

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՐՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2018

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ



1-го октября 2017 года исполнилось 70 лет ведущему научному сотруднику Института механики НАН РА, доктору физ.-мат. наук **Агаяну Каро Леренцовичу**. После окончания ЕГУ в 1971г. он поступает в аспирантуру под научным руководством Н.Х.Арутюняна и продолжает свою научную деятельность в Институте механики. К.Л.Агаян долгие годы является членом Учёного совета Института механики, членом редколлегии журнала «Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении», был членом специализированных Советов по присуждению учёных степеней 047 и 030, в настоящее время – Совета 030. С 2013-ого года он по совместительству руководит кафедрой сопротивления материалов Национального университета архитектуры и строительства Армении. К.Л.Агаян является автором более 90 научных работ. Круг его научных интересов включает в себя контактные и смешанные задачи теории упругости, задачи дифракции и распространения электроупругих волн.



1-го марта сего года исполнилось 70 лет главному научному сотруднику Института механики НАН Армении, доктору физ.-мат. наук, профессору **Казаряну Карену Багратовичу**. Свою научную деятельность, связанную с Институтом механики, он начал в 1972 г. В разные годы К.Б.Казарян занимал различные научно-административные должности: был учёным секретарём, председателем профсоюзной организации Института механики, был членом редколлегии журнала «Механика НАН Армении», членом Учёного совета Института механики. В настоящее время является членом специализированного Совета 047 по присуждению учёных степеней. Карен Багратович Казарян является автором более 120-ти научных работ. Круг его научных интересов включает в себя проблемы механики тонких тел, вопросы устойчивости упругих систем, задачи распространения электроупругих волн в средах с усложнёнными свойствами. В 2010-2018г. руководил четырьмя научными темами Госкома по науке РА. Трижды входил в число победителей конкурса Госкома по науке РА «Высокоэффективный научный сотрудник». К.Б.Казарян ведёт также научно-педагогическую работу с молодыми учёными, под его руководством семь молодых специалистов защитили кандидатские диссертации.

Редколлегия журнала «Известия НАН РА. Механика» сердечно поздравляет юбиляров со знаменательной датой и желает им крепкого здоровья, плодотворной научной деятельности и дальнейших творческих успехов во благо развития науки в Армении.

LOCALIZED BENDING VIBRATIONS OF A RECTANGULAR TWO-LAYER PLATE IN THE PRESENCE OF SLIP BETWEEN LAYERS

Belubekyan M.V., Grishko A.M.

Keywords: two-layered plates, slip, Navier conditions, localized vibrations, free edge.

The problems of vibrations of a plate of two layers are investigated, in the case when the tangential stresses between the layers are zero. Based on the known equations obtained on the basis of Kirchhoff's conjecture, the boundary conditions of the free edge of a rectangular plate are defined. Determined the frequencies of bending vibrations localized in the vicinity of the free edge of the plate.

Բելուբեկյան Մ.Վ., Գրիշկո Ա.Մ.

Երկշերտ ուղղանկյուն սալի կենտրոնացված ծոման տատանումները շերտերի միջև սահքի սակայության դեպքում

Բանալի բառեր. երկշերտ սալ, Նավյեի պայման, կենտրոնացված տատանումներ, ազատ եզր:

Դիտարկվում է երկշերտ սալի տատանումների խնդիրը, երբ շերտերի միջև շոշափող լարումները հավասար են զրոյի: Կիրիսգոֆի հիպոթեզի հիման վրա ստացված հայտնի հավասարումներից որոշվում են ուղղանկյուն սալի եզրի եզրային պայմանները: Որոշված են սալի ազատ եզրի շրջակայքում տեղակայված ծոման տատանումների հաճախականությունները:

Белубекян М.В., Гришко А.М.

Локализованные изгибные колебания прямоугольной двухслойной пластины при наличии скольжения между слоями

Ключевые слова: двухслойная пластина, скольжение, условия Навье, локализованные колебания, свободный край.

Исследуются задачи колебаний пластины из двух слоёв в случае, когда между слоями касательные напряжения равны нулю. На основе известных уравнений, полученных на основе гипотезы Кирхгофа, устанавливаются граничные условия свободного края прямоугольной пластины. Определены частоты изгибных колебаний, локализованных в окрестности свободного края пластины.

Introduction. After the fundamental article by Konenkov, about possibility of appearance of localized in the vicinity of the free edge of a plate of bending vibrations, a lot of works on this subject have been published. A review of these works is given in the monograph [2], in a review article [3], in articles [4, 5].

In this paper we discuss the problems of vibrations of two layered plate in case of the tangential stresses between the layers are zero.

1. Statement of the problem. A thin rectangular plate in a rectangular Cartesian coordinate system occupies the region: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h_2 \leq z \leq h_1$. The spatial equations of the theory of elasticity are reduced to the following two-dimensional equations of oscillations of a two-layer plate in the presence of slip between layers based on the assumptions of the Kirchhoff hypothesis in [6, 7]:

$$\Delta u_1 + \theta_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \frac{h_1}{1 - \nu_1} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) = \frac{1}{C_{11}^2} \left(u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}
\Delta v_1 + \theta_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \frac{h_1}{1 - \nu_1} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) &= \frac{1}{C_{11}^2} \left(\nu_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
\Delta u_2 + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{h_2}{1 - \nu_2} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) &= \frac{1}{C_{12}^2} \left(u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\Delta v_2 + \theta_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{h_2}{1 - \nu_2} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) &= \frac{1}{C_{12}^2} \left(\nu_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
D \Delta^2 w - \Delta \left[K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - K_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

In the derivation of equations (1.1), the plane of contact of the layers of the plate is chosen as the plane $z=0$. Index (1) refers to a plate with a thickness h_1 ($0 < z \leq h_1$), index (2) refers to a plate with a thickness h_2 ($-h_2 \leq z < 0$), u_1, v_1 – planar displacements of a plate with an index (1), u_2, v_2 – plate with an index (2), bending functions $w(x, y, t)$ – in accordance with the hypothesis of Kirchhoff. Constants ν_1, ν_2 are Poisson's ratio of materials of the corresponding layers, Δ – two-dimensional Laplace operator. In (1.1) also used the following notations:

$$\begin{aligned}
C_{ik}^2 &= \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)\rho_k}, \quad \theta_k = \frac{1 + \nu_k}{1 - \nu_k}, \quad k = 1, 2 \\
K_k &= \frac{E_k h_k^2}{2(1 - \nu_k^2)}, \quad D = (2/3) * (h_1 K_1 + h_2 K_2), \quad m = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2
\end{aligned} \tag{1.2}$$

In (1.2) E_k – Young's modules, ρ_k – density of materials of the corresponding layers of the plate.

Some variants of the boundary conditions for the edge of a rectangular plate are also given in [6]. Most clearly these conditions are obtained for the boundary conditions Navier. Suppose that at the edge of a two-layer plate $x = \text{const}$, it is necessary to satisfy the conditions for the normal stress to be zero and the two tangential displacements (with respect to y and z). As a result of the averaging, we obtain:

$$T_1^{(k)} = 0, \quad \nu_k = 0, \quad w = 0, \quad M_1^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2 \tag{1.3}$$

In (1.3) $T_1^{(k)}, M_1^{(k)}$ – Tensile (compressive) forces and bending moments for the corresponding layers of the plate, which are determined by formulas:

$$T_1^{(k)} = C_k \left[\frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu_k \frac{\partial v_k}{\partial y} \mp \frac{h_k}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$M_1^{(k)} = K_k \left[\frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu_k \frac{\partial v_k}{\partial y} \mp \frac{2h_k}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (1.4)$$

Where the minus refers to the layer with the index (1), and the plus to the layer with the index (2) and:

$$C_k = \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \quad (1.5)$$

Equating (1.4) to zero and using $v_k = 0$, $w = 0$, we obtain:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} \mp \frac{h_k}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x} \mp \frac{2h_k}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.6)$$

From system (1.6) follows $\frac{\partial u_k}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ and finally the Navier conditions are reduced to the conditions of hinge plates:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = 0, \quad v_k = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (1.7)$$

Complexities arise, as in the Kirchhoff theory, when boundary conditions are established for the free edge of a plate. The conditions for the stress components of the spatial problem to be zero, after averaging according to Kirchhoff's conjecture, result in the vanishing of the corresponding forces and moments (at $x = \text{const}$)

$$T_1^{(k)} = 0, \quad S^{(k)} = 0, \quad M_1^{(k)} = 0, \quad H^{(k)} = 0, \quad N_1^{(k)} = 0 \quad k = 1, 2 \quad (1.8)$$

New efforts ($S^{(k)}$ – shear forces, $N_1^{(k)}$ – transverse shear forces, $H^{(k)}$ – torque) are determined by the formulas:

$$\begin{aligned} S^{(k)} &= \frac{1 - \nu_k}{2} C_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \mp h_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ H_1^{(k)} &= \frac{1 - \nu_k}{2} K_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \mp \frac{4h_k}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ N_1^{(k)} &= \frac{1 - \nu_k}{2} K_k \left(\Delta u_k + \theta_k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \right) \mp \frac{2h_k}{3} K_k \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \end{aligned} \quad (1.9)$$

From the conditions $T_1^{(k)} = 0$, $M_1^{(k)} = 0$, according to (1.4), it follows that

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu_k \frac{\partial v_k}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.10)$$

In (1.10), one condition for w is superfluous, it is natural to take the mean instead of the two conditions for w from (1.10):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.11)$$

What will correspond to the principle of averaging the boundary conditions.

According to Kirchhoff's theory, it is required to combine the conditions of the equality of zero the torque and the transverse shearing force by the general transverse shearing force. In accordance with this, the last two conditions in (1.8) are replaced by the condition:

$$\tilde{N}_1^{(k)} \equiv N_1^{(k)} + \frac{\partial H^{(k)}}{\partial y} = 0, k = 1, 2 \quad (1.12)$$

Using condition $S^{(k)} = 0$:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} = \pm h_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.13)$$

The condition that the generalized transverse shearing force is zero ($\tilde{N}_1^{(k)}$) becomes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu_k) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0, k = 1, 2 \quad (1.14)$$

As in the case when the bending moment is zero, an extra condition appears, which, similarly to (1.11), must be replaced by the averaged condition:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(2 - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (1.15)$$

Finally, the conditions for the free edge of a two-layer plate with slip at $x = \text{const}$ will be:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu_k \frac{\partial v_k}{\partial y} = 0, \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \pm h_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad k = 1, 2 \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(2 - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0$$

2. General solution of the problem. The system of equations (1.1) can be simplified using the Lamé transformation [7]

$$u_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \nu_k \frac{\partial \psi_k}{\partial y}, \quad v_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} - \nu_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x}, \quad k = 1, 2 \quad (2.1)$$

Transformations analogous to transformations of the plane problem of the theory of elasticity lead to equations

$$\Delta \psi_k - \frac{1}{C_{lk}^2} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} = 0, \quad C_{lk}^2 = \frac{E_k}{(1 - \nu_k^2) \rho_k} \quad (2.2)$$

$$\Delta \varphi_k - \frac{1}{C_{lk}^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} = \pm \frac{h_k}{2} \left(\Delta w - \frac{1}{C_{lk}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (2.3)$$

$$\Delta^2 (Dw - K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_2) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.4)$$

Equations (2.2) with respect to planar shear waves in the first and second layers turn out to be autonomous. Equations for longitudinal waves (2.3) and for transverse oscillations turn out to be connected.

We present the formulation of the Kononkov problem [1] for a two-layer plate, in the presence of slip between layers. A semi-infinite plate is considered – strip $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h_2 \leq z \leq h_1$. The plate consists of two layers $0 < z \leq h_1$ and $-h_2 \leq z < 0$, the tangential stresses between them are equal to zero. It is required to find solutions of the system of equations (2.2-2.4) satisfying the Navier boundary conditions (hinge fixing) at edges $y = 0; b$, boundary conditions of the free edge $x = 0$ and attenuation conditions:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_k = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_k = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} w = 0 \quad (2.5)$$

The boundary conditions of the hinge fixing $y = 0; b$, similar to conditions (1.7), will have the form:

$$u_k = 0, \frac{\partial v_k}{\partial y} = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.6)$$

The conditions (2.6), after using the transformation (2.1) and some transformations [7], have the following form:

$$\varphi_k = 0, \frac{\partial \psi_k}{\partial y} = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad y = 0; b \quad (2.7)$$

The new form of writing the boundary conditions for the free edge $x = 0$ (1.16) will be:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \nu_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} + (1 - \nu_k) \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x \partial y} &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} &= \pm h_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_c \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0, \text{ where } \nu_c = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu_c) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0$$

Thus, it is required to find a solution of the system of equations (2.2) - (2.4) satisfying the boundary conditions (2.2), (2.8) and the damping condition (2.5). The existence of such a solution means the existence of oscillations localized in a neighborhood of the free edge.

The solutions of the system of equations (2.2), (2.4) satisfying the hinge-binding conditions (2.7) can be represented in the form:

$$\begin{aligned} \psi_k &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{kn}(x) \cos \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{b} \\ \varphi_k &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn}(x) \sin \lambda_n y \\ w &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \sin \lambda_n y \end{aligned} \quad (2.9)$$

The substitution of (2.9) into (2.2-2.4) leads to the following system of ordinary differential equations:

$$\begin{aligned} \Psi''_{kn} - \lambda_n^2(1 - \xi_k^2)\Psi_{kn} &= 0 \\ \Phi''_{kn} - \lambda_n^2(1 - \theta_k \xi_k^2)\Phi_{kn} &= \pm \frac{h_k}{2} \left[w''_n - \lambda_n^2(1 - \theta_k \xi_k^2)w_n \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} D(w''_n - 2\lambda_n^2 w''_n + \lambda_n^4 w_n) - K_1(\varphi''_{1n} - 2\lambda_n^2 \varphi''_{1n} + \lambda_n^4 \varphi_{1n}) + \\ + K_2(\varphi''_{2n} - 2\lambda_n^2 \varphi''_{2n} + \lambda_n^4 \varphi_{2n}) - m\omega^2 w_n &= 0 \\ \text{where } \xi_k^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_n^2 C_{tk}^2}, \theta_k = \frac{C_{lk}^2}{C_{tk}^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

The solution of system (2.10) is represented in the form:

$$\Psi_{kn} = F_k e^{-\lambda_n p x}, \Phi_{kn} = B_k e^{-\lambda_n p x}, w_n = A e^{-\lambda_n p x} \quad (2.12)$$

so that the positive roots of the characteristic equation with respect to p satisfy the damping conditions (2.5).

Substituting (2.12) into system (2.10) leads to algebraic equations with respect to arbitrary constants F_k, B_k, A :

$$\begin{aligned} (p^2 - 1 + \xi_k^2)F_k &= 0 \\ (p^2 - 1 + \theta_k \xi_k^2) \left(B_k \mp \frac{h_k}{2} A \right) &= 0 \\ (p^2 - 1)^2 (DA - K_1 B_1 + K_2 B_2) - \frac{m\omega^2}{\lambda_n^4} A &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. The system (2.13) admits various variants of obtaining the characteristic equation of the problem. Let's consider the case:

$$p^2 \neq 1 - \xi_k^2, p^2 \neq 1 - \theta_k \xi_k^2 \quad (3.1)$$

In this case we obtain from (2.13)

$$F_k = 0, B_k = \pm \frac{h_k}{2} A \quad (3.2)$$

Taking into account the expression for B_k from (3.2) in the third equation of the system (2.13) we obtain the characteristic equation

$$(p^2 - 1)^2 - \eta^2 = 0, \quad (3.3)$$

where

$$\eta^2 = \frac{m\omega^2}{\lambda_n^4 D_1}, D_1 = \frac{1}{6}(h_1 K_1 + h_2 K_2) \quad (3.4)$$

Equations (3.3) coincide with the characteristic equation of the Kononov problem. The influence of the two-layered plate is included in the dimensionless parameter η^2 , characterizing the phase velocity roots of equation (3.3) satisfying the damping requirement will be

$$p_1 = \sqrt{1+\eta}, \quad p_2 = \sqrt{1-\eta} \quad (3.5)$$

In this case, additional conditions are necessary:

$$0 < \eta < 1 \quad (3.6)$$

The final solution for the deflection function will be:

$$w = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{1n} e^{-\sqrt{1+\eta}\lambda_n x} + A_{2n} e^{-\sqrt{1-\eta}\lambda_n x} \right) \sin \lambda_n y \quad (3.7)$$

The substitution of (3.7) into the boundary conditions of the free edge (2.8) leads to a system of homogeneous algebraic equations with respect to A_{1n} , A_{2n} . The equation that determines the dimensionless frequency of localized bending vibrations is obtained from the condition that the determinant of this system is equal to zero [9].

$$p_1^2 p_2^2 + 2(1-\nu_c) p_1 p_2 - \nu_c^2 = 0 \quad (3.8)$$

The difference from the Konenkov equation is that instead of the Poisson ratio, the mean value of the Poisson coefficients of the two layers is here. This circumstance may be important for anisotropic materials, or if there are materials with a negative Poisson's ratio.

Another difference between the problem considered here – the excitation of localized bending vibrations leads to the appearance of localized longitudinal oscillations:

$$\Phi_{kn} = \mp \frac{h_k}{2} \left(A_{1n} e^{-\sqrt{1+\eta}\lambda_n x} + A_{2n} e^{-\sqrt{1-\eta}\lambda_n x} \right) \quad (3.9)$$

Conclusion. The problems of localized bending vibrations of a rectangular two-layered plate are considered in case of slip between layers. Under the conditions taken into account in this paper, the Navier condition coincides with the hinging. The boundary conditions of the free edge of a rectangular plate are obtained. A comparison of this problem with the Konenkov problem is given. The difference from the Konenkov equation is that instead of the Poisson ratio, the mean value of the Poisson coefficients of the two layers is in the equation that determines the dimensionless frequency of localized bending vibrations. This circumstance may be important for anisotropic materials, or if there are materials with a negative Poisson's ratio. Another difference between the problem considered here – localized bending vibrations leads to the appearance of localized longitudinal oscillations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю.К. Об изгибной волне рэлеевского типа. // Акуст. журнал. 1960. Т.6. №1. С.124-126. Konenkov Yu.K. A Rayleigh-Type Flexural Wave // Soviet Physics. Acoustics. 1960. Vol.6, iss. 1. P. 122–123.
2. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. // М.: Физматлит, 2010. 280с. Wilde M. V., Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu. Edge and interfacial resonance phenomena in elastic bodies. // Moscow: Fizmatlit. 2010. 280 p.
3. Laurie J.B., Kaplunov J.D. Edge waves and resonance on elastic structures. a overview. // Mathematics and Mechanics of solids. 2012. V.17. №1. P.4-16.
4. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzoca P. Localized Flexural Vibrations of Membrane Cylindrical Shell. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2017. 141(3). P. 1947-1952.

5. Belubekyan M. V. On the condition of Planar Localized Vibration Appearance in the Vicinity of the free Edge of Thin Rectangular Plate. // Proceedings of the Yerevan State University. (Physical and Mathematical Sciences) 2017. 51(1). P. 42-45.
6. Белубекян М.В. Изгиб и колебания двухслойной пластинки при условиях свободного скольжения между слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №2. С.14-24. Belubekyan M.V. Bending and oscillations of a two-layer plate under conditions of free sliding between layers. // NAS of Armenia. Mechanics. 2013. 66 (2), p.14-24.
7. Гришко А.М. Изгиб двухслойной пластинки при условии свободного скольжения между ортотропными слоями. // Механика – 2016: Труды международной школы-конференции молодых учёных, 3-7 октября 2016, Цахкадзор, Армения, Ереван: Ереванский государственный университет архитектуры и строительства. 2016. 198с. Grishko A. M. The bending of a two-layer plate under the condition of free sliding between orthotropic layers. // Mechanics 2016: Proceedings of International School-Conference of Young Scientists. 3-7 October, 2016, Tsakhkadzor, Armenia, p.198.
8. Новацкий В. Теория упругости. // Перев. с польск. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1975. 256с. OCR-слой. Novacky W. Theory of elasticity. // Trans. from polish. Pobedri B.E. – М.: Mir, 1975. 256 p.
9. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки// Прикладная механика НАН Украины. 1994. Т.30. №2. С.61-68. Ambartsumian S.A., Belubekyan M. V. To the problem of bending waves localized along the edge of a plate // Applied mechanics, NAS Ukraine, 1994, 30 (2), p.61-68.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.
Тел: (+374 10) 521503, (+374 10) 580096. E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Гришко Анна Микаеловна – аспирантка, каф. механики, ЕГУ, фак-т матем. и механики, Ереван, Армения. Тел: (+374 98) 152820,
E-mail: annochka1986@gmail.com

Поступила в редакцию 05.09.2017

УДК 593.3

ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В ВОЛНОВОДЕ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАКРЫТЫМИ ИЛИ ОТКРЫТЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Аветисян А.С., Мкртчян С.А.

Ключевые слова: электроакустическая волна, пьезоэлектрическое полупространство, краевая задача, высокочастотная акустическая волна, электрически прозрачная поверхность, электрически экранированная поверхность, дисперсионное уравнение, частотная зависимость.

Ավետիսյան Ա.Ս., Մկրտչյան Ս.Հ.

Ռելեյի էլեկտրաառաձգական ալիքները էլեկտրականապես բաց կամ փակ մակերևույթներով ալիքատարում

Բանալի բառեր: էլեկտրաառաձգական ալիք, պլեզոէլեկտրական կիսատարածություն, եզրային խնդիր, բարձր հաճախակային էլեկտրաձայնային ալիք, էլեկտրաթափանցիկ մակերևույթ, էլեկտրափակ մակերևույթ, դիսպերսիոն հավասարում, հաճախակային կախվածություն:

Հետազոտվում են պլեզոէլեկտրական կիսատարածությունում հարթ դեֆորմացիայի էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածման օրինաչափությունները: Ցույց է տրվում՝ էլեկտրաառաձգականության եզրային խնդրի քանի տարբերակ կարելի է ձևակերպել հեքսագոնալ համաչափության $\bar{6}m2$ դասի պլեզոէլեկտրաէլաստիկ կիսատարածությունում:

Մեխանիկական բեռից ազատ պլեզո-կիսատարածության մակերևույթին տարբեր էլեկտրական եզրային պայմանների դեպքում, քննարկված է հարթ դեֆորմացիայի բարձր հաճախության էլեկտրաձայնային ալիքի տարածման խնդիրը: Որոշ էլեկտրական մակերևույթային պայմանների դեպքում ցույց է տրված հարթ դեֆորմացիայի ալիքի տեղայնացման նոր հնարավորությունը: Հարթ դեֆորմացիայի ալիքն ուղեկցող էլեկտրական դաշտի տատանումների առկայությունը բերում է Ռելեյի էլեկտրաառաձգական ալիքի տեղայնացման բնութագրիչների քանակական և որակական փոփոխությունների:

Avetisyan A.S., Mkrtychyan S.H.

The electro elastic Rayleigh waves in the waveguide with an electrically closed or open surfaces

Keywords: Electro-acoustic waves; piezoelectric half-space; boundary value problem; high frequency acoustic waves; electrically transparent surface; electrically screened surface; dispersion equation; frequency dependence.

The patterns of propagation of electro-acoustic waves of plane strain in a piezoelectric half-space is examined. In paper is shows how many possible variants of the boundary value problem of electro-elasticity can be formulated in a piezoelectric half-space of piezoelectric crystal class $\bar{6}m2$ of the hexagonal symmetry. The problem of propagation of high frequency acoustic waves of plane strain (electro-acoustic Rayleigh waves) at different electric boundary conditions for mechanically free surface of a piezoelectric half-space is discussed. The possibility of a new localization of wave's plane strain, under certain electrical conditions at a surface is shown. The presence of a concomitant fluctuations of electric field, the waves of plane strain giving to the results in both quantitative and qualitative changes of the characteristics of a localization of electro-acoustic Rayleigh waves.

Исследуются закономерности распространения электроакустической волны плоской деформации в пьезоэлектрическом полупространстве. Показывается, сколько вариантов краевой задачи электроупругости можно сформулировать в пьезоэлектрическом полупространстве из пьезокристалла класса $\bar{6}m2$, гексагональной симметрии. Обсуждена задача распространения высокочастотных электроакустических волн плоской деформации (электроакустические волны типа Рэлея) при разных электрических граничных условиях на механически свободной поверхности пьезо-полупространства. Показана возможность новой локализации волн плоской деформации при определённых электрических поверхностных условиях. Наличие сопутствующих волн плоской деформации колебаний электрического поля приводит как к количественному, так и к качественному изменению характеристик локализации электроакустических волн Рэлея.

Введение.

Возможная локализация волновой энергии вблизи механически свободной поверхности упругого тела из изотропного материала была обнаружена ещё в 1885г. Рэлеем [1]. Это была волна плоской деформации (PV – волна). Однако, механически свободная поверхность не допускает локализацию энергии чисто сдвиговой упругой волны антиплоской деформации (SH – волна). Блюстейном в 1968г. было показано [2], что локализация энергии, горизонтально поляризованной SH волны при механически свободной поверхности упругого тела возможна в пьезоэлектрической среде определённой симметрии (класс $6mm$ гексагональной симметрии).

До сих пор интересны и разными авторами исследуются явления, связанные с распространением электроактивной волны антиплоской деформации в неоднородных структурах (в материалах с переменными характеристиками), или при разных электромеханических поверхностных условиях [3÷11] и др.

Еще в 1985 году было показано [12], что условия разделения плоского и антиплоского полей деформации в пьезоэлектрических кристаллах однозначно определяются структурой общей матрицы физико-механических постоянных материала (матриц упругих и пьезоэлектрических постоянных, диэлектрической проницаемости). Выведены системы разделённых квазистатических уравнений. Причём, показано, что электрическое поле участвует только в одном из разделённых полей деформаций. Несмотря на это, электроупругие волны плоской деформации (электроакустические волны Рэлея) в пьезоэлектрических кристаллах сравнительно мало исследованы [13÷15] и др.

Наряду с этим, ещё бурно исследуются особенности локализации волн Рэлея в трёхмерных задачах упругости [16, 17], явления, связанные с анизотропией материала [18, 19], или с неоднородностью структуры [20, 21].

В настоящей работе исследуется влияние разных электрических поверхностных условий на распространение высокочастотной волны электроактивной плоской деформации в зависимости от характера связи электромеханических полей.

Основные соотношения и постановка задачи.

Материальные уравнения пьезоэлектрической среды в декартовой системе координат

$\{x_i\}$ записываются в виде

$$D_m = e_{mnk} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \varepsilon_{mk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}; \quad \sigma_{ij} = c_{ijnk} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + e_{mij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}. \quad (1.1)$$

Для соблюдения однозначности, в декартовой системе координат $\{x_i\}$ совмещена с физическими координатами анизотропии кристаллов $\{x_\alpha; x_\beta; x_\gamma\}$, где $\{\alpha; \beta; \gamma\} \in \{1; 2; 3\}$ $\alpha \neq \beta; \gamma \neq \alpha; \beta \neq \gamma$ и что при данной анизотропии пьезокристалла, ось ox_γ параллельна оси инверсии (или симметрии) кристалла $\bar{p} \parallel ox_\gamma$. Тогда, в случае однородной среды [12] условия разделения плоской и антиплоской полей упругих деформаций получаются на основе анализа квази-статических уравнений электроупругости:

$$c_{ijnk} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j \partial x_k} + e_{mij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$e_{mij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \varepsilon_{mj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x_j} = 0 \quad (1.3)$$

по структуре общего тензора физико-механических постоянных материала:

$$\left(\begin{array}{cccccc} (* & * & * & * & * & *) \\ (* & * & * & * & * & *) \\ (* & * & \hat{c}_{ijnk} - 6 \times 6 & * & * & *) \\ (* & * & * & * & * & *) \\ (* & * & * & * & * & *) \\ (* & * & * & * & * & *) \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} (* & * & *) \\ (* & * & *) \\ (* & e_{ijm} & *) \\ (* & 3 \times 6 & *) \\ (* & * & *) \\ (* & * & *) \end{array} \right) \quad (1.4)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} (* & * & * & * & * & *) \\ (* & * & e_{mij} - 6 \times 3 & * & * & *) \\ (* & * & * & * & * & *) \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} (* & * & *) \\ (* & \varepsilon_{nk} & *) \\ (* & 3 \times 3 & *) \end{array} \right)$$

Из соотношений (1.1)–(1.4) видно, что если в чисто упругой среде разделение плоского $\{u_\alpha(x_\alpha; x_\beta; t); u_\beta(x_\alpha; x_\beta; t); 0\}$ и антиплоского $\{0; 0; u_\gamma(x_\alpha; x_\beta; t)\}$ полей деформации определяется только структурой матрицы упругих постоянных материала $\hat{c}_{ijnk} - (6 \times 6)$ и, возможно, при

$$c_{\alpha\beta\beta\beta} = c_{\alpha\beta\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma\gamma} = c_{\alpha\gamma\beta\beta} = c_{\alpha\gamma\beta\gamma} = c_{\alpha\gamma\gamma\gamma} \equiv 0, \quad (1.5)$$

то условия разделения этих полей деформаций в пьезоэлектрических кристаллах однозначно определяются структурой общей матрицы физико-механических постоянных материала ($\hat{c}_{ijnk} - (6 \times 6)$, $e_{ijm} - (3 \times 6)$ и $\varepsilon_{nk} - (3 \times 3)$).

Получается, что разделение электроактивного плоского $\{u_\alpha(x_\alpha; x_\beta; t); u_\beta(x_\alpha; x_\beta; t); 0; \varphi(x_\alpha; x_\beta; t)\}$ от чисто упругого антиплоского $\{0; 0; u_\gamma(x_\alpha; x_\beta; t)\}$ полей деформации возможно при выполнении наряду с (1.5) также условий:

$$e_{\beta\alpha\beta} = e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\gamma\alpha\gamma} = e_{\gamma\alpha\beta} \equiv 0. \quad (1.6)$$

Разделение же электроактивного антиплоского $\{0; 0; u_\gamma(x_\alpha; x_\beta; t); \varphi(x_\alpha; x_\beta; t)\}$ от чисто упругого плоского $\{u_\alpha(x_\alpha; x_\beta; t); u_\beta(x_\alpha; x_\beta; t); 0\}$ полей деформации возможно при выполнении наряду с (1.5) также условий:

$$e_{\alpha\alpha\alpha} = e_{\alpha\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\beta} = e_{\beta\beta\beta} = e_{\beta\beta\alpha} = e_{\beta\alpha\alpha} \equiv 0. \quad (1.7)$$

В соотношениях (1.5)÷(1.7) индексы появляются в любом сочетании $\{\alpha; \beta; \gamma\} \Leftrightarrow \{1; 2; 3\}$, не повторяясь $\alpha \neq \beta$; $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \gamma$.

Очевидно, что в разных кристаллографических сечениях $x_\alpha O x_\beta$ или $x_\beta O x_\gamma$, или $x_\gamma O x_\alpha$ системы разделённых квазистатических уравнений по структуре разные [12]. Наипростейшая связь электрического и упругого полей при электроактивной плоской деформации получается в кристаллографическом сечении $x_3 O x_1$ кристаллов класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии в виде $\{u_1(x_1; x_3; t); 0; u_3(x_1; x_3; t); \varphi(x_1; x_3; t)\}$, а $u_2(x_1; x_3; t) \equiv 0$ и $\partial/\partial x_2 \equiv 0$. Участвующие в задаче плоской деформации ненулевые характеристики электромеханического поля

$$\sigma_{11}(x_1, x_3) = c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad (1.8)$$

$$\sigma_{13}(x_1, x_3) = c_{44} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right); \quad \sigma_{33}(x_1, x_3) = c_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$D_1(x_1, x_3) = e_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad D_3(x_1, x_3) = -\varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \quad (1.9)$$

приводят к системе квазистатических уравнений:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (c_{44} + c_{13}) \frac{\partial u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\
c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (c_{44} + c_{13}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\
e_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} &= 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

или в кристаллографическом сечении $x_1 O x_2$, кристаллов того же класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии в виде $\{u_1(x_1; x_2; t); u_2(x_1; x_2; t); 0; \varphi(x_1; x_2; t)\}$, а $u_3(x_1; x_2; t) \equiv 0$ и $\partial/\partial x_3 \equiv 0$. В этом случае кристаллографической поляризации, участвующие в задаче плоской деформации, ненулевые характеристики электромеханического поля

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(x_1, x_2) &= c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; & \sigma_{22}(x_1, x_2) &= c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \\
\sigma_{12}(x_1, x_2) &= \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + e_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$D_1(x_1, x_2) = e_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - e_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad D_2(x_1, x_2) = e_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \tag{1.12}$$

приводят к другой системе квазистатических уравнений:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \left(\frac{c_{11} + c_{12}}{2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\
c_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \left(\frac{c_{11} + c_{12}}{2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\
e_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

1.a. Рассмотрим распространение волны плоской деформации в кристаллографическом срезе $x_3 O x_1$ слоя из пьезоэлектрического кристалла класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии. Пьезоэлектрический слой толщиной $2h_0$ отнесён к координатной системе $Oxyz$ так, что $Ox_1 \Leftrightarrow Ox$ – продольная ось слоя, $\bar{y} \parallel Ox_3 \Leftrightarrow Oz$ – поперечная ось слоя, $u_1(x_1; x_3; t) \Leftrightarrow u(x; z; t)$; $u_3(x_1; x_3; t) \Leftrightarrow w(x; z; t)$; $\varphi(x_1; x_3; t) \Leftrightarrow \varphi(x; z; t)$, а слой занимает область $\Omega_0 = \{|x| < \infty; |z| \leq h_0; |y| < \infty\}$

Система квазистатических уравнений (1.10) по введённым обозначениям переписывается в более удобном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x^2} + \theta_{41} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial z^2} + \theta_{41}^* \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial x \partial z} + \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial x^2} &= c_1^{-2} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial x^2} + \theta_{34} \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial z^2} + \theta_{34}^* \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x \partial z} &= c_2^{-2} \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial x^2} + \vartheta_{31} \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial z^2} - \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

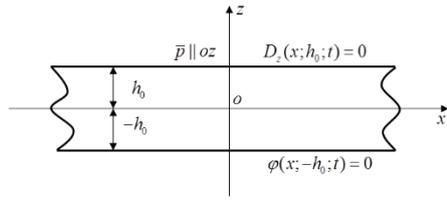
Здесь введены обозначения $\theta_{41} = c_{44}/c_{11}$, $\theta_{41}^* = (c_{44} + c_{13})/c_{11}$; $\theta_{34} = c_{33}/c_{44}$; $\theta_{34}^* = (c_{44} + c_{13})/c_{44}$ безразмерных характеристик упругой и $\vartheta_{31} = \varepsilon_{33}/\varepsilon_{11}$ – диэлектрической анизотропии материала.

$c_1 = \sqrt{c_{11}/\rho}$ и $c_2 = \sqrt{c_{44}/\rho}$ – скорости продольной и поперечной упругих объёмных волн, соответственно, без учёта электроактивности материала.

На обеих механически свободных поверхностях волновода $z = \pm h_0$ удовлетворяются условия:

$$\left(c_{13} \frac{\partial u(x; z; t)}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial z} \right)_{z=\pm h_0} = 0; \quad \left(\frac{\partial u(x; z; t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial x} \right)_{z=\pm h_0} = 0 \quad (1.15)$$

Соответственно, на электрически открытой $z = h_0$ и на электрически закрытой $z = -h_0$ поверхностях пьезоэлектрического слоя, условия прозрачности и экранирования электрических сопутствующих колебаний:



$$\begin{aligned} -\varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi(x; z; t)}{\partial z} \Big|_{z=h_0} &= 0, \\ \varphi(x; z; t) \Big|_{z=-h_0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Стоит уделить внимание на то, что при таком геометрическом срезе слоя из пьезокристаллической среды связь электрического и упругого полей плоской деформации выделяется только в первом и третьем уравнениях (1.14). Взаимодействие

Фиг. 1. Поляризованный по толщине пьезоэлектрический слой с электрически открытой $(\partial \varphi(x; z; t)/\partial z) \Big|_{z=h_0} = 0$ и электрически закрытой $\varphi(x; z; t) \Big|_{z=-h_0} = 0$ поверхностями.

этих полей по граничным условиям (1.15) и (1.16) также отсутствует. Фактически, в этом случае сопутствующие электрические колебания прямо связаны только с продольным составляющим упругого перемещения.

В результате, в обоих случаях изменения характеристик электромеханических полей происходит по продольному направлению слоя и, соответственно, имеют характер $(e_{11}/\varepsilon_{11}) \cdot [\partial^2 u(x; z; t)/\partial x^2]$ и $(e_{11}/c_{11}) \cdot [\partial^2 \varphi(x; z; t)/\partial x^2]$. Очевидно, что при неучёте пьезоэффекта у материала $e_{11} \equiv 0$ взаимодействие в граничной задаче исчезает.

1.6. При рассмотрении распространения волны плоской деформации в том же кристаллографическом срезе $x_3 0x_1$, в слое толщиной $2h_0$ из того же пьезоэлектрического кристалла класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии, отнесённым уже к координатным осям $oxyz$ так, что слой занимает область $\Omega_1 = \{|x| \leq h_0; |z| < \infty; |y| < \infty\}$. Тогда, $ox_1 \rightleftharpoons ox$ – поперечная ось слоя, $\bar{p} \parallel ox_3 \rightleftharpoons oz$ – продольная ось слоя.

Введя опять в соотношения (1.8)–(1.10) обозначения $u_1(x_1; x_3; t) \rightleftharpoons u(x; z; t)$; $u_3(x_1; x_3; t) \rightleftharpoons w(x; z; t)$; $\varphi(x_1; x_3; t) \rightleftharpoons \varphi(x; z; t)$, в граничной задаче электроупругости совместно с уравнениями (1.14), на механически свободных, электрически прозрачной $x = h_0$ и электрически $x = -h_0$ экранированной поверхностях пьезоэлектрического слоя соответственно будем иметь:

$$\left(c_{11} \frac{\partial u(x; z; t)}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial z} + e_{11} \frac{\partial \varphi(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=\pm h_0} = 0; \quad (1.17)$$

$$\left(\frac{\partial u(x; z; t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=\pm h_0} = 0.$$

$$\left(e_{11} \frac{\partial u(x; z; t)}{\partial x} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=h_0} = 0; \quad \varphi(x; z; t)|_{x=-h_0} = 0 \quad (1.18)$$

Из сформулированной граничной задачи (1.14), (1.17) и (1.18) уже видно, что в этом случае выбора геометрического среза слоя и того же кристаллографического среза в пьезоэлектрике, связь электрического и упругого полей плоской деформации выделяется не только уравнениями (1.14).

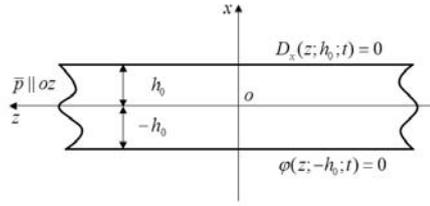
Взаимодействие характеристик электромеханического полей уже происходит не только за счёт наличия слагаемых

$$(e_{11}/\varepsilon_{11}) \cdot [\partial^2 u(x; z; t)/\partial x^2] \quad \text{и} \quad (e_{11}/c_{11}) \cdot [\partial^2 \varphi(x; z; t)/\partial x^2] \quad \text{в уравнениях.}$$

Пьезоэффект в этом случае приводит также к появлению эффективных нагрузок типа $\partial \varphi(x; z; t)/\partial x|_{x=\pm h_0}$ и $\partial u(x; z; t)/\partial x|_{x=h_0}$ в граничных условиях (1.17) и (1.18).

Очевидно, что при неучёте пьезоэлектрического эффекта в материале, когда $e_{11} \equiv 0$, взаимодействие между упругим и электрическим полями в граничной задаче исчезает.

Таким образом, выбор разных геометрических срезов слоя из пьезоэлектрического кристалла класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии приводит к принципиально разным математическим граничным задачам электроупругой плоской деформации: уравнения (1.14) вместе с смешанными граничными условиями (1.15) и (1.16) на перпендикулярных к инверсионной оси пьезокристалла $\bar{p} \parallel ox_3 \Leftrightarrow oz$ поверхностях $z = \pm h_0$, или уравнения (1.14) вместе с смешанными граничными условиями (1.17) и



Фиг. 2. Поляризованный по длине пьезоэлектрический слой с электрически открытой $(\partial\varphi(x; z; t)/\partial z)|_{x=h_0} = 0$ и электрически закрытой $\varphi(x; z; t)|_{x=-h_0} = 0$ поверхностями,

(1.18) на параллельных к инверсионной оси пьезокристалла $\bar{p} \parallel ox_3 \Leftrightarrow oz$ поверхностях $x = \pm h_0$.

Аналогичное рассуждение приводит к тому, что электроупругая краевая задача плоской деформации в кристаллографическом сечении $x_1 0x_2$, перпендикулярном к инверсионной оси пьезокристалла того же класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии $\bar{p} \parallel ox_3 \Leftrightarrow oz$, можно сформулировать также двумя разными способами.

Задача в пьезоэлектрическом слое $\Omega_2 = \{|x| \leq h_0; |z| < \infty; |y| < \infty\}$ с механически свободными и соответственно электрически прозрачными и экранированными поверхностями $x = \pm h_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial x^2} + \left(\frac{1-\theta_{12}}{2}\right) \frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial y^2} + \left(\frac{1+\theta_{12}}{2}\right) \frac{\partial^2 v(x; y; t)}{\partial x \partial y} &= c_l^{-2} \frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial t^2} \\ \left(\frac{1-\theta_{12}}{2}\right) \frac{\partial^2 v(x; y; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x; y; t)}{\partial y^2} + \left(\frac{1+\theta_{12}}{2}\right) \frac{\partial^2 u(x; y; t)}{\partial x \partial y} + \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi(x; y; t)}{\partial y^2} &= c_l^{-2} \frac{\partial^2 v(x; y; t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi(x; y; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x; y; t)}{\partial y^2} - \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial^2 v(x; y; t)}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь введены обозначения безразмерных характеристик упругой анизотропии материала $\theta_{12} = c_{12}/c_{11}$, а $c_l = \sqrt{c_{11}/\rho}$ – скорость продольной упругой объёмной волны без учёта электроактивности материала.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(x; y; t)}{\partial x} + \theta_{12} \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial y}\right)_{x=\pm h_0} &= 0; \\ \left(\left(\frac{1-\theta_{12}}{2}\right) \left(\frac{\partial u(x; y; t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial x}\right) + \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi(x; y; t)}{\partial y}\right)_{x=\pm h_0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\left(\frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial u(x; y; t)}{\partial x} - \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial y} - \frac{\partial \varphi(x; y; t)}{\partial x} \right)_{x=h_0} = 0; \quad \varphi(x; y; t)|_{x=-h_0} = 0 \quad (1.21)$$

и краевая задача в пьезоэлектрическом слое $\Omega_3 = \{|x| < \infty; |y| \leq h_0; |z| < \infty\}$ с механически свободными и соответственно электрически прозрачными и экранированными поверхностями $y = \pm h_0$ формулируется как система уравнений (1.19) с граничными условиями:

$$\left(\theta_{12} \frac{\partial u(x; y; t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial y} \right)_{y=\pm h_0} = 0; \quad (1.22)$$

$$\left(\left(\frac{1 - \theta_{12}}{2} \right) \left(\frac{\partial u(x; y; t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial x} \right) + \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi(x; y; t)}{\partial y} \right)_{y=\pm h_0} = 0.$$

$$\left(\frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \left(\frac{\partial u(x; y; t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x; y; t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varphi(x; y; t)}{\partial y} \right)_{y=h_0} = 0; \quad \varphi(x; y; t)|_{y=-h_0} = 0 \quad (1.23)$$

В сформулированных граничных задачах (1.19)–(1.21), а также (1.19), (1.22) и (1.23) взаимодействия характеристик электромеханического полей происходит не только за счёт наличия слагаемых $(e_{11}/\varepsilon_{11}) \cdot [\partial^2 v(x; z; t)/\partial y^2]$ и $(e_{11}/c_{11}) \cdot [\partial^2 \varphi(x; z; t)/\partial y^2]$ в уравнениях. Пьезоэффект в этом срезе пьезокристалла приводит также к появлению эффективных нагрузок типа $\partial \varphi(x; z; t)/\partial x|_{x=\pm h_0}, (e_{11}/\varepsilon_{11})(\partial v(x; y; t)/\partial y)_{x=h_0}, (e_{11}/\varepsilon_{11})(\partial u(x; y; t)/\partial y + \partial v(x; y; t)/\partial x)_{y=h_0}$ и $(e_{11}/\varepsilon_{11})(\partial \varphi(x; z; t)/\partial y)|_{x=\pm h_0}$ в граничных условиях (1.20), (1.21), (1.22) и (1.23), соответственно.

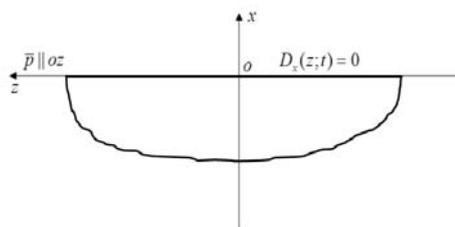
Очевидно, что в этом случае также при неучёте пьезоэлектрического эффекта в материале, когда $e_{11} \equiv 0$, взаимодействие между упругим и электрическим полями во вновь сформулированных граничных задачах исчезают.

Не нарушая общности в проблеме исследования электроупругих волн Рэлея, можем остановиться на одной из сформулированных выше задач электроупругой плоской деформации. При этом, в сформулированной граничной задаче электромеханические поверхностные условия на одной поверхности волновода возьмём из условий задачи, а на другой поверхности потребуем затухание искомым величин волнового поля.

С точки зрения анизотропии материала и сравнительно простой связи взаимодействия физико-механических полей, естественно, выбрать более информативную краевую задачу из выше сформулированных.

1. Электроупругие волны Рэлея при механически свободной и электрически прозрачной поверхности пьезоэлектрического полупространства.

Рассмотрим распространение волны электроупругой плоской деформации в полупространстве из пьезоэлектрического кристалла класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии.



Фиг. 3. Пьезоэлектрическое полупространство с электрически открытой поверхностью. Пьезокристалл класса $\bar{6}m2$ поляризован параллельно механически свободной поверхности

Полупространство

$$\Omega_1 = \{x \leq 0; |y| < \infty; |z| < \infty\}$$

отнесено к координатной системе $oxyz$ так, что в кристаллографическом срезе $x_3 0x_1$

$ox_1 \rightleftharpoons ox$, перпендикулярная к

поверхности полупространства $x = 0$,

инверсионная ось $\bar{p} \parallel ox_3 \rightleftharpoons oz$

параллельна поверхности полупространства.

В полупространстве решается система

квазистатических уравнений (1.10),

которая по введённым обозначениям

$$\theta_{14} = c_{11}/c_{44}, \quad \theta_{43}^* = (c_{44} + c_{13})/c_{33}; \quad \theta_{43} = c_{44}/c_{33}; \quad \theta_{14}^* = (c_{44} + c_{13})/c_{44}$$

безразмерных характеристик упругой и $\theta_{31} = \epsilon_{33}/\epsilon_{11}$ – диэлектрической анизотропии

материала. $c_{1l} = \sqrt{c_{33}/\rho}$ и $c_{lt} = \sqrt{c_{44}/\rho}$ – скорости продольной и поперечной

упругих объёмных волн соответственно, без учёта электроактивности материала

перепишется в более удобном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial z^2} + \theta_{43} \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial x^2} + \theta_{13}^* \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x \partial z} &= c_{1l}^{-2} \frac{\partial^2 w(x; z; t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial z^2} + \theta_{14} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x^2} + \theta_{14}^* \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial x \partial z} + \frac{e_{11}}{c_{44}} \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial x^2} &= c_{1l}^{-2} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial x^2} + \theta_{31} \frac{\partial^2 \varphi(x; z; t)}{\partial z^2} - \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}} \frac{\partial^2 u(x; z; t)}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

На поверхности полупространства будет удовлетворена часть граничных условий (1.17) и (1.18):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(x; z; t)}{\partial x} + \theta_{13}^* \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial z} + \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial u(x; z; t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial \mathbf{u}(x; z; t)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(x; z; t)}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (2.3)$$

Кроме условий (2.1) и (2.2), на искомые величины волнового поля также налагаются условия затухания в глубине полупространства

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \mathbf{u}(x; z; t); \mathbf{v}(x; z; t); \varphi(x; z; t); \} = 0. \quad (2.4)$$

Представляем решения системы уравнений (2.1) в виде нормальных плоских волн:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x; z; t) \\ \mathbf{w}(x; z; t) \\ \varphi(x; z; t) \end{cases} = \begin{cases} A \cdot \exp(qkx) \\ B \cdot \exp(qkx) \\ C \cdot \exp(qkx) \end{cases} \cdot \exp[i(kz - \omega t)]$$

где $k \triangleq 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина распространяющейся волны, а q – коэффициент затухания волн по глубине полупространства.

Удовлетворяющее условиям затухания (2.4) общее решение системы получается в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{w}(x; z; t) \\ \mathbf{u}(x; z; t) \\ \varphi(x; z; t) \end{cases} = \begin{cases} A \cdot \exp(q_1 kx) + b_w B \cdot \exp(q_2 kx) + c_w C \cdot \exp(q_3 kx) \\ a_u A \cdot \exp(q_1 kx) + B \cdot \exp(q_2 kx) + c_u C \cdot \exp(q_3 kx) \\ a_\varphi A \cdot \exp(q_1 kx) + b_\varphi B \cdot \exp(q_2 kx) + C \cdot \exp(q_3 kx) \end{cases} \cdot \exp[i(kz - \omega t)] \quad (2.5)$$

с характеристическим уравнением

$$\begin{aligned} & \left\{ p^2 - [\theta_{34} \alpha_t^2 + \tilde{\theta}_{41} \alpha_t^2 - \theta_{14}^* \tilde{\theta}_{11}^*] p + \tilde{\theta}_{31} \alpha_t^2 \alpha_t^2 \right\} p - \\ & - \tilde{\theta}_{31} \left\{ p^2 - [\theta_{34} \alpha_t^2 + \theta_{41} \alpha_t^2 - \theta_{11}^* \theta_{14}^*] p + \theta_{31} \alpha_t^2 \alpha_t^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

для определения коэффициентов затухания $q_n = \sqrt{p_n}$, где $n=1; 2; 3$. Для наглядности, в запись общего решения (2.5) введены обозначения, характеризующие ветви форм колебаний:

$$a_u = i\theta_{11}^* \frac{q_1 (q_1^2 - \vartheta_{31})}{[q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2] (q_1^2 - \vartheta_{31}) + \chi_{11}^2 q_1^4}; \quad (2.7)$$

$$a_\varphi = i\theta_{11}^* \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{q_1^3}{(1 + \chi_{11}^2) q_1^4 - (\vartheta_{31} + \theta_{41} \eta_t^2) q_1^2 + \theta_{41} \vartheta_{31} \eta_t^2}$$

$$b_w = -i\theta_{14}^* \frac{q_2}{[q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_t^2)]};$$

$$c_w = i\theta_{14}^* \frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{q_3^3}{[q_3^2 - \theta_{34} (1 - \eta_t^2)] [q_3^2 - \theta_{41} \eta_t^2] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4} \quad (2.8)$$

$$b_\phi = \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{q_2^2}{(q_2^2 - \mathfrak{G}_{31})}; \quad c_u = -\frac{e_{11}}{c_{11}} \frac{q_3^2 [q_3^2 - \theta_{34}(1 - \eta_l^2)]}{[q_3^2 - \theta_{34}(1 - \eta_l^2)][q_3^2 - \theta_{41}\eta_l^2] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4} \quad (2.9)$$

В соотношениях (2.6)÷(2.9) фигурируют безразмерные характеристики анизотропии материала $\tilde{\theta}_{\alpha\gamma} = c_{\alpha\alpha}/\tilde{c}_{\gamma\gamma}$, $\theta_{1\alpha}^* = (c_{44} + c_{13})/c_{\alpha\alpha}$, $\tilde{\theta}_{1\alpha}^* = (c_{44} + c_{13})/\tilde{c}_{\alpha\alpha}$, $\tilde{c}_{\alpha\alpha} = (1 + \chi_{11}^2)c_{\alpha\alpha}$; $\tilde{\mathfrak{G}}_{31} = \varepsilon_{33}/\tilde{\varepsilon}_{11}$, $\tilde{\varepsilon}_{11} = (1 + \chi_{11}^2)\varepsilon_{11}$, а также $\chi_{11}^2 = e_{11}^2/(\varepsilon_{11}c_{11})$ – коэффициент электромеханической связи и коэффициенты формообразования $\alpha_l^2 = 1 - (\omega^2/k^2)(c_{33}/\rho)$ продольной и $\alpha_t^2 = 1 - (\omega^2/k^2)(c_{44}/\rho)$ – поперечной форм волны по толщине волновода.

Введённое в характеристическое уравнение (2.6) обозначение $p \triangleq q^2$ приводит к тому, что все три волновые ветви будут затухающими по глубине полупространства, если все три корни характеристического уравнения (2.6) вещественные, положительные и различные. Тогда, область определения существования затухающих в глубь полупространства решений получается из условий:

$$\begin{aligned} \Delta = & -4\mathfrak{G}_{31}\alpha_l^2\alpha_t^2 \left[(1 + \chi_{11}^2)\theta_{14}\alpha_l^2 + \theta_{43}\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}\theta_{13} - \theta_{14}^*\theta_{13}^* \right]^3 - \\ & -27 \left[\mathfrak{G}_{31}(1 + \chi_{11}^2)\theta_{13}\alpha_l^2\alpha_t^2 \right]^2 - 4(1 + \chi_{11}^2)\theta_{13} \left[\alpha_l^2\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}(\theta_{43}\alpha_l^2 + \theta_{14}\alpha_t^2 - \theta_{14}^*\theta_{13}^*) \right]^3 + \\ & + 18\mathfrak{G}_{31}(1 + \chi_{11}^2)\theta_{13}\alpha_l^2\alpha_t^2 \left[(1 + \chi_{11}^2)\theta_{14}\alpha_l^2 + \theta_{43}\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}\theta_{13} - \theta_{14}^*\theta_{13}^* \right] \times \\ & \times \left[\alpha_l^2\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}(\theta_{43}\alpha_l^2 + \theta_{14}\alpha_t^2 - \theta_{14}^*\theta_{13}^*) \right] + \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$+ \left[(1 + \chi_{11}^2)\theta_{14}\alpha_l^2 + \theta_{43}\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}\theta_{13} - \theta_{14}^*\theta_{13}^* \right]^2 \left[\alpha_l^2\alpha_t^2 + \mathfrak{G}_{31}(\theta_{43}\alpha_l^2 + \theta_{14}\alpha_t^2 - \theta_{14}^*\theta_{13}^*) \right]^2 \geq 0$$

$$\alpha_l^2 \cdot \alpha_t^2 > 0 \quad (2.11)$$

Подставляя полученные решения (2.5) в граничные условия (2.2) и (2.3), из условия существования нетривиальных решений находим уравнение дисперсии поверхностных электроупругих волн плоской деформации (электроупругие волны Рэлея в случае электрически прозрачной поверхности пьезоэлектрика) в следующем виде:

$$\det \left\| \hat{g}_{ij} [V_\phi(\omega/k)] \right\|_{3 \times 3} = 0 \quad (2.12)$$

В уравнении дисперсии элементы матрицы $\hat{g}_{ij} [V_\phi(\omega/k)]$ представляются безразмерными физико-механическими постоянными материала, корнями

характеристического уравнения (2.6), а также безразмерными фазовыми скоростями $\eta_l^2 = (\omega^2/k^2)(c_{33}/\rho)$ и $\eta_t^2 = (\omega^2/k^2)(c_{44}/\rho)$ объёмных волн

$$\begin{aligned} g_{11} &\triangleq \left[\frac{\theta_{11}^* [q_1^2 + \theta_{13} [q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2]] (q_1^2 - \vartheta_{31}) + (1 + \theta_{11}^* \chi_{11}^2) \chi_{11}^2 q_1^4}{[q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2] (q_1^2 - \vartheta_{31}) + \chi_{11}^2 q_1^4} \right]; \\ g_{12} &\triangleq \left[\frac{\theta_{13}^* \theta_{14}^* (q_2^2 - \vartheta_{31}) + [(1 + \chi_{11}^2) q_2^2 - \vartheta_{31}] [q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)]}{[q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)]} \right] q_2; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} g_{13} &\triangleq \frac{e_{11}}{c_{11}} q_3^3 \left[\frac{\theta_{31} \eta_t^2 [(1 - \theta_{43}) - \theta_{31} \eta_t^2] - (\theta_{11}^* q_3^2 + \theta_{13}^*) \theta_{14}^*}{[q_3^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)] [q_3^2 - \theta_{41} \eta_t^2] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4} \right]; \\ g_{21} &\triangleq \left(\frac{[\chi_{11}^2 q_1^4 + q_1^2 - \theta_{41} (\eta_t^2 - \theta_{14}^*)] (q_1^2 - \vartheta_{31})}{[q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2] (q_1^2 - \vartheta_{31}) + \chi_{11}^2 q_1^4} \right) q_1; \\ g_{22} &\triangleq \left(\frac{[q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)] - \theta_{14}^* q_2^2}{[q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)]} \right); \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} g_{23} &\triangleq \frac{e_{11}}{c_{11}} \left(\frac{(\theta_{14}^* - 1) q_3^2 + \theta_{34} (1 - \eta_l^2)}{[q_3^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)] [q_3^2 - \theta_{41} \eta_t^2] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4} \right) q_3^2; \\ g_{31} &\triangleq -\frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \theta_{11}^* \left[\frac{\vartheta_{31}}{[q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2] (q_1^2 - \vartheta_{31}) + \chi_{11}^2 q_1^4} \right] q_1; \quad g_{32} \triangleq -\frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\vartheta_{31}}{(q_2^2 - \vartheta_{31})}; \\ g_{33} &\triangleq -\frac{[(1 + \chi_{11}^2) q_3^2 - \theta_{41} \eta_t^2] [q_3^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4}{[q_3^2 - \theta_{34} (1 - \eta_l^2)] [q_3^2 - \theta_{41} \eta_t^2] - \theta_{14}^* \theta_{11}^* q_3^4} \end{aligned} \quad (2.15)$$

3. Электроупругие волны Рэлея при механически свободной и электрически экранированной поверхности пьезоэлектрического полупространства.

Рассмотрим распространение волны электроупругой плоской деформации в полупространстве из пьезоэлектрического кристалла класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии в той же ориентации кристаллических осей пьезоэлектрика.

В полупространстве опять будет решена система квазистатических уравнений (2.1) теми же введёнными обозначениями. На поверхности полупространства будет удовлетворена уже другая часть граничных условий (1.17) и (1.18). Вместо условия электрически прозрачной поверхности (2.3), наряду с условиями механически

свободной поверхности (2.2) будет удовлетворяться условие электрически экранированной поверхности пьезоэлектрического полупространства

$$\Phi(x, z; t)|_{x=0} = 0. \quad (3.1)$$

Поступая аналогично, подставляя полученные решения (2.5) в граничные условия (2.2) и (3.1), из условия существования нетривиальных решений находим уравнение дисперсии поверхностных электроупругих волн плоской деформации (электроупругие волны Рэлея в случае экранированной поверхности пьезоэлектрика) в следующем виде:

$$\det \left\| \hat{f}_{ij} [V_\phi(\omega/k)] \right\|_{3 \times 3} = 0. \quad (3.2)$$

В полученном уравнении дисперсии (3.2) элементы матрицы $\hat{f}_{ij} [V_\phi(\omega/k)]$ также представляются безразмерными физико-механическими постоянными материала, корнями характеристического уравнения (2.6), и безразмерными фазовыми скоростями $\eta_l^2 = (\omega^2/k^2)(c_{33}/\rho)$ и $\eta_t^2 = (\omega^2/k^2)(c_{44}/\rho)$ объёмных волн. Причём, элементы первых двух строк матриц дисперсий, когда $i=1;2$ и $j=3$, совпадают $\hat{g}_{ij} [V_\phi(\omega/k)] \equiv \hat{f}_{ij} [V_\phi(\omega/k)]$, а элементы третьей строки матрицы $\hat{f}_{ij} [V_\phi(\omega/k)]$ равны:

$$f_{31} \triangleq \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}} \frac{\theta_{11}^* q_1^3}{[q_1^2 - \theta_{41} \eta_t^2] (q_1^2 - \mathfrak{G}_{31}) + \chi_{11}^2 q_1^4}; \quad f_{32} \triangleq \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}} \frac{q_2^2}{(q_2^2 - \mathfrak{G}_{31})}; \quad f_{33} \triangleq 1 \quad (3.3)$$

4. Сравнительный анализ полученных результатов.

Из полученных соотношений (2.1)÷(2.9) очевидно, что при отсутствии пьезоэффекта, когда $e_{11} \equiv 0$, краевая задача электроупругости (2.1)÷(2.3) распадается на две несвязанные задачи электростатики и динамической задачи упругости (фиг. 4.а, фиг. 4.б).

В соотношениях (2.7)÷(2.9) все множители, кроме a_{1u} и b_{2w} , также равны нулю, вследствие чего решения (2.5) и характеристическое уравнение (2.6) намного упрощаются. В частности, характеристическое уравнение получается в виде:

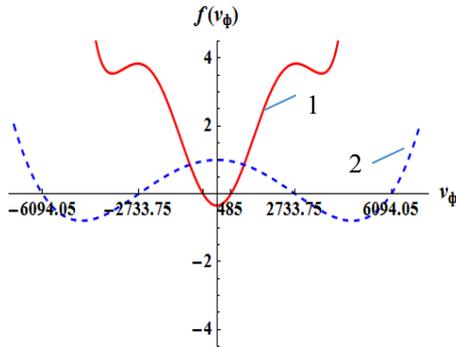
$$\left[p^2 - [\theta_{34} \alpha_t^2 + \theta_{41} \alpha_t^2 - \theta_{14}^* \theta_{11}^*] p + \theta_{31} \alpha_t^2 \alpha_t^2 \right] (p - \mathfrak{G}_{31}) = 0, \quad (4.1)$$

откуда для не распространяющегося электростатического поля получается:

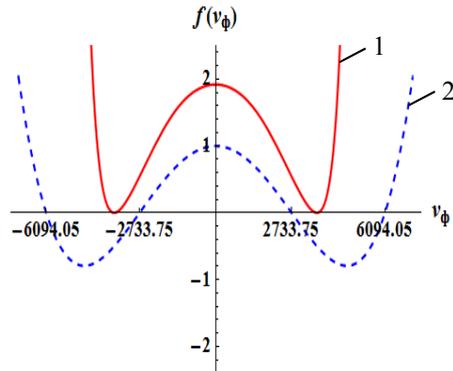
$$\Phi_0(x) = C_3 \cdot \exp \left[(-\sqrt{\epsilon_{33}/\epsilon_{11}}) kx \right]. \quad (4.2)$$

Для чистой упругой волны плоской деформации получается:

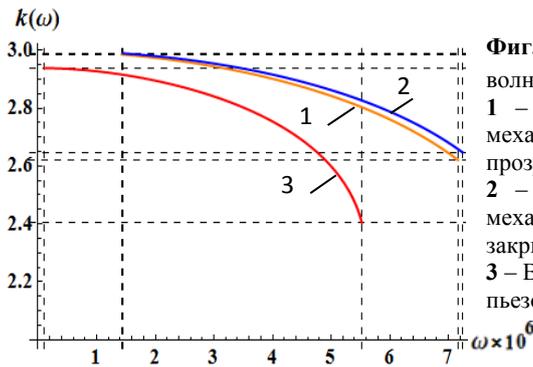
$$P_{1;2} = \frac{[\theta_{34} \alpha_t^2 + \theta_{41} \alpha_t^2 - \theta_{14}^* \theta_{11}^*] \pm \sqrt{[\theta_{34} \alpha_t^2 + \theta_{41} \alpha_t^2 - \theta_{14}^* \theta_{11}^*]^2 - 4\theta_{31} \alpha_t^2 \alpha_t^2}}{2} \quad (4.3)$$



Фиг. 4.а. Область определения для функции Рэлея $f(V_\phi)$ по фазовой скорости $V_\phi(\omega)$ при распространении волны параллельно оси поляризации пьезоэлектрического кристалла



Фиг. 4.б. Область определения для функции Рэлея $f(V_\phi)$ по фазовой скорости $V_\phi(\omega)$ при распространении волны перпендикулярно к оси поляризации пьезоэлектрического кристалла.



Фиг. 5. Фазовая $k(\omega)$ зависимость для волн Рэлея:

- 1 – Электроупругие волны Рэлея при механически свободной, электрически прозрачной поверхности.
- 2 – Электроупругие волны Рэлея при механически свободной, электрически закрытой поверхности.
- 3 – Волны Рэлея при отсутствии пьезоэффекта.

$$w(x; z; t) = [A_1 \cdot \exp[q_1 kx] + b_w B_2 \cdot \exp[q_2 kx]] \exp[i(kz - \omega t)] \quad (4.4)$$

$$u(x; z; t) = [a_u A_1 \cdot \exp[q_1 kx] + B_2 \cdot \exp[q_2 kx]] \exp[i(kz - \omega t)]$$

с амплитудными коэффициентами $a_u = i\theta_{11}^* q_1 / (q_1^2 - \theta_{41} \eta_i^2)$ и

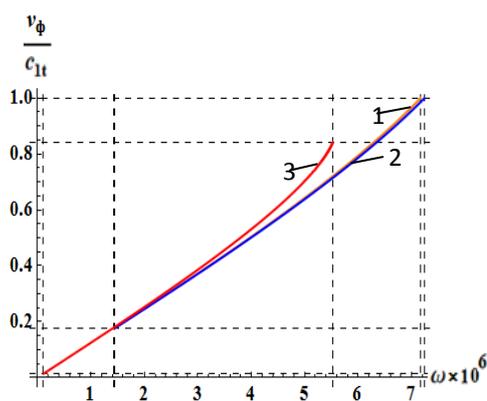
$$b_w = -i\theta_{14}^* q_2 / [q_2^2 - \theta_{34} (1 - \eta_i^2)].$$

Совместное решение системы неравенств (2.10) и (2.11) определяет область определения фазовых скоростей $V_\phi(\omega)$ (или $V_\phi(k)$) электроакустических волн плоской деформации.

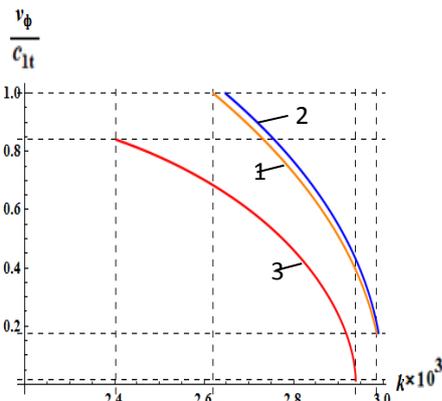
Из сравнения приведённых графических изображений следует, что в данном случае учёт пьезоэлектрического эффекта в материале сужает область определения фазовой скорости. Область определения $0 < V_\phi(\omega) < c_t$ при неучёте пьезоэффекта

превращается в $c_0(\chi_{11}^2) < V_\phi(\omega) < c_t$, с положительной нижней границей, зависящей от коэффициента электромеханической связи материала. Локализованные электроакустические волны Рэлея характеризуются фазовыми связями, приведёнными на фиг.5. Эти, а также зависимости приведённой фазовой скорости от частоты или от волнового числа (фиг. 6.а и фиг. 6.б) получаются решением дисперсионного уравнения (2.12) с учётом соотношений (2.13)–(2.15) (фиг. 6а и фиг. 6.б).

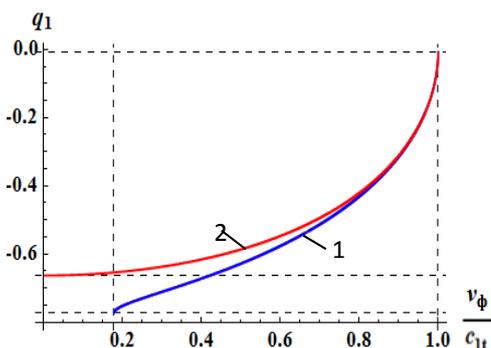
Из фиг.5 видно, что с учётом пьезоэффекта материала, при тех же частотах имеем распространение более коротких волн по сравнению со случаем чистой упругости.



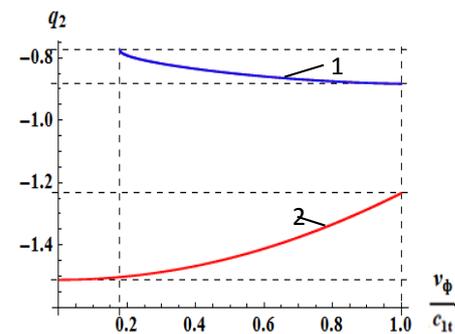
Фиг. 6.а Фазовая скорость $V_\phi(\omega)/c_t$ волны Рэлея
 1 – при механически свободной и электрически прозрачной поверхности,
 2 – при механически свободной и электрически экранированной поверхности,
 3 – пьезоэффект в материале отсутствует.



Фиг. 6.б Фазовая скорость $V_\phi(k)/c_t$ волны Рэлея
 1 – при механически свободной и электрически прозрачной поверхности,
 2 – при механически свободной и электрически экранированной поверхности,
 3 – пьезоэффект в материале отсутствует.



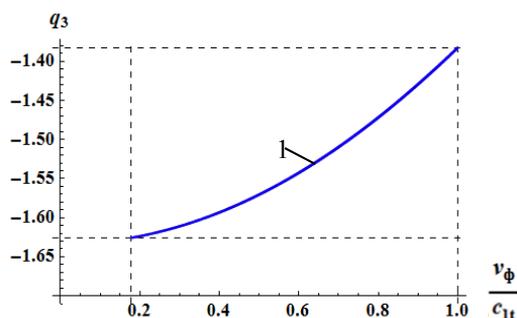
Фиг. 7.а Коэффициент затухания $q_1[V_\phi(\omega)/c_t]$ продольной ветви волны Рэлея
 1 – при механически свободной и электрически прозрачной (или экранированной) поверхности.
 2 – пьезоэффект в материале отсутствует.



Фиг. 7.б Коэффициент затухания $q_2[V_\phi(\omega)/c_t]$ поперечной ветви волны Рэлея
 1 – при механически свободной и электрически прозрачной (или экранированной) поверхности.
 2 – пьезоэффект в материале отсутствует.

Известно, что локализация волн электроупругого сдвига у механически свободной поверхности пьезоэлектрического полупространства происходит при экранизации внутреннего электрического поля, или же её полной сопряжённости со внешним электрическим полем.

В отличие от этого, здесь в обоих случаях электрических условий на механически



Фиг. 7.в. Коэффициент затухания $q_3[V_\phi(\omega)/c_t]$ сопутствующих упругую волну электрических колебаний в случаях электрически прозрачной (или экранированной) механически свободной поверхности полупространства

свободной поверхности полупространства наличие в материале пьезоэлектрического эффекта сопутствует процессу локализации электроупругой волны плоской деформации. Интересно также влияние учёта пьезоэлектрического эффекта на коэффициенты затухания соответствующих ветвей волны электроупругой плоской деформации (фиг. 7.а, фиг. 7.б и фиг. 7.в).

Из фиг.7.а следует, что с возрастанием фазовой скорости

$$V_\phi(\omega)/c_t \quad \text{величина}$$

коэффициента затухания продольного компонента $q_1[V_\phi(\omega)/c_t]$, как и в классическом случае упругости, уменьшается до нуля. С возрастанием фазовой скорости $V_\phi(\omega)/c_t$ уменьшаются также величины коэффициента затухания сопутствующих упругую волну электрических колебаний (фиг. 7.в) и коэффициента затухания поперечного компонента электроупругой волны Рэлея $q_2[V_\phi(\omega)/c_t]$ (фиг. 7.б-2). А вот, с возрастанием фазовой скорости $V_\phi(\omega)/c_t$, в отличие от всех ветвей волны, величина коэффициента затухания поперечного компонента электроупругой волны Рэлея $q_2[V_\phi(\omega)/c_t]$ возрастает (фиг. 7.б-1).

Заключение. Сформулирована математическая смешанная краевая задача электроактивной плоской деформации волновода из пьезоэлектриков класса $\bar{6}m2$ гексагональной симметрии со смешанными электрическими граничными условиями. При выборе разных ориентаций кристаллической поляризации относительно механически свободных поверхностей волновода получаются совершенно разные краевые задачи.

Исследовано распространение высокочастотных электроакустических коротких волн плоской деформации в пьезоэлектрическом полупространстве

(электроакустические волны Рэлея) при разных электрических граничных условиях на механически свободной поверхности.

Численно анализировано возможное изменение области определения фазовой скорости электроакустических волн Рэлея, характер изменения коэффициентов затуханий упругих составляющих и сопутствующих им электрических колебаний в зависимости от фазовой скорости волны, а также различия фазовых скоростей коротких волн при разных электрических условиях на механически свободных поверхностях волновода.

REFERENCES

1. Rayleigh J.W., On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. //Proc. Math. Soc. London. 1885/1886. vol. 17. p. 4-11.
2. Bleustein, J. L. A New Surface Wave in Piezoelectric Medium. //Appl. Phys. Lett., vol.13 (1968), p. 412-413.
3. Аветисян А.С. Поверхностные электроупругие волны Лява в случае неоднородного пьезоэлектрического слоя. //Изв. НАН Армении. Механика. 1987. Т.40. №1. С. 24-29. Avetisyan A.S. Love's electro-elastic surface waves in case of inhomogeneous piezoelectric layer.// Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, (1987), vol.40, №1, pp. 24-29. ISSN 0002-3051, (in Russian).
4. Li, S. The Electro-magneto-acoustic Surface Wave in a Piezoelectric Medium: The Bleustein - Gulyaev Mode. J. Appl. Phys., vol.80, (1996), p.5264-5269.
5. Yang, J. S. Bleustein - Gulyaev Waves in Piezo-electro- magnetic Materials. //Int. J. Appl. Elect. Mech., vol.12, (2000), p.235-240.
6. Аветисян А.С. О распространении электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике. //Изв. НАН Армении. Механика. 1988. Т.41. № 5. С. 34-40. Avetisyan A.S. About propagation of electro-elastic monochromatic wave in nonhomogeneous piezoelectric. //Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, (1988), vol.41, №5, pp. 34-40. ISSN 0002-3051, (in Russian).
7. Liu, H., Z. B. Kuang, Z. M. Cai. Propagation of Bleustein - Gulyaev Waves in a Pre-stressed Layered Piezoelectric Structure. Ultrasonics, vol.41, (2003), p.397-405.
8. Yang, J. S. A Review of a Few Topics in Piezoelectricity. //Appl. Mech. Rev., vol.59, (2006), p.335-345.
9. Piliposian G.T. and Danoyan Z.N., Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and two isotropic layers. //Int. J. of Solids and Structures, (2009), vol. 46, pp. 1345-1353.
10. Qian Zh.-H., Hirose S., Kishimoto K., Transverse surface waves in a functionally graded substrate carrying a 6mm piezoelectric material layer. //J. Solid Mech. And Materials Engineering, (2010), vol. 4, №8, pp.1315-1322.
11. Аветисян А.С., Камалян А.А. О распространении электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое класса 6mm. // Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. №2. С.108-115. Avetisyan A.S., Kamalyan A.A. On Propagation of Electroelastic Shear Wave in 6mm Class Piezodielectric Inhomogeneous Layer. //Reports of NAS Armenia, (2014), vol. 114, №2, pp.108-115, (in Russian).

12. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Изв. АН Арм.ССР, Механика. 1985. Т.38. №1. С.12-19.
Avetisyan A.S. About the problem of the propagation of transversal waves in piezoelectric. //Proceed. of National Academy of Sciences of Armenia, Mechanics, (1985), vol.38, (1). pp. 12-19. ISSN 0002-3051, (in Russian).
13. Baljeet Singh, Ranbir Singh, Rayleing wave in a rotating initially stressed piezoelectric half-space. //Jour. Of Theor. And Appl. Mechanics, vol.43, Issue 2, **DOI:** <https://doi.org/10.2478/jtam-2013-0014>
14. Chaudhary S., Sahu S.A., Singhal A., Analytic model for Rayleigh wave propagation in piezoelectric layer overlaid orthotropic substratum, Acta Mechanica, 2017, vol. 228, Issue 2, pp. 495–529.
15. Vashishth, A.K., Sukhija, H., Coupled Rayleigh waves in a 2-mm piezoelectric layer over a porous piezo-thermoelastic half-space, 2017, Acta Mechanica,
16. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея. //Доклады НАН Армении. 2005. Т.105. №2. С.362-369.
Belubekyan V.M., Belubekyan M.V. Three-dimensional Problem of Reyleigh Wave Propagation. //Reports of NAS RA, 2005, v.105, №2, p.362-369 (in Russian).
17. Sarkisyan S.V., Three-Dimensional Problem of Waves Propagation in Half-Space With an Elastically Restrained Boundary. //Proceed. of National Academy of Sciences of Armenia, Mechanics, (2017), vol.70, (2). pp. 74-83. ISSN 0002-3051.
18. Vinh P.C., Ngoc Anh V.T., Khanh Linh N.T., Exact secular equations of Rayleigh waves in an orthotropic elastic half-space overlaid by an orthotropic elastic layer. //Int. Jour. of Solids and Struct., (2016), Vol. 83. P. 65-72.
19. Vinh, P.C., Xuan, N.Q., Rayleigh waves with impedance boundary condition: Formula for the velocity, existence and uniqueness, 2017. //European Journal of Mechanics, A/Solids.
20. Kiselev A.P., Rayleing wave with a transvers structure. //Proc. of the Royal Soc. Lond. Ser. A, (2004), vol. 460, DOI:10.1098/rspa.2004.1359.
21. Sethi M., Gupta K.C., Rajan Sharma and Dinesh Malik, Propagation of Rayleigh Waves in Non-homogeneous elastic Half space of Orthotropic Material Under Initial Compression and Influence of Gravity. //Int. Journ. Of Modern Applied Physics, (2013), vol. 2(1), pp. 48-57.

About authors:

Ara S. Avetisyan– Corresponding Member of NAS, Professor, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences, Yerevan, Republic of Armenia

Address: 0019, Yerevan, ave. Baghramyan, 24/2

Phone: (+37493) 00-44-55, **E-mail:** ara.serg.avetisyan@gmail.com

Suren H. Mkrtchyan– PhD student in Institute of Mechanics of NAS RA

E-mail: sur_mkrtchyan@mail.ru

Поступила в редакцию 17.11.2017

УДК 593.3

**ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОЛЕБАНИЙ
И УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ МАГНИТОСТРИКЦИОННЫХ
ПЛАСТИН В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А.

Ключевые слова: Колебания, устойчивость, слоистые магнитострикционные пластинки, магнитное поле.

Բաղդասարյան Գ., Դանոյան Է.Ն.

**Մագնիսական դաշտում գտնվող մագնիսաստրիկցիոն եռաշերտ սալերի տատանումների և
կայունության հիմնական հավասարումներն ու եզրային պայմանները**

Հիմնարարներ: տատանումներ, կայունություն, շերտավոր մագնիսաստրիկցիոն սալեր, մագնիսական դաշտ:

Հիմնվելով դիէլեկտրիկ ֆերոմագնիսական հոծ միջավայրերի մագնիսաառաձգականության տեսության եւ բարակ առաձգական սալերի դասական տեսության վրա, ստացված են ընդլայնական մագնիսական դաշտում գտնվող եռաշերտ մագնիսաստրիկցիոն սալերի փոքր զրգռումների վարքը նկարագրող հիմնական հավասարումներ եւ սահմանային պայմանները:

Bagdasarian G.E., Danoyan E.H.

Main equations and boundary conditions of vibrations and stability of three-layered magnetostrictive plates in a transverse magnetic field

Keywords: Vibrations, stability, layered magnetostrictive plates, magnetic field.

Based on the theory of magnetoelasticity of dielectric ferromagnetic solids and on the classical theory of thin elastic plates, the main equations and boundary conditions are obtained describing the behavior of small perturbations in the three-layered magnetostrictive plates in the presence of a transverse magnetic field.

На основе теории магнитоупругости диэлектрических ферромагнитных твердых тел и классической теории тонких упругих пластин, получены основные уравнения и граничные условия, описывающие поведение малых возмущений в трехслойных магнитострикционных пластин, при наличии поперечного магнитного поля.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую пластинку, составленную из трёх однородных изотропных упругих слоёв. Слои, симметрично расположенные относительно срединной плоскости пластинки, изготовлены из одинаковых диэлектрических магнитострикционных ферромагнитных материалов и имеют одинаковую толщину.

Пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что

координатная плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью среднего слоя. В слое с номером i координата x_3 изменяется в интервале $(\delta_{i3} - \delta_{i2})\delta - \delta_{i1}h < x_3 < (\delta_{i2} - \delta_{i1})\delta + \delta_{i3}h$, где δ_{ij} – символ Кронеккера, $i = 1, 2, 3$. Считается, что слои после деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения.

Пусть пластинка помещена в стационарное магнитное поле, которое в отсутствии пластинки характеризуется индукцией внешнего поляризующего магнитного поля $\mathbf{V}^0(0, 0, B_{03})$. При помещении слоистой магнитострикционной пластинки в магнитное поле происходит намагничивание слоёв пластинки, приводящее как к изменению характеристик магнитного поля во всем пространстве, так и к деформированию пластинки. Следуя [1,3,11], характеристики магнитного поля представляются в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_* + \mathbf{b}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{V}_* + \mathbf{m}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_* + \mathbf{h}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{V}_* , \mathbf{M}_* и \mathbf{H}_* – соответственно, магнитная индукция, намагниченность и напряжённость магнитного поля, возникающего во всем пространстве вследствие помещения недеформируемой пластинки во внешнее поляризующее магнитное поле, \mathbf{b} , \mathbf{m} , \mathbf{h} – характеристики индуцированного магнитного поля, возникающие вследствие деформации пластинки. Окружающая тело среда в отношении электромагнитных свойств принимается в приближении вакуума.

Согласно [1,5] принимается, что геометрия тела в невозмущённом состоянии совпадает с его геометрией первоначального недеформированного состояния. Из этого предположения следует, что магнитное поле невозмущённого состояния с принятой точностью совпадает с магнитным полем недеформируемого тела, т.е.

$$\mathbf{H}_* = \mathbf{H}^H, \quad \mathbf{V}_* = \mathbf{V}^H, \quad \mathbf{M}_* = \mathbf{M}^H.$$

Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к невозмущённому состоянию, отмечены индексом «H».

В работах [1,3], используя основные положения нелинейной теории магнитоупругости ферромагнитных тел [9-12] и теории малых возмущений, путём линеаризации получены следующие линейные уравнения и граничные условия, описывающие поведение малых возмущений в указанной магнитоактивной деформируемой среде:

уравнения во внутренней области пластинки (в слое с номером α):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(s_{ik}^{(\alpha)} + s_{im}^{n(\alpha)} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) + \mu_0 M_i^{n(\alpha)} \frac{\partial h_k^{(\alpha)}}{\partial x_i} + \mu_0 m_i^{(\alpha)} \frac{\partial H_k^{n(\alpha)}}{\partial x_i} = \rho_0^{(\alpha)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \\ \text{rot} \mathbf{h}^{(\alpha)} = 0, \quad \text{div} \mathbf{b}^{(\alpha)} = 0, \quad \mathbf{b}^{(\alpha)} = \mu_0 \left(\mathbf{h}^{(\alpha)} + \mathbf{m}^{(\alpha)} \right), \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{ij}^{(\alpha)} = c_{ijkl}^{(\alpha)} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \mu_0 e_{ijk}^{(\alpha)} m_k^{(\alpha)}, \\ h_i^{(\alpha)} = g_{ijk}^{(\alpha)} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + A_{ik}^{(\alpha)} m_k^{(\alpha)}, \end{array} \right. \quad (3)$$

где S_{ik} – возмущения компонент тензора s_{ik}^H магнитоупругих напряжений невозмущённого состояния; u_k – возмущения компонент вектора \mathbf{u}^H упругих перемещений;

h_k, m_k и b_k – компоненты векторов \mathbf{h}, \mathbf{m} и \mathbf{b} , представляющие возмущения

соответственно напряжённости \mathbf{H}^H намагничённости \mathbf{M}^H и магнитной индукции

\mathbf{B}^H невозмущённого магнитного поля, x_i – декартовы координаты. Здесь и в дальнейшем, если соответствие каких-либо величин или уравнений к конкретному слою очевидно, то запишем их, опуская указанные индексы;

уравнения во внешней области пластинки:

$$\text{rot} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div} \mathbf{h}^{(e)}, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \mu_0 \mathbf{h}^{(e)} \quad (4)$$

где индекс «e» здесь и в дальнейшем означает принадлежность к внешней среде;

условия на поверхности S_0 недеформируемого тела, граничащего с вакуумом:

$$\left[s_{ki} + s_{km}^{n(e)} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] n_k^0 = \left[t_{ki}^{(e)} - t_{ki} \right] n_k^0 + \left[T_{km}^{n(e)} - T_{km}^n \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0, \quad (5)$$

$$\left[b_k - b_k^e \right] n_k^0 = \left[B_m^H - B_m^{n(e)} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_i^0,$$

$$\varepsilon_{nmk} \left\{ \left[h_n - h_n^{(e)} \right] n_m^0 - \left[H_n^H - H_n^{n(e)} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_i^0 \right\} = 0,$$

где $T_{km}^{n(e)}$ и T_{km}^n – тензоры напряжений Максвелла невозмущённого состояния,

соответственно, для тела и окружающей среды,

$$T_{km}^{n(e)} = \mu_0 \left[H_k^{n(e)} H_m^{n(e)} - \frac{1}{2} \delta_{km} H_n^{n(e)} H_n^{n(e)} \right], \quad (6)$$

$$T_{km}^n = H_k^n B_m^n - \frac{1}{2} \delta_{km} \mathbf{H}^n \mathbf{H}^n,$$

n_k^0 – компоненты вектора внешней нормали \mathbf{n}_0 к поверхности S_0 ,

$$t_{ki} = b_i H_k^n + h_k B_i^n - \mu_0 \delta_{ki} \mathbf{H}^n \mathbf{h}, \quad (7)$$

$$t_{ki}^{(e)} = \mu_0 \left[h_k^{(e)} H_i^{n(e)} + h_k^e H_i^{n(e)} - \delta_{ki} \mathbf{H}^{n(e)} \mathbf{h}^{(e)} \right],$$

ε_{ijk} – символ Леви-Чивиты;

условия на поверхности раздела двух диэлектрических магнитострикционных слоёв ($x_3 = \pm\delta$):

$$\left[S_{ki}^\alpha - S_{ki}^{\alpha+1} \right] n_k^0 = \left[t_{ki}^{(\alpha+1)} - t_{ki}^{(\alpha)} \right] n_k^0,$$

$$\left[b_k^{(\alpha)} - b_k^{(\alpha+1)} \right] n_k^0 = \left[B_m^{n(\alpha)} - B_m^{n(\alpha+1)} \right] \frac{\partial u_k}{\partial x_m} n_k^0, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{nmk} \left\{ \left[h_n^{(\alpha)} - h_n^{(\alpha+1)} \right] n_m^0 - \left[H_n^{n(\alpha)} - H_n^{n(\alpha+1)} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_i^0 \right\} = 0,$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{при } x_3 = -\delta \\ 2 & \text{при } x_3 = \delta. \end{cases} \quad (9)$$

В уравнениях состояния (3) использованы следующие обозначения:

$$c_{ijkl} = C_{ijkl} + \mu_0 A_{pq} M_r^n M_j^n \left(\delta_{ik} \delta_{pl} \delta_{rq} + \delta_{kl} \delta_{iq} \delta_{ir} + \delta_{lp} \delta_{iq} \delta_{kr} \right) +$$

$$+ \frac{\mu_0}{2} B_{pqrs} \left(\delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kl} + \delta_{iq} \delta_{jk} \delta_{pl} + \delta_{ik} \delta_{jq} \delta_{pl} \right) M_r^n M_s^n +$$

$$+ \mu_0 B_{pqrs} \left(\delta_{pk} \delta_{ql} \delta_{is} M_j^n + \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{is} M_k^n \right) M_r^n,$$

$$e_{ijk} = B_{ijkl} M_l^n + A_{mi} \left(\delta_{kj} M_m^n + \delta_{mk} M_j^n \right),$$

$$g_{ijk} = B_{jkpi} M_p^n + A_{rs} \left(\delta_{is} \delta_{jk} M_r^n + \delta_{rk} \delta_{is} M_j^n + \delta_{ij} \delta_{sk} M_r^n \right),$$

где c_{ijkl} , A_{kl}^{-1} и B_{jkpi} – соответственно, тензоры упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитоотрицательных коэффициентов.

Для магнитоупругих сред, которые в размагниченном состоянии изотропны по отношению как к магнитным, так и к упругим свойствам, справедливы равенства [2,6,7]:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad A_{kl} = \chi^{-1} \delta_{kl}, \\ B_{ijkl} &= e_2 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (e_1 - e_2) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \end{aligned} \quad (10)$$

где λ и μ – постоянные Ляме, χ – магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ – относительная магнитная проницаемость, e_1, e_2 – магнитоотрицательные постоянные среды.

Если вектор \mathbf{M}^n параллелен одной из осей координатной системы, для тензоров обобщённых упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитоотрицательных коэффициентов с точностью $e_i (B_3^0)^2 (\mu_0 \lambda)^{-1} \ll 1$, $\chi e_i \gg 1$, получаются следующие упрощённые представления [4]:

$$c_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad g_{ijk} = B_{jkpi} M_p^n, \quad e_{ijk} = B_{ijkl} M_l^n. \quad (11)$$

К уравнениям (4) необходимо присоединить также условия затухания возмущений магнитных величин на бесконечности.

В коэффициенты линеаризованных соотношений (2), (5), (8) входят неизвестные компоненты S_{ij}^n тензора напряжений невозмущённого состояния. Для слоя с номером α они являются решениями следующей статической задачи теории упругости:

уравнение равновесия:

$$\frac{\partial S_{ik}^{n(\alpha)}}{\partial x_i} + \mu_0 M_n^{n(\alpha)} \frac{H_k^{n(\alpha)}}{\partial x_n} = 0, \quad (12)$$

$$S_{ij}^{n(\alpha)} = c_{ijkl}^{n(\alpha)} \varepsilon_{kl}^n + S_{ij}^{0(\alpha)}, \quad (13)$$

$$S_{ij}^{0(\alpha)} = \mu_0 A_{ik}^{(\alpha)} M_j^{n(\alpha)} M_k^{n(\alpha)} + \frac{1}{2} \mu_0 B_{ijkl}^{(\alpha)} M_k^{n(\alpha)} M_l^{n(\alpha)}, \quad (14)$$

где ε_{kl}^n – тензор малых деформаций невозмущённого состояния;

условия на поверхности S_0 недеформируемого тела:

$$S_{ki}^n n_k^0 = [T_{ki}^{n(e)} - T_{ki}^n] n_k^0; \quad (15)$$

условия на поверхности раздела двух диэлектрических магнитострикционных слоёв ($x_3 = \pm\delta$):

$$[S_{ki}^{n(\alpha)} - S_{ki}^{n(\alpha+1)}] n_k^0 = [T_{ki}^{n(\alpha+1)} - T_{ki}^{n(\alpha)}] n_k^0, \quad (16)$$

где α определяется согласно (9).

Согласно принятому предположению, входящие в (5)-(7) характеристики невозмущённого магнитного поля определяются из следующей задачи магнитостатики для недеформируемого тела:

уравнение магнитостатики во внутренней области (в слое с номером α):

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H}^{n(\alpha)} = 0, \quad \text{div} \mathbf{B}^{n(\alpha)} = 0, \\ \mathbf{B}^{n(\alpha)} = \mu_0 (\mathbf{H}^{n(\alpha)} + \mathbf{M}^{n(\alpha)}), \quad H_k^{n(\alpha)} = A_{kl}^{(\alpha)} M_l^{n(\alpha)}; \quad (\alpha = 1, 2, 3); \end{aligned} \quad (17)$$

уравнение во внешней области:

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H}^{n(e)} = 0, \quad \text{div} \mathbf{H}^n = 0, \\ M^{n(e)} = 0, \quad \mathbf{B}^{n(e)} = \mu_0 \mathbf{H}^{n(e)}; \end{aligned} \quad (18)$$

условия сопряжения на поверхности S_0 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^{n(\alpha)} - \mathbf{B}^{n(e)}) \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \\ (\mathbf{H}^{n(\alpha)} - \mathbf{H}^{n(e)}) \times \mathbf{n}_0 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{где } \alpha = \begin{cases} 3 & \text{при } x_3 = h \\ 1 & \text{при } x_3 = -h; \end{cases}$$

условия на поверхности раздела двух диэлектрических магнитострикционных слоёв ($x_3 = \pm\delta$):

$$(\mathbf{B}^{n(\alpha)} - \mathbf{B}^{n(\alpha+1)}) \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \quad (\mathbf{H}^{n(\alpha)} - \mathbf{H}^{n(\alpha+1)}) \times \mathbf{n}_0 = 0 \quad (20)$$

где α определяется согласно (9);

условия на бесконечности:

$$\mathbf{H}^{n(e)} \rightarrow \mathbf{H}^{(e)} \text{ при } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty. \quad (21)$$

2. Двумерные уравнения магнитоупругой устойчивости тонкой пластинки

Для применения процедуры получения двумерных уравнений магнитоупругих колебаний и устойчивости тонких пластин, необходимо знать характеристики (напряжённость, магнитная индукция и намагниченность) магнитных полей невозмущённого и возмущённого состояний. Их определяем, решая трёхмерные задачи математической физики, сформулированные в предыдущем параграфе. Решение указанных краевых задач, в случае пластин конечных размеров связано с серьёзными математическими трудностями. Численные решения этих задач в случае пластинки-полосы приведены в работе [8]. Анализ полученных в этой работе решений показывает, что характеристики магнитных полей (невозмущённого и возмущённого) для пластинки конечных размеров вне некоторого достаточно узкого пограничного слоя, практически совпадают с соответствующими характеристиками для бесконечной полосы. На этом основании при определении характеристик невозмущённого магнитного поля пластинку будем считать бесконечной. Тогда, приближённое решение задачи (17)-(21) представляется в виде

$$\begin{aligned} B_i^{n(e)} = 0, \quad B_i^{n(\alpha)} = 0, \quad H_i^{n(e)} = 0, \quad H_i^{n(\alpha)} = 0, \quad M_i^{n(\alpha)} = 0, \\ B_3^{n(e)} = B_{03}, \quad H_3^{n(e)} = \frac{B_{03}}{\mu_0}, \quad M_3^{n(e)} = 0, \quad (i = 1, 2; \alpha = 1, 2, 3), \quad (22) \\ B_3^{n(\alpha)} = B_{03}, \quad H_3^{n(\alpha)} = \frac{B_{03}}{\mu_r^{(\infty)} \mu_0}, \quad M_3^{n(\alpha)} = \chi^{(\alpha)} H_3^{n(\alpha)}. \end{aligned}$$

Для приведения трёхмерных уравнений магнитоупругой устойчивости (2) к двумерным принимается гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом, согласно которой имеем:

$$u_1 = u - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2, t) \quad (23)$$

где $u(x_1, x_2, t), v(x_1, x_2, t), w(x_1, x_2, t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности пластинки.

Пользуясь формулами (3,10,11) и пренебрегая влияниями напряжения s_{33} , с уже принятой точностью $e_i (B_3^0)^2 (\mu_0 \lambda)^{-1} \ll 1$ получаем следующие выражения для основных компонент S_{11}, S_{22} и S_{12} тензора магнитоупругих напряжений:

$$\begin{aligned}
s_{11} &= (\bar{\lambda} + 2\mu)\varepsilon_{11} + \bar{\lambda}\varepsilon_{22} + \sigma h_3, \\
s_{22} &= (\bar{\lambda} + 2\mu)\varepsilon_{22} + \bar{\lambda}\varepsilon_{11} + \sigma h_3, \\
s_{12} &= \lambda\varepsilon_{12}, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),
\end{aligned} \tag{24}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} f - g \right), \quad g = -\frac{\chi^2 e_2}{\mu_r} B_{03}, \quad f = -\frac{\chi^2 e_1 e_2}{\mu_r} B_{03} \\
\lambda_1 &= \lambda - \frac{\chi^3 e_2^2}{\mu_0 \mu_r^2} (BB_{03})^2, \quad \lambda_2 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1 e_2}{\mu_0 \mu_r^2} (BB_{03})^2, \quad \lambda_3 = \lambda - \frac{\chi^3 e_1^2}{\mu_0 \mu_r^2} (BB_{03})^2, \\
\bar{\lambda} &= \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3 + 2\mu}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Подставляя соотношения (24) в уравнения (2) и усредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки, с учётом поверхностных условий (5)-(8) приходим к следующим двумерным уравнениям магнитоупругой устойчивости рассматриваемой пластинки относительно u, v, w :

$$\begin{cases}
L_{11}u + L_{12}v + L_1(h_3) + \int_{-h}^h Q_1 dx_3 = X_1, \\
L_{21}u + L_{22}v + L_2(h_3) + \int_{-h}^h Q_2 dx_3 = X_2, \\
L_{33}w + L_3(h_3) - \int_{-h}^h Q_3 dx_3 - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{-h}^h x_3 Q_k dx_3 = X_3.
\end{cases} \tag{26}$$

В уравнениях (26) магнитоупругой устойчивости введены следующие обозначения:

$$Q_k = s_{im}^n \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_m}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Введением следующего оператора:

$$A[\beta] = (h - \delta)\beta^{(1)} + \delta\beta^{(2)}, \tag{27}$$

где β – определённая величина, зависящая от магнитомеханических параметров слоёв

пластинки, линейные дифференциальные операторы L_{ij} , входящие в (26)

представляются в виде

$$L_{ij} = 2A[\lambda_{ij}] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} A[\mu] \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad i, j = 1, 2;$$

$$L_{33} w = \frac{2}{3} \left[(h^3 - \delta^3) \lambda_{11}^{(1)} + \delta^3 \lambda_{11}^{(2)} \right] \Delta^2 w - P \Delta w.$$

Здесь введены обозначения:

$$\lambda_{ij}^{(r)} = \lambda_1^{(r)} + (1 + \delta_{ij}) \mu^{(r)} - \frac{(\lambda_2^{(r)})^2}{\lambda_3^{(r)} + 2\mu^{(r)}}, \quad r = 1, 2;$$

$$P = \frac{2(B_{03})^2}{\mu_0} \left[\frac{1}{B_{03}} A \left[\frac{d_2}{\mu_r} \right] - A \left[\frac{\chi}{\mu_r} \right] + A \left[\frac{3e_2 - e_1}{2} \frac{\chi^2}{\mu_r^2} \right] \right],$$

$$d_1 = \frac{\chi^2 e_1 B_{03}}{\mu_r} \frac{f}{\lambda_3 + 2\mu}, \quad d_2 = \frac{\chi B_{03}}{\mu_r} \left[\frac{(e_1 - e_2)}{2} \chi - \frac{\lambda_2}{\lambda_3 + 2\mu} \chi e_1 \right],$$

$$k = \begin{cases} 2 & \text{при } i = j = 1 \\ 1 & \text{для остальных индексов } i \text{ и } j; \end{cases}$$

и по повторяющимся индексам суммирование не предполагается.

Операторы $L_i(h_3)$, учитывающие влияние индуцированного в пластинке магнитного поля \mathbf{h} , входящие в (26), имеют следующий вид:

$$L_i(h_3) = \int_{-h}^h \left(\sigma - \frac{\chi B_{03}}{\mu_r} \right) \frac{\partial h_3}{\partial x_i} dx_3, \quad i = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} L_3(h_3) = & -B_{03} \left(h_3^{(e)} - h_3 \right) \Big|_{-h}^h - B_{03} \left(\frac{d_1^{(1)}}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} - \frac{\chi^{(1)}}{\mu_r^{(1)}} \right) h_3 \Big|_{-h}^h + \\ & + B_{03} \left[\left(1 + \frac{\chi^{(2)}}{\mu_r^{(2)}} + \frac{d_1^{(2)}}{\mu_0 \mu_r^{(2)}} \right) h_3^{(2)} - \left(1 + \frac{2\chi^{(1)}}{\mu_r^{(1)}} \right) h_3^{(1)} \right] \Big|_{x_3=-\delta}^- - \\ & - B_{03} \left[\left(1 + \frac{2\chi^{(2)}}{\mu_r^{(2)}} \right) h_3^{(2)} - \left(1 + \frac{\chi^{(1)}}{\mu_r^{(1)}} + \frac{d_1^{(1)}}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \right) h_3^{(3)} \right] \Big|_{x_3=\delta}^+ + \\ & - \int_{-h}^h x_3 \left(\sigma - \mu_0 M_3^n \right) \Delta h_3 dx_3 - \int_{-h}^h \mu_0 M_3^n \frac{\partial h_3}{\partial x_3} dx_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Наконец, компоненты X_i объёмной силы инерционного происхождения представляются в виде:

$$X_1 = 2A[\rho] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad X_2 = 2A[\rho] \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad X_3 = 2A[\rho] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

3. Определение индуцированного магнитного поля.

Для замыкания системы (19) следует определить компоненты h_i индуцированного магнитного поля в пластинке. Введением потенциальных функций $\varphi^{(j)}$ для j -ого слоя посредством

$$\mathbf{h}^{(j)} = \text{grad } \varphi^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (30)$$

замечаем, что они, согласно (20), являются решениями следующих уравнений:

$$\mu_0 \mu_r^{(k)} \Delta_3 \varphi^{(k)} = d_1^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x_3^2} + (c^{(k)} - d_2^{(2)}) \Delta_2 w, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (31)$$

где Δ_3, Δ_2 – соответственно, трёхмерный и двухмерный операторы Лапласа,

$$c^{(k)} = \frac{(\chi^{(k)})^2}{\mu_r^{(k)}} \left(\frac{e_1^{(k)} - e_2^{(k)}}{2} - e_2^{(k)} \right).$$

Аналогичным образом, введя магнитные потенциалы во внешней области посредством

$$\mathbf{h}^{(e)} = \text{grad } \varphi_U^{(e)} \text{ при } x_3 \geq h \text{ и } \mathbf{h}^{(e)} = \text{grad } \varphi_L^{(e)} \text{ при } x_3 \leq -h \quad (32)$$

закключаем, что функции φ^U и φ^L , согласно (4), удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta_3 \varphi_U^{(e)} = 0 \text{ при } x_3 \geq h \quad (33)$$

$$\Delta_3 \varphi_L^{(e)} = 0 \text{ при } x_3 \leq -h \quad (34)$$

Решения уравнений для введённых потенциалов должны удовлетворять поверхностным условиям (5) и (8), относящимся характеристикам индуцированного магнитного поля.

Решение сформулированных выше трёхмерных задач в случае конечной пластинки строится следующим образом [1]. Сначала решается задача для бесконечной пластинки, представляя искомые функции в виде

$$\begin{aligned} (u, v, w) &= (u_0, v_0, w_0) \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \\ (\varphi^{(j)}, \varphi_U^{(e)}, \varphi_L^{(e)}) &= (F^{(j)}(x_3), F^U(x_3), F^L(x_3)) \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \end{aligned} \quad (35)$$

(неизвестные функции $F^{(j)}$, F^U и F^L определяются удовлетворением уравнений (26), (30)-(34) и условий сопряжения на поверхностях контакта в случае бесконечной пластинки), а затем неизвестные волновые числа k_1 и k_2 определяются с использованием асимптотического метода интегрирования [1] и условий закрепления краёв пластинки.

Ниже приводится только начальная часть указанной процедуры (решение задачи в случае бесконечной пластинки). Вторую же часть (определение волновых чисел k_1 и k_2) необходимо исполнить при решении конкретных задач колебания и устойчивости.

Учитывая сказанное и используя (35), из уравнений (31)-(34) легко находим:

$$F^{(j)}(x_3) = F_{j1} e^{\tilde{k}_j x_3} + F_{j2} e^{-\tilde{k}_j x_3} + F_{j0} w_0, \quad j = 1, 2, 3; \quad (36)$$

$$F^U(x_3) = F_{33} e^{-k x_3} \quad \text{при } x_3 \geq h, \quad F^L(x_3) = F_{13} e^{k x_3} \quad \text{при } x_3 \leq -h, \quad (37)$$

где

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \tilde{k}_i = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r^{(i)}}{\mu_0 \mu_r^{(i)} - d_1^{(i)}}} k, \quad F_{j0} = \frac{c^{(j)} - d_2^{(j)}}{\mu_0 \mu_r^{(j)}}, \quad (38)$$

F_{ij} – произвольные постоянные.

Удовлетворяя условиям сопряжения (5) и (8), определяем неизвестные F_{ij} и с их помощью следующие выражения для магнитных потенциалов $\varphi_L^{(e)}$, $\varphi_U^{(e)}$ и $\varphi^{(j)}$:

для потенциалов вне пластинки:

$$\begin{aligned} \varphi_L^{(e)} &= e^{k x_3} \left(C_{13}^w w + C_{13}^{uv} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right) \quad \text{при } x_3 \leq -h, \\ \varphi_U^{(e)} &= e^{-k x_3} \left(C_{33}^w w + C_{33}^{uv} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right) \quad \text{при } x_3 \geq h, \end{aligned} \quad (39a)$$

для потенциала нижнего слоя:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = & \text{ch}\tilde{k}_1 x_3 \left[\left(e^{-kh} \delta_2 C_{13}^w + \gamma_2 \right) w + \left(e^{-kh} \delta_2 C_{13}^{uv} + a_1 l_1 \text{sh}\tilde{k}_1 h \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] + \\ & + \text{sh}\tilde{k}_1 x_3 \left[\left(e^{-kh} \delta_1 C_{13}^w + \gamma_1 \right) w + \left(e^{-kh} \delta_1 C_{13}^{uv} + a_1 l_1 \text{ch}\tilde{k}_1 h \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] + F_{10} w, \end{aligned} \quad (39b)$$

где $-h \leq x_3 \leq -\delta$;

для потенциала среднего слоя:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} = & \text{ch}\tilde{k}_2 x_3 \left\{ \left[-\frac{(C_{13}^w)^2 \Delta}{\tilde{a}} + \frac{1}{2} \left[(1+b) \pi_2(\tilde{q}_2) + (1-b) \pi_2(\tilde{q}_1) + 2\gamma_4 \right] \right] w + \right. \\ & \left. + \left[-\frac{C_{13}^w C_{13}^{uv} \Delta}{\tilde{a}} + \frac{1}{2} \mathfrak{D}_1 l_1 + a_2 \text{sh}\tilde{k}_2 \delta (l_2 - l_1) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right\} + \\ & + \text{sh}\tilde{k}_2 x_3 \left\{ \left[-\frac{C_{13}^w C_{13}^{uv} \Delta}{\tilde{d}} + \frac{1}{2} \left[-(1+b) \pi_1(\tilde{q}_2) + (1-b) \pi_1(\tilde{q}_1) + 2\gamma_3 \right] \right] w + \right. \\ & \left. + \left[-\frac{(C_{13}^{uv})^2 \Delta}{\tilde{d}} + \frac{1}{2} \mathfrak{D}_2 l_1 + a_2 \text{ch}\tilde{k}_2 \delta (l_2 - l_1) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right\} + F_{20} w, \end{aligned} \quad (39c)$$

где $-\delta \leq x_3 \leq \delta$;

для потенциала верхнего слоя:

$$\begin{aligned} \varphi^{(3)} = & \text{ch}\tilde{k}_1 x_3 \left[\left(e^{-kh} \delta_2 C_{33}^w + \gamma_2 \right) w + \left(e^{-kh} \delta_2 C_{33}^{uv} - a_1 l_1 \text{sh}\tilde{k}_1 h \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] - \\ & - \text{sh}\tilde{k}_1 x_3 \left[\left(e^{-kh} \delta_1 C_{33}^w + \gamma_1 \right) w + \left(e^{-kh} \delta_1 C_{33}^{uv} - a_1 l_1 \text{ch}\tilde{k}_1 h \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right] + F_{10} w, \end{aligned} \quad (39d)$$

где $\delta \leq x_3 \leq h$.

В формулах (39a)-(39d) введены следующие обозначения:

для коэффициентов, характеризующих влияние прогиба пластинки:

$$C_{13}^w = \frac{e^{-kh}}{2\Delta} \tilde{a} \left[(1+b)(\text{ch}\tilde{q}_2 - a_1 \text{sh}\tilde{q}_2) + (1-b)(\text{ch}\tilde{q}_1 - a_1 \text{sh}\tilde{q}_1) \right],$$

$$C_{33}^w = \frac{e^{-kh}}{2\Delta} \tilde{a} \left[(1+b)(\text{sh}\tilde{q}_2 - a_1 \text{ch}\tilde{q}_2) - (1-b)(\text{sh}\tilde{q}_1 - a_1 \text{ch}\tilde{q}_1) \right],$$

для коэффициентов, характеризующих влияние продольных колебаний:

$$C_{13}^{uv} = \frac{e^{-kh}}{2\Delta} \tilde{d} \left[(1+b)(\text{sh}\tilde{q}_2 - a_1 \text{ch}\tilde{q}_2) - (1-b)(\text{sh}\tilde{q}_2 - a_1 \text{ch}\tilde{q}_1) \right],$$

$$C_{33}^{uv} = \frac{e^{-kh}}{2\Delta} \tilde{d} \left[(1-b)(\text{ch}\tilde{q}_1 - a_1 \text{sh}\tilde{q}_1) + (1+b)(\text{ch}\tilde{q}_2 - a_1 \text{sh}\tilde{q}_2) \right].$$

Входящие в (40а) и (40б) величины \tilde{a} , \tilde{d} и Δ определяются формулами:

$$\tilde{a} = 0.5 \left\{ r_{11} \left[(1+b) \text{sh}\tilde{q}_2 - (1-b) \text{sh}\tilde{q}_1 \right] + p_{11} \left[(1+b) \text{ch}\tilde{q}_2 - (1-b) \text{ch}\tilde{q}_1 \right] \right\} -$$

$$- r_{12} \text{sh}\delta\tilde{k}_2 + p_{12} \text{sh}\delta\tilde{k}_1,$$

$$\tilde{d} = \frac{1}{2k} \left\{ \left[(a_1 + a_2) \text{sh}\tilde{q}_2 + (a_1 - a_2) \text{sh}\tilde{q}_1 \right] (l_2 - l_1) - a_2 \text{sh}\delta\tilde{k}_2 l_1 \right\},$$

$$\Delta = \frac{e^{-2kh}}{8} \left[\left[(1+b)^2 ((1-a_1)^2 \text{sh}(2\tilde{q}_2) - 2a_1 \text{ch}(2\tilde{q}_2)) \right] + \right.$$

$$\left. + \left(2a_1 \text{ch}(2\tilde{q}_1) - (1+a_1)^2 \text{sh}(2\tilde{q}_1) \right) - 2(1-a_1^2)(1-b^2) \text{sh}k_2 \delta \right],$$

где

$$\tilde{q}_1 = (\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) \delta - \tilde{k}_1 h, \quad \tilde{q}_2 = (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2) \delta - \tilde{k}_1 h,$$

$$r_{11} = \frac{\chi^{(1)}}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} B_0^3 - F_{10}, \quad r_{12} = F_{10} - F_{20} + \left(\frac{\chi^{(2)}}{\mu_0 \mu_r^{(2)}} - \frac{\chi^{(1)}}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \right) B_0^3,$$

$$a_i = \frac{k}{n_i \tilde{k}_i}, \quad n_i = \mu_r^{(i)} - \frac{d_1^{(i)}}{\mu_0}, \quad i = 1, 2; \quad b = \frac{a_2}{a_1},$$

$$w_{11} = l_1 k^2, \quad w_{12} = (l_1 - l_2) k^2, \quad l_i = \frac{d_2^{(i)}}{\mu_0},$$

$$p_{11} = \frac{(hk) l_1}{\mu_r^{(1)} \sqrt{1 - \frac{d_1^{(2)}}{\mu_0 \mu_r^{(1)}}}}, \quad p_{12} = \frac{(k\delta)(l_1 - l_2)}{\mu_r^{(2)} \sqrt{1 - \frac{d_1^{(2)}}{\mu_0 \mu_r^{(2)}}}}.$$

Для краткости и удобства в полученных формулах магнитных потенциалов использованы функции:

$$\pi_1(q) = r_{11} \operatorname{sh} q + \frac{ha_1}{k} w_{11} \operatorname{ch} q, \quad \pi_2(q) = r_{11} \operatorname{ch} q + \frac{ha_1}{k} w_{11} \operatorname{sh} q,$$

а также следующие константы:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \operatorname{sh} \tilde{k}_1 h + a_1 \operatorname{ch} \tilde{k}_1 h, & \delta_2 &= \operatorname{ch} \tilde{k}_1 h + a_1 \operatorname{sh} \tilde{k}_1 h, \\ \gamma_1 &= r_{11} \operatorname{sh} \tilde{k}_1 h - \frac{ha_1}{k} w_{11} \operatorname{ch} \tilde{k}_1 h, & \gamma_2 &= r_{11} \operatorname{ch} \tilde{k}_1 h - \frac{ha_1}{k} w_{11} \operatorname{sh} \tilde{k}_1 h, \\ \gamma_3 &= r_{12} \operatorname{sh} \tilde{k}_2 \delta - \frac{\delta a_2}{k} w_{12} \operatorname{ch} \tilde{k}_2 \delta, & \gamma_4 &= r_{12} \operatorname{ch} \tilde{k}_2 \delta - \frac{\delta a_2}{k} w_{12} \operatorname{sh} \tilde{k}_2 \delta, \\ \vartheta_1 &= [(a_1 + a_2) \operatorname{sh} \tilde{q}_2 + (a_1 - a_2) \operatorname{sh} \tilde{q}_1], \\ \vartheta_2 &= [(a_1 + a_2) \operatorname{ch} \tilde{q}_2 - (a_1 - a_2) \operatorname{ch} \tilde{q}_1]. \end{aligned}$$

4. Граничные условия на торцах пластинки

Искомые функции должны удовлетворять как системе дифференциальных уравнений (26), так и граничным условиям на контуре пластинки. Граничные условия, в которых задаются компоненты перемещений точек контура, ничем не отличаются от соответствующих условий классической теории пластин. Часть же граничных условий, которая формулируется в напряжениях, получается из условий (5) путём осреднения их по толщине пластинки. Исходя из сказанного, приведём варианты граничных условий в случаях шарнирного опирания и жёсткой заделки для края $x_1 = \text{const}$:

а) жёстко заделанный край:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0; \quad (41)$$

б) шарнирное опирание края со свободным смещением в продольном направлении:

$$v = 0, \quad T_{11} = 0; \quad w = 0, \quad M_{11} = 0; \quad (42)$$

в) шарнирно-закрепленный край:

$$u = 0, \quad v = 0; \quad w = 0, \quad M_{11} = 0. \quad (43)$$

В (42) и (43) усилие T_{11} и изгибающий момент M_{11} , как обычно, определяются формулами:

$$T_{11} = \int_{-h}^h s_{11} dx_3, \quad M_{11} = \int_{-h}^h x_3 s_{11} dx_3.$$

Используя (5) и (24), граничные условия (42) и (43) представляются следующим образом:

шарнирное опирание края со свободным смещением в продольном направлении:

$$\begin{aligned} v = 0, \quad 2A[\bar{\lambda} + 2\mu] \frac{\partial u}{\partial x_1} + \int_{-h}^h \sigma h_3 dx_3 = 0; \\ w = 0, \quad D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \int_{-h}^h x_3 \sigma h_3 dx_3 = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где D – изгибающая жёсткость пластинки, представляемая в виде

$$D = \frac{2}{3} \left[(\delta^3 - h^3) (\bar{\lambda}^{(1)} + 2\mu^{(1)}) - \delta^3 (\bar{\lambda}^{(2)} + 2\mu^{(2)}) \right];$$

шарнирно-закрепленный край:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \int_{-h}^h x_3 \sigma h_3 dx_3 = 0. \quad (45)$$

В формулах (41)-(45) h_3^α определяется по формуле $h_3^\alpha = \frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_3}$, где $\varphi^{(\alpha)}$

определяется согласно (39b)-(39d).

Аналогичным образом можно рассматривать граничные условия на торце пластинки $x_2 = \text{const}$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C134.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1999. 440с. (Baghdasaryan G.Y. Vibrations and stability of magnetoelastic systems. Yerevan: YSU, 1999. 440p.)(in Russian).
2. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Математическое моделирование колебаний двухслойных магнитострикционных пластин. //МТТ. 1992. №3. С.87-94. (Baghdasaryan

- G.Y., Danoyan E.H. Stability of magnetostrictive rectangular plates in longitudinal magnetic field. //МТТ. 1992, №3. P.87-94) (in Russian).
3. Багдасарян Г.Е. Математическое моделирование поведения возмущений в магнитострикционных средах. Мат. методы и физ.-мех. поля. 1998. Т. 41. №3. С 70-75. (Baghdasaryan G.Y. Mathematical modeling of perturbation behavior in magnetostrictive media. Mat. methods and Phys.-mech. fields. 1998. vol.41. № 3, pp.70-75) (in Russian).
 4. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Устойчивость магнитострикционных прямоугольных пластин в продольном магнитном поле. //Доклады НАН РА. 2015. Т.115. №3.С.218-226. (Baghdasaryan G.Y., Danoyan E.H. Stability of magnetostrictive rectangular plates in longitudinal magnetic field.// Reports of NAS RA, 2015, vol.115. №3. P.218-226.) (in Russian).
 5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с. (Bolotin V.V. Non-conservative problems of the theory of elastic stability. M.: Physmathgiz, 1961. 339p.) (in Russian).
 6. Сиротин Ю.Н., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 639с. (Syrotin Ju.N., Shaskolskaya M.P. Crystallophysics foundations. M.: Nauka, 1979. 639p. (in Russian).
 7. Сыркин Л.Н. Пьезомагнитная керамика. Л.: Энергия, 1980. 205с. (Syrkin L.N. Piezomagnetic ceramics. L.: Energia, 1980. 205p).
 8. Bagdasarian G.E., Philiposian G.T. In: Proc. North American Conf. on Smart Structure and Materials (SPIE). USA. 1997. V. 3039. P. 715-725.
 9. Brown W. F. Magnetoelastic Interactions. N. Y. Springer-Verlag. 1966. 155p.
 10. Maugin G. A. Continuum mechanics of electromagnetic solids. North- Holland- Amsterdam-New-York-Oxford-Tokyo. 1988. 560p.
 11. Pao Y.- H., Yen C.-S. Int. J. Eng. Sci. 1973. V. 11. №4. P. 415-436.
 12. Tiersten H.F. Coupled Magnetomechanical Equations for Magnetically Saturated Insulators.// J. of Mathem. Phis. vol. 5, 1964, №9, p.1298-1318.

Информация об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – Академик НАН РА. Главный научный сотрудник Института механики НАН Армении. **E-mail:** gevorgb@rau.am
Даноян Эдвард Айказович – к.ф.м.н., доцент, факультет информатики и прикладной математики ЕГУ. **E-mail:** edan@ysu.am.

Поступила 26.10.2017

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ
НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ**

Баласанян Е.С.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропная пластина, смешанные условия, внутренняя задача.

Асимптотическим методом из уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластины, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. На плоскости раздела слоёв заданы условия неполного контакта. Рассмотрен конкретный пример.

Բալասանյան Եվ. Ս.

Անիզոտրոպ երկշերտ սալի մի խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում

Բանալի բառեր: ասիմպտոտիկ մեթոդ, անիզոտրոպ սալեր, խառը պայմաններ, ներքին խնդիր:

Ասիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության եռաչափ հավասարումներից դուրս են բերված մասնական ածանցյալներով երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ սալի հաշվարկման համար: Սալի դիմային մակերևույթների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի պայմաններ: Դիտարկված է կոնկրետ օրինակ:

Balasyan E.S.

Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic two-layer plate with incomplete contact between the layers

Key words: asymptotic method, anisotropic plate, mixed conditions, interior problem.

A question of solution stress-strain state in three dimension problem for an asymptotic plate, with full contact between the layers, is considered. In the surface of plate are given mixed conditions of theory of elasticity. With appliance of asymptotic method of integration, solutions of the interior problem is built. Some cases examples are considered.

Введение. В работе [1] асимптотическим методом построена приближённая теория изгиба пластин из изотропных материалов. Классические статические краевые задачи анизотропных полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [2]. Асимптотический метод использован для решения второй и смешанных краевых задач в [2,3]. В [4] тем же методом определено напряжённо-деформированное состояние слоистой пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида. Было проведено сопоставление выведенных основных уравнений с соответствующими уравнениями классической теории слоистых пластин, когда имеется плоскость упругой симметрии.

В работах [5,6] рассмотрен вопрос определения напряжённо-деформированного состояния анизотропной однослойной и слоистой термоупругой пластинки, когда на

одной из лицевых поверхностей заданы значения напряжений, а на другой – нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные напряжения. Смешанная краевая задача для анизотропной пластинки решена в [7].

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматривается смешанная краевая задача теории упругости для двухслойной анизотропной пластинки: $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1, h_1 + h_2 \ll l\}$, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. Величины, относящиеся к верхнему слою, отмечены индексом (1), а к нижнему слою – индексом (2). Толщины и коэффициенты упругости слоёв, соответственно, h_k и $a_{ij}^{(k)}$, ($k = 1, 2$), а $l = \max(a, b)$.

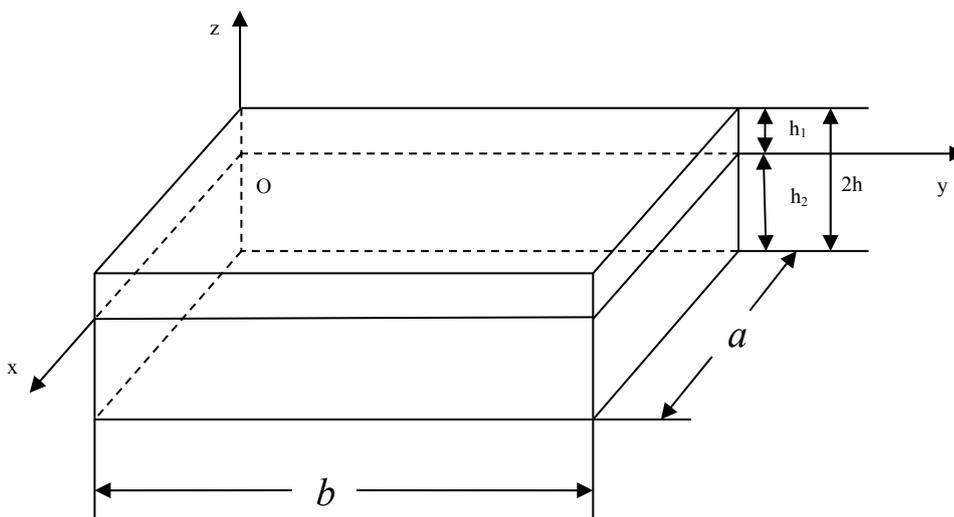
Координатную систему Oxy выберем на плоскости контакта слоёв (фиг. 1).

На лицевых плоскостях пластинки заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{xz}^-(x, y), \quad \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{yz}^-(x, y), \quad w^{(2)} = \frac{l}{h} w^-(x, y) \quad \text{при } z = -h_2 \\ u^{(1)} = \frac{l}{h} u^+(x, y), \quad v^{(1)} = \frac{l}{h} v^+(x, y), \quad \sigma_z^{(1)} = \frac{l}{h} \sigma_z^+(x, y) \quad \text{при } z = h_1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Краевые условия на торцах $x = 0, a$ и $y = 0, b$ пока произвольные, а между слоями выполняется неполный контакт, т.е. при $z = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \\ u^{(2)} - u^{(1)} = f_1(x, y), \quad v^{(2)} - v^{(1)} = f_2(x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг.1

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений теории упругости [8]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} &= 0 \quad (k=1,2) \\
\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k)}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(k)}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} &= a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{14}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{15}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
\frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} &= a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{24}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{25}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
\frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} &= a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
\frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} &= a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{24}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{34}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} &= a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)} \\
\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} &= a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k)} + a_{36}^{(k)} \sigma_z^{(k)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.3), вводя безразмерную координатную систему $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, получим систему, которая содержит малый геометрический параметр $\varepsilon = h/l$. Также используются следующие обозначения: $\zeta_1 = h_1/h$, $\zeta_2 = -h_2/h$, $h_1 + h_2 = 2h$. Решение полученной сингулярно-возмущённой системы состоит из решений внутренней задачи и пограничного слоя.

Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде суммы [1-4]:

$$Q^{(k)} = \varepsilon^q \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(s,k)}, \tag{1.4}$$

где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений.

Значения для q подбираются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему. Для рассматриваемой задачи эта цель достигается лишь при [3,5-7]:

$$q = -1 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)},$$

$$q = 0 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4), с учётом (1.5), в преобразованные уравнения теории упругости (1.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (x, y; \xi, \eta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{zy}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(k,s)}}{\partial \zeta} = 0$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k,s)} + a_{13}^{(k)} \sigma_z^{(k,s)} + a_{14}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{15}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \eta} = a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_z^{(k,s)} + a_{24}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} +$$

$$+ a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} = a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} +$$

$$+ a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)}, \quad (u, v; \xi, \eta; 5, 4; 1, 2; x, y)$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \xi} = a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k,s)} + a_{36}^{(k)} \sigma_z^{(k,s)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} +$$

$$+ a_{56}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s)}$$

Интегрируя систему (1.6) по ζ , получим:

$$\sigma_z^{(k,s)} = \sigma_z^{*(k,s)} + \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad \sigma_x^{(k,s)} = \sigma_x^{*(k,s)} + \tau_{x0}^{(k,s)} + a_3 \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad (x, y; a, b),$$

$$U^{(k,s)} = u^{*(k,s)} + u^{(k,s)} \quad (U, V, W), \quad (1.7)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \sigma_{xy}^{*(k,s)} + \tau_{xy0}^{(k,s)} + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad \sigma_{xz}^{(k,s)} = \sigma_{xz}^{*(k,s)} + \tau_{xz1}^{(k,s)} \zeta + \sigma_{xz0}^{(k,s)}, \quad (x, y),$$

где

$$\tau_{x0}^{(k,s)} = B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{(k,s)}, \quad (1, 2; x, y),$$

$$\tau_{xy0}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{(k,s)}$$

$$\tau_{xz1}^{(k,s)} = - \left(\frac{\partial \tau_{x0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy0}^{(k,s)}}{\partial \eta} + a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right), \quad (x, y; \xi, \eta; a, b) \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_1^{(k,s)} = \frac{\partial u_0^{(k,s)}}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_2^{(k,s)} = \frac{\partial v_0^{(k,s)}}{\partial \eta}, \quad \omega^{(k,s)} = \frac{\partial u_0^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_0^{(k,s)}}{\partial \xi}.$$

Величины со звездочками, входящие в выражения (1.7), известны для каждого приближения s и определяются по формулам:

$$\sigma_z^{*(k,s)} = - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} \right) d\zeta,$$

$$\sigma_{xz}^{*(k,s)} = - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial \eta} \right) d\zeta, \quad (x, y; \xi, \eta) \quad (1.9)$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \left(a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + \right. \\ \left. + a_{56}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta \quad (u, v; 1, 2; 5, 4; \xi, \eta; x, y)$$

$$w^{*(k,s)} = \int_0^\zeta \left(a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + \right. \\ \left. + a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} \right) d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + a_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + a_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + \\ + a_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\sigma_y^{*(k,s)} = B_{12}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{22}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{26}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + b_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + b_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + \\ + b_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + c_3^{(k)} \sigma_z^{*(k,s)} + c_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + \\ + c_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)}$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_2^{*(k,s)} = \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \eta}, \quad \omega^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \xi}$$

Предполагается, что $Q^{(k,s-i)} \equiv 0$ при $s < i$.

Коэффициенты $B_{ij}^{(k)}$, $a_i^{(k)}$, $b_i^{(k)}$, $c_i^{(k)}$ определяются по известным формулам [4,8].

$\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, u_0^{(k,s)}, v_0^{(k,s)}, w_0^{(k,s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1) и (1.2).

Используя решение (1.7), удовлетворив условиям неполного контакта слоёв (1.2), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz0}^{(1,s)} &= \sigma_{xz0}^{(2,s)}, \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)}, \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)}, w_0^{(1,s)} = w_0^{(2,s)} \\ u_0^{(2,s)} &= u_0^{(1,s)} + f_1^{(s)}(\xi, \eta), v_0^{(2,s)} = v_0^{(1,s)} + f_2^{(s)}(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $f_k^{(0)}(\xi, \eta) = f_k(l\xi, l\eta)$, $f_k^{(s)}(\xi, \eta) = 0$ $s > 0$, $k = 1, 2$.

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{aligned} u_0^{(1,s)} &= u^{+(s)}(\xi, \eta) - u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), (u, v), \\ u_0^{(2,s)} &= u^{+(s)}(\xi, \eta) - u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + f_1^{(s)}(\xi, \eta), (u, v; f_1, f_2) \\ w_0^{(1,s)} &= w_0^{(2,s)} = w^{-(s)}(\xi, \eta) - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \\ \sigma_{z0}^{(1,s)} &= \sigma_{z0}^{(2,s)} = \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta) - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz0}^{(1,s)} &= \sigma_{xz0}^{(2,s)} = \sigma_{xz}^{-(s)}(\xi, \eta) + \left\{ L_{11}(B_{ij}^{(2)})u^{+(s)}(\xi, \eta) + L_{12}(B_{ij}^{(2)})v^{+(s)}(\xi, \eta) + \right. \\ &+ a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta_2 - \left\{ L_{11}(B_{ij}^{(2)})u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \right. \\ &+ L_{12}(B_{ij}^{(2)})v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta_2 - \\ &- \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2) + \left\{ L_{11}(B_{ij}^{(2)})f_1^{(s)}(\xi, \eta) + L_{12}(B_{ij}^{(2)})f_2^{(s)}(\xi, \eta) \right\} \zeta_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz0}^{(1,s)} &= \sigma_{yz0}^{(2,s)} = \sigma_{yz}^{-(s)}(\xi, \eta) + \left\{ L_{12}(B_{ij}^{(2)})u^{+(s)}(\xi, \eta) + L_{22}(B_{ij}^{(2)})v^{+(s)}(\xi, \eta) + \right. \\ &+ b_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \left. \right\} \zeta_2 - \left\{ L_{12}(B_{ij}^{(2)})u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \right. \\ &+ L_{22}(B_{ij}^{(2)})v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + b_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \eta} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial \xi} \left. \right\} \zeta_2 - \\ &- \sigma_{yz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2) + \left\{ L_{12}(B_{ij}^{(2)})f_1^{(s)}(\xi, \eta) + L_{22}(B_{ij}^{(2)})f_2^{(s)}(\xi, \eta) \right\} \zeta_2 \end{aligned}$$

Здесь $L_{ij}(B_{ij}^{(k)})$ – известные дифференциальные операторы второго порядка [8].

Окончательное решение внутренней задачи представим в виде:

$$\begin{aligned}
U^{(1,s)} &= u^{+(s)}(\xi, \eta) + u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), (u, v), \\
U^{(2,s)} &= u^{+(s)}(\xi, \eta) + u^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta) - u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + f_1^{(s)}(\xi, \eta), (u, v; f_1, f_2) \\
W^{(k,s)} &= w^{-(s)}(\xi, \eta) + w^{*(k,s)}(\xi, \eta, \zeta) - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2) \\
\sigma_z^{(k,s)} &= \sigma_z^{+(s)} + \sigma_z^{*(k,s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \\
\sigma_x^{(1,s)} &= B_{11}^{(1)} \frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{12}^{(1)} \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + B_{16}^{(1)} \left(\frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \\
&\quad + a_3^{(1)} \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta) - B_{11}^{(1)} \frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} - B_{12}^{(1)} \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} - \\
&\quad - B_{16}^{(1)} \left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right) + \sigma_x^{*(1,s)} - a_3^{(1)} \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \\
&\hspace{15em} (x, y; 1, 2; u, v; \xi, \eta; a_3^{(k)}, b_3^{(k)}) \\
\sigma_x^{(2,s)} &= B_{11}^{(2)} \frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + B_{16}^{(2)} \left(\frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \\
&\quad + a_3^{(2)} \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta) - B_{11}^{(2)} \frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} - B_{12}^{(2)} \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} - \\
&\quad - B_{16}^{(2)} \left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right) + \sigma_x^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta) - \\
&\quad - a_3^{(2)} \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + B_{11}^{(2)} \frac{\partial f_1^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial f_2^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \\
&\quad + B_{16}^{(2)} \left(\frac{\partial f_1^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial f_2^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right), (x, y; 1, 2; u, v; \xi, \eta; a_3^{(k)}, b_3^{(k)}) \tag{1.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(1,s)} = & B_{16}^{(1)} \frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{26}^{(1)} \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + B_{66}^{(1)} \left(\frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \\
& + c_3^{(1)} \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta) - c_3^{(1)} \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - B_{16}^{(1)} \frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} - \\
& - B_{26}^{(1)} \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} - B_{66}^{(1)} \left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right) + \\
& + \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(2,s)} = & B_{16}^{(2)} \frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{26}^{(2)} \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + B_{66}^{(2)} \left(\frac{\partial u^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) + \\
& + c_3^{(2)} \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta) - B_{16}^{(2)} \frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} - B_{26}^{(2)} \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} - \\
& - B_{66}^{(2)} \left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \right) + \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta) - c_3^{(2)} \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \\
& + B_{16}^{(2)} \frac{\partial f_1^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + B_{26}^{(2)} \frac{\partial f_2^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + B_{66}^{(2)} \left(\frac{\partial f_1^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial f_2^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(1,s)} = & \sigma_{xz}^{-(s)}(\xi, \eta) - \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(1)} \right) u^{+(s)}(\xi, \eta) + L_{12} \left(B_{ij}^{(1)} \right) v^{+(s)}(\xi, \eta) + \right. \\
& + a_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + c_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta + \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) u^{+(s)}(\xi, \eta) + \right. \\
& + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) v^{+(s)}(\xi, \eta) + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(1)} \right) u^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + L_{12} \left(B_{ij}^{(1)} \right) v^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + a_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \xi} + \right. \\
& + c_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta - \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) u^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) v^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + \right. \\
& + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \eta} \left. \right\} \zeta_2 + \sigma_{xz}^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta \right) - \\
& - \sigma_{xz}^{*(2,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_2 \right) + \left(L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) f_1^{(s)} \left(\xi, \eta \right) + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) f_2^{(s)} \left(\xi, \eta \right) \right) \zeta_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(2,s)} & = \sigma_{xz}^{-s} \left(\xi, \eta \right) - \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) u^{+(s)} \left(\xi, \eta \right) + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) v^{+(s)} \left(\xi, \eta \right) + \right. \\
& + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-s} \left(\xi, \eta \right)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-s} \left(\xi, \eta \right)}{\partial \eta} \left. \right\} \left(\zeta - \zeta_2 \right) + \left\{ L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) u^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + \right. \\
& + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) v^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right) + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_1 \right)}{\partial \eta} \left. \right\} \left(\zeta - \zeta_2 \right) + \\
& + \left(\sigma_{xz}^{*(2,s)} \left(\xi, \eta, \zeta \right) - \sigma_{xz}^{*(2,s)} \left(\xi, \eta, \zeta_2 \right) \right) - \\
& - \left(L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) f_1^{(s)} \left(\xi, \eta \right) + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) f_2^{(s)} \left(\xi, \eta \right) \right) \left(\zeta - \zeta_2 \right), \\
& \left(x, y, \xi, \eta, u, v, 1, 2; a_3^{(2)}, b_3^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

В формулах (1.11) необходимо учитывать, что

$$\begin{aligned}
u^{+(0)} & = \frac{u^+}{l}, \quad v^{+(0)} = \frac{v^+}{l}, \quad w^{-(0)} = \frac{w^-}{l}, \quad \sigma_z^{+(0)} = \sigma_z^+, \quad \sigma_{xz}^{-(0)} = \sigma_{xz}^-, \quad \sigma_{yz}^{-(0)} = \sigma_{yz}^-, \\
u^{+(s)} & = v^{+(s)} = w^{-(s)} = 0, \quad \sigma_z^{+(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} = \sigma_{yz}^{-(s)} = 0 \quad \text{при } s > 0.
\end{aligned}$$

При $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)}, h_1 = h_2$ полученные решения совпадают с соответствующими решениями для однослойной пластины [7].

2. Нежёсткий контакт. Остановимся более подробно на модели нежёсткого контакта. Суть этой модели состоит в следующем: принимается, что существует тонкий слой толщиной h_0 с исчезающе малой сдвиговой жёсткостью G_0 между контактирующими средами. Отношение

$$\chi = \lim_{\substack{h_0 \rightarrow 0 \\ G_0 \rightarrow 0}} \frac{h_0}{G_0}$$

может принимать любое значение от 0 до ∞ . Предельному случаю $\chi = 0$ соответствует жёсткий контакт, другому предельному случаю $\chi \rightarrow \infty$ – скользящий контакт.

Для промежуточного состояния принимаются

$$u^{(2)} - u^{(1)} = f_1^{(s)} = \chi_1 \frac{l}{h} \sigma_{xz} (z = 0), v^{(2)} - v^{(1)} = f_1^{(s)} = \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_{yz} (z = 0) \quad (2.1)$$

Постоянные χ_1, χ_2 имеют размерность m^3 / H и для анизотропных материалов имеют, вообще говоря, разные количественные значения. Для трансверсально-изотропных материалов с плоскостью изотропии $z = \text{const}$ и изотропных материалов имеет место соотношение $\chi_1 = \chi_2$.

Остальные условия контакта (1.2) остаются неизменными. Тогда, из (1.2) и (2.2) следует:

$$f_1^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_1 \sigma_{xz0}^{(k,s)}, f_2^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_2 \sigma_{yz0}^{(k,s)}. \quad (2.2)$$

Подставив значения $f_1^{(s)}(\xi, \eta)$ и $f_2^{(s)}(\xi, \eta)$ из (2.2) в (1.11), получим систему

дифференциальных уравнений для определения $\sigma_{xz0}^{(k,s)}$ и $\sigma_{yz0}^{(k,s)}$:

$$\begin{aligned} \chi_1 L_{11} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz0}^{(2,s)} + \chi_2 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz0}^{(2,s)} - \sigma_{xz0}^{(2,s)} &= p_1^{(s)}, \\ \chi_1 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz0}^{(2,s)} + \chi_2 L_{22} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz0}^{(2,s)} - \sigma_{yz0}^{(2,s)} &= p_2^{(s)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} p_1^{(s)} &= -\sigma_{xz}^{-(s)}(\xi, \eta) - L_{11} \left(C_{ij}^{(2)} \right) u^{+(s)}(\xi, \eta) - L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) v^{+(s)}(\xi, \eta) - \\ &\quad - a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \zeta_2 - c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{-(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \zeta_2 + L_{11} \left(C_{ij}^{(2)} \right) u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \\ &\quad + L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} \zeta_2 + \\ &\quad + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \zeta_2 + \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \quad (x, y; u, v; 1, 2; a_3^{(2)}, b_3^{(2)}; \xi, \eta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Систему (2.3) можно привести к одному уравнению четвёртого порядка относительно неизвестной функции $\sigma_{xz0}^{(2,s)}$ или $\sigma_{yz0}^{(2,s)}$:

$$\left\{ \chi_1 \chi_2 \left(L_{11} L_{22} - L_{12}^2 \right) - \chi_1 L_{11} - \chi_2 L_{22} \right\} \sigma_{xz0}^{(2,s)} + \sigma_{xz0}^{(2,s)} = \left(\chi_2 L_{22} - 1 \right) p_1^{(s)} - \chi_2 L_{12} p_2^{(s)} \quad (2.5)$$

$$\left\{ \chi_1 \chi_2 \left(L_{11} L_{22} - L_{12}^2 \right) - \chi_1 L_{11} - \chi_2 L_{22} \right\} \sigma_{yz0}^{(2,s)} + \sigma_{yz0}^{(2,s)} = \left(\chi_1 L_{11} - 1 \right) p_2^{(s)} - \chi_1 L_{12} p_1^{(s)} \quad (2.6)$$

В частном случае, когда $u^{(1)} = u^{(2)}$, но $v^{(1)} \neq v^{(2)}$, то $\chi_1 = 0$, $\chi_2 \neq 0$ и вместо системы (2.3) получим одно уравнение для определения $\sigma_{yz0}^{(2,s)}$

$$\begin{aligned} \chi_2 L_{22} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz0}^{(2,s)} - \sigma_{yz0}^{(2,s)} &= p_2^{(s)}, \\ \sigma_{xz0}^{(2,s)} &= -p_1^{(s)} + \chi_2 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz0}^{(2,s)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В другом частном случае, когда $v^{(1)} = v^{(2)}$, $u^{(1)} \neq u^{(2)}$, то $\chi_2 = 0$, $\chi_1 \neq 0$, и получим:

$$\begin{aligned} \chi_1 L_{11} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz0}^{(2,s)} - \sigma_{xz0}^{(2,s)} &= p_1^{(s)}, \\ \sigma_{yz0}^{(2,s)} &= -p_2^{(s)} + \chi_1 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz0}^{(2,s)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Имея решения системы (2.3) или уравнений (2.7) или (2.8), с помощью формул (1.7) получим окончательное решение внутренней задачи.

3. Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим пример. Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_z^+ &= 0, \quad u^+ = v^+ = 0, \quad w^- = 0, \\ \sigma_{xz}^- &= \tau_1 \cos \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{b} y, \quad \sigma_{yz}^- = \tau_2 \sin \frac{2\pi}{a} x \sin \frac{2\pi}{b} y. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В уравнениях (3.1), вводя безразмерные перемещения $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, получим:

$$\sigma_{xz}^- = \tau_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta, \quad \sigma_{yz}^- = \tau_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta. \quad (3.2)$$

Тогда из (2.4) с учётом (3.2) при $s = 0$ получим:

$$p_1^{(0)} = \tau_1 \cos \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{b} y, \quad p_2^{(0)} = \tau_2 \sin \frac{2\pi}{a} x \sin \frac{2\pi}{b} y. \quad (3.3)$$

Решение системы (2.3) в нулевом приближении ищется в виде

$$\sigma_{xz0}^{(2,0)} = \tau^{(1)} \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta, \quad \sigma_{yz0}^{(2,0)} = \tau^{(2)} \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta, \quad (3.4)$$

где коэффициенты $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ – пока неизвестные постоянные.

Подставив (3.4) в систему (2.3) и приравнявая коэффициенты при $\cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta$ и $\sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta$, получим следующую систему

$$\begin{aligned} -\tau^{(1)} \left[\chi_1 \left(C_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) + 1 \right] + \tau^{(2)} \chi_2 \left(C_{12}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) &= \tau_1, \\ \tau^{(1)} \chi_1 \left(C_{12}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) + \tau^{(2)} \left[\chi_2 \left(C_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) - 1 \right] &= \tau_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение системы (3.5) имеет вид :

$$\tau^{(1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \tau^{(2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= -\chi_1 \chi_2 \left[\left(C_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) \left(C_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) + \left(C_{12}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \chi_1 \left(C_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) + \chi_2 \left(C_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) - 1 \\ \Delta_1 &= \chi_2 \left[\tau_1 \left(C_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) - \tau_2 \left(C_{12}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) \right] - \tau_1 \\ \Delta_2 &= -\chi_1 \left[\tau_2 \left(C_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) - \tau_1 \left(C_{12}^{(2)} + C_{66}^{(2)} \right) \right] - \tau_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если ограничиться нулевым приближением, то будем иметь:

$$U^{(1,0)} = 0, \quad (U, V), W^{(k,0)} = 0, \quad \sigma_x^{(1,0)} = \sigma_y^{(1,0)} = \sigma_z^{(k,0)} = \sigma_{xy}^{(1,0)} = 0,$$

$$U^{(2,0)} = \chi_1 \frac{\Delta_1}{\Delta} \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta,$$

$$V^{(2,0)} = \chi_2 \frac{\Delta_2}{\Delta} \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta,$$

$$\sigma_x^{(2,0)} = \left(-B_{11}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{a} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{b} \right) \frac{2\pi l}{\Delta} \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta,$$

$$\sigma_y^{(2,0)} = \left(-B_{22}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{b} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{a} \right) \frac{2\pi l}{\Delta} \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta, \quad (3.7)$$

$$\sigma_{xy}^{(2,0)} = B_{66}^{(2)} \frac{2\pi l}{\Delta} \left(-\chi_1 \frac{\Delta_1}{b} + \chi_2 \frac{\Delta_2}{a} \right) \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1,0)} &= \sigma_{xz}^- + \left(L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_1 \frac{\Delta_1}{\Delta} \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ &\quad \left. + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_2 \frac{\Delta_2}{\Delta} \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) \zeta_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2,0)} &= \sigma_{xz}^- - \frac{1}{\Delta} \left(L_{11} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_1 \Delta_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ &\quad \left. + L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_2 \Delta_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) (\zeta - \zeta_2), \end{aligned}$$

$$\sigma_{yz}^{(1,0)} = \sigma_{yz}^- + \frac{1}{\Delta} \left(L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_1 \Delta_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + L_{22} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_2 \Delta_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) \zeta_2, \\ \sigma_{yz}^{(2,0)} = \sigma_{yz}^- - \frac{1}{\Delta} \left(L_{12} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_1 \Delta_1 \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + L_{22} \left(B_{ij}^{(2)} \right) \chi_2 \Delta_2 \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right) (\zeta - \zeta_2).$$

При $s = 1$ отличны от нуля только величины:

$$W^{(1,1)} = \left\{ a_{13}^{(2)} \left(-B_{11}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{a} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{b} \right) \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + a_{23}^{(2)} \left(-B_{22}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{b} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{a} \right) \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right\} 2\pi l \zeta_2, \\ W^{(2,1)} = \left\{ a_{13}^{(2)} \left(-B_{11}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{a} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{b} \right) \sin \frac{2\pi l}{a} \xi \cos \frac{2\pi l}{b} \eta + \right. \\ \left. + a_{23}^{(2)} \left(-B_{22}^{(2)} \chi_1 \frac{\Delta_1}{b} + B_{12}^{(2)} \chi_2 \frac{\Delta_2}{a} \right) \cos \frac{2\pi l}{a} \xi \sin \frac{2\pi l}{b} \eta \right\} 2\pi l (\zeta - \zeta_2). \quad (3.8)$$

Заключение. В работе асимптотическим методом построено решение смешанной внутренней задачи анизотропной двухслойной пластины, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, при неполном контакте между слоями. Решение внутренней задачи не содержит произвольных постоянных. Для удовлетворения торцевым условиям при $x = 0, a$ необходимо построить решения типа пограничного слоя вблизи этих торцов [2-4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т.26. Вып. 4. С. 668-686. Goldenveizer A.L. The construction of the bending approximate theory by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory // J. Appl. Math. Mech. 1962. T.26. Is. 4, pp. 668-686 (in Russian).
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с. Aghalovian L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore-London: World Scientific Publ. 2015. 376p.
3. Агаловян Л.А., Геворгян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. Aghalovian L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-value problems of asymptotic layered beams, plates and shells. Erevan. 2005. 468p. (in Russian).

4. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида // Известия НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. №3. С.10-22. Aghalovian L.A., Baghdasaryan Yu.M., Khachatryan A.M. On determination of stress-strain state of sandwich-type plates with general anisotropy. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1996. Vol. 49. Issue 3, pp. 10-22 (in Russian).
5. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки // Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. № 3-4. С.3-11. Aghalovian L.A., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of mixed tree dimentions interior problem for anisotropic thermoelastic plate. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1993. Vol. 46. Issue 3-4, pp. 3-11 (in Russian).
6. Хачатрян А.М., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной слоистой пластинки. /Труды Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 08-12 октября, 2012, Цахкадзор, Армения. Т.2. С.229-233. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of mixed tree dimention interior problem for anisotropic plate. //Proceedings of International Conferance «Topical Problems of Continuum Mechanics». Tsaghkadzor, Armenia. October 08-12, 2012. Vol.2, pp. 229-233 (in Russian).
7. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. // Изв. НАН РА. Механика. 2009. Т. 62. №4. С.65-72. Petrosyan G.A., Khachatryan A.M. The asymptotic solution of one mixed boundary problem of an anisotropic plate. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2009. Vol. 62. № 4. Pp. 65-72 (in Russian).
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic shells. M.: Nauka, 1967. 268p. (in Russian).
9. Баласанян Е.С., Петросян Г.А. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки. //Труды межд. школы-конф. молодых учёных «Механика-2013», посвящ. 70-летию НАН Армении. Ереван, 2013. С.88-92. Balasanyan E.S., Petrosyan G.A. Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic two-layer plate. //Proceedings of International school-conferance of young scientists. «Mechanics-2013», Dedicated to the 70-th anniversary of NAS of Armenia. Yerevan, 2013. Pp. 88-92.

Сведения об авторе:

Баласанян Евгения Самвеловна – преподаватель кафедры математики АрГУ НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5. Тел.: (37497) 170620, (37447)970620, **E-mail:** majvazjan@mail.ru

Поступила в редакцию 11.07.2017

УДК 539.3; 534.2

**СВОБОДНЫЕ ИНТЕРФЕЙСНЫЕ И КРАЕВЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ТОНКИХ УПРУГИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНЫМИ ТОРЦАМИ**
Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Михасев Г.И.

Ключевые слова: интерфейсные и краевые колебания, собственные частоты, оболочка.

Исследуются свободные краевые и интерфейсные колебания замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек со свободными торцами, составленных из конечных ортотропных тонких упругих цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами. Используя систему дифференциальных уравнений соответствующих классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, выводятся дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот краевых и интерфейсных колебаний составной цилиндрической оболочки. Установлены асимптотические связи между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для составной пластины-полосы и прямоугольной пластины, соответственно. Приводится механизм, с помощью которого расчленяются возможные типы краевых и интерфейсных колебаний.

Դուլղազարյան Գ.Ռ., Դուլղազարյան Լ.Գ., Միխասև Գ.Ի.

**Ազատ ծայրերով բարակ առաձգական շրջանային զլանային թաղանթների
սեփական ինտերֆեյսային և եզրային տատանումները**

Բանալի բառեր. ինտերֆեյսային և եզրային տատանումներ, սեփական հաճախություններ, թաղանթ:

Հետազոտվում է ազատ ծայրերով փակ և բաց բաղադրյալ զլանային թաղանթի սեփական ինտերֆեյսային և եզրային տատանումները, որը կազմված է տարբեր առաձգականության հատկություններ ունեցող բարակ զլանային թաղանթներից: Օգտվելով օրթոտրոպ զլանային թաղանթների դասական տեսության հավասարումների համակարգից, արտածվում է դիսպերսիոն հավասարումներ, որոնցով գտնվում է բաղադրյալ զլանային թաղանթի հնարավոր սեփական ինտերֆեյսային և եզրային տատանումների հաճախությունները: Ասիմպտոտիկ կապ է հաստատված դիսպերսիոն խնդրի և բաղադրյալ սալ-շերտի ու ուղղանկյուն սալի համար նման խնդիրների դիսպերսիոն հավասարումների միջև: Ցուցադրված է մեխանիզմ, որով կարելի է տարանջատել ինտերֆեյսային և եզրային տատանումների տիպերը:

Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G., Mikhasev G.I.

Free interfacial and boundary vibrations of thin elastic circular cylindrical shells with free ends

Keywords: interfacial and boundary vibrations, eigenfrequencies, shell.

Free boundary and interfacial vibrations of closed and non-closed cylindrical shells composed of two finite orthotropic thin cylindrical shells with different elastic properties are studied. Using the system of equations of the related classical theory of orthotropic cylindrical shells dispersion equations and asymptotic formulas for obtaining eigenfrequencies of possible interfacial and boundary vibrations of composed cylindrical shells are derived. Asymptotic links are established between the dispersion equations of problems at hand and analogous problems for a composed rectangular plate and plate-strip, respectively. An algorithm for separating possible interfacial vibrations is presented.

Введение. Исследования колебательных процессов в составных пластинах и цилиндрических оболочках занимают важное место в динамике деформируемого твёрдого тела. Это обусловлено практическими вопросами машиностроения, строительства, приборостроения, сейсмозащиты и т.д. Для тонких цилиндрических

оболочек большое значение приобретает изучение собственных колебаний, локализованных у свободного края оболочки – краевые колебания и локализованные у границы раздела свойств материала – интерфейсные колебания.

Начало исследования упругих поверхностных волн связано с работой Рэлея [1], в которой установлено существование упругих поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства с амплитудой, быстро убывающей с глубиной. Такие волны, возникающие у свободного края упругих тел различной геометрии, обычно называются поверхностными волнами типа Рэлея [2-4]. Вопрос существования собственных колебаний, затухающих от свободного края цилиндрической оболочки, изучены в [6-17] из [12]. Начало исследования собственных интерфейсных колебаний связаны с работами [5-6], в которых исследуются аналоги волн Стоунли [7]. В работах [8-9] изучены свободные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих полубесконечных составных пластин-полос со свободным краем и прямоугольных составных пластин со свободными противоположными краями.

Вопрос существования собственных интерфейсных и краевых колебаний замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек изучены в [21-24], [28] из [12], в которых установлены асимптотические связи между дисперсионными уравнениями для составных цилиндрических оболочек с разными граничными условиями и аналогичных задач для бесконечной составной пластины и пластины-полосы, при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих.

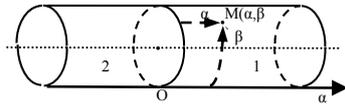
В настоящей работе изучаются собственные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек со свободными торцами, составленных из конечных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Предполагается, что у линии раздела свойств материала имеется полный контакт. В случае незамкнутой цилиндрической оболочки предполагается, что граничные образующие шарнирно закреплены. Часть результатов этой работы докладывалась на IV международной конференции 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения [13].

Выводятся дисперсионные уравнения для определения собственных частот возможных типов интерфейсных и краевых колебаний для замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения для полубесконечных и бесконечных цилиндрических оболочек. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для составной пластины-полосы и прямоугольной пластины при наличии шарнирного закрепления Навье на смежных сторонах.

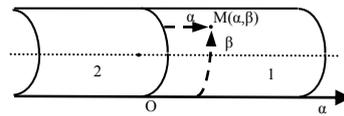
С помощью полученных ниже дисперсионных уравнений и их асимптотических формул, можно, меняя геометрию оболочек и механические свойства материала, управлять спектром, смещая начало спектра или точки сгущения из нежелательной области резонанса.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматриваются свободные интерфейсные и краевые колебания замкнутых (незамкнутых) цилиндрических оболочек, составленных из конечных ортотропных тонких упругих цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Введём на срединной поверхности оболочки криволинейные координаты (α, β) , где $\alpha(-l^{(2)} < \alpha \leq l^{(1)})$ и $\beta(0 \leq \beta \leq s)$ являются соответственно ориентированной переменной длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности. s – полная длина направляющей окружности (фиг.

1,2). $\alpha = 0$ соответствует границе раздела свойств материала. Все величины, относящиеся к правой оболочке ($0 \leq \alpha \leq l^{(1)}$), отмечаются верхним индексом (1), к левой оболочке ($-l^{(2)} < \alpha \leq 0$) – индексом (2).



Фиг.1



Фиг.2

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания левых и правых цилиндрических оболочек, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записываются в выбранных криволинейных координатах α, β в виде (1.1) из [12]. В этих уравнениях $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}$ ($r = 1, 2$) – проекции вектора перемещений соответственно в направлениях α, β и нормали к срединной поверхности оболочки; R – радиус направляющей окружности срединной поверхности; $\mu^4 = h^2 / 12$ (h – толщина оболочки); ω – угловая частота собственных колебаний; $\rho^{(r)}$ ($r = 1, 2$) – плотности материалов; $B_{ij}^{(r)}$ ($r = 1, 2$) – коэффициенты упругости составляющих цилиндрических оболочек.

Рассматриваются следующие граничные условия:

$$T_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = T_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, S_{12}^{(1)} + \frac{H^{(1)}}{R} \Big|_{\alpha=0} = S_{12}^{(2)} + \frac{H^{(2)}}{R} \Big|_{\alpha=0}, M_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = M_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0},$$

$$N_1^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0} = N_1^{(2)} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0}, u_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, \quad (1.1)$$

$$u_2^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_2^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, u_3^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_3^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0};$$

$$T_1^{(r)} \Big|_{\alpha=(-1)^{r-1} l^{(r)}} = 0, S_{12}^{(r)} + \frac{H^{(r)}}{R} \Big|_{\alpha=(-1)^{r-1} l^{(r)}} = 0, M_1^{(r)} \Big|_{\alpha=(-1)^{r-1} l^{(r)}} = 0, \quad (1.2)$$

$$N_1^{(r)} + \frac{\partial H^{(r)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=(-1)^{r-1} l^{(r)}} = 0, r = 1, 2;$$

$$u_i^{(r)}(\alpha, \beta) = u_i^{(r)}(\alpha, \beta + s), i = 1, 2, 3; r = 1, 2; \quad (1.3)$$

$$T_2^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = u_1^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = u_3^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = M_2^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = 0, r = 1, 2; \quad (1.4)$$

где выражения для $T_i^{(r)}, S_{12}^{(r)}, M_i^{(r)}, H^{(r)}, N_1^{(r)}$ имеют вид (1.6) из работы [12].

Граничные условия (1.1)-(1.3) соответствуют замкнутой цилиндрической оболочке: соотношения (1.1) выражают условия полного контакта при $\alpha = 0$, условия (1.2) – условиями свободного края при $\alpha = l^{(1)}$ и $\alpha = -l^{(2)}$, а (1.3) – условия периодичности колебания, где s – полная длина направляющей окружности срединной

поверхности (фиг.1). Граничные условия (1.1),(1.2), (1.4) соответствуют цилиндрической оболочке открытого профиля: соотношения (1.4) являются условиями шарнирного закрепления по образующим $\beta = 0$ и $\beta = s$, где s – длина дуги окружности срединной поверхности между шарнирно закреплёнными образующими (фиг.2).

2. Вывод дисперсионных уравнений. В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1) из [12] угловую частоту ω формально заменим на $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, соответственно. Вводятся обозначения: $k = 2\pi n_0 / s$, $n_0 \in N$ для замкнутой цилиндрической оболочки, и $k = \pi / s$ для цилиндрической оболочки открытого профиля. Пусть $R^{-1} = kr_0 / 2$, где r_0 – безразмерный параметр. Решение системы (1.1) из [12] ищется в виде

$$(u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}) = (u_m^{(r)} \sin km\beta, v_m^{(r)} \cos km\beta, \sin km\beta) \times \exp((-1)^r \chi^{(r)} k\alpha + \chi^{(r)} kl^{(r)}), \quad r = 1, 2; \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Здесь m – волновое число, $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}, \chi^{(r)}$ – неопределённые константы. При этом, условия (1.3) и (1.4) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, если придавать параметру k разные значения. Подставляя выражения (2.1) в преобразованную систему, получим:

$$(c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)}) u_m^{(r)} = \frac{(-1)^r \chi^{(r)} r_0}{2} \left\{ a_m^{(r)} - a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} l_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} d_m^{(r)} \right\}, \quad (2.2)$$

$$(c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)}) v_m^{(r)} = \frac{r_0 m}{2} \{ b_m^{(r)} - a^2 g_m^{(r)} l_m^{(r)} \}, \quad (2.3)$$

$$R_{mm}^{(r)} c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} \left\{ c_m^{(r)} + m^2 b_m^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 a_m^{(r)} + a^2 (R_{mm}^{(r)} g_m^{(r)} d_m^{(r)} - 2m^2 l_m^{(r)} b_m^{(r)}) + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_m^{(r)} \left(b_m^{(r)} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 \right) + a^4 m^2 g_m^{(r)} (l_m^{(r)})^2 \right\} = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (2.4)$$

$$a_m^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2, \quad b_m^{(r)} = B_1^{(r)} (\chi^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2, \quad a^2 = \mu^4 k^2, \quad (2.5)$$

$$c_m^{(r)} = (\chi^{(r)})^4 - B_2^{(r)} (\chi^{(r)})^2 m^2 + \left(\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2 + (\eta_2^{(r)})^2 \right) (\chi^{(r)})^2 + \left(m^2 - (\eta_1^{(r)})^2 \right) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_2^{(r)})^2 \right),$$

$$B_1^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}}, \quad B_2^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}},$$

$$d_m^{(r)} = \frac{4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - m^2, \quad g_m^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{66}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (m^2 - (\eta_1^{(r)})^2),$$

$$l_m^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - m^2, \quad (\eta_i^{(r)})^2 = \frac{\lambda_i^{(r)}}{B_{66}^{(r)} k^2} = \frac{\omega^2 \rho_i^{(r)}}{B_{66}^{(r)} k^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2 \left(\frac{B_{11}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^4 - \frac{2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)})}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + m^4 \right) - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta_3^{(r)})^2.$$

Пусть $\chi_j^{(r)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) – попарно различные нули уравнения (2.4) с положительными действительными частями и $\chi_{j+4}^{(r)} = -\chi_j^{(r)}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Пусть $(u_{1j}^{(r)}, u_{2j}^{(r)}, u_{3j}^{(r)})$ – нетривиальные решения вида (2.1) системы (1.1) из [12] при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ ($j = 1, 2, \dots, 8$) соответственно. Представляя решения рассматриваемых задач в виде

$$u_i^{(r)} = \sum_{j=1}^8 w_j^{(r)} u_{ij}^{(r)}, \quad i = 1, 2, 3; r = 1, 2 \quad (2.6)$$

и учитывая граничные условия (1.2)–(1.3), получим совокупность систем уравнений:

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} \exp(k \chi_j^{(1)} l^{(1)}) w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^8 \frac{c M_{ij}^{(2)} \exp(k \chi_j^{(2)} l^{(2)}) w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i = \overline{1, 4};$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} \exp(k \chi_j^{(1)} l^{(1)}) w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(2)} \exp(k \chi_j^{(2)} l^{(2)}) w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i = \overline{5, 8};$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} = 0, \quad i = \overline{9, 12}; \quad c = \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}};$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i = \overline{13, 16}; \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (2.7)$$

$$M_{13j}^{(2)} = M_{1j}^{(2)}, \quad M_{14j}^{(2)} = M_{2j}^{(2)}, \quad M_{15j}^{(2)} = M_{3j}^{(2)}, \quad M_{16j}^{(2)} = M_{4j}^{(2)}, \quad j = 1, 2, \dots, 8,$$

а остальные значения для $M_{ij}^{(r)}$ заданы в виде (2.8) из [12].

Нижний индекс j означает, что соответствующая функция взята при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$. Чтобы совокупность систем уравнений (2.7) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы совокупность уравнений имела решения:

$$\Delta = \text{Det} \left\| T_{ij} \right\|_{i,j=1}^4 = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \exp(k\chi_j^{(1)} l^{(1)}) \right\|_{i,j=1}^4, & T_{12} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \exp(k\chi_j^{(1)} l^{(1)}) \right\|_{i=1,j=5}^{4,8}; \\
T_{13} &= c \left\| M_{ij}^{(2)} \exp(k\chi_j^{(2)} l^{(2)}) \right\|_{ij=1}^4, & T_{14} &= c \left\| M_{ij}^{(2)} \exp(k\chi_j^{(2)} l^{(2)}) \right\|_{i=1,j=5}^{4,8}; \\
T_{21} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \exp(k\chi_j^{(1)} l^{(1)}) \right\|_{i=5,j=1}^{8,4}, & T_{22} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \exp(k\chi_j^{(1)} l^{(1)}) \right\|_{i,j=5}^8; \\
T_{23} &= \left\| M_{ij}^{(2)} \exp(k\chi_j^{(2)} l^{(2)}) \right\|_{i=5,j=1}^{8,4}, & T_{24} &= \left\| M_{ij}^{(2)} \exp(k\chi_j^{(2)} l^{(2)}) \right\|_{i,j=5}^8; \\
T_{31} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \right\|_{i=9,j=1}^{12,4}, & T_{32} &= \left\| M_{ij}^{(1)} \right\|_{i=9,j=5}^{12,8}, & T_{33} &= 0, & T_{34} &= 0; \\
T_{41} &= 0, & T_{42} &= 0, & T_{43} &= c \left\| M_{ij}^{(2)} \right\|_{i=13,j=1}^{16,4}, & T_{44} &= c \left\| M_{ij}^{(2)} \right\|_{i=13,j=5}^{16,8}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Заметим, что если в уравнении (2.8) корни уравнения (2.4) $\chi_j^{(r)}, j = \overline{1,8}, r = 1, 2$ заменить на $-\chi_j^{(r)}, j = \overline{1,8}, r = 1, 2$, то получим уравнение, эквивалентное (2.8). Интерфейсным колебаниям соответствуют четыре корня с положительными действительными частями, а крайвым колебаниям соответствуют четыре корня с отрицательными действительными частями.

Численный анализ показывает, что левая часть равенства (2.8) становится малой, когда любые два корня уравнения (2.4) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчёты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель в левой части равенства (2.8), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Для этого вводятся обозначения:

$$x_j^{(r)} = \frac{\chi_j^{(r)}}{m}, z_j^{(r)} = -kml^{(r)} x_j^{(r)}, j = 1, 2, 3, 4; \quad \eta_{mi}^{(r)} = \frac{\eta_i^{(r)}}{m}, i = 1, 2, 3; r = 1, 2, \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_m = \frac{r_0}{2m}; \quad \delta_m = 1 + 4a^2 m^2 \varepsilon_m^2,$$

$$[z_i^{(r)} z_j^{(r)}] = -kml^{(r)} (\exp(z_i^{(r)}) - \exp(z_j^{(r)})) / (z_i^{(r)} - z_j^{(r)}),$$

$$[z_i^{(r)} z_j^{(r)} z_k^{(r)}] = -kml^{(r)} ([z_i^{(r)} z_j^{(r)}] - [z_i^{(r)} z_k^{(r)}]) / (z_j^{(r)} - z_k^{(r)}),$$

$$[z_1^{(r)} z_2^{(r)} z_3^{(r)} z_4^{(r)}] = -kml^{(r)} ([z_1^{(r)} z_2^{(r)} z_3^{(r)}] - [z_1^{(r)} z_2^{(r)} z_4^{(r)}]) / (z_3^{(r)} - z_4^{(r)}), r = 1, 2,$$

$$\sigma_1^{(r)} = \sigma_1^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)} + x_2^{(r)} + x_3^{(r)} + x_4^{(r)},$$

$$\sigma_2^{(r)} = \sigma_1^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)} x_2^{(r)} + x_1^{(r)} x_3^{(r)} + x_1^{(r)} x_4^{(r)} + x_2^{(r)} x_3^{(r)} + x_2^{(r)} x_4^{(r)} + x_3^{(r)} x_4^{(r)},$$

$$\sigma_3^{(r)} = \sigma_1^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)} x_2^{(r)} x_3^{(r)} + x_1^{(r)} x_2^{(r)} x_4^{(r)} + x_1^{(r)} x_3^{(r)} x_4^{(r)} + x_2^{(r)} x_3^{(r)} x_4^{(r)},$$

$$\sigma_4^{(r)} = \sigma_4^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)} x_2^{(r)} x_3^{(r)} x_4^{(r)}, \quad \bar{\sigma}_n^{(r)} = \sigma_n^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, 0), \tag{2.11}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_n^{(r)} = \sigma_n^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, 0, 0), n = 1, 2, 3, 4; r = 1, 2; \quad \bar{\bar{\sigma}}_4^{(r)} = \bar{\bar{\sigma}}_3^{(r)} = \bar{\bar{\sigma}}_3^{(r)} = 0$$

Пусть $f_n^{(r)}$ ($n=1,2,\dots,6$) – симметрический многочлен n -й степени от переменных $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}$. Известно, что он выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом. Обозначая

$$f_n^{(r)} = f_n^{(r)}(\sigma_1^{(r)}, \sigma_2^{(r)}, \sigma_3^{(r)}, \sigma_4^{(r)}), \bar{f}_n^{(r)} = f_n^{(r)}(\bar{\sigma}_1^{(r)}, \bar{\sigma}_2^{(r)}, \bar{\sigma}_3^{(r)}, 0), \quad (2.12)$$

$$\bar{\bar{f}}_n^{(r)} = f_n^{(r)}(\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)}, \bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)}, 0, 0), n = 1, 2, \dots, 6$$

$$f_1^{(r)} = \sigma_1^{(r)}, f_2^{(r)} = (\sigma_1^{(r)})^2 - \sigma_2^{(r)}, f_3^{(r)} = (\sigma_1^{(r)})^3 - 2\sigma_1^{(r)}\sigma_2^{(r)} + \sigma_3^{(r)},$$

$$f_4^{(r)} = (\sigma_1^{(r)})^4 - 3(\sigma_1^{(r)})^2\sigma_2^{(r)} + (\sigma_2^{(r)})^2 + 2\sigma_1^{(r)}\sigma_3^{(r)} - \sigma_4^{(r)},$$

$$\bar{f}_5^{(r)} = (\bar{\sigma}_1^{(r)})^5 - 4(\bar{\sigma}_1^{(r)})^3\bar{\sigma}_2^{(r)} + 3\bar{\sigma}_1^{(r)}(\bar{\sigma}_2^{(r)})^2 + 3(\bar{\sigma}_1^{(r)})^2\bar{\sigma}_3^{(r)} - 2\bar{\sigma}_2^{(r)}\bar{\sigma}_3^{(r)},$$

$$\bar{\bar{f}}_6^{(r)} = (\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)})^6 - 5(\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)})^4\bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)} + 6(\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)})^2(\bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)})^2 - (\bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)})^3$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.8), получим:

$$\Delta = m^{56} \exp(-\sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^4 z_j^{(r)}) (K^{(1)})^2 (K^{(2)})^2 \text{Det} \| t_{ij} \|_{i,j=1}^4 = 0 \quad (2.13)$$

$$K^{(r)} = (x_1^{(r)} - x_2^{(r)})(x_1^{(r)} - x_3^{(r)})(x_1^{(r)} - x_4^{(r)})(x_2^{(r)} - x_3^{(r)})(x_2^{(r)} - x_4^{(r)})(x_3^{(r)} - x_4^{(r)}), r = 1, 2.$$

$$t_{11} = \| m_{ij}^{(1)} \|_{i,j=1}^4, t_{12} = \| m_{ij}^{(1)} \|_{i=1,j=5}^{4,8}, t_{13} = c \| m_{ij}^{(2)} \|_{ij=1}^4, t_{14} = c \| m_{ij}^{(2)} \|_{i=1,j=5}^{4,8};$$

$$t_{21} = \| m_{ij}^{(1)} \|_{i=5,j=1}^{8,4}, t_{22} = \| m_{ij}^{(1)} \|_{i,j=5}^8, t_{23} = \| m_{ij}^{(2)} \|_{i=5,j=1}^{8,4}, t_{24} = \| m_{ij}^{(2)} \|_{ij=5}^8; \quad (2.14)$$

$$t_{31} = t_{12}, t_{32} = t_{11}, t_{33} = 0, t_{34} = 0; t_{41} = 0, t_{42} = 0, t_{43} = t_{14}, t_{44} = t_{13},$$

где

$$m_{1p+2k}^{(2)} = m_{pk+4}^{(2)}, m_{1p+2k+4}^{(2)} = m_{pk}^{(2)}, p = \overline{1,4}, k = \overline{1,4};$$

$$m_{ij}^{(2)} = 0, i = \overline{9,12}, j = \overline{1,8}; m_{ij}^{(1)} = 0, i = \overline{13,16}, j = \overline{1,8},$$

а остальные выражения для $m_{ij}^{(r)}$, $r = 1, 2$ приведены в приложении работы [12].

Из (2.15) следует, что уравнения (2.8) эквивалентны уравнениям

$$\nabla = \text{Det} \| t_{ij} \|_{i,j=1}^4 = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (2.15)$$

Учитывая возможные соотношения между $\eta_{1m}^{(r)}, \eta_{2m}^{(r)}, \eta_{3m}^{(r)}$, заключаем, что уравнение (2.13) определяет частоты соответствующих типов интерфейсных и краевых колебаний.

При $\eta_{1m}^{(r)} = \eta_{2m}^{(r)} = \eta_{3m}^{(r)} = \eta_m^{(r)}$ уравнение (2.4) является характеристическим уравнением системы (1.1) из [12]. Уравнение (2.15) при $k = 2\pi n_0 / s$, $n_0 \in N$ является дисперсионным уравнением задачи при условиях (1.1)-(1.3), а при $k = \pi / s$ – дисперсионным уравнением задачи при условиях (1.1),(1.2),(1.4).

3. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.15) при $R^{-1} \rightarrow 0$. При использовании формулы из пункта 2 положим, что $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$ ($r = 1, 2$). Тогда, при $R^{-1} \rightarrow 0$ ($r_0 \rightarrow 0$) уравнение (2.4) преобразуется в совокупность уравнений:

$$c_m^{(r)} = (\chi^{(r)})^4 - B_2^{(r)} (\chi^{(r)})^2 m^2 + (B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) / B_{11}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 (\chi^{(r)})^2 +$$

$$+ \left(m^2 - (\eta^{(r)})^2 \right) \left(B_{22}^{(r)} m^2 - B_{66}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 \right) / B_{11}^{(r)} = 0, \quad m = \overline{1, \infty} \quad (3.1)$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2 \left(B_{11}^{(r)} (\chi^{(r)})^4 - 2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)}) (\chi^{(r)})^2 + m^4 B_{22}^{(r)} \right) - B_{66}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad r = 1, 2, \quad (3.2)$$

которые являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины соответственно [8-9]. Корни $\chi^{(r)} / m$ уравнений (3.1) и (3.2) с положительными действительными частями обозначим через $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$ и $y_3^{(r)}, y_4^{(r)}$, соответственно.

Аналогичным образом, как в [12] из [12], доказывается, что при условии $\varepsilon_m \ll 1$, $y_j^{(r)} \neq y_i^{(r)}$, $i \neq j$

$$(3.3)$$

корни $(\chi^{(r)})^2 / m^2$ уравнения (2.4) можно представить в виде

$$(x_j^{(r)})^2 = (y_j^{(r)})^2 + \alpha_{jm}^{(r)} \varepsilon_m^2 + \beta_{jm}^{(r)} \varepsilon_m^4 + \dots, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (3.4)$$

При условии (3.3), учитывая соотношения (2.7) и (3.4) и тот факт, что

$$\frac{M_{3j}^{(r)}}{m^6} = \frac{M_{4j}^{(r)}}{m^7} = \frac{M_{7j}^{(r)}}{m^4} = \frac{M_{8j}^{(r)}}{m^5} = O(\varepsilon_m^2), \quad j = 1, 2, \quad r = 1, 2, \quad (3.5)$$

уравнения (2.15) приводятся к виду

$$\text{Det} \|t_{ij}\|_{ij=1}^4 = \left(\frac{B_{11}^{(1)} B_{11}^{(2)} N^{(1)} (\eta_m^{(1)}) N^{(2)} (\eta_m^{(2)})}{(B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}) (B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})} \right)^2 \left\{ \left(K_3^{(1)} (\eta_m^{(1)}) K_3^{(2)} (\eta_m^{(2)}) \right)^2 \times \right.$$

$$\times \text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^8 \cdot \text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^8 \left. \right\} + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.6)$$

$$N^{(r)} (\eta_m^{(r)}) = (y_1^{(r)} + y_3^{(r)}) (y_1^{(r)} + y_4^{(r)}) (y_2^{(r)} + y_3^{(r)}) (y_2^{(r)} + y_4^{(r)}),$$

$$K_3^{(r)} (\eta_m^{(r)}) = \left(1 - (\eta_m^{(r)})^2 \right) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) \times$$

$$\times \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - a^2 m^2 \frac{(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right) + \left(B_2^{(r)} - \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) \times$$

$$\times \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - a^2 m^2 \frac{(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 + \right.$$

$$\left. + a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right) + \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 + a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right)^2. \quad (3.7)$$

Из уравнений (3.6) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ совокупность уравнений (2.15) распадается на две совокупности уравнений

$$\text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^8 = 0; \text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^8 = 0; \text{ и } K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0; K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (3.8)$$

Первая и вторая совокупности уравнений (3.8) являются, соответственно, дисперсионными уравнениями собственных планарных и изгибных интерфейсных и краевых колебаний составной пластины-полосы со свободными краями ($k = 2\pi n_0 / s$) и прямоугольной пластины со свободными противоположными сторонами, когда остальные стороны шарнирно закреплены ($k = \pi / s$) (см. (1.17) и (2.14) из [9]). Корням третьей и четвертой совокупностей уравнений соответствуют планарные колебания цилиндрической оболочки. Они появляются в результате использования уравнения, соответствующего классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

При $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические уравнения [9]:

$$\text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^6 + \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, m = \overline{1, \infty}, \quad (3.9)$$

$$\text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^6 + \sum_{j=3}^4 O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) следует, что при $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ первые две совокупности уравнений из (3.8) распадается на совокупности уравнений

$$\text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^6 = 0, m = \overline{1, \infty}; K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, \infty}, \quad (3.11)$$

$$\text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^6 = 0, m = \overline{1, \infty}; K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (3.12)$$

Первые совокупности уравнений из (3.11), (3.12) являются, соответственно, дисперсионными уравнениями планарного и изгибного колебания для полубесконечной составной пластины со свободным краем $\alpha = l^{(1)}$.

Вторые совокупности уравнений из (3.11), (3.12) являются, соответственно, уравнениями Рэлея и Коненкова для полубесконечной пластины из материала (2) со свободным краем $\alpha = -l^{(2)}$ или пластины-полосы из материала (2) со свободным торцом $\alpha = -l^{(2)}$, когда смежные края шарнирно закреплены [8].

При $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические уравнения [8]:

$$\text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^6 = \left(B_{66}^{(1)} / B_{11}^{(1)} \right)^4 \left((B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}) / B_{11}^{(1)} \right)^2 (B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}) / B_{11}^{(2)} L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \quad (3.13)$$

$$+ \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, m = \overline{1, +\infty},$$

$$\text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^6 = G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \sum_{j=3}^4 O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, m = \overline{1, \infty}, \quad (3.14)$$

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left(B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} \right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \left[2 \left(y_1^{(1)} y_2^{(1)} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (1 - (\eta_m^{(1)})^2) \right) \left(y_1^{(2)} y_2^{(2)} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (1 - (\eta_m^{(2)})^2) \right) + \right. \\
& \left. + (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)})((1 - (\eta_m^{(2)})^2)y_1^{(1)}y_2^{(1)} + (1 - (\eta_m^{(1)})^2)y_1^{(2)}y_2^{(2)}) \right], \\
& K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2 \right) - (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)}, \quad r = 1, 2, \\
& Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = y_1^{(r)} y_2^{(r)} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2), \quad r = 1, 2, \tag{3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left[2 \left(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right) \times \right. \\
& \left. \times \left(y_3^{(2)} y_4^{(2)} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right) + (y_3^{(1)} + y_4^{(1)})(y_3^{(2)} + y_4^{(2)})(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + y_3^{(2)} y_4^{(2)}) \right], \quad m = \overline{1, +\infty}, \\
& K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (y_3^{(r)} y_4^{(r)})^2 + 4 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} y_3^{(r)} y_4^{(r)} - \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \right)^2, \quad r = 1, 2
\end{aligned}$$

Из (3.13) и (3.14) следует, что при $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ первые совокупности уравнений (3.11), (3.12) распадаются, соответственно, на совокупности уравнений:

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}; \quad K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}; \tag{3.16}$$

$$G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}; \quad K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}. \tag{3.17}$$

Первые совокупности уравнений из (3.16), (3.17) являются, соответственно, дисперсионными уравнениями типа Стоунли планарных и изгибных интерфейсных колебаний для бесконечной составной пластины или пластины-полосы, когда края шарнирно закреплены [24] из [12].

Вторые совокупности уравнений из (3.16), (3.17) являются, соответственно, уравнениями Рэлея и Коненкова для полубесконечной пластины из материала (1) со свободным краем $\alpha = l^{(1)}$ или пластины-полосы из материала (1) со свободным торцом $\alpha = l^{(1)}$, когда смежные края шарнирно закреплены [24] из [12].

При $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ и $ml^{(2)} \rightarrow \infty$, учитывая формулы (3.9), (3.10) и (3.13), (3.14), можно написать следующие асимптотические уравнения:

$$\begin{aligned}
& \text{Det} \| e_{ij} \|_{i,j=1}^8 = \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^4 \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left(\frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right)^2 \times \\
& \times L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(r)})) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \tag{3.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^8 &= \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \\ &+ \sum_{r=1}^2 \sum_{j=3}^4 O(\exp(z_j^{(r)})) = 0, m = \overline{1, \infty} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (3.18) и (3.19) следует, что при $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ и $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ первые две совокупности уравнений из (3.8) распадаются, соответственно, на совокупности уравнений

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.20)$$

$$G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (3.21)$$

При $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ и $ml^{(2)} \rightarrow \infty$, учитывая формулы (3.6), (3.18) и (3.19), для дисперсионных уравнений (2.15) можно написать следующие асимптотические уравнения:

$$\begin{aligned} \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^4 &= \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^4 \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right)^2 \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 \times \\ &\times \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \times \\ &\times K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^4 \sum_{r=1}^2 O(\exp(z_j^{(r)})), m = \overline{1, +\infty}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$, $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ и $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ уравнения (2.15) распадаются на совокупности уравнений:

$$\begin{aligned} K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) &= 0, m = \overline{1, +\infty}; \quad K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, +\infty}, \\ G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= 0, m = \overline{1, +\infty}; \quad L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, +\infty}, \\ K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)}) &= 0, m = \overline{1, +\infty}; \quad K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = 0, m = \overline{1, +\infty}; \quad r = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Таким образом, при $\varepsilon_m \rightarrow 0$, $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ и $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ собственные колебания составной цилиндрической оболочки расчленяются на локализованные, преимущественно, изгибного и планарного типа интерфейсных и краевых колебаний.

4. Асимптотика дисперсионных уравнений (2.15) при $ml^{(r)} \rightarrow \infty$, $r = 1, 2$.

Пусть $\chi_j^{(2)}$, $j = \overline{1, 4}$ имеют положительные действительные части и $ml^{(2)} \rightarrow \infty$. Тогда дисперсионные уравнения (2.15) можно написать в виде:

$$\nabla = \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^4 = \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^3 \cdot \text{Det} t_{44} + \sum_{j=5}^8 O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, m = \overline{1, \infty}. \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что при $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ дисперсионные уравнения (2.15) распадаются на совокупность уравнений

$$\text{Det} \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^3 = 0, \quad m = \overline{1, \infty}; \quad \text{Det} t_{44} = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (4.2)$$

Первая совокупность уравнений (4.2) является дисперсионными уравнениями полубесконечной составной замкнутой цилиндрической оболочки ($k = 2\pi/s$) со свободным торцом $\alpha = l^{(1)}$ или дисперсионными уравнениями незамкнутой цилиндрической оболочки открытого профиля ($k = \pi/s$) со свободным торцом $\alpha = l^{(1)}$, когда граничные образующие шарнирно закреплены [12]. Вторая совокупность уравнений (4.2) является дисперсионными уравнениями краевых колебаний полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочки ($k = 2\pi/s$) со свободным торцом $\alpha = -l^{(2)}$, изготовленной из материала (2) или дисперсионными уравнениями краевых колебаний незамкнутой цилиндрической оболочки открытого профиля ($k = \pi/s$) со свободным торцом $\alpha = -l^{(2)}$, изготовленной из материала (2), когда граничные образующие шарнирно закреплены [12] из [12].

Заметим, что первую и вторую совокупности уравнений (4.2), при $\varepsilon_m \rightarrow 0$, можно написать в виде [13]

$$\text{Det} \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^3 = \left(\frac{B_{11}^{(1)}}{(B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)})} \right)^2 \frac{B_{11}^{(2)}}{(B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})} \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \times \quad (4.3)$$

$$\left\{ \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \text{Det} \left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^6 \cdot \text{Det} \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^6 \right\} + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty},$$

$$\text{Det} t_{44} = \text{Det} t_{13} = \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \quad (4.4)$$

$$+ O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}.$$

Учитывая (3.13), (3.14), первую совокупность уравнений (4.2) можно написать в виде [12]

$$\text{Det} \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^3 = \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^4 \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \left\{ \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \times \right. \quad (4.5)$$

$$\left. \times G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right\} +$$

$$+ O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}.$$

Учитывая асимптотические формулы (4.1), (4.4), (4.5), ещё раз убеждаемся в справедливости уравнений (3.22).

Если $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$ и $y_3^{(r)}, y_4^{(r)}$ – корни уравнений (3.1), (3.2) с положительными действительными частями, соответственно, то при $\rho^{(2)} / \rho^{(1)} \ll 1$, $B_{ij}^{(2)} / B_{ij}^{(1)} \ll 1$, $i, j = 1, 2, 6$ уравнения (2.15) преобразуются в уравнения:

$$\text{Det} \| t_{ij} \|_{ij=1}^4 = \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^4 \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \times$$

$$\times \left\{ \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 \left(K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right\}$$

$$O(\varepsilon_m^2) + O(B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)}) + O(B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)}) + \sum_{j=1}^4 \sum_{r=1}^2 O(\exp(z_j^{(r)})) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$, $B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} \rightarrow 0$, $B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} \rightarrow 0$, $ml^{(1)} \rightarrow \infty$, $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ уравнения (2.15) распадаются на уравнения:

$$K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0,$$

$$K_1^{(2)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, \infty} \quad (4.7)$$

Следовательно, при $\varepsilon_m \rightarrow 0$, $B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} \rightarrow 0$, $B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} \rightarrow 0$, $ml^{(1)} \rightarrow \infty$, $ml^{(2)} \rightarrow \infty$ корни уравнений (4.7) являются приближёнными значениями корней уравнений (2.15).

5. Численные исследования. В таблице 1 приведены значения некоторых $\eta_m^{(1)}$ корней уравнения (3.23) при $k = 3.10827$ и $m = 44, 92$. Отметим, что связь между $\eta_m^{(1)}$ и $\eta_m^{(2)}$ имеет вид:

$$\eta_m^{(2)} = \frac{\rho^{(2)} B_{66}^{(1)}}{\rho^{(1)} B_{66}^{(2)}} \eta_m^{(1)} \quad (5.1)$$

Таблица 1

m	$K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)})=0$ $L(\eta^{(1)}, \eta^{(2)})=0$ $K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)})=0$	$K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)})=0$ $G(\eta^{(1)}, \eta^{(2)})=0$ $K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)})=0$	$K_3^{(1)}(\eta^{(1)})=0$	$K_3^{(2)}(\eta^{(2)})=0$
44	0.96420 0.98367 32.5553	0.86230 0.92763 43.9422	0.69594	3.71441
92	0.96420 0.98367 32.5549	1.80389 1.93958 91.8819	0.93841	2.16831 28.9998

В таблице 2 приведены безразмерные характеристики $\eta_m^{(1)}$ собственных частот интерфейсных и краевых колебаний и характеристики затухания соответствующих форм $\kappa\chi_0^{(1)} / m$ и $\kappa\chi_0^{(2)} / m$ для составных цилиндрических оболочек открытого профиля, изготовленных из боропластика и бумаги, с механическими параметрами [10], [11]:

$$\text{Боропластик: } \rho^{(1)} = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, E_1^{(1)} = 2.646 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, E_2^{(1)} = 1.323 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$G^{(1)} = 9.604 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \nu_1^{(1)} = 0.2, \nu_2^{(1)} = 0.01, \quad (5.2)$$

$$\text{Бумага: } \rho^{(2)} = 0.16 \text{ кг/м}^3, E_1^{(2)} = 2.95281 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, E_2^{(2)} = 2.2106 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2,$$

$$G^{(2)} = 9.77076 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2, \quad \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} E_1^{(2)} / E_2^{(2)}, \nu_2^{(2)} = 0.23, \quad (5.3)$$

и геометрическими параметрами:

$$R = 2, s = 1.01072, k = 3.10827, r_0 = 0.32172, h = 1/50, b = 1,$$

$l^{(1)} = 15, l^{(2)} = 1.5$ (b – расстояние между граничными образующими). Отметим, что проведены численные исследования для составной цилиндрической оболочки открытого профиля, изготовленной из боропластика и бумаги, с механическими параметрами (5.2), (5.3) с теми же геометрическими параметрами, только при $l^{(1)} = 1.5, l^{(2)} = 15$. Результаты исследования показывают, что при $m = 44, m = 92$ все характеристики почти не отличаются от соответствующих характеристик, приведённых в табл. 2.

В качестве характеристики затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0^{(1)} / m = \pm \min \{ k \operatorname{Re} \chi_1^{(1)} / m, k \operatorname{Re} \chi_2^{(1)} / m, k \operatorname{Re} \chi_3^{(1)} / m, k \operatorname{Re} \chi_4^{(1)} / m \}$$

$$k\chi_0^{(2)} / m = \pm \min \{ k \operatorname{Re} \chi_1^{(2)} / m, k \operatorname{Re} \chi_2^{(2)} / m, k \operatorname{Re} \chi_3^{(2)} / m, k \operatorname{Re} \chi_4^{(2)} / m \} \quad (5.4)$$

В табл. 2 после характеристик собственных частот указан тип интерфейсных колебаний: *inb* – преимущественно изгибные, *ine* – преимущественно планарные; краевые колебания: $b^{(r)}, r = 1, 2$ – преимущественно изгибного типа, $e^{(r)}, r = 1, 2$ – преимущественно планарного типа и $n^{(r)}, r = 1, 2$ – новый тип колебаний.

В табл. 2 случай $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$ соответствует задаче (1.1),(1.2),(1.4).

Таблица 2

m	44			92			
	$k\chi^{(1)} / m$	$k\chi^{(2)} / m$	$\eta^{(1)} / m$	$k\chi^{(1)} / m$	$k\chi^{(2)} / m$	$\eta^{(1)} / m$	
$\eta_1^{(r)} = \eta^{(r)}$	-0.4399	-2.4962	0.69593 $n^{(1)}$	-0.2178	-2.4958	0.93851 $n^{(1)}$	
	iq	-2.4960	0.92792 $b^{(1)}$	-0.1684	-2.4957	0.96419 $e^{(1)}$	
	iq	2.4960	0.92857 <i>inb</i>	0.1150	2.4957	0.98367 <i>ine</i>	
	$\eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}$	iq	-2.4959	0.96416 $e^{(1)}$	iq	-2.4940	1.94018 $b^{(1)}$
		iq	2.4959	0.98368 <i>ine</i>	iq	1.4980	1.94096 <i>inb</i>
	$\eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$	iq	-2.4878	3.71441 $n^{(2)}$	iq	-2.4934	2.16875 $n^{(2)}$
		iq	-1.1751	32.5553 $e^{(2)}$	iq	-1.6401	28.9997 $n^{(2)}$
		iq	-0.1742	43.9422 $b^{(2)}$	iq	-1.1750	32.5556 $e^{(2)}$
			iq	-0.0996	91.8805 $b^{(2)}$		
$\eta_1^{(r)} = 0$	iq	-2.4965	0.92792 $b^{(1)}$				
	iq	2.4965	0.92852 <i>inb</i>				
				-0.0052	-2.4963	1.93968 $b^{(1)}$	
				iq	2.4963	1.93995 <i>inb</i>	
$\eta_2^{(r)} = 0$							
$\eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$	iq	-0.1742	43.9650 $b^{(2)}$				
				iq	-0.0996	91.8808 $b^{(2)}$	
$\eta_1^{(r)} = \eta^{(r)}$	-0.4399	-2.4962	0.69593 $n^{(1)}$	-2.2178	-2.4958	0.93841 $n^{(1)}$	
				-0.1684	2.4957	0.96419 $e^{(1)}$	
				-0.1150	2.4957	0.98367 <i>ine</i>	
$\eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}$	-0.1684	-2.4959	0.96419 $e^{(1)}$				
	0.1150	2.4959	0.98367 <i>ine</i>				

	iq	-2.4877	$3.71441 n^{(2)}$	iq	2.4934	$2.16875 n^{(2)}$
	iq	-1.1744	$32.5568 e^{(2)}$	iq	1.6401	$28.9996 n^{(2)}$
				iq	1.1750	$32.5555 e^{(2)}$

Случай $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = 0, \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$ соответствует задаче (1.1),(1.2), (1.4), в которой отсутствует тангенциальный компонент силы инерции, т.е. имеем, преимущественно, изгибный тип интерфейсных и краевых колебаний. Аналогично, случай $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$ соответствует, преимущественно, планарному типу.

При $\varepsilon_m \rightarrow 0$ собственные интерфейсные и краевые колебания задачи (1.1)-(1.3), (1.1),(1.2), (1.4) расчлняются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания. Частоты этой задачи стремятся к частотам аналогичной задачи для составной пластины-полосы. В зависимости от $a^2 m^2$ появляются не более восьми новых типов колебаний, характерных только для составных цилиндрических оболочек, обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции.

При колебаниях преимущественно тангенциального типа ($\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$), кроме планарных интерфейсных и краевых колебаний типа Стоунли и Рэлея могут появляться не более восьми новых колебаний, обусловленных также продольными и крутильными компонентами силы инерции.

Замечание. В таблице 2, если совместить строки, соответствующие значениям $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$ с соответствующими строками для значений $\eta_1^{(r)} = 0, \eta_2^{(r)} = 0, \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$, то получатся приближённые значения первой строки в случае $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$, что доказывает эффективность механизма разделения типов колебаний.

Заключение. Используя систему уравнений динамического равновесия ортотропных цилиндрических оболочек соответствующей классической теории, получены дисперсионные уравнения для определения собственных частот возможных интерфейсных и краевых колебаний замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек.

Частоты собственных интерфейсных и краевых колебаний цилиндрических оболочек, составленных из двух ортотропных тонких упругих оболочек с разными упругими коэффициентами, определяются совокупностью уравнений (2.15).

Частоты собственных интерфейсных и краевых колебаний для составной прямоугольной пластины или бесконечной пластины-полосы определяются первыми двумя совокупностями уравнений (3.8). Существование интерфейсных и краевых колебаний зависит от радиуса окружности, длины составляющих оболочек и коэффициентов упругости. При больших m или при малой кривизне окружности все характеристики собственных интерфейсных и краевых колебаний замкнутой и незамкнутой цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам интерфейсных и краевых колебаний бесконечной пластины-полосы или прямоугольной пластины, соответственно. Численные результаты показывают, что с увеличением m характеристики, приведённые в таблице 2, мало реагируют на величины $l^{(1)}, l^{(2)}$.

Численные исследования показывают, что асимптотические формулы (3.6), (3.22) дисперсионного уравнения (2.15) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задач с условиями (1.1)-(1.3); (1.1),(1.2), (1.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plate surface of an elastic solids // Proc. London Math. Soc. 1885. 17. pp.4-11.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка.- 1981. 284с. //Grinchenko V.T. and Meleshko V.V. Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. Kiev: Naukova Dumka, 1981.284p.
3. Михасев Г.И., Товстик П.Е. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Физматлит, 2009. 292с. //Mikhasev G.I., Tovstic P.E. Localized vibrations and waves in thin shells: Asymptotic methods. Moscow: Fizmatlit, 2009. 292p.
4. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280с. //Vilde M.V., Kaplunov Yu.D., Kassovich L.Yu. Edge and interfacial resonance phenomenon in elastic solids. Moscow: fizmatlit Publ., 2010. 280p.
5. Зильбергейт А.С., Сулова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинках // Акуст. журнал. 1985. Т.29. № 2. С.186-191 //Zilbergreit A.S.,Suslova E.B. Contact waves of bend in thin plates//Akoust. Journal. 1985, v. 29, № 2. Pp. 186-191.
6. Гертман И.П., Лисицкий О.Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // Прикл. математика и механика. 1988. Т.52. № 6. С.1044-1048 //Gertman I.P. , Lisitskii O.N. Reflection and transmission of sound waves through the interfacial boundary of two joined elastic half-strips//Journal of Appl. Math. And Mech. 1988,v. 52, Iss. 6.pp. 1044-1048.
7. Stoneley R. The elastic waves at the interface of two solids // Proc. Roy Soc. London A. 106 (1924) 416-429.
8. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г., Михасев Г.И. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих полубесконечных пластин со свободным краем/ Механика машин, механизмов и материалов. 2015. №2 (31), стр.29-36. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G., Mikhasev G.I. On free boundary and interfacial vibrations of thin elastic semi-infinite plates with free end //Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials. 2015. №2 (31). P.29-36. <https://mmmm.by/pdf/ru/2015/02/4.pdf>
9. Гулгазарян Г.Р., Мелконян А.Т., Саакян С.А. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонкой упругой пластины-полосы и прямоугольной пластины со свободными противоположными краями./ АГПУ им. Х. Абовяна. Учёные записки, 2015. № 2-3 (24-25). С.54-68.// Ghulghazaryan G.R, Melqonyan A.T., Sahakyan S.A. About free interfacial and boundary vibrations of thin elastic plate-strip and rectangular plate with free opposite edges// Armenian State pedagogical university after Kh. Abovyan. Scientific News. 2015.N 2-3 (24-25) p.54-68.
10. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматлит, 1961. 384с. //Ambartsumyan S.A. The theory of Anizotropic Shells. Moscow,Cos.izd. fiz. Mat. Lit.,1961. 384p.
11. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. №3. С.171-174// G.R. Gulgazaryan, V.B. Lidskii. The frequency density of the free vibrations of a thin anisotropic shell composed of anisotropic layers. //Izv. AS USSR. MTT. 1982. №.3. Pp.171-174.

12. Гулгазрян Г.Р., Гулгазрян Р.Г., Михасев Г.И. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих полубесконечных круговых цилиндрических оболочек со свободным торцом. //Механика машин, механизмов и материалов. 2016. №2 (35). С.34-46. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G., Mikhasev G.I. About free boundary and interfacial vibrations of thin elastic semi-infinite circular cylindrical shells//Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials. 2016. №2 (35). P.34-46. <http://mMMM.by/pdf/ru/2016/02/5.pdf>
13. Гулгазрян Г.Р., Гулгазрян Л.Г., Михасев Г.И. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих круговых цилиндрических оболочек со свободными торцами / Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2015. С.172-176.// Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G., Mikhasev G.I. About free interfacial and boundary vibrations of thin elastic circular cylindrical shells with free ends// Topical problems of continuum mechanics. Yerevan–2015, pp. 172-176.

Сведения об авторах:

Гулгазрян Гурген Рубенович, профессор, д.ф.-м.н. АГПУ им. Х. Абовяна. Проф. кафедры математики и методики её преподавания. Тигран Мец., 17, 0010, Ереван, Армения. Тел.:(+37491) 706700. E-mail: ghulgr@yahoo.com

Гулгазрян Лусине Гургеновна, д.ф.-м.н., ведущий научн. сотр. Института механики НАН Армении. Доцент кафедры математики и методики её преподавания АГПУ им. Х. Абовяна. Тигран Мец., 17, 0010, Ереван, Армения. Тел.:(+37491) 302554. E-mail: lusina@mail.ru

Михасев Геннадий Иванович, профессор, д.ф.-м.н. Заведующий кафедрой био- и наномеханики БГУ. 220030. Беларусь, г. Минск, Пр. Независимости, 4. E-mail: gimikhasev@rambler.ru

Поступила в редакцию 22.09.2017

Содержание №1, 2018

70-летие	3
Белубекян М.В., Гришко А.М. Локализованные изгибные колебания прямоугольной двухслойной пластинки при наличии скольжения между слоями	4
Аветисян А.С., Мкртчян С.А. Электроупругие волны Рэлея в волноводе с электрически закрытыми или открытыми поверхностями.....	12
Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Основные уравнения и граничные условия колебаний и устойчивости трёхслойных магнитострикционных пластин в поперечном магнитном поле.....	31
Баласанян Е.С. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластины при неполном контакте между слоями.....	47
Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Михасев Г.И. Свободные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих круговых цилиндрических оболочек со свободными торцами	61

CONTENTS

70-anniversary	3
Belubekyan M.V., Grishko A.M. Localized bending vibrations of a rectangular two-layer plate in the presence of slip between layers	4
Avetisyan A.S., Mkrtychyan S.H. The electro elastic Rayleigh waves in the waveguide with an electrically closed or open surfaces	12
Bagdasarian G.E., Danoyan E.H. Main equations and boundary conditions of vibrations and stability of three-layered magnetostrictive plates in a transverse magnetic field	31
Balasanian E.S. Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic two-layer plate with incomplete contact between the layers	47
Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G., Mikhasev G.I. Free interfacial and boundary vibrations of thin elastic circular cylindrical shells with free ends	61

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

70-ամյակ	3
Բելուբեկյան Մ.Վ., Գրիշկո Ա.Մ. Երկշերտ ուղղանկյուն սալի կենտրոնացված ծռման տատանումները շերտերի միջև սահքի առկայության դեպքում.....	4
Ավետիսյան Ա.Ս., Մկրտչյան Ս.Հ. Ռելեյի էլեկտրաառաձգական ալիքները էլեկտրականապես բաց կամ փակ մակերևույթներով ալիքատարում.....	12
Բաղդասարյան Գ., Դանոյան Է.Հ. Մագնիսական դաշտում գտնվող մագնիսատրիկցիոն եռաշերտ սալերի տատանումների և կայունության հիմնական հավասարումներն ու եզրային պայմանները.....	31
Բալասանյան Եվ. Ս. Անիզոտրոպ երկշերտ սալի մի խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում.....	47
Ղուլղազարյան Գ.Ռ., Ղուլղազարյան Լ.Գ., Միխասև Գ.Ի. Ազատ ծայրերով բարակ առաձգական շրջանային զլանային թաղանթների սեփական ինտերֆեյս և եզրային տատանումները.....	61