ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №4, 2016 Механика

УДК 539.3

ON A CLASS OF CONTACT PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY, SOLVABLE BY THE INTEGRAL EQUATIONS METHOD

Mkhitaryan S.M. , Melik-Adamyan P.E.

Keywords: contact problems, stresses, elastic layer, half-space, wedge, integral equations.
Ключевые слова: контактные задачи, напряжения, упругий слой, полупространство, клин, интегральные уравнения.
Բանալի բառեր՝ կոնտակտային խնդիրներ, լարումներ, շերտ, կիսատարածություն, սեպ, ինտեգրալ հավասարում

Mkhitaryan S.M., Melik-Adamyan P.E.
On a Class of Contact Problems of Elasticity Theory, Solvable by the Integral Equations Method

Cosely connected with classical contact problems a certain class of contact problems of mathematical elasticity theory solvable by the method of integral equations is considered. An elastic layer, wedge and half-space under the anti-plane deformation are taken as bases.

Մխիթարյան Ս.Մ., Մելիք-Ադամյան Պ.Է.
Ինտեգրալ հավասարումների մեթոդով լուծվող առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրների մի դասի մասին

Դիտարկված է դասական կոնտակտային խնդիրների հետ սերտորեն կապված և ինտեգրալ հավասարումների մեթոդով լուծվող կոնտակտային խնդիրների մի դաս: Որպես հիմքեր վերցված են առաձգական շերտը, սեպը և կիսատարածությունը հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում:

Мхитарян С.М., Мелик-Адамян П.Э.
Об одном классе контактных задач теории упругости, решаемых методом интегральных уравнений

Рассмотрен класс контактных задач математической теории упругости, решаемых методом интегральных уравнений, тесно связанный с классическими контактными задачами. В качестве оснований выбраны упругий слой, клин и полупространство при антиплоской деформации.

Introduction. Classical and non-classical contact and mixed boundary value problems (b.v.p.) cover a wide area of the mechanics of a deformable solid. The literature devoted to development of effective mathematical methods for their investigations and to their applications in engineering is extensive. On this subject we refer to [1]-[8] and references therein.

To provide the contact durability and rigidity of various machinery and engineering constructions it is essential the action of admissible and theoretically acceptable contact stresses or displacements in the contact zone. In the contact of two deformable solids fastened together it can be attained as by an appropriate choice of their geometrical and physical parameters, and of the outer load as well.

In the present paper a certain class of contact problems is discussed in the simplest case of anti-plane deformation. When the contact zone is under the force of pre-assigned regime of displacements, contact interactions between an elastic prismatic bar with a rectangular cross-section and an elastic layer, or a half-space, or an elastic wedge-like solid are considered. With the help of preliminary solutions of auxiliary problems, the setup problems are reduced to the Fredholm integral equations (i.e.) of the first kind with the symmetric kernels. The solutions of these i.e. are built by both the Krein method [9], [10] and the method of integral spectral relationships, established in [11]. Some special cases are presented.

1. The setting of contact problems and derivation of the main equations.

Consider two elastic solids B_1 and B_2 with given modules of elasticity and Poisson ratios E_j, ν_j $(j=1,2)$ respectively, rigidly fastened by a surface S. Generally B_2 is massive deformable solid – the base of different geometrical forms, while B_1 is thin-walled element such as stringers, beams, plates and shells, which are convenient means for transmitting loading to the bases, that usually occur in the engineering practice.

Let the composite solid be a subject to outer loads (Fig.1).

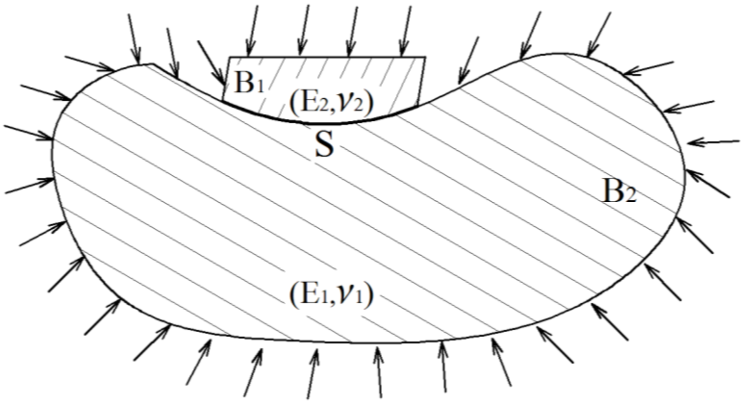


Fig.1

The main investigations in the theory of contact problems are reduced to the study of the stress-strain state of such a composite solid, especially to determining the distribution of contact stresses on S and their kinematic parameters (coming together, relative turns), characterizing the rigidity of a contact.

These problems admit the following settings.

Determine contact stresses on a contact surface S and kinematic parameters under a given surface load.

Find the outer load distribution on a surface of solid B_1 to get the pre-assigned contact stresses, admissible in theory.

Find the outer load distribution on a surface of solid B_1 to get the pre-assigned regime of displacements on the contact surface S.

The present paper concerns to the last topic. The anti-plane deformation of elastic solids in contact is assumed, and the following patterns (models) with corresponding problems are discussed.

I. In the rectangular coordinate system $Oxyz$ consider an elastic layer $\Omega=\{-\infty<x,z<\infty;\ -H\le y\le 0\}$ of the height H and shear module G (Fig.2).

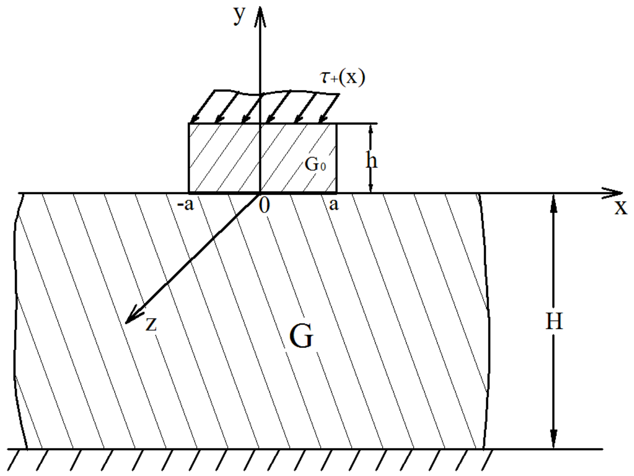


Fig.2

Let it be rigidly clamped by its lower side $y=-H$, on its boundary plane $y=0$, be rigidly fastened by the strip $\omega=\{-a\le x\le a;\ y=0;\ -\infty<z<\infty\}$ to the infinite prismatic bar $\Omega_0=\{-a\le x\le a;\ 0\le y\le h;\ -\infty<z<\infty\}$ with a rectangular cross-section $D_0=\{-a\le x\le a;\ 0\le y\le h\}$ and shear module G_0.

The upper side $y=h$ of a bar is loaded with distributed tangential forces on the direction Oz, that induced an anti-plane deformation of the system layer-bar in the same direction.

The problem is to determine the tangential forces distribution $\tau_+(x)$ when in the contact zone $-a\le x\le a$ the pre-assigned regime of displacements is realized. The displacements are given as a smooth enough function $f(x)$, that is when $w_0(x,0)=f(x)(-a\le x\le a)$, where $w_0(x,y)$ is the only non-vanishing component of the bar displacements by Oz direction.

II. Here the elastic layer is replaced by a wedge-shaped base, which is presentable as r,ϑ,z in cylindrical coordinate system. The wedge with a shear module G is rigidly clamped. The load on the bar is given by forces with intensity $\tau_+(r)$ $\{a\le r\le b\}$, directed along Oz axis tangentially to its upper face (Fig.3).

The problem is to find a function $\tau_+(r)$ such that $w_0(r,\alpha)=f(r)$ $(a\le r\le b)$ where $f(r)$ is a given continuous function.

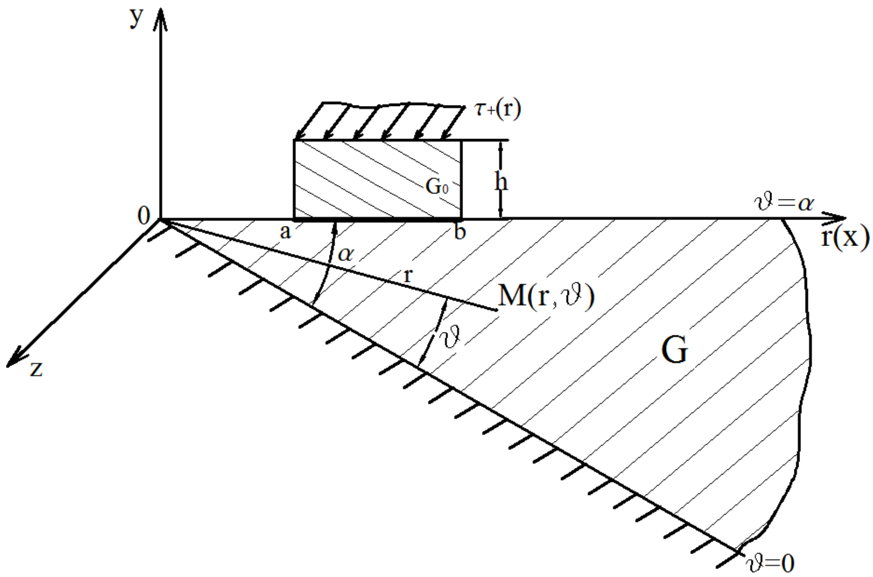


Fig.3

III. Here the elastic layer is replaced by a half-plane, and the analog of the case I is considered.

To deduce the main equations of posed problems, as a preliminary, let us construct solutions of some auxiliary boundary problems, that connect stresses with displacements in the contact zone.

For the case I we have

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}=0 & (a<x<b;\ 0<y<h) \\ \tau_{xz}\big|_{x=a}=G_0\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\bigg|_{x=a}=\tau_{xz}\big|_{x=b}=G_0\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\bigg|_{x=b}=0 & (0\le y\le h); \\ \tau_{yz}\big|_{y=0}=G_0\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\tau_-(x);\tau_{yz}\big|_{y=h}=G_0\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\bigg|_{y=h}=\tau_+(x) & (a\le x\le b) \end{cases} \tag{1.1}$$

where tangential stresses in contact zone is $\tau_-(x)$, and τ_{xz}, τ_{yz} are tangential components of stresses.

The b.v.p. (1.1) is considered with the following additional condition of the equilibrium of the bar or rectangle

$$\int_a^b \tau_-(x)\,dx=\int_a^b \tau_+(x)\,dx=T, \tag{1.2}$$

where T is a given quantity.

The solution of (1.1) can be build by means of finite Fourier cosine-transformation.

Similar to that in [12, (Ch III-13)] for Dirichlet class function $f(x)$, in the case under consideration one can derive

$$\bar{f}_c(n)=\int_a^b f(x)\cos\left[\mu_n(x)\right]dx;\quad \mu_n(x)=\pi n(x-a)/(b-a)\quad (n=0,1,2,...),$$

$$f(x)=\frac{\bar{f}_c(0)}{b-a}+\frac{2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_c(n)\cos\left[\mu_n(x)\right]\qquad (a<x<b).\tag{1.3}$$

Applying (1.3) to the b.v.p. (1.1)–(1.2) we arrive at the more compact form of its presentation

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\bar{w}_0}{dy^2}-\dfrac{\pi n}{(b-a)^2}\,\bar{w}_0=0 & (0<y<h),\\[2ex] \left.\dfrac{d\bar{w}_0}{dy}\right|_{y=0}=\dfrac{\bar{\tau}_-(n)}{G_0};\ \left.\dfrac{d\bar{w}_0}{dy}\right|_{y=h}=\dfrac{\bar{\tau}_+(n)}{G_0} & (n=0,1,2,...),\end{cases}\tag{1.4}$$

where $\bar{w}_0=\bar{w}_0(n,y)$ and, in accordance with (1.3),

$$\left\{\bar{w}_0(n,y);\ \bar{\tau}_\pm(n)\right\}=\int_a^b\left\{w_0(x,y);\tau_\pm(x)\right\}\cos\left[\mu_n(x)\right]dx\quad (n=0,1,2,...).$$

The solution of (1.4) is

$$\bar{w}_0(n,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_n G_0\operatorname{sh}(\lambda_n h)}\left\{\bar{\tau}_+(n)\operatorname{ch}(\lambda_n y)-\bar{\tau}_-(n)\operatorname{ch}\left[\lambda_n(y-h)\right]\right\};\\[1ex] \qquad\qquad (0\le y\le h;\ \lambda_n=\pi n/(b-a);\ n=1,2,...\ );\\[1ex] \dfrac{\bar{\tau}(0)}{G_0}y+B_0\quad \left(0\le y\le h,\ n=0;\ \bar{\tau}(0)=\bar{\tau}_+(0)=\bar{\tau}_-(0)=T\ \right),\end{cases}$$

hence from (1.3) we get

$$w_0(n,y)=\frac{\bar{w}_0(0,y)}{b-a}+\frac{2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{w}_0(n,y)\cos\left[\mu_n(x)\right]\quad \left(a\le x\le b,\ 0\le y\le h\ \right).\tag{1.5}$$

The analogous formulas take place for $\tau_\pm(x)$ as well.

Now from (1.5) it follows that

$$\bar{w}_0(x,0)=\frac{\bar{w}_0(0,0)}{b-a}+\frac{2}{(b-a)G_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\tau}_+(n)-\operatorname{ch}(\lambda_n h)\bar{\tau}_-(n)}{\lambda_n\operatorname{sh}(\lambda_n h)}\cos\left[\mu_n(x)\right]\tag{1.6}$$

$$\left(B_0=\bar{w}_0(0,0);\ a\le x\le b\right).$$

As it was noted above, the problem is considered under the following condition

$$w_0(x,0)=f(x)\quad (a<x<b),$$

where the function $f(x)$ is given. Represent it as the Fourier cosine series by the second formula in (1.3) and compare (1.3) with (1.6).

Then, for the basic three functions $\tau_{\pm}(x)$ and $f(x)$ of the problem under consideration, we arrive at the following relations between their Fourier cosine-coefficients

$$\begin{aligned} &\lambda_n G_0 \operatorname{sh}(\lambda_n h)\, \bar{f}(n) = \bar{\tau}_+(n) - \operatorname{ch}(\lambda_n h)\, \bar{\tau}_-(n) \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ &\bar{w}_0(0,0) = \bar{f}(0); \quad \bar{w}_0(n,0) = \bar{f}(n); \ \lambda_n = \pi n / (b-a). \end{aligned} \tag{1.7}$$

For the thin rectangle $D_0\,(h << b-a)$ these relations are simplified.

Indeed, confining ourselves with terms of order h in power series of entire functions $\operatorname{sh}(\lambda_n h)$ and $\operatorname{ch}(\lambda_n h)$, formula (1.7) will take the following form

$$\lambda_n^2 G_0 h\, \bar{f}(n) = \bar{\tau}_+(n) - \bar{\tau}_-(n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.8}$$

The relations obtained are discrete analogs of a thin bar-stringer deformation's differential equations in the well-known Melan model for a plane deformation (see [13, 14]). In the case of anti-plane deformation one has (see [15])

$$G_0 h \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \tau_-(x) - \tau(x) \quad (a < x < b). \tag{1.9}$$

Now consider the case of an elastic layer, rigidly clamped by its side $y = -H$. In the base plane Oxy the corresponding b.v.p. for the layer $\Pi = \{-\infty < x < \infty; -H < y < 0\}$ is presented as

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad ((x,y) \in \Pi) \\ \tau_{yz}\big|_{y=0} = G \dfrac{\partial w}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \tau_-(x); \quad w\big|_{y=-H} = 0 \quad (-\infty < x < \infty); \end{cases} \tag{1.10}$$

where $w = w(x,y)$ is the only non-vanishing component of the bar displacements by Oz direction. The solution of (1.10) can be obtained by means of Fourier integral transform with respect to x. In the similar way, for boundary points displacements of a strip we have

$$w(x,0) = \frac{1}{\pi G} \int_{-a}^{a} \ln \operatorname{cth}\left(\frac{\pi |x-s|}{4H} \right) \tau_-(s)\, ds \ (-\infty < x < \infty), \tag{1.11}$$

if the function $\tau_-(x)$ vanishes outside of the segment $-a \le x \le a$. The passage to the limit $H \to \infty$ yields

$$w(x,0) = \frac{1}{\pi G} \int_{-a}^{a} \ln \frac{1}{|x-s|}\, \tau_-(s)\, ds + C \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.12}$$

for the elastic half-plane $\Pi_- = \{-\infty < x < \infty; y < 0\}$.

Next, the corresponding b.v.p. for a wedge, clamped by its side $\vartheta = 0$ is

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (0 < r < \infty;\ 0 < \vartheta < \alpha); \\ w\big|_{\vartheta=0} = 0;\ \ \tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=\alpha} = G\,\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \vartheta}\bigg|_{\vartheta=\alpha} = \tau_-(r) \ \ (0 < r < \infty). \end{cases} \tag{1.13}$$

By means of Mellin integral transform with respect to r, its solution can be written as

$$w(r,\alpha) = \frac{1}{\pi G}\int_a^b \ln\frac{r^{\pi/2\alpha} + r_0^{\pi/2\alpha}}{\left|r^{\pi/2\alpha} - r_0^{\pi/2\alpha}\right|}\ \tau_-(r_0)\,dr_0 \quad (0 < r < \infty), \tag{1.14}$$

where the tangential stresses $\tau_-(x)$ vanishe outside of $[a,b]$ $(r = x > 0)$.

Now we are ready to present the main integral equations of posed contact problems.
On account of the character of problems considered, in formulas (1.11), (1.12) and (1.14) we are given displacements $w(x,0) = f(x)$.

From formula (1.11) the determination of tangential contact stresses $\tau_-(x)$ is reduced to the following Fredholm integral equations of the first kind

$$\frac{1}{\pi G}\int_{-a}^{a} \ln\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)\tau_-(s)\,ds = f(x) \ \ (-a < x < a). \tag{1.15}$$

Its solution should satisfy the condition (1.2) with a and b replaced by $-a$ and a.
In terms of dimensionless coordinates and quantities, equation (1.15) can be written as

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln\operatorname{cth}\left(\frac{|\xi-\eta|}{4}\right)\varphi(\eta)\,d\eta = g(\xi) \ \ (-\alpha < \xi < \alpha), \tag{1.16}$$

and condition (1.2)– as

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\eta)\,d\eta = T_0 \quad (T_0 = \pi T/GH). \tag{1.17}$$

For a contact problem of an elastic half-plane, formulas corresponding to (1.12) take the form

$$\frac{1}{\pi G}\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-s|}\tau_-(s)\,ds = f(x) + C \quad (-a < x < a),$$

and, if

$$\xi = x/a,\ \eta = s/a,\ \varphi(\xi) = \tau_-(a\xi)/G;\ g(\xi) = f(a\xi)/a$$

then

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{|\xi-\eta|}\varphi(\eta)\,d\eta = g(\xi) + C_0 \quad (-1 < \xi < 1). \tag{1.18}$$

The solution of (1.18) should satisfy the condition (1.17), where now $T_0 = T/aG$.
On the base of (1.14), a contact problem for a wedge is reduced to the integral equation

$$\frac{1}{\pi G}\int_a^b \ln\frac{r^{\pi/2\alpha}+r_0^{\pi/2\alpha}}{\left|r^{\pi/2\alpha}-r_0^{\pi/2\alpha}\right|}\,\tau_-\left(r_0\right)dr_0 = f\left(r\right) \qquad \left(a<r<b\right), \tag{1.19}$$

and putting

$$\xi=\left(r/a\right)^{\pi/2\alpha},\ \ \eta=\left(r_0/a\right)^{\pi/2\alpha};\quad \rho=\left(b/a\right)^{\pi/2\alpha};$$

$$\tau_0\left(\xi\right)=\frac{1}{G}\xi^{2\alpha/\pi-1}\tau_-\left(a\xi^{2\alpha/\pi}\right);\quad f_0\left(\xi\right)=\frac{\pi}{2\alpha a}f\left(a\xi^{2\alpha/\pi}\right),$$

we get

$$\frac{1}{\pi}\int_1^\rho \ln\frac{\xi+\eta}{\left|\xi-\eta\right|}\tau_0\left(\eta\right)d\eta = f_0\left(\xi\right) \qquad \left(1<\xi<\rho\right). \tag{1.20}$$

The condition (1.2) can be transformed to

$$\int_1^\rho \tau_0\left(\eta\right)d\eta = T_0 \qquad \left(T_0=\frac{\pi T}{2\alpha a G}\right). \tag{1.21}$$

Setting

$$\xi=\sqrt{\rho}\,e^{t/2},\ \eta=\sqrt{\rho}\,e^{u/2};\ \ \gamma=\ln\rho;\ \ -\gamma<t,\,u<\gamma;$$

$$\omega_0\left(t\right)=e^{t/2}\tau_0\left(\sqrt{\rho}\,e^{t/2}\right);\ \ g_0\left(t\right)=\frac{2}{\sqrt{\rho}}f_0\left(\sqrt{\rho}\,e^{t/2}\right)$$

in (1.20) we obtain the following integral equation with difference kernel

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{\gamma}\ln\operatorname{cth}\left(\frac{\left|t-u\right|}{4}\right)\omega_0\left(u\right)du = g_0\left(t\right) \qquad \left(-\gamma<t<\gamma\right),$$

which coincides with (1.16).

2. Solutions of main integral equations. The solutions of equations (1.16), (1.18), and (1.20) can be obtained with the use of the method, developed by M.G. Krein in works [9], [10, (Ch. IV-8)], dealing with a certain class of Fredholm integral equations of the second and first kind with symmetric difference kernels, closely connected to inverse problems of spectral theory of differential operators. Later on it was extended to more general classes of integral equations. There are lots of applied problems that can be described by integral equations with difference kernels. In monograph [18] and references therein one can find development of this theory.

The advantage of formulas derived by Krein is the absence there of Cauchy principal value improper integrals, and their quite an orderly analytic structure.

The main point of the method is that the solution of such an integral equation with an arbitrary continuous right hand side can be constructed by means of its solution with the right hand side identically equal to 1, if the last one exists and is unique.

Applying that to equation (1.16), present the desired solution as a sum of its symmetric and skew-symmetric parts

$\varphi(\xi)=\varphi_{+}(\xi)+\varphi_{-}(\xi);\ g(\xi)=g_{+}(\xi)+g_{-}(\xi);\ \varphi_{\pm}(-\xi)=\pm\varphi_{\pm}(\xi);\ g_{\pm}(-\xi)=\pm g_{\pm}(\xi)$,
so consider

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\operatorname{cth}\left(\frac{|\xi-\eta|}{4}\right)\varphi_{\pm}(\eta)\,d\eta=g_{\pm}(\xi)\quad(-\alpha<\xi<\alpha). \tag{2.1}$$

Then, according to [9], [10], the unique integrable solution of

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\operatorname{cth}\left(\frac{|\xi-\eta|}{4}\right)q(\eta,\alpha)\,d\eta=1$$

is of the form

$$q(\xi,\alpha)=\left\{Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}\xi)}\right\}^{-1}\quad(-\alpha<\xi<\alpha),$$

where $Q_{-1/2}(\xi)$ is a Legendre function of the second kind.

The Krein function is

$$M(\alpha)=\int_{0}^{\alpha}q(\xi,\alpha)\,d\xi=\pi\mathrm{P}_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)/2Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha).$$

Here $\mathrm{P}_{-1/2}(\xi)$ is a Legendre function of the first kind.

Relative to the argument $\xi=\operatorname{ch}\alpha$, the above functions can be presented by means of complete elliptic integrals of the first kind. With the use of formulas from [16, p.1036, f-las 8.851.1 and 8.851.2] one has

$$\mathrm{P}_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{2\sqrt{k}}{\pi}K(k'),\quad Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)=2\sqrt{k}\,K(k)$$

$$k=e^{-\alpha};\ k'=\sqrt{1-k^2}=\sqrt{1-e^{-2\alpha}},$$

where $K(k)$ is a complete elliptic integral of the first kind of the modulus $k\,(0<k<1)$ and the complementary modulus k'.

Hence

$$M(\alpha)=\frac{1}{2}\ \frac{K(k')}{K(k)}=\frac{1}{2}\ \frac{K'}{K}\qquad(K'=K(k'))$$

and its derivative is

$$M'(\alpha)=\frac{1}{2K^2(k)}\left[K'(k')K(k)\frac{dk'}{d\alpha}-K'(k)K(k')\frac{dk}{d\alpha}\right].$$

The use of a differentiation formula for an elliptic integral relative to the modulus (see [16, p.921, f-la 8.123.2]) and the relation [16, p.921, f-la 8.122] yields

$$M'(\alpha)=\pi\left[4k'^2K^2(k)\right]^{-1}.$$

It now follows (see [9], [10]) that the even solution of (2.1) is

$$\varphi_+(\xi)=\left[\frac{1}{M'(\alpha)}\frac{d}{d\alpha}\int_0^\alpha q(\xi,\alpha)\ g_+(\xi)\,d\xi\right]q(\xi,\alpha)-$$

$$-\int_\xi^\alpha q(\xi,u)\frac{d}{du}\left[\frac{1}{M'(u)}\frac{d}{du}\int_0^u q(\eta,u)\ g_+(\eta)\,d\eta\right]du \quad (0<\xi<\alpha)$$

and its odd solution is

$$\varphi_-(\xi)=-\frac{d}{d\xi}\int_\xi^\alpha \frac{q(\xi,u)}{M'(u)}\left[\int_0^u q(\eta,u)\,dg_-(\eta)\right]du \quad (0<\xi<\alpha).$$

The inner integral here is understood in the sense of Stieltjes.

Note that equations (1.16), (2.1) appear also in mixed b.v.p. in the theory of a fluid stabilized filtration in strip shape porous grounds [17].

By the Krein method in [19] are presented solutions of i.e. (1.18) and some others with comparative analyses of various analytical methods.

Now, let us present solutions of (1.16) and (1.18) by means of spectral relationships, established in [11] via orthogonal functions method.

The solution of i.e. (1.16), (1.18) and (1.20) can be built by means of spectral relationships as follows

$$\int_1^\rho \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\frac{T_n(Y)\,d\eta}{\sqrt{(\rho^2-\eta^2)(\eta^2-1)}}=\lambda_n T_n(X) \quad (n=0,1,2,...;\ \ 1<\xi<\rho)$$

$$Y=\cos\varphi,\ \ \varphi=\frac{\pi}{K'}\int_1^\eta\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}};\ k=1/\rho=(a/b)^{\pi/2\alpha}; \qquad (2.2)$$

$$X=\cos\vartheta,\ \ \vartheta=\frac{\pi}{K'}\int_1^\xi\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}};\ k'=\sqrt{1-k^2};\ \ K'=K(k');$$

$$\lambda_0=\pi K/\rho,\quad \lambda_n=\frac{1}{\rho n}K'\mathrm{th}(\pi nK/K') \qquad (n=1,2,...;\ K=K(k))$$

and the solution of i.e. (1.18) – as

$$\int_{-\alpha}^\alpha \ln\mathrm{cth}\left(\frac{|\xi-\eta|}{4}\right)\frac{T(V)\,d\eta}{\sqrt{2(\mathrm{ch}\alpha-\mathrm{ch}\eta)}}=\mu_n T_n(U) \quad (n=0,1,2,...;\ \ -\alpha<\xi<\alpha)$$

$$\mu_n=2\lambda_n\,(n=1,2,...);\ \mu_0=2\lambda_0=2\pi\sqrt{k}\,K(k);\ k=e^{-\alpha};$$

$$U=\cos\Theta,\ \Theta=\frac{\pi}{2K'}e^{\alpha/2}\int_{-1}^\xi\frac{du}{\sqrt{2(\mathrm{ch}\alpha-\mathrm{ch}u)}};\ \ K'=K(k'). \qquad (2.3)$$

$$V=\cos\Phi,\ \Phi=\frac{\pi}{2K'}e^{\alpha/2}\int_{-\alpha}^{\eta}\frac{du}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}u)}};\ k'=\sqrt{1-e^{-2\alpha}};$$

Here $T_n(X)$ and $T_n(U)$ are Chebishev polynomials of the first kind. Their orthogonality conditions are of the form

$$\int_1^{\rho}T_n(X)T_m(X)\frac{d\xi}{\sqrt{(\rho^2-\xi^2)(\xi^2-1)}}=\begin{cases}K'/\rho & (m=n=0);\\ K'/2\rho & (m=n\neq 0);\\ 0 & (m\neq n);\end{cases}\qquad(2.4)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}T_n(U)T_m(U)\ \frac{d\xi}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}\xi)}}\ =\ \begin{cases}2e^{-\alpha/2}K' & (m=n=0);\\ e^{-\alpha/2}K' & (m=n\neq 0);\\ 0 & (m\neq n),\end{cases}\qquad(2.5)$$

where k and k' are taken from (2.2) and (2.3), respectively.
Integrals ϑ and Θ appearing there can be expressed as incomplete elliptic functions $F(\varphi,k)$ (see [16], p.260, f-la 3.152.9), namely

$$\int_1^{\xi}\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}=\ F\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi k'}\right),k'\right)\qquad\left(k'=\sqrt{1-1/\rho^2}\right);$$

$$\int_{-\alpha}^{\xi}\frac{du}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}u)}}=2e^{-\alpha/2}F\left(\arcsin e^{\frac{\alpha-\xi}{4}}\sqrt{\frac{\operatorname{sh}[(\alpha+\xi)/2]}{\operatorname{sh}\alpha}},k'\right)\quad\left(k'=\sqrt{1-e^{-2\alpha}}\right).$$

The solution of i.e. (1.20) we will find in the form of infinite series

$$\tau_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{(\rho^2-\xi^2)(\xi^2-1)}}\sum_{n=0}^{\infty}x_nT_n(X)\quad(1<\xi<\rho).\qquad(2.6)$$

For determining unknown coefficients x_n we substitute (2.6) in (1.20), interchange the order of summation and integration, use spectral relationships (2.2) and orthogonality conditions (2.4). As a result we obtain

$$x_0=\frac{\rho^2}{KK'}f_0^{(0)},\ x_n=\frac{2\pi\rho^2}{K'^2}n\operatorname{cth}(\pi nK/K')f_n^{(0)}\quad(n=1,2,...);$$
$$f_n^{(0)}=\int_1^{\rho}f_0(\xi)\frac{T_n(X)d\xi}{\sqrt{(\rho^2-\xi^2)(\xi^2-1)}}\qquad(n=0,1,2,...).\qquad(2.7)$$

Then, substituting (2.6) in (1.21) we get $T_0=x_0K'/\rho$, hence

$$T_0 = \rho f_0^{(0)} / K \tag{2.8}$$

in view of the first relation in (2.7).

On the other hand the function $f_0(\xi)$ can be considered as a sum

$$f_0(\xi) = \delta_0 + \tilde{f}_0(\xi) \quad \left(\tilde{f}_0'(\xi) \neq 0,\ 1 < \xi < \rho\right),$$

where δ_0 is the reduced rigid displacement of the rectangle D_0 in Oz direction. Note that $f_0(\xi) \equiv \delta$ $\left(\tilde{f}_0(\xi) \equiv 0\right)$ for the case of an absolutely rigid rectangle $(G_0 = \infty)$. Then

$$f_0^{(0)} = \delta_0 K'/\rho + \tilde{f}_0^{(0)}, \quad \tilde{f}_0^{(0)} = \int_1^\rho \frac{\tilde{f}_0(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\rho^2 - \xi^2)(\xi^2 - 1)}}$$

hence formula (2.8) establishes a certain connection of T_0 and δ_0.

Consider i.e. (1.16) and, as above, set

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\xi)}} \sum_{n=0}^{\infty} y_n T_n(U) \quad (-\alpha < \xi < \alpha).$$

Repeating the same steps one can obtain

$$\begin{aligned} & y_0 = \frac{k g_0}{4\pi^2 K K'}, \quad y_n = \frac{nk}{2\pi K'^2} \operatorname{cth}\left(\pi n K/K'\right) g_n; \qquad (n = 1, 2, \ldots); \\ & g_n = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{T_n(U)\, g(\xi)\, d\xi}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\xi)}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \end{aligned} \tag{2.9}$$

which leads to the connection of T_0 and g_0, taking into account condition (1.17) .

Finally, on the same way as above, consider i.e. (1.18). For

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sum_{n=0}^{\infty} z_n T_n(\xi) \qquad (-1 < \xi < 1)$$

we make use of well-known spectral relationships (see [20, Ch. X])

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} \frac{T_n(\eta)\, d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} T_n(\xi) \quad (n = 1, 2, \ldots); \\ \qquad\qquad (-1 < \xi < 1); \\ \ln 2 \qquad\qquad (n = 0). \end{cases}$$

For the case under consideration we have $T_0 = T/aG$, in (1.17), which leads to

$$z_0 = T_0/\pi, \quad C_0 = \left(T_0 \ln 2 - g_0\right)\Big/\pi; \; z_n = \frac{2}{\pi} n g_n \qquad (n = 1, 2, ...)$$

$$g_n = \int_{-1}^{1} g(\xi) \frac{T_n(\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{2.10}$$

Therefore,

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(T_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} n g_n T_n(\xi)\right) \quad (-1 < \xi < 1). \tag{2.11}$$

It is not difficult to verify that the series (2.11) converges uniformly if $g(\xi)$ is continuously differentiable.

In conclusion of this section let us turn to equation (1.19) again. Putting there $a = 0$,

$$\xi = (r/b)^{\pi/2\alpha}, \; \eta = (r_0/b)^{\pi/2\alpha}; \; \tau_0(\xi) = \frac{1}{G}\xi^{2\alpha/\pi - 1}\tau_0\left(b\xi^{2\alpha/\pi}\right);$$

$$f_0(\xi) = \frac{\pi}{2\alpha a} f\left(ba\xi^{2\alpha/\pi}\right) \qquad (0 < \xi < 1),$$

we get

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\tau_0(\eta)\, d\eta = f_0(\xi) \quad (0 < \xi < 1). \tag{2.12}$$

In [21, Ch. III-8] it is shown that the stresses for the wedge of angle α have order $r^{\pi/\alpha - 1}$, if displacements on its bounds are zero. Therefore the stresses at the wedge vertex have singularity, when $\alpha > \pi$. On the other hand

$$\tau_0(\xi) \sim \frac{1}{G}\left(\xi^{2\alpha/\pi}\right)^{\pi/\alpha - 1}\xi^{2\alpha/\pi - 1} = \frac{\xi}{G} = 0(\xi) \quad (\xi \to 0),$$

so $\tau_0(0) = 0$. Then the odd extension of equation onto the segment $[-1, 0]$ leads to (1.18). For this case in relation (1.17) it should be putted $T_0 = 0$.

3. The determination of the function $\tau_+(x)$. Depending on the problem under consideration, the function $\tau_+(x)$ can be determined with the help of given solutions of (1.16), (1.18), (1.20), and relations (1.7). Let us present it for each of three above mentioned contact problems with accordingly chosen dimensionless variables.

For the case of a layer we have

$$\tau_+(x) = \frac{\overline{\tau}_+(o)}{2a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\tau}_+(n)\cos\left[\frac{\pi n(x+a)}{2a}\right] \quad (-a < x < a),$$

$$\overline{\tau}_+(n) = \int_{-a}^{a}\tau_+(x)\cos\left[\frac{\pi n(x+a)}{2a}\right]dx \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

In accordance with (1.16) set

$$x = H\xi/\pi; \quad \chi_+(\xi) = \tau_+(H\xi/\pi)/G_0 \qquad (-\alpha < \xi < \alpha),$$

that is readily transformed to

$$\chi_+(\xi) = \frac{\chi_0^+}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n^+ \cos\left[\frac{\pi n(\xi+\alpha)}{2\alpha}\right] \qquad (-\alpha < \xi < \alpha);$$

$$\chi_0^+ = T_0 \;\; (T_0 = \pi T/G_0 H); \;\; \chi_n^+ = H_0 \mathrm{sh}(\pi n h_0/2) n\bar{g}_n - \tag{3.1}$$

$$-k\mathrm{ch}(\pi n h_0/2)\varphi_n \quad (n = 1,2,...); \; k_0 = G/G_0; \;\; h_0 = h/a, \; H_0 = H/2a;$$

$$\{\chi_n^+, \varphi_n, \bar{g}_n\} = \int_{-\alpha}^{\alpha}\{\chi_+(\xi), \varphi(\xi), \, g(\xi)\}\cos\left[\frac{\pi n(\xi+\alpha)}{2\alpha}\right]d\xi \;\; (n = 0,1,2,...).$$

Here $\varphi(\xi)$ and $g(\xi)$ are solution and the right hand side of equation (1.16) respectively, and formula for χ_n^+ is derived from (1.7). Now, in accordance with (1.8), the simplified form of χ_n^+ is

$$\chi_n^+ = \frac{1}{2}\pi n^2 h_0 H_0 \bar{g}_n - k_0\varphi_n \quad (n = 1,2,...).$$

For a thin rectangle $D_0(h << a)$ a function $\chi_+(\xi)$ can be determined from (1.9) with the use of the Melan model, namely

$$\chi_+(\xi) \approx k_0\varphi(\xi) - \frac{\pi h_0}{2H_0}g''(\xi) \qquad (-\alpha < \xi < \alpha). \tag{3.2}$$

To the case of a wedge it corresponds to i.e. (1.21) and analogs of relations (3.1) and (3.2) respectively are

$$\chi_+(\xi) = \tau_+\left(a\xi^{2\alpha/\pi}\right)/G_0 = h_+(\xi)\xi^{1-2\alpha/\pi} \qquad (1 < \xi < \rho)$$

$$h_+(\xi) = \frac{h_0^+}{\rho_0} + \frac{2}{\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty}h_n^+ \cos\left[\frac{\pi n\left(\xi^{2\alpha/\pi}-1\right)}{\rho_0}\right],$$

$$\rho_0 = \rho^{2\alpha/\pi} - 1; \;\; h_0^+ = T_0 \quad (T_0 = \pi T/2\alpha a G_0); \tag{3.3}$$

$$h_n^+ = k_0\mathrm{ch}(\pi n h_0/\rho_0)\tau_n^{(0)} + \frac{4\alpha^2}{\pi\rho_0}n\,\mathrm{sh}(\pi n h_0/\rho_0)\, f_n^{(0)} \quad (n = 1,2,...);$$

$$\{h_n^+, \, \tau_n^{(0)}, \, f_n^{(0)}\} = \int_1^{\rho}\{h_+(\xi), \; \tau_0(\xi), \; f_0(\xi)\}\cos\left[\frac{\pi n\left(\xi^{2\alpha/\pi}-1\right)}{\rho_0}\right]d\xi;$$

$$\chi_+(\xi) \approx k_0 \xi^{1-2\alpha/\pi} \varphi(\xi) - \frac{\pi h_0}{2\alpha} \xi^{1-4\alpha/\pi} \left[\left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) f_0'(\xi) + \xi f_0''(\xi) \right].$$

For the case of half-plane we get

$$\chi_+(\xi) = \tau_+(a\xi) \Big/ G_0 = \frac{\chi_0^+}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n^+ \cos\left[\frac{\pi n(\xi+1)}{2}\right] \quad (-1 < \xi < 1);$$

$$\chi_0^+ = T_0 \;\; (T_0 = T/aG_0); \;\; \chi_n^+ = k_0 \mathrm{ch}(\pi n h_0/2) \varphi_n +$$

$$+ \frac{1}{2} \pi n \,\mathrm{sh}(\pi n h_0/2) \bar{g}_n, \quad \chi_+(\xi) \approx k_0 \varphi(\xi) - h_0 g''(\xi) \; (-1 < \xi < 1) \; (n = 1, 2, \ldots);$$

$$\left\{\chi_n^+, \varphi_n, \bar{g}_n\right\} = \int_{-1}^{1} \left\{\chi_+(\xi), \varphi(\xi), g(\xi)\right\} \cos\left[\frac{\pi n(\xi+1)}{2}\right] d\xi. \tag{3.4}$$

Note that there is a certain link between coefficients appearing in (3.1)–(3.4) and (2.7), (2.9) and (2.10). For the sake of derivations simplicity considering the case III, one has

$$\varphi_n = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \cos\left[\frac{\pi n(\xi+1)}{2}\right] d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Substituting here $\varphi(\xi)$ from (2.11) it is not difficult to obtain

$$\varphi_n = \frac{T_0}{\pi} I_{0n} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m g_m I_{mn}; \;\; I_{mn} = \int_0^{\pi} \cos\left[\frac{\pi n}{2}(\cos t + 1)\right] \cos(mt)\, dt$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

The function $g(\xi)$ can be approximated by linear combinations of Chebyshev polynomials of the first kind

$$g(\xi) \approx \frac{g_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{N} g_m T_m(\xi) \quad (-1 < \xi < 1).$$

Then

$$\varphi_n \approx \frac{T_0}{\pi} I_{0n} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{N} m g_m I_{mn}$$

The obtained integrals I_{mn} are Fourier cosine-coefficients, and can be calculated by the method of least squares (see [22, Ch. IV-11]) up to required precision.

Conclusion

In the paper a new formulations of contact problems are suggested. For two elastic solids, fastened to each other by some part of their surfaces, the effect of pre-assigned regime of displacements on the contact surface is studied. In such a setting contact problems for solids of three different configurations under anti-plane deformation are solved. These problems are reduced to the Fredholm integral equations of the first kind and their solutions are built in complete form by both the Krein method and the method of orthogonal functions. The approach presented here can be efficiently applied also to a plane and axially symmetric contact problems.

REFERENCES

1. Shtaerman I.Ja. Contact problem of elasticity theory. M.– L: Gostekhizdat, 1949. 270 p.
2. Galin L.A. Contact problems of elasticity theory and visco-elasticity. M.: Nauka, 1980. 304 p.
3. Vorovich E.E., Alexandrov V.M., Babeshko V.A. Non-classical mixed problems of elasticity theory. M.: Nauka., 1974. 456 p.
4. Jhonson K. Mechanics of contact interaction. M.: Mir, 1989. 509 p.
5. Muskhelishvili N.I. Some basic problems of mathematical elasticity theory. M.: Nauka, 1966. 708 p.
6. Lurie A.I. Space problems of elasticity theory. 1955. 491 p.
7. Development of theory of contact problems in the USSR. M.: Nauka, 1976. 493 p.
8. Vorovich E.E., Alexandrov V.M. (eds.), Mechanics of contact interactions. M.: Fizmatlit, 2001. 670 p.
9. Krein M.G. On one method of the solution of the integral equations of the first and second kind. // DAN USSR. 1955. V.100. № 3. P.413 – 416.
10. Gohberg I.Ts., Krein M.G. Theory of Volterra operators in Hilbert space. M.: Nauka, 1967. 508 p.
11. Mkhitaryan S.M. On private functions of the integral operator originated by logarithmic kernel on two intervals and their application to the contact problems. // Izv. AS Arm SSR. Mechanics. 1982. V.35. № 6. P.3–18.
12. Sneddon E. Fourier transformation. M.: IL, 1955. 668p.
13. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie Geschweibter Verbindungen.// Ingr. Arch. 1932. Bd.3. №2. P.123–129.
14. Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben über gescweißte oder geklebte Verbindungen./// Österreichisches Ingr. Arch. 1964. Vol.18. № 3-4. P.284–292.
15. Mkhitaryan S.M. On two mixed problems connected with the questions of interaction of the stresses concentrators of different types with massive bodies under the anti-plane

deformation in the collection. Mechanics of a deformable solid body. Pub. house AS Armenia. Yerevan: 1993. P.129–149.
16. Gradshtein E.S., Ryzhik E.M. Tables of integrals, summs, series and products. 1971. 1108 p.
17. Mkhitaryan S. M. On Complex Potentials and On The Application of Related to Them M. G. Kreins Two Integral Equations in Mixed Problems of Continuum Mechanics. // Proceeding of A. Razmadze Mathematical Institute. 2011. Vol.155. P.55–72.
18. Sakhnovich L.A. Integral Equations with Difference Kernels on Finite Intervals. 2015. Springer Intern. Publ. Switzerland. Birkhaser. 226 p.
19. Mkhitaryan S.M. On the Application of the M.G. Krein Method for the Solution of Integral Equations in Contact Problems in Elasticity Theory. // Operator Theory: Advances and Application. 2009. Vol.191. P.155–171. Birkhauser Verlag Basel / Switzerland.
20. Popov G.Ya. Concentration of elastic stresses near the stamps cuts, thin inclusions and reinforcement. M.: Nauka, 1982. 344 p.
21. Parton V.Z., Perlin P.E. Methods of mathematical theory of elasticity. M.: Nauka, 1981. 688p.
22. Lanczos C. Practical Methods of Applied Analysis. M.: Fizmatgiz, 1961. 524 p.

<u>About authors:</u>

Mkhitaryan S.M. – Corr.-memb. of NAS RA, Professor, Institute of Mechanics, Head of department.
E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Melik-Adamyan P.E. –Senior researcher, Institute of Mechanics of NAS RA

Received 09.09.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №4, 2016 Механика

УДК 539.3

INFLUENCE OF SUPERSONIC GAS FLOW ON THE AMPLITUDE OF NON-LINEAR OSCILLATIONS OF RECTANGULAR PLATES

Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O.

Keywords: Flexible plates; supersonic gas flow; dependence amplitude-speed.
Ключевые слова: Гибкие пластинки, сверхзвуковой поток газа, зависимость амплитуда-скорость.
Բանալի բառեր: Ճկուն սալեր, գազի գերձայնային հոսանք, ամպլիտուդ-արագություն կախվածություն

Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ.
Գազի գերձայնային հոսանքի ազդեցությունը ուղղանկյուն սալերի ոչ գծային տատանումների ամպլիտուդի վրա

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող իզոտրոպ ուղղանկյուն սալի ոչ գծային տատանումների խնդիրը: Հետազոտությունը կատարված է երկու տիպի ոչ գծայնությունների հաշվառմամբ. աերոառաձգական (քառակուսային և խորանարդային) և երկրաչափական (խորանարդային): Աերոդինամիկական ոչգծայնության (հատկապես նրա քառակուսային ոչգծայնության) հաշվառման շնորհիվ ոչ գծային տատանումների ամպլիտուդի կախվածությունը շրջհոսող գազի արագության փոփոխության որոշակի միջակայքում երկարժեք է: Այդ փաստը ցույց են տալիս աշխատանքում բերված նկարներում երկու ճյուղերի տեսքով, որոնց ստորին ճյուղերը, ամենայն հավանականությամբ, անկայուն են: Անկայուն ճյուղերը բաժանում են երկու հարևան կայուն լուծումների ձգողության տիրույթները: Այստեղից հեշտությամբ ստացվում է գրգռման այն արժեքը, որն անհրաժեշտ է համակարգի մի կայուն ճյուղից մյուսին անցնելու համար: Ցույց է տրված պարամետրի փոփոխության որոշակի այն տիրույթների գոյությունը, որոնց դեպքում հնարավոր չէ գրգռել չմարող ֆլատերային տատանումներ ինչպես մինչկրիտիկական արագություններում, այնպես էլ հետկրիտիկական վիճակներում:

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О.
Влияние сверхзвукового потока на амплитуду нелинейных колебаний прямоугольных пластин

Рассматривается задача нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейности: аэродинамической (квадратичной и кубической) и геометрической (кубической). Благодаря учёту аэродинамической нелинейности (особенно её несиметричной квадратичной части) установлено, что зависимость амплитуды нелинейных колебаний от скорости обтекающего потока в определённых интервалах изменения скорости является двузначной. Этот факт иллюстрирован на приведённых в тексте фигурах в виде двух ветвей, нижние ветви из которых, по всей вероятности, являются неустойчивыми. Неустойчивые ветви отделяют области тяготения двух соседних устойчивых решений. Отсюда легко находится величина возмущения, необходимого для того, чтобы перебросить систему с одной устойчивой ветви на другую. Показаны существования определённых областей изменения парметра, при которых невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания как при докритических скоростях, так и при послекритической стадии.

The problem of nonlinear oscillations of isotropic rectangular plate in supersonic gas flow is examined. The study was conducted taking into account both types of non-linearity: wind (quadratic and cubic) and geometric (cubic). Due to the aerodynamic nonlinearity (especially its non-symmetric quadratic part) it is established that dependence amplitude-speed is two-valued at the certain intervals of the speed. This fact is illustrated on the figures given in the text in the form of two branches, the lower branches of which, in all probability, are unstable. The unstable branches are separated via the gravitational field of two adjacent sustainable solutions. Thus the perturbation magnitude can be easily found, which is required in order to transfer the system from one stable branch to another. Existence of specific areas of the speed is shown in which undamped flutter type oscillations cannot be excited in both pre-critical speeds and in post-critical stage.

Introduction

The literature is paved by numerous studies on the stability of plates and shells in supersonic gas flow. Significant contributions are reported in the monographs [1-3] and in the review article [4]. The interested reader can consult [1-7] for a linear descriptions of the problem, while in [2,8-15] aspects related to the nonlinear behavior of plates and shells in supersonic flows is discussed. The solution of the linear problem yields the critical value of the flow speed, u_*; at the onset of this critical speed the aeroelastic system loses its stability. The solution of the linear problem can be accomplished using a variety of methods, in many circumstances it can be achieved analytically in an closed form, while if an analytical solution cannot be found, often an approximate one, for example using the Galerkin method, can be reached [2]. Nonlinear panel flutter problems are solved by approximate methods to investigate the dependence of the amplitude of oscillations A on the speed of flowing stream, when the value of flowing speed is in the vicinity of critical flutter speed. In the flutter problems these issues, devoted to the investigation of properties of the function $A(\nu)$, when the plate is flown in both directions with the same speed, is investigated in detail in the works [2,13], where it is shown, that non-linear flutter type oscillations are exist either in pre-critical stage, where $A(\nu)$ is monotone decreasing function, or in post-critical speeds, where $A(\nu)$ is monotone increasing function. Non-linear flutter problems, in account of only geometrical type of non-linearity in the works [14,15] were discussed, also. In the works [8,9] it was shown, that aerodynamic non-linearity (especially its non-symmetric quadratic part) brings to the appearance of new types of dependencies $A(\nu)$ as in pre-critical, as well as in post-critical speeds, which are near to the critical. In the work [10] the influences of geometrical non-linearity on the dependence “amplitude-speed” are investigated in the case of cylindrical panels. It is shown, that dependence of the amplitude of non-linear flutter type oscillations on the value of speed of flowing stream can have multi-value character.

While the aeroelastic behavior in term of non-linear amplitude vs. speed is often the object of discussion, very limited literature deals with the non-linear amplitude vs. frequency. When $u = 0$, the relationship between non-linear amplitude and frequency describing the nonlinear vibrations of a plate is classified as “hard” [1], i.e. with increasing non-linear amplitude there is a corresponding increasing in oscillatory frequency. In the work [16] it is shown, that the presence of flowing stream, due to the aeroelastic non-linearity, can be a source of both quantitative and qualitative change of the character of noted monotonically increasing relationship.

In the present work the dependence of amplitude of non-linear oscillations on the value of speed of flowing stream is investigated both in pre- and post- critical stage. the influence of frequency of nonlinear oscillations and geometrical parameters of the plate on the

dependence $A(\nu)$ is studied without the above-mentioned limitations on the value of supersonic flow speed. It is established that the character of the function $A(\nu)$ is changed significantly as quantitatively, as well as qualitatively, depending on the noted parameters. Possible types of the function $A(\nu)$ are shown in the Figures 1-6. Dependencies, illustrated in bottom parts of the Figures 5 and 6, were well-known due to the works [2,13].
Obtained in this study the main results are listed in paragraph 5.

1. Formulation of the problem of stability

The problem is formulated by considering a thin isotropic rectangular plate of constant thickness h. It is referred to the Cartesian coordinate plane α, β, γ and the coordinate plane α, β coincides with the middle plane of the plate and the coordinate lines α and β are directed along the edges of the plate. A supersonic gas flow with freestream velocity magnitude $\vec{u}$, is aligned with the axis 0α, on one side of the panel only. To investigate the aeroelastic stability of the examined plate the following assumptions are considered:

a) the Kirchhoff's hypothesis on non-deformable normal [18];

b) for the flexible plate the normal displacements are comparable with the thickness of the plate [1];

c) the third-order nonlinear Piston Theory Aerodynamics (PTA) is used when calculating the aerodynamic pressure [19,20].

Based on these assumptions the nonlinear aeroelastic governing equations can be cast as [2]:

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 F + \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 = 0, \tag{1}$$

$$D\Delta^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} + \rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho_0 h\varepsilon + \frac{æp_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t} +$$

$$+æp_\infty\left[M\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{æ+1}{4}M^2\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{æ+1}{12}M^3\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^3\right] = 0, \tag{2}$$

Herein

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}, \quad M = \frac{u}{a_\infty}, \quad a_\infty^2 = \frac{æp_\infty}{\rho_\infty},$$

$w(\alpha,\beta,t)$ – is the out-of-plane plate deflection, M – is the Mach number of undisturbed flow, a_∞ – is the sound speed for the undisturbed gas, æ is the isentropic gas coefficient, μ – is the Poisson's ratio, ρ_0 – is the density of plate's material, p_∞ and ρ_∞ – are the pressure and gas density in the undisturbed state, ε – is the coefficient of linear attenuation, and $F = F(\alpha,\beta,t)$ – is the stress function.

To investigate the issues of stability of the examined system the boundary conditions must be added to the set of Eqs. (1) and (2). A simple-supported edges along the contour of the rectangular plate, implying that the plate is free to move in the plane, will be considered $\left(0 \le \alpha \le a,\ 0 \le \beta \le b\right)$. Consequently, according to [2], the following boundary conditions are used:

for $\alpha = 0$, $\alpha = a$

$$w = 0, \quad M_\alpha = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) = 0, \tag{3}$$

$$T_\alpha^0 = 0,\ T_{\alpha\beta}^0 = 0 \tag{4}$$

for $\beta = 0$, $\beta = b$

$$w = 0, \quad M_\beta = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right) = 0, \tag{5}$$

$$T_\beta^0 = 0,\ T_{\beta\alpha}^0 = 0, \tag{6}$$

where T_α^0, T_β^0, $T_{\alpha\beta}^0$ – are the average values of the force at the edges of the plate.

2. Reduction to the stability problem, described by the system of ordinary differential equations

An approximate solution of Eq. (2), satisfying conditions (3) and (5) which, let's present in the form [2]

$$w\left(\alpha,\beta,t\right) = f_1(t)\sin\lambda_1\alpha \cdot \sin\mu_1\beta + f_2(t)\sin\lambda_2\alpha \cdot \sin\mu_1\beta \tag{7}$$

$$\left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a},\ \mu_k = \frac{k\pi}{b}\right)$$

where $f_i(t)$ – are functions of time t, still to be determined.

Substituting (7) into (1) the linear non-homogeneous system of ordinary differential equations with respect to the function F will be obtained. The Solution of the noted equation, satisfying the boundary conditions (4) and (6) is presented as:

$$F\left(\alpha,\beta,t\right) = \frac{Eh}{4}\left[-\frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} f_1 f_2 \cos\left(\lambda_1\alpha\right) + \frac{\mu_1^2}{8\lambda_1^2} f_1^2 \cos\left(\lambda_2\alpha\right) + \frac{\mu_1^2}{9\lambda_1^2} f_1 f_2 \cos\left(\lambda_3\alpha\right) + \right.$$
$$+ \frac{\mu_1^2}{32\lambda_1^2} f_2^2 \cos\left(\lambda_4\alpha\right) + \frac{9\lambda_1^2\mu_1^2}{\Delta_{\lambda_1\mu_2}} f_1 f_2 \cos\left(\lambda_1\alpha\right)\cos\left(\mu_2\beta\right) -$$
$$\left. -\frac{\lambda_1^2\mu_1^2}{\Delta_{\lambda_3\mu_2}} f_1 f_2 \cos\left(\lambda_3\alpha\right)\cos\left(\mu_2\beta\right) + \left(\frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} f_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{8\mu_1^2} f_1^2\right)\cos\left(\mu_2\beta\right)\right],$$

To calculate the functions $f_i(t)$ Eq. (2) will be used. Substituting Eq. (7) and the already found expression F into Eq. (2), and solving it by using the Bubnov-Galerkin method, the nonlinear system of ordinary differential equations, with respect to unknown functions $x_1 = f_1(t)/h,\ x_2 = f_2(t)/h$, one obtains [2,13]:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_1}{d\tau}+x_1-\frac{2}{3}k\nu x_2+k\nu^2\left[\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{12}x_2^2+\right.\\
&\qquad\left.+\nu x_2\left(\beta_{11}x_1^2+\beta_{12}x_2^2\right)\right]+Qx_1\left(\gamma_{11}x_1^2+\gamma_{12}x_2^2\right)=0\\
&\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_2}{d\tau}+\gamma^2x_2+\frac{2}{3}k\nu x_1+k\nu^2\left[\alpha_{21}x_1x_2+\right.\\
&\qquad\left.+\nu x_1\left(\beta_{21}x_1^2+\beta_{22}x_2^2\right)\right]+Qx_2\left(\gamma_{21}x_1^2+\gamma_{22}x_2^2\right)=0.
\end{aligned}\tag{8}$$

Herein, along with the dimensionless time $\tau=\omega_1 t$, the following notations are considered:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_i^2=\frac{D}{\rho_0 h}\left(\lambda_i^2+\mu_1^2\right)^2\quad(i=1,2),\ k=\frac{4æp_\infty}{\rho_0\omega_1^2h^2},\quad Q=\frac{h}{16\rho_0\omega_1^2},\\
&\nu=M\frac{h}{a},\qquad \gamma=\frac{\omega_2}{\omega_1},\qquad \chi=\frac{2}{\omega_1}\left(\varepsilon+\frac{æp_\infty}{\rho_0 h a_\infty}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{11}=\frac{2}{9}(æ+1),\quad \alpha_{12}=\frac{56}{45}(æ+1),\quad \alpha_{21}=\frac{16}{45}(æ+1),\\
&\beta_{11}=\beta_{21}=\frac{\pi^2}{40}(æ+1),\quad \beta_{22}=\frac{11\pi^2}{70}(æ+1),\quad \beta_{12}=-\frac{9\pi^2}{70}(æ+1),\\
&\gamma_{11}=Eh\lambda_1^4\left(1+\varphi^4\right),\gamma_{22}=Eh\lambda_1^4\left(16+\varphi^4\right),\\
&\gamma_{12}=\gamma_{21}=Eh\lambda_1^4\left(4\left(1+\varphi^4\right)+\frac{81\varphi^4}{\left(1+4\varphi^2\right)^2}+\frac{\varphi^4}{\left(9+4\varphi^2\right)^2}\right)\qquad \varphi=ab^{-1}
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

where ω_1 and ω_2 are first and second natural frequencies of the plate, while ν is the reduced speed parameter.

3. Solution of the linear problem

The solution of the nonlinear problem is usually preceded by analysis of the corresponding linear problem, since: a) the critical parameter $\nu=\nu_{cr}$ (hence the critical flow speed $u_{cr}=ah^{-1}\nu_{cr}a_\infty$, e.g. $M_{cr}=ah^{-1}\nu_{cr}$), at which the unperturbed state of the plate becomes unstable with respect to any small perturbation can be found, and b) the critical state

u_{cr} (e.g. M_{cr} or ν_{cr}), is necessary in the investigation of the type of stability of a nonlinear system.
Thus, the linear system of equations obtained linearizing equations (8) has the form

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_1}{d\tau}+x_1-\frac{2}{3}k\nu x_2=0,$$
$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_2}{d\tau}+\gamma^2x_2+\frac{2}{3}k\nu x_1=0. \qquad (11)$$

Representing the solution by $x_1=y_1e^{\lambda\tau}$, $x_2=y_2e^{\lambda\tau}$, the characteristic equation with respect to λ can be cast as:

$$\lambda^4+2\chi\lambda^3+\left(\gamma^2+1+\chi^2\right)\lambda^2+\chi\left(\gamma^2+1\right)\lambda+\gamma^2+\frac{4}{9}k^2\nu^2=0.$$

The unperturbed form of the plate is stable if the real parts of the roots of the characteristic equation are negative. Consequently, according to Hurwitz's theorem [21], the conditions for stability can be written in the form:

$$\chi>0,\quad \chi\left(1+\gamma^2\right)>0,\ \left(\gamma^2-1\right)^2+2\chi^2\left(1+\gamma^2\right)-\frac{16}{9}k^2\nu^2>0.$$

The first two inequalities require that the damping (internal and aerodynamic) is positive. From the third inequality it follows that for small values ν, all characteristic roots λ lie in the left half of a complex variable, and the trivial solution $w\equiv 0$ is asymptotically stable with respect to small perturbations. The value of the parameter $\nu=\nu_{cr}$, for which two of the characteristic exponents are purely imaginary, and the remaining lie in the left half-plane, is critical and corresponds to the panel flutter speed in the linear formulation of this problem. Accordingly, the critical flutter speed in the case of the selected buckling form of the plate [2] can be obtained from the third inequality:

$$\nu_{cr}=\frac{3}{4}\frac{\gamma^2-1}{k}\sqrt{1+\frac{2\chi^2\left(\gamma^2+1\right)}{\left(\gamma^2-1\right)^2}}. \qquad (12)$$

Taking $\nu=\nu_{cr}$ from the characteristic equation Eq. (11a), the critical vibration frequency θ_{cr} in the linear formulation $\left(\lambda_{cr}=\pm i\theta_{cr}\right)$ is

$$\theta_{cr}^2=\frac{1}{2}\left(\gamma^2+1\right). \qquad (13)$$

It is worth noting that Eqs. (12) and (13) can also be found in [2,4] as well as other references, demonstrating that the proposed solution is a very good approximation for both ν_{cr} and θ_{cr}, determined on the basis of the exact solution [4-7,22].

4. Solution of nonlinear problem

The nonlinear problem described by Eqs. (8) is studied next. This system of equations is different from the one used to study the linear stability for flexible plates forced by non-conservative aerodynamic loading, specifically in terms of the aerodynamics, since now quadratic and cubic nonlinear terms are included in the problem formulation. Specifically, in the system of equation (8) asymmetric quadratic nonlinearities of aerodynamic and aeroelastic origin are included along with cubic terms. The quadratic nonlinearities are inherent to the problems of the stability of flexible shells. Therefore, the approximate periodic solution of Eqs. (8) is presented as [10]

$$x_1 = A_1 \cos\theta\tau + B_1 \sin\theta\tau + C_1 + \ldots,\quad x_2 = A_2 \cos\theta\tau + B_2 \sin\theta\tau + C_2 + \ldots \tag{14}$$

Here A_i, B_i, C_i и $\theta = \omega\omega_1^{-1}$ $(i = 1,2)$ are unknown constants; ω is unknown frequency of nonlinear vibrations and the dots denote high-order harmonic terms which, without loss of generality and accuracy, can safely be discarded. Contrarily to existing solutions, as reported in [2,13], the proposed one, Eqs. (14), includes also the constant terms $C_i \neq 0$, which are used to characterize the quadratic nonlinearities [10,23]. When substituted into Eqs. (8) the constant member and first harmonics $\cos\theta\tau$ and $\sin\theta\tau$ are retained while the terms containing harmonics are neglected. Although straightforwardly obtainable, the system of nonlinear algebraic equations is lengthily and is not presented here. To obtain the approximate solution of this system the following assumptions are made [10]:

a) the damping is small such that $\chi|B_i| << |A_i|$, $|B_i| << |A_i|$;

b) the aeroelastic system reaches a steady oscillatory state with finite amplitude around the equilibrium state, which is infinitesimally different from the unperturbed state, $\left(|A_i| >> |C_j|;\ j = 1,2\right)$.

According to these assumptions, and neglecting the degrees above the first and any of the products of B_1, B_2, C_1 and C_2, the nonlinear system can be represented by a subsystem of nonlinear equations including:

Two equations obtained by equating to zero the zero order terms:

$$C_1 - \frac{2}{3}k\nu C_2 + \frac{1}{2}k\nu^2\left(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2\right) + k\nu^3 A_2\left(\beta_{11}A_1C_1 + \beta_{12}A_2C_2\right) +$$
$$+\frac{1}{2}k\nu^3 C_2\left(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2\right) + QA_1\left(\gamma_{11}A_1C_1 + \gamma_{12}A_2C_2\right) +$$
$$+\frac{1}{2}QC_1\left(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2\right) = 0,$$
$$\gamma^2 C_2 + \frac{2}{3}k\nu C_1 + \frac{1}{2}k\nu^2\alpha_{21}A_1A_2 + k\nu^3 A_1\left(\beta_{21}A_1C_1 + \beta_{22}A_2C_2\right) +$$
$$+\frac{1}{2}k\nu^3 C_1\left(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2\right) + QA_2\left(\gamma_{21}A_1C_1 + \gamma_{22}A_2C_2\right) +$$
$$+\frac{1}{2}QC_2\left(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2\right) = 0;$$

Two equations obtained by equating to zero the coefficients of $\cos\theta\tau$:

$$\left(1-\theta^2\right)A_1 + \chi\theta B_1 - \frac{2}{3}k\nu A_2 + 2k\nu^2\left(\alpha_{11}A_1C_1 + \alpha_{12}A_2C_2\right) +$$
$$+\frac{3}{4}k\nu^3 A_2\left(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2\right) + \frac{3}{4}QA_1\left(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2\right) = 0,$$
$$\left(\gamma^2-\theta^2\right)A_2 + \chi\theta B_2 + \frac{2}{3}k\nu A_1 + \alpha_{21}k\nu^2\left(A_1C_2 + A_2C_1\right) +$$
$$+\frac{3}{4}k\nu^3 A_1\left(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2\right) + \frac{3}{4}QA_2\left(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2\right) = 0;$$

Two equations obtained by equating to zero the coefficients of $\sin\theta\tau$:

$$\left(1-\theta^2\right)B_1 - \frac{2}{3}k\nu B_2 - \chi\theta A_1 + \frac{1}{2}k\nu^3\beta_{11}A_1A_2B_1 +$$
$$+\frac{1}{4}k\nu^3\left(\beta_{11}A_1^2 + 3\beta_{12}A_2^2\right)B_2 + \frac{1}{4}Q\left(3\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2\right)B_1 +$$
$$+\frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_1A_2B_2 = 0,$$
$$\left(\gamma^2-\theta^2\right)B_2 - \chi\theta A_2 + \frac{2}{3}k\nu B_1 + \frac{1}{4}k\nu^3\left(3\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2\right)B_1 +$$
$$+\frac{1}{2}k\nu^3\beta_{22}A_1A_2B_2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1A_2B_1 +$$
$$+\frac{1}{4}Q\left(\gamma_{21}A_1^2 + 3\gamma_{22}A_2^2\right)B_2 = 0.$$

It should be noted that the third subsystem takes into account damping terms. Assuming that the damping is small $(\chi \approx 0)$, by performing a linearization of this equations, one obtains: $B_1 \approx 0, \;\; B_2 \approx 0$ for $\chi \approx 0$

Using the first subsystem let's express C_1 and C_2 trough A_1 and A_2 (see (16)). From the second subsystem the amplitudes of oscillations of the examined aeroelastic system, A_1 and A_2, are computed as function of the parameters θ and ν. Then for $\chi \approx 0$ it has the form:

$$\begin{gathered}
A_1(1-\theta^2) - \frac{2}{3}k\nu A_2 + 2k\nu^2\alpha_{11}A_1C_1 + 2k\nu^2\alpha_{12}A_2C_2 + \\
+\frac{3}{4}k\nu^3 A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0, \\
A_2(\gamma^2-\theta^2) + \frac{2}{3}k\nu A_1 + k\nu^2\alpha_{21}(A_1C_2 + A_2C_1) + \\
+\frac{3}{4}k\nu^3 A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Herein

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{k\nu^2}{2\Delta}\left[(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_2 - \alpha_{21}A_1A_2\Delta_4\right] \\
C_2 &= -\frac{k\nu^2}{2\Delta}\left[\alpha_{21}A_1A_2\Delta_1 - \left(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2\right)\Delta_3\right]
\end{aligned} \tag{16}$$

where

$$\Delta_1 = 1 + \frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2 + k\nu^3\beta_{11}A_1A_2,$$

$$\Delta_2 = \gamma^2 + k\nu^3\beta_{22}A_1A_2 + \frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2,$$

$$\Delta_3 = \frac{2}{3}k\nu + \frac{3}{2}k\nu^3\beta_{21}A_1^2 + \frac{1}{2}k\nu^3\beta_{22}A_2^2 + Q\gamma_{21}A_1A_2,$$

$$\Delta_4 = -\frac{2}{3}k\nu + \frac{3}{2}k\nu^3\beta_{12}A_2^2 + \frac{1}{2}k\nu^3\beta_{11}A_1^2 + Q\gamma_{12}A_1A_2, \; \Delta = \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4.$$

In the particular case when ν is in close proximity of ν_{cr} [2], it follows $A_1 \approx -A_2$. This can be demonstrated from the third subsystem after the linearization which leads to:

$$(1-\theta^2)B_1 - \frac{2}{3}k\nu B_2 - \chi\theta A_1 = 0, \; (\gamma^2-\theta^2)B_2 + \frac{2}{3}k\nu B_1 - \chi\theta A_2 = 0. \tag{17}$$

Taking into account that at the flutter boundary $\nu = \nu_{cr}$ и $\theta = \theta_{cr}$, from (12), (13) and (17) we have

$$\chi\theta_{cr}A_1=\frac{1-\gamma^2}{2}\left(B_1+B_2\right),\ -\chi\theta_{cr}A_2=\frac{1-\gamma^2}{2}\left(B_1+B_2\right);$$

As a result, as expected, $A_1\approx -A_2$, if ν is in the close proximity of ν_{cr} and θ tends to θ_{cr}. It should be noted that studies conducted in the [2,8,9] are based on an approximate equality $A_1\approx -A_2$.

This system (15) is solved numerically for the following initial set of parameters: $E=7.3\cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$; $\mu=0.34$; $\rho_0=2.79\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ (Duralumin), while the flow properties used are æ$=1.4$; $\rho_\infty=1.29 kg/m^3$; $a_\infty=340.29 m/s$ (air). The dependency of the amplitude A of steady oscillations at point $\left(a/2, b/2, 0\right)$ for which $A=A_1$ on the parameter ν, characterizing the flowing speed for several h/a, a/b and θ.

Numerical calculations, having done in [8,9], show that the relation h/a has significant influence (as qualitative, as well as quantitative) on the character of the dependence "amplitude-speed". Therefore, the cases of thick and thin plates will be considered separately.

4.1. Influence of supersonic flow on the character of dependence "amplitude-speed" in the case of sufficiently thick plates

The results of numerical solution of the system (15) for $a=70h$, $b=5a$ and several fixed values of θ, representing dependence of the amplitude of flutter type oscillations on the speed parameter ν, are brought in the Table 1 and on plotted on its basis Figures 1-3. The dependence $A(\nu)$ for several a/b and fixed θ is brought on the Table 2.

The most interesting result of these calculations is the following: limit cycle oscillations are possible as in pre-critical speeds of flowing stream $\left(\nu<\nu_{Cr}\right)$, as well as in post-critical stage $\left(\nu>\nu_{Cr}\right)$. A similar result in a qualitative sense, was obtained in [2.13], in which it is established, that for the certain parameters of the problem either hard type of oscillations $\left(\nu>\nu_{Cr}\right)$, or only soft type excitations $\left(\nu<\nu_{Cr}\right)$ occur. The reason for the noted discrepancy is the accounting of the wind type quadratic nonlinearity and the rejection of the assumption $A_1\approx -A_2$.

Table 1 show that for the chosen parameter b/a the change of the frequency θ has as qualitative, as well as quantitative influence on the dependence "amplitude-speed". Namely:

- If $\theta\in\left(0;1\right]$, such speed value ν_{cr} exists, for which if $\nu<\nu_{cr}$ then generation of limit cycle oscillations is impossible. For $\nu\geq\nu_{cr}$ dependence of the amplitude of oscillations on the speed of flowing stream (the function $A(\nu)$) is a two-value one, which tends to zero with the increasing ν (Fig.1).

Table 1. Influence of the parameter θ on the dependence "amplitude-speed".

ν/ν_G \ θ	0.5	1	1.1	1.5	2	4
0.2	-	-	0.387	1.558	2.500	5.693 0.036
0.24	-	-	0.097	1.522	2.480	5.687 0.044
0.25	-	-	0	1.512	2.475	5.685 0.047
0.568	-	-	-	1.446 0	2.511	5.519 0.137
0.57	-	-	-	1.451 0.100	2.513	5.516 0.138
0.7	-	-	-	2.221 0.625	2.754	4.561 0.155
0.722	-	1.526 1.477	1.829 1.165	2.293 0.622	2.721	4.175 0.152
0.77	1.582 1.466	1.997 0.997	2.054 0.922	2.265 0.602	2.500	3.165 0.147
0.8	1.811 1.126	1.976 0.892	2.009 0.837	2.140 0.585	2.286 0	2.532 0.142
0.9	1.526 0.792	1.550 0.685	1.555 0.656	1.567 0.518	1.562 0.273	1.027 0.130
1	1.154 0.629	1.147 0.561	1.144 0.542	1.125 0.454	1.078 0.312	0.267 0.187
1.4	0.477 0.335	0.460 0.310	0.455 0.303	0.429 0.271	0.382 0.224	-
2.6	0.120 0.105	0.113 0.099	0.111 0.097	0.102 0.088	0.087 0.074	-

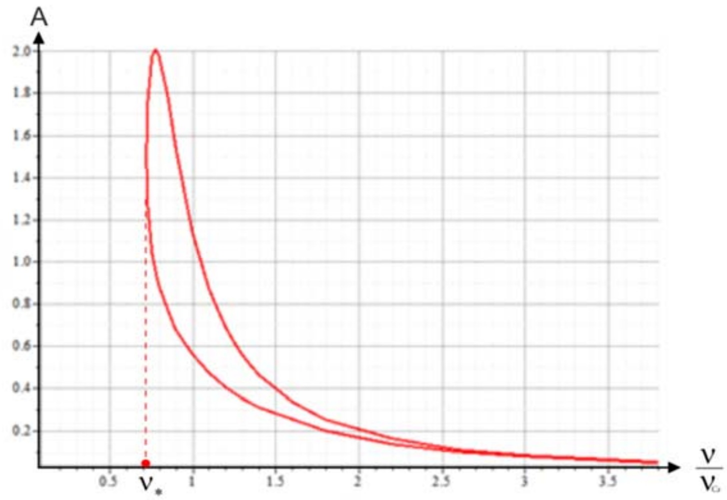


Fig.1. Plot of the function $A(\nu)$ for $\theta = 1$.

- If $\theta \in (1;\theta_1)$ (the value of θ_1 depends on the geometry of the plate), then a segment $[\nu_*, \nu^*]$ of the parameter ν exists, generation of limit cycle oscillations is impossible (Fig.2). Out of this segment for $\nu \le \nu_*$ the function $A(\nu)$ is a unique-value and monotone decreasing, and for $\nu \ge \nu^*$ the function $A(\nu)$ is a two-value one and qualitatively analogous to the function plotted in the Fig.1. With the increasing θ the length of the segment $[\nu_*, \nu^*]$ decreases and equals to zero at the certain value θ.

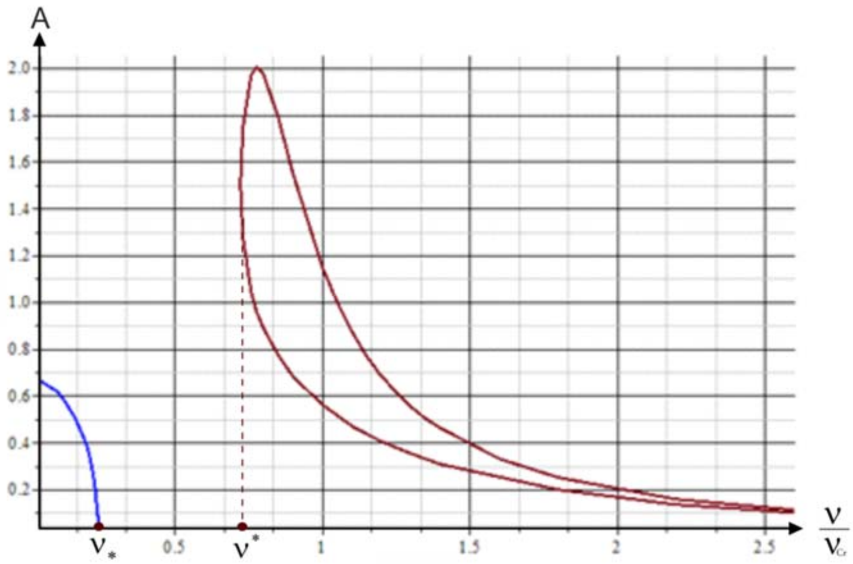


Fig.2. Plot of the function $A(\nu)$ при $\theta = 1.1$

- If $\theta_1 \le \theta < \theta_2$ (the segment $[\theta_1;\theta_2)$ can be changed depending on the plate's geometry) the plot of the function $A(\nu)$ is brought in the Fig.3. Such speed value ν_* exists, for which if $\nu < \nu_*$ the function $A(\nu)$ is a unique-value, while for $\nu \ge \nu_*$ it is a two-value one, which branches have maximum. After maximum points the amplitude is monotone decreases and tends to zero. With the increasing θ the value of ν_* increases.

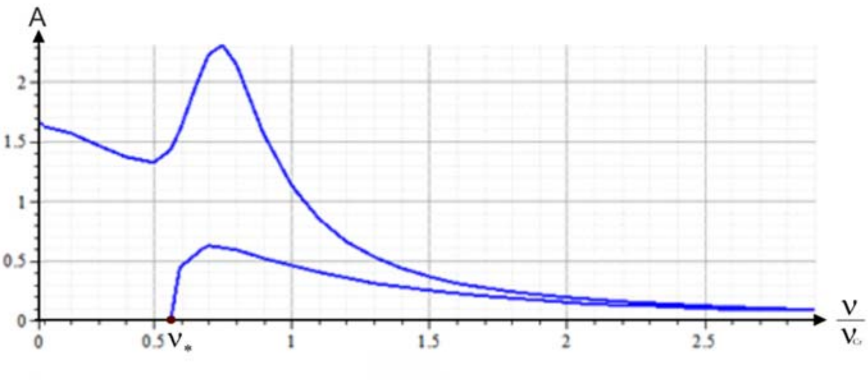


Fig.3. Plot of the function $A(\nu)$ for $\theta = 1.5$.

Let's note that here and in the future for the certain segments of frequency of oscillations the own ν_* and ν^* exist, which are brought in the corresponding figures. For the fixed geometry the change of the parameter θ has quantitative influence on the dependence "amplitude-speed", also. Table 1 shows that increment of the parameter θ brings to the change of the amplitude (the amplitude decreases on the lower branch, and increases – on the upper branch).

Let's study now the influence of the relation b/a on the dependence "amplitude-speed" for $\theta = 2$. The results of numerical calculations of the function $A(\nu)$ are brought on the Table 2.

Table 2. Influence of b/a on the dependence "amplitude-speed"

b/a \ $\frac{\nu}{\nu_{Cr}}$	0.2	0.5	0.75	0.82	0.85	1	1.5	2	3	5	10	15
5	2.5007	2.4245	2.6159	2.1320 0.0425	1.9028 01948	1.0781 0.3119	0.3183 0.2013	0.1569 0.1218	0.0640 0.0564	0.0221 0.0207	0.0054 0.0052	0.0024 0.0023
3	2.6659	2.6069	2.5436	1.9822	1.7125 0.0174	0.9845 0.2815	0.2947 0.1893	0.1459 0.1142	0.0597 0.0528	0.0206 0.0193	0.0051 0.0049	0.0022 0.0021
2	2.9415	2.9076	2.3273	1.6955	1.4818	0.8272 0.2243	0.2530 0.1677	0.1262 0.1005	0.0518 0.0461	0.0179 0.0168	0.0044 0.0042	0.0019 0.0018
1	3.4585	3.4119	0.9213	0.6144	0.5312	0.2957 0.0696	0.0909 0.0766	0.0450 0.0409	0.0183 0.0174	0.0063 0.0061	0.00154 0.00150	0.00068 0.00067

Table 2 shows, that this influence has only qualitative character. In particular, for $\theta = 2$ the Fig.3 is true. Both ν_* and corresponding values of the amplitude decrease with the increasing b/a.

4.2. Influence of supersonic stream on the behavior of non-linear oscillations for thick and sufficiently thin plates

Here numerical analysis is done for several data of parameters θ and b/a for the fixed h/a. The results of numerical solutions are brought in the tables 3-5. Having discussed the brought tables one can note, that the dependence $A(\nu)$ in the case of thin plates, in addition to the already known and brought in the Fig. 1 and 2, which were plotted in the case of thick plates, here new behaviors take place and on its basis Fig. 4-7 are plotted.
As table 3 shows in the case of thin plates for fixed b/a influence of the parameter θ on the dependence "amplitude-speed" has as qualitative, as well as quantitative character.

Table 3. Influence of frequency θ of oscillations on the dependence "amplitude-speed" for h/a=1/120,b/a=2

θ \ $\frac{v}{v_{Cr}}$	0.1	0.2	0.4	0.9	0.93	1.75	2.72	3.4	3.9	4	4.5	4.6	4.9	5
0.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.423 0.397	0.405 0.371
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.483 0.448	0.418 0.363	0.397 0.342
1.1	0.7361	0.5510	0	-	-	-	-	-	-	-	0.503 0.475	0.484 0.435	0.415 0.355	0.394 0.334
2	2.9679	2.9373	2.8077	1.5606 0	1.1244 0.8247	-	-	-	0.6708 0.5810	0.641 0.519	0.465 0.345	0.436 0.322	0.359 0.267	0.337 0.252
3	4.8593	4.8480	4.8023	4.5341 0.1363	4.5096 0.1864	2.6417 2.2734	-	0.7935 0.6475	0.5381 0.3387	0.491 0.306	0.312 0.195	0.286 0.179	0.223 0.143	0.205 0.132
4	6.6573 0.0366	6.6519 0.0738	6.6310 0.1522	6.5142 0.3939	6.5042 0.4111	6.0503 0.9831	1.9286 1.5904	-	-	-	-	-	-	-

Moreover:

- dependence $A(\nu)$ for $\theta \in (0;1]$ has the same character as in the case of sufficiently tick plates (Fig.1);
- depending on the geometrical parameters of the plate the certain such value of frequency $\theta_1 > 1$ exists, that if $\theta \in (1;\theta_1)$ the dependence $A(\nu)$ is identical to the dependence, brought in the Fig.2 and plotted in the case of sufficiently tick plates;

- in an analogous way, such segment $\left[\theta_1,\theta_2\right]$ of frequency exists, that for $\theta_1 \le \theta < \theta_2$ (this segment changes with the geometry of the plate), the function $A(\nu)$ has a plot, brought in the Fig.4, for more evidence which is drawn for b/a=5. In this case such certain values $\nu_*,\nu^*,\bar{\nu}$ of speed parameter ν exist, that if $\nu \in \left[\nu_*,\nu^*\right]$ then generation of limit cycle oscillations is impossible. Moreover if $\nu > \nu^*$ and $\nu \in \left(\bar{\nu},\nu_*\right)$ the function $A(\nu)$ is a two-value, and for $\nu < \bar{\nu}$ it is a unique-value function. With the increasing frequency of oscillations: a) length of the segment $\left[\nu_*,\nu^*\right]$ decreases; b) on the left side of ν_* the amplitude increases, and on the right side of ν^* it decreases. Let's note, that if $\theta = \theta_{cr}$, then $\bar{\nu} = 1$.

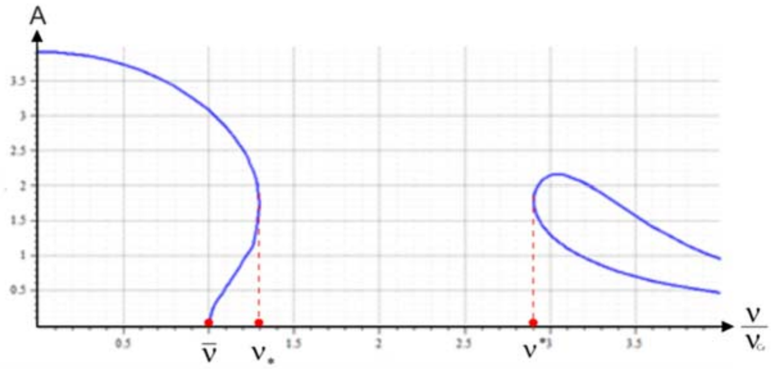


Fig.4. Dependence "amplitude-speed" for $h/a = 1/120,\ b/a = 5,\ \theta = \theta_{cr} \approx 2.84$

The results of numerical calculations of $A(\nu)$ in the case of sufficiently thin plates $\left(h/a = 1/300,\ b/a = 3\right)$ for several values of the parameter θ are brought in the Table 4. Table 4 shows, that for the fixed b/a the influence of the parameter θ on the behavior of the function $A(\nu)$ is presented as follows:

- If $\theta \in (0;1]$, then it is impossible to generate limit cycle oscillations in the sufficiently thin plates;
- If $\theta \in \left(1,\theta_1\right)$ (with the varying geometry θ_1 varies), then such speed value ν_* exists, that if $\nu > \nu_*$ then it is impossible to generate limit cycle oscillations, and for $\nu \le \nu_*$ the dependence of the amplitude on the flowing speed (the function $A(\nu)$) is a unique-value and monotone decreasing one (Fig.5), moreover

$A(\nu_*)=0$. Let's note, that the mentioned behavior of the function $A(\nu)$ is explored and studied in [2];

Table 4. Influence of the parameter θ on the function $A(\nu)$

θ \ $\frac{\nu}{\nu_{Cr}}$	0.1	0.2	0.26	0.5	0.8	0.85	1	1.1	1.248	1.5	1.59	2.2
0.5	-		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1.1	0.660	0.446	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1.9	2.515	2.473	2.433	2.1345	0.7617	0	-	-	-	-	-	-
2.71	3.937	3.917	3.898	3.7717	3.4605	3.3855	3.0976 0	2.8219 0.5721	1.8213 1.6641	-	-	-
3.2	4.755	4.741	4.728	4.6446	4.4501	4.4061 0	4.2490 0.2672	4.1191 0.4320	3.8759 0.7111	3.1738 1.4671	2.401 2.260	-
4	6.061 0.027	6.053 0.054	6.046 0.072	5.9991 0.1523	5.8939 0.2897	5.8710 0.3177	5.7920 0.4120	5.7303 0.4845	5.6237 0.6078	5.3924 0.8713	5.291 0.986	2.437 3.953

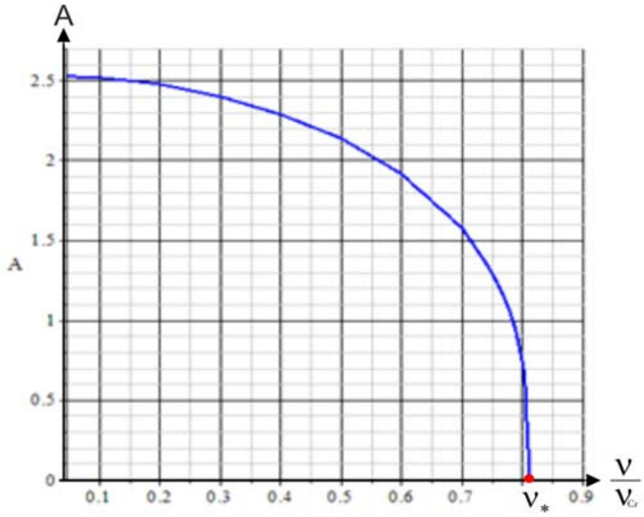


Fig.5. Plot of the function $A(\nu)$ for $\theta=1.9$

- If $\theta \in [\theta_1, \theta_2)$ (this segment changes with the geometry of the plate), then the plot of the function $A(\nu)$ is brought in the Fig.6. For clarity and diversity the Fig.6 is drawn for $h/a = 1/300,\ b/a = 3$. In this case such certain values ν_* and $\bar{\nu}$ of the parameter ν exist, that: a) if $\nu \geq \nu_*$ then it is impossible to generate limit cycle oscillations; b) if $\nu \in (\bar{\nu}, \nu_*)$, then the function $A(\nu)$ is a two-value one; c) if $\nu < \bar{\nu}$, then it is a unique-value, monotone decreasing function.

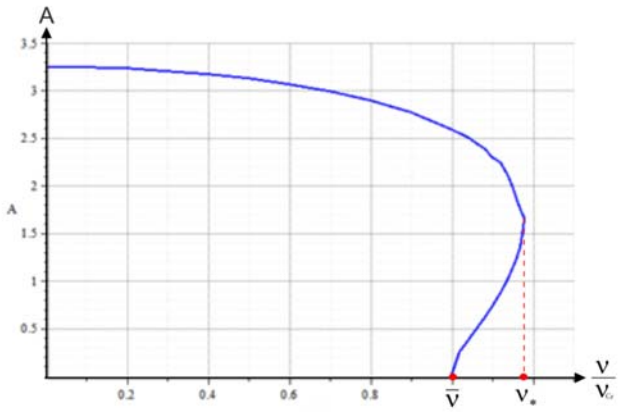


Fig.6. Dependence "amplitude-speed" for $h/a = 1/120,\ b/a = 1,\ \theta = \theta_{cr} \approx 1.9$

For the fixed relations h/a and θ the influence of the parameter b/a has only quantitative character as in the case of relatively tick plates, as well as in the case of sufficiently thin plates. In particular, when $h/a = 1/150$ and $\theta = 2$ the function $A(\nu)$ is presented via the Fig.6, and with the increasing b/a the length of the segment $[\bar{\nu}, \nu_*]$ decreases, moving to the left, moreover the values of the amplitude are decreased (Table 5). Calculations show, also, that for large values of θ as in the case of thick plates, as well as in the case of thin plates the dependence take place, brought in the Fig.7, which indicates, that such certain ν^* exists, that if $0 < \nu \leq \nu^*$, then the function $A(\nu)$ is a two-value one, and out of this segment it is impossible to generate limit cycle oscillations (Fig.7).

Table 5. Influence of the relation b/a on the dependence “amplitude-speed” for h/a=1/150 и $\theta = 2$

$\frac{\nu}{\nu_{Cr}}$ / b/a	0.2	0.3	0.5	0.8	0.8188	0.8195	0.8497	0.854	0.902	0.925	0.98	1	1.275
5	2.4958	2.4230	2.1636	0.9981	0.5336 0	0.4173 0.3249	-						
3	2.6612	2.5954	2.3622	1.4533	1.3142	1.3083	0.9064 0	0.7392 0.4521	-		-	-	-
2	2.9373	2.8846	2.6993	2.0522	1.9775	1.9745	1.8325	1.8094	1.4565 0	0.9617 0.8894	-		
1	3.4570	3.4368	3.3693	3.1796	3.1629	3.1622	3.1337	3.1295	3.0792	3.0528	2.9688 0	2.9545 0.1360	1.9281 1.8105

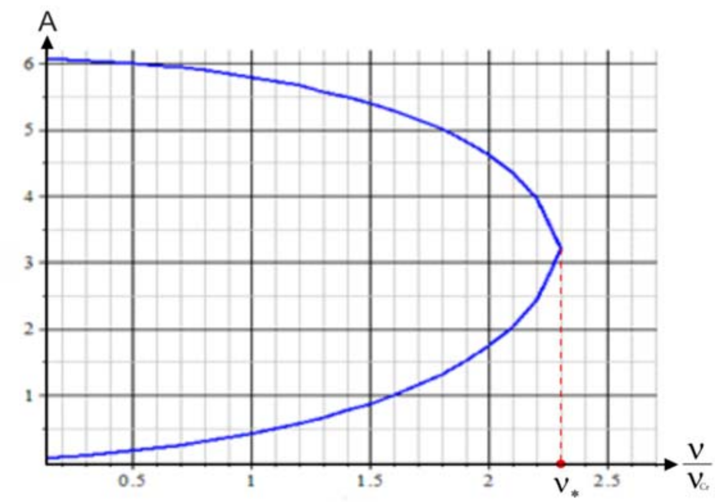


Fig.7. Plot of the function $A(\nu)$ for h/a=1/300, b/a=3, θ=4

In this paper the influence of the relation h/a on the dependence $A(\nu)$ is investigated, also, for the fixed b/a and appropriate critical frequencies. The results of numerical calculations are brought in the Table 6. The noted table is composed of three parts, in which the values of $A(\nu)$ are brought for the fixed b/a and appropriate critical frequencies, which, as it is known (see equation (13)) independent of h/a.

Table 6. Influence of h/a on the dependence "amplitude-speed".

b/a=5, θ=2.836													
h/a \ $\frac{\nu}{\nu_{Cr}}$	0.2	0.5	0.8	1	1.1	1.24	1.29	1.5	2	2.91	3.8	4.4	5
1/300	3.8821	3.7297	3.4070	3.0376 0	2.7616 0.5612	1.9817 1.4143	-	-	-	-	-	-	-
1/120	3.8821	3.7307	3.4169	3.0751 0	2.8372 0.5284	2.3286 1.1123	1.9325 1.5205	-	-	1.8611 1.6941	1.1491 0.5302	0.6363 0.3362	0.3862 0.2295
1/70	3.8837	3.8152	2.4655	0.9210 0	0.6209 0.1567	0.3959 0.1611	0.3448 0.1549	0.2116 0.1241	0.0949 0.0722	0.0387 0.0340	0.0215 0.0198	0.0157 0.0147	0.0121 0.0113
b/a=2, θ=2.505													
h/a \ $\frac{\nu}{\nu_{Cr}}$	0.2	0.5	1	1.1	1.2	1.2449	1.2834	2	3.54	3.8	4	4.5	5
1/300	3.9252	3.7932	3.1653 0	2.8983 0.5951	2.4508 1.1474	1.8431 1.7962	-	-	-	-	-	-	-
1/120	3.9252	3.7952	3.2032 0	2.9701 0.5582	2.6272 0.9941	2.3837 1.2683	1.8640 1.8111	-	0.7415 0.7311	0.6863 0.4923	0.5927 0.4039	0.4036 0.2703	0.2818 0.1944
1/70	3.9274	3.8934	0.6856 0	0.4780 0.1521	0.3528 0.1566	0.3124 0.1521	0.2832 0.1469	0.0827 0.0661	0.0226 0.0208	0.0195 0.0187	0.0174 0.0163	0.0136 0.0128	0.0109 0.0104
b/a=1, θ=1.904													
h/a \ $\frac{\nu}{\nu_{Cr}}$	0.2	0.5	1	1.1	1.15	1.178	1.187	2	3.5	4	4.5	4.9	5
1/300	3.2304	3.1276	2.5956 0	2.3211 0.7364	2.1285 1.1527	1.7012 1.5717	-	-	-	-	-	-	-
1/120	3.2304	3.1285	2.6155 0	2.3584 0.6932	2.1383 1.0377	1.9080 1.3432	1.7242 1.5524	-	-	-	-	0.1340 0.1329	0.1301 0.1217
1/70	3.2321	3.1855	0.3459 0	0.2587 0.1423	0.2274 0.1424	0.2124 0.1395	0.2079 0.1384	0.0567 0.0506	0.0169 0.0160	0.0128 0.0122	0.0101 0.0096	0.0084 0.0081	0.0081 0.0078

Table 6 shows, that the relation h / a has as qualitative, as well as quantitative influence on the function $A(\nu)$. With the decreasing h / a the behavior of examined dependence varies as follows: in the beginning it is similar to the dependence shown in Figure 3, which is plotted in the case of sufficiently thick plates. Having decreased h / a, the plot of the function $A(\nu)$ is changed, and becomes identical to the plot, constructed in the case of plates of medium thickness (Fig.4). A further decrease of the relative thickness brings to the change of the plot of the function $A(\nu)$ and becomes similar to the Fig.6, which corresponds to the case of sufficiently thin plates.

5. Main results

In conclusion, let's present in our opinion most important some new results obtained in this study. They are the result of the influence of the flowing supersonic stream on the character of nonlinear oscillations of examined aeroelastic system and can be addressed as follows.

- Due to the aerodynamic non-linearity (especially its non-symmetrical quadratic part) it is established, that dependence $A(\nu)$, in the certain segments of speed parameter ν, is a two-value one. This fact is illustrated in the figures in the form of two branches, the lower branches of which, probably, are unstable. Unstable branches separate the areas of two neighboring stable solutions. Thence it is easy to find the magnitude of disturbance required to transfer the system from one stable branch to another;
- Existence of certain areas of change ν is shown at which it is impossible to excite flutter type limit cycle oscillations as in pre-critical speeds, as well as in post-critical stage;
- Results, obtained in this paper can be the basis for formulation and investigation of problems of optimal control for the magnitude of the amplitude of flutter type oscillations via the appropriate choice of geometrical parameters of the plate.

This work was supported by the RA MES State Committee of Science, in the frames of the research project № SCS 15T-2C134.

REFERENCES

1. Volmir A.S. Nonlinear dynamics of plates and shells. M.: Nauka, 1972, pp.1-432.
2. Bolotin V.V. Non-conservative problems of theory of elastic stability. M.: Fizmatgiz, 1961, pp. 1-339.
3. Algazin S.D., Kiyko I.A. Flutter of plates and shells. M.: Science, 2006. 247p.
4. Novichkov Y.N. Flutter of plates and shells. //Results of science and technology. Mechanics of deformable solids. – M.: Nauka, 1978. Vol.11, pp. 67-122.
5. Hedzhpet D. Flutter rectangular simply supported panels at high supersonic speeds. "Mechanics" IL, №2, 1958, p.103-125.
6. Movchan A.A. Oscillations of a plate moving in a gas. //PMM. 1956. Vol.20, Issue 2, pp.211-222.
7. Miles J.W. Supersonic flutter of a cylindrical shell. //Journ. Aeronaut. Sci. 24, №2, (1957); 25, № 5 (1958).

8. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. Saghoyan R.O. Non-linear flutter of orthotropic rectangular plate. Collection of scientific papers of the international conference. //Actual problems of continuum mechanics, 2010, vol.1, pp.118-123.
9. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. & Marzocca P. On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post- Critical Flight Conditions. //Journal of Aerospace Engineering, 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000246 (Jul. 19, 2012), ISSN: 0893-1321, 2012.
10. Baghdasaryan G.Y. On the stability of orthotropic shells in supersonic gas flow. //Izv.AN USSR OTN Mechanics and Engineering, 1961, №4, pp. 92-98.
11. P. Marzocca, L. Librescu, D.H. Kim, I. Lee, S. Schober. Generalized Transonic Unsteady Aerodynamics via Computational-Fluid-Dynamics Indicial Approach. //AIAA Journal, vol.43, №4, April 2005, pp.915-921.
12. D.-H. Kim, I. Lee. P. Marzocca, L. Librescu, S. Schober. Nonlinear Aeroelastic Analysis of an Airfoil Using CFD-Based Indicial Approach. //Journal of Aircraft, vol. 42, №5, September–October 2005, pp. 1340-1344.
13. Bolotin V.V., Gavrilov Y.V., Makarov B.P., Schweiko Y.Y. Nonlinear stability problem of flat panels at high supersonic speeds. //Math. AN SSSR, OTN, Mechanics and Mechanical Engineering, №3, 1959, pp.3-14.
14. Fung Y.C. On two-dimensional panel flutter. //Journ. Aeronaut. Sci. 25, № 3 (1958).
15. Shen. S.F. An Approximate Analysis of Nonlinear Flutter Problems. //Journal of the Aerospace Sciences, vol. 26, №1, 1959, pp. 25-32.
16. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O., Marzocca P. Influence of Supersonic Stream on the Dependence “Amplitude-Frequency” of Nonlinear Vibrations of Flexible Plate. //Proc. NAS RA, Mechanics, 2013, 66 №3, p.24-37.
17. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O. Character of the dependence amplitude-frequency of non-linear flutter type oscillations of flexible plate at critical speeds. //Applied Mathematics and Mechanics, Gyumri, 2014, vol.A, №1, p.20-39.
18. Vlasov V.Z. The general theory of shells and its applications in engineering. M.: Gostekhizdat, 1949.
19. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. //Journ. Aeronaut. Sci. 23, №6, 1956.
20. Ilyushin A.A. The law of plane cross sections at high supersonic speeds. //Appl.Math. Mech., vol. XX, №6, 1956.
21. Merkin D.P. Introduction to the theory of stability of motion. M.: Nauka, 1971. 312p.
22. Schweiko Y.Y. Stability of circular cylindrical shell in a gas flow. //Math. AN SSSR, OTN, 1960, №6, pp.112-116.
23. Gnuni V.Ts. On the theory of dynamic stability of laminated anisotropic shallow shells. //Proceedings of the AS of the Arm.SSR, 13, №1, 1960, pp.29-36.

<u>About the authors:</u>

Baghdasaryan Gevorg Yervand – Academician of the NAS RA, Professor, Main researcher at the Institute of Mechanics NAS RA, **Phone:** (060) 71 00 89; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Mikilyan Marine Alexander – Ph.D., Docent, Senior researcher at the Institute of Mechanics NAS RA, **Phone:** (091) 191129; **E-mail:** mikilyan@rau.am

Saghoyan Rafayel Onik – Freelance employer, Institute of Mechanics NAS RA
Phone: (093) 248226; **E-mail:** rafael1984@mail.ru.

Received 07.07.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №4, 2016 Механика

УДК 539.3

ON THE INFLUENCE OF BOUNDARY CONDITIONS ON THE DEPENDENCE AMPLITUDE-FREQUENCY OF NON-LINEAR FLUTTER TYPE OSCILLATIONS OF RECTANGULAR PLATE AT CRITICAL SPEED

Saghoyan R.O.

Ключевые слова: Гибкие пластинки, сверхзвуковой поток газа, амплитудно-частотная зависимость.
Keywords: Flexible plates; supersonic gas flow; dependence amplitude-frequency.
Բանալի բառեր. Ճկուն սալեր, գազի գերձայնային հոսք, ամպլիտուդ-հաճախություն կապ:

Сагоян Р.О.
О влиянии граничных условий на амплитудно-частотную зависимость нелинейных флаттерных колебаний прямоугольной пластинки при критических скоростях

Рассматривается задача нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейности: аэродинамической (квадратичной и кубической) и геометрической (кубической). Известно, что зависимость частоты нелинейных колебаний пластинки от амплитуды в отсутствии обтекающего потока носит жёсткий характер, т.е. с увеличением амплитуды частоты колебаний возрастают. В настоящей работе установлено, что присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости. В работе исследуется влияние типа закрепления границы пластинки в тангенциальных направлениях на амплитудно-частотную зависимость нелинейных флаттерных колебаний шарнирно опёртой по всему контуру прямоугольной пластинки при критической скорости потока. Показано, что переход из одного типа амплитудно-частотной зависимости к другому можно регулировать соответствующим выбором как геометрических и физических параметров аэроупругой системы, так и за счёт изменения краевых условий.

Սաղոյան Ռ.Օ.
Եզրային պայմանների ազդեցությունը ճկուն սալի ոչ գծային ֆլատերային տատանումների ամպլիտուդ-հաճախություն կապի վրա կրիտիկական արագությունների դեպքում

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող իզոտրոպ ուղղանկյուն սալի ոչ գծային տատանումների խնդիրը իր հարթության մեջ տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Հետազոտությունը կատարված է երկու տիպի ոչ գծայնությունների հաշվառմամբ. աերոառաձգական (քառակուսային և խորանարդային) և երկրաչափական (խորանարդային): Հայտնի է, որ շրջհոսող գազի բացակայության դեպքում սալի ոչ գծային տատանումների հաճախության ամպլիտուդից կախումը ունի կոշտ բնույթ, այսինքն՝ տատանումների ամպլիտուդայի մեծացման հետ հաճախությունն աճում է: Ներկայացվող աշխատանքում ցույց է տրված, որ շրջհոսող գազի առկայությամբ եզրային պայմանների փոփոխությունը բերում է նշված կապի ինչպես քանակական, այնպես էլ որակական փոփոխությանը: Աշխատանքում ուսումնասիրվում է տանգենցիալ ուղղություններում սալի եզրերի ամրակցվածության տեսակի ազդեցությունը ամբողջ կոնտուրով հոդակապորեն ամրացված ուղանկյուն սալի ոչ գծային ֆլատերային տատանումների ամպլիտուդ-հաճախություն կապի վրա հոսքի կրիտիկական արագության ժամանակ: Ցույց է տրված, որ ամպլիտուդ-հաճախություն կապի մի տեսակից մյուսին անցումը կարելի կառավարել ինչպես երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի համապատասխան ընտրությամբ, այնպես էլ եզրային պայմանների փոփոխության հաշվին:

The problem of nonlinear oscillations of an isotropic rectangular plate in a supersonic gas flow is examined. The study was conducted taking into account both types of nonlinearities: wind (quadratic and cubic) and geometric (cubic). It is known that nonlinear dependence of the frequency on the amplitude of the oscillations of the plate in absence of flowing stream has a hard character, i.e. with increasing amplitude the frequency increases. In this paper it is established that the presence of flowing stream may cause both quantitative and qualitative changes of the character of noted monotonically increasing dependence. The influence of boundary conditions along the tangential directions of simply supported plate on the dependence amplitude-frequency of non-linear flutter type oscillations at critical speeds is investigated in this paper. It is shown that transmission from one type of examined dependence to another can be controlled as via the appropriate choice of both geometrical and physical parameters of aeroelastic system, as well as via the change of boundary conditions.

Introduction

There are many investigations devoted to the study of stability of plates and shells in supersonic gas flow [1-5]. A short review of up-to-date known results is brought in the work [6]. Let us note here the results devoted to the present work only. In the work [5] the dependence «amplitude-frequency» of non-linear flutter type oscillations is studied in the case of critical value of flowing speed. It was shown, that a) due to the aerodynamic non-linearity (especially its non-symmetrical quadratic part) character of the dependence «amplitude-frequency» of non-linear flutter type oscillations of the plate in a supersonic gas flow is similar to the character of noted dependency of non-linear natural oscillations of shells; b) the range of variation of allowable frequencies at which it is possible to excite flutter type oscillations can be as finite, as well as semi-infinite; c) transition from one type of «amplitude-speed» dependency into another (up to the impossibility of excitation of such oscillations) can be controlled with an appropriate choice of the geometrical and physical parameters of the considered aeroelastic system, depending on the flow speed.
The influence of boundary conditions along the tangential directions of simply supported plate on the dependence amplitude-frequency of non-linear flutter type oscillations at critical speeds is investigated in this paper. It is shown that

- The choice of the type of boundary conditions in the presence of flowing stream may bring to the both quantitative and qualitative change the character of the noted monotone increasing dependence;
- Transmission from one type of examined dependence to another can be controlled as via the appropriate choice of both geometrical and physical parameters of aeroelastic system, as well as via the change of boundary conditions.

1. Stability Problem formulation

The problem is formulated by considering a thin isotropic rectangular plate of constant thickness h . It is referred to the Cartesian coordinate plane α, β, γ and the coordinate plane α, β coincides with the middle plane of the plate, and the coordinate lines α and β are directed along the edges of the considered plate. A supersonic gas flow with freestream velocity magnitude $\vec{u}$, is aligned with the axis 0α, on one side of the panel only. A supersonic gas flow with freestream velocity magnitude $\vec{u}$, is aligned with the axis 0α, on one side of the panel only.
The initial assumptions for mathematical modeling and investigation of the examined problem are brought in the work [6]. Here, in addition to the brought in the noted work stability equations, let's formulate the boundary conditions only:
for $\alpha = 0, \ \alpha = a$

$$w=0,\quad M_\alpha=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)=0, \tag{1}$$

$$T_\alpha^0=c_\alpha\Delta_\alpha,\ T_{\alpha\beta}^0=0 \tag{2}$$

for $\beta=0,\ \beta=b$

$$w=0,\quad M_\beta=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right)=0, \tag{3}$$

$$T_\beta^0=c_\beta\Delta_\beta,\ T_{\beta\alpha}^0=0. \tag{4}$$

where $T_\alpha^0,\ T_\beta^0,\ T_{\alpha\beta}^0$ are the average values of the force at the edges of the plate, $\Delta_\alpha,\Delta_\beta$ are average relative declinations of edges, and $c_\alpha,\ c_\beta$ – stiffness coefficients of elastic ties. If $c_\alpha,\ c_\beta$ are equal to zero, then we deal with a boundary value problem when the edge of the plate can freely move in own plane, and when $c_\alpha,\ c_\beta$ – are non-zero, then we have a problem when the edges of the plate are fixed.

2. Solution of stability problem.

An approximate solution of the formulated problem let's present using Galerkin method. Substituting it into the stability equations one can obtain a linear non-homogeneous differential equation with respect to the function F. By satisfying the boundary conditions one can obtain the following expression for F:

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta,t)=\frac{Eh}{4}\Bigg[&-\frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}f_1f_2\cos(\lambda_1\alpha)+\frac{\mu_1^2}{8\lambda_1^2}f_1^2\cos(\lambda_2\alpha)+\frac{\mu_1^2}{9\lambda_1^2}f_1f_2\cos(\lambda_3\alpha)+\\&+\frac{\mu_1^2}{32\lambda_1^2}f_2^2\cos(\lambda_4\alpha)+\frac{9\lambda_1^2\mu_1^2}{\Delta_{\lambda_1\mu_2}}f_1f_2\cos(\lambda_1\alpha)\cos(\mu_2\beta)-\\&-\frac{\lambda_1^2\mu_1^2}{\Delta_{\lambda_3\mu_2}}f_1f_2\cos(\lambda_3\alpha)\cos(\mu_2\beta)+\left(\frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2}f_2^2+\frac{\lambda_1^2}{8\mu_1^2}f_1^2\right)\cos(\mu_2\beta)\Bigg]-\\&+\frac{1}{2}\left(T_\alpha^0\beta^2+T_\beta^0\alpha^2\right),\end{aligned}$$

where

$$T_\alpha^0=\frac{\pi^2Eh\delta_1}{8a^2(1-\mu^2\delta_1\delta_2)}\left(f_1^2+4f_2^2+\mu\varphi^2\delta_2\left(f_1^2+f_2^2\right)\right),$$

$$T_\beta^0=\frac{\pi^2Eh\delta_2}{8a^2(1-\mu^2\delta_1\delta_2)}\left(\varphi^2\left(f_1^2+4f_2^2\right)+\mu\delta_1\left(f_1^2+4f_2^2\right)\right),\quad \varphi=\frac{a}{b}$$

Here the following notations are done:

$\delta_1 = \left(1 + \frac{Eh}{ac_\alpha}\right)^{-1}, \delta_2 = \left(1 + \frac{Eh}{bc_\beta}\right)^{-1}$. The values $\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 0$ correspond to the conditions of free in the plane edges, non-zero values correspond to the fixed edges, and values $\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1$ correspond to the conditions of fixed in the plane edges.

To determine the unknown functions $f_{ik}(t)$ let's substitute the solution of Galerkin's form into the stability equations and using the Bubnov-Galerkin method, with respect to the to dimensionless functions $x_1 = f_1(t)/h, \; x_2 = f_2(t)/h$ the following nonlinear system of ordinary differential equations is obtained [3]:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3}k\nu x_2 + k\nu^2\left[\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_2^2 + \right. \\ &\qquad \left. + \nu x_2\left(\beta_{11}x_1^2 + \beta_{12}x_2^2\right)\right] + Qx_1\left(\gamma_{11}x_1^2 + \gamma_{12}x_2^2\right) = 0 \\ &\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2 x_2 + \frac{2}{3}k\nu x_1 + k\nu^2\left[\alpha_{21}x_1x_2 + \right. \\ &\qquad \left. + \nu x_1\left(\beta_{21}x_1^2 + \beta_{22}x_2^2\right)\right] + Qx_2\left(\gamma_{21}x_1^2 + \gamma_{22}x_2^2\right) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Herein, along with the dimensionless time $\tau = \omega_1 t$, the following notations are done:

$$\begin{aligned} &\omega_i^2 = \frac{D}{\rho_0 h}\left(\lambda_i^2 + \mu_1^2\right)^2 \quad (i = 1,2), \quad k = \frac{4æp_\infty}{\rho_0\omega_1^2 h^2}, \quad Q = \frac{h}{16\rho_0\omega_1^2}, \\ &\nu = M\frac{h}{a}, \qquad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \qquad \chi = \frac{2}{\omega_1}\left(\varepsilon + \frac{æp_\infty}{\rho_0 h a_\infty}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\alpha_{11} = \frac{2}{9}(æ+1), \quad \alpha_{12} = \frac{56}{45}(æ+1), \quad \alpha_{21} = \frac{16}{45}(æ+1), \; \beta_{11} = \beta_{21} = \frac{\pi^2}{40}(æ+1), \tag{7}$$

$$\beta_{22} = \frac{11\pi^2}{70}(æ+1), \quad \beta_{12} = -\frac{9\pi^2}{70}(æ+1), \; \gamma_{11} = Eh\lambda_1^4\left(1 + \varphi^4 + 2\frac{\left(\delta_1 + 2\mu\varphi^2\delta_1\delta_2 + \varphi^4\delta_2\right)}{1 - \mu^2\delta_1\delta_2}\right),$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = Eh\lambda_1^4\left(4\left(1+\varphi^4\right) + \frac{81\varphi^4}{\left(1+4\varphi^2\right)^2} + \frac{\varphi^4}{\left(9+4\varphi^2\right)^2} + 2\frac{\left(4\delta_1 + 5\mu\varphi^2\delta_1\delta_2 + \varphi^4\delta_2\right)}{1 - \mu^2\delta_1\delta_2}\right),$$

$$\gamma_{22} = Eh\lambda_1^4\left(16 + \varphi^4 + 2\frac{\left(16\delta_1 + 8\mu\varphi^2\delta_1\delta_2 + \varphi^4\delta_2\right)}{1 - \mu^2\delta_1\delta_2}\right),$$

where ω_1 and ω_2 – are first and second natural frequencies of the plate, while ν is the reduced speed parameter.

The solution of the nonlinear problem is usually preceded by analysis of the corresponding linear problem, which is done in detail in the work [6] and accordingly, the critical flutter speed in the case of the selected buckling form of the plate is obtained. After the nonlinear problem is solved using harmonic balace method. As a result the system of non-linear algebraic equations are obtained [6].

3. Character of the dependence «amplitude-frequency» at critical speeds, when the edges of the plate have identical fixing conditions

Brought in [4,5] numerical investigations show that the relation h/a has essential influence (both qualitative and quantitative) on the character of the dependence «amplitude-frequency». That is why the cases of both relatively thick and sufficiently thin plates will be investigated here separately.

Case 1. Thick plates ($h/a>10^{-2}$). The results of numerical solution of the system (15) from the work [6] for $\nu = \nu_{cr}$ and several boundary conditions are brought in the Table 1. Calculated values of the amplitude of oscillations are brought here for $a = 70h$ and for several fixed b/a .

Table 1. Dependence "amplitude-frequency, $A(\theta)$ for h/a=1/70, several b/a and fixing conditions

b/a=3

δ_i \ θ	0	0.367	1.4	1.76	2	2.71 θ_{cr}	2.8	3.2	4	5.0283
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	1.3999 0.8460	1.4068 0.8238	1.4442 0.5727	1.4378 0.4384	1.423 0.337	1.316 0	1.292 0.0407	1.1612 0.1491	0.4510 0.3773	-
$\delta_1=0.25$ $\delta_2=0.25$	-	1.196 1.187	1.642 0.632	1.739 0.462	1.795 0.346	1.918 0	1.928 0.037	1.959 0.142	1.921 0.1711	1.158 1.154
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	-	0.8102 0.7657	1.260 0.387	1.907 0	1.9907 0.0307	2.4004 0.1289	2.9621 0.1563	3.7768 0.2503

b/a=2

δ_i \ θ	0	1.4	1.657	2	2.506 θ_{cr}	2.8	3.2	3.4683	4
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	1.2154 0.8590	1.2498 0.5336	1.2318 0.4273	1.1845 0.2669	1.0552 0	0.9374 0.1257	0.6933 0.1314	0.2974 0.2899	-
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	0.7788 0.7674	1.3486 0.2782	1.8178 0	2.0699 0.0934	2.4057 0.1417	2.6285 0.1523	3.0672 0.1980

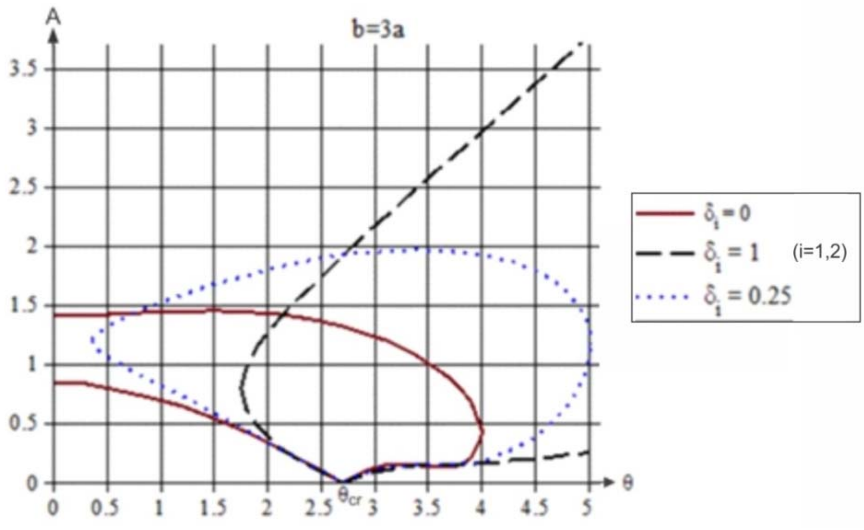
b/a=1.5									
δ_i \ θ	0	1.4	1.5686	2	2.287 θ_{cr}	2.5	2.981	3.5	4
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	0.9788 0.9249	1.0470 0.4833	1.0235 0.4043	0.9204 0.1732	0.8123 0	0.7057 0.1112	0.2351 0.2063	-	-
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	0.7125 0.7101	1.3676 0.1630	1.6228 0	1.8019 0.0822	2.1947 0.1498	2.6124 0.2096	3.0131 0.3272

b/a=1.3											
δ_i \ θ	0	0.52	0.868	1	1.526	1.8	2.1589 θ_{cr}	2.4	2.7214	2.8848	3.5
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	-	0.893 0.862	0.964 0.686	0.965 0.631	0.905 0.384	0.832 0.231	0.686 0	0.547 0.131	0.198 0.192	-	-
$\delta_1=0.25$ $\delta_2=0.25$	-	-	0.898 0.893	1.013 0.732	1.076 0.402	1.048 0.231	0.953 0	0.845 0.122	0.609 0.152	0.3080 0.3000	-
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	-	-	0.694 0.650	1.146 0.237	1.456 0	1.642 0.098	1.8788 0.1483	1.9972 0.1624	2.4376 0.3112

b/a=1									
δ_i \ θ	0	0.848	1.456	1.8	1.9039 θ_{cr}	2.1	2.24	2.8467	3.5
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	-	0.7210 0.7176	0.6772 0.3313	0.5317 0.0860	0.4735 0	0.3385 0.1395	0.1825 0.1662	-	-
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	0.5758 0.5406	0.9707 0.0749	1.0212 0	1.0893 0.1033	1.1174 0.1417	0.7022 0.6881	-

b/a=0.6									
δ_i \ θ	0	1.262	1.369	1.4	1.4523 θ_{cr}	1.46	1.4616	1.51479	1.6
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	-	0.3050 0.2988	0.2539 0.1731	0.2317 0.1284	0.1664 0	0.7057 0.1112	0.2351 0.2063	-	-
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	0.2294 0.2102	0.2691 0.1087	0.2559 0	0.2509 0.0149	0.2498 0.0181	0.1607 0.1592	-

In Table 1 the symbol "-" means that the amplitude of oscillation for the specific parameter set is equals to zero and there are no periodic solutions of the system (15) of the work [6]. Figure 1 is plotted on the basis if the Table 1.

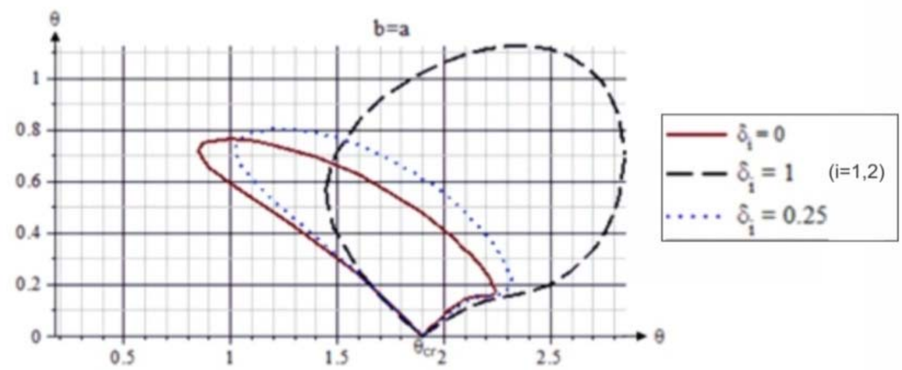


a)

Tabe 1 and Fig.1 show, that:

- for $b/a>1$ if $\delta_i=0(i=1,2)$ there is a range $[\theta_*,\theta^*]$ of frequency θ, where the function $A(\theta)$ is a two-value, and out of which the steady nonlinear flutter type oscillations cannot be obtained (for great values of the relation b/a one can obtain $\theta_*\approx 0$). Uniform increase of values $\delta_i\,(i=1,2)$ brings to the increase of the values θ_*. If $\delta_i=1(i=1,2)$, then the interval $[\theta_*,\infty)$ exists, where the function $A(\theta)$ is a two-valued;

- for $0.5 < \frac{b}{a} \leq 1$ regardless of the character of boundary conditions there exists a finite interval $\theta_* \leq \theta \leq \theta^*$ at which nonlinear oscillations are possible. Moreover, change of boundary conditions causes the change of location and length of the noted interval;
- for sufficiently small values of the parameter b/a the length of the interval of frequency change θ decreases and tents to zero independently of boundary conditions (there is impossible to generate nonlinear flutter type oscillations);
- with the increase of the parameter $\delta_i\,(i=1,2)$ from zero to unit the tightening of the amplitude (for $b/a > 1$) switches from the high-frequency in the direction of lower frequencies.



b)

Fig.1 Dependence «amplitude-frequency», for $a = 70h$ and several fixing conditions.

Case 2. Sufficiently thin plates (h/a<10^{-2}). In this case, also, numerical calculations are done for several values of the parameter b/a and for several boundary conditions when h/a is fixed. In particular, in the Table 2 the values of the amplitude are brought, when $a = 120h$.

Table 2. Dependence «amplitude-frequency», $A(\theta)$ for h/a=1/120, several b/a and fixing conditions

b/a=3									
δ_i \ θ	0	2.2712	2.278	2.2893	2.5	2.7101 θ_{cr}	3	3.5	4
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	-	1.1728 1.1536	1.3656 0.9735	1.4996 0.8605	2.5049 0.2413	3.1246 0	3.8265 0.1856	4.8615 0.3411	5.7928 0.4068
$\delta_1=0.25$ $\delta_2=0.25$	-	-	0.9692 0.9080	1.1543 0.7400	2.0097 0.1987	2.5178 0	3.0924 0.1517	3.9386 0.2785	4.6993 0.3317
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	-	0.6273 0.6074	1.3073 0.1361	1.6499 0	2.0356 0.1028	2.6024 0.1886	3.1111 0.2245
b/a=1									
δ_i \ θ	0	1.6974	1.7071	1.7212	1.8	1.9039 θ_{cr}	2.5	3	4
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	-	1.0705 1.0280	1.3695 0.7552	1.5572 0.6052	2.1312 0.2317	2.6096 0	4.3709 0.4704	5.5471 0.6170	7.7137 0.7540
$\delta_1=0.25$ $\delta_2=0.25$	-	-	0.79946 0.75341	1.0695 0.5182	1.5786 0.1904	1.9869 0	3.4634 0.3695	4.4287 0.4633	6.1876 0.5199
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	-	0.4609 0.4401	0.8779 0.1273	1.1385 0	2.0888 0.2336	2.7058 0.2813	3.8143 0.2922
b/a=0.6									
δ_i \ θ	0	1.3927	1.4	1.401	1.4524 θ_{cr}	3	4	5.5	7
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	-	0.6471 0.6094	0.89198 0.36734	0.9089 0.3512	1.3537 0	5.0998 1.6289	7.0123 2.3241	9.8055 3.3056	12.565 4.2595

$\delta_1=0.25$ $\delta_2=0.25$	-	-	0.41575 0.37777	0.4685 0.3286	0.9474	4.1093 1.2316	5.6616 1.7407	7.9222 2.4602	10.1538 3.1623
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	-	0.2525 0.2030	0.5278 0	2.6065 0.4901	3.6081 0.5467	5.0572 0.5851	6.4845 0.6139

On the basis of the Table 2 the Fig.2 is plotted.

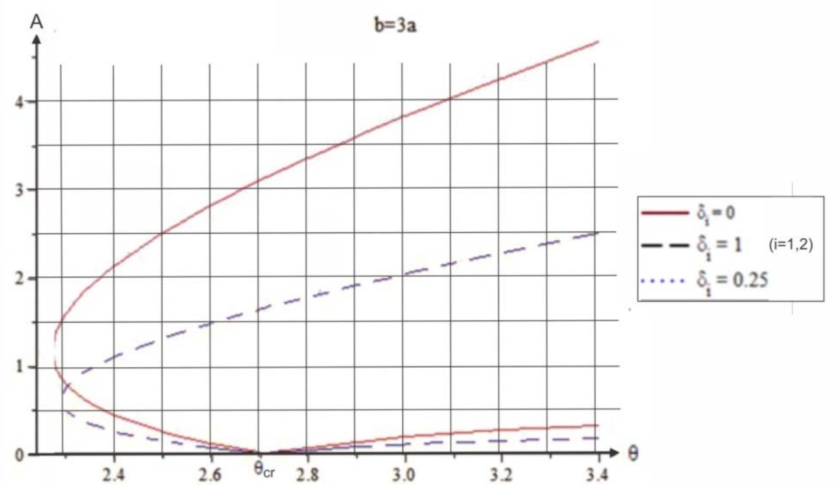


Fig.2. Dependence "amplitude-frequency", for $a=120h$ and several fixing conditions

Table 2 and Fig. 2 show, that for the examined case when $b/a > 0.78$, then independently of boundary conditions the following character of the function $A(\theta)$ takes place: there is a such certain value θ_* ($\theta_* < \theta_{cr}$) exists, that it is possible to generate flutter type oscillations only in the interval $[\theta_*, \infty)$. The value θ_* increases with both increase of b/a, and decrease of h/a. The influence of boundary condition on the character of the function $A(\theta)$ is quantitative only. During the transition from the free edges to the case of fixed edges the amplitude decreases.

Let's note, also, that if $b/a < 0.78$, then the qualitative change of the character of the dependence «amplitude-frequency» is possible during the transition from one type boundary conditions to another (for a fairly thin plates).

Thus, in the case of the problem with the fixed in the plane edges only two cases of the dependence “amplitude-frequency” are possible (the dotted lines in the Figures 1 and 2). Moreover, the transition from one type to another happens only due to the change of the relation b/a . In the case of the problem with free in the plane edges the three cases of the dependence «amplitude-frequency» are possible (solid lines in the Figures 1 and 2).

4. Character of the dependence “amplitude-frequency” for the mixed boundary conditions

So far we examined the cases when the edges of the plate were similarly fixed. Let’s study now the cases, when at the adjacent edges of simply supported plate the different boundary conditions in plane direction are addressed. The condition $\delta_1 = 0, \delta_2 = 1$ means, that the edges of the plate are free in the plane along the axis $O\alpha$, and are fixed in own plane along the axis $O\beta$. Similarly, the condition $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0$ means, edges of the plate are fixed in own plane along the axis $O\alpha$, and are free in the plane along the axis $O\beta$. The results of numerical simulations are brought in the Table 3 for thick ($h / a > 10^{-2}$) and in the Table 4 for thin ($h / a < 10^{-2}$) plates for several values of the relation b/a and several mixed boundary conditions.

Table 3. Influence of mixed boundary conditions on the dependence $A(\theta)$ for h/a=1/70

b/a=3										
δ_i \ θ	0	1	1.644	1.76	2	2.71 θ_{cr}	2.8	3.2	4	5
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	1.3999 0.8460	1.4347 0.6965	1.4417 0.4839	1.4378 0.4384	1.423 0.337	1.316 0	1.292 0.0407	1.1612 0.1491	0.4510 0.3773	-
$\delta_1=0$ $\delta_2=1$	1.3944 0.8500	1.4311 0.6986	1.4397 0.4847	1.4359 0.4391	1.4215 0.3379	1.314 0	1.2915 0.0407	1.1611 0.1492	0.4497 0.3794	-
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	-	0.8102 0.7657	1.260 0.387	1.907 0	1.9907 0.0307	2.4004 0.1289	2.9621 0.1563	3.7544 0.2469
$\delta_1=1$ $\delta_2=0$	-	-	0.8939 0.8460	1.1809 0.5875	1.4579 0.3743	2.079 0	2.1529 0.0316	2.4768 0.1218	3.1172 0.1565	3.9149 0.2609

b/a=0.9										
θ / δ_i	0	0.95	1.17	1.18	1.44	1.801 θ_{cr}	2.053	2.056	2.309	2.397
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	-	0.6619 0.6302	0.6626 0.4723	0.6606 0.4661	0.5828 0.2982	0.4004 0	0.185 0.164	0.1764 0.1695	-	-
$\delta_1=0$ $\delta_2=1$	-	-	-	0.5978 0.5746	0.5926 0.3205	0.4207 0	0.189 0.182	-	-	-
$\delta_1=1$ $\delta_2=0$	-	-	0.7154 0.6674	0.7461 0.6305	0.8713 0.3163	0.8258 0	0.6987 0.1407	0.6965 0.1414	0.3237 0.3206	-
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	-	-	0.5623 0.4351	0.8265 0	0.8215 0.1348	0.8208 0.1357	0.6603 0.2302	0.4427 0.4064

Table 4. Influence of mixed boundary conditions on the dependence $A(\theta)$ for **h/a=1/120**

b/a=3										
θ / δ_i		2.2712	2.275	2.282	2.2893	2.5	2.7101 θ_{cr}	3	3.5	4
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	-	1.1728 1.1536	1.3135 1.0201	1.4202 0.9264	1.4996 0.8605	2.5049 0.2413	3.1246 0	3.8265 0.1856	4.8615 0.3411	5.7928 0.4068
$\delta_1=0$ $\delta_2=1$	-	-	1.1609 1.1329	1.3499 0.9567	1.4406 0.8793	2.4590 0.2416	3.0743 0	3.7703 0.1855	4.7955 0.3413	5.7175 0.4068
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	-	-	0.6273 0.6074	1.3073 0.1361	1.6499 0	2.0356 0.1028	2.6024 0.1886	3.1111 0.2245
$\delta_1=1$ $\delta_2=0$	-	-	-	0.6937 0.6364	0.7897 0.5482	1.4204 0.1421	1.78448 0	2.1958 0.1078	2.8016 0.1976	3.3459 0.2351

b/a=0.8										
δ_i \ θ	1.528	1.558	1.574	1.615	1.65	1.689 θ_{cr}	2	2.5	3	3.5
$\delta_1=0$ $\delta_2=0$	-	0.9220 0.8066	1.2756 0.4939	1.6415 0.2317	1.8534 0.1049	2.0515 0	3.1078 0.4040	4.3575 0.7171	5.4663 0.9373	6.5228 1.1183
$\delta_1=0$ $\delta_2=1$	-	-	-	0.4534 0.3554	0.7650 0.1131	0.9522 0	1.7997 0.3738	2.6947 0.6597	3.4477 0.8603	4.1486 1.0249
$\delta_1=1$ $\delta_2=0$	0.6893 0.5844	1.0347 0.3104	1.1386 0.2442	1.3468 0.1288	1.4911 0.0063	1.6348 0	2.4577 0.2276	3.4561 0.3418	4.3413 0.3764	5.1835 0.3835
$\delta_1=1$ $\delta_2=1$	-	-	0.3717 0.3359	0.6391 0.1245	0.7550 0.0555	0.8629 0	1.4451 0.1977	2.1211 0.2992	2.7032 0.3311	3.2484 0.3378

Tables 3 and 4 show, that:

- if the plate is thick enough, and the ratio b/a is greater than unit, then the solution of the problem with the boundary conditions $\delta_1=0, \delta_2=1$ as qualitatively, as well as quantitatively no different from the solution of the problem with the free edges in the plane, and the solution of the problem with the boundary conditions $\delta_1=1, \delta_2=0$ is similar to the solution of the problem with fixed in the plane edges. This fact also follows from the expressions for γ_{ij} . When the condition $\frac{b}{a}\le 1$ is true, then the second case takes place independently of the boundary conditions (Fig.1(b)).
- If the plate is thin enough, this influence has only quantitative character. Moreover the value of the amplitudes obtained from the mixed boundary conditions is less than the corresponding values, obtained in the case of the free in the plane edges and is greater than the corresponding values in the case of fixed in own plane edges.

Mainly, if the ratio b/a is greater than unit, the change of boundary conditions along the edges parallel to the direction of flowing stream have not essential influence on the dependence «amplitude-frequency» of plates. But the change of boundary conditions along the edges perpendicular to the direction of flowing stream may have essential (both qualitative and quantitative) influence. For the rest of values of the ratio b/a the mixed boundary conditions in the plane have only quantitative influence on the dependence «amplitude-frequency».

At the end, let's present some in our opinion most important new results obtained in this study. They are the result of the influence of boundary conditions on the dependence «amplitude-frequency» of nonlinear flutter of rectangular plates. For clarity and visibility, let's note once again that the dependence of the frequency of non-linear oscillations of the plate on the amplitude in absence of flowing stream has hard character, i.e. with the increasing amplitude of oscillation the frequency increases. In the present study we found that:

- The character of the dependence «amplitude-frequency» $A(\theta)$ is a two-valued at the certain intervals (closed or semi-infinite) of frequency variation, in particular it is identical to the nature of this dependency in the case of non-linear own oscillations of the shells;
- The kind of fixing of plate's edges in its plane may significantly change the character of the dependence $A(\theta)$, when the plate is elongated in the direction perpendicular to the flow speed. If the plate is elongated in the direction of flow, the influence of the kind of fixing of plate's edges in its plane is only quantitative.
- Transition from one type of the dependence «amplitude-frequency» to another can be adjusted (up to the impossibility of excitation of such oscillations) setting the magnitude of the speed of flowing stream and changing the boundary conditions, and by the appropriate selection of the geometrical and physical parameters of the aeroelastic system.

REFERENCES

1. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. Saghoyan R.O. Non-linear flutter of orthotropic rectangular plate. Collection of scientific papers of the international conference. Actual problems of continuum mechanics, 2010, Vol.1, pp.118-123.
2. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. & Marzocca P. On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post- Critical Flight Conditions. Journal of Aerospace Engineering, 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000246 (Jul. 19, 2012), ISSN: 0893-1321, 2012.
3. Baghdasaryan G.Y. On the stability of orthotropic shells in supersonic gas flow. //Izv.AN USSR OTN Mechanics and Engineering. 1961, №4, pp. 92-98.
4. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O., Marzocca P. Influence of Supersonic Flow on the Character of Amplitude-Frequency Dependency of Nonlinear Oscillations of Flexible Plate. //Proc. NAS RA. Mechanics. 2013. V.66. №3. pp.24-37.
5. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O. Character of Amplitude-Frequency Dependency of Nonlinear Oscillations of Flexible Plate at Critical Speeds. //Applied Mathematics and Mechanics, Gyumri, 2014, Vol.A, №1, pp. 20-39.
6. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O. Influence of supersonic gas flow on the amplitude of non-linear oscillations of rectangular plates.// //Proc. NAS RA. Mechanics. 2016. V.69. №4.

<u>About author:</u>

Saghoyan Rafayel Onik – Freelance employer, Institute of Mechanics NAS RA
Phone: (093) 248226; **E-mail:** rafael1984@mail.ru.

Received 07.07.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №4, 2016 Механика

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ БАЛОК

Асланян Н.С. , Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярность, термоупругость, балка, изгиб, прикладная модель, краевая задача, точное решение, прочность, жёсткость, эффективные свойства.
Բանալի բառեր՝ միկրոպոլյար, ջերմաառաձգականություն, հեծան, ծռում, կիրառական մոդել, եզրային խնդիր, ճշգրիտ լուծում, ամրություն, կոշտություն, արդյունավետ հատկություններ:
Key words: micropolarity, thermoelasticity, bar, bending, applied model, boundary-value problem, exact solution, rigidity, stiffness, effective properties.

Ասլանյան Ն.Ս., Սարգսյան Ս.Հ.
Միկրոպոլյար բարակ հեծանների ծռման դեֆորմացիայի ջերմաառաձգականության մաթեմատիկական մոդելը

Աշխատանքում զարգացվում է հայտնի վարկածների մեթոդը և կառուցվում միկրոպոլյար բարակ հեծանների ծռման դեֆորմացիայի ջերմաառաձգականության կիրառական մոդելը, ինչպես նաև հաստատվում նրան համապատասխան վարիացիոն սկզբունքը: Կառուցված այս կիրառական մոդելի կիրառմամբ դիտարկվում է որոշակի եզրային պայմաններով միկրոպոլյար հեծանի ծռման դեֆորմացիայի կոնկրետ խնդիր, երբ տրված է ջերմաստիճանային ֆունկցիայի որոշակի բաշխում: Դրված այդ խնդրի և համապատասխան դասական խնդրի համար (վերջինիս դեպքում ունենք հեծանի ծռման դեֆորմացիայի ջերմաառաձգական խնդիր, ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ) կառուցվել են ճշգրիտ լուծումները բանաձևային տեսքերով:Այդ լուծումների միջոցով կատարվել են հաշվումներ, ստացվել են թվային արդյունքներ, որոնց անալիզի հիման վրա հաստատվել են միկրոպոլյար նյութի արդյունավետ դրսևորումները դասական նյութի համեմատ հեծանի կոշտության և ամրության իմաստներով:

Aslanyan N.S. , Sargsyan S.H.
Mathematical model of thermoelasticity of bending deformation of micropolar thin bars

The known hypotheses method is developed in the present paper, applied model of thermoelasticity of bending deformation of micropolar thin bars is constructed and also the corresponding variation principle is obtained. Using the constructed model, problems of bending of micropolar bar are studied in case of different support conditions, when the distributed temperature function is given. Solutions in the form of formulas are obtained for the stated problem and for the corresponding classical problem (in this case we have the problem of thermoelastic bending with consideration of transverse shears). With the help of these solutions calculations are done, numerical results are obtained, on the basis of which analysis is done and effective properties of the micropolar material are revealed from the point of view of stiffness and rigidity, compared with the classical materials.

В работе развивается известный метод гипотез и построена прикладная модель термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких балок, а также устанавливается соответствующий вариационный принцип. Используя построенную модель, рассматривается задача изгиба микрополярной балки с определёнными условиями опирания, когда задана определённо-распределённая температурная функция. Для поставленной задачи и для соответствующей классической задачи (в последнем случае имеем задачу термоупругого изгиба балки с учётом поперечных сдвигов) построены точные решения в виде формул. При помощи этих решений выполнены расчёты, получены численные результаты, на основе их

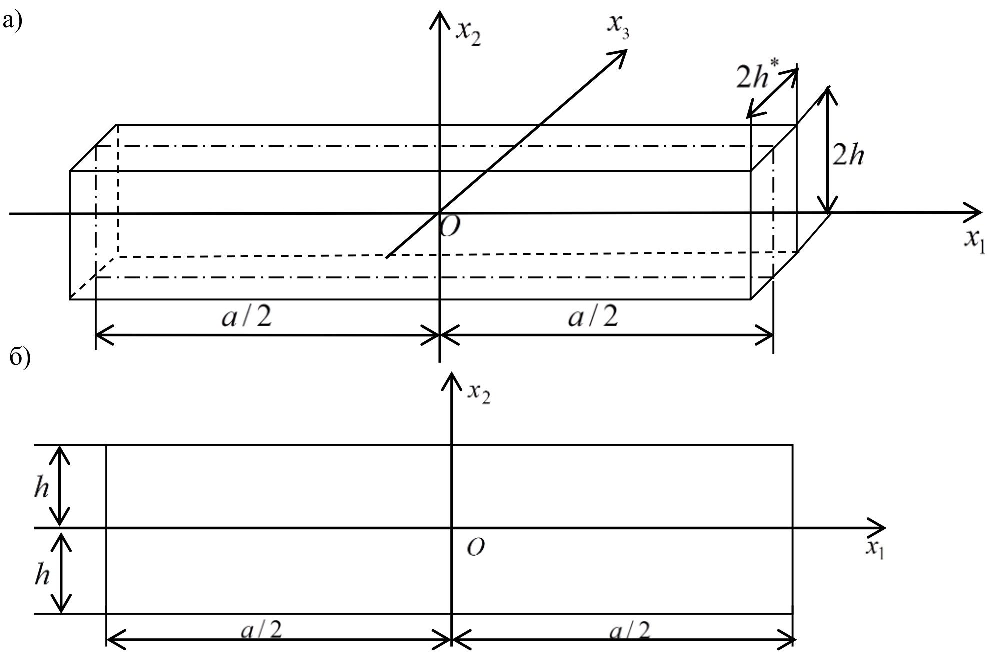
анализа установлены эффективные свойства микрополярного материала по сравнению с классическим материалом с точки зрения жёсткости и прочности балки.

Введение. Анализ температурных напряжений и деформаций в конструктивных элементах различного типа, работающих при высоких температурах, имеет исключительно большое значение [1-4]. Трёхмерная модель микрополярной термоупругости построена и изучена в работе [5].

В работах [6,7] построена прикладная модель термоупругости микрополярных тонких оболочек и пластин, изучена энергетика явления и получен общий вариационный принцип. В работе [8] построена прикладная модель термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин.

В данной работе построена прикладная модель термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких балок, и на её основе рассматривается решение конкретной прикладной задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим микрополярную балку (фиг.1а) с постоянным поперечным сечением $2h^* \times 2h$ и длиной a. Будем считать, что в направлении, перпендикулярном к плоскости фигуры, размер $2h^*$ (ширина балки) намного меньше размера $2h$ (толщина балки). В этом случае напряжения (как силовые, так и моментные) можно заменить их средними значениями по ширине и привести таким образом определение напряжений к решению обобщённой плоской задачи микрополярной упругости в срединной плоскости балки x_1, x_2 (фиг.1б). В этом случае ширина балки не будет играть никакой роли и в дальнейшем будем полагать эту ширину, равной единице $(2h^* = 1)$.



Фиг. 1

Рассмотрим основные уравнения и граничные условия плоского напряжённого состояния квазистатической несвязанной микрополярной термоупругости [5]:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0. \tag{1.1}$$

Физические соотношения микрополярной термоупругости

$$\begin{aligned}&\gamma_{11}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}\right]+\alpha_t T\ ,\quad \gamma_{12}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21},\\ &\gamma_{22}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{22}-\nu\sigma_{11}\right]+\alpha_t T\ ,\ \gamma_{21}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}\ ,\\ &\chi_{13}=B\mu_{13},\quad \chi_{23}=B\mu_{23};\end{aligned} \tag{1.2}$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned}&\gamma_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad \gamma_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\qquad \gamma_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\Omega_3,\qquad \gamma_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\Omega_3\\ &\chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1},\quad \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{21},\sigma_{22}$ – силовые напряжения; μ_{13},μ_{31} – моментные напряжения; $\gamma_{11},\gamma_{12},\gamma_{21},\gamma_{22}$ – деформации; χ_{13},χ_{23} – изгибы-кручения; u_1,u_2 – перемещения; ω_3 – свободный поворот; $T=T(x_1,x_2)$ – функция неравномерно распределенной температуры; $E,\nu,\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)},\alpha,B$ – упругие постоянные микрополярного тела; α_t – коэффициент линейного температурного расширения материала.

К уравнениям (1.1)-(1.3) микрополярной упругости следует присоединить граничные условия:

На лицевых линиях прямоугольника ($x_2=\pm h$) заданы напряжения:

$$\sigma_{21}=X^{\pm},\quad \sigma_{22}=Y^{\pm},\quad \mu_{23}=M^{\pm}. \tag{1.4}$$

На торцевых линиях прямоугольника ($x_1=0;a$) рассмотрим следующие варианты граничных условий:

а) заданы конкретные значения для напряжений:

$$\sigma_{11},\sigma_{12}\text{ и }\mu_{13}; \tag{1.5}$$

б) заданы конкретные значения для перемещений и поворота:

$$u_1,\ u_2\text{ и }\omega_3; \tag{1.6}$$

в) заданы конкретные значения для

$$\sigma_{11},\ u_2\text{ и }\mu_{13}, \tag{1.7}$$

в этом случае имеют место условия смешанного характера, которые для прикладной модели приведут к шарнирному опиранию.

Общий вариационный функционал рассматриваемой задачи (1.1)-(1.7) имеет вид [5].

$$I=\iint_S\left\{W-\left[\sigma_{11}\left(\gamma_{11}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\sigma_{22}\left(\gamma_{22}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\sigma_{12}\left[\gamma_{12}-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma_{21}\left[\gamma_{21}-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3\right)\right]+\mu_{13}\left(\chi_{13}-\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}\right)+\mu_{23}\left(\chi_{23}-\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}\right)\right]\right\}dS- \qquad (1.8)$$

$$-\int_0^a\left[X^+u_1+Y^+u_2+M^+\omega_3\right]_{x_2=h}dx_1-\int_0^a\left[X^-u_1+Y^-u_2+M^-\omega_3\right]_{x_2=-h}dx_2+I^*,$$

где

а) $$I^*=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}^*u_1\Big|_{x_1=0}dx_2-\int_{-h}^{h}\sigma_{11}^*u_1\Big|_{x_1=a}dx_2+\int_{-h}^{h}\sigma_{12}^*u_2\Big|_{x_1=0}dx_2-\int_{-h}^{h}\sigma_{12}^*u_2\Big|_{x_1=a}dx_2-$$

$$+\int_{-h}^{h}\mu_{13}^*\omega_3\Big|_{x_1=0}dx_2-\int_{-h}^{h}\mu_{13}^*\omega_3\Big|_{x_1=a}dx_2 \qquad (1.9)$$

– в случае граничных условий (1.5);

б) $$I^*=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}\left(u_1-u_1^*\right)\Big|_{x_1=0}dx_2-\int_{-h}^{h}\sigma_{11}\left(u_1-u_1^*\right)\Big|_{x_1=a}dx_2+\int_{-h}^{h}\sigma_{12}\left(u_2-u_2^*\right)\Big|_{x_1=0}dx_2- \qquad (1.10)$$

$$-\int_{-h}^{h}\sigma_{12}\left(u_2-u_2^*\right)\Big|_{x_1=a}dx_2+\int_{-h}^{h}\mu_{13}\left(\omega_3-\omega_3^*\right)\Big|_{x_1=0}dx_2-\int_{-h}^{h}\mu_{13}\left(\omega_3-\omega_3^*\right)\Big|_{x_1=a}dx_2$$

– в случае граничных условий (1.6);

в) $$I^*=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}^*u_1\Big|_{x_1=0}dx_2-\int_{-h}^{h}\sigma_{11}^*u_1\Big|_{x_1=a}dx_2+\int_{-h}^{h}\sigma_{12}\left(u_2-u_2^*\right)\Big|_{x_1=0}dx_2-$$

$$-\int_{-h}^{h}\sigma_{12}\left(u_2-u_2^*\right)\Big|_{x_1=a}dx_2+\int_{-h}^{h}\mu_{13}^*\omega_3\Big|_{x_1=0}dx_2-\int_{-h}^{h}\mu_{13}^*\omega_3\Big|_{x_1=a}dx_2 \qquad (1.11)$$

в случае граничных условий (1.7).

W – плотность потенциальной энергии деформации термоупругого микрополярного тела:

$$W=\frac{1}{2}\left(\sigma_{11}\gamma_{11}+\sigma_{22}\gamma_{22}+\sigma_{12}\gamma_{12}+\sigma_{21}\gamma_{21}+\mu_{13}\chi_{13}+\mu_{23}\chi_{23}\right)-\frac{\alpha_tT}{2}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right) \qquad (1.12)$$

С учётом формул (1.2) выражение для W можем привести к следующему виду:

$$W=\frac{1}{2}\left\{\frac{E}{1-\nu^2}\left(\gamma_{11}^2+\gamma_{22}^2\right)+(\mu+\alpha)\left(\gamma_{12}^2+\gamma_{21}^2\right)+\frac{2E\nu}{1-\nu^2}\gamma_{12}\gamma_{21}+2(\mu-\alpha)\gamma_{12}\gamma_{21}+\right.$$

$$\left.+B\left(\chi_{13}^2+\chi_{23}^2\right)\right\}-\frac{E}{1-\nu}\left(\gamma_{11}+\gamma_{22}\right)\alpha_tT. \qquad (1.13)$$

Если рассматривать вариационное уравнение

$$\delta I = 0, \tag{1.14}$$

то в качестве уравнений Эйлера приходим к системе уравнений (1.1)-(1.3), а в качестве естественных граничных условий приходим к условиям (1.4)-(1.7).

Отметим, что на основании (1.13) легко получить следующие формулы типа Грина в микрополярной термоупругости:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{11}},\ \sigma_{22} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{22}},\ \sigma_{12} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{12}},\ \sigma_{21} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{21}},\ \mu_{13} = \frac{\partial W}{\partial \chi_{13}},\ \mu_{23} = \frac{\partial W}{\partial \chi_{23}}. \tag{1.15}$$

Если в уравнениях (1.1)-(1.3) и в функционале (1.8) подставить $\alpha = 0$ и считать $M^+ = M^- = 0$, получим основные уравнения, граничные условия и функционал классической теории термоупругости плоского напряжённого состояния упругих тонких пластин.

Отметим, что поставленную задачу термоупругости микрополярного прямоугольника можно разделить на симметричную по x_2 задачу (т.е. растяжение–сжатие балки, в этом случае $\sigma_{11}, u_1, \sigma_{22}, \mu_{31}$ – чётные, $\sigma_{12}, \sigma_{21}, u_2, \mu_{13}$ – нечётные по x_2 функции) и на антисимметрическую по x_2 задачу (т.е. изгиб балки в этом случае $\sigma_{12}, \sigma_{21}, u_2, \omega_3, \mu_{13}$ – чётные, а $\sigma_{11}, u_1, \sigma_{22}, \mu_{31}$ – нечётные по x_1 функции). В дальнейшем будем рассматривать задачу изгиба . В случае задачи изгиба примем следующие обозначения:

$$q_{x_1} = X^+ - X^-,\ q_{x_2} = Y^+ + Y^-,\ m = M^+ + M^-. \tag{1.16}$$

2. Исходные предположения. Принимая условие тонкостенности прямоугольника (балки) $2h << a,$ будем развивать метод гипотез работ [6,7] для построения прикладной модели микрополярной термоупругости тонких балок.

В основу предлагаемой здесь прикладной модели термоупругости микрополярных тонких балок ставятся следующие предположения (гипотезы) кинематического и статического характера [6,7]:

1) Гипотеза кинематического характера. Согласно этой гипотезе, прямолинейный нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к средней линии до деформации, не остаётся перпендикулярным к ней после деформации, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины. Кроме того, точки указанного нормального элемента имеют также свободные вращения, для которых будем считать, что оно не изменяется вдоль толщинной координаты x_2 .

Кинематическую гипотезу математически запишем так: нормальное к средней линии балки перемещение и свободный поворот не зависят от координаты x_2 :

$$u_2 = w(x_1),\quad \omega_3 = \Omega_3(x_1), \tag{2.1}$$

а тангенциальное перемещение распределено по толщине балки линейным законом:

$$u_1 = x_2 \cdot \psi(x_1). \tag{2.2}$$

Отметим, что с точки зрения перемещений (формулы $(2.1)_1$, (2.2)) принятая выше кинематическая гипотеза, это, по сути дела, гипотеза, совпадающая с известной гипотезой Тимошенко в классической теории упругих тонких балок [9]. Кинематическую гипотезу в целом (формулы (2.1), (2.2)), как в работах [6-8], назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной термоупругости тонких балок.

2) Силовым напряжением σ_{22} в обобщённом законе Гука для деформации γ_{11} (формулы $(1.2)_1$) можем пренебречь относительно силового напряжения σ_{11}.

3) Будем принимать условие тонкостенности балки, т.е. $2h << a$.

4) При определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силового напряжения σ_{21} примем:

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(x_1). \tag{2.3}$$

После вычисления указанных величин значение σ_{21} окончательно определим прибавлением к значению (2.3) результат интегрирования первого уравнения равновесия ($(1.1)_1$), наперёд удовлетворяя условие о равенстве нулю интеграла от $-h$ до $+h$.

5) Будем считать, что в тонкостенном случае рассматриваемого прямоугольника температура по толщине балки распределена по линейному закону. В случае задачи изгиба это означает, что

$$T = \frac{x_2}{2h}\tilde{T}(x_1). \tag{2.4}$$

3. Деформации, изгибы-кручения, силовые и моментные напряжения. В соответствии с принятым законом кинематической гипотезы (2.1), (2.2) для компонентов тензоров деформаций, изгибов-кручений, из уравнений (1.3) получим:

$$\begin{aligned} &\gamma_{11} = x_2 \cdot K_{11}, \quad &&\gamma_{22} = 0, \\ &\gamma_{12} = \Gamma_{12}, &&\gamma_{21} = \Gamma_{21}, \\ &\chi_{13} = k_{13}, &&\chi_{23} = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \tag{3.2}$$

Теперь формулы (2.4) можем представить ещё и так:

$$\gamma_{11} = x_2 \cdot \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad \chi_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \tag{3.3}$$

Здесь K_{11} – кривизна оси балки после деформации, связанная с силовым напряжением σ_{11}, а k_{13} – кривизна оси балки, связанная с моментным напряжением μ_{13}.

На основе обобщённого закона Гука (1.2), с учётом гипотезы 2), а также формул (2.4) и (3.1), для силовых напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ и моментного напряжения μ_{13} получим:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = Ex_2\left(K_{11} - \alpha_t \frac{\tilde{T}}{2h}\right), \qquad &&\sigma_{12} = (\mu+\alpha)\Gamma_{12} + (\mu-\alpha)\Gamma_{21}, \\ &\sigma_{21} = (\mu+\alpha)\Gamma_{21} + (\mu-\alpha)\Gamma_{12}, &&\mu_{13} = Bk_{13}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Рассматривая уравнения равновесия $(1.1)_2$ и $(1.1)_3$, с учётом граничных условий (1.4), для силового напряжения σ_{22} и моментного напряжения μ_{23} получим:

$$\sigma_{22} = x_2 \cdot \frac{q_{x_2}}{2h}, \;\; \mu_{23} = x_2 \cdot \frac{m}{2h}. \tag{3.5}$$

Теперь, придерживаясь гипотезы 4), для силового напряжения σ_{21} окончательно получим:

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(x_1) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_2^2}{2} \right) \cdot \frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{11}}{\partial x_1}, \tag{3.6}$$

где $\overset{1}{\sigma}_{11} = E\left(K_{11} - \alpha_t \dfrac{\tilde{T}}{2h} \right).$ (3.7)

4. Усилия и моменты. Вывод основных уравнений прикладной модели микрополярных упругих тонких балок. В прикладной модели микрополярных балок вместо силовых и моментных напряжений удобно оперировать статически эквивалентными им внутренними усилиями и моментами:

$$M_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} \cdot x_2 dx_2, \quad N_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dx_2,$$
$$N_{21} = \int_{-h}^{h} \sigma_{21} dx_2, \quad L_{13} = \int_{-h}^{h} \sigma_{13} dx_2. \tag{4.1}$$

На основе формул (3.4) для напряжений, с учётом (4.1) приходим к следующим соотношениям термоупругости:

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}\left(K_{11} - \alpha_t \chi_t \right), \;\; N_{12} = 2h\left[(\mu + \alpha)\Gamma_{12} + (\mu - \alpha)\Gamma_{21} \right],$$
$$N_{21} = 2h\left[(\mu + \alpha)\Gamma_{21} + (\mu - \alpha)\Gamma_{12} \right], \quad L_{13} = 2hBk_{13}, \tag{4.2}$$

где принято следующее обозначение:

$$\chi_t = \frac{\tilde{T}}{2h}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим выражения для $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \mu_{23}$ (формулы (3.5), (3.6)), удовлетворяя граничным условиям (1.4) с учётом (1.16), приходим к следующим уравнениям равновесия прикладной модели:

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -q_{x_2}, \; N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = hq_{x_1}, \; \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -m. \tag{4.4}$$

Уравнения равновесия (4.4), соотношения упругости (4.2) и геометрические соотношения (3.2) представляют собой основные уравнения прикладной модели термоупругости микрополярных тонких балок.

Вариационный функционал прикладной модели термоупругости микрополярных тонких балок получим на основе формул (1.8)-(1.11) с учётом (2.1), (2.2), (3.1), (3.3), (3.4)-(3.6) и (3.17):

$$I_0 = \int_0^a \left\{ W_0 - M_{11}\left(K_{11} - \frac{d\psi}{\partial x_1}\right) - N_{12}\left[\Gamma_{12} - \left(\frac{dw}{\partial x_1} - \Omega_3\right)\right] - \right.$$

$$\left. - N_{21}\left[\Gamma_{21} - (\psi + \Omega_3)\right] - L_{13}\left(k_{13} - \frac{d\Omega_3}{\partial x_1}\right)\right\} dx_1 - \qquad (4.5)$$

$$- \int_0^a \left[q_{x_1} h\psi + q_{x_2} w + m\Omega_3\right] dx_1 + I_0^*,$$

где W_0 – плотность потенциальной энергии деформации для прикладной модели:

$$W_0 = \frac{Eh^3}{3} K_{11}^2 + h(\mu+\alpha)(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21} + Bhk_{13}^2 - \frac{2Eh^3}{3} K_{11}\alpha_t \chi_t; \qquad (4.6)$$

а) $I_0^* = M_{11}^*\psi\big|_{x_1=0} - M_{11}^*\psi\big|_{x_1=a} + N_{12}^* w\big|_{x_1=0} - N_{12}^* w\big|_{x_1=a} + L_{13}^*\Omega_3\big|_{x_1=0} - L_{13}^*\Omega_3\big|_{x_1=a}$, (4.7)

когда имеем следующие граничные условия

$$M_{11}\big|_{x_1=0;a} = M_{11}^*, \quad N_{12}\big|_{x_1=0;a} = N_{12}^*, \quad L_{13}\big|_{x_1=0;a} = L_{13}^* \qquad (4.8)$$

(в частности, из (4.8) можем получить условия свободного края в микрополярной модели);

б) $I_0^* = M_{11}(\psi - \psi^*)\big|_{x_1=0} - M_{11}(\psi - \psi^*)\big|_{x_1=a} + N_{12}(w - w^*)\big|_{x_1=0} -$

$- N_{12}(w - w^*)\big|_{x_1=a} + L_{13}(\Omega_3 - \Omega_3^*)\big|_{x_1=0} - L_{13}(\Omega_3 - \Omega_3^*)\big|_{x_1=a}$, (4.9)

когда имеем следующие граничные условия

$$w\big|_{x_1=0;a} = w^*, \quad \psi\big|_{x_1=0;a} = \psi^*, \quad \Omega_3\big|_{x_1=0;a} = \Omega_3^* \qquad (4.10)$$

(в частности, из (4.10) можем получить условия полной заделки края в микрополярной модели);

в) $I_0^* = M_{11}^*\psi\big|_{x_1=0} - M_{11}^*\psi\big|_{x_1=a} + N_{12}(w - w^*)\big|_{x_1=0} - N_{12}(w - w^*)\big|_{x_1=a} +$

$+ L_{13}^*\Omega_3\big|_{x_1=0} - L_{13}^*\Omega_3\big|_{x_1=a}$, (4.11)

когда имеем следующие граничные условия

$$M_{11}\big|_{x_1=0;a} = M_{11}^*, \quad w\big|_{x_1=0;a} = w^*, \quad L_{13}\big|_{x_1=0;a} = L_{13}^* \qquad (4.12)$$

(в частности, из (4.12) можем получить условия шарнирного опирания края в микрополярной модели с загруженными моментами или без них).

Варьируя функционал по всем функциональным аргументам, как уравнения Эйлера, приходим к основным уравнениям термоупругости микрополярных тонких балок (4.4), (4.2), (3.2) и, к граничным условиям (4.8), либо (4.10), либо (4.12).

Отметим, что если в уравнениях (4.4), (4.2), (3.2) и в функционале (4.5) микрополярной термоупругости для значения упругого постоянного α подставить нуль $(\alpha = 0)$, а также, считать, что $M^+ = M^- = 0$, то придём к классической модели термоупругости тонких балок с учётом поперечных сдвиговых деформаций:

Уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1}=-q_{x_2},\quad N_{12}-\frac{dM_{11}}{dx_1}=hq_{x_1} \tag{4.13}$$

Физические соотношения термоупругости

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3}\left(K_{11}-\alpha_t\chi_t\right),\quad N_{12}=N_{21}=2h\mu\Gamma \tag{4.14}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma=\Gamma_{12}+\Gamma_{21}=\frac{dw}{dx_1}+\psi,\qquad K_{11}=\frac{d\psi}{dx_1}. \tag{4.15}$$

Граничные условия:

а) свободный загруженный край:

$$M_{11}\Big|_{x_1=0;a}=M_{11}^*\ ,\ N_{12}\Big|_{x_1=0;a}=N_{12}^*; \tag{4.16}$$

б) на краях балки заданы перемещение и поворот:

$$w\Big|_{x_1=0;a}=w^*,\qquad \psi\Big|_{x_1=0;a}=\psi^* \tag{4.17}$$

(в частности, из (4.17) можно получить условия полной заделки);

в)когда имеют место граничные условия (1.7), для прикладной модели микрополярной балки будем иметь следующие граничные условия:

$$M_{11}\Big|_{x_1=0;a}=M_{11}^*\ ,\ w\Big|_{x_1=0;a}=w^* \tag{4.18}$$

(в частности, из (4.18) получим условия шарнирного опирания-загруженной моментом или без него).

Общий функционал для классической теории термоупругости тонких балок будет выражаться так:

$$I_0=\int_0^a\left\{W_0-M_{11}\left(K_{11}-\frac{d\psi}{\partial x_1}\right)-N_{12}\left[\Gamma-\left(\frac{dw}{\partial x_1}+\psi\right)\right]\right\}dx_1-$$
$$-\int_0^a\left[q_{x_1}h\psi+q_{x_2}w\right]dx_1+I_0^*, \tag{4.19}$$

где плотность потенциальной энергии деформации W_0 будет :

$$W_0=\frac{Eh^3}{3}K_{11}^2+\mu h\Gamma^2-\frac{2Eh^3}{3}K_{11}\alpha_t\chi_t; \tag{4.20}$$

а) $I_0^*=M_{11}^*\psi\Big|_{x_1=0}-M_{11}^*\psi\Big|_{x_1=a}+N_{12}^*w\Big|_{x_1=0}-N_{12}^*w\Big|_{x_1=a}$ (4.21)

в случае граничных условий (4.16);

б) $I_0^*=M_{11}\left(\psi-\psi^*\right)\Big|_{x_1=0}-M_{11}\left(\psi-\psi^*\right)\Big|_{x_1=a}+N_{12}\left(w-w^*\right)\Big|_{x_1=0}-$

$-N_{12}\left(w-w^*\right)\Big|_{x_1=a}$ (4.22)

в случае граничных условий (4.17);

в) $I_0^*=M_{11}^*\psi\Big|_{x_1=0}-M_{11}^*\psi\Big|_{x_1=a}+N_{12}\left(w-w^*\right)\Big|_{x_1=0}-N_{12}\left(w-w^*\right)\Big|_{x_1=a}$ (4.23) в случае граничных условий (4.18).

5. Численный пример. Рассмотрим тонкую балку (фиг. 2) толщиной $2h$, длиной a из однородного изотропного материала под действием температуры

$$T = T_0\left(\frac{x_1}{a} + \frac{1}{2}\right)\frac{x_2}{2h}. \tag{5.1}$$

Отметим, что температурная распределённая функция (5.1) удовлетворяет двумерному уравнению стационарной теплопроводности.

Так как внешние усилия и моменты отсутствуют, основная система прикладной термоупругости микрополярных тонких балок (4.4), (4.2), (3.2) примет вид:

Уравнения равновесия

$$\frac{d\overline{N}_{12}}{d\overline{x}_1} = 0, \qquad \overline{N}_{21} - \frac{d\overline{M}_{11}}{d\overline{x}_1} = 0;$$
$$\frac{d\overline{L}_{13}}{d\overline{x}_1} + \overline{N}_{12} - \overline{N}_{21} = 0. \tag{5.2}$$

Соотношения термоупругости

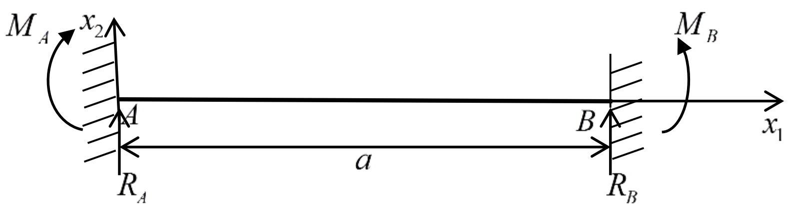
$$\overline{N}_{12} = 2\delta\left[\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\Gamma_{12} + \left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)\Gamma_{21}\right], \ \overline{N}_{21} = 2\delta\left[\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\Gamma_{21} + \left(1-\frac{\alpha}{\mu}\right)\Gamma_{12}\right],$$
$$\overline{M}_{11} = \frac{4(1+\nu)}{3}\delta^3\left[\frac{d\psi}{d\overline{x}_1} - \frac{\delta^{-1}}{2}\left(\overline{x}_1 + \frac{1}{2}\right)\alpha_t T_0\right], \quad \overline{L}_{13} = 2\delta B^*\frac{d\Omega_3}{d\overline{x}_1}. \tag{5.3}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{12} = \frac{d\overline{w}}{d\overline{x}_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \qquad K_{11} = \frac{1}{a}\frac{d\psi}{d\overline{x}_1}, \quad k_{13} = \frac{1}{a}\frac{d\Omega_3}{d\overline{x}_1}. \tag{5.4}$$

Будем рассматривать случай, когда оба конца балки защемлены, т.е. имеют место следующие граничные условия:

$$\overline{w} = 0, \quad \psi = 0, \quad \Omega_3 = 0 \ \text{ при } \ \overline{x}_1 = 0 \ \text{ и } \ \overline{x}_1 = 1. \tag{5.5}$$



Фиг. 2.

Отметим, что соотношения (5.2)-(5.5) приведены в безразмерной форме с помощью следующих обозначений:

$$\bar{N}_{12}=\frac{N_{12}}{a\mu},\quad \bar{N}_{21}=\frac{N_{21}}{a\mu},\quad \bar{M}_{11}=\frac{M_{11}}{a^2\mu},\quad \bar{L}_{13}=\frac{L_{13}}{a^2\mu},\quad B^*=\frac{B}{a^2\mu},$$

$$\bar{x}_1=\frac{x_1}{a},\quad \bar{w}=\frac{w}{a}. \tag{5.6}$$

Из первого уравнения равновесия ($(5.2)_1$) получим:

$$\bar{N}_{12}=\mathrm{const}=C_1. \tag{5.7}$$

Подставляя (5.7) в формулу $(5.3)_1$, после некоторых преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}-\psi-2\Omega_3\right)=\frac{1}{2}\delta^{-1}C_1-\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}+\psi\right). \tag{5.8}$$

Суммируя первые две формулы из (5.3), получим:

$$\bar{N}_{12}+\bar{N}_{21}=4\delta\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right)$$

и имея в виду (5.7), для $\bar{N}_{21}$ будем иметь:

$$\bar{N}_{21}=4\delta\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}+\psi\right)-C_1. \tag{5.9}$$

Рассматривая второе уравнение равновесия из (5.2) и подставляя в это уравнение (5.9) и формулу для $\bar{M}_{11}$ из (5.3), получим следующее уравнение:

$$4\delta\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}+\psi\right)-C_1=\frac{4}{3}(1+\nu)\delta^3\left[\frac{d^2\psi}{d\bar{x}_1^2}-\frac{\delta^{-1}}{2}\alpha_t T_0\right]. \tag{5.10}$$

Теперь формулы для L_{13} из (5.3) и (5.7), (5.9) подставляя в третье уравнение равновесия из (5.9), приходим к следующему уравнению:

$$2B^*\delta\frac{d^2\Omega_3}{d\bar{x}_1^2}+2C_1-4\delta\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}+\psi\right)=0. \tag{5.11}$$

Рассмотрим систему уравнений (5.10) и (5.11), исключим из этих двух уравнений выражение $4\delta\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}+\psi\right)$, в результате чего получим следующее равенство:

$$\Omega_3=\frac{1}{2B^*}\left[\frac{4(1+\nu)}{3}\delta^2\psi-\left(\frac{C_1}{2}\delta^{-1}+\frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_t T_0\right)\bar{x}_1^2+\delta^{-1}\left(C_3\bar{x}_1+C_4\right)\right]. \tag{5.12}$$

Подставляя (5.12) в равенство (5.8) и выражая ψ через $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$, будем иметь:

$$\psi = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)}{3B^*}\delta^2\frac{\alpha}{\mu}}\left[-\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}_1}+\frac{\delta^{-1}}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_3\overline{x}_1-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{1}{2}\delta^{-1}C_1+\frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_t T_0\right)\overline{x}_1^2+\delta^{-1}\left(\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_4+\frac{1}{2}C_1\right)\right] \qquad (5.13)$$

Если в равенстве (5.8) учесть значение ψ через $\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}_1}$, будем иметь формулу Ω_3 через $\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}_1}$:

$$\Omega_3 = \frac{2(1+\nu)\delta^2}{3B^*\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)}{3B^*}\delta^2\frac{\alpha}{\mu}\right)}\left[-\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}_1}+\frac{\delta^{-1}}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_3\overline{x}_1-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{1}{2}\delta^{-1}C_1+\frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_t T_0\right)\overline{x}_1^2+\delta^{-1}\left(\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_4+\frac{1}{2}C_1\right)\right]- \qquad (5.14)$$

$$-\frac{1}{4B^*}\left(C_1\delta^{-1}+\frac{2(1+\nu)}{3}\delta\alpha_t T_0\right)\overline{x}_1^2+\frac{1}{2B^*}\delta^{-1}\left(C_3\overline{x}_1+C_4\right).$$

Если теперь формулу для ψ ((5.13)) подставить в уравнения (5.10), для w приходим к следующему дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$A\frac{d^3\overline{w}}{d\overline{x}_1^3}+D\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}_1}=K_1\overline{x}_1^2+K_2\overline{x}_1+K_3, \qquad (5.15)$$

где

$$A=\frac{4(1+\nu)\delta^3\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)}{3\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)}{3B^*}\frac{\alpha}{\mu}\delta^2\right)}; \qquad D=4\delta\left[1-\frac{\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)}{1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)}{3B^*}\frac{\alpha}{\mu}\delta^2}\right],$$

$$K_1=\frac{1}{B^*\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)}{3B^*}\frac{\alpha}{\mu}\delta^2\right)}\left[2\frac{\alpha}{\mu}C_1+\frac{4}{3}(1+\nu)\frac{\alpha}{\mu}\delta^2\alpha_t T_0\right],$$

$$K_2 = -\frac{4\frac{\alpha}{\mu}C_3}{B^*\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)}{3B^*}\frac{\alpha}{\mu}\delta^2\right)},$$

$$K_3 = -\frac{1}{B^*\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)}{3B^*}\frac{\alpha}{\mu}\delta^2\right)}\left[4\frac{\alpha}{\mu}C_4+\frac{4}{3}C_1(1+\nu)\frac{\alpha}{\mu}\delta^2+2B^*C_1+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{9}(1+\nu)^2\frac{\alpha}{\mu}\delta^4\alpha_t T_0\right]+C_1-\frac{2}{3}(1+\nu)\delta^2\alpha_t T_0.$$

Общее решение дифференциального уравнения (5.15) имеет вид:

$$\bar{w} = C_5 + C_6 \operatorname{sh}\lambda\bar{x}_1 + C_7 \operatorname{ch}\lambda\bar{x}_1 + \frac{K_1}{3D}\bar{x}_1^3 + \frac{K_2}{2D}\bar{x}_1^2 + \left(\frac{K_3}{D}-\frac{2AK_1}{D^2}\right)\bar{x}_1 \qquad (5.16)$$

где C_5, C_6, C_7 – новые постоянные интегрирования.

Подставляя (5.16) в (5.13) и (5.14), получим окончательные выражения для ψ и Ω_3:

$$\psi = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)}{3B^*}\delta^2\frac{\alpha}{\mu}}\left[-\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\left(C_7\lambda\operatorname{sh}\lambda\bar{x}_1 + C_6\lambda\operatorname{ch}\lambda\bar{x}_1 + \frac{K_1}{D}\bar{x}_1^2 + \right.\right.$$

$$\left.+\frac{K_2}{D}\bar{x}_1 + \frac{K_3}{D}-\frac{2AK_1}{D^2}\right) - \frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{1}{2}\delta^{-1}C_1+\frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_t T_0\right)\bar{x}_1^2 + \qquad (5.17)$$

$$\left.+\delta^{-1}\left(\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_3\bar{x}_1+\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_4+\frac{1}{2}C_1\right)\right]$$

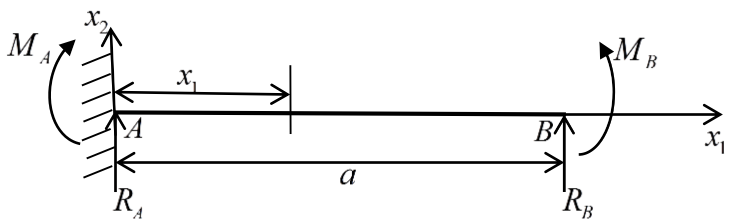
$$\Omega_3 = \frac{2(1+\nu)\delta^2}{3B^*\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)}{3B^*}\delta^2\frac{\alpha}{\mu}\right)}\left[-\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\left(C_7\lambda\operatorname{sh}\lambda\bar{x}_1 + C_6\lambda\operatorname{ch}\lambda\bar{x}_1 + \frac{K_1}{D}\bar{x}_1^2 + \frac{K_2}{D}\bar{x}_1\right.\right.$$

$$\left.+\frac{K_3}{D}-\frac{2AK_1}{D^2}\right) - \frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{\delta^{-1}}{2}C_1+\frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_t T_0\right)\bar{x}_1^2 + \frac{\delta^{-1}}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_3\bar{x}_1 + \qquad (5.18)$$

$$\left.+\delta^{-1}\left(\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_4+\frac{1}{2}C_1\right)\right] - \frac{1}{2B^*}\left(\frac{C_1}{2}\delta^{-1}+\frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_t T_0\right)\bar{x}_1^2 + \frac{1}{2B^*}\delta^{-1}\left(C_3\bar{x}_1+C_4\right)$$

Для определения постоянных интегрирования $C_1, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$, на основе формул (5.16), (5.17), (5.18) удовлетворим граничным условиям (5.5), в результате получим шесть линейных алгебраических уравнений относительно искомых постоянных интегрирования. Решая полученную алгебраическую систему уравнений, определяя значения $C_1, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ и подставляя их в выражения (5.16), (5.17), (5.18), получим решение поставленной граничной задач (5.2)-(5.5).

Поставленную задачу решаем также на основе классической теории термоупругого изгиба балок (4.13)-(4.15), (4.17) ($w = 0, \psi = 0$). Задачу будем решать методом сил сопротивления материалов [10]. Так как задача дважды статически неопределённая, выбираем основную систему (фиг.3).



Фиг.3

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} &R_A + R_B = 0, \\ &M_B - M_A + R_B \cdot a = 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Внутренние силовые факторы (поперечная сила и изгибающий момент) для основной системы будут:

$$\begin{aligned} &N_{12} = R_A = \text{const} = C_1, \\ &M_{изг} = M_{11} = M_A + R_A \cdot x_1, \qquad 0 \le x_1 \le a. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Перейдём к безразмерным величинам (5.6).

Подставим значения $\overline{M}_{11}$ ((5.20)) и $\overline{K}_{11}$ ((4.15)$_2$) в формулу (4.14)$_1$ и полученное выражение для $\dfrac{d\psi}{d\overline{x}_1}$ проинтегрируем по $\overline{x}_1$, получим:

$$\psi = \frac{3\delta^{-3}}{4(1+\nu)}\left(\overline{R}_A \cdot \frac{\overline{x}_1^2}{2} + \overline{M}_A \cdot \overline{x}_1\right) + \frac{\delta^{-1}\alpha_t T_0}{4}\left(\overline{x}_1^2 + \overline{x}_1\right) + C_2. \tag{5.21}$$

Из этого выражения потребуем условия:

$$\overline{x}_1 = 0, \;\; \psi = 0 \text{ и } \overline{x}_1 = 1, \;\; \psi = 0. \tag{5.22}$$

В результате получим

$$C_2 = 0 \tag{5.23}$$

и следуюшее уравнение:

$$\frac{\overline{R}_A}{2}+\overline{M}_A=-\frac{2(1+\nu)\delta^2\alpha_t T_0}{3}, \qquad (5.24)$$

также значение для ψ

$$\psi=\frac{3\delta^{-3}}{4(1+\nu)}\left(\overline{R}_A\cdot\frac{\overline{x}_1^2}{2}+\overline{M}_A\cdot\overline{x}_1\right)+\frac{\delta^{-1}\alpha_t T_0}{4}\left(\overline{x}_1^2+\overline{x}_1\right). \qquad (5.25)$$

Подставляя значение N_{12} ((5.20)$_1$) и формулу (5.25) для ψ в формулу (4.14)$_2$, определим производную $\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}_1}$, интегрируя это выражение, получим общее решение для функции w:

$$\overline{w}=\frac{\overline{R}_A\delta^{-1}}{2}\overline{x}_1-\left[\frac{3\delta^{-3}}{8(1+\nu)}\left(\frac{\overline{R}_A}{3}\overline{x}_1^3+\overline{M}_A\overline{x}_1^2\right)+\frac{\delta^{-1}\alpha_t T_0}{4}\left(\frac{\overline{x}_1^3}{3}+\frac{\overline{x}_1^2}{2}\right)\right]+C_3. \qquad (5.26)$$

Удовлетворив условиям

$$\overline{x}_1=0,\ \ \overline{w}=0 \text{ и } \overline{x}_1=1,\ \ \overline{w}=0,. \qquad (5.27)$$

получим

$$C_3=0 \qquad (5.28)$$

и уравнение

$$\overline{R}_A=\frac{3\delta^{-2}}{4(1+\nu)}\left(\frac{\overline{R}_A}{3}+\overline{M}_A\right)+\frac{5\alpha_t T_0}{12}, \qquad (5.29)$$

а также формулу для $\overline{w}$:

$$\overline{w}=\frac{\overline{R}_A\delta^{-1}}{2}\overline{x}_1-\frac{3\delta^{-3}}{8(1+\nu)}\left(\frac{\overline{R}_A}{3}\overline{x}_1^3+\overline{M}_A\overline{x}_1^2\right)-\frac{\delta^{-1}\alpha_t T_0}{4}\left(\frac{\overline{x}_1^3}{3}+\frac{\overline{x}_1^2}{2}\right). \qquad (5.30)$$

Таким образом, для определения $\overline{R}_A$ и $\overline{M}_A$ получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{R}_A}{2}+\overline{M}_A=-\dfrac{2(1+\nu)\delta^2\alpha_t T_0}{3},\\[2mm] \overline{R}_A=\dfrac{3\delta^{-2}}{4(1+\nu)}\left(\dfrac{\overline{R}_A}{3}+\overline{M}_A\right)+\dfrac{5\alpha_t T_0}{12}.\end{cases} \qquad (5.31)$$

Решая эту систему для $\overline{R}_A$ и $\overline{M}_A$, получим:

$$\begin{aligned}&\overline{R}_A=-\frac{2(1+\nu)\delta^2\alpha_t T_0}{24(1+\nu)\delta^2+3},\\ &\overline{M}_A=-\frac{(1+\nu)\delta^2\left(1+16(1+\nu)\delta^2\right)\alpha_t T_0}{24(1+\nu)\delta^2+3}.\end{aligned} \qquad (5.32)$$

Окончательно, для $\overline{w}$ и ψ получим:

$$\overline{w}=\frac{\delta^{-1}\alpha_t T_0}{12}\left[\frac{1}{8(1+\nu)\delta^2+1}-1\right]\overline{x}_1^3+\frac{\delta^{-1}\alpha_t T_0}{8}\left[\frac{1+16(1+\nu)\delta^2}{8(1+\nu)\delta^2+1}-1\right]\overline{x}_1^2-$$
$$-\frac{(1+\nu)\delta\alpha_t T_0}{3(8(1+\nu)\delta^2+1)}\overline{x}_1, \tag{5.33}$$

$$\psi=-\frac{\delta^{-1}\alpha_t T_0}{4}\left[\frac{1}{8(1+\nu)\delta^2+1}-1\right]\overline{x}_1^2-\frac{\delta^{-1}\alpha_t T_0}{4}\left[\frac{1+16(1+\nu)\delta^2}{8(1+\nu)\delta^2+1}-1\right]\overline{x}_1. \tag{5.34}$$

Приводим результаты численных вычислений. Расчёты выполнены при следующих значениях параметров задачи:

$$\delta=\frac{h}{a}=\frac{1}{40},\ \nu=0.33,\ B^*=1.5,\ T_0=60^\circ C,\ \alpha_t=125\times10^{-7}\ {}^{1}\!/\!_{\text{гр.}}$$

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\overline{w}_{\max}\times10^{-7}$	классическая модель $\overline{w}_{\max}\times10^{-7}$	$\frac{w_{\max}^{mik.}}{w_{\max}^{kl.}}$
0	7.946	7.946	1
10^{-5}	7.941	7.946	0.99
10^{-3}	7.032	7.946	0.88
10^{-2}	5.227	7.946	0.66
2×10^{-2}	4.155	7.946	0.52
10^{-1}	1.158	7.946	0.15

Как убедились, при увеличении постоянной упругости α (микрополярной постоянной) жёсткость балки увеличивается.

6. Заключение. Развивая метод известных гипотез, построена прикладная модель термоупругой изгибной деформации микрополярной тонкой балки с независимыми полями перемещений и вращений. Для построенной модели устанавливается соответствующий вариационный принцип. Рассматривается по построенной прикладной модели изучение конкретной задачи термоупругого изгиба микрополярной тонкой балки с определёнными граничными условиями, когда задано изменение температурной функции. Построено точное решение для этой задачи, выполнен численный расчёт и его анализ. Установлены эффективные свойства микрополярного материала балки с точки зрения жёсткости и прочности по сравнению с классическим материалом.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелан Э., Паркус Г., Температурные напряжения вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматлит, 1958. 167 с. Melan E., Parkus G. Thermal stresses caused by stationary temperature fields. Moscow, Fizmatlit. 1958. 167p. (in Russian)
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 518с. Boley B., Weiner J. Theory of thermal stresses. Moscow, Mir. 1964. 518p. (in Russian)
3. Баженов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчёт конструкций на тепловые воздействия. М.: Изд. «Машиностроение», 1969. 600с. Bazhenov V.L., Goldenblat I.I., Nikolenko N.A., Sinyukov A.M. Calculation of structures on thermal influence. Moscow, Mashinostroeniye. 1969. 600p. (in Russian)
4. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 344с. Podstrigach Ya. S., Shvets R.N. Thermoelasticity of thin shells. Kiev: Naukova-dumka. 1978. 344p. (in Russian)
5. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, Pergamon Press. 1986. 383p.
6. Sargsyan S.H. Mathematical Model of Micropolar Termo-Elasticity of Thin Shells // Journal of Thermal Stresses. 2013. Vol. 36. issue 11, pp. 1200-1216.
7. Саркисян С.О. Некоторые общие вопросы теории термоупругости микрополярных тонких оболочек // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. № 2. сс.52-68. Sargsyan S.H. Some general questions of theory of thermoelasticity of micropolar thin shells // Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. Vol. 67. issue 2. pp. 52-68. (in Russian)
8. Асланян Н.С., Саркисян С.О. Математическая модель термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №1. С.34-47. Aslanyan N.S., Sargsyan S.H. Mathematical model of thermoelasticity of micropolar orthotropic thin plates // Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2013. Vol. 66. issue 1. pp. 34-47. (in Russian)
9. Timoshenko S.P. Vibration problems in engineering. New-York: D van Nostrand C. 1937. 470p.
10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов М.: Изд. «Наука», 1986. 512с. Feodosyev V.E. Strength of materials, Moscow, Nauka. 1986. 512p. (in Russian)

Информация об авторах:

Асланян Наира Самвеловна – аспирантка кафедры Высшей математики Гюмрийского государственного пед. института им. М.Налбандяна, (055) 73-57-24.
E-mail: asnaira73@mail.ru

Саркисян Самвел Оганесович – чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. Высшей математики Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна, (093) 15 16 98.
E-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 01.06.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №4, 2016 Механика

УДК 532.613.5

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ СЖАТИЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

Оганян Г.Г. , Саакян С.Л.

Ключевые слова: жидкость, пузырёк, снарядный режим, периодическая структура.
Առանցքային բառեր. Գազահեղուկ խառնուրդ, ալիք, խցաններ փակ ջրանցքում:
Keywords: gas-fluid mixture, wave, corks in closed channel.

Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ.
Պարբերական կառուցվածքով երկֆազ խառնուրդում սեղմման ալիքի տարածումը

Հետազոտված է գազահեղուկ խառնուրդով լցված փակ ջրանցքում ճնշման ալիքի վարքը: Ջրանցքում կարող են առաջանալ տարբեր գազապարունակությամբ պարբերաբար կրկնվող խցաններ: Դուրս է բերված դիսպերսիոն հավասարումը, որը բնութագրում է երկու խցաններից կազմված բջիջում Բլոխ-Ֆլոկեի ալիքային թվի կախվածությունը խցաններում այլ ալիքային թվերից: Ջրաօդային խառնուրդի համար թվային հաշվարկների միջոցով որոշված են գրգռող հաճախությունների ոչ թափանցելիության արժեքները, որոնց դեպքում ալիք չի տարածվում:

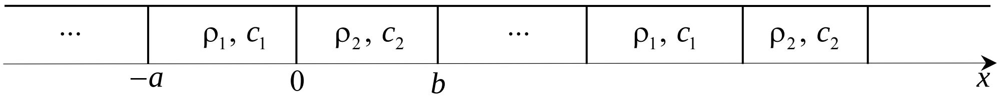
Oganyan G.G., Sahakyan S.L.
The propagation of pressure wave in two-component mixture flow with periodically structure

The behavior of the pressure wave in a closed channel with a gas-liquid mixture is investigated. In the channel can be implemented corks with the different gas content. The structure of the slug flow is quasiperiodic. The transcendental dispersion equation is derived. The cell Bloch number dependence on a local wave numbers in the corks is derived. As illustration the water–air mixture is considered. Closing value of frequencies decreasing with increasing gas in corks, increasing with initial pressure magnification decreasing with increase of bubble sizes for high and ultrahigh forcing frequencies and are not changed for a low frequencies. As well as they decreasing when we take into account the dispersion effects in mixtures.

Рассмотрена периодическая структура стационарного течения смеси, характеризуемого чередующимися пробками в замкнутом канале бесконечной длины. На основе модельных уравнений разрежённой пузырьковой смеси выписаны линейные уравнения типа Буссинеска, описывающие поведения давлений в периодически повторяющихся ячейках, которые состоят из двух пробок, наполненными газожидкостными смесями с разными объёмными содержаниями газа. Возмущения скоростей частиц смесей определяются из уравнений количества движения в каждой из пробок. Получено дисперсионное трансцендентное уравнение, из которого численной его реализацией найдены значения возбуждающих волну частот, при которых распространение волны сжатия не происходит.

Сформировавшийся снарядный режим в замкнутом канале, в котором произошло разделение фаз в форме образований чередующихся жидкой и газовой пробок, изучен в [1], где определны скорости распространения волны в ячейках. В случае периодической структуры распределения пробок в [2], используя теорему Флоке [3,4], получено трансцендентное уравнение, из которого для водовоздушной смеси численно определены значения возбуждающих частот, при которых волна распространяется (частоты пропускания) или отсутствует (частоты запирания или среза). Распространение волны в произвольных периодических структурах на основе уравнения Хилла рассмотрено в [5]. Затухание волны умеренной интенсивности в вертикальной трубе с газожидкостной смесью экспериментально исследовано в [6]. Ниже рассматривается стационарная задача поведения волны в газожидкостной, в частности, водовоздушной смеси для определения диапазонов среза, являющейся логическим продолжением работы [7].

1. Исходные уравнения. Рассмотрим раннюю стадию формирования (зарождения) стационарного снарядного режима, в котором первая пробка наполнена газожидкостной смесью с малым объёмным газосодержанием $\beta_1 << 1$, а вторая – с более высоким содержанием газа β_2. Идеализированная схема режима стационарного течения представлена на фиг.1.



Фиг.1

Полагается, что касательные напряжения на стенках равны нулю в силу отсутствия вязкости.

Одномерные линейные уравнения, описывающие движения сред в пробках в приближении Буссинеска, имеют вид [6,7]:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - (1-\beta_1)\frac{c_1^2}{\omega_{ar}^2}\frac{\partial^4 P_1}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \quad c_1^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_1 \rho_{10}}$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} - (1-\beta_2)\frac{c_2^2}{\omega_{ar}^2}\frac{\partial^4 P_2}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \quad c_2^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_2 \rho_{10}} \tag{1.1}$$

$$\rho_1 = (1-\beta_1)\rho_{10} + \beta_1\rho_{20}, \ \rho_2 = (1-\beta_2)\rho_{10} + \beta_2\rho_{20}, \ \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_{10} R_0^2}$$

Здесь и далее t – время, x – координата, направленная вдоль стенки канала, P_i и ρ_i $(i=1,2)$ – возмущения давления и плотности, ω_{ar} – резонансная частота Минаерта, R – радиус пузырька, γ – показатель адиабаты газа, c_i – невозмущённые скорости звука в смесях. Последние слагаемые в уравнениях (1.1) ответственны за дисперсию волн в смесях. Индексы «0» отнесены к состоянию равновесия (покоя), а «1» и «2» – к параметрам первой и второй пробок.

Возмущения скоростей частиц смесей V_1 и V_2 определяются из уравнений количества движения в каждой из пробок

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1 c_1^2}\frac{\partial P_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1 c_2^2}\frac{\partial P_2}{\partial t} = 0 \tag{1.2}$$

Предположим, что в периодической по x дискретной структуре снарядного режима зависимость параметров течения по t также является периодической, в связи с чем в (1.1), (1.2) можно полагать

$$\left[P_i(x,t), \mathrm{V}_i(x,t)\right] = \left[P_{i*}(x), \mathrm{V}_{i*}(x)\right] e^{i\omega t},$$

где ω – возбуждающая частота. В результате получим стационарные уравнения

$$\frac{d^2 P_i}{dx^2} + \frac{\omega_i^2}{c_i^2} P_i = 0,\ \frac{d\mathrm{V}_i}{dx} + \frac{i\omega}{\rho_i c_i^2} P_i = 0,\ \omega_i^2 = \omega^2 \left[1 - (1-\beta_i)\frac{\omega^2}{\omega_{ar}^2}\right]^{-1},\ i = 1,2 \quad (1.3)$$

Здесь звездочки в индексах опущены. Общие решения запишутся в виде:

$$P_1(x) = A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{ik_1 x},\quad P_2(x) = A_2 e^{-ik_2 x} + B_2 e^{ik_2 x}$$

$$\mathrm{V}_1(x) = \frac{1}{\rho_1 c_1}\frac{\omega}{\omega_1}\left(A_1 e^{-ik_1 x} - B_1 e^{ik_1 x}\right) + D_1,$$

$$\mathrm{V}_2(x) = \frac{1}{\rho_2 c_2}\frac{\omega}{\omega_2}\left(A_2 e^{-ik_2 x} - B_2 e^{ik_2 x}\right) + D_2 \quad (1.4)$$

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c_1},\quad k_2 = \frac{\omega_2}{c_2}$$

где A_i, B_i, D_i – постоянные интегрирования.

На линии $x = 0$ раздела сред (пробок) должны выполняться условия непрерывности как давлений и их производных, так и скоростей

$$P_1(0) = P_2(0),\quad \mathrm{V}_1(0) = \mathrm{V}_2(0),\quad \frac{dP_1(0)}{dx} = \frac{dP_2(0)}{dx} \quad (1.5)$$

Кроме того, на линиях $x = -a$ и $x = b$ раздела элементарной ячейки, потребуем выполнение условий их квазипериодичности:

$$P_1(-a) = lP_2(b),\quad \mathrm{V}_1(-a) = l\mathrm{V}_2(b),\quad \frac{dP_1(-a)}{dx} = l\frac{dP_2(b)}{dx}, \quad (1.6)$$

где постоянный множитель l будет определён в процессе решения задачи.

Удовлетворяя решения (1.3) условиям (1.4) и (1.5), придём к системе линейных однородных уравнений относительно A_i, B_i, D_i:

$$A_1 + B_1 - A_2 - B_2 = 0$$

$$\frac{1}{\rho_1 c_1}\frac{\omega}{\omega_1}\left(A_1 - B_1\right) - \frac{1}{\rho_2 c_2}\frac{\omega}{\omega_2}\left(A_2 - B_2\right) + D_1 - D_2 = 0$$

$$A_1 e^{ik_1 a} + B_1 e^{-ik_1 a} - l\left(A_2 e^{-ik_2 b} + B_2 e^{ik_2 b}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\rho_1 c_1}\frac{\omega}{\omega_1}\left(A_1 e^{ik_1 a} - B_1 e^{-ik_1 a}\right) - l\,\frac{1}{\rho_2 c_2}\frac{\omega}{\omega_2}\left(A_2 e^{-ik_2 b} - B_2 e^{ik_2 b}\right) + D_1 - lD_2 = 0$$

$$-\frac{\omega_1}{c_1}\left(A_1 - B_1\right) + \frac{\omega_2}{c_2}\left(A_2 - B_2\right) = 0$$

$$-\frac{\omega_1}{c_1}\left(A_1 e^{ik_1 a} - B_1 e^{-ik_1 a}\right) + l\,\frac{\omega_2}{c_2}\left(A_2 e^{-ik_2 b} - B_2 e^{ik_2 b}\right) = 0$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений является равенство нулю определителя, элементы которого составлены из коэффициентов при A_i, B_i, D_i. Раскрывая его, для нахождения множителя l получим уравнение

$$\frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{l}\right) = \cos k_1 a \cos k_2 b - \frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1}\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{c_1}{c_2}\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\sin k_1 a \sin k_2 b$$

Его можно получить также с использованием метода интегральной передаточной матрицы, который эффективен в случае большего количества пробок [1]. Вводя в рассмотрение волновое число Блоха-Флоке q [4,5] $l = e^{iqL}$, $L = a + b$, будем иметь трансцендентное уравнение

$$\cos qL = \cos k_1 a \cos k_2 b - \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{c_2}\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{c_2}{c_1}\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\sin k_1 a \sin k_2 b, \tag{1.7}$$

которое в отсутствие дисперсии переходит в известное для периодических структур уравнение [4,5,8].

Отсюда следует вывод, что волновой процесс в ячейке определяется не локальными волновыми числами k_1, k_2 в пробках, а некоторой величиной q, которая определяется с точностью до целого значений $2\pi n/L$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Очевидно, что для возбуждающих частот ω, при которых $\left|\cos qL\right| \le 1$, имеет место распространение волны, а при $\left|\cos qL\right| > 1$ волны отсутствуют. В последнем случае падающая из какой-либо пробки волна по достижению границы последующей полностью отражается от неё. Таким образом, весь спектр значений ω подразделяется на дипазоны прозрачности (частот пропускания) и среза (частот запирания). Первые по очерёдности диапазоны будем называть главными. Введём в рассмотрение параметр $\alpha = b/L$ – приведённую безразмерную ширину второй пробки и тогда $a = \left(1 - \alpha\right)L$, поскольку $L = a + b$.

Требуется определить дипазоны значений частот запирания. В качестве примера рассматриваются водовоздушные смеси с различными вариантами исходных параметров. При построении графиков тонкие и утолщённые кривые будут отнесены соответственно к меньшим и большим значениям варьируемых параметров.

2. Случай отсутствия дисперсии. Последними слагаемыми в уравнениях (1.1) можно пренебречь и полагать $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

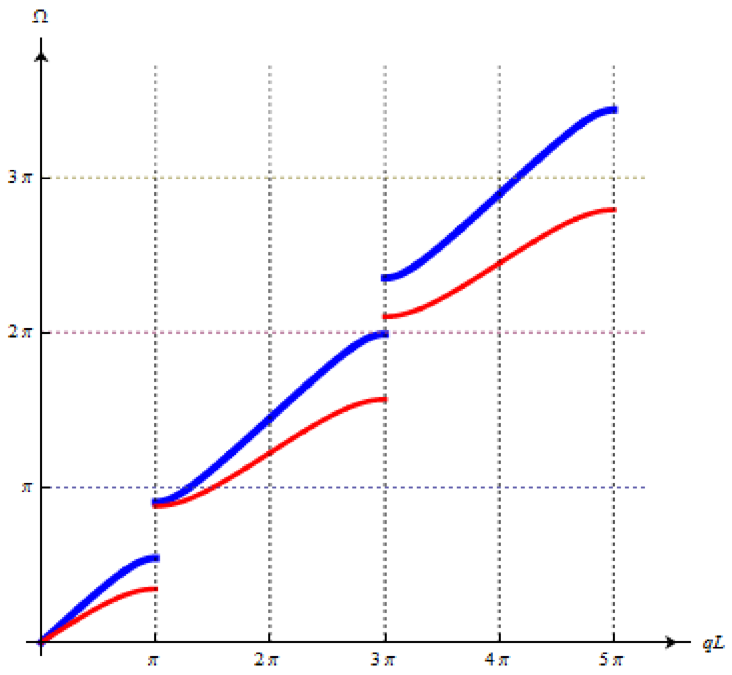
Частная задача. Пусть выполняется связь $k_1 a = k_2 b$, означающая, что фаза волны в каждой пробке меняется на одну и ту же величину [5]. Уравнение (1.7) примет форму записи:

$$\cos qL = 1 - \frac{1}{2}\frac{c_1}{c_2}\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right)^2 \sin^2\left[(1-\alpha)\Omega\right] \equiv f_1(\Omega), \quad \Omega = \frac{\omega}{c_1}L \tag{2.1}$$

Условие $k_1 a = k_2 b$ определяет значение α в зависимости от отношения газосодержаний

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{c_1 + c_2}{c_2} = 1 + \sqrt{\theta}\,, \ \theta = \beta_2 / \beta_1 . \tag{2.2}$$

Исследуем влияния изменений параметров на картину распространения волны, для чего выявим зависимость безразмерного волнового числа qL всей ячейки от безразмерной частоты Ω. При построении таких графиков по уравнению (2.1) значения параметров α вычисляются по формуле (2.2).



Фиг. 2. Дисперсионные кривые при вариации θ.

В случае исходных данных

$$P_0 = 0.1\text{МПа}, \quad \gamma = 1.4 \tag{2.3}$$

на фиг.2 показаны зависимости частоты Ω от величины qL при значениях $\theta = 5$, $\alpha = 1\Big/\left(1+\sqrt{\theta}\right) \approx 0.309$ – верхние, $\theta = 20$, $\alpha = 1\Big/\left(1+\sqrt{\theta}\right) \approx 0.183$ – нижние кривые.

Здесь отрезки между кривыми, паралелльные оси Ω, соответствуют значениям частот запирания в каждом из диапазонов, ширины которых характеризуются длинами отрезков.

Очевидно, что с увеличением θ ширины диапазонов среза возрастают, а сами частоты уменьшаются по величине. С увеличением параметра α ширины, наоборот, уменьшаются, а частоты возрастают. Заметим, что P_0 не влияет на величину безразмерной частоты Ω.

На фиг.3 представлена та же зависимость в главном диапазоне изменения (полупериоде $\left[0, \pi\right]$) в случае $\theta = 20$. Видно, что с увеличением Ω ширины диапазонов частот запирания остаются неизменно равными, а сами частоты в каждом из них с возрастанием qL уменьшаются по величине.

На фиг.4 представлена правая часть уравнения (2.1). Здесь прямая $f_1 = -1$ отсекает частоты запирания. Видно, что ширины диапазонов среза меньше ширин диапазонов пропускания, что связано с распределением энергии падающей на границу раздела сред волны между энергиями отражённой I_1 и прошедшей сквозь неё I_2, волн. Количественное отношение энергий определяется из полученной в [11] формулы

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\left(z-1\right)^2}{4z}, \; z = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}, \tag{2.4}$$

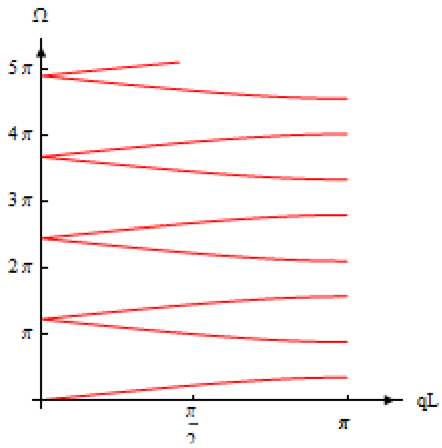
где z – относительный акустический импеданс. В силу малости величин β_1, β_2 можно полагать:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}, \; z = \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}\frac{1}{\sqrt{\theta}}. \tag{2.5}$$

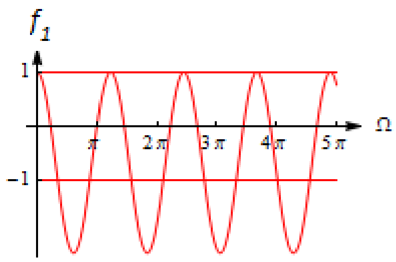
Из (2.4) следует что $I_1 / I_2 < 1$ при значениях $0.1716 < z < 1$, откуда вытекает неравенство

$$\beta_1\left(\sqrt{\theta} - 0.1716\right) < 1/\theta - 0.1716, \; 0.029 < \theta < 34,$$

определяющее область допустимых значений β_1. В рассматриваемом случае $\theta = 20$ имеем $\beta_1 < 0.0121$ и, в частности, при $\beta_1 = 0.0025, \; \beta_2 = 0.05$, из (2.5) получим величину $z = 0.213$, подстановка которой в (2.4) даёт значение $I_1 / I_2 = 0.727$. А это означает, что большая часть звуковой энергии падающей волны проходит через границу раздела двух акустических сред, т.е., действительно, ширины диапазонов частот пропускания больше ширин диапазонов среза.



Фиг.3. Дисперсионные кривые в полупериоде $qL \in [0, \pi]$ при $\theta = 20$.



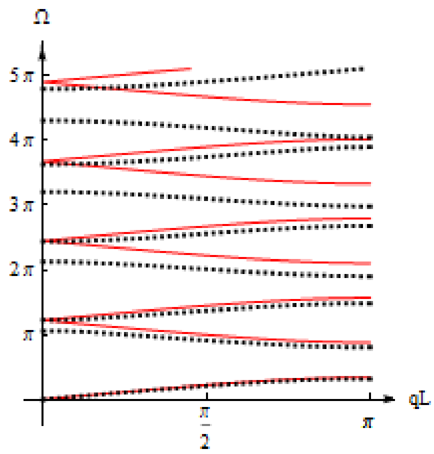
Фиг.4. Правая часть уравнения (2.1) при $\theta = 20$, $\alpha = 0{,}183$.

Перейдём к численному исследованию уравнения (1.7), когда $k_1 a \neq k_2 b$, которое запишется в безразмерном виде

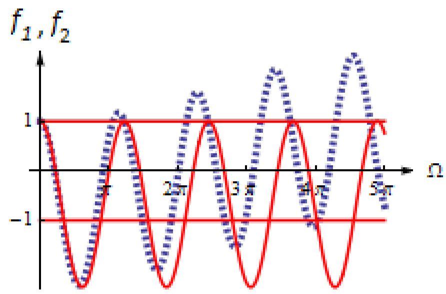
$$\cos qL = \cos\left[(1-\alpha)\Omega\right]\cos\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\theta}}\Omega\right] - \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)\sin\left[(1-\alpha)\Omega\right]\sin\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\theta}}\Omega\right] \equiv f_2(\Omega) \tag{2.6}$$

где выражения Ω и θ приведены в (2.1) и (2.2).

Используя уравнение (2.6), выясним влияние газосодержаний на дискретную картину распространения волны и сравним со случаем уравнения (2.1). Вычисления проводятся с исходными данными (2.3). Заметим, что при использовании (2.1) и задании θ значение α вычисляется по формуле (2.2), а в рассматриваемом случае при выборе θ значение α уже задаётся. На фиг.5 приведены графики зависимости Ω в главном диапазоне изменения $qL \in [0, \pi]$ при $\theta = 20$, $\alpha = 1/\left(1+\sqrt{\theta}\right) \approx 0.183$ – сплошные и $\theta = 12.7$, $\alpha = 0.219$ – пунктирные кривые. Видно, что при фиксированном qL с уменьшением θ переход от сплошных кривых к пунктирным происходит сжатие по оси Ω, что означает сужение соответствующих диапазонов как среза, так и пропускания.

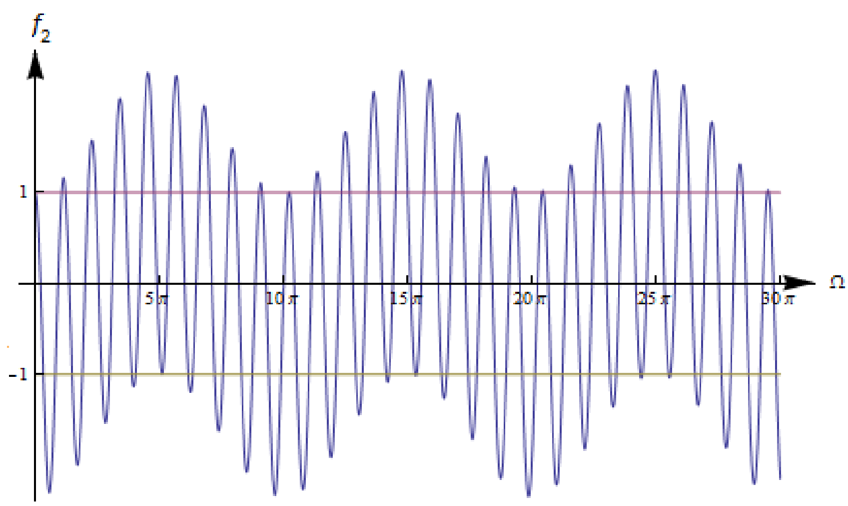


Фиг.5. Дисперсионные кривые в полупериоде $qL \in [0, \pi]$ при вариации θ.



Фиг.6. Правые части уравнений (2.6) и (2.1).

Для детального выявления картины распространения волн на фиг.6 приведены виды правых частей уравнений (2.6) и (2.1) при тех же значениях параметров и в той же области изменения $\Omega \in [0, 5\pi]$. Прямые $f_1, f_2 = \pm 1$ отделяют частоты запирания от частот пропускания, пунктирные кривые соответствуют правой части (2.6), а сплошные – правой части (2.1). Уменьшение θ приводит также к изменению поведения кривых по оси f_2, что может привести к исчезновению нижних диапазонов среза и к появлению верхних.



Фиг.7. Правая часть уравнения (2.6) при $\theta = 12.7$, $\alpha = 0.219$.

Численные исследования указывают, что с увеличением θ при $\Omega \in [0, 5\pi]$ имеет место, наоборот, расширение по оси Ω и возрастание по оси f_2. Таким образом, отклонение значения θ в ту или в иную сторону от значения, соответствующего случаю $k_1 a = k_2 b$, всегда приводит к возрастанию максимумов и минимумов правой части (2.6) по оси f_2, что может привести к исчезновению нижних диапазонов среза и к появлению верхних.

Однако, при расширении области изменения Ω максимумы и минимумы правой части (2.6) могут как возрастать, так и уменьшаться. Такие изменения ограничиваются двумя почти периодическими огибающими волн с одинаковыми периодами, что проиллюстрировано на фиг.7. Приведённая картина указывает, что расширяющиеся диапазоны среза сужаются и, наоборот, – с переходом от одного полупериода к последующему. Это означает также, что показанная на фиг.5 картина дисперсионных кривых периодически повторяется по Ω с периодом огибающих.

3. Учёт дисперсии. Уравнение (1.7) перепишем в развёрнутой форме:

$$\cos qL = \cos\left((1-\alpha)\frac{\Omega}{\sqrt{E_1}}\right)\cos\left(\sqrt{\theta}\frac{\alpha\Omega}{\sqrt{E_2}}\right) - \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\sqrt{\frac{E_2}{E_1}} + \sqrt{\theta}\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right)\sin\left((1-\alpha)\frac{\Omega}{\sqrt{E_1}}\right)\sin\left(\sqrt{\theta}\frac{\alpha\Omega}{\sqrt{\theta}\sqrt{E_2}}\right), \tag{3.1}$$

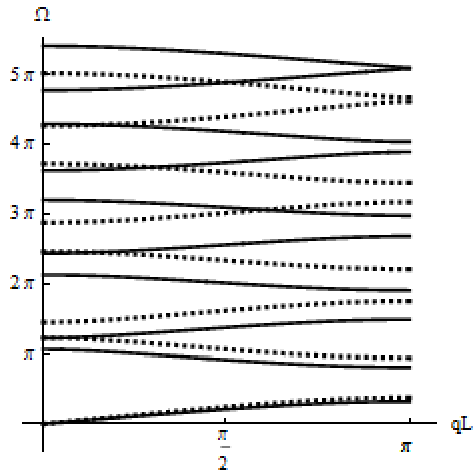
$$E_1 = 1 - \frac{1-\beta_1}{3\beta_1}\xi^2\Omega^2,\ E_2 = 1 - \frac{1-\beta_2}{3\beta_1}\xi^2\Omega^2,\ \xi = \frac{R}{L}$$

Выявим влияние вариации ξ на ширины диапазонов среза. Поскольку, в силу $\beta_1 < \beta_2$, на величину Ω должно быть наложено ограничение

$$\Omega < \sqrt{\frac{3\beta_1}{1-\beta_1}}\frac{1}{\xi}, \tag{3.2}$$

то с возрастанием ξ значение Ω должно убывать и, наоборот, с уменьшением ξ – возрастать. В связи с этим, соответственно уменьшаются и возрастают как ширины диапазонов среза, так и диапазоны частот пропускания. Если для уравнения (2.6) почти периодические огибающие указывали на почти периодичность картины распространения, то в данном случае такая картина отсутствует. В то же время имеем бесконечное множество диапазонов среза пропускания частот, которые сгущаются снизу к числу, определённому по правой части (3.2), являющееся резонансной частотой.

В реальных смесях $R \le 1\cdot 10^{-3}$ м, $L \sim 1$ м и поэтому $\xi << 1$. На фиг.8 показаны зависимости диапазонов частот запирания от qL при частотах, далёких от резонансной. Пунктирные кривые соответствуют решениям уравнения (2.6), а сплошные – решениям уравнения (3.1). Видно, что происходит нелинейное сжатие по оси Ω, и, тем самым, уменьшение как ширин диапазонов среза, так и диапазонов частот пропускания.



Фиг.8. Дисперсионные кривые в полупериоде $qL \in [0, \pi]$ при $\theta = 12.7,\ \ \alpha = 0.219$, $\xi = 5 \cdot 10^{-4}$.

Заключение. Исследуется случай, когда в замкнутом канале бесконечной длины с газожидкостной смесью реализуют пробки, первая из которых наполнена смесью с малым газосодержанием газа β_1, а вторая – с более высоким содержанием газа β_2. Принимается квазипериодичность структуры снарядного режима течения. Выведено трансцендентное дисперсионное уравнение, описывающее зависимость волнового числа Блоха всей ячейки от локальных волновых чисел в пробках. В качестве примера рассмотрены водовоздушные смеси. Численная реализация уравнений с заданными исходными параметрами смесей выявляет диапазоны значений частот запирания (диапазоны среза), при которых распространение волны отсутствует.

Показано, что в отсутствии эффекта дисперсии:

в частной задаче с уменьшением θ – отношения газосодержаний β_2/β_1 – ширины диапазонов среза уменьшаются, как и значения самих частот. В случае $\theta = 20$ с увеличением частоты ширины диапазонов среза не меняются. При этом они меньше ширин диапазонов частот пропускания;

при исследовании общего уравнения с увеличением или уменьшением θ имеет место соответственно расширение или сжатие картины распространения по оси Ω; картина дисперсионных кривых почти периодически повторяется по Ω.

В случае учёта дисперсии при возрастании параметра $\xi = R / L$ значения частот запирания убывают, а с её уменьшением – возрастают. Картина распространения волн не является периодической. Имеется бесконечное множество диапазонов среза, значения частот которых сгущаются снизу к резонансной частоте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Martin C.S., Padmanabhan M. Pressure Pulse Propagation in Two–Component Slug Flow // Trans. of the ASME. 1979. V.101. №1. = Мартин К.С., Падманабхан М. Распространение импульса давления в двухкомпонентном снарядном потоке. // Теор. основы инж. расчётов. 1979. Т.101. №1. С.161-171.
2. Оганян Г.Г., Саакян С.Л. Об одной модели снарядного потока газожидкостной смеси // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Чартарагет, 2014. С.340-344.
3. Brillouin L. et Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux periodiques. Paris: Masson et C[ie] Editeurs, Duror editeurs. = Бриллюэн А., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 448с.
4. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешётками. М.: Наука, 1989. 288с.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384с.
6. Донцов В.Е., Накоряков В.Е. Волны давления в газожидкостной среде с расслоённой структурой жидкость-пузырьковая смесь //ПМТФ. 2003. Т.44. №4. С.102-108.
7. Григорян Ш.А., Оганян Г.Г., Саакян С.Л. Распространение волны давления в замкнутом канале, наполненном периодическими пробками газожидкостной смеси и газа // Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №3. С.46-53.
8. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.
9. Накоряков В.Е.. Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248с.
10. Ghazaryan K., Piliposyan D. Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structures //J. of Sound and Vibration, 330(26). 2011. Pp.6456-6466.
11. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496с.

Авторы благодарят А.С. Аветисяна за полезные советы, учёт которых способствовал улучшению оформления работы.

Сведения об авторах:

Оганян Гагик Гришаевич – к.ф.м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Тел.** (+374 93) 946-947, **E-mail:** mechins@sci.am
Саакян Саак Левонович – к.ф.м.н., ЕГУ, фак-т информатики и прикладной математики. **Тел.** (+374 77) 002-408, **E-mail:** ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 04.05.2016

Содержание 69 тома 2016 г. «Известия НАН Армении. Механика»

CONTENTS Mechanics 2016. V.69

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

CONTENTS

СОДЕРЖАНИЕ