

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՎԻՍԵՂԻԱԿԱՆ ԳԵՂԵՎԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2017

**ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В МАГНИТОСТРИКЦИОННОМ
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

Багдасарян Г.Е.

Ключевые слова: Волны Рэлея, магнитострикционное полупространство, магнитное поле.

Keywords: Rayleigh waves; magnetostrictive half-space; magnetic field.

Բանալի բառեր: Ռեյլեյի ալիքներ, մագնիսաստրիկցիոն կիսատարածություն, մագնիսական դաշտ

Բաղդասարյան Գ.Ե.

Ռեյլեյի ալիքները մագնիսաստրիկցիոն կիսատարածությունում

Հայտնի է [1], որ առաձգական միջավայրում մագնիսական դաշտի բացակայության դեպքում սահքի մակերևութային ալիքներ տարածվել չեն կարող, իսկ նշված պայմաններում Ռեյլեյի ալիքներ միշտ գոյություն ունեն։ Հայտնի է նաև, որ մագնիսապես փափուկ ֆերոմագնիսական կիսատարածությունում (որի նյութը օժտված չէ մագնիսաստրիկցիոն հատկություններով) Ռեյլեյի ալիքի տարածման ժամանակ, որպես հետևանք, գրգռվում է սահքի մակերևութային ալիք՝ եթե առկա է շարժման հարթությանը թեք մագնիսական դաշտ [2]: Այս աշխատանքում ցույց է տրված, որ մագնիսաստրիկցիոն կիսատարածությունում իրարից անկախ կարող են տարածվել Ռեյլեյի և սահքի մակերևութային ալիքներ՝ շարժման հարթությանը ուղղահայաց մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում: Ավելին, սահքի մակերևութային ալիքի գոյությունը բացառապես պայմանավորված է կիսատարածության մագնիսաստրիկցիոն հատկություններով:

Baghdasaryan G.Y.

Rayleigh waves in magnetostrictive half-space

It is known [1] that shear surface waves cannot propagate in elastic media in the absence of a magnetic field, and Rayleigh surface waves always exist under the indicated conditions. It is known, also, in a magnetosoft ferromagnetic half-space (which material does not possess by magnetostrictive properties) when propagates Rayleigh waves, as a result, shear surface wave generates in presence of inclined to the motion surface magnetic field [2]. In this paper it is established that Rayleigh and shear surface waves can propagate independently of each other in a magnetostrictive half-space, if there is a magnetic field perpendicular to the plane of motion. Moreover, the existence of a shear surface wave is caused solely by the magnetostrictive effect is shown.

Известно [1], что в упругой среде при отсутствии магнитного поля не могут распространяться сдвиговые поверхностные волны, а поверхностные волны Рэлея при указанных условиях всегда существуют. Известно также, что в магнитомягком ферромагнитном полупространстве (материал которой не обладает магнитострикционными свойствами) при распространении в ней рэлеевской волны, как следствие, возбуждается сдвиговая поверхностная волна, если присутствует наклонное к плоскости движения магнитное поле [2]. В настоящей работе установлено, что в магнитострикционном полупространстве независимо друг от друга могут распространяться рэлеевские и сдвиговые поверхностные волны, если присутствует перпендикулярное к плоскости движения магнитное поле. Более того, существование сдвиговой поверхностной волны обусловлено исключительно с учётом магнитострикционного эффекта.

1. Постановка задачи

Пусть упругая диэлектрическая среда с упорядоченной магнитной структурой находится во внешнем стационарном магнитном поле, которое в отсутствии магнитострикционного ферромагнитного тела характеризуется вектором напряжённости \mathbf{H}_0 и вектором магнитной индукции $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$, где μ_0 – магнитная

постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N / A}^2$). Окружающая тело среда считается вакуумом.

Изложение приводится в прямоугольных декартовых координатах x_i , используя результаты работы [3]. В этой работе, исходя из основных положений теории малых возмущений, получены следующие линейные уравнения и поверхностные условия относительно магнитоупругих возмущений \mathbf{u} , \mathbf{h} , \mathbf{b} , \mathbf{m} и S_{ij} , (u_k – компоненты вектора \mathbf{u} упругих перемещений (возмущений), h_k , b_k и m_k – компоненты векторов \mathbf{h} , \mathbf{b} и \mathbf{m} напряжённости, магнитной индукции и намагничённости возмущённого магнитного поля, S_{ij} – возмущения компонент тензора магнитоупругих напряжений):

уравнения во внутренней области

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[s_{ik} + s_{im}^H \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right] + \mu_0 M_i^H \frac{\partial h_k}{\partial x_i} + \mu_0 m_i \frac{\partial H_k^H}{\partial x_i} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \\ \text{rot } \mathbf{h} = 0, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mu_0 (\mathbf{h} + \mathbf{m}), \\ s_{ij} = \bar{c}_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mu_0 e_{ijk} m_k, \\ h_i = g_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + A_{ik} m_k; \end{aligned} \quad (1.1)$$

где величины s_{im}^H , H_k^H и $M_i^H = \chi H_i^H$, отмеченные индексом “H”, являются компонентами магнитоупругих напряжений, магнитного поля и намагничённости среды в невозмущённом состоянии, ρ_0 – плотность среды;

уравнения во внешней области

$$\text{rot } \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div } \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \mu_0 \mathbf{h}^{(e)}; \quad (1.2)$$

где индекс «e» означает принадлежность к внешней среде;

граничные условия на свободной поверхности S_0 недеформированного тела

$$\begin{aligned} \left[s_{ik} + s_{mk}^H \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] N_k^0 = \left[t_{ki}^{(e)} - t_{ki} \right] N_k^0 + \left[T_{km}^{H(e)} - T_{km}^H \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} N_k^0, \\ \left[b_k - b_k^{(e)} \right] N_k^0 - \left[B_i^H - B_i^{H(e)} \right] \frac{\partial u_m}{\partial x_i} N_m^0 = 0, \\ \varepsilon_{nmk} \left\{ \left[h_n - h_n^{(e)} \right] N_m^0 - \left[H_n^H - H_n^{H(e)} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} N_i^0 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где \mathbf{N}^0 – единичный вектор внешней нормали к поверхности S_0 ,

$$\begin{aligned} t_{ki} = H_i^H b_k + h_i B_k^H - \mu_0 \delta_{ik} \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{h}, \\ t_{ki}^{(e)} = \mu_0 \left[H_k^{H(e)} h_i^{(e)} + h_k^{(e)} H_i^{H(e)} - \delta_{ki} \mathbf{H}^{H(e)} \cdot \mathbf{h}^{(e)} \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

$T_{km}^{H(e)}$ и T_{km}^H определяются согласно (1.8).

В уравнениях (1.1) использованы следующие приближённые выражения для тензоров:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ijkl} &= c_{ijkl}, \quad e_{ijk} = B_{ijkl} M_i^H, \quad g_{ikl} = B_{klri} M_r^H \\ c_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}), \quad A_{ik} = \chi^{-1} \delta_{ik} \\ B_{ijkl} &= e_2 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{e_1 - e_2}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где λ и μ – постоянные Ляме, $\chi = \mu_r - 1$ – магнитная восприимчивость, μ_r – относительная магнитная проницаемость, e_1 и e_2 – коэффициенты магнитострикции материала среды. В представлениях (1.5), имея в виду, что для основных магнитострикционных материалов $30 < \chi < 10^4$, $5 < e_1 < 5 \cdot 10^2$, λ и $\mu \sim 10^{11} \text{ H} / \text{m}^2$, $B \leq B_s \sim 2 \text{ Тл}$ (B_s – индукция насыщения), принято, что $\chi e_i \gg 1$ и $e_i B_0^2 (\mu_0 \lambda)^{-1} \ll 1$.

Рассматривая линеаризованные уравнения и соотношения (1.1) – (1.5), замечаем, что в коэффициенты этих выражений входят величины с индексом «н», определяемые из линейных уравнений и граничных условий невозмущённого состояния. Эти уравнения и поверхностные условия также получены в работе [3] на основе следующих предположений: а) магнитное поле невозмущённого состояния совпадает с магнитным полем недеформированного тела; б) напряжения и деформации невозмущённого состояния можно определить из решения следующей статической задачи теории упругости:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_{ik}^H}{\partial x_i} + \mu_0 M_n^H \frac{\partial H_k^H}{\partial x_n} = 0, \quad (1.6)$$

$$s_{ij}^H = c_{ijk\ell} \varepsilon_{k\ell}^H + \mu_0 A_{ik} M_j^H M_k^H + \frac{1}{2} \mu_0 B_{ijk\ell} M_k^H M_\ell^H;$$

условия на поверхности S_0 недеформированного тела

$$s_{ki}^H N_k^0 = [T_{ki}^{H(e)} - T_{ki}^H] N_k^0, \quad (1.7)$$

$$T_{ki}^{H(e)} = \mu_0 \left\{ H_k^{H(e)} H_i^{H(e)} - \frac{1}{2} \delta_{ik} [H^{H(e)}]^2 \right\}, \quad (1.8)$$

$$T_{ki}^H = H_i^H B_k^H - \frac{1}{2} \mu_0 \delta_{ik} (H^H)^2.$$

Входящие в (1.6) – (1.8) характеристики невозмущённого магнитного поля, согласно принятому предположению, определяются из следующей задачи магнитостатики для недеформированного тела:

уравнения магнитостатики во внутренней области

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}^H &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}^H = 0, \\ \mathbf{B}^H &= \mu_0 (\mathbf{H}^H + \mathbf{M}^H), \quad H_k^H = A_{kl} M_l^H; \end{aligned} \tag{1.9}$$

уравнения во внешней области

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_H^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_H^{(e)} = 0, \tag{1.10}$$

$$\mathbf{M}_H^{(e)} = 0, \quad \mathbf{B}_H^{(e)} = \mu_0 \mathbf{H}_H^{(e)};$$

условия сопряжения на поверхности S_0

$$[\mathbf{B}_H - \mathbf{B}_H^{(e)}] \mathbf{N}_0 = 0, \quad [\mathbf{H}_H - \mathbf{H}_H^{(e)}] \times \mathbf{N}_0 = 0 \tag{1.11}$$

и условия на бесконечности

$$\mathbf{H}_H^{(e)} \rightarrow \mathbf{H}_0 \quad \text{при} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty. \tag{1.12}$$

Таким образом, вопрос исследования поведения возмущений магнитоупругих величин некоторого состояния сводится к поэтапному решению следующих трёх задач:

- 1) определение характеристик магнитного поля недеформируемого тела на основе (1.9) – (1.12);
- 2) определение магнитоупругих величин невозмущённого состояния на основе (1.6) – (1.8) с использованием решения первой задачи;
- 3) исследование поведения магнитоупругих возмущений на основе (1.1) – (1.5) с использованием решения первых двух задач.

2. Уравнения и граничные условия плоских магнитоупругих волн

Из приведённых уравнений и поверхностных условий выведем граничные задачи, описывающие распространения двумерных поверхностных волн в магнитоупругом полупространстве при наличии внешнего постоянного магнитного поля, перпендикулярного к плоскости движения. Пусть упругая магнитоупругая среда занимает полубесконечную область $x_2 \leq 0$ (в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3) и находится во внешнем постоянном магнитном поле с вектором индукции направленной вдоль оси x_3 . Тогда задача (1.9)-(1.12) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= B_0 \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \mathbf{H} = \mu_r B_0 \hat{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{H} &= \mu_0^{-1} \mathbf{H}^{(e)}, \quad \mathbf{H} = (\mu_0 \mu_r)^{-1} \mathbf{H}^{(e)}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\hat{\mathbf{e}}_k$ – единичные векторы координатных осей, B_0 – заданная индукция внешнего магнитного поля в вакууме при отсутствии ферромагнитной среды.

Задачу будем решать в двумерной постановке, предполагая, что все искомые величины не зависят от координаты x_3 . Тогда из уравнений $\text{rot } \mathbf{h} = 0$, $\text{rot } \mathbf{h}^{(e)} = 0$ и последнего условия из (1.3) легко получить, что $h_3^{(e)} = h_3 = 0$. Кроме этого, поскольку \mathbf{H} параллельна границе полупространства, то из решения (2.1) задачи (1.9)-(1.12) следует, что

$$M_i^H \frac{\partial H_k^H}{\partial x_i} \equiv 0, \quad \left[T_{ki}^{H(e)} - T_{ki}^H \right] N_k^0 \Big|_{S_0} = 0.$$

Следовательно, магнитные объёмные и поверхностные силы невозмущённого состояния равны нулю и, поэтому, задача (1.6)-(1.8) имеет нулевое решение: $\sigma_{ij}^H \equiv 0$. Учитывая сказанное, из (1.1) и (1.5), в силу (2.1) и принятого предположения о двумерности движения, получим следующие уравнения, описывающие распространение двумерных волн в магнитоэластичной среде:

уравнения относительно $u_i(x_1, x_2, t)$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda} + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\bar{\lambda} + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ (\bar{\lambda} + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\bar{\lambda} + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \bar{\mu} \Delta u_3 = \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \Delta \varphi = \frac{\chi}{\mu_r} M_3 \frac{e_1 - e_2}{2} \Delta u_3, \quad \Delta \varphi^{(e)} = 0, \\ h_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad h_k^{(e)} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x_k}, \end{cases} \quad (2.3)$$

где

$$\bar{\lambda} = \lambda - \mu_0 \chi M_3^2 e_2^2, \quad \bar{\mu} = \mu - \mu_0 M_3^2 \frac{\chi}{\mu_r} \left(\frac{e_1 - e_2}{2} \right)^2, \quad (2.4)$$

φ и $\varphi^{(e)}$ – потенциалы индуцированного магнитного поля в области вакуума и в среде, соответственно, Δ – двумерный оператор Лапласа.

Аналогичным образом из (1.3) получаются следующие граничные условия на плоскости $x_2 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0, \\ \bar{\lambda} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi^{(e)}, \quad \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x_2} = \mu_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \chi M_3 \frac{e_1 - e_2}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \\ \left[\mu - \mu_0 \chi M_3^2 \left(\frac{e_1 - e_2}{2} \right)^2 \right] \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \mu_0 \chi M_3 \frac{e_1 - e_2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Из (2.2)-(2.6) следует, что: а) задача (2.2), (2.5) (плоская задача для определения u_1 и u_2 или задача распространения магнитоупругих волн Рэлея) отделена от задачи (2.3), (2.6) (антиплоская задача для определения u_3 , φ , $\varphi^{(e)}$ или задача распространения магнитоупругих сдвиговых поверхностных волн); б) существование сдвиговой поверхностной волны обусловлено исключительно учётом магнитострикционного эффекта (вспомним, что при отсутствии магнитного поля чисто упругая сдвиговая поверхностная волна не существует).

В дальнейшем, в этой работе приводятся исследования, относящиеся только к существованию и характеру распространения магнитоупругих сдвиговых поверхностных волн Рэлея.

3. Магнитоупругие волны Рэлея

Рассмотрим задачу о магнитоупругих поверхностных волнах Рэлея, описываемые уравнениями (2.2) и граничными условиями (2.5). Введением потенциальных функций $\Phi(x_1, x_2, t)$ и $\Psi(x_1, x_2, t)$ посредством [4]

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \\ u_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

уравнения (2.2) приводятся к двум скалярным волновым уравнениям относительно Φ и Ψ :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\bar{c}_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \Delta\Psi = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{c}_1^2 = c_1^2 - c_M^2, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad c_M^2 = \frac{\mu_0 \chi (e_2 M_3)^2}{\rho_0},$$

c_1 и c_2 – скорости распространения объёмных продольных и поперечных волн при отсутствии магнитного поля.

Подставляя (3.1) в (2.5), легко установить, что решения уравнений (3.2) должны удовлетворять следующим условиям на плоскости $x_2 = 0$:

$$2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} = 0, \quad \bar{c}_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + (\bar{c}_1^2 - 2c_2^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - 2c_2^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (3.3)$$

Будем искать такие решения волновых уравнений (3.2), которые удовлетворяют поверхностным условиям (3.3) и монотонно убывая, стремятся к нулю при $x_2 \rightarrow -\infty$.

Покажем, что среди решений поставленной задачи имеются решения, которые представляют собой поверхностные волны. Для этого рассмотрим движение, соответствующее распространению вдоль положительной оси x_1 синусоидальной волны с частотой ω , волновым числом k и амплитудой, зависящей от x_2 , т.е. принимаем, что

$$\Phi = f(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad \Psi = g(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}. \quad (3.4)$$

Подставив (3.4) в (3.2), получим следующие уравнения для определения функций $f(x_2)$ и $g(x_2)$:

$$\frac{d^2 f}{dx_2^2} - (k^2 - k_1^2) f = 0, \quad \frac{d^2 g}{dx_2^2} - (k^2 - k_1^2) g = 0, \quad (3.5)$$

$$\text{где } k_1 = \frac{\omega}{\bar{c}_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}.$$

В соответствии с условием на бесконечности ($x_2 \rightarrow -\infty$) следует, чтобы

$$r^2 = k^2 - k_1^2 > 0, \quad s^2 = k^2 - k_2^2 > 0 \quad (3.6)$$

Из условия (3.6) вытекает, что фазовая скорость $c = \omega$ поверхностной волны (если она существует) должна быть меньше скорости распространения чисто упругих объёмных поперечных волн ($c < c_2$).

Найдя общие решения уравнений (3.6) и требуя, чтобы они описывали поверхностную волну, получим следующие выражения для Φ и Ψ :

$$\Phi = Ae^{i(kx_1 - \omega t) + rx_2}, \quad \Psi = Be^{i(kx_1 - \omega t) + sx_2}. \quad (3.7)$$

где A и B – произвольные постоянные.

Удовлетворяя граничным условиям (3.3) для определения неизвестных A и B получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Условие совместности этой системы приводит к следующему характеристическому уравнению:

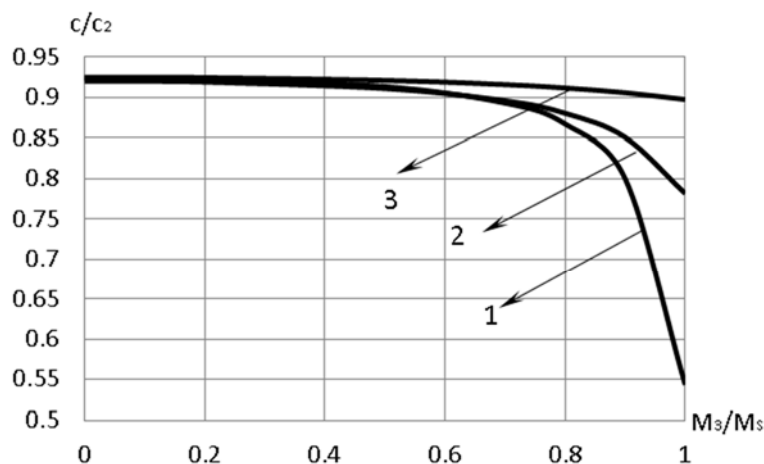
$$\sqrt{1-\theta}\sqrt{1-\gamma\theta} = \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^2, \quad \gamma = \frac{\gamma_0}{1-\alpha}, \quad \gamma_0 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad \alpha = \frac{c_M^2}{c_1^2} \quad (3.8)$$

определяющее безразмерную фазовую скорость $\theta = c_2^{-2}c^2$ поверхностной волны.

В (3.8) параметр α характеризует напряжённость внешнего магнитного поля и при $\alpha = 0$ из (3.8) получается известное уравнение Рэлея для чисто упругих поверхностных волн Рэлея. Аналогично [4], произведён анализ уравнения (3.8) в зависимости от параметров α и γ_0 , который показывает что: а) для каждого γ_0 и $0 < \alpha < 1$ уравнение (3.8) имеет единственный действительный положительный корень, удовлетворяющий условию $\theta < 1$, т.е. в любой упругой магнитоупругой среде для любого значения напряжённости магнитного поля могут распространяться поверхностные волны рассматриваемого типа, б) величина скорости поверхностных магнитоупругих волн не зависит от частоты колебаний и поэтому эти волны, как и чисто упругие рэлеевские волны, распространяются без дисперсии, в) величина скорости магнитоупругой рэлеевской волны для каждой среды (для каждого γ_0) с увеличением напряжённости магнитного поля уменьшается. Приведённые утверждения обоснованы также численным решением уравнения (3.8).

На основе уравнения (3.8) приведён численный анализ зависимости фазовой скорости поверхностной волны от величины вектора намагниченности среды, принимая $M_3 \leq M_S$, где $M_S = \mu_0^{-1}B_S$ – намагниченность насыщения. Числовые значения физических величин рассматриваемых сред взяты из работ [5-8]. Результаты вычислений представлены на фиг.1. Кривая 1 на этой фигуре соответствует материалу 50КФ (у которого: $E = 1.8 \cdot 10^{11} \text{ H} / \text{M}^2$, магнитоупругость насыщения $\lambda_S = 70 \cdot 10^{-6}$, индукция насыщения $B_S = 2.2 \text{ Тл}$, максимальная относительная магнитная проницаемость $\mu_r^{(\max)} = 5.7 \cdot 10^3$) [5], а кривая 2 – материалу $\text{Eu}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ (феррограната) (у которого $\lambda = 1.08 \cdot 10^{11} \text{ H} / \text{M}^2$, $\mu = 0.80 \cdot 10^{11} \text{ H} / \text{M}^2$, $|\lambda_S| \cdot 10^6 = 18.7$, $B_S = 0.117 \text{ Тл}$, $\mu_r \sim 10^2$) [6,7], кривая 3 –

материалу 9Ю-ВИ (у которого $\lambda = 1.38 \cdot 10^{11} \text{ H / M}^2$, $\mu = 0.72 \cdot 10^{11} \text{ H / M}^2$, $|\lambda_s| \cdot 10^6 = 80$, $B_s = 1.4 \text{ Tл}$, $\mu_r \sim 1.5 \cdot 10^3$).



Фиг.1. Зависимость фазовой скорости поверхностной волны от величины вектора намагниченности среды

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C134.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1987. 870.
2. Багдасарян Г.Е. Возбуждение сдвиговых поверхностных волн в полупространстве волной Рэлея. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1990. Т.43. №2. С.38-43.
3. Багдасарян Г.Е. Поверхностные колебания и волны в магнитоактивной среде, обусловленные магнитоупругими взаимодействиями. Мат. методы и физ.-мех. поля, Львов, 2004.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1976.
5. Сыркин Л.Н. Пьезомагнитная керамика. Изд-во 2-е, переработанное и дополненное. Л.: Энергия, 1980. 205с.
6. Яковлев Ю.Н., Генделев С.Ш. Монокристаллы ферритов в радиоэлектронике. М.: Советское радио, 1975. 360с.
7. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: ЕГУ, 1999. 440с.
8. Таблицы физических величин. Справочник под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. 1006с.

Сведения об авторе:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН Армении, профессор, Институт механики НАН Армении **E-mail:** gevorgb@rau.am

Поступила в редакцию 25.07.2017

**О ДИВЕРГЕНЦИИ СЖАТОЙ ПАНЕЛИ ПРИ НАБЕГАНИИ
СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ**

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, сжимающие усилия, дестабилизация, дивергенция панели, локализованная дивергенция, сверхзвуковое обтекание.

Key words: stability, compressive forces, destabilizing effect, divergence of the panel, localized divergence, supersonic overrunning

Բանալիի բառեր՝ կայունություն, սեղմող ուժեր, դիվերգենցիա, ստեղայնացված դիվերգենցիա, գերձայնային շրջհոսում

Բերքեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ր.

Գերձայնային զազի հոսքում սեղմված սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին

Դիտարկված է գերձայնային զազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր հողակապորեն ամրակցված եզրը գուգահեռ մյուս երկու հողակապորեն ամրակցված եզրերին, բեռնված սեղմող ուժերով: Ցույց է տրված թիթեղի դիվերգենցիայի և ազատ եզրի միջակայքում ստեղայնացված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են դիվերգենցիայի և ստեղայնացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները:

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the loss stability phenomenon of the overrunning of the gas flow at its free edge under the assumption of presence of compressed forces at the hinged edges. Critical velocities of divergence of the panel and localized divergence are found. It is established that the compressed forces leads to the destabilizing of unperturbed equilibrium state of a plate in supersonic gas flow.

В линейной постановке исследуется зависимость форм потери статической устойчивости сжатой тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем от характера начального напряжённого состояния в предположении, что пластинка обтекается сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край. Показана возможность потери устойчивости невозмущённой формы равновесия пластинки, как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции в окрестности ее свободного края. Установлено, что при обтекании начальное напряжённое состояние приводит к дестабилизации состояния невозмущённого равновесия пластинки.

Введение. Как известно [1(с. 285), 2 (с. 245), 3, 4], выпучивание пластинки в авиационных и судовых конструкциях чаще всего вызывается, в основном, действием сжимающих усилий, расположенных в срединной поверхности пластинки. При этом, так как ширина пластинки, являющейся панелью крыла самолета, палубы судна и т.д., как правило, намного мала по сравнению с размерами конструкции, то во многих случаях можно считать сжимающие усилия равномерно распределёнными по ширине пластинки. Поэтому, задача об устойчивости пластинок при равномерном сжатии является той «классической задачей», решение которой является исходным для формулировки и исследования других более сложных задач.

Исследованию зависимости форм потери устойчивости от характера начального напряжённого состояния пластин и оболочек как необтекаемых, так и обтекаемых, посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях и в статьях [1, 2, 5, 6–8].

В предлагаемой статье в линейной постановке исследуется задача статической устойчивости тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, равномерно сжатой в одном направлении вдоль шарнирно закреплённых краёв и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край.

С помощью графоаналитических методов исследования рассматриваемой задачи устойчивости установлена зависимость форм потери статической устойчивости от характера начального напряжённого состояния и от скорости обтекающего потока газа. Проведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка-поток» на область устойчивости и области статической неустойчивости, в которых невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет устойчивость, соответственно, как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции.

Установлено своеобразное влияние начального напряжённого состояния на невозмущённую форму равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки: начальное напряжённое состояние приводит к «скачкообразному» падению значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции, в сравнении с соответствующими значениями обтекаемой панели с ненагруженными краями [14–16].

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x=0$ пластинки свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ шарнирно закреплены. При этом, пластинка сжата вдоль краёв $y=0$ и $y=b$ сжимающими силами $N_y = 2h\sigma_y$, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; сжимающие усилия σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y)$ [1(с. 285), 2(с. 245)].

Прогиб пластинки $w = w(x, y)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [9, 10]:

$\Delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка) в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными вдоль кромок $y=0$ и $y=b$ пластинки сжимающими силами $N_y = 2h\sigma_y$.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба сжатой тонкой изотропной прямоугольной пластинки описывается соотношением [2 (с. 245), 4]

$$D\Delta^2 w + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1, 2(с. 27,101)]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad (1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b; \quad (1.4)$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость V_{cr} , приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки с нагруженными краями $y=0$ и $y=b$. Иными словами, требуется определить значения скорости потока газа V , при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2)–(1.4).

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы панели, сжатой усилиями σ_y и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2)–(1.4) для прогиба $w(x, y)$.

Следует заметить, что в работах [17–19] в нелинейной постановке исследована задача устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа прямоугольной пластинки с нагруженными шарнирно закреплёнными краями.

2. Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка-поток» рассмотрим класс решений уравнения (1.1), удовлетворяющих граничным условиям (1.2)–(1.4), в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

где C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b ; r – корни характеристического уравнения

$$r^4 - 2r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 - \beta_y^2 = 0 \quad (2.2)$$

или

$$(r^2 - 1)^2 = -\alpha_n^3 r + \beta_y^2, \quad (2.3)$$

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}, \quad \beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2} = 2h \sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2}, \quad \alpha_n^3 > 0, \quad \beta_y^2 > 0, \quad (2.4)$$

соответствующему дифференциальному уравнению (1.1).

Здесь параметр α_n^3 характеризует неконсервативную составляющую нагрузки, а параметр β_y^2 – консервативную составляющую нагрузки. Исследуем уравнение (2.2).

Сводя с помощью метода Феррари [11] характеристическое уравнение (2.2) к системе двух квадратных уравнений, получаем:

$$\begin{cases} r^2 + \sqrt{2(q+1)} \cdot r + q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} = 0, \\ r^2 - \sqrt{2(q+1)} \cdot r + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

где q – параметр скорости потока газа V , являющийся действительным корнем кубического уравнения

$$8 \cdot (q+1)(q^2 - 1 + \beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}. \quad (2.6)$$

Из соотношений (2.5) следует, что корни r_i характеристического уравнения (2.3) определяются выражениями:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} - 0.5(q-1)}, \quad (2.7)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + 0.5(q-1)}. \quad (2.8)$$

В соответствии с выражениями (2.7) и (2.8) общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x) \cdot \sin(\mu_n y). \quad (2.9)$$

А в соответствии с соотношением (2.6), скорость потока газа V определится выражением:

$$V = 2\sqrt{2(q+1) \cdot (q^2 - 1 + \beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \quad (2.10)$$

или

$$V = 2\sqrt{2(q+1) \cdot (q^2 - 1 + \beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 D (a_0 \rho_0 b^3)^{-1}, \quad (2.11)$$

γ – параметр отношения ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b :

$$\gamma = ab^{-1}. \quad (2.12)$$

Как следует из выражений (2.7) и (2.8), корни r_i характеристического уравнения (2.2) могут быть как действительными, так и комплексно-сопряжёнными числами в зависимости от параметров q и β_y^2 .

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), переписанного в виде (2.3), можно показать, что в пространстве параметров системы «пластинка-поток» среди корней r_i характеристического уравнения, определяемых выражениями (2.7), (2.8), при условии (2.6) корни r_1 и r_2 являются действительными числами, а корни $r_{3,4}$ – комплексно-сопряжёнными числами при всех значениях $0 \leq \beta_y^2 \leq 4/3$, $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right)$ и $\beta_y^2 > 4/3$, $q \in (1, \infty)$. При этом имеем:

$$r_1 < 0, r_2 < 0 \text{ для всех } \beta_y^2 \in [0, 1), q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right); \quad (2.13)$$

$$r_1 < 0, r_2 > 0 \text{ для всех } \beta_y^2 \in (1, 4/3], q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right) \text{ и} \quad (2.14)$$

$$\beta_y^2 \in (4/3, \infty), q \in (1, \infty);$$

$$r_1 < 0, r_2 = 0 \text{ для } \beta_y^2 = 1 \text{ и } q \in (1/3, \infty). \quad (2.15)$$

Как известно [3,5,12–16], необходимым условием потери статической устойчивости невозмущённого равновесия как полубесконечной пластины-полосы ($\gamma \rightarrow \infty$ или $a \rightarrow \infty$), так и достаточно широкой прямоугольной пластинки ($a \gg b$) в форме локализованной неустойчивости в окрестности свободного края $x = 0$, является условие затухания на краю $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} w(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in [0, b], \text{ когда } a \rightarrow \infty \text{ или } a \gg b. \quad (2.16)$$

Так как для весьма широких пластинок ($a \gg b$) и для полубесконечной пластины-полосы ($\gamma = \infty$) в общем решении (2.9) можно, считая $C_3 = C_4 = 0$, удовлетворять только первым двум граничным условиям (1.2), то условие (2.16), очевидно, имеет место, когда

$$r_1 < 0, r_2 < 0. \quad (2.17)$$

Следовательно, общее решение (2.9), удовлетворяющее необходимому условию локализованной неустойчивости (2.16), можно представить в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n1} \exp(\mu_n r_1 x) + C_{n2} \exp(\mu_n r_2 x)) \cdot \sin(\mu_n y), \quad (2.18)$$

где r_1 и r_2 определяются выражениями (2.7).

Из соотношений (2.13) – (2.15) в соответствии с условием (2.16) очевидно, что в случае обтекаемых достаточно широких пластинок ($a \gg b$) при значениях

$\beta_y^2 \in [0, 1)$ существует возможность потери устойчивости в форме локализованной дивергенции.

При отсутствии обтекания $V = 0$ ($\alpha_n^3 = 0$) характеристическое уравнение (2.2) переписывается в виде

$$(r^2 - 1)^2 - \beta_y^2 = 0. \quad (2.19)$$

Легко показать, что корни r_i характеристического уравнения (2.19) при $\beta_y^2 < 1$ определяются выражениями [1, 3, 5]

$$r_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}}, \quad r_2 = -\sqrt{1 - \sqrt{\beta_y^2}}, \quad r_3 = \sqrt{1 - \sqrt{\beta_y^2}}, \quad r_4 = \sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}}. \quad (2.20)$$

При $\beta_y^2 = 1$ имеем

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \quad r_{3,4} = 0. \quad (2.21)$$

При $\beta_y^2 > 1$ корни r_i характеристического уравнения (2.19) будут вида [1, 3, 5]

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{1 + \sqrt{\beta_y^2}}, \quad r_{3,4} = \pm i\sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1}. \quad (2.22)$$

Из формул (2.20)–(2.21) следует, что при отсутствии обтекания $V = 0$ необходимое условие локализованной неустойчивости (2.16) выполняется, когда $\beta_y^2 < 1$, и не выполняется при значениях $\beta_y^2 \geq 1$.

Итак, при условии $V = 0$, когда $\beta_y^2 < 1$, существует возможность потери устойчивости невозмущённого равновесия достаточно широкой пластинки $a \gg b$ в форме локализованной неустойчивости в окрестности точек свободного края $x = 0$. При этом, в выражении общего решения (2.18) значения корней r_1 и r_2 определяются первыми двумя формулами (2.20).

Таким образом, в соответствии с выражениями (2.13) – (2.15), (2.20) из условия (2.17) следует, что при значениях $\beta_y^2 < 1$ необходимое условие локализованной неустойчивости (2.16) выполняется как для необтекаемых, так и для обтекаемых достаточно широких прямоугольных пластинок ($a \gg b$).

Отсюда следует возможность потери устойчивости невозмущённой формы равновесия необтекаемых достаточно широких пластинок в форме локализованной неустойчивости, а обтекаемых пластинок – в форме локализованной дивергенции. А также обтекаемая прямоугольная пластинка при значениях $\beta_y^2 < 1$ может потерять устойчивость и в форме дивергенции панели в зависимости от значений параметров системы.

Согласно выражениям (2.14), (2.15), (2.21) и (2.22) при значениях $\beta_y^2 \geq 1$ для необтекаемой прямоугольной пластинки существует возможность потери статической устойчивости только лишь в форме неустойчивости панели, а для обтекаемой пластинки – в форме дивергенции панели.

Необходимо заметить, что условия (2.13)–(2.15) позволяют выявить возможность потери статической устойчивости пластинки в указанных формах ранее, ещё до

получения и исследования дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости.

3. Подставляя общее решение (2.9) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.2)–(1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвертого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель приводит к следующему дисперсионному уравнению относительно параметров $q(V)$, n , γ , β_y^2 , ν исходной задачи устойчивости:

$$\begin{aligned}
F(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = & \\
& \sqrt{2(q+1)} \left\{ \left(q+1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1) \cdot \nu - (1-\nu)^2 \right\} B_1 B_2 - \quad (3.1) \\
& - \sqrt{2(q+1)} \left\{ \left(q+1 + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1) \cdot \nu - (1-\nu)^2 \right\} B_1 B_2 \times \\
& \times \exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n \gamma) + 2 \left\{ [(4q^2 + 2q - 1)\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} - \right. \\
& - (2q^2 - 4q + 1)(q+1) - (q-1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}) \cdot \beta_y^2 - \\
& - 2((2q-1)(q+1) - q\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + \beta_y^2)\nu + (q+1 + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2})\nu^2] \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) + \\
& + 2\sqrt{2(q+1)}(q+1)\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \cdot B_1 \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \} B_2 \cos(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n \gamma) + \\
& + 2 \left\{ -B_1 [(4q^2 + 2q - 1)\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + (2q^2 - 4q + 1)(q+1) + (q-1 + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2})\beta_y^2 + \right. \\
& + 2((2q-1)(q+1) + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + \beta_y^2)\nu - (q+1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2})\nu^2] \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) - \\
& - \sqrt{2(q+1)} \cdot (3(q^2 - 1) + 2\beta_y^2)\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \cdot \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) \} \cdot \\
& \cdot \sin(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n \gamma) = 0;
\end{aligned}$$

где

$$B_1(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} - 0.5(q-1)}, \quad B_2(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + 0.5(q-1)}. \quad (3.2)$$

Здесь β_y^2 – коэффициент напряжения, характеризующий сжимающие силы $N_y = 2h\sigma_y$: $\beta_y^2 \in [0, \infty)$; q – параметр скорости потока газа V – действительный корень кубического уравнения (2.6): $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right)$ при всех $\beta_y^2 \in [0, 4/3]$ и $q \in (1, \infty)$ при всех $\beta_y^2 \in (4/3, \infty)$ в соответствии с соотношениями (2.13)–(2.15); γ – параметр отношения сторон пластинки, определяемый выражением (2.12): $\gamma \in (0, \infty)$; ν – коэффициент Пуассона.

Очевидно, что $B_1(q) > 0$ и $B_2(q) > 0$ при всех допустимых значениях q и β_y^2 .

В уравнении (3.1) предполагается, что $\gamma \in (0, \infty)$. В соответствии с обозначением (2.12), значения $\gamma = 0$ и $\gamma = \infty$ соответствуют двум предельным случаям исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки: при условии $\gamma = 0$ пластинка удлиненная, а при условии $\gamma = \infty$ имеем полубесконечную пластину-полосу.

Подставляя общее решение исходной задачи устойчивости в виде (2.18), в котором корни r_1 и r_2 определяются выражениями (2.7), в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{n1} и C_{n2} .

Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений приводит к следующему дисперсионному уравнению, соответствующему локализованной дивергенции в окрестности свободного края обтекаемой полубесконечной пластинки-полосы $\gamma = \infty$:

$$F_1(q, \beta_y^2, \nu) = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right)^2 - 2(q + 1) \cdot \nu - (1 - \nu)^2 = 0, \quad \beta_y^2 < 1. \quad (3.3)$$

Можно показать, что дисперсионное уравнение (3.1) для всех $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right)$, $\nu \in (0, 0.5)$, $\beta_y^2 < 1$ и n в предельном случае, в котором $\gamma \rightarrow \infty$, совпадает с уравнением (3.3):

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} F(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = F_1(q, \beta_y^2, \nu) = 0. \quad (3.4)$$

Аналогично, подставляя общее решение (2.18), в котором корни r_1 и r_2 определяются выражениями (2.20), в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{n1} и C_{n2} . Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению, соответствующему локализованной неустойчивости в окрестности свободного края необтекаемой полубесконечной пластинки-полосы:

$$K_1(\beta_y^2, \nu) = \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2} \right)^2 - 2\nu \left(1 + \sqrt{1 - \beta_y^2} \right) - (1 - \nu)^2 = 0, \quad \beta_y^2 < 1. \quad (3.5)$$

Подставляя общее решение (2.9), в котором корни r_i определяются выражениями (2.20), в граничные условия (1.2)–(1.4) и, приравнивая к нулю определитель однородной системы уравнений четвертого порядка относительно постоянных C_{nk} , получаем дисперсионное уравнение $K(n, \gamma, \beta_y^2, \nu) = 0$, характеризующее достаточное условие неустойчивости необтекаемой прямоугольной пластинки для $\beta_y^2 < 1$.

В данной работе, в силу громоздкости, описание уравнения $K(n, \gamma, \beta_y^2, \nu) = 0$ не приведено.

Необходимо отметить, что при всех $\beta_y^2 < 1$, $\gamma \geq 80$, $\nu \in (0, 0.5)$ и n уравнение $K(n, \gamma, \beta_y^2, \nu) = 0$ равносильно уравнению (3.5) с точностью порядка 10^{-5} , а при значениях $\gamma < 80$ решения не имеет. Это означает, что плоская форма равновесия необтекаемой пластинки в случае, в котором $\gamma < 80$ остаётся устойчивой. А плоская форма равновесия достаточно широкой пластинки $\gamma \geq 80$ может потерять устойчивость только в форме локализованной неустойчивости при значениях $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{locinst}$, где критическое значение $(\beta_y^2)_{locinst} < 1$ является корнем уравнения (3.5). Из равносильности уравнений (3.5) и $K(n, \gamma, \beta_y^2, \nu) = 0$ для всех $\gamma \geq 80$ следует, что корень уравнения $K(n, \gamma, \beta_y^2, \nu) = 0$ может быть найден проще из уравнения (3.5).

Следует отметить, что при значениях коэффициента напряжения $1 > \beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{locinst}$ наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна и искривлённая форма равновесия, при которой изгиб пластинки локализован в окрестности свободного края пластинки.

Далее, подставляя решение (2.9), в котором корни r_i определяются выражениями (2.22), в граничные условия (1.2)–(1.4) и, приравнявая к нулю определитель однородной системы уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} , получаем дисперсионное уравнение, соответствующее неустойчивости необтекаемой прямоугольной пластинки для $\beta_y^2 > 1$, в виде [1]

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\beta_y^2} - 1 + \nu \right)^2 \cdot \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1} \cdot \operatorname{ch} \left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1} \right) \cdot \sin \left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1} \right) + \\ & + \left(\sqrt{\beta_y^2} + 1 - \nu \right)^2 \cdot \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1} \cdot \operatorname{sh} \left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1} \right) \cdot \cos \left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\beta_y^2 > 1$.

В таблице 1 приведены значения критического коэффициента напряжения $(\beta_y^2)_{unst} > 1$ – первого корня уравнения (3.6) при различных значениях $\gamma \leq 40$, ν и $n = 1$. При значениях $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{unst} > 1$ наряду с плоской формой равновесия (неизогнутая пластинка) становится возможным и искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка).

Следует отметить, что среди множества первых корней уравнения (3.6), полученных при различных n и при фиксированных значениях остальных параметров, наименьшему значению корня $(\beta_y^2)_{unst}$ соответствует $n = 1$ [1].

При значениях коэффициента напряжения $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{inst} > 1$ плоская форма равновесия необтекаемой прямоугольной пластинки теряет статическую

устойчивость в форме неустойчивости панели, при которой срединная поверхность пластинки «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Как следует из данных, приведённых в табл.1, критический коэффициент напряжения $(\beta_y^2)_{unst} = (N_y)_{unst} D^{-1} \mu_n^{-2}$ при умеренных значениях $\gamma \in [0.1; 40]$ зависит от коэффициента Пуассона ν и параметра γ : она больше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν , а с возрастанием γ – убывает. При этом в случае достаточно длинных пластинок $\gamma < 0.1$ и достаточно широких пластин $\gamma > 40$ можно сказать с точностью до порядка 10^{-4} , что критический коэффициент напряжения $(\beta_y^2)_{unst}$ почти не зависит от коэффициента Пуассона ν .

Начиная, примерно, со значения $\gamma = 5$, значение критического коэффициента напряжения $(\beta_y^2)_{unst}$ чуть больше единицы; при дальнейшем увеличении параметра γ коэффициент $(\beta_y^2)_{unst}$ уменьшается, приближаясь к единице сверху, не достигая её. Необходимо отметить, что при значениях $\gamma > 40$ интервалы чередования корней уравнения (3.6) очень малы, примерно порядка 10^{-3} и меньше. Иными словами, разность значений $(\beta_y^2)_{unst}$, соответствующих переходам от устойчивости к неустойчивости и наоборот, является величиной порядка не более 10^{-3} .

Таблица 1

$\nu \backslash \gamma$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.01	$3.2718 \cdot 10^7$	$3.2718 \cdot 10^7$	$3.2718 \cdot 10^7$	$3.2718 \cdot 10^7$	$3.2718 \cdot 10^7$
0.05	$5.1529 \cdot 10^4$	$5.1529 \cdot 10^4$	$5.1529 \cdot 10^4$	$5.1529 \cdot 10^4$	$5.1529 \cdot 10^4$
0.1	3192.25	3249.03	3249.16	3252.21	3283.29
0.3	39.693	42.251	43.564	44.896	47.615
0.5	6.1009	6.9169	7.2899	7.7841	8.7025
0.8	2.1609	2.3256	2.4025	2.5644	2.8912
1.0	1.6384	1.7424	1.7956	1.8769	2.0449
1.2	1.4161	1.4641	1.4884	1.5625	1.6907
1.5	1.2544	1.2882	1.3110	1.3456	1.4280
1.8	1.1728	1.1968	1.2102	1.2387	1.2996
2.0	1.1363	1.1577	1.1707	1.1924	1.2432
2.2	1.1130	1.1299	1.1384	1.1534	1.2012
2.5	1.0868	1.1004	1.1088	1.1257	1.1599
3.0	1.0609	1.0712	1.0774	1.0899	1.1151
5.0	1.0221	1.0281	1.0302	1.0363	1.0465
10.0	1.0056	1.0082	1.0094	1.0114	1.0144
20.0	1.0014	1.0026	1.0030	1.0035	1.0042
40.0	1.00048	1.00082	1.00092	1.00102	1.00114

Дисперсионное уравнение, соответствующее необтекаемой пластинки при значении $\beta_y^2 = 1$, имеет вид

$$(2 - \nu)^2 \cdot \text{sh}(\sqrt{2} \cdot \pi n \gamma) - \pi n \gamma \cdot \nu^2 \cdot \text{ch}(\sqrt{2} \cdot \pi n \gamma) = 0. \quad (3.7)$$

В табл. 2 приведены значения корня $\gamma_{cr} = \gamma(n, \nu)$ уравнения (3.7) при значении $n = 1$ и некоторых значениях коэффициента Пуассона ν .

Таблица 2

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\gamma_{cr.}$	71.62	15.60	10.22	5.97	2.87

Для всех значений коэффициента Пуассона ν , при значениях $\gamma(\nu) \geq \gamma_{cr.}(\nu)$, приведённых в табл. 2, когда $\beta_y^2 = 1$, плоская форма равновесия необтекаемой прямоугольной пластинки теряет устойчивость в форме неустойчивости панели, при которой «выпучивается» вся срединная поверхность пластинки [1,5,6]. Соответственно, при значениях параметра $\gamma(\nu) < \gamma_{cr.}(\nu)$ и при всех ν плоская форма равновесия необтекаемой пластинки при $\beta_y^2 = 1$ является устойчивой.

В табл. 3 приведены значения корня $(\beta_y^2)_{locinst}$ уравнения (3.5) при различных значениях коэффициента Пуассона ν .

Начиная с значения $\gamma = \tilde{\gamma}_{cr} = 80$, при всех $\beta_y^2 \in [(\beta_y^2)_{locinst}, 1)$ и коэффициента Пуассона ν плоская форма равновесия необтекаемой достаточно широкой пластинки теряет устойчивость в форме локализованной неустойчивости в окрестности точек свободного края $x = 0$ пластинки, приводящая к «выпучиванию» поверхности пластинки в окрестности свободного края $x = 0$ вдоль стороны b .

Таблица 3

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$(\beta_y^2)_{locinst}$	0.9998	0.9983	0.9962	0.9889	0.9567

Отметим, что устойчивость необтекаемых прямоугольных пластинок при различных граничных условиях и различных значениях отношения сторон $\gamma = a \cdot b^{-1}$ рассмотрена, в частности, в [1, 5, 6]. В статье [3] и в монографии [6], в которых рассмотрена устойчивость сжатой пластинки, соответственно, с двумя свободными краями и с одним свободным и жёстко заделанным краями, получено при значениях $\nu = 0.3$ и $\gamma = \infty$ то же значение $(\beta_y^2)_{locinst} = 0.9962$, что и в табл. 2. Это совпадение связано с локализацией прогиба $w(x, y)$ вблизи свободного края $x = 0$ пластинки при достаточно больших значениях $\gamma \geq \tilde{\gamma}_{cr} = 80$, в результате которой граничные условия на краю $x = a$ перестают оказывать влияние [5,14-16].

Таким образом, начальное напряжённое состояние необтекаемой пластинки при всех значениях коэффициента напряжения $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{inst} > 1$ (табл. 1) и $\gamma \in (0, \infty)$,

а также при значении $\beta_y^2 = 1$ и всех значений $\gamma \geq \gamma_{cr}$. (табл. 2), приводит к потере устойчивости её плоской формы равновесия в форме дивергенции панели, при котором пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

А начальное напряжённое состояние, в случае необтекаемой достаточно широкой пластинки $\gamma \geq 80$, характеризуемое коэффициентом напряжения $\beta_y^2 \geq (\beta_y^2)_{locinst}$ (табл. 3), приводит к потере устойчивости в форме локализованной неустойчивости. При этом «выпучивается» узкая полоса срединной поверхности пластинки в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки вдоль стороны b . То есть, прогиб локализуется вблизи свободного края пластинки $x = 0$.

Заметим, что непосредственной подстановкой значения $\beta_y^2 = 0$ в уравнения (3.1) и (3.3) можно убедиться в их тождественности соответствующим дисперсионным уравнениям, полученных в работах [14, 15] при исследовании задач устойчивости, соответственно, обтекаемой полубесконечной пластины-полосы и прямоугольной пластинки с ненагруженными краями.

4. Перейдём теперь к анализу устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки.

Исследуем дисперсионное уравнение (3.1), при всех значениях $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1, (\beta_y^2)_{inst})$, $\gamma \in (0, \infty)$ и коэффициента Пуассона ν , а также дисперсионное уравнение (3.3) при значениях $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst})$ и при всех ν , являющиеся, соответственно, достаточными признаками неустойчивости плоской формы равновесия прямоугольной пластинки и полубесконечной пластины-полосы. Критические значения $(\beta_y^2)_{inst} > 1$ и $(\beta_y^2)_{locinst} < 1$ коэффициента напряжения β_y^2 приведены в табл. 1 и 3 соответственно.

При этом, в соответствии с условиями (2.13)–(2.15), параметр скорости $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right)$ при всех $\beta_y^2 \leq 4/3$, а при всех $\beta_y^2 \in (4/3, (\beta_y^2)_{inst})$ имеем $q \in (1, \infty)$.

С помощью методов численного анализа найдены первые корни $q_{cr.div} = q_{cr.div}(n, \gamma, \beta_y^2, \nu)$ уравнения (3.1) и единственный действительный корень $q_{loc.div} = q_{loc.div}(\beta_y^2, \nu)$ уравнения (3.3), соответствующие различным значениям параметров n , β_y^2 , γ и ν . Оказалось, что уравнения (3.1) и (3.3) равносильны при всех $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right)$, $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst})$, $\gamma \in [2, \infty)$ и $\nu \in (0, 0.5)$:

$$q_{cr.div} = q_{loc.div} = q^* . \quad (4.1)$$

Решение (4.1) существует только лишь при значениях $\beta_y^2 \in [0, 0.85]$, $\nu \in (0, 0.5)$ и $\beta_y^2 \in (0.85, 0.95)$, $\nu \in (0, 0.25)$. Отсюда следует, что, начиная с

значения $\gamma = 2$, плоская форма равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки теряет устойчивость в форме локализованной дивергенции, подобной форме потери устойчивости обтекаемой полубесконечной пластины-полосы.

Необходимо отметить, что при значениях $\gamma \in [2, \infty)$, $\beta_y^2 \in (0.95, 1)$ и всех ν , функции (3.1) и (3.3) на интервале $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right)$ отрицательны:

$$F(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) < 0, F_1(q, \beta_y^2, \nu) < 0. \quad (4.2)$$

Из условия (4.2) очевидно следует, что плоская форма равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки при всех $\gamma \in [2, \infty)$, $\beta_y^2 \in (0.95, 1)$ и всех ν , как и плоская форма равновесия полубесконечной пластины-полосы ($\gamma = \infty$), является неустойчивой при всех значениях параметра скорости $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right)$.

Подставляя найденные значения первого корня $q_{cr.div}$ уравнения (3.1) в соотношение (2.10) и корня $q_{loc.div} = q^*$ уравнения (3.3) в соотношения (2.11), определяем с достаточной точностью значения приведённых критических скоростей дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) = V_{cr.div}(n, \gamma, \beta_y^2, \nu)$ при всех значениях $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1, (\beta_y^2)_{inst})$, $\gamma \in (0, \infty)$, $\nu \in (0, 0.5)$ и локализованной дивергенции $V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3) = V_{loc.div}(n, \beta_y^2, \nu)$ при всех $\beta_y^2 \in [0, 1)$, $\nu \in (0, 0.5)$.

Критические скорости $V_{cr.div}$ разграничивают области устойчивости и дивергентной неустойчивости невозмущённой формы равновесия прямоугольной пластинки в форме дивергенции панели при всех $\gamma \in [0, \infty)$, $\nu \in (0, 0.5)$ и $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1, (\beta_y^2)_{inst})$.

Критические скорости $V_{loc.div}$ разграничивают области устойчивости и дивергентной неустойчивости как прямоугольной пластинки при всех $\gamma \geq 2$, $\beta_y^2 \in [0, 0.95)$, $\nu \in (0, 0.5)$, так и полубесконечной пластины-полосы ($\gamma = \infty$) при всех $\beta_y^2 \in [0, 0.95)$, $\nu \in (0, 0.5)$ в форме локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$.

При значениях скоростей потока газа $V \geq V_{cr.div}$ происходит плавное изменение формы пластинки: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания», а при скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div}$ «выпучивается» узкая полоса вдоль стороны b в окрестности свободного края $x = 0$ полубесконечной пластины-полосы.

Численные исследования уравнений (3.1) и (3.3) показали, что при любых n , $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1, (\beta_y^2)_{inst})$, $\gamma \in [0, \infty)$ и $\nu \in (0, 0.5)$ наименьшие значения приведённых критических скоростей $V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ и $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ соответствуют значению $n=1$, так что вдоль стороны b всегда образуется одна полуволна.

Ограниченность объёма статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. В табл. 4–8 представлены численные результаты решения задачи устойчивости прямоугольной пластинки (1.1)–(1.4), характеризующие наиболее представительные случаи зависимости приведённых критических скоростей локализованной дивергенции $V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ (табл. 4) и дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ (табл. 5–8) от существенных параметров системы «пластинка-поток», соответствующих значению $n=1$.

Таблица 4

$\nu \backslash \tilde{\beta}_y^2$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.00	324.761	173.371	149.854	120.741	77.398
$1 \cdot 10^{-4}$	315.780	169.907	143.878	114.922	76.865
$1 \cdot 10^{-2}$	289.523	168.325	142.374	113.390	75.732
0.10	267.024	160.853	131.075	106.909	72.643
0.20	249.954	146.091	125.277	95.056	71.283
0.30	229.367	132.122	117.723	86.243	57.706
0.40	207.652	115.081	99.107	78.311	47.424
0.50	183.146	103.084	87.564	67.196	43.956
0.60	152.743	86.676	71.532	53.324	34.241
0.70	124.604	68.526	57.471	41.562	27.147
0.80	95.948	53.077	42.506	30.817	26.152
0.85	82.261	37.475	33.923	28.162	–
0.90	60.942	32.161	29.851	–	–
0.95	41.193	31.753	–	–	–

В таблице 4 приведены значения критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ при некоторых значениях $\beta_y^2 = \tilde{\beta}_y^2 \in [0, 0.95]$, $\gamma \in [2, \infty)$ и $\nu \in (0, 0.5)$.

В соответствии с соотношениями (2.11) и (3.3) приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ зависит от коэффициента напряжения $\tilde{\beta}_y^2$ и коэффициента Пуассона ν .

Как следует из данных, приведённых в таблице 4, при значениях $\tilde{\beta}_y^2 < 0.9$ и $\nu \in (0, 0.5)$ критическая скорость локализованной дивергенции

$V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν , а с возрастанием коэффициента напряжения $\tilde{\beta}_y^2$ – убывает.

В силу условия (4.2) при всех значениях параметров $\beta_y^2 \in (0.9, 1)$, $\gamma \in [2, \infty)$ и $\nu \in (0.125, 0.5)$ при обтекании плоская форма равновесия прямоугольной пластинки «мгновенно» теряет устойчивость в форме локализованной дивергенции: происходит «скачкообразный рост» коэффициента напряжения β_y^2 от 0.956 до 0.999. Как показали численные исследования, пластинка остаётся неустойчивой в форме локализованной дивергенции и далее, при всех допустимых значениях скорости V обтекающего потока газа – значениях скорости, соответствующих интервалу $q \in \left((-1 + 2\sqrt{4 - 3\beta_y^2})/3, \infty \right)$, пока $\beta_y^2 < 1$.

Из сопоставления данных табл. 3 и 4 следует, что критические значения коэффициента напряжения $\beta_y^2 = (\beta_y^2)_{locinst}$, найденные при отсутствии обтекания (табл. 3), оказываются больше, примерно на 14%, чем критические значения $\beta_y^2 = (\tilde{\beta}_y^2)$, найденные при обтекании пластинки потоком газа (табл. 4). А критические скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ уменьшаются примерно в четыре раза с ростом коэффициента напряжения от значения $\beta_y^2 = 0$ до $\beta_y^2 = 0.9$. Это указывает на существенную дестабилизацию состояния плоской формы равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки, у которой $\gamma \geq 2$, при наличии начального напряжённого состояния, пока коэффициент напряжения $\beta_y^2 < 1$.

Таблица 5

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.00001	$0.3562 \cdot 10^{-8}$	$0.2949 \cdot 10^{-8}$	$0.2767 \cdot 10^{-8}$	$0.2455 \cdot 10^{-8}$	$0.1957 \cdot 10^{-8}$
0.0001	$0.3562 \cdot 10^{-6}$	$0.2949 \cdot 10^{-6}$	$0.2767 \cdot 10^{-6}$	$0.2455 \cdot 10^{-6}$	$0.1957 \cdot 10^{-6}$
0.001	$0.3562 \cdot 10^{-4}$	$0.2949 \cdot 10^{-4}$	$0.2767 \cdot 10^{-4}$	$0.2455 \cdot 10^{-4}$	$0.1957 \cdot 10^{-4}$
0.01	$0.3562 \cdot 10^{-2}$	$0.2949 \cdot 10^{-2}$	$0.2767 \cdot 10^{-2}$	$0.2455 \cdot 10^{-2}$	$0.1957 \cdot 10^{-2}$

В случае достаточно длинных пластинок $\gamma < 0.1$ приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ не зависит от коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in (0, (\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1, 25)$, а зависит только от коэффициентов γ и ν : при всех значениях $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1, 25)$ она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν и убывает с уменьшением γ , устремляясь к нулю при $\gamma \rightarrow 0$ (табл. 5).

Из сопоставления значений критических скоростей дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, приведённых в табл. 5, с результатами, полученными в работах [15,16] при исследовании устойчивости обтекаемой ненагруженной пластинки, следует, что при всех $\gamma \leq 0.1$ и $\beta_y^2 \in [0, (\beta_y^2)_{locinst}) \cup [1, 25)$ критические скорости дивергенции панели с точностью порядка 10^{-8} равны соответствующим значениям критической скорости дивергенции панели с ненагруженными краями ($\beta_y^2 = 0$).

Итак, в случае достаточно длинных пластинок, у которых $\gamma < 0.1$, пока коэффициент напряжения $\beta_y^2 < 25$, наличие начального напряжённого состояния не оказывает влияние на устойчивость плоской формы равновесия обтекаемой пластинки для всех $\nu \in (0, 0.5)$.

А при значениях $\beta_y^2 \in [25, (\beta_y^2)_{inst})$ обтекание приводит к «скачкообразному» («мгновенному») увеличению коэффициента напряжения от значения $\beta_y^2 = 25$ до значения $\beta_y^2 = (\beta_y^2)_{inst}$ более чем в 130 раз (табл.1) для всех $\nu \in (0.125, 0.5)$. В силу этого, пластинка, будучи до обтекания устойчивой, при обтекании «мгновенно» теряет устойчивость в форме дивергенции панели: плоская форма равновесия пластинки «мгновенно» становится «изогнутой».

Однако, как показали численные исследования, при скоростях потока газа, примерно $V \geq V_{stab.} \approx 76.12 \cdot D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$, неустойчивая плоская форма равновесия достаточно длинной прямоугольной пластинки ($\gamma < 0.1$) становится устойчивой: изогнутая пластинка становится плоской.

В случае прямоугольной пластинки умеренных размеров $\gamma \in (0.1, 2)$ при значениях $\beta_y^2 \in [0, 1)$ и всех значениях коэффициента Пуассона плоская форма равновесия пластинки при скоростях потока газа $V \geq \tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ теряет устойчивость в форме дивергенции панели.

Значения $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ приведены в табл. 6 и 7.

Как следует из данных табл. 6 и 7, приведенная критическая скорость дивергенции панели $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ зависит от параметров γ , β_y^2 и ν : она возрастает с ростом γ , убывает с увеличением $\beta_y^2 \in [0, 1)$ и меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν .

В табл. 6 и 7, значения критической скорости $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, взятые в фигурные скобки, соответствуют, соответственно, значениям коэффициента Пуассона ν : 0.125, 0.25, 0.3, 0.375, 0.5.

Так как при всех $\beta_y^2 \in [0, 0.95)$ и $\gamma \geq 2$ плоская форма равновесия пластинки теряет устойчивость в форме локализованной дивергенции, то отсюда следует, что значение $\gamma = 2$ является границей перехода от одной формы неустойчивости к

другой – от дивергенции панели к локализованной дивергенции, пока коэффициент напряжения не слишком велик: $\beta_y^2 < 1$.

Таблица 6

$\gamma \backslash \beta_y^2$	0.00	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	{0.3562 0.2949 0.2767 0.2455 0.1955}	{0.3556 0.2948 0.2766 0.2454 0.1954}	{0.3525 0.2944 0.2757 0.2451 0.1948}	{0.3513 0.2942 0.2754 0.2449 0.1946}	{0.3489 0.2940 0.2752 0.2448 0.1944}	{0.3473 0.2939 0.2750 0.2447 0.1942}
0.3	{3.820 3.299 3.080 2.760 2.223}	{3.808 3.288 3.074 2.754 2.214}	{3.759 3.234 3.025 2.702 2.166}	{3.643 3.127 2.921 2.592 2.067}	{3.527 3.015 2.804 2.493 1.961}	{3.415 2.914 2.783 2.379 1.852}
0.5	{14.95 13.52 11.96 10.78 9.06}	{13.88 12.42 11.51 10.57 8.19}	{13.20 11.92 11.04 10.12 7.79}	{12.92 11.32 10.21 8.77 5.41}	{12.36 10.20 9.44 8.39 6.28}	{10.99 9.23 8.44 7.41 5.45}
0.8	{80.47 60.09 54.32 46.75 35.95}	{79.56 59.23 53.30 45.88 33.56}	{71.50 54.73 48.86 42.72 22.73}	{59.31 46.39 41.87 35.95 25.29}	{48.83 38.67 34.94 29.92 21.82}	{39.63 31.33 28.16 23.62 16.57}
1.0	{522.80 157.17 126.42 101.74 70.21}	{520.33 155.40 124.71 99.37 68.44}	{516.25 139.65 115.82 93.08 65.17}	{504.51 105.49 90.61 73.78 52.25}	{122.12 81.60 71.40 59.57 41.26}	{82.09 61.20 53.67 43.66 29.92}
1.2	{613.51 320.02 257.83 194.87 133.24}	{609.32 313.09 249.79 191.98 127.92}	{583.17 288.88 222.77 176.87 122.07}	{546.92 217.80 178.67 137.43 95.07}	{457.67 158.08 134.04 88.98 72.25}	{176.02 107.35 92.74 75.44 51.70}
1.5	{980.85 595.80 497.87 388.36 269.25}	{962.21 589.82 482.37 374.96 258.99}	{915.84 542.89 456.90 360.79 247.37}	{788.08 445.92 377.05 283.59 194.75}	{683.91 341.43 268.63 219.57 142.03}	{498.06 231.18 181.13 147.35 100.98}

Таблица 7

$\beta_y^2 \backslash \gamma$	0.8	0.9	0.95	0.97	0.99
0.1	$\begin{Bmatrix} 0.3458 \\ 0.2938 \\ 0.2748 \\ 0.2446 \\ 0.1941 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3452 \\ 0.2937 \\ 0.2745 \\ 0.2445 \\ 0.1940 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3451 \\ 0.2936 \\ 0.2742 \\ 0.2444 \\ 0.1939 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3449 \\ 0.2935 \\ 0.2738 \\ 0.2443 \\ 0.1937 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.3446 \\ 0.2933 \\ 0.2736 \\ 0.2442 \\ 0.1935 \end{Bmatrix}$
0.3	$\begin{Bmatrix} 3.361 \\ 2.849 \\ 2.642 \\ 2.328 \\ 1.803 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.302 \\ 2.790 \\ 2.587 \\ 2.272 \\ 1.746 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.271 \\ 2.762 \\ 2.556 \\ 2.244 \\ 1.720 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.259 \\ 2.752 \\ 2.548 \\ 2.235 \\ 1.710 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.251 \\ 2.742 \\ 2.537 \\ 2.225 \\ 1.701 \end{Bmatrix}$
0.5	$\begin{Bmatrix} 10.55 \\ 8.71 \\ 8.09 \\ 6.84 \\ 5.08 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.13 \\ 8.35 \\ 7.61 \\ 6.50 \\ 4.71 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 10.01 \\ 8.05 \\ 7.19 \\ 6.33 \\ 4.55 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 9.67 \\ 7.95 \\ 7.27 \\ 6.28 \\ 4.38 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 9.54 \\ 7.85 \\ 7.20 \\ 6.17 \\ 4.38 \end{Bmatrix}$
0.8	$\begin{Bmatrix} 34.86 \\ 27.33 \\ 25.39 \\ 20.81 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 30.42 \\ 24.35 \\ 21.65 \\ 18.09 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 28.74 \\ 22.47 \\ 20.38 \\ 16.46 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 27.77 \\ 21.75 \\ 19.78 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 27.54 \\ 21.16 \\ 18.81 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
1.0	$\begin{Bmatrix} 68.09 \\ 50.47 \\ 44.30 \\ 40.39 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 54.99 \\ 41.53 \\ 36.91 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 48.71 \\ 37.09 \\ 32.70 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 47.68 \\ 35.43 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 45.02 \\ 34.12 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
1.2	$\begin{Bmatrix} 126.17 \\ 85.71 \\ 73.42 \\ 60.30 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 112.47 \\ 66.46 \\ 56.84 \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 102.70 \\ 56.64 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 73.43 \\ 35.32 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 69.33 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$
1.5	$\begin{Bmatrix} 318.14 \\ 170.34 \\ 143.40 \\ 117.39 \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 180.60 \\ 119.28 \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 142.62 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 128.23 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 115.16 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$

При значениях $\beta_y^2 \in (0.95, 1)$ и $\gamma \geq 2$ плоская форма равновесия необтекаемой пластинки, являясь неустойчивой в форме локализованной неустойчивости, остаётся такой же и при обтекании, пока $\beta_y^2 < 1$. А при значениях $\beta_y^2 \geq 1$ значение $\gamma = 2$ является границей обратного перехода от одной формы неустойчивости к другой –

перехода от локализованной неустойчивости к неустойчивости в форме дивергенции панели.

Таблица 8

$\frac{\tilde{\rho}_y^2}{\gamma}$	1.00	1.1025	1.21	1.2544	1.2996	1.3225	1.44	2.25
0.1	{0.3445 0.2932 0.2734 0.2440 0.1934}	{0.3441 0.2930 0.2733 9.2438 0.1929}	{0.3437 0.2928 0.2731 9.2434 0.1923}	{0.3432 0.2926 0.2728 9.2430 0.1918}	{0.3428 0.2924 0.2725 9.2428 0.1914}	{0.3425 0.2922 0.2721 9.2425 0.1908}	{0.3415 0.2918 0.2717 9.2423 0.1906}	{0.3361 0.2841 0.2639 9.2419 -}
0.2	{1.3946 1.1812 1.1166 0.9906 0.7748}	{1.3889 1.1780 1.1009 0.9806 0.7656}	{1.3859 1.1731 1.0896 0.9629 0.7542}	{1.3794 1.1682 1.0748 0.9524 0.7402}	{1.3743 1.1641 1.0724 0.9425 0.7373}	{1.3703 1.1507 1.0714 0.9322 0.7307}	{- - - - -}	{- - - - -}
0.3	{3.218 2.733 2.537 2.232 1.688}	{3.159 2.659 2.443 2.132 1.605}	{3.105 2.578 3.382 2.074 1.493}	{3.071 2.563 2.343 2.056 -}	{3.005 2.518 2.341 1.992 -}	{3.004 2.501 2.326 1.943 -}	{- - - - -}	{- - - - -}
0.4	{5.922 4.939 4.592 3.919 2.920}	{5.791 4.821 4.292 3.726 2.738}	{5.498 4.459 4.091 3.573 -}	{5.414 4.441 3.997 3.485 -}	{5.347 4.386 3.998 3.426 -}	{5.319 4.343 3.971 3.389 -}	{- - - - -}	{- - - - -}
0.5	{9.643 7.815 7.494 6.082 4.308}	{8.961 7.273 6.634 5.692 -}	{8.460 6.695 5.784 - -}	{8.227 5.725 - - -}	{5.864 - - - -}	{- - - - -}	{- - - - -}	{- - - - -}
0.8	{26.81 21.21 18.52 - -}	{22.86 - - - -}	{- - - - -}	{- - - - -}	{- - - - -}	{- - - - -}	{- - - - -}	{- - - - -}

Как следует из данных, приведённых в табл. 6 и 7, критическая скорость дивергенции панели $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ уменьшается примерно в 1,5–2 раза при увеличении коэффициента напряжения от значения $\beta_y^2 = 0$ до $\beta_y^2 = 0.99$ и всех $\gamma < 1$. При значениях $\gamma \in [1, 2)$ и $\beta_y^2 \in (0.95, 1)$ обтекание приводит к «скачкообразному» увеличению коэффициента напряжения до значений, больших критического значения $(\beta_y^2)_{inst.}$ (табл. 1). Вследствие этого, плоская форма равновесия пластинки, будучи устойчивой до обтекания, при обтекании «мгновенно» теряет устойчивость в форме дивергенции панели.

Значения приведённой критической скорости дивергенции панели $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при некоторых значениях $\beta_y^2 \in [1, (\beta_y^2)_{inst.})$ и $\gamma \in [0.1, 0.8]$ даны в табл. 8.

Как видно из таблицы 8, приведённая критическая скорость $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ дивергенции панели возрастает с ростом $\gamma \in (0.1, 0.5)$, убывает с возрастанием коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [1, (\beta_y^2)_{inst.})$ и становится меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν .

Из сопоставления данных, приведённых в табл. 1, 6 (столб. 1) и 8, следует, что при всех $\gamma \in (0.1, 0.8]$, $\beta_y^2 \in [1, 2.25]$ обтекание приводит к «скачкообразному» росту коэффициента напряжения в 2.5–30 раз. Вследствие этого, критическая скорость дивергенции панели $\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ «скачкообразно» уменьшается в 1.5–2 раза при значениях $\gamma \in (0.1, 0.5)$ и $\nu \in (0, 0.5)$, в сравнении с критической скоростью дивергенции панели с ненагруженными краями, а при значениях $\gamma \in (0.1, 0.5)$, $\beta_y^2 > 1.3225$, $\nu \in (0, 0.5)$ и $\gamma \in [0.5, 0.8)$, $\beta_y^2 > 1.21$, $\nu > 0.25$ при обтекании происходит «мгновенная» потеря устойчивости плоской формы равновесия прямоугольной пластинки в форме дивергенции панели.

Из проведённых численных исследований следует, что при всех $\gamma \geq 0.8$, $\beta_y^2 \geq 1$ и $\nu > 0.125$ обтекание приводит к «мгновенной» потере устойчивости плоской формы равновесия пластинки в форме дивергенции панели.

Однако, после «мгновенной» потери устойчивости при обтекании при значениях параметров $\beta_y^2 \in [25, (\beta_y^2)_{inst.})$, $\gamma \in (0, 0.1)$ и $\beta_y^2 \in [1, 2.25]$, $\gamma \in [0.1, 0.8]$, при скоростях потока газа $V \geq V_{stab.}$ искривлённая форма равновесия пластинки вновь становится плоской. При остальных значениях параметров задачи после «мгновенной» потери устойчивости плоской формы равновесия обтекание не приводит к стабилизации, т.е. $V_{stab.} = \infty$.

Таким образом, как следует из сопоставления полученных результатов с результатами работ [14–16], начальное напряжённое состояние оказывает существенное дестабилизирующее влияние на устойчивость плоской формы равновесия прямоугольной пластинки, обтекаемой свехзвуковым потоком газа.

Значения $V_{stab.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) = V_{stab.}(\beta_y^2, \gamma, \nu)$ приведены в табл. 9.

Таблица 9

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\gamma < 0.1, \beta_y^2 \geq 25$	76.12	76.12	76.12	76.12	76.12
$\gamma = 0.1, \beta_y^2 > 4$	77.55	77.61	77.65	77.69	77.75
$\gamma = 0.2, \beta_y^2 > 1.3225$	81.50	82.11	82.53	82.88	83.56
$\gamma = 0.3, \beta_y^2 > 1.3225$	87.31	88.32	88.93	90.02	91.10
$\gamma = 0.4, \beta_y^2 > 1.3225$	97.94	102.33	103.87	106.78	109.04
$\gamma = 0.5, \beta_y^2 > 1.2544$	113.99	117.36	119.85	122.50	127.73
$\gamma = 0.6, \beta_y^2 > 1.21$	131.42	139.59	145.13	153.58	168.01
$\gamma = 0.7, \beta_y^2 > 1.1025$	151.83	171.42	183.57	200.20	∞
$\gamma = 0.8, \beta_y^2 > 1.1025$	188.58	225.41	249.39	∞	∞

Наиболее ярко эффект дестабилизации проявляется при следующих значениях параметров β_y^2 и γ : $\beta_y^2 \in [25, (\beta_y^2)_{inst.}]$, $\gamma \in (0, 0.1]$ и $\beta_y^2 \in [1, 2.25]$, $\gamma \in (0.1, 0.8]$. При этих значениях параметров пластинка, будучи устойчивой до обтекания, при обтекании «мгновенно» теряет устойчивость в форме дивергенции панели.

В рассмотренном примере явления дестабилизации и стабилизации вполне объяснимы сложным взаимодействием консервативной и неконсервативной составляющих нагрузки, действующей на пластинку в сверхзвуковом потоке газа.

5. Основные результаты. В работе на примере обтекаемой сверхзвуковым потоком газа сжатой упругой прямоугольной пластинки со свободным краем проиллюстрировано своеобразное влияние начального напряжённого состояния на устойчивость невозмущённого состояния равновесия пластинки.

Определены критические значения коэффициента напряжения и критические скорости потока газа, при превышении которых плоская форма равновесия теряет статическую устойчивость в форме дивергенции панели или в форме локализованной дивергенции в зависимости от параметров системы «пластинка-поток» в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба.

С помощью графоаналитических методов анализа произведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка-поток» на области устойчивости и статической неустойчивости. Исследована граница области устойчивости.

Определены условия, позволяющие выявить возможность потери статической устойчивости пластинки в форме дивергенции панели или в форме локализованной дивергенции ранее, ещё до получения и исследования дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости.

Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции, разграничивающие области устойчивости и статической неустойчивости, как в форме дивергенции панели, так и в форме локализованной дивергенции.

Показана существенная дестабилизирующая роль начального напряжённого состояния на устойчивость плоской формы равновесия пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа.

Результаты работы могут быть использованы при исследовании задач панельного флаттера в нелинейной постановке [17–19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329 с.
3. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С.38–46.
4. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе. // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243.
5. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука, Физматлит, 1995. 320 с.
6. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
7. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
8. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122.
9. Ильющин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733–755.
10. Ashley G. H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. №12. P.1109–1118.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832 с.
12. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С.124–126.
13. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности». Ереван: Изд-во ЕГУ. 1997. С. 95–99.
14. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34.
15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Дивергентная неустойчивость прямоугольной пластинки при набегающем сверхзвуковом потоке газа на её свободный край.// Тр. VIII Международной научной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис–Степанакерт (Армения), 2014, сентябрь 22-25, с. 98–103.
16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.12 - 42.
17. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. Т.1. № 1. С. 92–98.

18. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 3. С.24–38.
19. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Характер нелинейных колебаний гибких пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа.// Изв. НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. № 4. С. 20–40.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения,
Тел.: (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартirosян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения,
Тел.: (+374 10) 524890
E-mail: mehinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 20. 06. 2017

**ON 3D THEORY OF ACOUSTIC METAMATERIALS WITH A
TRIPLE-PERIODIC SYSTEM OF INTERIOR OBSTACLES**

Remizov M.Yu., Sumbatyan M.A.

Keywords: doubly periodic array of cracks; one-mode propagation; integral equation; semi-analytical method; reflection and transmission coefficients; acoustic filters

Ключевые слова: двояко-периодический массив трещин; низкочастотный режим; интегральное уравнение; полуаналитический метод; коэффициент отражения и прохождения; акустический фильтр

Բանալի բառեր՝ ճաքերի երկպարբերական զանգված; ցածր հաճախությունների ռեժիմ; ինտեգրալ հավասարում; կիսավերլուծական եղանակ; արտացոլման և անցման գործակից; ձայնային ֆիլտր

Ремизов М.Ю., Сумбатян М.А.

К теории акустических метаматериалов с тройко-периодической системой внутренних неоднородностей

В трёхмерной постановке предлагается аналитический метод исследования распространения плоской упругой волны через систему произвольного конечного числа параллельных двоякопериодических идентичных массивов трещин. В условиях низкочастотного режима задача сводится к системе интегральных уравнений на одной выделенной типовой прямоугольной трещине. Полуаналитический метод, разработанный ранее для трёхмерных скалярных и плоских упругих задач, приводит к явным аналитическим представлениям для волнового поля и параметров рассеяния - коэффициентов отражения и прохождения.

Ռեմիզով Մ.Յու., Սումբատյան Մ.Ա.

Ներքին անհամասեռությունների եռապարբերական համակարգով ակուստիկ մետամյութերի տեսության վերաբերյալ

Եռաչափ դրվածքով առաջարկվում է ճաքերի կամայական վերջավոր թվով զուգահեռ երկպարբերական նույնական զանգվածներով հարթ առաձգական ալիքի տարածման հետազոտման վերլուծական եղանակ: Ցածր հաճախականության ռեժիմի պայմաններում խնդիրը բերվում է մեկ առանձնացված տիպային ուղղանկյունային ճաքի վրա ինտեգրալ հավասարումների համակարգի: Եռաչափ սկալյար և առաձգական հարթ խնդիրների համար նախկինում մշակված կիսավերլուծական եղանակը բերում է բացահայտ անալիտիկ արտահայտությունների ալիքային դաշտի և ցրման պարամետրերի արտացոլման և անցման գործակիցների, համար:

In a three-dimensional (3-D) context an analytical approach is proposed to study the propagation of elastic plane wave through a system of any finite number of parallel doubly-periodic identical gratings of coplanar cracks. In the low frequency range the problem is reduced to a system of integral equations holding over the crack of a chosen elementary rectangular cell of the grating. The semi-analytical method previously introduced for scalar and elastic 2-D problems gives an explicit representations for the wave field and the scattering parameters - the reflection and transmission coefficients.

Introduction

The investigation of the scattering phenomena for waves propagating through media containing gratings of periodic geometry is nowadays a subject of great interest in many

fields of engineering science, particularly - with impressive mechanical, electromagnetic and acoustical applications. Different numerical methods have been applied in the 2-D problems for periodic apertures [1-5]. Introducing various approximations, valid in the one-mode regime, the authors obtain some analytical solutions and develop respective formulas for the reflection and transmission coefficients in an explicit form.

The papers [6-9] provide explicit analytical formulas for reflection and transmission coefficients in the one-mode case for scalar acoustic or electromagnetic waves penetrating through doubly and triple-periodic arrays of arbitrary-shaped apertures and volumetric obstacles. In the two-dimensional in-plane problems on wave propagation through a periodic array of screens in elastic solids the works [10,11] can be cited for a single-periodic system of cracks and the works [12,13] -- for the doubly-periodic geometry.

The present work continues to study the 3-D elastic case for several doubly periodic arrays of coplanar cracks of arbitrary configuration, parallel to each other. The discussion is restricted to rectangular cracks and any finite number of parallel identical arrays. The topic of the problem is connected with [14,15] and some other published papers, but the mathematical technique is different. The wave process is harmonic in time, and all physical quantities contain the factor $e^{-i\omega t}$, which is further omitted, for the sake of brevity. Like in some previous works, (a) only one-mode propagation with normal incidence is considered ($ak_2, ck_2 < \pi$), where k_2 is the wave number of the transverse wave, $2a; 2c$ are the periods of the grating; (b) the vertical cracked planes are sufficiently distant from each other, so that the ratios $D/a, D/c$ are comparatively large, where D is the distance between the neighbor arrays. In frames of the proposed approach, the problem is reduced to a dual hyper-singular integral equation, whose semi-analytical solution permits an explicit-form representation for the reflection and transmission coefficients.

The problem under consideration is connected with the theory and the practice of the so-called «acoustic metamaterials», which may possess a property of acoustic filter with a cutoff of the propagating wave over certain frequency intervals, due to their specific internal structure. This phenomenon for the elastic triple-periodic structures was recently discovered experimentally, being presented in [16]. Some fundamental aspects of the acoustic metamaterials are discussed, among many other publications, in [17-19].

Formulation of the problem and reducing to an integral equation

Let us consider a 3-D medium, which consists of M infinite planes, located at $x = 0, D, 2D, \dots, (M-1)D$, each containing a two-dimensional infinite periodic array of co-planar cracks, symmetric with respect to axes y and z . The distance between the systems of cracks, forming the third period is D . The period of the grating along axis y is $2a$, and along axis z is $2c$. If we study the incidence of the longitudinal plane wave $e^{i(k_1 x - \omega t)}$ upon the positive direction of axis x , then the problem is obviously equivalent (due to a symmetry) to a single waveguide of width $2a$ along axis y and $2c$ along axis z , (see Fig.1). Let us assume that a longitudinal plane wave of the form

$$\phi_0 = e^{ik_1 x}, \quad \psi_l = 0, \quad (l = 1, 2, 3), \quad \Delta\phi + k_1^2\phi = 0, \quad \Delta\psi + k_2^2\psi = 0, \quad (1)$$

is entering from $-\infty$, generating the scattered fields in front of the first array ($x < 0$),

inside the structure $((s-1)D < x < sD; s=1, \dots, M-1)$ and behind the last one $(x > (M-1)D)$. Then the Lamé potentials, satisfying the Helmholtz equations in the respective domain, can be represented as the Fourier trigonometric series expansions along y and z variables:

$$x < 0: \quad \varphi^l = e^{ik_1 x} + \operatorname{Re} e^{-ik_1 x} + \sum_{n+j>0} A_{nj} e^{q_{nj} x} \cos(a_n y) \cos(c_j z),$$

$$\Psi_1^l = \sum_{n+j>0} B_{nj}^1 e^{r_{nj} x} \sin(a_n y) \sin(c_j z),$$

$$\Psi_2^l = \sum_{n+j>0} B_{nj}^2 e^{r_{nj} x} \cos(a_n y) \sin(c_j z),$$

$$\Psi_3^l = \sum_{n+j>0} B_{nj}^3 e^{r_{nj} x} \sin(a_n y) \cos(c_j z),$$
(2a)

$$(s-1)D < x < sD; \quad s=1, \dots, M-1:$$

$$\varphi^s = e^{ik_1 x} + F_0^s \cos k_1 [x - (s-1)D] + H_0^s \cos k_1 (x - sD) +$$

$$+ \sum_{n+j>0} \left\{ F_{nj}^s \operatorname{ch} q_{nj} [x - (s-1)D] + H_{nj}^s \operatorname{ch} q_{nj} (x - sD) \right\} \cos(a_n y) \cos(c_j z),$$

$$\Psi_1^s = \sum_{n+j>0} \left\{ G_{nj}^s \operatorname{ch} r_{nj} [x - (s-1)D] + P_{nj}^s \operatorname{ch} r_{nj} (x - sD) \right\} \sin(a_n y) \sin(c_j z),$$
(2b)

$$\Psi_2^s = \sum_{n+j>0} \left\{ V_{nj}^s \operatorname{sh} r_{nj} [x - (s-1)D] + Q_{nj}^s \operatorname{sh} r_{nj} (x - sD) \right\} \cos(a_n y) \sin(c_j z),$$

$$\Psi_3^s = \sum_{n+j>0} \left\{ W_{nj}^s \operatorname{sh} r_{nj} [x - (s-1)D] + Y_{nj}^s \operatorname{sh} r_{nj} (x - sD) \right\} \sin(a_n y) \cos(c_j z),$$

$$x > (M-1)D:$$

$$\varphi^r = T e^{ik_1 [x - (M-1)D]} + \sum_{n+j>0} C_{nj} e^{-q_{nj} [x - (M-1)D]} \cos(a_n y) \cos(c_j z),$$

$$\Psi_1^r = \sum_{n+j>0} D_{nj}^1 e^{-r_{nj} [x - (M-1)D]} \sin(a_n y) \sin(c_j z),$$

$$\Psi_2^r = \sum_{n+j>0} D_{nj}^2 e^{-r_{nj} [x - (M-1)D]} \cos(a_n y) \sin(c_j z)$$

$$\Psi_3^r = \sum_{n+j>0} D_{nj}^3 e^{-r_{nj} [x - (M-1)D]} \sin(a_n y) \cos(c_j z),$$
(2c)

where

$$q_{nj} = \sqrt{a_n^2 + c_j^2 - k_1^2}, \quad r_{nj} = \sqrt{a_n^2 + c_j^2 - k_2^2}, \quad a_n = \frac{\pi n}{a}, \quad c_j = \frac{\pi j}{c}.$$

Here all capital letters are some unknown constants, k_1, k_2 are the longitudinal and the transverse wave numbers: $k_1 = \omega / c_p$ and $k_2 = \omega / c_s$, c_p and c_s are the longitudinal and the transverse wave speeds in the material ($c_p > c_s$), R and T are the reflection and the transmission coefficients, respectively.

Let us restrict the consideration to the one-mode case: $0 < k_2 a < \pi$, $0 < k_2 c < \pi$, then $q_{nj} > 0, r_{nj} > 0$ for all $n + j = 1, 2, \dots$. For $n = j = 0$, $q_{00} = -ik_1$ and $r_{00} = -ik_2$, according to the radiation condition. Besides, we assume that the planes, containing arrays of cracks, are sufficiently distant from each other.

The components of the stress tensor $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ and the displacement field u_x, u_y, u_z can be expressed in terms of the Lamé wave potentials in standard form. The potentials $\psi(y, z)$ should be considered with the additional condition:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Accepting the continuity of the displacement field u_x, u_y, u_z outside crack's domain, we introduce the following new unknown functions $\underline{g}^s = (g_x^s(y, z), g_y^s(y, z), g_z^s(y, z))$, $s = 1, \dots, M$ as follows:

$$x = 0: \quad \underline{u}^l - \underline{u}^r = \begin{cases} \underline{g}^1(y, z), & (y, z) \in \text{crack}, \\ 0, & (y, z) \notin \text{crack} \end{cases} \quad (4a)$$

$$x = (s-1)D: \quad \underline{u}^{s-1} - \underline{u}^s = \begin{cases} \underline{g}^s(y, z), & (y, z) \in \text{crack}, \\ 0, & (y, z) \notin \text{crack} \end{cases} \quad (4b)$$

$$x = (M-1)D: \quad \underline{u}^{M-1} - \underline{u}^r = \begin{cases} \underline{g}^M(y, z), & (y, z) \in \text{crack}, \\ 0, & (y, z) \notin \text{crack} \end{cases} \quad (4c)$$

whose physical meaning is a relative displacement of the left and the right crack's faces along respective Cartesian direction.

Now Lamé expressions for the components of the displacement field together with Eqs.(4) can be used to represent expressions for all constants appeared in potentials (1),(2) in terms of $g_x^s(y, z)$, $g_y^s(y, z)$, $g_z^s(y, z)$, $s = 1, \dots, M$. It can be proved, by analogy to the simpler 2d problem [11], that, due to the natural geometric symmetry of the problem, the relative tangential shifts between crack's faces are identically trivial:

$$g_y^s(y, z) \equiv 0, \quad g_z^s(y, z) \equiv 0, \quad s = 1, \dots, M. \quad (5)$$

Then the orthogonality of the trigonometric functions reduces Eqs. (4) to the following

relations:

$$(A_{nj} + H_{nj} \operatorname{sh}(q_{nj} D)) q_{nj} + (B_{nj}^3 + Y_{nj}^1 \operatorname{sh}(r_{nj} D)) a_n - (B_{nj}^2 + Q_{nj}^1 \operatorname{sh}(r_{nj} D)) c_j = \frac{2\delta_{nj}}{ac} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) \cos(a_n \eta) \cos(c_j \zeta) d\eta d\zeta, \quad (6a)$$

$$(F_{nj}^{s-1} + H_{nj}^s) \operatorname{sh}(q_{nj} D) q_{nj} + (W_{nj}^{s-1} + Y_{nj}^s) \operatorname{sh}(r_{nj} D) a_n - (V_{nj}^{s-1} + Q_{nj}^s) \operatorname{sh}(r_{nj} D) c_j = \frac{2\delta_{nj}}{ac} \int_{S_0} g_x^s(\eta, \zeta) \cos(a_n \eta) \cos(c_j \zeta) d\eta d\zeta, \quad (6b)$$

$$(F_{nj}^{M-1} \operatorname{sh}(q_{nj} D) + C_{nj}) q_{nj} + (W_{nj}^{M-1} \operatorname{sh}(r_{nj} D) - D_{nj}^3) a_n - (V_{nj}^{M-1} \operatorname{sh}(r_{nj} D) - D_{nj}^2) c_j = \frac{2\delta_{nj}}{ac} \int_{S_0} g_x^M(\eta, \zeta) \cos(a_n \eta) \cos(c_j \zeta) d\eta d\zeta, \quad (6c)$$

$$-ik_1 R - H_0^1 k_1 \sin(k_1 D) = \frac{1}{4ac} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad (7a)$$

$$-F_0^{s-1} k_1 \sin(k_1 D) - H_0^s k_1 \sin(k_1 D) = \frac{1}{4ac} \int_{S_0} g_x^s(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad (7b)$$

$$ik_1 e^{ik_1(M-1)D} - F_0^{M-1} k_1 \sin(k_1 D) - ik_1 T = \frac{1}{4ac} \int_{S_0} g_x^M(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad (7c)$$

where

$$\delta_{nj} = \begin{cases} 1/2, & (n, j) = 1, 2, \dots \\ 1/4, & (n = 0, j = 1, 2, \dots); (j = 0, n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

The boundary conditions for the stress and the displacement fields over planes $x = (s-1)D$, $s = 1, \dots, M$ are as follows:

$$\sigma_{xx}^l = \sigma_{xx}^1, \quad \sigma_{xx}^{s-1} = \sigma_{xx}^s, \quad \sigma_{xx}^{M-1} = \sigma_{xx}^r, \quad (y, z) \notin \text{crack}, \quad (8a)$$

$$\sigma_{xx}^l = \sigma_{xx}^1 = 0, \quad \sigma_{xx}^{s-1} = \sigma_{xx}^s = 0, \quad \sigma_{xx}^{M-1} = \sigma_{xx}^r = 0, \quad (y, z) \in \text{crack}, \quad (8b)$$

$$u_x^{M-1} = u_x^r, \quad u_x^{s-1} = u_x^s, \quad u_x^{M-1} = u_x^r, \quad (y, z) \notin \text{crack}, \quad (8c)$$

where relations (8a) mean the continuity of the stress field and relations (8c) the continuity of the displacements, all -- outside the crack. The conditions for the stress σ_{xy} , σ_{xz} and the displacement fields u_y, u_z have analogous forms. Now, by substituting all the constants into the boundary conditions (8) of the stress-free faces of the cracks for $x = 0, D, 2D, \dots, (M-1)D$, $(y, z) \in S_0$, with the use of the basic assumption $D/a \gg 1, D/c \gg 1$, after some routine transformations (see Appendix A in [26]) one

obtains the following main system of integral equations $((y, z) \in S_0)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ac} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) \left\{ \frac{1}{8ik_1} - \frac{K(y-\eta, z-\zeta)}{k_2^4} \right\} d\eta d\zeta + \frac{e^{ik_1 D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \\ & + \frac{e^{ik_1 2D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^3(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \dots + \frac{e^{ik_1(M-1)D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^M(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = 1, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{ik_1 D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \frac{1}{ac} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) \left\{ \frac{1}{8ik_1} - \frac{K(y-\eta, z-\zeta)}{k_2^4} \right\} d\eta d\zeta + \\ & + \frac{e^{ik_1 D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^3(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \dots + \frac{e^{ik_1(M-2)D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^M(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = e^{ik_1 D}, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{ik_1 2D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \frac{e^{ik_1 1D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \frac{1}{ac} \int_{S_0} g_x^3(\eta, \zeta) \left\{ \frac{1}{8ik_1} - \right. \\ & \left. - \frac{K(y-\eta, z-\zeta)}{k_2^4} \right\} d\eta d\zeta + \dots + \frac{e^{ik_1(M-3)D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^M(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = e^{ik_1 2D}, \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \frac{e^{ik_1(M-1)D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \frac{e^{ik_1(M-2)D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \dots + \\ & + \frac{e^{ik_1 D}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^{M-1}(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \frac{1}{ac} \int_{S_0} g_x^M(\eta, \zeta) \left\{ \frac{1}{8ik_1} - \frac{K(y-\eta, z-\zeta)}{k_2^4} \right\} d\eta d\zeta = \\ & = e^{ik_1(M-1)D}, \end{aligned} \quad (9d)$$

where $K(y, z)$ and R_{nj} (the Rayleigh function) are:

$$K(y, z) = \sum_{n+j>0} \delta_{nj} \frac{R_{nj}}{q_{nj}} \cos(a_n y) \cos(c_j z); R_{nj} = [2(a_n^2 + c_j^2) - k_2^2]^2 - 4r_{nj} q_{nj} (a_n^2 + c_j^2). \quad (10)$$

Let us consider the auxiliary integral equation:

$$\frac{1}{ack_2^2} \int_{S_0} h(\eta, \zeta) K(y-\eta, z-\zeta) d\eta d\zeta = 1, \quad (y, z) \in S_0. \quad (11)$$

It is obvious that

$$g_x^1(y, z) = \left(\frac{1}{8acik_1} J_1 + \frac{e^{ik_1 D}}{8acik_1} J_2 + \frac{e^{ik_1 2D}}{8acik_1} J_3 + \dots + \frac{e^{ik_1 (M-1)D}}{8acik_1} J_M - 1 \right) k_2^2 h(y, z), \quad (12a)$$

$$g_x^2(y, z) = \left(\frac{e^{ik_1 D}}{8acik_1} J_1 + \frac{1}{8acik_1} J_2 + \frac{e^{ik_1 D}}{8acik_1} J_3 + \dots + \frac{e^{ik_1 (M-2)D}}{8acik_1} J_M - e^{ik_1 D} \right) k_2^2 h(y, z), \quad (12b)$$

$$g_x^3(y, z) = \left(\frac{e^{ik_1 2D}}{8acik_1} J_1 + \frac{e^{ik_1 D}}{8acik_1} J_2 + \frac{1}{8acik_1} J_3 + \dots + \frac{e^{ik_1 (M-3)D}}{8acik_1} J_M - e^{ik_1 2D} \right) k_2^2 h(y, z), \quad (12c)$$

$$g_x^M(y, z) = \left(\frac{e^{ik_1 (M-1)D}}{8acik_1} J_1 + \frac{e^{ik_1 (M-2)D}}{8acik_1} J_2 + \dots + \frac{e^{ik_1 D}}{8acik_1} J_{M-1} + \frac{1}{8acik_1} J_M - e^{ik_1 (M-1)D} \right) k_2^2 h(y, z), \quad J_j = \int_{S_0} g_x^j(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (12d)$$

By integrating Eqs. (12) over S_0 , one obtains the system of linear algebraic equations for the unknown quantities J_j . With respect to $\tilde{J}_j = J_j/8acik_1$, $j = 1, 2, \dots, M$ it appears with the following matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta^2 & \dots & \beta^{M-1} & \left| & 1 \right. \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta^{M-2} & \left| & \beta \right. \\ \beta^2 & \beta & \alpha & \dots & \beta^{M-3} & \left| & \beta^2 \right. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \left| & \dots \right. \\ \beta^{M-1} & \beta^{M-2} & \beta^{M-3} & \dots & \alpha & \left| & \beta^{M-1} \right. \end{pmatrix}, \quad (13)$$

where $\alpha = 1 - 8acik_1 / k_2^2 H$, $\beta = e^{ik_1 D}$, $H = \int_{S_0} h(\eta, \zeta) d\eta d\zeta$.

Therefore, once the auxiliary equation (11) and the system with the matrix (13) are solved, all necessary characteristics of the wave field can be found. In particular, the reflection and the transmission coefficients are defined as follows (see [26]):

$$R = -\frac{J_1}{8acik_1} - \frac{J_2}{8acik_1} e^{ik_1 D} - \dots - \frac{J_M}{8acik_1} e^{ik_1 (M-1)D}, \quad (14a)$$

$$T = -\frac{J_1}{8acik_1} e^{ik_1(M-1)D} - \frac{J_2}{8acik_1} e^{ik_1(M-2)D} - \dots - \frac{J_M}{8acik_1} + e^{ik_1(M-1)D}. \quad (14b)$$

It can be shown that the natural energetic condition $|R|^2 + |T|^2 = 1$ is satisfied for any real-valued quantity H .

Numerical solution of the integral equation

To be more specific, let us restrict the consideration by the case of equal periods of the grating: $a = c$. Then the basic dual integral equation (14) can be rewritten in the following dimensionless form ($c = a = 1$):

$$\frac{1}{k_2^2} \int_{S_0} h(\eta, \zeta) \left\{ \Phi_r(y-\eta, z-\zeta) + \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi[(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} \right\} d\eta d\zeta = 1,$$

$$\Phi_r(y, z) = -2(k_2^2 - k_1^2)I_r(y, z) + K_r(y, z), \quad (y, z) \in S_0. \quad (15)$$

In order to provide the stability of the numerical treatment, in the performed numerical experiments there is applied a discrete quadrature formulae, for 2-D hyper-singular kernels, known as a "method of discrete vortices" [20]. It is proved in [20] that with a discretization of Eq. (11) a stable treatment of the hyper-singular kernel of the type $1/r^{3/2}$, where $r^2 = (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$, can be attained if one chooses two different meshes of nodes for the «internal» variables η, ζ and the «external» variables y, z . More precisely, if one subdivides the interval of integration $(-b, b)$ to N_1 equal small sub-intervals and the interval $(-d, d)$ to N_2 equal sub-intervals, and if the «internal» nodes over each Cartesian coordinate y and z are chosen just at the ends of the respective small sub-intervals, then the «external» nodes should be chosen every time at the middle points between two neighbor «internal» nodes:

$$\begin{aligned} \eta_k &= -b + k\varepsilon_1, & y_l &= -b + (l-1/2)\varepsilon_1, & \varepsilon_1 &= 2b / N_1, \\ \zeta_m &= -d + m\varepsilon_2, & z_p &= -d + (p-0.5)\varepsilon_2, & \varepsilon_2 &= 2d / N_2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$k = 0, \dots, N_1, \quad l = 1, \dots, N_1, \quad m = 0, \dots, N_2, \quad p = 1, \dots, N_2.$$

With such a treatment the discretization of Eq. (15) implies:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k_2^2} \sum_{k,m=1}^N h(\eta_k, \zeta_m) \{ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Phi_r(y_l - \eta_k, z_p - \zeta_m) + \\ &+ \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi} \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \int_{\zeta_{m-1}}^{\zeta_m} \frac{1}{[(y_l - \eta)^2 + (z_p - \zeta)^2]^{3/2}} d\eta d\zeta \} = 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Further, it is proved in [20,21] that integration of the hyper-singular kernels in Eq. (17) may be performed, by using standard antiderivatives, in the same way like in the case of usual continuous functions. Thus, using tabulated integrals, see [22], as a result, Eq. (17) is reduced to the following system of linear algebraic equations in the discrete form:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k_2^2} \sum_{k,m=1}^N h(\eta_k, \zeta_m) \{ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Phi_r(y_l - \eta_k, z_p - \zeta_m) + \\
& + \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi} \left[-\frac{\sqrt{(\eta_k - y_l)^2 + (\zeta_m - z_p)^2}}{(\eta_k - y_l)(\zeta_m - z_p)} + \frac{\sqrt{(\eta_k - y_l)^2 + (\zeta_{m-1} - z_p)^2}}{(\eta_k - y_l)(\zeta_{m-1} - z_p)} + \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{(\eta_{k-1} - y_l)^2 + (\zeta_m - z_p)^2}}{(\eta_{k-1} - y_l)(\zeta_m - z_p)} - \frac{\sqrt{(\eta_{k-1} - y_l)^2 + (\zeta_{m-1} - z_p)^2}}{(\eta_{k-1} - y_l)(\zeta_{m-1} - z_p)} \right] \Big\} = 1. \quad (18)
\end{aligned}$$

It is proved in [20] that the applied method of discrete vortices automatically provides the required condition prescribing that crack's opening should vanish when approaching its outer boundary, the perimeter of domain S_0 . In the initial continuous form, see Eqs. (9) and (11), this follows from the qualitative properties of respective hyper-singular equations, see [21]. In the discrete form this is provided by the applied numerical technique, see [20].

Some examples of the calculations are presented in figures 2 - 4, all for the quadratic unit cell ($a = c$), for a particular elastic material $c_p/c_s = 1.870$. All the Figures are the behaviors of the transmission coefficient versus frequency parameter. For fixed D and M the different lines are related to different crack's sizes (Fig. 2). The behavior of the coefficient with all the parameters for Fig. 2, except M (here M is twice more), is illustrated on Fig. 3. Fig. 4 demonstrates the comparison of the behavior when M takes a pair of values.

Numerical results and physical conclusions

The obtained results are analyzed on the subject of the cutoff properties of the acoustic metamaterials possessing an internal periodic geometric structure, as described in the Introduction.

In the numerical analysis of the qualitative properties of the considered geometry of the cracks in the framework of the proposed here method will do the main emphasis on the physical properties of the system as an acoustic filter. Investigate the possibility of using the considered accurate artificial grating of cracks are made in elastic material, for the organization of cutoff frequency ranges with the passage of the plane longitudinal wave. Use for this purpose the exact calculation according to the obtained formulas (14), based on the accurate numerical solution of auxiliary integral equation (15) and calculate the value H according to the formula (13). Obviously, cutoff frequency range occurs when the value of the transmission coefficient $|T(ak_2 / \pi)|$ approaching zero.

First of all, note that the cutoff frequency interval in the upper part of the single-mode frequency range $0 < ak_2 / \pi < 1$ is achieved for any geometrical and physical parameters, example of this type of dependence on frequency is shown in Fig.2. Obviously, in both cases almost complete locking of the wave channel is achieved in the frequency range $ak_2 / \pi > 0.85$. However, from a practical point of view, the frequency filters are more effective, when they allow to achieve the filtering of the waves not only in the upper

part of one mode frequency range or for the extremely large values of frequencies in this mode.

Detailed analysis shows that almost any desired frequency interval with a locking wave channel is achievable by control of the parameters of the relative size of cracks b/a , the number of vertical arrays M and the distance between the adjacent planes with arrays D/a . It turns out that the function $|T(b/a)|$ is smooth enough and the dependence on parameters M and D/a is more complex, where the intervals of increase and decrease follow each other. In this regard, the control wave process by changing the crack length is more effective.

It can be seen From Fig.2, where $M = 5$, $b/a = 0.5$ the frequency locking interval $0.37 < ak_2 / \pi < 0.54$ and at $b/a = 0.7$ the appropriate interval shifts to the left, reaching $0.31 < ak_2 / \pi < 0.51$. With increasing of vertical arrays ($M = 10$) the behavior of function $|T(ak_2 / \pi)|$ either demonstrates the property of acoustic filters which attained by choosing of the relative size of cracks b/a (Fig.3).

A detailed study shows that with the increase in the number of vertical arrays M , while maintaining the values of all other parameters, the cutoff frequency range is virtually unchanged. The closing process becomes more pronounced in the sense that a value in this range becomes almost constant and equal to zero and the corresponding curve is almost flat. The value of the transmission coefficient is almost zero uniformly on the whole cutoff interval. This property is demonstrated in Fig.4, where locking in the frequency interval $0.44 < ak_2 / \pi < 0.64$ for the case of $M = 10$ is more pronounced than for the case $M = 5$. It should be noted that the recent publications of the authors were devoted to a two-dimensional problem for the two parallel arrays of cracks [25] and a three-dimensional problem of wave propagation through a doubly periodic array of cracks [26].

Appendix A. Efficient treatment of the kernel

Regarding the kernel $K(y, z)$ in Eq.(11), first of all, we notice that $L_{nj} = -2(k_2^2 - k_1^2)(a_n^2 + c_j^2)^{1/2}$, $(n, j) \rightarrow \infty$. Hence, the sum defining the kernel can be transformed as follows:

$$K(y, z) = -2(k_2^2 - k_1^2) \sum_{n+j>0} \delta_{nj} (a_n^2 + c_j^2)^{1/2} \cos(a_n y) \cos(c_j z) + \sum_{n+j>0} \delta_{nj} [L_{nj} + 2(k_2^2 - k_1^2)(a_n^2 + c_j^2)^{1/2}] \cos(a_n y) \cos(c_j z),$$

$$K(y, z) = -2(k_2^2 - k_1^2)I(y, z) + K_r(y, z), \quad (A1)$$

where the second term in the kernel K_r is a certain regular function. The first one itself consists of a regular and a singular part: $I(y, z) = I_r(y, z) + I_s(y, z)$. To be more specific, we further demonstrate the mathematical transformations in the particular case: $a = c$. Let us introduce the dimensionless variables $\tilde{y} = y/a$, $\tilde{z} = z/c$ and then, omitting tildes, one rewrites:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\pi} I(y, z) &= \sum_{n+j>0} \delta_{nj} (n^2 + j^2)^{1/2} \cos(\pi ny) \cos(\pi jz) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n0} n \cos(\pi ny) + \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{0j} j \cos(\pi jz) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{nj} (n^2 + j^2)^{1/2} \cos(\pi ny) \cos(\pi jz) = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos(\pi ny) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} j \cos(\pi jz) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (n^2 + j^2)^{1/2} \cos(\pi ny) \cos(\pi jz).
\end{aligned} \tag{A2}$$

The last double sum can be evaluated by using the Poisson formula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = \frac{p(0)}{2} + P(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} P(2\pi n), \tag{A3}$$

where in the problem at hand:

$$p(t) = (t^2 + j^2)^{1/2} \cos(\pi y), \quad P(u) = \int_0^{\infty} p(t) \cos(ut) dt. \tag{A4}$$

By taking the generalized value of the divergent integral in $P(u)$, see for example [21], one obtains for $j \geq 1$:

$$P(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} p(t) \cos(ut) dt = -\frac{j}{2} \left[\frac{K_1(j|\pi y + u|)}{|\pi y + u|} + \frac{K_1(j|\pi y - u|)}{|\pi y - u|} \right], \tag{A5}$$

where some tabulated integrals have been used [22]. Here in Eq. (A5) $K_1(\xi)$ is Macdonald's function [23]. Thus, the sum over n in Eq. (A2) takes the form ($j \geq 1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + j^2)^{1/2} \cos(\pi ny) = \frac{j}{2} - \frac{jK_1(j\pi|y|)}{\pi|y|} - j \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{K_1(j|2\pi n + \pi y|)}{|2\pi n + \pi y|} + \frac{K_1(j|2\pi n - \pi y|)}{|2\pi n - \pi y|} \right] \tag{A6}$$

Finally, $I(y, z)$ in Eq. (A2) can be rewritten as follows:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\pi} I(y, z) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos(\pi ny) - \frac{1}{2\pi|y|} \sum_{j=1}^{\infty} j K_1(j\pi|y|) \cos(\pi jz) - \\
&- \frac{1}{2} \sum_{n,j=1}^{\infty} \left[\frac{K_1(j|2\pi n + \pi y|)}{|2\pi n + \pi y|} + \frac{K_1(j|2\pi n - \pi y|)}{|2\pi n - \pi y|} \right] j \cos(\pi jz).
\end{aligned} \tag{A7}$$

The first series in the first line in Eq. (A7) can be calculated by using the generalized value of the following tabulated series, see [22]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cos(\pi ny) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} n \cos(\pi ny) = -\frac{1}{4 \sin^2(\pi y / 2)}. \tag{A8}$$

The second series in the first line in Eq. (A7) can also be calculated explicitly, by its transformation to a tabulated series, see [22]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j K_1(j\pi|y|) \cos(\pi jz) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^{\infty} K_0(j\pi|y|) \cos(\pi jz) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{(y^2 + z^2)^{1/2}} + \mathbf{C} + \ln \frac{|y|}{4} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{[y^2 + (2j+z)^2]^{1/2}} - \frac{1}{2j} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{[y^2 + (2j-z)^2]^{1/2}} - \frac{1}{2j} \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{|y|}{(y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{|y|} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{|y|}{[y^2 + (2j+z)^2]^{3/2}} + \frac{|y|}{[y^2 + (2j-z)^2]^{3/2}} \right] \right\}, \quad (\text{A9})
\end{aligned}$$

where $\mathbf{C} = 0.5772157$ is Euler's constant [23].

Therefore, one obtains for the kernel of the basic dual integral equation (11)

$$K(y, z) = K_r(y, z) - 2(k_2^2 - k_1^2)[I_r(y, z) + I_s(y, z)], \quad (\text{A10})$$

where the regular and the singular parts are, respectively:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\pi} I_r &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{[y^2 + (2j+z)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[y^2 + (2j-z)^2]^{3/2}} \right] - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n,j=1}^{\infty} j \cos(\pi j z) \left[\frac{K_1(j|2\pi n + \pi y|)}{|2\pi n + \pi y|} + \frac{K_1(j|2\pi n - \pi y|)}{|2\pi n - \pi y|} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2 y^2} - \frac{1}{16\sin^2(\pi y/2)}, \quad \frac{a}{\pi} I_s = \frac{1}{4\pi^2 (y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (\text{A11})
\end{aligned}$$

One can see that the obtained singular behavior of the kernel for small arguments contains a 2D hyper-singular term $1/(y^2 + z^2)^{3/2}$, well known in the linear elasticity theory for cracks in unbounded media [24].

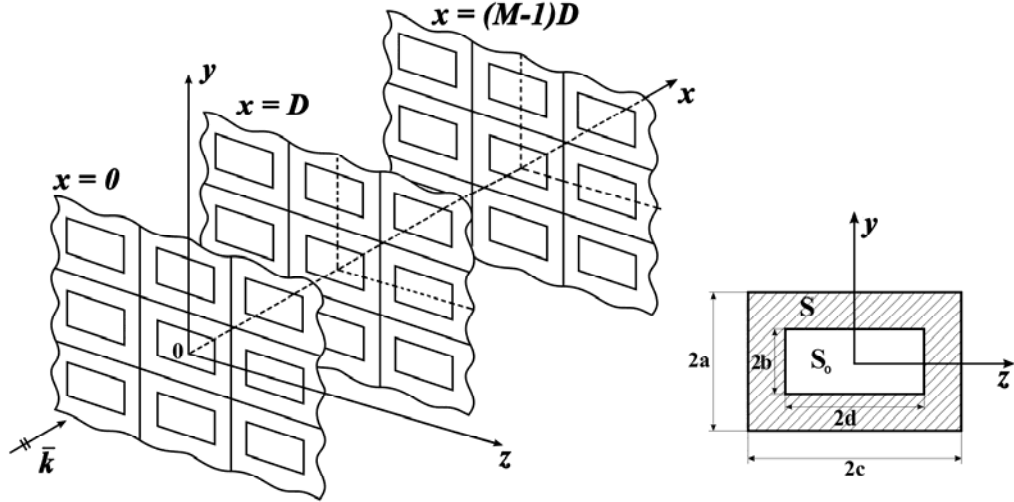


Figure 1: Propagation of the incident wave through a triple periodic array of cracks.

A unit cell.

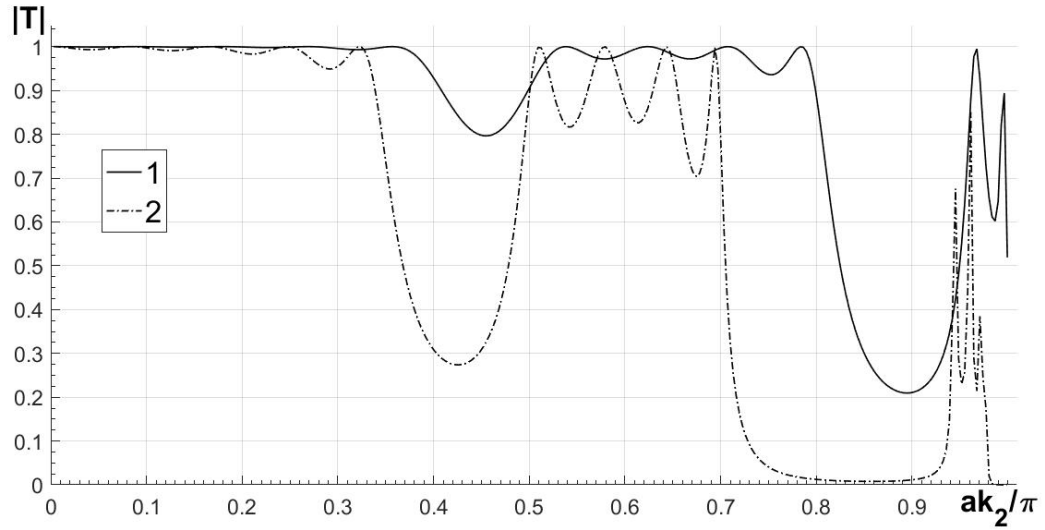


Figure 2: Transmission coefficient versus frequency parameter: $b = d$, $a = c = 1$, $D/a=4$, $M = 5$, line 1 – $b/a = 0.5$, line 2 – $b/a = 0.7$

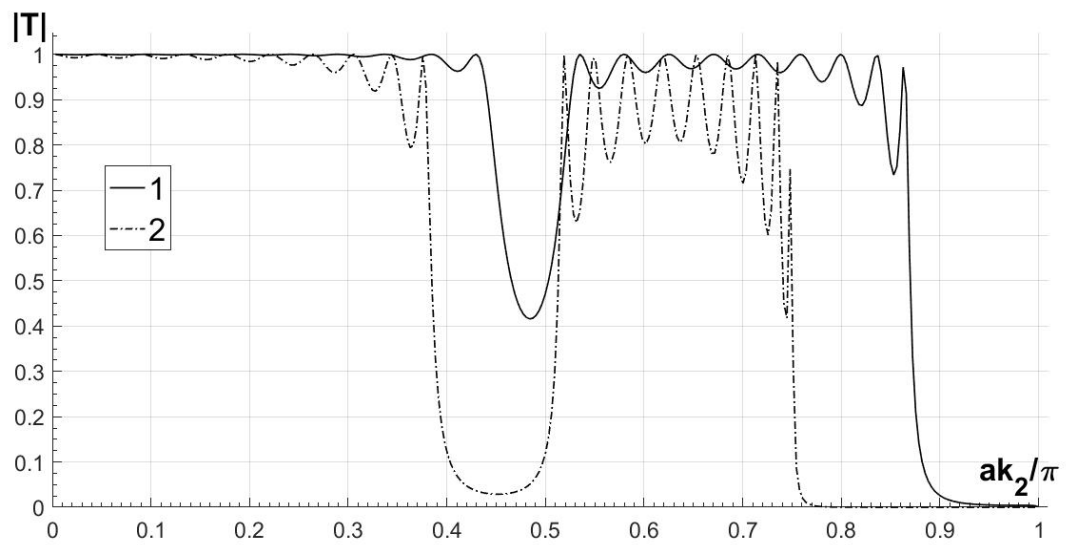


Figure 3: Transmission coefficient versus frequency parameter: $b = d$, $a = c = 1$, $D/a = 4$, $M = 10$, line 1 – $b/a = 0.5$, line 2 – $b/a = 0.7$

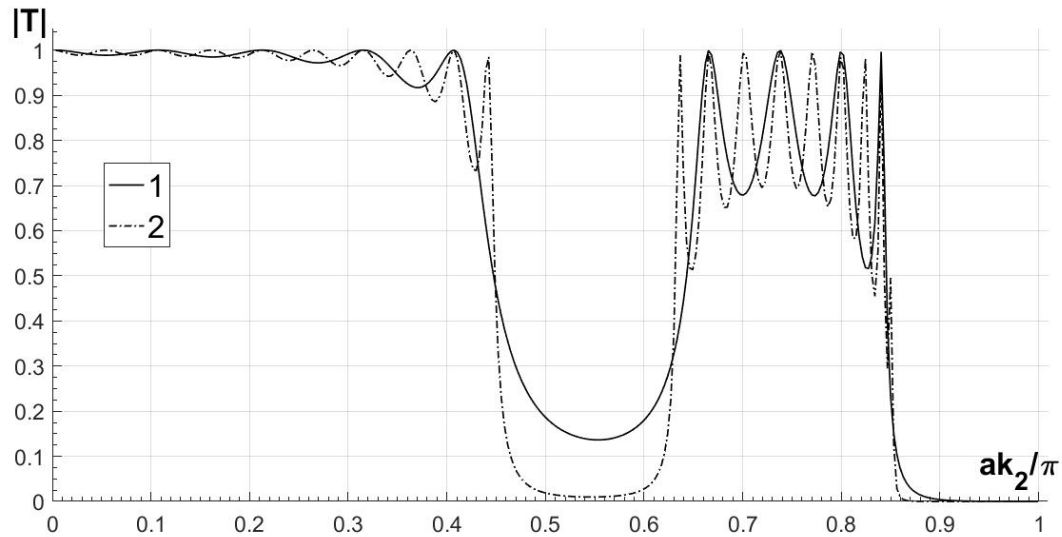


Figure 4: Transmission coefficient versus frequency parameter: $b = d = 0.7$, $a = c = 1$, $D/a = 3$, line 1 – $M = 5$, line 2 – $M = 10$

Acknowledgments

The second author is thankful to the Russian Science Foundation (RSCF), Project 9.5794.2017/8.9.

REFERENCES

1. Shenderov E.L., Propagation of sound through a screen of arbitrary wave thickness with gaps // *Soviet Phys. Acoust.*, 1970, 16(1), 115-131.
2. Achenbach, J.D., Li, Z.L., Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens // *Wave Motion*, 1986, 8, 225-234.
3. Miles, J.W., On Rayleigh scattering by a grating // *Wave Motion*, 1982, 4, 285-292.
4. Scarpetta, E., Sumbatyan, M.A., On the oblique wave penetration in elastic solids with a doubly periodic array of cracks // *Quarterly of Applied Mathematics*, 2000, 58, 239-250.
5. Scarpetta, E., Sumbatyan, M.A., Explicit analytical results for one-mode normal reflection and transmission by a periodic array of screens // *J. Math. Anal. Appl.*, 1995, 195, 736-749.
6. Scarpetta, E., Sumbatyan, M.A., On wave propagation in elastic solids with a doubly periodic array of cracks // *Wave Motion*, 1997, 25, 61-72.
7. Zarrillo, G., Aguiar, K., Closed-form low frequency solutions for electromagnetic waves through a frequency selective surface // *IEEE Trans. Anten. Prop.*, 1988, AP-35, 1406-1417.
8. Scarpetta, E., Tibullo, V., Explicit results for scattering parameters in three-dimensional wave propagation through a doubly periodic system of arbitrary openings // *Acta Mechanica*, 2006, 185, 1-9.
9. Scarpetta, E., Tibullo, V., On the three-dimensional wave propagation through cascading screens having a periodic system of arbitrary openings // *Int. J. Eng. Sci.*, 2008, 46, 105-111.
10. Angel, Y.C., Achenbach, J.D., Harmonic waves in an elastic solid containing a doubly periodic array of cracks // *Wave Motion*, 1987, 9, 377-385.

11. Scarpetta, E., In-plane problem for wave propagation through elastic solids with a periodic array of cracks // *Acta Mechanica*, 2002, 154, 179-187.
12. Angel, Y.C., Bolshakov, A., In-plane waves in an elastic solid containing a cracked slab region // *Wave Motion*, 2000, 31, 297-315.
13. Homentcovschi, D., Miles, R.N., Influence of viscosity on the diffraction of sound by a periodic array of screens. The general 3-D problem // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2005, 117(5), 2761-2771.
14. Sotiropoulos, D.A., Achenbach, J.D., Ultrasonic reflection by a planar distribution of cracks // *J. NDE*, 1988, 7, 123-129.
15. Mykhas'kiv, V.V., Zhabdynskiy, I.Ya., Zhang, Ch., Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks // *J. Math. Sci.*, 2014, 203, 114-122.
16. Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y.Y., Yang, Z., Chan, C.T., Sheng P., Locally resonant sonic materials // *Science*, 2000, 289(5485), 1734-1736.
17. Craster, R.V., Guenneau, S., // *Acoustic Metamaterials*. Springer Series in Materials Science, 2013, 166, Springer: Dordrecht.
18. Huang, H.H., Sun, C.T., Huang, G.L., On the negative effective mass density in acoustic metamaterials // *Int. J. Eng. Sci.*, 2009, 47, 610-617.
19. Yanga, Ch., Achenbach, J.D., Time domain scattering of elastic waves by a cavity, represented by radiation from equivalent body forces // *Int. J. Eng. Sci.*, 2017, 115, 43-50.
20. Belotserkovsky, S.M., Lifanov, I.K., *Method of Discrete Vortices*. CRC Press: Boca Raton, Florida, 1992, 378 p.
21. Sumbatyan, M.A., Scalia, A., *Equations of Mathematical Diffraction Theory*. CRC Press: Boca Raton, Florida, 2005, 291 p.
22. Prudnikov, A.P., Brychkov, Y.A., Marichev, O.I., *Integrals and Series*. Vol.1,2. Gordon & Breach: Amsterdam, 1986, 452 p.
23. Abramowitz, M., Stegun, I., *Handbook of Mathematical Functions*. Dover: New York, 1965, 593 p.
24. Sneddon, I.N., Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*. Wiley: London, 1969, 551 p.
25. Sumbatyan, M.A., Remizov, M.Yu., On the theory of acoustic metamaterials with a triple-periodic system of interior obstacles // *Advan. Struct. Materials*, 2017, 41, 19-33.
26. Remizov, M.Yu., Sumbatyan, M.A., 3-D one-mode penetration of elastic waves through a doubly periodic array of cracks // *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, 22, 1-15.

Information about the authors:

Remizov M.Yu., Ph.D., Associate Professor

Affiliation: Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, **Address:** Milchakova Street 8a, 344090 Rostov-on-Don, Russia. **Tell:** +7 9034747683. **E-mail:** remizov72@mail.ru

Sumbatyan M.A., Dr. of Sciences, Professor

Affiliation: Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, **Address:** Milchakova Street 8a, 344090 Rostov-on-Don, Russia **Tell:** +7 9281397067. **E-mail:** sumbat@math.sfedu.ru

Received 17. 10. 2017

**К ВОПРОСУ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЕМ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: одномерные колебания, оптимальное управление, минимизируемый функционал.

Key words: One-dimensional vibrations, optimal control, minimized functional.

Բանալի բառեր. Միաչափ տատանումներ, օպտիմալ ղեկավարում, մինիմիզացվող ֆունկցիոնալ:

Մովսիսյան Լ.Ա.

Գլանային թաղանթի շարժման օպտիմալ ղեկավարման հարցի մասին

Դիտարկված է գլանային թաղանթի երկայնական և ընդլայնական միաչափ շարժումների օպտիմալ ղեկավարման հարցը: Որպես մինիմիզացվող ֆունկցիոնալ վերցված է փնտրվող բեռի քառակուսային ֆունկցիոնալը:

Movsisyan L.A.

To the problem of optimal control of a cylindrical shell motion

The problem of optimal control of one-dimensional motions of a cylindrical shell under longitudinal and transverse oscillations is studied separately. The quadratic functional of the given load is taken as a minimized functional.

Изучается вопрос оптимального управления одномерных движений цилиндрической оболочки при продольных и поперечных колебаниях в отдельности. В качестве минимизируемого функционала берётся квадратичный функционал от искомой нагрузки.

Введение. Вопросы оптимального управления движением тонких упругих систем (стержень, балка, пластинка, цилиндрическая оболочка) посвящены многочисленные работы [1-3 и др.]. Как правило, в рассмотренных примерах – движение однокомпонентное, в том числе, и для цилиндрической оболочки учитывается только инерционный член от прогиба. В [4] изучается задача оптимального управления одномерного движения пластинки, находящейся в нестационарном температурном поле.

В представленной работе изучается вопрос оптимального управления одномерных движений цилиндрической оболочки при продольных и поперечных колебаниях в отдельности. Хотя движения одномерные, но двухкомпонентные. В качестве минимизируемого функционала берётся квадратичный функционал от искомой нагрузки [5]. Для типично вязкоупругого тела подобная задача изучается в статической постановке.

Исследования по вопросу управления движением упругих тонких тел появились сравнительно недавно [5-11 и др.]

Постановка задачи. Уравнения одномерного движения оболочки

$$C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad C = \frac{Eh}{1 - \nu^2}$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + C \frac{1}{R} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right) = Z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.1)$$

Здесь все величины общепринятые, поэтому нет нужды их напоминания, только отметим, что нормальное давление (Z) – искомая величина, которая обеспечивает оптимальность управления.

Рассмотрим оболочку со свободно опертыми условиями:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin \lambda_m x, \quad u = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(t) \cos \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l}. \quad (1.2)$$

Пусть заданы произвольные начальные условия ($t = 0$)

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \lambda_m x, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \lambda_m x, \quad (1.3)$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos \lambda_m x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos \lambda_m x,$$

тогда, относительно f_m и φ_m будет:

$$\frac{d^2 \varphi_m}{dt^2} + \omega_m^2 \varphi_m - e_m f_m = 0, \quad \frac{d^2 f_m}{dt^2} + \Omega_m^2 f_m - e_m \varphi_m = A_m. \quad (1.4)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\omega_m^2 = \frac{1}{\rho h} C \lambda_m^4, \quad \Omega_m^2 = \frac{1}{\rho h} \left(D \lambda_m^4 + C \frac{1}{R^2} \right) \quad (1.5)$$

$$e_m = \frac{1}{\rho h} C \frac{\nu}{R} \lambda_m, \quad A_m = \frac{1}{\rho h} q_m, \quad Z = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \lambda_m x$$

Решением системы (1.4) с условиями (1.3) будет

$$\varphi_m(t) = \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i+1}}{p_2^2 - p_1^2} \left(X_i + Y_i + \int_0^t Z_i d\tau \right)$$

$$X_i = \left[e_m b_m + (\Omega_m^2 - p_i^2) d_m \right] \frac{1}{p_i} \sin p_i t$$

$$Y_i = \left[d_m (\Omega_m^2 - p_i^2) + e_m d_m \right] \cos p_i t$$

$$Z_i = A_m e_m \frac{1}{p_i} \sin p_i (t - \tau)$$

$$f_m(t) = \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i+1}}{p_2^2 - p_1^2} \left(\bar{X}_i + \bar{Y}_i + \int_0^t \bar{Z}_i d\tau \right)$$

$$\begin{aligned}
\bar{X}_i &= \left[b_m (\omega_m^2 - p_i^2) + e_m d_m \right] \frac{1}{p_i} \sin p_i t \\
\bar{Y}_i &= \left[a_m (\omega_m^2 - p_i^2) + e_m c_m \right] \cos p_i t \\
\bar{Z}_i &= A_m (\omega_m^2 - p_i^2) \frac{1}{p_i} \sin p_i t (t - \tau),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где через p_i обозначены

$$p_i^2 = \frac{1}{2} (\omega_m^2 + \Omega_m^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_m^2 - \Omega_m^2)^2 + 4e_m^2}, \quad \begin{cases} i = 1 - - \\ i = 2 - + \end{cases} \tag{1.7}$$

Пусть потребуются, чтобы в какой-то момент $t = t_1$ систему привести в новое состояние посредством нормального давления q_m :

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{a}_m \sin \lambda_m x, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{b}_m \sin \lambda_m x \\
u &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_m \cos \lambda_m x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{d}_m \cos \lambda_m x
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Вопрос оптимального управления движением оболочки ставится обычным образом: систему из состояния (1.3) привести в состояние (1.8) оптимальным образом. Здесь критерием качества будем брать минимум функционала [5]

$$I = \int_0^l \int_0^{t_1} q^2(x, t) dx dt, \tag{1.9}$$

что равносильно минимуму каждой гармоники. Искомая оптимальная нагрузка определяется как

$$q_m(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\mu_i \cos p_i t + \chi_i \sin p_i t), \tag{1.10}$$

где неизвестные множители μ_i и χ_i (для каждой гармоники) определяются следующим образом. Вычислим производные от Φ_m и f_m , подставляя в подынтегральные выражения (1.6) и удовлетворяя условиям (1.8). Получатся четыре линейных уравнения относительно четырёх μ_i и χ_i . Записи громоздкие, поэтому не приводятся.

Как известно, частота Ω_m на порядок меньше, чем ω_m , и во многих работах при рассмотрении колебаний цилиндрических оболочек учитывается только инерционный член от прогиба. Да и в задачах управления движением можно ставить вопрос управления одним компонентом движения (или даже только положением или скоростью). Здесь будем осуществлять управление только изгибным движением (инерционные члены от продольного движения остаются). Искомая функция оптимального управления теперь

$$q = -\frac{1}{2}(\chi_1 \sin p_1 \tau + \mu_1 \cos p_1 \tau). \quad (1.11)$$

Для каждой гармоники (m) приведённые формулы верны, поэтому для краткости записи индексы не вписываются.

Если (1.11) подставить в (1.6) для f и её производной и потребовать, чтобы в момент $t = t_1$ они приняли значение по (1.8)

$$f(t_1) = \bar{a}, \quad f'(t_1) = \bar{b}, \quad (1.12)$$

то полученная система даёт:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \mu_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \Delta = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} \\ \Delta_1 &= \rho h \left[(\bar{a} - a)a_{22} - (\bar{b} - b)a_{12} \right] \\ \Delta_2 &= \rho h \left[(\bar{b} - b)a_{11} - (\bar{a} - a)a_{21} \right] \\ a_{11} &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{p_i} A_i S_i, \quad a_{12} = \sum_{i=1}^2 B_i S_i, \quad a_{21} = \sum_{i=1}^2 C_i S_i \\ a_{22} &= \sum_{i=1}^2 D_i S_i, \quad S_i = \frac{1}{2}(\omega^2 - p_i^2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$A_i = \frac{1}{2} t_i \cos p_i t_1, \quad A_2 = \frac{1}{\Delta p} (p_2 \sin p_1 t_1 - p_1 \sin p_2 t_1)$$

$$C_1 = p_1 B_1 = -\frac{1}{2} t_1 \sin p_1, \quad \frac{B_2}{p_2} = \frac{C_2}{p_1} = \frac{1}{\Delta p} (\cos p_1 t_1 - \cos p_2 t_1)$$

$$D_1 = -\frac{1}{2} \left(t_1 \cos p_1 t_1 + \frac{1}{p_1} \sin p_2 t_1 \right)$$

$$D_2 = \frac{1}{\Delta p} (p_1 \sin p_1 t_1 - p_2 \sin p_2 t_1), \quad \Delta p = p_2^2 - p_1^2$$

2. Аналогичную задачу предыдущей, можно поставить для движения кольца (или бесконечной оболочки). Уравнение движения в этом случае

$$C \left(\frac{\partial v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{D}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{C}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} w \right) + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Z$$

Здесь $C = Eh$, $D = C \frac{h^2}{12}$, Z – искомая оптимальная нагрузка

Если искать решение системы (2.1) в виде

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_n^{(1)} \cos n\varphi + f_n^{(2)} \sin n\varphi \right), \\ v &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi_n^{(1)} \sin n\varphi + \varphi_n^{(2)} \cos n\varphi \right), \\ Z &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(Z_n^{(1)} \cos n\varphi + Z_n^{(2)} \sin n\varphi \right) \quad (y = R\varphi), \end{aligned} \quad (2.2)$$

то система относительно $f_n^{(t)}$ и $\varphi_n^{(t)}$ (аналогичная для $f_n^{(2)}$ и $\varphi_n^{(2)}$) будет

$$\frac{d^2 \varphi_n^{(t)}}{dt^2} + \omega_n^2 - X_n^{(t)} f_n^{(t)} = 0, \quad \frac{d^2 f_n^{(t)}}{dt^2} + \Omega_n^2 f_n^{(t)} - Y_n^{(t)} \varphi_n^{(t)} = q_n^{(t)}. \quad (2.3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{C}{\rho h} \mu_n^2, \quad \Omega_n^2 = \frac{1}{\rho h} \left(\frac{C}{R^2} + D\mu_n^4 \right), \quad X_n^{(1)} = \frac{1}{\rho h R} \mu_n (C + D\mu_n^2) \\ Y_n &= \frac{1}{\rho h R} C \mu_n, \quad q_n^{(1)} = \frac{1}{\rho h} Z_n^{(1)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Собственные частоты определяются

$$p^2 = \frac{1}{2} (\omega_n^2 + \Omega_n^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_n^2 - \Omega_n^2)^2 + 4X_n^{(1)} Y_n^{(1)}}.$$

Дальнейшие действия – как в предыдущем пункте.

3. Задачу управления движением для деформируемых систем можно рассматривать и в статической постановке для вязкоупругих тел, в частности, для объекта из типичного материала. Для одномерного движения имеем уравнения:

$$\begin{aligned} \widehat{E}J \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + kw \right) &= Z, \quad k = \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R^2}, \quad J = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}, \\ \widehat{E}f &= E \left[f - \frac{E-H}{En} \int_0^t e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При получении (3.1) уже учтено, что на концах $x=0$ и $x=l$ продольное усилие отсутствует. Если представить решение (3.1) в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin \lambda_m x, \quad Z = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l} \quad (3.2)$$

и учесть начальное условие

$$w(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(0) \sin \lambda_m x = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^0 \sin \lambda_m x, \quad (3.3)$$

то для $f_m(t)$ получим:

$$f_m(t) = f_m^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t \Phi_m(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau. \quad (3.4)$$

Здесь

$$\Omega_m = \lambda_m^4 + k, \quad \Phi_m = q_m' + \frac{1}{n} q_m, \quad q_m = \frac{Z_m}{EJ\Omega_m}, \quad \alpha = \frac{H}{Eh}. \quad (3.5)$$

Если теперь из начального состояния систему привести в момент $t = t_1$ в новое состояние оптимальным образом, то искомая $\Phi(t)$ должна иметь следующий вид:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \lambda e^{\alpha t}, \quad (3.6)$$

где множитель λ определится (для каждой гармоники) из (3.4) (при $t = t_1, f_m = a_m$) и (3.6)

$$\lambda = 2EJ\Omega_m \frac{f_m^0 - a_m e^{\alpha t_1}}{I}, \quad I = \int_0^{t_0} e^{\alpha^2 \tau^2} d\tau, \quad (3.7)$$

а искомая q из (3.5) определится, как

$$q = (q_0 + \Lambda) e^{-\frac{1}{n} t} - \Lambda e^{\alpha t}, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \lambda \left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^{-1}, \quad (3.8)$$

где q_0 – произвольное начальное условие. А давление Z определится по (3.5).

Заключение. Классическая задача оптимального управления движением упругой системы ставится для колебаний цилиндрической оболочки. Движения оболочки двухкомпонентные, но одномерные (продольное – нормальное, поперечное – нормальное). Вопрос оптимального управления ставится обычным образом: систему из одного состояния привести в другое при минимуме определённого функционала от нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем. // МТТ. 1999. №6. С.146-153.
2. Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению колебаниям упругих систем, описанным волновым уравнением. //ПМ. 2012. №2. С.137-143.
3. Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А. Об оптимальном управлении и наблюдении упругих колебаний балки. //Иzv. НАН Армении. Механика. 2014. №2. Т.67. С.69-79.
4. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Об одной задаче управления движением термоупругой пластинки-полосы. //Иzv. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №3. С.15-22.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
6. Короткий А.И. Обратные задачи управления систем с распределёнными параметрами. //Иzv. ВУЗов. Математика. 1995. №11. С.101-124.

7. Дегтярёв Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Синтез оптимального управления в системах с распределёнными параметрами при неполном измерении состояния (обзор). //Изв. АН СССР. Кибернетика. 1983. №2. С.123-136.
8. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2014. 176 с.
9. Бутковский А.Г. Методы управления движением с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
10. Крылов Е.Ю., Папкина И.В., Салтыкова О.А. Управление колебаниями цилиндрической оболочки. Естественные и математические науки в современном мире. /В сб. статей XXVII межд. научно-практич. конф.: №2 (26). Новосибирск: 2015. С.96-101.
11. Кравцова И.В., Краско В.А. Управление хаотическими колебаниями гибких сферических оболочек. //Изв. РАН. МТТ. 2006. №1. С.161-172.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович

Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА

Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

Тел.: (+37410). 56821

Е-mail: mechins@sci.am

Поступила 07.06.2017

**РАВНОВЕСИЕ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ,
СОДЕРЖАЩЕЙ ПОЛОСУ И СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ
ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ТРЕЩИНЫ**

Տաակյան Ա.Վ., Տարգսյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս.

Ключевые слова: упругая плоскость, полоса, перпендикулярные трещины, особенность, контактные напряжения.

Key words: elastic plane, strip, perpendicular cracks, singularity, contact stresses.

Բանալի բառեր: Առաձգական հարթություն, շերտ, փոխուղղահայաց ճաքեր, եզակիություն, կոնտակտային լարումներ:

Մահակյան Ա.Վ., Սարգսյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս.

Շերտ և համաչափ դասավորված փոխուղղահայաց ճաքեր պարունակող բաղադրյալ առաձգական հարթության հավասարակշռությունը

Դիտարկվում է երկու կիսահարթություններ և այլ նյութից շերտ պարունակող առաձգական հարթության հավասարակշռությունը: Շերտի ու կիսահարթությունների հավասար գծերի վրա և շերտի կենտրոնում կան սիմետրիկ դասավորված փոխուղղահայաց ճաքեր: Որոշված են հարթության լարվածային վիճակը և կոնտակտային լարումները:

Sahakyan A.V., Sargsyan V.G., Khachikyan A.S.

The equilibrium of the compound elastic plane, with the strip and symmetric located perpendicular cracks.

The equilibrium of the elastic plane, which is composed from the two similar half planes, joined together by the strip from the other material is considered. On the contact lines of the strip and on the center of the strip symmetric and perpendicular cracks are located. The stress station of the plane and contact stresses are determined.

Рассматривается напряжённое состояние кусочно-однородной упругой плоскости, составленной из двух одинаковых полуплоскостей и полосы из другого материала. Предполагается, что она содержит три трещины конечной длины, две из которых расположены на контактных линиях полосы с полуплоскостями, а третья – перпендикулярно к ним в центральной части полосы. Расположение трещин двояко симметрично. Определено напряжённое состояние плоскости и вычислены контактные напряжения.

Введение. Определению напряжённого состояния составной плоскости, содержащей трещины, посвящено множество исследований, из которых отметим, в частности, [1-3]. Особое место занимают задачи определения напряжённого состояния составной плоскости, когда трещина или система трещин, находится на линии раздела материалов, либо перпендикулярно выходят на неё, в этой связи отметим лишь работы [4-8].

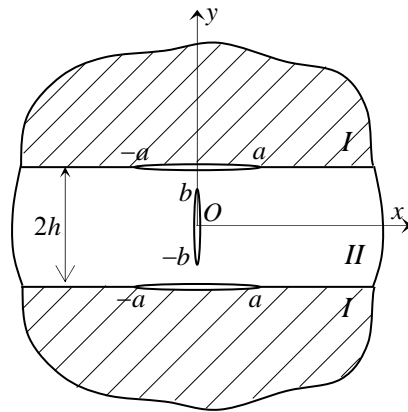
В настоящей работе рассмотрено напряжённое состояние кусочно-однородной плоскости, составленной из полосы и двух одинаковых полуплоскостей, при предположении, что на линиях контакта полосы с полуплоскостями имеются по одной трещине конечной длины, расположенных симметрично друг к другу, а также одна, перпендикулярная к линиям контакта, трещина в центральной части полосы. Исследовано взаимовлияние двух типов трещин: интерфейсной и внутренней.

Постановка задачи. Рассматривается упругая плоскость, содержащая полосу из другого материала. На линиях контакта полосы имеются две симметрично расположенные трещины длиной $2a$, а внутри полосы перпендикулярная к ним трещина длиной $2b$, которая равноудалена от концов трещин и не доходит до берегов трещин (фиг.1а). Внешние усилия в виде равномерного давления приложены к берегам трещин симметрично. В силу симметричности задачи рассматривается первая четверть плоскости (фиг.1б).

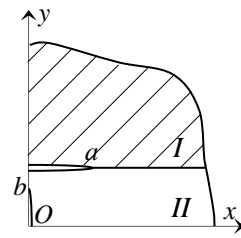
Граничные условия на линиях контакта с введением новых неизвестных в виде разности перемещений в области трещины будут

$$\begin{aligned}
 u_1 - u_2 = u, \quad v_1 - v_2 = v \quad (0 \leq x < a, y = h), \quad u = v = 0 \quad (a < x, y = h) \\
 \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad (y = h; x > 0); \\
 \tau_{xy}^{(2)} = 0, \quad u_2 = 0, \quad (b < y \leq h, x = 0), \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0, \quad u_1 = 0, \quad (x = 0, h \leq y < \infty) \\
 \tau_{xy}^{(2)} = 0, \quad v_2 = 0 \quad (y = 0, 0 \leq x < \infty)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь индексом «1» отмечены величины, относящиеся к полуплоскости, а индексом «2» – к слою.



Фиг.1а



Фиг.1б

Внешняя нагрузка в виде симметричных давлений приложена к берегам трещин

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(1)} = f_1(x) \quad (0 \leq x < a, y = h) \\
 \sigma_x^{(2)} = f_2(x), \quad (x = 0; 0 \leq y < b)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Решение задачи. Бигармоническую функцию Эри представим в виде:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y), & y > h, x > 0 \\ \Phi_2(x, y), & 0 < y < h, x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\Phi_1(x, y) = \int_0^{\infty} [A_1(\lambda) + \lambda y B_1(\lambda)] e^{-\lambda y} \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\Phi_2(x, y) = \int_0^{\infty} (A_2(x) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y B_2(x) \operatorname{sh} \lambda y) \cos \lambda x d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + \lambda_k x b_k) e^{-\lambda_k x} \cos \lambda_k y, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{h}$$

Используя формулы, выражающие компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений [1], переходя к образам Фурье и удовлетворяя условиям (1) для подынтегральных коэффициентов в выражении бигармонической функции Эри, получим:

$$A_1(\lambda) = \frac{4E_2}{\pi\lambda^2\Delta(\lambda)} \left[c_1 \operatorname{sh} \lambda h (l_2 \operatorname{ch} \lambda h - l_4 \operatorname{sh} \lambda h) + \frac{c_2 l_4 - c_3 l_2}{4} (\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) + \right.$$

$$\left. + (\lambda h - e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda h) (c_2 \operatorname{ch} \lambda h - c_3 \operatorname{sh} \lambda h) \right]$$

$$B_1(\lambda) = \frac{4E_2}{\pi\lambda^2\Delta(\lambda)} \left[(c_3 - c_1 l_1 e^{-\lambda h}) \operatorname{sh} \lambda h - \frac{(c_2 - c_3) l_1}{4} (\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) - c_2 \operatorname{ch} \lambda h \right]$$

$$A_2(\lambda) = \frac{2E_2}{\pi\lambda^2\Delta(\lambda)} \left\{ c_2 e^{-\lambda h} [\lambda h e^{\lambda h} (l_4 - \lambda h l_1) + l_4 \operatorname{sh} \lambda h - 2e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda h] + \right.$$

$$\left. + c_1 [l_1 (l_4 - l_2) (\operatorname{sh} \lambda h + \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) + 2e^{-\lambda h} (l_1 (\lambda h - 1) e^{-\lambda h} + l_4 \operatorname{sh} \lambda h - l_2 \operatorname{ch} \lambda h)] + \right.$$

$$\left. + c_3 e^{-\lambda h} [\lambda h e^{\lambda h} (\lambda h l_1 - l_3) - l_2 \operatorname{sh} \lambda h + 2e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda h] \right\}$$

$$B_2(\lambda) = \frac{2E_2}{\pi\lambda^2\Delta(\lambda)} \left\{ c_1 l_1 (l_2 - l_4) \operatorname{sh} \lambda h + c_2 e^{-\lambda h} [e^{\lambda h} (l_1 \lambda h - l_4) - l_1 \operatorname{ch} \lambda h] + \right.$$

$$\left. + c_3 e^{-\lambda h} [e^{\lambda h} (l_2 - l_1 \lambda h) + l_1 \operatorname{ch} \lambda h] \right\}$$

$$\Delta(\lambda) = -\frac{1}{4} [d + 4e^{-2\lambda h} \lambda h d_4 d_3 - e^{-4\lambda h} d_4 d_5];$$

$$a_k = b_k = -\frac{1}{h\lambda_k^2} \int_0^b u_2'(y) \sin \lambda_k y dy;$$

$$d = [(1 + \nu_2) + (3 - \nu_1) E_*] [(3 - \nu_2) + (1 + \nu_2) E_*]; \quad E_* = \frac{E_2}{E_1};$$

$$d_1 = (1 - \nu_2) - (1 - \nu_1) E_*; \quad d_2 = (1 + \nu_2) + (1 - \nu_1) E_*;$$

$$d_3 = 1 + \nu_2 + (3 - \nu_1) E_*; \quad d_4 = -(1 + \nu_2) + (1 + \nu_1) E_*;$$

$$d_5 = 3 - \nu_2 - (3 - \nu_1) E_*; \quad c_1 = \frac{1}{2} \int_0^b u_2'(y) \left(y \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda h} - h \operatorname{cth} \lambda h \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda h} \right) dy;$$

$$c_2 = -\int_0^a v'(x) \sin \lambda x dx; \quad c_3 = \int_0^a u'(x) \cos \lambda x dx + \int_0^b u'_2(y) \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda h} dy + \frac{1+v_2}{2} c_1;$$

$$l_1 = [-(1+v_2) + (1+v_1) E_*] e^{-\lambda h}; \quad l_4 = (\lambda h d_4 - 2E_*) e^{-\lambda h};$$

$$l_2 = \left\{ -(1+v_2)(\lambda h - 1) + [(1-v_1) + (1+v_1)\lambda h] E_* \right\} e^{-\lambda h}$$

где E_i , v_i ($i=1, 2$) – модули упругости и коэффициенты Пуассона составляющих плоскость материалов.

Перейдём к безразмерным величинам:

$$x = at; \quad y = b\tau; \quad a_0 = \frac{a}{h}; \quad b_0 = \frac{b}{h}; \quad (5)$$

$$\varphi(t) = u'(x) + iv'(x); \quad w(\tau) = u'_2(y).$$

Удовлетворяя условиям (2) и учитывая симметричность искомым функций относительно средних точек трещин, определяющие интегральные уравнения запишем на интервалах, занимаемых трещинами. В итоге будем иметь

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{t - \tau} + \theta \pi i \varphi(t) + \pi \int_{-1}^1 M_{11}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau + \pi \int_{-1}^1 M_{12}(t, \tau) \bar{\varphi}(\bar{\tau}) d\tau +$$

$$+ \pi \int_{-1}^1 M_{13}(t, \tau) w(\tau) d\tau = \pi i f_1^*(t)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{w(\tau) d\tau}{\tau - t} + \int_{-1}^1 K_{41}(t, \tau) w(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 M_{21}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^1 M_{22}(t, \tau) \bar{\varphi}(\bar{\tau}) d\tau = f_2^*(t), \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau = 0; \quad \int_{-1}^1 w(\tau) d\tau = 0,$$

где

$$M_{11}(t, \tau) = \frac{1}{2} [K_{11}(t, \tau) + K_{21}(t, \tau) + i(K_{22}(t, \tau) - K_{12}(t, \tau))],$$

$$M_{12}(t, \tau) = -\frac{1}{2} [K_{11}(t, \tau) - K_{21}(t, \tau) + i(K_{22}(t, \tau) + K_{12}(t, \tau))],$$

$$M_{13}(t, \tau) = -K_{13}(t, \tau) - iK_{23}(t, \tau),$$

$$M_{21}(t, \tau) = \frac{1}{2} (K_{32}(t, \tau) + iK_{33}(t, \tau)), \quad M_{22}(t, \tau) = \overline{M_{21}(t, \tau)},$$

$$\begin{aligned}
M_{23}(t, \tau) &= \pi b_0 \operatorname{cth} \frac{\pi b_0}{2} (\tau - t) - \frac{2}{\tau - t} + K_{31}(t, \tau) \\
f_1^*(t) &= \frac{idf_1(at)\pi}{E_2(E_* + 1)}, \quad f_2^*(t) = \frac{d}{E_2} f_2(bt), \quad \theta = \frac{d_1}{2(E_* + 1)}, \\
K_{11}(t, \tau) &= -\frac{da_0^2}{8(E_* + 1)} \int_0^\infty G_2(\lambda) \cos a_0 \lambda t \cos a_0 \lambda \tau d\lambda, \\
K_{12}(t, \tau) &= \frac{da_0^2}{8(E_* + 1)} \int_0^\infty G_3(\lambda) \cos a_0 \lambda t \sin a_0 \lambda \tau d\lambda, \quad K_{22}(t, \tau) = K_{12}(\tau, t), \\
K_{13}(t, \tau) &= \frac{db_0}{2(E_* + 1)} \int_0^\infty \cos a_0 \lambda t G_5(\lambda, \tau) d\lambda, \\
G_5(\lambda, \tau) &= \frac{\operatorname{sh} b_0 \tau \lambda}{\Delta(\lambda) e^{2\lambda}} \left[-\frac{d_1 \operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda d_2}{2 \operatorname{sh} \lambda} + \right. \\
&\quad \left. + \lambda (d_2 \operatorname{ch} \lambda + 2E_* \operatorname{sh} \lambda) (b_0 \tau \operatorname{cth} b_0 \tau \lambda - \operatorname{cth} \lambda) \right], \\
G_2(\lambda) &= -\frac{e^{-2\lambda}}{4d\Delta(\lambda)} \left[4\lambda (d_2 d + d_3 d_4 d_1) + e^{-2\lambda} d_1 (d + d_4 d_5) \right], \\
G_3(\lambda) &= G_1(\lambda) + \frac{e^{-2\lambda}}{\Delta(\lambda)}, \\
G_1(\lambda) &= \frac{e^{-2\lambda} (E_* + 1)}{d\Delta(\lambda)} \left\{ 4d_3 d_4 \lambda - 2d\lambda \frac{E_* - 1}{E_* + 1} + e^{-\lambda} \left[d \frac{E_* - 1}{E_* + 1} - d_4 d_5 \right] \right\} \\
K_{21}(t, \tau) &= \frac{da_0^2}{2\pi(E_* + 1)} \int_0^\infty G_2(\lambda) \sin a_0 \lambda t \sin a_0 \lambda \tau d\lambda, \\
K_{31}(t, \tau) &= \frac{b_0 a_0}{2} \int_0^\infty G_6(\lambda, t, \tau) d\lambda, \quad K_{32}(t, \tau) = a_0^2 \int_0^\infty F_3(\lambda, t) \cos \lambda \tau \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}, \\
K_{33}(t, \tau) &= a_0^2 \int_0^\infty F_2(\lambda, t) \sin \lambda \tau \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}, \\
G_6(\lambda, t, \tau) &= \frac{e^{-2\lambda}}{\Delta(\lambda)} \frac{\operatorname{sh} \lambda b_0 t}{\operatorname{sh} \lambda} \left\{ F_3(\lambda, \tau) \left[2 + (1 + \nu_2) \lambda (b_0 \tau \operatorname{cth} \lambda b_0 t - \operatorname{cth} \lambda) \right] + \right. \\
&\quad \left. + F_1(\lambda, \tau) (b_0 t \operatorname{cth} \lambda b_0 t - \operatorname{cth} \lambda) \right\}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
F_1(\lambda, \tau) &= e^{\lambda(b_0\tau-1)} d_3 \left\{ -2 + d_4 (1 + \lambda(b_0\tau-1)) + e^{-2\lambda b_0\tau} [2 - d_4 (1 - \lambda(b_0\tau+1))] \right\} - \\
&- e^{\lambda(b_0\tau-3)} d_4 \left\{ 2 + d_3 (1 + \lambda(b_0\tau+1)) - e^{-2\lambda b_0\tau} [2 + d_3 (1 + \lambda(1-b_0\tau))] \right\} \\
F_2(\tau) &= e^{-\lambda(1-b_0\tau)} [d_3 (2 - \lambda(1-b_0\tau)) - 2(E_* + 1)] - \\
&- e^{-\lambda(b_0\tau+1)} [d_3 (2 + \lambda(1+b_0\tau)) + 2(E_* + 1)] + \\
&+ e^{-\lambda(3-b_0\tau)} [-d_4 (2 + \lambda(1+b_0\tau)) + 2(E_* - 1)] + \\
&+ e^{-\lambda(3+b_0\tau)} [-d_4 (2 + \lambda(1-b_0\tau)) + 2(E_* - 1)] \\
F_3(\lambda, \tau) &= e^{-\lambda(1-b_0\tau)} [d_3 (1 + \lambda(b_0\tau-1))] + 2(E_* + 1) + \\
&+ e^{-\lambda(1+b_0\tau)} [d_3 (1 - \lambda(b_0\tau+1)) + 2(E_* + 1)] + \\
&+ e^{-\lambda(3-b_0\tau)} [d_4 (1 + \lambda(b_0\tau+1)) + 2(1 + E_*)] + \\
&+ e^{-\lambda(3+b_0\tau)} [d_4 (1 - \lambda(1-b_0\tau)) + 2(1 + E_*)]
\end{aligned}$$

Учитывая, что в уравнения системы (6) помимо основных неизвестных функций $\varphi(t)$ и $w(t)$ входит и сопряжённая с первой из них $\overline{\varphi(t)}$, систему уравнений (6) дополним третьим уравнением, являющимся сопряжённым к первому уравнению, а функцию $\overline{\varphi(t)}$ будем рассматривать как самостоятельную неизвестную.

Используя известные результаты о поведении сингулярных интегралов в окрестности концевых точек [9], найдём, что решение расширенной системы можно представить в виде

$$\varphi_k(t) = (1-t)^{\alpha_k} (1+t)^{\beta_k} \varphi_k^*(t), \quad (k=1,2,3), \quad (8)$$

где $\varphi_1(t) = \varphi(t)$; $\varphi_2(t) = \overline{\varphi(t)}$; $\varphi_3(t) = w(t)$;

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} - i\gamma; \quad \beta_1 = -\frac{1}{2} + i\gamma; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} + i\gamma; \quad \beta_2 = -\frac{1}{2} - i\gamma;$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2}; \quad \beta_3 = -\frac{1}{2}. \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcth}(-\theta);$$

Как явствует из этих формул, здесь приведены известные значения показателей особенности напряжений около концов интерфейсных трещин $(\alpha_i, \beta_i, i=1,2)$ и около концов внутренней трещины в полосе (α_3, β_3) .

Согласно методу механических квадратур [10], решение расширенной системы уравнений вместе с необходимыми дополнительными условиями сведём к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^n \frac{a_{km} \Phi_{km}}{x_{km} - y_{kj}} + \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^n a_{lm} H_{kl}(x_{km}, y_{kj}) \Phi_{lm} = f_k(y_{kj}) \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad (9)$$

$$\sum_{m=1}^n a_{km} \Phi_{km} = 0 \quad (k=1, 2, 3),$$

где Φ_{km} ($k=1, 2, 3$) – значения искомым функций $\Phi_k^*(t)$ в узловых точках x_{km} , являющихся корнями многочлена Якоби $P_n^{(\alpha_k, \beta_k)}(x)$. $H_{kl}(x_{km}, y_{kj})$ – значения соответствующих регулярных ядер, n – порядок аппроксимации искомым функций,

$$a_{km} = -\frac{\pi P_{n-1}^{(-\alpha_k, -\beta_k)}(x_{km})}{2 \sin \pi \alpha_k P_{n-1}^{(1+\alpha_k, 1+\beta_k)}(x_{km})}, \quad (k=1, 2, 3), \quad (m=1, 2, \dots, n),$$

y_{kj} – точки коллокации, совпадающие с корнями многочлена Якоби $P_{n-1}^{(-\alpha_k, -\beta_k)}(x)$.

После нахождения коэффициентов Φ_{km} ($k=1, 2, 3$) напряжения на линии контакта между полуплоскостью и полосой, а также на продолжении трещины в полосе можно рассчитать по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_y(\tau) &= \frac{E_2(E_*+1)}{\pi} \left\{ \sum_{j=1}^n \Phi_{3j} a_{3j} K_{13}(\tau, x_{3j}) - \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_{1j} \Phi_{1j}}{x_{1j} - \tau} \left(1 - \frac{q_1(\tau)}{q_1(x_{1j})} \right) - \right. \\ &- \sum_{j=1}^n a_{1j} \Phi_{1j} (iK_{12}(\tau, x_{1j}) + K_{11}(\tau, x_{1j})) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_{2j} \Phi_{2j}}{x_{2j} - \tau} \left(1 - \frac{q_2(\tau)}{q_2(x_{2j})} \right) + \\ &+ \left. \sum_{j=1}^n a_{2j} \Phi_{2j} (iK_{12}(\tau, x_{2j}) - K_{11}(\tau, x_{2j})) \right\} \quad (\tau > 1) \\ \sigma_x(\tau) &= \frac{E_2}{2\pi} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{a_{3j} \Phi_{3j}}{x_{3j} - \tau} \left(1 - \frac{q_3(\tau)}{q_3(x_{3j})} \right) + \sum_{j=1}^n a_{3j} \Phi_{3j} K_{41}(x_{3j}, \tau) \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^n a_{1j} \Phi_{1j} M_{21}(x_{1j}, \tau) + \sum_{j=1}^n a_{2j} \Phi_{2j} M_{22}(x_{2j}, \tau) \right\}, \quad \left(1 < \tau \leq \frac{1}{b_0} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

а раскрытие трещин, с учетом (5), – по формулам [11]:

$$\int_{-1}^y \Phi_k(\xi) (1-\xi)^{\alpha_k} (1+\xi)^{\beta_k} d\xi = \sum_{m=1}^n a_{km} \Phi_{km} \left[\frac{B_{\frac{1+y}{2}}(\beta_k+1, \alpha_k+1)}{B(\beta_k+1, \alpha_k+1)} - \right.$$

$$-(1-y)^{\alpha_k+1} (1+y)^{\beta_k+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{P_j^{(\alpha_k, \beta_k)}(x_{km}) P_{j-1}^{(\alpha_k+1, \beta_k+1)}(y)}{2j h_{kj}} \quad (11)$$

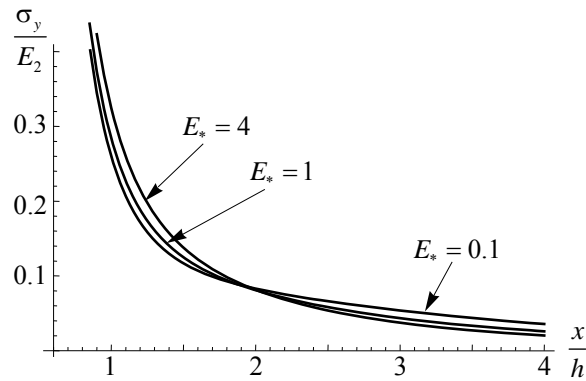
где

$$q_k(t) = \left(\frac{1}{1+t} \right)^{n+1} F \left(n+1, n+\beta_k+1; 2n+1; \frac{2}{1+t} \right),$$

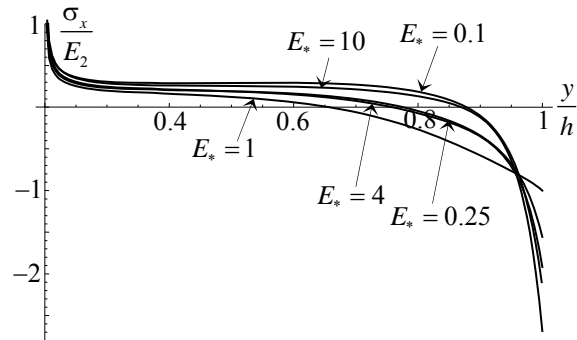
$$h_{km} = \frac{2^{\alpha_k+\beta_k+1} \Gamma(m+\alpha_k+1) \Gamma(m+\beta_k+1)}{(2m+\alpha_k+\beta_k+1) \Gamma(m+1) \Gamma(m+\alpha_k+\beta_k+1)},$$

$F(a, b; c; x)$ – гипергеометрическая функция, $B(a, b)$, $B_z(a, b)$ – полная и неполная бета-функции, $\Gamma(a)$ – гамма-функция, а a_{km} и x_{km} определены выше.

Численный анализ. Очевидно, что полученная разрешающая система линейных алгебраических уравнений (9) позволяет получить решение при самых различных значениях параметров поставленной задачи, каковыми являются относительные длины трещин a_0 и b_0 , отношение модулей упругости материалов полосы и полуплоскости E_* , коэффициенты Пуассона ν_1, ν_2 , величины нормальных нагрузок, приложенных к берегам трещин $f_1(t), f_2(t)$. При расчётах коэффициенты Пуассона принимались равными $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, внешние нагрузки предполагались равномерно распределёнными. Ниже представлены графики распределения безразмерных нормальных напряжений $\sigma_y(x)/E_2$ по линии контакта полуплоскости с полосой (Фиг.2) и напряжений $\sigma_x(y)/E_2$ на продолжении линии вертикальной трещины (Фиг.3), рассчитанные при $a_0 = 0.5$; $b_0 = 0.2$; $f_2^*(t) = 0, f_1^*(t) = -1$ для различных значений E_* .



Фиг.2. Нормальные напряжения на линии контакта

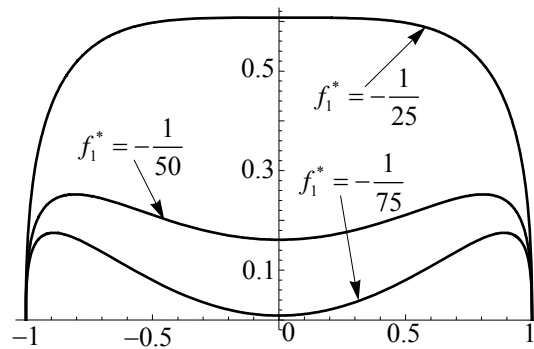


Фиг.3. Нормальные напряжения на продолжении внутренней трещины

Как видно из графиков фиг.2 и фиг.3, нормальные контактные напряжения σ_y на линии соединения полуплоскости и полосы намного меньше реагируют на изменение отношения модулей упругости материалов E_* , чем напряжения σ_x на продолжении трещины в полосе. Из фиг.3 замечаем, что перераспределение напряжения σ_x в зависимости от E_* происходит почти симметрично относительно однородного случая $E_* = 1$, причём, наибольшее отличие наблюдается при выходе на нижний берег горизонтальной трещины.

Были рассчитаны также раскрытия трещин при действии внешней нагрузки как на берегах обеих трещин, так и на берегах одной из них. Выяснено, что при действии нагрузки только на берега горизонтальной, интерфейсной, трещины раскрытия обеих трещин принимают только положительные значения и, следовательно, постановка задачи и её решение правомерны. При действии же внешней нагрузки только на берега вертикальной, внутренней, трещины, на отрезке, занимаемом горизонтальной трещиной, появляются зоны, где берега трещины выходят друг на друга. Следовательно, наличие внешней нагрузки и на берегах горизонтальной трещины необходимо.

На фиг.4 приведены графики раскрытия (разности нормальных компонент перемещений берегов) горизонтальной трещины, рассчитанные при следующих значениях параметров: $a_0 = 0.5; b_0 = 0.5; E_* = 0.2; f_2^*(t) = -1$; и различных значениях параметра, характеризующего нагрузку на горизонтальную трещину, $f_1^* = -0.133; -0.02; -0.04$. Раскрытие вертикальной трещины носит традиционный характер и, поэтому, не приводится.



Фиг.4. Величина раскрытия берегов горизонтальной трещины

Исходя из графиков, представленных на фиг.4, можно утверждать, что для обеспечения верности решения задачи при наличии нагрузки на берегах внутренней трещины необходимо придерживаться определённого условия, налагаемого на параметр f_1^* , в качестве которого, в рассмотренном случае можно принять условие $f_1^* \geq -1/75$. Отметим, что при $E_* > 1$ берега трещины начинают смыкаться у вершин трещины.

Заключение: Детальное численное исследование напряжённого состояния составной плоскости с взаимно перпендикулярными конечными трещинами выявило достаточно сложную его зависимость от параметров задачи. В частности, выявлено, что при действии на берега внутренней трещины равномерно распределённой нагрузки, разность перемещений берегов интерфейсных трещин может менять знак, что свидетельствует об образовании новых участков контакта внутри отрезка, занимаемого трещиной, и, тем самым, искажении первоначальной постановки задачи. Указано, что для получения решения, укладывающегося в рамки исходной постановки задачи, необходимо наличие на берегах этой трещины внешней нагрузки, превосходящей определённый уровень.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576с.
2. Черепанов Г.П. О напряжённом состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. //Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. №1. С.131-137.
3. Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Равновесие упругой плоскости, содержащей полосу и симметричные трещины на линиях контакта. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.3-9.
4. Ni L., Nemat-Nasser S. Interface cracks in anisotropic dissimilar materials: general case//Quarterly of Applied Mathematics. 1992. V.50. P.305-322.
5. Cook N.S., Erdogan F. Stresses in bounded materials with a crack perpendicular to the interface. //Int.J.Eng. Sci.-1972-10, №8.-p.677-697.
6. Акопян В.Н. Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин. //Доклады НАН Армении. 2002. Т.102. №1. С.29-34.

7. Агаян К.Л., Саркисян В.Г. Контактная задача упругой плоскости с трещинами, армированной бесконечными включениями. //В сб.: «Механика деформируемого твердого тела». Ереван: Изд-во АН Арм.ССР. 1993. С.63-78.
8. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А. Взаимодействие тонкого упругого включения с трещиной в кусочно-однородной плоскости. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т.38. №3. С.12-24.
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
10. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgia. Vol.156 (2011), pp.101-111.
11. Саакян А.В. Квадратурные формулы для вычисления интеграла с переменным верхним пределом. //Тр. II межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, С.107-111.

Сведения об авторах:

Саакян Аветик Вараздатович – Доктор физ.-мат. наук, зам.директора Института механики НАН Армении,

Тел.: (37410) 568188, (37494)579348

E-mail: avсах@mechins.sci.am

Саркисян Вардан Гарегинович – Кандидат техн.наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (37410)61-55-78

Хачикян Альберт Серобович – Кандидат физ.-мат.наук, ведущий научный сотр. Института механики.

Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (37410)74-02-89.

Поступила в редакцию 30. 05. 2017

**О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ИЗГИБНЫХ
КОЛЕБАНИЙ В СОСТАВНЫХ СВОБОДНО ОПЁРТЫХ ПЛАСТИНАХ**

Саноян Ю.Г.

Ключевые слова: пластина, локализованные изгибные колебания, интерфейсные колебания.

Key words: Composite plate, localized flexural wave, interfacial waves.

Բանալի Բառեր. Բաղադրյալ սալ, տեղայնացված ծոման տատանումներ, ինտերֆեյսային տատանումներ.

Sanoyan Ju.G.

About existence of the localized flexural waves in compound freely supported plate.

The localized interface waves in compound rectangular plates are investigated. Edges of a plate are freely supported. For a special case, when parts of plates differ in values of Poisson' ratio and bending stiffness, the conditions of existence localized waves are established and forms waves in transition points from localized to not localized are calculated.

Մանդյան Յու.Գ.

Ազատ հենված բաղադրյալ սալերում

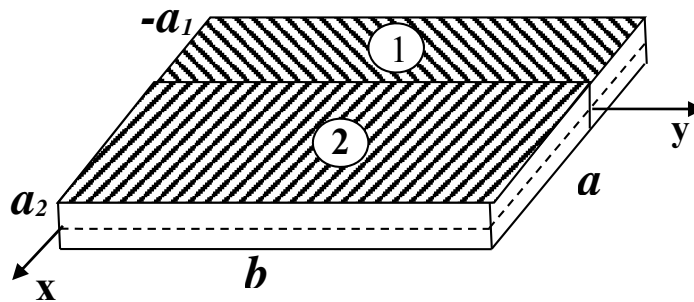
տեղայնացված ծոման տատանումների գոյության մասին

Հետազոտվել են երկու մասից բաղկացած բաղադրյալ ուղղանկյուն սալի տեղայնացված ծոման տատանումները: Սալի եզրերը ազատ հենված են: Հետազոտված են սալի տեղայնացված ծոման տատանումների առկայության պայմանները, երբ սալի մասերը տարբերվում են միայն Պուասսոնի գործակիցների, ծոման կոշտությունների և սալի չափսերի արժեքներով: Հաշվարկված են տեղայնացված և ոչտեղայնացված անցման կետերում ծոման տատանումների ձևերը.

В работе исследованы локализованные интерфейсные изгибные колебания в составных прямоугольных пластинах. Края пластины свободно опёрты. Для частных случаев, когда части пластин отличаются значениями коэффициентов Пуассона и изгибными жёсткостями, установлены условия существования локализованных колебаний в зависимости от физических параметров и размеров пластины и рассчитаны формы изгибных колебаний.

Введение. Первое сообщение об изгибных волнах, распространяющихся в узкой области свободного края полубесконечной полосы, и затухающих в перпендикулярном направлении, опубликовано Коненковым Ю.К. в 1960г. под названием «волны рэлеевского типа» [1]. Теоретическое исследование волновых процессов в упругой пластине-полосе постоянной ширины со свободными краями было проведено в [2]. В [3,4] эти волны получили более подходящее для них название «локализованных колебаний», которое более точно отображает их сущность, состоящую в том, что энергия волны оказывается сосредоточенной в узкой полосе вблизи края пластины. Локализованные волны могут существовать и в пластине-полосе со свободным краем и краевыми условиями жёсткой заделки и шарнирного опирания на противоположной стороне [5]. К локализованным волнам можно отнести и контактные изгибные волны в жёстко спаенных полубесконечных пластинах [6]. Волны, бегущие в узкой окрестности линии стыка, фактически состоят из двух состыкованных краевых изгибных волн. Авторами было получено дисперсионное уравнение для локализованных контактных волн и рассмотрено несколько частных случаев существования локализованных колебаний в зависимости от физических параметров частей пластины.

В [7] построены явные приближённые модели, описывающие изгибные краевые и интерфейсные (контактные) волны в полубесконечных и бесконечных пластинах с приложенными к ним соответственно к торцу и стыку нагрузками. Простые формулы для областей существования локализованных колебаний прямоугольных пластин и их графическое отображение для некоторых частных случаев приведены в [8, 9]. Показано, что решение этой задачи значительно упрощается, если области определения многомерной функции в дисперсионном уравнении заменить на многомерную поверхность, разделяющую эти области.



Фиг.1. Составная пластина в прямоугольной системе координат.

1. Постановка задачи. Пластина шириной a , длиной b и толщиной h расположена срединной плоскостью в координатной плоскости $z = 0$ (фиг.1). Ось OY лежит в плоскости, разделяющей пластины на части с ширинами a_1, a_2 . Вдоль границы раздела такой пластины при $x = 0$ возможно существование интерфейсной изгибной волны из поперечных колебаний, бегущей вдоль оси OY и затухающей с ростом $|x|$. В рамках теории Кирхгофа уравнения, описывающие изгибные колебания частей составной пластины w_i ($i=1,2$), имеют следующий вид:

$$D_1 \Delta^2 w_1 + \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \quad (1a)$$

$$D_2 \Delta^2 w_2 + \rho_2 h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0, \quad (1b)$$

где Δ – оператор Лапласа, ρ_i и

$$D_i = 2E_i h^3 / (3(1 - \nu_i^2)), \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

– плотности материалов и изгибные жёсткости частей пластины, E_i – модули Юнга, ν_i – коэффициенты Пуассона. Условия шарнирного закрепления пластины состоят в равенстве нулю перемещений и изгибающих моментов на её краях

$$w_1 = 0, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, x = -a_1, w_2 = 0, \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0, x = a_2 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = 0, y = 0, y = b. \quad (3b)$$

На стыке с идеальным контактом приравняем перемещения, производные перемещений по переменной x , изгибающие моменты и обобщённые перерезывающие силы [6,7]

$$w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, D_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) = D_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right)$$

$$D_1 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (2 - \nu_1) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} \right) = D_2 \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2 - \nu_2) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} \right) \text{ при } x=0. \quad (4)$$

Решение задачи. Решение однородных уравнений (1), удовлетворяющих крайним условиям (3), ищем как волну, бегущую вдоль оси Oy ,

$$w_1(x, y, t) = e^{i\omega t} \left(A_1 \frac{\text{sh}[\lambda_n(x+a_1)p_{11}]}{\text{sh}(\lambda_n a_1 p_{11})} + C_1 \frac{\text{sh}[\lambda_n(x+a_1)p_{12}]}{\text{sh}(\lambda_n a_1 p_{12})} \right) \sin(\lambda_n y), \quad (5a)$$

$$w_2(x, y, t) = e^{i\omega t} \left(A_2 \frac{\text{sh}[\lambda_n(x-a_2)p_{21}]}{\text{sh}(\lambda_n a_2 p_{21})} + C_2 \frac{\text{sh}[\lambda_n(x-a_2)p_{22}]}{\text{sh}(\lambda_n a_2 p_{22})} \right) \sin(\lambda_n y) \quad (5b)$$

$$\text{где } p_{11} = \sqrt{1-\eta_1}, p_{12} = \sqrt{1+\eta_1}, p_{21} = \sqrt{1-\eta_2}, p_{22} = \sqrt{1+\eta_2}, \quad (6)$$

$$\omega - \text{частота колебаний}, \lambda_n = \pi n / b, \quad (7)$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D_1 \lambda_n^4}} \omega^2, \eta_2 = \kappa \eta_1, \mu = \rho_2 / \rho_1, \gamma = D_2 / D_1, \kappa = \sqrt{\mu / \gamma}. \quad (8)$$

Величина перемещений пластин $w_i(x, y)$ в решениях (5) при допустимых значениях переменной x ограничена, что значительно облегчает и повышает точность численных расчётов. Подставляя (5) в условия (4) и используя обозначения (6-8), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$A_2 + C_2 + A_1 + C_1 = 0, \quad (9a)$$

$$A_2 p_{21} \text{cth } \alpha_2 p_{21} + C_2 p_{22} \text{cth } \alpha_2 p_{22} - A_1 p_{11} \text{cth } \alpha_1 p_{11} - C_1 p_{12} \text{cth } \alpha_1 p_{12} = 0, \quad (9б)$$

$$A_2 \gamma (p_{21}^2 - \nu_2) + C_2 \gamma (p_{22}^2 - \nu_2) + A_1 (p_{11}^2 - \nu_1) + C_1 (p_{12}^2 - \nu_1) = 0 \quad (9в)$$

$$\begin{aligned}
& A_2 \gamma p_{21} (p_{21}^2 - 2 + v_2) \operatorname{cth} \alpha_2 p_{21} + C_2 \gamma p_{22} (p_{22}^2 - 2 + v_2) \operatorname{cth} \alpha_2 p_{22} - \\
& - A_1 p_{11} (p_{11}^2 - 2 + v_1) \operatorname{cth} \alpha_1 p_{11} + C_1 p_{12} (p_{12}^2 - 2 + v_1) \operatorname{cth} \alpha_1 p_{12} = 0
\end{aligned} \tag{9r}$$

где $\alpha_i = \lambda_n a_i$. Приравнивая нулю определитель этой системы, составленный из коэффициентов при неизвестных A_2, C_2, A_1, C_1 , получим дисперсионное уравнение относительно неизвестной η_1 :

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
p_{21} \operatorname{cth} \alpha_2 p_{21} & p_{22} \operatorname{cth} \alpha_2 p_{22} & -p_{11} \operatorname{cth} \alpha_1 p_{11} & -p_{12} \operatorname{cth} \alpha_1 p_{12} \\
\gamma (p_{21}^2 - v_2) & \gamma (p_{22}^2 - v_2) & p_{11}^2 - v_1 & p_{12}^2 - v_1 \\
\gamma p_{21} t_{21} \operatorname{cth} \alpha_2 p_{21} & \gamma p_{22} t_{22} \operatorname{cth} \alpha_2 p_{22} & -p_{11} t_{11} \operatorname{cth} \alpha_1 p_{11} & -p_{12} t_{12} \operatorname{cth} \alpha_1 p_{12}
\end{vmatrix} = 0, \tag{10}$$

где $t_{21} = p_{21} - 2 + v_2$, $t_{22} = p_{22} - 2 + v_2$, $t_{11} = p_{11} - 2 + v_1$, $t_{12} = p_{12} - 2 + v_1$. Для составной пластины с одинаковыми значениями коэффициентов Пуассона, изгибных жёсткостей и плотностей в частях пластины, для которой $\eta_2 = \eta_1 > 1$, дисперсионное уравнение колебаний сводится к известному уравнению частот для шарнирно опертой пластины

$$\sin(\lambda_n a \sqrt{\eta_1 - 1}) = 0. \tag{11}$$

В остальных случаях формы колебаний в частях пластины не одинаковы из-за разницы физических параметров. Частоты колебаний составной пластины определяются функцией 6-ти переменных $\eta_1(\alpha_1, \alpha_2, v_1, v_2, \gamma, \kappa)$ из дисперсионного уравнения (10). Для частей $\eta_i > 1$ формы колебаний в обеих частях пластины вне окрестности стыка близки к синусоидальным. Для частей пластин с $\eta_i \leq 1$, для которых p_{11} и p_{21} – положительные постоянные затуханий, колебания будут локализованными.

Многомерная поверхность $\eta_1(\alpha_1, \alpha_2, v_1, v_2, \gamma, \kappa) = 1$ (эту поверхность и формы колебаний в её точках назовём критическими) разделяет области локализованных колебаний от нелокализованных. Отклонение η_1 от 1 увеличением или уменьшением разницы какого-либо значения физического параметра пластины без изменения других, приведёт к изменению знака коэффициента затухания и переходу колебательного процесса, соответственно, в область локализованных или нелокализованных колебаний. Перейдя в уравнении (10) к пределу при $\eta_1 \rightarrow 1$ и используя приближения $\operatorname{cth}(\alpha_1 p_{12}) \approx 1$ и $\operatorname{cth}(\alpha_2 p_{22}) \approx 1$, для достаточно больших значений α_1 и α_2 (которое, как будет показано ниже, хорошо выполняется), получим уравнение критической поверхности для 5-ти переменных

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/\alpha_1 & \sqrt{2} & -1/\alpha_2 & -\sqrt{2} \\ -v_1 & 2-v_1 & -\gamma v_2 & \gamma(2-v_2) \\ (v_1-2)/\alpha_1 & \sqrt{2}v_1 & \gamma(2-v_2)/\alpha_2 & -\sqrt{2}\gamma v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

Левая часть этого выражения проще (10) и, зачастую, позволяет аналитически отделить области существования локализованных колебаний. Рассмотрим некоторые частные случаи.

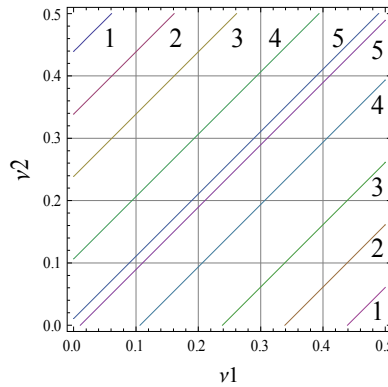
1. Для пластины с $\gamma=1$, $\kappa=1$ и $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ уравнение критической поверхности с переменными v_2, v_1, α , можно представить в виде

$$(v_2 - v_1)^2 (1 - \sqrt{2}\alpha)^2 - 16\sqrt{2}\alpha = 0. \quad (13)$$

Для $v_2 = v_1$, т.е., когда обе части полностью идентичны, решением уравнения (10) будет (11). В остальных случаях уравнение (13) относительно v_2 имеет решение

$$v_{2i}(v_1, \alpha) = v_1 \mp 4\sqrt{2}\alpha^2 / (1 - \sqrt{2}\alpha) \quad (14)$$

Индексам 1 и 2 соответствуют знаки минус и плюс. График (14) для заданных α состоит из двух семейств прямых линий, параллельных диагонали квадрата, и находящихся соответственно ниже её для v_{21} и выше v_{22} (фиг.2).



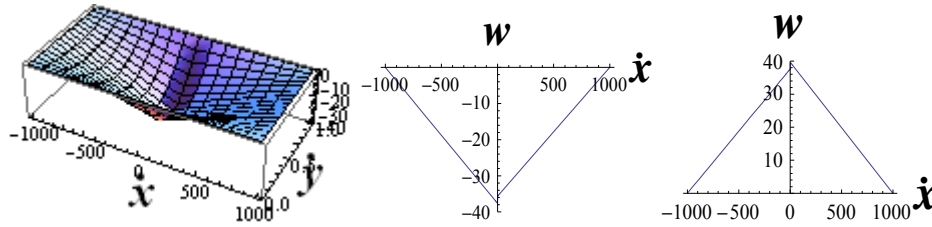
Фиг.2. График критических значений коэффициента Пуассона $v_{2i}(v_1)$ для относительных длин частот пластин $\alpha = 60(1), 100(2), 200(3), 1000(4), 1000000(5)$.

Наклонные прямые ограничены предельно допустимыми значениями коэффициентов Пуассона. При увеличении ширины α $v_{2i} \rightarrow v_1$. Минимальное значение относительной ширины $\alpha_{\min} = 46,6583$, ниже которой локализованные колебания невозможны, получается при максимальной разнице коэффициентов

Пуассона в частях пластин $(0, 0.5)$ и $(0.5, 0)$. Величина α_{\min} оправдывает сделанные выше предположения относительно приближений гиперболических функций в уравнении (10). Таким образом, область определения локализованных колебаний должна удовлетворять неравенствам:

$$\begin{cases} 46.6583 \leq \alpha < \infty, \\ 0 \leq v_1 \leq 0.5 - v_{21}(0, \alpha), \\ v_{21}(v_1, \alpha) \leq v_2 \leq 0.5. \end{cases} \begin{cases} 46.6583 \leq \alpha < \infty, \\ 0.5 - v_{22}(0.5, \alpha) \leq v_1 \leq 0.5, \\ 0 \leq v_2 \leq v_{22}(v_1, \alpha). \end{cases} \quad (15)$$

Во всех остальных случаях колебания нелокализованны.



Фиг. 3. Критические формы колебаний локализованных интерфейсных волн.

Критическая форма интерфейсных колебаний и их профили вдоль оси $y=0$ для $\alpha = 1000$, $v_1 = 0.3$, $v_{21} = 0.4064$ (первые два графика) и $v_{22} = 0.1936$ (третий график), рассчитанные по формулам (5) с точностью до постоянной, представлены на фиг.3. Форма колебаний в точках прямых, определяемых α (фиг. 2), состоит из прямых линий кроме узкой окрестности стыка пластины. Изгибные колебания пластин сдвинуты по фазе на 180° .

2. Рассмотрим пластину, части которой отличаются коэффициентами Пуассона и размерами ширины α_1 и α_2 . Уравнение критической поверхности (14) в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{2} \left(4\alpha_2 + \alpha_1 (2 + v_1 - v_2)^2 \right) + (2\alpha_1\alpha_2 + 1)(v_1 - v_2)^2 - \\ & -\sqrt{2} \left(4\alpha_1 + \alpha_2 (2 - v_1 + v_2)^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Для $\alpha_1 = \alpha_2$ это уравнение совпадает с (14). Решение квадратного уравнения (16) относительно переменной v_2 имеет два корня при каждом значении v_1 :

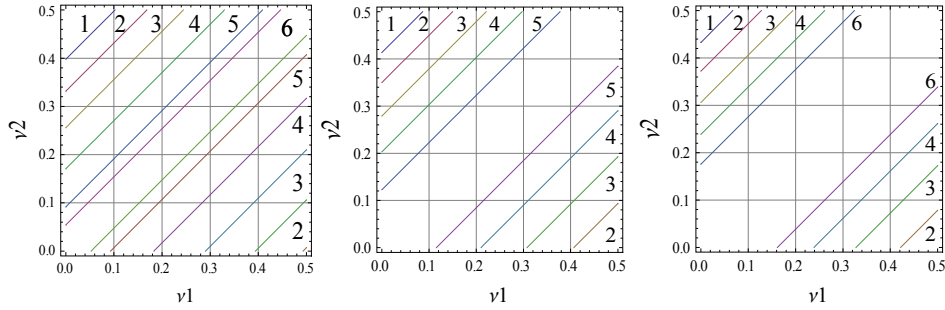
$$v_{2i}(v_1, \alpha_1, \alpha_2) = v_1 + 2\sqrt{2} \frac{\alpha_1 - \alpha_2 \mp \sqrt{\sqrt{2}(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + 2\alpha_1\alpha_2) - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 6\alpha_1\alpha_2}}{(1 - \sqrt{2}\alpha_2)(1 - \sqrt{2}\alpha_1)} \quad (17)$$

Индексу $i=1$ соответствует знак минус, $i=2$ – знак плюс. Замена индекса 1 на 2 означает перестановку частей пластины и не отражается на результатах вычислений.

Семейства функций $v_{2i}(v_1, \alpha_1, \alpha_2)$ состоят из прямых линий, которые неодинаково смещены от диагонали: семейство v_{21} находится выше диагонали, а v_{22} – ниже (фиг.4). Линии обоих семейств, определяемых значениями α_1 , сжимаются в точку при коэффициентах Пуассона (0, 0.5) и (0.5, 0) для верхнего и нижнего семейств, определяемых формулами:

$$\alpha_{21}(\alpha_1, \Delta) = \frac{-8\sqrt{2}\alpha_1 + 4\sqrt{2}\alpha_1\Delta + \Delta^2 - \sqrt{2}\alpha_1\Delta^2}{8\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\Delta + \sqrt{2}\Delta^2 - 2\alpha_1\Delta^2} \quad (18)$$

Для $\alpha_{21} \Delta = 0.5$ и $\alpha_{22} = -0.5$



Фиг.4. График $v_{2i}(v_1, \alpha_1, \alpha_2)$ при $\alpha_2 = 2000$, $\alpha_1 = 400$, $\alpha_1 = 200$

для $\alpha_2 = 30$ (1), 45(2), 80(3), 200(4), 1000(5) 10000(6.)

Оба семейства разделены областью, в которой ни при каких значениях ширины пластины $\eta \neq 1$. Наклонные прямые, ограничивающие эти области, находятся из (17) при $\alpha_2 \rightarrow \infty$ и равны

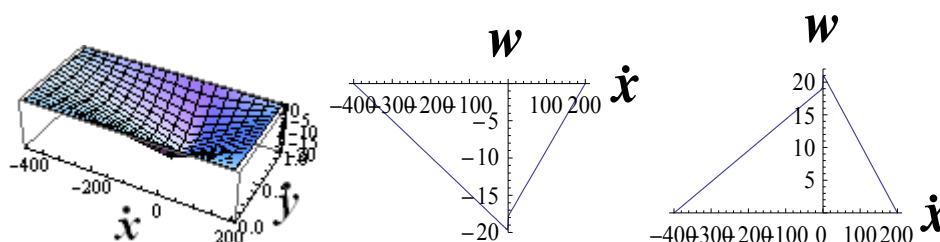
$$v_{21}^*(v_1, \alpha_1) = v_1 - 2 \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{2}\alpha_1 - 1}}{1 - \sqrt{2}\alpha_1}, \quad (19a)$$

$$v_{22}^*(v_1, \alpha_1) = v_1 - 2 \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{2}\alpha_1 - 1}}{1 - \sqrt{2}\alpha_1}. \quad (19б)$$

Таким образом, области допустимых значений локализованных колебаний для обоих семейств определяются неравенствами:

$$\left\{ \begin{array}{l} 28.991 < \alpha_1 < \infty, \\ 17.6777 < \alpha_2 < \infty \\ 0 \leq v_1 \leq 0.5 - v_{21}(v_1, \alpha_1, \alpha_2), \\ v_{21}(v_1, \alpha_1, \alpha_2) \leq v_2 \leq 0.5. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 17.6777 < \alpha_1 < \infty, \\ 28.9914 < \alpha_2 < \infty, \\ 0.5 - v_{22}(v_1, \alpha_1, \alpha_2) \leq v_1 \leq 0.5, \\ 0 \leq v_2 \leq v_{22}(v_1, \alpha_1, \alpha_2). \end{array} \right. \quad (20)$$

Графики форм колебаний для семейств прямых (17) при $n=1$ $\nu_1 = 0.25$, $\alpha_1 = 400$ ($a_1 = 127,324$), $\alpha_2 = 200$ ($a_2 = 63.662$) $\nu_{21} = 0.4530$ и $\nu_{22} = 0.03989$, рассчитанных по формулам (5) с точностью до постоянной, показаны на фиг.5.



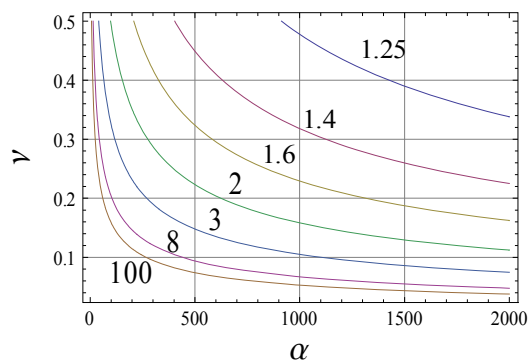
Фиг.5. Критические формы локализованных интерфейсных колебаний

Изгибные колебания обоих семейств имеют разные фазы.

3. Рассмотрим пластину, части которой отличаются только коэффициентом отношения модулей упругости $\gamma \neq 1$. Коэффициенты Пуассона и ширины частей обозначим через ν , α . Решение дисперсионного уравнения (12) для критической поверхности относительно ν имеет только одно положительное решение:

$$\nu(\alpha, \gamma) = 2 \frac{(\gamma - 1)^2 (1 - \sqrt{2\alpha}) + \sqrt{\alpha \sqrt{2} (1 - \sqrt{2\alpha})^2 (\gamma^2 - 1)^2}}{(1 - \sqrt{2\alpha})^2 (\gamma - 1)^2} \quad (21)$$

Для $\gamma = 1$ решением системы уравнений (5) является (11). Функция $\nu(\alpha, \gamma)$ для γ и $1/\gamma$ имеет одинаковые значения и равносильна замене частей пластины. Критические кривые зависимости коэффициента Пуассона от ширины частей пластины для значений γ , указанных над кривыми, показаны на фиг.6 для $\gamma > 1$.



Фиг.6. Зависимость $\nu(\alpha, \gamma)$ от α для γ , указанных на фигуре.

Кривые пересекают прямую $\nu(\alpha, \gamma) = 0.5$ в точках, определяемых формулой

$$\alpha(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 + 2\gamma + \sqrt{1 + 14\gamma + \gamma^2}}{\gamma - 1} \right)^2. \quad (22)$$

Локализованные колебания возможны в точках (ν, α) , лежащих выше соответствующей кривой. Область допустимых значений функции (20) для локализованных колебаний определяется неравенствами:

$$\begin{cases} 1 \leq \gamma < \infty, \\ \alpha(\gamma) \leq \alpha \leq \infty, \\ \nu(\alpha, \gamma) \leq \nu_2 \leq 0.5. \end{cases} \quad (23)$$

Формы изгибных колебаний в этом случае мало отличаются от двух предыдущих.

Заключение. В работе предложена методика определения области существования локализованных изгибных колебаний составных пластинок, в которой многомерная функция дисперсионного уравнения от физических и геометрических параметров заменяется дисперсионным уравнением от функции многомерной поверхности, разделяющей области локализованных колебаний от нелокализованных. В работе приведено решение задачи изгибных колебаний свободно опертых тонких составных пластин, состоящих из двух частей для трёх частных случаев: части пластин отличаются только коэффициентами Пуассона и размерами ширины частей и отличающихся только отношением изгибных жёсткостей пластины. Для этих случаев определены условия существования локализованных колебаний и получены графические изображения форм изгибных колебаний пластины.

В заключение автор выражает благодарность профессору Белубекяну М.В. за помощь, оказанную им при работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю.К. Об изгибных волнах рэлеевского типа // Акустический журнал. 1960. Т.6. Вып.1. С.124-126.
2. Вешев В.А., Ключкин И.И., Коузов Д.П., Лукьянов В.Д. О распространении колебательной энергии в тонкой упругой пластине постоянной ширины // Акустический журнал. 1977. Т.23. Вып.2. С.228-233.
3. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Институт механики НАН Армении. 1997. С.79-96.
4. Белубекян М.В. Учёт поперечных сдвигов в задаче изгибных колебаний пластинки, локализованных вдоль свободной кромки // В сб.: «Оптимальное управление и прочность механических систем». Ереван: 2002. С.130-133.
5. Мкртчян А.П. Локализованные изгибные и планарные колебания упругих пластин // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физ.-мат.наук. Ереван: 2005.

6. Зильберглейт А.С., Сулова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинах // Акустический журнал. 1983. Т.29. Вып.2. С.186-191.
7. Каплунов Ю.Д., Косович Е.Л., Мухомодьяров Р.Р., Сорокина О.В. Явные модели распространения изгибных краевых и интерфейсных волн в тонких изотропных пластинах. //Известия Саратовского университета. 2013. Т.13. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып.1, ч. 1. С.56-63.
8. Белубекян М.В., Саноян Е.Ю. Локализованные колебания в составных свободно опёртых пластинах. //Труды XVIII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Том 1. Ростов-на-Дону: 7-10 ноября 2016. С. 61-64.
9. Белубекян М.В., Саноян Е.Ю., Гариков В.Г. О существовании локализованных изгибных колебаний в составных свободно опёртых пластинах// Вестник. 2016. Т.16, вып. 2. С. 9-15.

Сведения об авторе:

Саноян Юрий Геворкович – к.ф.-м.н., ст. научн. сотр. Института механики НАН Армении. Тел.: (+374 10) 541319; **E-mail.ru:** yuriisanoyan@mail.ru

Поступила в редакцию 22.03.2017

ГОДИЧНОЕ СОДЕРЖАНИЕ 2017, том 70

1. **Аветисян А.С., Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** Распространение упругих волн в плоском слое-волноводе с учётом упрощённой модели континуума Коссера 2–15
2. **Аветисян А.С., Камалян А.А., Унанян А.А.** Характеристики локализации волновой энергии около неровных поверхностей пьезоэлектрического волновода 1–40
3. **Аветисян А.С., Унанян А.А.** Амплитудно-фазовые искажения высокочастотной нормальной сдвиговой волны в однородном упругом волноводе с слабо-неоднородными поверхностями 2–28
4. **Агаловян Л.А.** О пространственных динамических задачах пластин и оболочек 1–3
5. **Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.** Асимптотические решения несвязанных задач стационарной теплопроводности и термоупругости для двухслойных пластин с неклассическими граничными условиями 2–3
6. **Алексамян Р.К.** – Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца 3–20
- **Амбарцумян С.А.** – см. №1
7. **Атоян Л.А., Даноян З.Н.** Распространение упруго-спиновых волн в периодической, ферромагнитной, слоистой среде 1–74
8. **Багдасарян Г.Е.** Волны Рэлея в магнитострикционном полупространстве ... 4–3
9. **Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.** О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край 4–12
- **Белубекян М.В.** – см. №1
10. **Галичян Т.А., Филиппов Д.А., Фирсова Т.О., Радченко Г.С.** – Теория линейного и нелинейного магнитоэлектрического эффекта в слоистых магнитострикционно-пьезоэлектрических композитах 3–7
11. **Гукасян А.А.** – О математическом моделировании процесса обслуживания и условия её управляемости 3–26
- **Геворкян Р.С.** – см. №5
- **Даноян З.Н.** – см. №7
12. **Жамакочян К.А., Саркисян С.О.** Матрица жёсткости конечного элемента микрополярной упругой тонкой пластинки 1–22
13. **Закарян Т.В.** Первая динамическая краевая задача теории упругости для трёхслойной пластинки 2–43
14. **Казарян К.Б., Папян А.А.** Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в упругом составном резонаторе 2–52
- **Камалян А.А.** – см. №2
15. **Керопян А.В., Саакян К.П.** – Передача нагрузки от конечного числа конечных струнгеров к упругой полуплоскости посредством липких сдвиговых слоёв. 3–39
16. **Киракосян Р.М., Степанян С.П.** – Устойчивость стержня при учёте уменьшения сжимающей силы упруго защемлённой опорой 3–57
17. **Киракосян Размик Макарович** – К 80-летию со дня рождения 3–3
18. **Манжиров Александр Владимирович** – К 60-летию со дня рождения 3–5

- **Мартirosян С.Р. – см. №9**
- 19. **Мкртчян С.А.** – Сдвиговые электроупругие нормальные волны в двухслойном волноводе пьезоэлектрик-проводник..... 3–67
- 20. **Мовсисян Л.А.** К вопросу оптимального управления движением цилиндрической оболочки..... 4–50
- 21. **Мхитарян С.М.** О решении интегральных уравнений одного класса смешанных и контактных задач методом вырожденных ядер..... 2–58
- 22. **Оганисян Г.В., Саркисян К.С., Сукиасян Дж.С.** Передача нагрузки от двух параллельных упругих бесконечного и конечного стрингеров к упругой однородной бесконечной пластине..... 1–83
- **Папян А.А. – см. №14**
- **Радченко Г.С. – см. № 10**
- 23. **Ремизов М.Ю., Сумбатян М.А.** К теории акустических метаматериалов с тройко-периодической системой внутренних неоднородностей..... 4–35
- 24. **Саакян А.В., Саркисян В.Г., Хачикян А.С.** Равновесие составной упругой плоскости, содержащей полосу и симметрично расположенные взаимно перпендикулярные трещины 4–57
- 25. **Саноян Ю.Г.** О существовании локализованных изгибных колебаний в составных свободно опёртых пластинах 4–68
- 26. **Саркисян Н.С., Хачатрян А.М.** О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки по нелинейной теории упругости 1–64
- 27. **Саркисян С.В.** Трёхмерная задача о распространении волн в полупространстве с упруго-стеснённой границей 2–74
- **Саакян К.П. – см. №15**
- **Саркисян К.С. – см. №22**
- **Саркисян В.Г. – см. № 24**
- **Саркисян С.О. – см. №12**
- **Степанян С.П. – см. №16**
- **Сукиасян Дж.С. – см. № 22**
- **Сумбатян М.А. – см. № 23**
- **Унанян А.А. – см. №№2, 3**
- **Филиппов Д.А. – см. № 10**
- **Фирсова Т.О. – см. № 10**
- **Хачатрян А.М. – см. № 26**
- **Хачикян А.С. – см. № 24**

CONTENTS *Mechanics 2017. Vol.70*

1. **Aghalovyan L.A.** On Space dynamic problems of plates and shells 1–3
2. **Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S.** Asymptotic solutions of stationary problems of thermal conductivity and thermoelasticity with nonclassical boundary conditions for the two-layer plates with full and incomplete contact layers 2–3
3. **Alexanyan R.K.** Torsion of prismatic bar with cross-section in a form of circular ring 3–20
4. **Ambartsumyan S.A., Avetisyan A.S., Belubekyan M.V.** Propagation of elastic waves in a plane waveguide layer on the basis of a simplified model of the Cosserat continuum 2–15
5. **Atoyan L.H., Danoyan Z.N.** Elastic-spin waves propagation in a periodic ferromagnetic layered medium 1–74

6. **Avetisyan A.S., Hunanyan A.A.** Amplitude-phase distortion of the normal high-frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces 2–28
7. **Avetisyan A.S., Kamalyan A.A., Hunanyan A.A.** Features of localization of wave energy at rough surfaces of piezodielectric waveguide 1–40
 - **Avetisyan A.S.** – see № 4
8. **Baghdasaryan G.Y.** Rayleigh waves in magnetostrictive half-space 4–3
9. **Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.** On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge 4–12
 - **Belubekyan M.V.** – see № 4
 - **Danoyan Z.N.** – see № 5
 - **Filippov D.A.** – see № 10
 - **Firsova T.O.** – see № 10
10. **Galichyan T.A., Filippov D.A., Firsova T.O., Radchenko G.S.** The theory of linear and nonlinear magnetoelectric effect in layered disc-shaped magnetostrictive-piezoelectric composites 3–7
 - **Gevorgyan R.S.** – see № 2
11. **Ghazaryan K.B., Papyan A.A.** Resonance and localized shear vibration of bimaterial elastic resonator 2–52
12. **Ghukasyan A.A.** On the mathematical modeling of maintenance process and the condition of its controllability 3–26
13. **Hovhannisyan H.V., Sargsyan K.S., Sukiasyan J.S.** Load transfer from two parallel elastic infinite and finite stringers to elastic homogeneous infinite plate 1–83
 - **Hunanyan A.A.** – see № № 6,7
 - **Kamalyan A.A.** – see № 7
14. **Kerobyan A.V., Sahakyan K.P.** Loads Transfer from Finite Number Finite Stringers to an Elastic Half-plane Through Adhesive Shear layers 3–39
15. **Kirakosyan R.M.** – 80-th Anniversary 3–3
16. **Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P.** The stability of rod by taking into account the

decrease of the compression force by elastic clamped support	3–57
• Khachatryan A.M. – see № 24	
• Khachikyan A.S. – see № 22	
17. Manzhirov A.V. – 60-th Anniversary	3–5
• Martirosyan S.R. – see № 9	
18. Mkhitaryan S.M. On the solution to integral equations of one class of mixed and contact problems by the degenerate kernel method	2–58
19. Mkrтчhyan S.H. Shear electro-elasticity normal waves in the piezoelectric-conductor two-layered waveguide	3–67
20. Movsisyan L.A. To the problem of optimal control of a cylindrical shell motion	4–50
• Papyan A.A. – see № 11	
• Radchenko G.S. – see № 10	
21. Remizov M.Yu., Sumbatyan M.A. On 3d theory of acoustic metamaterials with a triple-periodic system of interior obstacles	4–35
22. Sahakyan A.V., Sargsyan V.G., Khachikyan A.S. The equilibrium of the compound elastic plane, with the strip and symmetric located perpendicular cracks	4–57
• Sahakyan K.P. – see № 14	
• Sargsyan K.S. – see № 13	
• Sargsyan V.G. – see № 22	
• Sargsyan S.H. – see № 27	
• Sumbatyan M.A. – see № 21	
• Sukiasyan J.S. – see № 13	
23. Sanoyan Ju.G. About existence of the localized flexural waves in compound freely supported plate	4–68
24. Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M. On two-dimensional equations two-layer anisotropic plate, with full contact between the layers	1–64
25. Sarkisyan S.V. Three-dimensional problem of waves propagation in half-space with an elastically restrained boundary	2–74
• Stepanyan S.P. – see № 16	
26. Zakaryan T.V. First dynamic boundary problem of the elasticity theory for three-layered plate	2–43
27. Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H. Stiffness matrix of the finite element of micropolar elastic thin plate	1–22

СОДЕРЖАНИЕ № 4, 2017, том 70

Багдасарян Г.Е. Волны Рэлея в магнестрикционном полупространстве.....	3
Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край	12
Ремизов М.Ю., Сумбатян М.А. К теории акустических метаматериалов с тройко-периодической системой внутренних неоднородностей.....	35
Мовсисян Л.А. К вопросу оптимального управления движением цилиндрической оболочки.....	50
Саакян А.В., Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Равновесие составной упругой плоскости, содержащей полосу и симметрично расположенные взаимно перпендикулярные трещины	57
Саноян Ю.Г. О существовании локализованных изгибных колебаний в составных свободно опёртых пластинах	68
Содержание 70 тома 2017 г. «Известия НАН Армении. Механика»	78

CONTENTS

Baghdasaryan G.Y. Rayleigh waves in magnetostrictive half-space	3
Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge	12
Remizov M.Yu., Sumbatyan M.A. On 3d theory of acoustic metamaterials with a triple-periodic system of interior obstacles	35
Movsisyan L.A. To the problem of optimal control of a cylindrical shell motion	50
Sahakyan A.V., Sargsyan V.G., Khachikyan A.S. The equilibrium of the compound elastic plane, with the strip and symmetric located perpendicular cracks ..	57
Sanoyan Ju.G. About existence of the localized flexural waves in compound freely supported plate	68
CONTENTS «Mechanics» 2017. V.70.....	78

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Բաղդասարյան Գ.Ե. Ռեկեյի ալիքները մագնիսաստրիկցիոն կիսատարածությունում	3
Բելուբեկյան Մ.Վ. , Մարտիրոսյան Ս.Ռ. Գերձայնային գազի հոսքում սեղմված սալի դիվերգենցիայի մի խնդրի մասին.....	12
Ռեմիզով Մ.Յու., Մումբատյան Մ.Ա. Ներքին անհամասեռությունների եռապարբերական համակարգով ակուստիկ մետանյութերի տեսության վերաբերյալ.....	35
Մովսիսյան Լ.Ա. Գլանային թաղանթի շարժման օպտիմալ դեկավարման հարցի մասին	50
Մահակյան Ա.Վ., Մարգարյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս. Շերտ և համաչափ դասավորված փոխուղղահայաց ճաքեր պարունակող բաղադրյալ առաձգական հարթության հավասարակշռությունը	57
Սանոյան Յու.Գ. Ազատ հենված բաղադրյալ սալերում տեղայնացված ծոման տատանումների գոյության մասին	68
Բովանդակություն «ՀՀ ԳԱԱ տեղեկագիր Մեխանիկա» 2017թ. 70 հատորի	78