

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻԱԿԱՆ ԳԵՂԵՎԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2017

УДК 539.3

**О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ПЛАСТИН
И ОБОЛОЧЕК***

Агаловян Л.А.

Ключевые слова: пластина, вынужденные колебания, резонанс, асимптотическое решение, пограничный слой.

Key words: plate, forced vibrations, resonance, asymptotic solution, boundary layer.

Բանալի բառեր՝ սալ, ստիպողական տատանումներ, ռեզոնանս, սահմանային լուծում, սահմանային շերտ.

Աղալովյան Լ.Ա.

Սալերի և թաղանթների տարածական դինամիկ խնդիրների մասին

Ուսումնասիրված են օրթոտրոպ սալերի հարմոնիկ ստիպողական տատանումները: Որոշված են երեք դասի տարածական դինամիկ խնդիրների սահմանային լուծումները: Արտածված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Նշված են այն դեպքերը, երբ արտաքին Ֆներքին խնդրի լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ, կառուցված է սահմանային շերտի լուծումը: Ցույց է տրված, որ բոլոր բնորոշիչ մեծությունները, մասնավորապես նորմալ տեղափոխությունը, խստագույնս կախված են ուղղաձիգ կոորդինատից: Այդ հանգամանքը կասկածի տակ է դնում դասական տեսության վարկածների կիրառելիությունը դինամիկ խնդրում, քանի որ վարկածների, ընդունմամբ աղավաղվում է տատանման պրոցեսի բնույթն ըստ ուղղաձիգ կոորդինատի:

Aghalovyan L.A.

On Space dynamic problems of plates and shells

Forced harmonic vibrations of orthotropic plates are investigated. Asymptotic solutions of space dynamic three classes of problems are found. Cases, when the solution of the outer (inner) problem becomes mathematically exact, are noted, the solution of the boundary layer is built. It is denoted that all the values, particularly, the normal displacement, strictly depend on the transverse coordinate, which casts doubt on the applicability of the hypotheses of classical theory of plates in dynamic problems, as by the hypotheses acceptance the character of the vibration process on the transverse coordinate distorts.

Исследованы вынужденные гармонические колебания ортотропных пластин. Найдены асимптотические решения пространственных динамических трёх классов задач. Указаны случаи, когда решение внешней (внутренней) задачи становится математически точным, построено решение пограничного слоя. Показано, что все величины, в частности, нормальное перемещение, строго зависят от поперечной координаты, что ставит под сомнение применимость гипотез классической теории пластин в динамических задачах, ибо принятием гипотез искажается характер колебательного процесса по поперечной координате.

Введение. Уравнения теории упругости для тонких тел (балки, стержни, пластины, оболочки), написанные в безразмерных координатах, являются сингулярно возмущёнными малым геометрическим параметром. Для решения подобных

* Пленарный доклад автора на Международной школе-конференции молодых учёных. Механика –2016, 3–7 октября 2016,

Цахкадзор, Армения

уравнений и систем эффективным оказался асимптотический метод. Решение складывается из решений внутренней (внешней) задачи и задачи пограничного слоя [1-3].

$$I = I^{out} + I_b \quad (1)$$

Классическая теория пластин и оболочек Кирхгофа-Лява и уточнённые теории Рейсснера, Амбарцумяна С., типа Тимошенко рассматривают лишь один класс задач (хотя и очень широкий), когда на лицевых поверхностях тонкого тела заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений. Если на лицевых поверхностях заданы условия второй или смешанной краевых задач теории упругости, доказано, что для решения подобных задач гипотезы классической и уточнённых теорий не применимы [3]. Видимо, по этой причине долгое время эти задачи не были решены. Асимптотический метод позволил решить и этот класс задач [3]. Решение внутренней (внешней, по терминологии в европейских и американских изданиях) задачи (I^{out}) представляется в виде специфического ряда по малому геометрическому параметру $\varepsilon = h/l$, где h – полутолщина, l – характерный тангенциальный размер тонкого тела:

$$I^{out} = \varepsilon^{q_I+s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}, \quad (2)$$

где q_I – интенсивность соответствующей искомой величины, N – число приближений. Значения q_I устанавливаются таким образом, чтобы после подстановки (2) в преобразованные вследствие перехода к безразмерным координатам и перемещениям уравнения и соотношения теории упругости получить непротиворечивую систему для определения $I^{(s)}$. Отыскание непротиворечивых значений q_I – наиболее трудный момент при использовании асимптотического метода.

В случае первой краевой задачи теории упругости для анизотропных пластин установлено [3]:

$$q_I = -2 \text{ для } \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, U, V \quad (3)$$

$$q_I = -1 \text{ для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz}; \quad q = 0 \text{ для } \sigma_{zz}, \quad q_I = -3 \text{ для } W.$$

В случае второй и смешанной краевых задач для балок и пластин установлено [3,4]:

$$q_I = -1 \text{ для всех } \sigma_{ij}, \quad q_I = 0 \text{ для } u, v, w. \quad (4)$$

Асимптотика (2), (3); (2), (4) остаётся в силе и для слоистых балок и пластин. Соответствующие краевые задачи решены в [3,5].

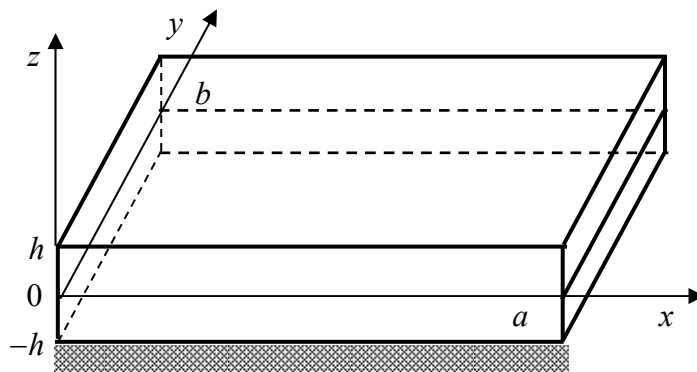
Решение для пограничного слоя строится вблизи торцевых сечений тонкого тела, оно, как правило, экспоненциально убывает при удалении от торцов во внутрь тела.

При решении динамических задач тонких тел, как обычно, в уравнения классической теории формально добавляются упрощённые принятием гипотез инерционные слагаемые. Вследствие этого ниже, на основе решения соответствующей пространственной динамической задачи убедимся, что искажается характер колебательного процесса по поперечной координате.

1. Вынужденные колебания анизотропных пластин. Пусть пластина занимает область $D = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, \min(a, b) = l, h \ll l\}$ (фиг.1). Рассмотрим установившиеся колебания пластины, вызванные гармонически

изменяющимися во времени внешними воздействиями. Для приложений наибольший интерес представляют следующие классы вынужденных колебаний:

а) колебания, вызванные вектором перемещения, приложенным к лицевой поверхности $z = -h$ пластины



Фиг.1

$$u(x, y, -h) = u^-(x, y) \exp(i\Omega t), \quad (u, v, w), \quad (5)$$

а поверхность $z = h$ свободна

$$\sigma_{xz}(x, y, h) = \sigma_{yz}(x, y, h) = \sigma_{zz}(x, y, h) = 0, \quad (6)$$

или жёстко закреплена

$$u(x, y, h) = v(x, y, h) = w(x, y, h) = 0; \quad (7)$$

б) колебания пластины, закреплённой с абсолютно жёстким плоским основанием

$$u(x, y, -h) = v(x, y, -h) = w(x, y, -h) = 0, \quad (8)$$

а при $z = h$ заданы соответствующие компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{jz}(x, y, h) = \sigma_{jz}^+(x, y) \exp(i\Omega t), \quad j = x, y, z \quad (9)$$

или вектор перемещения

$$u(x, y, h) = u^+(x, y) \exp(i\Omega t), \quad (u, v, w); \quad (10)$$

в) вынужденные колебания пластин, вызванные приложенными к лицевым поверхностям пластины нормальными и тангенциальными нагрузками (первая краевая задача теории упругости)

$$\sigma_{jz}(x, y, \pm h) = \pm \sigma_{jz}^\pm(x, y) \exp(i\Omega t), \quad j = x, y, z, \quad (11)$$

где $\sigma_{jz}^\pm, u^\pm, v^\pm, w^\pm$ – заданные функции, Ω – частота внешнего вынуждающего воздействия.

Требуется найти решение уравнений трёхмерной задачи теории упругости, которые для ортотропных пластин имеют вид:

уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{jz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (j = x, y, z; u, v, w), \quad (12)$$

соотношения упругости (обобщённый закон Гука)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11} \sigma_{xx} + a_{12} \sigma_{yy} + a_{13} \sigma_{zz}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12} \sigma_{xx} + a_{22} \sigma_{yy} + a_{23} \sigma_{zz}, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= a_{13} \sigma_{xx} + a_{23} \sigma_{yy} + a_{33} \sigma_{zz}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{66} \sigma_{xy}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{55} \sigma_{xz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44} \sigma_{yz}. \end{aligned} \quad (13)$$

Это решение должно удовлетворять одной из групп граничных условий (5)–(11) и условиям на боковой поверхности пластины, которые пока не конкретизируем. При асимптотическом подходе решение внешней (внутренней) задачи однозначно определяется в результате удовлетворения каждого из вариантов условий а), б), в). Следовательно, пограничный слой будет устранять возникающую невязку при удовлетворении условиям на боковой поверхности (торцах).

Поскольку динамический процесс считается установившимся, решение систем уравнений (12), (13) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) &= \sigma_{jk}(x, y, z) \exp(i\Omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, z; j, k = 1, 2, 3 \\ u(x, y, z, t) &= \bar{u}(x, y, z) \exp(i\Omega t), \quad (u, v, w). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив (14) в уравнения (12), (13) и перейдя к безразмерным координатам и перемещениям

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h, \quad U = \bar{u}/l, \quad V = \bar{v}/l, \quad W = \bar{z}/h, \quad (15)$$

получим сингулярно-возмущённую малым параметром ε систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 V = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 W &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{13} \sigma_{33}, \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + a_{23} \sigma_{33}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{11} + a_{23} \sigma_{22} + a_{33} \sigma_{33}, \\ \frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} = a_{55} \sigma_{13}, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{23}, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} &= a_{66} \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2$, ρ – плотность. Решение системы (16) имеет вид (1). С самого начала процесс является динамическим, это будет означать, что в исходном приближении разложения (2) должны присутствовать инерционные слагаемые. Мы

получим непротиворечивую систему для последовательного определения всех искомых величин внешней (внутренней) задачи, если разложение (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^{out} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jk}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j, k = 1, 2, 3; \quad s = \overline{0, N} \\ (U^{out}, V^{out}, W^{out}) &= \varepsilon^s (U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}). \end{aligned} \quad (17)$$

Представление (17) соответствует случаю, когда присутствующая в (16) $\Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2$ – порядка единицы. При $\Omega_*^2 = 0(\varepsilon)$ процесс будет квазистатическим.

При $\Omega_*^2 = 0(\varepsilon^{-1})$ и выше будет иметь место высокочастотное состояние, которое может быть опять описано системой (16), если $\Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2$, заменить на $\Omega_*^2 = \rho h l \Omega^2$, а при $\Omega_*^2 = 0(\varepsilon^{-2})$ – на $\Omega_*^2 = \rho l^2 \Omega^2$. Подставив (17) в (16) и приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε , для определения $\sigma_{jk}^{(s)}, U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 U^{(s)} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 V^{(s)} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 W^{(s)} &= 0, \quad \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_{11}^{(s)} + a_{12} \sigma_{22}^{(s)} + a_{13} \sigma_{33}^{(s)}, \\ \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{12} \sigma_{11}^{(s)} + a_{22} \sigma_{22}^{(s)} + a_{23} \sigma_{33}^{(s)}, \quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_{11}^{(s)} + a_{23} \sigma_{22}^{(s)} + a_{33} \sigma_{33}^{(s)}, \\ \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{55} \sigma_{13}^{(s)}, \quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{23}^{(s)}, \\ \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{66} \sigma_{12}^{(s)}, \quad Q^{(m)} \equiv 0 \text{ при } m < 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из системы (18) все напряжения можно выразить через перемещения по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{12}^{(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left(\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{11}^{(s)} = -A_{23} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{22} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{22}^{(s)} &= -A_{13} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{33}^{(s)} &= A_{11} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{23} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) / \Delta, \quad A_{22} = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) / \Delta, \quad A_{33} = (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) / \Delta, \\ A_{13} &= (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) / \Delta, \quad A_{23} = (a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}) / \Delta, \end{aligned} \quad (20)$$

$$A_{12} = (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}) / \Delta, \quad \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2.$$

Подставив значения $\sigma_{13}^{(3)}, \sigma_{23}^{(3)}, \sigma_{33}^{(3)}$ в первые три уравнения (18), для определения $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \Omega_*^2 U^{(s)} = R_u^{(s)}, \quad R_u^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55} \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} \Omega_*^2 V^{(s)} = R_v^{(s)}, \quad R_v^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44} \left(\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad (22)$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Omega_*^2 W^{(s)} = R_w^{(s)}, \quad (23)$$

$$R_w^{(s)} = A_{23} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \left(\frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right).$$

Решения уравнений (21)–(23) имеют вид:

$$U^{(s)} = U_0^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (U, V, W), \quad (24)$$

где первое слагаемое – решение однородного уравнения, второе слагаемое – частное решение неоднородного уравнения. Решениями однородных уравнений являются:

$$\begin{aligned} U_0^{(s)} &= C_1^{(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1 \zeta + C_2^{(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1 \zeta, \quad \gamma_1 = \Omega_* \sqrt{a_{55}}, \\ V_0^{(s)} &= C_3^{(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2 \zeta + C_4^{(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2 \zeta, \quad \gamma_2 = \Omega_* \sqrt{a_{44}}, \\ W_0^{(s)} &= C_5^{(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_3 \zeta + C_6^{(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_3 \zeta, \quad \gamma_3 = \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Имея значения перемещений (24), (25), по формулам (19) определяются напряжения. Затем удовлетворяется каждая группа граничных условий (5)–(11) и однозначно определяются неизвестные функции $C_j^{(s)}(\xi, \eta)$ и окончательное решение. Приведём решения задач, соответствующие граничным условиям (5), (6); (5), (7), которые, в частности, моделируют сейсмические воздействия на основания сооружений. Используя формулы (14), (17), (19), (24), (25) и удовлетворив условиям (5), (6), получим решение:

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \frac{1}{\cos 2\gamma_1} \left(u^{-(s)} - U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \cos \gamma_1 (1 - \zeta) - \\
&\quad - \frac{a_{55}}{\gamma_1} \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \sin \gamma_1 (1 + \zeta) + U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), (u, v; a_{55}, a_{44}; 1, 2), \\
W^{(s)} &= \frac{1}{\cos 2\gamma_3} \left(w^{-(s)} - W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \cos \gamma_3 (1 - \zeta) - \\
&\quad - \frac{1}{\gamma_3 A_{11}} \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \sin \gamma_3 (1 + \zeta) + W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
u^{-(0)} &= u^- / l, u^{(s)} = 0, s \neq 0, (u, v, w), \\
\sigma_{13\tau}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial U_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_\tau^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), (1, 2; u, v; a_{55}, a_{44}; \xi, \eta).
\end{aligned} \tag{26}$$

Граничным условиям (5), (7) соответствует решение

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_1} \left(\left(u^{-(s)} - U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \sin \gamma_1 (1 - \zeta) - \right. \\
&\quad \left. - U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, 1) \sin \gamma_1 (1 + \zeta) + U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \right), (u, v; a_{55}, a_{44}; \gamma_1 \gamma_2), \\
W^{(s)} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_3} \left(\left(w^{-(s)} - W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \sin \gamma_3 (1 - \zeta) - \right. \\
&\quad \left. - W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \sin \gamma_3 (1 + \zeta) + W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \right), \\
u^{-(0)} &= u^- / l, u^{-(s)} = 0, s \neq 0, (u, v, w).
\end{aligned} \tag{27}$$

Имея значения перемещений, напряжения будут определены по формулам (19). Решение (26) будет конечным, если

$$\cos 2\gamma_1 \neq 0, \cos 2\gamma_2 \neq 0, \cos 2\gamma_3 \neq 0. \tag{28}$$

При нарушении какого-либо из условий (28) будет возникать резонанс, значения частот, при которых в (28) выполняется равенство нулю, совпадают с главными значениями частот собственных колебаний. Например, условию $\cos 2\gamma_1 = 0$ соответствуют следующие значения резонансных частот:

$$\Omega_n = (2n + 1) \frac{\pi}{4h} \sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}, n \in N. \tag{29}$$

В случае решения (27) резонанс возникнет, если будет выполнено хотя бы одно из условий:

$$\sin 2\gamma_1 = 0, \sin 2\gamma_2 = 0, \sin 2\gamma_3 = 0. \tag{30}$$

Учитывая, что $a_{55} = 1/G_{13}$, $a_{44} = 1/G_{23}$, $R_u^{(0)} = R_v^{(0)} = R_w^{(0)} = 0$, согласно формулам (26) и (27), в пластинке будут возникать два типа сдвиговых и продольное колебания, которые при $s = 0$ будут независимыми, т.е. один тип колебаний не будет влиять на другой. При $s > 0$ колебания будут зависимыми и один тип колебаний будет вызывать колебания противоположного типа. Отметим также, что если входящие в граничные условия (5), (9)–(11) функции являются алгебраическими многочленами от тангенциальных координат x, y , то итерационный процесс обрывается на определенном приближении, в результате чего получается математически точное решение во внешней (внутренней) задаче (решение для пространственного слоя). Это решение, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя.

Граничным условиям (8), (9) соответствует решение:

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \frac{1}{\cos 2\gamma_1} \left(\frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_*} \left(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \sin \gamma_1 (1 + \zeta) - \right. \\
&\quad \left. -U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \cos \gamma_1 (1 - \zeta) \right) + U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{13}^{(s)} &= \frac{\gamma_1}{a_{55}} \left(\frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_*} \left(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \right) \cos \gamma_1 (1 + \zeta) - \\
&\quad -U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \sin \gamma_1 (1 - \zeta) \frac{1}{\cos 2\gamma_1} + \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), (u, v; a_{55}, a_{44}; \gamma_1, \gamma_2; x, y; 1, 2), \\
W^{(s)} &= \frac{1}{\cos 2\gamma_3} \left(\frac{1}{\Omega_* \sqrt{A_{11}}} \left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \sin \gamma_3 (1 + \zeta) - \right. \\
&\quad \left. -W_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \cos \gamma_3 (1 - \zeta) \right) + W_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{33}^{(s)} &= \frac{\gamma_3 A_{11}}{\cos 2\gamma_3} \left(\frac{1}{\Omega_* \sqrt{A_{11}}} \left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \cos \gamma_3 (1 + \zeta) - \right. \\
&\quad \left. -W_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \sin \gamma_3 (1 - \zeta) \right) + \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta).
\end{aligned} \tag{31}$$

При условиях (8), (10) имеем:

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_1} \left(\left(u^{+(s)} - U_{\tau}^{+(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \sin (1 + \zeta) \gamma_1 - \right. \\
&\quad \left. -U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \sin (1 - \zeta) \gamma_1 \right) + U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{32}$$

$$u^{+(0)} = u^+ / l, \quad u^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (u, v, w).$$

Решение для $V^{(s)}, W^{(s)}$ можно получить от (32) циклической перестановкой $(U, V, W; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; u^+, v^+, w^+)$. Аналогичным образом выводятся условия возникновения резонанса.

Удовлетворив граничным условиям (11), получим решение:

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= -\frac{a_{55}}{\gamma_1 \sin 2\gamma_1} \left(\left(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \cos(1+\zeta)\gamma_1 + \right. \\
&+ \left. \left(\sigma_{xz}^{-(s)} + \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \cos(1-\zeta)\gamma_1 \right) + U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{13}^{(s)} &= -\frac{1}{\sin 2\gamma_1} \left(\left(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \sin(1+\zeta)\gamma_1 - \right. \\
&- \left. \left(\sigma_{xz}^{-(s)} + \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \sin(1-\zeta)\gamma_1 \right) + \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{xz}^{\pm(0)} &= \varepsilon \sigma_{xz}^{\pm}, \quad \sigma_{xz}^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (x, y, z), \\
&(u, v; a_{55}, a_{44}; xz, yz; 13, 23; \gamma_1, \gamma_2), \\
W^{(s)} &= -\frac{1}{A_{11}\gamma_3 \sin 2\gamma_3} \left(\left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \cos(1+\zeta)\gamma_3 + \right. \\
&+ \left. \left(\sigma_{zz}^{-(s)} + \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \cos(1-\zeta)\gamma_3 \right) + W_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{33}^{(s)} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_3} \left(\left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \sin(1+\zeta)\gamma_3 - \right. \\
&- \left(\sigma_{zz}^{-(s)} + \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \sin(1-\zeta)\gamma_3 \right) + \sigma_{33}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) - \\
&- \left(\sigma_{zz}^{-(s)} + \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \sin(1-\zeta)\gamma_3 + \sigma_{33}^{-(s)}(\xi, \eta, \zeta).
\end{aligned} \tag{33}$$

Окончательное решение для этого случая определится по формулам (14), (17), (33). Резонанс возникнет, если выполнится хоть одно из условий: $\sin 2\gamma_1 = 0$, $\sin 2\gamma_2 = 0$, $\sin 2\gamma_3 = 0$. Соответствующие значения частот совпадают с главными значениями частот собственных колебаний. Как известно, в классической теории пластин и оболочек на основе гипотез Кирхгофа-Лява перемещение W не зависит от поперечной координаты ζ , решение же (33) указывает, что все величины существенно зависят от этой координаты. Это означает, что в динамических задачах гипотезы классической теории строго не применимы. Принципиально отличается также асимптотика (3) классической теории от асимптотики (17) в динамических задачах пластин и оболочек, что означает, что динамический процесс может резко изменить характер напряжённо-деформированного состояния. Формальное добавление к классическим уравнениям статики инерционных слагаемых не может обеспечить описание истинного динамического состояния пластины или оболочки.

2. Математически точные решения во внешней задаче. Если входящие в граничные условия (5), (9)–(11) функции $\sigma_{jz}^{\pm}, u^{\pm}, V^{\pm}, W^{\pm}$ являются алгебраическими многочленами от тангенциальных координат ξ, η , итерационный процесс обрывается после конечного числа шагов, зависящего от степени многочлена. В результате получается математически точное решение во внешней (внутренней) задаче (решение для пространственного слоя). Приведём эти решения для некоторых вариантов граничных условий. Если через Q обозначить любое из напряжений и перемещений, согласно формулам (14), (15), (17), решение можно записать в виде:

$$Q(x, y, z, t) = \tilde{Q}(\xi, \eta, \zeta) \exp(i\Omega t). \quad (34)$$

Если в задаче (5), (6) $u^-, v^-, w^- = \text{const}$, итерационный процесс обрывается на исходном приближении и согласно формулам (19), (26), (34) имеем точное решение:

$$\tilde{u} = \frac{u^-}{\cos 2\gamma_1} \cos(1-\zeta)\gamma_1, \quad \tilde{\sigma}_{xz} = \frac{1}{a_{55}} \frac{u^-}{h} \frac{\gamma_1}{\cos 2\gamma_1} \sin(1-\zeta)\gamma_1, \\ (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}; \gamma_1, \gamma_2) \quad (35)$$

$$\tilde{W} = \frac{W^-}{\cos 2\gamma_3} \cos(1-\zeta)\gamma_3, \quad \tilde{\sigma}_{zz} = A_{11} \frac{W^-}{h} \frac{\gamma_3}{\cos 2\gamma_3} \sin(1-\zeta)\gamma_3,$$

$$\tilde{\sigma}_{xx} = -A_{23} \frac{W^-}{h} \frac{\gamma_3}{\cos 2\gamma_3} \sin(1-\zeta)\gamma_3, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = -A_{13} \frac{W^-}{h} \frac{\gamma_3}{\cos 2\gamma_3} \sin(1-\zeta)\gamma_3,$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = 0.$$

Граничным условиям (5), (7) при $u^-, v^-, w^- = \text{const}$ соответствует математически точное решение:

$$\tilde{u} = \frac{u^-}{\sin 2\gamma_1} \sin(1-\zeta)\gamma_1, \quad \tilde{\sigma}_{xz} = -\frac{1}{a_{55}} \frac{u^-}{h} \frac{\gamma_1}{\sin 2\gamma_1} \cos(1-\zeta)\gamma_1, \\ (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}; \gamma_1, \gamma_2)$$

$$\tilde{w} = \frac{w^-}{\sin 2\gamma_3} \sin(1-\zeta)\gamma_3, \quad \tilde{\sigma}_{zz} = -A_{11} \frac{w^-}{h} \frac{\gamma_3}{\sin 2\gamma_3} \cos(1-\zeta)\gamma_3; \quad (36)$$

$$\tilde{\sigma}_{xx} = A_{23} \frac{w^-}{h} \frac{\gamma_3}{\sin 2\gamma_3} \cos(1-\zeta)\gamma_3, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = A_{13} \frac{w^-}{h} \frac{\gamma_3}{\sin 2\gamma_3} \cos(1-\zeta)\gamma_3,$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = 0.$$

В случае граничных условий (8), (9) итерационный процесс при $\sigma_{jz}^+ = \text{const}$ обрывается на исходном приближении и получаем точное решение:

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= \frac{ha_{55}\sigma_{xz}^+}{\gamma_1 \cos 2\gamma_1} \sin \gamma_1 (1+\zeta), \quad \tilde{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}^+}{\cos 2\gamma_1} \cos \gamma_1 (1+\zeta), \\
&\quad (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}; \gamma_1, \gamma_2) \\
\tilde{w} &= \frac{h\sigma_{zz}^+}{A_{11}\gamma_3 \cos 2\gamma_3} \sin \gamma_3 (1+\zeta), \quad \tilde{\sigma}_{zz} = \frac{\sigma_{zz}^+}{\cos 2\gamma_3} \cos \gamma_3 (1+\zeta), \\
\tilde{\sigma}_{xx} &= -\frac{A_{23}}{h} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = -\frac{A_{13}}{h} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0.
\end{aligned} \tag{37}$$

Особый интерес представляет получение математически точных решений, соответствующих граничным условиям (11) первой краевой задачи теории упругости, хотя бы потому, что нахождение соответствующего решения в статической задаче связано с преодолением значительных математических трудностей. Используя формулы (14), (17), (19), (33), (34), при $\sigma_{j\gamma}^\pm = \text{const}$ получим точное решение (итерация опять обрывается на исходном приближении).

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= -\frac{a_{55}h}{\gamma_1 \sin 2\gamma_1} (\sigma_{xz}^+ \cos(1+\zeta)\gamma_1 + \sigma_{xz}^- \cos(1-\zeta)\gamma_1), \\
\tilde{\sigma}_{xz} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_1} (\sigma_{xz}^+ \sin(1+\zeta)\gamma_1 - \sigma_{xz}^- \sin(1-\zeta)\gamma_1), \\
&\quad (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}; \gamma_1, \gamma_2) \\
\tilde{w} &= -\frac{1}{A_{11}} \frac{h}{\gamma_3 \sin 2\gamma_3} (\sigma_{zz}^+ \cos(1+\zeta)\gamma_3 + \sigma_{zz}^- \cos(1-\zeta)\gamma_3), \\
\tilde{\sigma}_{zz} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_3} (\sigma_{zz}^+ \sin(1+\zeta)\gamma_3 - \sigma_{zz}^- \sin(1-\zeta)\gamma_3), \\
\tilde{\sigma}_{xx} &= -\frac{A_{23}}{h} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = -\frac{A_{13}}{h} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Используя общие решения (26), (27), (31)–(33), несложно выписывать точные решения, соответствующие внешним полиномиальным нагрузениям различных степеней. Из выведенных выше формул следует, что в пластинке возникают два типа сдвиговых и продольное колебаний, которые в исходном приближении независимы, в последующих же приближениях они зависимы и один тип колебаний порождает колебания другого типа.

Приведённые математически точные решения показывают, что в динамических задачах пластин поперечное нормальное перемещение w явно зависит от поперечной координаты ζ , откуда следует, что необходимо проявить определённую осторожность в использовании классической теории пластин в динамических задачах.

3. Пограничный слой в пластинах. Решение внешней (внутренней) задачи полностью определилось после удовлетворения граничным условиям на лицевых

поверхностях пластины. Это решение вообще не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пластины. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя. Изложим процедуру построения этого решения вблизи боковой поверхности $x = 0$. Вводится новая замена переменной $\gamma = \xi/\varepsilon$ в уравнения (16) и всем искомым величинам приписывается индекс « b » (от слова boundary). Соответствующее решение вновь полученной системы должно быстро убывать при удалении от боковой поверхности $x = 0$ ($\gamma = 0$) во внутрь пластины.

Это решение отыскивается в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{jke} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jke}^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda\gamma), \quad j, k = 1, 2, 3; s = \overline{0, N}, \\ (U_e, V_e, W_e) &= \varepsilon^s (U_e^{(s)}(\eta, \zeta), V_e^{(s)}(\eta, \zeta), W_e^{(s)}(\eta, \zeta)) \exp(-\lambda\gamma), \end{aligned} \quad (39)$$

где λ – неизвестное пока число, которое характеризует скорость убывания величин пограничного слоя, $\text{Re } \lambda > 0$. Подставив (39) в вышеуказанную преобразованную систему, получим:

$$\begin{aligned} -\lambda \sigma_{11e}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{12e}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13e}^{(s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 U_e^{(s)} &= 0, \quad -\lambda \sigma_{12e}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{22e}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23e}^{(s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 V_e^{(s)} = 0, \\ -\lambda \sigma_{13e}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{23e}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33e}^{(s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 W_e^{(s)} &= 0, \quad -\lambda U_b^{(s)} = a_{11} \sigma_{11b}^{(s)} + a_{12} \sigma_{22b}^{(s)} + a_{13} \sigma_{33b}^{(s)}, \\ \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{11b}^{(s)} + a_{22} \sigma_{22b}^{(s)} + a_{23} \sigma_{33b}^{(s)}, \quad \frac{\partial W_e^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{11b}^{(s)} + a_{23} \sigma_{22b}^{(s)} + a_{33} \sigma_{33b}^{(s)}, \quad (40) \\ -\lambda V_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{66} \sigma_{12b}^{(s)}, \quad -\lambda W_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{55} \sigma_{13e}^{(s)}, \\ \frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{44} \sigma_{23b}^{(s)}. \end{aligned}$$

Из системы (40) напряжения можно выразить через компоненты вектора перемещения:

$$\begin{aligned} \sigma_{12b}^{(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left(-\lambda V_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{13b}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left(-\lambda W_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{23e}^{(s)} &= \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad Q^{(m)} \equiv 0 \quad \text{при} \quad m < 0, \\ \sigma_{11b}^{(s)} &= -\lambda A_{22} U_b^{(s)} - A_{23} \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{22b}^{(s)} &= \lambda A_{12} U_b^{(s)} - A_{13} \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{33} \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{33b}^{(s)} = \lambda A_{23} U_b^{(s)} + A_{11} \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{13} \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad (41)$$

где A_{ik} определяются по формулам (20). Подставив значения $\sigma_{12b}^{(s)}, \sigma_{23b}^{(s)}$ во второе уравнение (40), для определения $V_b^{(s)}$ получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 V_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{a_{44}}{a_{66}} \lambda^2 + a_{44} \Omega_*^2 \right) V_b^{(s)} = f_{vb}^{(s)}, \quad (42)$$

$$f_{vb}^{(s)} = \frac{a_{44}}{a_{66}} \lambda \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - a_{44} \frac{\partial \sigma_{22b}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 W_b^{(s-1)}}{\partial \zeta \partial \eta}.$$

Подставив же значения $\sigma_{11e}^{(s)}, \sigma_{13e}^{(s)}, \sigma_{33e}^{(s)}$ в первое и третье уравнения (40), для определения $U_b^{(s)}, W_b^{(s)}$ получим систему:

$$\frac{\partial^2 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\lambda^2 A_{22} + \Omega_*^2) U_b^{(s)} + \lambda (A_{23} a_{55} - 1) \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} = f_{ub}^{(s)},$$

$$A_{11} a_{55} \frac{\partial^2 W_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + (\lambda^2 + a_{55} \Omega_*^2) W_b^{(s)} + \lambda (A_{23} a_{55} - 1) \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} = f_{wb}^{(s)}, \quad (43)$$

где несложно выписать выражения $f_{ub}^{(s)}, f_{wb}^{(s)}$, в частности, $f_{ub}^{(0)} = f_{wb}^{(0)} = f_{vb}^{(0)} \equiv 0$.

Из системы (43) $W_b^{(s)}$ можно выразить через $U_b^{(s)}$, а для определения $U_b^{(s)}$ получается уравнение

$$\frac{\partial^4 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^4} + B_{11} \frac{\partial^2 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + B_{22} U_b^{(s)} = \Psi_u^{(s)}, \quad (44)$$

где

$$B_{11} = \frac{\lambda^2}{A_{11}} (a_{55} (A_{11} A_{22} - A_{23}^2) + 2 A_{23}) + \frac{\Omega_*^2}{A_{11}} (1 + A_{11} a_{55}),$$

$$B_{22} = \frac{1}{A_{11}} (\lambda^2 A_{22} + \Omega_*^2) (\lambda^2 + a_{55} \Omega_*^2), \quad (45)$$

$$\Psi_u^{(s)} = \frac{1}{A_{11} a_{55}} (\lambda^2 + a_{55} \Omega_*^2) f_{ub}^{(s)} - \frac{1}{A_{11} a_{55}} \frac{\partial f_{uwb}^{(s)}}{\partial \zeta}.$$

Решение уравнения (44):

$$U_b^{(s)} = A_1^{(s)} \Psi_1 + A_2^{(s)} \Psi_2 + A_3^{(s)} \Psi_3 + A_4^{(s)} \Psi_4 + U_{tb}^{(s)}, \quad (46)$$

где $U_{tb}^{(s)}$ – частное решение уравнения (44), а

$$\Psi_1 = \operatorname{ch}k_1\zeta, \Psi_2 = \operatorname{sh}k_1\zeta, \Psi_3 = \operatorname{ch}k_2\zeta, \Psi_4 = \operatorname{sh}k_2\zeta$$

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-B_{11} \pm \sqrt{B_{11}^2 - 4B_{22}}\right)}. \quad (47)$$

Определив $U_b^{(s)}$, по формулам

$$W_b^{(s)} = C_1 \left(A_{11} a_{55} \frac{\partial^3 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^3} + C_2 \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} + f_{uwb}^{(s)} \right), \quad (48)$$

$$C_1 = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + a_{55}\Omega_*^2)(A_{23}a_{55} - 1)},$$

$$C_2 = A_{11}a_{55}^2(\lambda^2 A_{22} + \Omega_*^2) - \lambda^2(A_{23}a_{55} - 1)^2$$

определится $W_b^{(s)}$. Решением уравнения (42) является

$$V_b^{(s)} = B_1^{(s)} \sin m\zeta + B_2^{(s)} \cos m\zeta + V_{tb}^{(s)}(\eta, \zeta)$$

$$m = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}\lambda^2 + \Omega_*^2 a_{44}}. \quad (49)$$

Имея значения $U_b^{(s)}, V_b^{(s)}, W_b^{(s)}$, напряжения определяются по формулам (41).

Поскольку решение внешней задачи удовлетворяет условиям неоднородных краевых задач (5)–(11), решение пограничного слоя должно удовлетворять соответствующим нулевым условиям:

$$\text{а) } U_b(0, \eta, -1) = 0, V_b(0, \eta, -1) = 0, W_b(0, \eta, -1) = 0, \sigma_{j3b}(0, \eta, 1) = 0, \quad (50)$$

$$\text{б) } U_b(0, \eta, \pm 1) = 0, V_b(0, \eta, \pm 1) = 0, W_b(0, \eta, \pm 1) = 0, \quad (51)$$

$$\text{в) } \sigma_{j3b}(0, \eta, \pm 1) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (52)$$

При $s = 0$ правые части уравнений (42), (43) равны нулю и $V_b^{(0)}$ не зависит от $U^{(0)}, W^{(0)}$, и наоборот. Вычислив $V_b^{(0)}, \sigma_{23b}^{(0)}$ и удовлетворив условиям (50) относительно V_b и σ_{23b} , получим однородную алгебраическую систему, которая будет иметь ненулевое решение, если её определитель равен нулю. Из соответствующего трансцендентного уравнения $\cos 2m = 0$ определяется λ_n с $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{16} - \Omega_*^2 a_{44}}, \quad n \in N \quad (53)$$

и решение антиплоского погранслоя

$$V_\epsilon^{(0)} = V_{\epsilon n}^{(0)} \exp(-\lambda_n \gamma), \quad V_{\epsilon n}^{(0)} = B_2^{(0)}(\eta)(\operatorname{tg} m \sin m\zeta + \cos m\zeta), \quad (54)$$

где $B_2^{(0)}(\eta)$ должна быть определена при удовлетворении условиям на боковой поверхности $\gamma = 0$, т.е. при сопряжении решений внешней (внутренней) задачи и задачи пограничного слоя. По формулам (41), (46), (48), определив $U_b^{(0)}, W_b^{(0)}, \sigma_{13}^{(0)}, \sigma_{33}^{(0)}$ и удовлетворив остальным условиям (50) и соответствующим условиям (51), (52), для каждого случая получим своё трансцендентное уравнение для λ_n . Приведём его для условий (52):

$$\begin{aligned} (C_3 - C_4) \operatorname{sh}(k_1 + k_2) \pm (C_3 + C_4) \operatorname{sh}(k_1 - k_2) &= 0, \\ C_3 &= (\lambda C_1 A_{11} a_{55} k_1^2 + C_1 C_2 - 1) (\lambda A_{23} + C_1 A_{11}^2 a_{55} k_2^4 + C_1 C_2 A_{11} k_2^2) k_1, \\ C_4 &= (\lambda C_1 A_{11} a_{55} k_2^2 + C_1 C_2 - 1) (\lambda A_{23} + C_1 A_{11}^2 a_{55} k_1^4 + C_1 C_2 A_{11} k_1^2) k_2. \end{aligned} \quad (55)$$

Как правило, уравнения (55) имеют комплексно-сопряжённые корни. Первому уравнению (55) соответствует плоский симметричный погранслоем (растяжение–сжатие) и решение (46) принимает вид ($A_2^{(0)} = A_4^{(0)} = 0, A_3^{(0)}$ выражается через $A_1^{(0)}$):

$$\begin{aligned} U_e^{(0)} &= A_1^{(0)}(\eta) \left(\Psi_1 + b_1 \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} \Psi_3 \right), \\ b_1 &= - \frac{(\lambda C_1 A_{11} a_{55} k_1^2 + C_1 C_2 - 1) k_1}{(\lambda C_1 A_{11} a_{55} k_2^2 + C_1 C_2 - 1) k_2}, \end{aligned} \quad (56)$$

второму уравнению (55) соответствует кососимметричный (изгиб) динамический погранслоем ($A_1^{(0)} = A_3^{(0)} = 0, A_4^{(0)}$ выражается через $A_2^{(0)}$)

$$U_b^{(0)} = A_2^{(0)}(\eta) \left(\Psi_2 + b_1 \frac{\operatorname{ch} k_1}{\operatorname{ch} k_2} \Psi_4 \right). \quad (57)$$

Несложно выписать трансцендентные уравнения и соответствующие решения для остальных условий (50)-(52). Таким образом, в пластине возникают антиплоский и плоский динамические пограничные слои, величины которых при удалении от боковой поверхности убывают экспоненциально и с различными скоростями. Для антиплоского погранслоя λ_n вещественные, а для плоского погранслоя комплексно-сопряжённые, вещественная часть которых ($\operatorname{Re} \lambda_n > 0$), характеризует скорость убывания ($\exp(-\operatorname{Re} \lambda_n \gamma)$) величин. При $s = 0$ эти решения независимы, а при $s > 0$ они зависимы и каждому погранслою сопутствует противоположный погранслоем, но с амплитудой на порядок меньше предыдущей. В силу этого, в практических приложениях можно ограничиться исходным приближением. В общем же случае будем иметь два типа решений: $\overset{p}{Q}^{(s)}$ и $\overset{a}{Q}^{(s)}$, соответствующие значениям λ_n для плоского (λ_{pn}) и антиплоского (λ_{an}) пограничных слоёв. Является очевидным, что

$$\sigma_{12b}^{(0)} = \sigma_{23b}^{(0)} = V_b^p = 0; \sigma_{11b}^{(0)} = \sigma_{22b}^{(0)} = \sigma_{13b}^{(0)} = \sigma_{33b}^{(0)} = 0, \quad U_b^{(0)} = W_b^{(0)} = 0. \quad (58)$$

Учитывая, что корни λ_p трансцендентных уравнений плоского погранслоя комплексно-сопряженные, соответствующее решение будет вещественным. Например, принимая в (56)

$$A_1^{(0)} = \frac{1}{2} \left(A_{1n}^{(0)} - iA_{2n}^{(0)} \right), \quad \tilde{U}_{bn} = u_{bn} \exp(-\lambda_{pn} \gamma), \quad (59)$$

где u_{bn} – коэффициент при $A_1^{(0)}$ в (56), решение плоского погранслоя запишется в виде:

$$U_{bn}^{(0)} = A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{U}_{bn} + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{U}_{bn}, \quad (U, W), \quad (60)$$

$$\sigma_{jkn}^{(0)} = A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{\sigma}_{jkn} + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{\sigma}_{jkn}, \quad \tilde{\sigma}_{jkn} = \sigma_{jkn} \exp(-\lambda_{pn} \gamma), \quad j, k = 1, 3.$$

Отметим также, что для пограничного слоя решается однородная линейная система с однородными (нулевыми) граничными условиями. Следовательно, решение будет определено с точностью постоянного множителя, которую можно представить в виде ε^μ или ε^χ . В силу этого, общее асимптотическое решение (I) будет иметь вид:

$$I = I^{out} + \varepsilon^\mu \tilde{Q} + \varepsilon^\chi \tilde{Q}. \quad (61)$$

4. Сопряжение решений внешней задачи и задачи пограничного слоя. Мы показали выше, что решение внешней (внутренней) задачи полностью определяется через данные на лицевых поверхностях пластины. Однако, это решение, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности. Покажем, что решение (61) позволяет устранять возникающую неувязку.

Пусть боковая поверхность пластинки $x = 0$ свободна

($\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$ при $x = 0$). Согласно (17), (61), эти условия запишутся в виде:

$$\varepsilon^{-1+s} \sigma_{11}^{(s)}(\xi=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\mu+s} \sigma_{11b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\chi+s} \sigma_{11b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) = 0, \quad (62)$$

$$\varepsilon^{-1+s} \sigma_{13}^{(s)}(\xi=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\mu+s} \sigma_{13b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\chi+s} \sigma_{13b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) = 0,$$

$$\varepsilon^{-1+s} \sigma_{12}^{(s)}(\xi=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\mu+s} \sigma_{12b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\chi+s} \sigma_{12b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) = 0. \quad (63)$$

Учитывая, что величины внешней (внутренней) задачи уже известны, имея в виду (58), мы получим непротиворечивые условия для определения неизвестных функций решений плоского и антиплоского погранслоев, если $\mu = \chi = 0$. Для плоского погранслоя из (62) следует:

$$\sigma_{11b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -\sigma_{11b}^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - \sigma_{11b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta), \quad (64)$$

$$\sigma_{13b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -\sigma_{13b}^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - \sigma_{13b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta),$$

а для антиплоского погранслоя из (63) следует условие

$$\sigma_{12b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -\sigma_{12b}^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - \sigma_{12b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta). \quad (65)$$

Согласно (60), условия (64) при $s = 0$ записываются в виде

$$A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{\sigma}_{11bn}^{(0)}(0, \eta, \zeta) + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{\sigma}_{11bn}^{(0)}(0, \eta, \zeta) = -\sigma_{11}^{(0)}(0, \eta, \zeta), \quad (66)$$

$$A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{\sigma}_{13bn}^{(0)}(0, \eta, \zeta) + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{\sigma}_{13bn}^{(0)}(0, \eta, \zeta) = -\sigma_{13}^{(0)}(\xi = 0, \eta, \zeta),$$

в (66) в каждом уравнении по немому индексу «n» происходит суммирование от единицы до N-выбранных для вычислительных процедур λ_n . Систему (66) можно решить различными методами, например, методом коллокаций, Фурье, наименьших квадратов. При $s > 0$ меняются лишь правые части условий (66). Из условия (65), используя (41), (49), методом Фурье определяется антиплоский погранслоя. Если на боковой поверхности заданы иные условия, например, $u = v = w = 0$ или $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, w = 0$ при $x = 0$, процедура остаётся неизменной.

Покажем это для условий жёсткого защемления

$$u = v = w = 0 \text{ при } x = 0. \quad (67)$$

Для определения величин пограничного слоя получим непротиворечивые условия, если в формуле (61) $\mu = 0, \chi = 0$. В результате, для определения величин плоского пограничного слоя будем иметь условия:

$$U_b^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -U^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - U_b^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta), \quad (68)$$

$$W_b^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -W^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - W_b^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta).$$

Согласно формулам (58), (60), условия (68) при $s = 0$ примут вид:

$$A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{U}_{bn}(\gamma = 0, \eta, \zeta) + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{U}_{bn}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -U^{(0)}(\xi = 0, \eta, \zeta), \quad n = \overline{0, N},$$

$$A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{W}_{bn}(\gamma = 0, \eta, \zeta) + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{W}_{bn}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -W^{(0)}(\xi = 0, \eta, \zeta), \quad (69)$$

откуда одним из вышеуказанных методов определяются $A_{1n}^{(0)}, A_{2n}^{(0)}$ и окончательное решение при $s = 0$. При $s \geq 1$ меняются лишь правые части условий (69). Условие, соответствующее $v = 0$, записывается в виде

$$V_b^{(s)a}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -V^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - V_b^{(s)p}(\gamma = 0, \eta, \zeta). \quad (70)$$

Используя формулы (49), (58) из условия (70), методом Фурье определяется неизвестная функция от η -решения антиплоского погранслоя. Здесь, используя (49), заранее должно быть удовлетворено соответствующее из условий (50)–(52).

Изложенным методом решения пространственных динамических задач пластин можно решить динамические задачи для слоистых пластин [6], пластин с общей анизотропией [7], а также оболочек [8.9].

Заключение. Для ортотропных пластин найдены асимптотические решения пространственных динамических задач трёх классов. Выведены условия возникновения резонанса. Установлены случаи, когда решение внешней (внутренней) задачи становится математически точным. Построено решение для пограничного слоя и сопряжено с решением внешней (внутренней) задачи. Показано, что все расчётные величины, в частности, нормальное перемещение, строго зависят от поперечной координаты, что ставит под сомнение применимость гипотез классической теории пластин в динамических задачах. Принятием гипотез искажается характер колебательного процесса по поперечной координате и ими следует воспользоваться с большой осторожностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
Nayfeh, A.H. Perturbation Methods. 1973. John Wiley and Sons.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругости тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510 с.
Goldenevizer, A.L. Theory of Elastic Thin Shells. Nauka, Moscow, 1976, p.510. (in Russian)
3. Aghalovyan L.A. Asimptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore-London: World Scientific Publ. 2015. 376p. (Русск. изд. М.: Наука-Физматлит, 1997).
4. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела //Межвуз. сб.: Механика. Изд.ЕГУ. 1982. Вып.2.С.7–12.
Aghalovyan L.A. (1982) On the structure of solution of a class of plane problems if anisotropic elastic solids. Mezhvuz. Sb.YSU, Mechanics 2, pp.7-12. (in Russian)
5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468 с.
Aghalovyan L.A., Gevorgyan, R.S. Nonclassical boundary-value problems of anisotropic layered beams, plates and shells. Yerevan, Publishing house of NAS RA.2005. p. 468. (in Russian)

6. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. О характере вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.186-192.
Aghalovyan L.A., Hovhannisyan R.Zh. On the Character of Forced Vibrations of the Three-layered orthotropic Plates in the Mixed–Boundary Problem. Reports of NAS of Armenia. 2006. Vol.106. №4, pp.186-192. (in Russian)
7. Агаловян М.Л. Асимптотика решения пространственной динамической задачи для анизотропных пластин. //Докады XX Межд. конф. по теории оболочек и пластин «Механика оболочек и пластин». Нижний Новгород. Изд. Нижегородского госуниверситета, 2002. С.78–82.
Aghalovyan M.L. The asymptotics of dynamic space problem solution for anisotropic Plates. Reports of XX International Conference by theory of Shells and Plates: «Mechanics of Shells and Plates». Nizhny Novgorod.Publ. NSU.2002, pp.78-82. (in Russian)
8. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. К определению решений одного класса динамических пространственных задач математической теории упругости для ортотропных оболочек. //Учёные записки АГПУ им. Х. Абовяна. 2012. №2 (17). С.29–42.
Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. About defining solutions of a class of dynamic space problems of mathematical theory of elasticity for orthotropic shells. Scientific news. ASPV after Kh.Abovyan. 2012. №2 (17), pp.29-42. (in Russian)
9. Агаловян Л.А., Ghulghazaryan L.G. Non-classical boundary-value problems of the forced vibrations of orthotropic shells. //International sciences journal of Applied Mechanics. Springer. Vol.45, №8. 2009, pp. 888-903.

Сведения об авторе:

Агаловян Ленсер Абгарович, академик НАН Армении,
зав.отделом Института механики НАН Армении.

Адрес: 0019 Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2,

Тел.: (+37410) 52-58-35. **E-mail:** aghal@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 09.11.2016

УДК 539.3

**МАТРИЦА ЖЁСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА
МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ**

Жамакочян К.А., Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, пластинка, изгиб, функционал потенциальной энергии системы, метод конечных элементов

Key words: micropolar, elastic, plate, bend, potential energy functional of the system, finite element method

Բանալի բառեր: միկրոպոլյար, առաձգական, սալ, ծռում, համակարգի պոտենցիալ էներգիայի ֆունկցիոնալ, վերջավոր էլեմենտների մեթոդ

Ժամակցյան Զ. Ա., Սարգսյան Ս. Հ.

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալի վերջավոր էլեմենտի կոշտության մատրիցը

Աշխատանքը նվիրված է միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի ծռման դեֆորմացիայի ստատիկական եզրային խնդիրների հաշվարկման վերջավոր էլեմենտների մեթոդի կիրառման հիմքերի մշակմանը: Տեղախոխությունների, ազատ պտույտների և համակարգի լրիվ պոտենցիալ էներգիայի ֆունկցիոնալի կիրառման հիման վրա մշակվել են չորսանկյունակային վերջավոր էլեմենտներ: Միկրոպոլյար բարակ սալերի կիրառական տեսությանը համապատասխան Լագրանժի վարիացիոն սկզբունքի օգնությամբ որոշվում են վերջավոր էլեմենտի կոշտության բնութագրիչները, որի հիման վրա էլ կառուցվում է խնդրի կոշտության մատրիցը, իրականացվում է հանրահաշվական գծային հավասարումների համակարգի ձևավորման գործընթացը: Դիտարկվում է միկրոպոլյար քառանկյունի սալի ծռման կոնկրետ խնդիրը, երբ սալը գտնվում է հավասարաչափ բաշխված արտաքին նորմալ ուժային ազդեցության տակ, իսկ սալի եզրերը հողակապորեն ամրակցված են: Ստացված թվային արդյունքները համեմատվում են տեսական ճանապարհով ստացված արդյունքների հետ: Թվային արդյունքների անալիզի հիման վրա հաստատվում է միկրոպոլյար նյութի արդյունավետ հատկությունները ամրության և կոշտության իմաստներով՝ համամատաս իմաստներով համապատասխան դասական նյութի հետ:

Zhamakochyan K.A., Sargsyan S. H.

Stiffness matrix of the finite element of micropolar elastic thin plate

The present paper is dedicated to the development of the foundations of the application of the finite element method to calculate the boundary value problems of statics of micropolar bending deformation of thin elastic plates. On the basis of application of laws of displacements, free rotations and functional of the total potential energy of the system, effective quadrangular finite elements are developed. With the help of the corresponding Lagrange variation principle of the applied theory of micropolar plates stiffness characteristics of finite element are determined and on the basis of the constructed stiffness matrix procedure of forming the resolving system of linear algebraic equations is performed. Concrete problem of bending of square micropolar elastic plate under a uniformly distributed power load is considered, when the edges of the plate are hinged-supported. The numerical results are compared with the results obtained on the basis of the theoretical study of the problem. The analysis of numerical results sets effective properties of the micropolar material from the point of view of stiffness and strength of the plate compared with the classic material.

Работа посвящена разработке основ применения метода конечных элементов для расчёта краевых задач статики изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин. На основе применения законов перемещений, свободных поворотов и функционала полной потенциальной энергии системы, разработаны эффективные четырёхугольные конечные элементы. С помощью соответствующего вариационного принципа Лагранжа прикладной теории микрополярных пластин определяются жёсткостные характеристики конечного элемента и, на основе построенной матрицы жёсткости, выполняется процедура

формирования разрешающей системы алгебраических линейных уравнений. Рассматривается конкретная задача изгиба квадратной микрополярной упругой пластинки под действием равномерно распределённой силовой нормальной нагрузки, когда края пластинки шарнирно-опёрты. Полученные численные результаты сравниваются с результатами, полученными на основе теоретического исследования задачи. Анализ численных результатов устанавливает эффективные свойства микрополярного материала по сравнению с соответствующим классическим с точки зрения жёсткости и прочности пластинки.

Введение. В настоящей работе рассмотрена статическая задача изгиба микрополярной упругой тонкой прямоугольной пластины. Конечно-элементное решение базируется на математической теории микрополярных пластин и оболочек работ [1-3]. Основополагающие матрицы теории метода конечных элементов (МКЭ) получены вариационным способом. Выражение полной потенциальной энергии конечного элемента микрополярной пластины минимизируется по компонентам узловых кинематических параметров, среди которых – углы свободного вращения и поперечные сдвиги. Матрица жёсткости четырёхузлового прямоугольного элемента и вектор эквивалентных узловых сил и моментов имеют 72 порядка. Они предназначены для применения в численных расчётах микрополярных пластин, нагруженных разными видами распределённых или сосредоточенных внешних сил и моментов, а также при различных граничных условиях.

Метод конечных элементов решения задач изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок, как статического, так и динамического характера, разработан в работах [4,5].

Отметим, что МКЭ в плоской и пространственной задачах микрополярной теории упругости развиты в работах [6-9]. МКЭ в классической теории изгибной деформации упругих тонких пластин с учётом поперечных сдвигов разработан в работах [10,11].

1. Энергетический функционал для изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин. Вывод разрешающих уравнений расчёта микрополярных упругих тонких пластин с помощью МКЭ вариационным методом предполагает формирование энергетического функционала, под которым подразумевается выражение полной потенциальной энергии Π системы. Это выражение состоит из суммы потенциальной энергии деформации W микрополярной пластинки и потенциала внешних сил и моментов $(-A)$ [3]:

$$\Pi = W - A. \quad (1)$$

В этом выражении

$$W = \frac{1}{2} \iint_{(S)} (N_{13}\Gamma_{13} + N_{23}\Gamma_{23} + N_{31}\Gamma_{31} + N_{32}\Gamma_{32} + M_{11}K_{11} + M_{21}K_{21} + M_{22}K_{22} + M_{12}K_{12} + L_{11}k_{11} + L_{22}k_{22} + L_{33}k_{33} + L_{21}k_{21} + L_{12}k_{12} + \Lambda_{13}l_{13} + \Lambda_{23}l_{23}) ds, \quad (2)$$

где $N_{31}, N_{32}, N_{13}, N_{23}$ – усилия; $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ – моменты (изгибающие и крутящие) от силовых напряжений; $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}, L_{33}$ – моменты (изгибающие и крутящие) от моментных напряжений; $\Lambda_{13}, \Lambda_{23}$ – гипермоменты от моментных напряжений; $\Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}$ – сдвиговые деформации. $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}$ – изгибные-крутильные деформации, связанные с силовыми напряжениями; $k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}, k_{33}$ – изгибные-крутильные деформации, связанные с моментными напряжениями; l_{13}, l_{23} – гипер-изгибно-крутильные деформации; A – работа внешних сил и моментов.

Усреднённые усилия, моменты и гипермоменты, деформации, изгиб-кручения связаны физическими соотношениями упругости [1]:

$$\begin{aligned}
N_{13} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{13} + (\mu - \alpha)\Gamma_{31}], & N_{23} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{23} + (\mu - \alpha)\Gamma_{32}], \\
N_{31} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{31} + (\mu - \alpha)\Gamma_{13}], & N_{32} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{32} + (\mu - \alpha)\Gamma_{23}], \\
M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11} + \nu K_{22}), & M_{22} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{22} + \nu K_{11}), \\
M_{12} &= \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{12} + (\mu - \alpha)K_{21}], & M_{21} &= \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{21} + (\mu - \alpha)K_{12}], \\
L_{11} &= 2h[(2\gamma + \beta)k_{11} + \beta(k_{22} + k_{33})], & L_{22} &= 2h[(2\gamma + \beta)k_{22} + \beta(k_{11} + k_{33})], \\
L_{33} &= 2h[(2\gamma + \beta)k_{33} + \beta(k_{11} + k_{22})], \\
L_{12} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}], & L_{21} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{21} + (\gamma - \varepsilon)k_{12}], \\
\Lambda_{13} &= \frac{2h^3}{3} \left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13} \right], & \Lambda_{23} &= \frac{2h^3}{3} \left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23} \right],
\end{aligned} \tag{3}$$

где $E, \nu, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие константы микрополярного материала пластинки

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Запишем также геометрические соотношения в микрополярной теории упругих пластин [1]:

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}, & K_{22} &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}, & K_{12} &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \iota, & K_{21} &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + \iota, \\
\Gamma_{13} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, & \Gamma_{31} &= \Psi_1 - \Omega_2, & \Gamma_{23} &= \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1, & \Gamma_{32} &= \Psi_2 + \Omega_1, \\
k_{11} &= \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, & k_{22} &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, & k_{12} &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, & k_{21} &= \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, & l_{13} &= \frac{\partial \iota}{\partial x_1}, & l_{23} &= \frac{\partial \iota}{\partial x_2}, & k_{33} &= \iota,
\end{aligned} \tag{4}$$

где w – прогиб пластинки; Ψ_1, Ψ_2 – углы поворота нормального к срединной поверхности линейного элемента вокруг осей x_1, x_2 ; Ω_1, Ω_2 – свободные повороты указанного нормального элемента вокруг соответствующих осей; ι – интенсивность поворота указанного нормального элемента вокруг оси, перпендикулярной к срединной плоскости пластинки.

Работа внешних сил и моментов для микрополярной пластины, нагруженной по верхней лицевой плоскости распределёнными усилиями и моментами, определяется интегралом [3]:

$$\begin{aligned}
A &= \iint_{(s)} [(hp_1\Psi_1 + hp_2\Psi_2 + p_3w) + (m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 + \iota hm_3)] ds + \\
&+ \int_{l_1} [(M_{11}\Psi_1 + M_{12}\Psi_2 + wN_{13}) + (L_{11}\Omega_1 + L_{12}\Omega_2 + \iota\Lambda_{13})] dl + \\
&+ \int_{l_2} [(M_{21}\Psi_1 + M_{22}\Psi_2 + wN_{23}) + (L_{21}\Omega_1 + L_{22}\Omega_2 + \iota\Lambda_{23})] dl.
\end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, выражение полной потенциальной энергии микрополярной пластины имеет вид (1), в котором потенциальная энергия деформации задаётся интегралом (2), а потенциал внешних сил и моментов – интегралом (5) с обратным знаком. В дальнейших выводах сосредоточим внимание на функционале потенциальной энергии деформации (2). Представим его в виде функционала Лагранжа. Для этого, внутренние усилия и моменты в (2) заменим согласно физическим соотношениям упругости (3) микрополярного тела, в которых учтём геометрические соотношения (4). В результате этих преобразований получим:

$$W = \int_0^a \int_0^b W_0 dx dy, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} W_0 = & \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{11}^2 + K_{22}^2] + \frac{2h^3 E\nu}{3(1-\nu^2)} K_{11}K_{22} + \frac{h^3}{3} (\mu + \alpha) [K_{21}^2 + K_{12}^2] + \frac{2h^3}{3} (\mu - \alpha) K_{12}K_{21} + \\ & + h(\mu + \alpha) [\Gamma_{31}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{23}^2] + 2h(\mu - \alpha) [\Gamma_{13}\Gamma_{31} + \Gamma_{23}\Gamma_{32}] + h(2\gamma + \beta) [k_{11}^2 + k_{22}^2 + k_{33}^2] + \\ & + 2h\beta [k_{11}k_{22} + k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33}] + h(\gamma + \varepsilon) [k_{21}^2 + k_{12}^2] + \\ & + 2h(\gamma - \varepsilon) k_{12}k_{21} + \frac{h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} (l_{13}^2 + l_{23}^2). \end{aligned} \quad (7)$$

В итоге имеем функционал полной потенциальной энергии пластины в виде выражения (1), слагаемыми правой части которого выступают потенциальная энергия деформации (6), (7) и потенциал внешних сил и моментов (5). С помощью этого выражения получим основополагающие матрицы теории МКЭ для микрополярных упругих пластин.

2. Матрица жёсткости конечного элемента микрополярной пластинки.

Рассмотрим прямоугольный четырёхузловой конечный элемент микрополярной пластины. Выберем в качестве основных следующие кинематические параметры: перемещение точки срединной плоскости w ; углы поворота нормального к срединной плоскости элемента – ψ_1, ψ_2 в плоскостях x_1x_3 и x_2x_3 ; углы свободного поворота нормального к срединной плоскости элемента – Ω_1, Ω_2 и интенсивность поворота – ι этого элемента вокруг оси x_3 . Примем для этих параметров следующие распределения по прямоугольной области срединной плоскости элемента:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) = & \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_1^3 + \\ & + \alpha_{10} x_2^3 + \alpha_{11} x_1^3 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2^3, \\ \psi_1(x_1, x_2) = & \alpha_{13} + \alpha_{14} x_1 + \alpha_{15} x_2 + \alpha_{16} x_1^2 + \alpha_{17} x_2^2 + \alpha_{18} x_1 x_2 + \alpha_{19} x_1^2 x_2 + \alpha_{20} x_1 x_2^2 + \\ & + \alpha_{21} x_1^3 + \alpha_{22} x_2^3 + \alpha_{23} x_1^3 x_2 + \alpha_{24} x_1 x_2^3, \\ \psi_2(x_1, x_2) = & \alpha_{25} + \alpha_{26} x_1 + \alpha_{27} x_2 + \alpha_{28} x_1^2 + \alpha_{29} x_2^2 + \alpha_{30} x_1 x_2 + \alpha_{31} x_1^2 x_2 + \alpha_{32} x_1 x_2^2 + \\ & + \alpha_{33} x_1^3 + \alpha_{34} x_2^3 + \alpha_{35} x_1^3 x_2 + \alpha_{36} x_1 x_2^3, \\ \Omega_1(x_1, x_2) = & \alpha_{37} + \alpha_{38} x_1 + \alpha_{39} x_2 + \alpha_{40} x_1^2 + \alpha_{41} x_2^2 + \alpha_{42} x_1 x_2 + \alpha_{43} x_1^2 x_2 + \alpha_{44} x_1 x_2^2 + \\ & + \alpha_{45} x_1^3 + \alpha_{46} x_2^3 + \alpha_{47} x_1^3 x_2 + \alpha_{48} x_1 x_2^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_2(x_1, x_2) &= \alpha_{49} + \alpha_{50}x_1 + \alpha_{51}x_2 + \alpha_{52}x_1^2 + \alpha_{53}x_2^2 + \alpha_{54}x_1x_2 + \alpha_{55}x_1^2x_2 + \alpha_{56}x_1x_2^2 + \\ &+ \alpha_{57}x_1^3 + \alpha_{58}x_2^3 + \alpha_{59}x_1^3x_2 + \alpha_{60}x_1x_2^3, \\ \iota(x_1, x_2) &= \alpha_{61} + \alpha_{62}x_1 + \alpha_{63}x_2 + \alpha_{64}x_1^2 + \alpha_{65}x_2^2 + \alpha_{66}x_1x_2 + \alpha_{67}x_1^2x_2 + \alpha_{68}x_1x_2^2 + \\ &+ \alpha_{69}x_1^3 + \alpha_{70}x_2^3 + \alpha_{71}x_1^3x_2 + \alpha_{72}x_1x_2^3.\end{aligned}\tag{8}$$

Основные кинематические параметры запишем в виде вектора:

$$\delta = \left\{ \mathbf{w}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}_2}, \Psi_1, \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{x}_2}, \Psi_2, \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{x}_2}, \Omega_1, \right. \\ \left. \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathbf{x}_2}, \Omega_2, \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mathbf{x}_2}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_2} \right\}^T,\tag{9}$$

тогда систему уравнений (8) можем представить в матричном виде:

$$\delta = \mathbf{S}\mathbf{a},\tag{10}$$

где \mathbf{a} – вектор постоянных в формулах (8):

$$\mathbf{a} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_{72}\}^T,$$

\mathbf{S} – матрица размерностью 18×72 , которую в данном случае удобно представить в блочном виде:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4].$$

Здесь $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4$ – подматрицы размером 18×18 со структурой с компонентами:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3 & x_2^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 3x_1^2 & 0 & 3x_1^2x_2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 0 & 3x_2^2 & x_1^3 & 3x_1x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 & x_2^3 & x_1^3 x_2 & x_1 x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_1 x_2 & x_2^2 & 3x_1^2 & 0 & 3x_1^2 x_2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 x_2 & 0 & 3x_2^2 & x_1^3 & 3x_1 x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 & x_2^3 & x_1^3 x_2 & x_1 x_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2 & 2x_1 x_2 & x_2^2 & 3x_1^2 & 0 & 3x_1^2 x_2 & x_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1 & x_1^2 & 2x_1 x_2 & 0 & 3x_2^2 & x_1^3 & 3x_1 x_2^2 \end{pmatrix}$$

Вектор узловых кинематических параметров δ_e однозначно определяет напряжённо-деформированное состояние (НДС) внутри конкретного элемента. В случае четырёхузлового элемента пластины, в общем виде, этот вектор имеет следующее представление:

$$\delta_e = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}^T, \quad (11)$$

где δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – вектор неизвестных i -го узла,

$$\delta_i = \left\{ w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_i, \Psi_{1i}, \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right)_i, \Psi_{2i}, \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right)_i, \right. \\ \left. \Omega_{1i}, \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_i, \Omega_{2i}, \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_i, \iota_i, \left(\frac{\partial \iota}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial \iota}{\partial x_2} \right)_i \right\}. \quad (12)$$

Выразим вектор основных кинематических переменных (9) в произвольной точке внутри конечного элемента пластины через вектор узловых параметров. Для этого следует записать значения функций (8) для узловых точек. Размеры прямоугольного элемента пластины обозначим a (размер вдоль оси x_1) и b (размер вдоль оси x_2) и сформируем векторы δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) (9) для четырёх точек с координатами $(0,0), (a,0), (a,b)$ и $(0,b)$. В едином матричном соотношении это будет выглядеть следующим образом:

$$\delta_e = T\alpha, \quad (13)$$

где T – квадратная матрица размером 72×72 , сформированная из матрицы S при тех значениях x_1 и x_2 , которые соответствуют узловым точкам:

$$T = \begin{bmatrix} S(x_1 = 0, x_2 = 0) \\ S(x_1 = a, x_2 = 0) \\ S(x_1 = a, x_2 = b) \\ S(x_1 = 0, x_2 = b) \end{bmatrix}.$$

Подставим вектор \mathbf{a} , определённый из (13) в (10) и, после этого, получим соотношения для основных кинематических функций, выраженных через узловые неизвестные:

$$\delta = \mathbf{P}\delta_e, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1}$$

Здесь матрица \mathbf{P} размерностью 18×72 имеет следующую блочную структуру:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4],$$

где $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ – подматрицы размером 18×18 со структурой и компонентами:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{44} & P_{45} & P_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{54} & P_{55} & P_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{64} & P_{65} & P_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{77} & P_{78} & P_{79} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{87} & P_{88} & P_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{97} & P_{98} & P_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{10,10} & P_{10,11} & P_{10,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{11,10} & P_{11,11} & P_{11,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{12,10} & P_{12,11} & P_{12,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{13,13} & P_{13,14} & P_{13,15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{14,13} & P_{14,14} & P_{14,15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{15,13} & P_{15,14} & P_{15,15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{16,16} & P_{16,17} & P_{16,18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{17,16} & P_{17,17} & P_{17,18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{18,16} & P_{18,17} & P_{18,18} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} P_{1,19} & P_{1,20} & P_{1,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{2,19} & P_{2,20} & P_{2,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{3,19} & P_{3,20} & P_{3,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{4,22} & P_{4,23} & P_{4,24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{5,22} & P_{5,23} & P_{5,24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{6,22} & P_{6,23} & P_{6,24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{7,25} & P_{7,26} & P_{7,27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{8,25} & P_{8,26} & P_{8,27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{9,25} & P_{9,26} & P_{9,27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{10,28} & P_{10,29} & P_{10,30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{11,28} & P_{11,29} & P_{11,30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{12,28} & P_{12,29} & P_{12,30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{13,31} & P_{13,32} & P_{13,33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{14,31} & P_{14,32} & P_{14,33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{15,31} & P_{15,32} & P_{15,33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{16,34} & P_{16,35} & P_{16,36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{17,34} & P_{17,35} & P_{17,36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{18,34} & P_{18,35} & P_{18,36} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_{1,19} = p_{4,22} = p_{7,25} = p_{10,28} = p_{13,31} = p_{16,34} &= \frac{3}{a^2}x_1^2 - \frac{2}{a^3}x_1^3 + \frac{x_1x_2}{ab} - \frac{3x_1^2x_2}{a^2b} + \\
&+ \frac{2x_1^3x_2}{a^3b} - \frac{3x_1x_2^2}{ab^2} + \frac{2x_1x_2^3}{ab^3}, \\
p_{1,20} = p_{4,23} = p_{7,26} = p_{10,29} = p_{13,32} = p_{16,35} &= -\frac{x_1^2}{a} + \frac{x_1^3}{a^2} + \frac{x_1^2x_2}{ab} - \frac{x_1^3x_2}{a^2b}, \\
p_{1,21} = p_{4,24} = p_{7,27} = p_{10,30} = p_{13,33} = p_{16,36} &= \frac{x_1x_2}{a} - \frac{2x_1x_2^2}{ab} + \frac{x_1x_2^3}{ab^2}, \\
p_{1,37} = p_{4,40} = p_{7,43} = p_{10,46} = p_{13,49} = p_{16,52} &= -\frac{x_1x_2}{ab} + \frac{3x_1^2x_2}{a^2b} - \frac{2x_1^3x_2}{a^3b} + \frac{3x_1x_2^2}{ab^2} - \frac{2x_1x_2^3}{ab^3}, \\
p_{1,38} = p_{4,41} = p_{7,44} = p_{10,47} = p_{13,50} = p_{16,53} &= -\frac{x_1^2x_2}{ab} + \frac{x_1^3x_2}{a^2b}, \\
p_{1,39} = p_{4,42} = p_{7,45} = p_{10,48} = p_{13,51} = p_{16,54} &= -\frac{x_1x_2^2}{ab} + \frac{x_1x_2^3}{ab^2}, \\
p_{1,55} = p_{4,58} = p_{7,61} = p_{10,64} = p_{13,67} = p_{16,70} &= \frac{x_1x_2}{ab} - \frac{3x_1^2x_2}{a^2b} + \frac{2x_1^3x_2}{a^3b} + \frac{3x_2^2}{b^2} - \\
&- \frac{3x_1x_2^2}{ab^2} - \frac{3x_2^3}{b^3} + \frac{2x_1x_2^3}{ab^3}, \\
p_{1,56} = p_{4,59} = p_{7,62} = p_{10,65} = p_{13,68} = p_{16,71} &= \frac{x_1x_2}{b} - \frac{2x_1^2x_2}{ab} + \frac{x_1^3x_2}{a^2b}, \\
p_{1,57} = p_{4,60} = p_{7,63} = p_{10,66} = p_{13,69} = p_{16,72} &= -\frac{x_2^2}{b} + \frac{x_1x_2^2}{ab} + \frac{x_2^3}{b^2} - \frac{x_1x_2^3}{ab^2}, \\
p_{21} = p_{54} = p_{87} = p_{11,10} = p_{14,13} = p_{17,16} &= -\frac{6x_1}{a^2} + \frac{6x_1^2}{a^3} - \frac{x_2}{ab} + \frac{6x_1x_2}{a^2b} - \frac{6x_1^2x_2}{a^3b} + \\
&+ \frac{3x_2^2}{ab^2} - \frac{2x_2^3}{ab^3}, \\
p_{22} = p_{55} = p_{88} = p_{11,11} = p_{14,14} = p_{17,17} &= 1 - \frac{4x_1}{a} + \frac{3x_1^2}{a^2} - \frac{x_2}{b} + \frac{4x_1x_2}{ab} - \frac{3x_1^2x_2}{a^2b}, \\
p_{23} = p_{56} = p_{89} = p_{11,12} = p_{14,15} = p_{17,18} &= -\frac{x_2}{a} + \frac{2x_2^2}{ab} - \frac{x_2^3}{ab^2}, \\
p_{2,19} = p_{5,22} = p_{8,25} = p_{11,28} = p_{14,31} = p_{17,34} &= \frac{6x_1}{a^2} - \frac{6x_1^2}{a^3} + \frac{x_2}{ab} - \frac{6x_1x_2}{a^2b} + \frac{6x_1^2x_2}{a^3b} - \\
&- \frac{3x_2^2}{ab^2} + \frac{2x_2^3}{ab^3}, \\
p_{2,20} = p_{5,23} = p_{8,26} = p_{11,29} = p_{14,32} = p_{17,35} &= -\frac{2x_1}{a} + \frac{3x_1^2}{a^2} + \frac{2x_1x_2}{ab} - \frac{3x_1^2x_2}{a^2b}, \\
p_{2,21} = p_{5,24} = p_{8,27} = p_{11,30} = p_{14,33} = p_{17,36} &= \frac{x_2}{a} - \frac{2x_2^2}{ab} + \frac{x_2^3}{ab^2}, \\
p_{2,37} = p_{5,40} = p_{8,43} = p_{11,46} = p_{14,49} = p_{17,52} &= -\frac{x_2}{ab} + \frac{6x_1x_2}{a^2b} - \frac{6x_1^2x_2}{a^3b} + \frac{3x_2^2}{ab^2} - \frac{2x_2^3}{ab^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{2,38} = P_{5,41} = P_{8,44} = P_{11,47} = P_{14,50} = P_{17,53} &= -\frac{2x_1x_2}{ab} + \frac{3x_1^2x_2}{a^2b}, \\
P_{2,39} = P_{5,42} = P_{8,45} = P_{11,48} = P_{14,51} = P_{17,54} &= -\frac{x_2^2}{ab} + \frac{x_2^3}{ab^2}, \\
P_{2,55} = P_{5,58} = P_{8,61} = P_{11,64} = P_{14,67} = P_{17,70} &= \frac{x_2}{ab} - \frac{6x_1x_2}{a^2b} + \frac{6x_1^2x_2}{a^3b} - \frac{3x_2^2}{ab^2} + \frac{2x_2^3}{ab^3}, \\
P_{2,56} = P_{5,59} = P_{8,62} = P_{11,65} = P_{14,68} = P_{17,71} &= \frac{x_2}{b} - \frac{4x_1x_2}{ab} + \frac{3x_1^2x_2}{a^2b}, \\
P_{2,57} = P_{5,60} = P_{8,63} = P_{11,66} = P_{14,69} = P_{17,72} &= \frac{x_2^2}{ab} - \frac{x_2^3}{ab^2}, \\
P_{31} = P_{64} = P_{97} = P_{12,10} = P_{15,13} = P_{18,16} &= -\frac{x_1}{ab} + \frac{3x_1^2}{a^2b} - \frac{2x_1^3}{a^3b} - \frac{6x_2}{b^2} + \frac{6x_1x_2}{ab^2} + \frac{6x_2}{b^3} - \frac{6x_1x_2^2}{ab^3}, \\
P_{32} = P_{65} = P_{98} = P_{12,11} = P_{15,14} = P_{18,17} &= -\frac{x_1}{b} + \frac{2x_1^2}{ab} - \frac{x_1^3}{a^2b}, \\
P_{33} = P_{66} = P_{99} = P_{12,12} = P_{15,15} = P_{18,18} &= 1 - \frac{x_1}{a} - \frac{4x_2}{b} + \frac{4x_1x_2}{ab} + \frac{3x_2^2}{b^2} - \frac{3x_1x_2^2}{ab^2}, \\
P_{3,19} = P_{6,22} = P_{9,25} = P_{12,28} = P_{15,31} = P_{18,34} &= \frac{x_1}{ab} - \frac{3x_1^2}{a^2b} + \frac{2x_1^3}{a^3b} - \frac{6x_1x_2}{ab^2} + \frac{6x_1x_2^2}{ab^3}, \\
P_{3,20} = P_{6,23} = P_{9,26} = P_{12,29} = P_{15,32} = P_{18,35} &= \frac{x_1^2}{ab} - \frac{x_1^3}{a^2b}, \\
P_{3,21} = P_{6,24} = P_{9,27} = P_{12,30} = P_{15,33} = P_{18,36} &= \frac{x_1}{a} - \frac{4x_1x_2}{ab} + \frac{3x_1x_2^2}{ab^2}, \\
P_{3,37} = P_{6,40} = P_{9,43} = P_{12,46} = P_{15,49} = P_{18,52} &= -\frac{x_1}{ab} + \frac{3x_1^2}{a^2b} - \frac{2x_1^3}{a^3b} + \frac{6x_1x_2}{ab^2} - \frac{6x_1x_2^2}{ab^3}, \\
P_{3,38} = P_{6,41} = P_{9,44} = P_{12,47} = P_{15,50} = P_{18,53} &= -\frac{x_1^2}{ab} + \frac{x_1^3}{a^2b}, \\
P_{3,39} = P_{6,42} = P_{9,45} = P_{12,48} = P_{15,51} = P_{18,54} &= -\frac{2x_1x_2}{ab} + \frac{3x_1x_2^2}{ab^2}, \\
P_{3,55} = P_{6,58} = P_{9,61} = P_{12,64} = P_{15,67} = P_{18,70} &= \frac{x_1}{ab} - \frac{3x_1^2}{a^2b} + \frac{2x_1^3}{a^3b} + \frac{6x_2}{b^2} - \frac{6x_1x_2}{ab^2} - \\
&- \frac{6x_2}{b^3} + \frac{6x_1x_2^2}{ab^3}, \\
P_{3,56} = P_{6,59} = P_{9,62} = P_{12,65} = P_{15,68} = P_{18,71} &= \frac{x_1}{b} - \frac{2x_1^2}{ab} + \frac{x_1^3}{a^2b}, \\
P_{3,57} = P_{6,60} = P_{9,63} = P_{12,66} = P_{15,69} = P_{18,72} &= -\frac{2x_2}{b} + \frac{2x_1x_2}{ab} + \frac{3x_2^2}{b^2} - \frac{3x_1x_2^2}{ab^2}.
\end{aligned}$$

С учётом (14) запишем соотношения для основных кинематических переменных:

$$\begin{aligned}
w &= p_{11}w_1 + p_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_1 + p_{13}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_1 + p_{1,19}w_2 + p_{1,20}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_2 + p_{1,21}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_2 + \\
&+ p_{1,37}w_3 + p_{1,38}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_3 + p_{1,39}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_3 + p_{1,55}w_4 + p_{1,56}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_4 + p_{1,57}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_4, \\
\frac{\partial w}{\partial x_1} &= p_{21}w_1 + p_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_1 + p_{23}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_1 + p_{2,19}w_2 + p_{2,20}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_2 + p_{2,21}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_2 + \\
&+ p_{2,37}w_3 + p_{2,38}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_3 + p_{2,39}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_3 + p_{2,55}w_4 + p_{2,56}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_4 + p_{2,57}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_4, \\
\frac{\partial w}{\partial x_2} &= p_{31}w_1 + p_{32}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_1 + p_{33}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_1 + p_{3,19}w_2 + p_{3,20}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_2 + p_{3,21}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_2 + \\
&+ p_{3,37}w_3 + p_{3,38}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_3 + p_{3,39}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_3 + p_{3,55}w_4 + p_{3,56}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_4 + p_{3,57}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_4, \\
\Psi_1 &= p_{44}\Psi_{11} + p_{45}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_1 + p_{46}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_1 + p_{4,22}\Psi_{12} + p_{4,23}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_2 + p_{4,24}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_2 + \\
&+ p_{4,40}\Psi_{13} + p_{4,41}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_3 + p_{4,42}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_3 + p_{4,58}\Psi_{14} + p_{4,59}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_4 + p_{4,60}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_4, \\
\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} &= p_{54}\Psi_{11} + p_{55}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_1 + p_{56}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_1 + p_{5,22}\Psi_{12} + p_{5,23}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_2 + p_{5,24}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_2 + \\
&+ p_{5,40}\Psi_{13} + p_{5,41}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_3 + p_{5,42}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_3 + p_{5,58}\Psi_{14} + p_{5,59}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_4 + p_{5,60}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_4, \\
\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} &= p_{64}\Psi_{11} + p_{65}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_1 + p_{66}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_1 + p_{6,22}\Psi_{12} + p_{6,23}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_2 + p_{6,24}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_2 + \\
&+ p_{6,40}\Psi_{13} + p_{6,41}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_3 + p_{6,42}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_3 + p_{6,58}\Psi_{14} + p_{6,59}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_4 + p_{6,60}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_4, \\
\Psi_2 &= p_{77}\Psi_{21} + p_{78}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_1 + p_{79}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_1 + p_{7,25}\Psi_{22} + p_{7,26}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_2 + p_{7,27}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_2 + \\
&+ p_{7,43}\Psi_{23} + p_{7,44}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_3 + p_{7,45}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_3 + p_{7,61}\Psi_{24} + p_{7,62}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_4 + p_{7,63}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_4, \\
\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} &= p_{87}\Psi_{21} + p_{88}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_1 + p_{89}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_1 + p_{8,25}\Psi_{22} + p_{8,26}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_2 + p_{8,27}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_2 + \\
&+ p_{8,43}\Psi_{23} + p_{8,44}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_3 + p_{8,45}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_3 + p_{8,61}\Psi_{24} + p_{8,62}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_4 + p_{8,63}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} &= p_{97} \Psi_{21} + p_{98} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right)_1 + p_{99} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right)_1 + p_{9,25} \Psi_{22} + p_{9,26} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right)_2 + p_{9,27} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right)_2 + \\
&+ p_{9,43} \Psi_{23} + p_{9,44} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right)_3 + p_{9,45} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right)_3 + p_{9,61} \Psi_{24} + p_{9,62} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right)_4 + p_{9,63} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right)_4, \\
\Omega_1 &= p_{10,10} \Omega_{11} + p_{10,11} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_1 + p_{10,12} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_1 + p_{10,28} \Omega_{12} + p_{10,29} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_2 + p_{10,30} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_2 + \\
&+ p_{10,46} \Omega_{13} + p_{10,47} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_3 + p_{10,48} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_3 + p_{10,64} \Omega_{14} + p_{10,65} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_4 + p_{10,66} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_4, \\
\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} &= p_{11,10} \Omega_{11} + p_{11,11} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_1 + p_{11,12} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_1 + p_{11,28} \Omega_{12} + p_{11,29} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_2 + \\
&+ p_{11,30} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_2 + p_{11,46} \Omega_{13} + p_{11,47} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_3 + p_{11,48} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_3 + p_{11,64} \Omega_{14} + \\
&+ p_{11,65} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_4 + p_{11,66} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_4, \\
\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} &= p_{12,10} \Omega_{11} + p_{12,11} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_1 + p_{12,12} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_1 + p_{12,28} \Omega_{12} + p_{12,29} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_2 + \\
&+ p_{12,30} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_2 + p_{12,46} \Omega_{13} + p_{12,47} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_3 + p_{12,48} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_3 + p_{12,64} \Omega_{14} + \\
&+ p_{12,65} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_4 + p_{12,66} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_4, \\
\Omega_2 &= p_{13,13} \Omega_{21} + p_{13,14} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_1 + p_{13,15} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_1 + p_{13,31} \Omega_{22} + p_{13,32} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_2 + \\
&+ p_{13,33} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_2 + p_{13,49} \Omega_{23} + p_{13,50} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_3 + p_{13,51} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_3 + p_{13,67} \Omega_{24} + \\
&+ p_{13,68} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_4 + p_{13,69} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_4, \\
\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} &= p_{14,13} \Omega_{21} + p_{14,14} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_1 + p_{14,15} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_1 + p_{14,31} \Omega_{22} + p_{14,32} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_2 + \\
&+ p_{14,33} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_2 + p_{14,49} \Omega_{23} + p_{14,50} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_3 + p_{14,51} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_3 + p_{14,67} \Omega_{24} + \\
&+ p_{14,68} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_4 + p_{14,69} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} &= p_{15,13} \Omega_{21} + p_{15,14} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_1 + p_{15,15} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_1 + p_{15,31} \Omega_{22} + p_{15,32} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_2 + \\
&+ p_{15,33} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_2 + p_{15,49} \Omega_{23} + p_{15,50} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_3 + p_{15,51} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_3 + p_{15,67} \Omega_{24} + \\
&+ p_{15,68} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_4 + p_{15,69} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_4, \\
\iota &= p_{16,16} \iota_1 + p_{16,17} \left(\frac{\partial \iota_1}{\partial x_1} \right)_1 + p_{16,18} \left(\frac{\partial \iota_1}{\partial x_2} \right)_1 + p_{16,34} \iota_2 + p_{16,35} \left(\frac{\partial \iota_2}{\partial x_1} \right)_2 + p_{16,36} \left(\frac{\partial \iota_2}{\partial x_2} \right)_2 + \\
&+ p_{16,52} \iota_3 + p_{16,53} \left(\frac{\partial \iota_3}{\partial x_1} \right)_3 + p_{16,54} \left(\frac{\partial \iota_3}{\partial x_2} \right)_3 + p_{16,70} \iota_4 + p_{16,71} \left(\frac{\partial \iota_4}{\partial x_1} \right)_4 + p_{16,72} \left(\frac{\partial \iota_4}{\partial x_2} \right)_4, \\
\frac{\partial \iota}{\partial x_1} &= p_{17,16} \iota_1 + p_{17,17} \left(\frac{\partial \iota_1}{\partial x_1} \right)_1 + p_{17,18} \left(\frac{\partial \iota_1}{\partial x_2} \right)_1 + p_{17,34} \iota_2 + p_{17,35} \left(\frac{\partial \iota_2}{\partial x_1} \right)_2 + p_{17,36} \left(\frac{\partial \iota_2}{\partial x_2} \right)_2 + \\
&+ p_{17,52} \iota_3 + p_{17,53} \left(\frac{\partial \iota_3}{\partial x_1} \right)_3 + p_{17,54} \left(\frac{\partial \iota_3}{\partial x_2} \right)_3 + p_{17,70} \iota_4 + p_{17,71} \left(\frac{\partial \iota_4}{\partial x_1} \right)_4 + p_{17,72} \left(\frac{\partial \iota_4}{\partial x_2} \right)_4, \\
\frac{\partial \iota}{\partial x_2} &= p_{18,16} \iota_1 + p_{18,17} \left(\frac{\partial \iota_1}{\partial x_1} \right)_1 + p_{18,18} \left(\frac{\partial \iota_1}{\partial x_2} \right)_1 + p_{18,34} \iota_2 + p_{18,35} \left(\frac{\partial \iota_2}{\partial x_1} \right)_2 + p_{18,36} \left(\frac{\partial \iota_2}{\partial x_2} \right)_2 + \\
&+ p_{18,52} \iota_3 + p_{18,53} \left(\frac{\partial \iota_3}{\partial x_1} \right)_3 + p_{18,54} \left(\frac{\partial \iota_3}{\partial x_2} \right)_3 + p_{18,70} \iota_4 + p_{18,71} \left(\frac{\partial \iota_4}{\partial x_1} \right)_4 + p_{18,72} \left(\frac{\partial \iota_4}{\partial x_2} \right)_4. \tag{15}
\end{aligned}$$

Подставим разложения (15) в выражение для W_0 , а затем полученный результат проинтегрируем по формуле (6).

В итоге функционал потенциальной энергии деформации (6) для одного конечного элемента пластины превратится в функцию, зависящую от узловых кинематических переменных:

$$\begin{aligned}
W &= W \left\{ w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_i, \Psi_{1i}, \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right)_i, \Psi_{2i}, \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right)_i, \right. \\
&\left. \Omega_{1i}, \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_i, \Omega_{2i}, \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_i, \iota_i, \left(\frac{\partial \iota}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial \iota}{\partial x_2} \right)_i \right\}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{16}
\end{aligned}$$

В случае изгиба пластины, например, равномерно-распределённой по верхней плоскости нормальной нагрузкой, работа внешних сил, приходящихся на один конечный элемент, будет представлен интегралом:

$$A = p_3 \int_0^a \int_0^b w dx dy.$$

Подставим сюда выражение для функции перемещений и поворотов из (15). В результате, после интегрирования работа внешних сил предстанет функцией, зависящей от узловых значений прогиба и углов изгиба обоих направлений (по осям x_1 и x_2):

$$A = A \left(w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_i \right), i = 1, 2, 3, 4. \quad (17)$$

Теперь, требуя условия стационарности полной потенциальной энергии конечного элемента пластины, которая представляет собой сумму выражений (16) и (17), по компонентам вектора узловых кинематических параметров (11), (12), получим систему алгебраических уравнений равновесия:

$$\mathbf{K}_e \delta_e = \mathbf{F}_e,$$

где \mathbf{K}_e – матрица жёсткости конечного элемента пластины; \mathbf{F}_e – вектор эквивалентных узловых сил.

В общем случае матрица жёсткости конечного элемента пластины \mathbf{K}_e размерностью 72×72 имеет полное заполнение, т.е. в ней мало нулевых элементов. В рамках данной работы нет технической возможности привести выражения для всех компонентов матрицы жёсткости элемента пластины, даже с учётом симметричности её структуры. Поэтому, как принято, представим соотношения для компонентов главной диагонали для элементов матрицы жёсткости конечного квадратного элемента:

$$\begin{aligned} k_{11} = k_{19,19} = k_{37,37} = k_{55,55} &= \frac{184}{105} h(\alpha + \mu), \\ k_{22} = k_{33} = k_{20,20} = k_{21,21} = k_{38,38} = k_{39,39} = k_{56,56} = k_{57,57} &= \frac{34}{315} a^2 h(\alpha + \mu), \\ k_{44} = k_{77} = k_{22,22} = k_{25,25} = k_{40,40} = k_{43,43} = k_{58,58} = k_{61,61} &= \\ &= \frac{h \left(1727 a^2 (\alpha + \mu) + 1840 h^2 \left(\alpha + \mu - \frac{E}{\nu^2 - 1} \right) \right)}{6300}, \\ k_{55} = k_{99} = k_{23,23} = k_{27,27} = k_{41,41} = k_{45,45} = k_{59,59} = k_{63,63} &= \\ &= \frac{2}{945} a^2 h \left(3(a^2 + h^2)(\alpha + \mu) - \frac{14 h^2 E}{\nu^2 - 1} \right), \\ k_{66} = k_{88} = k_{24,24} = k_{26,26} = k_{42,42} = k_{44,44} = k_{60,60} = k_{62,62} &= \\ &= \frac{2}{945} a^2 h \left(3a^2 (\alpha + \mu) + h^2 \left(14(\alpha + \mu) - \frac{3E}{\nu^2 - 1} \right) \right), \\ k_{10,10} = k_{13,13} = k_{28,28} = k_{31,31} = k_{46,46} = k_{49,49} = k_{64,64} = k_{67,67} &= \\ &= \frac{h(1727 a^2 \alpha + 1380(\beta + 3\gamma + \varepsilon))}{1575}, \\ k_{11,11} = k_{15,15} = k_{29,29} = k_{33,33} = k_{47,47} = k_{51,51} = k_{65,65} = k_{69,69} &= \\ &= \frac{2}{315} a^2 h(4a^2 \alpha + 14\beta + 31\gamma + 3\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{12,12} &= k_{14,14} = k_{30,30} = k_{32,32} = k_{48,48} = k_{50,50} = k_{66,66} = k_{68,68} = \\
&= \frac{2}{315} a^2 h (4a^2 \alpha + 3\beta + 20\gamma + 14\varepsilon), \\
k_{16,16} &= k_{34,34} = k_{52,52} = k_{70,70} = \frac{h(44160h^2\gamma\varepsilon + 1727a^2(4h^2\alpha + 3\beta + 6\gamma)(\gamma + \varepsilon))}{18900(\gamma + \varepsilon)}, \\
k_{17,17} &= k_{18,18} = k_{35,35} = k_{36,36} = k_{53,53} = k_{54,54} = k_{71,71} = k_{72,72} = \\
&= \frac{2a^2 h(68h^2\gamma\varepsilon + a^2(4h^2\alpha + 3\beta + 6\gamma)(\gamma + \varepsilon))}{945(\gamma + \varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Здесь, для сравнения, необходимо также привести аппроксимацию распределения основных кинематических по прямоугольнику базовой плоскости элементов полиномами в случае классической модели пластинки с учётом поперечных сдвигов [11]:

$$\begin{aligned}
w(x_1, x_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_1^3 + \\
&+ \alpha_{10} x_2^3 + \alpha_{11} x_1^3 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2^3, \\
\psi_1(x_1, x_2) &= \alpha_{13} + \alpha_{14} x_1 + \alpha_{15} x_2 + \alpha_{16} x_1^2 + \alpha_{17} x_2^2 + \alpha_{18} x_1 x_2 + \alpha_{19} x_1^2 x_2 + \alpha_{20} x_1 x_2^2 + \\
&+ \alpha_{21} x_1^3 + \alpha_{22} x_2^3 + \alpha_{23} x_1^3 x_2 + \alpha_{24} x_1 x_2^3, \\
\psi_2(x_1, x_2) &= \alpha_{25} + \alpha_{26} x_1 + \alpha_{27} x_2 + \alpha_{28} x_1^2 + \alpha_{29} x_2^2 + \alpha_{30} x_1 x_2 + \alpha_{31} x_1^2 x_2 + \alpha_{32} x_1 x_2^2 + \\
&+ \alpha_{33} x_1^3 + \alpha_{34} x_2^3 + \alpha_{35} x_1^3 x_2 + \alpha_{36} x_1 x_2^3. \tag{18}
\end{aligned}$$

3. Модельный расчёт микрополярных пластин. В качестве примера рассмотрим микрополярную изотропную квадратную пластину, которая опёрта по всем четырём сторонам и изгибается нормальной нагрузкой $p_3 = \text{const}$, (в этом случае $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 \neq 0, m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0$). Для граничных условий шарнирного опирания имеем [1]:

$$\begin{aligned}
w = 0, \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} = 0, \Omega_1 = 0, \psi_2 = 0, \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a, \\
w = 0, \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} = 0, \Omega_2 = 0, \psi_1 = 0, \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0; a. \tag{19}
\end{aligned}$$

Функционал (1) для этого случая будет иметь вид:

$$\Pi = \iint_{(S)} [W - (p_3 w)] ds.$$

Сначала рассмотрим четвертую часть пластинки. Вычислим сосредоточенные узловые силы и моменты, эквивалентные равномерно распределённой нагрузке $p_3 = \text{const}$:

$$\{\mathbf{P}\}^T = \left\{ \frac{\mathbf{P}_3 \mathbf{a}^2}{4}, \underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{71 \text{ раз}} \right\}.$$

После построения матрицы жёсткости $[\mathbf{K}]$ составим систему линейных алгебраи-

ческих уравнений, соответствующую рассматриваемой задаче:

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\delta\} = \{\mathbf{P}\}.$$

Для повышения точности решений понятно, что необходимо разбивать пластинку на несколько конечных элементов. Рассмотрим случаи, когда пластинка разбита на четыре, на шестнадцать и на тридцатьшесть конечных элементов. Результат вычислений (максимальный прогиб) приведём для случая, когда физические постоянные микрополярного упругого материала имеют значения [12]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 4370 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1093 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}, \quad \alpha = 46 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}, \quad \gamma = 2.4 \text{кГ},$$

$\varepsilon = 2.4 \text{кГ}$, $\beta = 120 \text{кГ}$, $q = 0.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, а геометрические размеры пластинки такие:

$a = b = 10 \text{см}$, $h = 0.1 \text{см}$ (для сравнения приведём также результат по классической теории упругой тонкой пластинки (18) при её изгибе с учётом поперечных сдвигов).

В случае, когда пластинка разбита на четыре конечные элементы:

$$1) \quad w_{\max}^{\text{мик}} = 0,0052 \text{см}, \quad w_{\max}^{\text{кл}} = 0,0073 \text{см}.$$

В случае, когда пластинка разбита на шестнадцать конечных элементов:

$$2) \quad w_{\max}^{\text{мик}} = 0,0059 \text{см}, \quad w_{\max}^{\text{кл}} = 0,0081 \text{см}.$$

В случае, когда пластинка разбита на тридцать шесть конечных элементов:

$$3) \quad w_{\max}^{\text{мик}} = 0,0061 \text{см}, \quad w_{\max}^{\text{кл}} = 0,0085 \text{см}.$$

Теоретические решения обеих задач, которые получены с применением метода разделения переменных, дают следующие численные значения:

$$4) \quad w_{\max}^{\text{мик}} = 0,0061 \text{см}, \quad w_{\max}^{\text{кл}} = 0,0085 \text{см}.$$

Здесь, в процессе вычислений легко убедиться в численной сходимости расчётов, а также, что микрополярность материала (по сравнению с классическим материалом) продемонстрирует высокие жёсткостные и прочностные свойства (аналогичные численные результаты получаются и для максимальных нормальных силовых напряжений).

4. Заключение

Таким образом, в данной работе выведены матрица жёсткости и вектор эквивалентных внешних усилий узловых сил и моментов, предназначенных для проведения конечно-элементного расчёта микрополярных упругих тонких пластин. Рассматривается пример применения разработанного метода МКЭ до получения конкретных численных результатов. Проведён анализ численных результатов, на основе которого установлены эффективные свойства микрополярного материала пластинки по сравнению с классическим материалом с точки зрения её жёсткости и прочности.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик. // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып.2. С.148-156. *Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar elastic thin plate and peculiarities of their strength and stiffness characteristics// Journal of Applied Mechanics and Technical physics. 2012. V.53. № 2. P.148-156.*

2. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells//Physical Mezomechanics. 2011. V.14. № 1. P.55-66.
3. Sargsyan S.H. Energy balance equation, energetic theorems and variation equation for the general theory of micropolar elastic isotropic thin shells//International Journal of Mechanics. 2014.Vol.8. P.93–100.
4. Sargsyan S.H., Zhamakochyan K.A. Finite Element Method for Solving Boundary Value Problems of Bending of Micropolar Elastic Thin Bars//Proceedings of the XLII Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics. St.-Petersburg, Russia. June 30-July 5, 2014. P.427-434.
5. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Метод конечных элементов в динамических задачах микрополярных упругих тонких балок //Труды XVII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону 14-17 октября 2014. Т.1. С.186-190. Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H. Finite element method in dynamic problems of micropolar elastic thin bars//Proceedings of the XVIIth international conference of Modern problems of continuum mechanics. Rostov-on-Don. 14-17 October 2014. V.1. P.186-190.
6. Nakamura S., Benedict R.L., Lakes R.S. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity. //Intern. J. Eng. Sci, 1984. V.22. № 3. P. 319-330.
7. Nakamura S., Lakes R.S. Finite element analysis of stress concentration around a blunt crack in a Cosserat elastic solid. // Comput. Methods in Appl. Mech. And Eng. 1988. V.66. №3. P.257-266.
8. Корепанов В.В., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Численное исследование двумерных задач несимметричной теории упругости// Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. №2. С.63–70. Korepanov V.V., Matveenko V.P. and Shardakov I.N. Numerical study of two-dimensional problems of nonsymmetric elasticity //Journal of RAS. Mechanics of Solids. 2008. №2. P.63–70.
9. Корепанов В.В. Численное обоснование экспериментов по обнаружению эффектов моментного поведения материалов//Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4(4). С.1536–1538. Korepanov V.V. Numerical verification of the experiments on detection of couple-stress effects in the behavior of materials//Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. 2011. № 4(4). P.1536–1538.
10. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига. «Знание». 1988. 285с. Rickards R.B. Finite element method in the theory of shells and plates. Riga. «Znanie». 1988. 285 p.
11. Нестеров В.А. Модельный расчёт пластины, податливой при трансверсальном сдвиге //Механика композитных материалов. 2011. Т.47. №3. С.399–418. Nesterov V.A. Stiffness matrix of the finite element of a plate compliant in transverse shear//Mechanics of composite materials. 2011. V.47. № 3. P.399–418.
12. Lakes R.S. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continuum//Continuum models for materials with micro-structure/ed. H. Muhhaus. 1995. P.1–22.

Сведения об авторах:

Жамакочян Кнарлик Араратовна - аспирант Гюмрийского госпединститута им.М.Налбандяна. **Тел:** (093)873294.

E-mail: knarikzhamakochyan@mail.ru.

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН РА, д.ф.-м.н, проф., зав. каф. Высшей математики Гюмрийского госпединститута им.М.Налбандяна.

Тел.: (093) 15 16 98. **E-mail:** slusin@yaoo.com

Поступила в редакцию 01.09.2016

FEATURES OF LOCALIZATION OF WAVE ENERGY AT ROUGH SURFACES OF PIEZODIELECTRIC WAVEGUIDE

Avetisyan A.S., Kamalyan A.A., Hunanyan A.A.

Keywords: composite waveguide; rough surfaces; normal wave signal; MELS hypotheses; wave modes; frequency zone; dispersion dependencies; shear electro-elastic waves.

Ключевые слова: композитный волновод; не гладкая поверхность; нормальный волновой сигнал; гипотезы MELS; волновые моды; частотная зона; дисперсионная зависимость; электро-упругие сдвиговые волны.

Բանալի բառեր. բաղադրյալ ալիքատար; անհարթ մակերևույթ; նորմալ ալիքային ազդանշան; MELS վարկածներ; ալիքի ձևեր; հաճախականային տիրույթ; դիսպերսիոն առնչություններ; սահմանային էլեկտրա-առաձգական ալիքներ:

Аветисян А.С., Камалян А.А., Унанян А.А.

Характеристики локализации волновой энергии около неровных поверхностей пьезоэлектрического волновода

Исследуется распространение высокочастотного электроупругого волнового сигнала в композитном волноводе. Волновод состоит из базового пьезоэлектрического слоя с шероховатыми поверхностями, которые залиты соответственно идеальным проводником и идеальным диэлектриком. Решение проводится использованием виртуальных срезов и вводом гипотез MELS (hypothesis of Magneto Elastic Layered Systems). Обсуждаются как воздействие шероховатости поверхностей, так и эффект поверхностного сглаживания разными материалами (эффект разных физико-механических граничных условий) на процесс распространения высокочастотного электроупругого нормального сигнала.

Численно исследованы амплитудное распределение и частотная характеристика волнового поля в композитном волноводе при распространении нормального волнового сигнала. Показано что, если шероховатые поверхности не залиты, в волноводе возникает только одна коротковолновая мода. Заливка поверхностных негладкостей приводит к появлению до четырёх таких волновых мод в зависимости от длины волнового сигнала. Приведены дисперсионные зависимости для всех возможных характерных мод волны упругого сдвига. Оказывается, что в случае распространения медленных волн, возникает зона частотного умолчания для волн определённых длин.

Ավետիսյան Ա.Ս., Գամալյան Ա.Ա., Հունանյան Ա.Ա.

Ալիքային էներգիայի տեղայնացման բնույթը այնպիսի էլեկտրիկ ալիքատարի անհարթ մակերևույթների մոտ

Գիտարկվում է բարձր հաճախականային էլեկտրա-առաձգական ալիքային ազդանշանի տարածումը բաղադրյալ ալիքատարում: Ալիքատարը բաղկացած է անհարթ մակերևույթներով հիմնական այնպիսի էլեկտրիկ շերտից, որը ստանձված է համապատասխանաբար իդեալական հաղորդիչով և իդեալական դիէլեկտրիկով: Խնդիրը լուծվում է վիրտուալ հատումների մեթոդով և MELS վարկածների ներմուծումով: Քննարկվում է ինչպես մակերևույթի անհարթության ազդեցությունը, այնպես էլ տարբեր նյութերով մակերևույթի մեղմացման ազդեցությունը (տարբեր ֆիզիկա-մեխանիկական եզրային պայմանների ազդեցությունները) բարձր հաճախականային էլեկտրա-առաձգական նորմալ ալիքի տարածման ժամանակ:

Կատարվել են ամպլիտուդային բաշխման և ալիքային դաշտի հաճախականային բնութագրերի թվային հետազոտություններ առաձգական ալիքատարում: Ցույց է տրված, որ եթե մակերևույթային անհարթությունները ստանձված չեն, ալիքատարում առաջանում է միայն մեկ կարճ հաճախականային ձև: Մակերևույթային անհարթությունները ստանձումը բերում է մինչև չորս, կախված ալիքային

ազդանշանի երկարությունից, այդպիսի ալիքային ձևերի առաջացման: Բերված է դիսպերսիոն կախվածությունը առաձգական սահքի ալիքային ձևերի բոլոր բնութագրիչներից: Ցույց է տրված, որ դանդաղ ալիքների տարածման դեպքում, որոշակի երկարության ալիքների համար, առաջանում է հաճախականության լրության գոտիներ:

Propagation of high-frequency electro-elastic normal wave signal in a composite waveguide is investigated. The composite waveguide consists of a base piezoelectric layer with rough surfaces, which respectively are filled with an ideal conductor and ideal dielectric. The problem is solved by the method of virtual cross sections and input of Magneto Elastic Layered Systems (MELS) hypotheses. The influence of surfaces roughness, as well as and the influence of surface smoothness (the effects of different physical and mechanical boundary conditions) on the process of propagation of high frequency electro-elastic normal wave signal is discussed.

The behaviors of wave amplitude and frequency characteristics in the composite waveguide are numerically investigated at the propagation of normal wave signal.

It is shown that if the surface roughness of the piezoelectric layer is not filled, only one shortwave mode occurs. The filling of the surface roughness with dielectric and conductor, leads to the appearance of up to four such wave modes, depending on the length of the wave signal. The dispersion dependencies for all possible characteristic modes of shear elastic waves are given. It is shown that on the propagation of slow waves, occurs frequency zone of silence at certain wave lengths.

Introduction. The localization of wave energy near body surfaces is ordinary at the propagation of wave signals in mediums with geometric constraints. It is known that the reason of localization near boundary sections of medium is the interruption of homogeneity of physico-mechanical characteristics of fields, which leads to loads on surface sections of medium. Often, based on the technical requirements, this phenomenon, as unnecessary, may be eliminated by proper selection of geometry of structural elements or by material characteristics of medium. But, often it is possible to take the advantage of the presence of such phenomenon and select the structural elements in different devices with appropriate geometrical and physical characteristics.

Different types of localization of the wave energy are found in the sources about elastic surface waves [1-4]. More details about the conditions of wave energy localization near the boundary sections of medium, their varieties depending on the nature of the surface compounds and their applications in various devices can be found in [5-9], etc.

The reason of distortion of the propagating normal wave signal or localization of wave energy, together with the effective physico-mechanical characteristics of the material can also be geometric surface heterogeneities, such as roughness and waviness of the surfaces of the waveguide [10-15].

Surface roughness and waviness of the waveguide formally form peculiarly efficient, geometrically thin heterogeneous layers in the near-border areas of the waveguide [16-18].

In the proposed work we consider the problem of possible localization of wave energy near to rough surfaces of homogeneous piezoelectric waveguide at different electro-mechanical boundary conditions. The electro-mechanical boundary conditions, different by nature, are obtained due to filling of surface heterogeneities with dielectric or conductive materials.

1. Problem Statement. Let us assume have a piezoelectric layer $\Omega \triangleq \{|x| < \infty; h_-(x) \leq y \leq h_+(x); |z| < \infty\}$ with rough surfaces $y = h_{\pm}(x)$, in Cartesian coordinate system $\{x; y; z\}$. Generally, surface roughness is described by a random function $y = H(x; z)$. But, the roughness (heterogeneities, waviness), which at

high accuracy can be described by function $y = h_{\pm}(x) \in \mathbb{L}_2$, are often obtained by modern technological methods of processing. Based on these, without losing the generality of further considerations, the surface roughness can be set respectively by functions of weak inhomogeneity $y = h_{\pm}(x)$

$$\begin{aligned} h_-(x) &= -h_0 \left[1 + \varepsilon_- \sin(k_- x) + \delta_- \cos(k_- x) \right], \\ h_+(x) &= h_0 \left[1 + \varepsilon_+ \sin(k_+ x) + \delta_+ \cos(k_+ x) \right], \end{aligned} \quad (1.1)$$

where the coefficients ε_{\pm} and δ_{\pm} characterize the amplitude and the initial phase of surface roughness, moreover $\gamma_{\pm} = \sqrt{\varepsilon_{\pm}^2 + \delta_{\pm}^2} \ll 1$ which is the height of the profile roughness, and multipliers $k_{\pm} = 2\pi/\lambda_{\pm}$, where λ_{\pm} is the step of the profile roughness, characterize surfaces waviness respectively.

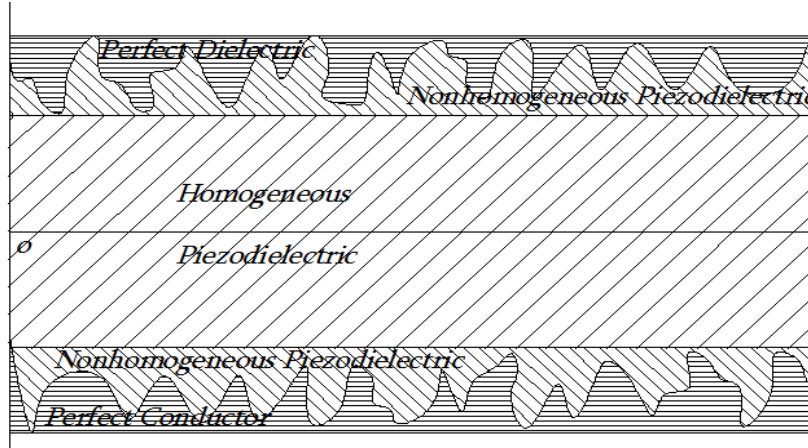


Fig. 1. Piezoelectric waveguide, surface roughness of which are filled with dielectric and electrical conductor materials

Assume that the surface roughness $y = h_+(x)$ up to the surface $y = h_0(1 + \gamma_+)$ is filled with a perfect dielectric material, and the surface roughness $y = h_-(x)$ up to the surface $y = -h_0(1 + \gamma_-)$ is filled with a perfect conductor material.

Then we obtain a composite waveguide of constant thickness consisting of three layers: conductor $-\Omega_-^c \triangleq \{|x| < \infty; -h_0(1 - \gamma_-) \leq y \leq h_-(x); |z| < \infty\}$ which has thickness $\xi_c(x) \triangleq |h_0(1 + \gamma_-) + h_-(x)|$, piezoelectric —

$\Omega \triangleq \{|x| < \infty; h_-(x) \leq y \leq h_+(x); |z| < \infty\}$ which has the following thickness $\xi_p(x) \triangleq |h_+(x) - h_-(x)|$ and dielectric – $\Omega_+^d \triangleq \{|x| < \infty; h_+(x) \leq y \leq h_0(1 + \gamma_+); |z| < \infty\}$ which has thickness $\xi_d(x) \triangleq h_0(1 + \gamma_+) - h_+(x)$. These three layers are of variable thickness.

During processing of the basic piezoelectric layer, in addition to the surfaces roughness, material heterogeneity also occur in the near-surface zones. It is important to take into account that near-surface zones especially in studies on the propagation of shortwave signals in the composite waveguide. For accounting these heterogeneities in the near-surface zones take virtual sections $y = h_0(1 - \gamma_+)$ and $y = -h_0(1 - \gamma_-)$. Instead of the waveguide base layer of variable thickness, we already will consider a three-layer piezoelectric waveguide consisting of a base homogeneous layer

$$\Omega_0 \triangleq \{|x| < \infty; -h_0(1 - \gamma_-) \leq y \leq h_0(1 - \gamma_+); |z| < \infty\}, \quad (1.2)$$

and two inhomogeneous, through the thickness, near-surface thin layers of variable thickness (Fig. 1)

$$\Omega_-^p \triangleq \{|x| < \infty; h_-(x) \leq y \leq -h_0(1 - \gamma_-); |z| < \infty\}, \quad (1.3)$$

$$\Omega_+^p \triangleq \{|x| < \infty; h_0(1 - \gamma_+) \leq y \leq h_+(x); |z| < \infty\}. \quad (1.4)$$

Thus, in the near-surface zone at the surface $y = h_-(x)$ will have a composite layer $\Omega_0 \triangleq \{|x| < \infty; -h_0(1 + \gamma_-) \leq y \leq -h_0(1 - \gamma_-); |z| < \infty\}$ composed of laterally inhomogeneous piezoelectric and homogeneous, perfectly conducting materials $\Omega_- = \Omega_-^p \cup \Omega_-^c$.

Also in the near-surface zone at the surface $y = h_+(x)$ will have a composite layer $\Omega_0 \triangleq \{|x| < \infty; h_0(1 - \gamma_+) \leq y \leq h_0(1 + \gamma_+); |z| < \infty\}$ composed of homogeneous dielectric and laterally inhomogeneous piezoelectric materials $\Omega_+ = \Omega_+^p \cup \Omega_+^d$.

Thus, the homogeneous piezoelectric waveguide surface roughness of which are filled, is modeled as a multilayered waveguide made of different materials. We will investigate the localization of the shear elastic wave in the formed near-surface inhomogeneous thin layers $\Omega_- = \Omega_-^p \cup \Omega_-^c$ and $\Omega_+ = \Omega_+^p \cup \Omega_+^d$ (Fig. 1.1).

Let us assume high-frequency (shortwave) elastic shear (SH) wave signal, whose length is much less than the base layer thickness $\lambda_0 \ll 2h_0$, is propagating in the composite waveguide. And let us assume the material of the main piezoelectric layer Ω_0 belongs to the tetragonal class $4mm$, or to the class of hexagonal symmetries $6mm$, for which, when the axis ox_3 is parallel to the axis of symmetry of the fourth (or sixth) order piezoelectric crystal \bar{p} , electroactive shear deformation $\{0; 0; w(x, y, t); \varphi(x, y, t)\}$ is separated from the

non-electroactive plane deformation $\{u(x, y, t); v(x, y, t); 0; 0\}$. Quasi-static equations of electroelasticity for these crystals, in the base layer of the composite waveguide, have the following forms:

$$\nabla^2 w(x, y, t) = c_{0r}^{-2} \cdot \ddot{w}(x, y, t), \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 \varphi(x, y, t) = (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot \nabla^2 w(x, y, t). \quad (1.6)$$

Here $c_{0r}^2 \triangleq G/\rho$ is the speed of the bulk shear electroelastic wave in the homogeneous piezoelectric, G is the shear modulus, ρ is the density, e_{15} is the piezoelectric modulus and ε_{11} is the dielectric coefficient of the medium.

The equations of electroelasticity of laterally inhomogeneous piezoelectric layer already will be solved in virtually selected layers Ω_{\pm}^p respectively:

$$G_{\pm}(y) \frac{\partial^2 w_{\pm}(x, y, t)}{\partial x^2} + e_{\pm}(y) \frac{\partial^2 \varphi_{\pm}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{\pm}(x, y, t)}{\partial y} = \rho_{\pm}(y) \cdot \ddot{w}_{\pm}(x, y, t), \quad (1.7)$$

$$e_{\pm}(y) \frac{\partial^2 w_{\pm}(x, y, t)}{\partial x^2} - \varepsilon_{\pm}(y) \frac{\partial^2 \varphi_{\pm}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial D_y^{\pm}(x, y, t)}{\partial y} = 0, \quad (1.8)$$

where the material relations for the component of mechanical stress and induction of the electric field have the forms

$$\sigma_{yz}^{\pm}(x, y, t) = G_{\pm}(y) \frac{\partial w_{\pm}(x, y, t)}{\partial y} + e_{\pm}(y) \frac{\partial \varphi_{\pm}(x, y, t)}{\partial y}, \quad (1.9)$$

$$D_y^{\pm}(x, y, t) = e_{\pm}(y) \frac{\partial w_{\pm}(x, y, t)}{\partial y} - \varepsilon_{\pm}(y) \frac{\partial \varphi_{\pm}(x, y, t)}{\partial y}.$$

The motion equation for perfectly conducting layer Ω^c will have in the following form

$$G_-^c \frac{\partial^2 w_-^c(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{yz}^c(x, y, t)}{\partial y} = \rho_-^c \cdot \ddot{w}_-^c(x, y, t), \quad (1.10)$$

where the relation for mechanical shear stress is the following

$$\sigma_{yz}^c(x, y, t) = G_-^c \frac{\partial w_-^c(x, y, t)}{\partial y}. \quad (1.11)$$

The equations of elastic shear motion and electrostatics in the dielectric layer Ω^d will have the following forms

$$G_+^d \frac{\partial^2 w_+^d(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{yz}^d(x, y, t)}{\partial y} = \rho_+^d \cdot \ddot{w}_+^d(x, y, t), \quad (1.12)$$

$$-\varepsilon_+^d \frac{\partial^2 \varphi_+^d(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial D_y^d(x, y, t)}{\partial y} = 0, \quad (1.13)$$

where the material relations for the component of mechanical stress and induction of the electric field have the forms

$$\sigma_{yz}^d(x, y, t) = G_+^d \frac{\partial w_+^d(x, y, t)}{\partial y}; \quad D_y^d(x, y, t) = -\varepsilon_+^d \frac{\partial \varphi_+^d(x, y, t)}{\partial y}. \quad (1.14)$$

The separation of the near-surface zones to multiple layers leads to the increase in the number of boundary conditions on existing and introduced virtual surfaces of the multilayer waveguide.

Only one boundary condition will have on the mechanically free surface $y = -h_0 \cdot (1 + \gamma_-)$ of the perfectly conducting thin layer

$$\sigma_{yz}^c(x, -h_0 - \gamma_-, t) = G^c \frac{\partial w^c(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=-h_0-\gamma_-} = 0. \quad (1.15)$$

The continuity conditions of the electromechanical fields of piezoelectric and the continuity conditions of the perfect conductor are satisfied on the rough surface $y = h_-(x)$

$$w_-(x, h_-(x), t) = w^c(x, h_-(x), t); \quad \varphi_-(x, h_-(x), t) = 0, \quad (1.16)$$

$$h'_-(x) \cdot \sigma_{zx}^-(x, h_-(x), t) + \sigma_{zy}^-(x, h_-(x), t) = \quad (1.17)$$

$$= h'_-(x) \cdot \sigma_{zx}^c(x, h_-(x), t) + \sigma_{zy}^c(x, h_-(x), t).$$

The continuity conditions of the electromechanical fields of homogeneous and heterogeneous piezoelectric layers are satisfied on the virtually selected surface $y = -h_0(1 - \gamma_-)$

$$w_0(x, -h_0(1 - \gamma_-), t) = w_-(x, -h_0(1 - \gamma_-), t), \quad (1.18)$$

$$\varphi_0(x, -h_0(1 - \gamma_-), t) = \varphi_-(x, -h_0(1 - \gamma_-), t),$$

$$\sigma_{yz}^0(x, -h_0(1 - \gamma_-), t) = \sigma_{yz}^-(x, -h_0(1 - \gamma_-), t), \quad (1.19)$$

$$D_y^0(x, -h_0(1 - \gamma_-), t) = D_y^-(x, -h_0(1 - \gamma_-), t). \quad (1.20)$$

Similarly, the continuity conditions of the electromechanical fields, taking into account the fact that the electric field is related to the vacuum half-space of outside through the dielectric layer, are satisfied on the mechanically free surface $y = h_0(1 + \gamma_+)$

$$\varphi_+^d(x, h_0(1 + \gamma_+), t) = \varphi^{(e)}(x, h_0(1 + \gamma_+), t), \quad (1.21)$$

$$\sigma_{yz}^d(x, h_0(1 + \gamma_+), t) = G_+^d \frac{\partial w_+^d(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=h_0(1+\gamma_+)} = 0, \quad (1.22)$$

$$D_y^d(x, h_0(1+\gamma_+), t) = -\varepsilon^{(e)} \frac{\partial \varphi^{(e)}(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=h_0(1+\gamma_+)} = 0. \quad (1.23)$$

The continuity conditions of electromechanical fields, considering surface roughness, are satisfied on the rough surface $y = h_+(x)$ respectively

$$w_+(x, h_+(x), t) = w_+^d(x, h_+(x), t), \quad \varphi_+(x, h_+(x), t) = \varphi_+^d(x, h_+(x), t), \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} h'_+(x) \cdot \sigma_{zx}^+(x, h_+(x), t) + \sigma_{zy}^+(x, h_+(x), t) = \\ = h'_+(x) \cdot \sigma_{zx}^d(x, h_+(x), t) + \sigma_{zy}^d(x, h_+(x), t), \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} h'_+(x) \cdot D_x^+(x, h_+(x), t) + D_y^+(x, h_+(x), t) = \\ = h'_+(x) \cdot D_x^d(x, h_+(x), t) + D_y^d(x, h_+(x), t), \end{aligned}$$

and on the virtually selected surface $y = h_0(1-\gamma_+)$ respectively are satisfied the continuity conditions of electromechanical fields

$$w_0(x, h_0(1-\gamma_+), t) = w_+(x, h_0(1-\gamma_+), t), \quad (1.26)$$

$$\varphi_0(x, h_0(1-\gamma_+), t) = \varphi_+(x, h_0(1-\gamma_+), t),$$

$$\sigma_{yz}^0(x, h_0(1-\gamma_+), t) = \sigma_{yz}^+(x, h_0(1-\gamma_+), t), \quad (1.27)$$

$$D_y^0(x, h_0(1-\gamma_+), t) = D_y^+(x, h_0(1-\gamma_+), t).$$

It is shown from the introduced boundary conditions, that tangential components of mechanical strain and induction of electric fields are participating in conditions (1.17) and (1.25) due to the rough surfaces $h_+(x)$ respectively. The tangential components of mechanical strain and the induction of electric fields have the following forms

$$\sigma_{zx}^\pm(x, y, t) = G_\pm(y) \frac{\partial w_\pm(x, y, t)}{\partial x} + e_\pm(y) \frac{\partial \varphi_\pm(x, y, t)}{\partial x}, \quad (1.28)$$

$$D_{zx}^\pm(x, y, t) = e_\pm(y) \frac{\partial w_\pm(x, y, t)}{\partial x} - \varepsilon_\pm(y) \frac{\partial \varphi_\pm(x, y, t)}{\partial x},$$

$$\sigma_{zx}^d(x, y, t) = G_+^d \frac{\partial w_+^d(x, y, t)}{\partial x}, \quad D_x^d(x, y, t) = -\varepsilon_+^d \frac{\partial \varphi_+^d(x, y, t)}{\partial x}, \quad (1.29)$$

$$\sigma_{zx}^c(x, y, t) = G^c \frac{\partial w^c(x, y, t)}{\partial x}. \quad (1.30)$$

The values of potential and normal component of induction of the electric field of the vacuum half-space on the surface $y = h_0(1+\gamma_+)$ are involved in the boundary conditions (1.20) and (1.21) too. Quasi-static potential of the electric field $\varphi^{(e)}(x, y, t)$ is determined from the equation

$$\nabla^2 \varphi^{(e)}(x, y, t) = 0. \quad (1.31)$$

Considering its decay at infinity $y \rightarrow \infty$, it will have the following form

$$\varphi^{(e)}(x, y, t) = E_0 e^{-ky} e^{i(kx - \omega_0 t)}. \quad (1.32)$$

Thus, the homogeneous piezoelectric waveguide with geometrically heterogeneous surfaces, smoothed by dielectric and perfectly conducting materials, is modeled as a multilayer waveguide of different materials. So, the problem of wave process (localization of shear elastic waves in formed near-surface heterogeneous thin layers $\Omega_- = \Omega_-^p \cup \Omega_-^c$ and $\Omega_+ = \Omega_+^p \cup \Omega_+^d$, delay of normal waves of certain frequencies, dynamic surface load etc.), when electroelastic normal shear wave is propagating in the multilayer waveguide, leads to the boundary-value problem, system of quasi-static equations (1.5)-(1.8), (1.10), (1.12), (1.13) and (1.31) with related electromechanical boundary conditions (1.15)-(1.30).

2. Problem Solution. The obtained boundary-value problem from a mathematical point of view is complicated by the fact that the equations of electroelasticity (1.7) and (1.8) for laterally inhomogeneous piezoelectric, with variable coefficients, should be solved in virtually selected both layers of variable thicknesses Ω_-^p and Ω_+^p . Also, there are boundary conditions with variable coefficients on the rough surfaces $y = h_-(x)$ and $y = h_+(x)$.

To avoid from mathematical complexities, for building the solution of the mathematical boundary value problem apply a hypothetical approach.

The normal wave solution of the system of equations (1.5) and (1.6) in the base homogeneous piezoelectric layer Ω_0 at propagation of normal wave signal in the composite waveguide, will be written in the following form

$$w_0(x, y, t) = [A_0 e^{\alpha_0 ky} + B_0 e^{-\alpha_0 ky}] e^{i(kx - \omega_0 t)}, \quad (2.1)$$

$$\varphi_0(x, y, t) = \left\{ C_0 e^{ky} + D_0 e^{-ky} + (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot [A_0 e^{\alpha_0 ky} + B_0 e^{-\alpha_0 ky}] \right\} e^{i(kx - \omega_0 t)}. \quad (2.2)$$

Here $\alpha_0 \triangleq \sqrt{1 - \eta_0^2}$ is the formation coefficient of elastic waves through the thickness of the base layer, and $\eta_0 \triangleq (\omega_0/k) \cdot (\rho_0/\tilde{G}_0)^{1/2}$ is the phase velocity of the normal wave in the base layer Ω_0 , which already will be functions of variable wave number $k(x)$ in the common case.

Considering the thinness of the other four boundary layers and the complexity of the analytical solution of the electroelasticity equations in virtually selected heterogeneous layers Ω_-^p and Ω_+^p , through the thickness of each layer input hypothesis of MELS [16-18] for distributions of elastic shear and potential of electric field.

The elastic shear and electric field potential in the virtually selected heterogeneous piezoelectric layer Ω_+^p introduce in the following forms

$$w_+(x, y, t) = f_+(kh_0; h_+(x)/h_0) \cdot \left[\begin{array}{l} w_+(x, h_+(x), t) - \\ -w_0(x, h_0(1-\gamma_+), t) \end{array} \right] + \quad (2.3)$$

$$+w_0(x, h_0(1-\gamma_+), t),$$

$$\varphi_+(x, y, t) = f_+(kh_0; h_+(x)/h_0) \cdot \left[\begin{array}{l} \varphi_+(x, h_+(x), t) - \\ -\varphi_0(x, h_0(1-\gamma_+), t) \end{array} \right] + \quad (2.4)$$

$$+\varphi_0(x, h_0(1-\gamma_+), t).$$

Here

$$f_+(kh_0; h_+(x)/h_0) \triangleq \text{sh}[\alpha_+ k (y - h_0(1-\gamma_+))] / \text{sh}[\alpha_+ k (h_+(x) - h_0(1-\gamma_+))]$$

is the distribution function (or formation) of electromechanical field in heterogeneous piezoelectric layer, corresponding to the electroelasticity equations (1.7) and (1.8).

Obviously, here the formation function $f_+(kh_0; h_+(x))$ of the indefinite characteristics of

the wave field is represented by the formation coefficient $\alpha_+(k) \triangleq [(\rho_+ \omega_0^2 / k^2 G_+) - 1]^{1/2}$

and by the variable thickness $\xi_+(x) \triangleq h_+(x) - h_0(1-\gamma_+)$ of the layer.

Similarly, the elastic shear and potential of electric field in the homogeneous dielectric layer Ω_+^d introduce in forms

$$w_d(x, y, t) = f_d(kh_0; h_+(x)/h_0) \cdot \left[\begin{array}{l} w_d(x, h_0(1+\gamma_+), t) - \\ -w_+(x, h_+(x), t) \end{array} \right] + \quad (2.5)$$

$$+w_+(x, h_+(x), t),$$

$$\varphi_d(x, y, t) = f_d(kh_0; h_+(x)/h_0) \cdot \left[\begin{array}{l} \varphi_d(x, h_0(1+\gamma_+), t) - \\ -\varphi_+(x, h_+(x), t) \end{array} \right] + \quad (2.6)$$

$$+\varphi_+(x, h_+(x), t),$$

where the formation coefficient $f_d(kh_0; h_+(x)/h_0) \triangleq \text{sh}[\alpha_d k (y - h_+(x))] / \text{sh}[\alpha_d k (h_0(1+\gamma_+) - h_+(x))]$ in the

homogeneous dielectric layer already is presented by the appropriate parameters of the homogeneous layer $\alpha_d(k) \triangleq [(\rho_d \omega_0^2 / k^2 G_d) - 1]^{1/2}$ and $\xi_d(x) \triangleq h_0(1+\gamma_+) - h_+(x)$

. In this case the representations (2.5) and (2.6) are automatically satisfied to the boundary conditions (1.24) and (1.26).

Analogically, the elastic shear and potential of electric field in the virtually selected heterogeneous piezoelectric layer Ω_-^p will be introduced in the following forms

$$w_-(x, y, t) = f_-(kh_0; h_+(x)/h_0) \cdot [w_c(x, h_-(x), t) - w_0(x, -h_0(1-\gamma_-), t)] + w_0(x, -h_0(1-\gamma_-), t), \quad (2.7)$$

$$\varphi_-(x, y, t) = \{1 - f_-(kh_0; h_+(x)/h_0)\} \cdot \varphi_0(x, -h_0(1+\gamma_-), t), \quad (2.8)$$

where the formation function $f_-(kh_0; h_+(x)/h_0) \triangleq \text{sh}[\alpha_- k(y + h_0(1-\gamma_-))]/\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1-\gamma_-))]$ in the inhomogeneous piezoelectric layer is represented by new formation coefficient $\alpha_-(k) \triangleq [(\rho_- \omega_0^2/k^2 G_-) - 1]^{1/2}$ and variable thickness $\xi_-(x) \triangleq h_0(1-\gamma_-) - h_-(x)$ for the given layer.

The potential of the electric field is absent in the perfectly conducting layer Ω_-^c , and for elastic shear will have the following representation

$$w_c(x, y, t) = f_c(kh_0; h_+(x)/h_0) \cdot \left[\begin{array}{l} w_c(x, -h_0(1+\gamma_-), t) \\ -w_-(x, h_-(x), t) \end{array} \right] + w_-(x, h_-(x), t), \quad (2.9)$$

where the formation function $f_c(kh_0; h_+(x)/h_0) \triangleq \text{sh}[\alpha_c k(y - h_-(x))]/\text{sh}[\alpha_c k(-h_0(1+\gamma_-) - h_-(x))]$ in the homogeneous perfectly conducting layer is represented by formation coefficient $\alpha_c(k) \triangleq [(\rho_c \omega_0^2/k^2 G_c) - 1]^{1/2}$ and variable thickness $\xi_c(x) \triangleq h_-(x) - h_0(1+\gamma_-)$.

It is important to note that the boundary conditions (1.16), (1.18), (1.21), (1.24) and (1.26) for elastic shear and electric field potential are automatically satisfied by the selection of formation functions $f_d(kh_0; h_+(x)/h_0)$, $f_+(kh_0; h_+(x)/h_0)$, $f_-(kh_0; h_+(x)/h_0)$, $f_c(kh_0; h_+(x)/h_0)$ and hypothetical representations (2.3)-(2.9).

In addition, the characteristic formation coefficients for each layer are involved in the distribution representations, as well as electromechanical field values on surfaces of adjacent layers are involved.

We receive all elastic shear and electric field potential values on the smooth and rough surfaces $y = h_0 \pm \gamma_+$, $y = -h_0 \pm \gamma_-$, $y = h_{\pm}(x)$ expressed by arbitrary amplitude constants $\{A_0, B_0, C_0, D_0, E_0\}$ of piezoelectric waveguide and vacuum half-space, satisfying the boundary conditions (1.15), (1.19), (1.22) and (1.27) on smooth surfaces $y = h_0 \pm \gamma_+$ and $y = -h_0 \pm \gamma_-$.

The representations for elastic shear and potential of the electric field, using the obtained surface values of distributions (2.3)-(2.9) for elastic shear and potential of the electric field, can be written in expanded forms

$$\begin{aligned}
w_c(x, y) &= w_-(x, h_-(x)) = \\
&= \left[\begin{aligned} &A_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1-\gamma_-)] \cdot \left\{ \begin{aligned} &1 + \chi_0^2 \alpha_0 k + \\ &+ (\alpha_0/\alpha_-) \xi_-(x, k) \cdot (1 + \chi_0^2) \end{aligned} \right\} + \\ &+ B_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1-\gamma_-)] \cdot \left\{ \begin{aligned} &1 - \chi_0^2 \alpha_0 k - \\ &- (\alpha_0/\alpha_-) \xi_-(x, k) \cdot (1 + \chi_0^2) \end{aligned} \right\} + \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &C_0 \exp[-k h_0 (1-\gamma_-)] - \\ &- D_0 \exp[k h_0 (1-\gamma_-)] \end{aligned} \right\} \cdot \chi_0^2 \alpha_-^{-1} \cdot (\xi_-(x, k) + k \alpha_-) \end{aligned} \right], \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_-(x, y) &= \\
&= \left\{ \begin{aligned} &A_0 \exp[-\alpha_0 h_0 (1-\gamma_-)] + B_0 \exp[\alpha_0 h_0 (1-\gamma_-)] + \text{sh}[\alpha_- k (y + h_0 (1-\gamma_-))] \times \\ &\left[\begin{aligned} &A_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1-\gamma_-)] - B_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1-\gamma_-)] \end{aligned} \right] \times \\ &\times (\alpha_0/\alpha_-) \cdot [1 + \chi_0^2 \xi_-(x, k) \cdot (\xi_-(x, k) + k \alpha_-)] + \\ &\left[\begin{aligned} &C_0 \exp[-k h_0 (1-\gamma_-)] - D_0 \exp[k h_0 (1-\gamma_-)] \end{aligned} \right] \cdot \chi_0^2 (\alpha_-^{-1} + k \xi_-^{-1}(x, k)) \end{aligned} \right\}, \quad (2.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_-(x, y) &= \left\{ 1 - \xi_-^{-1}(x, k) \cdot \text{sh}[\alpha_- k (y + h_0 (1-\gamma_-))] \right\} \times \\
&\times \left\{ \begin{aligned} &C_0 \exp[-k h_0 (1-\gamma_-)] + D_0 \exp[k h_0 (1-\gamma_-)] + \\ &+ (e_0/\varepsilon_0) \cdot [A_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1-\gamma_-)] + B_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1-\gamma_-)]] \end{aligned} \right\}, \quad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_+(x, y) &= \\
&= \left[\begin{aligned} &(e_0/\varepsilon_0) \left[\begin{aligned} &A_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1-\gamma_+)] + \\ &B_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1-\gamma_+)] \end{aligned} \right] + \left[\begin{aligned} &C_0 \exp[k h_0 (1-\gamma_+)] + \\ &+ D_0 \exp[-k h_0 (1-\gamma_+)] \end{aligned} \right] + \\ &+ \frac{\text{sh}[\alpha_+ k (y - h_0 (1-\gamma_+))]}{\alpha_+} \cdot \left[\begin{aligned} &(e_0/\varepsilon_0) \cdot \alpha_0 \times \\ &\left[\begin{aligned} &A_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1-\gamma_+)] - \\ &- B_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1-\gamma_+)] \end{aligned} \right] + \\ &\left[\begin{aligned} &C_0 \exp[k h_0 (1-\gamma_+)] - \\ &- D_0 \exp[-k h_0 (1-\gamma_+)] \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \end{aligned} \right], \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_+(x, y) &= \\
&= \left[\begin{aligned} & \left[A_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] + B_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] \right] + \\ & + (\alpha_0 / \alpha_+) \operatorname{sh}[\alpha_+ k (y - h_0 (1 - \gamma_+))] \left[\begin{aligned} & A_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] - \\ & - B_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] \end{aligned} \right] \end{aligned} \right], \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_d(x, y) = w_+(x, h_+(x)) &= \\
&= \left[\begin{aligned} & \left[A_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] + \right. \\ & \left. + B_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] \right] + \\ & + (\alpha_0 / \alpha_+) \cdot \xi_+(x, k) \left[\begin{aligned} & A_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] - \\ & - B_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] \end{aligned} \right] \end{aligned} \right], \quad (2.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_d(x, y) &= \\
&= \left\{ \begin{aligned} & \left[f_d(kh_0, h_+(x/h)) \cdot E_0 e^{-kh_0(1+\gamma_+)} + [1 - f_d(kh_0, h_+(x/h))] \times \right. \\ & \left[\begin{aligned} & (e_0 / \varepsilon_0) \cdot [A_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] + B_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] \right] + \\ & + C_0 \exp[kh_0 (1 - \gamma_+)] + D_0 \exp[-kh_0 (1 - \gamma_+)] + \\ & + (e_0 / \varepsilon_0) \cdot (\alpha_0 / \alpha_+) \cdot \xi_+(x, k) \cdot \left[\begin{aligned} & A_0 \exp[\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] - \\ & - B_0 \exp[-\alpha_0 k h_0 (1 - \gamma_+)] \end{aligned} \right] \left. \right] + \\ & \left. + \alpha_+^{-1} \cdot \xi_+(x, k) \cdot [C_0 \exp[kh_0 (1 - \gamma_+)] - D_0 \exp[-kh_0 (1 - \gamma_+)]] \right] \end{aligned} \right\}. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Here introduced assignments $\xi_{\pm}(x, k) = \operatorname{sh}[\alpha_{\pm} k (h_{\pm}(x) + h_0 (1 - \gamma_{\pm}))]$ characterizing the functions of near-surface distributions in the formed heterogeneous layers Ω_+^p and Ω_-^p , respectively.

The introduced distributions of wave field characteristics (2.10)-(2.16) allow to build the picture of distribution through all thickness of the composite waveguide, if in them put the value of wave number $k(h_{\pm}(x)/h_0; \gamma_{\pm}; \omega_0)$ determined from the dispersion equation.

We obtain a system of five homogeneous algebraic equations related to amplitude constant $\{A_0, B_0, C_0, D_0, E_0\}$, satisfying boundary conditions (1,17), (1,20), (1,23) and (1,25). The dispersion equation of the formed wave field is obtained from the condition of existence of nontrivial solutions in the following form

$$g_{35}(\alpha_d; \varepsilon^{(e)}/\varepsilon^d; h_+(x); kh_0) \times \det \left\| g_{ij}(G_k; \rho_k; e_k; \varepsilon_k; h_{\pm}(x); \omega_0; k(x, \omega_0)) \right\|_{4 \times 4} = 0 \quad (2.17)$$

where the variable coefficients $\{g_{ij}(G_k; \rho_k; e_k; \varepsilon_k; h_{\pm}(x); \omega_0; k(x, \omega_0))\}_{4 \times 4}$ (tensor) of dispersion equation have bulky appearance (Appendix-1). The coefficients of the fifth column of the tensor equal to zero $g_{15} = g_{25} = g_{45} = g_{55} = 0$, and g_{35} is positively definite $g_{35}(\alpha_d; \varepsilon^{(e)}/\varepsilon^d; h_+(x); kh_0) \geq 0$ and characterizes oscillations of the electric field in vacuum.

Obviously this is due to the presence of expressions $h'_{\pm}(x) \sigma_{zx}^{\pm}(x, h_+(x), t)$ and $h'_{\pm}(x) D_x^{\pm}(x, h_+(x), t)$ in boundary conditions (1.17) and (1.25). But, for selected formation functions $f_d(kh_0; h_+(x)/h_0)$, $f_+(kh_0; h_+(x)/h_0)$, $f_-(kh_0; h_+(x)/h_0)$ and $f_c(kh_0; h_+(x)/h_0)$ the imaginary part of the dispersion equation is satisfied automatically.

It is easy to see from the coefficient relations in Appendix-1, that amplitude distribution and frequency of wave field through the waveguide depend on as physico-mechanical constants of boundary materials, as characteristic linear dimensions of the surface not-smoothness of composite waveguide.

3. Numerical Calculation and Comparative Analysis.

Table 1. Numerical test data of constants of composite waveguide materials

	$G_i = C_{44}^{(i)}$	ρ_i	$\varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}$	$e_i = e_{15}^{(i)}$
Homogeneous Piezocrystal of class 6mm (4mm)	1.49×10^{10} N/m ²	4.82×10^3 kg/m ³	7.99×10^{-11} F/m	-0.21
Nonhomogeneous Piezocrystal of class 6mm(4mm) $\pm 10\%$	1.639×10^{10} N/m ²	5.302×10^3 kg/m ³	8.789×10^{-11} F/m	-0.231
	1.341×10^{10} N/m ²	4.338×10^3 kg/m ³	7.191×10^{-11} F/m	-0.189
Dielectric	1.788×10^{10} N/m ²	5.784×10^3 kg/m ³	9.588×10^{-11} F/m	
	1.192×10^{10} N/m ²	3.856×10^3 kg/m ³	6.392×10^{-11} F/m	
Conductor	1.788×10^{10} N/m ²	5.784×10^3 kg/m ³		
	1.192×10^{10} N/m ²	3.856×10^3 kg/m ³		
Vacuum			10^{-11} F/m	

The study on the propagation of high-frequency (shortwave $kh \gg_0 1$) wave signal in waveguides with rough surfaces, of course are due to the fact that the linear dimensions of these roughness are small compared to the thickness of the base layer $\gamma_{\pm} = \sqrt{\varepsilon_{\pm}^2 + \delta_{\pm}^2} \ll 1$. Also in paper [20], it is shown that the interaction of propagating waves and weak roughness hardly occurs at the propagation of long-wave signals.

On the basis of numerical calculations are taken the numerical test data of material constants for appropriate layers, shown in table 1, as well as the geometric linear dimensions of the base layer and the surface roughness ($h_0 = 1$; $\varepsilon_{\pm} = \delta_{\pm} = 1/100$).

3.1 Frequency characteristic of propagating wave. The dispersion equation (2.17) certainly does not have intuitive analytical solutions. But, obviously there is a short-wave approximation when $kh_0 \gg 1$, and a long-wave approximation when $kh_0 \ll 1$. It has already been said that in the second case, the normal propagating wave signal does not interact with the surface roughness.

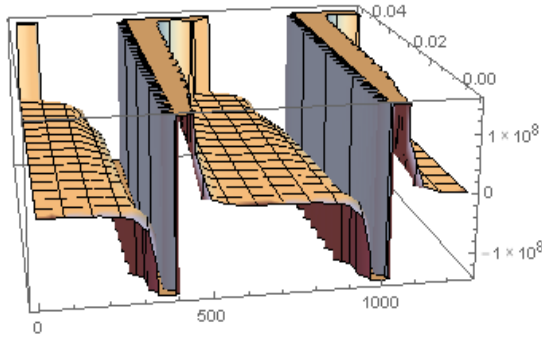


Fig. 1.a Dispersion surface for wave with distribution functions $\sin[\alpha_0 k \cdot (y - h_{\pm}(x))]$, where the wave number $k = k(x)$

In the case of propagation of short-wave (high-frequency) electro-elastic signal, the presence of a surface geometrical heterogeneity leads to the wave number dependence on the coordinates of the propagation $\exp[k(x) \cdot x - \omega_0 t]$.

Although, in this case, we can ignore the damped, from the surface up to the depth of base layer, wave forms of type $\exp[-\alpha_i(\omega_0; k(x)) \cdot y]$ and obtain two unrelated tasks of half-spaces with rough surfaces which are filled with dielectric and conductor materials, but we will lose the ability to accurately calculate the influence of surface roughness on the forming waves in the base layer of the waveguide. Therefore, quantitatively small, but qualitatively important components are saved in the calculations.

For the comparative analysis, first we present the frequency characteristic of the propagating plane electro-elastic wave signal in piezoelectric homogeneous waveguide with mechanically free, rough surfaces, when one surface of the waveguide is electrically open

and the other surface is electrically closed. Practically, this means that we ignore the mechanical effects of thin surface layers of dielectric and conductor.

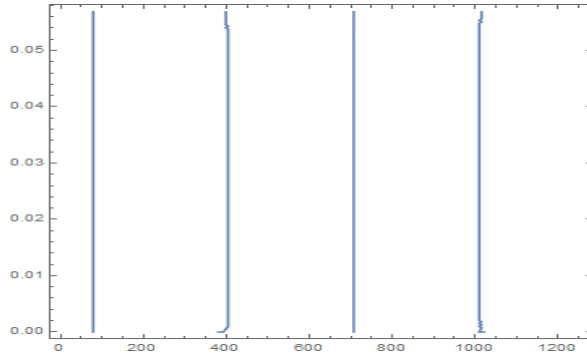


Fig. 1.b Dependence of wave number $k(x)$ on x coordinate at fixed source frequency $\omega_0 = 100$ Hz

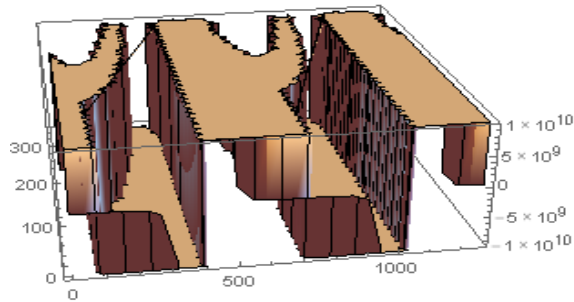


Fig. 1.c Dispersion surface for wave with distribution functions $\text{sh}\left[\alpha_0 k \cdot (y - h_{\pm}(x))\right]$, where the wave number $k = k(x)$

The dispersion surface and the dependence of the wave number for normal wave with harmonic oscillations $\sin\left[\alpha_0 k (y - h_{\pm}(x))\right]$ are shown in Figs. 1.a and 1.b. The calculations show that they exist only at low frequency (long-wave) signals, up to certain length $k_n \sim 0.046$, which is determined by the physico-mechanical material constant and geometric ratio of the linear dimensions of the base layer and the surface roughness of the waveguide.

It is seen from these figures, that the long-wave signals have numerically small distortion of the dispersion surface (Fig. 1.a) and to each source frequency $\omega_0 = \text{const}$ correspond two wave numbers k_{01} and k_{02} . The cycle period of the wave formation (in the above calculations it is $T = 200\pi$) is determined by the ratio of the linear dimensions of the base layer and surface roughness.

The dispersion surface and the dependence of the wave number for waves with non-harmonic distribution $\text{sh}[\alpha_0 k(y - h_{\pm}(x))]$ are shown in Figs. 1.c and 1.d respectively, from where it is obvious that the dispersion surface at high frequency (short-wave) signal varies strongly.

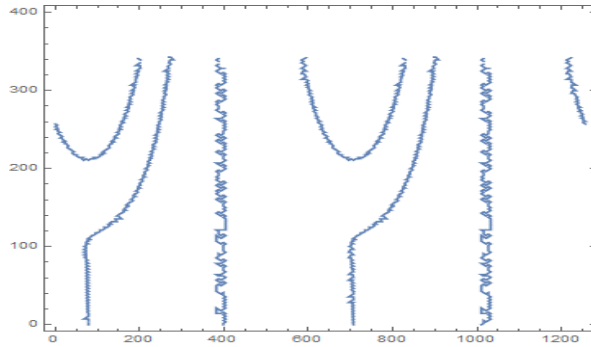


Fig. 1.d Dependence of wave number $k(x)$ on x coordinate at fixed source frequency $\omega_0 = 100$ Hz.

This leads to weak quantitative change of the second wave with the wave number k_{02} . Wave number k_{01} of the first wave changes qualitatively for quite short wave signals $k_{01} \sim 100$ ($\lambda_{01} \sim 0.0628$ mm), opening space for the appearance of new wave mode (Fig. 1.d). It is also interesting that approximately when $k_n \geq 350$, ultrashort wave solutions do not exist.

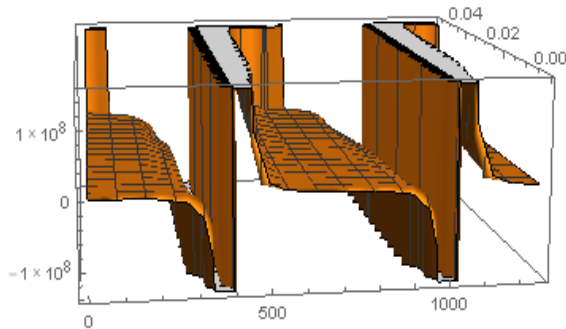


Fig. 2.a Dispersion surface for wave with distribution functions $\sin[\alpha_0 k \cdot (y - h_{\pm}(x))]$, where the wave number $k = k(x)$

The investigation of emergent frequency images gives interesting results, when one of the waveguide surface roughness is filled with a perfect conductor and the other is filled with a good dielectric.

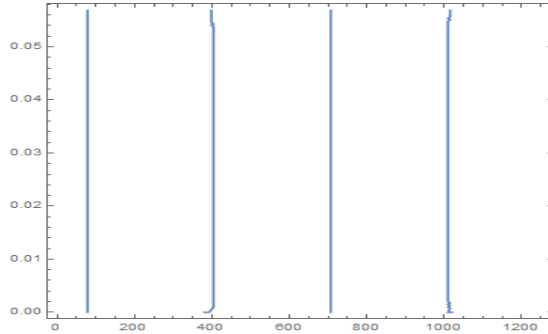


Fig. 2.b Dependence of wave number $k(x)$ on x coordinate at fixed source frequency $\omega_0 = 100$ Hz

The calculations show that in this problem, the dispersion surface and the dependence of the wave number $k(x)$ for normal waves with harmonic oscillations are almost identical to the previous case (Fig. 2.a \leftrightarrow Fig. 1.a and Fig. 2.b \leftrightarrow Fig. 1.b) at low-frequency (long-wave) signals, up to some length k_{0n} , which is determined by the physico-mechanical constant of adjacent materials and by the ratio of geometrical linear dimensions of the base layer and surface roughness of the waveguide.

This means that surface weak heterogeneities, and very thin material layers on the surfaces of the layer of the waveguide don't have any effect on the low-frequency, electro-elastic wave signal at it's propagation.

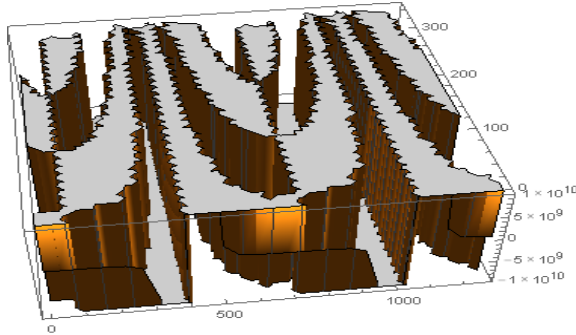


Fig. 2.c Dispersion surface for wave with distribution functions $\text{sh}[\alpha_0 k \cdot (y - h_{\pm}(x))]$, where the wave number $k = k(x)$

The dispersion surface and the dependence of the wave number for waves with non-harmonic distribution $\text{sh}[\alpha_0 k (y - h_{\pm}(x))]$ are shown in Figs. 2.c and 2.d respectively, from where it is obvious that the dispersion surface at high frequency (short-wave) signal varies strongly.

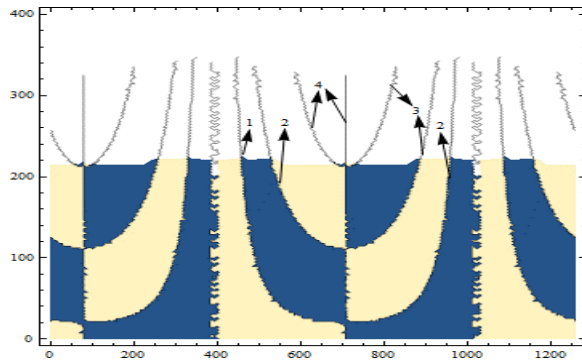


Fig. 2.d Dependence of wave number $k(x)$ on x coordinate at fixed source frequency $\omega_0 = 100$ Hz.

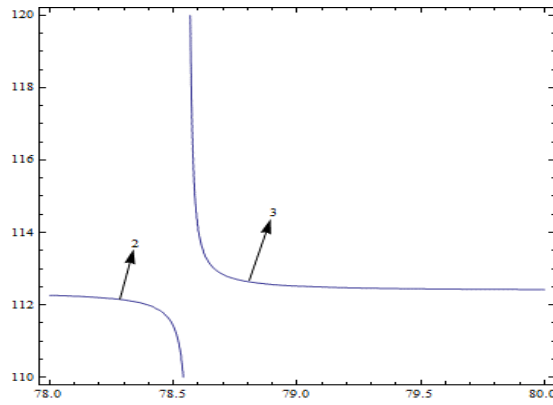


Fig. 2.e Curves for wave number functions $k_{21}(x)$ and $k_{11}(x)$

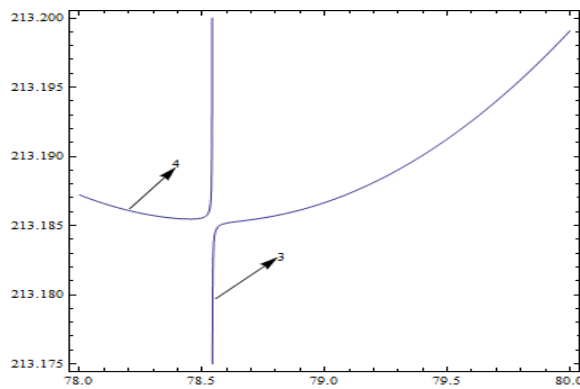


Fig. 2.f Curves for wave number functions $k_{41}(x)$ and $k_{11}(x)$

Here, as in the previous case, high frequencies lead to weak, quantitative change of the second wave with the wave number k_{02} , which is well seen on Figs. 2.c and 2.d. More interesting transformation occurs with a low-frequency form, with the corresponding wave number k_{01} . At relatively short wave signals $k_{01} \sim 25$ ($\lambda_{01} \sim 0.25$ mm), wave number $k_{11}(x)$ strongly changes the direction, opening space for the emergence of new wave modes (Fig. 2.d). The wave number $k_{21}(x)$ of the newly emerged wave mode at first decreases, making the leap on the vertical $x_{01} = \text{const}$, and then increases up to the limit of the existence of high frequency oscillations. According to the same scheme, two high-frequency wave modes (Fig. 2.d) with changeable wave numbers $k_{31}(x)$ and $k_{41}(x)$ occur there. It is interesting that the existance limit of these ultrashort waves again is the same $k_{n1} \leq 350$.

It follows from Figs. 2.c and 2.d, that at higher frequencies of the wave signal occurs branching of first low-frequency harmonic (Fig. 1.b) on four waves with different wave lengths $\lambda_{n1}(x) = 2\pi/k_{n1}(x)$ respectively. So, it means that the function $k_{n1}(x)$ has multiple branches which are not intersecting. On some points the branches are becoming very closer to each other which is shown on Figs. 2.e and 2.f.

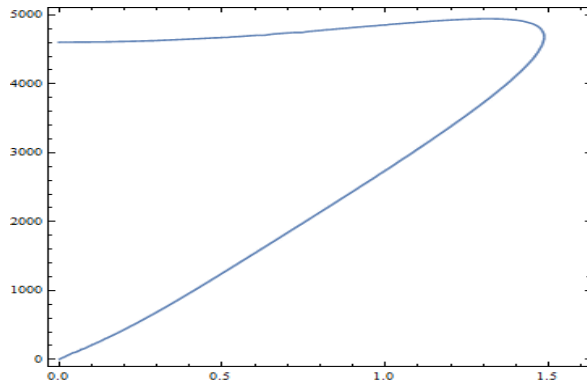


Fig. 3.a Dependence of fast, long wave frequency $\omega(k)$ from wave number, when $k \in [0;1.6]$

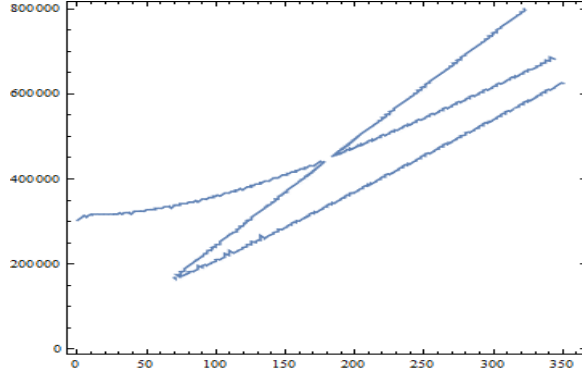


Fig. 3.b Dependence of fast, short wave frequency $\omega(k)$ from wave number, when $k \in [1.6; 350]$

Different orientations of the closer curves describing wave numbers, implies that there is a new mode due to the surface roughness of the waveguide (Fig. 1.d), which is dissected on newly formed wave modes $k_{21}(x)$, $k_{31}(x)$ and $k_{41}(x)$ under wave interaction of the first main mode. Moreover, for all of the newly formed wave modes on the primary phase section $x_{01} = \text{const}$.

Such branching of course is a consequence of the wave signal dissipation on surface roughness and scattering of wave energy along selected layers of the waveguide. It also follows from Fig. 2.d, that the branching into different lengths (on different wave number) occurs at different wavelengths $\lambda_{n1}(x) = 2\pi/k_{n1}(x)$ (at different values of wave number $k_{n1}(x)$), which should lead to different dispersions.

For fast waves when the phase speed is greater than values of shear body waves in the adjacent materials $V_\phi(k; \omega) \geq c_{nt}$, the dispersion of long waves, when $k \in [0; 1.6]$, happens in the interval $\omega(k) \in [0; 5000]$ (Fig. 3.a) and is close to the value $\omega_{01}(k) \approx 316000$.

Fig. 3.b shows that, the second frequency is induced at a certain value of wavelength. Also, for the fast, short wave the frequency is quite great $\omega(k) \in [17 \times 10^4; 8 \times 10^5]$. It is necessary to pay attention to the fact that, starting from some value of the wave length, a wave with a specific length can be propagated with three different frequencies.

In the case of slow wave signals, when the phase velocity is less than the values of shear body waves in the adjacent materials $V_\phi(k; \omega) < c_{nt}$, receive an interesting phase picture (Fig. 3.c and Fig. 3.d).

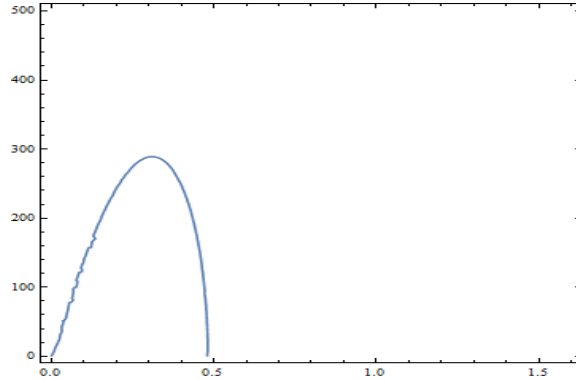


Fig. 3.c Dependence of slow, long wave frequency $\omega(k)$ from wave number, when $k \in [0; 0.5]$

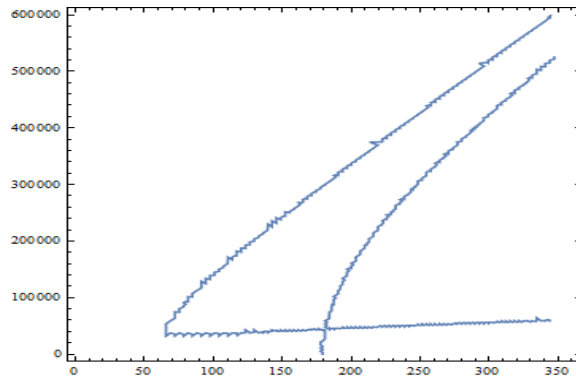


Fig. 3.d Dependence of slow, short wave frequency $\omega(k)$ from wave number, when $k \in [60; 350]$

It is seen from figure 3.c that in contrast to the fast, long waves (Fig. 3.a), where to each wavelength corresponds two frequency values, here to each frequency value correspond two wave modes with different wavelengths. In this case the interval defining long $\lambda \in [2\pi/1.6; 2\pi/0.5]$ is larger than in the case of faster, longer waves.

For slow, short waves, when $\lambda \in (\pi/175; \pi/90]$, to each wave length corresponds two frequencies, and in the interval $\lambda \in (\pi/90; \pi/30]$ correspond already three oscillation frequencies. In the case of slow waves it is noteworthy that there is a frequency zone of silence. For waves of the length $\lambda \in [\pi/30; 2\pi/0.5]$, frequencies does not exist $\omega(k) \in \emptyset$.

Comparing Fig. 1.b, 1.d and 2.d with Fig. 3.a-3.d it is easy to see that, if long waves are propagating in the range of relatively low frequencies $\omega_{s,l} \in [0; 300]$ and

$\omega_{q,l} \in [0; 5000]$, then short waves are propagating in the range of very high frequencies $\omega_{s,l} \in [170000; 800000]$ and $\omega_{q,l} \in [0; 600000]$.

3.2 Amplitude distribution at propagation of wave signal. Given distribution of wave field characteristics (2.10)-(2.16) allow to note that, in the thin surface layers of conductor and dielectric, elastic shears equal to the surface shears of virtually allocated layers from the base layer $w_c(x, y, t) = w_-(x, h_-(x), t)$ and $w_d(x, y, t) = w_+(x, h_+(x), t)$ respectively.

It is also clear that, in all relations the main dominant is the wave signal (2.1) and (2.2), and the components due to the interaction of the wave signal with surface roughness, in them appear in the form $\xi_n^{-1}(x, k) \cdot \text{sh}[\alpha_n k (y + h_0(1 - \gamma_n))]$ and $(\alpha_0/\alpha_n) \cdot \text{sh}[\alpha_n k (y - h_0(1 - \gamma_n))]$. These components at any wavelength can't cause internal resonance, since at values $\alpha_n(x) \cdot k(x) \rightarrow 0$ they do not go to infinity.

Relations (2.10)-(2.16) also show that due to the summation of the surface values and the effect of the interaction of the wave signal with surface roughness, amplitude distributions of slow and fast, short waves (at high-frequency oscillations $\omega(k) \sim 10^5$) have maximum values in the formed near-surface inhomogeneous thin layers $\Omega_- = \Omega_-^p \cup \Omega_-^c$ and $\Omega_+ = \Omega_+^p \cup \Omega_+^d$ (Fig. 1.1). This corresponds to the case when the length of the propagating wave signal is comparable with the linear characteristics of the surface roughness $\lambda \sim \gamma_{\pm}$.

Then using relations (2.10) and (2.11), the elastic shear in the geometrically and physically heterogeneous near-surface layer $\Omega_- = \Omega_-^p \cup \Omega_-^c$ will be presented in the form

$$w_{-c}(x, y) = \begin{cases} w_c(x, y) & y \in [-h_0(1 + \gamma_-); h_-(x)] \\ w_-(x, h_-(x)) & y \in [h_-(x); -h_0(1 - \gamma_-)] \end{cases} \quad (3.1)$$

As well as, the elastic shear in the geometrically and physically heterogeneous surface layer $\Omega_+ = \Omega_+^p \cup \Omega_+^d$ will be presented in the form

$$w_{+d}(x, y) = \begin{cases} w_+(x, y) & y \in [h_0(1 - \gamma_+); h_+(x)] \\ w_d(x, h_+(x)) & y \in [h_+(x); h_0(1 + \gamma_+)] \end{cases} \quad (3.2)$$

All the above numerical calculations have been done for test numerical values of the material constant of composite waveguide and linear dimensions of surfaces roughness of the waveguide. The algorithm of calculations and formulas allow to calculate and construct the needed parameters of the composite waveguide from both real and newly created materials.

Conclusion. A mathematical modeling of the problem on propagation of electro-elastic wave signal shear in a homogeneous piezoelectric waveguide with filled surface roughness is suggested. Using MELS hypotheses (hypothesis of Magneto Elastic Layered Systems),

analytical distribution of the elastic shear and the electric potential in the base layer, as well as in each formed layer of the composite waveguide are built by inputting hypothesis of MELS.

Numerically investigated the amplitude distribution and frequency characteristics of the wave field in the composite waveguide at the propagation of normal wave signal.

It is shown that, in the case of non-filled surface roughness of the waveguide occur only one short-wave mode (Fig. 1.g), but the case of filled surface roughness leads to the appearance of up to four such wave modes, depending on the length of the wave signal (Fig. 2.d). The dispersion dependence $\omega(k)$ of all possible characteristic modes of shear elastic waves is shown (Figs. 3.a-3.d). It is shown that in the case of slow wave propagation $V_\phi(k; \omega) < c_{nt}$, occurs frequency zone of silence for waves with length $\lambda \in [\pi/30; 2\pi/0.5]$.

References

1. Rayleigh L., On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic, Solid. Proc. London Math. Soc., 1885, vol. s1-17 issue 1, pp. 4–11.
2. Love A.E.H., Some problems of geodynamics, first published in 1911 by the Cambridge University Press and published again in 1967 by Dover, New York, USA. (Chapter 11: Theory of the propagation of seismic waves).
3. Lamb H., On Waves in an Elastic Plat. Proc. Roy. Soc. London, 1917, vol. 93, issue 648, pp. 114–128.
4. Bleustein J.L., A new surface wave in piezoelectric materials, Appl. phys. Lett., 1968, vol. 13, №2, pp. 412-413.
5. Viktorov I. A., Sound surface waves in solids., M.: Nauka, 1981, p. 287 (in Russian)
6. Achenbach, J. D., Wave Propagation in Elastic Solids, New York, Elsevier, 1984, p. 364.
7. Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V., Plessky V., Surface acoustic waves in inhomogeneous media, Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20, 1995, p. 388.
8. D. Royer, E. Dieulesaint, Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation, Springer Science & Business Media, 2000, p. 374.
9. Brekhovskikh L., Waves in Layered Media 2e, Applied mathematics and mechanics, Elsevier Science, 2012, p. 520.
10. Flannery CM, von Kiedrowski H., Effects of surface roughness on surface acoustic wave propagation in semiconductor materials, , 2002, vol. 40, issues 1-8, pp. 83-87.
11. Svetovoy V.B., Palasantzas G, Influence of surface roughness on dispersion forces, Adv Colloid Interface Sci., 2015, vol. 216, pp. 1-19.
12. S. S. Singh, Love Wave at a Layer Medium Bounded by Irregular Boundary Surfaces, Journal of Vibration and Control, 2011, vol. 17, issue 5, pp. 789–795.
13. Catherine Potel, Michel Bruneau, Ludovic C. Foze N'Djomo, Damien Leduc, Mounsif Echcherif Elkettani, Jean-Louis Izbicki, Shear horizontal acoustic waves propagating along two isotropic solid plates bonded with a non-dissipative adhesive layer: Effects of the rough interfaces, J. App. Phys., 2015, vol. 118, issue 22, pp. 118-134.
14. B. F. Apostol, The Effect of Surface Inhomogeneities on the Propagation of Elastic Waves, Journal of Elasticity, 2014, vol. 114, issue 1, pp. 85-99.
15. Valier-Brasier T., Potel C., Bruneau M, Leduc D, Morvan B, Izbicki J-L, Coupling of shear acoustic waves by gratings: Analytical and experimental analysis of spatial

- periodicity effects, *Acta Acustica United with Acustica*, 2011, vol. 97, issue 5, pp. 717–727.
16. Avetisyan A.S., On the formulation of the electro-elasticity theory boundary value problems for electro-magneto-elastic composites with interface roughness, *Proceedings of NAS of Armenia, Mechanics*, 2015, vol. 68, №2, pp. 29-42.
 17. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A., The efficiency of application of virtual cross-sections method and hypotheses MELS in problems of wave signal propagation in elastic waveguides with rough surfaces, *Journal of Advances in Physics*, 2016, vol. 11, №7, pp. 3564-3574
 18. Avetisyan A.S., The boundary problem modelling of rough surfaces continuous media with coupled physical-mechanical fields, *Reports of NAS of Armenia*, 2015, vol. 115, №2, pp. 119-131.
 19. Avetisyan A.S., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Magneto-electro-thermo-elastic hypotheses for contact problems of composite waveguides, *The International Conference «Modern problems of thermomechanics»*, 22-25 September, 2016, Lvov, Ukraine, Collection of scientific papers, pp.142-144.
 20. Hunanyan A.A., The instability of shear normal wave in elastic waveguide of weakly inhomogeneous material, *Proc. of NAS Armenia, ser. Mechanics*, 2016, vol. 69, №3, pp. 16-27.

Funding: This study was funded by Ministry of Education and Science of Armenia, State Committee of Science (grant number 15T -2C026).

About authors:

A.S. Avetisyan – Corresponding Member of NAS, Professor, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences, Yerevan, Republic of Armenia

Address: 0019, Yerevan, ave. Baghramyan, 24/2, **Phone:** (+37493) 00-44-55

E-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com

A.A. Kamalyan – Researcher, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences, Yerevan, Republic of Armenia

Address: 0019, Yerevan, ave. Baghramyan, 24/2, **Phone:** (+37494) 90-96-92

E-mail: kamalyan.andranik@yahoo.com

A.A. Hunanyan – PhD student, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences, Yerevan, Republic of Armenia

Address: 0019, Yerevan, ave. Baghramyan, 24/2, **Phone:** (+37491) 77-55-33

E-mail: hunanyan.areg21@gmail.com

Received 23.12.2016

УДК 539.3

**О ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ
АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ**

Саркисян Н.С., Хачатрян А.М.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропная пластинка, смешанные условия, внутренняя задача, геометрическая нелинейность.

Key words: asymptotic method, anisotropic plate, mixed conditions, interior problem, geometrically nonlinear.

Բանալի բառեր: սսիմպտոտիկ մեթոդ, անիզոտրոպ սալեր, խառը պայմաններ, ներքին խնդիր, երկրաչափորեն ոչ գծային:

Մարգարյան Ն.Ս., Խաչատրյան Ա.Մ.

**Երկշերտ անիզոտրոպ սալի երկչափ հավասարումների մասին
շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի դեպքում**

Սսիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված մասնական աճանցյալներով երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ սալի հաշվարկման համար: Սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների թենզորի համապատասխան բաղադրիչների արժեքները, մյուսի վրա՝ առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերի միջև՝ լրիվ կոնտակտի պայմաններ:

Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M.

On two-dimensional equations two-layer anisotropic plate, with full contact between the layers

Asimptotic method is applied and two dimension differential equations with partial derivatives from geometrically nonlinear equations of three demention problem of elasticity theory for two-layer anisotropic plate are received. In the one surface of plate are given values of tensor of stress and in the other surface- mixed conditions of elasticity theory. Between the layers full contacts conditions are given. Full stress state of plate is formed as sum of main(internal) and boundary stress states.

Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоёв заданы условия полного контакта. Полное напряжённое состояние пластинки образуется из основного (внутреннего) и краевого напряжённых состояний [1].

Введение. Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [2,3]. Впоследствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [3-4]. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена в [5]. Вопрос определения НДС слоистой анизотропной пластинки, когда на её верхней и нижней лицевых плоскостях заданы значения соответствующих компонентов тензора

напряжений, рассмотрена в [8]. Решения задач определения НДС анизотропных слоистых пластин, на одной лицевой стороне которой заданы компоненты вектора перемещения, а на другой – условия первой, второй или смешанной задач теории упругости, изложены в [9]. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной и многослойной анизотропной термоупругой пластинки в линейной постановке приведены в [10,11]. В работе [12] асимптотическим методом построено решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной анизотропной термоупругой пластинки в нелинейной постановке. В работе асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче слоистой пластинки, когда на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости.

1. Постановка задачи и исходные уравнения. Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1\}$, где a – длина, b – ширина, составленную из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины h_k , коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя и $k = 1, 2$. Общая толщина полосы – $2h$. Плоскость отсчёта Oxy совпадает с плоскостью раздела слоёв, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки. Условия на верхней $z = h_1$ и на нижней $z = -h_2$ лицевых плоскостях задаются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^+(x, y), \quad \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^+(x, y), \quad \sigma_z = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_z^+(x, y), \quad z = h_1 \\ w &= \left(\frac{h}{l}\right)^3 w^-(x, y), \quad \sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^-(x, y), \quad \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^-(x, y), \quad z = -h_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

На плоскости раздела $z = 0$ заданы условия полного контакта

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} &= \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} \\ u^{(1)} &= u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1), условиях полного контакта слоёв (1.2) и условиях на боковой поверхности пластинки. Краевые условия на торцах $x = 0, a$ и $y = 0, b$ пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости [3,6,7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{xz} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{yz} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_z \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{xy} + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{xz} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xy} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_y + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{yz} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xz} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{yz} + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_z \right] = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{xy} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{xz} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{yz} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{xz} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_z \right] = 0 \\
& \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z + \\
& \qquad \qquad \qquad + a_{14} \sigma_{yz} + a_{15} \sigma_{xz} + a_{16} \sigma_{xy} \\
& \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{23} \sigma_z + \\
& \qquad \qquad \qquad + a_{24} \sigma_{yz} + a_{25} \sigma_{xz} + a_{26} \sigma_{xy} \\
& \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] = a_{13} \sigma_x + a_{23} \sigma_y + a_{33} \sigma_z + \\
& \qquad \qquad \qquad + a_{34} \sigma_{yz} + a_{35} \sigma_{xz} + a_{36} \sigma_{xy} \\
& \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} = a_{14} \sigma_x + a_{24} \sigma_y + a_{34} \sigma_z + \\
& \qquad \qquad \qquad + a_{44} \sigma_{yz} + a_{45} \sigma_{xz} + a_{46} \sigma_{xy} \\
& \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} = a_{15} \sigma_x + a_{25} \sigma_y + a_{35} \sigma_z + \\
& \qquad \qquad \qquad + a_{36} \sigma_{yz} + a_{46} \sigma_{xz} + a_{56} \sigma_{xy} \\
& \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = a_{16} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{36} \sigma_z + \\
& \qquad \qquad \qquad + a_{46} \sigma_{yz} + a_{56} \sigma_{xz} + a_{66} \sigma_{xy}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.3) перейдём к безразмерным переменным $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\varsigma = z/h$ и безразмерным перемещениям

$U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l – характерный тангенциальный размер пластинки ($h \ll l$).

Выбор асимптотики и вывод двумерных уравнений. Решение внутренней задачи ищется в виде [9-12]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \quad (1.4)$$

где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений, s – номер приближения, k – номер слоя, S – количество приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}$.

$$\begin{aligned} q_k = 3 & \quad \text{для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}, \\ q_k = 4 & \quad \text{для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Эта асимптотика, по сути, не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [9-11]. В нелинейной задаче, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.4) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра [12]. Поэтому, было принято $q = q_0 + 4$, где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости.

Асимптотике (1.4), (1.5) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (1.4) в преобразованные введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, уравнения теории упругости анизотропного тела (1.3), с учётом (1.5), получим систему для определения $Q^{(s)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \sigma_1^{*(k,s)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \sigma_2^{*(k,s)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \sigma_3^{*(k,s)} &= 0 \\ \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi} + U_\xi^{(k,s-3)} + V_\xi^{(k,s-3)} + W_\xi^{(k,s-1)} &= a_{11} \sigma_x^{(k,s)} + a_{12} \sigma_y^{(k,s)} + a_{13} \sigma_z^{(k,s-2)} + \\ &+ a_{14} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{15} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{16} \sigma_{xy}^{(k,s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \eta} + U_{\eta}^{(k,s-3)} + V_{\eta}^{(k,s-3)} + W_{\eta}^{(k,s-1)} = a_{12}\sigma_x^{(k,s)} + a_{22}\sigma_y^{(k,s)} + a_{23}\sigma_z^{(k,s-2)} + \\ + a_{24}\sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{25}\sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(k,s)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} + U_{\zeta}^{(k,s-3)} + V_{\zeta}^{(k,s-3)} + W_{\zeta}^{(k,s-1)} = a_{13}\sigma_x^{(k,s-2)} + a_{23}\sigma_y^{(k,s-2)} \\ + a_{33}\sigma_z^{(k,s-4)} + a_{34}\sigma_{yz}^{(k,s-3)} + a_{35}\sigma_{xz}^{(k,s-3)} + a_{36}\sigma_{xy}^{(k,s-2)} \\ \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \zeta} + U_{\eta\zeta}^{(k,s-4)} + V_{\eta\zeta}^{(k,s-4)} + W_{\eta\zeta}^{(k,s-4)} = a_{14}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24}\sigma_y^{(k,s-1)} + \\ + a_{34}\sigma_z^{(k,s-3)} + a_{44}\sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{54}\sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{64}\sigma_{xy}^{(k,s-1)} \\ \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} + U_{\xi\zeta}^{(k,s-4)} + V_{\xi\zeta}^{(k,s-4)} + W_{\xi\zeta}^{(k,s-4)} = a_{15}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}\sigma_y^{(k,s-1)} + \\ + a_{35}\sigma_z^{(k,s-3)} + a_{45}\sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55}\sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{56}\sigma_{xy}^{(k,s-1)} \\ \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + V_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + W_{\xi\eta}^{(k,s-3)} = a_{16}\sigma_x^{(k,s)} + a_{26}\sigma_y^{(k,s)} + \\ + a_{36}\sigma_z^{(k,s-2)} + a_{46}\sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{56}\sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(k,s)} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1^{*(k,s)} = \sigma_{11}^{(k,s-3)} + \sigma_{12}^{(k,s-2)}, \quad \sigma_2^{*(k,s)} = \sigma_{22}^{(k,s-3)} + \sigma_{21}^{(k,s-2)}, \quad \sigma_3^{*(k,s)} = \sigma_{33}^{(k,s-4)} + \sigma_{13}^{(k,s-2)} \\ \sigma_{11}^{(k,s)} = \sum_{i=0}^s \left[\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \sigma_x^{(k,s-i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial \xi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \sigma_y^{(k,s-i)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi^2} \sigma_x^{(k,s-i)} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \eta^2} \sigma_y^{(k,s-i)} + 2 \frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi \partial \eta} \sigma_{xy}^{(k,s-i)} + 2 \frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \xi \partial \zeta} \sigma_{xz}^{(k,s-i)} + 2 \frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \eta \partial \zeta} \sigma_{yz}^{(k,s-i)} \right] \\ \sigma_{12}^{(k,s)} = \sum_{i=1}^s \left[\frac{\partial^2 U^{(k,i)}}{\partial \zeta^2} \sigma_z^{(k,s-i)} + \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \sigma_z^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \right] \quad (1,2,3; U, V, W; \xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
U_{\xi}^{(k,s)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \xi}, & U_{\xi\eta}^{(k,s)} &= \sum_{i=1}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \eta} \quad (U, V, W) \\
U_{\eta}^{(k,s)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \eta} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \eta}, & U_{\xi\eta}^{(k,s)} &= \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \eta}, \quad (U, V, W) \\
U_{\zeta}^{(k,s)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \zeta}, & U_{\xi\zeta}^{(k,s)} &= \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \zeta} \quad (U, V, W).
\end{aligned}$$

Решив систему (1.6), получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(k,s)} &= \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)}, \quad U^{(k,s)} = u^{(k,s)} + u^{*(k,s)}, \quad (U, V, W), \\
\sigma_x^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{16}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + a_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)}, \\
&\hspace{25em} (x, y; 1, 2; a, b) \\
\sigma_{xy}^{(k,s)} &= B_{16}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)}, \quad (1.8) \\
\sigma_{xz}^{(k,s)} &= - \left[L_{11} \left(B_{ij}^{(k)} \right) u^{(k,s)} + L_{12} \left(B_{ij}^{(k)} \right) v^{(k,s)} \right] \zeta - \left(a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right) + \sigma_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)}, \\
&\hspace{25em} (x, y; 1, 2; a, b)
\end{aligned}$$

где дифференциальные операторы $L_{11} \left(B_{ij}^{(k)} \right)$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
L_{11} \left(B_{ij}^{(k)} \right) &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad (1, 2; \xi, \eta) \\
L_{12} \left(B_{ij}^{(k)} \right) &= B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

а коэффициенты $B_{ij}^{(k)}$, $a_i^{(k)}$, $b_i^{(k)}$, $c_i^{(k)}$ – по известным формулам [3,5,8].

$\sigma_{xz0}^{(k,s)}$, $\sigma_{yz0}^{(k,s)}$, $\sigma_{z0}^{(k,s)}$, $u_0^{(k,s)}$, $v_0^{(k,s)}$, $w_0^{(k,s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1) и (1.2).

Величины со звездочками, входящие в формулы (1.8), как обычно, известны для каждого приближения s , поскольку выражаются через предыдущие приближения. Сюда же входят члены, обусловленные геометрической нелинейностью поставленной задачи. Эти величины определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{*(k,s)} &= -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \sigma_3^{*(k,s)} \right) d\zeta, \\
u^{*(k,s)} &= \int_0^\zeta \left(a_{15} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{45} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{56} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - U_{\xi\xi}^{(k,s-3)} - V_{\xi\xi}^{(k,s-3)} - W_{\xi\xi}^{(k,s-3)} \right) d\zeta \\
v^{*(k,s)} &= \int_0^\zeta \left(a_{14} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{34} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{44} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{45} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{46} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - U_{\eta\xi}^{(k,s-3)} - V_{\eta\xi}^{(k,s-3)} - W_{\eta\xi}^{(k,s-3)} \right) d\zeta \\
w^{*(k,s)} &= \int_0^\zeta \left(a_{13} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{33} \sigma_z^{(k,s-1)} + a_{34} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{35} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{36} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \right. \\
&\quad \left. - U_\zeta^{(s-2)} - V_\zeta^{(s-2)} - W_\zeta^{(s-2)} \right) d\zeta, \\
\sigma_x^{*(k,s)} &= B_{11} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{12} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{16} \omega^{*(k,s)} + a_3 \sigma_z^{*(k,s)} + a_4 \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_5 \sigma_{xz}^{(k,s-1)}, \\
\sigma_y^{*(k,s)} &= B_{12} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{22} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{26} \omega^{*(k,s)} + b_3 \sigma_z^{*(k,s)} + b_4 \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + b_5 \sigma_{xz}^{(k,s-1)}, \\
\sigma_{xy}^{*(k,s)} &= B_{16} \varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{26} \varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{66} \omega^{*(k,s)} + c_3 \sigma_z^{*(k,s)} + c_4 \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + c_5 \sigma_{xz}^{(k,s-1)}, \\
\sigma_{xz}^{*(k,s)} &= -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \sigma_1^{*(k,s)} \right) d\zeta, \quad (1, 2; x, y; \xi, \eta) \tag{1.10}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \xi} + U_\xi^{(k,s-3)} + V_\xi^{(k,s-3)} + W_\xi^{(k,s-3)},$$

$$\varepsilon_2^{*(k,s)} = \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \eta} + U_\eta^{(k,s-3)} + V_\eta^{(k,s-3)} + W_\eta^{(k,s-3)},$$

$$\omega^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + V_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}.$$

Предполагается, что $Q^{(s-k)} \equiv 0$, если $s < k$.

Удовлетворив условиям полного контакта (1.2), получим:

$$w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)}, \quad u^{(1,s)} = u^{(2,s)} = u^{(s)}, \quad v^{(1,s)} = v^{(2,s)} = v^{(s)}$$

$$\sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)}$$
(1.11)

С учётом (1.11), удовлетворив поверхностным условиям (1.1), получим следующую систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(s)}, v^{(s)}$:

$$L_{11}(C_{ij})u^{(s)} + L_{12}(C_{ij})v^{(s)} = p_1^{(s)},$$

$$L_{12}(C_{ij})u^{(s)} + L_{22}(C_{ij})v^{(s)} = p_2^{(s)}.$$
(1.12)

Обобщённые нагрузки $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ определяются по формулам

$$p_1^{(s)} = -\left(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{-(s)}\right) - \left(\sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2)\right),$$

$$p_2^{(s)} = -\left(\sigma_{yz}^{+(s)} - \sigma_{yz}^{-(s)}\right) - \left(\sigma_{yz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \sigma_{yz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2)\right).$$
(1.13)

Неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, w^{(s)}$ определяются по формулам

$$w^{(s)} = w^{-(s)} - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \quad \sigma_{z0}^{(k,s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1),$$

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) + \left(L_{11}(C_{ij})u^{(s)} + L_{12}(C_{ij})v^{(s)}\right)\zeta_1 - \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \quad (x, y; 1, 2),$$

где

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)}, \sigma_{yz}^{\pm(0)}, \sigma_z^{\pm(0)} = \sigma_{xz}^{\pm}, \sigma_{yz}^{\pm}, \sigma_z^{\pm}, \quad w^{-(0)} = w^{-}; \quad w^{-(s)}, \sigma_{xz}^{\pm(s)}, \sigma_{yz}^{\pm(s)}, \sigma_z^{\pm(s)} = 0, \quad s > 0,$$

$$\zeta_1 = h_1/h, \quad \zeta_2 = -h_2/h, \quad h = (h_1 + h_2)/2.$$

Операторы $L_{ij}(C_{ij}^{(k)})$ определяются по формулам

$$L_{11}(C_{ij}^{(k)}) = C_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2C_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (1, 2; x, y; \xi, \eta),$$

$$L_{12}(C_{ij}^{(k)}) = C_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (C_{12}^{(k)} + C_{66}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$
(1.14)

Жёсткости определяются следующим образом:

$$C_{ij}^{(k)} = (-1)^{k+1} \zeta_k B_{ij}^{(k)}, \quad C_{ij} = C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)},$$
(1.15)

Легко убедиться, что при $s = 0$ система уравнений (1.13), как в той же задаче для однослойной пластинки [11,12], совпадает с уравнениями обобщённой плоской задачи, когда имеется плоскость упругой симметрии [2]. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрической нелинейностью уравнений теории упругости. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменчивость.

Система уравнений (1.12) можно свести к решению одного уравнения четвёртого порядка. Для этого применим к обеим частям первого уравнения оператор L_{22} , а ко второму – $(-L_{12})$ и сложим, в результате получим уравнение

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)u^{(s)} = L_{22}p_1^{(s)} - L_{12}p_2^{(s)}. \quad (1.16)$$

Отметим, что мы здесь рассмотрели лишь внутреннюю задачу. Вопрос о пограничном слое и его взаимодействии с решением внутренней задачи можно осуществить указанным в [1,5] способом.

Заключение. В работе найдена асимптотика и из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. Построено решение внутренней задачи и показано, что для точного удовлетворения торцевым условиям необходимо иметь также решение типа пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С. 668-686. Goldenveizer A.L. The construction of the plate bending approximate theory by the method asymptotic integration of the equations of elasticity theory // J. Appl. Math. Mech. 1962. T.26. Issue 4, pp 668-686 (in Russian).
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с. Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates. M.: Gostekhizdat. 1957. 463p. (in Russian).
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. M.:Nauka, 1987. 360p.(in Russian).
4. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. //ПМ. 1972. Т.8. Вып.6. С.3-17. 4. Grigolyuk E.I., Kogan F.A. The present state of the theory of multilayer shells. //PM. 1972. Vol.8. Issue 6, pp. 3-17 (in Russian).
5. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с. Aghalovian L.A. Asimptotic theory of anisotropic plates and shels. M.: Nauka. 1977. 414p. (in Russian).
6. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948. 211с. Novozhilov V.V. The foundations of non-linear theory of elasticity. L.-M. OGIZ, 1948. 211p. (in Russian).
7. Черных К.Ф., Литвененкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988. Chernykh K.F., Litvenenkova Z.N. The theory of large elastic deformations. L.: Publishing. LSU, 1988. (in Russian).
8. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида// Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. №3. С.10-22. Aghalovian L.A., Baghdasaryan Yu.M., Khachatryan A.M. On determination of stress-stran state of sandwich-type plates with general anisotropy. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1996. Vol. 49. Issue 3, pp. 10-22 (in Russian).

9. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. Aghalovian L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-value problems of asymptotic layered beams, plates and shells. Erevan. 2005. 468p. (in Russian).
10. Агаловян Л.А., Товмасыан А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С. 3-11. Aghalovian L.A., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of mixed tree dimetion interior problem for anisotropic thermoelastic plate. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1993. Vol. 59. Issue 3-4, pp. 3-11 (in Russian).
11. Хачатрян А.М., Товмасыан А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной слоистой пластинки. //Труды Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 08-12 октября, 2012, Цахкадзор, Армения. Т.2. С.229-233. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of mixed tree dimetion interior problem for anisotropic plate. //Proceedings of International Conferens «Topical Problems of Continuum Mechanics». Tsaghkadzor, Armenia. October 08-12, 2012. Vol.2 pp. 229-233 (in Russian).
12. Хачатрян А.М., Товмасыан А.Б. Асимптотическое решение трёхмерной внутренней задачи анизотропной термоупругой пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости//. Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С. 42-49. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of tree dimetion interior problem of anisotropic termoelasticity plate on basis of geometrical non-linear theory of elasticity. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2010. Vol. 66. Issue 1, pp. 42-49 (in Russian).

Сведения об авторах:

Хачатрян Александр Мовсесович –д. ф.-м. н., проф. каф. математики АрГУ

Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5.

Тел.: (+37497) 20-19-49, (+37499) 21-19-49. **E-mail:** alexkhach49@yandex.ru

Саргсян Нарине Суреновна – преподаватель каф. математики АрГУ

Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5

Тел.: (+37497) 21-00-78. **E-mail:** narine_sargsyan_2012@mail.ru

Поступила 04.08.2016

УДК 593.3

ELASTIC-SPIN WAVES PROPAGATION IN A PERIODIC
 FERROMAGNETIC LAYERED MEDIUM

Atoyan L.H., **Danoyan Z.N.**

Key words: spin wave, elastic-spin wave, ferromagnetic periodic structure.

Բանալի բառեր՝ սպինային ալիք; առաձգա-սպինային ալիք; ֆերոմագնիսական, պարբերական կառուցվածք:

Ключевые слова: спиновые волны; упруго-спиновые волны; ферромагнитная, периодическая структура.

Աթոյան Լ.Հ., **Դանոյան Զ.Ն.**

Առաձգա-սպինային ալիքների տարածումը պարբերական, ֆերոմագնիսական, շերտավոր կառուցվածքում

Պարբերական ֆերոմագնիս/ուղմագնիս կառուցվածքում հետազոտվում են սպինային և առաձգա-սպինային ալիքների տարածման պարզեցված մոդելներ: Հետազոտվող ալիքները նկարագրելու համար օգտագործվում են մոդելներ, որտեղ հաշվի են առնված փոխանակման փոխազդեցությունը ֆերոմագնիսում, ինչպես նաև մոդելներ հաշվի առնող միջավայրերի առաձգական հատկությունները: Ցույց է տրված, որ առաձգա-սպինային ալիքների հաճախությունների սպեկտրը տրոհվում է ալիքների անցելիության և արգելափակման գոտիների:

Атоян Л.А., **Даноян З.Н.**

Распространение упруго-спиновых волн в периодической, ферромагнитной, слоистой среде

Исследуются упрощённые модели распространения спиновых и упруго-спиновых волн в периодической среде ферромагнетик/немагнетик. Для описания исследуемых волн используются модели, учитывающие обменные эффекты в ферромагнетике, а также модели, берущие в расчёт упругие свойства структуры. Показано, что весь спектр упруго-спиновых волн разбивается на полосы частот пропускания и запираания.

Simplified models describing the spin and elastic-spin wave propagation in periodic ferromagnetic structure, consisting of ferromagnetic and nonmagnetic layers, are investigated. For a description of the elastic-spin waves are used models that take into account the exchange effects in ferromagnetic as well as models, taking into account the elastic properties of the structure. It is shown that the frequency spectrum of elastic-spin waves is divided into transmission and locking bands.

Introduction. More and more attention of researchers attract the problems of spin waves

existence and propagation in artificial periodic constitutive media called metamaterials [1–14]. Years ago such periodic structures were called superlattices. If the structure composed of magnetic layers with different magnetization or magnet/non-magnet layers, then such structures called magnetic metamaterials or magnonic crystals by analogy with photonic crystals. In this paper, some one-dimensional mathematical

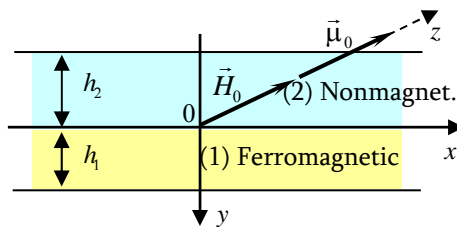


Fig. 1.

models, describing magnetic oscillations, spin and elastic-spin waves in considered structures are analyzed.

1. Problem statement. Suppose that a periodic layered structure is consisting of an infinite series of ferromagnetic and nonmagnetic layers of different thicknesses of h_1, h_2 . The structure assigned to the Cartesian coordinate system as shown in Fig.1. It assumed that the anisotropy axis of easy magnetization of ferromagnetic layers are parallel to each other and coincide with the direction of Oz axis. Suppose that the structure is in an external homogeneous constant magnetic field $\vec{H}_0 = (0, 0, H_0)$ and the vector of the saturation magnetization per unit volume of ferromagnetic layer $\vec{M}_0 = \rho_1 \vec{\mu}_0$ ($\vec{\mu}_0$ is the ferromagnetic saturation magnetization per unit mass, ρ_1 is the mass density of the material of ferromagnetic) is parallel to \vec{H}_0 and both $\vec{M}_0, \vec{\mu}_0$ are directed along the axis of easy magnetization, that is Oz axis. We suppose, that the excitations in the structure does not depend on the Oz coordinate and are characterized in the ferromagnetic layer by the vector of the elastic displacement $\vec{u}_1 = (0, 0, u_1(x, y, t))$, vector $\vec{\mu} = (\mu(x, y, t), \nu(x, y, t), 0)$ of the magnetic moment, magneto static potential $\phi_1(x, y, t)$ and in the nonmagnetic layer by the vector of elastic displacement $\vec{u}_2 = (0, 0, u_2(x, y, t))$ and magneto static potential $\phi_2(x, y, t)$. The excitations of magnetic field intensities in ferromagnetic and nonmagnetic are: $\vec{H}_1 = -\text{grad}\phi_1, \vec{H}_2 = -\text{grad}\phi_2$.

The equation of mechanical motion of the medium, the Landau-Lifshits equation of magnetization moment motion and the quasi-static Maxwell's equations for the magnetic field in the ferromagnetic layer [1, 2, 3, 9] are:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= s_1^2 \Delta u_1 + M_0 f \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \omega_M \left(\rho_1^{-1} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \hat{b} \nu + \bar{b} \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \bar{\lambda} \Delta \nu \right) \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} &= -\omega_M \left(\rho_1^{-1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \hat{b} \mu + \bar{b} \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \bar{\lambda} \Delta \mu \right) \\ \Delta \phi_1 &= \rho_1 \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Here $s_1 = \sqrt{G_1 / \rho_1}$ is the velocity of the elastic wave, G_1 is the shear modulus, $\omega_M = \gamma M_0$, γ is the gyromagnetic constant, f is the coefficient of piezomagnetism, $\hat{b} = b + H_0 / M_0$, $\bar{b} = b + f$, b is the constant of magnetic anisotropy, Δ is the two-dimensional Laplace operator, $\bar{\lambda}$ is the coefficient of the exchange interaction. The exchange interaction should be taken into account when different magnetic layers are in contact, or if the nonmagnetic spacer is very thin ($d_2 \leq 30 \text{ \AA}$). The equation of motion and the magneto-static equation in the nonmagnetic layer are:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = s_2^2 \Delta u_2, \quad \Delta \varphi_2 = 0 \quad (1.2)$$

$s_2 = \sqrt{G_2 / \rho_2}$ is the velocity of the elastic wave, G_2 is the shear modulus, ρ_2 is the density of the nonmagnetic.

Contact and boundary conditions for displacements, stresses and magnetic potentials are:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_2(0); \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0); \\ \sigma_{23}^{(1)}(0) &= \sigma_{23}^{(2)}(0); \quad \frac{\partial \varphi_1(0)}{\partial y} - \rho_1 v(0) = \frac{\partial \varphi_2(0)}{\partial y}; \\ u_1(h_1) &= \lambda u_2(-h_2); \quad \varphi_1(h_1) = \lambda \varphi_2(-h_2); \\ \sigma_{23}^{(1)}(h_1) &= \lambda \sigma_{23}^{(2)}(-h_2); \quad \frac{\partial \varphi_1(h_1)}{\partial y} - \rho_1 v(h_1) = \lambda \frac{\partial \varphi_2(-h_2)}{\partial y}; \\ \sigma_{23}^{(1)} &= \rho_1 s_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \mu_0 \bar{b} \rho_1 v; \quad \sigma_{23}^{(2)} = \rho_2 s_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial y}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

λ – is the Floquet constant. It should be noted, that if exchange interaction is taken into account, then we need to add to relations (1.3) the condition for magnetization density $\bar{\mu}$:

$$\mu(0) = v(0) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \mu(0)}{\partial y} = \frac{\partial v(0)}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

Let us consider the simplified one-dimensional mathematical models with the aim of understanding the nature of elastic-spin waves in periodic structures.

2. Consider the model when the ferromagnetic layer is non-deformable ($u_1 = 0$) and exchange interactions neglected ($\bar{\lambda}=0$). It is obvious that this model can describe only oscillations, not waves. From (1.1) it follows equation for the normal component of the magnetization v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + r^2 v = f(t) \quad (2.1)$$

Here $r = \omega_M \Omega_{SV}$, $\Omega_{SV} = \sqrt{\hat{b}(\hat{b}+1)}$, $f(t)$ is an arbitrary function of time. In order to identify the character of oscillatory process, assume that the right side of (2.1) $f(t) = A \cos \omega t$, A is a constant. The solution of (2.1) is as follows:

$$v = \frac{A}{r^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (2.2)$$

From (2.2) it follows that the frequency $\omega = r$ is the frequency of resonance. Now we can state that the oscillatory process has a resonance character for this case.

3. Accounting of exchange interaction ($\bar{\lambda} \neq 0$) in non-deformable ($u_1 = 0$) ferromagnetic layer. To the problems of propagation of spin waves in non-deformable media are devoted works [3-5, 7, 8] and many others. The equations in ferromagnetic layer are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \omega_M \left(\rho_1^{-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \hat{b} v - \bar{\lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\omega_M \left(\hat{b} \mu - \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} &= \rho_1 \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.1)$$

The solutions we seek in the form:

$$(\mu, v, \varphi_1) = (M, N, \Phi_1) e^{i(qy - \omega t)} \quad (3.2)$$

here M, N, Φ_1 are constants. Substituting (3.2) in the system (3.1) and using the non-zero solutions existence condition, we come to the following dispersion equation:

$$q^2 [\omega^2 - \omega_M^2 (\hat{b} + \bar{\lambda} q^2) (1 + \hat{b} + \bar{\lambda} q^2)] = 0 \quad (3.3)$$

From (3.3) follows that q^2 can have three values:

$$q^2 = \{-\Omega_{DE} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Omega^2}; -\Omega_{DE} - \sqrt{\frac{1}{4} + \Omega^2}; 0\}, \quad (3.4)$$

where $\Omega_{DE} = \hat{b} + \frac{1}{2}$, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_M}$, $\omega_M = \gamma M_0$. Volume homogeneous wave exists only

when q^2 has a positive value. It means that, when the following inequality is true:

$$q^2 = -\Omega_{DE} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Omega^2} > 0$$

then the wave process exists. Thus, we conclude that the model, when it is taken into account the exchange interaction, even for non-deformable ferromagnetic, describes the spin wave process.

4. The ferromagnetic layer is elastic ($u_1 \neq 0$), exchange interaction is neglected

($\lambda = 0$). In addition to these conditions for the model farther simplification, we neglect the magnetic potential also. To the problems of propagation of elastic-spin waves are devoted the works [1, 2, 6, 9, 12]. The equations in ferromagnetic layer are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= s_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + M_0 f \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \omega_M \hat{b} v + \omega_M \bar{b} \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\omega_M \hat{b} \mu$$

The general solutions of (4.1) we seek in the form:

$$(\mu, v, u_1) = (M(y), N(y), U_1(y)) e^{-i\omega t} \quad (4.2)$$

Substituting (4.2) in (4.1) we come to the equations:

$$\begin{aligned} -\omega^2 U_1 &= s_1^2 U_{1,yy} + M_0 f N_y \\ i\omega M &= \omega_M \hat{b} N + \omega_M \bar{b} \mu_0 U_{1,y} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$i\omega N = -\omega_M \hat{b} M$$

Expressing M, N through U_1 from (4.3) we obtain the following equation:

$$U_{1,yy} + q^2 U_1 = 0. \quad (4.4)$$

This is the equation of harmonic oscillations of displacements amplitude in ferromagnetic. Above are used the following notations:

$$q = \frac{\omega}{\sqrt{s_1^2 + \alpha}}, \alpha = \frac{M_0 f \bar{b} \omega_M^2 \mu_0}{\omega^2 - \omega_M^2 \hat{b}^2}$$

The solution of (4.4) is as follows:

$$U_1(y) = C_1 \sin qy + C_2 \cos qy; \quad (4.5)$$

C_1, C_2 are unknown constants. Using (4.5), we find the solutions of the system (4.1):

$$\begin{aligned} u_1(y, t) &= (C_1 \sin qy + C_2 \cos qy) e^{-i\omega t}; \\ v(y, t) &= \bar{\alpha} q (C_1 \cos qy - C_2 \sin qy) e^{-i\omega t}; \\ \mu(y, t) &= -\frac{i\omega \bar{\alpha} q}{\omega_M \hat{b}} (C_1 \cos qy - C_2 \sin qy) e^{-i\omega t}; \end{aligned} \quad (4.6)$$

Here we use following notation: $\bar{\alpha} = \frac{\bar{b} \hat{b} \omega_M^2 \mu_0}{\omega^2 - \omega_M^2 \hat{b}^2}$. In analogous way, we find the

displacements of nonmagnetic layer from (1.2):

$$u_2(y, t) = (C_3 \cos py + C_4 \sin py) e^{i\omega t}, \quad p = \omega / s_2 \quad (4.7)$$

C_3, C_4 are constants. As we can see from (4.6) and (4.7) the solutions of the problem depend on spatial coordinate also, i.e. that there is a wave process in the structure. Thus, despite the fact that we did not take into account neither the exchange interaction, nor the magnetic potential, but owing to elasticity, this model is suitable for describing the elastic-spin wave propagation.

Let us examine them more detailed. Substituting solutions (4.6) and (4.7) in the boundary and contact conditions (1.3) we obtain the system of equations for amplitudes. The solvability condition of this system gives the following dispersion equation:

$$\lambda^2 + D\lambda + 1 = 0 \quad (4.8)$$

where:

$$D = \frac{sd \sin ph_2 - m \sin qh_1 + h \cos ph_2 + g \cos qh_1}{s \sin qh_1 - h \cos qh_1};$$

$$h = \rho_1 q (s_1^2 + \mu_0 \bar{b} \bar{\alpha}) \cos qh_1; d = \frac{\rho_1 q (s_1^2 + \mu_0 \bar{b} \bar{\alpha}) \cos qh_1}{\rho_2 s_2^2 p};$$

$$m = \rho_2 s_2^2 p \sin ph_2; s = -\rho_1 q (s_1^2 + \mu_0 \bar{b} \bar{\alpha}) \sin qh_1; g = \rho_2 s_2^2 p d \cos ph_2;$$

Substituting $\lambda = e^{ika}$ ($a = h_1 + h_2$), k cross-wave number, averaged over the period of the structure, called Bloch's wave number) into (4.8) we obtain typical for periodic structures dispersion equation:

$$\cos ka = \cos qh_1 \cos ph_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right] \sin qh_1 \sin ph_2, \quad (4.9)$$

here $z_1 = \frac{\rho_1(s_1^2 + \mu_0 \bar{b} \bar{\alpha})}{\sqrt{s_1^2 + \alpha}}$, $z_2 = \rho_2 s_2$ are impedances of the layers.

From (4.9) follows that the frequency spectrum of elastic-spin waves divided into bands of wave transmission and stopping. Let us consider some special cases:

a) Impedances of two layers are equal $z_1 = z_2$. The dispersion equation takes the form:

$$ka = \omega \left(\frac{h_1}{\sqrt{s_1^2 + \alpha}} + \frac{h_2}{s_2} \right) \quad (4.10)$$

If the thicknesses of the layers are equal, then the Bloch's wave number is as follows

$$k = \frac{q + p}{2} .$$

b) Let us consider the structure when instead of ferromagnetic layer is nonmagnetic one. In (4.9) we must take $\alpha = \bar{\alpha} = 0$, after that we come to equation:

$$\cos ka = \cos qh_1 \cos ph_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\rho_1 s_1}{\rho_2 s_2} + \frac{\rho_2 s_2}{\rho_1 s_1} \right] \sin qh_1 \sin ph_2 . \quad (4.11)$$

This is the known dispersion equation for layered periodic elastic nonmagnetic structure with two different impedances. To investigate the interaction between elastic and magnetic excitations we return to the system (4.1). The solutions of the system we seek in the following form:

$$(\mu, \nu, u_1) = (M, N, U_1) e^{iqy} e^{i\omega t} \quad (4.12)$$

Substituting (4.12) in (4.1), after some transformations we obtain the relations between the magnetic and elastic waves amplitudes:

$$U_1 = \frac{iM_0 f q}{q^2 s_1^2 - \omega^2} N; \quad M = \frac{\omega \omega_M \bar{b} \mu_0 q}{\omega^2 - \omega_M^2 \hat{b}^2} U_1; \quad \Phi_1 = \frac{iM_0 f q \rho_1 \bar{\alpha}}{q^2 s_1^2 - \omega^2} N. \quad (4.13)$$

As we see from (4.13), the relationship is resonant. The resonance frequency is in the region of ultrasonic and hypersonic waves ($\approx 10^{10} \frac{1}{\text{sec}}$). This phenomenon known as magneto-

acoustic resonance, which used in practice to construct ultra-acoustic or hyper-acoustic generators and other devices.

c) Let us consider the case when the thickness of ferromagnetic layer $h_1 \rightarrow 0$. Dispersion equation takes the form:

$$\cos ka = \cos ph_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\rho_1 (s_1^2 + \mu_0 \bar{b} \bar{\alpha})}{\rho_2 s_2 \sqrt{s_1^2 + \alpha}} + \frac{\rho_2 s_2 \sqrt{s_1^2 + \alpha}}{\rho_1 (s_1^2 + \mu_0 \bar{b} \bar{\alpha})} \right] qh_1 \sin ph_2 .$$

We would like to make a remark, which may be of practical value. After solving the problem (4.1) and finding functions μ, ν , we can calculate magnetic potential Φ_1 , satisfying the boundary conditions, from the equation:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \rho_1 \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Here are the results of some numerical experiments:

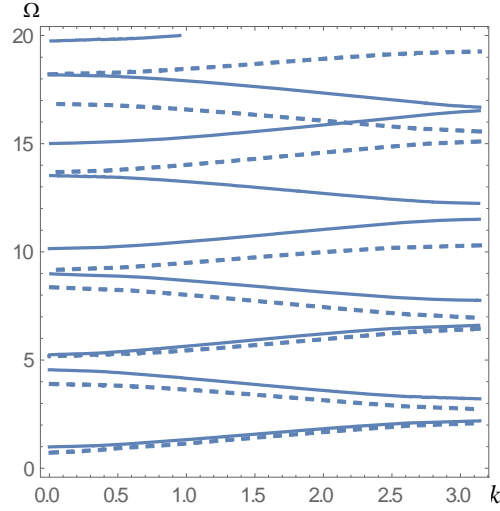


Fig.2. Dispersion curves for elastic-spin waves in the structure ferromagnetic/nonmagnetic. Frequency spectrum divided into wave pass-bands and stop-bands (gaps). The solid curve corresponds to the particular case when $h_1 < h_2$, the dashed one corresponds to the case when $h_1 > h_2$, $\Omega = \omega / \omega_M$.

From the Fig. 2 we can conclude that by changing the ratio of the layer thicknesses it is possible to ensure the desired frequency appeared in either the pass-band or the stop-band of the wave's frequency spectrum. It may find application in the construction of magnetic filters and other devices of spintronics.

5. Concluding remarks. The investigation of the simplified one-dimensional models, describing the propagation of elastic-spin waves perpendicular to the surfaces in magnetically ordered periodic media bring us to conclusion, that to describe the mentioned waves we must take into account exchange effects, or elasticity of media. If we neglect both of them, the considered model can describe only the oscillatory process. The frequency spectrum of elastic-spin waves in magnetic periodic structure divided into frequency bands of wave transmission and stopping. It finds application in practice.

We emphasize an important property of magnonic crystals, by changing the external magnetic field we can change the properties of crystals, this means that we can control the wave process. Photonic crystals do not possess this property.

In conclusion, we would like to express our gratitude to Professor Belubekyan M.V. for useful discussions.

REFERENCES

1. Akhiezer, A.I., Bar'yakhtar, V.G., Peletminskii, S.V. 1968, Spin waves, North Holland, Amsterdam, p.368.
2. Maugin, G.A., 1988. Continuum Mechanics of electromagnetic Solids. North Holland, Amsterdam, p.560.
3. Gourevich, A.G., Magnetic resonance in ferrites and ferroics. Moscow, Nauka, 1973 (in Russian), p.591.
4. Bagdasaryan G.E. Existence and propagation character of spatial spin surface waves in ferromagnets. Proceed. NAS of Armenia, Physics. v.44, 6, p.405-416 (2009).
5. Nikitov, S.A., Tailhades, Ph., Tsai, C.S. Spin waves in periodic magnetic structures-magnonic crystals. J.Magnet.Mater, v.23, 3, 2001, p.p.320-331.
6. Hasanyan D.J., Batra R.C. Antiplane shear waves in two contacting ferromagnetic half spaces. J. Elast. (2011), 103: p. 189-203.
7. Kruglyak, V.V., Kuchko, A.N. Spectrum of spin waves propagating in a periodic magnetic structure, Physica B339, 2003, pp. 130-133.
8. Danoyan, Z.N., Ghazaryan, K.B., Atoyan, L.H. Bloch-Floquet spin waves in periodic ferromagnetic/dielectric Layered structure. Proc. of National Academy of Sciences of Armenia "Mechanics", v.66, 4, 2013, pp. 29-37.
9. Danoyan Z.N., Piliposian G. T., Hasanyan D.J. Reflection of spin and spin-elastic waves of the interface of a ferromagnetic half-space. Waves in Random and Complex Media, v. 19-4, Nov. 2009, 567-584.
10. Duerr, G., Tachi, S., Gubiotti, G. Field-controlled rotation of spin wave nano-channels in bicomponent magnonic crystals//J. Phys.D: Appl. Phys., 2014, v.47, p. 325001.
11. Landeros, P., Mills, D. Spin waves in periodically perturbed films, // Phys. Rev. B85, 054424, 2012.
12. Levchenko, V.V. Propagation of magneto-elastic shear waves through a regularly laminated media with Metalized interfaces.//Int. Appl. Mech. 40 (1), 97-102 (2004).
13. Tachi, S., Duerr, G. Forbidden Band Gaps in the Spin wave Spectrum, Phys. Rev. Lett., 109, 137202, 2012.
14. Sahakyan S.L. Propagation of spin waves in periodic medium. Proc. of National Academy of Sciences of Armenia «Mechanics», 2001. Vol.54. №3, pp.47-53.

Information about author:

Levon Atoyan, Ph.D. Senior Research Scientist, Institute of Mechanics of NAS (Armenia).
E-mail: levous@mail.ru.

Received 09.08.2016

УДК 539.3

**LOAD TRANSFER FROM TWO PARALLEL ELASTIC INFINITE AND
FINITE STRINGERS TO ELASTIC HOMOGENEOUS INFINITE PLATE**

Hovhannisyan H.V., Sargsyan K.S., Sukiasyan J.S.

Ключевые слова: пластина, контакт, стрингер, сингулярное интегральное уравнение, функциональное уравнение, преобразование Фурье, многочлены Чебышева

Keywords: plate, contact, stringer, singular integral equation, functional equation, Fourier transform, Chebishev polynoms

Բանալի բառեր: սալ, կոնտակտ, վերադիր, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում, ֆունկցիոնալ հավասարում, Ֆուրիեյի ձևափոխություն, Չեբիշևի բազմանդամներ

Հովհաննիսյան Հ.Վ., Սարգսյան Կ.Ս., Սուկիասյան Ջ.Ս.

**Բեռի փոխանցումը անվերջ և վերջավոր երկու զուգահեռ առաձգական
վերադիրներից համասեռ առաձգական անվերջ սալին**

Աշխատանքում դիտարկված է բեռի փոխանցման կոնտակտային խնդիր՝ անվերջ և վերջավոր երկու զուգահեռ առաձգական վերադիրներից իզոտրոպ համասեռ առաձգական անվերջ սալին: Ենթադրվում է, որ հորիզոնական առանցքի նկատմամբ անհամաչափ դասավորված վերադիրները կոշտ ամրացված (սունձված) են առաձգական սալին և ունեն տարբեր առաձգական հատկություններ: Սալ-վերադիր կոնտակտային զույգը դեֆորմացվում է առաձգական վերադիրների վրա կիրառված կենտրոնացված ուժերի ու անվերջում առաձգական սալի վրա գործող հաստատուն ինտենսիվությամբ հավասարաչափ բաշխված հորիզոնական ձգող լարումների ազդեցության շնորհիվ: Խնդրի լուծումը մաթեմատիկորեն ձևակերպված է առաջին սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի տեսքով՝ որոշակի պայմանների առկայության դեպքում: Ֆուրիեյի ինտեգրալ ձևափոխության և Չեբիշևի բազմանդամների հայտնի մաթեմատիկական ապարատի օգնությամբ այդ համակարգի լուծումը բերված է քվադրիլոպին ռեգուլյար անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծմանը: Որոշված են կոնտակտային շոշափող ուժերի բաշխման ինտենսիվությունները վերադիրների տակ: Անվերջ վերադիրի համար ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են լարումների վարքն ինչպես ուժի կիրառման կեսի շրջակայքում, այնպես էլ՝ դրանից հեռու կետերում:

Оганисян Г.В., Саркисян К.С., Сукиасян Дж.С.

**Передача нагрузки от двух параллельных упругих бесконечного и конечного стрингеров к упругой
однородной бесконечной пластине**

В работе рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от двух параллельных упругих бесконечного и конечного стрингеров к изотропной однородной упругой бесконечной пластине. Предполагается, что несимметрично относительно горизонтальной оси расположенные упругие стрингеры, жёстко сцеплены (приклеены) к упругой пластине и имеют разные упругие свойства. Контактующая пара (пластина-стрингер) деформируется под воздействием сонаправленных и осевых сосредоточенных сил, приложенных к стрингерам, а также равномерно распределённых горизонтальных растягивающих напряжений постоянной интенсивности, действующих на пластину в бесконечности. Решение контактной задачи математически сформулирована в виде системы сингулярных интегральных уравнений первого рода при определённых условиях, с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей. При помощи

известного математического аппарата преобразования Фурье и многочленов Чебышева, решение этой системы сводится к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Определены интенсивности распределения тангенциальных контактных усилий под стрингерами. Для бесконечного стрингера получены асимптотические формулы, описывающие поведение напряжений как вблизи, так и вдали от точки приложения силы.

In the present paper a contact problem on load transfer from infinite and finite two parallel elastic stringers to isotropic homogeneous elastic infinite plate is considered. It is assumed, that the elastic stringers are placed non-symmetrically with respect to the horizontal axis, are attached to the plate rigidly and have different elastic characteristics and cross-sectional areas. The bodies in contact (plate-stringers) are deformed under influence of axial concentrated forces, applied on the stringers, as well as uniformly distributed horizontal tensions of constant intensity, acting at the infinity of the plate. Solution of the problem is mathematically formulated as a system of constrained singular integral equations of the first kind with moving singularity with kernels consisted of singular and regular parts. The solution of that system is reduced to solution of quasi completely regular infinite system of linear algebraic equations using the known mathematical techniques of Fourier transform and Chebyshev polynomials. Intensities of tangential contact stresses distributions are determined. Asymptotic formulas for infinite stringer describing the behavior of stresses near and far from force application point are obtained.

Introduction

Investigation of problems of interaction between massive deformable bodies containing stress concentrators such as cracks, thin-walled inclusions and stringers with homogeneous or composite (piecewise - homogeneous) massive deformable bodies is one of the priority directions of the contact and mixed problems of elasticity theory.

Since such problems often arise in mechanics of composites, rock mechanics, measurement technology, problems of load transfer from thin-walled elements to massive deformable bodies, and in other fields of applied mechanics, therefore their study is one of the modern problems in both theoretical and applied aspects. Taking into account the interaction between different types of stress concentrators often leads to new statements of contact and mixed problems, qualitatively changes the character of the stress concentrations, significantly affects stress intensity factors.

The problems of interaction between thin-walled elements in the form of stringers, i.e. rods without bending stiffness, and more massive bodies, are under consideration by many authors.

§1. Problem statement and system of resolving equations derivation

Let an elastic continuum isotropic sheet representing infinite thin plate of constant thickness h is strengthened by two parallel infinite and finite stringers with different elastic properties and sufficiently small rectangular cross section attached to the $y = a$ and $y = -c$ ($a; c > 0$) lines of its upper surface. It is assumed that the stringers are attached to the plate rigidly.

The aim of the paper is to determine the intensity of tangential stresses distribution along contact lines, and normal (axial) stresses arising in elastic stringers, and by that determine the contraction of the contacting bodies (plate-stringers) subjected to concentrated forces $P\delta(x)\delta(y-a)$ and $Q\delta(x-d)\delta(y+c)$ ($d > 0$), applied to elastic stringers, as well as uniformly distributed tensile horizontal stresses of intensity σ_0 , acting on the infinite plate at infinity.

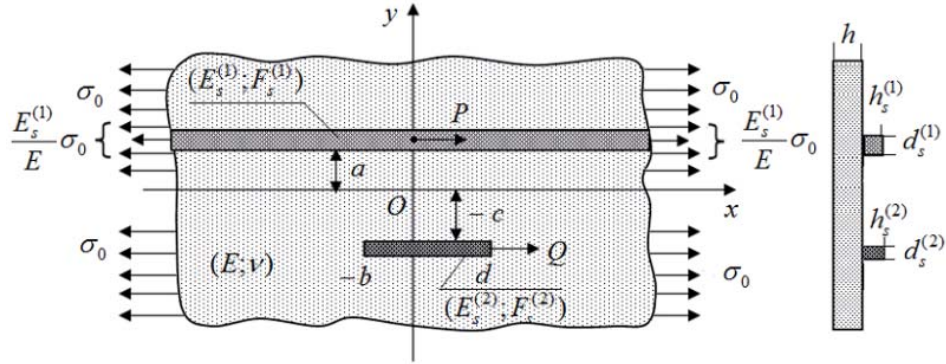


Fig. 1. Diagram of the deforming contact bodies

In the contact problem under consideration, the combined model of uniaxial stress state and contact along a line are accepted with respect to the stringers [1– 9], i.e. it is assumed that the distribution of contact tangential stresses intensity are concentrated along the middle lines of the contact areas. Moreover, it is assumed that the stringers do not resist to bending, i.e. do not have bending stiffness. With respect to the plate the model generalized plane stress state is assumed to be true, due to which the plate is deformed as a plane (see Fig. 1).

Proceeding to derivation of resolving equations for the contact problem let us note, that the elastic stringers are stretched or compressed in horizontal direction being in uniaxial stress state, then according to the aforesaid, the differential equations of equilibrium can be written as follows:

$$\frac{du_s^{(1)}(x; a)}{dx} = -\frac{1}{2E_s^{(1)}F_s^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(s-x)\tau^{(1)}(s) ds - \frac{P\delta(x)}{2E_s^{(1)}F_s^{(1)}} + \frac{\sigma_0}{E} \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.1)$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x; -c)}{dx} = -\frac{1}{2E_s^{(2)}F_s^{(2)}} \int_{-b}^d \text{sgn}(u-x)\tau^{(2)}(u) du + \frac{Q}{2E_s^{(2)}F_s^{(2)}} \quad (-b < x < d), \quad (1.2)$$

under the following conditions:

$$\left. \frac{du_s^{(1)}(x; a)}{dx} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = \frac{\sigma_0}{E_s^{(1)}}, \quad \left. \frac{du_s^{(2)}(x; -c)}{dx} \right|_{x=-b+0} = 0; \quad \left. \frac{du_s^{(2)}(x; -c)}{dx} \right|_{x=d-0} = \frac{Q}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}}, \quad (1.3)$$

as well as the equilibrium conditions of the stringers:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{(1)}(s) ds = P; \quad \int_{-b}^d \tau^{(2)}(u) du = Q. \quad (1.4)$$

In formulas (1.1) – (1.4), $u_s^{(1)}(x; a)$ and $u_s^{(2)}(x; -c)$ are the horizontal displacements of the stringers at $y = a$ and $y = -c$; lines, $\tau^{(1)}(x) = d_s^{(1)}\tau^{(1)}(x; a)$, $\tau^{(1)}(x; a)$ is the intensity of unknown contact tangential stresses, arising under the elastic infinite stringer at $y = a$ line, $\tau^{(2)}(x) = d_s^{(2)}\tau^{(2)}(x; -c)$, $\tau^{(2)}(x; -c)$ is the intensity of unknown

contact tangential stresses, arising under the elastic infinite stringer at $y = -c$ line, $E_s^{(k)}$ ($k = 1, 2$) are the elastic moduli, $F_s^{(k)} = d_s^{(k)} h_s^{(k)}$ are the areas of cross sections, $h_s^{(k)}$ and $d_s^{(k)}$ are the height and width of the stringers, respectively. P and Q are the intensities of axial concentrated forces applied to the stringers at $(0; a)$ and $(d; -c)$ points, respectively, E is the elastic modulus of the infinite plate.

From the other hand, for horizontal strain of the plate subjected to contact tangential stresses $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$) and $\tau^{(2)}(x)$ ($-b \leq x \leq d$), at $y = a$ and $y = -c$, and to uniformly distributed horizontal tensile stresses of constant intensity σ_0 , acting at the infinity of the plate, respectively, is given by

$$hl \frac{du^{(1)}(x; a)}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^{(1)}(s)}{s-x} ds + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^d K(u-x) \tau^{(2)}(u) du + \frac{hl}{E} \sigma_0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.5)$$

$$hl \frac{du^{(2)}(x; -c)}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \frac{\tau^{(2)}(u)}{u-x} du + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(s-x) \tau^{(1)}(s) ds + \frac{hl}{E} \sigma_0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.6)$$

$$K(t) = \frac{t}{t^2 + (a+c)^2} - \frac{2A(a+c)^2 t}{[t^2 + (a+c)^2]^2}; \quad l = \frac{4E}{(3-\nu)(1+\nu)}; \quad A = \frac{1+\nu}{3-\nu}, \quad (1.7)$$

$u^{(1)}(x; a)$ and $u^{(2)}(x; -c)$ are the horizontal displacements of the infinite plate at $y = a$ and $y = -c$; lines, respectively, ν is the Poisson ratio of the plate.

The contact conditions take the formulas

$$\frac{du_s^{(1)}(x; a)}{dx} = \frac{du^{(1)}(x; a)}{dx} \quad (-\infty < x < \infty), \quad \frac{du_s^{(2)}(x; -c)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x; -c)}{dx} \quad (1.8)$$

With respect to the distributions of contact tangential stresses $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$) and $\tau^{(2)}(x)$ ($-b \leq x \leq d$), we derive the following system of singular integral equations of the first kind:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{s-x} + \frac{\lambda}{2} \pi \operatorname{sgn}(s-x) \right] \tau^{(1)}(s) ds - \frac{1}{\pi} \int_{-b}^d K(u-x) \tau^{(2)}(u) du = -\frac{\lambda}{2} P \operatorname{sgn} x, \quad (1.9)$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \left[\frac{1}{u-x} + \frac{\lambda_1}{2} \pi \operatorname{sgn}(u-x) \right] \tau^{(2)}(u) du - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(s-x) \tau^{(1)}(s) ds = \frac{\lambda_1}{2} Q - \frac{hl}{E} \sigma_0,$$

$$(-b < x < d), \quad (1.10)$$

where $\lambda = \frac{hl}{E_s^{(1)} F_s^{(1)}}$; $\lambda_1 = \frac{hl}{E_s^{(2)} F_s^{(2)}}$.

Thus, under assumptions made, the solution of the problem is reduced to system of singular integral equations of the first kind with moving singularity (1.9) and (1.10) under integral constraints (1.4).

2. In order to solve the resolving system constrained by (1.4), we apply Fourier transform. Then, using the convolution formula we obtain the following functional equation with respect to Fourier transform of unknown function $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$):

$$[\lambda + |\sigma|] \bar{\tau}^{(1)}(\sigma) = \lambda P + H(|\sigma|) \varphi(\sigma) \quad (-\infty < \sigma < \infty). \quad (2.1)$$

$$\bar{\tau}^{(1)}(\sigma) = F[\tau^{(1)}(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{(1)}(s) e^{i\sigma s} ds; \quad \varphi(\sigma) = \int_{-b}^d \tau^{(2)}(u) e^{i\sigma u} du, \quad (2.2)$$

$$H(|\sigma|) = [A(a+c)\sigma^2 - |\sigma|] e^{-(a+c)|\sigma|}.$$

Let us note, that the solution of (2.1) must satisfy (1.4), which will be transformed to $\bar{\tau}^{(1)}(0) = P$ and $\varphi(0) = Q$. Solving (2.1) with respect to $\bar{\tau}^{(1)}(\sigma)$ we will arrive at

$$\bar{\tau}^{(1)}(\sigma) = \frac{\lambda P}{\lambda + |\sigma|} + \frac{\varphi(\sigma)}{\lambda + |\sigma|} H(|\sigma|) \quad (-\infty < \sigma < \infty). \quad (2.3)$$

It is important to determine also the Fourier transform of normal (axial) stresses $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ ($-\infty < x < \infty$), which arise in infinite stringer:

$$\bar{\sigma}_x^{(1)}(\sigma; a) = -\frac{P}{F_s^{(1)}} \frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda + |\sigma|} + \frac{\varphi(\sigma)}{F_s^{(1)}} \frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda + |\sigma|} H_0(|\sigma|) + \frac{E_s^{(1)}}{E} 2\pi \sigma_0 \delta(\sigma), \quad (2.4)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty),$$

in which

$$H_0(|\sigma|) = [A(a+c)|\sigma| - 1] e^{-(a+c)|\sigma|}; \quad \bar{\sigma}_x^{(1)}(\sigma; a) = F[\sigma_x^{(1)}(x; a)]. \quad (2.5)$$

(2.1) and (2.4) are derived taking into account the following relations [3, 10–13]:

$$F\left[\frac{t}{t^2 + y^2}\right] = \frac{i\pi \operatorname{sgn} \sigma}{e^{|\sigma y|}}; \quad F\left[\frac{t}{(t^2 + y^2)^2}\right] = \frac{i\pi \sigma}{2|y| e^{|\sigma y|}}, \quad (2.6)$$

$$F[\operatorname{sgn} t] = \frac{2i}{\sigma}; \quad F[1] = 2\pi \delta(\sigma) \quad (-\infty < \sigma; y; t < \infty),$$

If we apply Fourier inverse transform to (2.3) and (2.4), between unknown functions $\tau^{(1)}(x)$, $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ ($-\infty < x < \infty$) and $\tau^{(2)}(x)$ $\tau^{(2)}(x)$ we will derive the following functional relation:

$$\tau^{(1)}(x) = \frac{\lambda}{\pi} P H_c(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^d H_{oc}(u-x) \tau^{(2)}(u) du$$

$$(-\infty < x < \infty), \quad (2.7)$$

$$\sigma_x^{(1)}(x; a) = -\frac{P}{\pi F_s^{(1)}} H_s(x) - \frac{1}{\pi F_s^{(1)}} \int_{-b}^d H_{os}(u-x) \tau^{(2)}(u) du + \frac{E_s^{(1)}}{E} \sigma_0$$

$$(-\infty < x < \infty), \quad (2.8)$$

providing the qualitative and quantitative picture of the interaction of the stringers. Here the following notations are introduced:

$$\begin{bmatrix} H_c(x) \\ H_s(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \cos(\sigma x) \\ \sin(\sigma x) \end{bmatrix} \frac{d\sigma}{\lambda + \sigma}; \quad \begin{bmatrix} H_{oc}(x) \\ H_{os}(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} H(\sigma) \cos(\sigma x) \\ H_o(\sigma) \sin(\sigma x) \end{bmatrix} \frac{d\sigma}{\lambda + \sigma}. \quad (2.9)$$

Thus, the distribution of contact tangential stresses of intensity $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$) and normal (axial) stresses $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ ($-\infty < x < \infty$), arising in the infinite stringer, consequently are expressed in terms of intensity $\tau^{(2)}(x)$ ($-b \leq x \leq d$) of contact tangential intensity in the elastic finite stringer by formulas (2.7) and (2.8).

3. For derivation of the distribution of contact tangential stresses $\tau^{(2)}(x)$ ($-b \leq x \leq d$) let us substitute the expression of $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$) given by (2.7) into (1.10). Then, we will arrive at the following singular integral equation of the first kind:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \left[\frac{1}{u-x} + \frac{\lambda_1}{2} \pi \operatorname{sgn}(u-x) + M(u; x) \right] \tau^{(2)}(u) du = \frac{\lambda_1}{2} Q - \frac{hl}{E} \sigma_0 - \frac{\lambda}{\pi} P N(x), \quad (3.1)$$

$$(-b < x < d),$$

Here the following notations are introduced:

$$M(u; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty K(s-x) H_{oc}(u-s) ds; \quad N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty K(s-x) H_c(s) ds. \quad (3.2)$$

Note, that the solution of (3.1) must satisfy the first constraint in (1.4).

Taking into account that near the contact line end-points the intensities of the contact tangential stresses have singularity of the square root power of integrable order, let us represent the solution of (3.1) under (1.4(b)) in the form of expansion into series with respect to Chebyshev polynomials of the first kind

$$\tau^{(2)}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-g^2(u)}} \sum_{n=0}^\infty X_n T_n[g(u)]; \quad g(u) = \frac{2u+b-d}{b+d}; \quad |g(u)| < 1, \quad (3.3)$$

where $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ($|x| \leq 1; n = \overline{0; \infty}$) – are the Chebyshev polynomials of the first kind, and the unknown coefficients X_n ($n = \overline{0; \infty}$) must be determined.

Substituting expansion (3.3) of the function $\tau^{(2)}(u)$ into (3.1), and using the following spectral relations [6–8]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \frac{1}{u-x} \frac{T_n[g(u)]}{\sqrt{1-g^2(u)}} du = \begin{cases} 0; & n = 0, \\ U_{n-1}[g(x)]; & (n = \overline{1; \infty}), \end{cases} \quad (-b < x < d),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \sqrt{1-g^2(u)} U_{n-1}[g(u)] U_{m-1}[g(u)] du = \begin{cases} 0; & n \neq m, \\ \frac{b+d}{4}; & n = m, \end{cases} \quad (n; m = \overline{1; \infty}),$$
(3.4)

where $U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}$ ($|x| \leq 1; n = \overline{0; \infty}$) – are the Chebyshev polynomials of the second kind, for derivation of the coefficients X_n ($n = \overline{1; \infty}$) following the traditional method [6–8], we will obtain the following quasi-completely regular infinite system of linear algebraic equations:

$$X_m + \sum_{n=1}^{\infty} H_{nm} X_n = \alpha_m \quad (m = \overline{1; \infty}).$$
(3.5)

The kernels and the free term of (3.5) are defined as follows:

$$H_{nm} = H_{nm}^{(1)} + H_{nm}^{(2)}; \quad \alpha_m = \alpha_m^{(1)} + \alpha_m^{(2)} - X_0 H_{0m},$$

$$\alpha_m^{(1)} = \begin{cases} 0; & m \neq 1, \\ \frac{\lambda_1}{2} Q - \frac{hl}{E} \sigma_0; & m = 1, \end{cases} \quad \alpha_m^{(2)} = -\frac{4\lambda P}{\pi^2 (b+d)} \int_{-b}^d \sqrt{1-g^2(x)} U_{m-1}[g(x)] N(x) dx,$$

$$H_{nm}^{(1)} = -\frac{\lambda_1 (b+d)}{\pi} \begin{cases} 0; & |m-n| = 1, \\ \frac{2m [1 + (-1)^{m+n}]}{[(m+n)^2 - 1][(m-n)^2 - 1]}; & |m-n| \neq 1, \end{cases}$$
(3.6)

$$H_{nm}^{(2)} = \frac{4}{\pi^2 (b+d)} \int_{-b}^d \int_{-b}^d \frac{\sqrt{1-g^2(x)}}{\sqrt{1-g^2(u)}} T_n[g(u)] U_{m-1}[g(x)] M(u; x) du dx$$

$$(n; m = \overline{1; \infty}).$$

Let us note, that it is characteristic to system (3.5), that the coefficient X_0 is not explicitly involved in its left hand side, therefore the rest coefficients X_n ($n = \overline{1; \infty}$) will be

linearly dependent on X_0 . At that, the unknown X_0 is determined from equilibrium condition (1.4(b)) as follows:

$$X_0 = \frac{2Q}{\pi(b+d)}. \quad (3.7)$$

The normal (axial) stresses arising in the finite stringer are evaluated according to the following formula:

$$\sigma_x^{(2)}(x; -c) = \frac{Q}{\pi F_s^{(2)}} \left[\pi - \arccos g(x) \right] - \frac{b+d}{2F_s^{(2)}} \sqrt{1-g^2(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X_n U_{n-1} [g(x)], \quad (3.8)$$

$$(-b \leq x \leq d).$$

Note, that after evaluation of (3.3), the normal (axial) stresses arising in infinite stringer are given by (2.8).

4. We investigate the behavior of intensity of the contact tangential stresses $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$) and normal stresses $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ ($-\infty < x < \infty$) – arising in the infinite stringer, which characterize their behavior near and far from the concentrated force P . acting point. Let us first derive asymptotic formulas for functions $\tau^{(1)}(x)$ and $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ as $|x| \rightarrow 0$. Since as $|\sigma| \rightarrow \infty$ the following asymptotic representations take place [10]:

$$\frac{\lambda}{\lambda + |\sigma|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\sigma}{\lambda} \right) \right)^{-2n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^{-2n-2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda + |\sigma|} = \frac{i}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^{-2n-1} - \frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^{-2n-2}. \quad (4.2)$$

Then, after application of Fourier inverse integral transform, taking into account the properties of Fourier integrals, for $\tau^{(1)}(x)$ and $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ we will derive the following asymptotic formulas as $|x| \rightarrow 0$:

$$\tau^{(1)}(x) = \frac{\lambda P}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\pi |\lambda x|^{2n+1}}{2(2n+1)!} + \frac{(\lambda x)^{2n}}{(2n)!} \left(\psi(2n+1) + \ln \frac{1}{|\lambda x|} \right) \right], \quad (4.3)$$

$$\sigma_x^{(1)}(x; a) = \frac{P}{\pi F_s^{(1)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[-\frac{\pi (\lambda x)^{2n}}{2(2n)!} \operatorname{sgn}(\lambda x) + \frac{(\lambda x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\psi(2n+2) + \ln \frac{1}{|\lambda x|} \right) \right]. \quad (4.4)$$

From representations (4.3) and (4.4) it follows that the function $\tau^{(1)}(x)$ has logarithmic singularity as $|x| \rightarrow 0$, and the function $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ has finite discontinuity as $|x| \rightarrow 0$. Both phenomena are due to the concentrated force with intensity P .

Let us now reveal the behavior of the functions $\tau^{(1)}(x)$ and $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ as $|x| \rightarrow \infty$.

Taking into account that as $|\sigma| \rightarrow 0$ the following asymptotic representations take place [10]:

$$\frac{\lambda}{\lambda+|\sigma|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left|\frac{\sigma}{\lambda}\right|\right)^{2n+1}, \quad (4.5)$$

$$\frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda+|\sigma|} = \frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^{2n} - \frac{i}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^{2n+1}, \quad (4.6)$$

After application of Fourier generalized inverse transform, taking into account the properties of the Fourier integrals, for the functions $\tau^{(1)}(x)$ and $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ we will derive the following asymptotic expansions as $|x| \rightarrow \infty$:

$$\tau^{(1)}(x) = \frac{\lambda P}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{(\lambda x)^{2n+2}}, \quad (4.7)$$

$$\sigma_x^{(1)}(x; a) = -\frac{P}{\pi F_s^{(1)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(\lambda x)^{2n+1}} + \frac{E_s^{(1)}}{E} \sigma_0. \quad (4.8)$$

It is evident from (4.7) and (4.8), that as $|x| \rightarrow \infty$ $\tau^{(1)}(x) = O(x^{-2})$;

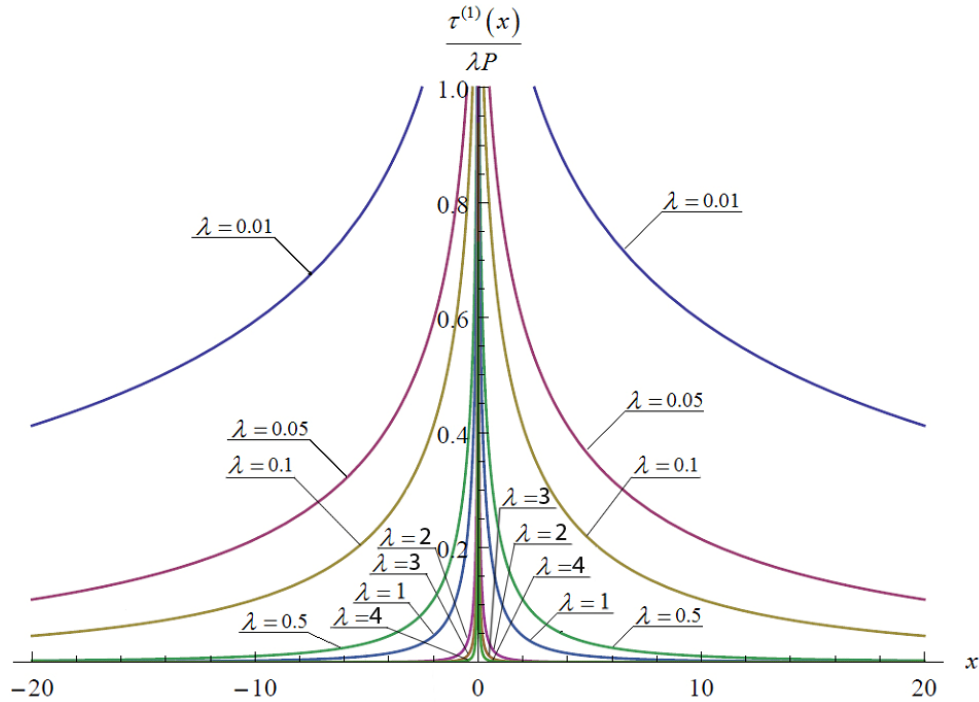


Fig.2. Contact tangential stresses under the infinite elastic stringer

Numerical analysis is performed and main characteristics of the contact problem are investigated. In Figures 2 and 3, the contact tangential stresses and the normal stresses arising in infinite stringer are captured in its finite part, symmetric with respect to the concentrated force application point. It can be seen, that the increase of parameter λ in the range $\lambda = 0.01, \lambda = 0.05, \lambda = 0.1, \lambda = 0.5, \lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3, \lambda = 4$ which is inversely proportional to the stringer elastic modulus, leads to decrease of both stresses.

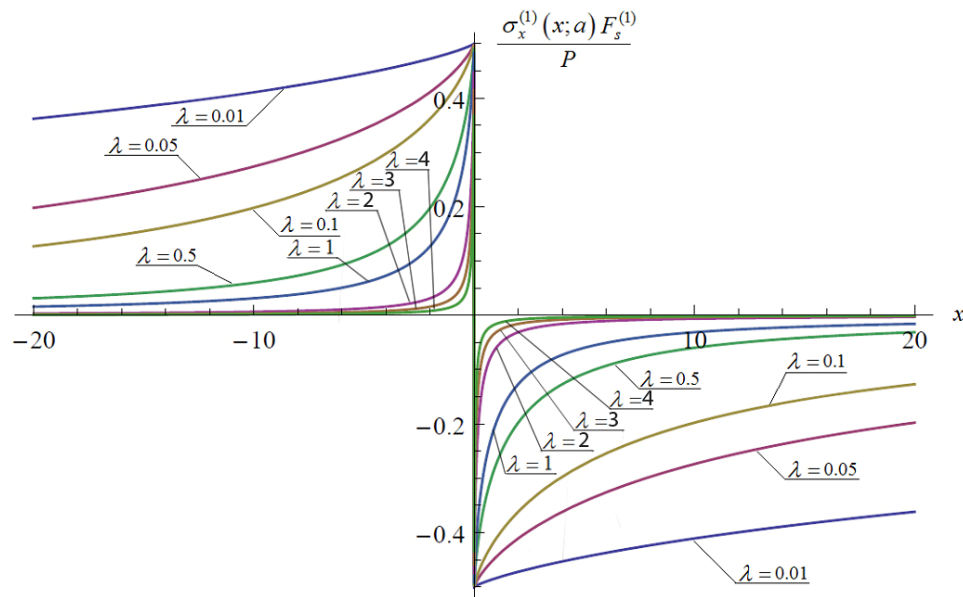


Fig. 3. Normal stresses arising in the infinite elastic stringer

Conclusion

Using Fourier generalized integral transform the closed form solution of the problem is derived in terms of expansion into infinite series with respect to Chebyshev orthogonal polynomials. The implementation of the solution requires solution of infinite system of linear algebraic equations, the quasi-completely regularity of which is established. Consideration of particular cases showed the consistency of the solution with solutions of corresponding problems evaluated earlier.

Numerical analysis revealed the main characteristics of the stress state of the contacting bodies: the contact tangential stresses between the plate and the infinite stringer, as well as the normal stresses arising in the infinite stringer. Under fixed geometrical configuration of the infinite stringer, it was established, that with decrease of its elastic modulus leads to decrease of both tangential and normal stresses.

REFERENCES

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen // Ingenieur – Archiv, 1932, vol. 3, issue 2, pp. 123-129.
2. Arutiunian N. Kh. Contact problem for a half-plane with elastic reinforcement // Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM), 1968, vol.32, issue 4, pp. 652-665.
3. Grigoryan E.Kh., Aghayan K.L. Semi-infinite plate strengthened by semi-infinite stringer parallel to the plate boundary (in Russian) // Selected Problems of Theories of Elasticity, Plasticity and Creep. Yerevan, «Gitutyun» NAS of Armenia, 2006, pp.138-143.
4. Grigoryan E.Kh., Hovhannisyan H.V. Contact problem for elastic piecewise-homogeneous plate strengthened by two parallel different infinite elastic stringers (in Russian) // Proceedings of NAS of Armenia, Mechanics, 2009, vol. 62, issue 3, pp.29-43.
5. Grigoryan E.Kh., Sarkisyan K.S., Contact problem for elastic plate strengthened by two infinite stringers (in Russian) // Proceedings of NAS of Armenia, Mechanics, 2004, vol. 57, issue 2, pp.3-10.
6. Sarkisyan V.S., Contact problems for semi-planes and layers with elastic overlays (in Russian). Yerevan, YSU publ., 1983, 260 p.
7. Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M. Contact problems for bodies thin with coatings and interlayers (in Russian). Moscow: Nauka, 1983. 487 p.
8. Grigoryan E. Kh. On the dynamic contact problem for a half-plane reinforced by a finite elastic strip // Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM), 1974, vol.38, issue 2, pp. 321-330.
9. Hovhannisyan H.V. Contact problem for piecewise-homogeneous infinite plate strengthened by finite and semi-infinite stringers (in Russian) // Inter-university Collection of Articles, Mechanics, YSU, 1986, vol. 4, pp. 136-145.
10. Grigoryan E.Kh. Load transfer from piecewise-homogeneous infinite overlay to elastic semi-plane (in Russian) // Proceedings of YSU, Natural Sciences, 1979, issue 3, pp.29-34.
11. Handbook of special functions. Moscow: Nauka, 1979. 832 p.
12. Brychkov Yu.A., Prudnikov A.P. Integral transforms of generalized functions (in Russian). Moscow: Nauka, 1977. 288 p.
13. Hovhannisyan H.V. Contact Problem for an Infinite Composite Elastic (Piecewise-Homogeneous) Plate with an Infinite Elastic Stringer Glued to the Plate Surface // Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences, 2012, vol. 1 (227), pp. 27-32.
14. Hovhannisyan H.V. Contact Problem for a Piecewise-Homogeneous Infinite Plate with Stacked Elastic Piecewise-Homogeneous Infinite Stringer // Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences, 2012, Vol.3 (229), pp.34-43.

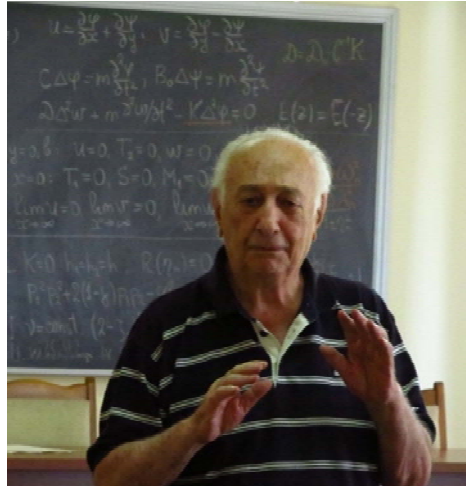
Information about the authors:

Sargsyan Karen – candidate of phys.-math. sciences, associate professor. Dean of the Faculty of Mechanics and Mechanical Engineering, National Polytechnic University of Armenia, Yerevan, Teryan 105. **Cell:** (+374 91) 49-54-55. **E-mail:** sarkarmm@seua.am

Sukiasyan Janibek – Graduate student at the Faculty of Mechanics and Mechanical Engineering, National Polytechnic University of Armenia, Yerevan, Teryan 105.

Cell: (+374 96) 61-65-69. **E-mail:** Jsukiasyan@gmail.com

Received 31.08.2016



**Академику Национальной Академии Наук Армении
Сергею Александровичу Амбарцумяну
95 лет**

Исполнилось 95 лет выдающемуся учёному-механику Сергею Александровичу Амбарцумяну. Академик НАН Армении, иностранный член Российской Академии Наук и Национальной Академии Наук Грузии Сергей Александрович Амбарцумян продолжает плодотворно работать и публиковать статьи и монографии в разных издательствах мира.

Редколлегия журнала «Известия НАН Армении, Механика», Институт Механики НАН Армении и Национальный Комитет Теоретической и Прикладной Механики Армении в знак благодарности и глубокой признательности, выпустят очередной юбилейный сборник научных статей «ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА», посвященный 95-летию академика С.А.Амбарцумяна.