 1 \leq n \leq N$.

Выведенные выше формулы (2.3) – (2.9) носят итерационный характер и позволяют найти значения всех компонент тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной точностью во внешней задаче.

Если входящие в граничные условия и в условия контакта между слоями функции являются многочленами от тангенциальных координат, итерационный процесс обрывается на определённом приближении и получаем математически точное решение во внешней задаче. Повторив измерения в различные периоды времени t и проведя анализ соответствующего решения, становится возможным выявления мест и периода времени, когда возможны возникновения критических состояний и процесс может стать динамическим и быстротечным, приводящим к возникновению землетрясения. Вычислив потенциальную энергию деформации и проследив за её изменением во времени, можно составить представление о вероятной величине магнитуды ожидаемого землетрясения [2]. Решение внешней задачи, как правило, не удовлетворяет граничным условиям на боковой поверхности пакета. Чтобы устранить возникшую невязку, следует построить решение для пограничного слоя. Решение пограничного слоя имеет экспоненциально убывающий характер по мере удаления от боковой поверхности во внутрь пакета и устраняет возможную неувязку на боковой поверхности. Решение для пограничного слоя строится описанным в [4] способом. Поскольку тангенциальные размеры пластинчатого пакета велики по сравнению с толщиной пакета, в вопросах сейсмологии оно обычно пренебрегается. Динамические быстротечные процессы (форшок, само землетрясение, афтершок) можно исследовать, как в работе [6].

3. О математически точных решениях. В качестве иллюстрации приведём математически точное решение для шестислойного пакета, когда между вторым и третьим слоями заданы значения перемещений точек, как данные измерений наклономеров и других измерительных средств, между четвёртым и пятым слоями есть отрыв, а между всеми остальными слоями – контакт полный.

Граничными условиями задачи будут:

$$\sigma_{jz}^{(1)}\left(x, y, 0, t\right) = 0, \qquad j = x, y, z, \qquad \zeta = 0, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right) = \sigma_{jz}^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right) \\ u_j^{(1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right) = u_j^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right) \end{cases} \qquad j = x, y, z, \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right) = \sigma_{jz}^{(3)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right) \\ u_j^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right) = u_j^{(3)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right) = u_j^{+}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right) \end{cases} \qquad j = x, y, z, \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(3)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right) = \sigma_{jz}^{(4)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right) \\ u_j^{(3)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right) = u_j^{(4)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right) \end{cases} \qquad j = x, y, z, \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(5)}\left(\xi,\eta,\zeta_4\right)=\sigma_{jz}^{(4)}\left(\xi,\eta,\zeta_4\right) \\ u^{(5)}\left(\xi,\eta,\zeta_4\right)-u^{(4)}\left(\xi,\eta,\zeta_4\right)=k_1 f_1\left(\xi,\eta,\zeta_4\right) \\ v^{(5)}\left(\xi,\eta,\zeta_4\right)-v^{(4)}\left(\xi,\eta,\zeta_4\right)=k_2 f_2\left(\xi,\eta,\zeta_4\right) \\ w^{(5)}\left(\xi,\eta,\zeta_4\right)=w^{(4)}\left(\xi,\eta,\zeta_4\right) \end{cases} \qquad j=x,y,z, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(5)}\left(\xi,\eta,\zeta_5\right)=\sigma_{jz}^{(6)}\left(\xi,\eta,\zeta_5\right) \\ u_j^{(5)}\left(\xi,\eta,\zeta_5\right)=u_j^{(6)}\left(\xi,\eta,\zeta_5\right) \end{cases} \qquad j=x,y,z, \tag{3.6}$$

где функции участвующие в граничных условиях имеют следующий вид:

$$u^{+}=l\left(b_{1u}+\xi b_{2u}+\eta b_{3u}\right),\ \left(u,v,w\right),\quad \theta^{(k)}=0,\frac{1}{2}\ F_x^{(k)}=F_y^{(k)}=F_z^{(k)}=0,$$

$$f_1\left(\xi,\eta,\zeta_4\right)=c_{11}+\xi c_{12}+\eta c_{13},\quad f_2\left(\xi,\eta,\zeta_4\right)=c_{21}+\xi c_{22}+\eta c_{23},$$

Итерационный процесс обрывается на втором приближении, в результате имеем:

величины первого слоя: $\left(0\le\zeta\le\zeta_1\right)$

$$\begin{gathered}
\sigma_{xz}^{(1)}=\sigma_{yz}^{(1)}=\sigma_{zz}^{(1)}=0,\quad \sigma_{xx}^{(1)}=\frac{1}{A_{11}^{(1)}}\left[a_{22}^{(1)}b_{2u}-a_{12}^{(1)}b_{3v}\right],\\
\sigma_{yy}^{(1)}=\frac{1}{A_{11}^{(1)}}\left[a_{11}^{(1)}b_{3v}-a_{12}^{(1)}b_{2u}\right],\quad \sigma_{xy}^{(1)}=\frac{1}{a_{66}^{(1)}}\left[b_{2v}+b_{3u}\right],\\
u_x^{(1)}=l\left(b_{1u}+\xi b_{2u}+\eta b_{3u}\right)+hb_{2w}\left(\zeta_2-\zeta\right),\\
u_y^{(1)}=l\left(b_{1v}+\xi b_{2v}+\eta b_{3v}\right)+hb_{3w}\left(\zeta_2-\zeta\right),\\
u_z^{(1)}=l\left(b_{1w}+\xi b_{2w}+\eta b_{3w}\right)-hw_*^{(1,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right)+hw_*^{(2,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right)-\\
-hw_*^{(2,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right)+hw_*^{(1,1)}\left(\xi,\eta,\zeta\right),
\end{gathered} \tag{3.7}$$

величины второго слоя: $\left(\zeta_1\le\zeta\le\zeta_2\right)$

$$\begin{gathered}
\sigma_{xz}^{(2)}=\sigma_{yz}^{(2)}=\sigma_{zz}^{(2)}=0,\quad \sigma_{xx}^{(2)}=\frac{1}{A_{11}^{(2)}}\left[a_{22}^{(2)}b_{2u}-a_{12}^{(2)}b_{3v}\right],\\
\sigma_{yy}^{(2)}=\frac{1}{A_{11}^{(2)}}\left[a_{11}^{(2)}b_{3v}-a_{12}^{(2)}b_{2u}\right],\quad \sigma_{xy}^{(2)}=\frac{1}{a_{66}^{(2)}}\left[b_{2v}+b_{3u}\right],\\
u_x^{(2)}=l\left(b_{1u}+\xi b_{2u}+\eta b_{3u}\right)+hb_{2w}\left(\zeta_2-\zeta\right),\\
u_y^{(2)}=l\left(b_{1v}+\xi b_{2v}+\eta b_{3v}\right)+hb_{3w}\left(\zeta_2-\zeta\right),\\
u_z^{(2)}=l\left(b_{1w}+\xi b_{2w}+\eta b_{3w}\right)-hw_*^{(2,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right)+hw_*^{(2,1)}\left(\xi,\eta,\zeta\right),
\end{gathered} \tag{3.8}$$

величины третьего слоя: $\left(\zeta_2\le\zeta\le\zeta_3\right)$

$$\sigma_{xz}^{(3)}=\sigma_{yz}^{(3)}=\sigma_{zz}^{(3)}=0,\quad \sigma_{xx}^{(3)}=\frac{1}{A_{11}^{(3)}}\left[a_{22}^{(3)}b_{2u}-a_{12}^{(3)}b_{3v}\right],$$
$$\sigma_{yy}^{(3)}=\frac{1}{A_{11}^{(3)}}\left[a_{11}^{(3)}b_{3v}-a_{12}^{(3)}b_{2u}\right],\quad \sigma_{xy}^{(3)}=\frac{1}{a_{66}^{(3)}}\left[b_{2v}+b_{3u}\right],$$
$$u_x^{(3)}=l\left(b_{1u}+\xi b_{2u}+\eta b_{3u}\right)+hb_{2w}\left(\zeta_2-\zeta\right), \tag{3.9}$$
$$u_y^{(3)}=l\left(b_{1v}+\xi b_{2v}+\eta b_{3v}\right)+hb_{3w}\left(\zeta_2-\zeta\right),$$
$$u_z^{(3)}=l\left(b_{1w}+\xi b_{2w}+\eta b_{3w}\right)-hw_*^{(3,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right)+hw_*^{(3,1)}\left(\xi,\eta,\zeta\right),$$

величины четв/ртого слоя: $\left(\zeta_3\le\zeta\le\zeta_4\right)$

$$\sigma_{xz}^{(4)}=\sigma_{yz}^{(4)}=\sigma_{zz}^{(4)}=0,\quad \sigma_{xx}^{(4)}=\frac{1}{A_{11}^{(4)}}\left[a_{22}^{(4)}b_{2u}-a_{12}^{(4)}b_{3v}\right],$$
$$\sigma_{yy}^{(4)}=\frac{1}{A_{11}^{(4)}}\left[a_{11}^{(4)}b_{3v}-a_{12}^{(4)}b_{2u}\right],\quad \sigma_{xy}^{(4)}=\frac{1}{a_{66}^{(4)}}\left[b_{2v}+b_{3u}\right],$$
$$u_x^{(4)}=l\left(b_{1u}+\xi b_{2u}+\eta b_{3u}\right)+hb_{2w}\left(\zeta_2-\zeta\right), \tag{3.10}$$
$$u_y^{(4)}=l\left(b_{1v}+\xi b_{2v}+\eta b_{3v}\right)+hb_{3w}\left(\zeta_2-\zeta\right),$$
$$u_z^{(4)}=l\left(b_{1w}+\xi b_{2w}+\eta b_{3w}\right)-hw_*^{(3,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right)+hw_*^{(3,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right)-$$
$$-hw_*^{(4,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right)+hw_*^{(4,1)}\left(\xi,\eta,\zeta\right),$$

величины пятого слоя: $\left(\zeta_4\le\zeta\le\zeta_5\right)$

$$\sigma_{xz}^{(5)}=\sigma_{yz}^{(5)}=\sigma_{zz}^{(5)}=0,\quad \sigma_{xx}^{(5)}=\frac{1}{A_{11}^{(5)}}\left[a_{22}^{(5)}\left(b_{2u}+k_1c_{12}\right)-a_{12}^{(5)}\left(b_{3v}+k_2c_{23}\right)\right],$$
$$\sigma_{yy}^{(5)}=\frac{1}{A_{11}^{(5)}}\left[a_{11}^{(5)}\left(b_{3v}+k_2c_{23}\right)-a_{12}^{(5)}\left(b_{2u}+k_1c_{12}\right)\right],$$
$$\sigma_{xy}^{(5)}=\frac{1}{a_{66}^{(5)}}\left[\left(b_{2v}+k_2c_{22}\right)+\left(b_{3u}+k_1c_{13}\right)\right],$$
$$u_x^{(5)}=l\left(b_{1u}+\xi b_{2u}+\eta b_{3u}\right)+lk_1\left(c_{11}+\xi c_{12}+\eta c_{13}\right)+hb_{2w}\left(\zeta_2-\zeta\right), \tag{3.11}$$
$$u_y^{(5)}=l\left(b_{1v}+\xi b_{2v}+\eta b_{3v}\right)+lk_2\left(c_{21}+\xi c_{22}+\eta c_{23}\right)+hb_{3w}\left(\zeta_2-\zeta\right),$$
$$u_z^{(5)}=l\left(b_{1w}+\xi b_{2w}+\eta b_{3w}\right)-hw_*^{(3,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right)+hw_*^{(3,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right)-$$
$$-hw_*^{(4,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right)+hw_*^{(4,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_4\right)-hw_*^{(5,1)}\left(\xi,\eta,\zeta_4\right)+$$
$$+hw_*^{(5,1)}\left(\xi,\eta,\zeta\right),$$

величины шестого слоя: $\left(\zeta_5 \le \zeta \le 1\right)$

$$\sigma_{xz}^{(6)} = \sigma_{yz}^{(6)} = \sigma_{zz}^{(6)} = 0, \;\; \sigma_{xx}^{(6)} = \frac{1}{A_{11}^{(6)}}\left[a_{22}^{(6)} \left(b_{2u} + k_1 c_{12} \right) - a_{12}^{(6)} \left(b_{3v} + k_2 c_{23} \right) \right],$$

$$\sigma_{yy}^{(6)} = \frac{1}{A_{11}^{(6)}}\left[a_{11}^{(6)} \left(b_{3v} + k_2 c_{23} \right) - a_{12}^{(6)} \left(b_{2u} + k_1 c_{12} \right) \right],$$

$$\sigma_{xy}^{(6)} = \frac{1}{a_{66}^{(6)}}\left[\left(b_{2v} + k_2 c_{22} \right) + \left(b_{3u} + k_1 c_{13} \right) \right],$$

$$u_x^{(6)} = l\left(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u} \right) + l k_1 \left(c_{11} + \xi c_{12} + \eta c_{13} \right) + h b_{2w} \left(\zeta_2 - \zeta \right), \tag{3.12}$$

$$u_y^{(6)} = l\left(b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v} \right) + l k_2 \left(c_{21} + \xi c_{22} + \eta c_{23} \right) + h b_{3w} \left(\zeta_2 - \zeta \right),$$

$$\begin{aligned} u_z^{(6)} = {} & l\left(b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w} \right) - h w_*^{(3,1)} \left(\xi, \eta, \zeta_2 \right) + h w_*^{(3,1)} \left(\xi, \eta, \zeta_3 \right) - \\ & - h w_*^{(4,1)} \left(\xi, \eta, \zeta_3 \right) + h w_*^{(4,1)} \left(\xi, \eta, \zeta_4 \right) - h w_*^{(5,1)} \left(\xi, \eta, \zeta_4 \right) + \\ & + h w_*^{(5,1)} \left(\xi, \eta, \zeta_5 \right) - h w_*^{(6,1)} \left(\xi, \eta, \zeta_5 \right) + h w_*^{(6,1)} \left(\xi, \eta, \zeta \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} w_*^{(k,1)} \left(\xi, \eta, \zeta \right) = {} & \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \zeta \Big[b_{2u} \left(a_{13}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)} \right) + \\ & + b_{3v} \left(a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)} \right) \Big], \qquad k = 1,2,3,4; \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} w_*^{(k,1)} \left(\xi, \eta, \zeta \right) = {} & \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \zeta \Big[\left(b_{2u} + k_1 c_{12} \right) \left(a_{13}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)} \right) + \\ & + \left(b_{3v} + k_2 c_{23} \right) \left(a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)} \right) \Big], \qquad k = 5,6. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Заключение. Найдено решение трехмерной квазистатической задачи теории упругости для слоистого пакета, моделирующее поведение литосферных плит и блоков земной коры. Предполагается, что сейсмологические измерительные данные, позволяющие определить напряженно – деформированные состояния слоев пакета сняты с наклономеров и других измерительных средств, помещенных между слоями с номерами *(k*-1) и (*k*), а между слоями с номерами (*p*-1) и (*p*), (*p* > *k*) есть тангенциальный отрыв. Получено асимптотическое решение внешней задачи, указаны случаи, когда получаются математически точные решения, приведен иллюстрационный пример для шестислойного пакета из ортотропных пластин.

Мониторинг найденного решения во времени позволяет проследить процесс подготовки землетрясений и прогнозировать возможность возникновения землетрясений и их магнитуды.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА (научный проект SCS 15T – 2C343) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Рикитаке Т. Предсказание землетрясений. М.: Мир, 1979. 390 с. // Rikitake T. Earthquake prediction. – Amsterdam: Elsevier, 1976. - 357 p. (In Russian).
2. Касахара К. Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 264 с. // Kasahara K. Earthquake Mechanics. M.: Mir, 1985. 264 p. (In Russian).
3. Ле Пишон К., Франшто Ж., Бонин Ж. Тектоника плит. М.: Мир, 1977. 288 с. // Pichon H. Le, Franchetean J., Bonnin J. Plate tectonics. M.: Mir, 1977. 288p. (In Russian).
4. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414 с. // Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. – Singapore-London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p. (In Russian).
5. Aghalovyan L.A. On some classes of 3D boundary-value problems of statics and dynamics of plates and shells // Shell and membrane theories in mechanics and biology. – Switzerland: Springer International Publishing, 2015. P. 1-23.
6. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. О динамическом поведении литосферных плит Земли на основе данных сейсмостанций и GPS-систем. Актуальные проблемы механики сплошной среды. //Труды Международной конференции. Т.1. – Ереван: 2012. С.42-46. /Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., On dynamic conduct of Lithospheric Plates of the Earth on the base of the date of seismic stations and GPS systems. Proceedings of International Conference «Topical problems of continuum mechanics». V. 1. Yerevan: 2012. –P. 42-46. (In Russian).

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН Армении, доктор физ-мат. наук, заведующий отд. «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН РА.
Тел.: (37410) 529630; **E-mail:** lagal@sci.am
Тагворян Варужан Варданович – аспирант Института механики НАН РА.
Тел.: (37493) 805540; **E-mail:** varuzh1993@gmail.com

Поступила в редакцию 08.01.2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика
УДК 539.3

ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ

Василян Н.Г.

Ключевые слова: полубесконечная пластина-полоса, ортотропная пластина, обобщённые перерезывающие силы, распределенная нагрузка.

Vasilyan N.G.

Stress behaviour in corner points for orthotropic plate bending problem

Keywords: semi-infinite plate strip, orthotropic plate ,generalized cutting forces, distributed load.

In this article is investigated bending problem of the orthotropic semi-infinite plate strip, when three edges of the plate are hinged, and the fourth edge goes to infinity. The plate is loaded with distributed load. Is applied the approach Nadai A., which says, that to go afar from the edge, the solution must seek solution of the cylindrical bending. There are investigated generalized cutting forces on fixed edge.

For particular case, when we have the sinusoidal distributed load, the static equilibrium equation is satisfied, in difference from the work of V.V Vasilyev, if we take into account generalized cutting forces.

Վասիլյան Ն.Գ.

Օրթոտրոպ սալի ծռման խնդիրներում լարումների վարքը անկյունային կետերում

Հիմնաբառեր՝ կիսանվերջ սալ-շերտ, օրթոտրոպ սալ, ընդհանրացված կտրող ուժեր, բաշխված բեռ:

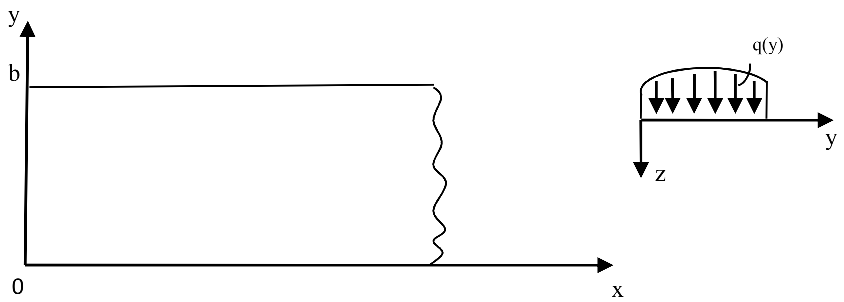
Հոդվածում ուսումնասիրված է օրթոտրոպ կիսանվերջ սալ-շերտի ծռման խնդիրը, երբ սալի երեք կողմերը հոդակապորեն ամրացված են; Սալի վրա ազդում է հավասարաչափ բաշխված բեռ: Խնդրի լուծման ժամանակ կիրառված է Նադայի մոտեցումը, ըստ որի ամրացված եզրից հեռանալիս խնդրի լուծումը ձգտում է գլանային ծռման խնդրի լուծմանը: Ամրացված եզրի վրա ուսումնասիրված են ընդհանրացված կտրող ուժերը: Մասնավոր դեպքում դիտարկված է սինուսոիդալ բաշխված բեռի ազդեցության տակ սալի ծռման խնդիրը, որտեղ ցույց է տրված, որ ընդհանրացված կտրող ուժերի ներմուծմամբ սալի ստատիկ հավասարակշռության պայմանը բավարարվում է, ի տարբերություն այն խնդրի, որը դիտարկվել էր Վ.Վ.Վասիլևի աշխատանքում:

В статье исследована ортотропная полубесконечная пластина-полоса, когда три стороны пластины шарнирно закреплены, а для четвёртой стороны, которая идёт в бесконечность, применён подход Надаи. Поверхность пластины загружена равномерно распределённой нагрузкой. Исследованы обобщённые перерезывающие силы на закреплённом крае. В частном случае синусоидально распределенной нагрузки показано, что, в отличие от работы В.В.Васильева, условие статического равновесия, с учетом обобщённых перерезывающих сил, удовлетворяется.

Введение Исторический интерес к тонким пластинам впервые проявили кораблестроители в начале прошлого столетия ввиду того, что сам корабль состоит из большого количества перегородок, геометрические размеры которых позволяют рассматривать их как тонкие плиты с жёстко закреплёнными краями. В классической теории пластин, которая основывается на допущениях прямых нормалей, первая формулировка краевой задачи была предложена ещё 200 лет тому назад С.Д.

Пуассоном [1]. Согласно этой формулировке, решение бигармонического уравнения теории изгиба пластин должно удовлетворять трём граничным условиям на контуре пластины, что находится в противоречии с порядком уравнения. Однако, Г.Р.Кирхгофф доказал, что трёх условий слишком много и что для полного определения решения уравнения прогиба достаточно двух условий. Он показал при этом, что два требования Пуассона (для крутящего момента и перерезывающей силы) должны быть заменены одним граничным условием, физический смысл которого был разъяснён Томсоном и Тэтом. Несмотря на то, что такая замена на всей остальной площади пластинки на распределении нагрузки не отражается, оно вызывает местное перераспределение напряжений на краю пластинки. В статье В.В.Васильева [2] исследована задача изгиба прямоугольной пластины, где удовлетворено условие статического равновесия: интеграл перерезывающей силы по контуру пластины равен интегралу распределённой по лицевой поверхности пластины нагрузки и, рассматривать обобщённые перерезывающие силы, не имеет смысла. Этой задачей был заинтересован и Мелешко В.В. [3], который также получил условие статического равновесия перерезывающих сил методом суперпозиции. В настоящей статье приведены результаты, которые показывают, что условие статического равновесия для обобщённых перерезывающих сил может быть удовлетворено, исходя от того, какую пластину мы исследуем.

1. В прямоугольной декартовой системе координат исследуем полубесконечную пластину-полосу постоянной толщины *2h*, которая занимает область $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b, -h \le z \le h$ (фиг.1). На пластину действует распределённая нагрузка интенсивности $q(y)$.



Фиг.1. Полубесконечная пластина-полоса

Положим, что упругих свойства материала пластины обладают тремя плоскостями симметрии – пластина ортотропная. Если эти плоскости принять в качестве координатных плоскостей, то соотношения между компонентами напряжения и деформации можно будет представить следующими известными уравнениями [4]:

$$\sigma_x = E'_x \varepsilon_x + E'' \varepsilon_y, \quad \sigma_y = E'_y \varepsilon_y + E'' \varepsilon_x, \quad \sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy}. \tag{1.1}$$

Предположим, что перпендикулярные к срединной плоскости пластин линейные элементы остаются прямыми и нормальными к изогнутой поверхности пластины после её изгиба. Воспользуемся выражениями компонентов деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{1.2}$$

При исследовании изгиба пластин рассмотрим только перпендикулярное перемещение [5]. Следовательно, для изгибающих и крутящих моментов:

$$M_x = \int_{-h}^{h} z\sigma_x dz = -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ M_y = \int_{-h}^{h} z\sigma_y dz = -D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$
$$H = -\int_{-h}^{h} z\sigma_{xy} dz = 2D_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad N_x = \int_{-h}^{h} \sigma_{xz} dz, \quad N_y = \int_{-h}^{h} \sigma_{yz} dz, \tag{1.3}$$

где

$$D_x = \frac{2E_x^{'}h^3}{3},\ D_y = \frac{2E_y^{'}h^3}{3},\ D_1 = \frac{2E^{''}h^3}{3},\ D_{xy} = \frac{2Gh^3}{3},$$
$$E_x^{'} = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}},\ E_y^{'} = \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}},\ E^{''} = \frac{E_y\nu_{xy}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \tag{1.4}$$

характеризующие коэффициенты механических свойств материала пластины.

Подставляя (1.3) в уравнения равновесия, получим уравнение изгиба ортотропной пластинки [5]:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(y), \tag{1.5}$$

где $H_1 = D_1 + 2D_{xy}$.

В частном случае, если пластина изотропная будем иметь

$$E_x^{'} = E_y^{'} = \frac{E}{1-\nu^2},\ E^{''} = \frac{\vartheta E}{1-\nu^2},\ G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$
$$D_x = D_y = H_1 = D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \tag{1.6}$$

и получим уравнение изгиба пластин в известной форме $\Delta\Delta w = q / D$.

2. Предполагается, что края пластин $y = 0, b$ шарнирно закреплены, что позволяет решение уравнения (1.5) представить следующим образом [1]:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\sin\lambda_n y,\ q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin\lambda_n y,\ \lambda_n = \frac{\pi n}{b} \tag{2.1}$$

Подставляя в (1.5), получим

$$D_x f_n^{IV} - 2H_1\lambda_n^2 f_n^{II} + D_y\lambda_n^4 f_n = q_n \tag{2.2}$$

Разыскивая решение однородного дифференциального уравнения в виде

$$f_n(x) = Ae^{r\lambda_n x}, \tag{2.3}$$

придем к характеристическому уравнению

$$D_x r^4 - 2H_1 r^2 + D_y = 0,$$

с решением

$$r^2 = \frac{H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}}{D_x} \tag{2.4}$$

В общем случае будем иметь четыре корня и общее решение задачи ортотропной полубесконечной пластины-полосы, у которого две стороны шарнирно закреплены, запишутся в виде

$$f_n(x) = A_n e^{-r_1 \lambda_n x} + B_n e^{-r_2 \lambda_n x} + C_n e^{r_1 \lambda_n x} + D_n e^{r_2 \lambda_n x} + \frac{q_n}{D\lambda_n^4}.$$

Применяя подход Надаи [6], согласно которому при удалении от кромки $x = 0$, решение задачи должно стремиться к решению цилиндрического изгиба:

$$\lim_{x \to \infty} f_n(x) = \frac{q_n}{D\lambda_n^4},$$

получим

$$f_n(x) = A_n e^{-r_1 \lambda_n x} + B_n e^{-r_2 \lambda_n x} + \frac{q_n}{D\lambda_n^4}. \tag{2.5}$$

Удовлетворяя граничным условиям на стороне $x = 0$, можно определить неизвестные коэффициенты A_n, B_n.

Очевидно, что характер корней (2.4) зависит от величины, вернее знака, подкоренного выражения $H_1^2 - D_x D_y$.

Рассматриваются три возможных случая:

a. $H_1^2 - D_x D_y > 0$.

Тогда

$$r_{1,2} = \sqrt{\frac{H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}}{D_x}}$$

При предположении, что сторона $x = 0$ шарнирно закреплена, граничные условия будут иметь вид: $w = 0,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$. Удовлетворяя граничным условиям, найдем неизвестные коэффициенты A_n, B_n и получим

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{D_y \lambda_n^4} \left[\frac{H_1 - B}{2B} e^{-\sqrt{\frac{H_1+B}{D_x}}\lambda_n x} - \frac{H_1 + B}{2B} e^{-\sqrt{\frac{H_1-B}{D_x}}\lambda_n x} + 1 \right] \sin \lambda_n y \tag{2.6}$$

где введено обозначение $B = \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}$.

Обобщенные перерезывающие силы для ортотропных пластин определяются формулами [1]

$$V_x(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+H_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\ V_y(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+H_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\tag{2.7}$$

где $H_2=H_1+2D_{xy}=D_1+4D_{xy}$.

С учётом (2.6) обобщенные перерезывающие силы примут вид:

$$V_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2B\lambda_n}\frac{1}{D_y\sqrt{D_x}}\left[\sqrt{H_1+B}\left(D_xD_y-H_2\left(H_1-B\right)\right)e^{-\sqrt{\frac{H_1+B}{D_x}}\lambda_n x}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{H_1-B}\left(D_xD_y-H_2\left(H_1+B\right)\right)e^{-\sqrt{\frac{H_1-B}{D_x}}\lambda_n x}\right]\sin\lambda_n y;\tag{2.8}$$

$$V_y(x,y)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2B\lambda_n}\left[2B-\left(B+2D_{xy}\right)e^{-\sqrt{\frac{H_1+B}{D_x}}\lambda_n x}-\left(2H_1+B+2D_{xy}\right)e^{-\sqrt{\frac{H_1-B}{D_x}}\lambda_n x}\right]\cos\lambda_n y$$

b. $H_1^2-D_xD_y=0$

Совпадает с изотропным случаем [7]. Поскольку в этом случае имеем кратный корень, представление (2.5) следует заменить на представление

$$f_n\left(x\right)=\left(A_n+xB_n\right)e^{-\lambda_n x}+\frac{q_n}{D\lambda_n^4}.$$

Если пластина на $x=0$ стороне шарнирно закреплена, то получим

$$w\left(x,y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{D\lambda_n^4}\left[1-e^{-\lambda_n x}-\frac{\lambda_n x}{2}e^{-\lambda_n x}\right]\sin\lambda_n y\tag{2.9}$$

Для обобщенных перерезывающих сил будем иметь выражения

$$V_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2\lambda_n}\left[\left(3-\nu\right)e^{-\lambda_n x}+\left(1-\nu\right)\lambda_n xe^{-\lambda_n x}\right]\sin\lambda_n y,$$
$$V_y(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2\lambda_n}\left[2\left(1-e^{-\lambda_n x}\right)+\left(1-\nu\right)\lambda_n xe^{-\lambda_n x}\right]\cos\lambda_n y.\tag{2.10}$$

c. $H_1^2-D_xD_y<0$

Решение будет

$$f_n\left(x\right)=e^{-\alpha\lambda_n x}\left(A_n\sin\beta\lambda_n x+B_n\cos\beta\lambda_n x\right)+\frac{q_n}{D_y\lambda_n^4}. \tag{2.11}$$

где $\alpha=\dfrac{\sqrt{D_xD_y}+H_1}{2D_x}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{D_xD_y}-H_1}{2D_x}$ (2.12)

Удовлетворяя граничным условиям шарнирного закрепления, получим

$$w\left(x,y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{D_y\lambda_n^4}\left[1-\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}\sin\beta\lambda_n x+\cos\beta\lambda_n x\right)e^{-\alpha\lambda_n x}\right]\sin\lambda_n y, \tag{2.13}$$

Для обобщенных перерезывающих сил получаем следующие выражения:

$$V_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{\lambda_n}\frac{H_2}{D_y}\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\left[\left(1+\frac{D_x}{H_2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right)\beta\cos\beta\lambda_n x+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{D_x}{H_2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right)\alpha\sin\beta\lambda_n x\right]e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n y \tag{2.14}$$

$$V_y(x,y)=\frac{1}{2\alpha\beta D_y}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{\lambda_n}\left[\alpha\beta D_y\left(1-2e^{-\alpha\lambda_n x}\cos\beta\lambda_n x\right)+\right.$$

$$\left.+\left(H_2\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-D_y\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right)e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\beta\lambda_n x\right]\cos\lambda_n y$$

А в середине закрепленного края:

$$V_x(0,\frac{b}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{\lambda_n}\frac{H_2}{D_y}\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\left(\frac{D_2}{H_2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)+1\right)\sin\frac{\pi n}{2} \tag{2.15}$$

Значение обобщенной перерезывающей силы на концах закрепленного края пластины приведены в таб.1.

Таблица 1

(x,y)	$(0,0)$	$(0,b)$
$V_x(x,y)$	0	0
$V_y(x,y)$	$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2\lambda_n}$	$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2\lambda_n}\cos\pi n$

Обобщённые перерезывающие силы в угловых точках принимают разные значения.

Из расчетов для разных материалов [4,5,8] получилось, что во всех случаях получается $H_1^2-D_xD_y<0,$ то есть имеем третий случай. Величина перерезывающих сил в середине закрепленного края зависит от коэффициента γ, который зависит только от характеризующих коэффициентов механических свойств материала и имеет вид

$$\gamma = \frac{H_2}{D_y}\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\left(\frac{D_2}{H_2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)+1\right) \qquad (2.16)$$

Для исследуемых материалов значения γ приведены в табл.2

Таблица 2

	Кевлар 49	Стеклопластик АГ-4с	СВАМ	Торнел 40	Фанера 3 и 5 слойная
γ	1.87	1.22	1.26	0.59	2.33

Из (2.15) имеем $V_x(0,\frac{b}{2}) = \gamma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{\lambda_n}\sin\frac{\pi n}{2}$.

В табл. 3 приведены значения обобщенных перерезывающих сил V_x для случая $q_n = q_0 = \text{const}$.

Таблица 3

Материал	Коэффициенты механических свойств	$V_x / q_0 b$
Кевлар 49 [8]	$E_x = 81{,}8*10^9\ Pa,\ \ E_y = 5{,}1*10^9\ Pa,$ $\nu_{xy} = 0{,}31,\ \ \nu_{yx} = 0{,}019$ $G = 1{,}82*10^9\ Pa$	0,46
Стеклопластик АГ-4с[4]	$E_x = 2{,}1*10^9\ Pa,\ \ E_y = 1{,}6*10^9\ Pa,$ $\nu_{xy} = 0{,}07,\ \ \nu_{yx} = 0{,}092$ $G = 0{,}42*10^9\ Pa$	0,305
СВАМ-стекловолокнистые анизотропные материалы [4]	$E_x = 3{,}05*10^9\ Pa,\ \ E_y = 1{,}88*10^9\ Pa,$ $\nu_{xy} = 0{,}195,\ \ \nu_{yx} = 0{,}12$ $G = 0{,}49*10^9\ Pa$	0,315
Торнел 40: Углеродные[9]	$E_r = 1.61*10^9\ Pa,\ \ E_z = 23*10^9\ Pa,$ $\nu_{rz} = 0{,}021,\ \ \nu_{zr} = 0{,}3$ $G_{rz} = 2*10^9\ Pa$	0.15
Фанера березовая 3 и 5 слойная[9]	$E_x^{'} = 1{,}4*10^9\ Pa,\ \ E_y^{'} = 0{,}117*10^9\ Pa,$ $E^{''} = 0{,}054*10^9\ Pa,\ G = 0{,}12*10^9\ Pa$	0,58

Исследование показывает, что случай $H_1^2 - D_x D_y > 0$ возможен, если можно будет найти материал, для которого: $\frac{E_y}{E_x} > \frac{1}{\nu_{xy}^2}$.

3. Рассмотрим случай, когда на пластину действует распределённая нагрузка интенсивностью $q(y) = q_0 \sin\frac{\pi y}{b}$. Для решения однородного дифференциального уравнения (1.5) получаются четыре корня и общее решение задачи ортотропной полубесконечной пластины-полосы, в зависимости от выражения $H_1^2 - D_x D_y$ принимает разные формы. Исследуем решение в зависимости от этого выражения.

a. $H_1^2 - D_x D_y > 0$.

Следовательно, решение задачи получим в форме

$$w(x,y) = \frac{q_0}{2B\,D_y\lambda^4}\left[2B + (B - H_1)e^{-r_1\lambda x} + (B + H_1)e^{-r_2\lambda x}\right]\sin\lambda y. \tag{3.1}$$

где $\lambda = \pi/b$.

Обобщенные перерезывающие силы будут:

$$V_x(x,y) = -\frac{q_0}{2B\sqrt{D_y}\lambda}\left[(2D_{xy} - B)\sqrt{H_1 - B}\, e^{-\sqrt{\frac{H_1+B}{D_x}}\lambda x} + \right.$$

$$\left. + (2D_{xy} + B)\sqrt{H_1 + B}\, e^{-\sqrt{\frac{H_1-B}{D_x}}\lambda x}\right]\sin\lambda y$$

$$V_y(x,y) = \frac{q_0}{2BD_y\lambda}\left[2BD_y - \left(H_2 r_1^2 - D_y\right)(B - H_1)e^{-\sqrt{\frac{H_1+B}{D_x}}\lambda x} + \right.$$

$$\left. + \left(H_2 r_2^2 - D_y\right)(B + H_1)e^{-\sqrt{\frac{H_1-B}{D_x}}\lambda x}\right]\cos\lambda y \tag{3.2}$$

где введено следующее обозначение $B = \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}$.

b. $H_1^2 - D_x D_y = 0$, $$w(x,y) = \frac{q_0}{D\lambda^4}\left[1 - e^{-\lambda x} - \frac{\lambda x}{2}e^{-\lambda x}\right]\sin\lambda y. \tag{3.3}$$

А для обобщенных перерезывающих сил

$$V_x(x,y) = \frac{q_0}{2\lambda}\left[\left(3 - \nu\right)e^{-\lambda x} + \left(1 - \nu\right)\lambda x e^{-\lambda x}\right]\sin\lambda_n y, \tag{3.4}$$

$$V_y(x,y)=\frac{q_0}{2\lambda}\left[2\left(1-e^{-\lambda x}\right)+\left(1-\nu\right)\lambda\, xe^{-\lambda x}\right]\cos\lambda y. \tag{3.5}$$

c. $H_1^{\ 2}-D_xD_y<0$. В этом случае решение будет

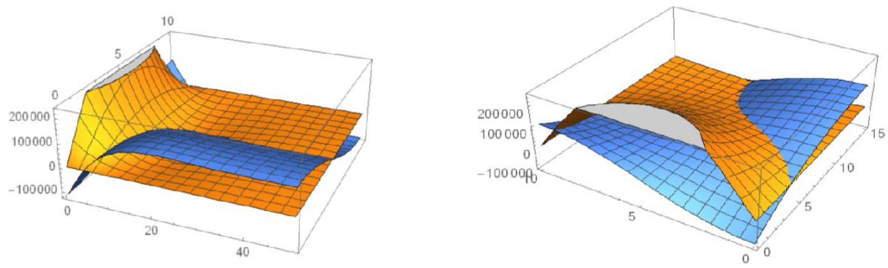
$$w\left(x,y\right)=\frac{q_0}{D_y\lambda^4}\left[1+\left(\frac{H_1}{B^2}\sin\beta\lambda x-\cos\beta\lambda x\right)e^{-\alpha\lambda x}\right]\sin\lambda\, y, \tag{3.6}$$

Формулой (3.6) представляется прогиб полубесконечной пластины-полосы при нагружении синусоидальной нагрузкой $q(y)=q_0\sin\lambda y$, когда три стороны пластины шарнирно закреплены, а четвертая сторона идет в бесконечность. Для обобщенных перерезывающих сил получаем следующие выражения:

$$V_x(x,y)=\frac{q_0\, e^{-\alpha\lambda x}}{B_0\,\lambda}\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\left[\left(H_2+\sqrt{D_xD_y}\right)\beta\cos\beta\lambda x+\right.$$

$$\left.+\left(H_2-\sqrt{D_xD_y}\right)\alpha\sin\beta\lambda x\right]\sin\lambda y,$$

$$V_y(x,y)=\frac{q_0}{\lambda}\left[1+e^{-\alpha\lambda x}\left(\frac{2D_{xy}}{B_0}\sin\beta\lambda x-\cos\beta\lambda x\right)\right]\cos\lambda y. \tag{3.7}$$



Приведены графики обобщенных перерезывающих сил $V_x(x,y)$, $V_y(x,y)$ для Кевлар 49, при нагрузке $q(y)=q_0\sin\pi y/b$. В угловых точках пластины разность этих функций принимает значение отличное от нуля, т.е. в угловых точках пластины имеем скачок напряжений.

(а)

Как видно, $V_x(x,y)$ изменяется равномерно и в угловых точках пластины принимает значение ноль, а $V_y(x,y)$ изменяется неоднородно, и эта неоднородность изменяет свою форму и держится в таком виде по всей оставшейся длине пластины, начиная с $1.5b$ длины пластины.

(б)

Фиг.2. Графики обобщенных перерезывающих сил.

А в середине закрепленного края имеем:

$$V_x(0,\frac{b}{2})=\frac{q_0\beta}{B_0\,\lambda}\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\left(H_2+\sqrt{D_xD_y}\right),\qquad V_y(0,\frac{b}{2})=0 \tag{3.8}$$

Перерезывающие силы будут:

$$N_x(x,y)=\frac{q_0\,e^{-\alpha\lambda x}}{B_0\,\lambda}\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\Big[\Big(H_1+\sqrt{D_xD_y}\Big)\beta\cos\beta\lambda x+$$

$$+\Big(H_1-\sqrt{D_xD_y}\Big)\alpha\sin\beta\lambda x\Big]\sin\lambda y,$$

$$N_y(x,y)=\frac{q_0}{\lambda}\Big[1-e^{-\alpha\lambda x}\cos\beta\lambda x\Big]\cos\lambda y. \qquad (3.9)$$

(3.10)

На фиг.2 приведены графики обобщенных перерезывающих сил, показывающие особенность поведения напряжений в угловых точках пластины.

Заключение: Таким образом, при изгибе ортотропной полубесконечной пластины-полосы, когда три стороны шарнирно закреплены, получаем концентрацию обобщенных перерезывающих сил на закрепленном краю. В статье получены значения обобщенных перерезывающих сил для разных ортотропных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.:Физматлит, 1963. 636с.
2. Васильев В.В. О преобразованиях Кирхгофа и Томсона-Тэта в классической теории пластин. Механика Твердого Тела,N 5, 2012, с.98-107.
3. Мелешко В.В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность //Мат. Методы и физ-мех.-ие поля, 2004, Т47, N03
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
5. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. –М.-Л.:Гостехиздат, 1947.
6. Nadai A. Elastische Platten, Берлин, 1925,с.72.
7. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности, шарнирно закреплённого края. «Young Scientists School-Conference» MECHANICS-2013. 1–4 октября 2013, Цахкадзор, Армения. С.69-73.
8. Справочник по композиционным материалам. Под ред. Дж.Любина, кн. 1, М., Машиностроение, 1988, -448с.
9. http://mash-xxl.info

Сведения об авторе:

Василян Нарине Гургеновна – научн. сотр. Института механики НАН Армении, канд. физ.-мат. наук

Тел.: (+374 91)707939, (+374 10)624802;

Адрес: Даниела Варужана, 9, кв.29. Ереван, Армения, 0060.

E-mail: narine@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 07.12.2017

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика
УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ТИПА SH В КОНЕЧНОПРОВОДЯЩЕМ ВОЛНОВОДЕ

Геворкян А.В.

Ключевые слова: SH волна, проводящий, волновод

Gevorgyan A.V.

SH wave propagation in finite–conductive waveguide

Keywords: SH wave, conductive, waveguide

The SH wave propagation is considered in finite–conductive layer in outside constant magnetic field parallel to layer boundary. The dispersion equation is obtained. In long wave approximation the wave phase velocity is deduced and it is established that this velocity is more the waveguide material transverse velocity when magnetic field is absent.

Գևորգյան Ա.Վ.

SH տիպի ալիքների տարածումը վերջավոր հաղորդիչ ալիքատարում

Հիմնաբառեր. SH ալիք, հաղորդիչ, ալիքատար

Դիտարկված է SH տիպի ալիքների տարածման հարցը վերջավոր հաղորդիչ առաձգական շերտում՝ եզրին զուգահեռ արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությամբ: Ստացված է դիսպերսիոն հավասարումը: Երկար ալիքների դեպքում որոշված է ֆազային արագությունը և ցույց է տրված, որ այն գերազանցում է ալիքատարի նյութի լայնական ալիքների տարածման արագությանը՝ արտաքին մագնիսական դաշտի բացակայության դեպքում:

Рассматривается вопрос распространения SH волн в конечнопроводящем упругом слое при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе слоя. Получено дисперсионное уравнение.

В длинноволновом приближении определена фазовая скорость и установлено, что она превосходит скорость распространения поперечных волн материала волновода в отсутствие внешнего магнитнго поля.

Исследуется вопрос распространения волн типа SH в конечнопроводящем слое толщины h при наличии внешнего постоянного магнитного поля.

Пусть упругий конечнопроводящий слой отнесён к прямугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$: ось x_1 направлена вдоль границы слоя.

Начальное магнитное поле $\vec{H}_0 \equiv [H_0, 0, 0]$ направлено по оси x_1.

Магнитная проницаемость материала слоя принимается равной единице.

Учитывая, что в антиплоской деформации поле смещений и характеристики индуцированного электромагнитного поля в области $-h < x_2 < 0$ имеют вид

$$\vec{u} \equiv [0, 0, u_3(x_1, x_2, t)],\ \vec{h} \equiv [0, 0, \mathrm{h}_3(x_1, x_2, t)],\ \vec{e} \equiv [e_1(x_1, x_2, t), e_2(x_1, x_2, t)],$$

из системы линеаризованных уравнений магнитоупругости, описывающей поведение электромагнитного поля и движение упругой проводящей среды, при пренебрежении таком смещения относительно тока проводимости получим следующую систему уравнений [1–3]:

$$c_t^2\nabla^2 u_3 + \frac{H_0}{4\pi\rho}\partial_1 h_3 = \partial_t^2 u_3$$
$$\nabla^2 h_3 - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\partial_t h_3 = -\frac{4\pi\sigma}{c^2}H_0\partial_1\partial_t u_3, \quad -h < x_2 < 0 \tag{1}$$

где $c_t^2 = G/\rho$ – квадрат скорости поперечных волн среды, G –модуль сдвига, ρ – плотность материала слоя, σ – удельная электропроводимость, c – электродинамическая постоянная.

Для вакуума в области $x_2 \in (-\infty, -h) \cup (0, \infty)$ имеем уравнения Максвелла и вытекающие из них волновое уравнение

$$\nabla\times\vec{h}^* = c^{-1}\partial_t\vec{e}^*, \quad \nabla\times\vec{e}^* = -c^{-1}\partial_t\vec{h}^*, \quad \nabla\cdot\vec{h}^* = 0, \quad \nabla^2\vec{h}^* = c^{-2}\partial_t^2\vec{h}^* \tag{2}$$
$$\vec{h}^* \equiv \left[0, 0, h_3^*(x_1, x_2, t)\right], \quad \vec{e}^* \equiv \left[e_1^*(x_1, x_2, t), \quad e_2^*(x_1, x_2, t), 0\right].$$

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\partial_2 u_3 = 0, \quad h_3 = h_3^*, \quad e_1 = e_1^*, \quad x_2 = 0, \quad -h \tag{3}$$

Решение системы уравнений (1) будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot e^{k\lambda x_2} e^{i(kx_1 - \omega t)}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), получим характеристическое уравнение системы (1) в виде

$$\lambda^4 - \left(2 - \alpha z + z^2\right)\lambda^2 + (1 - \alpha z)\left(1 + z^2\right) - \alpha s z = 0, \tag{5}$$

где

$$\alpha = \frac{4\pi\sigma c_t}{kc^2}, \quad z = \frac{i\omega}{kc_t}, \quad s = \frac{\mathrm{v}^2}{c_t^2}, \quad \mathrm{v}^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}.$$

Корни уравнения (5) имеют следующий вид:

$$\lambda_{[1,4]} = \pm\lambda_\pm, \quad \operatorname{Re}\lambda_\pm > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

$$\lambda_\pm = \left\{\frac{2 - \alpha z + z^2}{2} \pm \left[\left(\frac{2 - \alpha z + z^2}{2}\right)^2 - (1 - \alpha z)\left(1 + z^2\right) + \alpha s z\right]^{1/2}\right\}^{1/2} = \tag{6}$$

$$= \left\{\frac{2 - \alpha z + z^2}{2} \pm \left[\left(\frac{z^2 + \alpha z}{2}\right)^2 + \alpha s z\right]^{1/2}\right\}^{1/2}$$

Таким образом, решения системы (1) и волнового уравнения (2) запишутся в следующем виде:

$$u_3 = \left[A_+^+ \cdot e^{k\lambda_+ x_2} + A_+^- \cdot e^{-k\lambda_+ x_2} + A_-^+ \cdot e^{k\lambda_- x_2} + A_-^- \cdot e^{-k\lambda_- x_2}\right] e^{i(kx_1 - \omega t)} \tag{7}$$

$$h_3 = \left[B_+^+ \cdot e^{k\lambda_+ x_2} + B_+^- \cdot e^{-k\lambda_+ x_2} + B_-^+ \cdot e^{k\lambda_- x_2} + B_-^- \cdot e^{-k\lambda_- x_2}\right] e^{i(kx_1 - \omega t)} \tag{8}$$

$$B_{\pm}^{\pm} = \frac{ik\alpha z H_0}{\lambda_{\pm}^2 + \alpha z - 1} A_{\pm}^{\pm}, \quad B(\lambda) = \frac{ik\alpha z H_0}{\lambda^2 + \alpha z - 1} A(\lambda)$$

$$h_3^* = \left[\begin{array}{ll} D_- \cdot e^{kv_* x_2} e^{i(kx_1 - \omega t)}, & x_2 \in (-\infty, -h) \\ D_+ \cdot e^{kv_* x_2} e^{i(kx_1 - \omega t)}, & x_2 \in (0, \infty) \end{array} \right. \tag{9}$$

$$v_* = \sqrt{1 + c_t^2 \cdot c^{-2} z^2} \sim 1$$

Подставляя выражения (7)–(9) в граничные условия (3), получим систему алгебраических однородных линейных уравнений для произвольных постоянных и из условия совместности этой системы получим дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\left(\frac{\beta_+ \lambda_+ - \beta_- \lambda_-}{\beta_+ \lambda_+ + \beta_- \lambda_-} \right)^2 \equiv \operatorname{th}^2 \ln \sqrt{\frac{\beta_+ \lambda_+}{\beta_- \lambda_-}} = \frac{\operatorname{sh}^2 \left(kh \cdot \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2} \right)}{\operatorname{sh}^2 \left(kh \cdot \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} \right)} \tag{10}$$

$$\beta_{\pm} = \lambda_{\pm}^2 + \alpha z - 1$$

Далее, в длинноволновом приближении, то есть $k^2 h^2 \ll 1$, заменяя гиперболические синусы своими аргументами, уравнение (10) переходит в совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_+ \lambda_- = 0 \\ \left(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \right)^2 = 0 \\ 1 + z^2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha z^3 - z^2 + \alpha (1 + s) z - 1 = 0 \\ z^3 + 2\alpha z^2 + \alpha^2 z + 4\alpha s = 0 \\ 1 + z^2 = 0 \end{array} \right. \tag{11}$$

Рассмотрим первое уравнение совокупности (11)

$$z^3 - \alpha^{-1} z^2 + (1 + s) z - \alpha^{-1} = 0. \tag{12}$$

Для хороших проводящих сред можно принять $\alpha^2 \gg 1$ и в силу ограниченности значения напряжённости внешнего магнитного поля, реализуемого на практике постоянными магнитами, примем $s < 0{,}1$.

Алгебраическое уравнение (12) имеет одно действительное отрицательное решение, не соответствующее условиям задачи, и комплексно сопряжённое решение с положительной действительной частью

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} + \frac{\alpha^{-1}}{3} > 0,$$

$$z_{\pm} = \frac{\alpha^{-1}}{3} - \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{2} \pm i\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}}{2}, \tag{13}$$

где

$$\frac{q}{2} = -\left(\frac{\alpha^{-1}}{3}\right)^3 - \left(1 - \frac{s}{2}\right)\frac{\alpha^{-1}}{3} < 0, \quad \frac{P}{3} = \frac{1+s}{3} - \left(\frac{\alpha^{-1}}{3}\right)^2 > 0$$

$$Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3 = 3\left(\frac{\alpha^{-1}}{3}\right)^4 + \frac{1}{3}\left(2 - 5s - \frac{s^2}{4}\right)\left(\frac{\alpha^{-1}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1+s}{3}\right)^3 > 0$$

Предполагая, что искомая волна распространяется по положительному направлению оси x_1, в формуле (13) берётся знак плюс.

Так как

$$\frac{i\omega}{kc_t} = z_+ = \operatorname{Re} z_+ + i \operatorname{Im} z_+,$$

то с учётом (7) определим фазовую скорость распространения SH волн в волноводе в направлении оси x_1

$$\mathrm{v}_\phi = \operatorname{Im} z_+ \cdot c_t = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}\right) c_t > c_t \tag{14}$$

Теперь докажем, что $\operatorname{Im} z_+ > 1$, то есть,

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} > \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{15}$$

Возводя обе части неравенства в куб, получим:

$$2\sqrt{Q} + P\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}\right) > \frac{8}{3\sqrt{3}}. \tag{16}$$

С учётом (15) докажем

$$2\sqrt{Q} + \frac{2}{\sqrt{3}} P > \frac{8}{3\sqrt{3}} \quad \text{или} \quad \sqrt{Q} > \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{4}{3} - P\right). \tag{17}$$

При $0 < P < \dfrac{4}{3}$, возводя обе части неравенства (17) в квадрат, после некоторых преобразований приходим к неравенству

$$\left(1 - \frac{s}{4}\right)\alpha^{-2} + (s-3)^2 > 0, \quad s < 0{,}1.$$

Следовательно, справедливо неравенство (15), так как

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}\right)^3 > 2\sqrt{Q} + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{P} > \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

В последующей работе мы убедимся, что уравнение (12) представляет собой дисперсионное уравнение распространения SH волн в упругой конечнопроводящей среде, когда волновой вектор и вектор напряжённости внешнего магнитного поля равнонаправлены.

Второе уравнение совокупности (11)

$$z^3+2\alpha z^2+\alpha^2 z+4\alpha s=0 \qquad (18)$$

при $s<0{,}1$ и $\alpha^2 \gg 1$ имеет три вещественные отрицательные решения, не соответствующие условиям задачи:

$$\frac{q}{2}=\alpha\left(2s-\frac{\alpha^2}{27}\right),\quad \frac{P}{3}=-\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2<0,\quad Q=4s\alpha^2\left(s-\frac{\alpha^2}{27}\right)<0.$$

Последнее уравнение совокупности (15) является частным случаем дисперсионного уравнения, соответствующего распространению SH волн при отсутствии внешнего магнитного поля, то есть при $s=0$, из (6) и (10) имеем:

$$\lambda_+=\sqrt{1+z^2},\quad \lambda_-=1,\quad \beta_-=0$$

$$\operatorname{ch}\left(kh\left(\lambda_++\lambda_-\right)\right)-\operatorname{ch}\left(kh\left(\lambda_+-\lambda_-\right)\right)=2\operatorname{sh}\left(kh\lambda_+\right)\cdot\operatorname{sh}\left(kh\lambda_-\right)=0$$

$$\operatorname{sh}\left(kh\sqrt{1-\frac{\omega^2}{k^2c_t^2}}\right)=i\cdot\sin\left(kh\sqrt{\frac{\omega^2}{kc_t^2}-1}\right)=0.$$

В заключении отметим, что при $kh\to\infty$ уравнение (10) переходит в дисперсионное уравнение, соответствующее распространению поверхностных SH волн вдоль границы конечнопроводящего полупространства [4,5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1983.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
4. Геворкян А.В. Магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны в конечнопроводящем полупространстве. //Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №1-2. С.44–52.
5. Белубекян М.В., Геворкян А.В. Магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны в конечнопроводящей среде. //Докл.НАН Армении. 1995. Т.95. №2. С.86–88.

Сведения об авторе:

Геворкян Артак Вараздатович – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2,
Тел.: (+37477) 028889.
E-mail: AGevorgyanV@ gmail.com

Поступила в редакцию 20. 12. 2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика

УДК 678.057:620.17:539.4

ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗОРИЕНТАЦИИ АРМИРОВАНИЯ НА ДЕФОРМАЦИОННОЕ ПОВЕДЕНИЕ И СОПРОТИВЛЯЕМОСТЬ РАЗРУШЕНИЮ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ТРУБ ПРИ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ И ВНУТРЕННЕМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ

Карапетян К.А., Валесян С.Ш., Мурадян Н.С.

Ключевые слова: стеклопласт, трубчатый элемент, разориентация армирования, растяжение, внутреннее гидростатическое давление, деформация, сопротивляемость разрушению.

Karapetyan K.A., Valesyan S.Sh., Muradyan N.S.

The influence of the reinforcement disorientation on the deformative behavior and resistance to fracture of the glass-plastic tubes subjected to the axial tension and inner hydrostatic pressure

Key words: glass-plastic, tubular element, disorientation of reinforcement, tension, inner hydrostatic pressure, strength, resistance to fracture.

The problem of influence of the technological reinforcement disorientation in limits of 6-8^0 from it zero value on the character of the deformative behavior and resistance to fracture of the layered glass-plastic tubular elements subjected to the axial tension or inner hydrostatic pressure is discussed. It is shown that the disorientation of reinforcement for the pointed out limits does not practically influence on the resistance to fracture of the glass-plastic tubes subjected to the above-mentioned forces. Meanwhile, in regard with the general strains such as longitudinal one- for the tension and circular- for the inner hydrostatic pressure, the shear strains are appeared in disoriented glass-plastic tubes. The problem of the reduction to the minimum of the negative influence of the reinforcement disorientation on the operation of the reinforced composite tubular elements is suggested to solve in a constructive way.

Կարապետյան Կ.Ա,Վալեսյան Ս.Շ.,Մուրադյան Ն.Ս.

Ամրանավորման ուղղության տեխնոլոգիական ապակողմնորոշման ազդեցությունն ապակեպլաստե խողովակների դեֆորմացիոն վարքի և քայքայման դիմադրողականության վրա առանցքային ձգման և ներքին հիդրոստատիկ ճնշման դեպքերում

Հիմնաբառեր՝ ապակեպլաստ, խողովակաձև տարր, ամրանավորման ապակողմնորոշում, ձգում, ներքին հիդրոստատիկ ճնշում, ամրություն, դեֆորմացիա, քայքայվելուն դիմադրողականություն:

Քննարկվում է նախագծված զրոյական արժեքից 6-8^0 սահմաններում ամրանավորման ուղղության տեխնոլոգիական ապակողմնորոշման ազդեցությունը շերտավոր ապակեպլաստե խողովակների դեֆորմացման վարքի առանձնահատկությունների և քայքայմանը դիմադրելու վրա նրանց առանցքային ձգման կամ ներքին հիդրոստատիկ ճնշման ենթարկելիս: Ցույց է տված, որ ամրանավորման ուղղության ապակողմնորոշումը հիշյալ սահմաններում գործնականում չի ազդում ապակեպլաստե խողովակների քայքայման դիմադրողականության վրա վերը նշված ուժային գործոնների ազդեցության դեպքերում: Բացահայտված է, որ ամրանավորման ապակողմնորոշմամբ ապակեպլաստե խողովակներում առաջանում են նաև սահքի դեֆորմացիաներ, որոնք ուղեկցում են հիմնական դեֆորմացիաներին. երկայնականին՝ խողովակների առանցքային ձգման դեպքում և շրջանայինին՝ նրանց ներքին հիդրոստատիկ ճնշման ենթարկելիս: Ամրանավորված կոմպոզիտներից պատրաստված խողովակաձև կառուցվածքային տարրերի աշխատանքի վրա ամրանավորման ապակողմնորոշման բացասական ազդեցությունը նվազագույնի հասցնելու խնդիրն առաջարկվում է լուծել կոնստրուկտիվ եղանակով:

Обсуждается вопрос влияния технологической разориентации армирования в пределах 6-8^0 от нулевого его значения на специфику деформационного поведения и сопротивление разрушению слоистых стеклопластиковых трубчатых элементов при осевом растяжении или внутреннем гидростатическом давлении.

Показано, что разориентация армирования в упомянутых пределах практически не влияет на сопротивляемость разрушению стеклопластиковых труб при указанных выше силовых воздействиях.

Выявлено, что у разориентированных труб возникают и сдвиговые деформации, сопутствующие основным: продольным при осевом растяжении и кольцевым при внутреннем гидростатическом давлении.

Задачу сведения к минимуму отрицательного влияния разориентации армирования на работу трубчатых элементов из армированных композитов предлагается решать конструктивным путём.

Введение

Методы расчётов изделий из конструктивно-анизотропных материалов, в том числе, и из армированных пластиков, основываются на построении идеальной модели, состоящей из прямолинейных армирующих наполнителей, равномерно распределённых по строго определённым направлениям в податливой матрице [1; 2]. На практике, однако, реальная структура армированных композитов отличается от указанной модели, а, следовательно, в изделиях и конструкциях, изготовленных из таких материалов, невозможно отрицать возникновение технологических микро- и макродефектов [3; 4; 5; 6 и др.].

Одним из распространённых макродефектов структуры армированных композитов является разориентация армирования, т.е. отклонение направления армирующих волокон в слоях материала от проектируемого. Это явление, связанное, в основном, с несовершенством переработки композитов в изделие, может привести к существенному отличию показателей механических характеристик материала в изделиях от данных, полученных в результате испытания стандартных опытных образцов, изготовленных, как правило, более тщательно [2]. Отмеченное указывает на то, что при изготовлении конструкционных объёмных изделий, имеющих сложную геометрическую форму, вероятность разориентации армирующего наполнителя может проявиться в большей степени [3; 6].

В данной работе исследуется вопрос влияния технологического отклонения величины угла армирующих волокон от его заданного значения на специфику деформационного поведения и сопротивляемость разрушению стеклопластиковых труб, подвергаемых осевому растяжению или внутреннему гидростатическому давлению.

1. Методика проведения исследований

При изготовлении стеклопластиковых труб на основе стеклоткани в лабораторных условиях было обнаружено вышеупомянутое явление разориентации армирования наполнителя [6]. Трубы были изготовлены таким образом, чтобы направление основы стеклоткани совпадало с направлением их продольной оси $\left(\varphi = 0^0\right)$. Однако, в результате проведённых измерений, у части труб (около 7% от общего количества) наблюдалось отклонение угла армирования от заданного в пределах 6-8°.

Для решения рассматриваемых в данной работе задач были изготовлены 2 партии тканевых стеклопластиковых трубчатых образцов. У труб одной партии величина угла между направлениями основы стеклоткани и их продольной оси составляла $\varphi = 0^0$, а у другой – $\varphi = 6-8^0$.

В случае экспериментального изучения влияния разориентации армирования на деформационное поведение и на сопротивляемость разрушению труб при осевом растяжении была использована часть из вышеуказанных двух партий трубчатых образцов с внутренним диаметром 38мм, толщиной стенки 2.25мм и длиной 285мм, изготовленных на основе стеклоткани полотняного переплетения марки Т-23 (ТУ 6-11-231-76) с отношением вязки основы и утока 1,8:1,0. Образцы были получены методом намотки, предварительно пропитанной модифицированной эпоксидной смолой стеклоткани на металлическую оправку с последующим горячим прессованием по боковой поверхности в специальных формах [7]. Величина коэффициента армирования стеклопластика составляет $\mu = 0.45$ ($\mu_{основа}$=0.29, $\mu_{уток}$=0.16). До проведения экспериментов опытные образцы после изготовления в течение 8 лет хранились в лабораторном помещении при температуре 20±6°С и относительной влажности 60±8%.

Изучение влияния разориентации армирования на сопротивляемость разрушению и деформационное поведение стеклопластиковых труб при внутреннем гидростатическом давлении было осуществлено с использованием опытных образцов, полученных из остальной части указанных выше стеклотканевых труб (исходные образцы) при помощи шлифования. Внешний рабочий диаметр опытных трубчатых образцов составляет 39,7мм, а длина рабочей части – 60мм. До начала проведения исследований исходные трубчатые образцы в течение 30 лет после изготовления хранились в лаборатории при указанных выше воздушно-влажностных условиях.

Для определения пределов сопротивляемости разрушению опытных трубчатых образцов при осевом растяжении σ_{zz}^{B} и внутреннем гидростатическом давлении (растяжение в кольцевом направлении) $\sigma_{\theta\theta}^{B}$ испытания были осуществлены соответственно при линейной скорости относительного движения зажимов испытательной машины 2±0,4мм/мин. и при скорости нарастания в трубах внутреннего гидростатического давления 6±0,3атм/мин.

С целью построения диаграмм напряжение-деформация испытания трубчатых образцов производились посредством ступенчатого нагружения. Каждая ступень увеличения нагрузки соответствовала 0,06-0,08 доле соответствующей предельной величины сопротивляемости разрушению трубчатых образцов. В процессе испытаний трубы выдерживались на каждой ступени нагружения лишь на время, необходимое для снятия показаний деформаций с датчиков.

Для вышеуказанного каждого случая испытаний было использовано по 6 трубчатых образцов-близнецов. Максимальное значение коэффициента вариации полученных механических характеристик при этом не превышало 0,11 в случае величин сопротивляемости разрушению и 0,14 – в случае показателей деформации.

2. Обсуждение полученных результатов

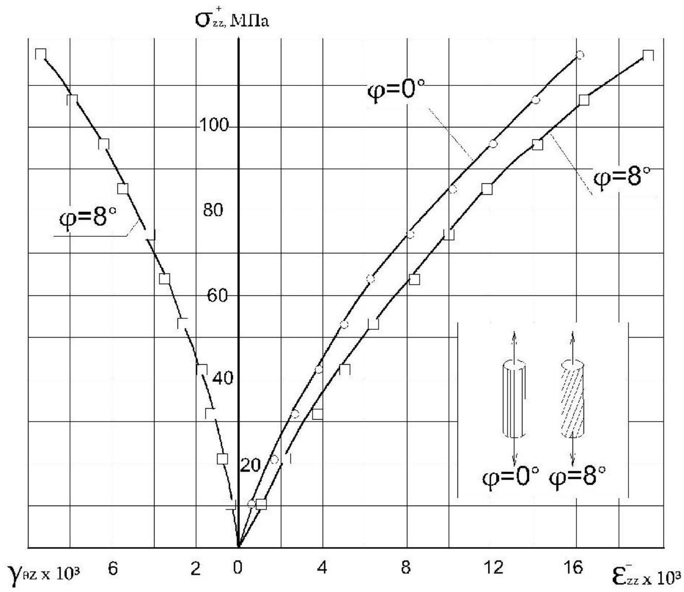
2.1 Осевое растяжение

Прежде чем приступить к рассмотрению полученных экспериментальных данных, отметим, что результаты исследования влияния разориентации армирования на сопротивляемость разрушению и деформационные свойства стандартных плоских образцов и трубчатых элементов из тканевого стеклопластика при осевом растяжении, а также чистом сдвиге подробно обсуждались в работе [8]. Здесь используются отдельные данные из указанной работы с целью сформулирования некоторых обобщающих выводов.

Как показало сравнение данных, полученных в результате испытаний, осуществлённых по описанной в п.1 методике, отклонение угла армирования в пределах 6-8° от нулевого его значения практически не влияет на сопротивляемость разрушению тканевых стеклопластиковых труб при осевом растяжении. Среднее значение указанной характеристики можно принять равным σ_{zz}^{B} =142 МПа.

На фиг. 2.1 представлены диаграммы напряжение-деформация трубчатых образцов, испытанных на осевое растяжение.

Из данных, приведённых на правом поле фиг. 2.1, замечаем, что при осевом ступенчатообразном растяжении стеклотканевых труб как с углом армирования φ=6-8°, так и при φ=0° связь между напряжениями σ_{zz}^{+} и продольными (основными) деформациями ε_{zz}^{+} оказывается нелинейной. Это объясняется, в основном, структурной особенностью волокон основы использованной стеклоткани [9].



Фиг. 2.1. Кривые деформирования стеклопластиковых труб с углом армирования φ, подвергнутых осевому растяжению.

Согласно этим же данным, сопротивляемость деформированию в продольном направлении стеклотканевых труб с φ=6-8° оказывается меньшей, чем труб с φ=0°. При этом, величина отношения продольных деформаций ε_{zz}^{+} труб с φ=6-8° и φ=0°, зафиксированных при одном и том же уровне растягивающего напряжения σ_{zz}^{+}, практически не зависит от этого уровня и составляет 1,2-1,3.

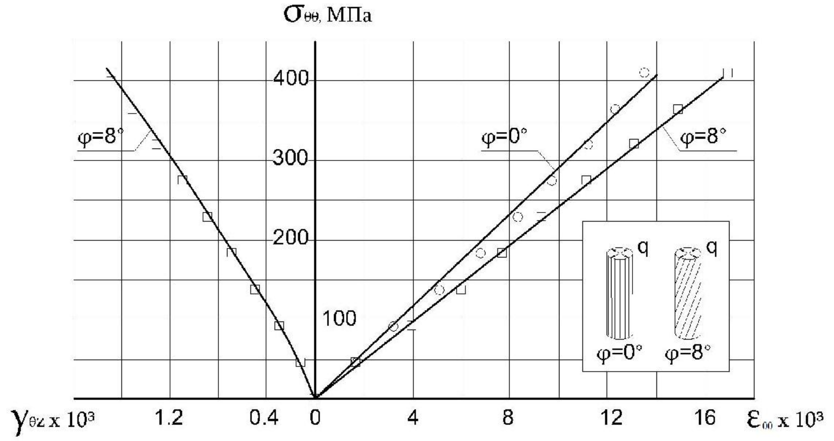
Из данных, представленных на левом поле фиг. 2.1, следует, что в случае осевого растяжения стеклотканевых труб с углом армирования φ=6-8° возникают и существенные сдвиговые деформации $\gamma_{\theta z}$, сопутствующие основным продольным:

при уровне растягивающего напряжения $\sigma_{zz}^{+} = 0,6\sigma_{zz}^{B}$ величина сдвиговых деформаций составляет приблизительно 5,8х10^{-3}, в то время как величина продольных деформаций этих же труб может достигать до значения 12,6х10^{-3}. При этом, величина отношения осевых и сдвиговых деформаций разориентированных стеклотканевых труб при одном и том же уровне осевого растягивающего напряжения практически не зависит от уровня напряжения и составляет 2,2-2,3.

Расчёты показывают, что при нагружении аналогичных стеклотканевых труб с φ=6-8° растягивающим напряжением $\sigma_{zz}^{+} = 0,6\sigma_{zz}^{B}$, величина угла закручивания на 1м длины составит 13-14°.

2.2. Внутреннее гидростатическое давление

Результаты испытаний, проведённых согласно описанной в п.1 методике, показали, что влияние отклонения угла армирования в пределах 6-8° от нулевого его значения на сопротивляемость разрушению стеклотканевых труб при внутреннем гидростатическом давлении q, как это наблюдалось в рассмотренном выше случае нагружения, оказывается, незначительным. Среднюю величину этой характеристики можно принять равной $\sigma_{\theta\theta}^{B} = 458,2$ МПа.



Фиг. 2.2. Кривые деформирования стеклопластиковых труб с углом армирования φ, подвергнутых внутреннему гидростатическому давлению

Согласно данным, приведённым на правом поле фиг.2.2, связь между растягивающими напряжениями в кольцевом направлении напряжением $\sigma_{\theta\theta}$ и деформациями в том же направлении $\varepsilon_{\theta\theta}$ (основными) как у стеклотканевых труб с φ=0°, так и у труб с φ=6-8°, носит прямолинейный характер. Указанное явление обусловлено, в основном, структурной особенностью утковых волокон стеклоткани типа полотняного переплетения с основным перекрытием [9].

Из сравнения указанных выше данных замечаем также, что сопротивляемость деформированию в кольцевом направлении стеклотканевых труб с φ=6-8° оказывается значительно меньшей, чем труб с φ=0°. При этом, величина отношения деформаций в кольцевом направлении $\varepsilon_{\theta\theta}$ труб с φ=6-8° и φ=0° практически не зависит от уровня напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ и составляет более чем 1.2.

Результаты проведённых испытаний также показали, что при приложении внутреннего гидростатического давления к трубам, с углом армирования φ=6-8°, возникают и сдвиговые деформации $\gamma_{\theta z}$, сопутствующие основным деформациям в кольцевом направлении $\varepsilon_{\theta\theta}$ (см. левое поле фиг. 2.2). При уровне напряжения $\sigma_{\theta\theta} = 0,6\sigma_{\theta\theta}^{B}$ величина сдвиговых деформаций составляет более чем 1,1x10^{-3}. При указанном уровне напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ значение деформаций этих же труб в кольцевом направлении составляет приблизительно 11,2x10^{-3}. При этом, величина отношения деформаций в кольцевом направлении и сдвиговых деформаций стеклотканевых труб с углом армирования φ=6-8° при увеличении уровня напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ от 45.7МПа до 411.4 МПа монотонно уменьшается от 12,5 до 9,7.

Согласно проведённым расчётам, при нагружении аналогичных стеклотканевых труб с φ=6-8° внутренним гидростатическим давлением, соответствующим $0,6\sigma_{zz}^{B}$, величина угла закручивания на 1м длины составит более чем 3°.

Считаем необходимым отметить следующее.

В работе [10] впервые теоретически установлено, что оболочка из ортотропных материалов в случае, если их главные направления упругости не совпадают с геометрическими направлениями оболочки, то под воздействием равномерно распределённого давления или растяжения подвергается кручению относительно оси симметрии.

Можно утверждать, что представленные в п.2 настоящей статьи экспериментальные результаты являются прямым подтверждением закономерностей, установленных в указанной выше теоретической работе [10].

Заключение

Таким образом, изменение сопротивляемости разрушению стеклотканевых труб с основой ткани, направленной вдоль оси, вследствие отклонения угла армирующего наполнителя в пределах 6-8° оказывается незначительным как при осевом растяжении, так и при внутреннем гидростатическом давлении.

Одновременно разориентация армирования в указанных переделах приводит к существенному (от 20% до 30%) увеличению податливости деформированию в продольном или в кольцевом направлениях этих же труб, подвергнутых, соответственно, осевому растяжению или внутреннему гидростатическому давлению.

Экспериментально установлено, что при нагружении разориентированных стеклотканевых труб как осевым растяжением, так и внутренним гидростатическим давлением вместе с основными деформациями (продольными в указанном первом случае нагружения и кольцевыми - во втором случае) возникают и сопутствующие сдвиговые деформации. При этом, абсолютное значение сопутствующих деформаций оказывается более существенным в случае приложения к трубам осевого растягивающего усилия.

По всей вероятности, упомянутые выше явления, обусловленные, в основном, технологическим нарушением симметричности армирования трубчатых элементов относительно оси, могут наблюдаться при любой разновидности их намотки, в том числе, и при изготовлении таких элементов посредством перекрёстной намотки.

На основе вышеизложенного можно констатировать, что технологическая разориентация армирования в ходе переработки материала в изделие в процессе эксплуатации может существенным образом повлиять на специфику сопротивляемости деформированию трубчатых композитных элементов, приводя, тем самым, к образованию непредусмотренного внутреннего напряжённого состояния, а в случае пространственных конструкций – и к возможному искажению конфигурации, в целом. Следовательно, задача сведения к минимуму отрицательного влияния возможной разориентации армирования на деформационное поведение композитных трубчатых элементов, и особенно в том случае, если они включены в ответственные пространственные конструкции, является очень важной. К числу рациональных путей достижения решения этой задачи можно отнести и конструктивное её решение. А именно, для таких элементов необходимо предусмотрение симметрично расположенных рёбер жёсткости, ориентированных таким образом, чтобы обеспечивалась максимальная сопротивляемость относительно возникновения сдвиговых деформаций. Технологические особенности изготовления позволяют обеспечить достаточную точность ориентации упомянутых рёбер жёсткости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1969. 276 с. (Tarnopolskii Ju.M., Roze A.V. Calculation features of items from reinforced plastics. Riga: Zinatne, 1969, 276p.) (in Russian)
2. Тарнопольский Ю.М., Кинцис Т.Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. М.: Химия, 1981. 272 с. (Tarnopolskii Ju.M., Kincis T.Ja. Methods of the static testing of reinforced plastics. M.: Chimia, 1981. 272p.) (in Russian)
3. Жигун И.Г., Поляков В.А. Свойства пространственно-армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978. 215 с. (Jigun I.G., Poliakov V.A. Properties of the spatially reinforced plastics. Riga: Zinatne, 1978, 215p.) (in Russian)
4. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Жигун И.Г., Гуняев Г.М. Конструкционные особенности материалов, армированных высокомодульными волокнами. // Мех. Пол. 1971. №4. С. 676-685. (Tarnopolskii Ju.M., Roze A.V., Jigun I.G., Guniaev G.M. Constructional features of materials reinforced by the high-modular fibers. // Mech. Polymers. 1971. №4. P.676-685.) (in Russian)
5. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Портнов Г.Г. Отрицательные особенности материалов, армированных волокнами. //Мех. Пол. 1969. №1. С.140-149. (Tarnopolskii Ju.M., Roze A.V., Portnov G.G. Negative features of materials reinforced by the fibers. // Mech. Polymers. 1969. №1. P.140-149.) (in Russian)
6. Карапетян К.А. О прочности и деформативных свойствах стеклопластиковых труб при повторно-статических нагружениях в зависимости от отклонений ориентации армирования. // Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. №2. С.70-79. (Karapetyan K.A. About strength and deformable properties of the glass-plastic tubes subjected to repeated-static loading in dependence on the reinforcement orientation deflection. // Proc. NAS RA. Mechanics. 2001. vol. 54. №2. P. 70-79.) (in Russian)
7. Мартиросян М.М. Получение прессованных тонкостенных труб из стеклопластиков. // Промышленность Армении. 1971. №10. С. 56-57. (Martirosyan M.M. Manufacturing of the pressed thin-walled tubes from glass-plastic. // Promishlennost Armenia. 1971. №10. P. 56-57.) (in Russian)

8. Карапетян К.А. Влияние начальной разориентации армирования на механическое поведение слоистых стеклопластиков при статических нагружениях. // Доклады НАН Армении. 2005. Т.105. №3. С. 249-255. (Karapetyan K.A. Influence of the initial reinforcement disorientation on the mechanical behavior of layered glass-plastics subjected to static loading. // Reports of NAS RA. 2005. Vol. 105. №3. P. 249-255.) (in Russian)
9. Мартынова А.А., Ятченко О.Ф., Васильев А.В. Технология изготовления тканей. М.: Академия, 2007. 304 с. (Martinova A.A., Jatchenko O.F., Vasilev A.V. Technology of fabric manufacture. M.: Academia, 2007. 304p.) (in Russian)
10. Мовсисян Л.А. О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. // Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. науки. 1958. Т.XI. №4. С.137-144. (Movsisyan L.A. About some specific features of the anisotropic shells. // Proc. AS Arm.SSR, phys.-math. nauki. 1958. vol. XI. №4. P.137-144.) (in Russian)

Сведения об авторах:

Карапетян Корюн Ашотович – д.т.н., зав. лабораторией экспериментальных исследований Института механики НАН Армении, Ереван, Армения,
Тел.: (+374 10) 524852; **E-mail:** koryan@mechins.sci.am

Валесян Сона Шантовна – канд. тех.наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения,
E-mail: svalesyan@yahoo.com

Мурадян Нарине Сергеевна – инженер, Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения,
Тел.: (+374 10) 527831; **E-mail:** narine-muradyan@mail.ru

Поступила в редакцию 06.03.2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика

УДК 539.3

О ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Саркисян Н.С., Хачатрян А.М.

Ключевые слова: асимптотический метод, двухслойная анизотропная пластинка, смешанные условия, неполный контакт, внутренняя задача, геометрическая нелинейность.

Սարգսյան Ն.Ս. , Խաչատրյան Ա.Մ.

Երկշերտ անիզոտրոպ սալի երկչափ հավասարումների մասին առաձգականության երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հիման վրա շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում

Հիմնաբառեր՝ ասիմպտոտիկ մեթոդ, երկշերտ անիզոտրոպ սալ, խառը պայմաններ, ոչ լրիվ կոնտակտ, ներքին խնդիր, երկրաչափորեն ոչ գծային

Ասիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված մասնական ածանցյալներով երկչափ գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ սալի հաշվարկման համար: Սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների թենզորի համապատասխան բաղադրիչների արժեքները, մյուսի վրա՝ առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերի միջև՝ ոչ լրիվ կոնտակտի պայմաններ:

Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M.

On two-dimentional equations two-layer anisotropic plate on the bace of geometrically nonlinear equations of with incomplete (partial) contact between the layers

Key words: asymptotic method two-layer anisotropic plate, mixed conditions, non-full contact, interior problem, geometrically nonlinear

Asymptotic method is applied and two-dimensional linear differential equations with partial derivatives from geometrically nonlinear equations of three-dimensional problem of elasticity theory for two-layer anisotropic plate are received. In the one surface of plate are given values of tensor of stress and in the other surface - mixed conditions of elasticity theory. Between the layers incomplete (partial) contacts conditions are given. Full stress state of plate is formed as sum of main (internal) and boundary stress states.

Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоёв задан закон распределения разности (скачка) тангенциальных перемещений. Полное напряжённое состояние пластинки образуется из основного (внутреннего) и краевого напряжённых состояний.

Введение. Многие прикладные задачи для слоистых структур приводят к рассмотрению случаев неполного контакта между слоями. Например, сейсмологические наблюдения указывают, что динамические характеристики отражённых и преломлённых волн на сейсмических границах не всегда соответствуют представлениям о границе, как о жёстком контакте между двумя средами. Для описания полей сейсмологических волн, образующих на тонких границах, используют условия, отличные от условий жёсткого контакта, в частности, учитывающие скачок тангенциальных смещений [1,2].

Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета, в целом [4]. Впоследствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [5,6]. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена в [7]. Вопрос определения НДС слоистой анизотропной пластинки, когда на её верхней и нижней лицевых плоскостях заданы значения соответствующих компонентов тензора напряжений, рассмотрен в [10]. Решения задач определения НДС анизотропных слоистых пластин, на одной лицевой стороне которой заданы компоненты вектора перемещения, а на другой – условия первой, второй или смешанной задач теории упругости, изложены в [11]. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной и многослойной анизотропной термоупругой пластинки в линейной постановке приведены в [12,13]. Решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной анизотропной пластинки в нелинейной постановке асимптотическим методом построено в работе [14], а для двухслойной пластинки при полном контакте слоёв – в работе [15].

В настоящей работе асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче двухслойной пластинки в нелинейной постановке, когда на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, на нижней – смешанные условия теории упругости, а на плоскости раздела слоёв – условия неполного контакта (задан закон распределения разности тангенциальных перемещений).

1. Постановка задачи и исходные уравнения. Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку $\Omega = \{(x, y, z): 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, \quad -h_2 \le z \le h_1\}$, где a – длина, b – ширина, составленная из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя и $k = 1,2$. Общая толщина полосы – $2h$. Плоскость отсчёта Oxy совпадает с плоскостью раздела слоёв, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки. Условия на лицевых плоскостях задаются формулами:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^{+}(x, y),\ \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^{+}(x, y),\ \sigma_{z} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{z}^{+}(x, y), \quad z = h_1 \\ &w = \left(\frac{h}{l}\right)^3 w^{-}(x, y),\ \sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^{-}(x, y),\ \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^{-}(x, y), \quad z = -h_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

На плоскости раздела $z = 0$ заданы следующие условия неполного контакта**:**

$$\begin{aligned} &\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)},\quad \sigma_{z}^{(1)} = \sigma_{z}^{(2)},\ \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)},\ w^{(1)} = w^{(2)} \\ &u^{(2)} = u^{(1)} + f_1(x, y),\ v^{(2)} = v^{(1)} + f_2(x, y), \end{aligned} \tag{1.2}$$

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1), условиях неполного контакта слоёв (1.2) и условиях на боковой поверхности пластинки. Краевые условия на торцах $x=0,a$ и $y=0,b$ – пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости [8,9]. В этих уравнениях введём безразмерные переменные $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\varsigma = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l – характерный тангенциальный размер пластинки $(h << l)$.

Выбор асимптотики и вывод двумерных уравнений. Решение внутренней задачи ищется в виде [3,7]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \tag{1.3}$$

где $Q^{(k)}(\xi,\eta,\zeta)$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений, $s-$номер приближения, $k-$номер слоя, S – количество приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}$:

$$q_k = 3 \quad \text{для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}, \; q_k = 4 \quad \text{для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \tag{1.4}$$

Эта асимптотика, по сути, не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [11-13]. В нелинейной задаче, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.3) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра [14,15]. Поэтому, было принято $q = q_0 + 4$, где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости.

Асимптотике (1.3), (1.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (1.3), с учётом (1.4), в преобразованные введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, нелинейные уравнения теории упругости анизотропного тела, для определения $Q^{(k)}(\xi,\eta,\zeta)$ получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s)}}{\partial \varsigma} + \sigma_1^{*(k,s)} = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{y}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s)}}{\partial \varsigma} + \sigma_2^{*(k,s)} = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{z}^{(k,s)}}{\partial \varsigma} + \sigma_3^{*(k,s)} = 0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi}+U_{\xi}^{(k,s-3)}+V_{\xi}^{(k,s-3)}+W_{\xi}^{(k,s-1)}=a_{11}\sigma_{x}^{(k,s)}+a_{12}\sigma_{y}^{(k,s)}+a_{13}\sigma_{z}^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{14}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_{15}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}+a_{16}\sigma_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \eta}+U_{\eta}^{(k,s-3)}+V_{\eta}^{(k,s-3)}+W_{\eta}^{(k,s-1)}=a_{12}\sigma_{x}^{(k,s)}+a_{22}\sigma_{y}^{(k,s)}+a_{23}\sigma_{z}^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{24}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_{25}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}+a_{26}\sigma_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \varsigma}+U_{\varsigma}^{(k,s-3)}+V_{\varsigma}^{(k,s-3)}+W_{\varsigma}^{(k,s-1)}=a_{13}\sigma_{x}^{(k,s-2)}+a_{23}\sigma_{y}^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{33}\sigma_{z}^{(k,s-4)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(k,s-3)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(k,s-3)}+a_{36}\sigma_{xy}^{(k,s-2)}$$

$$\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \varsigma}+U_{\eta\varsigma}^{(k,s-4)}+V_{\eta\varsigma}^{(k,s-4)}+W_{\eta\varsigma}^{(k,s-4)}=a_{14}\sigma_{x}^{(k,s-1)}+a_{24}\sigma_{y}^{(k,s-1)}+$$

$$+a_{34}\sigma_{z}^{(k,s-3)}+a_{44}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{54}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+a_{64}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}$$

$$\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \varsigma}+U_{\xi\varsigma}^{(k,s-4)}+V_{\xi\varsigma}^{(k,s-4)}+W_{\xi\varsigma}^{(k,s-4)}=a_{15}\sigma_{x}^{(k,s-1)}+a_{25}\sigma_{y}^{(k,s-1)}+$$

$$+a_{35}\sigma_{z}^{(k,s-3)}+a_{45}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+a_{56}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \xi}+U_{\xi\eta}^{(k,s-3)}+V_{\xi\eta}^{(k,s-3)}+W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}=a_{16}\sigma_{x}^{(k,s)}+a_{26}\sigma_{y}^{(k,s)}+$$

$$+a_{36}\sigma_{z}^{(k,s-2)}+a_{46}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(k,s)}$$

где

$$\sigma_1^{*(k,s)}=\sigma_{11}^{(k,s-3)}+\sigma_{12}^{(k,s-2)},\ \sigma_2^{*(k,s)}=\sigma_{22}^{(k,s-3)}+\sigma_{21}^{(k,s-2)},\ \sigma_3^{*(k,s)}=\sigma_{33}^{(k,s-4)}+\sigma_{13}^{(k,s-2)}$$

$$\sigma_{11}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\left[\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \sigma_{x}^{(k,s-i)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial \varsigma}\right)+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial \xi}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \sigma_{y}^{(k,s-i)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial \varsigma}\right)+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \varsigma}\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi^2}\sigma_{x}^{(k,s-i)}+ \qquad (1.6)$$

$$\left.+\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \eta^2}\sigma_{y}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi\partial \eta}\sigma_{xy}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi\partial \varsigma}\sigma_{xz}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \eta\partial \varsigma}\sigma_{yz}^{(k,s-i)}\right]$$

$$\sigma_{12}^{(k,s)}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \varsigma^2}\sigma_{z}^{(k,s-i)}+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \varsigma}\frac{\partial \sigma_{z}^{(k,s-i)}}{\partial \varsigma}\right] \quad (1,2,3;\mathrm{U,V,W};\ \xi,\eta,\varsigma)$$

$$U_{\xi}^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\xi},\quad U_{\xi\eta}^{(k,s)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta}\quad (U,V,W)$$

$$U_{\eta}^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\eta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad U_{\zeta\eta}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad (U,V,W)$$

$$U_{\zeta}^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\zeta},\quad U_{\xi\zeta}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\zeta}\quad (U,V,W).$$

Решив систему (1.5), получим:

$$\sigma_{z}^{(k,s)}=\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_{z}^{*(k,s)},\ U^{(k,s)}=u^{(k,s)}+u^{*(k,s)},\ (U,V,W),$$

$$\sigma_{x}^{(k,s)}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\xi}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\eta}+B_{16}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\xi}\right)+a_{3}^{(k)}\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_{x}^{*(k,s)},$$

$$(x,y;\ 1,2;\ a,b) \tag{1.7}$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)}=B_{16}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\xi}+B_{26}^{(k)}\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\eta}+B_{66}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\xi}\right)+c_{3}^{(k)}\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_{xy}^{*(k,s)},$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)}=-\left[L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)}+L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)}\right]\zeta-\left(a_{3}^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial\xi}+c_{3}^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial\eta}\right)\zeta+$$

$$+\sigma_{xz0}^{(k,s)}+\sigma_{xz}^{*(k,s)},\qquad (x,y;\ 1,2;\ a,b)$$

где дифференциальные операторы $L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)$ определяются по формулам:

$$L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)=B_{11}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2B_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{66}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},\ (1,2;\xi,\eta)$$

$$L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right)=B_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(B_{12}^{(k)}+B_{66}^{(k)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{26}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \tag{1.8}$$

а коэффициенты $B_{ij}^{(k)},a_i^{(k)},b_i^{(k)},c_i^{(k)}$ – по известным формулам [4,5,7].

$\sigma_{xz0}^{(k,s)},\sigma_{yz0}^{(k,s)},\sigma_{z0}^{(k,s)},u^{(k,s)},v^{(k,s)},w^{(k,s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1) и (1.2).

Величины со звездочками, входящие в формулы (1.7), как обычно, известны для каждого приближения s, поскольку выражаются через предыдущие приближения. Сюда же входят члены (1.6), обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи.

Величины со звездочками определяются по формулам:

$$\sigma_{z}^{*(k,s)}=-\int_{0}^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial\eta}+\sigma_{3}^{*(k,)}\right)d\zeta,$$

$$u^{*(k,s)}=\int_0^{\zeta}\Big(a_{15}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(k,s-1)}+a_{35}\sigma_z^{(k,s-1)}+a_{45}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{56}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}-\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-U_{\xi\zeta}^{(k,s-3)}-V_{\xi\zeta}^{(k,s-3)}-W_{\xi\zeta}^{(k,s-3)}\Big)d\zeta$$

$$v^{*(k,s)}=\int_0^{\zeta}\Big(a_{14}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{24}\sigma_y^{(k,s-1)}+a_{34}\sigma_z^{(k,s-1)}+a_{44}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{45}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{46}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}--\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta}-U_{\eta\zeta}^{(k,s-3)}-V_{\eta\zeta}^{(k,s-3)}-W_{\eta\zeta}^{(k,s-3)}\Big)d\zeta$$

$$w^{*(k,s)}=\int_0^{\zeta}\Big(a_{13}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{23}\sigma_y^{(k,s-1)}+a_{33}\sigma_z^{(k,s-1)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{36}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}-U_{\zeta}^{(s-2)}-V_{\zeta}^{(s-2)}-W_{\zeta}^{(s-2)}\Big)d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(k,s)}=B_{11}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{12}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{16}\omega^{*(k,s)}+a_3^{(k)}\sigma_z^{*(k,s)}+a_4^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\sigma_y^{*(k,s)}=B_{12}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{22}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{26}\omega^{*(k,s)}+b_3^{(k)}\sigma_z^{*(k,s)}+b_4^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+b_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)}=B_{16}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{26}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{66}\omega^{*(k,s)}+c_3^{(k)}\sigma_z^{*(k,s)}+c_4^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+c_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\sigma_{xz}^{*(k,s)}=-\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(k,s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial\eta}+\sigma_1^{*(k,s)}\right)d\zeta,\ \left(1,2;\ x,y;\ \xi,\eta\right) \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)}=\frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial\xi}+U_{\xi}^{(k,s-3)}+V_{\xi}^{(k,s-3)}+W_{\xi}^{(k,s-3)},$$

$$\varepsilon_2^{*(k,s)}=\frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial\eta}+U_{\eta}^{(k,s-3)}+V_{\eta}^{(k,s-3)}+W_{\eta}^{(k,s-3)},$$

$$\omega^{*(k,s)}=\frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial\xi}+U_{\xi\eta}^{(k,s-3)}+V_{\xi\eta}^{(k,s-3)}+W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}.$$

Предполагается, что $Q^{(s-k)}\equiv 0$ при $s<k$.

Удовлетворив условиям неполного контакта (1.2), получим:

$$\sigma_{z0}^{(1,s)}=\sigma_{z0}^{(2,s)},\ \sigma_{xz0}^{(1,s)}=\sigma_{xz0}^{(2,s)},\ \sigma_{yz0}^{(1,s)}=\sigma_{yz0}^{(2,s)}$$
$$w^{(1,s)}=w^{(2,s)}=w^{(s)},\ u^{(2,s)}=u^{(1,s)}+f_1^{(s)}(\xi,\eta),\ v^{(2,s)}=v^{(1,s)}+f_2^{(s)}(\xi,\eta) \tag{1.10}$$

где

$$f_k^{(0)}(\xi,\eta)=f_k(l\xi,l\eta),\ f_k^{(s)}(\xi,\eta)=0\ \ s>0,\ k=1,2.$$

С учётом (1.10), удовлетворив поверхностным условиям (1.1), получим следующую систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(s)}, v^{(s)}$:

$$L_{11}\left(C_{ij}\right)u^{(1,s)}+L_{12}\left(C_{ij}\right)v^{(1,s)}+L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)f_1^{(s)}(\xi,\eta)+L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)f_2^{(s)}(\xi,\eta)=p_1^{(s)}$$

$$L_{12}\left(C_{ij}\right)u^{(1,s)}+L_{22}\left(C_{ij}\right)v^{(1,s)}+L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)f_1^{(s)}(\xi,\eta)+L_{22}\left(C_{ij}^{(2)}\right)f_2^{(s)}(\xi,\eta)=p_2^{(s)} \quad (1.11)$$

Обобщённые нагрузки $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ определяются по формулам:

$$p_1^{(s)}=-\left(\sigma_{xz}^{+(s)}-\sigma_{xz}^{-(s)}\right)-\left(a_3^{(1)}\zeta_1-a_3^{(2)}\zeta_2\right)\left[\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}(\xi,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\xi}\right]-$$

$$-\left(c_3^{(1)}\zeta_1-c_3^{(2)}\zeta_2\right)\left[\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}(\xi,\eta)}{\partial\eta}-\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\eta}\right]+ \quad (1.12)$$

$$+\left(\sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi,\eta,\varsigma_1)-\sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi,\eta,\varsigma_2)\right), \quad \left(1,2;\ x,y;\ \xi,\eta;\ a_3^{(k)},b_3^{(k)}\right)$$

Система уравнений (1.11) при $f_1(\xi,\eta)=f_2(\xi,\eta)=0$ совпадает с соответствующей системой двухслойной пластинки с поверхностными условиями (1.1) при полном контакте между слоями [15].

Неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)},\sigma_{yz0}^{(k,s)},\sigma_{z0}^{(k,s)},\ w^{(s)}$ определяются по формулам:

$$w^{(s)}=\frac{1}{l}w^{-(s)}-w^{*(2,s)}(\xi,\eta,\varsigma_2),$$

$$\sigma_{z0}^{(k,s)}=\sigma_z^{+(s)}-\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\varsigma_1) \quad (1.13)$$

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)}=\sigma_{xz}^{+(s)}(\xi,\eta)-\sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi,\eta,\varsigma_1)+\left(L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right)u^{(1,s)}+L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)v^{(1,s)}\right)+$$

$$+a_3^{(1)}\zeta_1\left[\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}(\xi,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\xi}\right]+$$

$$+c_3^{(1)}\zeta_1\left[\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}(\xi,\eta)}{\partial\eta}-\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\eta}\right];\ \left(x,y;\ \xi,\eta;u^{(1,s)},v^{(1,s)};a_3^{(k)},b_3^{(k)}\right)$$

где

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)},\sigma_{yz}^{\pm(0)},\sigma_z^{\pm(0)}=\sigma_{xz}^{\pm},\sigma_{yz}^{\pm},\sigma_z^{\pm};\ w^{-(0)}=w^{-};\ w^{-(s)},\sigma_{xz}^{\pm(s)},\sigma_{yz}^{\pm(s)},\sigma_z^{\pm(s)}=0, s>0$$

$\varsigma_1=h_1/h$, $\varsigma_2=-h_2/h$, $h=(h_1+h_2)/2$.

Операторы $L_{ij}\left(C_{ij}^{(k)}\right)$ определяются по формулам:

$$L_{11}\left(C_{ij}^{(k)}\right)=C_{11}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2C_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+C_{66}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\quad(1,2;x,y;\xi,\eta)$$

$$L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)=C_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(C_{12}^{(k)}+C_{66}^{(k)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+C_{26}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\qquad(1.14)$$

Жёсткости определяются следующим образом:

$$C_{ij}^{(k)}=(-1)^{k+1}B_{ij}^{(k)}\varsigma_k,C_{ij}=C_{ij}^{(1)}+C_{ij}^{(2)}.\qquad(1.15)$$

2. Нежёсткий контакт. Остановимся более подробно на модели нежёсткого контакта. Суть этой модели состоит в следующем**:** принимается, что существует тонкий слой толщиной h_0 с исчезающе малой сдвиговой жёсткостью G_0 между контактирующими средами. Отношение $\chi=\lim\limits_{\substack{h_0\to 0\\ G_0\to 0}}\frac{h_0}{G_0}$ может принимать любое значение от 0 до ∞**.** Предельному случаю $\chi=0$ соответствует жёсткий контакт, другому предельному случаю $\chi\to\infty$ – скользящий контакт.

Для промежуточного состояния принимаются [1,2]

$$u^{(2)}-u^{(1)}=f_1^{(s)}=\chi_1\frac{l}{h}\sigma_{xz}(z=0),\ v^{(2)}-v^{(1)}=f_1^{(s)}=\chi_2\frac{l}{h}\sigma_{yz}(z=0).\qquad(2.1)$$

Постоянные χ_1,χ_2 имеют размерность м^3/Н и для анизотропных материалов имеют, вообще говоря, разные количественные значения. Для трансверсально-изотропных материалов с плоскостью изотропии $z=\text{const}$ и изотропных материалов имеет место соотношение $\chi_1=\chi_2$.

Остальные условия контакта (1.2) остаются неизменными. Тогда, из (1.2) и (2.1) следует:

$$f_1^{(s)}(\xi,\eta)=\chi_1\sigma_{xz0}^{(k,s)},\quad f_2^{(s)}(\xi,\eta)=\chi_2\sigma_{yz0}^{(k,s)}.\qquad(2.2)$$

Подставив значения $f_1^{(s)}(\xi,\eta)$ и $f_2^{(s)}(\xi,\eta)$ из (2.2) в (1.12) с учётом (1.14), получим систему дифференциальных уравнений с частными производными для определения $u^{(1,s)}$ и $v^{(1,s)}$.

$$\begin{aligned}\bar{L}_{11}(C_{ij})u^{(1,s)}+\bar{L}_{12}(C_{ij})v^{(1,s)}&=\bar{p}_1^{(s)}\\ \bar{L}_{21}(C_{ij})u^{(1,s)}+\bar{L}_{22}(C_{ij})v^{(1,s)}&=\bar{p}_2^{(s)},\end{aligned}\qquad(2.3)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{L}_{11}(C_{ij})&=\left[L_{11}(C_{ij})+\chi_1L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right)+\chi_2L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)\right]\\ \bar{L}_{12}(C_{ij})&=\left[L_{12}(C_{ij})+\chi_1L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)+\chi_2L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{22}\left(C_{ij}^{(1)}\right)\right]\\ \bar{L}_{22}(C_{ij})&=\left[L_{22}(C_{ij})+\chi_1L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)+\chi_2L_{22}\left(C_{ij}^{(2)}\right)L_{22}\left(C_{ij}^{(1)}\right)\right]\end{aligned}\qquad(2.4)$$

$$
\begin{aligned}
\overline{p}_1^{(s)} = p_1^{(s)} &- \left[\chi_1 L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\sigma_{xz}^{+(s)}(\xi,\eta) + \chi_2 L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\sigma_{yz}^{+(s)}(\xi,\eta)\right] + \\
&+ \left[\chi_1 L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right)\sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta_1) + \chi_2 L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)\sigma_{yz}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta_1)\right] - \\
&- \chi_1 L_{11}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\left(a_3^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}(\xi,\eta)}{\partial\xi} + c_3^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)\zeta_1 - \\
&- \chi_2 L_{12}\left(C_{ij}^{(2)}\right)\left(b_3^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}(\xi,\eta)}{\partial\eta} + c_3^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right)\zeta_1 \\
&\left(1,2;x,y;\xi,\eta;u^{(1,s)},v^{(1,s)};\ a_3^{(k)},b_3^{(k)}\right)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Заметим, что операторы $\overline{L}_{ij}\left(C_{ij}\right)$ по сравнению с операторами $L_{ij}\left(C_{ij}\right),(i,j=1,2)$, имеют четвёртый порядок. Таким образом, в отличие от случая полного контакта, контакт (1.2) приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений и, как следствие, увеличению числа произвольных констант в решении внутренней задачи. Значения этих постоянных могут быть определены из граничных условий при $x=0,a$ и $y=0,b$ с привлечением решения пограничного слоя. Для удовлетворения граничным условиям следует применить приближённые методы, например, метод наименьших квадратов, метод Трефца и др. [16].

В случае, когда коэффициенты $\chi_1=\chi_2=0$, система уравнений (2.3) совпадает с системой, соответствующей той же задаче для двухслойной пластинки при полном контакте слоёв [15].

Отметим, что при $s=0$ правые части системы уравнений (2.3), т.е. обобщённые нагрузки $\overline{p}_1^{(s)}$ и $\overline{p}_2^{(s)}$, не содержат члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Для приближений $s>0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений. Как видно из формул (1.6), нелинейность проявляется, начиная с приближения $s\geq 2$. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

Систему уравнений (2.3) можно свести к решению одного уравнения восьмого порядка. Применив к обеим частям первого уравнения оператор $\overline{L}_{22}$, а ко второму – $\left(-\overline{L}_{12}\right)$ и сложив, получим уравнение

$$
\left(\overline{L}_{11}\overline{L}_{22}-\overline{L}_{12}^2\right)u^{(s)} = \overline{L}_{22}\overline{p}_1^{(s)} - \overline{L}_{12}\overline{p}_2^{(s)}. \tag{2.6}
$$

В заключении отметим, что здесь рассмотрена лишь внутренняя задача. Вопрос о пограничном слое и его взаимодействии с решением внутренней задачи можно осуществить указанным в [7] способом.

Заключение. В работе найдена асимптотика и из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, а на плоскости раздела слоёв – закон распределения разностей тангенциальных перемещений. Построено решение внутренней задачи и показано, что когда на плоскости раздела слоёв задан закон распределения разности тангенциальных перемещений, то это приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений. Также показано, что члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений, проявляются в последующих приближениях и будут существенными особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов А.А., Ермаков С.Ю., Фролов Е.Н., Янковская Т.Б. Исследование отражения - преломления упругих волн на границе нежесткого контакта и контакта с трением.// Росс. АН. Физика земли. 1993. №11. С. 37-44. Anisimov A.A., Ermakov S.Yu., Frolov E.N., Yankovskaya T.B. Investigation of the hatching-refraction of elastic waves at the boundary of a non-rigid contact and contact with friction. // The Russian Academy of Sciences. Physics of the Solid earth.1993. №11. pp. 37-44 (in Russian).
2. Подъяпольский С.Г. Отражение и преломление на границе двух упругих границ в случае нежесткого контакта.// Изв. АН СССР, сер. геофиз. 1963. №4. С.525-531. Podyapolskij S.G. Etachment and refraction on the boundary of two elastic boundaries in the case of a nonrigid contact.// Izv. Academy of Science USSR, ser. geophysical. 1963. №4. pp. 525-531.
3. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686. Goldenveizer A.L. The construction of the plate bending approximate theory by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory // J. Appl. Math. Mech. 1962 Vol.26. Issue 4, pp 668-686 (in Russian).
4. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с. Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates. M.: Gostekhizdat. 1957. 463p. (in Russian).
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. M.: Nauka, 1987. 360p.(in Russian).
6. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. //ПМ. 1972. Т.8. Вып.6. С.3-17. Grigolyuk E.I., Kogan F.A. The present state of the theory of multilayer shells. //PM. 1972. Vol.8. Issue 6, pp. 3-17 (in Russian).
7. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с. Aghalovian L.A. Asimptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore-London.World Scientific Publ. 2015. 376p.(in Russian).
8. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948. 211с. Novozhilov V.V. The foundations of non-linear theory of elasticity. L.-M. OGIZ, 1948. 211p. (in Russian).
9. Черных К.Ф., Литвененкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988. Chernykh K.F., Litvenenkova Z.N. The theory of large elastic

deformations. L .: Publishing. LSU, 1988. (in Russian).
10. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида// Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. №3. С.10-22. Aghalovian L.A., Baghdasaryan Yu.M., Khachatryan A.M. On determination of stress-stran state of sandwich-type plates with general anisotropy. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1996. Vol. 49. Issue 3, pp. 10-22 (in Russian).
11. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. Aghalovian L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-volue problems of asymptotic layered beams, plates and shells. Yerevan. 2005. 468p. (in Russian).
12. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С. 3-11. Aghalovian L.A., Tovmasyan A.B. Asymptotic solution of mixed tree-dimensional interior problem for anisotropic thermoelastic plate. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1993. Vol. 59. Issue 3-4, pp. 3-11 (in Russian).
13. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной слоистой пластинки. //Труды Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 08-12 октября, 2012, Цахкадзор, Армения. Т.2. С.229-233. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asymptotic solution of mixed tree-dimensional interior problem for anisotropic plate. //Proceedings of International Conferens «Topical Problems of Continiuum Mechanics». Tsaghkadzor, Armenia. October 08-12, 2012. Vol.2 pp. 229-233 (in Russian).
14. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение трёхмерной внутренней задачи анизотропной термоупругой пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С. 42-49. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of tree dimetion interior problem of anisotropic thermoelasticity plate on basis of geometrical non-linear theory of elasticity. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2010. Vol. 66. Issue 1, pp. 42-49 (in Russian).
15. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при полном контакте между слоями// Изв. АН Армении. Механика. 2017. Т.70. №1. С.64-73. Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M. On two-dimensional equations two-layer anisotropic plate, with full contact between the layers//Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. Vol. 70. Issue 1, pp. 64-74 (in Russian).
16. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940с. Lure A.I. Theory of elasticity. M.: Nauka, 1970. 940p. (in Russian).

Сведения об авторах:

Хачатрян Александр Мовсесович –д. ф.-м. н., проф. каф. математики АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5.
Тел.: (+37497) 20-19-49, (+37499) 21-19-49. **E-mail:** alexkhach49@yandex.ru
Саргсян Нарине Суреновна – преподаватель каф. математики АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (+37497) 21-00-78. **E-mail:** narine_sargsyan_2012@mail.ru

Поступила в редакцию 28.02.2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика
УДК 539.3

THE FORMATION AND PROPAGATION OF ELASTIC (SH) SHEAR WAVES IN A CELLULAR COMPOSITE WAVEGUIDE

Ara S. Avetisyan, Vazgen M. Khachatryan

Keywords: composite waveguide, shear wave, wave energy localization, periodic structure, periodic nonhomogeneous layer, forbidden frequencies, phase velocity, cellular composite.

Аветисян А.С., Хачатрян В.М.
Образование и распространение упругих (SH) сдвиговых волн в сетчатом композитном волноводе

Ключевые слова: композитный волновод, сдвиговая волна, локализация волновой энергии, периодическая структура, неоднородный слой, запретные частоты, фазовая скорость, сетчатый композит.

Обсуждаются возможные варианты образования и распространения упругой сдвиговой волны в сетчатом композитном волноводе с каноническими прямоугольными ячейками. Сетчатый композитный волновод моделируется как слоистый волновод из периодически продольно неоднородных упругих слоёв.
Получены и исследованы дисперсионные уравнения фильтрации частот вдоль волновода, а также дисперсионные уравнения формообразования в периодических прослойках, по толщине волновода. Показывается, что надлежащим выбором пар материалов в слоях периодической структуры, а также относительных толщин этих слоёв, можно достичь разных схем волнообразования по толщине композитного волновода.

Численно исследованы длинноволновое (низкочастотное) и коротковолновое (высокочастотное) приближения дисперсионных уравнений. Фононная структура составляющих слоёв волновода приводит к разным зонам пропускания частот, образуя фильтр по отдельным слоям. Локализованные ультракороткие медленные упругие сдвиговые волны по границам сопредельных композитных слоёв не распространяются. Локализация энергии упругой сдвиговой смежной волны (волна типа Лява) у границ сопредельных ячеек характеризуется модулями физических постоянных материалов и отношением длины образованной волны с толщинами составных слоёв.

Ավետիսյան Ա.Ս., Խաչատրյան Վ.Մ.
Առաձգական սահքի ալիքների (SH) ձևավորումը և տարածումը ցանցատիպ բաղադրյալ ալիքատարում

Հիմնաբառեր՝ բաղադրյալ ալիքատար, սահքի ալիք, ալիքային էներգիայի տեղայնացում, պարբերական կառուցվածք, անհամասեռ շերտ, արգելված հաճախականություններ, փուլային արագություն, ցանցատիպ կոմպոզիտ:

Դիտարկվում է կանոնիկ ուղղանկյուն բջիջներով ցանցատիպ բաղադրյալ ալիքատարում առաձգական սահքի ալիքների ձևավորման և տարածման հնարավորությունը: Ցանցատիպ բաղադրյալ ալիքատարը մոդելավորվում է որպես պարբերական երկայնական անհամասեռ առաձգական շերտերից կազմված ալիքատար:
Ստացված և հետազոտված են ալիքատարի երկայնքով հաճախականային զտման դիսպերսիայի հավասարումները, ինչպես նաև, ըստ ալիքատարի հաստության պարբերական ենթաշերտերում ալիքային ձևերի կազմավորումը: Ցույց է տրվում, որ պարբերական անհամասեռ ենթաշերտերում կանոնիկ բջիջների նյութերի և չափերի համապատասխան ընտրությամբ կարելի է ստանալ ալիքային ձևերի և դրանց տարածման տարբեր սխեմաներ:
Կատարված է երկարալիքային (ցածրհաճախականային) և կարճալիքային (բարձրհաճախականային) սահմանային դեպքերի թվային հետազոտություն: Ալիքատարի բաղկացուցիչ շերտերի ֆոնոնային կառուցվածքը բերում է թույլատրելի և արգելվող հաճախությունների տարբեր տիրույթների՝

ձևավորելով զտիչներ առանձին շերտերում: Սահմանակցող շերտերի միացման մակերևույթների մոտ տեղայնացված ուլտրակարճ դանդաղ առաձգական սահքի ալիքներ չեն տարածվում: Լյավի տիպի առաձգական սահքի ալիքի էներգիայի տեղայնացումը շերտերի սահմանակցման եզրում բնութագրվում է կանոնիկ ուղղանկյունների նյութերի կոշտությունների և ուղղանկյունների երկարությունների հարաբերություններով:

The cellular composite waveguide is modeled as a layered waveguide of periodically longitudinally inhomogeneous elastic layers. The dispersion equations of frequencies filtering in periodically inhomogeneous layers, as well as the dispersion equations of wave formation in the composite stratums are obtained and analyzed. It is shown, that through the proper selections of pairs of materials in the layers of periodic structure, as well as of the relative thicknesses of these stratums, different schemes of wave shaping on thickness of the composite waveguide can be obtained.
Long wavelength (low frequency) and shortwave (high frequency) approximations of the dispersion equations are numerically examined. A phononic structures of composing layers of the waveguide leads to different zones of the bandwidth of frequencies forming a filter in the separate layers. The localized ultra-short slow elastic shear waves by the borders of the adjacent composite layers don't propagate. The localization of energy of adjacent elastic shear wave (Love type waves) at the borders of neighboring cells is characterized by the modules of physical constants of materials as well as by the ratio of length of the waves to the thicknesses of the composite layers.

1. Introduction.

Dispersions and/or dissipations in the propagation of a normal wave signal in a homogeneous, bounded elastic medium depends strictly on the boundary conditions, on the physico-mechanical characteristics of the neighboring media. The possibility of localization of the wave energy of plane strain in the surface zone of a mechanically free surface of an elastic isotropic half-space is already shown in the primary source of research on the possible localization of wave energy in the propagation of waves **Rayleigh J.W. [1]** (Rayleigh wave-1885г.).

In 1911 **Love A. E. H. [2]** showed that it is possible to localize the wave energy of the elastic shear in the near-surface zone of joining an elastic half-space with a softer elastic layer. After some time, in 1924 **Stoneley R. [3]** showed the possibility of localization of the wave energy of an elastic plane deformation in the near-surface contact zone of two isotropic elastic half-spaces if the densities and elastic modules of the boundary media differ insignificantly.

In each of these cases, the wave formation along the thickness of composite structures is characterized by a phase bond of the length of the formed wave from the source oscillation frequency – $\lambda(\omega)$ (or by convenience, the correspondence of frequency and length of the formed wave $-\omega(\lambda)$). In all these and other classical problems, the phase relationship, in addition to the relative values of the physico-mechanical constants of the adjoining media, also depends on the nature of the surface conditions at the joint boundaries of the contiguous bodies.

The survey of the most widely used methods for determining the structure of eigenmodes propagating in periodic structures or the features of wave formation in different composite structures are presented in particular in **Auld's B.A.[4], Achenbach's J. D. [5], Meleshko's V. V. etal.[6], Gazalet's J. etal. [7]** works etc.

In recent years with the development of precise instrumentation, wave phenomena associated with stratification of waveguides have been widely studied. In the scientific literature one can find many works devoted to wave processes in transversely inhomogeneous waveguides or in longitudinally inhomogeneous waveguides. An extensive technical overview of the latest achievements (more than 400 titles) in the field of problems of the dynamics of elastic and electro-acoustic waves in periodic structures is given in **M.I.Husseinetal's [8]** work**.**

The inhomogeneity of a periodic interlayers predetermines the nature of the wave form by the thickness of the composite waveguide. The results of the investigation of the existence of the Love type waves of in a three-layer elastic half-space are given in Kaptsov A.V., Kuznetsov S.V. [9]. In the paper Avetisyan A.S., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. [10], the authors are modeled the joining of two half-spaces, withe the canonical rectangular projections, as a three-layer periodically inhomogeneous waveguide.

he proposed article discusses possible options for the formation and propagation of an elastic shear wave in a cellular composite waveguide. The cellular waveguide is modeled as a three-layer, longitudinally inhomogeneous elastic waveguide, consisting of periodically alternating composite inhomogeneous layers.

2. Modeling of a composite waveguide and formulation of the mathematical boundary value problem.

Three-layered waveguide consisting of the identically periodic longitudinally inhomogeneous layers, with thicknesses $2h_0$, $2h_1$ and $2h_2$ respectively, is represented by a composite inhomogeneous waveguide of general thickness $2H = 2\left(h_0 + h_1 + h_2\right)$ consisting of periodically alternating composite interlayers of elastic isotropic homogeneous materials (Fig. 1)

$$\Omega_{n2}(x;y;z) = \left\{a \le x \le b; -2h_2 - h_0 \le y \le h_0 + 2h_1; |z| < \infty\right\} \tag{2.1}$$

$$\Omega_{n1}(x;y;z) = \left\{0 \le x \le a; -2h_2 - h_0 \le y \le h_0 + 2h_1; |z| < \infty\right\} \tag{2.2}$$

Unboundedness along the coordinate z of the constituent layers of the waveguide allows to proceed to the two-dimensional formulation of the problem.

Each compound layer (2.1) and (2.2) in a periodic cell is formed from three, rectangular cells $\left\{m_{nm}(x;y)\right\}$, ideally contacting on the internal surfaces of a layered waveguide $y = \pm h_0$

$$\left\{m_{01}(x;y)\right\} = \left\{0 \le x \le a;\ -h_0 \le y \le h_0\right\}$$

$$\left\{m_{02}(x;y)\right\} = \left\{a \le x \le b;\ -h_0 \le y \le h_0\right\} \tag{2.3}$$

$$\left\{m_{11}(x;y)\right\} = \left\{0 \le x \le a;\ h_0 \le y \le h_0 + 2h_1\right\}$$

$$\left\{m_{12}(x;y)\right\} = \left\{a \le x \le b;\ h_0 \le y \le h_0 + 2h_1\right\} \tag{2.4}$$

$$\left\{m_{21}(x;y)\right\} = \left\{0 \le x \le a;\ -h_0 - 2h_2 \le y \le -h_0\right\}$$

$$\left\{m_{22}(x;y) = \left\{a \le x \le b;\ -h_0 - 2h_2 \le y \le -h_0\right\}\right\} \tag{2.5}$$

the waveguide, and $m = 1;\ 2$ are the numbers of distinguished composite interlayers in periodic cells.

In general, the materials in the isolated rectangular cells are different and, accordingly, are characterized by shear modules G_{nm} and densities ρ_{nm} of elastic materials.

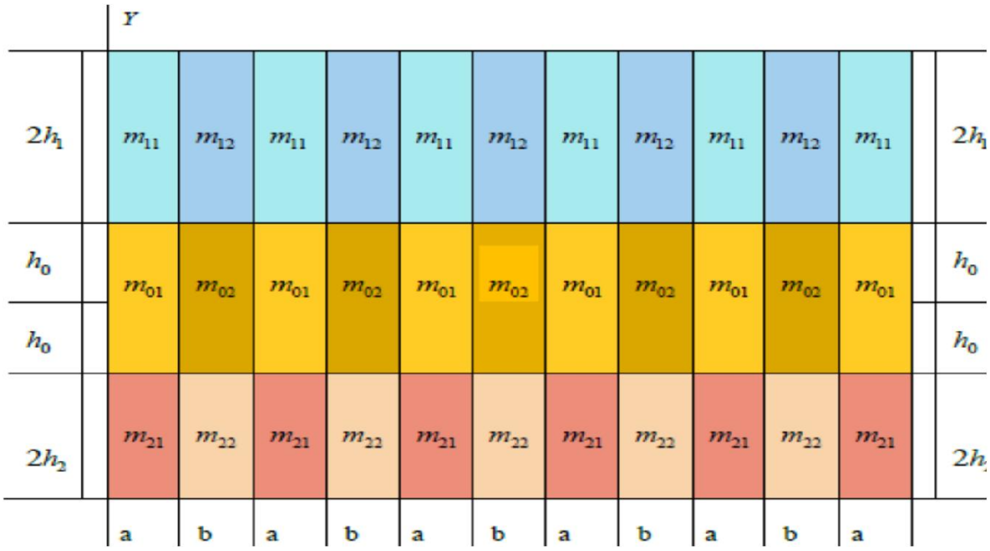


Fig. 1.1 The cellular structure of the periodically inhomogeneous three-layer elastic waveguide

where $n = 0;\ 1;\ 2$ are the numbers of periodically inhomogeneous layers in if a flat normal ***(SH)*** wave signal of elastic shear $\mathrm{W}(x;y;t) = \mathrm{w}(x;y)\cdot\exp(-i\omega t)$ is fed into the waveguide then along the formed three longitudinally inhomogeneous channels of the waveguide the interrelated elastic shear modes propagate. To study the patterns of wave propagation in a composite waveguide, rectangular cells will solve the wave equations of antiplane deformation In order to study the laws of wave propagation in composite waveguide the wave equations of the antiplane deformation will be solved in rectangular cells $\{m_{nm}(x;y)\}$:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{w}_{nm}(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{w}_{nm}(x;y)}{\partial y^2} = -\omega^2 c_{nm}^{-2}\cdot \mathrm{w}_{nm}(x;y)\,, \tag{2.6}$$

where $c_{nm} = \sqrt{G_{nm}/\rho_{nm}}$ is the velocity of the volume shear wave in the material of the corresponding cell $\{m_{nm}(x;y)\}$.

In each layer $n \in \{0;\ 1;\ 2\}$ on all the lateral surfaces of the adjacent interlayers, the conditions for complete mechanical contact are satisfied. On the section $x = a$, these conditions will be written in the known form:

$$\mathrm{w}_{n1}(a;y;t) = \mathrm{w}_{n2}(a;y;t)\,;$$

$$G_{n1}\cdot \partial \mathrm{w}_{n1}(x;y;t)/\partial x\big|_{x=a} = G_{n2}\cdot \partial \mathrm{w}_{n2}(x;y;t)/\partial x\big|_{x=a} \tag{2.7}$$

Taking into account the periodicity of the structure in the direction of wave propagation, the conditions for the conjugation of mechanical fields on the sections $x = 0$ and $x = a + b$ are written in the form:

$$\mathrm{w}_{n1}(a+b;y;t) = \mu^{-1}\mathrm{w}_{n2}(0;y;t)$$

$$G_{n1} \cdot \mu \cdot \partial w_{n1}(x;y;t)/\partial x\Big|_{x=a+b} = G_{n2} \cdot \partial w_{n2}(x;y;t)/\partial x\Big|_{x=0} \tag{2.8}$$

In the boundary conditions (2.8) $\mu = \exp(Lk)$ is the Floquet multiplier (frequency coefficient) and $L = a + b$ is the linear parameter of periodicity. $k(\omega) = 2\pi/\lambda(\omega)$ – is the wave number of the formed wave (the Floquet wave number) corresponding to the permitted wavelengths $\lambda(\omega)$.

In all relations (in all three layers) (2.8) the Floquet multiplier is the same, because the canonical structure of the cellular waveguide leads to the same geometric periodicity in all three channels.

The conditions for complete mechanical contact are also satisfied on the contact surfaces of periodically inhomogeneous layers. Taking into account the periodicity of the waveguide structure, the conjugacy conditions of the mechanical fields on the inner surfaces $y = h_0$ and $y = -h_0$ of the waveguide will be written in the following form, respectively:

$$\begin{aligned} &w_{01}(x;h_0;t) = w_{11}(x;h_0;t) \\ &G_{01} \cdot \partial w_{01}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=h_0} = G_{11} \cdot \partial w_{11}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=h_0} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &w_{01}(x;-h_0;t) = w_{21}(x;-h_0;t) \\ &G_{01} \cdot \partial w_{01}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=-h_0} = G_{21} \cdot \partial w_{21}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=-h_0} \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &w_{02}(x;h_0;t) = w_{12}(x;h_0;t) \\ &G_{02} \cdot \partial w_{02}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=h_0} = G_{12} \cdot \partial w_{12}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=h_0} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} &w_{02}(x;-h_0;t) = w_{21}(x;-h_0;t) \\ &G_{02} \cdot \partial w_{02}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=-h_0} = G_{22} \cdot \partial w_{22}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=-h_0} \end{aligned} \tag{2.12}$$

On the external mechanically free surfaces $y = h_0 + 2h_1$ and $y = -h_0 - 2h_2$ of the waveguide, the boundary conditions are written in the following form, respectively:

$$\partial w_{11}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=h_0+2h_1} = 0; \qquad \partial w_{12}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=h_0+2h_1} = 0 \tag{2.13}$$

$$\partial w_{21}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=-h_0-2h_2} = 0; \qquad \partial w_{22}(x;y;t)/\partial y\Big|_{y=-h_0-2h_2} = 0 \tag{2.14}$$

3. Solution of the mathematical boundary value problem.

Taking into account the identical periodicity of all three layers (channels) of the waveguide and 2the invariance of the systems of equations (1.6) in all cells of the cellular waveguide, we construct the solution of the boundary value problem by the method of separation of variables $w_{nm}(x;y) = X_{nm}(x) \cdot Y_{nm}(y)$. We obtain six systems of ordinary differential equations:

$$\begin{cases} d^2X_{nm}(x)/dx^2 + k_{nm}^2 \cdot X_m(x) = 0 \\ d^2Y_{nm}(y)/dy^2 - k_{nm}^2\alpha_{nm}^2 \cdot Y_{nm}(y) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Each system of equations (3.1) describes the state of the cell $\{m_{nm}(x;y)\}$, where $n = 0;\ 1;\ 2$ are the numbers of the layers in the waveguide and $m = 1;\ 2$ are the numbers of the interlayers in the periodic cells, $\alpha_{nm} = \sqrt{1-\omega^2/k_{nm}^2 c_{nm}^2}$ are the wave formation coefficients in the corresponding cells, $k_{nm}(\omega)$ is the wave number in the given cell.

The integrity of the wave process and the interconnection of wave formation along the thickness of the composite waveguide is ensured by the synchronism of the propagation of waves in the corresponding adjacent rectangular cells of the selected interlayers $m=1;\ 2$.

Therefore, the solutions of the first equations of all six systems (3.1) in periodically longitudinally inhomogeneous channels $n \in \{0;\ 1;\ 2\}$ are written as harmonic functions:

$$X_{nm}(x) = C_{nm}\sin(k_m x) + D_{nm}\cos(k_m x) \tag{3.2}$$

For convenience in the analysis of the problem of localization of high-frequency waves, the solutions of the second equations of systems (3.1) will be written down by hyperbolic functions. Then the wave field in each cell of the composite waveguide will be written in the form

$$\mathrm{w}_{nm}(x;y;t) = X_{nm}(x)\cdot\left[A_{nm}\cdot \mathrm{sh}(k_m\alpha_{nm}y) + B_{nm}\cdot \mathrm{ch}(k_m\alpha_{nm}y)\right]\cdot\exp(-i\omega t) \tag{3.3}$$

Taking into account the same periodicity of all three layers of the waveguide, we use the Floquet-Lyapunov theory.

Substituting the solutions in the cells of a periodic cell (interlayers numbered $m=1;\ 2$)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{w}_{n1}(x;y;t) = \left[C_{n1}\sin(k_1x) + D_{n1}\cos(k_1x)\right]\times\\
&\times\left[A_{n1}\cdot \mathrm{sh}(k_1\alpha_{n1}y) + B_{n1}\cdot \mathrm{ch}(k_1\alpha_{n1}y)\right]\cdot\exp(-i\omega t)\\
&\mathrm{w}_{n2}(x;y;t) = \left[C_{n2}\sin(k_2x) + D_{n2}\cos(k_2x)\right]\times\\
&\times\left[A_{n2}\cdot \mathrm{sh}(k_2\alpha_{n2}y) + B_{n2}\cdot \mathrm{ch}(k_2\alpha_{n2}y)\right]\cdot\exp(-i\omega t)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

into the conditions of complete mechanical contact on the face of the cells, taking into account the periodicity of the channel structures (2.7) and (2.8), for nontrivial wave distributions in periodic composite interlayers we obtain three dispersion filtration equations for each layer by the number n

$$\left\{\cos\left(Lk_n^*\right)\right\} = \left\{\cos(k_1a)\cdot\cos(k_2b) - \frac{G_{n1}^2k_1^2 + G_{n2}^2k_2^2}{2G_{n1}k_1G_{n2}k_2}\sin(k_1a)\cdot\sin(k_2b)\right\} \tag{3.5}$$

Each of these equations $n \in \{0;\ 1;\ 2\}$ corresponds to one of the channels in a three-layer waveguide. From each equation (3.5) the solvable wavelengths are determined, with the corresponding bands of admissible (or forbidden) frequencies

$$\lambda_n^*(\omega) = 2\pi L/\arccos\left\{\cos(k_1a)\cdot\cos(k_2b) - A\times\sin(k_1a)\cdot\sin(k_2b)\right\} \tag{3.6}$$

where $A = \left[G_{n1}^2k_1^2(\omega) + G_{n2}^2k_2^2(\omega)\right]/\left[2G_{n1}k_1(\omega)\cdot G_{n2}k_2(\omega)\right]$

The solvable wave numbers determined in each channel (in layer with number $n \in \{0;\ 1;\ 2\}$) $k_0^*(\omega)$, $k_1^*(\omega)$ and $k_2^*(\omega)$, and also the corresponding zones of admissible frequencies must be matched by the condition of synchronous propagation over the interlayers. The wave number $k(\omega) = 2\pi/\lambda(\omega)$ (wave number of Floquet) of the formed wave corresponding to the admissible frequencies ω is already defined as the cross section of the sets over the entire composite waveguide

$$\{k(\omega)\} = \{k_0^*(\omega)\} \cap \{k_1^*(\omega)\} \cap \{k_2^*(\omega)\} \tag{3.7}$$

It is obvious from (3.7) that the multilayer reduces the region of admissible frequencies. The measure of reduction depends on the difference in the physico-mechanical characteristics of the materials and the linear dimensions of the neighboring cells (see Fig. 3.a, 3.b and 6).
At first glance, from (3.5) and (3.6) it follows that the filtration property of a composite waveguide is mainly determined by the parameters of the longitudinal inhomogeneity G_{n1}, G_{n2}, a and b. But, as it turns out later, the filtering features in the composite waveguide are determined by the composite nature of the periodic layers. The composition of materials and the linear dimensions of the cells in the interlayers determine the character of the formed waveform $k_m(\omega)$ in the interlayers. Wave numbers $k_1(\omega)$ and $k_2(\omega)$ in the corresponding interlayers of a periodic cell are determined from the boundary value problems formed in these composite interlayers.

Substituting the solutions of (3.4) of the second equations of the systems (3.1) of the corresponding cells, $\{m_{n1}(x;y)\}$, where $n \in \{0;\ 1;\ 2\}$, into the boundary conditions (2.9), (2.10), the first of (2.13) and the first of (2.14), and the solutions of the corresponding cells $\{m_{n2}(x;y)\}$, where $n \in \{0;\ 1;\ 2\}$, into the boundary conditions (2.11), (2.12), the second of (2.13) and the second of (2.14), we obtain two dispersion equations of wave formation characterizing the distributions of nontrivial solutions along the thickness of the interlayers $\Omega_{n1}(x;y;z)$ and $\Omega_{n2}(x;y;z)$ of the composite waveguide in general form:

$$\mathrm{th}(2\alpha_{0m}k_m h_0) = \frac{\mu_{0m}^{1m}\cdot \mathrm{th}(2\alpha_{1m}k_m h_1) + \mu_{0m}^{2m}\cdot \mathrm{th}(2\alpha_{2m}k_m h_2)}{1+\mu_{0m}^{1m}\mathrm{th}(2\alpha_{1m}k_{1m}h_1)\cdot \mu_{0m}^{2m}\mathrm{th}(2\alpha_{2m}k_m h_2)} \tag{3.8}$$

In the dispersion equations of the wave formations (3.8) $k_1(\omega)$ and $k_2(\omega)$ are the desired wave numbers in the corresponding interlayers of the periodic waveguide cell, $\alpha_{nm} \triangleq \sqrt{1-\omega^2/\left(k_m^2(\omega)c_{nm}^2\right)}$ are the attenuation coefficients of the slow waves in the corresponding waveguide cell $\{m_{nm}(x;y)\}$, $\mu_{0m}^{1m} \triangleq G_{1m}\alpha_{1m}/G_{0m}\alpha_{0m}$ and $\mu_{0m}^{2m} \triangleq G_{2m}\alpha_{2m}/G_{0m}\alpha_{0m}$ are the characteristic relative coefficients of the slow waves.
By the definition of the wave numbers $k_1(\omega)$ and $k_2(\omega)$ from equations (3.8), in fact, we determine the phase velocities $V_{\phi m}(\omega) = \omega/k_m(\omega)$ and shapes of the formed wave in each periodic composite layer of the waveguide when the wave signal passes with the frequency ω.
By substituting the obtained values $k_1(\omega)$ and $k_2(\omega)$ into the dispersion equations (3.5) characterizing the passage of waves, at $n = \{0;\ 1;\ 2\}$, we obtain zones of admissible (or

forbidden) frequencies $\left\{k_0^*(\omega)\right\}$, $\left\{k_1^*(\omega)\right\}$ and $\left\{k_2^*(\omega)\right\}$ for each channel (along the periodically longitudinally inhomogeneous layer). The zones of admissible (or forbidden) frequencies $\left\{k(\omega)\right\}$ of the cellular composite waveguide are obtained from the relation (3.7).

It should be noted that the dispersion equations of the formations (3.8) in the above form correspond to slow ***SH*** elastic-shear waves when the phase velocity of the formed wave satisfies the condition $V_{m\phi}(\omega)=\omega^2/k_m^2(\omega)<\min\limits_{n=0;1;2}\left\{c_{nm}^2\right\}$ in each interlayer. For waves of other characteristic types, the dispersion equations of the formations (3.8) are respectively transformed. In the case of studying of the propagation of fast waves: – with phase velocities $V_{m\phi}(\omega)=\omega^2/k_m^2(\omega)\ge\max\limits_{n=0;1;2}\left\{c_{nm}^2\right\}$, or adjacent waves – with phase velocities $\min\limits_{n=0;1;2}\left\{c_{nm}^2\right\}\le V_{m\phi}(\omega)<\max\limits_{n=0;1;2}\left\{c_{nm}^2\right\}$ in the layers of the composite waveguide the dispersion equations of the formations (3.8) are respectively transformed to the following form:

$$\mathrm{tg}(2\beta_{0m}k_mh_0)=\frac{\nu_{0m}^{1m}\cdot\mathrm{tg}(2\beta_{1m}k_mh_1)+\nu_{0m}^{2m}\cdot\mathrm{tg}(2\beta_{2m}k_mh_2)}{1-\nu_{0m}^{1m}\cdot\mathrm{tg}(2\beta_{1m}k_{1m}h_1)\cdot\nu_{0m}^{2m}\cdot\mathrm{tg}(2\beta_{2m}k_mh_2)}\tag{3.9}$$

where $\nu_{0m}^{1m}\triangleq G_{1m}\beta_{1m}/G_{0m}\beta_{0m}$ and $\nu_{0m}^{2m}\triangleq G_{2m}\beta_{2m}/G_{0m}\beta_{0m}$ – characteristic relative coefficients of fast waves. In the case of studying of the propagation of adjacent waves, for which the phase velocities in periodic interlayers in different ratios with the space velocities in the cells $\min\limits_{n=0;1;2}\left\{c_{nm}^2\right\}\le V_{m\phi}(\omega)<\max\limits_{n=0;1;2}\left\{c_{nm}^2\right\}$, the dispersion equations of the formations (3.8) are respectively transformed to the form:

$$\mathrm{tg}(2\beta_{0m}k_mh_0)=\frac{\delta_{0m}^{1m}\cdot\mathrm{th}(2\alpha_{1m}k_mh_1)+\delta_{0m}^{2m}\cdot\mathrm{th}(2\alpha_{2m}k_mh_2)}{\delta_{0m}^{1m}\mathrm{th}(2\alpha_{1m}k_{1m}h_1)\cdot\delta_{0m}^{2m}\cdot\mathrm{th}(2\alpha_{2m}k_mh_2)-1}\tag{3.10}$$

where $\delta_{0m}^{1m}\triangleq G_{1m}\alpha_{1m}/G_{0m}\beta_{0m}$ and $\delta_{0m}^{2m}\triangleq G_{2m}\alpha_{2m}/G_{0m}\beta_{0m}$ – characteristic relative coefficients for adjacent waves.

From the inferential dispersion equations of formation (3.8) ÷ (3.10) it is obvious that the existence of their respective solutions uniquely depends both on the relationships of the physical-mechanical characteristics of the materials and on the relative linear dimensions that make up the rectangular elements of the composite waveguide.

On the other hand, the obtained forms will propagate in the region determined from (3.5), (3.6) and (3.7).

It is clear that even in the case of a three-layered, periodic longitudinally inhomogeneous waveguide, there are many choices of different possible combinations and a group of materials and linear dimensions that make up the cellular waveguide of rectangular cells. In practice, many applied problems in which the achievement of the desired solution depends on the choice of different combinations of physical-mechanical characteristics of the materials of rectangular cells and/or the relative linear dimensions of the elements of the composite waveguide. Of course, this can be achieved by a machine choice. Here we will investigate the characteristic model cases of propagation of a wave signal in structures with known parameters.

4. Model cases of propagation of shear wave signals in a three-layered cellular waveguide.

For the convenience of studying the wave process, we represent the dispersion equations of the wave formation (3.8) in the form

$$\mathrm{th}(2\alpha_{0m}k_m h_0)=\frac{\frac{G_{1m}\alpha_{1m}}{G_{0m}\alpha_{0m}}\cdot\mathrm{th}(2\alpha_{1m}k_m h_1)+\frac{G_{2m}\alpha_{2m}}{G_{0m}\alpha_{0m}}\cdot\mathrm{th}(2\alpha_{2m}k_m h_2)}{1+\frac{G_{1m}\alpha_{1m}}{G_{0m}\alpha_{0m}}\cdot\mathrm{th}(2\alpha_{1m}k_m h_1)\cdot\frac{G_{2m}\alpha_{2m}}{G_{0m}\alpha_{0m}}\cdot\mathrm{th}(2\alpha_{2m}k_m h_2)} \tag{4.1}$$

where the factors (factors of the Love problem) like $\left(\mathrm{th}(2\alpha_{jm}k_m h_j)/G_{jm}\alpha_{jm}\right)$ characterize the form of the wave in each layer.

Dispersion equations are easily derived from (4.1) in the limiting cases of the wave formation process: in the long-wave (low-frequency) and short-wave (high-frequency) approximations. In studies of limiting cases, we shall conventionally assume that in a three-layered cellular waveguide, the thickness of the inner inhomogeneous layer is either less $h_0<\min\{h_1;h_2\}$, or greater $h_0>\max\{h_1;h_2\}$ than the thicknesses of the remaining two layers. In numerical calculations, these and other linear dimensions of the canonical rectangular cells will be taken in accordance with the requirements of the problem under study.

Table 1. Shear Modules, densities and velocities of shear waves in some good conductors and piezoelectric crystals

	Gold Au	Copper Cu	Silver Ag	PZT-4	Zinc oxide ZnO
Shear module of the material of cells G_{nm} (n/m^2)	2.7×10^{10}	4.833×10^{10}	3.03×10^{10}	2.56×10^{10}	4.25×10^{10}
Density of the material of the cells ρ_{nm} (kg/m^3)	19.32×10^{3}	8.93×10^{3}	10.49×10^{3}	7.5×10^{3}	5.68×10^{3}
Velocity of the volume (SH) wave c_{nm} (m/sec)	1.182×10^{3}	2.326×10^{3}	1.67×10^{3}	1.85×10^{3}	2.74×10^{3}

Also, we will assume that the speed of volume shear waves in materials of rectangular cells $\{m_{0m}(x;y)\}$ of the inner layer is less than volume velocities of shear waves $C_{0m}<\min\{C_{1m};C_{2m}\}$ or greater than the volume velocities of shear waves $C_{0m}>\max\{C_{1m};C_{2m}\}$ in neighboring cells $m_{1m}(x;y)$ and $m_{2m}(x;y)$, respectively, where $m = 1;2$. Numerical analysis will be carried out by choosing different combinations of materials for contiguous cells of periodic layers from Table 1.

4.a. Propagation of low-frequency shear waves (long waves) in a three-layered cellular waveguide.

In case of a low-frequency propagation of shear waves in a waveguide, long waves are formed for which $2\pi h_n / \lambda_m(\omega) \ll 1$ or $k_m(\omega) \cdot h_n \ll 1$ for all values of $m \in \{1;2\}$, $n \in \{0;1;2\}$. In this case, from (4.1) we obtain dispersion equations for the formation in periodic layers of the waveguide simplified by long-wave approximation:

$$k_m^4 h_0^4 - \left[\left(\theta_{02m} + \theta_{01m} \right) \omega_0^2 - q_m \right] \cdot k_m^2 h_0^2 + \left(\theta_{02m} \theta_{01m} \omega_0^2 - p_m \right) \omega_0^2 = 0 \tag{4.2}$$

where $q_m = \left(1 - \delta_{10} \gamma_{10m} - \delta_{20} \gamma_{20m} \right) / 4\delta_{10} \delta_{20} \gamma_{10m} \gamma_{20m}$ and $p_m = \left(1 - \delta_{10} \rho_{10m} - \delta_{20} \rho_{20m} \right) / 4\delta_{10} \delta_{20} \gamma_{10m} \gamma_{20m}$ are the parameters of the waveguide that depend on the relative thicknesses of the layers composing the waveguide $\delta_{n0} = h_n / h_0$, the relative stiffness's of the shear $\rho_{n0m} = \rho_{nm} / \rho_{0m}$ and the relative densities $\gamma_{n0m} = G_{nm} / G_{0m}$, and $\theta_{0nm} = c_{0m}^2 / c_{nm}^2$ is the ratio of the squares of the velocities of the volume waves of shear of the materials of the neighboring cells in the interlayers $m \in \{1;2\}$ and $n \in \{0;1;2\}$, $\omega_0 = \left(\omega h_0 / c_{0m} \right)$ is the dimensionless frequency normalized by the parameters of the inner layer of the waveguide. From the form of the dispersion equations for the formation (4.2) it follows that for the existence of two pairs of long waves with respect to the thickness of the inner thin layer of the waveguide $k_m(\omega) \cdot h_0 \ll 1$, in each composite interlayer it is sufficient to require

$$\left(\omega h_0 / c_{0m} \right)^2 > \max \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1 - \delta_{10} \rho_{10m} - \delta_{20} \rho_{20m}}{4\delta_{10} \delta_{20} \rho_{10m} \rho_{20m}}; \\ \dfrac{1 - \delta_{10} - \delta_{20} \left(\gamma_{20m} / \gamma_{10m} \right)}{4\delta_{10} \delta_{20} \left[\rho_{20m} + \rho_{10m} \left(\gamma_{20m} / \gamma_{10m} \right) \right]} \end{array} \right\} \tag{4.3}$$

Then, for the positive determinant of the biquadratic equation (4.2)

$$\begin{aligned} & \omega_0^4 - 2\theta_{10m} \theta_{20m} \cdot \left[q_m - 2p_m / \left(\theta_{01m} - \theta_{02m} \right)^2 \right] \cdot \omega_0^2 + \\ & + q_m^2 / \left(\theta_{01m} - \theta_{02m} \right)^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

the formation of waves along the layers of the waveguide along with the condition (4.3) will depend on the presence of zones of the dimensionless frequency in a limited band of low frequencies

$$\left(\omega h_0/c_{0m}\right)^2 \le \theta_{10m}\theta_{20m}\times\left\{\begin{array}{l}\left[q_m-\dfrac{2p_m}{\left(\theta_{01m}-\theta_{02m}\right)^2}\right]- \\ -\sqrt{\left[q_m-\dfrac{2p_m}{\left(\theta_{01m}-\theta_{02m}\right)^2}\right]^2-\dfrac{\theta_{01m}^2\theta_{02m}^2\cdot q_m^2}{\left(\theta_{01m}-\theta_{02m}\right)^2}}\end{array}\right\} \tag{4.5}$$

or in a semi-restricted band of relatively high frequencies

$$\left(\omega h_0/c_{0m}\right)^2 \ge \theta_{10m}\theta_{20m}\times\left\{\begin{array}{l}\left[q_m-\dfrac{2p_m}{\left(\theta_{01m}-\theta_{02m}\right)^2}\right]+ \\ +\sqrt{\left[q_m-\dfrac{2p_m}{\left(\theta_{01m}-\theta_{02m}\right)^2}\right]^2-\dfrac{\theta_{01m}^2\theta_{02m}^2\cdot q_m^2}{\left(\theta_{01m}-\theta_{02m}\right)^2}}\end{array}\right\} \tag{4.6}$$

The solutions of the dispersion equations for the shaping in both periodic layers of the waveguide (4.2) in a limited band of low frequencies {(4.3);(4.5);(4.6)} will be written in the form

$$k_m^{\pm}(\omega)=\frac{1}{h_0}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left[\left(\theta_{01m}+\theta_{02m}\right)\omega_0^2-q_m\right]}{2} \\ \pm\sqrt{\dfrac{\left[\left(\theta_{01m}+\theta_{02m}\right)\omega_0^2-q_m\right]^2}{4}-\theta_{01m}\theta_{02m}\omega_0^4+p_m\omega_0^2}\end{array}\right\}^{1/2}$$

Substituting the obtained values of the wave numbers $k_1(\omega)$ and $k_2(\omega)$ into the dispersion equations of the channels (filtration equations) (3.5) and comparing the solutions with the frequency bands {(4.3);(4.5);(4.6)}, we find bands of admissible (or forbidden) frequencies through the channels $n\in\{0;1;2\}$. From (3.6) we also find admissible wavelengths $\lambda_n^*(\omega)$ through the channels $n\in\{0;1;2\}$. All the results obtained are related to the long-wave approximation. The results, that are in the approximation range $\mathrm{th}(2\alpha_{nm}k_mh_0)\approx 2\alpha_{nm}k_mh_n$ are suitable, with the corresponding channel numbers $n\in\{0;1;2\}$ and periodic interlayers $m\in\{1;2\}$.

In order not to lose the effect of the periodic inhomogeneity of the waveguide, for long-wave approximations, it is necessary to take into account the correspondence of the linear parameters

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\min\limits_{n\in\{0;1;2\}}\{h_n\}\right)\Big/\lambda_m(\omega)\ll 1 \\ \lambda_m(\omega)\le\min\{a;b\}\end{array}\right. \Rightarrow\left(\min\limits_{n\in\{0;1;2\}}\{h_n\}\right)\Big/\min\{a;b\}\ll 1 \tag{4.7}$$

Consequently, the long-wavelength approximation is suitable for thin three-layer waveguides with a relatively large linear periodicity parameter $L = a + b$.

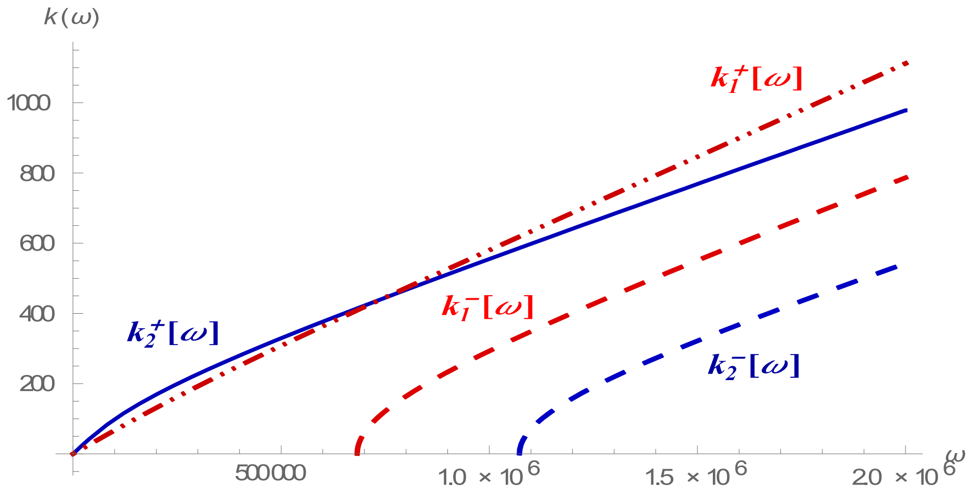


Fig. 2.a Wave numbers of wave formation in interlayers $k_1^+(\omega) \rightleftarrows \{Cu + Au + ZnO\}$, $k_2^+(\omega) \rightleftarrows \{PZT - 4 + Ag + ZnO\}$ of the composite waveguide with a thick inner layer $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$ *m*, $h_1 = 1.0 \times 10^{-3}$ *m* and $h_2 = 2.0 \times 10^{-3}$ *m*. in the case of long-wave approximation.

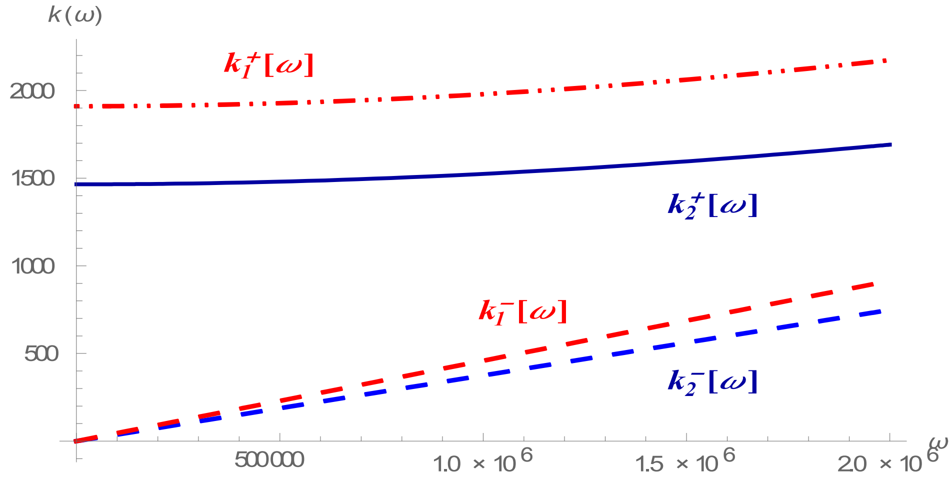
In the first layer for the adjoining cells of copper – $c_{11} = 2.326 \times 10^3$ m / sec, of gold – $c_{01} = 1.182 \times 10^3$ m / sec, of zinc oxide – $c_{21} = 2.735 \times 10^3$ m / sec and in the second layer of the piezoelectric crystal PZT-4 - $c_{12} = 1.848 \times 10^3$ m / sec, of silver - $c_{02} = 1.67 \times 10^3$ m / sec and of zinc oxide - $c_{22} = 2.735 \times 10^3$m / sec, in the frequency range $\omega \in \left[0;\ 10^6\right]$ Hertz, the dispersion equation for the formation (4.2) for each interlayer has two solutions (Fig. 2.a and Fig. 2.b).

Fig. 2.a shows the wave numbers for the formation in the case of a relatively thick (centimeter) inner layer of the waveguide.

From these graphs it follows that the lengths of the first two branches of the formed wave in the interlayers are above the centimeter thickness $\left\{\lambda_{2\min}^+(\omega);\ \lambda_{1\min}^+(\omega)\right\} \geq h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$ m, up to the value of the frequency $\omega_{\min}^+ = 1.0 \times 10^6$ Hertz.

The lengths of the second pair of branches of the formed wave, which are formed at relatively higher frequencies $\omega_{\min}^- = 0.8 \times 10^6$ Hertz in the interlayers remain above the centimeter thickness $\left\{\lambda_{2\min}^-(\omega);\ \lambda_{1\min}^-(\omega)\right\} \geq h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$ m at rather large values of the frequency $\omega^{-}_{\max} \approx 2.0\times10^{6} \div 2.5\times10^{6}$ Hertz.

Fig.2.b shows the wave numbers of the formation in the case of a relatively thin (millimeter) inner layer of the waveguide. In this case, two pairs of wave branches are also formed. From these graphs it follows that up to the value of the frequency $\omega^{+}_{\min} = 1.0\times10^{6}$ Hertz the lengths of the first two branches of the formed wave in the interlayers are already at the limit of millimeter waves $\{\lambda^{+}_{2\min}(\omega);\ \lambda^{+}_{1\min}(\omega)\} \approx 3.0\times10^{-3}\ m$.



The lengths of the second pair of branches of the formed wave which are also formed at very low frequencies in interlayers remain above the millimeter

Fig. 2.b Wave numbers of wave formation in interlayers $k_1^{+}(\omega) \rightleftarrows \{Cu + Au + ZnO\}$, $k_2^{+}(\omega) \rightleftarrows \{PZT-4 + Ag + ZnO\}$ of the composite waveguide with a thin inner layer $h_0 = 1.0\times10^{-4}\ m,$ $h_1 = 1.0\times10^{-3}\ m$ and $h_2 = 2.0\times10^{-3}\ m.$ in the case of long-wave approximation.

thickness $\{\lambda^{-}_{2\min}(\omega);\ \lambda^{-}_{1\min}(\omega)\} \geq \max\{h_1; h_2\} = 2.0\times10^{-3}\ m$ also at rather large values of the frequency $\omega^{-}_{\max} \approx 2.5\times10^{6} \div 3.0\times10^{6}$ *Hertz.*

Comparative analysis indicates that for a given choice of boundary materials and different relative thicknesses of the waveguide layers, both millimeter and centimeter waves can be formed in the interlayers. From the point of view of the long-wave approximation of the widths of the cells (or interlayers) in each case of investigations the thicknesses of the layers $\{a; b\} \sim \max\{h_0; h_1; h_2; \lambda_{\max}(\omega)\}$ should be taken so as for the formed wavelengths $\lambda_{\max}(\omega) \leq \min\{a; b\}$.

Then from the dispersion equation of the filtration (3.6) we find the lengths of the admissible waves, as well as the bands of permissible (and forbidden) frequencies along the channels of a periodically longitudinally inhomogeneous waveguide (Fig. 3.a and Fig. 3.b).

From the curves given in the figures 3.a and 3.b it follows that the transmitted waves with their zones of permissible and forbidden frequencies are formed both for a pair of branches of waves with smaller wave numbers $k_m^-(\omega)$ (red lines) and for a pair of branches of waves with larger wave numbers $k_m^+(\omega)$ (blue lines).

The zones of permissible frequencies for relatively short forms formed in this case are rather narrow. Joint zones of admissible frequencies in both cases of millimeter and centimeter waves are located in sections of the bands of permissible frequencies of the waveguide channels.

In the case of the given set of cell materials and their linear dimensions, the cross-section of the permissible zones is mainly related to the wavelength spectrum $\left\{\lambda_{\min}^{\pm}(\omega);\ \lambda_{\max}^{\pm}(\omega)\right\} \in [0;\ 10]\ mm$.

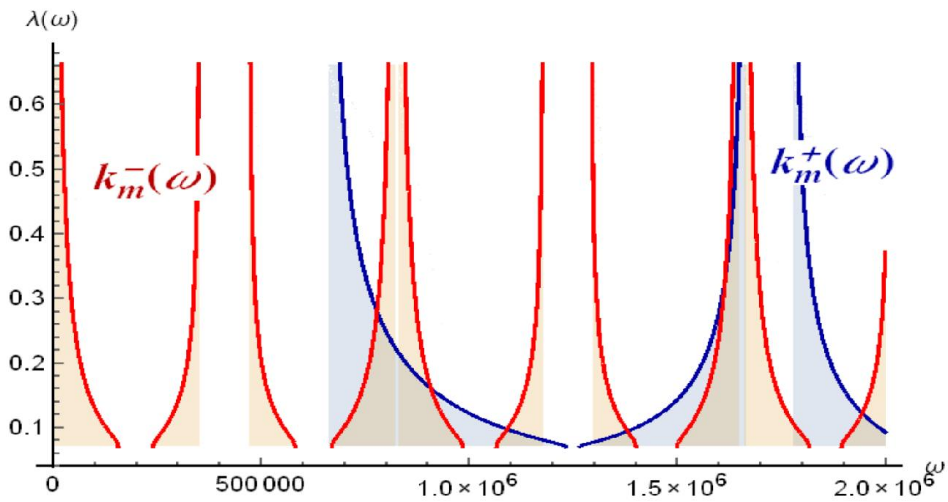


Fig.3a. The lengths of the permissible waves $\lambda(\omega)$ in the case of a millimeter inner layer of a composite waveguide $h_0 = 1.0 \times 10^{-4}\ m$ with the given wave numbers $k_m^{\pm}(\omega)$

Zones of admissible frequencies of long centimeter waves appear immediately, even at lower frequencies (Fig.3.b). These zones and zones of forbidden frequencies are rather wide in comparison with the zones of long millimeter frequencies (Fig. 3.a). In the case of millimeter long waves, the bands of permissible frequencies for the relatively short formed forms are in the region of frequencies $\omega_{\min}^{+} \approx 6.0 \times 10^5$ Hertz (Fig.3.a).

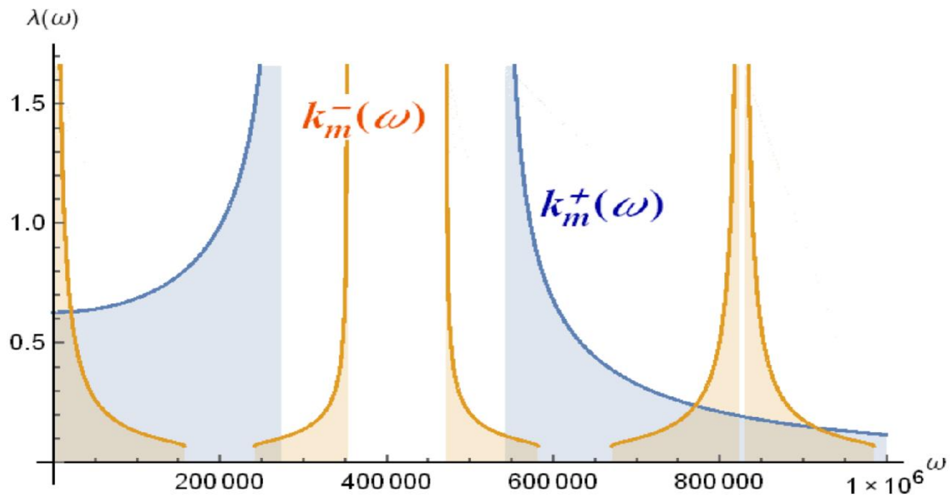


Fig. 3.b The lengths of permissible waves $\lambda(\omega)$ in the case of a centimeter inner layer of a composite waveguide $h_0 = 1.0 \times 10^{-2}$ m. with the given wave numbers $k_m^{\pm}(\omega)$ (Fig.2.a).

4.b. Propagation of high-frequency shear waves (short waves) in a three-layer cellular waveguide.

During the propagation of high-frequency shear wave signals, short waves are formed in the waveguide, for which $2\pi h_n/\lambda_m(\omega) \gg 1$ for all values of the numbers of periodic interlayers $m \in \{1;2\}$ and for waveguide channels $n \in \{0;1;2\}$. In this case, from equations (4.1) we obtain simplified dispersion equations for the formation in the short-wavelength approximation for both periodic layers of the waveguide $m \in \{1;2\}$

$$\begin{aligned}&\left[\gamma_{10m}^2\theta_{01m} + \gamma_{20m}^2\theta_{02m} - 1 - \theta_{01m}\theta_{02m}\right]\cdot\eta_m^4(\omega) + \\ &+\left[\left(1-\gamma_{20m}^2\theta_{02m}\right)\left(1-\gamma_{10m}^2\right)+\left(1-\gamma_{10m}^2\theta_{01m}\right)\left(1-\gamma_{20m}^2\right)\right]\cdot\eta_m^2(\omega) + \\ &+\left[\left(\gamma_{10m}+\gamma_{20m}\right)^2-\left(1+\gamma_{10m}\gamma_{20m}\right)^2\right]=0\end{aligned} \tag{4.8}$$

In addition to the notations adopted, in (4.8) we also introduced the notation for the normalized phase velocities in the interlayers $\eta_m(\omega) = \omega/\left(k_m(\omega)c_{0m}\right)$.

From (4.8) it follows that the possible propagation of a high-frequency waves in a cellular waveguide, as well as the values of the phase velocities in periodic interlayers depend only on the relative physical-mechanical characteristics of the materials in the neighboring rectangular cells of the waveguide.

Here, the short-wavelength approximation (4.8) is given for the case of slow short waves, at $\alpha_{nm}k_m h_n \approx 2\pi$. The taken approximation makes it possible to represent the phase velocities of possible high-frequency waveforms (and also the corresponding wave numbers) in the interlayers in the following form:

$$k_m(\omega) = \max_{n=0;1;2;}\left\{(\omega/c_{nm})\cdot\sqrt{1+(2\pi c_{nm}/h_n\omega)^2}\right\};$$
$$V_{\phi m}(\omega) = \min_{n=0;1;2;}\left\{c_{nm}\Big/\sqrt{1+(2\pi c_{nm}/h_n\omega)^2}\right\} \qquad (4.9)$$

The obtained solutions of equations (3.9) in the interlayers $\eta_m(\omega)$ must satisfy the condition

$$\eta_m(\omega) = \min_{n=0;1;2;}\left\{\omega/(k_m(\omega)c_{nm})\right\} \le 1 \qquad (4.10)$$

From the representation (4.9) we find the suitable values for the length of the waves formed in the interlayers, which will be short in all three layers of the waveguide

$$\lambda_m(\omega) = \min_{n=0;1;2;}\left\{h_n\Big/\sqrt{1+(h_n\omega/2\pi c_{nm})^2}\right\} \qquad (4.11)$$

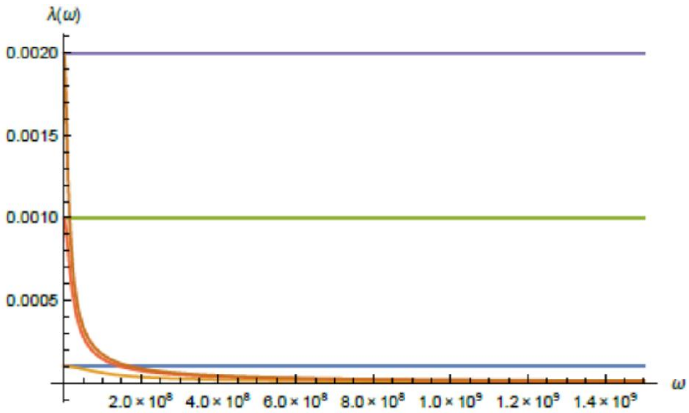


Fig. 4. The lengths of the formed waves in the interlayers in the case of high-frequency slow waves

Based on the convenience for a comparative analysis of the results, the numerical calculations are carried out for the same sets of materials of the waveguide cells for which the calculations were made in the case of the long-wave approximation.

In the considered case the lengths of the formed waves in the interlayers have the form which is specific for the high-frequency slow waves (Fig. 4). From the figure it is also obvious that short waves $\max_{n=0;1;2}\{\lambda_{nm}(\omega)\} \le \min_{n=0;1;2}\{h_n\} \approx 10^{-4}\ m$ corresponding to the thicknesses of the layers of the waveguide are formed only at values higher than the frequency $\omega \approx 1.75\times10^8$ Hertz.

Substituting the solutions of equations (4.8), which correspond to the representation (4.9) and satisfy the condition (4.10), into the dispersion equations of channels (3.5) and into the relation (3.6) we find the bands of permissible (or forbidden) frequencies, as well as the admissible lengths of the propagating short wave for each channel (Fig.5.a, Fig.5b and Fig. 5.c) of the composite waveguide and also for whole waveguide (Fig.6).

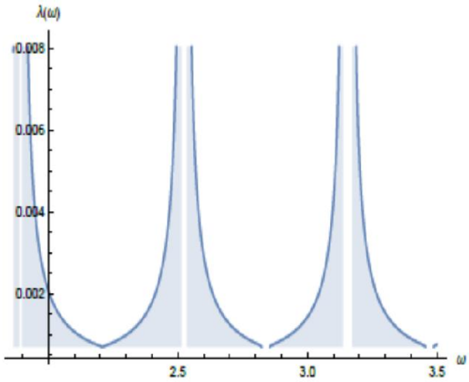


Fig. 5.a. Transmitting hard layer with parameters $C_{21} = 2.735\times10^{3}$ *m/sec;* $a = 1.0\times10^{-2}$ *m;* $C_{22} = 2.326\times10^{3}$ *m/sec;* $b = 2.5\times10^{-2}$ *m;*
With soft cells in the interlayers $C_{01} = 1.182\times10^{3}$ *m/sec;* $C_{02} = 1.67\times10^{3}$ *m/sec;* Thinness of waveguide layers $h_0 = 1.0\times10^{-4}$ *m;* $h_1 = 1.\times10^{-3}$ *m;* $h_2 = 2.\times10^{-3}$ *m;*

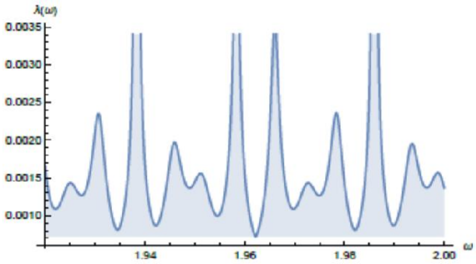


Fig. 5.b. Transmitting soft and thin layer with parameters
$C_{01} = 1.182\times10^{3}$ *m/sec;* $a = 1.0\times10^{-2}$ *m;*
$C_{02} = 1.67\times10^{3}$ *m/sec;* $b = 2.5\times10^{-2}$ *m;*
$h_0 = 1.0\times10^{-4}$ *m;* $h_1 = 1.\times10^{-3}$ *m;*
$h_2 = 2.\times10^{-3}$ *m;*

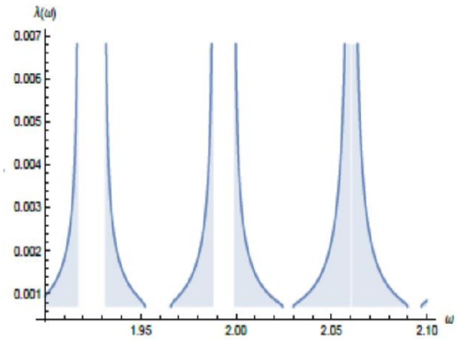


Fig. 5.c. Transmitting layer with parameters
$C_{11} = 2.326\times10^{3}$ *m/sec;* $a = 1.0\times10^{-2}$ *m;*
$C_{12} = 1.848\times10^{3}$ *m/sec;* $b = 2.5\times10^{-2}$ *m;*
With soft cells in the interlayers
$C_{01} = 1.182\times10^{3}$ *m/sec;*
$C_{02} = 1.67\times10^{3}$ *m/sec;*
Thinness of waveguide layers $h_0 = 1.0\times10^{-4}$ *m;* $h_1 = 1.\times10^{-3}$ *m;* $h_2 = 2.\times10^{-3}$ *m;*

Fig.5. Zones of admissible and forbidden frequencies of high-frequency elastic shear waves in periodically longitudinally inhomogeneous layers of a composite waveguide

These calculations were carried out in the determination region of short-wave frequencies: $\omega \geq 1.85\times10^{8}$ Hertz. From Fig.5.a, Fig.5.b and Fig.5.c it follows that when the rigid cells (the lower layer in Fig.1.1) are adjacent, the bands of admissible frequencies are wide and separated from each other by relatively wide bands of forbidden frequencies (Fig.5.a).
In the case of a hard and soft neighboring cells (the upper layer in Fig.1.1), the bands of admissible frequencies are rather thin and separated from each other by relatively thin bands of forbidden frequencies (Fig. 5.c). In the case of two neighboring soft cells with the selected combination of materials and linear cell sizes, a continuous spectrum of admissible frequencies is obtained. Shorter wavelengths are passed through this channel. But in all these cases the propagation of short slow waves of length

$\max\limits_{n=0;1;2}\{\lambda_{nm}(\omega)\} \le \min\limits_{n=0;1;2}\{h_n\} \approx 10^{-4}\ m$ formed along the thickness of the waveguide is not allowed.

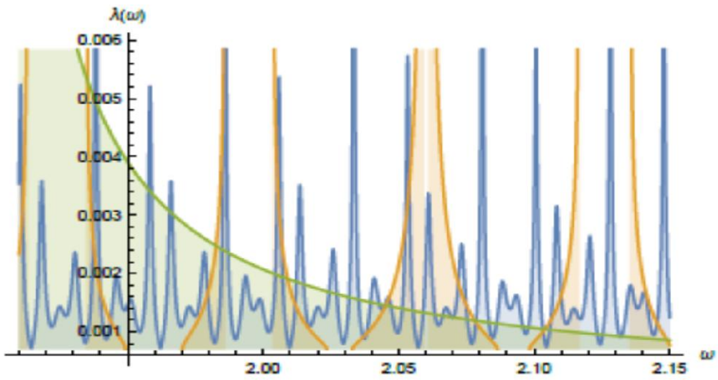


Fig.6. Zones of permissible and forbidden frequencies of high-frequency elastic shear waves in a periodically longitudinally inhomogeneous composite waveguide

The cross sections of the resulting zones of permitting frequencies along the waveguide channels (Fig.5.a, Fig.5.b, Fig.5.c) give the band of admissible frequencies and the corresponding lengths of admissible waves in the composite waveguide (Fig. 6).

From all these figures it is seen that along the thickness of a composite waveguide millimeter short waves of the length of the order $\lambda(\omega) \approx 1.0 \times 10^{-4}\ m$ can be formed. But the channels are allowed to propagate only waves of the length of the order $\lambda(\omega) \ge 5.0 \times 10^{-4}\ m$.

5. Conclusion. The cellular composite waveguide is modeled as a three-layer (three-channel), periodically longitudinally inhomogeneous waveguide of canonical rectangular cells.

The dispersion equations of wave transmission (filtering of frequencies) for each periodically inhomogeneous channel are derived.

In the case of propagation of a high-frequency (short-wave) wave signal of elastic shear and in the case of propagation of a low-frequency (long-wave) wave signal of elastic shear, the dispersion equations of wave formation in periodic composite layers of the waveguide were obtained and investigated.

The zones of admissible (or forbidden) frequencies are obtained both along the channels of the waveguide and in the whole waveguide from the dispersion equations of frequency filtration in accordance with the wave numbers in vertical composite layers.

The phonon structure of the constituent layers of the waveguide leads to different frequency transmission bands, forming a filter on separate layers, localizing the wave energy at the boundary segments of certain cells of the composite. It is shown that the formation along the waveguide thickness in periodic layers is determined by the physical-mechanical and linear parameters of the constituent cells of the interlayer.

The localization of the energy of an elastic shear wave (Love-type wave) at the boundaries of contiguous cells is characterized by the modules of physical constants of materials and the relative thicknesses of the constituent layers.

In the process of filtering of the frequencies of the formed waveforms, the physicomechanical and linear parameters of neighboring cells of inhomogeneous channels play the determinative role.

REFERENCES

1. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. //Proc. Math. Soc. London. 1885/1886, vol.17, p.4-11.
2. Love A. E. H., «Some problems of geodynamics», first published in 1911 by the Cambridge University Press and published again in 1967 by Dover, New York, USA. (Chapter 11: Theory of the propagation of seismic waves).
3. Stoneley R. Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids, Roy. Soc. Proc. London, ser. A 106, (1924), pp. 416-428.
4. Auld B.A., Surface acoustic waves and devices, Archives of Acoustics, (1991), vol.16, №1, pp. 11-30.
5. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids, Amsterdam, North-Holland, (1993), p.440.
6. Meleshko V.V., Bondarenko A.A., Dovgiy S.A., Trofimchuk A.N., van Heijst G.J.F. Elastic waveguides: History and the state of the art. I, (2009), vol.162, №1, pp. 99-120.
7. Gazalet J., Dupont S., Kastelik J.C., Rolland Q. and Djafari-Rouhani B. A tutorial survey onwaves propagating in periodic media: Electronic, photonic and phononic crystals. Perception ofthe Bloch theorem in both real and Fourier domains. Wave Motion, (2013), vol.50, p.619-654.
8. Hussein M.I., Leamy M.J., Ruzzene M. Dynamics of phononic paterialsand structures: historical origins, recent progress,and future outlook, Applied Mechanics Reviews, (2014), vol.66, pp.1-38.
9. Kaptsov A.V., Kuznetsov S.V., Love waves in a three-layer elastic semispace, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, (2015), v.79, №4, pp.550-557 (in Russian). Капцов А.В., Кузнецов С.В. Волны Лява в трёхслойном упругом полупространстве // ПММ. 2015. Т.79. №4. С. 550-557.
10. Avetisyan A.S., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. The Propagation of High-Frequency Shear Elastic Waves on Interface of Isotropic Elastic Half-Spaces with Canonical Surface Protrusions // American Journal of Earth Sci. and Eng. (2018), v.1, №2, pp.114-128, http://www.aascit.org/journal/ajese.

Information about the authors:

Ara S. Avetisyan – Department of Deformable Systems and Coupled Fields,
Institute of Mechanics, National Academy of Sciences,
Yerevan-0019, Republic of Armenia, **E – mail:** ara.serg.avetisyan@gmail.com

Vazgen M. Khachatryan – Department of Deformable Systems and Coupled Fields,
Institute of Mechanics, National Academy of Sciences,
Yerevan-0019, Republic of Armenia, **E – mail:** khachatryan-vazgen@inbox.ru

Received 04.04.2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика

Сергей Александрович Амбарцумян

4 августа 2018 года ушел из сверх насыщенной и чрезвычайно активной жизни выдающийся ученый, крупный государственный деятель, философ, педагог, художник и просто патриот С.А.Амбарцумян.

Его научные труды по механике деформируемого твердого тела широко известны во всем мире и являются существенным вкладом в мировую науку. Его работы переведены на многие языки мира и давно уже стали классикой.

Им была создана общая теория анизотропных, слоистых оболочек, на основе которой был решен ряд важнейших задач проектирования и расчета летательных аппаратов и тонкостенных конструкций. С.А.Амбарцумяном предложен ряд уточненных теорий расчета пластин и оболочек. Другое направление научных интересов Сергея Александровича было связано с разномодульной и микрополярной теориями упругости. С.А.Амбарцумяном и его учениками была развита теория магнитоупругости тонкостенных конструкций. Основополагающее значение имеют также результаты, полученные им в области нелинейной термомеханики, а также в других областях современной механики.

Это был увлеченный человек, девизом его было: живи так, как будто это последнее мгновение твоей жизни, но не забывай, что впереди еще сто лет. Он считал, что время, отпущенное нам вполне достаточно для любви, творчества и для свершения больших дел и все это он доказал на собственном примере.

С.А.Амбарцумян родился в 1922 году в Александрополе (Гюмри). Он является почетным гражданином родного города, его именем названа одна из центральных улиц города. В 1942 г. С.А. Амбарцумян заканчивает строительный факультет ЕРПИ, в 1946 г. получает учёную степень кандидата, а в 1952 г. доктора технических наук. В 1956 г. он избирается членом-корреспондентом АН Армении, в 1965 г. становится действительным членом АН. Он долгие годы был директором Института математики и механики (с 1971г. Института механики) АН Армении, далее четырнадцать лет был ректором ЕГУ, а с конца 1991 г. является почетным директором института и одновременно около 30 лет членом Президиума НАН РА. С.А.Амбарцумян был главным редактором и почетным главным редактором журнала «Известия НАН Армении, Механика».

Память о большом человеке Сергее Амбарцумяне навсегда останется в сердцах потомков, воплотив его же завет: не гасите свет уходя.

Редакционная коллегия журнала «Известия НАН Армении, Механика» глубоко скорбит по поводу тяжелой утраты.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика

Александр Владимирович Манжиров

3 сентября 2018 года скоропостижно скончался выдающийся ученый механик и математик, доктор физико-математических наук, профессор, иностранный член Национальной академии наук Армении Александр Владимирович Манжиров.

А.В.Манжиров родился 24 мая 1957г. в Ростове-на-Дону. В 1979 году, после окончания РГУ, он, по рекомендации академика РАН И.И.Воровича поступает в аспирантуру под руководством академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна. В 1983 г. защищает кандидатскую, а в 1993 г. – докторскую диссертацию. В 2014 году был избран иностранным членом НАН Армении.

А.В. Манжиров — один из крупнейших ученых в области механики и прикладной математики. Он по праву считается одним из основателей нового направления механики – механики наращиваемых тел, создателем математической теории наращиваемых тел, позволяющей эффективно моделировать широкий круг технологических и природных процессов. Он автор более трехсот публикаций, включая 17 монографий и справочников, опубликованных в России, США, Англии и Германии.

Проф. А.В.Манжиров пользовался международным признанием. Он являлся членом многих профессиональных международных обществ: RNCTAM, EUROMECH, ASME, AMS, ASR, GAMM, IAENG, ABI и членом редколлегий 6 авторитетных научных журналов, в том числе и нашего журнала.

Хорошо известна научно-организационная деятельность А.В. Манжирова. По его инициативе в Институте проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН была создана Лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела, он был заместителем директора Института, организатором многих научных мероприятий, в частности, был сопредседателем 7 международных научных конференций, проведенных в Армении за последнее десятилетие.

Благодаря своему научному руководителю акад. Нагушу Хачатуровичу Арутюняну, А.В.Манжиров еще с аспирантских лет начал общение с армянской школой механики, которое, впоследствии, переросло в большую дружбу. Он никогда не скрывал свое восхищение Арменией и армянским народом, толика крови которого текла и в его жилах.

Светлая память об Александре Владимировиче навсегда сохранится в наших сердцах.

Редколлегия журнала "Известия НАН Армении. Механика" глубоко скорбит по поводу тяжелой утраты.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 71, №3, 2018 Механика
УДК 539.3

Содержание 3-го номера за 2018 г., том 71

CONTENTS

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Сдано в производство 17.09.2018 г.
Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$. Печ. лист – 4 7/8
Заказ № 882. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24