ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2017

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №3, 2017 Механика

КИРАКОСЯН РАЗМИК МАКАРОВИЧ

(к 80-летию со дня рождения)

Доктору технических наук, профессору Размику Макаровичу Киракосяну исполнилось 80 лет. Р.М. Киракосян родился в 1937г. в Ереване. В 1954г. окончил среднюю школу с золотой медалью. В 1959г. с отличием окончил гидростроительный факультет Ереванского политехнического института. Был сталинским стипендиантом. Окончил аспирантуру мех.-мат. факультета Ереванского госуниверситета. В 1964г. в Институте проблем механики АН СССР (Москва) защитил диссертацию и получил учёную степень кандидата технических наук. В 1986г. в МИСИ (Московский инженерно-строительный институт) защитил диссертацию и получил учёную степень доктора технических наук. В 1990г. получил звание профессора.

С 1962г. по сей день работает в Институте механики Национальной Академии Наук Армении. Автор более 120 научных статей, 3 изобретений и восьми монографий, посвящённых уточнённым теориям ортотропных пластин и облочек, строительной механике, теориям пластичности, ползучести и общей физики.

Его первые работы, посвящённые вопросам нелинейной ползучести и релаксации тонкостенных конструкций, в частности, оболочек вращения – конус, цилиндр, сфера, получили высокую оценку специалистов. Известны его работы для пластин и оболочек, находящихся в упруго-пластическом состоянии.

Высокую научную ценность имеет монография «Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов», Ереван-2000, Изд.«Гитутюн» НАН РА. Им построены также аналогичные уточнённые теории для ортотропных пластин и оболочек переменной толщины при учёте влияния изменения температуры. В рамках отмеченных уточнённых теорий им, его учениками и коллегами решён ряд прикладных задач изгиба, устойчивости, колебаний оптимизации и др.

В последние годы Р.М. Киракосяном предложена практически важная модель упруго-защемлённой опоры тонкостенных элементов конструкций – стержней, пластин и оболочек, с применением которых решён ряд задач изгиба и устойчивости.

В 1972-73г.г. Р.М. Киракосян в рамках бимоментно-векториальной теории В.З. Власова, учитывающей депланацию поперечных сечений тонкостенных элементов конструкции, выполнил расчёты на прочность высокоэтажных жилых домов, которые должны были строиться методом подъёма этажей. Расчёты прочности шахт лифтов при совместной работе с тремя статически неопределимыми рамными конструкциями, расположенными под углом 120° друг от друга, были проведены с учётом высокой степени сейсмоактивности территории Армении. Благодаря этому, во время сильного землетрясения в1988г. никакое из зданий городов Спитак и Ленинакан, построенных методом подъёма этажей, не разрушилось и спаслись жизни сотен жителей этих домов.

Велики заслуги Киракосяна Р.М. в деле подготовки научных кадров. Об этом свидетельствует, в частности, монография «Современные теории пластичности» Ереван, ЕрПИ, 1999, а также пособия по физике, изданные в Армении и России. Под его научным руководством защищён ряд кандидатских диссертаций. Его ученики успешно работают в различных ВУЗах и научных центрах.

Помимо научной деятельности Киракосян Р.М. занимался ещё и преподавательской работой. В Ереванском архитектурно-строительном институте долгие годы читал лекции по сопротивлению материалов и строительной механике.

Долгое время являлся учёным секретарем Специализированного Совета по защите диссертаций при Институте механики.

Кроме науки он занимается ещё и поэзией. Опубликованы четыре сборника его стихов.

Редколлегия журнала «Известия НАН Армении. Механика» поздравляет Размика Макаровича Киракосяна с юбилеем и желает ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, № 3, 2017 Механика

АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ МАНЖИРОВ
(К 60-летию со дня рождения)

Исполнилось 60 лет со дня рождения видного учёного-механика, иностранного члена НАН Армении, доктора физико-математических наук, профессора Александра Владимировича Манжирова.

А.В.Манжиров родился 24-го мая 1957г. в г. Ростове-на-Дону. В 1974 г. А.В. Манжиров, с отличием окончив среднюю школу, поступил в Ростовский государственный университет на механико-математический факультет по специальности механика, который также окончил с отличием. В 1979 году он, по рекомендации академика РАН И.И.Воровича поступает в аспирантуру под руководством академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна. В 1983 г. защищает кандидатскую, а в 1993 г. – докторскую диссертацию.

Область научных интересов А.В.Манжирова весьма обширна: механика деформируемого твёрдого тела, механика растущих тел, контактная механика и трибология, механика технологических процессов, прикладная математика, математическая физика, интегральные уравнения и их приложения, математическое моделирование, инженерная математика, уравнения в частных производных, краевые задачи. По всем этим направлениям ему принадлежат важные, оригинальные результаты. А.В. Манжиров по праву считается одним из основателей нового направления механики – механики наращиваемых тел, создателем математической теории наращиваемых тел, позволяющей эффективно моделировать широкий круг технологических и природных процессов. Своими учителями А.В.Манжиров считает акад. И.И.Воровича, акад. Н.Х.Арутюняна и проф. В.М.Александрова.

А.В.Манжиров является автором более 200 научных статей, двух изобретений, 4 учебников и 16 книг, изданных на русском, английском и немецком языках.

Проф. А.В. Манжиров пользуется международным признанием. Он является членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике (RNCTAM), Европейского общества механиков (EUROMECH), Американского общества инженеров-механиков (ASME), Американского математического общества (AMS), Американского общества исследователей (ASR), Международной ассоциации прикладной математики и механики (GAMM), Международной ассоциации инженеров (IAENG), Исследовательского совета Американского биографического института (ABI) и членом редколлегий 6 авторитетных научных журналов, в том числе и нашего журнала.

Наряду с бурной научной деятельностью ведёт большую педагогическую и научно-организационную работу. Он является заместителем директора по научной работе и заведующим Лабораторией моделирования в механике деформируемого твёрдого тела Института проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, заведующим филиалом кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Баумана, профессором кафедр высшей математики Московского технологического университета и Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». А.В.Манжиров является заместителем председателя Научного Совета РАН по механике деформируемого твёрдого тела, членом Экспертного Совета по математике и механике ВАК Минобрнауки РФ, членом Экспертного Совета по математике, механике и информатике Российского фонда фундаментальных исследований, экспертом Российского научного фонда. Он был организатором многих научных мероприятий, в частности, был сопредседателем 7 международных научных конференций, проведённых в Армении за последнее десятилетие. Под научным руководством А.В.Манжирова защищены кандидатские и докторские диссертации.

Благодаря своему научному руководителю акад. Нагушу Хачатуровичу Арутюняну, А.В.Манжиров ещё с аспирантских лет начал общение с армянской школой механики, которое, впоследствии, переросло в большую дружбу. Он никогда не скрывал своё восхищение Арменией и армянским народом, толика крови которого течёт и в его жилах.

Редколлегия журнала «Известия НАН Армении. Механика» сердечно поздравляет **Александра Владимировича Манжирова** с юбилеем и желает ему доброго здоровья, плодотворной научной деятельности и дальнейших творческих успехов во благо развития науки.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №3, 2017 Механика

UDC 537.9

THE THEORY OF LINEAR AND NONLINEAR MAGNETOELECTRIC EFFECT IN LAYERED DISC–SHAPED MAGNETOSTRICTIVE-PIEZOELECTRIC COMPOSITES

Galichyan T.A., Filippov D.A., Firsova T.O., Radchenko G.S.

Keywords: magnetoelectric effect, magnetostriction, piezoelectricity, thin films, electromechanical resonance.

Ключевые слова: магнитоэлектрический эффект, магнитострикция, пьезоэлектричество, тонкие слои, электромеханический резонанс.

Բանալի բառեր. մագնիսաէլեկտրական էֆեկտ, մագնիսաստրիկցիա, պյեզոէլեկտրակա-նություն, բարակ շերտեր, էլեկտրոմեխանիկական ռեզոնանս:

Галичян Т.А., Филиппов Д.А., Фирсова Т.О., Радченко Г.С.

Теория линейного и нелинейного магнитоэлектрического эффекта в слоистых магнитострикционно-пьезоэлектрических композитах

В статье представлена теория линейного и нелинейного магнитоэлектрического эффекта в слоистых магнитострикционно-пьезоэлектрических мультиферроиках, построенная на основе решений материальных уравнений и уравнения движения среды для пьезоэлектрической и магнитострикционной подсистем по отдельности с учётом условий на границе раздела. Показано, что в слабых полях подмагничивания величина нелинейного эффекта сравнима с линейным, причём, наряду с основным резонансом, наблюдается дополнительный резонанс. Величина амплитуды этого резонанса не зависит от поля подмагничивания, а возбуждение происходит на частоте магнитного поля в два раза меньшей частоты основного резонанса.

Գալիչյան Տ.Ա., Ֆիլիպպով Դ.Ա., Ֆիրսովա Տ.Օ., Ռադչենկո Գ.Ս.

Գծային և ոչ գծային մագնիսաէլեկտրական էֆեկտի տեսությունը շերտավոր մագնիսաստրիկցիոն-պյեզոէլեկտրական բաղադրյալ համակարգերում

Անոտացիա. Հոդվածում ներկայացված է գծային և ոչ գծային մագնիսաէլեկտրական էֆեկտի տեսությունը մագնիսաստրիկցիոն-պյեզոէլեկտրական բազմաֆեռոիկներում: Տեսությունը կառուցված է նյութական հավասարումների, պյեզոէլեկտրական և մագնիսաստրիկցիոն միջավայրերի շարժման համապատասխան հավասարումների լուծման հիման վրա, հաշվի առնելով եզրային պայմանները: Ցույց է տրված, որ թույլ մագնիսականացնող դաշտերում ոչ գծային էֆեկտի մեծությունը համեմատական է գծային էֆեկտի մեծության հետ, ընդ որում հիմնական ռեզոնանսի հետ նկատվում է նաև լրացուցիչ ռեզոնանս: Այդ ռեզոնանսի ամպլիտուդի մեծությունը կախված չէ մագնիսականացնող դաշտից, իսկ գրգռումը տեղի է ունենում հիմնական ռեզոնանսի հաճախությունից երկու անգամ փոքր մագնիսական դաշտի հաճախության դեպքում:

Abstract: The theory of linear and nonlinear magnetoelectric effect in layered magnetostrictive-piezoelectric multiferroics is presented based on the joint solution of the equations of motion and constitutive relations for the magnetostrictive and piezoelectric subsystems, considering the boundary conditions on the interface. It is shown that, in weak bias magnetic fields, the value of nonlinear effect is comparable with linear, and along with the main resonance, there is an additional resonance. Value of the resonance amplitude is not dependent on bias magnetic field and is excited at the frequency of magnetic field twice less the main resonance frequency. Trilayer nickel–

polymer–PZT–polymer-nickel disc-shaped structure is designed for the experiment. Frequency and field dependence of magnetoelectric effect is presented for this structure.

Introduction

Magnetoelectric (ME) effect, theoretically predicted in [1,2] and experimentally observed in works [3,4] over half a century ago, attracts an increasing number of researchers in recent years, evidenced by the growing number of publications on this subject [5].

In the past decade, the technology of producing composite ME multiferroics was improved. This allowed manufacturing structures with sufficient ME parameters to create a variety of electronic devices [6].

Magnetoelectric effect in layered magnetostrictive-piezoelectric multiferroics occurs through mechanical interaction between the subsystems. Mechanical oscillations, resulting in a magnetic material in an alternating magnetic field are transmitted to the piezoelectric material, which leads to appearance of an electric field. There are peaks at the frequency dependence of the effect due to electromechanical resonance, because the mechanism of the ME effect is associated with the propagation of mechanical waves [7].

There are certain problems and inaccuracies in the theories of ME effect [8-18] currently available. The method of effective parameters proposed in [8] and developed further in [9-12] is applicable to structures where the characteristic sizes are much smaller than the length of the waves propagating in the composite. The disadvantage of the method of effective parameters is also the difficulty of determining the values of effective parameters themselves. A more accurate method is based on the solution of the equations of motion and the material equations separately for the magnetic and piezoelectric phases, then connecting these solutions using boundary conditions. Earlier, the theory of ME effect in magnetostrictive-piezoelectric structures was proposed using this approach in works [13-16]. However, there are some inaccuracies in the proposed theory. The interface between the phases was considered by introducing a coupling coefficient or by the shear-lag model in [13-15], which were determined empirically. A perfect bonding between the layers was discussed in [16], and it was assumed that the displacement of the magnet and the piezoelectric media was the same. As will be shown below, this assumption takes place in case of thin layers, when the displacements change over the sample thickness can be neglected.

Theory of the ME effect was presented in [17,18] apparently considering the interface in bilayer magnetostrictive-piezoelectric structure with perfect bonded layers and glued magnetostrictive and piezoelectric layers in [19,20]. Magnetoelectric structures of Nickel and Metglas magnetostrictive layers attached to one free end of piezoelectric $Pb(Zr,Ti)O_3$ (PZT) cantilever was studied in [21]. In these papers, structures in the form of a thin plate were considered. On the other hand, disc-shaped structures are used in practice more often. The geometry of disc-shaped structures has a number of different characteristics compared to the plate, so the equations obtained in [17-21] for the frequency dependence of the ME effect are not directly applicable for such structures. Enhanced converse ME effect has been experimentally observed in cylindrical PZT-Terfenol-D piezoelectric-magnetostrictive bilayered composites [22]. The theory of linear ME effect is described sufficiently detailed, but only two papers [23-27] are devoted to the theory of nonlinear ME effect, where the nonlinear effect was studied in plate samples. In this paper, we present the theory of linear and nonlinear ME effect for disk-shaped structures considering the explicit account of the interface between the phase boundaries.

1. Model and basic equations

As a model, we consider a structure of disc-shaped layers of radius R, consisting of mechanically interacting magnet and piezoelectric layers of thickness t_m and t_p. Thin metal contacts are applied on the top and the bottom of the plate (Fig.1).

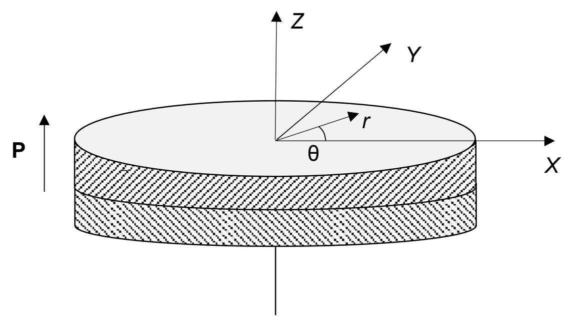


Fig. 1. Schematic view of disc-shaped layered sample

Longitudinal orientation of the electric and magnetic fields is investigated for this structure. In case of longitudinal fields the magnetic fields (constant $\boldsymbol{H_{bias}}$ and alternating $\boldsymbol{H}$ with the frequency ω) coincide in direction with the polarization vector $\boldsymbol{P}$. Due to the symmetry of the problem, we choose a cylindrical coordinate system. The origin of the coordinates coincides with the boundary between the layers and the direction Z is perpendicular to that boundary. Preliminarily, the piezoelectric layer is polarized perpendicularly to the contact (Z axis). The interaction between the magnet and the piezoelectric is carried out via the interface by shear stresses. Due to the axial symmetry of the problem, the nonzero components of the stress tensor T_{ij} in cylindrical coordinates are only T_{rr}, $T_{\theta\theta}$, T_{rz} and $T_{\theta z}$. Consequently, the equations for the stress tensor and the electric induction are of the form

$$T_{rr}^{p} = \frac{Y_p}{\left(1-\nu^2\right)}\left(S_{rr}^{p} + \nu S_{\theta\theta}^{p} - \left(1+\nu\right)d_{31}E_3\right), \tag{1}$$

$$T_{\theta\theta}^{p} = \frac{Y_p}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\nu S_{rr}^{p} + S_{\theta\theta}^{p} - \left(1+\nu\right)d_{31}E_3\right), \tag{2}$$

$$D_3 = \varepsilon_{33}E_3 + d_{31}(T_{rr}^{p} + T_{\theta\theta}^{p}), \tag{3}$$

$$T_{rr}^{m} = \frac{Y_m}{(1-\nu^2)}(S_{rr}^{m} + \nu S_{\theta\theta}^{m} - (1+\nu)\lambda(H)), \tag{4}$$

$$T_{\theta\theta}^{m} = \frac{Y_m}{(1-\nu^2)}(\nu S_{rr}^{m} + S_{\theta\theta}^{m} - (1+\nu)\lambda(H)), \tag{5}$$

where $Y_\alpha\left(\alpha = p, m\right)$ are the first order Young's moduli for the magnet and piezoelectric, respectively, ν is the Poisson's ratio, expected the same for both media. $S_{rr}^{\alpha} = \frac{\partial u_r^{\alpha}}{\partial r}$ and $S_{\theta\theta}^{\alpha} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta^{\alpha}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{\alpha}}{r}$ are the components of deformation tensor, u_r^{α} and u_θ^{α} are the components of medium displacement vector, d_{31} is the piezo-electric tensor, $\lambda\left(H\right)$ is the magnetostriction of the magnet, $\boldsymbol{H}$ and $\boldsymbol{E}$ are the external magnetic and induced electric field.

Since the magnetostriction is a nonlinear function of the magnetic field, in general, the magnetic stress tensor will also be a nonlinear way dependent on the strength of the magnetic field. The dependence of magnetostriction for nickel and permendur materials will have the form shown in Fig.2, according to [28].

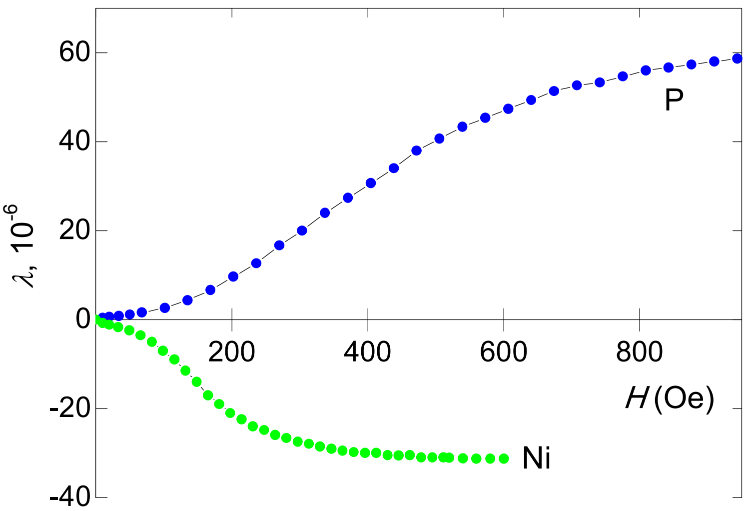


Fig. 2. Field dependence of magnetostriction $\lambda\left(H\right)$ for permendur (P) and nickel (Ni) [28]

In weak fields, magnetostriction can be presented in the form of an expansion in degrees of magnetic field, and, as can be seen from Fig.2, it is sufficient to consider the first terms of that expansion, i.e.,

$$\lambda(H)=\left(\left.\frac{\partial\lambda}{\partial H}\right|_{H=H_{bias}}\right)\times H+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2\lambda}{\partial H^2}\right|_{H=H_{bias}}\right)\times H^2 \tag{6}$$

Equation (6) for the magnetostriction can be written in the following form:

$$\lambda(H)=qH+gH^2\ , \tag{7}$$

where $q=\left.\frac{\partial\lambda}{\partial H}\right|_{H=H_{bias}}$ is the piezomagnetic coefficient and $g=\left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial H^2}\right|_{H=H_{bias}}$ is the magnetostriction coefficient.

It is clear that in the absence of the bias field, point $\boldsymbol{H_{bias}}=0$, the piezomagnetic coefficient is $q=0$, whereas the magnetostriction coefficient is $g\neq 0$. Consequently, the linear ME effect is observed only at a bias magnetic field, while a nonlinear ME effect exists at $\boldsymbol{H_{bias}}=0$. As can be seen from Figure 2, piezomagnetic coefficient initially increases with the increasing bias field, and then decreases. This leads to an increase of the effect value with increasing bias field reaching its maximum and then to a decrease. The value of magnetostrictive coefficient *g* is not dependent on the bias magnetic field, unlike the piezomagnetic coefficient *q*, which follows from Eq. (6) in weak fields. This leads to a value of nonlinear ME effect not dependent on $\boldsymbol{H_{bias}}$ in weak fields, which is validated experimentally in works [16-19].

The equation of motion for the radial component of the displacement vector can be written in the following form:

$$\rho_\alpha\frac{\partial^2 u_r^\alpha}{\partial t^2}=\frac{\partial T_{rr}^\alpha}{\partial r}+\frac{T_{rr}^\alpha-T_{\theta\theta}^\alpha}{r}+\frac{\partial T_{rz}^\alpha}{\partial z}\ , \tag{8}$$

where T_{rz}^α is the tangential component of the stress tensor, arising from the interface between the phases The relation between the stress and its appropriate component of the strain tensor is described by the Hooke's law

$$T_{rz}^\alpha=G_\alpha S_{rz}^\alpha\ , \tag{9}$$

where $G_\alpha=\frac{Y_\alpha}{2(1+\nu)}$ are the shear moduli and $S_{rz}^\alpha=\frac{\partial u_r^\alpha}{\partial z}$ are the shear strains.

The solution of Eq. (8) can be written as follows:

$$u_r^\alpha(t,r,z)=u_r^\alpha(r,z)\exp(i\omega t)\ , \tag{10}$$

where $u_r^\alpha(r,z)$ are the coordinates part of the function, ω is the frequency of the medium oscillation. Medium oscillations with ω' frequency are caused after the sample is placed in an alternating magnetic field, whose frequency is $\omega_L=\omega'$ in case of linear ME effect and $\omega_{nl}=2\omega'$ in case of nonlinear ME effect, due to the quadratic dependence.

It should be noticed, that here only the radial oscillations and ME effect caused by displacement of radial waves in structure (basic contribution of ME effect) is considered.

That is why the component $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ is not taken into account in the Hooke's law in Eq. (9).

Coordinate part of the wave function can be written in the following form:

$$u_r^\alpha(r,z) = g_\alpha(z)\left(AJ_1(kr) + BY_1(kr)\right), \tag{11}$$

where $g_\alpha(z)$ is a function which describes the change of the amplitude of medium displacement along the axis of the disk, $J_1(kr)$, $Y_1(kr)$ are the Bessel functions of first order and second order, respectively, k is the wave number, A and B are the constants of integration.

This solution $g_\alpha(z)$ fully characterizes inhomogeneous displacement of the waves along the thickness of the sample, namely along Z axis.

We obtain the value for the constant integration $B = 0$, since the center of the disc is $u_r^\alpha(r,z) = 0$.

Substituting expression (11) into Eq. (8) we obtain the following expression for the function $g_\alpha(z)$:

$$g_\alpha(z)'' + \left(\frac{2}{1-\nu}\right)\left[\frac{\omega^2}{V_\alpha^2} - k^2\right] g_\alpha(z) = 0, \tag{12}$$

where the prime of the $g_\alpha(z)$ function indicates differentiation with respect to the variable z. $V_\alpha^2 = \frac{Y_\alpha}{\rho_\alpha(1-\nu^2)}$ in Eq. (12) are the square of the velocities of propagation of elastic waves in the magnet and piezoelectric phases. As can be seen in Eq. (12), the components of $\boldsymbol{H}$ external magnetic and $\boldsymbol{E}$ induced electric fields are not included after substituting $u_r^\alpha(r,z)$ into (8), by means of the second-order differential equation for the $g_\alpha(z)$ function. Value of the second bracket in Eq. (12) equal to zero gives the dispersion relation for the propagation of elastic waves in pure magnet $(\alpha = m)$ or piezoelectric $(\alpha = p)$. The wave velocities propagating in bilayer structure will be in the interval between the wave velocities in magnet and piezoelectric phases. Consequently, the value of the expression in square brackets in Eq. (12) for the first phase will be positive, while negative for the second one. Let us consider the most typical case, when the velocity of the waves in the piezoelectric is less than in the magnet. In this case, the solution of equation (12) has the form:

$$g_m(z) = C_1 \exp(\chi_m z) + C_2 \exp(-\chi_m z), \tag{13}$$

$$g_p(z) = C_3 \cos(\chi_p z) + C_4 \sin(\chi_p z), \tag{14}$$

where C_1 ... C_4 are the constants of integration, $\chi_m^2 = -\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\omega^2}{V_m^2} - k^2\right)$, $\chi_p^2 = \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\omega^2}{V_p^2} - k^2\right)$.

We use the boundary conditions to determine the constants of integration C_1... C_4. In the point $z = 0$ the components of the displacement vector $u_r^m(r,0) = u_r^p(r,0)$ and the tangential components of the stress tensor $T_{rz}^m(r,0) = T_{rz}^p(r,0)$. In points $z = -t_p$ and $z = t_m$ the tangential components of the stress tensor $T_{rz}^p(r,-t_p) = 0$ and $T_{rz}^m(r,t_m) = 0$. These conditions provide a system of four equations which solution gives an expression that defines the relationship between the frequency and the wave vector in the following form:

$$Y_m \chi_m \mathrm{th}(\kappa_m) = Y_p \chi_p \mathrm{tg}(\kappa_p), \tag{15}$$

where $\kappa_m = \chi_m t_m$ and $\kappa_p = \chi_p t_p$ are non-dimensional parameters. It should be noted that a similar relation is derived for the plate in [16,17]. Dependence of the angular frequency ω on the wave vector k, as it follows from Eq. (15), is of a nonlinear character. For thin layers this relationship can be represented in an approximate expression by expanding functions in a series of small parameters in next form:

$$\omega = \overline{V}(1+\delta)k\,. \tag{16}$$

where $\overline{V} = \sqrt{\dfrac{\overline{Y}}{\overline{\rho}(1-\nu^2)}}$ is the velocity of propagating elastic waves in a medium with averaged parameters, δ is a corrective which describes the deviation from the linear relationship between ω and k. Here $\overline{Y} = (Y_m t_m + Y_p t_p)/(t_m + t_p)$ is the average value the elasticity modulus, $\overline{\rho} = (\rho_m t_m + \rho_p t_p)/(t_m + t_p)$ is the average value of the medium density. In the first approximation, the δ corrective is given by the following form:

$$\delta = -\frac{(1+\nu)}{3}\frac{Y_m t_m\left[(\overline{V}/V_m)^2 - 1\right]^2 (kt_m)^2 + Y_p t_p\left[(\overline{V}/V_p)^2 - 1\right]^2 (kt_p)^2}{Y_m t_m + Y_p t_p}. \tag{17}$$

Finally, for the constants of integration C_1... C_4 we obtain the following expressions:

$$C_1 = 1,\ C_2 = \exp(2\kappa_m),\ C_3 = 1 + \exp(2\kappa_m),\ C_4 = -(1+\exp(2\kappa_m))\mathrm{tg}(\kappa_p). \tag{18}$$

Boundary conditions on the side surface of the disk are written in Eq. (19) using the condition of mechanical equilibrium in the following form:

$$\int_{-t_p}^{0} T_{rr}^p(R,z)\,dz + \int_0^{t_m} T_{rr}^m(R,z)\,dz = 0. \tag{19}$$

The constant of integration A_L can be obtained using (19) by carrying out integration for linear effect in next form:

$$A_L = \frac{1+\nu}{\Delta_L}\frac{R}{1+\exp(2\kappa_m^L)}\frac{d_{31}Y_p t_p E_3 + Y_m t_m q_{31} H_3}{Y_p t_p \dfrac{\mathrm{tg}\kappa_p^L}{\kappa_p^L} + Y_m t_m \dfrac{\mathrm{tg}\kappa_m^L}{\kappa_m^L}}, \tag{20}$$

where $\kappa_L = k_L R$ and $\Delta_L = \kappa_L J_0(\kappa_L) - (1-\nu)J_1(\kappa_L)$.

The constant of the integration A_{NL} for the nonlinear effect have the next form:

$$A_{NL} = \frac{1+\nu}{\Delta_{NL}} \frac{R}{1+\exp(2\kappa_m^{NL})} \frac{d_{31} Y_p t_p E_3 + Y_m t_m g_{31} H_3^2}{Y_p t_p \frac{\mathrm{tg}\kappa_p^{NL}}{\kappa_p^{NL}} + Y_m t_m \frac{\mathrm{tg}\kappa_m^{NL}}{\kappa_m^{NL}}}, \tag{21}$$

where $\kappa_{NL} = k_{NL} R$ and $\Delta_{NL} = \kappa_{NL} J_0(\kappa_{NL}) - (1-\nu) J_1(\kappa_{NL})$.

The principal difference between the variables with indexes *L* and *NL*, such as κ_m^L, κ_m^{NL} and κ_p^L, κ_p^{NL} is that parameter k_L is included in the variables with the index *L* in the expression for linear effect. Parameter k_L is determined from the relation (16), in which the frequency of the oscillations of the medium is $\omega_L = \omega'$, where ω' is the frequency of the external magnetic field. Variables with index, on the other hand, include parameter k_{NL}, which is determined from the relation (16), where the frequency of the oscillations of the medium is $\omega_{NL} = 2\omega'$.

2. Magnetoelectric effect

Potential difference between electrodes of the sample can be obtained from the expression

$$U = \int_{-t_p}^{0} E_3 dz. \tag{22}$$

The potential difference generated between electrodes in case of the linear effect can be obtained expressing the electric field through the stress tensor in Eq. (3) and using Eqs. (1) and (2) taking into account expression (11). The final expression can be derived for the potential difference using the open circuit condition $\int_0^r r dr \int_0^{2\pi} D_3 d\theta = 0$ which can be given by the following form:

$$U_L = \frac{2 d_{31} q_{31} (1+\nu) Y_p t_p}{\varepsilon_{33}(1-\nu)} \left[\frac{Y_m t_m}{Y_p t_p \frac{\mathrm{tg}\kappa_p^L}{\kappa_p^L} + Y_m t_m \frac{\mathrm{th}\kappa_m^L}{\kappa_m^L}} \frac{\mathrm{tg}\kappa_p^L}{\kappa_p^L} \right] \frac{J_1(\kappa_L)}{\Delta_a^L} H_3, \tag{23}$$

with $K_p^2 = \frac{d_{31}^2 Y_p}{\varepsilon_{33}(1-\nu)}$ the squared coefficient of electromechanical coupling for radial oscillations. Designation given in the equation (23) has the next form:

$$\Delta_a^L = \Delta_L (1-K_p^2) + 2(1+\nu) K_p^2 \frac{Y_p t_p}{Y_p t_p \frac{\mathrm{tg}\kappa_p^L}{\kappa_p^L} + Y_m t_m \frac{\mathrm{th}\kappa_m^L}{\kappa_m^L}} \frac{\mathrm{tg}\kappa_p^L}{\kappa_p^L} J_1(\kappa_L). \tag{24}$$

The condition $\Delta_a^L = 0$ determines the value of the wave vector, and, consequently, the values of the frequencies at which the resonant increase of the linear ME effect takes place. The values of these frequencies in turn depend on the dispersion relation between ω_L and

k_L. From Eq. (24) it follows that in the low-frequency region the value of induced voltage does not depend on the frequency and is given by the form:

$$U_L^{Low} = \frac{2d_{31}q_{31}Y_p t_p}{\varepsilon_{33}\left(1-\nu\right)} \frac{Y_m t_m}{Y_p t_p + Y_m t_m} \frac{1}{1-K_p^2(1-\frac{2Y_m t_m}{Y_p t_p + Y_m t_m})} H_3. \quad (25)$$

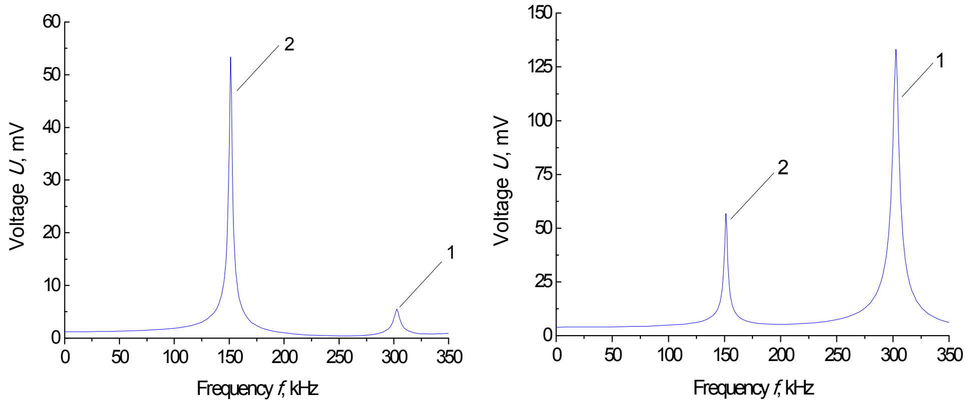
For the voltage which is induced on the plates of the sample due to the nonlinear effect, we have the following expression:

$$U_{NL} = \frac{2d_{31}g_{31}\left(1+\nu\right)Y_p t_p}{\varepsilon_{33}\left(1-\nu\right)} \left[\frac{Y_m t_m}{Y_p t_p \frac{tg\kappa_p^{NL}}{\kappa_p^{NL}} + Y_m t_m \frac{\text{th}\kappa_m^{NL}}{\kappa_m^{NL}}} \frac{\text{tg}\kappa_\text{p}^{NL}}{\kappa_p^{NL}} \right] \frac{J_1\left(\kappa_{NL}\right)}{\Delta_a^{NL}} H_3^2, \quad (26)$$

where Δ_a^{NL} is defined by the expression analogous to expression (24), wherein index *L* is replaced by the index *NL*. Total voltage induced in the sample is $U = U_L + U_{NL}$. Fig.3 shows the frequency dependence of the effect for nickel-lead zirconate titanate structure in an alternating magnetic field H = 2 Oe at a value of magnetizing field equal to the field of the Earth $\left(H_{bias} = 0.2 \text{ Oe}\right)$, and in the bias value $H_{bias} = 10 \text{ Oe}$.

The following parameters of the structure were used during the calculations: disk radius is $R = 4.5$ mm, thickness of the piezoelectric $t_p = 0.4\text{mm}$, thickness of the magnet $t_m = 0.32\text{mm}$.

Parameters of the material: for piezoelectric (PZT) – $\rho_p = 7800 \text{ kg/m}^3$, $Y_p = 62 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\varepsilon_{33} = 1750$, $d_{31} = 175 \text{ pC/N}$; the magnet nickel (Ni): $\rho_m = 8900 \text{ kg/m}^3$, $Y_m = 205 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$.



a) b)

Fig. 3. The frequency dependence of the voltage induced on the plates by the linear ME effect – 1 and nonlinear ME effect – 2 in bias field: a) H_{bias} = 0.2 Oe (Earth field), b) H_{bias} = 10 Oe

The magnetostrictive curve shown in Figure 3, in the initial part was approximated by the expression $\lambda(H) = gH^2$, where the magnetostrictive coefficient had the value of $g = 1.2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Oe}^{-2}$.

3. Experimental results

Disc-shaped nickel–polymer–PZT–polymer–nickel structures were manufactured for the experiment by the bonding method. Samples had the following parameters: diameter $D = 8.7\,\mathrm{mm}$, thickness of the piezoelectric PZT layer $t_p = 0.32$ mm, thickness of the nickel layer $t_m = 0.25$ mm, thickness of the bonding polymer layer was of some micrometers.

The frequency dependence of the ME effect in low-frequency region and in the electromechanical resonance region is shown in Fig.4.

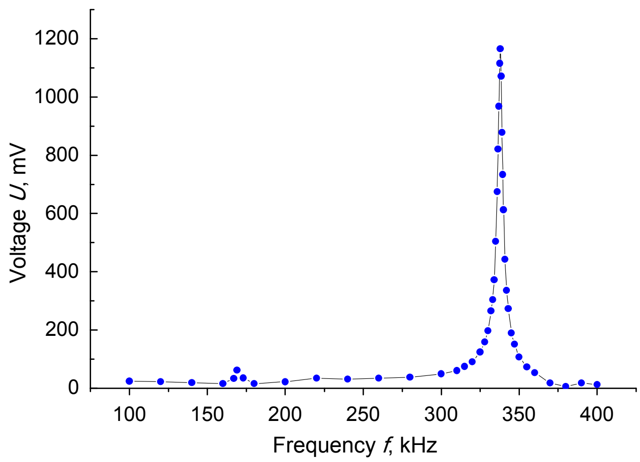


Fig. 4. Frequency dependence of the ME effect in disc-shaped trilayer structure of nickel-polymer-PZT-polymer-nickel. Bias magnetic field H_{bias} = 50 Oe

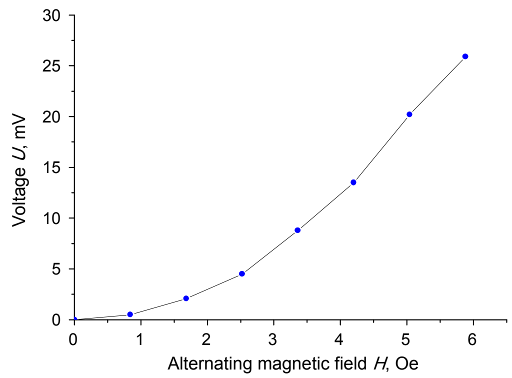


Fig. 5. Field dependence of the ME effect in disc-shaped trilayer structure of nickel-polymer-PZT-polymer-nickel

As can be seen from Fig.4, the main resonance is observed at frequency $f = 338\text{kHz}$. There is an additional resonance at frequency $f = 169\text{kHz}$, due to the nonlinear ME effect, which is in full accordance with the theory.

Field dependence of the ME effect is shown in Fig.5.

4. Conclusions

Magnetoelectric effect in composite multiferroics is a result of the mechanical interaction of the structure layers, which is carried out by tangential stresses, accompanied by shear strain. This leads to inhomogeneous change of the oscillation amplitude in the direction perpendicular to the interface. The compatibility condition for solving the equations of motion for magnetostrictive and piezoelectric phases resulting from the boundary conditions, leads to a nonlinear relationship between the frequency and the wave number. Linear ME effect and nonlinear ME effect of external magnetic field occurs due to the nonlinear dependence of the magnetostriction on the magnetic field. In contrast to the linear ME effect, it is nonzero in absence of the magnetizing field and its value is comparable with the linear ME effect in weak magnetization fields.

References

[1] Landau L.D., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.: Electrodynamics of Continuous Media, 2nd edn. **8** (Elsevier, Butterworth-Heinemann), p. 460, 1984

[2] Dzyaloshinskii I.E.: On the magneto-electrical effect in antiferromagnets. J. Exp. Theor. Phys. **10**, 628-629 (1960)

[3] Astrov D.N.: Magnetoelectric effect in chromium oxide. J. Exp. Theor. Phys. **13**, 729-733 (1961)

[4] Folen V.J., Rado G.T., Stalder E.W.: Anisotropy of the magnetoelectric effect in Cr_2O_3. Phys. Rev. Lett. **6**, 607-608 (1961)

[5] Pyatakov A.P., Zvezdin A.K.: Magnetoelectric and multiferroic media. Phys. Usp. **55**, 557 (2012)

[6] Nan C.W., Bichurin M.I., Dong S., Viehland D., Srinivasan G.: Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions. J. Appl. Phys. **103,** 031101 (2008)

[7] Filippov D.A., Bichurin M.I., Petrov V.M., Laletin V.M., Poddubnaya N.N., Srinivasan G.: Giant magnetoelectric effect in composite materials in the region of electromechanical resonance. Tech. Phys. Lett. **30**, 6-8 (2004)

[8] Harshe G., Dougherty J.O., Newnham R.E.: Theoretical modelling of multilayer magnetoelectric composites. Int. J. Appl. Electromagn. Mater. **4**, 145-159 (1993)

[9] Bichurin M.I., Petrov V.M., Srinivasan G.: Theory of low-frequency magnetoelectric effects in ferromagnetic-ferroelectric layered composites. J. Appl. Phys. **92**, 7681 (2002)

[10] Wang Y., Hasanyan D., Li M., Gao J., Li J., Viehland D., Luo H.: Theoretical model for geometry-dependent magnetoelectric effect in magnetostrictive/piezoelectric composites. J. Appl. Phys. **111**, 124513 (2012)

[11] Bichurin M.I., Petrov V.M., Srinivasan G.: Theory of low-frequency magnetoelectric coupling in magnetostrictive-piezoelectric bilayers. Phys. Rev. B **68**, 054402 (2003)

[12] Osaretin I.A., Rojas R.G.: Theoretical model for the magnetoelectric effect in magnetostrictive/piezoelectric composites. Phys. Rev. B **82**, 174415 (2010)
[13] Filippov D.A., Srinivasan G., Gupta A.: Magnetoelectric effects in ferromagnetic films on ferroelectric substrates. J. Phys.: Condens. Matter **20**, 425206 (2008)
[14] Filippov D.A., Laletsin U., Srinivasan G.: Resonance magnetoelectric effects in magnetostrictive-piezoelectric three-layer structures. J. Appl. Phys. **102**, 093901 (2007)
[15] Guo L., Zhang H., Lu R., Yu G.: Magnetoelectric analysis of a bilayer piezoelectric/magnetostrictive composite system with interfacial effect. Compos. Struct. **134**, 285-293 (2015)
[16] Bichurin M.I., Petrov V.M., Averkin S.V., Filippov A.V.: Electromechanical resonance in magnetoelectric layered structures. Phys. Solid State **52**, 2116-2122 (2010)
[17] Filippov D.A., Galichyan T.A., Laletin V.M.: Magnetoelectric effect in bilayer magnetostrictive-piezoelectric structure. Theory and experiment. Appl. Phys. A **115**, 1087-1091 (2014)
[18] Wang Y., Hasanyan D., Li M., Gao J., Li J., Viehland D., Luo H.: Theoretical model for geometry-dependent magnetoelectric effect in magnetostrictive/piezoelectric composites. J. Appl. Phys. **111**, 124513 (2012)
[19] Filippov D.A., Galichyan T.A., Laletin V.M.: Influence of an interlayer bonding on the magnetoelectric effect in the layered magnetostrictive-piezoelectric structure. Appl. Phys. A **116**, 2167-2171 (2014)
[20] Hasanyan D., Wang Y., Gao J., Li M., Shen Y., Li J., Viehland D.: Modeling of resonant magneto-electric effect in a magnetostrictive and piezoelectric laminate composite structure coupled by a bonding material. J. Appl. Phys. **112**, 064109 (2012)
[21] Zhang T., Yang X., Ouyang J., Chen Sh., Tong B., Zhu Y., Zhang Y.: A new magnetoelectric composite with enhanced magnetoelectric coefficient and lower resonance frequency. Appl. Compos. Mater. **21**, 579–590 (2014)
[22] Wu G., Zhang R., Zhang N.: Enhanced converse magnetoelectric effect in cylindrical piezoelectric-magnetostrictive composites. Eur. Phys. J. Appl. Phys. (2016) doi:10.1051/epjap/2016150607
[23] Laletin V.M., Filippov D.A., Firsova T.O.: The nonlinear resonance magnetoelectric effect in magnetostrictive-piezoelectric structures. Tech. Phys. Lett. **40**, 237-240 (2014)
[24] Filippov D.A., Laletin V.M., Firsova T.O.: Nonlinear magnetoelectric effect in composite multiferroics. Phys. Solid State **56**, 980-984 (2014)
[25] Xu H., Pei Y., Fang D.: The frequency dependence of harmonic hysteresis effect in magnetoelectric laminated composites. Compos. Struct. **147**, 33-41 (2016)
[26] Xiao Y., Zhou H.-M., Cui X.-L., Nonlinear resonant magnetoelectric coupling effect with thermal, stress and magnetic loadings in laminated composites. Compos. Struct. **128**, 35-41 (2015)
[27] Chen L., Li P., Wen Y., Zhu Y., Theoretical analyses of nonlinear magnetoelectric response in self-biased magnetostrictive/piezoelectric laminated composites. Compos. Struct. **119**, 685-692 (2015)
[28] Burdin D.A., Chashin D.V., Ekonomov N.A., Fetisov L.Y., Fetisov Y.K., Sreenivasulu G., Srinivasan G.: Nonlinear magneto-electric effects in ferromagnetic-piezoelectric composites. J. Magn. Magn. Mater. **358-359**, 98-104 (2014)

<u>Information about the authors</u>

Galichyan T.A., PhD, Researcher in Institute of Mechanics NAS of Armenia,
Affiliation: Institute of Mechanics, Armenian NAS
Address: 24B Baghramyan Avenue, 0019 Yerevan, Armenia
Tell: +374 77 77 62 91
E-mail: TigranGalichyan@yahoo.com

Filippov D.A., Dr. of Sciences, Professor, Head of Department of Mechanical Engineering (Novgorod State University),
Affiliation: Novgorod State University
Address: ul. B. St. Petersburgskaya, 41, Veliky Novgorod, Russia
Tell: +7(8162) 659901
E-mail: Dmitry.Filippov@novsu.ru

Firsova T.O., PhD, Researcher in Novgorod State University,
Affiliation: Novgorod State University
Address: ul. B. St. Petersburgskaya, 41, Veliky Novgorod, Russia
Tell: +7 951 724 82 59
E-mail: firsovatati@mail.ru

Radchenko G.S., PhD, Researcher in Southern Federal University
Affiliation: Southern Federal University
Address: 105/42 Bolshaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don, Russia
Tell: +7 905 432 55 96
E-mail: gsradchenko@sfedu.ru

Received 24.03.2017

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №3, 2017 Механика

УДК 539.3

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Алексанян Р.К.

Ключевые слова: круглый стержень, поперечное сечение, крутильный момент, круговое кольцо, функция напряжений, периодичность, частное решение, цилиндрическая поверхность.
Բանալի բառեր: ձող, ընդլայնական հատվածք, ոլորող մոմենտ, շրջանային օղակ, լարումների ֆունկցիա, պարբերականություն, մասնակի լուծում, գլանային մակերևույթ
Key words: round bar, cross section, torsional moment, circular ring, the stress function, cylindrical surface, particular solution.

Ալեքսանյան Ռ.Կ.
Շրջանային օղակի տեսքով ընդլայնական հատվածքի տեսք ունեցող պրիզմատիկ ձողի ոլորումը

Աշխատանքում դիտարկվում է համասեռ իզոտրոպ նյութից պատրաստված պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիր, ձողի ճակատային հատվածներում կիրարված մոմենտների ազդեցության դեպքում: Պրիզմատիկ ձողը սահմանափակված է R_1 ներքին և R_2 արտաքին շառավիղներով համառանցք գլանային մակերևույթներով: Կառուցված է ձողի ոլորման համապատասխան մաթեմատիկական եզրային խնդրի ընդհանուր լուծումը՝ Պուասոնի հավասարման մասնակի լուծման և համասեռ հավասարման ընդհանուր, պարբերական լուծումների գումարի տեսքով: Կառուցված լուծումներից սահմանային անցումով ստացվում է հոծ գլանային ձողի ոլորման խնդրի լուծումը:

Alexanyan R.K.
Torsion of prismatic bar with cross-section in a form of circular ring

In the paper the torsion problem is considered for homogeneous isotropic bar under action of a moment applied at the bar interfaces. The cross-section in the bar is a circular ring with internal and external radiuses R_1 and R_2. The general solution of the boundary problem under consideration is constructed as the sum of particular solution of Poisson's equation and periodic solutions of homogeneous equation. In partial case from the obtained solutions with a limiting transition, the solution of torsional problem of the solid cylinder is obtained.

Рассмотрена задача кручения однородного изотропного стержня под действием приложенного на торцах момента. Поперечное сечение стержня представляет собой круговое кольцо. Общее решение математической краевой задачи построено в виде суммы частного решения уравнения Пуассона и периодических решений однородного уравнения. Из полученных решений предельным переходом получается решение задачи кручения сплошного цилиндра.

Введение. В задачах о кручении стержней произвольного сечения получено много аналитических результатов, которые, безусловно, сыграли большую роль в современных численных расчётах сложных математических задач. Результаты исследований о кручении упругих стержней без доказательства приведены в нескольких фундаментальных книгах [7÷10], причём, к круговому сечению относится лишь монография [11]. Наверно, это потому, что в случае стержня с круговым сечением, сечения остаются плоскими.

В предлагаемой работе рассматривается задача о кручении призматического стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца моментами, приложенными на торцевых сечениях стержней.

1. Постановка задачи и построение общего решения.

Известно, что при определённых предположениях решение задачи кручения сводится к интегрированию уравнения Пуассона [1-5]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-2G\vartheta\,, \qquad (1.1)$$

где $F(x,y)$ – искомая функция напряжений при кручении, G – модуль сдвига материала стержня, ϑ – относительный угол закручивания.

Касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} при помощи функции напряжений $F(x,y)$ определяются формулами:

$$\tau_{xz}=\frac{\partial F}{\partial y},\qquad \tau_{yz}=-\frac{\partial F}{\partial x}. \qquad (1.2)$$

Решение однородного уравнения

$$\Delta\Phi=0, \qquad (1.3)$$

соответствующее уравнению (1.1), ищем в виде [6]

$$\Phi(x,y)=A(x+\delta y)^{\lambda}.$$

Подставляя (1.4) в (1.3), для δ получим уравнение

$$\delta^2+1=0\Rightarrow\delta=\pm i\,.$$

Решение (1.3) представляется в виде суммы независимых решений

$$\Phi(x,y)=A(x+iy)^{\lambda}+B(x-iy)^{\lambda} \qquad (1.4)$$

или для удобства дальнейших рассуждений представим в полярных координатах

$$\Phi(x,y)=r^{\lambda}\left[A(\cos\lambda\varphi+i\sin\lambda\varphi)+B(\cos\lambda\varphi-i\sin\lambda\varphi)\right]. \qquad (1.5)$$

Используя периодичность функции $\Phi(x,y)$, получим следующие условия для определения параметра λ:

$$\left[\begin{array}{l}\sin\lambda(\varphi+\pi)\sin\lambda\pi=0\\ \cos\lambda(\varphi+\pi)\sin\lambda\pi=0\end{array}\right.\quad\Rightarrow\sin\lambda\pi=0,\ \lambda_k\pi=k\pi,\ \lambda_k=k,\ k\in Z$$

На основании (1.5) будем иметь:

$$\Phi(x,y)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k r^k+a_{-k}r^{-k}\right)\cos k\varphi+\left(b_k r^k-b_{-k}r^{-k}\right)\sin k\varphi\right], \qquad (1.6)$$

где введены обозначения:

$$\begin{cases}A_k+B_k=a_k\\ A_k-B_k=-ib_k\end{cases}\qquad\begin{cases}A_{-k}+B_{-k}=a_{-k}\\ A_{-k}-B_{-k}=-ib_{-k}\end{cases}$$

Общее решение уравнения (1.1) имеет вид:

$$F(x,y)=F_0(x,y)+\Phi(x,y)\,. \qquad (1.7)$$

Частное решение $F_0(x,y)$ ищем в виде:

$$F_0(x,y)=A\left(x^2+y^2\right)+D\ln r\,. \qquad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.1), получим:

$$A=-\frac{G\vartheta}{2},\quad F_0(x,y)=-\frac{G\vartheta}{2}r^2+D\ln r\,.$$

Функция напряжений $F(x,y)$ представляется в виде:

$$F(x,y)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k r^k+a_{-k}r^{-k}\right)\cos k\varphi+\left(b_k r^k-b_{-k}r^{-k}\right)\sin k\varphi-\frac{G\vartheta}{2}r^2+D\ln r\right] \qquad (1.9)$$

2. Обсуждение граничных условий на цилиндрических поверхностях стержня.

Удовлетворим граничным условиям на контурах L_2 и L_1. Следуя работам [2-4], граничные условия берём в виде

а) $F(x,y)_{r=R_1}=K_1 \qquad F(x,y)_{r=R_2}=0$

и наряду – равносильные с этими, вторую возможную запись граничных условий:

б) $F(x,y)_{r=R_1}=0 \qquad F(x,y)_{r=R_2}=K_2$.

На основании (1.9) в случае а), удовлетворяя на контуре $r=R_2$ условию

$$F(x,y)_{r=R_2}=0, \qquad (2.1)$$

получим

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k R_2^k+a_{-k}R_2^{-k}\right)\cos k\varphi+\left(b_k R_2^k-b_{-k}R_2^{-k}\right)\sin k\varphi\right]=\frac{G\vartheta}{2}R_2^2-D_a\ln R_2, \qquad (2.2)$$

откуда

$$a_0=\frac{G\vartheta}{2}R_2^2-D_a\ln R_2, \qquad \begin{cases}a_k R_2^k+a_{-k}R_2^{-k}=0\\ b_k R_2^k-b_{-k}R_2^{-k}=0\end{cases} \qquad (2.3)$$

Удовлетворяя на контуре $L_1\left(r=R_1\right)$ условию а)

$$F(x,y)\Big|_{r=R_1}=K_1, \qquad (2.4)$$

получим

$$a_0=\frac{G\vartheta}{2}R_1^2-D_a\ln R_1+\mathrm{K}_1, \qquad \begin{cases}a_k R_1^k+a_{-k}R_1^{-k}=0\\ b_k R_1^k-b_{-k}R_1^{-k}=0\end{cases} \qquad (2.5)$$

На основании (2.3) и (2.5) будем иметь:

$$D_a=\frac{G\vartheta}{2}\cdot\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln R_2-\ln R_1}-\frac{K_1}{\ln R_2-\ln R_1}; \qquad \begin{cases}a_k R_2^k+a_{-k}R_2^{-k}=0\\ a_k R_1^k+a_{-k}R_1^{-k}=0\end{cases}; \qquad \begin{cases}b_k R_2^k-b_{-k}R_2^{-k}=0\\ b_k R_1^k-b_{-k}R_1^{-k}=0\end{cases} \qquad (2.6)$$

Определители этих однородных систем –

$$\Delta_2=-\Delta_1=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k\neq 0,$$

следовательно, $a_k=a_{-k}=b_k=b_{-k}=0$.

Функцию напряжений $F(x,y)$ получим в виде

$$F_a(x,y)=a_0-\frac{G\vartheta}{2}r^2+D\ln r=\frac{G\vartheta}{2}\left(R_2^2-r^2\right)-D_a\left(\ln R_2-\ln r\right) \qquad (2.7)$$

или

$$F_a(x,y)=\frac{G\vartheta}{2}\left[R_2^2-r^2-\frac{\ln R_2-\ln r}{\ln R_2-\ln \mathrm{R}_1}\left(R_2^2-R_1^2\right)\right]+K_1\frac{\ln R_2-\ln r}{\ln R_2-\ln \mathrm{R}_1}. \qquad (2.8)$$

В случае б) на основании (1.9), удовлетворяя на контуре $r = R_1$ условию

$$F(x,y)\big|_{r=R_1} = 0\,, \qquad (2.1)_б$$

получим

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k R_1^k - a_{-k} R_1^{-k}\right)\cos\varphi + \left(b_k R_1^k - b_{-k} R_1^{-k}\right)\sin\varphi\right] - \frac{G\vartheta}{2} R_1^2 + D_б \ln R_1 = 0 \qquad (2.2)_б$$

$$a_0 = \frac{G\vartheta}{2} R_1^2 - D_б \ln R_1 \qquad \begin{cases} a_k R_1^k + a_{-k} R_1^{-k} = 0 \\ b_k R_1^k - b_{-k} R_1^{-k} = 0 \end{cases} \qquad (2.3)_б$$

Удовлетворяя на L_2 условию

$$F(x,y)\big|_{r=R_2} = k_2\,, \qquad (2.4)_б$$

получим

$$a_0 = \frac{G\vartheta}{2} R_2^2 - D_б \ln R_2 + k_2\,, \qquad \begin{cases} a_k R_2^k + a_{-k} R_2^{-k} = 0 \\ b_k R_2^k - b_{-k} R_2^{-k} = 0 \end{cases} \qquad (2.5)_б$$

На основании $(2.3)_б$ и $(2.5)_б$ будем иметь: $a_k = a_{-k} = b_k = b_{-k}$ и

$$D_б = \frac{G\vartheta}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln R_2 - \ln R_1} + \frac{k^2}{\ln R_2 - \ln R_1}\,. \qquad (2.6)_б$$

Функцию напряжений $F(x,y)$ получим в виде

$$F_б(x,y) = a_0 - \frac{G\vartheta}{2} r^2 + D_б \ln r = \frac{G\vartheta}{2}\left(R_2^2 - r^2\right) - D_б\left(\ln R_2 - \ln r\right) + k_2 \qquad (2.7)_б$$

или

$$F_б(x,y) = \frac{G\vartheta}{2}\left[R_2^2 - r^2 - \frac{\ln R_2 - \ln r}{\ln R_2 - \ln R_1}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right] + k_2\,\frac{\ln r - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}\,. \qquad (2.8)_б$$

3. Синхронизация полученных напряжений. На основании (1.2), (2.7) и $(2.7)_б$ для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в случаях а) и б) получим следующие значения:

$$\tau_{xz}^{(a)} = \frac{\partial F_a}{\partial y} = y\left(-G\vartheta + \frac{D_a}{r^2}\right); \qquad \tau_{yz}^{(a)} = -\frac{\partial F_a}{\partial x} = x\left(-G\vartheta + \frac{D_a}{r^2}\right) \qquad (3.1)$$

$$\tau_{xz}^{(б)} = -\frac{\partial F_б}{\partial y} = y\left(-G\vartheta + \frac{D_a}{r^2}\right); \qquad \tau_{yz}^{(б)} = -\frac{\partial F_б}{\partial x} = -x\left(-G\vartheta + \frac{D_б}{r^2}\right) \qquad (3.2)$$

Напряжения, определяемые по формулам (3.1) или (3.2), определяют одно и то же напряжённое состояние скручиваемого стержня, следовательно, должны выполняться следующие равенства:

$$\tau_{xz}^{(a)} = \tau_{xz}^{(б)}, \qquad \tau_{yz}^{(a)} = \tau_{yz}^{(б)} \qquad (3.3)$$

или

$$y\left(-\vartheta G + \frac{D_a}{r^2}\right) = y\left(-\vartheta G + \frac{D_б}{r^2}\right); \qquad -x\left(-\vartheta G + \frac{D_a}{r^2}\right) = -x\left(-\vartheta G + \frac{D_б}{r^2}\right), \qquad (3.4)$$

из (3.3) следует:

$$D_a = D_б \;\Rightarrow\; k_2 = -k_1 \qquad (3.5)$$

Граничные условия на свободных от внешних нагрузок внутренней и внешней цилиндрических поверхностях имеют вид:

$$\left(\tau_{xz}\cos\left(nx\right)+\tau_{yz}\cos\left(ny\right)\right)\Big|_{L_1}=0\,;\qquad \left(\tau_{xz}\cos\left(nx\right)+\tau_{yz}\cos\left(ny\right)\right)\Big|_{L_2}=0\,. \tag{3.6}$$

Удовлетворяя этим двум условиям в рассмотренных двух случаях а) и б), получим:
в случае а)

$$\left(\tau_{xy}^{(a)}\cos\left(nx\right)+\tau_{yz}^{(a)}\cos\left(ny\right)\right)\Big|_{r=R_1}=\left[y\cos\left(nx\right)-x\cos\left(ny\right)\right]\Big|_{r=R_1}\left(-\vartheta G+\frac{D_a}{R_1^2}\right)=0\,,$$

откуда $D_a=\vartheta G R_1^2$.

$$\left(\tau_{xz}^{(a)}\cos\left(nx\right)+\tau_{yz}^{(a)}\cos\left(ny\right)\right)\Big|_{r=R_2}=\left[y\cos\left(nx\right)-x\cos\left(ny\right)\right]\Big|_{r=R_2}\left(-\vartheta G+\frac{D_a}{R_2^2}\right)=0,$$

откуда $D_a=\vartheta G R_2^2$.

В случае б) имеем:

$$\left[y\cos\left(nx\right)-x\cos\left(ny\right)\right]\Big|_{R=R_1}\left(-\vartheta G+\frac{D_б}{R_1^2}\right)=0\Rightarrow D_б=\vartheta G R_1^2\,,$$

$$\left[y\cos\left(nx\right)-x\cos\left(ny\right)\right]\Big|_{R=R_2}\left(-\vartheta G+\frac{D_б}{R_2^2}\right)=0\Rightarrow D_б=\vartheta G R_2^2\,.$$

Из полученных соотношений следуют два возможных случая, равных между собой, значений D_a и $D_б$:

1. $D_a=D_б=\vartheta G R_1^2$, 2. $D_a=D_б=\vartheta G R_2^2$. (3.7)

Выбор одного из этих случаев связан с возможностью получить от общего решения задачи кручения призматического стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца решение задачи кручения стержня с круговым поперечным сечением. На основании этого предположения

$$D_a=D_б=\vartheta G R_1^2 \tag{3.8}$$

или

$$\frac{G\vartheta}{2}\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln R_2-\ln R_1}-\frac{k_1}{\ln R_2-\ln R_1}=\vartheta G R_1^2\,,$$

откуда имеем:

$$K_1=\frac{G\vartheta}{2\pi}S_2\left(1-S+S\ln S\right),\quad S_1=\pi R_1^2\quad S_2=\pi R_2^2,\ S=\frac{S_1}{S_2} \tag{3.9}$$

В частном случае, когда $R_1\to 0$, на основании (3.8), (2.7) или (2.7)б получим функцию напряжений при кручении призматического стержня с круговым поперечным сечением

$$F\left(x,y\right)=\frac{G\vartheta}{2}\left(R_2^2-r^2\right). \tag{3.10}$$

Заключение. Исследована задача кручения полого призматического стержня кольцевого сечения под действием моментов, приложенных на торцах стержня. Решение задачи относительно функции напряжения представлено в виде суммы частного решения уравнения Пуассона и периодических решений однородного уравнения. Частное решение уравнения Пуассона строится с учётом синхронизации напряжений, полученных в двух эквивалентных вариантах математической граничной задачи.

Этот подход позволяет получить функцию напряжений в случае сплошного кругового стержня, как частный предельный случай, когда радиус внутренней цилиндрической поверхности стремится к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1.Б.Сен-Венан. Мемуары о кручении призм. Мемуары об изгибе призм. М.: Физматлит., 1961. 518с. B.Saint Venant. Memour of Torsion of prisms, Memour of Flexure of prisms. M.: 1961, p.518 (in Russian)

2.Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматлит., 1963. 686с. Arutiunian N.Kh., Abramian B.L. Torsion of elastic bodies. M.: Physmatlit. 1963, p.686. (in Russian)

3.Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Госсоюзиздат Судостр. промышленности, 1958. 369с. Novozhilov V.V. Theory of Elasticity. L.: Izd.Sud.prom. 1958, p.369. (in Russian).

4.Тимошенко С.П., Дж. Гудьер. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576с. Timoshenko S.P., Goodier J. Theory of Elasticity. M.: Graw-Hill Book, 1951, 576p. (in Russian).

5.Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707с. N. Musrhelishvili Some basic problem of Mathematical Theory of Elasticity. Springer, 1977, 732p.

6.Алексанян Р.К., Чобанян К.С. Характер напряжений вблизи края поверхности контакта скручиваемого анизотропного сектора. //Прикладная математика. 1977. Т.13. №6. С.90-96. Aleksanyan R.K. Chobanian K.S. Stress character near contact surfase of forsioned anisotropic sector, //Prik,mech., Vol.13, №6, 1977, p.90-96. (in Russian).

7.Gere J.M., Goodno B.J.: Mechanics of Materials, Cengage learning, Stanford, CT, 2009.

8.Gurtin M.E. An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, New York, 7th edition, 2003.

9.Hearn E.J.: Mechanics of Materials 2 : An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, Butterworth-Heinemann, Oxford, 3rd edition, 1997.

10.Ondr´aˇcek E., Vrbka J., Jan´ıˇcek P.: Mechanika tˇeles : pruˇznost a pevnost II, CERM, Brno, 4th edition, 2006.

11.Brdiˇcka M., Samek L., Sopko B.: Mechanika kontinua, Academia, Praha, third edition, 2005.

Сведения об авторе:

Алексанян Рафик Князевич – Армянский Национальный Университет Строительства и Архитектуры,
Тел.: (+374 93) 51 03 53; **E-mail:** davidaleksanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 14.02.2017

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №3, 2017 Механика
УДК 621.38; 62.50

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ И УСЛОВИЯ ЕЁ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Гукасян А.А.

Ключевые слова: манипулятор, процесс обслуживания, промежуточные состояния, матрица управляемости.
Key words: manipulator, maintenance process, intermediate states, controllability matrix
Բանալի բառեր. Մանիպուլյատոր, մատակարարման պրոցես, միջանկյալ վիճակներ, ղեկավարելիության մատրիցա

Ղուկասյան Ա.Ա.
Մատակարարման պրոցեսի մաթեմատիկական մոդելավորման և նրա ղեկավարելիության պայմանների մասին
Բերված են աբստրակտ մատակարարման պրոցեսի մաթեմատիկական մոդելավորման արդյունքները, որի հիմնական էլեմենտը հանդիսանում է ղեկավարվող բազմօղակ մանիպուլյատորը: Մանիպուլյատորը պետք է ավտոմատ կերպով ապահովի օբյեկտների անընդհատ աշխատանքը, կախված մատակարարման պրոցեսի նշանակությունից: Ենթադրվում է, որ մանիպուլյատորի դինամիկական բնութագրիչները մատակարարման պրոցեսի ընթացքում, կախված տեղափոխվող բեռի կամ գործիքի զանգվածից կարող են փոփոխվել ժամանակի վերջավոր պահերի: Ընդհանուր դեպքում բերվում է շարժական և անշարժ օբյեկտներին մանիպուլյատորի միջոցով մատակարարման նկարագրությունը և հետազոտվում է ղեկավարելիության հարցերը այն դեպքում, երբ մանիպուլյատորի շարժումը տարբեր ինտերվալներում նկարագրվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով, իսկ օբյեկտների շարժումները տրված են:

Ghukasyan A.A.
On the mathematical modeling of maintenance process and the condition of its controllability
The results of mathematical modeling of an abstract maintenance process the main element of which is a controlled multilink manipulator are presented. The manipulator must automatically maintain the continuous operation of objects, depending on the purpose of the maintenance process. It is assumed that in the process of maintenance the dynamic characteristics of the manipulator depending on the weight of the load or tool could be transformed in some final moments of the time. In general, the description of the maintenance process of movable and fixed objects are brought and the question of control in a case when the motion of the manipulator at each service interval is described by linear differential equations with constant coefficients, as well as the motion of the objects are given.

Приводятся результаты математического моделирования абстрактного процесса обслуживания, основным элементом которого является управляемый многозвенный манипулятор. Манипулятор должен автоматически обслуживать непрерывную работу объектов в зависимости от назначения процесса обслуживания. Предполагается, что в процессе обслуживания, динамические характеристики манипулятора в зависимости от массы переносимого груза или инструмента может изменяться в некоторые конечные моменты времени. В общем случае приводится описание процесса обслуживания манипулятором подвижных и неподвижных объектов и исследуются вопросы управляемости в случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы.

Введение. На практике часто встречаются различные задачи обслуживания, которые могут быть реализованы с использованием манипуляторов с программным управлением или адаптивного манипуляционного робота, оснащённого системой технического зрения, чувствительным элементом и другими элементами искусственного интеллекта. Применение роботов эффективно для выполнения, главным образом, вспомогательных операций производственного процесса (перемещение предмета, установка, загрузка, разгрузка, манипуляции предметом и т.д.), а также операций, выполняемых в экологически вредных и дискомфортных условиях (при высокой или низкой температуре, запыленности, загазованности и т.д.). Имеются многочисленные работы по разработке и проектированию различных процессов обслуживания в системе автоматизированных производственных систем по различным отраслям промышленности, которые могут быть интересны как для научных работников, так и для инженеров-проектировщиков [1-8]. Не нарушая общности, элементы в системе обслуживания, то есть станки, манипуляторы, конвейеры, склады с деталями или другими технологическими инструментами, при моделировании могут быть рассмотрены как подвижные и неподвижные объекты (цели). Состояния объектов могут быть заданы или являться решениями некоторых дифференциальных уравнений, описывающих их движение. Ниже, для частных случаев, на основе абстрактного модельного примера исследуются вопросы о возможности математического моделирования технологического процесса обслуживания и условия её управляемости. Исследования являются продолжением работы [8], где рассматривается модель управляемого технологического процесса, состоящего из подвижных конвейеров, тележки с различными деталями и адаптивным манипулятором. Манипулятор оптимальным образом обслуживает работу конвейеров нужными деталями, когда последовательность обслуживания определяется с помощью датчика усилий, расположенного во внутренней поверхности захватного устройства манипулятора.

1.Математическая модель процесса обслуживания. Рассматривается технологический участок, который состоит из k подвижных или неподвижных объектов (целей) и управляемого многозвенного манипулятора. Задача манипулятора состоит в том, что он должен обслуживать непрерывную работу объектов в зависимости от технологического назначения.

В общем случае движение i-го объекта в процессе обслуживания в обобщённых координатах зададим уравнением

$$\ddot{\mathbf{y}}^i = \mathbf{g}^i\left(\mathbf{y}^i, \dot{\mathbf{y}}^i\right) \left(i = 1, 2, \cdots, k\right) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$\left(\mathbf{y}^i\left(t_{i-1}\right), \dot{\mathbf{y}}^i\left(t_{i-1}\right)\right) \in \mathbf{G}_y^i \ \left(i = 1, 2, \cdots, k\right), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{y}^i = \left(y_1^i, y_2^i, \cdots y_m^i\right) \left(i = 1, 2, \cdots, k\right)$ – вектор обобщённых координат i-ой цели, $\mathbf{G}_y^i$ – $2m$-мерная область начальных условий движения объектов.

Уравнение, описывающее движение манипулятора, в общем случае представим в виде

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}\right),\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{S}, \mathbf{u} \in \left\{\mathbf{U}\right\}, \boldsymbol{\omega} \in \left\{\boldsymbol{\Omega}\right\} \tag{1.3}$$

с начальным условием

$$\left(\boldsymbol{\alpha}\left(t_o\right), \dot{\boldsymbol{\alpha}}\left(t_o\right)\right) \in \mathbf{G}_\alpha \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l)$ – вектор обобщённых координат манипулятора, $\mathbf{u}$ – вектор управления манипулятором, $\mathbf{S}$ – та часть технологического пространства, где возможно свободное передвижение манипулятора, $\{\mathbf{U}\}$ – выпуклая область, характеризующая возможность управления, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор, определяющий параметры, входящие в систему уравнений движения манипулятора, который может изменяться после каждой встречи с объектами (изменение параметра $\boldsymbol{\omega}$ в процессе движения манипулятора может быть непрерывно или скачкообразно $[9,10]$), $\{\boldsymbol{\Omega}\}$ – область допустимых значений параметра $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{G}_\alpha$ – область начального состояния манипулятора. В практических задачах обслуживания в качестве параметра $\boldsymbol{\omega}$ может являться масса переносимого манипулятором груза или инструмента.

Далее предполагается, что в зависимости от параметра $\boldsymbol{\omega}$ изменяются динамические свойства манипулятора после каждого этапа движения. Это предположение означает, что масса переносимого манипулятором груза существенна и её необходимо учитывать при моделировании движений. Следовательно, дифференциальное уравнение, описывающее движение манипулятора (1.3) и условия (1.4), на i-ом этапе обслуживания, можно представить в виде

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}^i = f^i\left(\boldsymbol{\alpha}^i, \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\omega}^i\right), \boldsymbol{\alpha}^i \in \mathbf{S}^i, \mathbf{u}^i \in \left\{\mathbf{U}^i\right\},$$

$$\boldsymbol{\omega}^i \in \{\boldsymbol{\Omega}\}\ (i = 1, 2, \cdots, k)\left(\boldsymbol{\alpha}^i(t_{i-1}), \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i(t_{i-1})\right) \in \mathbf{G}_\alpha^i,\ (i = 1, 2, \cdots, k), \tag{1.5}$$

где $\mathbf{G}_\alpha^i$ – $2l$-мерная область начальных состояний движения манипулятора.

В задачах управления манипулятором, для обеспечения встреч с целями необходимо также задать обобщённые координаты схвата манипулятора относительно выбранной инерциальной системы координат. Обобщённые координаты схвата обозначим через вектор $\mathbf{q} = (q_1, q_2 \cdots, q_N)$, где $\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\alpha})$. Здесь $\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\alpha})$ – заданная N-мерная вектор-функция, структура которой зависит от выбора обобщённых координат и от геометрии манипулятора, вектор $\boldsymbol{\alpha}$, на i-ом этапе движения, определяется решением уравнения (1.5).

Движение манипулятора с целью обслуживания объектов (1.1) начинается в момент времени t_0 и заканчивается в момент T (T может быть заданным или определяться из дополнительных условий). Начиная с t_0 до T, манипулятор должен осуществлять встречи с объектами (1.1) в моменты времени $t_1, t_2, \cdots, t_k$, где t_i – момент встречи манипулятора с i-ой целью ($i = 1, 2, \cdots, k$). Эти условия для переменных $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{y}^i, \dot{\mathbf{y}}^i$, в общем случае, можно представить следующим образом:

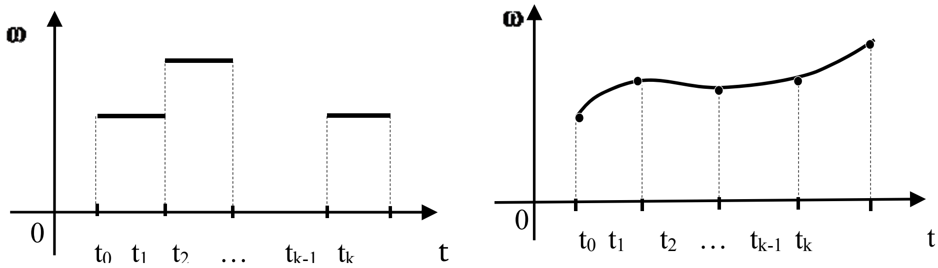
$$\left(\mathbf{q}^i(t_i),\dot{\mathbf{q}}^i(t_i),\mathbf{y}^i(t_i),\dot{\mathbf{y}}(t_i)\right)\in\mathbf{G}^i_{\mathrm{q},y}\ \left(i=1,2,\cdots,k\right) \tag{1.6}$$

или для переменных $\boldsymbol{\alpha}^i$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i$ и $\mathbf{y}^i$, $\dot{\mathbf{y}}^i$ в виде

$$\left(\boldsymbol{\alpha}^i(t_i),\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i(t_i),\mathbf{y}^i(t_i),\dot{\mathbf{y}}^i(t_i)\right)\in\mathbf{G}^i_{\alpha,y}\ \left(i=1,2,\cdots,k\right). \tag{1.7}$$

Здесь $\mathbf{G}^i_{q,y}$ и $\mathbf{G}^i_{\alpha,y}$ – $2(N+m)$ и $2(l+m)$-мерные области.

Предполагается, что время нахождения манипулятора около каждого объекта не учитывается, то есть считается, что в момент времени t_i манипулятор обслуживает объект под номером i и мгновенно направляется к другому объекту (предположение имеет место, поскольку $\tau/(T-t_0)\ll 1$, где τ – время нахождения манипулятора около объекта, а $(T-t_0)$ – время процесса обслуживания). То есть, момент времени t_i $(i=1,2,\cdots,k)$ является началом движения манипулятора для обслуживания объекта под номером $(i+1)$. Варианты изменения $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(t)$ представлены на фиг.1,2.



Фиг.1 Фиг. 2

Условия (1.6) и (1.7) являются дополнительными требованиями к движению манипулятора и объектов в процессе обслуживания и их, как правило, необходимо учитывать при моделировании. Возможны также другие совместные требования как на движение манипулятора и объектов обслуживания, так и на управляющие силы и моменты, развиваемые приводами. Эти требования формально можно представить в виде

$$\left(\boldsymbol{\alpha}^i(t_i),\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i(t_i),\mathbf{y}^i(t_i),\dot{\mathbf{y}}^i(t_i),\mathbf{u}^i\right)\in\mathbf{G}^i_{\alpha,y,u}\ \left(i=1,2,\cdots,k\right). \tag{1.8}$$

Отметим, что если последовательность обслуживания манипулятором объектов фиксирована, то задача на каждом этапе движения $[t_{i-1},t_i]$ сводится к обычной задаче управления или оптимального уравления с фиксированными или свободными краевыми условиямии $[13-15]$.

Минимизирующий функционал на каждом этапе движения в общем случае можно представить в виде

$$I_i = I\left[t_i, t_{i+1}, \boldsymbol{\alpha}^i, \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\omega}^i\right] \to \min_{\mathbf{u}^i \in \{\mathbf{U}\}} \quad \left(i = 0, 1, 2, \cdots, k-1\right). \tag{1.9}$$

В случае, когда последовательность обслуживания и моменты встреч с объектами не фиксированы, то первоначальную задачу управления можно сформулировать как задачу нахождения последовательностей объектов обслуживания и моментов встреч, в процессе которых минимизирующий функционал будет зависеть также от последовательности встреч. Решение такой задачи существует, поскольку число возможных последовательностей встреч с объектами конечно. С точки зрения технологического процесса немаловажным критерием качества является также рациональное использование технологического участка $(\mathbf{S} \to \min)$. Этот критерий является геометрическим и налагает на кинематику движения манипулятора дополнительное ограничение [8].

Из (1.1), (1,5), (1,6)-(1.9) следует, что сформулированный процесс обслуживания можно рассматривать как результат целенаправленных управляемых движений составных динамических систем (1.1), (1.5) на интервалах времени $[t_{i-1}, t_i]$ $\left(i = 1, 2, \cdots, k\right)$ со следующими условиями преемственности между ними

$$\left(\boldsymbol{\alpha}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \mathbf{y}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\mathbf{y}}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \boldsymbol{\alpha}^{i+1}\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{i+1}\left(\mathbf{t}_i\right)\right) \in \boldsymbol{\Phi}_\alpha^i, \left(i = 1, 2, \cdots, k\right) \tag{1.10}$$

или

$$\left(\mathbf{q}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\mathbf{q}}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \mathbf{y}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\mathbf{y}}^i\left(\mathbf{t}_i\right), \mathbf{q}^{i+1}\left(\mathbf{t}_i\right), \dot{\mathbf{q}}^{i+1}\left(\mathbf{t}_i\right)\right) \in \boldsymbol{\Phi}_q^i, \left(i = 1, 2, \cdots, k\right).$$

Условие (1.11) означает, что в момент времени t_i конечное состояние i-ой динамической системы (1.1), (1.5) и начальное состояние $\left(i+1\right)$-ой системы (1.5) принадлежат некоторой $2\left(m+l\right)$-мерной области $\boldsymbol{\Phi}_\alpha^i$, или $2\left(N+m\right)$-мерной области $\boldsymbol{\Phi}_q^i$ $\left(i = 1, 2, \cdots, k\right)$. С математической точки зрения (1.10) даёт возможность рассматривать обслуживание манипулятором технологического процесса как управление движением манипулятора с переменной динамикой и с промежуточными состояниями. В работах $\left[11, 12, 13\right]$ исследованы различные вопросы оптимального управления составных систем и определены условия управляемости.

Важным вопросом для дальнейшего исследования процесса обслуживания манипулятором объектов (технологического участка) являются вопросы управляемости, как на отдельных этапах обслуживания, так и управляемость всей системы в целом, то есть на всем интервале времени.

2. Об управляемости процесса обслуживания. Рассматриваются вопросы управляемости процесса обслуживания, когда динамические характеристики манипулятора во время процесса обслуживания в конечные моменты времени t_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ изменяются и динамика движения (1.5) на конечных интервалах времени описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}^i + \mathbf{b}^i u \text{, где } \mathbf{A}_i = \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\omega}^i\right)\left(i = 1,2,\ldots,k\right), \tag{2.1}$$

k – количество интервалов движения $\left[t_{i-1}, t_i\right]\left(i = 1,2,\ldots,k\right)$, $\mathbf{x}^i$ $-n$ $(n = 2l)$-мерный фазовый вектор состояния манипулятора $\left(\alpha_j^i = x_j^i, \dot{\alpha}_j^i = x_{l+j}^i, j = 1, 2, \cdots, l; i = 1, 2, \cdots, k\right)$, который соответствует движению на интервале времени $t \in \left[t_{i-1}, t_i\right]\left(i = 1,2,\ldots,k\right)$, $\mathbf{A}_i$ - $(n \times n)$ – матрица с постоянными элементами на интервале $\left[t_{i-1}, t_i\right]$, характеризующая динамические свойства механической модели манипулятора в зависимости от параметра $\boldsymbol{\omega}^i$ (здесь предполагается, что изменение параметра $\boldsymbol{\omega}$ происходит скачкообразно), $\mathbf{b}^i$ – n-мерный постоянный вектор, характеризующий возможность управления на том же интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$ $u(t)$ – скалярная функция управления, $t \in \left[t_0, T\right]$ (t_0 – начальный, $t_k = T$ – конечный моменты времени). Моменты времени t_i $\left(i = 1,2,\ldots,k\right)\left(t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = T\right)$ могут быть фиксированными или определяться из дополнительных условий.

Для простоты исследования предполагаем, что динамики движения объектов заданы, то есть известны решения уравнений (1.1) и положения объектов в каждые моменты времени t_i ($i = 1, 2, \cdots, k$) и при $l = m$ в n-мерном пространстве определяются фазовой точкой $\left(\mathbf{y}^i\left(t_i\right), \dot{\mathbf{y}}^i\left(t_i\right)\right)$, или n-мерным фазовым вектором $\mathbf{z}^i$ ($i = 1, 2, \cdots, k$), где $\left(y_j^i = z_j^i, \dot{y}_j^i = z_{l+j}^i, j = 1, 2, \cdots, l; i = 1, 2, \cdots, k\right)$.

При сделанных предположениях (1.2)-(1.5) краевые условия для задачи обслуживания сформулируем следующим образом. В пространстве состояний заданы произвольные начальные (при $t = t_0$) и конечные (при $t = T, i = k$) положения системы (2.1) в виде

$$\mathbf{x}^1\left(t_0\right) = \mathbf{x}^{1,t_0}, \quad \mathbf{x}^k\left(t_k\right) = \mathbf{x}^k\left(T\right) = \mathbf{x}^{k,\mathrm{T}}, \tag{2.2}$$

а в промежуточные моменты времени t_i $\left(i = 1,2,\ldots,k-1\right)$ фазовые векторы составных систем (2.1) должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{x}^i\left(t_i\right) = \mathbf{z}^i\left(t_i\right) = \mathbf{x}^{i+1}\left(t_i\right), \left(i = 1,2,\ldots,k-1\right), \tag{2.3}$$

где $\mathbf{z}^i\left(t_i\right)$ – фазовое состояние объектов в моменты времени t_i $\left(i = 1,2,\ldots,k-1\right)$. (2.3) является условием преемственности (1.10) в рассматриваемом частном случае и означает, что конец движения манипулятора (2.1) на интервале времени $t \in [t_{i-1}, t_i]$ является началом движения на следующем интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}]$ $(i = 1,2,\ldots,k-1)$.

Поскольку на каждом интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ движение описывается системой линейных дифференциальных уравнений (2.1), то при надлежащем выборе управляющей функции $u = u(t)$ $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ из области допустимых управлений, имеем единственную траекторию движения механической системы, удовлетворяющую условиям (2.2), (2.3). Полученные таким образом решения $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}^i(t)\}$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ уравнений (2.1), являются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми, то есть всегда, кроме моментов времени t_i $(i = 1,2,\ldots,k)$, решение $x(t)$ является непрерывно дифференцируемым. Для наглядности, уравнения (2.1) при условиях (2.2), (2.3), для каждого $i(i = 1,2,\cdots,k)$ представим в виде

$$\left[\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}^1 + \mathbf{b}^1 u \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le t_1 \\ \dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}^2 + \mathbf{b}^2 u \quad \text{при} \quad t_1 \le t \le t_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\mathbf{x}}^{k-1} = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{b}^{k-1} u \quad \text{при} \quad t_{(k-2)} \le t \le t_{(k-1)} \\ \dot{\mathbf{x}}^k = \mathbf{A}_k\mathbf{x}^k + \mathbf{b}^k u \quad \text{при} \quad t_{(k-1)} \le t \le t_k = T \end{array}\right. \tag{2.4}$$

$(t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = T)$

Как известно [13-15], каждая система из совокупности (2.4)

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i\mathbf{x}^i + \mathbf{b}^i u, \quad (i = 1,2,\ldots,k) \tag{2.5}$$

является вполне управляемой на интервале времени $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1,2,\ldots,k)$, если ранг матрицы управляемости равен n, то есть

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{b}^i \quad \mathbf{A}_i\mathbf{b}^i \quad \mathbf{A}_i^2\mathbf{b}^i \quad \ldots \quad \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{b}^i\right) = n \quad (i = 1,2,\ldots,k) \tag{2.6}$$

и не управляемой на интервале времени $t \in [t_{i-1}, t_i]$, если

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{b}^i \quad \mathbf{A}_i\mathbf{b}^i \quad \mathbf{A}_i^2\mathbf{b}^i \quad \ldots \quad \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{b}^i\right) < n \quad (i = 1,2,\ldots,k). \tag{2.7}$$

В случае (2.7) вопросы вполне управляемости (2.5) исследуются в некотором подпространстве (подпространстве управляемости) фазового пространства меньшей размерности [14].

Следуя работам [14-16], приведём определение вполне управляемости автономных динамических систем (2.5). Автономная система (2.5) на интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$ называется вполне управляемой (обладает свойством управляемости), если для любой пары точек $\mathbf{x}^i(t_{i-1})$ и $\mathbf{x}^i(t_i)$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ существует ограниченное измеримое управление $u = u(t)$ $t \in [t_{i-1}, t_i]$, переводящее систему (2.5) из точки $\mathbf{x}^i(t_{i-1})$ в точку $\mathbf{x}^i(t_i)$ $(i = 1,2,\ldots,k)$. Из определения вполне управляемости систем (2.5) и условий (2.2), (2.3), следует обобщённое определение вполне управляемости совокупности (2.4) на интервале времени $t \in [t_0, T]$.

Определение. Совокупность (2.4) на интервале времени $[t_0, T]$ является вполне управляемой, если для любого начального $\mathbf{x}^1(t_0)$ и конечного $\mathbf{x}^k(T)$ состояний существует допустимое управление $u = u(t)$ $t \in [t_0, T]$, переводящее (2.4) из начального состояния в конечное, с обеспечением в промежуточные моменты времени t_i $(t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = T)$ условий $\mathbf{x}^i(t_i) = \mathbf{x}^{i+1}(t_i)$ $(i = 1,2,\ldots,k-1)$ (управление $u = u(t)$ строится как объединение управлений манипулятором на каждом этапе обслуживания).

Поскольку совокупность (2.4) описывает весь процесс обслуживания манипулятором технологического участка, и каждая система (2.5) является уравнением управляемого движения на интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}]$ $(i = 1,2,\ldots,k-1)$, то управляемость технологического процесса в целом зависит от управляемости на каждом интервале. Нетрудно показать, что процесс обслуживания является вполне управляемым, если он вполне управляем на каждом этапе, и не управляемым, если хотя бы одна из систем (2.5) не вполне управляема на своём интервале определения. Для доказательства этого утверждения предполагаем, что на интервале времени $[t_0, T]$ имеется только один промежуточный момент t_1, где происходит изменение динамических характеристик механической системы манипулятора (2.1), движение которого на каждом интервале $[t_0, t_1]$, $[t_1, T]$, ($k = 2$) описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}^1 + \mathbf{b}^1 u \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{2.8}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^2 + \mathbf{b}^2 u \quad \text{при} \quad t_1 \le t \le t_2 = T\,, \tag{2.9}$$

удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{x}^1(t_0) = \mathbf{x}^1_{t_0}\,,\ \mathbf{x}^1(t_1) = \mathbf{z}^1(t_1) = \mathbf{x}^2(t_1)\,,\ \mathbf{x}^2(t_2) = \mathbf{x}^2_T\ . \tag{2.10}$$

Согласно критерию управляемости, автономные системы (2.8) и (2.9) вполне управляемы на интервалах времени $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, если соответствующие матрицы управляемости имеют максимальный ранг, то есть

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{b}^1 \quad \mathbf{A}_1\mathbf{b}^1 \quad \mathbf{A}_1^2\mathbf{b}^1 \quad \ldots \quad \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{b}^1\right) = n \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_1] \tag{2.11}$$

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{b}^2 \quad \mathbf{A}_2\mathbf{b}^2 \quad \mathbf{A}_2^2\mathbf{b}^2 \quad \ldots \quad \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{b}^2\right) = n \quad \text{при} \quad t \in [t_1, t_2] \tag{2.12}$$

Здесь, в общем случае, матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и векторы $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$ имеют следующие структуры:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1n}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & \cdots & a_{2n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^i & a_{n2}^i & \cdots & a_{nn}^i \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}^i = \left(b_1^i, \ \ b_2^i, \ \ \ldots, \ \ b_n^i\right)^T, \ \ (i = 1{,}2) \tag{2.13}$$

Для удобства дальнейшего исследования вопросов о вполне управляемости на всём промежутке времени $[t_0, T]$ формально расширим размеры пространства состояний в два раза и введём $2n$-мерный вектор состояния манипулятора $\mathbf{y}$ следующим образом:

$$\mathbf{y} = \left(x_1^1, \ \ x_2^1, \ \ \ldots \ \ x_n^1, \ \ x_1^2, \ \ x_2^2, \ \ \ldots \ \ ,x_n^2\right)^T \quad \text{при } [t_0, t_2] \tag{2.14}$$

где

$$\mathbf{y}^1 = \left(x_1^1, \ \ x_2^1, \ \ \ldots, \ \ x_n^1, \ \ 0, \ \ 0, \ \ \ldots, \ \ 0\right)^T \quad \text{при } t_0 \le t \le t_1 \tag{2.15}$$

$$\mathbf{y}^2 = \left(0, \ \ 0, \ \ \ldots, \ \ 0, \ \ x_1^2, \ \ x_2^2, \ \ \ldots, \ \ x_n^2\right)^T \quad \text{при } t_1 \le t \le t_2 \tag{2.16}$$

В момент времени t_1, из $\mathbf{x}^1(t_1) = \mathbf{z}^1(t_1) = \mathbf{x}^2(t_1)$ следует, что $\left|\mathbf{y}^1(t_1)\right| = \left|\mathbf{y}^2(t_1)\right|$. Введём также блочную матрицу $\mathbf{C}$ с размерностью $(2n \times 2n)$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

где $\mathbf{A}_i$ $(i = 1{,}2)$ определяются из (2.13),

$$\mathbf{d} = \left(b_1^1, \ \ b_2^1, \ \ \ldots, \ \ b_n^1, \ \ b_1^2, \ \ b_2^2, \ \ \ldots, \ \ b_n^2\right)^T \tag{2.18}$$

В соответствии с (2.14)- (2.16), матрицу $\mathbf{C}$ (2.17) и вектор $\mathbf{d}$ (2.18) можно представить в виде суммы следующих компонентов:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ \mathbf{d}^1 = \left(b_1^1, b_2^1, \ldots b_n^1, 0, 0, \ldots 0\right)^T \quad \text{при } t_0 \le t \le t_1 \tag{2.19}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d}^2 = \left(0, 0, \ldots 0, b_1^2, b_2^2, \ldots b_n^2\right)^T \quad \text{при } t_1 \le t \le t_2 \tag{2.20}$$

(матрицы $\mathbf{0}$ с нулевыми элементами в (2.17), (2.19), (2.20) имеют размерности $(n \times n)$)

С учётом (2.14) - (2.20) системы (2.8), (2.9) в общем случае можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{y}}^1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{y}^1 + \mathbf{d}^1 u \ \text{ в } t \in [t_0, t_1], \tag{2.21}$$

$$\dot{\mathbf{y}}^2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{y}^2 + \mathbf{d}^2 u \ \text{ в } t \in [t_1, t_2] \tag{2.22}$$

(систему уравнений (2.21) можно рассматривать на всем промежутке времени $t \in [t_0, t_2]$ с нулевыми элементами при $t \in [t_1, t_2]$, а (2.22) – при $t \in [t_0, t_2]$ с нулевыми элементами в $t \in [t_0, t_1]$) .

Объединяя системы (2.21) и (2.22), процесс обслуживания формально можно описать уравнением

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{d}u, \quad t \in [t_0, t_2] \tag{2.23}$$

с условиями (2.14)-(2.20).

Поскольку в каждый момент времени $t \in [t_0, t_2]$ (2.23) либо совпадает с системой (2.21), либо с (2.22), то в переменных и параметрах (2.14)-(2.20) матрицы управляемости для систем (2.11) и (2.12) имеют следующие структуры, соответственно:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^1 & \mathbf{C}_1\mathbf{d}^1 & \mathbf{C}_1^2\mathbf{d}^1 & \dots & \mathbf{C}_1^{n-1}\mathbf{d}^1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1\mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{b}^1 & \dots & \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{b}^1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ при}$$

$$t \in [t_0, t_1] \tag{2.24}$$

и

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^2 & \mathbf{C}_2\mathbf{d}^2 & \mathbf{C}_2^2\mathbf{d}^2 & \dots & \mathbf{C}_2^{n-1}\mathbf{d}^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2\mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{b}^2 & \cdots & \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{b}^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{при } t \in [t_1, t_2] \tag{2.25}$$

Здесь, матрицы $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ имеют размерности $(2n \times n)$, соответственно. С учётом (2.11), (2.12), $\operatorname{rang}\mathbf{M}_1 = n$, $\operatorname{rang}\mathbf{M}_2 = n$, Объединяя матрицы (2.24) и (2.25), получим:

$$\mathbf{M}^1 = \{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2\} = \left\{(\mathbf{d}^1, \mathbf{C}_1\mathbf{d}^1, \mathbf{C}_1^2\mathbf{d}^1, ..., \mathbf{C}_1^{n-1}\mathbf{d}^1), (\mathbf{d}^2, \mathbf{C}_2\mathbf{d}^2, \mathbf{C}_2^2\mathbf{d}^2, ..., \mathbf{C}_2^{n-1}\mathbf{d}^2)\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Блочная матрица $\mathbf{M}^1$ имеет размерность $(2n \times 2n)$,

где $\mathbf{M}_{11} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1\mathbf{b}^1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{b}^1 & \dots & \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{b}^1 \end{pmatrix}$

совпадает с матрицей управляемости (2.11) системы (2.8),

а $\mathbf{M}_{22} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2\mathbf{b}^2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{b}^2 & \dots & \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{b}^2 \end{pmatrix}$ совпадает с матрицей управляемости (2.12) системы (2.9).

Определитель блочно-диагональной матрицы $\mathbf{M}^1$ вычисляется следующим образом [16]

$$\det \mathbf{M}^1 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} = \det\left(\mathbf{M}_{11} \cdot \mathbf{M}_{22}\right) = \det \mathbf{M}_{11} \cdot \det \mathbf{M}_{22} \neq 0, \qquad (2.27)$$

Следовательно, $\operatorname{rang} \mathbf{M}^1 = 2n$.

По аналогии с (2.11) и (2.12) в качестве матрицы управляемости для объединения (2.23) на всём промежутке времени можно принять матрицу $\mathbf{M}^1$.

Из (2.27) следует, что движение механической системы манипулятора или процесс обслуживания, описываемый объединением (2.23), включающим системы (2.21) и (2.22), вполне управляем на интервале времени $t \in \left[t_0, T\right]$ тогда и только тогда, когда системы (2.8) и (2.9) при (2.10) вполне управляемы на интервалах времени $\left[t_0, t_{1-}\right]$ и $\left[t_{1+}, t_2\right]$, соответственно, и не управляемы, если одна из систем (2.8) или (2.9) не вполне управляема на своём интервале определения, то есть

$$\det \mathbf{M}^1 = \det \mathbf{M}_{11} \cdot \det \mathbf{M}_{22} = 0$$

если $\operatorname{rang} \mathbf{M}_{11}$ или $\operatorname{rang} \mathbf{M}_{22}$ меньше, чем n .

Нетрудно убедиться, что утверждение об управляемости верно и при k промежуточных моментах изменений динамических характеристик манипулятора, то есть определитель матрицы управляемости объединения систем (2.4) определяется следующим образом:

$$\det \mathbf{M}^k = \det \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} = \det\left(\mathbf{M}_{11} \times \mathbf{M}_{22} \times \dots \times \mathbf{M}_{\mathbf{kk}}\right) =$$

$$= \det \mathbf{M}_{11} \cdot \det \mathbf{M}_{22} \cdot \det \mathbf{M}_{33} \cdot \ldots \cdot \det \mathbf{M}_{kk} \neq 0 \qquad (2.28)$$

Здесь матрица $\mathbf{M}_{jj}$ $\left(j = 1, 2, \ldots, k\right)$ является матрицей управляемости системы под номером $j\left(j = 1, 2, \cdots, k\right)$ из (2.4) на интервале времени движения $\left[t_{j-1}, t_j\right]$ и имеет размерность $\left(n \times n\right)$, а матрица управляемости $\mathbf{M}^k$ объединённой системы на интервале времени $\left[t_0, t_k\right]$ имеет размерность $\left[kn \times kn\right]$. Следовательно, $\operatorname{rang} \mathbf{M}^k = kn$, если процесс обслуживания на каждом этапе является вполне управляемым, то есть $\det \mathbf{M}_{jj} \neq 0$ $\left(j = 1, 2, \ldots, k\right)$.

Следовательно, процесс обслуживания манипулятором, описываемый совокупностью (2.4) с промежуточными состояниями (2.3) на всем интервале времени $\left[t_0, T\right]$ вполне управляем, если каждый этап обслуживания (2.5) вполне управляем и не управляем, если хотя бы на одном интервале обслуживания (2.4) процесс не управляемый.

Заключение. Описывается абстрактная модель процесса обслуживания, состоящего из манипулятора и других объектов, которые могут быть как подвижными, так и неподвижными. Моделируется процесс, когда манипулятор должен автоматически обслуживать непрерывную работу объектов. Предполагается, что динамические характеристики манипулятора могут изменяться в зависимости от массы переносимого груза или инструмента в некоторые конечные моменты времени. В частном случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы, исследуются вопросы управляемости всего процесса в зависимости от управляемости на каждом этапе движения. Показано, что процесс обслуживания на всём промежутке времени является вполне управляемым, если он управляем на каждом интервале обслуживания и не управляем, если он не управляем хотя бы на одном интервале обслуживания. Получены матрицы управляемости всей системы, объединяющей конечное число составных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с. Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Gradetsky V. G. Manipulation Robots. M.: Nauka, 1989, 363 p. (in Russian).
2. Хватов Б. Н. Гибкие производственные системы. Расчет и проектирование. Томбов, Изд. ТГТУ, 2007, 117с. Khvatov B.N. Flexible manufacturing systems. Calculation and modelling. Publishing house TITY. 2007, 117 p. (in Russian).
3. Иванов А.А. Проектирование системы автоматизированного машиностроения. Изд. «Инфра-М, Форум», 2004. Ivanov A.A. Modelling of the system of automotive engineering, Pub. Infra-M. Forum, 2004. (in Russian).
4. Соломенцев Ю.М. Технологические основы гибких производственных систем. 2000. pdf. Solomentsev Yu. M. Technological bases for flexible manufacturing systems. 2000. Pdf. (in Russian).
5. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов. //Известия АН СССР. МТТ. №4. 1986, с.21-29. Akulenko, L.D., Bolotnik, N.N. Synthesis of Optimal Control of Transport Motions of Manipulation Robots, MTT, №4, 1986, p.21-29. (in Russian).
6. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004, 478 с. Zenkevich S. L. , Yushchenko A. S. Foundations of the control of manipulator robots, Moscow, MSTU after N. Bauman, 2004, 478 p. (in Russian).
7. Динамика управления роботами. /Под. Редакцией Е.И. Юревича. М.: Наука, 1984. 336 с. Yurevich E.I. (Ed) Dynamics of robotic control. Moscow: «Nauka», 1984. 336p. (in Russian).
8. Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом. //Известия АН Арм. ССР, Механика. Т.39. №6. 1986. С.39-49. Ghukasyan A.A. A problem of optimal modelling of technological processes served by a manipulator robot. Proceeding AS Arm SSR, Mechanics, V.39, №6, 1986, p39-49.(in Russian).
9. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. //Известия НАН РА. Механика. 2002. №1. С.75-81. Ghukasyan A.A., Matevosyan A.G. About controlled movement of a material, point of unset mass. Proceeding of NAS RA, Mechanics. V.55. №1. 2002, c.75-81.(in Russian).

10. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Задача оптимального управления движением точки переменной массы. //В сборнике научных трудов «Математический анализ и его приложения» АГПУ им. Х.Абовяна, Ереван 2003, вып.3, с.29-40. Ghukasyan A.A., Matevosyan A. G. A problem of the control of the movement of the changeable mass point. Mathematical analysis and its attachments, Collection of scientific works, ASPU after Kh. Abovyan, Yerevan, 2003, № 3, p. 29-40. (in Russian).
11. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами. //ДАН СССР. 1967. Т.176. №4. С.754-756. Velichenko V.V. Optimal control of composite systems. Dokl. Akad. Nauk SSSR, V.176. №4.1967. p.754-756., (in Russian).
12. Величенко В.В. Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями. //ДАН СССР. 1967. Т.174. №5. С.1011-1013. Velichenko V.V. Optimality conditions in the problems of control with intermediate conditions. Dokl. Akad. Nauk SSSR,V.174. №5. 1967, p.1011-1013. (in Russian).
13. Барсегян В. Р. Управление составных динамических систем. М.: Наука, 2016. 230 с. Barseghyan V.R. Control of compound dynamic systems, Moscow, Nauka, 2016, 230 p. (in Russian).
14. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с. Krasovskii N.N The Theory of Motion Control. Moscow: Nauka,1968, 475 p. (in Russian).
15. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 551с. Roytenberg Ya. N. Automatic control, Moscow, Nauka, 1978, 551p. (in Russian).
16. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 574 с. Lee E.B, Markus L. Foundations of optimal control theory M.: Nauka, 1972, 574 p. (in Russian).
17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560с. Hantmaher F.R. Theory of matrices. Moscow, physico-mathematical literature, 2004, 560 p. (in Russian).
18. Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №3. С.68-83. Ghukasyan A.A On the kinematics of multilink manipulator motion with elastic connecting nodes and elastic links. // Proceeding of NAS RA, Mechanics. 2014. V.67. №3. P.68-83. (in Russian).
19. Гукасян А.А. Кинематическое управление движением схвата двухзвенного упругого манипулятора. //Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. № 4. С.316-324. Ghukasyan A.A. On Kinematic Control of Elastic Two-Link Manipulator Clamp Motion. // Reports, NAS Armenia. 2014. V.114. № 4. P.316-324 . (in Russian).
20. Гукасян А.А. О пространственном положении и деформации упругих звеньев манипулятора. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №4. С.53-64. Ghukasyan A.A. On a spatial position and deformation of manipulator elastic links// Proceeding of NAS RA, Mechanics. 2014. V.67. №4. P.53-64.(in Russian).

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апресович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Горисского Государственного университета, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. **E-mail:** ghukasyan10@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.03.2017

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №3, 2017 Механика
УДК 539.3

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗОК ОТ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА КОНЕЧНЫХ СТРИНГЕРОВ К УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПОСРЕДСТВОМ ЛИПКИХ СДВИГОВЫХ СЛОЁВ

Керопян А.В., Саакян К.П.

Ключевые слова: контакт, стрингер (накладка), упругая полуплоскость, бесконечная пластина, липкий слой, система интегральных уравнений, операторное уравнение.
Keywords: contact, stringer (overlay), elastic half-plane, infinite sheet, adhesive layer, system of integral equations, operator equation.
Բանալի բառեր. կոնտակտ, ստրինգեր, առաձգական կիսահարթություն, անվերջ սալ, կպչուն շերտ, ինտեգրալ հավասարումների համակարգ, օպերատորային հավասարում

Քերոբյան Ա.Վ., Սահակյան Կ.Պ.
Վերջավոր թվով վերջավոր ստրինգերներից բեռնավորումների փոխանցումը առաձգական կիսահարթությանը կպչուն սահքի շերտերի միջոցով

Դիտարկված է խնդիր առաձգական կիսահարթության համար, որը xOy հարթության մեջ $y=0$ գծի երկարությամբ վերջավոր տեղամասերում ուժեղացված է տարբեր առաձգական բնութագրեր և փոքր հաստատուն հաստություններ ունեցող վերջավոր թվով վերջավոր երկարությամբ վերադիրներով: Կոնտակտային փոխազդեցությունը վերադիրների և դեֆորմացվող հիմքի միջև իրագործվում է այլ ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական բնութագրեր ունեցող կպչուն շերտերի (սոսնձի շերտերի) միջոցով: Վերադիրները դեֆորմացիայի են ենթարկվում նրանց ծայրերում կիրառված հորիզոնական ուժերի ազդեցության տակ: Անհայտ շոշափող լարումների որոշման խնդիրը հանգեցված է տարբեր միջակայքերում որոշված վերջավոր թվով անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը; Ցույց է տրված, որ այդ հավասարումների համակարգը խնդրին բնորոշ բնութագրիչ պարամետրի փոփոխման որոշ տիրույթում Բանախի B տարածության մեջ կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր և պարզաբանված է անհայտ շոշափող լարումների բնույթը և վարքը կոնտակտի տարբեր տեղամասերում և ներկայացված են թվային արդյունքներ:

Kerobyan A.V., Sahakyan K.P.
Loads Transfer from Finite Number Finite Stringers to an Elastic Half-plane Through Adhesive Shear layers

In the paper the problem for an elastic half-plane which on finite intervals along $y=0$ line in the plane xOy is strengthened by arbitrary finite number of finite stringers (overlays) with different elastic characteristics and small constant thickness is observed. The contact interaction between deformable base and stringers through adhesive shear layers with other physical - mechanical properties and geometric configuration is realized. The stringers are deformed under the action of horizontal forces. The determination problem of unknown shear stresses which are acting between deformable base and stringers are reduced to the system of Fredholm's integral equations of second kind relative to finite number of unknown functions which specified in different finite intervals. It is shown that in the certain domain of the change of characteristic parameter of problem this system of integral equations in Banach space may be solved by the method of successive approximations. The particular cases are observed and the character and behaviour of unknown shear stresses are investigated and numerical results are presented.

В работе рассматривается задача для упругой полуплоскости, которое на конечных отрезках вдоль линии $y=0$ в плоскости xOy усилена произвольным конечным числом стрингеров (накладок) конечной длины с различными модулями упругости и малыми постоянными толщинами. Взаимодействия между стрингерами и деформируемым основанием во всех участках их подкрепления осуществляются посредством одинаковых тонких липких сдвиговых слоёв с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками. В работе задача определения закона распределения неизвестных касательных напряжений, действующих между деформируемым основанием и стрингерами, сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с конечным числом неизвестных функций, определённых на различных конечных интервалах, которую в определённой области изменения характерного параметра задачи в банаховом пространстве B можно решать методом последовательных приближений. Рассмотрены некоторые частные случаи и выяснен характер и поведение неизвестных напряжений, действующих между полуплоскостью и стрингерами. Далее, в зависимости от изменения значения характерных параметров задачи осуществлен численный расчёт. Результаты вычислений представлены на графиках.

1. Введение.

Исследованию задач, связанных с передачей нагрузки от тонкостенных элементов в виде упругих стрингеров (накладок) к более массивным упругим телам моделированных в виде классических и неклассических областей теории упругости посредством липких сдвиговых слоёв (обусловленных как их теоретической, так и большой практической важностью), посвящено немало работ. Здесь отметим некоторые из них [1-8], тесно связанных с настоящей работой.

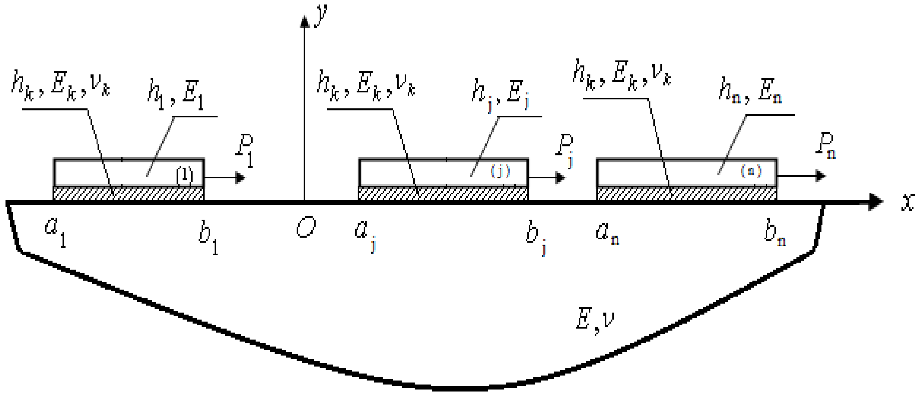
Задачи для линейно-деформируемого основания в виде упругой полуплоскости, бесконечной пластины и полосы, усиленного одним конечным стрингером (накладкой) посредством липкого слоя разными подходами, рассмотрены в работах [1-5], а задачи о передаче нагрузок от двух стрингеров конечных длин к упругим основаниям посредством липких слоёв, рассмотрены в работах [6,7]. В работе [8] рассмотрена задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами посредством липкого слоя с одним стрингером. В настоящей работе рассматривается задача для упругой полуплоскости, которая на конечных отрезках вдоль своей границы усилена произвольным конечным числом конечных стрингеров (накладок) с различными модулями упругости и с малыми постоянными толщинами. Контактное взаимодействие между деформируемым основанием и стрингерами осуществляются посредством тонких липких сдвиговых слоёв с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками.

2. Постановка задачи и вывод системы разрешающих интегральных уравнений.

Пусть упругая полуплоскость с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν на конечных отрезках $\left[a_j,b_j\right]$ $\left(b_j>a_j,\ j=\overline{1,n};\ b_j<a_{j+1},\ j=\overline{1,n-1}\right)$ своей границы $y=0$ (в плоскости xOy) усилена конечным числом конечных стрингеров (накладок) малых толщин $h_j\ \left(h_j<<b_j-a_j;\ j=\overline{1,n}\right)$, модуль упругости которых при $x\in\left[a_j,b_j\right]$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ равен E_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно. Контактное

взаимодействие между полуплоскостью и стрингерами во всех участках их скрепления осуществляется посредством одинаковых, тонких липких слоёв с модулем упругости E_k, коэффициентом Пуассона ν_k и малой толщиной h_k. Задача заключается в определении закона распределения неизвестных напряжений, действующих между полуплоскостью и стрингерами, когда вдоль оси стрингеров в точках $x = b_j, j = \overline{1,n}$ приложены сосредоточенные силы $P_j \left(j = \overline{1,n} \right)$, которые направлены вдоль оси Ox в одну сторону (фиг. 1).

Для стрингеров (накладок) принимается модель одномерного упругого континуума [9,10], а для липких слоёв – условия чистого сдвига [1]. При таких предположениях полагается, что между деформируемым основанием и стрингерами действуют только касательные напряжения [1-8].



Фиг. 1

Согласно вышесказанному и известным предположениям [1,9,10], запишем дифференциальные уравнения равновесия стрингеров, находящихся на отрезках $\left[a_j, b_j \right] \left(j = \overline{1,n} \right)$, в виде:

$$\frac{d^2 u^{(j)}}{dx^2} = \frac{\tau_j(x)}{E_j h_j}, \quad a_j \le x \le b_j, \quad j = \overline{1,n} \tag{1}$$

Здесь $u^{(j)}(x) \left(j = \overline{1,n} \right)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров на участках $\left[a_j, b_j \right] \left(j = \overline{1,n} \right)$, причём, производные от них (т.е. деформации стрингеров) в концевых точках стрингеров удовлетворяют определённым граничным условиям (которые будут представлены далее), а $\tau_j(x)$ – касательные напряжения, действующие под стрингерами на участках $\left[a_j, b_j \right] \left(j = \overline{1,n} \right)$, соответственно.

Теперь, полагая, что каждый дифференциальный элемент липкого слоя находится в условиях чистого сдвига [1-8], будем иметь следующие условия:

$$u^{(j)}(x) - u(x,0) = k\tau_j(x), \quad a_j \le x \le b_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

поскольку

$$u^{(j)}(x)-u(x,0)=h_k\gamma_k^{(j)}(x),\quad \tau_j(x)=G_k\gamma_k^{(j)}(x),\quad a_j\le x\le b_j,\quad j=\overline{1,n},$$

где $k=h_k/G_k$, $G_k=E_k/2(1+\nu_k)$, G_k- модуль сдвига материала липких слоёв, $u(x,0)-$ горизонтальные перемещения граничных точек упругой полуплоскости, $\tau_j(x)-$касательные напряжения в липких слоях, а $\gamma_k^{(j)}(x)-$деформация сдвига в липких слоях на участках $[a_j,b_j]$ $(j=\overline{1,n})$, соответственно.

С другой стороны, согласно вышесказанному, запишем горизонтальные перемещения $u(x,0)$ граничных точек упругой полуплоскости, когда на конечных отрезках $[a_j,b_j]$ $(j=\overline{1,n})$ своей границы $y=0$ действуют касательные силы интенсивности $\tau_j(x)$ $(j=\overline{1,n})$ соответственно, в виде:

$$u(x,0)=\frac{1}{\pi A}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+C\right)\tau_i(s)\,ds, \tag{3}$$

где $A=E/2(1-\nu^2)$, $C-$произвольная постоянная.

Далее, имея в виду (2), уравнения (1) можно представить в виде:

$$\frac{d^2u^{(j)}}{dx^2}-\gamma_j^2u^{(j)}(x)=-\gamma_j^2\,u(x,0),\quad a_j\le x\le b_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{4}$$

где имеют место также и граничные условия:

$$\left.\frac{du^{(j)}}{dx}\right|_{x=a_j}=0,\qquad \left.\frac{du^{(j)}}{dx}\right|_{x=b_j}=\frac{P_j}{E_jh_j},\qquad j=\overline{1,n}\,. \tag{5}$$

Здесь

$$\gamma_j^2=1/kE_jh_j,\quad j=\overline{1,n}.$$

Решения граничных задач (4), (5) получим в виде:

$$u^{(j)}(x)=u_0^{(j)}(x)+\gamma_j^2\int_{a_j}^{b_j}G_j(x,s)u(s,0)\,ds,\quad a_j\le x\le b_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

где $u_0^{(j)}(x)$ $(j=\overline{1,n})$ $-$ общие решения соответствующих (4) однородных уравнений при соответствующих граничных условиях (5) и имеют вид:

$$u_0^{(j)}(x)=\frac{P_j\,\mathrm{ch}\left[\gamma_j(x-a_j)\right]}{\gamma_jE_jh_j\,\mathrm{sh}\left[\gamma_j(b_j-a_j)\right]},\qquad j=\overline{1,n},$$

а $u_*^{(j)}(x)=\gamma_j^2\int\limits_{a_j}^{b_j} G_j(x,s)u(s,0)ds,\ \ j=\overline{1,n},$ где $G_j(x,s)-$ функции Грина [11], являются частными решениями уравнения (4) при нулевых граничных условиях: $\left(du^{(j)}/dx\right)_{x=a_j}=0$, $\left(du^{(j)}/dx\right)_{x=b_j}=0$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, причём

$$G_j(x,s)=\frac{1}{\gamma_j \operatorname{sh}\left[\gamma_j\left(b_j-a_j\right)\right]}\begin{cases}\operatorname{ch}\gamma_j\left(x-b_j\right)\operatorname{ch}\gamma_j\left(s-a_j\right), & x>s,\\ \operatorname{ch}\gamma_j\left(x-a_j\right)\operatorname{ch}\gamma_j\left(s-b_j\right), & x<s,\quad j=\overline{1,n}.\end{cases}$$

Очевидно, что $G_j(x,s)-$ непрерывные функции и $G_j(x,s)=G_j(s,x)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Далее, в силу (6) и согласно условиям (2) получим следующие уравнения:

$$k\tau_j(x)+u(x,0)=\gamma_j^2\int\limits_{a_j}^{b_j} G_j(x,s)u(s,0)ds+u_0^{(j)}(x),\ \ a_j\le x\le b_j,\ \ j=\overline{1,n}. \quad (7)$$

Отметим, что спектром симметричного дифференциального оператора $D=-d^2/dx^2+\gamma^2 I$, областью определения которого являются дважды непрерывно дифференцируемые функции $u(x)$, удовлетворяющие условиям $(du/dx)_{x=a}=0$, $(du/dx)_{x=b}=0$, являются собственные значения $\lambda_m=\gamma^2+m^2\pi^2/(b-a)^2$ $(m=0,1,2,...)$, а соответствующими собственными функциями являются функции $\cos\left[m\pi(x-a)/(b-a)\right]$ $(m=0,1,2,...)$.

Далее известно [11], что симметричный, вполне непрерывный оператор B:

$$B\varphi=\int\limits_a^b G(x,s)\varphi(s)ds,$$

действующий в $L_2(a,b)$, является обратным оператором оператора D.

Следовательно, будем иметь:

$$\int\limits_{a_j}^{b_j} G_j(x,s)\cos\left[\frac{m\pi\left(s-a_j\right)}{b_j-a_j}\right]ds=\frac{\left(b_j-a_j\right)^2}{\left(b_j-a_j\right)^2\gamma_j^2+m^2\pi^2}\cos\left[\frac{m\pi\left(x-a_j\right)}{b_j-a_j}\right],\ m=0,1,2,...,j=\overline{1,n}, \quad (8)$$

где функции $\cos\left[\dfrac{m\pi\left(x-a_j\right)}{b_j-a_j}\right]$ $(m=0,1,2,...)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ образуют полную ортогональную систему в пространствах $L_2\left(a_j,b_j\right)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно.

Теперь, имея в виду (3), из (7) будем иметь:

$$\tau_j(x)+\frac{1}{\pi kA}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+C\right)\tau_i(s)\,ds=$$
$$=\frac{\gamma_j^2}{\pi kA}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j}G_j(x,s)\left[\int_{a_i}^{b_i}\left(\ln\frac{1}{|s-t|}+C\right)\tau_i(t)\,dt\right]ds+\frac{u_0^{(j)}(x)}{k},\ a_j\le x\le b_j,\ j=\overline{1,n}. \tag{9}$$

Далее, после замены переменных x на ax, s на as, t на at, где $a>0-$ координата одной из крайних точек стрингеров, из системы (9) получим:

$$\varphi_j(x)+\delta^2\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\ln\frac{1}{|x-t|}\varphi_i(t)\,dt-a\gamma_j^2\delta^2\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}G_j(ax,as)\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\ln\frac{1}{|s-t|}\varphi_i(t)\,dt\,ds-\frac{au_0^{(j)}(ax)}{k}=0,$$
$$\alpha_j\le x\le\beta_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{10}$$

поскольку, согласно (8), имеют место равенства:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j}G_j(ax,as)\,ds=\frac{1}{a\gamma_j^2},\quad j=\overline{1,n}. \tag{11}$$

Здесь

$$\delta^2=a/\pi kA,\ \alpha_j=a_j/a,\ \beta_j=b_j/a,\ \varphi_j(x)=a\tau_j(ax)\ \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Систему интегральных уравнений (10) можно представить и так:

$$\varphi_j(x)+\delta^2\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}M_j(x,t)\varphi_i(t)\,dt=g_0^{(j)}(x),\quad \alpha_j\le x\le\beta_j,\ j=\overline{1,n}, \tag{12}$$

где

$$M_j(x,t)=\ln\frac{1}{|x-t|}-a\gamma_j^2\int_{\alpha_j}^{\beta_j}G_j(ax,as)\ln\frac{1}{|s-t|}\,ds,\quad j=\overline{1,n},$$
$$g_0^{(j)}(x)=\frac{au_0^{(j)}(ax)}{k}=\frac{P_ja\gamma_j\,\mathrm{ch}\left[a\gamma_j\left(x-\alpha_j\right)\right]}{\mathrm{sh}\left[a\gamma_j\left(\beta_j-\alpha_j\right)\right]},\quad j=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Отметим, что при получении системы (12) был изменен порядок интегрирования, достоверность которого следует из теоремы Фубини [11]. В дальнейшем часто будем пользоваться теоремой Фубини, не отмечая это особо.

Теперь рассмотрим некоторые возможные частные случаи, которые непосредственно можно получить из системы (12). При $\delta^2=0$ получим решение поставленной задачи в случае жёсткого основания (т.е. при $E\to\infty$) в виде $\varphi_j(x)=g_0^{(j)}(x)\ \left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно. В случае одного конечного стрингера, заданного на участке $[a_1,b_1]$ (т.е. при $n=1$ в системе (12) имеем $j;i=1$), вместо системы (12) будем иметь интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $\varphi_1(x)$, определённой на отрезке $[\alpha_1,\beta_1]$:

$$\varphi_1(x)+\delta^2\int_{\alpha_1}^{\beta_1} M_1(x,t)\varphi_1(t)\,dt = g_0^{(1)}(x), \quad \alpha_1 \le x \le \beta_1, \tag{12a}$$

Отметим также, что при выводе системы (12) нигде не использовались условием равновесия стрингеров:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \tau_j(ax)dx = P_j / a \qquad \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{14}$$

В системе интегральных уравнений (12), условия (14) выполняются автоматически, поскольку имеют место равенства:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} g_0^{(j)}(x)dx = P_j / a \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

В этом можно легко убедиться, если проинтегрировать первое уравнение системы (12) в пределах от α_1 до β_1, второе уравнение – в пределах α_2 до β_2 и последнее – в пределах от α_n до β_n, а затем изменить порядок интегрирования в полученных повторных интегралах с учётом равенства:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} M_j(x,t)\,dx = 0, \qquad j=\overline{1,n},$$

которые следуют из (8), соответственно.

Таким образом, решение задачи сведено к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода (12), ядра которых квадратично интегрируемы по двум переменным и с правыми частями которых являются решения задачи в случае жёсткого основания. Из системы (12) легко заметить, что в концевых точках стрингеров $x=\alpha_j$, $x=\beta_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, неизвестные касательные напряжения $\varphi_j(x)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ принимают конечные значения.

3. Исследование разрешимости системы интегральных уравнений (12).

Систему (12) запишем в виде:

$$\psi + S\psi = f_0 \tag{15}$$

где ψ и f_0 – столбцы, соответственно, с элементами φ_j и $g_0^{(j)}$, $j=\overline{1,n}$, а S – матрица с элементами $\delta^2 k_{ji}$, при этом,

$$k_{ji}\varphi_i = \int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} M_j(x,t)\varphi_i(t)\,dt \quad \left(j;i=\overline{1,n}\right). \tag{16}$$

Рассмотрим операторное уравнение (15) в банаховом пространстве B вектор-функций $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, где $X_j \in L_2\left(\alpha_j, \beta_j\right)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ с нормой

$\|X\| = \max\left\{\|X_1\|_{L_2(\alpha_1,\beta_1)}, \|X_2\|_{L_2(\alpha_2,\beta_2)}, \ldots, \|X_n\|_{L_2(\alpha_n,\beta_n)}\right\}$. Здесь $L_2\left(\alpha_j,\beta_j\right)$ – пространство квадратично суммируемых функций, определённых на интервале $\left(\alpha_j,\beta_j\right)$.

Операторы $k_{ji}\left(j;i=\overline{1,n}\right)$ действуют следующим образом k_{ji}: $L_2\left(\alpha_i,\beta_i\right) \to L_2\left(\alpha_j,\beta_j\right)$ $\left(j;i=\overline{1,n}\right)$, причем при $j=i=\overline{1,n}$ они действуют в пространствах $L_2\left(\alpha_1,\beta_1\right),\ldots,L_2\left(\alpha_n,\beta_n\right)$, соответственно.

Очевидно, что оператор S действует в пространстве B и является фредгольмовым. Тогда операторное уравнение (15) в пространстве B можно решать методом последовательных приближений, если $\|S\|<1$, причём

$$\|S\| = \max\left\{\delta^2\left(\|k_{11}\|+\ldots+\|k_{1n}\|\right),\quad \delta^2\left(\|k_{21}\|+\ldots+\|k_{2n}\|\right),\ldots,\delta^2\left(\|k_{n1}\|+\ldots+\|k_{nn}\|\right)\right\}.$$

Следовательно, условие $\|S\|<1$ будет выполняться, если

$$\delta^2\left(\|k_{11}\|+\ldots+\|k_{1n}\|\right)<1,\ \delta^2\left(\|k_{21}\|+\ldots+\|k_{2n}\|\right)<1,\ldots,\delta^2\left(\|k_{n1}\|+\ldots+\|k_{nn}\|\right)<1. \tag{17}$$

Решение уравнения (15) запишется в виде:

$$\psi = \left(\mathrm{I}+S\right)^{-1} f_0 = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m S^m f_0.$$

Теперь найдём те значения параметра δ^2, при которых будут удовлетворяться условия (17). Из (16), в силу неравенства Коши-Буняковского, будем иметь:

$$\|k_{ji}\| \le c_{ji},\ \text{где}\ c_{ji} = \left(\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} M_j^2(x,t)\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}},\ \left(j;i=\overline{1,n}\right). \tag{18}$$

Как следует из выражений для c_{ji} $\left(j;i=\overline{1,n}\right)$, их трудно вычислить, но можно оценить. Не останавливаясь на подробностях, отметим, что с помощью равенства Парсеваля для ядер $M_j(x,t)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, а также соотношения (8) и неравенства Коши-Буняковского, можно получить следующие оценки:

$$c_{ji} < \frac{l_j}{2}\left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \ln^2|x-t|\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad j;i=\overline{1,n}, \quad l_j=\beta_j-\alpha_j, \tag{19}$$

Тогда условия (17) будут выполняться, если:

$$\delta^2 < \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\right)^{-1} = c_j, \ \ j=\overline{1,n}. \tag{20}$$

Следовательно, условия выполнения (17) получим в виде:

$$\delta^2 < \min\left(c_1, c_2, ..., c_n\right), \tag{21}$$

где $c_j \left(j=\overline{1,n}\right) -$ положительные числа, меньшие единицы.

Отметим, что оценка (19) при $j;i=1$ другим методом получена и в работе [5]. Значения касательных напряжений $\varphi_j\left(x\right)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ в концевых точках стрингеров $x=\alpha_j$, $x=\beta_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ получим из системы (12).

4. Численные результаты и их анализ.

Для двух случаев поставленных задач, указанных выше (т.е. в случаях $n=1$ и $n=2$), исходя из интегрального уравнения (12а) и системы интегральных уравнений (12), проведён анализ числовых результатов. Поскольку $\alpha_1 = a_1/a,\ \beta_1 = b_1/a$, и $\alpha_2 = a_2/a,\ \beta_2 = b_2/a$, приняв $a_1=-a,\ b_1=a$ и $a_2=2a,\ b_2=4a$, получим $\alpha_1=-1,\ \beta_1=1$ и $\alpha_2=2,\ \beta_2=4$. Тогда интегральное уравнение (12а) запишем в виде:

$$p^*\left(x\right) = \delta_*\int_{-1}^{1} K\left(x,t\right)p^*\left(t\right)dt + f\left(x\right), \quad -1\le x\le 1, \tag{12а*}$$

а систему интегральных уравнений (12) в случае $n=2$ – в виде:

$$p^*\left(x\right) = \delta_*\int_{-1}^{1} K\left(x,t\right)p^*\left(t\right)dt + \delta_*\theta\int_{2}^{4} K\left(x,t\right)q^*\left(t\right)dt + f\left(x\right), \quad -1\le x\le 1, \tag{12б*}$$

$$q^*\left(x\right) = \delta_*\int_{2}^{4} M\left(x,t\right)q^*\left(t\right)dt + \delta_*\theta^{-1}\int_{-1}^{1} M\left(x,t\right)p^*\left(t\right)dt + g\left(x\right), \quad 2\le x\le 4,$$

Здесь введены безразмерные величины и обозначения:

$$p^*\left(x\right)=\varphi_1\left(x\right)/P_1, \quad q^*\left(x\right)=\varphi_2\left(x\right)/P_2, \quad \delta_*=\delta^2, \quad \theta = P_2/P_1,$$

$$h_k^* = h_k/a,\ h_j^*=h_j/a,\ \kappa_j=E_j/E,\ j=1,2,$$

$$f\left(x\right)=\frac{\gamma_1^*\,\mathrm{ch}\left[\gamma_1^*\left(x+1\right)\right]}{\mathrm{sh}\left(2\gamma_1^*\right)},\ g\left(x\right)=\frac{\gamma_2^*\,\mathrm{ch}\left[\gamma_2^*\left(x-2\right)\right]}{\mathrm{sh}\left(2\gamma_2^*\right)}, \quad \gamma_j^*=a\gamma_j=\left(\frac{\kappa_j E h_k^* h_j^*}{G_k}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$K(x,t)=\ln|x-t|-\gamma_1^*\int_{-1}^{1}G_1^*(x,s)\ln|s-t|\,ds,\;\; K(x,t)=-M_1(x,t),$$

$$M(x,t)=\ln|x-t|-\gamma_2^*\int_{2}^{4}G_2^*(x,s)\ln|s-t|\,ds,\;\; M(x,t)=-M_2(x,t),$$

$$G_j^*(x,s)=\frac{1}{\operatorname{sh}(2\gamma_j^*)}\begin{cases}\operatorname{ch}\left[\gamma_j^*(x-\beta_j)\right]\operatorname{ch}\left[\gamma_j^*(s-\alpha_j)\right], & x>s,\\ \operatorname{ch}\left[\gamma_j^*(x-\alpha_j)\right]\operatorname{ch}\left[\gamma_j^*(s-\beta_j)\right], & x<s,\end{cases}\quad j=1,2.$$

Далее, после вычисления соответствующих интегралов (19) в рассматриваемых случаях, согласно (21), для уравнения (12а*) получим условие разрешимости методом последовательных приближений в виде $\delta_*<0.36$, а для системы уравнений (12б*) – в виде $\delta_*<0.201$ (в этом случае $c_{11}=c_{22}\approx 2.76$ и $c_{12}=c_{21}\approx 2.20$).

Результаты решения интегрального уравнения (12а*) и системы интегральных уравнений (12б*) методом последовательных приближений для некоторых значений характерных параметров задачи δ_* и $\gamma_j^*\,(j=1,2)$ при $\theta=1$ приводятся в виде графиков. Вычисления проводились при помощи программы «Mathematica 9.0».

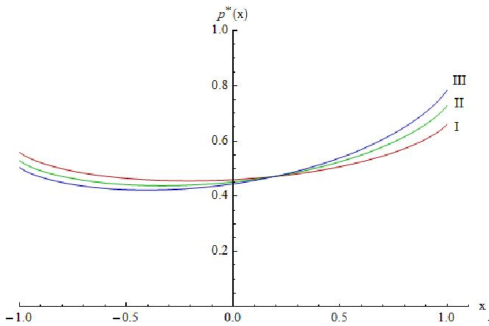
В расчётах для материала липких слоёв выбран конструкционный клей Redux 775 [12] с модулем сдвига $G_к=1.20$ ГПа или с модулем упругости $E_k=3.35$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu_к=0.395$ (используется в авиастроении для соединения металла с металлом и других конструкционных материалов, в частности, для скрепления стрингеров [12]).

Для безразмерной толщины липких слоёв везде в расчётах принято $h_k^*=2.5\cdot 10^{-2}$ (для всех типов Redux h_k на практике принимает значения от 10^{-2} до $2.5\cdot 10^{-2}$ см [12]), а для толщины стрингеров принято $h_j^*=40h_k^*\,(j=1,2)$. Тогда, полагая $E/G_k=10^2$, которое имеет место, если $E=120$ ГПа (соответствует например, для бронзы [13]), в случае $\kappa_j=3\,(j=1,2)$ получим $\gamma_j^*=0.35$ (здесь и в дальнейшем индекс j принимает значения $j=1,2$), в случае $\kappa_j=2.5$ получим $\gamma_j^*=0.4$, в случае $\kappa_j=1.6$ получим $\gamma_j^*=0.5$, в случае $\kappa_j=1$ (т.е. $E_j=E$) получим $\gamma_j^*=0.6$. В рассматриваемых случаях для параметра δ_* получим: $\delta_*=0.2$.

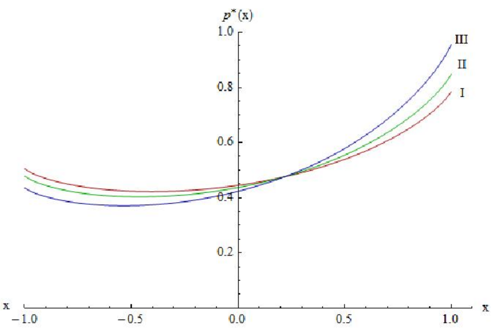
Отметим, что в случае $\kappa_j=1$, когда материал основания и стрингера из алюминиевого сплава [13] с модулем упругости $E=75$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu=0.35$ (в этом случае $E/G_k=0.6\cdot 10^2$), будем иметь $\delta_*=0.3$ и $\gamma_j^*=0.85$. Тогда, если $\delta_*=0.3$ и $\gamma_j^*=0.5$, для модуля упругости стрингеров получим $E_j = 200$ ГПа (соответствует материалу стали [13]). При значениях $\delta_* = 0.3$ и $\gamma_j^* = 0.6$, для E_j получим: $E_j = 140$ ГПа, а при значениях $\delta_* = 0.3$ и $\gamma_j^* = 0.7$ для E_j получим: $E_j = 100$ ГПа (соответствует материалам – титану, латуни [13]).

Для упругой бесконечной пластины [6] будем иметь соответственно такие же значения для параметра $\overline{\delta_*}$ (здесь $\overline{\delta_*} = \overline{\delta}^2$), если $d / b_1^* = 0.6$.

Некоторые численные результаты решения интегрального уравнения (12а*) при различных значениях параметров δ_* и $\gamma_1^* = \gamma^*$, приводятся ниже в виде графиков. Кривые, представленные на фиг. 2 и 3, графически иллюстрируют соответствующие решения уравнения (12а*), полученного методом последовательных приближений (сходятся при шестом приближении) для различных значений δ_* и γ^*. На фиг.2 кривые I, II и III соответствуют значениям $\delta_* = 0.2$ и $\gamma^* = 0.35$; $\gamma^* = 0.5$; $\gamma^* = 0.6$, соответственно, а на фиг.3 кривые I, II и III соответствуют значениям $\delta_* = 0.3$ и $\gamma^* = 0.6$; $\gamma^* = 0.7$; $\gamma^* = 0.85$, соответственно.

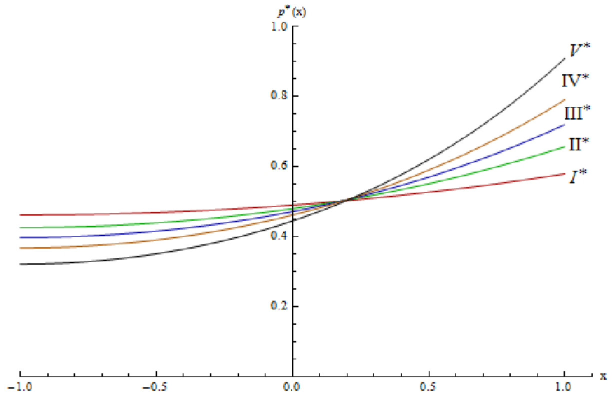


Фиг. 2



Фиг. 3

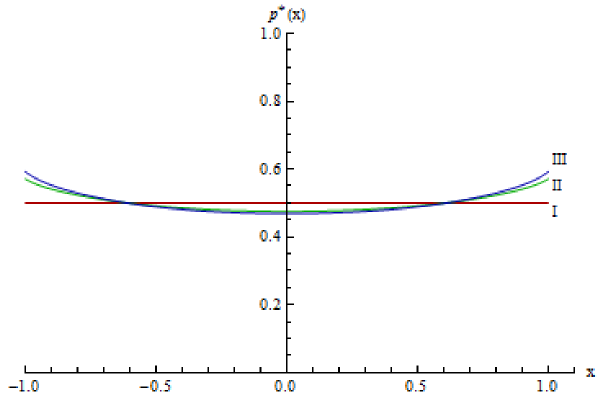
Кривые, представленные на фиг.4, являются начальными решениями (нулевыми приближениями) интегрального уравнения (12а*), полученными методом последовательных приближений при различных значениях параметра γ^*. Они одновременно графически иллюстрируют закон распределения касательных напряжений, действующих под стрингером конечной длины в случае абсолютно жёсткого основания (т.е. в случае $\delta_* = 0$). На фиг.4 кривые I*, II*,…, V* соответствуют значениям $\gamma^* = 0.35$ и $\gamma^* = 0.5$; $\gamma^* = 0.6$; $\gamma^* = 0.7$; $\gamma^* = 0.85$, соответственно.



Фиг. 4

Из расчётов и соответствующих графиков следует, что с уменьшением значения параметра γ^* касательные напряжения уменьшаются вблизи конца стрингера $x=1$ и, наоборот, увеличиваются вблизи конца стрингера $x=-1$. Это означает что, чем жёстче материал стрингера, тем симметричнее распределяются касательные напряжения относительно середины стрингера, в противном случае, касательные напряжения концентрируются вблизи конца стрингера, где приложена сила. Далее, с уменьшением значения параметра δ_* при тех же значениях γ^* соответствующие значения касательных напряжений уменьшаются.

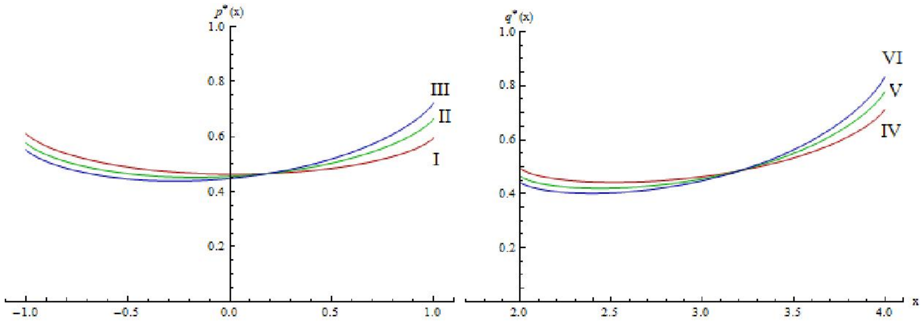
На фиг.5 кривые I, II и III показывают закон распределения касательных напряжений в случае жёсткого стрингера, т.е. когда $\gamma^* \approx 0$ (в расчётах принято $\gamma^* = 1 \cdot 10^{-6}$). Здесь кривая I соответствует значениям параметров $\delta_* = 0$ и $\gamma^* \approx 0$, т.е. когда материал основания и стрингера становится жёстким. В этом случае касательные напряжения распределяются равномерно и принимает постоянное значение: $p^*(x) = 0.5$.



Фиг. 5

Кривые II и III, представленные на фиг.5 соответствуют значениям параметров $\gamma^* \approx 0$ и $\delta_* = 0.2;\ \delta_* = 0.3$, соответственно, при которых касательные напряжения распределяются симметрично относительно середины стрингера.

Некоторые результаты решения системы интегральных уравнений (12б*) при различных значениях параметров δ_* и γ_1^*, γ_2^* приводятся ниже в виде графиков. Кривые, представленные на фиг.6 и 7 иллюстрируют соответствующие решения системы (12б*), полученной методом последовательных приближений для различных значений δ_* и γ_1^*, γ_2^*.

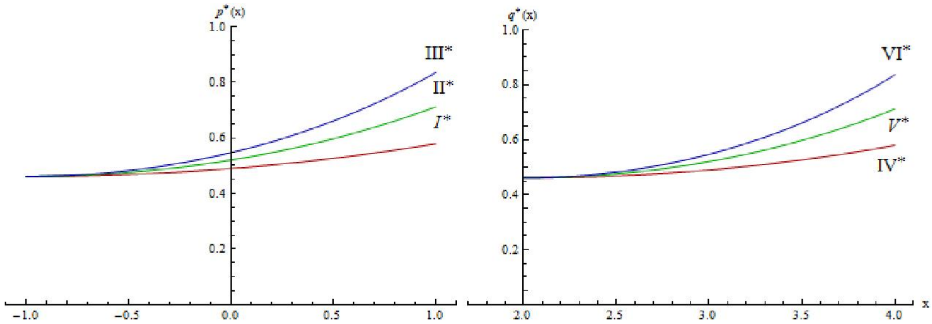


Фиг. 6

На фиг.6 при значениях $\delta_* = 0.2$ кривые I и IV соответствуют значениям параметров $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.35$ соответственно, кривые II и V соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.5$, а кривые III и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.6$.

Далее, с помощью соответствующих результатов вычислений будем иметь, что кривые I и V, представленные на фиг.6 с незначительной ошибкой (не влияют, в общем, на вид графиков), соответствуют также значениям $\delta_* = 0.2$ и $\gamma_1^* = 0.35;\ \gamma_2^* = 0.5$, соответственно, кривые I и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.35;\ \gamma_2^* = 0.6$, кривые II и IV соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.5;$ $\gamma_2^* = 0.35$, кривые II и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.5;\ \gamma_2^* = 0.6$ и т.д.

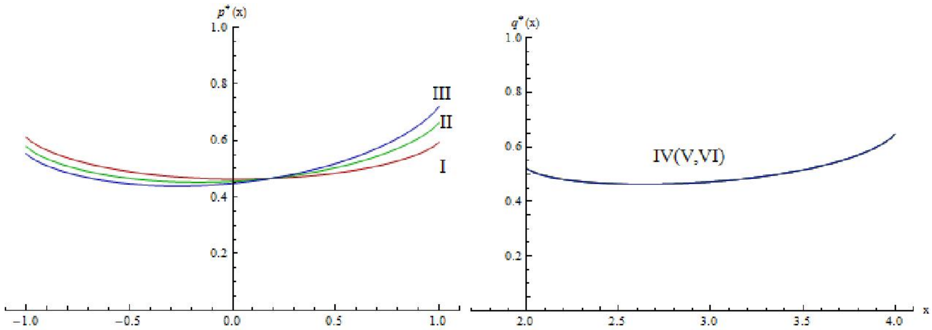
Кривые, полученные соответственно на фиг. 7 представляют закон распределения касательных напряжений, действующих под двумя конечными стрингерами в случае абсолютно жёсткого основания (т.е. в случае $\delta_* = 0$). Они одновременно являются и начальными решениями (нулевыми приближениями) системы интегральных уравнений (12б*), полученных методом последовательных приближений при различных значениях параметров γ_1^*, γ_2^* в виде кривых I*, II* , III* и IV*, V* , VI*, соответственно.



Фиг. 7

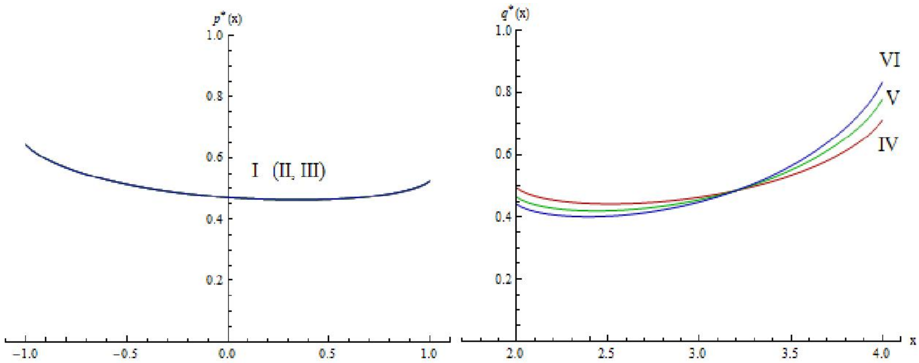
На фиг.7 кривые I* и IV* соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.35$ соответственно, кривые II* и V* – значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.5$, а кривые III* и VI* – значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.6$, соответственно. Кривые I* и V* соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.35$ и $\gamma_2^* = 0.5$, кривые I* и VI* соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.35$ и $\gamma_2^* = 0.6$, соответственно, и т.д.

Когда материал одного из двух конечных стрингеров становится жёстким, закон распределения касательных напряжений приведён на фиг. 8 и 9. На фиг.8 при значениях $\delta_* = 0.2$ кривые I и IV соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.35$; $\gamma_2^* \approx 0$, соответственно, кривые II и V соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.5$; $\gamma_2^* \approx 0$, а кривые III и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* = 0.6$; $\gamma_2^* \approx 0$.



Фиг. 8

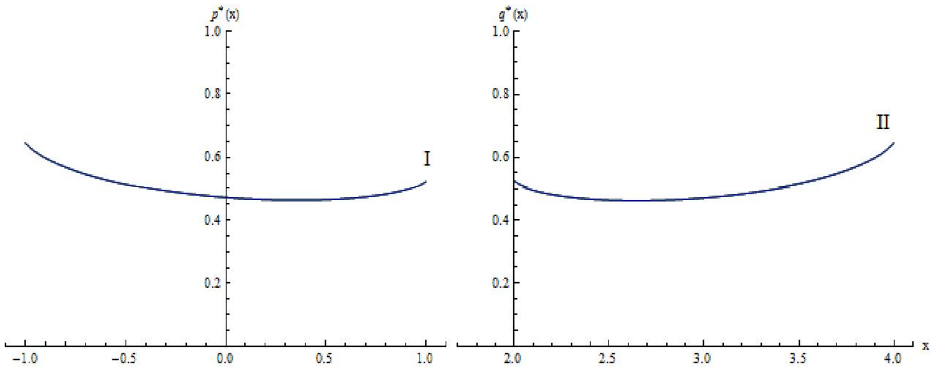
В случае, когда материал первого стрингера слева становится жёстким, результаты вычисления приведены на фиг.9. На фиг.9 при значениях $\delta_* = 0.2$, кривые I и IV соответствуют значениям параметров $\gamma_1^* \approx 0$; $\gamma_2^* = 0.35$ соответственно, кривые I и V соответствуют значениям $\gamma_1^* \approx 0$; $\gamma_2^* = 0.5$, а кривые I и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* \approx 0$; $\gamma_2^* = 0.6$.



Фиг. 9

Из расчётов и соответствующих графиков следует, что если в случае одного конечного жёсткого стрингера касательные напряжения распределяются симметрично относительно середины стрингера, то в случае двух стрингеров, когда материал одной из двух стрингеров становится жёстким, симметричность нарушается, что обусловлено значительным воздействием стрингеров друг на друга.

Когда материал обоих стрингеров становится жёстким, закон распределения касательных напряжений приведён на фиг.10. Кривые I и II, представленные на фиг. 10, иллюстрируют соответствующие решения системы (12б*), полученной методом последовательных приближений при значениях $\delta_* = 0.2$ и $\gamma_1^* \approx 0$; $\gamma_2^* \approx 0$.



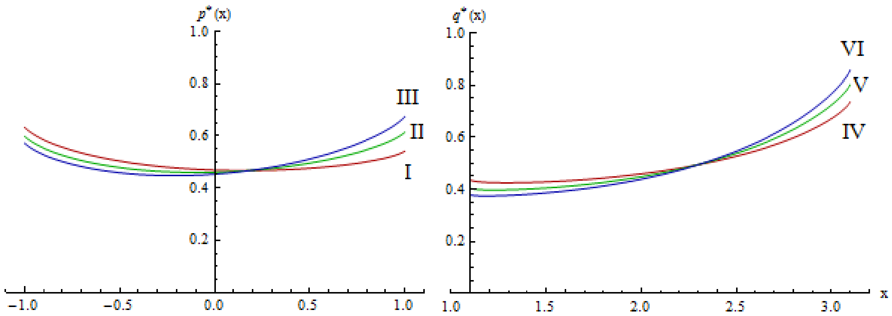
Фиг. 10

Из вычислений следует, что в этом случае касательные напряжения распределяются симметрично относительно середины промежуточного интервала между стрингерами, а в концевых точках стрингеров $x = 1$, $x = 2$ и $x = -1$, $x = 4$ соответственно, они принимают одинаковые значения.

В случае, когда материал и основания, и стрингеров становится жёстким, т.е. когда $\delta_* = 0$ и $\gamma_1^* \approx 0$; $\gamma_2^* \approx 0$, касательные напряжения распределяются равномерно и принимают одинаковые постоянные значения: $p^*(x) = 0.462$ и $q^*(x) = 0.462$.

Далее, с изменением расстояния между двумя стрингерами оставляя их длины неизмененными, изменяются и условия разрешимости системы уравнений. Когда расстояние между стрингерами увеличивается в два раза, тогда стрингеры будут находиться в интервалах [-1, 1] и [3, 5] соответственно, и условие разрешимости системы уравнений находим в виде: $\delta_* < 0.181$ (в этом случае $c_{ji} \approx 2.76$, $j;i = 1,2$). Приняв для вычислений $\delta_* = 0.18$, а для параметров γ_1^*, γ_2^*, соответственно, те же значения, для касательных напряжений получим те же распределения, как и в предыдущих случаях, только с незначительными изменениями их соответствующих значений.

Когда расстояние между двумя стрингерами уменьшается, т.е. если они находятся в интервалах [-1, 1] и [1.1, 3.1], соответственно, результаты вычисления (при тех же значениях параметров δ_* и γ_1^*, γ_2^* соответствующих на фиг.6) иллюстрируются на фиг.11. Здесь имеется в виду, что условие разрешимости системы уравнений имеет вид: $\delta_* < 0.23$ (в этом случае $c_{11} = c_{22} \approx 2.76$ и $c_{12} = c_{21} \approx 1.62$). На фиг. 11 при значениях $\delta_* = 0.2$ кривые I и IV соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.35$ соответственно, кривые II и V соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.5$, соответственно, а кривые III и VI соответствуют значениям $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.6$.



Фиг. 11

Сравнение результатов вычисления, приведённых на фиг. 11 и 6, показывают, что в рассматриваемом случае при тех же значениях параметров δ_* и γ_1^*, γ_2^* для стрингера, находящегося на участке [-1,1], вблизи конца стрингера $x = -1$ соответствующие значения касательных напряжений увеличиваются и наоборот, вблизи конца стрингера $x = 1$ (т.е. у точки приложения силы) соответствующие значения напряжений значительно уменьшаются. Тогда, для стрингера находящегося на участке [1.1, 3.1], соответствующие значения касательных напряжений вблизи конца стрингера $x = 1.1$ также значительно уменьшаются, а вблизи конца стрингера $x = 3.1$ увеличиваются незначительно (на величину 0,03). Заметим также, что в этом случае, в концевых точках стрингеров $x = 1$ и $x = 1.1$, чем жёстче становятся стрингера, тем разность значений соответствующих напряжений в этих точках уменьшаются и наоборот, увеличиваются в противном случае. Такое поведение напряжений обусловлено в рассматриваемом случае более сильным воздействием стрингеров друг на друга. Отметим также, что в рассматриваемом случае для нулевых решений системы (т.е. для жёсткого основания) будем иметь те же распределения напряжения, какими они и есть на фиг.7.

Заключение. Полученная в работе произвольная конечная система интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно неизвестных касательных напряжений, действующих на различных конечных участках и её исследование на разрешимость, задают эффективное решение поставленной задачи. При помощи этой системы уравнений, как для случая одного конечного стрингера, так и для случая двух конечных стрингеров в зависимости от изменения характерных параметров соответствующих задач, приведён анализ полученных числовых результатов и выяснены закономерности изменения касательных напряжений в зависимости от изменения жёсткостей материалов стрингеров и деформируемого основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive Shear Flow for an Axially Loaded, Finite Stringer Bonded to an Infinite Sheet. -Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. XXIII, 1970, p. 521-533.
2. Керопян А.В., Саркисян В.С. Решение задачи для анизотропной полуплоскости, на границе которой приклеена накладка конечной длины. Юбилейная научн. конферен. посвящ. 60-летию основ. Гюмрийского пед. института. //В сб. научных трудов: т.1, Высшая школа, Гюмри, 1994, с. 73-76. Kerobyan A.V., Sarkisyan V.S. The Solution of the Problem for an Anisotropic Half-plane on the boundary of Which Finite Length Stringer is Glued. Proceedings of the Scientific Conference, Dedicated to the 60th Anniversary of the Pedagogical Institute of Gyumri, V.1,Vysshaya Shkola,Gyumri,1994, p.73–76, (in Russian).
3. Саркисян В.С., Керопян А.В. Некоторые контактные задачи для упругих бесконечных тел, границы которых усилены через слой клея стрингерами (накладками) различных свойств и длин. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. //В сб. научных трудов конференции», ЕГУ, Институт механики НАН Армении, Ереван, 1997, с. 239–244. Sarkisyan V.S., Kerobyan A.V. Some Contact Problems for an Elastic Infinite Bodies, Which Boundary are Reinforced by a Glued Stringers (Overlays) of Different Properties and Length. Optimal Control, Stability and Durability Problems of Mechanical Systems. Proceedings of Conference, YSU, Institute of Mechanics of NAS RA, Yerevan, 1997, p.239–244 (in Russian).
4. Саркисян В.С., Керопян А.В. О решении задачи для анизотропной полуплоскости, на границе которой приклеен нелинейно-деформируемый стрингер конечной длины. //Изв. НАН Армении. Механика. 1997. №3-4, с.17-26. Sarkisyan V.S., Kerobyan A.V. On the Solution of the Problem for Anisotropic Half-plane on the Edge of Which a Nonlinear Deformable Stringer of Finite Length is Glued. Proceedings of NAS RA. Mechanics, V. 50, №3-4, 1997, p.17–26 (in Russian).
5. Григорян Э.Х. О решении задачи для упругой бесконечной пластины на поверхности которой приклеен стрингер конечной длины. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. №4, с.11-16. Grigoryan E. Kh. On Solution of Problem for an Elastic Infinite Plate, one the Surface of Which Finite Length Stringer is Glued. Proceedings of NAS RA, Mechanics, V. 53, №4, 2000, p.11–16 (in Russian)

6. Kerobyan A.V. About Contact Problems for an Elastic Half -Plane and the Infinite Plate with Two Finite Elastic Overlays In the Presence of Shear Interlayers. Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences, №2, 2015, p. 30-38.
7. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полосы и бесконечной пластины с двумя конечными упругими накладками при наличии сдвиговых прослоек. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. №1, с. 22-34. Kerobyan A.V. Contact Problems for an Elastic Layer and the Infinite Plate with Two Finite Elastic Overlays in the Presence of Shear Interlayers. Proceedings of NAS RA, Mechanics, V.67, № 1, 2014, p.22-34 (in Russian)
8. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С. Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. №2, с.14-23. Grigoryan E.Kh., Kerobyan A.V., Shahinyan S.S. The Contact Problem for the Infinite Plate with Two Finite Stringers One from Which is Glued, Other is Ideal Conducted. Proceedings of NAS RA, Mechanics, V.55, №2, 2002, p.14–23 (in Russian).
9. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.-Ingeniuer-Archiv, Bd.3, Heft 2, 1932, s.123-129.
10. Muki R. and Sternberg E. On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi- infinite elastic sheet. Transactions of the ASME, №4,1968, p.737-746.
11. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Гос. изд. физ. мат. лит., 1961, 442с. Shilov G.E. Mathematical Analysis, Special Course, Moscow, 1961, 442 p. (in Russian).
12. Beevers A. Forensic Studies of Adhesive Joints, Report №9, Part-2-Bonded Aircraft Structure, September, 1995, 62p.
13. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ, 1999. 592с. Feodosev V.I. Resistance of materials, MSTY Publishers, Moscow, 1999, 592p. (in Russian).

Сведения об авторах:

Керопян Агаси Вачаганович – к.ф.м.н., доцент, ЕГУ
Адрес: Ереван, ул. А. Манукяна, 1. **Тел.:** 010 461941, 098 033611,
E-mail: agas50@ysu.am
Саакян Карен Пайкарович – к.ф.м.н., доцент, ЕГУ
Адрес: Ереван, ул., А.Манукяна, 1. **Тел.:** 093 243862,
E-mail: karen_sahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 22.11. 2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №3, 2017 Механика

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПРИ УЧЁТЕ УМЕНЬШЕНИЯ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛЫ УПРУГО-ЗАЩЕМЛЁННОЙ ОПОРОЙ

Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Ключевые слова: устойчивость стержня, упруго-защемлённая опора для задачи устойчивости, уменьшение сжимающей силы опорой, действительная критическая сила.

Keywords: The stability of rod, the elastic clamped support of the problem for stability, the real critical force.

Բանալի բառեր. Ձողի կայունությունը, առաձգական ամրակցման հենարան կայունության խնդրի համար, սեղմող ուժի փոքրացում հենարանի կողմից, իրական կրիտիկական ուժ:

Կիրակոսյան Ռ.Մ., Ստեփանյան Ս.Պ.

Ձողի կայունությունը առաձգական ամրակցման հենարանի կողմից սեղմող ուժի փոքրացման հաշվառմամբ

Աշխատանքի հիմնական նպատակն է հեծանի լայնական ծռման համար առաձգական ամրակցման հենարանի պայմանները ընդհանրացնել սեղմվող ձողի կայունության խնդրի համար և ցույց տալ այդ պայմանների իրավացի լինելը նաև այն դեպքում, երբ հաշվի է առնվում առաձգական զանգվածի մեջ մտած ձողի եզրային մասի շփման հետևանքով արտաքին ուժի փոքրացումը: Առաջարկվում է շփման ուժի հաշվառման եղանակ, որի կիրառմամբ լուծվում է հաստատուն կտրվածքով իզոտրոպ ձողի կայունության խնդիրը, երբ նրա մի եզրը ամրակցված է առաձգական, իսկ մյուսը՝ բացարձակ կոշտ: Դիտարկվում է թվային օրինակ: Ստացված անչափ արդյունքների հիման վրա արվում են եզրակացություններ առաձգական ամրակցման հենարանի կոշտությունից կրիտիկական իրական ուժի կախվածության վերաբերյալ:

The stability of rod by taking into account the decrease of the compression force by elastic clamped support

Kirakosyan R.M., Stepanyan .S.P.

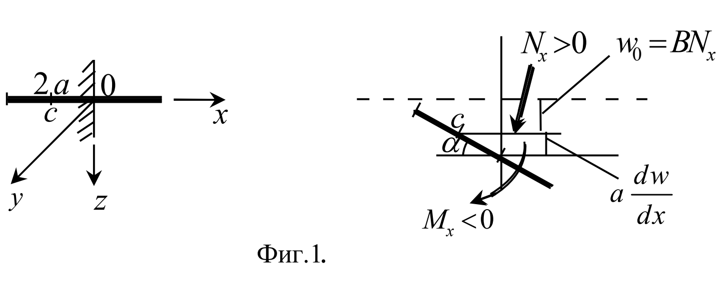
The main objective of the work is to generalize the clamped elastically bendable support conditions for compressed rod stability problem for the rod cross beams. As well as to show that these conditions are true in the case when a decrease of external force due to the friction of the edge of the rod inserted in an elastic solid is taken into account. An accounting method for the friction force is proposed applying which one can solve the stability problem of an isotropic rod of constant cross-section, when one end of the rod is elastically clamped and the other end is clamped completely rigidly. A numerical example is discussed. On the basis of the obtained dimensionless results are made conclusions regarding the dependence of the real critical force from the stiffness of the elastic clamped support.

Основной целью работы является обобщение условий упруго-защемлённой опоры поперечной изгибаемой балки для задачи устойчивости сжатого стержня и обоснование этих условий, когда учитывается уменьшение сжимающей внешней силы вследствие трения краевой части стержня, вставленной в упругий массив. Предлагается способ учёта силы трения, с применением которого решается задача устойчивости изотропного стержня постоянного поперечного сечения, когда один край стержня упруго защемлён, а другой край защемлён абсолютно жёстко. Рассматривается численный пример. На основе полученных безразмерных результатов делаются заключения о зависимости действительной критической силы от жёсткости упруго защемлённой опоры.

Введение. В строительных сооружениях широко применяются упруго-защемлённые опоры. Поэтому, практическую важность имеют разработка конструкций и исследование свойств таких опор. Этим вопросам посвящено много работ ([1]- [13]) и др.). В книгах [1] и [2] рассматриваются теоретические модели упруго-защемлённой опоры, не указывая их конкретные конструкции. В настоящей работе рассматривается упруго-защемлённая опора следующей конструкции: краевая часть стержня малой длины вставлена в упруго-деформируемый массив. Считается, что эта часть совершает перемещение и вращение без деформирования, вследствие чего прогиб и его производная в опорном сечении, в отличие от абсолютно жёсткой опоры, отличны от нуля. В задачах устойчивости стержня на свободном конце опоры действует сжимающая сила, под действием которой происходит трение вставленной части с упругим массивом и на стержень действует только часть внешней силы. В настоящей работе обобщаются условия упруго-защемлённой опоры изгибаемой балки для задачи устойчивости стержня при учёте уменьшения сжимающей силы опорой. Решается задача устойчивости стержня, один край которого упруго-защемлён, а другой край защемлён абсолютно жёстко. На основе полученных безразмерных результатов решения делаются заключения о зависимости действительной критической силы от жёсткости упруго-защемлённой опоры.

1. Упруго-защемлённая опора поперечно изгибаемой балки. Краевая часть балки вставлена в упругий массив. Длина этой части составляет $2a$, что достаточно мало относительно длины балки. Из-за малости длины будем считать, что вставленная часть при изгибе балки, подобно абсолютно твёрдому элементу, будет поступательно перемещаться и вращаться, как одно целое, без деформирования. Поэтому, в её пределах значение производной прогиба $\dfrac{dw}{dx}$ будем считать постоянным. Вставленная часть балки фактически образует упруго-защемлённую опору, которая существует во всех строительных сооружениях.

На фиг.1, для наглядности, изменение положения вставленной части балки при изгибе представлено существенно увеличенно. В опорном сечении балки $x = 0$ возникнут только поперечная сила N_x и изгибающий момент M_x. Для простоты, в принятой правой системе декартовых координат x, y, z положим $N_x > 0,\ M_x < 0$



Фиг.1.

Под действием момента поперечной силы относительно середины вставленной части «$-aN_x$» и момента M_x вставленная часть будет вращаться на некоторый угол α. Будем считать, что тангенс этого угла прямо пропорционален сумме этих моментов. Так как $\frac{dw}{dx} > 0$ при отрицательном моменте, то можно написать

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = D\left(aN_x - M_x\right). \tag{1.1}$$

Постоянный параметр D является обратной величиной жёсткости упруго-защемлённой опоры на вращение. В $СИ$ имеет размерность $Н^{-1}\, м^{-1}$.

Прогиб балки в опорном сечении $w\,(x=0)$ состоит из двух частей. Одна из них возникает от вертикального поступательного перемещения вставленной части балки. По аналогии с гипотезой Фусса – Винклера будем считать, что значение этой части прогиба w_0 прямо пропорционально поперечной силе $N_x\left(x=0\right)$. Вторая часть прогиба является следствием вращения вставленной части и имеет значение $a\frac{dw}{dx}$.
В итоге получим:

$$\left.w\right|_{x=0} = BN_x + a\frac{dw}{dx} \;. \tag{1.2}$$

Постоянная «B» является обратной величиной жёсткости упруго-защемлённой опоры на поступательное вертикальное перемещение. В $СИ$ имеет размерность $Н^{-1}\, м$.

Выражения (1.1) и (1.2) являются условиями упруго-защемлённой опоры при поперечном изгибе балки.

Рассмотрим предельные случаи.
1) Пусть $D \to 0,\ B \to 0$.
Тогда, из (1.1) и (1.2) следует:

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} \to 0, \quad \left.w\right|_{x=0} \to 0\,. \tag{1.3}$$

Следовательно, в этом случае упруго-защемлённая опора стремится к абсолютно жёсткой опоре.
2) $D \to \infty,\ B \to \infty$.
Нетрудно заметить, что в этом случае

$$\left.N_x\right|_{x=0} \to 0, \ \left.M_x\right|_{x=0} \to 0\,, \tag{1.4}$$

т.е. упруго-защемлённая опора стремится к свободному краю балки.

2.Экспериментальное определение параметров упруго-защемлённой опоры.

Для этого надо изготовить опытный образец опоры натуральных размеров и вместо балки сделать выступ малой длины. К сечению $x=0$ надо приложить только вертикальную силу достаточно большой величины Q.

Измерив значения прогиба w и его производной $\dfrac{dw}{dx}$ при $x=0$, можно определить параметры D и B. Так как

$$N_x\big|_{x=0}=Q,\quad M_x\big|_{x=0}=0\,, \tag{2.1}$$

из (1.1) и (1.2) следует:

$$D=\frac{1}{aQ}\frac{dw}{dx}\bigg|_{x=0},\qquad B=\left.\frac{w-a\dfrac{dw}{dx}}{Q}\right|_{x=0}. \tag{2.2}$$

3. Связь между параметрами упруго-защемлённой опоры.

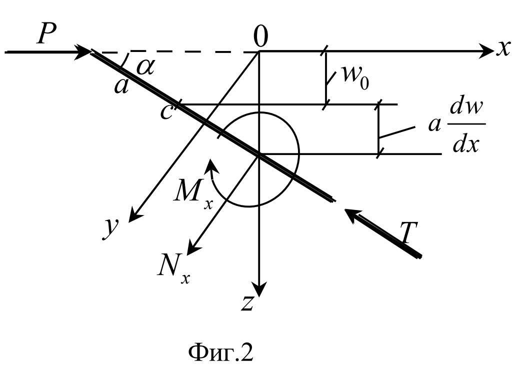
Пользуясь гипотезой Фусса – Винклера будем считать, что нормальные напряжения, которые действуют на верхней и нижней поверхностях вставленной части балки, прямо пропорциональны поступательному вертикальному перемещению w_0 с коэффициентом пропорциональности K_1. Касательные же напряжения действуют на боковых поверхностях вставленной части. Они прямо пропорциональны касательным вертикальным перемещениям с коэффициентом пропорциональности K_2. Эти напряжения возникают по двум причинам: от поступательного вертикального перемещения вставленной части w_0 и от её вращения относительно центра «c». Первая составляющая постоянна, а вторая – линейно знакопеременная. Коэффициенты K_1 и K_2 в $СИ$ имеют размерность $Н\cdot м^{-3}$.

Пользуясь вышесказанным, из условий равновесия вставленной части балки получим:

$$4\,a\,w_0\left(bK_1+h\,K_2\right)=N_x=\frac{w_0}{B},\ \frac{4}{3}a^2\,\frac{dw}{dx}\left(bK_1+h\,K_2\right)=a\,N_x-M_x=\frac{1}{D}\frac{dw}{dx} \tag{3.1}$$

Через b и h обозначены ширина и толщина поперечного сечения вставленной части балки. Из этих равенств получим следующую связь между параметрами упруго-защемлённой опоры:

$$D=\frac{3B}{a^2}\,. \tag{3.2}$$



Фиг.2

4. Условия упруго-защемлённой опоры для задачи устойчивости сжатого стержня.

Рассмотрим задачу устойчивости сжатого стержня при наличии упруго-защемлённой опоры. Будем считать, что левый край стержня упруго защемлён, а правый край неподвижен. На наружном конце упруго-защемлённой опоры приложена горизонтальная осевая сжимающая сила P. На фиг.2 схематически представлен вид упруго-защемлённой опоры при незначительном возмущении стержня. Для наглядности, угол вращения вставленной части α и вертикальное перемещение w_0 показаны существенно увеличенно.

Строго говоря, поперечная сила N_x не вертикальна, а перпендикулярна к оси возмущённого стержя. На правом конце вставленной части действуют изгибающий момент M_x и две взаимоперпендикулярные силы. Осевая сила T не влияет ни на вращение, ни на вертикальное смещение вставленной части. Поперечная цила N_x относительно центра вставленной части «c» даёт вращающий момент $\left(-a\,N_x\right)$, который вместе с моментом M_x стремится вращать вставленную часть на угол, тангенс которого равен $D\left(aN_x - M_x\right)$. На левом конце вставленной части действует горизонтальная сила P, которая относительно точки «c» даёт момент $\left(-P\,a\dfrac{dw}{dx}\right)$, стремящий увеличить тангенс угла вращения на величину $\left(D\,P\,a\dfrac{dw}{dx}\right)$. Поэтому, тангенс полного угла вращения вставленной части будет:

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = D\left(a\,N_x - M_x + P\,a\frac{dw}{dx}\right) \tag{4.1}$$

Рассмотрим теперь вопрос о вертикальном смещении вставленной части. Поперечная сила N_x сообщает этой части стержня перемещение своего направления BN_x. Горизонтальная же сила левого конца P имеет составляющую $P\sin\alpha \approx P\mathrm{tg}\alpha = P\dfrac{dw}{dx}$, перпендикулярную к вставленной части, которая стремится уменьшить это смещение на величину $BP\dfrac{dw}{dx}$. Из-за малости угла α все компоненты перемещения можно считать вертикальными. Поэтому, значение прогиба сечения $x = 0$ будет:

$$\left.w\right|_{x=0} = a\frac{dw}{dx} + BN_x - BP\,\frac{dw}{dx}. \tag{4.2}$$

Выражения (4.1) и (4.2) являются условиями рассматриваемой упруго-защемлённой опоры для задачи устойчивости сжатого стержня.

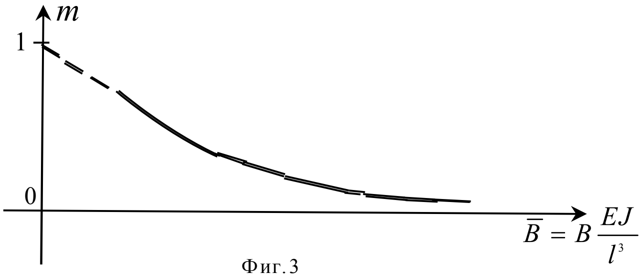
5. Уменьшение сжимаюшей силы упруго-защемлённой опорой.

В отличие от традиционной постановки задачи устойчивости попытаемся учитывать уменьшение сжимающей силы, которое происходит по причине трения вставленной части стержня с упругим массивом под действием приложенной внешней силы P. Нетрудно заметить, что условия упруго-защемлённой опоры (4.1) и (4.2) справедливы и в этом случае, поскольку касательные напряжения трения, действующие на поверхности контакта с упругим массивом, параллельны оси вставленной части, в силу чего они не влияют на значения прогиба и его производной. Вследствие трения на стержень будет действовать не сила P, а её некоторая часть T. Будем считать, что вставленная часть стержня не скользит внутри упругого массива. Тогда можно считать, что сила трения прямо пропорциональна внешней силе P. Следовательно, на стержень будет действовать сила

$$T = P - mP \tag{5.1}$$

Значение коэффициента m зависит от жёсткостей упруго-защемлённой опоры. Так как параметры D и B связаны соотношением (3.2), то эту зависимость можно представить как функцию от одного из них, например, от параметра B. Очевидно, что зависимость $m = m(B)$ является убывающей функцией. При $B = 0$ упруго-защемлённая опора является абсолютно жёсткой опорой и всю силу P целиком берёт на себя, т.е. при $B = 0$; $m = 1$. Конечно, этот предельный случай, в действительности, не существует и всегда $m < 1$ и $T > 0$.

С ростом B упруго-защемлённая опора слабеет, в результате которого коэффициент m уменьшается и при $B \to \infty$ его значение стремится к нулю, т.е. сила трения исчезает и упруго-защемлённая опора превращается в свободный конец. Длина стержня уже становится $l + 2a$.



Фиг.3

На фиг. 3 представлена качественная картинка зависимости $m = m(B)$.

Этим свойством обладает, например, функция

$$m = \frac{1}{1 + \overline{B}^{\beta}}, \ \beta > 0, \tag{5.2}$$

где E – модуль Юнга материала, J – наименьший момент инерции поперечного сечения стержня. Значение β для конкретной упруго-защемлённой опоры можно определить экспериментально. В нижерассматриваемой задаче для простоты будем считать $\beta = 1$.

6. Задача устойчивости стержня при учёте уменьшения сжимающей силы упруго-защемлённой опорой.

Фиг.4

В правой системе декартовых координат x, y, z рассмотрим изотропный стержень длины l и постоянного поперечного сечения произвольной симметричной формы (фиг. 4). Левый край стержня малой

длиной $2a$ вставлен в упругий массив,
образуя упруго-защемлённую опору, а другой край стержня жёстко защемлён. К свободному концу упруго-защемлённой опоры приложена осевая сила P. Из-за трения вставленной части стержня с упругим массивом на стержень действует сила T:

$$T=(1-m)P, \quad m=\frac{1}{1+B\dfrac{EJ}{l^3}} \tag{6.1}$$

Дифференциальное уравнение задачи устойчивости рассматриваемого стержня имеет известный вид [1]:

$$\frac{d^4w}{dx^4}+k^2\frac{d^2w}{dx^2}=0, \quad k^2=\frac{T}{EJ}=\frac{(1-m)P}{EJ} \tag{6.2}$$

Общее решение уравнения (6.2) будет

$$w=c_1+c_2x+c_3\cos kx+c_4\sin kx \tag{6.3}$$

где c_i – постоянные интегрирования. В качестве краевых условий задачи будут условия упруго-защемлённой опоры (4.1) (4.2) и условия жёсткого защемления края стержня $x=l$:

$$w\big|_{x=l}=\frac{dw}{dx}\bigg|_{x=l}=0 \tag{6.4}$$

Изгибающий момент M_x и поперечная сила N_x возмущённого стержня имеют известные выражения

$$\begin{aligned} M_x&=-EJ\frac{d^2w}{dx^2}=EJk^2\left(c_3\cos kx+c_4\sin kx\right)\\ N_x&=-EJ\frac{d^3w}{dx^3}=EJk^3\left(c_4\cos kx-c_3\sin kx\right)\end{aligned} \tag{6.5}$$

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$\begin{gathered} x=l\bar{x}, \quad a=nl, \quad k=\frac{\bar{k}}{l}, \quad \bar{T}=\frac{Tl^2}{EJ}, \quad \bar{P}=\frac{Pl^2}{EJ},\\ \left(T=k^2EJ\Rightarrow\bar{T}=\bar{k}^2,\ \bar{P}=\alpha\bar{k}^2\right), \quad B=\frac{\bar{B}l^3}{EJ},\\ D=\frac{\bar{D}l}{EJ}, \ \left(D=\frac{3B}{a^2}\ \Rightarrow\ D=\frac{3\bar{B}l}{n^2EJ}\right), \ c_1=l\bar{c}_1,\\ c_2=\bar{c}_2, \quad c_3=l\bar{c}_3, \ c_4=l\bar{c}_4, \ \alpha=\frac{1}{1-m}=1+\frac{1}{\bar{B}}\end{gathered} \tag{6.6}$$

Краевые условия (4.1), (4.2) и (6.4) с учётом (6.5) и обозначений (6.6) приводят к следующей системе четырёх однородных уравнений относительно безразмерных постоянных интегрирования $\bar{c}_i$.

$$
\begin{aligned}
& n\left(n-3\overline{B}\alpha\overline{k}^2\right)\overline{c}_2+3\overline{B}\overline{k}^2\,\overline{c}_3+n\overline{k}\left(n-3\overline{B}\left(1+\alpha\right)\overline{k}^2\right)\overline{c}_4=0 \\
& \overline{c}_1+\left(\overline{B}\alpha\overline{k}^2-n\right)\overline{c}_2+\overline{c}_3+\overline{k}\left(\overline{B}\left(\alpha-1\right)\overline{k}^2-n\right)\overline{c}_4=0 \\
& \overline{c}_1+\overline{c}_2+\overline{c}_3\cos\overline{k}+\overline{c}_4\sin\overline{k}=0 \\
& \overline{c}_2-\overline{c}_3\,\overline{k}\sin\overline{k}+\overline{c}_4\overline{k}\cos\overline{k}=0
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Безразмерные значения действительной критической силы $\overline{P}=\alpha\overline{k}^2$ определятся с помощью условия существования нетривиальных решений однородной системы (6.7), т.е. равенства нулю её определителя.

7. Численный пример.

Пусть

$$
n=0.1,\qquad \alpha=1+\frac{1}{\overline{B}} \tag{7.1}
$$

В нижеприведённой таблице представльены результаты решения задачи для достаточно большого промежутка изменения параметра упруго-зашемлённой опоры $\left(0.01\le\overline{B}\le10000\right)$, т.е. практически от абсолютно жёсткого защемления $\left(\overline{B}=0.01\right)$ до свободного конца стержня $\left(\overline{B}=10000\right)$.

Таблица 1

	$\overline{B}$						
	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
m	0.9900	0.9091	0.5	0.0909	0.0099	0.0010	0.0001
α	101	11	2	1.1	1.01	1.001	1.0001
$\overline{k}$	0.557	0.801	1.052	1.266	1.309	1.313	1.314
$\overline{T}$	0.310	0.641	1.107	1.603	1.712	1.725	1.726
$\overline{P}$	31.333	7.049	2.215	1.763	1.730	1.726	1.726

Таблица относится к наиболее важной, т.е. первой форме потери устойчивости стержня.

При $\overline{B}=10000$ упруго-защемлённая опора практически исчезает, превращаясь в свободный конец и длина стержня становится равной $l+2a=1.2l$. Пользуясь формулой Эйлера и коэффициентом приведения длины, получим:

$$
P=\frac{\pi^2 EJ}{4\left(1.2l\right)^2}\Rightarrow\overline{P}=1.713 \tag{7.2}
$$

Это значение меньше соответствующего значения в таблице на $0.76\,\%$.

8. Основные выводы.

Данные таблицы приводят к следующим заключениям:

1. Из-за трения вставленной части стержня с упругим массивом значение внешней (действительной) критической силы P больше значения силы T, действующей на стержень.
2. С ростом параметра $\overline{B}$, т.е. с ослаблением упруго-защемлённой опоры, значения P и T уменьшаются.
3. При $\overline{B}=10000$, когда упруго-защемлённая опора практически исчезает, превращаясь в свободный конец, силы P и T принимают одинаковое значение.
4. Это значение отличается от значения критической силы стержня длины $l+2a$, один конец которого свободен а другой жёстко защемлён, меньше одного процента. Эта разница является следствием того, что при выводе условий упруго-защемлённой опоры, пользуясь относительной малостью длины этой опоры, было принято допущение, согласно которому часть стержня, вставленная в упругий массив, поступательно перемещается и вращается без деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прочность, устойчивость, колебания. /Справочник под ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. Т.3. Изд. Машиностроение, 1964. 564с. Strenght, stability, vibrations Birger I.A., Panovko. Vol.3, 1964. 564p. (in Russian).
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки, под редакцией Г.С. Шапиро. М.: Наука, Физматлит., 1966. 632с. Timoshenko S., Voinowsky-Krieger S. Plates and shells. McGraw-Hill, New York. 1959. 623p.
3. Геворгян Г.З. Об изгибных колебаниях ортотропных полос переменной толщины с учётом поперечных эффектов при условиях упругой заделки. Актуальные проблемы механики сплошной среды. //Труды IV международной конференции 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения, с.129-133. Gevorgyan G.Z. Vibrations of orthotropic strips of variable thickness taking into account the transverse shear under conditions of elastic joints. Proceedings of IV international conference “Topical Problems of Continuum Mechanics”, Yerevan-2015, pp.129-133 (in Russian).
4. Киракосян Р.М. Упруго-защемлённая опора для осесимметрично изгибаемых круглых пластин. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VIII международной конференции, сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт, с.261-265. Kirakosyan R. M. Elasticaly-fixed support for an axi-simmetrical bending circular plates. Proceedings of VIII international conference “The problems of dynamics of interaction of deformable media”, September 22-26, 2014, Goris-Stepanakert, pp.172-176 (in Russian).
5. Степанян С.П. Неклассическая задача изгиба балки линейно-переменной толщины при наличии упруго-защемлённой опоры. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VIII международной конференции, сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт, с.408-412. Stepanyan S.P. Nonclassical problem of beam bending linearly variable thickness under the presence of elastically restrained supports. Proceedings of VIII international conference «The problems of dynamics of

interaction of deformable media», September 22-26, 2014, Goris-Stepanakert, pp.408-412 (in Russian).

6. Киракосян Р.М. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-защемлённой опорой. // Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. № 2. С.101-107. R. M. Kirakosyan Non-Classical Problem of a Bend Orthotropic Beams with the Elastic Clamped Support. NAS RA Reports, 2014,Vol. 114, № 2, pp. 101-107.
7. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки переменной толщины с упруго-защемлённой опорой. //Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. № 3. С.205-212. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. Non Classical Problem of Bending of an Orthotropic Beam of Variable Thickness with Elastically Clamped Support. NAS RA Reports, 2014,Vol. 114, № 3, pp. 205-212.
8. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Устойчивость стержня при наличии упруго-защемлённой опоры. //Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. № 4. С.309-315. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. Stability of the Rod in the Presence of Elastic Clamped Support. NAS RA Reports, 2014, Vol.114, №4, pp.309-315.
9. Razmik M. Kirakosyan, Seyran P. Stepanyan**.** On a Model of Elastic Clamped Support of Plate-Strip. //International scientific Journal, Modeling of Artificial Intelligence. 2015. Vol.6. Is.2, pp.67-74.
10. Киракосян Р.М. Об одной неклассической задаче изгиба упруго-защемлённой круглой пластинки. //Докл. НАН Армении. 2015. Т.115. №4. С.284-289. Kirakosyan R.M. On One Nonclasical Problem of a Bend of an Elastically Fastened Round Plate. NAS RA Reports, 2015,Vol.115, № 4, pp.284-289.
11. Степанян С.П. Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго-защемлённой опоры. //Докл. НАН Армении. 2016. Т.116. №1. С.26-33. S.P. Stepanyan Thermo-Elasticity Problem of an Orthotropic Plate-Strip of Variable Thickness at the Presence of an Elastically Fastened Support. NAS RA Reports, 2016,Vol. 116, № 1, pp.26-33.
12. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача изгиба упруго-защемлённой ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругом основании. //Докл. НАН Армении. 2016. Т.116. №2. С.120-127. R.M. Kirakosyan, S.P. Stepanyan. The Problem of Bending Resiliently Clamped Orthotropic Circular Plate Resting on the Elastic Foundation. NAS RA Reports, 2016,Vol. 116, №2, pp.120-127.
13. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Неклассическая краевая задача упруго-защемлённой по краю частично нагружённой круглой ортотропной пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. №3. С.59-70. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. Non- classical boundary value problems of elastically fastened on the edge, partially loaded, round orthotropic plate. // 2016, Izv. NAS of Armenia, Mekhanika, Volume 69(3), pp. 59-70

Сведения об авторах:

Киракосян Размик Макарович – доктор техн. наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН РА.
Тел.: (+374 10) 52-48-90, **E-mail:** Kirakosyan Razmik@ mechins.sci.am

Степанян Сейран Павлович – к.ф.-м.н, доцент кафедры численного анализа и мат. моделирования факультета информатики и прикладной математики ЕГУ,
Тел.: (+374 93) 524883, **E-mail:** seyran.stepanyan@ysu.am

Поступила в редакцию 24.03.2017

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №3, 2017 Механика

УДК 539.3

СДВИГОВЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОМ ВОЛНОВОДЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК-ПРОВОДНИК

Мкртчян С.А.

Ключевые слова: двухслойный волновод, нормальная волна, локализация волн, распределение волновой энергии, амплитудно-фазовая характеристика.

Keywords: Two-layered waveguide, normal wave, localization of waves, distribution of wave energy, amplitude-phase characteristics.

Բանալի բառեր: Երկշերտ ալիքատար, նորմալալիք, ալիքի տեղայնացում, ալիքային էներգիայի բաշխում, լայնույթ-փուլային բնութագրիչներ:

Mkrtchyan S.H.

Shear electro-elasticity normal waves in the piezoelectric-conductor two-layered waveguide

In this paper, the existence and behavior of electro-elastic shear waves propagating in a two-layer waveguide consisting of a piezoelectric (tetragonal class 4mm or hexagonal class 6mm) and conductive layers that have different thicknesses - h_1, h_2 are investigated. The mathematical boundary-value problem is formulated. Distribution of the electro-elastic wave fields across the thickness of the waveguide, as well as, the characteristic equation of electro-elastic shear waves in respect to the phase velocity are obtained.
In depending both of the physical-mechanical characteristics of foreign materials and the relative thickness of layers in layered system, the existence of localization of a short electro-elastic shear waves in a layered waveguide is analyses.
The structure and phase behavior of localized surface or volumetric surface waves are studied. The numerical and graphical dispersion analysis of wave propagation is realized.

Մկրտչյան Ս. Հ.

Սահքիէլեկտրաառաձգականնորմալալիքներըպյեզոէլեկտրիկ-հաղորդիչերկշերտալիքատարում

Աշխատանքում հետազոտվում է էլեկտրաառաձգական ալիքների գոյությունը և վարքը երկշերտ ալիքատարում, որը բաղկացած է h_1 հաստությամբ (տետրագոնալ համաչափության 4mm դասի, կամ հեքսագոնալ համաչափության 6mm դասի) պյեզոէլեկտրիկ և h_2 հաստությամբ հաղորդիչ շերտերից: Ձևակերպված են խնդրի եզրային պայմանները, ստացվել են էլեկտրական և առաձգական ալիքային դաշտերը, ինչպես նաև խնդրի բնութագրիչ հավասարումը:
Հետազոտված է էլեկտրաառաձգական ալիքների գոյությունը և վարքը երկշերտ ալիքատարում կախված ալիքատարի ֆիզիկամեխանիկական բնութագրիչներից և շերտի հարաբերական հաստությունից:
Ուսումնասիրված են ալիքների կառուցվածքը և ալիքային ձևերի վարքը: Բերված են ալիքային ձևերի դիսպերսիոն կորերի որակական գրաֆիկները:

В настоящей работе исследуется существование и поведение электроупругих сдвиговых волн, распространяющихся в двухслойном волноводе, состоящий из пьезоэлектрического (пьезо-кристалл класса 4mm тетрагональной или 6mm гексагональной симметрии) и проводящего слоёв, которые имеют разные толщины h_1, h_2. Сформулирована математическая граничная задача. Найдены распределения

электроупругого волнового поля по толщине волновода, а также характеристическое уравнение электро-упругих сдвиговых волн относительно фазовой скорости.
В зависимости от физико-механических характеристик материала и относительных толщин слоёв в слоистой системе, анализируется возможность локализации коротких электроупругих сдвиговых волн в слоистом волноводе.
Изучены структура и фазовое поведение локализованных поверхностных или объёмных поверхностных волн. Выполнен численно-графический анализ дисперсии распространения волн.

Введение.

Известно, что в слоистых системах, состоящих из упругих материалов с различными механическими свойствами, могут распространяться сдвиговые упругие волны горизонтальной поляризации (волны Лява [1]). Уже давно (по обнаружению волн Гуляева-Блюстейна [2]) появился повышенный интерес к исследованиям особенностей сдвиговых электроупругих волн горизонтальной поляризации в слоистых волноводах, когда один из слоёв является пьезоэлектриком. Этот интерес, в первую очередь, вызван большим практическим и теоретическим значением полученных результатов.

О возможности возникновения разных типов локализаций волновой энергии встречаемся в первоисточниках [1;3]. Более подробно, об условиях локализации волновой энергии вблизи границ раздела сред, их разновидности в зависимости от характера поверхностных соединений и их применений в различных устройствах, а также довольно солидный обзор литературы о модельных задачах и об особенностях распространений электроупругих волн в слоистых структурах можно найти в [4÷8] и в др. Разные сочетания граничащих материальных слоёв и разных поверхностных электромеханических условий рассмотрены также в [11÷14].

Один из важных вопросов в многослойных волноводах из материалов разных анизотропий является возможность раздельного существования плоского или анти-плоского состояний деформации. В случае пьезокристаллических материалов, которые существенно анизотропные, вопрос разделения двух видов деформаций и электроактивности этих полей при этом, исследован в статье [9], которая как отдельный параграф приведена в книге [10].

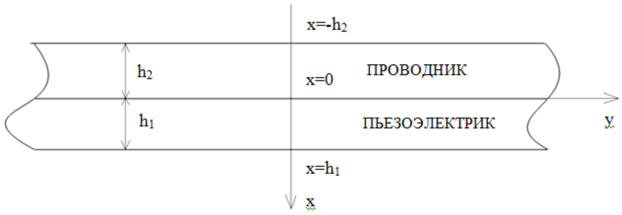
В настоящей работе проводится амплитудно-фазовый анализ электроупругих сдвиговых нормальных волн в двухслойном волноводе из пьезоэлектрического (пьезокристалл класса 4mm тетрагональной или класса 6mm гексагональной симметрий) и электропроводящего слоёв в дополнение и уточнение полученных в работе [11] результатов. Показано существенное влияния выбора разных сочетаний типов электромеханических граничных условий на внешних поверхностях двухслойного волновода.

1. Основные соотношения и постановка задачи.

Двухслойный волновод, состоящий из электропроводящего слоя толщины h_2 и пьезоэлектрического слоя вышеуказанных кристаллических классов толщины h_1, отнесён к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ (Фиг. 1). Декартовая система координат выбрана так, что ось Oy направлена параллельно внешним граничным поверхностям волновода $x=-h_2$ и $x=h_1$ соответственно, а ось Ox перпендикулярна поверхностям слоёв.

Также, предполагается, что геометрическая ось oz параллельна главной оси симметрии пьезоэлектрической среды. Свободная граница пьезоэлектрического слоя

$x = h_1$ металлизирована, вследствие чего электрическое поле не просачивается в вакуум. В проводящем слое, а следовательно, и в вакуумной области $x < -h_2$ электрическое поле отсутствует.



Фиг. 1. Сечение двухслойного волновода из инородных материалов в плоскости xoy

В задаче антиплоской деформации:

$$u = 0,\ v = 0,\ w = w(x, y, t). \tag{1.1}$$

Сопутствующие колебания электрического поля описываются квазистатическим приближением:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi. \tag{1.2}$$

где $\varphi = \varphi(x, y, t)$ – квазистатический потенциал электрического поля.

Тогда, для ненулевых компонент упругих деформаций, электромеханических напряжений и индукции электрического поля имеем следующие выражения:

$$\gamma_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}; \qquad \gamma_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1.3}$$

$$\sigma_{13} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial x} + e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad \sigma_{23} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{1.4}$$

$$D_1 = -\varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{15}\frac{\partial w}{\partial x}; \qquad D_2 = -\varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1.5}$$

где c_{44} – жёсткость упругого сдвига, e_{15} – пьезомодуль кристалла, ε_{11} – коэффициент диэлектрической проницаемости пьезокристалла.

Для проводящей среды соответствующие соотношения получим, подставляя в (1.4) и (1.5) $\varphi = 0$, $e_{15} = 0$.

Из уравнений электроупругости и упругости, используя вышеприведённые соотношения, получим следующие уравнения, описывающие распространение электроупругих возмущений в пьезоэлектрическом слое и упругие возмущения в проводящем слое:

– для пьезоэлектрического слоя:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = S_1^2 \Delta w_1; \qquad \Delta\varphi_1' = 0, \tag{1.6}$$

где приняты следующие обозначения:

$$S_1^2=\frac{\overline{c}_1}{\rho_1}=\frac{c_1}{\rho_1}(1+\chi_1^2)=S_{10}^2(1+\chi_1^2)\,;S_{10}^2=\frac{c_1}{\rho_1}\,,\varphi_1'\ =\varphi_1-\overline{e}_1w_1;\ c_1=c_{44}^{(1)}\,;$$

$$\overline{c}_1=c_1(1+\chi_1^2);\ \chi_1^2=\frac{\overline{e}_1e_1}{c_1}\,;\ \overline{e}_1=\frac{e_1}{\varepsilon_1};\quad e_1=e_{15}^{(1)}\,;\quad \varepsilon_1=\varepsilon_{11}^{(1)}\ . \tag{1.7}$$

S_1 – скорость распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн в пьезоэлектрической среде, S_{10} – скорость распространения сдвиговых объёмных упругих волн в пьезоэлектрической среде при пренебрежении пьезоэффектом, $\varphi_1'(x;y;t)$ – приведённый потенциал электрического поля, зависящий от истинного потенциала $\varphi_1(x;y;t)$ и перемещений пьезоэлектрической среды $w_1(x;y;t)$.

– для проводяшего слоя:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}=S_2^2\Delta w_1;\qquad S_2^2=\frac{c_2}{\rho_2};\qquad c_2=c_{44}^{(2)}, \tag{1.8}$$

c_2 – жёсткость упругого сдвига проводящего материала, ρ_2 – плотность проводящего материала, S_2 – скорость распространения объёмных упругих волн в проводящем слое.

Электромеханические граничные условия на наружных поверхностях волновода $x=h_1$ и $x=-h_2$ соответственно будут иметь вид:

А) на механически свободной и электрически открытой поверхности пьезоэлектрического слоя $x=h_1$:

$$\sigma_{13}^{(1)}=0;\qquad D_1=0. \tag{1.9}$$

Б) на механически свободной поверхности электропроводящего слоя $x=-h_2$:

$$\sigma_{13}^{(2)}\ =0. \tag{1.10}$$

В) контактные условия на поверхности $x=0$:

$$\sigma_{31}^{(1)}\ =\sigma_{31}^{(2)};\quad w_1\ =w_2;\quad \varphi_1\ =0. \tag{1.11}$$

2. Решения задачи. Амплитудно-частотная характеристика волнового процесса.

Решения для упругого перемещения w_1 и приведённого потенциала φ_1' в области $0\le x\le h_1$ и для упругого перемещения w_2 в области $-h_2\le x\le 0$ представляются в виде плоских волн:

$$w_1=W_1(x)e^{i(py-\omega t)};\ \varphi_1'=\Phi_1(x)e^{i(py-\omega t)}; \tag{2.1}$$

$$w_2\ =W_2(x)e^{i(py-\omega t)},$$

где $W_1(x),\ \Phi_1(x),\ W_2(x)$ – искомые амплитуды распространяющейся волны, $p>0$ – волновое число, $\omega>0$ – круговая частота.

Подставляя выражения (2.1) в (1.6) и (1.8), получим уравнение для определения амплитуд $W_1(x),\ \Phi_1(x),\ W_2(x)$, общее решение которого:

$$W_1(x) = W_{10}^{+}\exp(ip\beta_1 x) + W_{10}^{-}\exp(-ip\beta_1 x). \qquad (2.2)$$

$$\Phi_1(x) = \Phi_{10}^{+}\exp(px) + \Phi_{10}^{-}\exp(-px). \qquad (2.3)$$

$$W_2(x) = W_{20}^{+}\exp(ip\beta_2 x) + W_{20}^{-}\exp(-ip\beta_2 x). \qquad (2.4)$$

$V = \dfrac{\omega}{p}$ – фазовая скорость волны, $\beta_1 = \sqrt{V^2/S_1^2 - 1}$; и $\beta_2 = \sqrt{V^2/S_2^2 - 1}$ – коэффициенты затухания (или коэффициенты формообразования по толщине волновода).

Подставляя решения (2.2) – (2.4) в граничные (1.9), (1.10) и контактные условия (1.11), получим следующие уравнения для определения искомых амплитуд:

$$\begin{aligned}
&i\overline{c}_1\beta_1 e^{i\beta_1\xi r}W_{10}^{+} - i\overline{c}_1\beta_1 e^{-i\beta_1\xi r}W_{10}^{-} + e_1 e^{\xi r}\Phi_{10}^{+} - e_1 e^{-\xi r}\Phi_{10}^{-} = 0;\\
&-\varepsilon_{11}e^{\xi r}\Phi_{10}^{+} + \varepsilon_{11}e^{-\xi r}\Phi_{10}^{-} = 0;\\
&W_{10}^{+} + W_{10}^{-} - W_{20}^{+} - W_{20}^{-} = 0, \quad \overline{e}_1 W_{10}^{+} + \overline{e}_1 W_{10}^{-} + \Phi_{10}^{+} + \Phi_{10}^{-} = 0;\\
&i\overline{c}_1\beta_1 W_{10}^{+} - i\overline{c}_1\beta_1 W_{10}^{-} - ic_2\beta_2 W_{20}^{+} + ic_2\beta_2 W_{20}^{-} + e_1\Phi_{10}^{+} - e_1\Phi_{10}^{-} = 0;\\
&e^{-i\beta_2\xi}W_{20}^{+} - e^{i\beta_2\xi}W_{20}^{-} = 0,\ \ r = h_1/h_2,\ \ \xi = ph_2.
\end{aligned} \qquad (2.5)$$

Условием существования нетривиальных решений системы (2.5) является равенство нулю его определителя. В результате приходим к следуюшему дисперсионному уравнению:

$$c_1\beta_1\operatorname{tg}\alpha_1 + c_2\beta_2\operatorname{tg}\alpha_2 - e_1\overline{e}_1\operatorname{th}\alpha = 0, \qquad (2.6)$$

где $\alpha_1 = \beta_1\xi r$; $\alpha_2 = \beta_2\xi$; $\alpha = \xi r$. (2.7)

Для выявления существующего многообразия, далее рассматриваются дисперсионные уравнения в частных случаях конструирования волновода.

2.а. Пьезоэффект отсутствует.

То есть $e_1 = \overline{e}_1 = 0$. В этом случае (2.6) сводится к уравнению:

$$c_1\beta_1\operatorname{tg}\alpha_1 + c_2\beta_2\operatorname{tg}\alpha_2 = 0 \qquad (2.8)$$

или

$$\gamma_1\operatorname{th}(\xi r\gamma_1) = c\beta_2\operatorname{tg}(\xi\beta_2), \qquad (2.9)$$

где соответственно $\gamma_1 = \sqrt{1 - V^2/S_1^2}$ и $c = c_2/c_1$.

Это уравнение совпадает с уравнением, полученным в работе [13].

2.б. Дисперсионное уравнение для классической задачи Лява.

При $h_1 \to 0$ и $h_2 \to \infty$ имеем $\operatorname{th}(\xi r\gamma_1) \to 1$ и уравнение (2.9) принимает вид:

$$\sqrt{1 - V^2/S_1^2} = c\sqrt{V^2/S_2^2 - 1}\cdot\operatorname{tg}\left(\xi\cdot\sqrt{V^2/S_2^2 - 1}\right). \qquad (2.10)$$

Это является дисперсионным уравнением для классической упругой задачи Лява.

2.в. Дисперсионное уравнение для электроупругих волн Лява:

при $h_1 \to \infty$ из (2.6) получаем:

$$\gamma_1 = e_1\bar{e}_1 / c_1 - c\beta_2 \mathrm{tg}\alpha_2; \; \gamma_1 = \sqrt{1 - V^2 / S_1^2}; \; c = c_2 / c_1. \tag{2.11}$$

Аналитически рассматриваются четыре варианта приближений для основного дисперсионного уравнения (2.6).

Вариант 1.

Рассматривается случай, когда $(ph_1)^2 << 1, (ph_2)^2 << 1,$ (длинные волны или низкочастотное приближение, волны Стоунли).

Из (2.6) будем иметь:

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \alpha_1 = \sqrt{V^2 / S_1^2 - 1}\, ph_1;$$

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = \alpha_2 = \sqrt{V^2 / S_2^2 - 1}\, ph_2; \tag{2.12}$$

$$\mathrm{th}\alpha = ph_1.$$

Подставляя (2.12) в (2.6), получается:

$$c_1(V^2 / S_1^2 - 1)h_1 + c_2(V^2 / S_2^2 - 1)h_2 - e_1\bar{e}_1 h_1 = 0. \tag{2.13}$$

При $h_1 = 0$ (2.13) принимает вид:

$$V^2 / S_2^2 = 1. \tag{2.14}$$

При $h_2 = 0$ (2.13) принимает вид:

$$V^2 / S_2^2 = 1 + e_1\bar{e}_1 / c_1. \tag{2.15}$$

Пьезоэффект увеличивает скорость.

Вариант 2.

Рассматривается случай, когда $(ph_1)^2 >> 1, (ph_2)^2 >> 1,$ (короткие волны или высокочастотное приближение, или тонкая пластинка).

Из (2.6) :

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = -i\mathrm{th}i\alpha_1 = -i, \; \mathrm{tg}\alpha_2 = -i\mathrm{th}i\alpha_2 = -i, \; \mathrm{th}\alpha = 1. \tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в (2.6), получим:

$$c_1\sqrt{1 - V^2 / S_1^2} + c_2\sqrt{1 - V^2 / S_2^2} - e_1\bar{e}_1 = 0. \tag{2.17}$$

Такие решения не существуют.

Вариант 3.

Рассматривается случай, когда $(ph_1)^2 << 1, (ph_2)^2 >> 1$.

Из (2.6):

при $(ph_1)^2 << 1$:

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \alpha_1 = ph_1\sqrt{V^2 / S_1^2 - 1}. \tag{2.18}$$

$$\mathrm{th}\alpha = \alpha = ph_1. \tag{2.19}$$

При $(ph_2)^2 >> 1$:

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = -i\,\mathrm{th}\,i\alpha_2 = -i. \tag{2.20}$$

Подставляя (2.18) – (2.20) в (2.6), получим:

$$c_1 ph_1(V^2/S_1^2 - 1) + c_2\sqrt{1 - V^2/S_2^2} - e_1\overline{e}_1 ph_1 = 0. \tag{2.21}$$

При $h_1 = 0$ (2.21) принимает вид:

$$V^2/S_2^2 = 1. \tag{2.22}$$

Вариант 4.

Рассматривается случай, когда $(ph_1)^2 >> 1$, $(ph_2)^2 << 1$.

Из (2.6):

При $(ph_1)^2 >> 1$:

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = -i\,\mathrm{th}\,i\alpha_1 = -i. \tag{2.23}$$

$$\mathrm{th}\alpha = 1. \tag{2.24}$$

При $(ph_2)^2 << 1$.

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = \alpha_2 = ph_2\sqrt{V^2/S_2^2 - 1}. \tag{2.25}$$

Подставляя (2.23) – (2.25) в (2.6), получим:

$$c_1\sqrt{1 - V^2/S_1^2} + c_2(V^2/S_2^2 - 1)ph_2 - e_1\overline{e}_1 = 0. \tag{2.26}$$

При $h_2 = 0$ (2.26) принимает вид:

$$V^2/S_2^2 = 1 + e_1^2\overline{e}_1^{\,2}/c_1^2.$$

Пьезоэффект увеличивает скорость. (2.27)

3. Численный анализ.

Дисперсионные уравнения (2.6) и (2.8) исследованы численно в трёх случаях, когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4 (пьезокерамика), а проводящий слой изготовлен из следующих материалов: Al, Au, Pt.

В Таблица 1 приведены значения постоянных рассматриваемых материалов.

Ниже представлены результаты численного анализа дисперсионных уравнений (2.6) и (2.8) совмещенных на одном графике.

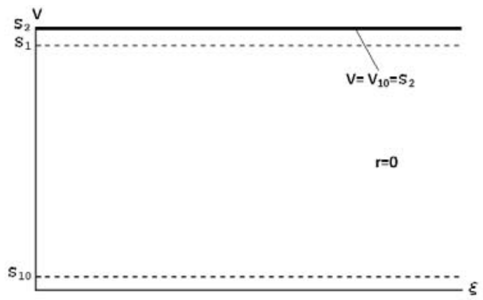
Табица 1

	Al	Au	Pt	ЦТС-4
c_{44}	2,83x10^{10} Па	4,24x10^{10}Па	7,65x10^{10}Па	2,56x10^{10}Па
ρ	2,702x10^3кг/м^3	19,3x10^3 кг/м^3	21,4x10^3 кг/м^3	7,5x10^3 кг/м^3

Ниже на фиг. 2.1–2.22 показаны дисперсионные кривые численного расчёта в виде зависимости $V = V(\xi)$ (для уравнений 2.6) и $V_{10} = V_{10}(\xi)$ (для уравнений 2.8) при разных соотношениях толщин $r = h_1 / h_2$ слоистой системы.

3.а. Числено-графическое исследование дисперсионных уравнений (2.6) и (2.8), когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4 (пьезокерамика), а проводящий слой – из Al.

Численное исследование дисперсионных уравнений (2.6) и (2.8), когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4 (пьезокерамика), а проводящий слой из материала Al, при условии $S_{10} < S_1 < S_2$ (фиг. 2.1÷рис. 2.6) показало, что:



Фиг.2.1

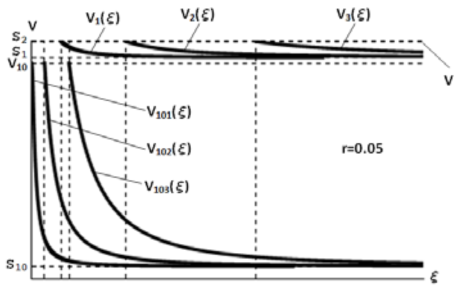
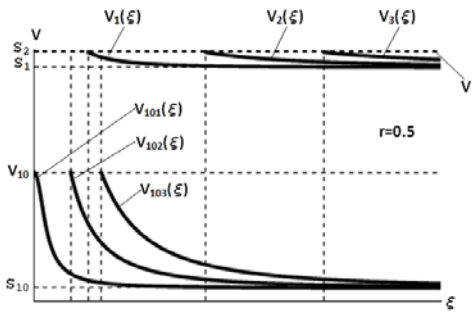


Рис. 2.2

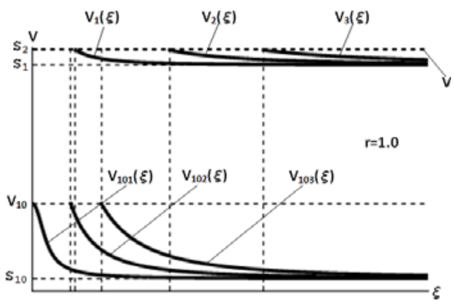


Фиг.2.3

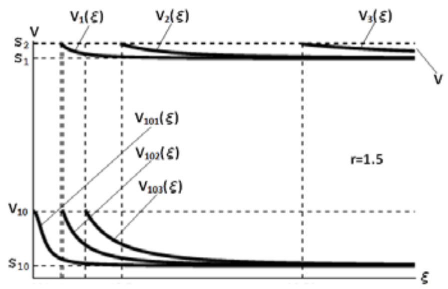
1) при отсутствии пьэзоэффекта (2.8), ($e_1 = \overline{e}_1 = 0$) для каждого значения соотношения толщин слоёв r возникают сдвиговые объёмные электроупругие волны типа Лява со скоростью распространения V_{10}. Из этих волн при некоторых определенных критических значениях относительной толщины ξ рождаются первый, второй, третий и следующие высшие моды, причём для первой моды $\xi_1 \to 0$. При увеличении параметра ξ скорости всех мод уменьшаются. В переделе при $\xi \to \infty$, сливаясь между собой, эти волны образуют единственную объёмно-поверхностную волну, которая распространяется со скоростью $V_{10} = S_{10}$.

Когда $r \to 0, V_{10} \to S_1$, при увеличении значения параметра r скорости распространения объёмных электроупругих волн уменьшаются. (см.Таблица 2);

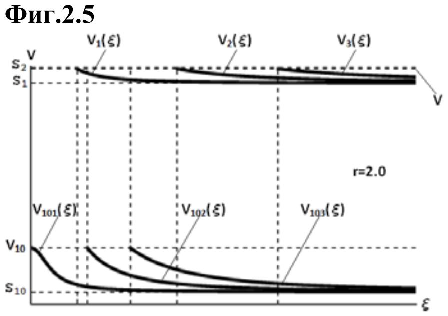
2) при наличии пьэзоэффекта (2.6), для каждого значения соотношения



Фиг.2.4



Фиг.2.5



Фиг.2.6

толщин слоёв r возникают сдвиговые объёмные электроупругие волны типа Лява, со скоростью распространения V . Из этих волн при некоторых определённых критических значениях относительной толщины ξ рождаются первый, второй, третий и следующие высшие моды. При увеличении параметра ξ скорости всех мод уменьшаются. В переделе при $\xi \to \infty$, сливаясь между собой эти волны образуют единственную объёмно-поверхностную волну, которая распространяется со скоростью $V = S_1$. Когда $r \to 0$, $V \to S_2$, при увеличении значения параметра r скорости распространения объёмных электроупругих волн уменьшаются. (см.Таблица 2). Следует подчеркнуть, что с увеличением значения параметра r значения скоростей распространения объёмных электроупругих волн V , V_{10} и параметра ξ , при которых зарождаются новые моды волн, уменьшаются.

В Таблица 2 приведены значения скоростей распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн в структуре V , V_{10} для соответствующих значений соотношений толщин слоев r , и значения скоростей распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн в пьезоэлектрической среде S_1, S_{10} , и в проводящем слое – S_2 .

Таблица 2

<table>
<tr><th>r</th><th>V
м/с</th><th>V_{10}
м/с</th><th>S_{10}
м/с</th><th>S_1
м/с</th><th>S_2
м/с</th></tr>
<tr><td>0</td><td>3236,31</td><td>3236,31</td><td rowspan="6">1847,52</td><td rowspan="6">3136,84</td><td rowspan="6">3236,31</td></tr>
<tr><td>0,05</td><td>3235,59</td><td>3100,53</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>3226,82</td><td>2523,91</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>3226,64</td><td>2298,54</td></tr>
<tr><td>1,5</td><td>3226,56</td><td>2186,54</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td>3226,52</td><td>2119,20</td></tr>
</table>

3.б. Численное исследование дисперсионных уравнений (2.6) и (2.8), когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4 (пьезокерамика), а проводящий слой – из материала Au.

Численное исследование дисперсионных уравнений (2.6) и (2.8), когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4 (пьезокерамика), а проводящий слой из материала Au при условии $S_1 > S_{10} > S_2$ (фиг.2.7÷фиг.2.13) показало, что:

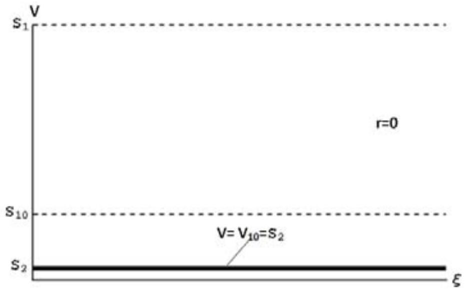
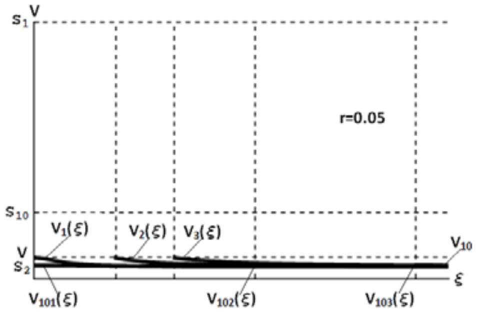
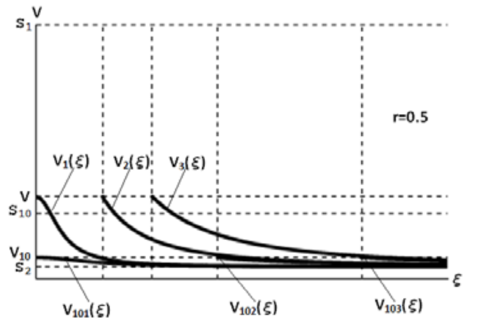


Рис. 2.7



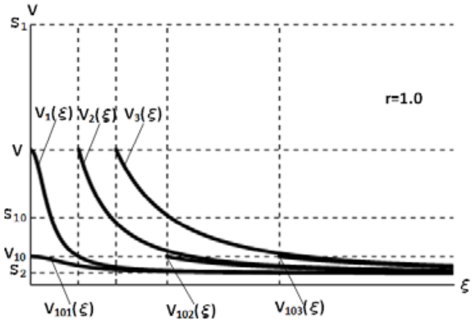
Фиг.2.8



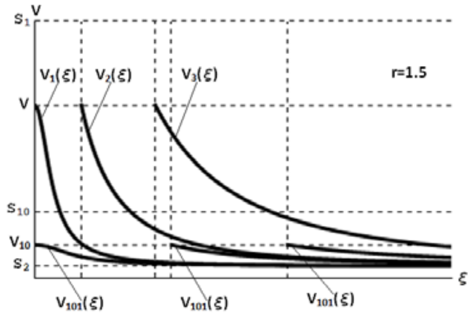
Фиг.2.9

1) при отсутствии пьэзоэффекта (2.8), ($e_1 = \overline{e}_1 = 0$) при каждом значении соотношений толщин слоёв r возникают сдвиговые электроупругие волны типа Лява со скоростью распространения V_{10}. Из этих волн при некоторых определённых критических значениях относительной толщины ξ, рождаются первый, второй, третий и следующие высшие моды.

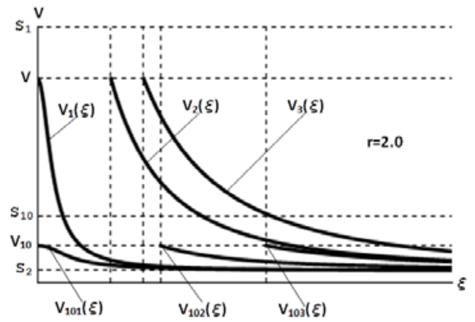
При увеличении параметра ξ скорости всех мод уменьшаются. В пределе при $\xi \to \infty$, сливаясь между собой, эти волны образуют единственную объёмно-поверхностную волну, которая распространяется со скоростью $V_{10} = S_2$. Когда $r \to 0$, $V_{10} \to S_2$, а при увеличении значения параметра r скорости распространения объёмных электроупругих волн увеличиваются и стремятся скорости распространения объёмных электроупругих волн в пьезоэлектрическом среде при пренебрежении пьезоэффектом – S_{10}.



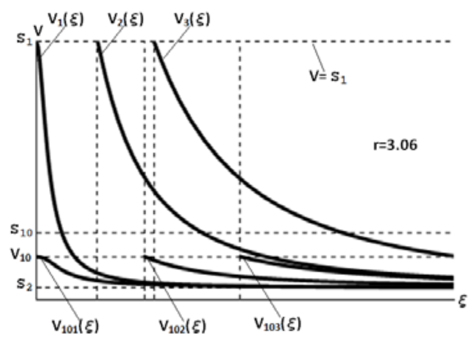
Фиг. 2.10



Фиг. 2.11



Фиг.2.12



Фиг.2.13

2) при наличии пьэзоэффекта (2.6) для каждго значения соотношения толщин слоёв r возникают сдвиговые электроупругие волны типа Лява со скоростью распространения V. Из этих волн при некоторых определённых критических значениях относительной толщины ξ рождаются первый, второй, третий и следующие высшие моды. При увеличении параметра ξ скорости всех мод уменьшаются. В пределе при $\xi \to \infty$, сливаясь между собой, эти волны образуют единственную объёмно-поверхностную волну, которая распространяется со скоростью $V = S_2$. Когда $r \to 0$, $V \to S_2$, а при увеличении значения параметра r скорости распространения объёмных электроупругих волн увеличиваются и при некотором значении соотношения толщин слоёв r становятся равными скорости распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн в пьезоэлектрической среде – S_1.

В

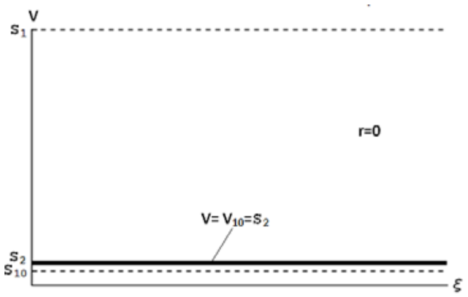
Таблица 3 приведены значения скоростей распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн в структуре $-V$, V_{10}, для соответствующих значений соотношений толщин слоёв r, и значения скоростей распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн в пьезоэлектрической среде S_1, S_{10}, и в проводящем слое – S_2.

Таблица 3

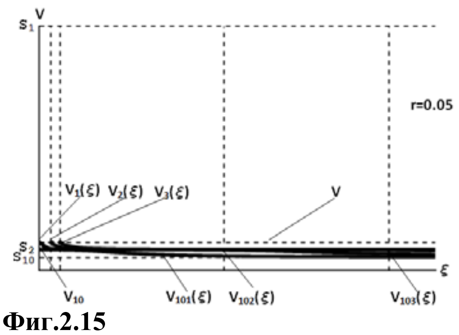
r	V м/с	V_{10} м/с	S_{10} м/с	S_1 м/с	S_2 м/с
0	1482,19	1482,19			
0,05	1540,16	1489,99			
0,5	1961,97	1547,51			
1,0	2303,36	1592,89	1847,52	3136,84	1482,19
1,5	2559,21	1626,3			
2,0	2784,58	1651,93			
3,06	3136,72	1690,40			

3.в. Численное исследование дисперсионных уравнений (2.6) и (2.8), когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4 (пьезокерамика), а проводящий слой – из материала Pt:

Численное исследование дисперсионных уравнений (2.6) и (2.8), когда пьезоэлектрический слой, изготовленный из материала ЦТС-4 (пьезокерамика), а проводящий слой–из материала Pt при условии $S_1 > S_2 > S_{10}$ (фиг. 2.14÷фиг. 2.20) показали, что:



Фиг.2.14



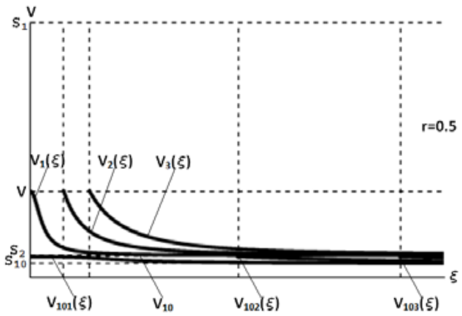
Фиг.2.15

1) при отсутствии пьэзоэффекта (2.8), ($e_1 = \overline{e}_1 = 0$) для каждого значения соотношения толщин слоёв r возникают сдвиговые электро-упругие волны типа Лява со скоростью распространения V_{10}. Из этих волн при некоторых определённых критических значениях относительной толщины ξ, рождаются первый, второй, третий и следующие высшие моды. При увеличении параметра ξ скорости всех мод уменьшаются. В пределе при $\xi \to 0$, сливаясь между собой, эти волны образуют единственную объёмно-поверхностную волну, которая распространяется со скоростью $V_{10} = S_{10}$. Когда $r \to 0$,

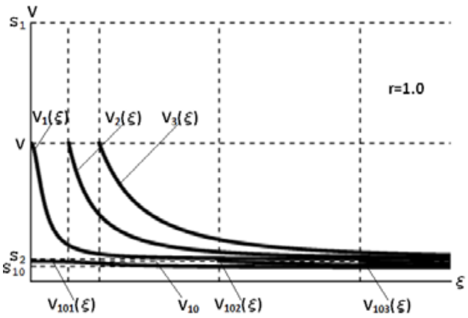
$V_{10} \to S_2$ а при увеличении значения параметра r скорости распространения объёмных электроупругих волн уменьшаются и стремятся к скорости распространения объёмных электроупругих волн в пьезоэлектрической среде при пренебрежении пьезоэффектом – S_{10} ;

2) при наличии пьэзоэффекта (2.6) для каждого значения соотношения толщин слоёв r возникают сдвиговые электроупругие волны типа Лява со скоростью распространения V . Из этих волн при некоторых определённых критических значениях относительной толщины ξ, рождаются первый, второй, третий и следующие высшие моды. При увеличении параметра ξ скорости всех мод уменьшаются. В переделе при $\xi \to 0$, сливаясь между собой, эти волны образуют единственную объёмно-поверхностную волну, которая распространяется со скоростью $V = S_2$. Когда $r \to 0$, $V \to S_2$ а при увеличении значения параметра r скорости распространения объёмных электроупругих волн увеличиваются и при некотором значении соотношения толщин слоёв r становятся равными скорости распространения объёмных электроупругих волн в пьезоэлектрической среде – S_1 .

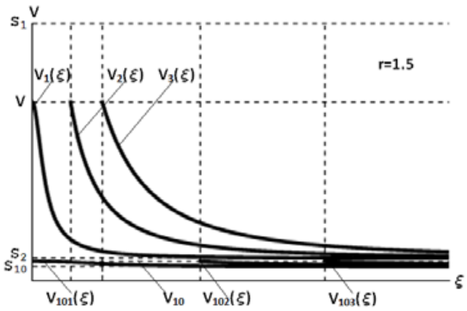
В
Таблица 4 приведены значения скоростей распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн в структуре -V, V_{10}, для соответствующих значений соотношений



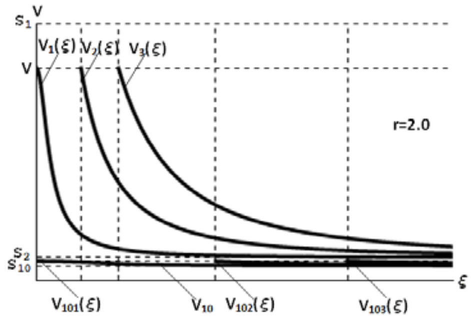
Фиг.2.16



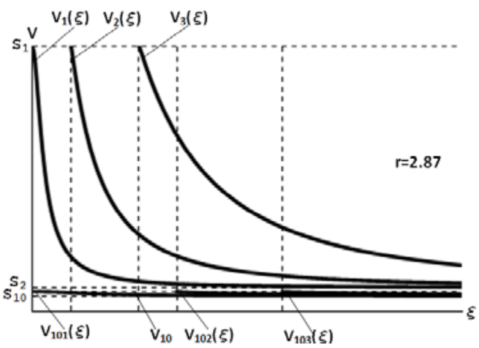
Фиг.2.17



Фиг.2.18



Фиг.2.19



Фиг. 2.20

толщин слоёв r, и значения скоростей распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн в пьезоэлектрической среде – S_1, S_{10}, и в проводящем слое – S_2.

Таблица 4

r	V м/с	V_{10} м/с	S_{10} м/с	S_1 м/с	S_2 м/с
0	1890,71	1890,71			
0,05	1929,91	1889,97			
0,5	2235,03	1884,33			
1,0	2502,4	1879,59	1847,52	3136,84	1890,71
1,5	2713,85	1875,94			
2,0	2902,35	1873,03			
2,87	3136,40	1869,52			

Заключение.

Амплитудно-фазовый анализ волнового процесса в двухслойном волноводе из пьезоэлектрического и идеально проводящего слоёв показал, что:

1) В слоистой системе из пьезоэлектрического слоя, изготовленного из материала ЦТС-4 (пьезокерамика), и проводящего слоя, изготовленного из следующих материалов Al, при условии $S_{10} < S_1 < S_2$, Au при условии $S_1 > S_{10} > S_2$, Pt при условии $S_1 > S_2 > S_{10}$ электроупругие волны Лява существуют и имеют следующую структуру: число волн бесконечно, и скорости распространения волн зависят от соотношений толщин слоёв r и величины параметра ξ.

2) Наличие пьезоэффекта увеличивает скорость распространения сдвиговых объемных электроупругих волн.

3) При условии $S_{10} < S_1 < S_2$, (проводящий слой изготовлен из материала Al) увеличение значения параметра r (соотношения толщин слоёв), и при наличии и при отсутствии пьэзоэффекта уменьшает скорость распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн.

4) При условии $S_1 > S_{10} > S_2$, (проводящий слой изготовлен из материала Au) увеличение значения параметра r (соотношения толщин слоёв), и при наличии и при отсутствии пьэзоэффекта увеличивает скорость распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн.

5) При условии $S_1 > S_2 > S_{10}$, (проводящий слой изготовлен из материала Pt) увеличение значения параметра r (соотношение толщин слоёв) при наличии пьэзоэффекта увеличивает скорость распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн, а при отсутствии пьэзоэффекта уменьшает скорость распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. LoveA.E.H., «Some problems of geodynamics», first published in 1911 by the Cambridge University Press and published again in 1967 by Dover, NewYork, USA. (Chapter 11: Theory of the propagation of seismic waves).
2. Bleustein J.L., A new surface wave in piezoelectric materials. - Appl. phys. Lett., 1968, v.13, №2, p.412-413.
3. Lord Rayleigh (1885). «On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid». Proc. London Math. Soc. s1-17 (1): 4–11.
4. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Электро магнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕУ, 2006, 492 с. Baghdasaryan G. E., Danoyan Z. N., Electro-magnetoelastic waves. Yerevan. EU. 2006, p 492.
5. Achenbach, J. D., “Wave Propagation in Elastic Solids”. New York: Elsevier, 1984, p. 364.
6. Biryukov S.V., Gulyaev Y. V., Krylov V., Plessky V., Surface acoustic waves in inhomogeneous media, Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20, 1995, 388.
7. D. Royer, E. Dieulesaint, Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation, Springer Science & Business Media, 2000, 374.
8. L Brekhovskikh, Waves in Layered Media 2e, Applied mathematics and mechanics, Elsevier Science, 2012, 520 p.
9. Аветисян А. С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезо-электрической среде // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. 11. С.12-19. Avetisyan A. S., Problem of the propagation of transversal waves in piezoelectric. Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 38 (1). pp. 12-19.
10. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел, //М.: Наука, 1988, 472 стр. Patron V. Z. Kudryavtsev B.A., Electromagnetoelactic of piezoelectric and electrowire bodies [Electromagnetoelactic piezoelectric and conductive bodies]. Moscow: Nauka 1988, 472 p.
11. Даноян З.Н., Мкртчян С.А., Сдвиговые волны в двухслойной среде из пьезо-электрического и проводящего материалов, Ереван: Изд. НУАСА, Механика 2016, ст. 55-59. Danoyan Z.N., Mkrtchyan S.H., Shear waves in two-layered medium consisting of piezo-electric and conducting materials. Mechanics 2016. PROCEEDINGS International School-Conference Young Scientists. pp. 55-59.
12. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. 1 3–4. С.78–82. Belubekyan M. V., Belubekyan V. M., About shear localized wave propagation along the moving surfaces of piezoelectrics. Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 47 (3-4). pp. 78-82.
13. Jones J.P. Wave propagation a two-layered medium. Journal of Applied Mechanics, 1964, June, pp. 213-222.

14. Погосян Н.Д., Саноян Ю.Г., Терзян С.А. Распространение сдвиговых волн в двухслойной среде в антиплоской постановке. Изв. НАН РА, Механика, 2013, т.66, No. 4, ст. 12-16. Poghosyan N. D., Sanoyan Ju. G., Terzyan S. A. Shear Waves Propagation in Two-Layer Media. Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 66 (4). pp. 12-16.

Сведения об авторе:

Мкртчян Сурик Акопович – аспирант Института механики НАН РА.
Адрес: 0019; Армения, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.
Тел.: (+37477)050538
E-mail: sur_mkrtchyan@mail.ru.

Поступила в редакцию 20.02.2017

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ №1, 2017

Աղալովյան Լ.Ա. Սալերի և թաղանթների տարածական դինամիկ խնդիրների մասին 1–3

Ժամակոչյան Ք.Ա., Սարգսյան Ս.Հ. Միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալի վերջավոր էլեմենտի կոշտության մատրիցը.................................. 1–22

Ավետիսյան Ա.Ս., Քամալյան Ա.Ա., Հունանյան Ա.Ա. Ալիքային էներգիայի տեղայնացման բնույթը պյեզոէլեկտրիկ ալիքատարի անհարթ մակերևույթների մոտ 1–40

Սարգսյան Ն.Ս., Խաչատրյան Ա.Մ. Երկշերտ անիզոտրոպ սալի երկչափ հավասարումների մասին շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի դեպքում ... 1–64

Աթոյան Լ.Հ., $\boxed{\text{Դանոյան Զ.Ն.}}$ Առաձգա-սպինային ալիքների տարածումը պարբերական, ֆերոմագնիսական, շերտավոր կառուցվածքում 1–74

$\boxed{\text{Հովհաննիսյան Հ.Վ.}}$, Սարգսյան Կ.Ս., Սուքիասյան Զ.Ս. Բեռի փոխանցումը անվերջ և վերջավոր երկու զուգահեռ առաձգական վերադիրներից համասեռ առաձգական անվերջ սալին 1–83

СОДЕРЖАНИЕ №1, 2017

Агаловян Л.А. О пространственных динамических задачах пластин и оболочек... 1–3

Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Матрица жёсткости конечного элемента микрополярной упругой тонкой пластинки 1–22

Аветисян А.С., Камалян А.А., Унанян А.А. Характеристики локализации волновой энергии около неровных поверхностей пьезоэлектрического волновода.. 1–40

Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки по нелинейной теории упругости 1–64

Атоян Л.А., $\boxed{\text{Даноян З.Н.}}$ Распространение упруго-спиновых волн в периодической, ферромагнитной, слоистой среде 1–74

Оганисян Г.В., Саркисян К.С., Сукиасян Дж.С. Передача нагрузки от двух параллельных упругих бесконечного и конечного стрингеров к упругой однородной бесконечной пластине 1–83

CONTENTS №1, 2017

Aghalovyan L.A. On Space dynamic problems of plates and shells 1–3

Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H. Stiffness matrix of the finite element of micropolar elastic thin plate.. 1–22

Avetisyan A.S., Kamalyan A.A., Hunanyan A.A. Features of localization of wave energy at rough surfaces of piezodielectric waveguide 1–40

Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M. On two-dimentional equations two-layer anisotropic plate, with full contact between the layers 1–64

Atoyan L.H., Danoyan Z.N. Elastic-spin waves propagation in a periodic ferromagnetic layered medium 1–74

Hovhannisyan H.V., Sargsyan K.S., Sukiasyan J.S. Load transfer from two parallel elastic infinite and finite stringers to elastic homogeneous infinite plate 1–83

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ №2, 2017

Աղալովյան Լ.Ա., Գևորգյան Ռ.Ս. Երկշերտ սալերի համար ստացիոնար ջերմհաղորդականության և ջերմաառաձգականության ոչ կապակցված ոչ դասական եզրային պայմաններով խնդիրների ասիմպտոտիկական լուծումները.. 2–3

Ավետիսյան Ա.Ս., Բելուբեկյան Մ.Վ., Համբարձումյան Ս.Ա. Առաձգական ալիքների տարածումը հարթ շերտ-ալիքատարում, Կոսերայի միջավայրի պարզեցված մոդելի հաշվառումով.. 2–15

Ավետիսյան Ա.Ս., Հունանյան Ա.Ա. Բարձր հաճախականության սահքի նորմալ ալիքի լայնույթա-փուլային աղավաղումը, մակերևութային թույլ անհամասեռությամբ, համասեռ առաձգական ալիքատարում............. 2–28

Զաքարյան Տ.Վ. Առաձգականության տեսության առաջին դինամիկական եզրային խնդիրը եռաշերտ սալի համար.. 2–43
Ղազարյան Կ.Բ., Պապյան Ա.Ա. Ռեզոնանսային և տեղայնացված սահքի տատանումները բաղադրյալ առաձգական ռեզոնատորում.................. 2–52
Մխիթարյան Ս.Մ. Վերածվող կորիզների մեթոդով խառը և կոնտակտային խնդիրների մի դասի ինտեգրալ հավասարումների լուծման մասին.... 2–58
Սարգսյան Ս.Վ. Եռաչափ դրվածքով առաձգականորեն կաշկանդված եզրով կիսատարածությունում ալիքների տարածման խնդիրը 2–74

СОДЕРЖАНИЕ №2, 2017

Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотические решения несвязанных задач стационарной теплопроводности и термоупругости для двухслойных пластин с неклассическими граничными условиями.. 2–3
Аветисян А.С., Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Распространение упругих волн в плоском слое-волноводе с учётом упрощённой модели континуума Коссера 2–15
Аветисян А.С., Унанян А.А. Амплитудно-фазовые искажения высокочастотной нормальной сдвиговой волны в однородном упругом волноводе с слабо-неоднородными поверхностями 2–28
Закарян Т.В. Первая динамическая краевая задача теории упругости для трёхслойной пластинки 2–43
Казарян К.Б., Папян А.А. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в упругом составном резонаторе 2–52
Мхитарян С.М. О решении интегральных уравнений одного класса смешанных и контактных задач методом вырожденных ядер 2–58
Саркисян С.В. Трёхмерная задача о распространении волн в полупространстве с упруго-стеснённой границей 2–74

CONTENTS №2, 2017

Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S. Asymptotic solutions of stationary problems of thermal conductivity and thermoelasticity with nonclassical boundary conditions for the two-layer plates with full and incomplete contact layers............................. 2–3
Ambartsumyan S.A., Avetisyan A.S., Belubekyan M.V. Propagation of elastic waves in a plane waveguide layer on the basis of a simplified model of the Cosserat continuum 2–15
Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. Amplitude-phase distortion of the normal high-frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces 2–28

Zakaryan T.V. First dynamic boundary problem of the elasticity theoryfor three-layered plate 2–43
Ghazaryan K.B., Papyan A.A. Resonance and localized shear vibration of bimaterial elastic resonator 2–52
Mkhitaryan S.M. On the solution to integral equations of one class of mixed and contact problems by the degenerate kernel method 2–58
Sarkisyan S.V. Three-dimensional problem of waves propagation in half-space with an elastically restrained boundary 2–74

Կիրակոսյան Ռ.Մ. –ծննդյան 80-ամյակի առթիվ 3–3

Մանժիրով Ա.Վ.–ծննդյան 60-ամյակի առթիվ 3–5

Գալիչյան Տ.Ա., Ֆիլիպպով Դ.Ա., Ֆիռսովա Տ.Օ., Ռադչենկո Գ.Ս. Գծային և ոչ գծային մագնիսաէլեկտրական էֆեկտի տեսությունը շերտավոր մագնիսա-ստրիկցիոն-պյեզոէլեկտրական բաղադրյալ համակարգերում 3–7

Ալեքսանյան Ռ.Կ. Շրջանային օղակի տեսքով ընդլայնական հատվածքի տեսք ունեցող պրիզմատիկ ձողի ոլորումը 3–20

Ղուկասյան Ա.Ա. Մատակարարման պրոցեսի մաթեմատիկակա մոդելավորման և նրա ղեկավարելիության պայմանների մասին 3–26

Քերոբյան Ա.Վ., Սահակյան Կ.Պ. Վերջավոր թվով վերջավոր ստրինգերներից բեռնավորումների փոխանցումը առաձգական կիսահարթությանը կպչուն սահքի շերտերի միջոցով 3–39

Կիրակոսյան Ռ.Մ., Ստեփանյան Ս.Պ. Ձողի կայունությունը առաձգական ամրակցման հենարանի կողմից սեղմող ուժի փոքրացման հաշվառմամբ........3–57

Մկրտչյան Ս.Հ. Սահքի էլեկտրաառաձգական նորմալ ալիքները պյեզոէլեկտրիկ-հաղորդիչ երկշերտ ալիքատարում 3–67

СОДЕРЖАНИЕ №3, 2017, том 70

Киракосян Размик Макарович – К 80-летию со дня рождения 3–3

Манжиров Александр Владимирович– К 60-летию со дня рождения 3–5

Галичян Т.А., Филиппов Д.А., Фирсова Т.О., Радченко Г.С. – Теория линейного и нелинейного магнитоэлектрического эффекта в слоистых магнитострикционно-пьезоэлектрических композитах 3–7

Алексанян Р.К. – Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца 3–20

Гукасян А.А. – О математическом моделировании процесса обслуживания и условия её управляемости 3–26

Керопян А.В., Саакян К.П. – Передача нагрузки от конечного числа конечных стрингеров к упругой полуплоскости посредством липких сдвиговых слоёв 3–39

Киракосян Р.М., Степанян С.П. – Устойчивость стержня при учёте уменьшения сжимающей силы упруго защемлённой опорой..3–57

Мкртчян С.А. – Сдвиговые электроупругие нормальные волны в двухслойном волноводе пьезоэлектрик-проводник 3–67

Content №3, 2017, V.70

Kirakosyan R.M. – 80-th Anniversary 3–3

Manzhirov A.V.– 60-th Anniversary 3–5

Galichyan T.A., Filippov D.A., Firsova T.O., Radchenko G.S. The theory of linear and nonlinear magnetoelectric effect in layered disc–shaped magnetostrictive-piezoelectric composites...3–7

Alexanyan R.K. Torsion of prismatic bar with cross-section in a form of circular ring...3–20

Ghukasyan A.A. On the mathematical modeling of maintenance process and the condition of its controllability 3–26

Kerobyan A.V., Sahakyan K.P. Loads Transfer from Finite Number Finite Stringers to an Elastic Half-plane Through Adhesive Shear layers..3–39

Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. The stability of rod by taking into account the decrease of the compression force by elastic clamped support 3–57

Mkrtchyan S.H. Shear electro-elasticity normal waves in the piezoelectric-conductor two-layered waveguide...3–67