ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

# ՄԵԽԱՆԻԿԱ
# МЕХАНИКА
# MECHANICS

2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա 71, №2, 2018 Механика
УДК 539.3

# НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ РАВНОМЕРНО СЛОИСТОЙ ПЛОСКОСТИ С СИСТЕМОЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВНУТРЕННИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

**Акопян В.Н., Амирджанян А.А.**

**Ключевые слова:** периодическая задача, кусочно-однородная плоскость, деформируемое включение.

**Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա.**
**Պարբերական զուգահեռ ներքին ներդրակների համակարգով կտոր առ կտոր հավասարաչափ շերտավոր հարթության լարվածադեֆորմացիոն վիճակը**
**Հիմնաբառեր.** Պարբերական խնդիր, կտոր առ կտոր համասեռ հարթություն, առաձգական ներդրակ

Աշխատանքում ուսումնասիրված է հավասար բարձրություններ ունեցող երկու տարբեր նյութերից պատրաստված շերտերի հաջորդական միացումից ստացված կտոր առ կտոր համասեռ հարթության լարվածադեֆորմացիոն վիճակը, երբ դրանց միջին գծերի վրա առկա է առաձգական ներդրակների զուգահեռ համակարգ: Ստացված է խնդրի որոշիչ սինգուլյար ինտեգրո-դիֆֆերենցիալ հավասարումների համակարգը ներդրակների երկար կողմերի վրա ազդող շոշափող լարումների նկատմամբ և կառուցված է նրա լուծումը ինչպես վերջավոր, այնպես էլ անվերջ ներդրակների դեպքում: Ուսումնասիրված են կոնտակտային լարումների փոփոխման օրինաչափությունները՝ կախված ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

**Hakobyan V.N., Amirjanyan A.A.**
**The stress state of an uniformly piecewise homogeneous layered plane with a system of periodic parallel internal inclusions**
**Keywords:** periodic problem, piecewise uniform plane, inner inclusions.

This article considers the stress state of piecewise homogeneous plane, made by alternate junction of two heterogeneous strips of the same heights with the system of parallel elastic inclusions on the middle lines. The system of the singular integro-differential equations with respect to shear stresses, acting on the long sides of inclusions, is obtained. The solution of obtained system is constructed both in the case of finite and in the case of infinite inclusions. The regulations of changes in contact stresses are studied depending on the physico-mechanical and geometric parameters.

В работе рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости, полученной путём поочерёдного соединения двух разнородных полос равных высот, изготовленных из различных материалов, на срединных линиях которых имеется система параллельных упругих включений. Получена система определяющих сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно касательных контактных напряжений, действующих на длинные стороны включений и построено её решение как в случае конечных, так и в случае бесконечных включений. Изучены закономерности изменения контактных напряжений в зависимости от физико-механических и геометрических параметров.

**Введение**

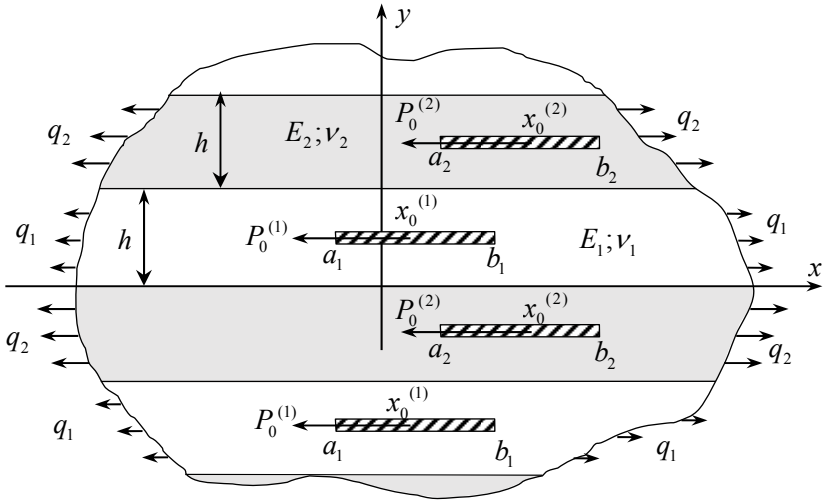
Изучению плоско-деформированного или обобщённого плоского напряжённого состояния однородных массивных тел с концентраторами напряжений типа деформируемых накладок или включений посвящено огромное количество работ. Среди них выделим монографию [1], где приведены многие результаты, полученные в этом направлении. Укажем также на монографии [2,3], где подытожены результаты исследований напряжённо-деформированного состояния однородных массивных тел с периодическими и двоякопериодическими трещинами и включениями. Отметим также работу [4], где исследовано обобщённое плоское напряжённое состояние кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. Число аналогичных исследований для кусочно-однородных слоистых массивных тел, которые актуальны с точки зрения слоистых композитов, очень мало. В этом направлении отметим работы [5-7], где построены точные или эффективные решения ряда антиплоских и плоских, периодических и двоякопериодических задач для кусочно-однородных, равномерно слоистых тел с межфазными трещинами и абсолютно жёсткими включениями. Напряжённо-деформированное состояние равномерно кусочно-однородных, слоистых тел с внутренней системой симметрично нагружённых двояко-периодических упругих конечных включений рассмотрено в [8]. Других работ в этом направлении, как нам известно, нет.

## 1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть кусочно-однородная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат $Oxy$, изготовленная при помощи поочерёдного соединения полос толщины $2h$ из разнородных материалов с коэффициентами упругости $E_1, E_2$ и коэффициентами Пуассона $\nu_1$ и $\nu_2$ на срединных линиях разнородных полос $y=(4n+1)h$ и $y=(4n-1)h\ (n\in Z)$ соответственно по линиям $L_j=(a_j,b_j)\ (j=1,2)$ усилена упругими тонкими включениями толщины $h_j$ и приведёнными модулями деформаций $E_I^{(j)}\ (j=1,2)$. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием одинаковых сосредоточенных нагрузок $P_0^{(j)}$, приложенных к включениям соответственно в точках $x_0^{(j)}\in[a_j,b_j]\ (j=1,2)$ и равномерно распределённых растягивающих нагрузок $q_1$ и $q_2$, приложенных к полосам на бесконечности (Фиг.1).

Очевидно, что при такой форме нагружения линии $y=(2n+1)h\ (n\in Z)$ являются линиями симметрии. Вследствие этого, поставленную задачу можно сформулировать как задачу для кусочно-однородной полосы (базовой ячейки), занимающей на плоскости область $\Omega\{-\infty<x<\infty;|y|\le h\}$, на границах $y=\pm h$ которого вне включения заданы условия симметрии, а на линиях

$L_j$ $\left(j=1,2\right)$ – условия контакта включений с основанием. При этом, накладки, как обычно, будем трактовать как одномерные континуумы, которые под воздействием приложенных к ним сосредоточенных нагрузок и тангенциальных контактных напряжений находятся в одноосном напряжённом состоянии. Однако, как и в [9], изгибным эффектом накладок здесь не будем пренебрегать и будем считать, что вследствие малости толщины накладок и симметрии задачи относительно осей накладок, вертикальные смещения точек накладок не зависят от координаты $x$.




Фиг.1

Ставится задача: получить ключевую систему уравнений поставленной задачи в общем случае и построить их эффективные решения в некоторых частных случаях, представляющих самостоятельный интерес, а также определить закономерности изменения контактных напряжений, действующих на сторонах включений в зависимости от упругих характеристик включений и разнородных полос.

Вследствие сделанных предположений, в зонах контакта включений с матрицей имеют место следующие условия контакта:

$$\frac{dV_j\left(x,\left(-1\right)^{j+1}h\right)}{dx}=0;\ \frac{dU_j\left(x,\left(-1\right)^{j+1}h\right)}{dx}=\varepsilon_j\left(x\right)\ \left(x\in L_j;\ j=1,2\right) \tag{1.1}$$

где $V_j\left(x,y\right)$ и $U_j\left(x,y\right)$ – соответственно, вертикальные и горизонтальные смещения точек разнородных полос, а $\varepsilon_j\left(x,t\right)$ $\left(j=1,2\right)$ – осевые деформации включений.

Для получения системы определяющих уравнений, обозначим через $\tau_j\left(x\right)$ $\left(j=1,2\right)$ неизвестные касательные контактные напряжения, действующие на длинные стороны включений, и определим горизонтальные смещения точек сторон

$\left(y=\pm h;\ x\in L_j\right)$ полос при помощи этих функций. С этой целью, используя первое из соотношений (1.1), рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y^{(1)}(x,0)=\sigma_y^{(2)}(x,0);\ \ \tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0);\quad \left(-\infty<x<\infty\right)\\
&U_1(x,0)=U_2(x,0);\quad V_1(x,0)=V_2(x,0);\quad \left(-\infty<x<\infty\right)\\
&\frac{dV_j(x,(-1)^{j+1}h)}{dx}=0;\qquad \left(-\infty<x<\infty\right)\\
&\tau_{xy}^{(j)}(x,(-1)^{j+1}h)=0;\qquad \left(x\notin L_j\right)\\
&\tau_{xy}^{(j)}(x,(-1)^{j+1}h)=(-1)^j\,\tau_j(x);\quad \left(x\in L_j\right)
\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x,y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)\ \left(j=1,2\right)$ – компоненты нормальных и касательных напряжений, действующих в соответствующих полосах.

Решение граничной задачи (1.2) будем строить при помощи бигармонической функции напряжений (функция Эри), которую для каждой из разнородных полос представим в виде интегралов Фурье:

$$F_j(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_j\mathrm{ch}sy+B_j\mathrm{sh}sy+sy\left(C_j\mathrm{ch}sy+D_j\mathrm{sh}sy\right)\right]e^{isx}ds+\frac{q_j}{2}y^2$$
$$\left(-\infty<x<\infty;\ \ 0\le(-1)^{j+1}y\le h;\ \ j=1,2\right),\tag{1.3}$$

где $A_j,B_j,D_j,C_j\ \left(j=1,2\right)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Учитывая общеизвестные соотношения, связывющие бигармонические функции с напряжениями и смещениями, удовлетворим условиям (1.2) и определим неизвестные коэффициенты $A_j,B_j,D_j,C_j$ через трансформанты Фурье касательных контактных напряжений $\overline{\tau}_j(s)\ \left(j=1,2\right)$. Получим:

$$A_1(s)=A_2(s)=-\left(\frac{\beta}{\mathrm{sh}(2\beta)}+\frac{1}{2}\right)\left(D_1(s)+D_2(s)\right)-$$
$$-\frac{i}{s^2\mathrm{sh}2\beta}\left[\left(1-\frac{\beta\mathrm{th}\beta}{2(1-\nu_1)}\right)\overline{\tau}_1(s)+\left(1-\frac{\beta\mathrm{th}\beta}{2(1-\nu_2)}\right)\overline{\tau}_2(s)\right];$$

$$B_1(s) = -A_1(s)\,\mathrm{th}\beta - \frac{\beta D_1(s)}{\mathrm{ch}^2\beta} - \frac{i\overline{\tau}_1(s)(1-2\nu_1-\beta\,\mathrm{th}\beta)}{s^2\mathrm{ch}\beta};$$

$$B_2(s) = A_2\mathrm{th}\beta + \frac{\beta D_2(s)}{\mathrm{ch}^2\beta} + \frac{i\overline{\tau}_2(s)(1-2\nu_2-\beta\,\mathrm{th}\beta)}{s^2\mathrm{ch}\beta};$$

$$C_1(s) = -\mathrm{th}\beta D_1(s) - \frac{\overline{\tau}_1(s)}{2(1-\nu_1)s^2\mathrm{ch}\beta};\ C_2(s) = \mathrm{th}\beta D_2(s) + \frac{i\overline{\tau}_2(s)}{2(1-\nu_2)s^2\mathrm{ch}\beta};$$

$$D_1(s) = -\frac{i}{s^2\Delta_1(s)\mathrm{sh}\beta}\left\{\overline{\tau}_1(s)\left[\vartheta_2 - \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2(1-\nu_1)}\beta\,\mathrm{th}\beta\right] + \vartheta_2\overline{\tau}_2(s)\right\};$$

$$D_2(s) = \frac{i}{s^2\Delta_2(s)\mathrm{sh}\beta}\left\{\vartheta_1\overline{\tau}_1(s) + \overline{\tau}_2(s)\left[\vartheta_1 + \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2(1-\nu_2)}\beta\,\mathrm{th}\beta\right]\right\};$$

где

$$\Delta_1(s) = \frac{2(\vartheta_2-\vartheta_1)\beta}{\mathrm{sh}(2\beta)} + \Delta_1;\ \Delta_2(s) = \frac{2(\vartheta_2-\vartheta_1)\beta}{\mathrm{sh}(2\beta)} - \Delta_2;\ \Delta_1 = \vartheta_2 + \vartheta_1\text{æ}_1;$$

$$\Delta_2 = (\vartheta_1 + \vartheta_2\text{æ}_2);\ \beta = hs;\ \vartheta_j = \frac{1+\nu_j}{E_j};\ \text{æ}_j = 3-4\nu_j;$$

$$\overline{\tau}_j(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{L_j}\tau_j(x)e^{-isx}dx \quad (j=1,2). \tag{1.4}$$

При этом, нагрузки $q_1$ и $q_2$ должны удовлетворять также условию совместимости деформаций разнородных полос на бесконечности, которое в этом случае записывается в следующем виде:

$$m_1q_1 = m_2q_2 \qquad \left(m_j = \left(1-\nu_j^2\right)/E_j;\quad j=1,2\right).$$

Подставляя полученные выражения для коэффициентов в (1.3), можем выразить функцию напряжений, следовательно, и все составляющие напряжённо-деформированного состояния в кусочно-однородной полосе при помощи трансформантов Фурье неизвестных касательных контактных напряжений. В частности, для производных горизонтальных смещений в зонах контактов, которые нужны для решений поставленной задачи, получим выражения:

$$\frac{dU_j(x,h)}{dx} = -\int_{-\infty}^{\infty}\left[K_{j1}(s)\overline{\tau}_1(s) + K_{j2}(s)\overline{\tau}_2(s))\right]e^{isx}ds + m_jq_j \tag{1.5}$$

$$(-\infty < x < \infty;\ j=1,2).$$

Здесь введены обозначения:

$$K_{11}(s) = i\vartheta_1\left\{\frac{(\text{æ}_1-\beta\,\mathrm{th}\beta-\beta\,\mathrm{cth}\beta)}{\Delta_1(s)\mathrm{sh}2\beta}\left[\vartheta_2 - \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2(1-\nu_1)}\beta\,\mathrm{th}\beta\right] + \frac{1}{\Delta_2(s)\mathrm{sh}2\beta}\times\right.$$

$$\times \vartheta_1\left(\frac{2\beta}{\mathrm{sh}2\beta}+1\right)+\frac{1}{\mathrm{sh}2\beta}\left(1-\frac{\beta\mathrm{th}\beta}{2(1-\nu_1)}\right)+\frac{æ_1\mathrm{th}\beta}{2(1-\nu_1)}+\frac{\beta}{2(1-\nu_1)\mathrm{ch}^2\beta}\Bigg\};$$

$$K_{12}(s)=i\vartheta_1\left\{\frac{\vartheta_2(æ_1-\beta\mathrm{th}\beta-\beta\mathrm{cth}\beta)}{\Delta_1(s)\mathrm{sh}2\beta}+\frac{1}{\mathrm{sh}2\beta}\left(1-\frac{\beta\mathrm{th}\beta}{2(1-\nu_2)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Delta_2(s)\mathrm{sh}2\beta}\mathrm{sh}\left(\frac{2\beta}{\mathrm{sh}2\beta}+1\right)\left[\vartheta_1+\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2(1-\nu_2)}\beta\mathrm{th}\beta\right]\right\};$$

$$K_{21}(s)=i\vartheta_2\left\{\frac{\vartheta_1(\beta\mathrm{th}\beta+\beta\mathrm{cth}\beta\text{-}æ_2)}{\Delta_2(s)\mathrm{sh}2\beta}+\frac{1}{\mathrm{sh}2\beta}\left(1-\frac{\beta\mathrm{th}\beta}{2(1-\nu_1)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta_1(s)\mathrm{sh}2\beta}\left(\frac{2\beta}{\mathrm{sh}2\beta}+1\right)\left[\vartheta_2-\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2(1-\nu_1)}\beta\mathrm{th}\beta\right]\right\};$$

$$K_{22}(s)=i\vartheta_2\left\{\frac{(\beta\mathrm{th}\beta+\beta\mathrm{cth}\beta\text{-}æ_2)}{\Delta_2(s)\mathrm{sh}2\beta}\left[\vartheta_1+\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2(1-\nu_2)}\beta\mathrm{th}\beta\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\vartheta_2(2\beta+\mathrm{sh}2\beta)}{\Delta_1(s)\mathrm{sh}^2 2\beta}+\frac{1}{\mathrm{sh}2\beta}\left(1-\frac{\beta\mathrm{th}\beta}{2(1-\nu_2)}\right)+\frac{æ_2\mathrm{th}\beta+\beta/\mathrm{ch}^2\beta}{2(1-\nu_2)}\right\}.$$

Используя соотношения (1.4), после некоторых несложных выкладок, выделяя главную часть ядер, входящих в полученные выражения в виде ядер Коши, можем записать:

$$\frac{dU_j(x,h)}{dx}=-\frac{\lambda_j}{\pi}\int_{L_j}\frac{\tau_j(s)ds}{s-x}-\int_{L_1}R_{j1}(x-s)\tau_1(s)ds-$$

$$-\int_{L_2}R_{j2}(x-s)\tau_2(s)ds+m_jq_j \qquad \left(x\in L_j;\quad j=1,2\right), \tag{1.6}$$

где

$$R_{jj}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[K_{jj}(s)-\frac{i\vartheta_j æ_j}{2(1-\nu_j)}\mathrm{sgn}(s)\right]\mathrm{e}^{ist}\,dt;$$

$$R_{ij}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(s)\mathrm{e}^{ist}\,dt;\qquad \lambda_j=\frac{\vartheta_j æ_j}{2\left(1-\nu_j\right)}\quad (j=1,2).$$

Отметим, что представления (1.6) верны и в случае, когда линии $L_j\ (j=1,2)$ представляют собой совокупности конечного числа непересекающихся интервалов.

Теперь перейдём к решению поставленной задачи. Для этого, используя соотношения (1.5), удовлетворим второму из уравнений (1.1). В результате, учитывая, что осевые деформации включений от приложенных в конечных точках $x_0^{(j)}$ нагрузок определяются формулами [1]:

$$\varepsilon_j(x)=\frac{1}{h_jE_I^{(j)}}\left[P_0^{(j)}H\left(x-x_0^{(j)}\right)-2\int_{a_j}^{x}\tau_j(s)\,ds\right],\qquad \left(a_j\le x_0^{(j)}\le b_j);\ j=1,2\right) \tag{1.7}$$

где $H(x)$ – известная функция Хевисайда, для определения касательных контактных напряжений получим следующую систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\lambda_j}{\pi}\int_{a_j}^{b_j}\frac{\tau_j(s)\,ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{a_i}^{b_i}R_{ji}(x-s)\tau_i(s)ds=m_jq_j-$$
$$-\frac{1}{h_jE_I^{(j)}}\left[P_0^{(j)}H\left(x-x_0^{(j)}\right)-2\int_{a_j}^{x}\tau_j(s)\,ds\right]\left(a_j<x<b_j;\ j=1,2\right). \tag{1.8}$$

Систему (1.8) нужно рассматривать при условиях равновесия включений. Учитывая, что в рассматриваемом случае контактные напряжения на длинных сторонах включения из-за симметрии одинаковые, эти условия можно записать в виде:

$$\int_{a_j}^{b_j}\tau_j(s)\,ds=P_0^{(j)}/2;\quad (j=1,2;). \tag{1.9}$$

Чтобы построить решения системы (1.8) при условиях (1.9), при помощи замены переменных $\{s,x\}=p_j\{s,x\}+k_j$ , где $p_j=\left(b_j-a_j\right)/2,\ k_j=\left(b_j+a_j\right)/2$ , сформулируем эти уравнения на интервале $(-1,1)$.

Обозначив

$$\varphi_j(t)=\frac{p_j\tau_j\left(p_jt+k_j\right)}{P_0^{(1)}};\;\; R_{ji}^*(\tau,t)=\frac{p_j}{\lambda_j}R_{ji}\left(\mathrm{p}_j\,t+k_j-p_i\tau-k_i\right);$$

$$\vartheta_j^*=\frac{2\left(1-\nu_j\right)p_jE_j}{h_jE_s^{(j)}\left(1+\nu_j\right)æ_j},\quad \left(P_0^{(1)}\neq 0\right),$$

придём к следующей определяющей системе интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_j(\tau)d\tau}{\tau-t}+\sum_{i=1}^{2}\int_{-1}^{1}R_{ji}^*(\tau,t)\varphi_i(\tau)d\tau=$$
$$=-\vartheta_j^*\left[\frac{P_0^{(j)}}{P_0^{(1)}}H\left(t-t_0^{(j)}\right)-2\int_{-1}^{t}\varphi_j(\tau)d\tau\right]\quad\left(-1<x<1;\quad j=1,2\right). \tag{1.10}$$

Условия (1.8) при этом примут вид

$$\int_{-1}^{1}\varphi_j(s)ds=\frac{P_0^{(j)}}{2P_0^{(1)}};\quad\left(j=1,2;\right). \tag{1.11}$$

**2. Решение системы определяющих уравнений.**

Перейдём к решению системы определяющих уравнений (1.10) при условиях (1.11) методом механических квадратур [10]. С этой целью заметим, что искомые функции в концевых точках интервала интегрирования имеет корневую особенность. Исходя из этого, представим их в виде:

$$\varphi_j(t)=\varphi_j^*(t)/\sqrt{1-t^2}\quad\left(j=1,2\right), \tag{2.1}$$

где $\varphi_j^*(t)$ – непрерывная гладкая функция, ограниченная вплоть до концов интервала $\left[-1,1\right]$. Эти функции будем аппроксимировать интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по корням $\xi_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ многочлена Чебышева $T_n\left(x\right)$:

$$\varphi_j^*(t)\approx\frac{2}{n+2k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_j^*(\xi_i)T_n(t)}{(t-\xi_i)U_{n-1}(\xi_i)},\qquad T_n\left(\xi_i\right)=0. \tag{2.2}$$

Здесь $U_n(t)$ – многочлен Чебышева второго рода.

Подставляя значения функций $\varphi_j(t)$ $\left(j=1,2\right)$ из (2.1) в (1.10), (1.11), используя соотношение (2.2), квадратурные формулы [1], получим:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i\varphi^*(\xi_i)}{\xi_i-t}\left[1-\frac{U_{n-1}(t)}{U_{n-1}(\xi_i)}\right];$$

$$\int_{-1}^{t}\varphi(\tau)d\tau=q(t)\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)d\tau-\sqrt{1-t^2}\sum_{i=1}^{n}w_i\,\varphi^*(\xi_i)l_i(t);$$

$$\int_{-1}^{1}K_{11}^*(\tau,t)\varphi(\tau)d\tau=\sum_{i=1}^{n}w_i\varphi^*(\xi_i)K_{11}^*(\xi_i,t),$$

где

$$w_i=8h_n\frac{n}{1-\xi_i^2}\left[\frac{1}{nU_{n-1}(\xi_i)}\right]^2;\quad q(x)=\pi B_{\frac{1+x}{2}}(0.5,0.5);$$

$$l_i(x)=\sum_{m=1}^{n-1}\frac{T_m(\xi_i)U_{m-1}(x)}{2mh_m};\qquad h_m=\frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma(m+0.5)}{\Gamma(m+1)}\right]^2,$$

а $B_x(\alpha,\beta)$ и $\Gamma(\alpha,\beta)$ – соответственно, неполная бета- и гамма-функции Эйлера и выбирая корни $\eta_k\left(k=\overline{1,n-1}\right)$ многочлена Чебышева второго рода $U_{n-1}(t)$ в качестве точек коллокации, получим следующую замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $\varphi_j^*(\xi_i)$ $(j=1,2)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{\xi_i-t}+K_{jj}^*(\xi_i,t)+2\vartheta_j^*\sqrt{1-\eta_k^2}\,l_i(\eta_k)\right)w_i\,\varphi_j^*(\xi_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}K_{jm}^*(\xi_i,t)w_i\,\varphi_m^*(\xi_i)=-\vartheta_j^*\left(1-q(\eta_k)\right);\qquad(2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}w_i\varphi_j^*(\xi_i)=\frac{P_0^{(j)}}{2P_0^{(1)}}\qquad(j,m=1,2;\ j\neq m).$$

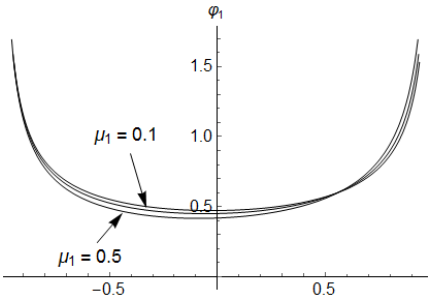
После решения системы (2.3), при помощи формулы (2.2) восстанавливаются функции $\varphi_j^*(t)$ $(-1<t<1)$ и определяются все составляющие напряжённо-деформированного поля в двухкомпонентном слое.

**3. Численные расчёты и выводы.**

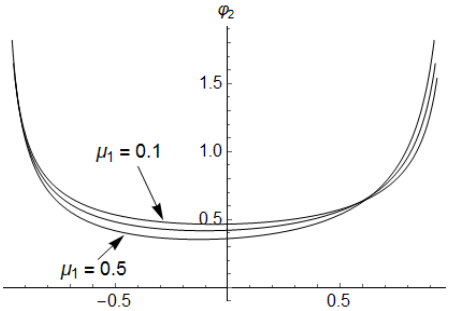
Проведён численный расчёт поставленной задачи в случае, когда разнородные полосы усилены включениями, изготовленными из одинаковых материалов и

имеющие одинаковые длины, на которые действуют одинаковые сосредоточенные нагрузки, т.е. когда $E_I^{(1)} = E_I^{(2)} = E_I$, $a_1 = a_2 = -a,\ b_1 = b_2 = a$, $P_0^{(1)} = P_0^{(2)} = P_0$. При этом, коэффициенты Пуассона разнородных полос и геометрические характеристики имеют следующие значения: $\nu_1 = 0,25,\ \nu_2 = 0,35$, $\lambda = h/\mathrm{a} = 2$, $\mu = E_2 / E_1 = 2$.

Изучены закономерности изменения безразмерных касательных напряжений, действующих на длинные стороны включений в зависимости от соотношения модулей Юнга первой полосы и включений $\mu_1 = E_1 / E_I$, когда растягивающие на бесконечности равномерно распределенные нагрузки отсутствуют, а также в зависимости от соотношения $P_1^* = hq_1 / P_0$, в случае когда $\mu_1 = 0,25$ . На Рис. 2а и 2б приведены соответственно графики приведённых касательных контактных напряжений $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в зависимости от параметра $\mu_1$.




Фиг. 2а

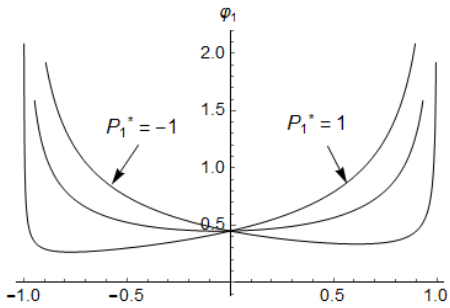


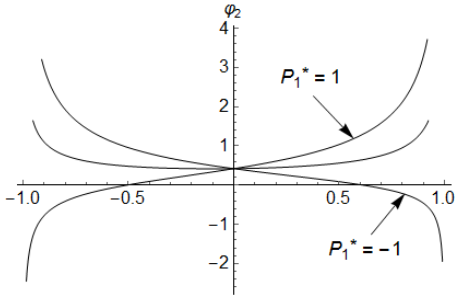

Фиг. 2б

Касательные напряжения $\mu_1 = 0,1,\ 0,25,\ 0,5$

Из этих графиков видно, что распределение касательных контактных напряжений мало зависит от упругих характеристик разнородных полос и включений. При этом, как и ожидалось, чем жёстче материал включений, тем больше распределение касательных напряжений приближается к симметричному.

На фиг.3а и 3б приведены, соответственно, графики приведённых касательных контактных напряжений $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в зависимости от параметра $P_1^*$. Из них явствует, что распределение касательных контактных напряжений существенно зависит от изменения нагрузок на бесконечности. При этом, они, в зависимости от соотношения упругих характеристик разнородных полос и включений, могут стать знакопеременными.




Фиг. 3а. Фиг. 3б.

Касательные напряжения $P_1^* = -1, 0, 1$

**4. Кусочно-однородная плоскость с системой параллельных бесконечных внутренних включений.**

Рассмотрим ещё один частный случай поставленной задачи, когда кусочно-однородная равномерно слоистая плоскость усилена внутренними параллельными бесконечными накладками и деформируется под воздействием сосредоточенных нагрузок $P_0^{(j)}$ и $P_j$ $\left(j = 1, 2\right)$, приложенных к включениям, соответственно, в точках $x = 0$ и на бесконечности, а также равномерно распределённых растягивающих нагрузок $q_1$ и $q_2$, приложенных к полосам на бесконечности и удовлетворяющим условию совместимости деформаций разнородных полос на бесконечности, приведённых выше. При этом, условия совместимости деформаций бесконечных включений и разнородных полос на бесконечности приводят к соотношениям:

$$P_1 / \left(h_1 E_I^{(1)}\right) = P_2 / \left(h_2 E_I^{(2)}\right) = m_j q_j \quad \left(j = 1, 2\right).$$

В этом частном случае, при помощи соотношений (1.5) и (1.6) из второго условия контакта включений с матрицей (1.1), с учётом условий совместимости деформаций бесконечных включений и разнородных полос на бесконечности получим следующую ключевую систему уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ K_{j1}(s)\overline{\tau}_1(s) + K_{j2}(s)\overline{\tau}_2(s)) \right] e^{isx} ds =$$

$$= -\frac{1}{h_j E_s^{(j)}} \left[ P_0^{(j)} H\left(x\right) - 2\int_{a_j}^{x} \tau_j\left(s\right) ds \right] \quad \left(-\infty < x < \infty;\ j = 1, 2\right). \tag{4.1}$$

Нетрудно заметить, что в определяющую систему уравнений (4.1) не входят нагрузки, действующие на бесконечности, т.е. они, как и в случае однородной плоскости, на касательные контактные напряжения не влияют.

Приступим к решению системы (4.1). Для этого применим к обеим сторонам системы (4.1) обобщённое преобразование Фурье. Тогда, учитывая равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[P_0^{(j)}H(x)-2\int_{a_j}^{x}\tau_j(s)ds\right]e^{-isx}dx=\frac{1}{is}\left[P_0^{(j)}-4\pi\overline{\tau}_j(s)\right],$$

для определения трансформантов Фурье касательных контактных напряжений придём к системе следующих алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\left[sK_{11}(s)+\dfrac{2i}{h_1E_I^{(1)}}\right]\overline{\tau}_1(s)+sK_{12}(s)\overline{\tau}_2(s)=\dfrac{iP_0^{(1)}}{2\pi h_1E_I^{(1)}};\\ sK_{21}(s)\overline{\tau}_1(s)+\left[sK_{22}(s)+\dfrac{2i}{h_2E_I^{(2)}}\right]\overline{\tau}_2(s)=\dfrac{iP_0^{(2)}}{2\pi h_2E_I^{(2)}}.\end{cases}\tag{4.2}$$

Решение системы уравнений (4.2) запишем в виде:

$$\overline{\tau}_j(s)=\Delta_j^*(s)/\Delta_*(s),\tag{4.3}$$

где

$$\Delta_j^*(s)=\left[sK_{ii}(s)+i\lambda_*^{(i)}\right]\frac{i\lambda_*^{(j)}P_0^{(j)}}{4\pi}-sK_{ji}(s)\frac{i\lambda_*^{(i)}P_0^{(i)}}{4\pi}\quad(j,i=1,2;\ i\neq j);$$

$$\Delta_*(s)=\left[sK_{11}(s)+i\lambda_*^{(1)}\right]\left[sK_{22}(s)+i\lambda_*^{(2)}\right]-s^2K_{21}(s)K_{12}(s)$$

После этого, контактные напряжения определяются при помощи обратного преобразования Фурье в замкнутом виде. Учитывая, что функции $sK_{ij}(s)$ ограничены в точке $s=0$, а на бесконечности ведут себя как $i\text{æ}_j^*|s|$ при $(i=j)$ и стремятся к нулю при $i\neq j$, можем отделить логарифмическую особенность контактных напряжений, возникающую в точке приложения нагрузок, и записать их в виде:

$$\tau_j(x)=\frac{\lambda_*^{(j)}P_0^{(j)}}{2\pi\text{æ}_j^*}\left[\cos(a_jx)Ci(a_jx)+\sin(a_jx)Si(a_jx)\right]+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Delta_j^*(s)}{\Delta_j(s)}-\frac{\lambda_*^{(j)}P_0^{(j)}}{4\pi\left(\text{æ}_j^*|s|+\lambda_*^{(j)}\right)}\right]e^{isx}ds\quad(j=1,2),\tag{4.4}$$

где

$$\text{æ}_j^*=\frac{\text{æ}_j\vartheta_j}{2(1-\nu_j)};\ a_j=\frac{\lambda_*^{(j)}}{\text{æ}_j^*}=\frac{4(1-\nu_j)}{h_jE_I^{(j)}\text{æ}_j\vartheta_j},$$

а $Si(x)$ и $Ci(x)$ – известные интегральные синус- и косинус-функции.

Приведём также решение задачи, когда кусочно-однородная равномерно слоистая плоскость только в одной из повторяющихся полос усилена внутренними параллельными бесконечными накладками. В этом случае в системе (4.1) останется только одно уравнение:

$$\left[sK_{jj}(s)+i\lambda_*^{(j)}\right]\overline{\tau}_j(s))=\frac{i\lambda_*^{(j)}P_0^{(j)}}{4\pi}\quad\left(\lambda_*^{(j)}=\frac{2}{h_jE_I^{(j)}};\ j=1,2\right),\tag{4.3}$$

причём, $j=1$, если усилены полосы с индексом «1», и $j=2$, если усилены полосы с индексом «2». Из уравнений (4.3) находим:

$$\tau_j(x)=\frac{i\lambda_*^{(j)}P_0^{(j)}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}ds}{sK_{jj}(s)+i\lambda_*^{(j)}}\quad(j=1,2),$$

или, аналогично, используя поведение функций $sK_{jj}(s)$ на бесконечности, можем отделить логарифмическую особенность контактных напряжений и записать их в виде:

$$\tau_j(x)=\frac{\lambda_*^{(j)}P_0^{(j)}}{2\pi æ_j^*}\left[\cos(a_jx)Ci(a_jx)+\sin(a_jx)Si(a_jx)\right]+$$
$$+\frac{\lambda_*^{(j)}P_0^{(j)}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{i}{sK_{jj}(s)+i\lambda_*^{(j)}}-\frac{1}{\left[æ_j^*|s|+\lambda_*^{(j)}\right]}\right]e^{isx}ds\quad(j=1,2).\tag{4.5}$$

Заметим, что нетрудно также записать аналогичные формулы для определения нормальных контактных напряжений, действующих на сторонах включений при помощи касательных контактных напряжений. Например, в случае когда усилена только полоса с индексом «1», нормальные контактные напряжения определяются формулой:

$$\sigma_y^{(1)}(x,h)=-\frac{æ_1-1}{2h(æ_1+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_1(\xi)d\xi}{\operatorname{sh}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}}-\int_{-\infty}^{\infty}R_1(x-\xi)\tau_1(\xi)d\xi.$$

Здесь $R_1(t)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(s)e^{isx}dt;$

$$R(s)=\frac{\vartheta_1(1+\beta\operatorname{th}\beta+\beta\operatorname{cth}\beta)\left(1-\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2(1-\nu_1)}\beta\operatorname{th}\beta\right)}{\Delta_1(s)\operatorname{sh}2\beta}-\frac{1}{\Delta_2(s)\operatorname{sh}2\beta}\times$$
$$\times\vartheta_1\left(\frac{2\beta}{\operatorname{sh}2\beta}+1\right)-\frac{1}{\operatorname{sh}2\beta}\left(1-\frac{\beta\operatorname{th}\beta}{2(1-\nu_1)}\right)-\frac{\beta}{2(1-\nu_1)\operatorname{ch}^2\beta}.$$

**Заключение.**

Таким образом, получена и решена система определяющих интегро-дифференциальных уравнений плоской теории упругости для кусочно-однородной, равномерно слоистой плоскости из двух, периодически повторяющихся, разнородных полос, усиленных на средних линиях системой параллельных, деформируемых разнородных конечных или бесконечных включений. В случае конечных включений

решение полученной системы построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Показано, что в зависимости от соотношения нагрузок и упругих характеристик разнородных полос и включений, касательные контактные напряжения могут стать знакопеременными.

В случае же, когда одна или обе из разнородных полос усилены бесконечными включениями, получено замкнутое решение задачи в квадратурах. Показано, что в этом случае, как и в случае однородной плоскости, касательные контактные напряжения не зависят от нагрузок, приложенных к кусочно-однородной плоскости и включениям на бесконечности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместной научной программы 18RF-061 и 18-51-05012 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с. Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M. Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers.-M.: Nauka,1983.-488p. (in Russian)
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с. Panasyuk V., Savruk M., Datsyshyn A. Distribution of stresses near cracks in plates and shells.// Kiev, Naukova Dumka, 1076, 443pp. (in Russian).
3. Барзокас Д.И., Фильштинский Л.А. Фильштинский М.Л. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах, том.1 - Москва-Ижевск, 2010г.-864с. Bardzokas D.I., Filshtinskiy L.A., Filshtinskiy M.L. Actual problems of coupled physical fields in deformable bodies, Vol.1 – Moscow-Izhevsk, 2010, 864 pp. (in Russian).
4. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. //Изв. НАН РА. Механика. 2009. Т.62. №3. С.29-43. A contact problem for a piecewise homogeneous infinite plate strengthened with two parallel different infinite elastic stringers. //Proc. of NAS RA. Mechanics. 2009. Vol.62. №3. Pp.29-43 (in Russian).
5. Агаян К.Л. Взаимодействие стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной двоякопериодической системой трещин. /В сб.: «Механика деформируемых тел и конструкций». Ереван: Изд.-во АН Арм ССР, 1985, с.26-32 . Aghayan K.L. Interaction of stringers with an infinite plate weakened by a doubly periodic system of cracks. / In: Mechanics of deformable bodies and structures. Yerevan. 1985. pp.26-32 (in Russian).
6. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с периодической системой параллельных межфазных дефектов //В сб. трудов IV-ой международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015, С.28-32. Hakobyan V.N., Hakobyan L.V. The stress state of piecewise homogeneous space with periodic system of parallel interface defects. Proc. of IV international conference «Topical problems of continuum mechanics». Yerevan: 2015. Pp.28-32. (in Russian).
7. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Двоякопериодическая задача для кусочно-однородной плоскости с трещинами //В сб. трудов IV-ой международной конференции

«Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015, С.33-37. Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with cracks. Proc. of IV international conference «Topical problems of continuum mechanics». Yerevan: 2015. Pp.33-37 (in Russian).

8. Hakobyan V., Dashtoyan L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with absolutely rigid inclusions // Proceedings of 8th International Conference Contemporary Problems of Architecture and Construction, Yerevan, 2016, pp.125-128.
9. Акопян В.Н., Амирджанян А.А. Напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с двоякопериодическими внутренними включениями. // В сб. статей «Проблемы механики деформируемого твердого тела», посвященного 95-летию академика С.А.Амбарцумяна, Изд.-во «Гитутюн», Ереван-2017, с.47-56. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A. The stress state of an piecewise uniform homogenepus layered plane with doubly inner inclusions. Proc. «Problems of mechanics of deformable solid body», dedicated to the 95th anniversary of acad. Sergey Ambartsumyan. Gitutyun. Yerevan-2017, pp.47-56 (in Russian).
10. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. К контактной задаче о двух полубесконечных пластинах, соединённых полубесконечной упругой накладкой. //В сб.: «Механика деформируемых тел и конструкций», посв. 60-летию академика Ю.Н. Работнова. М.: Машиностроение, 1975, с.44-51. Arutyunyan N.Kh., Mkhitaryan S.M. On a contact problem of two semi-infinite plates connected by semi-infinite elastic strip (in Russian). Proc. «Mechanics of deformable bodies and constructions», dedicated to 60-th anniversary of acad. Yu. Rabotnov. Moscow. Mechanical Engineering, 1975, pp.44-51 (in Russian).
11. Amirjanyan A.A., Sahakyan A.V. Mechanical quadrature method as applied to singular integral equations with logarithmic singularity on the right-hand side. Comput.Math. and Math. Phys. (2017), Vol.57, №8, pp. 1285–1293.

**Сведения об авторах:**

**Акопян Ваграм Наслетникович** – доктор физ.-мат. наук,проф., директор Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **E-mail:** vhakobyan@sci.am

**Амирджанян Арутюн Арменович** – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **E-mail:** amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 17.01.2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա 71, №2, 2018 Механика

УДК 539.3

# ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА КРАЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО ЗАДАННОМУ СПЕКТРУ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ИНЕРЦИОННОМ ЭЛЕМЕНТЕ НА КРАЯХ

**Арабян М.О., Оганисян З.Б.**

**Ключевые слова:** пластинка, инерционный элемент, частота, обратная задача.

**Arabyan M.H., Hovhannisyan Z.B.**

**Restoration of boundary conditions at the edges of a rectangular plate for given frequencies of spectrum with an inertial element at the edges**

**Key words:** plate, inertial element, frequency, inverse problem.

In this paper we consider the problem of finding the boundary conditions of a rectangular plate with an inertial element at two opposite edges, if several frequencies of proper transverse oscillations are known. It is assumed that on the other two edges there is a hinged support.

**Արաբյան Մ.Հ., Հովհաննիսյան Զ.Բ.**

**Սեփական լայնական տատանումների հաճախականությունների տրված արժեքներով ուղղանկյուն սալի եզրային պայմանների որոշումը իներցիոն էլեմենտի առկայությամբ**

**Հիմնաբառեր՝** սալ, իներցիոն էլեմենտ, հաճախականություն, հակադարձ խնդիր:

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է սեփական լայնական տատանումների հաճախականությունների մի քանի արժեքներով ուղղանկյուն սալի հանդիպակաց եզրերում ամրացման պայմանների որոշման խնդիրը, եզրերում իներցիոն էլեմենտի առկայության դեպքում: Ենթադրվում է, որ մյուս երկու եզրերը ամրացված են հոդակապորեն:

В настоящей работе рассматривается задача нахождения краевых условий прямоугольной пластинки с инерционным элементом на двух противоположных краях, если известны несколько частот собственных поперечных колебаний. Предполагается, что на двух других краях имеет место шарнирное опирание.

**Введение.** На практике при эксплуатации пластин под действием внешних сил зачастую нарушаются условия закрепления краёв. Появляется необходимость проверки степени нарушения первоначальных граничных условий без разрушений конструкций. В настоящей работе определяется закрепление краёв прямоугольной пластинки при заданных частотах собственных поперечных колебаний. Сравнение полученных реальных граничных условий с условиями, заложенными в проект, покажет степень нарушения условий закрепления на краях пластинки и позволит оценить степень пригодности конструкции для последующей эксплуатации.

Восстановление краевых условий на краях пластинки при заданном спектре частот собственных колебаний рассматривалось в работах [1,2,3], однако, в этих работах в краевых условиях отсутствует инерционный элемент. Восстановление краевых условий с инерционным элементом на краях балки рассмотрено в работах [4,5].

Первый существенный результат в данном направлении был получен в 1929 г. В.А. Амбарцумяном. Он показал, что в общем случае без каких-либо условий оператор Штурма – Лиувилля определяется неоднозначно.

Уравнение колебаний пластинки представляется в виде [6]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sigma^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \sigma^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho h a^4}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \qquad (1)$$

где $w(x,y,t)$ – прогиб, $x, y \in [0;1]$ – безразмерные координаты по длине и по ширине пластинки, $\sigma = a/b$, $a$ –длина, $b$ – ширина, $D = Eh^3/(12(1-\upsilon^2))$ – жёсткость пластинки, $E$ – модуль Юнга, $\upsilon$ – коэффициент Пуассона, $\rho$ – плотность материала.

Рассмотрим случай, когда на краях $y = 0$ и $y = 1$ имеет место шарнирное опирание пластинки:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad (y = 0,\ y = 1). \qquad (2)$$

Наиболее общие граничные условия с инерционным элементом на краях $x = 0$ и $x = 1$ можно представить в виде [7]:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} w + a_{12}^{(1)} \dfrac{\partial w}{\partial x} + a_{13}^{(1)} M_x + a_{14}^{(1)} \tilde{N}_x + a_{15}^{(1)} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ a_{11}^{(2)} w + a_{12}^{(2)} \dfrac{\partial w}{\partial x} + a_{13}^{(2)} M_x + a_{14}^{(2)} \tilde{N}_x + a_{15}^{(2)} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0, \qquad (3)$$

$$\begin{cases} b_{11}^{(1)} w + b_{12}^{(1)} \dfrac{\partial w}{\partial x} + b_{13}^{(1)} M_x + b_{14}^{(1)} \tilde{N}_x + b_{15}^{(1)} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ b_{11}^{(2)} w + b_{12}^{(2)} \dfrac{\partial w}{\partial x} + b_{13}^{(2)} M_x + b_{14}^{(2)} \tilde{N}_x + b_{15}^{(2)} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 1, \qquad (4)$$

где

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \upsilon \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \text{– изгибающий момент,}$$

$$\tilde{N}_x = -D \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\upsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \text{– поперечное усилие.}$$

Рассмотрим частный случай, когда

$a_{11}^{(1)} = a_{12}^{(1)} = a_{13}^{(1)} = 0,\ \ a_{11}^{(2)} = a_{12}^{(2)} = a_{14}^{(2)} = 0$,

$b_{11}^{(1)} = b_{12}^{(1)} = b_{13}^{(1)} = 0,\ b_{11}^{(2)} = b_{12}^{(2)} = b_{14}^{(2)} = 0$, т.е. граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \tilde{N}_x + \alpha_1 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ M_x + \alpha_2 \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \text{при } x = 0, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \tilde{N}_x + \beta_1 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ M_x + \beta_2 \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \text{при } x = 1, \tag{6}$$

где $\alpha_1 = \dfrac{a_{15}^{(1)}}{a_{14}^{(1)}}$, $\alpha_2 = \dfrac{a_{15}^{(2)}}{a_{13}^{(2)}}$, $\beta_1 = \dfrac{b_{15}^{(1)}}{b_{14}^{(1)}}$, $\beta_2 = \dfrac{b_{15}^{(2)}}{b_{13}^{(2)}}$.

Отметим, что если, например, в (5) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то это соответствует свободному краю.

**1. Постановка задачи.** Пусть имеется возможность определения необходимого количества собственных значений свободных колебаний прямоугольной пластинки. Сформулируем следующую обратную задачу: по собственным частотам поперечных колебаний и заданной жёсткости пластинки найти неизвестные коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и $\beta_2$ в выражениях (5) и (6), т.е. определить массу, входящую в граничные условия.

**2. Решение задачи.** С учётом (2) функцию $w(x, y, t)$ можно представить в виде:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \sin n\pi y . \tag{7}$$

Подстановкой (7) в уравнение (1) для определения $u_n(x, t)$ получается уравнение:

$$\frac{\partial^4 u_n}{\partial x^4} - 2(\sigma\pi n)^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + (\sigma\pi n)^4 u_n + \frac{\rho h a^4}{D} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = 0. \tag{8}$$

Граничные условия для $u_n(x, t)$ с учётом соотношений (5)-(7) примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial x} - \gamma_{1n} \dfrac{\partial^3 u_n}{\partial x^3} + a_{1n} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = 0, \\ u_n - \gamma_{2n} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + a_{2n} \dfrac{\partial^3 u_n}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \text{при } x = 0, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial x} - \gamma_{1n} \dfrac{\partial^3 u_n}{\partial x^3} + b_{1n} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = 0, \\ u_n - \gamma_{2n} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + b_{2n} \dfrac{\partial^3 u_n}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \text{при } x = 1, \tag{10}$$

где

$$\gamma_{1n} = \frac{\sigma^2}{(2-\upsilon)\pi^2 n^2}, \qquad \gamma_{2n} = \frac{\sigma^2}{\upsilon\pi^2 n^2},$$

$$a_{1n} = \frac{a^2\sigma^2}{D(2-\upsilon)\pi^2 n^2}\alpha_1, \quad a_{2n} = \frac{a^2\sigma^2}{D\upsilon\pi^2 n^2}\alpha_2,$$

$$b_{1n} = \frac{a^2\sigma^2}{D(2-\upsilon)\pi^2 n^2}\beta_1, \qquad b_{2n} = \frac{a^2\sigma^2}{D\upsilon\pi^2 n^2}\beta_2.$$

Предполагается, что нам известны наименьшие по $n$ частоты собственных колебаний, т.е. $n = 1$. В дальнейшем $u_1$ обозначим через $u$.

Первоначально рассмотрим случай, когда на краях $x = 0$ и $x = 1$ имеются одинаковые условия. В этом случае граничные условия из (9) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \gamma_1 \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u - \gamma_2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0, \tag{11}$$

и условия симметрии и антисимметрии в середине пластинки (на линии $x = 0,5$):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = 0,5 \tag{12}$$

или

$$u = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0,5. \tag{13}$$

Рассматриваются гармонические колебания пластинки, т.е. ищется решение уравнения (8) в виде:

$$u(x,t) = y(x)\cos\omega t,$$

где $y(x)$ – амплитуда, $\omega$ – частота собственных поперечных колебаний пластинки. Тогда, из (8) для определения $y(x)$ получается уравнение:

$$y^{(4)} - 2(\sigma\pi)^2 y'' + ((\sigma\pi)^4 - \lambda^4) y = 0, \tag{14}$$

где $\lambda^4 = \rho h a^4 \omega^2 / D$ – приведённая частота собственных колебаний.

Граничные условия для $y(x)$ из (11) получаются в виде:

$$\begin{cases} y'(0) - \gamma_1 y'''(0) + a_1 \lambda^4 y(0) = 0, \\ y(0) - \gamma_2 y''(0) + a_2 \lambda^4 y'(0) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\sigma^2}{(2-\upsilon)\pi^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\sigma^2}{\upsilon\pi^2}, \tag{16}$$

$$a_1 = \frac{a^2\sigma^2}{D(2-\upsilon)\pi^2}\alpha_1, \quad a_2 = \frac{a^2\sigma^2}{D\upsilon\pi^2}\alpha_2,$$

а из (12), (13)

$$y'(0,5) = 0, \quad y'''(0,5) = 0, \tag{17}$$

или

$$y(0,5) = 0, \quad y''(0,5) = 0. \tag{18}$$

Общее решение уравнения (14) представляется в виде:

$$y(x) = c_1 \mathrm{ch}\alpha x + c_2 \mathrm{sh}\alpha x + c_3 \cos\beta x + c_4 \sin\beta x,$$

где

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \sigma^2\pi^2}, \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - \sigma^2\pi^2},$$

а $c_1, c_2, c_3$ и $c_4$ – произвольные постоянные.

Для определения $c_i, i = 1,2,3,4$ из (15), (17) или из (15), (18) получается однородная система линейных уравнений. Ненулевое решение этой системы получается тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, откуда получается следующее характеристическое уравнение:

$$f_1(\lambda)a_1 + f_2(\lambda)a_2 + f_3(\lambda)a_1a_2 = f_4(\lambda), \tag{19}$$

где для определения нечётных по номеру частот

$$\begin{gathered} f_1(\lambda) = 2\gamma_2\lambda^6 \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}, \quad f_2(\lambda) = 2\gamma_1\alpha\beta\lambda^6 \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}, \\ f_3(\lambda) = \lambda^8\left(\alpha \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \beta \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right), \\ f_4(\lambda) = \alpha(1-\gamma_1\alpha^2)(1+\gamma_2\beta^2)\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \\ +\beta(1-\gamma_2\alpha^2)(1+\gamma_1\beta^2)\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}, \end{gathered} \tag{20}$$

а для определения чётных по номеру частот

$$\begin{gathered} f_1(\lambda) = 2\gamma_2\lambda^6 \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}, \quad f_2(\lambda) = -2\gamma_1\alpha\beta\lambda^6 \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}, \\ f_3(\lambda) = \lambda^8\left(\alpha \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} - \beta \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right), \\ f_4(\lambda) = \alpha(1-\gamma_1\alpha^2)(1+\gamma_2\beta^2)\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} - \beta(1-\gamma_2\alpha^2)(1+\gamma_1\beta^2)\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}. \end{gathered} \tag{21}$$

Если, например, $\sigma = 2$, $\upsilon = 0{,}16$ (бетон), то из (16) $\gamma_1 = 0{,}21,\ \gamma_2 = 2{,}54$ и в случае $a_1 = a_2 = 0$ (свободный край), значения первых двух частот есть

$$\lambda_1^{(c)} = 7{,}53, \quad \lambda_2^{(c)} = 9{,}80\,. \tag{22}$$

Обе части первого условия (15) разделим на $a_1$, а второе – на $a_2$ и устремим $a_1$ и $a_2$ к бесконечности, т.е. в инерционных элементах массу устремим к бесконечности. Тогда из граничных условий (15) получается:

$$y(0) = y'(0) = 0, \tag{23}$$

которые соответствуют жёстким защемлениям краёв. В этом случае первые две частоты есть:

$$\lambda_1^{(ж)} = 7{,}39, \qquad \lambda_2^{(ж)} = 9{,}72\,.$$

Отметим, что при любых других граничных условиях для собственных значений $\lambda_1$ и $\lambda_2$ имеют место:

$$\lambda_1^{(ж)} \le \lambda_1 \le \lambda_1^{(c)}, \quad \lambda_2^{(ж)} \le \lambda_2 \le \lambda_2^{(c)}.$$

Рассмотрим теперь обратную задачу: пусть известны значения двух собственных частот, например, $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Подставляя $\lambda_1$ и $\lambda_2$ в (19), где $f_i(\lambda),\ i = 1,2,3,4$ в случае $\lambda_1$ определяется из (20), а в случае $\lambda_2$ из (21), для определения $a_1$ и $a_2$ получается следующая система:

$$\begin{cases} d_{11}a_1 + d_{12}a_2 + d_{13}a_1a_2 = c_1, \\ d_{21}a_1 + d_{22}a_2 + d_{23}a_1a_2 = c_2, \end{cases}$$

где

$$d_{ij} = f_j(\lambda_i) \ \ i = 1,2, \quad j = 1,2,3, \quad c_i = f_4(\lambda_i) \ \ i = 1,2.$$

Таким образом, получается следующая система:

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 = c_1, \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + d_{23}x_3 = c_2, \\ x_3 = x_1x_2, \end{cases} \tag{24}$$

где $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ x_3 = a_1a_2$.

С учётом линейности первых двух уравнений системы, $x_1$ и $x_2$ выражаются через $x_3$ следующим образом:

$$x_1 = p_1x_3 + q_1, \qquad x_2 = p_2x_3 + q_2, \tag{25}$$

где

$$p_1 = \frac{d_{12}d_{23} - d_{22}d_{13}}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \quad q_1 = \frac{d_{22}g_1 - d_{12}g_2}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}},$$

$$p_2 = \frac{d_{21}d_{13} - d_{11}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \quad q_2 = \frac{d_{11}g_2 - d_{21}g_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}.$$

Подстановкой (25) в третье уравнение (24) для определения $x_3$ получается квадратное уравнение. После нахождения $x_3$, $x_1$ и $x_2$, а следовательно, $a_1$ и $a_2$ определяются из (25).

Практически возможны два случая:

а) полученное квадратное уравнение, или что то же самое, система (23) не имеет действительных решений при заданных $\lambda_1$, $\lambda_2$. Это означает, что рассмотренные $\lambda_1$ и $\lambda_2$ не являются собственными частотами данной краевой задачи ни при каких граничных условиях типа (11);

б) квадратное уравнение, или что то же самое, система (23) имеют две пары действительных решений. Это означает, что существуют две пары граничных условий типа (11), при которых реализуются данные частоты.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пусть, например, $\gamma_1 = 0,21, \gamma_2 = 2,54$, а $\lambda_1$, $\lambda_2$ отличаются от (22):

$$\lambda_1 = 7,42, \quad \lambda_2 = 9,76, \tag{26}$$

тогда, система (23) имеет две пары решений:

$$a_1 \approx 0,006, \quad a_2 \approx 0,0005 \text{ или } a_1 \approx 0,71, \quad a_2 \approx 0,16,$$

а это означает, что есть две пары краевых условий типа (11), при выполнении которых реализуются частоты (26):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 0.21\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 0,006\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u - 2,54\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,0005\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 0.21\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 0,71\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u - 2,54\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,16\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0.$$

При $\lambda_1 = 7,22, \quad \lambda_2 = 9,91$ (27)

система (23) не имеет решений, а это означает, что частоты (27) не реализуются ни при каких граничных условиях типа (11).

Теперь рассмотрим случай, когда на краях $x = 0$ и $x = 1$ краевые условия могут различаться. Рассмотрим частный случай, когда в (9), (10) $a_{2n} = b_{2n} = 0$, т.е. для нахождения $y(x)$ вместе с уравнением (14) имеют место следующие краевые условия:

$$\begin{cases} y'(0) - \gamma_1 y'''(0) + a_1\lambda^4 y(0) = 0, \\ y(0) - \gamma_2 y''(0) = 0, \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} y'(1)-\gamma_1 y'''(1)+b_1\lambda^4 y(1)=0, \\ y(1)-\gamma_2 y''(1)=0. \end{cases} \tag{29}$$

В этом случае для нахождения $\lambda$ получается следующее характеристическое уравнение:

$$g_1(\lambda)(a_1-b_1)+g_2(\lambda)a_1b_1=g_3(\lambda), \tag{30}$$

где $g_1(\lambda)=2\lambda^2\gamma_2(p_1(\lambda)p_4(\lambda)\mathrm{ch}\alpha\sin\beta-p_2(\lambda)p_3(\lambda)\mathrm{sh}\alpha\cos\beta),$

$$g_2(\lambda)=4\lambda^4\gamma_2^2\mathrm{sh}\alpha\sin\beta,$$

$$g_3(\lambda)=2p_1(\lambda)p_2(\lambda)p_3(\lambda)p_4(\lambda)(1-\mathrm{ch}\alpha\cos\beta)+$$
$$+((p_1^2(\lambda)p_4^2(\lambda)-p_2^2(\lambda)p_3^2(\lambda))\mathrm{sh}\alpha\sin\beta,$$

$$p_1(\lambda)=\alpha(1-\gamma_1\alpha^3)/\lambda^4, \quad p_2(\lambda)=\beta(1+\gamma_1\beta^3)/\lambda^4$$

$$p_3(\lambda)=1-\gamma_2\alpha^2, \quad p_4(\lambda)=1+\gamma_2\beta^2.$$

В случае обратной задачи для нахождения $a_1$ и $b_1$ необходимо задаться двумя частотами, например, $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Поочерёдно подставляя $\lambda_1$ и $\lambda_2$ в характеристическое уравнение (30), для нахождения $a_1$ и $b_1$ получается следующая алгебраическая система:

$$\begin{cases} d_{11}(a_1-b_1)+d_{12}a_1b_1=c_1, \\ d_{21}(a_1-b_1)+d_{22}a_1b_1=c_2, \end{cases} \tag{31}$$

где

$$d_{i1}=g_1(\lambda_i), \quad d_{i2}=g_2(\lambda_i), \quad c_i=g_3(\lambda_i), \quad i=1,2.$$

Обозначим $x_1=a_1-b_1$, $x_2=a_1b_1$. Тогда, система (31) примет вид:

$$\begin{cases} d_{11}x_1+d_{12}x_2=c_1, \\ d_{21}x_1+d_{22}x_2=c_2, \end{cases} \tag{32}$$

которая является линейной алгебраической системой относительно $x_1$ и $x_2$, решение которой есть:

$$x_1=\frac{c_1d_{22}-c_2d_{12}}{d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}}, \quad x_2=\frac{c_2d_{11}-c_1d_{21}}{d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}}.$$

После нахождения $x_1$ и $x_2$, из следующей системы можно найти $a_1$ и $b_1$:

$$\begin{cases} a_1-b_1=x_1, \\ a_1b_1=x_2, \end{cases} \tag{33}$$

откуда

$$a_1^2-x_1a_1-x_2=0. \tag{34}$$

Практически возможны два случая:

а) уравнениие (34) не имеет решений, что означает, что данные $\lambda_1$ и $\lambda_2$ не могут быть собственными значениями ни при каких краевых условиях типа (28), (29);
б) уравнениие (34), или что то же самое, система (33) имеет два решения.

Так как после замены в системе (31) $a_1$ на $-b_1$ и $b_1$ на $-a_1$, вид системы не меняется, то если пара $(a_1, b_1)$ есть решение системы (33), второе решение есть $(-b_1, -a_1)$. В действительности, эти две пары решений дают те же самые краевые условия, только условия на краях $x = 0$ и $x = 1$ меняются местами. А это означает, что краевые условия определяются однозначно.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $\gamma_1 = 0,21$, $\gamma_2 = 2,54$, $\lambda_1 = 7,42$, $\lambda_2 = 9,77$, которые отличаются от (23). В этом случае система (31) имеет две пары решений:

$$a_1 \approx 22,54, \qquad \mathrm{b}_1 \approx 21,78,$$

или

$$a_1 \approx -21,78, \qquad \mathrm{b}_1 \approx -22,54,$$

т.е. краевые условия практически имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 0,21\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 22,54\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u - 2,54\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 0,21\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 21,78\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u - 2,54\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 1.$$

Отметим , что не всякой паре $(\lambda_1, \lambda_2)$ соответствуют краевые условия типа (28), (29). Например, при $\lambda_1 = 7,44$, $\lambda_2 = 9,75$ система (31) не имеет решений.

**Заключение.** Таким образом, доказано, что имеется возможность нахождения граничных условий при инерционном элементе на краях прямоугольной пластинки по заданному спектру частот.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Оганисян З.Б. Об одной задаче восстановления граничных условий на краях пластинки при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний. //Ученые записки ЕГУ. 1991. №1. С.45-50. Hovhannisyan Z.B. On the problem of border conditions restoration on the edges of a plate, when transverse natural oscillations frequencies spectr are defined. /Scientific notes. YSU, № 1, 1991, pp. 45-50 (in Russian).
2. Оганисян З.Б., Гнуни В.Ц. Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний. //Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. № 5. С.9-16. Gnuni V.Ts., Hovhannisyan Z.B. Determination

of boundary conditions of circular plate with given vibration frequencies. //Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics. 1991. V.44. №5, pp. 9-16 (in Russian).

3. Оганисян З.Б. Собственные колебания неоднородной по длине прямоугольной пластинки. //Материалы Всесоюзного научного семинара «Актуальные проблемы неоднородной механики». Ереван, 1991, с.159-162. Hovhannisyan Z.B. Own oscillations of a rectangular plate, nonuniform in length. //Materials of the All-Union Scientific Seminar Actual problems of inhomogeneous mechanics. Yerevan, 1991, pp. 159-162 (in Russian).
4. Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Ямилова Л.С. Идентификация вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний. //Акустический журнал. 2008. №2. С.181-188. Akhtyamov A.M,. Muftakhov A.V., Yamilova L.S. //Identification of the type and parameters of pinning the rod according to the natural frequencies of its vibration. Acoustic magazine. 2008. № 2, pp. 181-188 (in Russian).
5. Ахтямова А.А., Ахтямов А.М. Об однозначности идентификации параметров упругого закрепления и сосредоточенного инерционного элемента. //Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т.6. № 1. С. 62-69. Akhtyamova A.A, Akhtyamov A. M. On the uniqueness of identification of the parameters of elastic fastening and a concentrated inertial element. Computational mechanics of continuous media. 2013. Vol.6. № 1, pp. 62-69 (in Russian).
6. Գնունի Վ.Ց. Կիրառական առաձգականության տեսություն. Երևան, ՀՊՃՀ 2006, 145 էջ: Gnuni V.Ts., Applied elasticity theory. Yerevan, 2006, 145 p.(in Armenian).
7. Вибрация в технике: справочник в 6 томах. Т.1. Колебания нелинейных систем. Под ред. В.В. Болотина.- М.: Машиностроение, 1978. 352с. Vibration in technology: a handbook in 6 volumes. V.1. Oscillations of nonlinear systems. Edited by Bolotin V.V. - Moscow: Mashinastroenie, 1978, 352 p. (in Russian).

**Сведения об авторах:**

**Арабян Мариам Овсеповна**, к.ф.-м.н., доцент кафедры анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики ЕГУ.
**Адрес:** 0025, Ереван, ул. А. Манукяна 1, **тел.:** (+374 10) 577 937
**E-mail:** arabyan.mariam@ysu.am

**Оганисян Зограб Багратович,** к. ф.-м. н., доцент кафедры анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики ЕГУ.
**Адрес:** 0052, Ереван, ул. Тцарав Агбюри 55/5, кв.176, **тел.:** (+374 10) 614 176
**E-mail:** zorhh@ysu.am

Поступила в редакцию 02.11.2017

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա 71, №2, 2018 Механика
**УДК 539.3**

# ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЁХСЛОЙНОЙ МАГНИТОСТРИКЦИОННОЙ ПЛАСТИНКЕ ПРИ ПОМОЩИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВО ВРЕМЕНИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

**Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А., Микилян М.А.**

**Ключевые слова**: Трёхслойные магнитострикционные пластинки, динамическая устойчивость.

**Բաղդասարյան Գ.Ե., Դանոյան Է.Հ., Միկիլյան Մ.Ա.**

**Մագնիսաստրիկցիոն եռաշերտ սալում պարամետրական տիպի ռեզոնանսային տատանումների գրգռումը ըստ ժամանակի հարմոնիկ մագնիսական դաշտի օգնությամբ**

**Հիմնաբառեր.** Եռաշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալեր, դինամիկական կայունություն

Աշխատանքում հետազոտված են ըստ ժամանակի հարմոնիկ ընդլայնական մագնիսատան դաշտի ազդեցության տակ գտնվող եռաշերտ մագնիսաստրիկցիոն ֆերոմագնիսական սալի դինամիկական կայունության հարցերը: Կոնկրետ խնդրի լուծմամբ ցույց է տրված, որ սալի նյութի մագնիսաստրիկցիոն հատկությունների շնորհիվ դիտարկվող սալում հնարավոր են գրգռել պարամետրական տիպի ռեզոնանսային տատանումներ (դինամիկական կայունության կորստի հնարավորություն) ըստ ժամանակի հարմոնիկ մագնիսական դաշտի օգնությամբ: Ստացված են բանաձևեր դինամիկական անկայունության գլխավոր տիրույթների սահմանների որոշման համար: Հետազոտված են նաև սալի անհամասեռության և մագնիսաստրիկցիայի ազդեցությունները դիտարկվող տիրույթների վրա:

**Baghdasaryan G.Y., Danoyan E.H., Mikilyan M.A.**

**Generation of resonant vibrations of parametric type in three-layered magnetostrictive plate with the help of harmonic in time magnetic field**

**Keywords**: Three-layered magnetostrictive plates, Dynamic Stability.

In this paper the issues of dynamic stability of three-layered magntostrictive ferromagnetic plate under the action of harmonic in time transversal magnetic field are studied. Having solved the certain problem in this paper it is established, that due to the magnetostrictive properties of plate material it is possible to generate resonant vibrations of parametric type (possibility of loss of dynamic stability) in the examined plate under the action of harmonic in time magnetic field. The influences of heterogeneity and magnetostrictive properties of the plate on the exaamined areas is studied, also.

В работе исследованы вопросы динамической устойчивости трёхслойных магнитострикционных ферромагнитных пластин под действием поперечного гармонического во времени магнитного поля. Путём решения конкретной задачи установлено, что, благодаря магнитострикционному эффекту, можно возбудить резонансные колебания параметрического типа (возможность потери динамической устойчивости) в рассматриваемой пластинке. Исследованы влияния неоднородности пластинки и магнитострикционных свойств материала на главные области параметрического резонанса.

## Введение

На основе теории магнитоупругости магнитострикционных твёрдых тел и классической теории тонких упругих пластин в [1] получены основные уравнения и граничные условия, описывающие колебания и устойчивость трёхслойных магнитострикционных ферромагнитных пластин в стационарном магнитном поле. В настоящей работе на основе уравнений и граничных условий, полученных в указанной работе, путём решения конкретной задачи установлено, что, благодаря магнитострикционному эффекту, а) возможна потеря динамической устойчивости пластинки под действием нестационарного поперечного магнитного поля; б) при помощи магнитного поля, магнитострикционного свойства материала пластинки можно регулировать ширину и место расположения главных областей динамической устойчивости. Исследовано также влияние неоднородности пластинки на указанные области.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую пластинку, составленную из трёх однородных изотропных упругих слоёв. Слои, симметрично расположенные относительно срединной плоскости пластинки, изготовлены из одинаковых диэлектрических неферромагнитных материалов и имеют одинаковую толщину. Материал среднего слоя пластинки является ферромагнитным диэлектриком, обладающим магнитострикционными свойствами. Пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $x_1, x_2, x_3$ так, что координатная плоскость $0x_1x_2$ совпадает со срединной плоскостью среднего слоя. В слое с номером $i$ координата $x_3$ изменяется в интервале $\left(\delta_{i3}-\delta_{i2}\right)\delta-\delta_{i1}h<x_3<\left(\delta_{i2}-\delta_{i1}\right)\delta+\delta_{i3}h$, где $\delta_{ij}$ – символ Кронекера, $i=1,2,3$. Считается, что слои после деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения. Окружающая тело среда и материал внешних слоёв пластинки в отношении электромагнитных свойств принимаются в приближении вакуума. Пусть пластинка помещена в магнитное поле, которое в отсутствие пластинки характеризуется индукцией внешнего поляризующего магнитного поля $\vec{B}_0\left(0,0,B_{03}\left(t\right)\right)$. Под $\vec{B}_0$ понимается магнитная индукция в вакууме (окружающая пластинку среда) при отсутствии пластинки.

Для математического моделирования процессов магнитоупругого взаимодействия в рассматриваемой пластинке принимаются основные положения следующих теорий и методов, используемых в задачах механики тонких пластин и оболочек:

- линеаризованная теория упругой устойчивости магнитострикционных твёрдых тел [2];
- классическая теория упругих пластин [3];
- асимптотический метод исследования упругих колебаний тонких пластин [4,5].

Учитывая вышеизложенное и поступая так же, как в [2,6] (в этих работах подробно изложен метод математического моделирования магнитоупругих процессов в магнитомягкой ферромагнитной пластинке, материал которой не обладает магнитострикционными свойствами), в [1] получены линеаризованные двумерные уравнения и соответствующие условия, описывающие колебания и устойчивость трёхслойных магнитострикционных пластин в поперечном магнитном поле. Для простоты и наглядности здесь рассматривается случай прямоугольной пластинки, торцы которой неподвижны в своей плоскости. Тогда, согласно [1], возможны чисто изгибные колебания и задача исследования поведения магнитоупругих возмущений в рассматриваемой пластинке при поперечных колебаниях сводится к решению следующего уравнения:

$$D\Delta^2 w + 2A[\rho]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + T\Delta w = 0 \tag{1.1}$$

при классических граничных условиях [2] на контуре пластинки.

Здесь

$$D = \frac{2}{3}\left[\frac{E^{(1)}\left(h^3-\delta^3\right)}{1-\left(\nu^{(1)}\right)^2} + \frac{E\delta^3}{1-\nu^2}\right],$$

$$T = \frac{2\delta\chi^2 B_{03}^2(t)}{\mu_0\mu_r^2}\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{2-\nu}{2(1-\nu)} + \frac{2\mu_r}{1+\mu_r k\delta}\right]e_1 - \right.$$

$$\left. -\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\mu_r}{1+\mu_r k\delta}\right)e_2 + \frac{\mu_r}{1+\mu_r k\delta}\left(\frac{\lambda e_1}{\lambda+2\mu} - e_2\right)\left(1+\frac{5}{2}\frac{\chi}{\mu_r}\right)\right\}, \tag{1.2}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \qquad k^2 = k_1^2 + k_2^2,$$

$$A[\rho] = (h-\delta)\rho^{(1)} + \delta\rho,$$

где

$$\sigma = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3+2\mu}f - g\right), \quad g = -\frac{\chi^2 e_2}{\mu_r}B_{03}, \; f = -\frac{\chi^2 e_1 e_2}{\mu_r}B_{03},$$

$$\lambda_1 = \lambda - \frac{\chi^3 e_2^2}{\mu_0\mu_r^2}B_{03}^2, \; \lambda_2 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1 e_2}{\mu_0\mu_r^2}B_{03}^2, \; \lambda_3 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1^2}{\mu_0\mu_r^2}B_{03}^2,$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\beta = \frac{d_1}{\mu_0\mu_r}, \quad d_1 = -\frac{\chi^4 e_1^2}{\mu_r^2(\lambda_3+2\mu)}B_{03}, \; d_2 = \frac{\chi^2}{\mu_r}\left[\frac{e_1-e_2}{2} - \frac{\lambda e_1}{\lambda_3+2\mu}\right]B_{03}.$$

В (1.1) и (1.2) $w(x_1, x_2, t)$ – прогиб пластинки; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N/A^2$ – магнитная константа; $E$ – модуль упругости, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $\rho$ – плотность, $\chi$ – магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ – магнитная проницаемость, $e_1$ и $e_2$ – магнитострикционные постоянные материала магнитострикционного слоя, $E^{(1)}$ – модуль упругости; $\nu^{(1)}$ – коэффициент Пуассона, $\rho^{(1)}$ – плотность материала внешних немагнитострикционных слоёв пластинки, индексом (1) обозначены величины, относящиеся к внешним слоям, индексом (2) – к срединному слою пластинки; $t$ – время. Здесь и в дальнейшем, если соответствие каких-либо величин и уравнений конкретному слою очевидно, будем записывать их, пропуская указанные индексы. Учитывая, что для основных магнитострикционных материалов $\chi \sim 30,\ e_1 \sim 40,\ B_s \sim 0.3Тл$ ($B_s$ – индукция насыщения) [2], принято, что при $|B_0| \le B_s$ имеет место следующее ограничение $\chi\left(e_i |B_0|\right)^2 / \mu_0 E << 1$. Соотношения (1.2) представлены с учётом указанного ограничения.

Задачи, аналогичные сформулированным выше краевым задачам, в которых присутствуют неизвестные волновые числа $k_1$ и $k_2$, решены в [2,4-6] путём применения асимптотического метода интегрирования [4,5]. В результате, в зависимости от граничных условий и форм колебаний получены соответствующие трасцендентные уравнения для определения $k_1$ и $k_2$. Приведём указанные трансцендентные уравнения в случае сформулированной задачи при различных классических граничных условиях.

**Пластинка жёстко защемлена по контуру.** Граничными условиями задач для рассматриваемого случая жёсткого защемления являются:

$$\begin{aligned} &w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0,\ x_1 = a_1, \\ &w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0,\ x_2 = a_2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Тогда, в зависимости от симметрии (по отношению к координатным осям $0x_1$ и $0x_2$) для определения $k_1$ и $k_2$ получим следующие уравнения:

$$\operatorname{ctg}\frac{a_1 k_1}{2} = -k_1\left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{T}{D}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{ctg}\frac{a_2 k_2}{2} = -k_2\left(2k_1^2 + k_2^2 - \frac{T}{D}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

для симметричных в обоих направлениях форм колебаний,

$$\operatorname{tg}\frac{a_1k_1}{2}=k_1\left(k_1^2+2k_2^2-\frac{T}{D}\right)^{-\frac{1}{2}},\ \operatorname{tg}\frac{a_2k_2}{2}=k_2\left(2k_1^2+k_2^2-\frac{T}{D}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.5}$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

Для остальных смешанных форм колебаниий уравнения относительно $k_1$ и $k_2$ получаются из приведённых комбинированием соответствующим образом одного из уравнений (1.4), с другим – из (1.5).

**Пластинка шарнирно закреплена по контуру.** Граничные условия для рассматриваемого случая имеют вид:

$$\begin{aligned} &w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0 \qquad \text{при} \qquad x_1=0,\ x_1=a_1,\\ &w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=0 \qquad \text{при} \qquad x_2=0,\ x_2=a_2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

В этом случае для $k_1$ и $k_2$ получены выражения:

$$k_1=\frac{m\pi}{a_1},\quad k_2=\frac{n\pi}{a_2},\quad \left(m,n=1,2,3,...\right). \tag{1.7}$$

Соответствующим образом, комбинируя приведённые уравнения (1.3)-(1.7), можно получить уравнения относительно $k_1$ и $k_2$ для других видов опорного закрепления. Например, если стороны $x_1=0$ и $x_1=a_1$ жёстко защемлены, а стороны $x_2=0$ и $x_2=a_2$ шарнирно опёрты, то в случае симметричных колебаний из (1.4) и (1.7) имеем:

$$\operatorname{ctg}\frac{a_1k_1}{2}=-k_1\left(k_1^2+2k_2^2-\frac{T}{D_*}\right)^{-\frac{1}{2}},\quad k_2=\frac{\left(2n-1\right)\pi}{2a_2}.$$

## 2. Динамическая неустойчивость пластинки под действием гармонического во времени магнитного поля

На основе уравнения (1.1) и граничных условий (1.6) (шарнирно опёртая прямоугольная пластинка) рассмотрим конкретную задачу с целью выявления эффектов, обусловленных взаимодействием пластинки и внешнего магнитного поля, а также неоднородного строения пластинки.

Пусть рассматриваемая пластинка помещена в нестационарном магнитном поле с вектором магнитной индукции $\vec{B}_0\left(0,0,B_0\left(t\right)\right)$, где $B_0\left(t\right)=B_0+B_1\cos\theta t$. Тогда, уравнение колебания пластинки, согласно (1.1), можно представить в виде

$$D\Delta^2 w + 2A[\rho]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \gamma \vec{B}_0^2(t)\Delta w = 0, \tag{2.1}$$

где

$$\gamma = \frac{2\delta\chi^2}{\mu_0\mu_r^2}\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{2-\nu}{2(1-\nu)} + \frac{2\mu_r}{1+\mu_r k\delta}\right]e_1 - \right.$$

$$\left. -\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\mu_r}{1+\mu_r k\delta}\right)e_2 + \frac{\mu_r}{1+\mu_r k\delta}\left(\frac{\lambda e_1}{\lambda+2\mu} - e_2\right)\left(1+\frac{5}{2}\frac{\chi}{\mu_r}\right)\right\}.$$

С учётом (1.7) решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (1.6), представим в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t)\sin\lambda_m x_1 \sin\mu_n x_2, \ \lambda_m = \frac{m\pi}{a_1}, \ \mu_n = \frac{n\pi}{a_2}. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в уравнение (2.1), для определения неизвестных функций $f_{mn}(t)$ получим следующие дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2\left(1 - 2\mu_{mn}^{(1)}\cos\theta t - 2\mu_{mn}^{(2)}\cos 2\theta t\right) f_{mn} = 0, \tag{2.3}$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \Omega_{mn}^2 - \frac{\gamma_{mn}k_{mn}^2}{4A[\rho]}\left(2B_0^2 + B_1^2\right), \qquad \Omega_{mn}^2 = \frac{D}{2A[\rho]}k_{mn}^4,$$

$$\mu_{mn}^{(1)} = \frac{\gamma_{mn}k_{mn}^2}{2A[\rho]\omega_{mn}^2}B_0 B_1, \quad \mu_{mn}^{(2)} = \frac{\gamma_{mn}k_{mn}^2}{8A[\rho]\omega_{mn}^2}B_1^2, \tag{2.4}$$

$$k_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2,$$

а $\gamma_{mn}$ получается из выражения $\gamma$, заменяя в нём $k$ на $k_{mn}$.

В (2.3) $\omega_{mm}$ – частоты магнитоупругих колебаний пластинки, $\mu_{mn}^{(1)}$ и $\mu_{mn}^{(2)}$ – коэффициенты возбуждения.

Уравнения (2.3) имеют периодические коэффициенты и, как известно [7,8], при некоторых соотношениях между коэффициентами имеют неограниченно возрастающие решения, означающие динамическую неустойчивость рассматриваемой магнитоупругой системы. Таким образом, показано, что присутствие периодического во времени магнитного поля может привести к возбуждению резонансных колебаний рассматриваемого типа в магнитострикционной пластинке. Причём, здесь, помимо области, расположенной около частоты $2\omega_{mn}$ (первая основная область), важным является также область, расположенная вблизи частоты $\omega_{mn}$ (вторая основная

область). Границы $\omega_*^{\pm}$ этих областей, согласно [7], определяются следующими формулами:

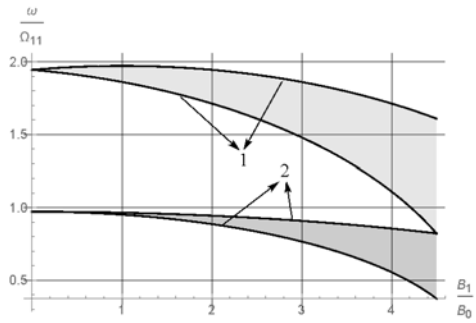
границы первой основной области

$$\frac{\theta_*^{\pm}}{2\omega_{mn}} = \left[1 - \frac{\gamma_{mn}}{k_{mn}^2 D}\left(B_0^2 + \frac{1}{2}B_1^2 \pm B_0 B_1\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.5}$$

границы второй основной области

$$\frac{\theta_*^{\pm}}{\omega_{mn}} = \left[1 - \frac{\gamma_{mn}}{2k_{mn}^2 D}\left(2B_0^2 + B_1^2 \pm \frac{1}{2}B_1^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

На фиг.1 показаны области динамической неустойчивости для квадратной $(b = a)$ пластинки, средний слой которой изготовлен из материала Ферроскуб 7Al (для которого $E^{(2)} = 2.1 \cdot 10^{11}\ N/m^2$, $\nu^{(2)} = 0.33$, $\chi^{(2)} = 30$, $e_2 = 42$), а внешние слои изготовлены из материала Текстолит ПТ (у которого $E^{(1)} \approx E^{(2)}/2$, $\nu_1 = 0.28$) при $m = n = 1$, $B_0 = 0.1Тл$ и $a = 200h$. Кривые 1 и 2 построены по формуле (2.5), а кривые 3 и 4 – по формуле (2.6).

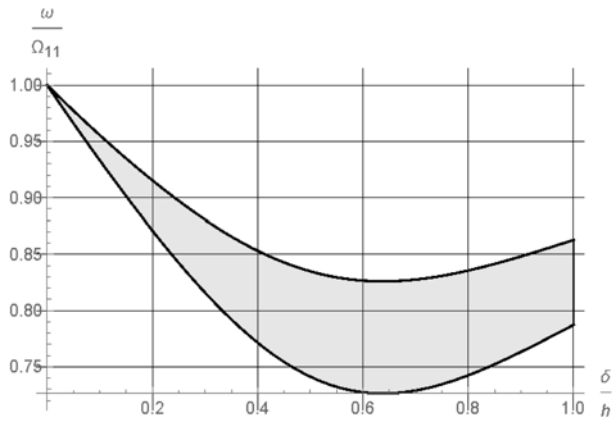



Фиг.1. Области динамической неустойчивости

Из этих формул и построенного на их основе фиг.1 видно, что: а) при любом $B_1 \neq 0$ возможно появление параметрического резонанса (при $B_1 = 0$, как и следовало ожидать, параметрический резонанс невозможен), б) ширина $\left(\theta_*^- - \theta_*^+\right)$ обеих областей неустойчивости является возрастающей функцией амплитуды $B_1$ нестационарной части внешнего магнитного поля; в) если $B_0 = 0$, то возбуждение параметрического резонанса вблизи частоты $2\omega_{mn}$ невозможно.

На фиг.2 при тех же физико-механических данных построена область

динамической неустойчивости, расположенной около частоты $\omega_{mn}$ в зависимости от параметра $\delta/h$, характеризующий степень неоднородности пластинки.




Фиг.2. Область динамической неустойчивости при $B_0 = 0,\ B_1 = 0.02.$

Фиг.2 показывает, что ширина области динамической неустойчивости имеет максимум.

Вычисления показывают, что ширина и расположение области динамической неустойчивости существенно зависит также от соотношения $E^{(2)}/E^{(1)}$ .

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C134.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Основные уравнения и граничные условия колебаний и устойчивости трёхслойных магнитострикционных пластин в поперечном магнитном поле //Изв. НАН Армении. Механика. 2018. V.71. №1. С.31-46. Bagdasaryan G.Y. Danoyan E.A. Main equations and boundary conditions of vibrations and stability of three-layered magnetostrictive plates in a transverse magnetic field Proceedings of NAS RA, Mechanics. 2018. V.71. №1. Pp.31-46. (in Russian).
2. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Изд. ЕГУ. 1999. 439с. Baghdasaryan G.Y. Vibrations and stability of magnetoelastic systems. Yerevan. YSU Publishing House. 1999. 439 p. (in Russian).
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 653 с. (Timoshenko SP, Voinovsky-Krieger S. Plates and shells. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 653 p.) (in Russian).
4. Болотин В.В., Макаров Б.П., Мишенков Г.В., Швейко Ю.Ю. Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок. Расчеты на прочность. Т.6. М.: Машгиз., 1960. С. 231-253. (Bolotin V.V., Makarov B.P., Mishenkov G.V., Shveiko Yu.Yu. Asymptotic method to study the spectrum of natural

frequencies of elastic plates. Calculations for strength. vol. 6. Moscow: Mashgiz. 1960. pp. 231-253.). (in Russian).
5. Багдасарян Г.Е. Математическое моделирование поведения возмущений в магнитострикционных средах. //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1986. № 24. С.72-75. (Baghdasaryan G.E. Mathematical modeling of perturbation behavior in magnetostrictive media. Mat. methods and phys.-mech. fields. 1986. №24. P.72-75.). (in Russian).
6. Baghdasaryan G., Mikilyan M. Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells. Springer. ISBN 978-3-319-19161-4. 2016. 289 p.
7. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с. (Bolotin V.V. Dynamic stability of elastic systems. - M .: Gostekhizdat, 1956.-600 p.). (in Russian).
8. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.-М.: Наука, 1972. 718 с. (Yakubovich VA, Starzhinsky V.M. Linear differential equations with periodic coefficients and their applications. - Moscow: Nauka, 1972. 718 p.). (in Russian).

**Сведения об авторах:**

**Багдасарян Геворк Ервандович** – Академик НАН РА, Профессор Ереванского Государственного Университета, Главный Научный сотрудник Института механики НАН РА. **Тел.:** (060) 71 00 89; **E-mail:** gevorgb@rau.am

**Микилян Марине Александровна** – Доцент Российско-Армянского Университета, Старший научный сотрудник Института механики НАН РА
**Тел.:** (091) 191129**; E-mail:** mikilyan@rau.am

**Даноян Эдвард Айказович** – Доцент Ереванского Государственного Университета **Тел.:** (094) 344506; **E-mail:** edan@ysu.am.З

Поступила в редакцию 08.02.2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա 71, №2, 2018 Механика

**УДК 539.3**

# О ДИВЕРГЕНЦИИ РАСТЯНУТОЙ ПАНЕЛИ ПРИ НАБЕГАНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ

**Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.**

**Ключевые слова:** устойчивость, растягивающие усилия, стабилизация, дивергенция панели, локализованная дивергенция, сверхзвуковое обтекание

**Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.**
**Գերձայնային գազի հոսքում ձգված սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին**
**Հիմնաբառեր՝** կայունություն, ձգող ուժեր, դիվերգենցիա, տեղայնացված դիվերգենցիա, գերձայնային շրջհոսում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ձգված ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին, բեռնված ձգող ուժերով: Ցույց է տրված թիթեղի դիվերգենցիայի և ազատ եզրի միջակայքում տեղայնացված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են դիվերգենցիայի և տեղայնացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները:

**Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.**
**On divergence of the stretched panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge**
**Key words:** stability, the stretching forces, stabilizing effect, divergence of the panel, localized divergence, supersonic overrunning.

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the loss stability phenomenon of the overrunning of the gas flow at is free edge under the assumption of presence of the stretching forces at the hinged edges. Critical velocities of divergence of the panel and localized divergence are found. It is established that the stretching forces leads to the stabilizing of unperturbed equilibrium state of a plate in supersonic gas flow.

В линейной постановке исследуется зависимость форм потери статической устойчивости растянутой тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем от характера начального напряжённого состояния в предположении, что пластинка обтекается сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. Показана возможность потери устойчивости невозмущённой формы равновесия пластинки как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции в окрестности её свободного края. Установлено, что начальное напряжённое состояние, характеризуемое растягивающими усилиями, приводит при обтекании, в основном, к существенной стабилизации состояния невозмущённого равновесия пластинки.

**Введение.** Как известно [1(с.285), 2 (с.245), 3, 4], выпучивание пластинки в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих усилий, расположенных в срединной поверхности пластинки. При этом, так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, на много мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать сжимающие усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки. Поэтому, задача об устойчивости пластинок при равномерном

сжатии является той «классической задачей», решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

Следует отметить, что не меньший интерес для практических приложений представляет рассмотрение задач устойчивости пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, при равномерном растяжении усилиями, расположенными в срединной поверхности пластинок.

Исследованию зависимости форм потери устойчивости от характера начального напряжённого состояния пластин и оболочек как необтекаемых, так и обтекаемых, посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях и в статьях [1, 2, 5, 6–8].

В предлагаемой статье в линейной постановке исследуется задача статической устойчивости тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, равномерно растянутой в одном направлении вдоль шарнирно закреплённых краёв и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край.

С помощью графоаналитических и численных методов исследования получено точное решение поставленной задачи устойчивости. Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка-поток» на область устойчивости и на области статической неустойчивости, в которых невозмущённое состояние равновесия растянутой пластинки теряет устойчивость в сверхзвуковом потоке газа, как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции соответственно. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Установлена зависимость, при которой невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели или в виде локализованной дивергенции от характера начального напряжённого состояния, от скорости обтекающего её потока газа и от остальных «существенных» параметров системы «пластинка-поток». При этом, неожиданностью оказалась зависимость границы перехода из области дивергенции панели в область локализованной дивергенции – критическое значение коэффициента отношения сторон пластинки – от коэффициента напряжения.

Показано своеобразное влияние начального напряжённого состояния на невозмущённую форму равновесия обтекаемой растянутой прямоугольной пластинки: начальное напряжённое состояние может привести как к существенному «скачкообразному» росту, так и к незначительному росту значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции в сравнении с соответствующими значениями обтекаемой панели с ненагруженными краями [16].

А сравнительный анализ полученных результатов с результатами работы [17] показал, что в задаче статической устойчивости обтекаемой прямоугольной пластинки при умеренных и больших значениях отношения сторон: ширины (сторона пластинки по потоку) к длине, наличие растягивающих усилий приводит к существенной стабилизации в отличие от сжимающих усилий, приводящих к дестабилизации.

Данная работа дополняет цикл работ, посвящённых изучению своеобразного действия составляющих нагрузки – сил различной природы: консервативных и неконсервативных на поведение динамической системы «пластинка-поток». В частности, следует отметить работы [16–19].

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси $Ox$ и $Oy$ лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось $Oz$ перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси $Ox$ с невозмущённой скоростью $V$.

Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. При этом, пластинка растянута вдоль краев $y = 0$ и $y = b$ растягивающими силами $N_y = 2h\sigma_y$, $\sigma_y$ – растягивающие усилия, которые предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y)$ вызовет избыточное давление $\Delta p$ на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [9, 10]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, $a_0$ – скорость звука в невозмущённой газовой среде, $\rho_0$ – плотность невозмущённого потока газа.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка) в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками $\Delta p$ и приложенными вдоль кромок $y = 0$ и $y = b$ пластинки растягивающими силами $N_y = 2h\sigma_y$.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба растянутой тонкой изотропной прямоугольной пластинки описывается соотношением [2 , 4]

$$D\Delta^2 w - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, $\Delta w$ – оператор Лапласа; $D$ – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1, 2(с. 27,101)]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{при } x = 0; \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0,\ y = b; \tag{1.4}$$

$\nu$ – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость $V_{cr}$, приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки с нагруженными краями $y = 0$ и $y = b$. Иными словами, требуется определить значения скорости потока газа $V$, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2)-(1.4).

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы панели, растянутой усилиями $\sigma_y$ и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2)–(1.4) для прогиба $w(x, y)$.

Следует заметить, что в работах [19 – 21] в нелинейной постановке исследована задача устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа прямоугольной пластинки с нагруженными шарнирно закреплёнными краями.

**2.** Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка-поток» рассмотрим класс решений уравнения (1.1), удовлетворяющих граничным условиям (1.2)–(1.4), в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x) \cdot \sin(\mu_n y),\ \mu_n = \pi n b^{-1}. \tag{2.1}$$

где $C_n$ – произвольные постоянные; $n$ – число полуволн вдоль стороны пластинки $b$; $r$ – корни характеристического уравнения

$$r^4 - 2r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 + \beta_y^2 = 0 \tag{2.2}$$

или

$$(r^2 - 1)^2 = -\alpha_n^3 r - \beta_y^2, \tag{2.3}$$

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3},\ \beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2} = 2h\sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2},\ \alpha_n^3 > 0,\ \beta_y^2 > 0, \tag{2.4}$$

соответствующему дифференциальному уравнению (1.1).

Здесь, параметр $\alpha_n^3$ характеризует неконсервативную составляющую нагрузки, а параметр $\beta_y^2$ – консервативную составляющую нагрузки.

Исследуем уравнение (2.2) при различных значениях $\alpha_n^3 > 0$, $\beta_y^2 > 0$.

Сведём характеристическое уравнение (2.2) с помощью преобразований Феррари [11] к двум квадратным уравнениям:

$$\begin{aligned} &r^2 + \sqrt{2(q+1)} \cdot r + q - \sqrt{q^2 - 1 - \beta_y^2} = 0, \\ &r^2 - \sqrt{2(q+1)} \cdot r + q + \sqrt{q^2 - 1 - \beta_y^2} = 0 \end{aligned}, \tag{2.5}$$

где $q$ – параметр скорости потока газа $V$, являющийся действительным корнем кубического уравнения

$$8\cdot(q+1)(q^2-1-\beta_y^2)-\alpha_n^6=0,\ \ \alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3},\ \beta_y^2=2h\sigma_y D^{-1}\mu_n^{-2}\ , \quad (2.6)$$

откуда легко определяются выражения корней $r_i$ характеристического уравнения (2.2):

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-0.5(q-1)}\,, \quad (2.7)$$

$$r_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+0.5(q-1)}\,. \quad (2.8)$$

В соответствии с условием (2.6) легко показать, что для всех $\beta_y^2\geq 0$ при значениях $q\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3,\infty\right)$ корни $r_{1,2}$ характеристического уравнения (2.2), определяемые выражениями (2.7), являются отрицательными числами:

$$r_1<0,\quad r_2<0\,; \quad (2.9)$$

а при значениях $q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},\ (-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right)$ – комплексно сопряжёнными числами с отрицательной вещественной частью:

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1)}\pm i\sqrt{0.5(q-1)-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}}\ ,\ \ \mathrm{Re}\,r_1<0,\ \mathrm{Re}\,r_2<0\,. \quad (2.10)$$

Корни $r_{3,4}$, определяемые выражениями (2.8), в соответствии с условием (2.6), являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью при всех значениях $q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},\infty\right)$ и $\beta_y^2\geq 0$.

В соответствии с выражениями (2.7), (2.8) и (2.8), (2.10) общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x)\cdot\sin(\mu_n y),\ \ q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},\infty\right),\ \beta_y^2\geq 0\,. \quad (2.11)$$

А в соответствии с соотношением (2.6), скорость потока газа $V$ для достаточно длинных пластинок $a\ll b$ и для прямоугольных пластинок умеренных размеров определится выражением

$$V=2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1-\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,, \quad (2.12)$$

а в случае достаточно широких прямоугольных пластин $a\gg b$ – соответственно, выражением

$$V=2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1-\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1} \quad (2.13)$$

при всех $q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},\infty\right)$ и $\beta_y^2\geq 0$.

Здесь $\gamma$ – параметр отношения ширины пластинки $a$ (сторона пластинки по потоку) к её длине $b$:

$$\gamma = ab^{-1}. \tag{2.14}$$

Как известно [3,5,13,14], необходимым условием потери статической устойчивости невозмущённого равновесного состояния как полубесконечной пластины-полосы ($\gamma \to \infty$ или $a \to \infty$), так и достаточно широкой прямоугольной пластинки $(a \gg b)$ в форме локализованной неустойчивости в окрестности свободного края $x = 0$, является условие затухания колебаний на крае $x = a$:

$$\lim_{x \to a} w(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in [0, b], \text{ когда } a \to \infty \text{ или } a \gg b. \tag{2.15}$$

Так как для весьма широких пластинок $(a \gg b)$ и для полубесконечной пластины-полосы $(\gamma = \infty)$ в общем решении (2.11) можно, считая $C_3 = C_4 = 0$, удовлетворять только первым двум граничным условиям (1.2), то условие (2.15), очевидно, имеет место, когда

$$r_1 < 0,\ r_2 < 0,\ r_1 \in R,\ r_2 \in R; \tag{2.16}$$

$$\operatorname{Re} r_1 < 0,\ \operatorname{Re} r_2 < 0,\ r_1 \in W,\ r_2 \in W. \tag{2.17}$$

Учитывая условия (2.9) и (2.10), следует, что необходимое условие локализованной неустойчивости (2.15) выполняется при всех значениях $q \in \left(\sqrt{1+\beta_y^2}, \infty\right)$ как в случае обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластинок $(a \gg b)$, так и обтекаемой полубесконечной пластины-полосы ($a \to \infty$).

Иными словами, существует возможность потери статической устойчивости обтекаемых достаточно широких пластинок или пластины-полосы в форме локализованной дивергенции на свободном крае $x = 0$, когда $q \in \left(\sqrt{1+\beta_y^2}, \infty\right)$.

При этом, в соответствии с условием $C_3 = C_4 = 0$, общее решение (2.11) представится в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_{n1} \exp(\mu_n r_1 x) + C_{n2} \exp(\mu_n r_2 x) \right) \cdot \sin(\mu_n y), \tag{2.18}$$

где $r_1$ и $r_2$ определяются выражениями (2.7) и (2.10), в которых допустимыми значениями параметра скорости $q(V)$ являются, соответственно, следующие интервалы:

$$q \in \left( (-1 + 2\sqrt{4 + 3\beta_y^2})/3, \infty \right),\ q \in \left( \sqrt{1+\beta_y^2},\ (-1 + 2\sqrt{4 + 3\beta_y^2})/3 \right). \tag{2.19}$$

Нетрудно показать, что необходимое условие локализованной неустойчивости (2.15) выполняется также и при отсутствии обтекания как в случае достаточно широких прямоугольных пластинок, так и полубесконечной пластины-полосы.

В самом деле, при отсутствии обтекания $V = 0$ ($\alpha_n^3 = 0$) характеристическое уравнение (2.2) перепишется в виде

$$(r^2-1)^2+\beta_y^2=0\,, \tag{2.20}$$

имеющего при всех $\beta_y^2>0$ пару комплексно сопряжённых корней, определяемых выражениями:

$$r_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{0.5\cdot(\sqrt{1+\beta_y^2}+1)}\pm i\cdot\sqrt{0.5\cdot(\sqrt{1+\beta_y^2}-1)}\,. \tag{2.21}$$

В соответствии с условиями (2.17) следует, что при отсутствии обтекания в случае достаточно широких растянутых прямоугольных пластинок и растянутой полубесконечной пластины-полосы необходимое условие локализованной неустойчивости (2.15) выполняется при всех значениях $\beta_y^2\geq 0$.

Таким образом, необходимое условие локализованной неустойчивости (2.15) выполняется как в случае обтекаемых, так и необтекаемых достаточно широких растянутых прямоугольных пластин, а также в случае полубесконечной пластины-полосы при всех значениях $\beta_y^2\geq 0$. При этом, в случае обтекаемых пластин необходимое условие (2.15) выполняется только при значениях

$$q(V)\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,\,\infty\right)\,,\;\;\beta_y^2\geq 0\,. \tag{2.22}$$

Заметим, что графоаналитический метод анализа характеристического уравнения (2.2), переписанного в виде (2.3), в пространстве «существенных» параметров $M=\left\{q(V),n,\gamma,\beta_y^2,\nu\right\}$ системы «пластинка-поток» показал, что достаточные признаки статической неустойчивости могут выполняться в более узком интервале изменения параметра скорости $q(V)$ в сравнении с интервалом (2.22):

$$q(V)\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\,,\infty\right)\subset\left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,\,\infty\right),\;\beta_y^2\geq 0\,. \tag{2.23}$$

**3.** Исследуем достаточные признаки статической неустойчивости растянутой прямоугольной пластинки – дисперсионные уравнения при значениях параметра скорости (2.22) как при обтекании, так и при отсутствии обтекания.

Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни $r_i$, $i=\overline{1,4}$ характеристического уравнения (2.2) определяются, соответственно, выражениями (2.7), (2.8) и (2.8), (2.10), в граничные условия (1.2)–(1.4), получаем соответствующие однородные системы алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных $C_{nk}$.

Приравненный к нулю определитель этих систем уравнений – характеристический определитель приводит к дисперсионным уравнениям относительно «существенных» параметров $q(V)$, $n$, $\gamma$, $\beta_y^2$, $\nu$ исходной задачи устойчивости системы «пластинка-поток», описываемых при значениях $q(V)\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\,,\infty\right)$ и $q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,\;(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right)$, соответственно, соотношениями:

$$F_1(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2)= \tag{3.1}$$

$$= \sqrt{2(q+1)} \cdot \left\{ \left( q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)\cdot\nu - (1-\nu)^2 \right\} \cdot B_1 B_2 -$$

$$-\sqrt{2(q+1)} \cdot \left\{ \left( q+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)\cdot\nu - (1-\nu)^2 \right\} \cdot B_1 B_2 \cdot$$

$$\cdot \exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma) + 2\left\{ \left[ (4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - \right.\right.$$

$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1) + (q-1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\cdot\beta_y^2 -$$

$$-2((2q-1)(\mathrm{q}+1) - q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - \beta_y^2)\nu +$$

$$\left. +(\mathrm{q}+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\nu^2 \right] \mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1) +$$

$$\left. +2\sqrt{2(q+1)}(q+1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} \cdot B_1 \,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1) \right\} \cdot B_2 \cos(\pi n\gamma B_2) \cdot$$

$$\cdot \exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma) + 2\left\{ -B_1 \left[ (4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} + \right.\right.$$

$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1) - (q-1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\beta_y^2 +$$

$$+2((2q-1)(\mathrm{q}+1) + q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - \beta_y^2)\nu -$$

$$\left. -(\mathrm{q}+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\nu^2 \right] \mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1) -$$

$$\left. -\sqrt{2(q+1)}\cdot(3(q^2-1)-2\beta_y^2)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} \cdot \mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1) \right\} \cdot$$

$$\cdot \sin(\pi n\gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma) = 0\,;$$

$$F_2(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) = \tag{3.2}$$

$$= \sqrt{2(q+1)} \cdot \left\{ \left( q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)\cdot\nu - (1-\nu)^2 \right\} \cdot \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 -$$

$$-\sqrt{2(q+1)} \cdot \left\{ \left( q+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)\cdot\nu - (1-\nu)^2 \right\} \cdot \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \cdot$$

$$\cdot \exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma) + 2\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma) \cdot$$

$$\cdot \left\{ 2(q+1)\sqrt{2(q+1)(\mathrm{q}^2-1-\beta_y^2} \cdot \cos(\pi n\gamma\tilde{B}_1) \cdot \cos(\pi n\gamma\tilde{B}_2) - \right.$$

$$-(3q^2-3-2\beta_y^2)\sqrt{2(q+1)(q^2-1-\beta_y^2)} \cdot \sin(\pi n\gamma\tilde{B}_1) \cdot \sin(\pi n\gamma\tilde{B}_2) +$$

$$-\tilde{B}_1 \left[ (q+1)q(q-2) + (q-1)(q^2-1-\beta_y^2) + (4q^2+2q-1-\beta_y^2)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} + \right.$$

$$\left. +2(2q^2+q-1-\beta_y^2+q\sqrt{q-1-\beta_y^2})\nu - (q+1-\sqrt{q-1-\beta_y^2})\nu^2 \right] \cdot$$

$$\cdot\cos(\pi n\gamma\tilde{B}_1)\cdot\sin(\pi n\gamma\tilde{B}_2)-$$

$$-\tilde{B}_2\Big[(q+1)q(q-2)+(q-1)(q^2-1-\beta_y^2)-(4q^2+2q-1-\beta_y^2)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+$$

$$+2(2q^2+q-1-\beta_y^2-q\sqrt{q-1-\beta_y^2})\nu-(q+1+\sqrt{q-1-\beta_y^2})\,\nu^2\Big]\cdot$$

$$\cdot\sin(\pi n\gamma\tilde{B}_1)\cdot\cos(\pi n\gamma\tilde{B}_2)\}=0 \text{ при } q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},\ (-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right);$$

где

$$B_1(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-0.5(q-1)}\,,\ \tilde{B}_1(q)=\sqrt{0.5(q-1)-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}}\,, \qquad (3.3)$$

$$B_2(q)=\tilde{B}_2(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+0.5(q-1)}.$$

Здесь $\beta_y^2$ – коэффициент напряжения, характеризующий растягивающие силы, определяемый выражением (2.4); $q(V)$ – параметр скорости $V$ потока газа – действительный корень кубического уравнения (2.6); $\gamma$ – параметр отношения сторон пластинки, определяемый выражением (2.14); $\nu$ – коэффициент Пуассона.

В соответствии с выражениями (2.7) и (2.8), в силу условий (2.9) и (2.10), очевидно, что

$$B_1(q)>0\,,\ B_2(q)>0 \text{ при всех } q\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3,\infty\right),\ \beta_y^2\ge 0\,; \qquad (3.4)$$

$$\tilde{B}_1(\mathrm{q})>0\,,\ \tilde{B}_2(q)>0 \text{ при всех } q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right),\ \beta_y^2\ge 0\,. \qquad (3.5)$$

В уравнениях (3.1) и (3.2) предполагается, что $\gamma\in(0,\infty)$. В соответствии с обозначением (2.14), значения $\gamma=0$ и $\gamma=\infty$ соответствуют двум предельным случаям исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки: при условии $\gamma=0$ пластинка удлинённая, а при условии $\gamma=\infty$ имеем полубесконечную пластину-полосу.

Далее, подставляя обшее решение исходной задачи устойчивости в виде (2.18), в котором корни $r_1$ и $r_2$ определяются, соответственно, выражениями (2.7) и (2.10), в граничные условия (1.2), получаем две однородные системы алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных $C_{n1}$ и $C_{n2}$. Приравненный к нулю определитель этих систем уравнений приводит к следующим дисперсионным уравнениям локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ как обтекаемой достаточно широкой пластинки $\gamma\gg 1$, так и обтекаемой полубесконечной пластинки-полосы $\gamma=\infty$, соответствующим условиям (2.19) соответственно:

$$K_1(q,\nu,\beta_y^2)=0\,,\ q\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3,\infty\right); \qquad (3.6)$$

$$K_2(q,\nu,\beta_y^2)=0\,,\ q\in\left(\sqrt{1+\beta_y^2},(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right). \qquad (3.7)$$

При этом оказалось, что для всех $\beta_y^2 \geq 0$ и коэффициента Пуассона $\nu$ уравнения (3.6) и (3.7) тождественны и описываются следующим соотношением:

$$K_1(q,\beta_y^2,\nu) = K_2(q,\beta_y^2,\nu) =$$

$$= \left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\cdot\nu - (1-\nu)^2 = 0\,. \qquad (3.8)$$

Легко показать, что

$$\lim_{\gamma\to\infty} F_1\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right) = K_1(q,\nu,\beta_y^2)\,,\ q \in \left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\,,\infty\right), \qquad (3.9)$$

$$\lim_{\gamma\to\infty} F_2\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right) = K_2(q,\nu,\beta_y^2)\,,\ q \in \left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right) \qquad (3.10)$$

для всех значений параметров $\beta_y^2$, $n$ и коэффициента Пуассона $\nu$.

Полученные результаты численных исследований уравнений (3.2) и (3.7), описываемым выражением (3.8), проведённых при всех допустимых значениях параметров системы «пластинка-поток»: $n$, $\nu$, $\gamma \in [0,\infty]$, $\beta_y^2 \geq 0$, $q(V) \in \left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right)$, показали, что

$$F_2(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) > 0\,,\ K_2(q,\nu,\beta_y^2) > 0\,, \qquad (3.11)$$

т.е. уравнения (3.2) и (3.7) в интервале $\left(\sqrt{1+\beta_y^2}\,,(-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3\right)$ не имеют действительных корней $q = q(n,\gamma,\nu,\beta_y^2)$ и $q = q(\gamma,\nu,\beta_y^2)$, соответственно.

Следовательно, достаточные условия неустойчивости (3.2) и (3.7) не выполняются. Это означает, что система «пластинка-поток» в случае, в котором характеристическое уравнение (2.2) имеет пару комплексно сопряжённых корней, определяемых выражениями (2.8) и (2.10), не теряет статической устойчивости.

Подставляя общее решение (2.11), в котором корни $r_i$, $i=\overline{1,4}$ определяются выражениями (2.21), в граничные условия (1.2)–(1.4) и, приравнивая к нулю определитель однородной системы уравнений четвёртого порядка относительно постоянных $C_{nk}$, получаем дисперсионное уравнение

$$F_3\left(n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right) = \left(\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}\right)^2 - 2\cdot\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}\right)\cdot\nu - \left(1-\nu\right)^2\right)\cdot \qquad (3.12)$$

$$\cdot\left(1-\exp\left(-2\sqrt{2(1+\sqrt{1+\beta_y^2}}\cdot\pi n\gamma\right)\right) = 0\,,$$

являющимся достаточным признаком статической неустойчивости необтекаемой растянутой прямоугольной пластинки. А переходя к пределу в выражении (3.12) при условии $\gamma \to \infty$, получаем уравнение

$$K_3(\nu,\beta_y^2) = \lim_{\gamma\to\infty} F_3\left(n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right) = \qquad (3.13)$$

$$=\left(\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}\right)^2-2\cdot\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}\right)\cdot\nu-\left(1-\nu\right)^2\right)=0,$$

определяющее достаточное условие локальной неустойчивости необтекаемой полубесконечной пластины-полосы.

Нетрудно показать, что при всех значениях параметров $n,\gamma$, $\nu$ и $\beta_y^2\geq 0$ достаточные условия статической неустойчивости (3.12) и (3.13) не выполняются.

В самом деле, запишем уравнение (3.13) в виде

$$\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}-\nu\right)^2-1+2(1-\nu)\cdot\nu=0. \tag{3.14}$$

Отсюда, в силу очевидных соотношений: $\left(1+\sqrt{1+\beta_y^2}-\nu\right)^2>1$, $(1-\nu)\nu>0$ и $1-\exp\left(-2\sqrt{2(1+\sqrt{1+\beta_y^2}\cdot\pi n\gamma}\right)>0$, следует справедливость неравенств

$$F_3(n,\gamma,\nu,\beta_y^2)>0,\ K_3(\nu,\beta_y^2)>0. \tag{3.15}$$

Следовательно, уравнения (3.12) и (3.13) не имеют решения на множестве действительных чисел.

Таким образом, достаточные условия статической неустойчивости (3.12) и (3.13) не выполняются: необтекаемая растянутая прямоугольная пластинка $\gamma\in(0,\infty)$ и полубесконечная пластина-полоса $\gamma\to\infty$ не теряют статической устойчивости при всех значениях параметров $n$, $\beta_y^2\geq 0$ и коэффициента Пуассона $\nu$, что вполне согласуется с физическим смыслом рассматриваемой модели задачи устойчивости.

Непосредственной подстановкой значения $\beta_y^2=0$ в уравнения (3.1) и (3.8) легко можно убедиться в их тождественности соответствующим дисперсионным уравнениям, полученным в работах [14, 15] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой прямоугольной пластинки и полубесконечной пластины-полосы с ненагруженными краями.

**Замечание.** Несмотря на то, что корни (2.10) характеристического уравнения системы (2.2), являясь комплексно сопряжёнными числами с отрицательной вещественной частью, удовлетворяют необходимому условию локализованной неустойчивости (2.15) по сути, однако, такое описание корней не отражает физической сущности явления локализованной неустойчивости. А также свидетельством этому является невыполнимость достаточных признаков локализованной неустойчивости (3.7) и (3.13) – отсутствие решения соответствующих дисперсионных уравнений.

**4.** А теперь, перейдём к анализу устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой растянутой прямоугольной пластинки при допустимых значениях параметра скорости потока газа $q(V)$ в интервале

$$q(V)\in\left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3,\infty\right). \tag{4.1}$$

Исследуем дисперсионные уравнения (3.1) и (3.8) при значениях (4.1) и при всех допустимых значениях остальных «существенных» параметров системы «пластинка-поток».

В пространстве «существенных» параметров $M = \left\{ q(V), n, \gamma, \beta_y^2, \nu \right\}$ рассматриваемой системы «пластинка-поток» введём в рассмотрение область устойчивости $M_0$ и области статической неустойчивости $M_1$, $M_2$, соответственно, соответствующие дивергенции растянутой панели и локализованной дивергенции.

Учитывая условие (4.1), в соответствии с соотношениями (3.1), (3.6) и (3.8) область устойчивости $M_0 \in M$ невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка-поток» будет определяться неравенствами:

$$F_1(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) > 0\frac{1}{2}, \;\; K_1(q, \nu, \beta_y^2) > 0 . \tag{4.2}$$

Границами области устойчивости $M_0$ в пространстве её параметров $M$ являются гиперповерхности:

$$F_1(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = 0 , \tag{4.3}$$

$$K_1(q, \nu, \beta_y^2) = 0 , \tag{4.4}$$

где функции $F_1(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$ и $K_1(q, \beta_y^2, \nu)$ определяются выражениями (3.1) и (3.8), соответственно

Из способа разбиения пространства параметров $M$ исходной задачи на области устойчивости и статической неустойчивости, очевидно, что области неустойчивости $M_1$, $M_2$ определяются, соответственно, соотношениями:

$$F_1(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) < 0 , \tag{4.5}$$

$$K_1(q, \nu, \beta_y^2) < 0 . \tag{4.6}$$

На границе (4.3) области устойчивости $M_0$ невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет статическую устойчивость в форме дивергенции панели, а на границе (4.4) – в форме локализованной дивергенции.

Критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$, полученные подстановкой значений первых корней $q_{cr.div.}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$ уравнения (4.3) в выражение (2.12), разграничивают области устойчивости $M_0$ и статической неустойчивости в форме дивергенции панели $M_1$.

При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к статической неустойчивости в форме дивергенции панели. В растянутой прямоугольной пластинке при обтекании возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её формы – пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости $V_{loc.div} = V_{loc.div}(n, \nu, \beta_y^2)$, полученные подстановкой значений корня $q_{loc.div.} = q_{loc.div}(\nu, \beta_y^2)$ уравнения (4.4) в выражение (2.13),

разграничивают области устойчивости $M_0$ и статической неустойчивости $M_2$ в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ достаточно широкой пластинки.

При скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к неустойчивости в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края растянутой достаточно широкой пластинки. В ней вследствие обтекания возникают дополнительные напряжения, приводящие к «выпучиванию» узкой полосы вдоль её свободного края $x=0$.

Границей между областями статической неустойчивости $M_1$ и $M_2$ является гиперповерхность

$$\lim_{\gamma\to\gamma_*} F_1(q,n,\gamma,\nu,\beta_y^2) = K_1(q,\nu,\beta_y^2) = 0,\ \gamma_* = \gamma_*(\beta_y^2) \in (0,\infty) \tag{4.7}$$

при всех значениях $q(V) \in \left((-1+2\sqrt{4+3\beta_y^2})/3, \infty\right)$, $n$, $\beta_y^2$ и коэффициента Пуассона $\nu$.

Здесь $\gamma_* = \gamma_*(\beta_y^2)$ – граничное значение параметра $\gamma$, разграничивающее области неустойчивости в форме дивергенции панели $M_1$ и в форме локализованной дивергенции $M_2$ при фиксированных значениях остальных параметров рассматриваемой задачи устойчивости: при значениях $\gamma < \gamma_*$ возможна потеря статической устойчивости только в форме дивергенции панели, а при значениях $\gamma \geq \gamma_*$ – в форме локализованной дивергенции. При этом, уравнение (3.1) при значениях $\gamma < \gamma_*$ имеет бесконечное число действительных корней $q_{cr.div}^{(i)}(n,\gamma,\nu,\beta_y^2)$, а при значениях $\gamma \geq \gamma_*$ – один корень, равный корню $q_{loc.div}(\nu,\beta_y^2)$ уравнения (3.8), в силу условия (4.7):

$$q_{cr.div} = q_{loc.div}. \tag{4.8}$$

Таким образом, как в случае полубесконечной пластины-полосы $\gamma \to \infty$ [14], достаточно широкая прямоугольная пластинка, у которой $\gamma \geq \gamma_*$, при значениях скорости потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ теряет устойчивость в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$.

**5.** С помощью численных методов анализа найдены первые корни $q_{cr.div}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n,\gamma,\beta_y^2,\nu)$ уравнения (3.1) и корни $q_{\mathrm{loc}.div} = q_{\mathrm{loc}.div}(\beta_y^2,\nu)$ уравнения (3.8) при различных значениях параметров $n$, $\beta_y^2$, $\gamma$ и $\nu$.

Подстановкой значений $q_{cr.div}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n,\gamma,\beta_y^2,\nu)$ и $q_{\mathrm{loc}.div} = q_{\mathrm{loc}.div}(\beta_y^2,\nu)$ в выражения (2.12) и (2.13) соответственно, находим соответствующие значения

приведённых критических скоростей дивергенции панели $V_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и локализованной дивергенции $V_{\text{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$.

При этом, как показал численный анализ, наименьшему значению приведённых критических скоростей $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $V_{\text{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ при фиксированных значениях параметров $\gamma \in [0,\infty)$, $\beta_y^2 \geq 0$ и $\nu \in (0, 0.5)$ соответствует значение $n = 1$, так что вдоль стороны $b$ всегда образуется одна полуволна.

Далее, из условия (4.8) находим границу $\gamma_* = \gamma_*(\beta_y^2)$ перехода из области дивергенции панели $M_1$ в область локализованной дивергенции $M_2$.

Ограниченность объёма статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. В табл. 1–4 представлены численные результаты решения задачи устойчивости растянутой прямоугольной пластинки (1.1)–(1.4), характеризующие наиболее представительные случаи зависимости параметра отношения сторон прямоугольной панели $\gamma_* = \gamma_*(\beta_y^2)$ (табл.1), зависимости значений приведённых критических скоростей локализованной дивергенции $V_{\text{loc}.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ (табл. 2) и дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл. 3–5) от «существенных» параметров системы «пластинка-поток» при значении $n = 1$.

В табл.1 представлены граничные значения $\gamma_* = \gamma_*(\beta_y^2)$, соответствующие некоторым значениям коэффициента растяжения $\beta_y^2 \in [0,\infty)$.

Таблица 1

| $\beta_y^2$ | 0 | 4 | 9 | 16 | 25 | 64 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma_*$ | 2 | 2 | 1.5 | 1.2 | 1.0 | 0.9 | 0.8 |

При значениях $\gamma < \gamma_*$ (табл.1) растянутая прямоугольная пластинка теряет устойчивость в форме дивергенции панели при скоростях $V \geq V_{cr.div.}^{(1)}$ потока газа, а при значениях $\gamma \geq \gamma_*$ (табл.1) – в форме локализованной дивергенции при скоростях $V \geq V_{loc.div.}$ потока газа.

Из данных, приведённых в табл.1, следует, что у пластин с большим коэффициентом растяжения $\beta_y^2$ граничное значение $\gamma_*$ меньше: с возрастанием коэффициента растяжения $\beta_y^2$ более удлинённая прямоугольная пластинка теряет устойчивость не в форме дивергенции панели, а в форме локализованной дивергенции. Иными словами, большие значения $\beta_y^2$ приводят к существенной стабилизации состояния невозмущённого равновесия системы «пластинка-поток».

Заметим, что в случае как ненагруженной, так и сжатой обтекаемых панелей, граничное значение $\gamma_*$ перехода из области дивергенции панели $M_1$ в область локализованной дивергенции $M_2$, и наоборот, не зависит от коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0,\infty)$ – оно постоянно и равно $\gamma_* = 2$ [16, 17].

Для некоторых значениий $\beta_y^2 \geq 0$ и $\nu \in (0, 0.5)$ в табл.2 представлены значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) = V_{loc.div}(n, \nu, \beta_y^2)$, соответствующие значению $n = 1$.

Таблица 2

| $\beta_y^2$ \ $\nu$ | 0.125 | 0.25 | 0.3 | 0.375 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 324.761 | 173.371 | 149.854 | 120.741 | 77.398 |
| 0.10 | 325.589 | 181.643 | 152.992 | 125.850 | 89.361 |
| 0.30 | 355.191 | 188.321 | 170.079 | 137.396 | 97.069 |
| 0.50 | 405.456 | 230.624 | 193.356 | 157.670 | 119.953 |
| 0.70 | 435.599 | 253.904 | 206.167 | 181.904 | 130.990 |
| 0.90 | 474.514 | 278.414 | 237.032 | 195.074 | 143.219 |
| 1.00 | 489.315 | 288.641 | 239.438 | 196.933 | 149.738 |
| 1.25 | 533.807 | 315.006 | 269.689 | 218.613 | 162.635 |
| 2.25 | 708.121 | 420.114 | 357.707 | 297.664 | 221.452 |
| 4.00 | 991.703 | 589.672 | 512.008 | 425.730 | 319.312 |
| 9.00 | 1716.926 | 1039.628 | 917.358 | 761.480 | 604.958 |
| 16.00 | 2645.703 | 1639.351 | 1440.411 | 1224.475 | 970.649 |
| 25.00 | 3820.590 | 2499.283 | 2142.408 | 1836.213 | 1447.754 |

Из данных, приведённых в табл. 2, видно, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона $\nu$, а с ростом коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0,\infty)$ – стремительно возрастает, в отличие от скорости локализованной дивергенции сжатых пластин [17]. Это указывает на существенную стабилизацию состояния плоской формы равновесия обтекаемой растянутой прямоугольной пластинки при условии $\gamma \geq \gamma_*$ (табл.1).

Как следует из результатов численного анализа, в случае достаточно длинных панелей, у которых $\gamma < 0.1$, при значениях $\beta_y^2 \in [0, 25)$, при всех значениях коэффициента Пуассона $\nu$ и при значении $n = 1$ имеет место условие: $q_{cr.div}^{(1)} \cdot = q_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2) \gg 1$. Отсюда, в силу эквивалентности величин $q^2 - 1 \approx q^2 - 1 + \beta_y^2 \approx q^2 - 1 - \beta_y^2$ с точностью порядка $10^{-8}$, следует, что дисперсионные уравнения, описывающие достаточные признаки дивергентной неустойчивости, соответствующие случаям, в которых, соответственно, панель ненагружена

[16] и панель сжата [17], тождественны дисперсионному уравнению (3.1) с точностью того же порядка, полученному в данной работе при исследовании задачи устойчивости растянутой панели.

Это означает, что в случае достаточно длинных пластин $\gamma < 0.1$ начальное напряжённое состояние, характеризуемое усилиями, будь то сжимающими или растягивающими, при умеренных значениях коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0, 25)$ почти (с точностью порядка $10^{-8}$) не оказывает влияния на устойчивость плоской формы равновесия обтекаемой пластинки при всех $\nu \in (0, 0.5)$.

Таблица 3

| $\gamma$ \ $\nu$ | 0.125 | 0.25 | 0.3 | 0.375 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00001 | $0.3562 \cdot 10^{-8}$ | $0.2949 \cdot 10^{-8}$ | $0.2767 \cdot 10^{-8}$ | $0.2455 \cdot 10^{-8}$ | $0.1957 \cdot 10^{-8}$ |
| 0.0001 | $0.3562 \cdot 10^{-6}$ | $0.2949 \cdot 10^{-6}$ | $0.2767 \cdot 10^{-6}$ | $0.2455 \cdot 10^{-6}$ | $0.1957 \cdot 10^{-6}$ |
| 0.001 | $0.3562 \cdot 10^{-4}$ | $0.2949 \cdot 10^{-4}$ | $0.2767 \cdot 10^{-4}$ | $0.2455 \cdot 10^{-4}$ | $0.1957 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.01 | $0.3562 \cdot 10^{-2}$ | $0.2949 \cdot 10^{-2}$ | $0.2767 \cdot 10^{-2}$ | $0.2455 \cdot 10^{-2}$ | $0.1957 \cdot 10^{-2}$ |

В этом легко можно убедиться, также из сопоставления численных результатов – значений приведённой критической скорости дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ в случае достаточно длинных пластин $\gamma < 0.1$, полученных в данной работе (табл.3), с результатами работ [15,16] и [17], в которых исследована задача дивергентной неустойчивости ненагруженной и сжатой панели соответственно.

А, стало быть, в случае достаточно длинных пластин $\gamma < 0.1$ приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ не зависит от коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0, 25)$, зависит только от параметров $\gamma$ и $\nu$: при всех значениях $\beta_y^2 \in [0, 25)$ она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона $\nu$ и убывает с уменьшением $\gamma$, устремляясь к нулю при $\gamma \to 0$ (табл. 3).

Итак, в случае достаточно длинных пластинок, у которых $\gamma < 0.1$, пока коэффициент напряжения $\beta_y^2 < 25$, наличие начального напряжённого состояния, обусловленное сжимающими усилиями или растягивающими, почти не оказывает влияние на устойчивость плоской формы равновесия обтекаемой пластинки для всех $\nu \in (0, 0.5)$.

Следует отметить некую «особенность» в поведении обтекаемой панели при значениях $\beta_y^2 \geq 25$ и $\gamma \in (0.036, 0.275)$: $q_{cr} = q_0$, $q_0$ – нижняя граница интервала допустимых значений параметра скорости $q(V) \in \left( (-1 + 2\sqrt{4 + 3\beta_y^2})/3, \infty \right)$.

Обтекание при скоростях потока газа $V \geq V(q_0)$ приводит к «мгновенной» потере устойчивости в форме дивергенции панели: плоская форма равновесия пластинки «мгновенно» становится «изогнутой».

Однако, как показали численные исследования, при скоростях потока газа примерно $V \geq V_{stab.} \approx 312.456 \cdot D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$, почти независящих от параметров $\gamma \in (0.036, 0.275)$ и $\beta_y^2 \geq 25$, неустойчивая плоская форма равновесия достаточно длинной прямоугольной пластинки становится устойчивой: изогнутая пластинка становится плоской.

В случае прямоугольной пластинки умеренных размеров $0.3 \leq \gamma < \gamma_*(\beta_y^2)$, где $\gamma = \gamma_*(\beta_y^2)$ (табл.1) – граница перехода от дивергенции панели к локализованной дивергенции, при значениях $\beta_y^2 \in [0, \infty)$ и всех значениях коэффициента Пуассона $\nu$ плоская форма равновесия пластинки при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ (табл. 4, 5) теряет устойчивость в форме дивергенции панели.

Таблица 4

| $\gamma$ \ $\beta_y^2$ | 0.00 | 0. 01 | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.3 | $\begin{Bmatrix} 0.3562 \\ 0.2949 \\ 0.2767 \\ 0.2455 \\ 0.1955 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 3.869 \\ 3.329 \\ 3.086 \\ 2.766 \\ 2.231 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 3.871 \\ 3.335 \\ 3.145 \\ 2.821 \\ 2.269 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 3.965 \\ 3.448 \\ 3.249 \\ 2.907 \\ 2.396 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 4.125 \\ 3.519 \\ 3.344 \\ 3.021 \\ 2.485 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 4.239 \\ 3.680 \\ 3.463 \\ 3.089 \\ 2.608 \end{Bmatrix}$ |
| 0.5 | $\begin{Bmatrix} 3.820 \\ 3.299 \\ 3.080 \\ 2.760 \\ 2.223 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 14.096 \\ 13.542 \\ 11.984 \\ 10.823 \\ 9.125 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 15.152 \\ 13.768 \\ 12.134 \\ 11.044 \\ 9.476 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 16.275 \\ 14.264 \\ 13.137 \\ 11.798 \\ 9.813 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 17.245 \\ 14.997 \\ 14.150 \\ 12.602 \\ 10.343 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 18.348 \\ 16.036 \\ 15.005 \\ 13.580 \\ 11.282 \end{Bmatrix}$ |
| 0.8 | $\begin{Bmatrix} 14.95 \\ 13.52 \\ 11.96 \\ 10.78 \\ 9.06 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 81.746 \\ 60.811 \\ 54.685 \\ 46.861 \\ 36.040 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 90.757 \\ 64.436 \\ 57.873 \\ 49.692 \\ 38.790 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 511.385 \\ 75.202 \\ 66.648 \\ 57.194 \\ 43.972 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 516.877 \\ 86.889 \\ 76.981 \\ 64.094 \\ 50.138 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 517.14 \\ 105.55 \\ 86.81 \\ 72.49 \\ 55.62 \end{Bmatrix}$ |
| 1.0 | $\begin{Bmatrix} 80.47 \\ 60.09 \\ 54.32 \\ 46.75 \\ 35.95 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 523.15 \\ 159.66 \\ 127.80 \\ 102.48 \\ 71.81 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 530.05 \\ 581.64 \\ 142.92 \\ 111.76 \\ 79.96 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 539.34 \\ 247.11 \\ 174.65 \\ 132.59 \\ 94.33 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 556.63 \\ 309.79 \\ 209.71 \\ 152.80 \\ 106.43 \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} 571.70 \\ 349.57 \\ 249.14 \\ 176.98 \\ 120.04 \end{Bmatrix}$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.2 | $\begin{Bmatrix}522.80\\157.17\\126.42\\101.74\\70.21\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}618.32\\325.15\\258.13\\197.31\\135.20\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}626.55\\351.65\\279.69\\209.44\\145.25\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}671.11\\403.48\\325.42\\249.73\\167.72\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}709.06\\438.60\\370.42\\289.11\\198.07\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}752.71\\479.83\\397.62\\314.33\\216.98\end{Bmatrix}$ |

В этом случае приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ зависит от параметров $\gamma$, $\beta_y^2$ и $\nu$: она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона $\nu$, а с ростом $\gamma$ и $\beta_y^2$ – возрастает (табл. 4, 5), в отличие от сжатых пластин [17].

Как следует из данных, приведённых в табли. 4 и 5, при увеличении коэффициента напряжения от значения $\beta_y^2 = 0$ до значения $\beta_y^2 = 16$ критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ растёт, примерно, в 10 раз и более.

Следовательно, с ростом значения коэффициента растяжения $\beta_y^2$ система «пластинка-поток» с растянутой пластинкой при умеренных значениях параметра $\gamma \in (0.3, \gamma_*)$ становится стабильной: она теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях потока газа $V$, намного превосходящих соответствующие критические скорости дивергенции системы «пластинка-поток» с ненагруженной прямоугольной пластинкой (табл. 4, 5).

Таблица 5

| $\beta_y^2$ \ $\gamma$ | 0.9 | 1.0 | 1.25 | 2.25 | 4.0 | 9.0 | 16.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.3 | $\begin{Bmatrix}4.248\\3.759\\3.568\\3.258\\2.677\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}4.407\\3.818\\3.666\\3.272\\2.766\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}4.541\\4.007\\3.770\\3.442\\3.026\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}5.086\\4.573\\4.306\\3.984\\3.415\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}6.144\\5.562\\5.361\\4.947\\4.283\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}9.184\\8.494\\8.258\\7.774\\7.013\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}13.626\\12.739\\12.480\\11.954\\11.141\end{Bmatrix}$ |
| 0.5 | $\begin{Bmatrix}19.578\\17.208\\15.449\\14.344\\11.984\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}20.070\\17.679\\16.616\\14.774\\12.391\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}21.368\\18.913\\17.824\\15.938\\13.510\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}27.681\\24.318\\23.159\\20.968\\18.228\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}39.932\\34.759\\33.121\\30.160\\26.210\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}504.53\\468.76\\457.02\\69.01\\55.32\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}517.41\\474.76\\456.79\\427.27\\390.28\end{Bmatrix}$ |
| 0.8 | $\begin{Bmatrix}520.12\\128.85\\99.87\\81.54\\61.78\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}521.07\\404.41\\107.29\\86.28\\65.09\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}523.16\\408.59\\131.60\\98.57\\73.01\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}543.08\\418.32\\334.55\\173.40\\136.07\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}574.59\\445.88\\394.95\\304.97\\179.40\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}716.29\\523.54\\514.56\\443.23\\340.32\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}1027.54\\768.24\\697.45\\617.21\\507.22\end{Bmatrix}$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | $\begin{Bmatrix}584.43\\371.35\\280.84\\195.07\\137.73\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}594.93\\387.55\\293.54\\209.36\\141.43\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}614.73\\403.58\\327.49\\239.25\\162.63\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}690.75\\488.35\\420.11\\338.68\\233.08\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}848.93\\604.62\\536.02\\452.77\\338.09\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}1698.59\\970.04\\865.69\\761.82\\615.77\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}2868.64\\1640.10\\1401.60\\1205.49\\959.32\end{Bmatrix}$ |
| 1.2 | $\begin{Bmatrix}789.05\\514.70\\434.87\\345.72\\247.48\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}809.96\\536.97\\456.33\\362.11\\254.08\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}876.65\\574.77\\496.51\\395.74\\285.84\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}1109.38\\725.95\\632.18\\528.61\\392.75\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}1122.61\\993.15\\874.88\\735.99\\568.17\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}3067.81\\1797.29\\1555.88\\1316.43\\1064.05\end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix}4573.86\\2903.52\\2558.54\\2083.09\\1678.04\end{Bmatrix}$ |

В табл. 4 и 5 значения критической скорости $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, взятые в фигурные скобки, соответствуют, соответственно, значениям коэффициента Пуассона $\nu$: 0.125, 0.25, 0.3, 0.375, 0.5.

Таким образом, в сравнении с ненагруженной панелью [16], присутствие растягивающих усилий приводит к существенной стабилизации невозмущённого состояния равновесия обтекаемой пластинки, в отличие от сжимающих усилий, приводящих к дестабилизации [17].

Наиболее ярко эффект стабилизации проявляется при всех значениях параметра отношения сторон $\gamma \in [0.3, \infty)$, коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [2.25, \infty)$ и параметра Пуассона $\nu$ (табл. 2, 4, 5).

**6. Основные результаты.** В данной работе на примере обтекаемой сверхзвуковым потоком газа равномерно растянутой упругой прямоугольной пластинки со свободным краем проиллюстрировано своеобразное влияние начального напряжённого состояния на устойчивость невозмущённого состояния равновесия пластинки.

Определены критические значения коэффициента напряжения и критические скорости потока газа, при превышении которых плоская форма равновесия теряет статическую устойчивость как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции в зависимости от параметров системы «пластинка-поток» в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба.

С помощью графоаналитических методов анализа произведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка-поток» на области устойчивости и статической неустойчивости в форме дивергенции панели и в форме локализованной дивергенции. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости: дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Определены условия, позволяющие выявить возможность потери статической устойчивости пластинки в форме дивергенции панели или в форме локализованной дивергенции ранее, ещё до получения и исследования дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости.

Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции, разграничивающие области устойчивости и статической неустойчивости как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции.

Найдены граничные (критические) значения параметра отношения сторон панели в зависимости от коэффициента напряжения, разграничивающие области дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Показана существенная стабилизирующая роль начального напряжённого состояния, обусловленного наличием растягивающих усилий на кромках пластинки, на устойчивость плоской формы равновесия пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, при умеренных и больших значениях параметра $\gamma$, характеризующего отношение сторон панели.

Следует отметить, что при значениях коэффициента напряжения $\beta_y^2 \geq 25$ и параметра $\gamma \in (0.036, 0.275)$ наблюдается «скачкообразное» падение параметра критической скорости дивергенции растянутой панели: наличие начального напряжённого состояния приводит при обтекании к «мгновенной» потере устойчивости. Однако, это не влияет на характер изменения зависимости критической скорости дивергенции от коэффициента напряжения. В целом, критическая скорость дивергенции панели является монотонно возрастающей функцией от коэффициента напряжения при фиксированных значениях остальных параметров, что повествует о стабилизирующем влиянии напряжённого состояния на устойчивость плоской формы пластинки.

А при значениях $\gamma < 0.1$ и $\beta_y^2 < 25$ наличие начального напряжённого состояния, обусловленного растягивающими усилиями, почти не оказывает влияния на устойчивость обтекаемой панели: значения критических скоростей с точностью порядка $10^{-8}$ равны соответствующим значениям критических скоростей как ненагруженной панели, так и сжатой панели [16, 17].

Таким образом, начальное напряжённое состояние, обусловленное растягивающими усилиями, оказывает, в основном, стабилизирующее действие на устойчивость системы «пластинка-поток».

Результаты работы могут быть использованы при исследовании задач панельного флаттера в нелинейной постановке [19 – 21].

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем.– М.: Физматгиз, 1963. 880с. Volmir A.S. The Stability of the elastic system. Moscow: Physmathgiz. 1963. 880 p.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука, 1961. 329 с. Bolotin V.V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. Moscow: Science. 1961. 329p. (in Russian).
3. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38–46. Ishlinskii A.Yu. About the same limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates. // Reports of USSR Academy of Sciences. 1954. V.95. № 3. Pp. 38-46. (in Russian).
4. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе.// Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243. Movchan A. A. On stability of a panel moving in a gas.// Proceed. of USSR Academy of Sciences. PMM. 1957. Vol. 21. № 2. P.231-243. (in Russian).

5. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic metods.// Moscow.: Science. Physmathlit. 1995. 320 p. (in Russian).
6. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968. Strength. Stability. Vibrations. Directory in 3 v. // Under the editorship of I. A. Birger and Ya.G. Panovko. – Moscow.: Mechanical Engineering. 1968. (in Russian).
7. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с. Algazin S.D., Kiyko I. A. Flutter of plates and shells. – Moscow: Science. 2006. 247 p. (in Russian).
8. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука, 1978. Т.11. С.67–122. Novichkov Yu. N. A flutter of plates and shells. Results of science and technology Mechanics of deformable solids. – M.: Science. 1978. V.11. Pp.67-122. (in Russian).
9. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755. Ilyushin A. A. Law of plane sections at high supersonic velocity // PMM. 1956. V. 20. №6. Pp. 733-755. (in Russian).
10. Ashley GH., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. №12. P. 1109–1118.
11. .Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука. 1978. 832с. Korn G., Korn T. Handbook of mathematics. – M.: Science. 1978. 832 p. (in Russian).
12. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “релеевского” типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С. 124–126. Konenkov Yu.K. A Rayleigh–Type Flexural Wave.// Soviet Physics. Akoustic Journal. 1960, v. 6, № 1, pp. 124–126. (in Russian).
13. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности». Ереван: Изд-во ЕГУ. 1997. С. 95–99. Belubekyan M.V. The problem of localized instability of plates.// In the coll.: Questions of optimal control, stability and strength. Yerevan. Publishing house of the Yerevan State University. 1997. Pp. 95–99. (in Russian).
14. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. (1). С.29–34. (Proceed. NAS of Armenia. Mechanics. 2012. V.65(1). P. 29–34.)
15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Дивергентная неустойчивость прямоугольной пластинки при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край.// Труды VIII Международной научной конференции ”Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Горис–Степанакерт (Армения), 2014, сентябрь 22-25, с. 98–103. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. Divergence instability of a rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge// Proceed. of the VIII International scientific conference: “The problems of dynamics of interaction of deformable media”. The Goris–Stepanakert (Armenia) 2014, September 22-25, pp. 98-103. (in Russian).
16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. № 2. С. 12 - 42. M.V. Belubekyan , S.R. Martirosyan. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when

the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge. //Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V. 67(2). P. 12–42. (in Russian).

17. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край // Изв. НАН Армении. Механика. 2017. Т. 70. № 4. С.12–34. M.V. Belubekyan , S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge// Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V. 70(4). P.12–34. (in Russian).
18. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the Destabilizing Effect of Constructional Friction in Supports on the Stability of a Plate in a Supersonic Gas Flow. // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 205, №4, Mart, 2015; 1072-3374/13/1714-01, Springer Science+Business Media New Jork.
19. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. Т.1. № 1. С. 92–98. Baghdasaryan G.Ye. On stability of shallow shells, streamlined by a supersonic gas flow.// Proceed. of USSR AS. DTS. Mechanics and mechanical engineering. 1963. V.1. №1. P. 92–98. (in Russian).
20. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 3. С.24–38 . Baghdasaryan G. E., Mikilyan M. A., Saghoyan R. O., Marzocca P. Effect of supersonic flow on the character of amplitude-frequency dependence of nonlinear vibrations of flexible plates.// Reports of NAS of Armenia. Mechanics. 2013. V. 66. № 3. Pp. 24–38 . (in Russian).
21. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Характер нелинейных колебаний гибких пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа// Изв. НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. №4. С.20–40. Baghdasaryan G.E., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O. Character of nonlinear vibrations of elastic plates streamlined by a supersonic gas flow.// Reports of NAS of Armenia. Mechanics. 2016. V.69. № 4. P. 20-40. (in Russian).

**Сведения об авторах:**

**Белубекян Мелс Вагаршакович** – к. ф.-м..н., профессор, гл. научн. сотр. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
**E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

**Мартиросян Стелла Размиковна** – к.ф-м.н., ведущий научн. сотр. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
**E-mail:** mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 19. 01. 2018

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա 71, №2, 2018 Механика

УДК 532.613.5

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В СНАРЯДНОМ ПОТОКЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ В ТРУБЕ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

**Григорян Ш.А., Оганян Г.Г.**

**Ключевые слова:** газожидкостная смесь, снарядный поток, дискретная структура, периодические ячейки.

**Գրիգորյան Շ.Հ., Օհանյան Գ.Գ.**

**Պարբերական կառուցվածք ունեցող արկային հոսքում արագությունների բաշխումը գլանային խողովակում**

**Հիմնաբառեր.** գազահեղուկ խառնուրդ, արկային հոսք, դիսկրետ կառուցվածք, պարբերական բջիջներ:

Դիտարկված է գլանային փակ խողովակում գազահեղուկ խառնուրդի լիովին կազմավորված արկային հոսքում $N$ բջիջներում արագությունների որոշման խնդիրը: Հեղուկ և գազ պարունակող երկու խցանները կազմում են տարրական բջիջ: Արկային հոսքի դիսկրետ կառուցվածքը պարբերական է ըստ տարրական բջջի: Օգտագործելով Աբելեսի թեորեմը ստացված են տրանսցենդենտ հավասարումներ, որոնք լուծվում են թվայնորեն: Դրանց արմատների ամենափոքր արժեքը համապատասխանում է ալիքի տարածման արագությանը ֆիքսված բջջում: Կառուցված են արագությունների բաշխման գրաֆիկները, կախված բջիջների քանակից ($N$ թվից), որոնց վերլուծությունից հետևում է, որ $N$ թվի մեծացմամբ ալիքի արագությունը համապատասխան բջջում նույնպես մեծանում է: Մեծ $N$ արժեքների դեպքում տարրական բջիջներից կազմված դիսկրետ համակարգում արագությունը ձգտում է իր մեծությամբ համասեռ խառնուրդի ձայնի արագությանը:

**Grigoryan Sh.H., Oganyan G.G.**

**Velocity distribution of a plug flow of a periodic structure in a cylindrical tube**

**Keywords:** gas-fluid mixture, plug flow, discret stracture, periodic sells.

The problem of determining the velocities in the plug regime of the flow of a gas–liquid mixture in a closed cylindrical tube is considered. The discrete structure of the plug flow is periodic of elementary cell. For the derivation of the transcendental equation the Abeles formula is used. The values of velocities in each cell is obtained. With increasing their number, the velocities increase and in the limit, tend to the speed of sound in homogeneous gas–liquid mixture.

Рассмотрена задача определения скоростей волн в полностью сформировавшемся снарядном потоке течения газожидкостной смеси в замкнутой трубе в виде пробок жидкости и газа. Система из двух чередующихся пробок образует элементарную ячейку. Их число равно $N$ и они заполняют весь объём трубы. Структура снарядного потока, состоящая из системы $N$ элементарных ячеек, – дискретная. Она является периодической относительно элементарной ячейки. С использованием формулы Абелеса получены трансцендентные уравнения, при численной реализации которых наименьший из их корней соответствует значению скорости распространения волны в каждой фиксированной по $N$ ячейке. Получены графики распределения скоростей в ячейках в зависимости от числа $N$, из анализа которых следует вывод, что с увеличением номера $N$ скорости волны в соответствующей ячейке также возрастает. При больших $N$ она стремится к значению скорости звука в гомогенной (без межфазных границ) газожидкостной смеси.

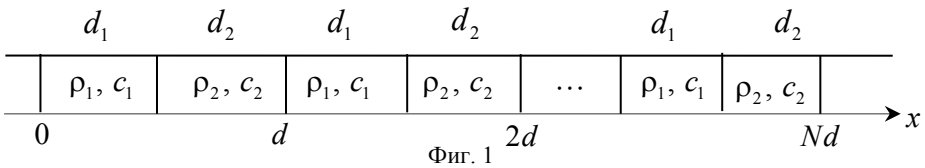
**1. Постановка задачи.** Пусть в замкнутой цилиндрической трубе с абсолютно жёсткими стенками течёт бесстолкновительная монодисперсная смесь сжимаемой невязкой жидкости с пузырьками калорически совершенного газа. При течении смеси может произойти разделение фаз в виде пробок жидкости и снарядоподобных пузырей газа, приводящих к образованию снарядного потока, наблюдаемого в экспериментах [1–3]. В случае его полного формирования реализуется дискретная

структура из чередующихся пробок жидкости и газа. Система из двух таких пробок образует элементарную ячейку, которая периодически повторяется по длине трубы и их число равно $N$. Целью исследования является определение значений скоростей распространения волны в каждой из $N$ ячейке.

Линейные уравнения осесимметричного течения и неразрывности в каждой из фаз (пробок) в случае пренебрежения радиальной составляющей движения возьмём в виде [2,4]

$$\frac{\partial \mathrm{V}_m}{\partial x}+\frac{1}{\rho_m c_m^2}\frac{\partial P}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-c_m^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=0,\quad m=1,2 \tag{1.1}$$

Начало цилиндрический системы координат размещено в сечении $x=0$, при этом ось $x$ совпадает с осью трубы, $\rho_i, c_i$ – плотности и скорости звука в пробках (фазах). Идеализированная схема рассматриваемого снарядного потока представлена на фиг.1




Фиг. 1

Здесь $d_i\left(i=1,2\right)$ –длины жидких и газовых пробок, $d=d_1+d_2$, $N$ – число элементарных ячеек, состоящих из двух пробок. На границах раздела сред (фаз) должны выполняться условие непрерывности как давления, так и скоростей частиц сред

$$\mathrm{V}_1\left(d_1\right)=\mathrm{V}_2\left(d_1\right),\quad P\left(d_1\right)=P\left(d_1\right) \tag{1.2}$$

Будем полагать зависимость параметров от времени гармонической, что позволяет записать искомые функции в форме

$$\mathrm{V}_m\left(x,t\right)=\mathrm{V}_m\left(x\right)e^{i\omega t},\quad P\left(x,t\right)=P\left(x\right)e^{i\omega t}$$

где $\omega$ – вынуждающая частота. Для определения амплитуд $\mathrm{V}_m$ и $P$, в силу (1.1), получим систему стационарных уравнений:

$$\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{\omega^2}{c_m^2}P\left(x\right)=0,\quad \frac{d\mathrm{V}_m}{dx}+i\frac{\omega}{\rho_m c_m^2}P\left(x\right)=0,$$

общие решения которых запишутся в виде

$$P\left(x\right)=A_m e^{-ik_m x}+B_m e^{ik_m x},\quad \mathrm{V}_m\left(x\right)=\frac{1}{\rho_m c_m}\left(A_m e^{-ik_m x}-B_m e^{ik_m x}\right),\quad k_m=\frac{\omega}{c_m}$$

Здесь $A_m$ и $B_m$ – постоянные интегрирования, определяемые из граничных значений на входах в соответствующую пробку.

**2. Локальная и интегральная передаточные матрицы.** Для первой пробки получим

$$A_1=\frac{1}{2}\left[P\left(0\right)+\rho_1 c_1\mathrm{V}_1\left(0\right)\right],\quad B_1=\frac{1}{2}\left[P\left(0\right)-\rho_1 c_1\mathrm{V}_1\left(0\right)\right].$$

Общие решения уравнений удобно представить в матричной форме записи

$$\begin{bmatrix} P(x) \\ \mathrm{V}_1(x) \end{bmatrix} = F_1(x) \begin{bmatrix} P(0) \\ \mathrm{V}_1(0) \end{bmatrix}, \quad F_1(x) = \begin{bmatrix} \cos(k_1 x) - i\rho_1 c_1 \sin(k_1 x) \\ -\dfrac{i}{\rho_1 c_1} \sin(k_1 x) \quad \cos(k_1 x) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Для второй пробки при определении $A_2$, $B_2$ используются значения функций на входе $x = d_1$ в неё. Общие решения, записанные вновь в матричной форме, имеют вид:

$$\begin{bmatrix} P(x) \\ \mathrm{V}_2(x) \end{bmatrix} = F_2 \begin{bmatrix} P(d_1) \\ \mathrm{V}_2(d_1) \end{bmatrix},$$

$$F_2(x - d_1) = \begin{bmatrix} \cos\left[k_2(x - d_1)\right] - i\rho_2 c_2 \sin\left[k_2(x - d_1)\right] \\ -\dfrac{i}{\rho_2 c_2} \sin\left[k_2(x - d_2)\right] \cos\left[k_2(x - d_2)\right] \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Выразим значения параметров сред (фаз) на входах в первую и вторую пробки через параметры в произвольных точках тех же пробок, для чего умножим слева решения (2.1) и (2.2) на обратные матрицы $m^{(1)}(x) = F_1^{-1}(x)$ и $m^{(2)}(x - d_1) = F_2^{-1}(x - d_1)$. В результате, их можно представить в иной форме записи

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ \mathrm{V}_1(0) \end{bmatrix} = m^{(1)}(x) \begin{bmatrix} P(x) \\ \mathrm{V}_1(x) \end{bmatrix},$$

$$m^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} m_{11}^{(1)} m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} m_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_1 x) \quad i\rho_1 c_1 \sin(k_1 x) \\ \dfrac{i}{\rho_1 c_1} \sin(k_1 x) \quad \cos(k_1 x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P(d_1) \\ \mathrm{V}_2(d_1) \end{bmatrix} = m^{(2)}(x - d_1) \begin{bmatrix} P(x) \\ \mathrm{V}_2(x) \end{bmatrix},$$

$$m^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} \cos\left[k_2(x - d_1)\right] \quad i\rho_2 c_2 \sin\left[k_2(x - d_1)\right] \\ \dfrac{i}{\rho_2 c_2} \sin\left[k_2(x - d_1)\right] \quad \cos\left[k_2(x - d_1)\right] \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что на выходах $x = d_1$ и $x = d_1 + d_2 = d$ из первой и второй пробок, соответственно, получим:

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ \mathrm{V}_2(0) \end{bmatrix} = m^{(1)}(d_1)\begin{bmatrix} P(d_1) \\ \mathrm{V}_1(d_1) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P(d_1) \\ \mathrm{V}_2(d_1) \end{bmatrix} = m^{(2)}(d_2)\begin{bmatrix} P(d) \\ \mathrm{V}_2(d) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Матрицы $m^{(1)}(d_1)$ и $m^{(2)}(d_2)$ называются локально передаточными для первой и второй пробок. Они связывают значения параметров сред на входах и выходах из них и их элементы имеют вид:

$$\begin{aligned} &m_{11}^{(1)} = \cos(k_1 d_1), && m_{12}^{(1)} = i\rho_1 c_1 \sin(k_1 d_1), \\ &m_{21}^{(1)} = \frac{i}{\rho_1 c_1}\sin(k_1 d_1), && m_{22}^{(1)} = \cos(k_1 d_1) \\ &m_{11}^{(2)} = \cos(k_2 d_2), && m_{12}^{(2)} = i\rho_2 c_2 \sin(k_2 d_2), \\ &m_{21}^{(2)} = \frac{i}{\rho_2 c_2}\sin(k_2 d_2), && m_{22}^{(2)} = \cos(k_2 d_2). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь верхние индексы указывают на принадлежности к первой и, соответственно, к второй пробке. Поскольку $\det\left[m^{(1)}\right] = \det\left[m^{(2)}\right] = 1,$ постольку матрицы являются унимодулярными.

Система из двух пробок образует элементарную ячейку. Комбинирование соотношений (2.3) и учёт условий непрерывности (1.2) приводит к формуле

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ \mathrm{V}_1(0) \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} P(d) \\ \mathrm{V}_2(d) \end{bmatrix}, \quad M = m^{(1)}m^{(2)} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

в которой элементы матрицы $M$ определяются, в соответствии с (2.4), как

$$\begin{aligned} &M_{11} = \cos(k_1 d_1)\cos(k_2 d_2) - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\sin(k_1 d_1)\sin(k_2 d_2), \\ &M_{12} = i\rho_1 \mathrm{c}_1 \sin(k_1 d_1)\cos(k_2 d_2) + i\rho_2 c_2 \sin(k_2 d_2)\cos(k_1 d_1), \\ &M_{21} = \frac{i}{\rho_1 \mathrm{c}_1}\sin(k_1 d_1)\cos(k_2 d_2) + \frac{i}{\rho_2 c_2}\sin(k_2 d_2)\cos(k_1 d_1), \\ &M_{22} = \cos(k_1 d_1)\cos(k_2 d_2) - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}\sin(k_1 d_1)\sin(k_2 d_2). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Матрица $M$ называется интегральной передаточной для элементарной ячейки и является унимодулярной, поскольку, в силу (2.5), имеем:

$$\det[M] = \det\left[m^{(1)}\right]\det\left[m^{(2)}\right] = 1.$$

Она связывает значения параметров смеси на входе и выходе из ячейки.

Определим объёмное газосодержание как отношение длины газовой пробки $d_2$ к длине ячейки $d = d_1 + d_2$

$$\alpha = \frac{d_2}{d}, \quad d_2 = \alpha d, \quad d_1 = (1-\alpha) d . \tag{2.7}$$

Период колебаний в ячейке, согласно [5], равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\left(\frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}\right) = 4\left(\frac{1-\alpha}{c_1} + \frac{\alpha}{c_2}\right) d = 4\frac{d}{a_1}, \quad d = \frac{\pi}{2}\frac{a_1}{\omega}, \tag{2.8}$$

где $a_1$ – пока неопределённая скорость волны в ячейке, которая должна быть вещественной величиной. Скорость волны $a_1$ из (2.8), имеет вид:

$$a_H = \frac{c_1 c_2}{\alpha c_1 + (1-\alpha) c_2} .$$

Полученное значение совпадает со скоростью по модели Генри [6], в которой не учитывается отражение волны от межфазной границы $x = d_1$. Элементы $M_{11}$ и $M_{22}$ перепишутся в виде:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\frac{a_1}{c_1}\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}\alpha\frac{a_1}{c_2}\right] - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\frac{a_1}{c_1}\right]\sin\left[\frac{\pi}{2}\alpha\frac{a_1}{c_2}\right] \\ M_{22} &= \cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\frac{a_1}{c_1}\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}\alpha\frac{a_1}{c_1}\right] - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\frac{a_1}{c_1}\right]\sin\left[\frac{\pi}{2}\alpha\frac{a_1}{c_2}\right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

Известно [1,2,4,6], что в гомогенной (без межфазных границ) газожидкостной смеси при малых значениях газосодержания и давления скорость звука определяется формулой

$$a^2 = \frac{\gamma P}{\alpha(1-\alpha)\rho_1}, \quad a < c_2 < c_1, \quad 0.01 \le \alpha < 0.5 \tag{2.10}$$

где $\gamma$ – показатель адиабаты газа. Если в системе их двух пробок параметры сред связаны соотношением

$$\mathrm{ctg} k_1 d_1 = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\mathrm{tg} k_2 d_2 ,$$

то, согласно определению (2.6), получим $M_{11} = 0$. При заданных значениях $\alpha, c_1, c_2$ и $\rho_1, \rho_2$ вещественная скорость волны сжатия, которая должно быть меньше $a$, определится из решения трансцендентного уравнения $M_{11} = 0$, следуемого из (2.6). Его наименьший корень соответствует скорости распространения волны сжатия в рассматриваемой модели снарядного потока в элементарной ячейке.

**3. Система периодически повторяющихся $N$ элементарных ячеек.** Обобщая формулы (2.5) на случай $N$ элементарных ячеек, можно получить

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ \mathrm{V}_1(0) \end{bmatrix} = M^N \begin{bmatrix} P(Nd) \\ \mathrm{V}_2(Nd) \end{bmatrix}, \quad M^N = M \cdot M \cdots M \cdot M \tag{3.1}$$

где $M^N$ – интегральная передаточная матрица для системы из $N$ периодически повторяющихся ячеек, являющаяся вновь унимодулярной, поскольку $\left|M^N\right| = |M||M|...|M| = 1$.

В работе Егера [5] теоретический период колебаний системы $n$ водоводов определяется как сумма периодов, отнесённых к её отдельным звеньям

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\left[\left(\frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}\right) + ... + \left(\frac{d_{n-1}}{c_{n-1}} + \frac{d_n}{c_n}\right)\right],$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ – скорости волны сжатия в звеньях; $d_1, d_2, ..., d_n$ –длины звеньев. Если в качестве звеньев принять длины элементарных ячеек, то применительно к системе периодически повторяющихся $N$ ячеек, показанной на фиг.1, период можно определить выражениями:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\left[\left(\frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}\right) + ... + \left(\frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}\right)\right] = 4\frac{Nd}{a_N}$$
$$d = \frac{\pi}{2}\frac{1}{N}\frac{a_N}{\omega}, \quad d_1 = \frac{\pi}{2}\frac{1-\alpha}{N}\frac{a_N}{\omega}, \quad d_2 = \frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{N}\frac{a_N}{\omega} \tag{3.2}$$

Здесь $a_N$ – обобщённая для $N$ ячеек скорость волны давления в системе. Соотношения (3.2) должны быть подставлены в выражения (2.6).

По формуле Сильвестра [7,8], выражающей целую степень матрицы $[M]$ через функцию самой матрицы и её собственных чисел, имеем:

$$[M]^N = \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2}[M] - \lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_1^{N-1} - \lambda_2^{N-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}[I]. \tag{3.3}$$

Здесь $[I]$ – единичная матрица, $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – собственные числа унимодулярной матрицы $[M]$, определяемые, согласно (2.5), из уравнения

$$\lambda^2 - \lambda(M_{11} + M_{22}) + 1 = 0.$$

Согласно теореме Виетта, $\lambda_1\lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = M_{11} + M_{22}$. Обозначим $\lambda_1 = e^{i\varphi}$, $\lambda_2 = e^{-i\varphi}$. Тогда,

$$\frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\sin N\varphi}{\sin\varphi} = U_{N-1}(\varphi), \quad \cos\varphi = \frac{M_{11} + M_{22}}{2}$$
$$\frac{\lambda_1^{N-1} - \lambda_2^{N-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\sin(N-1)\varphi}{\sin\varphi} = U_{N-2}(\varphi), \tag{3.4}$$

где $U_{N-1}(\varphi)$, $U_{N-2}(\varphi)$ – полиномы Чебышева второго рода. Подставляя (3.4) в (3.3), получим окончательную формулу Абелеса [7,8]

$$[M]^N = \begin{bmatrix} M_{11}U_{N-1} - U_{N-2} & M_{12}U_{N-1} \\ M_{21}U_{N-1} & M_{22}U_{N-1} - U_{N-2} \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

При $N = 1$, в силу (3.4), матрица переходит в (2.5).

Вещественные значения $a_N$ определятся из решений уравнений, следуемых из (3.5)

$$M_{11}U_{N-1}(\varphi) - U_{N-2}(\varphi) = 0, \quad M_{22}U_{N-2}(\varphi) - U_{N-2}(\varphi) = 0, \tag{3.6}$$

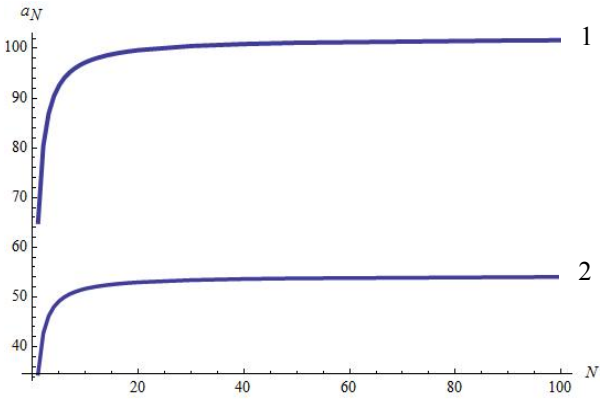
наименьшие корни которых при выполнении условий $a_N < a$ и фиксированных $N$ соответствуют скоростям распространения волн сжатия в элементарных ячейках. В случае численной реализации первого из них условия выполяются, в то время как для второго уравнения имеют место неравенства $a < a_N$, что с точки зрения физического процесса неприемлимо. Первое трансцендентное уравнение в силу (3.4) и (3.2), перепишется в форме

$$\left(\cos\left[\frac{\pi}{2}\frac{1-\alpha}{N}\frac{a_N}{c_1}\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{N}\frac{a_N}{c_2}\right] - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\sin\left[\frac{\pi}{2}\frac{1-\alpha}{N}\frac{a_N}{c_1}\right]\sin\left[\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{N}\frac{a_N}{c_2}\right]\right)\times$$
$$\times\sin\left[N\arccos\left[B(\alpha, c_1, c_2, \rho_1, \rho_2, N, a_N)\right]\right] - \sin\left[(N-1)\arccos\times\right.$$
$$\left.\times\left[B(\alpha, c_1, c_2, \rho_1, \rho_2, N, a_N)\right]\right] = 0, \tag{3.7}$$

$$B(\alpha, c_1, c_2, \rho_1, \rho_2, N, a_N) = \cos\left[\frac{\pi}{2}\frac{1-\alpha}{N}\frac{a_N}{c_1}\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{N}\frac{a_N}{c_2}\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}\right)\sin\left[\frac{\pi}{2}\frac{1-\alpha}{N}\frac{a_N}{c_1}\right]\sin\left[\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{N}\frac{a_n}{c_2}\right].$$

При заданных значениях парметров $\alpha, c_1, c_2$ и $\rho_1, \rho_2$ соотношение (3.7) позволяет определить величины $a_N$ для каждого из фиксированных $N$.

Приведём некоторые графики численных расчётов скоростей в каждой из периодически повторяющей-




Фиг.2

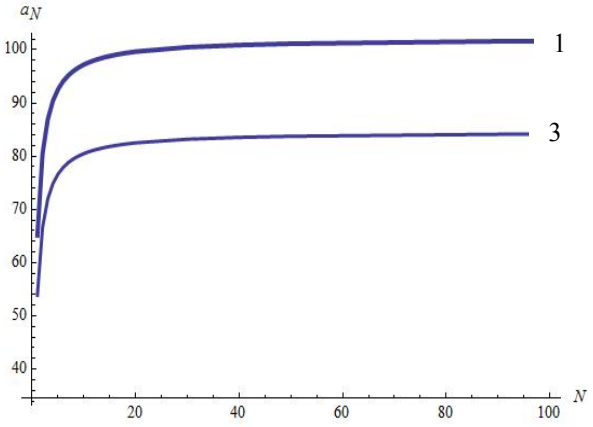
ся $N$ элементарной ячейке, рассчитанные по уравнению (3.7) для водовоздушной смеси.

Фиг.2 иллюстрирует зависимость скорости распространения волны сжатия от давления. Кривая 1 отнесена к смеси с параметрами $\alpha = 0.05$, $P = 0.355$МПа, $\rho_2 = 3.1956$кг/м$^3$, $c_2 = 394.37$м/с, $a = 102.39$м/с, а кривая 2 – к $\alpha = 0.05$, $P = 0.1$МПа, $\rho_2 = 1.2928$кг/м$^3$, $a = 54.34$м/с. Видно, что с уменьшением давления скорость волны в соответствующих ячейках убывает.

На фиг.3 показаны те же связи, однако, в зависимости от величины газосодержания. Кривая 1 взята из фиг.2, а кривая 3 отнесена к смеси с теми же параметрами, однако, с $\alpha = 0.075$ и $a = 84.72$м/с. Видно, что с увеличением газосодержания $\alpha$ скорости в ячейках убывают.

Выявим поведения скорости в зависимости от сорта газа.

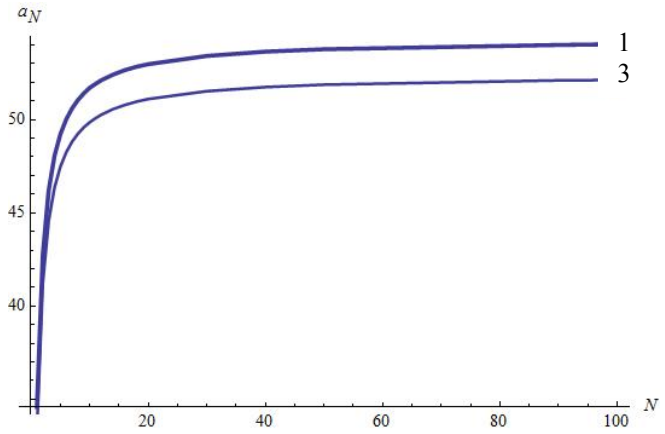
На фиг.4 приведены распределение скоростей при $P = 0.1$МПа и $\alpha = 0.05$. Кривая 2 отнесена к водовоздушной смеси и заимствована из фиг.2, а кривая 4 – к смеси воды с пузырьками углекислого газа, для которой $\gamma = 1.3$, $\rho_2 = 1.9768$кг/м$^3$, $c_2 = 256.7$м/с, $a = 52.37$. С переходом от воздуха к углекислому газу, т.е. с уменьшением скорости звука в газе, скорости волн в ячейках убывают – переход от кривой 2 к 4.




Фиг.3

Необходимо отметить, что с возрастанием числа ячеек $N$ скорость волны сжатия $a_N$ асимптотически стремится к скорости $a$ в модели гомогенной смеси, описываемой формулой (2.10).

**Заключение.** При течении газожидкостной смеси в замкнутой трубе может образоваться снарядный поток, характеризуемый строго дискретной структурой из чередующихся пробок жидкости и газа. Полагается, что такая структура для двух пробок, образующих элементарную ячейку, является периодической для $N$ числа ячеек, заполняющих весь объём трубы. Первая ячейка характеризуется интегральной




Фиг.4

передаточной матрицей второго ранга. Возводя её в целую степень $N$, найдём аналогичную матрицу для системы $N$ ячеек, которая, согласно теореме Абелеса, выражается через саму матрицу и её собственные числа. Получены трансцендентные уравнения, численная реализация которых позволяют определять вещественные значения скоростей распространения волны сжатия в каждой ячейке, как наименьшый корень этих уравнений. Выявлено, что при больших числах $N$ скорость волны во всей системе стремится к значению скорости звука в гомогенной (без межфазных границ) газожидкостной смеси.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Martin C.S., Padmanabhan M. Pressure Pulse Propagation in Two–Component Slug Flow // Trans. of the ASME. V.101. №1. 1979. Русский перевод – Распростанение импульса давления в двухкомпонентном снарядном потоке. // Теорет. основы инж. расчетов. 1979. Т.101. №1. С.161-171.
2. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248с. Nakoryakov V.Ye., Pokusaev B.G., Shreiber I.R. Wave dynamics of gas and vapor-liquid media. M: Energoatomizdat, 1990. – 248 p.
3. Козулин И.А., Кузнецов В.В. Статические характеристики двухфазного газожидкостного потока в вертикальном микроканале // ПМТФ. 2011. Т.25. №6. С.129-139. Kozulin I.A., Kuznetsov V.V. Statistical characteristics of a two-phase gas-liquid flow in a vertical microchannel. ПМТФ. 2011. Т.25. № 6. P.129-139.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с. Nigmatulin R.I. Dynamics of multiphase media. P.1. M.: Nauka, 1987. 464 p.
5. Jaeger G. The theory of Resonance in Hydropower Systems. Discussion of Incident and Accidents Occurring in Pressure Systems. // Trans. of the ASME. Vol.85. Ser.D. №4. 1963. Русский перевод – Приложение теории резонанса к системе водоводов ГЭС.

Рассмотрение причин аварий напорных трубопроводов. // Техническая механика. Т.85. Сер.D. №4. 1963. С184-195.
6. Henry R.E., Grolmes M.A., Fauske H.K. Pressure Pulse Propagation in Two–phase One – and Two–Component Mixtures. ANL – 7792. Mar. 1971. 86pp.
7. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешётками. М.: Наука, 1989. 288с. Bass F.G., Bulgakov A.A., Tetervov A.P. High-frequency properties of semiconductors with superlattices. Moscow: Nauka, 1989. 289 p.
8. Angot A. Complements de Mathematiques. Paris. 1957. Русский перевод – Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964. 772с.

**Сведения об авторах:**

**Григорян Шушаник Акоповна** – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика и математ. моделирования» Российско-Армянского (Славянского) университета.
**Адрес:** 0051, Ереван, ул. Овсепа Эмина, 123.
**Тел.:** (37494) 284 718. **E-mail:** grig-shushanik@rambler.ru

**Оганян Гагик Гришаевич** – к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.
**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2,
**Тел.** (+374 93) 946-947, **E-mail:** oganyangagik@gmail.com

Поступила в редакцию 10.10.2017

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա 71, №2, 2018 Механика

УДК 539.3

# ПРИКЛАДНАЯ МОДЕЛЬ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ МИКРОПОЛЯРНОГО МАТЕРИАЛА СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Жамакочян К.А., Саркисян С.О.**

**Ключевые слова:** микрополярная упругость, стеснённое вращение, тонкая пластинка, прикладная теория, метод конечных элементов.

**Ժամակոչյան Ք.Ա., Սարգսյան Ս.Հ.**

**Կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար նյութից պատրաստված առաձգական բարակ սալերի կիրառական մոդելը և վերջավոր էլեմենտների մեթոդի կիրառությունը**

**Հիմնաբառեր:** միկրոպոլյար առաձգականություն, կաշկանդված պտույտներ, բարակ սալ, կիրառական տեսություն, վերջավոր էլեմենտների մեթոդ

Աշխատանքում դիտարկվում են սալի բարակ տիրույթում կաշկանդված պտույտներով եռաչափ միկրոպոլյար առաձգականության տեսության եզրային խնդիրները: Հիմք ընդունելով նախկինում մշակված վարկածները՝ կառուցված է միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալի կաշկանդված պտույտներով կիրառական տեսությունը, որում հաշվի են առնված լայնական սահքային դեֆորմացիաները: Ստացված է էներգիայի հաշվեկշռի հավասարումը և կառուցված է համապատասխան վարիացիոն ֆունկցիոնալը: Միկրոպոլյար սալի կաշկանդված պտույտներով եզրային խնդիրների համար (ստատիկա և սեփական տատանումներ) մշակված է վերջավոր էլեմենտների մեթոդը: Ստացված են համապատասխան թվային արդյունքները, որոնց անալիզի օգնությամբ հաստատվում են նյութի միկրոպոլյարության հաշվառման հիմնական առանձնահատկությունները:

**Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H.**

**Applied model of elastic thin plates made from micropolar material with constrained rotation and application of the finite element method**

**Key words:** micropolar elasticity, constrained rotation, thin plate, applied theory, finite element method

In the present paper boundary value problems of three-dimensional micropolar theory of elasticity with constrained rotation are considered in thin region of the plate. On the basis of the previously developed hypotheses an applied theory of micropolar thin plates with constrained rotation is constructed, where transverse shear strains are taken into account. The energy balance equation is obtained and the corresponding variation functional is constructed. The finite element method is developed for the boundary problems (statics and natural oscillation) of micropolar plates with constrained rotation. On the basis of the analysis of the corresponding numerical results main properties of the micropolarity of the material are established.

В работе рассматриваются краевые задачи трёхмерной микрополярной теории упругости с стеснённым вращением в тонкой области пластинки. Принимая в основу ранее разработанные гипотезы, построена прикладная теория микрополярных тонких пластин с стеснённым вращением, при которой учитываются поперечные сдвиговые деформации. Получено уравнение баланса энергии и построен соответствующий вариационный функционал. Для краевых задач (статики и собственных колебаний) микрополярных пластин с стеснённым вращением разработан метод конечных элементов. Приведены

соответствующие численные результаты, при помощи анализа которых устанавливаются основные свойства учёта микрополярности материала.

**Введение.** Наряду с моделью трёхмерной моментной (несимметричной, микрополярной) среды со свободным вращением братьев Э. и Ф. Коссера [1] и начиная со статьи [2], разрабатывались также двух- и одномерные обобщённые модели, т.е., фактически, модели стержней, пластин и оболочек. Предложенная в [2] модель стала одной из наиболее общих моделей оболочек и метод её построения (прямой метод) получил дальнейшее развитие в работах [3-12]. Этот метод с самого начала трактует оболочку, как материальную поверхность, пластинку – как материальную плоскость, стержень – как материальную линию и устанавливает законы их деформирования под действием обобщённых внутренних и внешних сил. Как видно, по существу, этот метод игнорирует пространственную структуру оболочки (пластинки) по толщине, стержня – по сечению и не даёт конструктивных приёмов восстановления объёмных полей перемещений, деформаций и напряжений в указанных тонких телах.

Указанные неопределённости раскрывает другой аппроксимационный способ построения моделей уменьшённой размерности для деформируемых тонких тел, за исходную принимая трёхмерную формулировку задачи. Уменьшение размерности достигается той или иной аппроксимацией объёмного поля перемещений по направлениям малых размеров тел. В этом направлении можем указать два основных метода: асимптотический метод и метод гипотез. Понятно, что с точки зрения инженерных приложений предпочтителен метод гипотез. С математической точки зрения целесообразно принятие таких гипотез, которые адекватно описывают основные свойства асимптотического решения трёхмерной задачи в тонких областях.

В работах [13-18] на основе асимптотических свойств решений трёхмерной микрополярной теории упругости со свободным вращением в тонких областях [19] сформулированы достаточно общие гипотезы и построены прикладные теории микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. В работах [20,21] развивается метод конечных элементов решения краевых задач статики и динамики микрополярных упругих тонких стержней и пластин со свободным вращением.

Наряду с трёхмерной теорией микрополярной упругости со свободным вращением, начиная с шестидесятых годов прошлого века, развивалась также теория микрополярной упругости со стеснённым вращением [22-25].

В работах [26-29] на основе кинематических гипотез Бернулли, Кирхофа или Кирхофа Лява, построены прикладные модели изгибной деформации микрополярных упругих тонких стержней, пластин и пологих оболочек со стеснённым вращением.

В работе [30], используя аналогичные гипотезы, построена прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек со стеснённым вращением.

В данной работе на основе гипотез работ [13-17] построена прикладная теория микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением, при которой учитываются деформации поперечных сдвигов. Получено уравнение баланса энергии и построен общий вариационный функционал. Далее развивается метод конечных элементов для решения краевых задач прикладной теории статики и свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением. Рассматриваются конкретные задачи изгиба и собственных колебаний микрополярных тонких пластин, которые решаются методом конечных элементов. Приводятся конкретные численные результаты, на основе анализа которых устанав-

ливаются эффективные свойства микрополярных материалов по сравнению с их классическими аналогами.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим микрополярную изотропную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, как тонкое трёхмерное тело. Оси $x_1$ и $x_2$ декартовой системы координат отнесём к срединной плоскости пластинки, ось $x_3$ будет перпендикулярна к этой плоскости.

Будем исходить из основных уравнений трёхмерной микрополярной (моментной, несимметричной) статической теории упругости со стеснённым вращением:

уравнения равновесия (движения):

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=0\left(\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}\right),\quad \frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x_3}+\sigma_{23}-\sigma_{32}=0\left(J\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}=0\left(\rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}\right),\quad \frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}+\sigma_{31}-\sigma_{13}=0\left(J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2}\right),\qquad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=0\left(\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}\right),\quad \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial x_3}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0\left(J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2}\right);$$

физические соотношения упругости:

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{11}-\nu\left(\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)\right),\ \varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}=\frac{\sigma_{13}+\sigma_{31}}{2\mu},$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{22}-\nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{33}\right)\right),\ \varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}=\frac{\sigma_{23}+\sigma_{32}}{2\mu},\qquad (2)$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{33}-\nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)\right),\ \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\frac{\sigma_{12}+\sigma_{21}}{2\mu},$$

$$\chi_{11}=\frac{\mu_{11}}{2\gamma},\qquad \chi_{22}=\frac{\mu_{22}}{2\gamma},\qquad \chi_{33}=\frac{\mu_{33}}{2\gamma},$$

$$\chi_{21}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{21}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{12},\quad \chi_{12}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{12}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{21},$$

$$\chi_{31}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{31}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{13},\quad \chi_{13}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{13}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{31},\qquad (3)$$

$$\chi_{32}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{32}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{23},\quad \chi_{23}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{23}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{32};$$

геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\qquad \varepsilon_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial x_2},\qquad \varepsilon_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3},$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1}{\partial x_2},\quad \varepsilon_{13}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3}+\frac{\partial V_3}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{23}=\frac{\partial V_3}{\partial x_2}+\frac{\partial V_2}{\partial x_3},\qquad (4)$$

$$\chi_{11}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1},\quad \chi_{22}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2},\quad \chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3},\quad \chi_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1},\quad \chi_{21}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2},$$
$$\chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1},\quad \chi_{31}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3},\quad \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2},\quad \chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3},\quad \vec{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{V}, \tag{5}$$

$$\omega_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2}-\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right),\ \omega_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3}-\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right),\quad \omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right). \tag{6}$$

Здесь $(V_1,V_2,V_3)$ – компоненты вектора перемещения; $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ –компоненты вектора вращения; $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23}$ – компоненты тензора деформации; $\chi_{11},\chi_{22},\chi_{33},\chi_{12},\ \chi_{21},\chi_{13},\chi_{23},\chi_{31},\chi_{32}$ – компоненты тензора изгиба- кручений; $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{21},\sigma_{13},\ \sigma_{31},\sigma_{23},\ \sigma_{32}$ – компоненты тензора силовых напряжений; $\mu_{11},\mu_{22},\mu_{33},\mu_{12},\mu_{21},\mu_{13},\mu_{31},\mu_{23},\mu_{32}$ – компоненты тензора моментных напряжений; $E,\nu,\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)},\gamma,\varepsilon$ – упругие коэффициенты изотропного микрополярного материала; $\rho$ – плотность материала; $J$ – мера инерции материала при вращении.

На лицевых плоскостях $(x_3=\pm h)$ будем считать, что заданы значения напряжений $\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33},\mu_{31},\mu_{32},$ а на боковой поверхности, в общем случае, могут быть заданы: либо напряжения (силовые и моментные), либо перемещения и повороты, либо смешанные условия.

В случае динамической задачи будем считать заданными начальные условия для величин: $V_1,V_2,V_3,\dfrac{\partial V_1}{\partial t},\dfrac{\partial V_2}{\partial t},\dfrac{\partial V_3}{\partial t}$ при $t=0$.

Известным образом из уравнений (1)-(5) можем перейти к уравнению баланса энергии трёхмерной микрополярной теории упругости со стеснённым вращением:

$$W=A, \tag{7}$$

где $W$ – потенциальная энергия деформации:

$$W=\iint\limits_{(S)}\int\limits_{-h}^{h}W_0\,dx_1dx_2dx_3, \tag{8}$$

$A$ – работа внешних силовых и моментных напряжений; $W_0$ – плотность потенциальной энергии деформации

$$W_0=\frac{1}{2}\Bigg[\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2\right)+\frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\right)+$$
$$+\mu\left(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{13}^2+\varepsilon_{23}^2\right)+2\gamma\left(\chi_{11}^2+\chi_{22}^2+\chi_{33}^2\right)+(\gamma+\varepsilon)\chi_{21}^2+(\gamma+\varepsilon)\chi_{12}^2+2(\gamma-\varepsilon)\chi_{12}\chi_{21}+ \tag{9}$$
$$+(\gamma+\varepsilon)\chi_{31}^2+(\gamma+\varepsilon)\chi_{13}^2+2(\gamma-\varepsilon)\chi_{31}\chi_{13}+(\gamma+\varepsilon)\chi_{32}^2+(\gamma+\varepsilon)\chi_{23}^2+2(\gamma-\varepsilon)\chi_{32}\chi_{23}\Bigg].$$

Наша цель, считая, что пластинка тонкая, построить прикладную теорию изгиба микрополярной пластинки и разрабатывать метод конечных элементов для решения граничных задач именно этой прикладной теории. Отметим, что в задаче изгиба пластинки: $V_3, \omega_1, \omega_2$ – чётные по $x_3$-функции, а $V_1, V_2, \omega_3$ – нечётные по $x_3$-функции.

Отметим, что задачи плоского напряжённого состояния тонкой микрополярной пластинки рассмотрены в работах [22-25].

**2. Основные гипотезы. Перемещения и повороты, деформации, изгиб-кручения, силовые и моментные напряжения**.

Примем следующие достаточно общие гипотезы [14]:

1) Кинематическая гипотеза Тимошенко: в процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной плоскости волокна свободно поворачиваются в пространстве как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной плоскости.

Принятую гипотезу математически можем записать так: тангенциальные перемещения распределены по толщине пластинки по линейному закону, а нормальное перемещение не зависит от поперечной координаты $x_3$, т.е.

$$V_i = x_3 \psi_i \left(x_1, x_2, t\right), \quad i = 1, 2; \qquad V_3 = w\left(x_1, x_2, t\right). \tag{10}$$

В этом случае для углов вращения точек тела получим:

$$\begin{gathered} \omega_1 = \Omega_1\left(x_1, x_2, t\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2\right), \quad \omega_2 = \Omega_2\left(x_1, x_2, t\right) = \frac{1}{2}\left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1}\right), \\ \omega_3 = x_3 \iota\left(x_1, x_2, t\right), \qquad \iota = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right). \end{gathered} \tag{11}$$

2) Предположение о тонкостенности пластинки (т.е. примем следующее приближённое равенство: $1 + \frac{2h}{a} \approx 1$, где $2h$ – толщина пластинки, $a$ – линейный наименьший размер пластинки в плане);

3) Силовое напряжение $\sigma_{33}$ в обобщённом законе Гука для $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ можно пренебречь относительно силовых напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}$;

4) В выражении для $\chi_{i3}$ (из (3)) будем пренебрегать моментным напряжением $\mu_{3i}$, относительно $\mu_{i3}(i = 1,2)$.

5) Для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений $\sigma_{3i}$ $(i = 1,2)$ сначала примем:

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}\left(x_1, x_2, t\right) \quad (i = 1,2). \tag{12}$$

После определения указанных величин, значение $\sigma_{3i}$ $(i = 1,2)$ окончательно определим, соответственно, как сумму значения (12) и результата интегрирования первого и второго из (1) уравнений равновесия (движения), для каждого из этих

интегралов потребовав условие, чтобы усреднённое по толщине пластинки величина была равна нулю.

Изучение задачи изгиба микрополярной упругой пластинки на основе принятых выше гипотез начнём с определения компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений.

Имея формулы для перемещений (10) и поворотов (11), используя выражения (4) и (5) для компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений, будем иметь:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11}=x_3K_{11},\ \varepsilon_{22}=x_3K_{22},\ \varepsilon_{12}=x_3K_{12},\ \varepsilon_{13}=\Gamma_{13},\ \ \varepsilon_{23}=\Gamma_{23},\ \varepsilon_{33}=0,\ \chi_{11}=k_{11},\\ \chi_{22}=k_{22},\ \chi_{33}=k_{33},\ \chi_{12}=k_{12},\ \chi_{21}=k_{21},\ \chi_{13}=x_3l_{13},\ \chi_{23}=x_3l_{23},\ \chi_{31}=0,\ \chi_{32}=0,\end{gathered} \tag{13}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{gathered}K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\ K_{22}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\ K_{12}=K_{21}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2},\ \Gamma_{13}=\psi_1+\frac{\partial w}{\partial x_1},\ \Gamma_{23}=\psi_2+\frac{\partial w}{\partial x_2},\\ k_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1},\ k_{22}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2},\ k_{33}=\iota,\ k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1},\ \ k_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2},\ l_{13}=\frac{\partial\iota}{\partial x_1},\ \ l_{23}=\frac{\partial\iota}{\partial x_2}.\end{gathered} \tag{14}$$

Теперь перейдём к изучению силовых и моментных напряжений в пластинке.
Используя гипотезы 3), 4) и 5), на основе выражений обобщённого закона Гука (2), (3) и уравнений равновесия, для силовых и моментных напряжений получим:

$$\sigma_{11}=x_3\frac{E}{1-\nu^2}\left(K_{11}+\nu K_{22}\right),\ \sigma_{22}=x_3\frac{E}{1-\nu^2}\left(K_{22}+\nu K_{11}\right), \tag{15}$$

$$\sigma_{12}+\sigma_{21}=2\mu x_3K_{12},\ \sigma_{13}+\overset{0}{\sigma}_{31}=2\mu\Gamma_{13},\ \sigma_{23}+\overset{0}{\sigma}_{32}=2\mu\Gamma_{23}, \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\mu_{11}=2\gamma k_{11},\quad \mu_{22}=2\gamma k_{22},\mu_{33}=2\gamma k_{33},\quad \mu_{21}=\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{21}+\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{12},\\ \mu_{12}=\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{12}+\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{21},\quad \mu_{13}=x_3\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13},\ \ \mu_{23}=x_3\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23},\end{gathered} \tag{17}$$

$$\sigma_{33}=-x_3\left[\left(\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}\right)-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right], \tag{18}$$

$$\sigma_{31}=\overset{0}{\sigma}_{31}+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{x_3^2}{2}\right)\left(\frac{\partial\overset{1}{\sigma}_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\overset{1}{\sigma}_{21}}{\partial x_2}-\rho\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)\quad\left(1\leftrightarrow 2\right), \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\mu_{31}=-x_3\left(\frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}\right)+x_3\left(\overset{0}{\sigma}_{32}-\sigma_{23}\right)+J\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2},\\ \mu_{32}=-x_3\left(\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}\right)+x_3\left(\sigma_{13}-\overset{0}{\sigma}_{31}\right)+J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2},\end{gathered} \tag{20}$$

Легко убедиться, что используя выражения для напряжений $\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33},\mu_{31},\mu_{32}$, можем удовлетворить граничным условиям на плоскостях $x_3=\pm h$ (при изгибе):

$$\sigma_{33}\big|_{x_3=\pm h}=\pm\frac{1}{2}q_3,\sigma_{31}\big|_{x_3=\pm h}=\frac{1}{2}q_1\quad(1\to 2),\qquad \mu_{31}\big|_{x_3=\pm h}=\pm\frac{1}{2}m_1\quad(1\to 2).\tag{21}$$

**3. Прикладная теория изгибной деформации микрополярных пластин со стеснённым вращением.**

Для построения прикладной теории микрополярной пластинки вводим интегральные по её толщине усреднённые характеристики: усилия, моменты и гипермоменты:

$$N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dx_3,\quad N_{3i}=\int_{-h}^{h}\sigma_{3i}dx_3,\quad M_{ii}=\int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ii}dx_3,\quad H_{ij}=\int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ij}dx_3,$$

$$L_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}dx_3,\qquad L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}dx_3,\qquad \Lambda_{i3}=\int_{-h}^{h}x_3\mu_{i3}dx_3,\quad i=1,2.\tag{22}$$

На основе формул для напряжений $(\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33},\mu_{31},\mu_{32})$, удовлетворяя граничным условиям (21), приходим к уравнениям равновесия (движения) прикладной теории микрополярной упругости со стеснённым вращением для тонкой пластинки:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=\left(2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)-q_3,\\
\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial H_{21}}{\partial x_2}-N_{31}=\left(\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)-q_1h,\\
\frac{\partial H_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-N_{32}=\left(\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\right)-q_2h,\\
\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}+N_{23}-N_{32}=\left(2Jh\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2}\right)-m_1,\\
\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+N_{31}-N_{13}=\left(2Jh\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}\right)-m_2,\\
\left(\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}\right)-H_{21}+H_{12}=0\ \left(2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}\right).
\end{gathered}\tag{23}$$

Соотношения упругости прикладной моментной теории изгиба тонких пластин со стеснённым вращением получим на основе выражений закона Гука в виде (15)-(17):

$$\begin{gathered}
M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11}+\nu K_{22}),\ \ M_{22}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{22}+\nu K_{11}),\\
H_{12}+H_{21}=\frac{4\mu h^3}{3}K_{12},\ \ N_{13}+N_{31}=4h\mu\Gamma_{13},\qquad N_{23}+N_{32}=4h\mu\Gamma_{23},\\
L_{11}=4h\gamma k_{11},\ L_{22}=4h\gamma k_{22},\\
L_{12}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}],\ \ L_{21}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}],
\end{gathered}\tag{24}$$

$$\Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}\right],\quad \Lambda_{23}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}\right].$$

К уравнениям (23) и (24) следует присоединить геометрические соотношения (14).

Уравнения равновесия (движения) (23), соотношения упругости (24) и геометрические соотношения (14) определяют модель микрополярной упругой тонкой пластинки со стеснённым вращением. К этой основной системе уравнений следует присоединить граничные условия (и начальные условия в случае динамики). Какие граничные условия можем ставить на контуре срединной плоскости пластинки? Это будет видно ниже, когда получим формулу для вычисления работ усилий и моментов на указанном контуре.

Если в соответствующем уравнении трёхмерной теории (7) примем во внимание формулы для перемещений (10), поворотов (11), деформаций и изгиб-кручений (13), можем получить уравнение баланса энергии прикладной теории микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением:

$$\widetilde{W}=\widetilde{A}, \tag{25}$$

где $\widetilde{W}$ – потенциальная энергия деформации, $\widetilde{A}$ – работа внешних усилий и моментов.

Потенциальная энергия деформации определяется соотношением:

$$\widetilde{W}=\iint\limits_{(S)}\widetilde{W}_0 ds, \tag{26}$$

где $(S)$ – область занимаемой срединной плоскостью пластинки, $\widetilde{W}_0$ – плотность потенциальной энергии деформации микрополярной пластинки при изгибе, выражающемся следующей формулой:

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_0=\frac{1}{2}\Bigg[&\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{11}^2+K_{22}^2+2\nu K_{11}K_{22}\right)+\frac{2\mu h^3}{3}K_{12}^2+2\mu h(\Gamma_{13}^2+\Gamma_{23}^2)+\\&+4\gamma h(k_{11}^2+k_{22}^2+k_{33}^2)+2h\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{21}^2+2h\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{12}^2+\\&+4h\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{12}k_{21}+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}^2+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}^2\Bigg],\end{aligned} \tag{27}$$

а работа внешних распределённых усилий и моментов определяется по формуле:

$$\begin{aligned}\widetilde{A}=&\iint\limits_{(S)}\left[\left(hp_1\psi_1+hp_2\psi_2+p_3w\right)+\left(m_1\Omega_1+m_2\Omega_2+\iota hm_3\right)\right]ds+\\&+\int\limits_{l_1}\left[\left(M_{11}\psi_1+M_{12}\psi_2+N_{13}w\right)+\left(L_{11}\Omega_1+L_{12}\Omega_2+\Lambda_{13}\iota\right)\right]dl+\\&+\int\limits_{l_2}\left[\left(M_{21}\psi_1+M_{22}\psi_2+N_{23}w\right)+\left(L_{21}\Omega_1+L_{22}\Omega_2+\Lambda_{23}\iota\right)\right]dl.\end{aligned} \tag{28}$$

Вариационный принцип Лагранжа для прикладной теории микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением можем записать так:

$$\delta\widetilde{\Pi} = 0, \text{ где } \widetilde{\Pi} = \widetilde{W} - \widetilde{A}. \tag{29}$$

**4. Матрица жёсткости конечного элемента микрополярной упругой пластинки со стеснённым вращением.**

Получение уравнений метода конечных элементов в перемещениях и поворотах основано на вариационном принципе Лагранжа (29).

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент. Основными кинематическими параметрами в задаче об изгибе микрополярной пластинки со стеснённым вращением являются перемещение точки срединной плоскости $w$; углы поворота нормального к срединной плоскости линейного элемента в плоскостях $x_1x_3$ и $x_2x_3$ – $\psi_1, \psi_2$. Будем аппроксимировать распределение принятых основных кинематических переменных по элементу прямоугольника срединной плоскости пластинки элемента полиномами. Для прогиба $w(x_1, x_2)$ необходимо положить:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \\ &+ \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_1^3 + \alpha_{10} x_2^3 + \alpha_{11} x_1^3 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2^3, \end{aligned} \tag{30}$$

а для $\psi_1, \psi_2$ имеем совершенно аналогичные выражения, что и для $w$, но с другими постоянными коэффициентами, обозначение которых начинается с $\alpha_{13}$ в $\psi_1$ и заканчивается $\alpha_{36}$ в выражении для $\psi_2$.

Вектор узловых кинематических параметров конечного четыреёхузлового элемента $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e}$ в общем виде представим так: $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e} = \{\boldsymbol{\delta}_i\}^\mathbf{T}$, где $\boldsymbol{\delta}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ – вектор неизвестных $i$-го узла; «Т» – символ операции транспонирования. При этом,

$$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i} = \left\{ \mathbf{w_i}, \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x_1}}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x_2}}\right)_\mathbf{i}, \boldsymbol{\psi}_\mathbf{1i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\mathbf{1}}{\partial \mathbf{x_1}}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\mathbf{1}}{\partial \mathbf{x_2}}\right)_\mathbf{i}, \boldsymbol{\psi}_\mathbf{2i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\mathbf{2}}{\partial \mathbf{x_1}}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\mathbf{2}}{\partial \mathbf{x_2}}\right)_\mathbf{i} \right\}^T.$$

Дальнейшие преобразования выполним в соответствии с алгоритмом вывода матрицы жёсткости конечных элементов (МКЭ).

Реализуя вариационный алгоритм теории МКЭ, придём к системе уравнений равновесия для конечного элемента пластины:

$$\mathbf{K_e}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e} = \mathbf{F_e}, \tag{31}$$

где $\mathbf{K_e}$ – матрица жёсткости конечного элемента микрополярной пластины размерностью 36×36; $\mathbf{F_e}$ – вектор эквивалентных узловых сил и моментов; $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e}$ – вектор узловых кинематических параметров конечного элемента.

Уравнения равновесия всей пластины в матричном представлении можем представить так:

$$\mathbf{K}_\Sigma \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{F}_\Sigma, \tag{32}$$

где $\mathbf{K}_\Sigma$ – глобальная матрица жёсткости микрополярной пластины; $\mathbf{F}_\Sigma$ – глобальный вектор эквивалентных узловых сил и моментов всей пластины; $\boldsymbol{\Delta}$ – глобальный вектор узловых неизвестных:

$$\boldsymbol{\Delta} = \{\boldsymbol{\delta}_\mathbf{1}, \boldsymbol{\delta}_\mathbf{2}, ..., \boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}, ..., \boldsymbol{\delta}_\mathbf{N}\}^\mathbf{T},$$

где $N$ – общее число узлов в системе.

Из решения глобальной системы уравнений равновесия, полученного с учётом

граничных условий, определим распределения узловых параметров по срединной плоскости пластинки.

**5. Модельный расчёт микрополярных упругих пластин со стеснённым вращением.**

В качестве примера рассмотрим микрополярную квадратную пластину, которая шарнирно опёрта по всем четырём сторонам и изгибается нормальной нагрузкой $p_3 = \text{const}$, (в этом случае $p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 \neq 0,\ m_1 = 0,\ m_2 = 0,\ m_3 = 0$). Для граничных условий шарнирного опирания имеем:

$$w = 0,\quad M_{11} = 0,\quad L_{12} = 0,\quad \Omega_1 = 0,\quad \psi_2 = 0,\quad \Lambda_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a$$

$$w = 0,\quad M_{22} = 0,\quad L_{21} = 0,\quad \Omega_2 = 0,\quad \psi_1 = 0,\quad \Lambda_{23} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0; a. \qquad (33)$$

После построения матрицы жёсткости $\mathbf{K}_\Sigma$ и вектора эквивалентных узловых сил и моментов $\mathbf{F}_\Sigma$, с учётом граничных условий (33) составим систему линейных алгебраических уравнений, соответствующих рассматриваемой задаче, при разных числах разбивания пластинки на конечные элементы.

Весьма важно знать, какая точность может быть достигнута в рассматриваемой задаче при уменьшении размеров элементов. Отметим, что ошибку в этой модельной задаче можем оценивать сравнением численного решения с известным точным решением (которое можно получить в виде тригонометрического ряда Фурье [14]).

Расчёты выполнены при следующих данных: $p_3 = 0.5 \cdot 10^{-3} \dfrac{кгс}{см^2}$, $a = b = 10см, h = 0.1см,\ E == 3060 \dfrac{кгс}{см^2}$, $\mu = 1093 \dfrac{кгс}{см^2}$, $\nu = 0.399$, $\gamma = 2.4кгс$, $\varepsilon = 2.4кгс$.

Таблица 1. Максимальные прогибы микрополярной и классической пластинки

| | Микрополярная пластинка | | | Классическая пластинка | | | $\dfrac{w_{\max}^{класс} - w_{\max}^{мик}}{w_{\max}^{класс}} \cdot 100\%$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Точное значение | 2×2 | 4×4 | Точное значение | 2×2 | 4×4 | |
| $w_{\max}$ см | 0.006 | 0.0051 | 0.0058 | 0.008 | 0.072 | 0.008 | 27,5 % |

Как видно из приведённых значений табл.1, учёт микрополярности материала пластинки в расчётах приводит к повышению жёсткости по сравнению с классическим случаем материала.

**5.Динамическая задача микрополярной упругой пластинки со стеснённым вращением.**

Общий вид функционала полной механической энергии (сумма потенциальной энергии деформации и кинетической энергии) микрополярно-упругой пластинки выражается так:

$$\tilde{U} = \iint\limits_{(S)} \left( \tilde{W}_0 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot w + \frac{\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \cdot \psi_1 + \frac{\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \cdot \psi_2 + \right.$$
$$\left. + Jh \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2} \cdot \Omega_1 + Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} \cdot \Omega_2 + \frac{Jh^3}{3} \frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2} \cdot \iota \right) dS. \qquad (34)$$

При свободных колебаниях основные кинематические функции задачи представим так:

$$w(x_1, x_2) = \left( \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \right.$$
$$\left. + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_1^3 + \alpha_{10} x_2^3 + \alpha_{11} x_1^3 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2^3 \right) \sin \omega t, \qquad (35)$$

где $\omega$ – частота собственных колебаний. Для $\psi_1, \psi_2$ имеем совершенно аналогичные выражения, что и для $w$, но с другими постоянными коэффициентами, начиная от $\alpha_{13}$ (для $\psi_1$) и заканчивая $\alpha_{36}$ (для $\psi_2$).

Подставляя (35) в (34), задача минимизации функционала (34) приводится к нахождению минимума функции тридцать шесть независимых переменных:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_{36}} = 0 \quad (\mathrm{k} = 1,2,3,...,36).$$

Вычислив соответствующие частные производные, приходим к следующему матричному уравнению:

$$\left( K - \omega^2 M \right) \cdot \{\delta\} = 0, \qquad (36)$$

где $K$ – матрица жёсткости конечного элемента, $M$ – матрица масс конечного элемента.

Таблица 2. Наименьшая частота свободного колебания $\omega$

| | | Микрополярная пластинка сек$^{-1}$ | | | Классическая пластинка сек$^{-1}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = b$ ($м$) | $h$ ($м$) | Точное значение | 2×2 | 4×4 | Точное значение | 2×2 | 4×4 |
| $2 \cdot 10^{-3}$ | $5 \cdot 10^{-5}$ | $0{,}84 \cdot 10^6$ | $0{,}74 \cdot 10^6$ | $0{,}79 \cdot 10^6$ | $0{,}74 \cdot 10^6$ | $0{,}65 \cdot 10^6$ | $0{,}69 \cdot 10^6$ |
| $10^{-7}$ | $0{,}5 \cdot 10^{-9}$ | $1{,}34 \cdot 10^{11}$ | $0{,}94 \cdot 10^{11}$ | $0{,}98 \cdot 10^{11}$ | $2{,}99 \cdot 10^9$ | $2{,}73 \cdot 10^9$ | $2{,}99 \cdot 10^9$ |
| $10^{-8}$ | $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ | $1{,}34 \cdot 10^{12}$ | $0{,}94 \cdot 10^{12}$ | $0{,}98 \cdot 10^{12}$ | $2{,}99 \cdot 10^{10}$ | $2{,}73 \cdot 10^{10}$ | $2{,}99 \cdot 10^{10}$ |

Для определения частот свободных колебаний делается обращение матрицы жёсткости $K$ и составляется вековое уравнение:

$$\left| K^{-1} M - \frac{1}{\omega^2} E \right| = 0.$$

Приводим результаты численных вычислений, данные задачи таковы:

$E = 2 \cdot 10^{11} \frac{H}{м^2}$, $\mu = 7 \cdot 10^{10} \frac{H}{м^2}$, $\nu = 0.3$, $\gamma = 24H$, $\varepsilon = 24H$ ; плотность и мера инерции при вращении материала: $\rho = 7700 \frac{кг}{м^3}$, $J = 5.3 \cdot 10^{-6} \frac{кг}{м}$.

Как видно из приведённых таблиц, учёт микрополярности материала пластинки приводит к повышению расчётной собственной частоты, а в области наноразмеров, эти частоты находятся в терагерцовом диапазоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. et F. Theorie des deformables. Paris: Herman et Fils. 1909. 226 p.
2. Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells //Arch.Ration. Mech. Anal. 1957. Vol.1. №1. P.295-323.
3. Green A.E., Naghdi P.M., Wainwright W.L. A general theory of Cosserat surface//Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. Vol.20. №4. P. 287-308.
4. Rubin M.B. Cosserat theories: shells, rods and points. Dordrech: Kluwer Acad. Publ. 2000. 480 p.
5. Альтенбах Х., Жилин П.А. Общая теория упругих простых оболочек//Успехи механики. 1988. Том 11. № 4. С.107-148. Altenbach Kh., Zhilin P.A. General theory of elastic simple shells// Successes of mechanics. 1988. Volume 11. № 4. P.107-148.
6. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. СПБ.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. 167 с. Zhilin P.A. Applied mechanics. Basics of the theory of shells. Publishing of Polytechnic University. 2006. 167 pp.
7. Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A. On vectorially parametrized natural strain measures of the non-linear Cosserat continuum//International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol.46. P.2477-2480.
8. Шкутин Л.И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Изд-во «Наука». 1988. 128 с. Shkutin L.I. Mechanics of deformations of flexible bodies. Novosibirsk: Publishing «Nauka». 1988. 128 pp.
9. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. 2009. «On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography». // Arch. Mech (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
10. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates// Z Angew. Math. Mech. (ZAMM). 2009. V.89. № 4. P. 242-256.
11. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Механика упругих оболочек. М.: Изд-во «Наука». 2008. 287 с. Eremeev V.A., Zubov L.M. Mechanics of Elastic Shells. M.: Publishing «Nauka». 2008. 287 pp.
12. Пальмов В.А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек// В. сб.: «Прочность и вязко-упруго-пластичность». Механика деформируемого тела. М.: Изд-во «Наука». 1986. С.106-112. Palmov V.A. The simplest consistent system of equations in the theory of thin elastic shells. in Proceedings: Strength and Viscosity-Elastic-Plasticity. Mechanics of a deformable body. M.: Publishing «Nauka». 1986. P. 106-112.

13. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars // Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. № 1. P.98-108.
14. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С. 148-155. Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar elastic thin plates and their strength and stiffness characteristics //Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012.Vol.53. №2. P.275-282.
15. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells// Journal of Physical Mezomechanics. 2012. Vol.15. № 1-2. P. 69-79.
16. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Докл. Академии Наук России. 2011. Т.436. №2. С.195-198. Sargsyan S.H. The General Dynamic Theory of Micropolar Elastic Thin Shells// Doklady Physics, 2011. Vol.56. № 1. P.39-42.
17. Sargsyan S.H. Energy balance equation, energetic theorems and Variation equation for the general theory of micropolar elastic isotropic thin shells// International Journal of Mechanics. 2014. Vol.8. P.93-100.
18. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells// Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. 2011.Vol. 15. P.91-100.
19. Sargsyan S.H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells// Advances in Pure Mathematics. August - 2015. Vol.5. №10. P.629-642.
20. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Метод конечных элементов в расчетах на изгиб микрополярных упругих тонких пластин// Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т.9. №3. С.375-383. Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H. The finite element method for calculation of bending of micropolar elastic thin plates //Computational continuum mechanics. 2016. V.9. № 3. P.375-383.
21. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Матрица жесткости конечного элемента микрополярной упругой тонкой пластинки// Известия НАН Армении. Механика 2017. Т.70. №1. С.22-39. Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H. Stiffness matrix of the finite element of micropolar elastic thin plate//Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V.70. №1. P. 22-39.
22. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. №3. С.89-112. Koiter V.T. Moment stresses in the theory of elasticity// Mechanics. Period. sat. trans. inostr. articles. 1965. № 3. P.89-112.
23. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений// Механика. Период. сб. Перев. Иностр. Статей. 1964. №4. С. 115-128. Mindlin R.D. Influence of moment stresses on stress concentration // Mechanics. Period. Sat. trans. foreign articles. 1964. №4. P. 115-128.
24. Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости// Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. №4. С.80-114. Mindlin R. D., Tirsten G.F. Effects of moment stresses in the linear theory of elasticity// Mechanics. Period. Sat. Trans. foreign articles. 1964. № 4. P.80-114.

25. Савин Г.Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киевск. ун-та. 1965. 162с. Savin G.N. Basics of the plane moment theory of elasticity. Kiev: Publishing of Kiev. University. 1965. 162c.
26. Хоффмек О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений // Прикладаная механика. Тр. Америк. об-ва инж.-механиков. Серия Е. 1964. Т.31. №4. С.149-150. Hoffmek O. About bending of thin elastic plates in the presence of moment stresses// Applied mechanics. Tr. Americas. Society of engineer-mechanics. Series E. 1964. V.31. № 4. P.149-150.
27. Винокуров Л.П., Деревянко Н.И. Построение основных уравнений для расчета стержней (без кручения) с учётом моментных напряжений // Прикладная механика. 1966. Т.2. № 3. С.72-79. Vinokurov L.P., Derevyanko N.I. Construction of basic equations for the calculation of rods (without torsion) with considering the moment stresses // Applied Mechanics. 1966. T.2. № 3. P.72-79.
28. Геворкян Г.А. Об изгибе пластин с учетом моментных напряжений // Прикладная механика. 1966. Т.2. №10. С.36-43. Gevorkyan G.A. About bending of plates with considering the moment stresses// Applied Mechanics. 1966. T.2. №10. P.36-43.
29. Ганиев Н.С. К теории пологих оболочек с учетом моментных напряжений // В сб. «Исследования по теории пластин и оболочек». Казань: 1970. №6-7.С.200-207. Ganiev N.S. To the theory of shallow shells with considering the moment stresses //Studies on the theory of plates and shells. Kazan: 1970. № 6-7. P.200-207.
30. Саркисян С О. Общая теория тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости со стесненным вращением // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященной 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 года. С. 231-235. Sargsyan S.H. General theory of thin shells on the basis of asymmetric elasticity theory with constrained rotation// Elasticity and inelasticity. Proceedings of the International Scientific Symposium on the Problems of Mechanics of Deformable Bodies dedicated to the 100th anniversary of the birth of A.A. Ilyushin. Moscow. 20-21 January 2011. P. 231-235.

**Сведения об авторах:**

**Жамакочян Кнарик Араратовна –** аспирант Ширакского гос. университета им. М. Налбандяна.
**Тел:** (093)873294. **E-mail:** knarikzhamakochyan@mail.ru.

**Саркисян Самвел Оганесович** – чл.-корр. НАН РА, д.ф.-м.н, проф., зав.кафедрой Высшей математики Гюмрийского госпединститута им. М.Налбандяна
**Тел.:** (091)15 16 98; **E-mail:** slusin@yaoo.com

Поступила в редакцию 28.09.2017

**Содержание 2-го номера за 2018 г., том 71**

**Акопян В.Н., Амирджанян А.А.** Напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с системой периодических параллельных внутренних включений.....3

**Арабян М.О., Оганисян З.Б.** Определения краевых условий на краях прямоугольной пластинки по заданному спектру частот собственных колебаний при инерционном элементе на краях .....18

**Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А., Микилян М.А.** Возбуждение резонансных колебаний параметрического типа в трёхслойной магнитострикционной пластинке при помощи гармонического во времени магнитного поля.....28

**Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.** О дивергенции растянутой панели при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край .....37

**Григорян Ш.А., Оганян Г.Г.** Распределение скоростей в снарядном потоке периодической структуры в трубе кругового сечения.....59

**Жамакочян К.А., Саркисян С.О.** Прикладная модель упругих тонких пластин, изготовленных из микрополярного материала со стеснённым вращением и применение метода конечных элементов .....69

## CONTENTS

**Hakobyan V.N., AmirjanyanA.A.** The stress state of an uniformly piecewise homogeneous layered plane with a system of periodic parallel internal inclusions .....3

**Arabyan M.H., Hovhannisyan Z.B.** Restoration of boundary conditions at the edges of a rectangular plate for given frequencies of spectrum with an inertial element at the edges.....18

**Baghdasaryan G.Y., Danoyan E.H., Mikilyan M.A.** Generation of resonant vibrations of parametric type in three-layered magnetostrictive plate with the help of harmonic in time magnetic field .....28

**Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.** On divergence of the stretched panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge..... 37

**Grigoryan Sh.H., Oganyan G.G.** Velocity distribution of a plug flow of a periodic structure in a cylindrical tube .....59

**Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H.** Applied model of elastic thin plates made from micropolar material with constrained rotation and application of the finite element method.....69

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

**Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա.** Պարբերական զուգահեռ ներքին ներդրակների համակարգով կտոր առ կտոր հավասարաչափ շերտավոր հարթության լարվածադեֆորմացիոն վիճակը ..... 3

**Արաբյան Մ.Հ., Հովհաննիսյան Զ.Բ.** Սեփական լայնական տատանումների հաճախականությունների տրված արժեքներով ուղղանկյուն սալի եզրային պայմանների որոշումը իներցիոն էլեմենտի առկայությամբ .....18

**Բաղդասարյան Գ.Ե., Դանոյան Է.Հ., Միկիլյան Մ.Ա.** Մագնիսաստրիկցիոն եռաշերտ սալում պարամետրական տիպի ռեզոնանսային տատանումների գրգռումը ըստ ժամանակի հարմոնիկ մագնիսական դաշտի օգնությամբ ..... 28

**Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.** Գերձայնային գազի հոսքում ձգված սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին .....37

**Գրիգորյան Շ.Հ., Օհանյան Գ.Գ.** Պարբերական կառուցվածք ունեցող արկային հոսքում արագությունների բաշխումը գլանային խողովակում .....59

**Ժամակոչյան Ք.Ա., Սարգսյան Ս.Հ.** Կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար նյութից պատրաստված առաձգական բարակ սալերի կիրառական մոդելը և վերջավոր էլեմենտների մեթոդի կիրառությունը .....69

Сдано в производство 11.06.2018 г.
Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$ . Печ. лист – 5.25
Заказ № 866. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24