ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №3, 2016 Механика

УДК 539.3

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ МЕЖФАЗНЫХ ДЕФЕКТОВ

Акопян В.Н., Акопян Л.В.

Ключевые слова: двоякопериодическая задача, дефект, кусочно-однородное пространство
Key words: doubly-periodic problem, defect, piecewise homogeneous space
Բանալի բառեր: երկպարբերական, դեֆեկտ, կտոր առ կտոր համասեռ տարածություն

HakobyanV.N., Hakobyan L.V.
Stress state of piece-wise homogeneous space with doubly-periodic system of interphase defects

In present paper the discontinuous solutions of equations for anti-plane problem of the elasticity theory for piece-wise space, formed by alternate junction of two heterogeneous layers with same thickness from different materials, with interphase doubly-periodic defects, when the displacements, as well as the stresses are discontinuous. Using these solutions the governing singular integral equations are written for two stated problems: the defect is the finite tunnel crack and the defect is finite tunnel crack with absolutely rigid thin inclusion welded to its one bank. The solutions of governing equations are built by the method of mechanical quadtratures. The numerical analysis are fulfilled and the character of changing of the displacements of edges of cracks is revealed, the stress intensity factor and contact stresses on junction line of the inclusion with matrix are determined depending on geometrical and physical and mechanical parameters.

Հակոբյան Վ.Ն., Հակոբյան Լ.Վ.
Երկպարբերական միջֆազային դեֆեկտներ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ տարածության լարվածային վիճակը

Կառուցված են նույն հաստության երկու տարբեր նյութից պատրաստված շերտերի հաջորդաբար միացումից ստացված կտոր առ կտոր համասեռ տարածության խզվող լուծումները հակահարթ լարվածային վիճակի դեպքում, երբ տարածությունը շերտերի միացման հարթություններում պարունակում է երկպարբերական գծային թունելային դեֆեկտների համակարգ: Այդ լուծումների օգնությամբ ստացվել են երկու կոնկրետ խնդիրների որոշիչ հավասարումները՝ երբ դեֆեկտը իրենից ներկայացնում է ճաք կամ ճաք, որի ափերից մեկին ամրակցված է բացարձակ կոշտ ներդրակ: Որոշիչ հավասարումների լուծումները ստացվել են մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի օգնությամբ: Պարզվել է քայքայող լարումների ինտենսիվության գործակիցների, ճաքերի բացվածքների, ինչպես նաև կոնտակտային լարումների փոփոխման օրինաչափությունները՝ կախված խնդիրների ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

В настоящей работе в общем случае получены разрывные решения уравнений антиплоской задачи теории упругости для кусочно-однородного пространства, полученного поочерёдным соединением двух разнородных слоёв равной толщины из различных материалов, на плоскостях стыка которых имеются межфазные двояко-периодические дефекты, когда на дефектах имеют разрыв как смещения, так и напряжения. Используя эти решения, записаны определяющие сингулярные интегральные уравнения для двух конкретных задач, когда дефектом является конечная туннельная трещина и когда дефект представляет собой конечную туннельную трещину, на одном из берегов которой спаяно абсолютно жёсткое тонкое включение. Решения определяющих уравнений построены методом механических квадратур. Проведены численные расчёты и определены закономерности изменения разности смещений берегов трещин, коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и контактные напряжения на сцеплённой с матрицей стороне включения в зависимости от геометрических и физико-механических параметров.

Введение. Периодическими и двоякопериодическими задачами для однородных массивных тел с дефектами начали заниматься ещё в шестидесятые и семидесятые годы прошлого века. При помощи анализа периодических функций и мощного аппарата комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили были построены разрывные решения антиплоской и плоской задач уравнений теории упругости с дефектами для упругих пространств и плоскости, на основе которых были записаны определяющие уравнения ряда периодических и двоякопериодических задач и построены их замкнутые или эффективные решения. Многие результаты, полученные в этом направлении, подытожены в монографиях [1,2]. На этой основе была предложена также теория регулярно армированных композитов [3]. Что же касается аналогичных задач для кусочно-однородных тел, то рассмотрены лишь несколько антиплоских и плоских периодических задач для составного двухкомпонентного пространства с дефектами [4-7]. Периодические и двояко-периодические задачи для кусочно-однородных тел с дефектами, которые в настоящее время весьма актуальны с точки зрения слоистых композитов, как нам известно, впервые были рассмотрены в работах [8,9].

1. Постановка задачи и вывод разрывных решений. Рассмотрим антиплоское напряжённое состояние кусочно-однородного пространства, изготовленного при помощи поочерёдного соединения двух разнородных слоёв толщины $2H$ с модулями сдвигов G_1 и G_2, на плоскостях соединения которых $y=2nH \quad (n\in Z)$ по полосам $\left\{x\in L=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(a_n,b_n)\right\} \quad (-\infty<z<\infty)$, где $a_n=-a+2nl$, $b_n=a+2nl$, содержит двоякопериодическую систему туннельных дефектов типа трещин, полностью или частично сцеплённых абсолютно жёстких или инородных включений. Полагаем, что пространство деформируется под воздействием таких периодических с периодом $2l$ нагрузок, действующих на дефекты, при которых плоскости $y=(2n+1)H \quad (n\in Z)$ являются плоскостями симметрии.

Очевидно, что при такой постановке задачи напряжённое состояние в составных слоях, находящихся между плоскостями симметрии $y=(2k-1)H$ и $y=(2k+1)H$, будут одинаковыми и, следовательно, можно рассмотреть только двухкомпонентный слой между плоскостями симметрии $y=-H$ и $y=H$.

Сначала построим разрывные решения для двухкомпонентного слоя с периодической системой межфазных дефектов, считая, что разрывы напряжений и смещений на дефектах описываются соответственно функциями $\tau(x)$ и $W(x)$. Снабдив все величины, описывающие напряжённо-деформированное состояние верхнего и нижнего слоёв соответственно индексами 1 и 2, эту задачу математически можно представить в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} W_1\left(x,H\right)=W_2\left(x,-H\right)=0 \quad \left(-\infty<x<\infty\right) \\ \tau_{yz}^{(1)}\left(x,0\right)=\tau_{yz}^{(2)}\left(x,0\right) \quad \left(x\notin L\right) \\ W_1\left(x,0\right)=W_2\left(x,0\right) \quad \left(x\notin L\right) \\ \tau_{yz}^{(1)}\left(x,0\right)-\tau_{yz}^{(2)}\left(x,0\right)=\tau\left(x\right) \quad \left(x\in L\right) \\ W_1\left(x,0\right)-W_2\left(x,0\right)=W\left(x\right) \quad \left(x\in L\right) \end{cases} \tag{1.1}$$

где $W_j\left(x,y\right)\ \left(j=1,2\right)$ – компоненты смещений точек соответствующих слоёв, каждая из которых в области своего определения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 W_j\left(x,y\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_j\left(x,y\right)}{\partial y^2}=0 \quad \left(j=1,2\right) \tag{1.2}$$

и связаны с компонентами напряжений $\tau_{yz}^{(j)}\left(x,y\right)$ соотношениями

$$\tau_{yz}^{(j)}\left(x,y\right)=G_j\frac{\partial W_j\left(x,y\right)}{\partial y}. \tag{1.3}$$

Построим решение граничной задачи (1.1), используя решения аналогичной задачи для слоистого композита с периодической системой параллельных межфазных дефектов, полученных в работе [9]. При помощи этих решений решения граничной задачи (1.1) запишутся в виде:

$$\begin{gathered} \tau_{yz}^{(1)}\left(x,0\right)=\frac{G}{G+1}\tau\left(x\right)+\frac{G_1}{2H\left(G+1\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n}\operatorname{cth}\left(\lambda\left(s-x\right)\right)W'\left(s\right)ds; \\ \frac{dW_1\left(x,0\right)}{dx}=\frac{W'\left(x\right)}{G+1}-\frac{1}{2HG_2\left(G+1\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n}\frac{\tau\left(s\right)ds}{\operatorname{sh}\left(\lambda\left(s-x\right)\right)}; \\ \tau_{yz}^{(2)}\left(x,0\right)=\tau_{yz}^{(1)}\left(x,0\right)-\tau\left(x\right);\ \frac{W_2\left(x,0\right)}{dx}=\frac{W_1\left(x,0\right)}{dx}-W'\left(x\right). \\ \left(G=G_1/G_2;\ \lambda=\pi/2H\right) \end{gathered} \tag{1.4}$$

Учитывая периодичность функций $\tau\left(x\right)$ и $W\left(x\right)$, т.е. соотношения

$$\tau\left(x+2nl\right)=\tau\left(x\right);\ W'\left(x+2nl\right)=W'\left(x\right),$$

можем записать:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n}\operatorname{cth}\left(\lambda\left(s-x\right)\right)W'\left(s\right)ds=\int_{-a}^{a}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}\operatorname{cth}\left(\lambda\left(s-x+2nl\right)\right)\right\}W'\left(s\right)ds;$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n}\frac{\tau\left(s\right)ds}{\operatorname{sh}\left(\lambda\left(s-x\right)\right)}=\int_{a_n}^{b_n}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}\left(\lambda\left(s-x\right)+2nl\right)}\right\}\tau\left(s\right)ds.$$

С другой стороны, имеют место представления [1, 10]

$$\operatorname{cth}\left(\frac{\pi x}{2H}\right)=\frac{H}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{cth}(Hs)e^{isx}ds;\quad \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi x/2H)}=\frac{H}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{th}(Hs)e^{isx}ds,$$

где интегралы нужно понимать в смысле обобщённых функций.
Тогда, учитывая соотношения [12]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(2nlx)=\pi\left[\delta(2lx-2\pi k)+\delta(2lx+2\pi k)\right];$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right),$$

где $\delta(x)$ – известная функция Дирака, а k – целое число, после некоторых преобразований, вводя обозначения

$$\frac{1}{2H}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{cth}\left(\lambda(x+2nl)\right)=\frac{1}{l}\left[\frac{x}{2H}+\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{cth}\left(\frac{\pi k}{l}H\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2l}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right)+K_1(x)\right];$$

$$\frac{1}{2H}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}\left(\lambda(x+2nl)\right)}=\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{th}\left(\frac{\pi k}{l}H\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)=\frac{1}{2l}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right)+K_2(x)\right],$$

первые два соотношения (1.4) представим в виде:

$$\begin{aligned}&\tau_{yz}^{(1)}(x,0)=\frac{G}{G+1}\tau(x)+\frac{G_1}{2l(G+1)}\int_{-a}^{a}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(s-x)}{2l}\right)+K_1(s-x)\right]W'(s)ds;\\&\frac{dW_1(x,0)}{dx}=\frac{W'(x)}{G+1}-\frac{1}{2lG_2(G+1)}\int_{-a}^{a}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(s-x)}{2l}\right)+K_2(s-x)\right]\tau(s)ds,\end{aligned}\tag{1.5}$$

где функции $K_j(x)$ $(j=1,2)$ – экспоненциально сходящиеся ряды:

$$K_1(x)=\frac{x}{H}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\operatorname{cth}\left(\frac{\pi k}{l}H\right)-1\right]\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right);$$

$$K_2(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\operatorname{th}\left(\frac{\pi k}{l}H\right)-1\right]\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right).$$

Последние два соотношения (1.4) остаются неизменно.

Используя соотношение (1.5) и последние два соотношения (1.4), нетрудно сразу записать определяющие уравнения ряда задач для кусочно-однородного пространства, изготовленного при помощи поочерёдного соединения двух разнородных слоёв равной толщины с двояко-периодическими межфазными дефектами различных типов. В качестве примера рассмотрим две конкретные задачи.

2. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с двоякопериодической системой трещин. Сначала рассмотрим случай, когда дефекты представляют собой туннельные трещины длины $2a$, на верхние и нижние берега которых действуют распределённые нагрузки $\tau_0^{(j)}(x)$ $(j=1,2)$. Тогда на берегах трещин имеют место условия

$$\tau_{yz}^{(j)}(x,0)=\tau_0^{(j)}(x) \quad (j=1,2)$$

или в другой форме

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x,0)+\tau_{yz}^{(2)}(x,0)=\tau_0^{+}(x); \\ \tau(x)=\tau_0^{-}(x); \end{cases} \quad (|x|<a) \tag{2.1}$$

$$\left(\tau_0^{\pm}(x)=\tau_0^{(1)}(x,0)\pm\tau_0^{(2)}(x,0)\right).$$

Учитывая второе уравнение (2.1), при помощи соотношений (1.5) удовлетворим первому из условий (2.1). В итоге, после некоторых простых преобразований, для определения производной от разности смещений берегов трещины придём к следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)}{s-x}ds+\int_{-a}^{a}K_1^{*}(s-x)W'(s)ds=f(x), \tag{2.2}$$

где

$$f(x)=\frac{(G+1)\tau_0^{+}(x)}{G_1}-\frac{(G-1)\tau_0^{-}(x)}{G_1};\; K_1^{*}(x)=\frac{1}{2l}K_1(x)+\frac{1}{2l}\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right)-\frac{1}{\pi x}.$$

Уравнение (2.2) будем рассматривать совместно с условием непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_{-a}^{a}W'(s)ds=0. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) решим методом механических квадратур. С этой целью, при помощи замены переменных $s\to as$ и $x\to ax$, его сформулируем на интервале (-1,1) и вводя обозначения

$$W'(xa)=\varphi(x);\; aK_1^{*}(ax)=K(x);\; f(xa)=f_*(x),$$

запишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds+\int_{-1}^{1}K(s-x)\varphi(s)ds=f_*(x). \tag{2.4}$$

При этом, условие (2.3) примет вид:

$$\int_{-1}^{1}\varphi(s)ds=0 \tag{2.5}$$

Очевидно, что решение уравнения (2.4) в концевых точках трещины имеет обычную корневую особенность, что позволяет его представить в следующем виде:

$$\varphi(x)=\frac{\varphi_*(x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (2.6)$$

где $\varphi_*(x)$ – непрерывная гладкая функция, ограниченная вплоть до концов интервала $[-1,1]$.

Подставляя значения функций $\varphi(x)$ в (2.4), (2.5) и используя соотношения, приведённые в [13], по стандартной процедуре придём к системе алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_*(\xi_i)$ $(i=1,\dots,n)$, после определения которых нетрудно восстановить функцию $\varphi_j(x)$ $(-1<x<1)$ и определить все компоненты напряжений и деформаций в двухкомпонентной ячейке. В частности, приведённая разность смещений точек берегов трещины определится формулой:

$$W_*(x)=W(ax)/2a=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\varphi(x)dx,\qquad (2.7)$$

а безразмерные коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины определятся по формуле (1.5), которая при помощи функции $\varphi(x)$ записывается следующим образом:

$$\frac{\tau_{yz}^{(j)}(ax,0)}{G_1}=\frac{1}{\pi(G+1)}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-x}+K_1^*(s-x)\right]\varphi(s)\,ds\quad (|x|>1).$$

Подставляя сюда значения функций $\varphi(x)$ из (2.5) и учитывая соотношение [11]

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{(s-a)^{\gamma-1}(b-s)^{-\gamma}\,ds}{(s-x)}=-\frac{\operatorname{sign}(x)}{\sin\pi\gamma\,|a-x|^{\gamma}\,|b-x|^{1-\gamma}}\quad (x<a;x>b)\qquad (2.8)$$

при $\gamma=1/2$, после некоторых преобразований коэффициент интенсивности запишем в виде:

$$\frac{\tau_{yz}^{(j)}(ax,0)}{G_1}=-\frac{\operatorname{sign}(x)\varphi_*(c)}{2\pi(G+1)\sqrt{x^2-1}}+R_1(x).$$

Здесь $c=\pm1$, а функция $R_1(x)$ ограничена в точках $x=\pm1$. Используя полученное выражение для определения приведённых коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений, получим формулы:

$$K_{III}(\pm a)=\sqrt{2\pi}\lim_{x\to\pm1\pm0}\sqrt{|x\mp1|}\,\frac{\tau_{yz}^{(j)}(ax,0)}{G_1}=\mp\frac{\sqrt{\pi}\varphi_*(\pm1)}{2(G+1)}.$$

Численные результаты. Проведён численный расчёт, когда пространство деформируется под воздействием равным по величине и противоположно направленным равномерно распределёнными нагрузками интенсивности τ_0, т.е., когда $\tau_0^{(1)}(x)=\tau_0^{(2)}(x)=-\tau_0$. При этом, принято $\tau_0/G_1=0.1$ и изучены закономерности изменения коэффициентов интенсивности напряжений в концевых точках трещин и разности смещений точек берегов трещины в зависимости от параметров G, $\lambda_1=a/l$ и $\lambda_2=H/l$. Численные расчёты показывают, в чём можно убедиться и аналитически, что в случае, когда $\tau_0^{(-)}(x)=0$, коэффициенты интенсивности приведённых напряжений не зависят от соотношений модулей сдвигов разнородных слоёв G, а разность смещений точек берегов трещины прямо пропорциональна числу $(G_1+G_2)/G_1G_2$. В табл. 1 и 2 приведены значения коэффициентов интенсивности приведённых напряжений в концевых точках трещин в зависимости от изменения λ_1 и λ_2. Они показывают, что при постоянных размерах прямоугольной ячейки приведённые коэффициенты интенсивности напряжений при увеличении длины трещины также увеличиваются (табл.1). А при постоянных значениях l и a, при увеличении ширины полосы коэффициенты интенсивности напряжений уменьшаются, стремясь к определённой величине (табл.2).

Таблица 1. $\lambda_2=0.5$

λ_1	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$K_{III}(\pm a)$	0.08865	0.08873	0.08905	0.08957	0.09026	0.0915

Таблица 2. $\lambda_1=0.1$

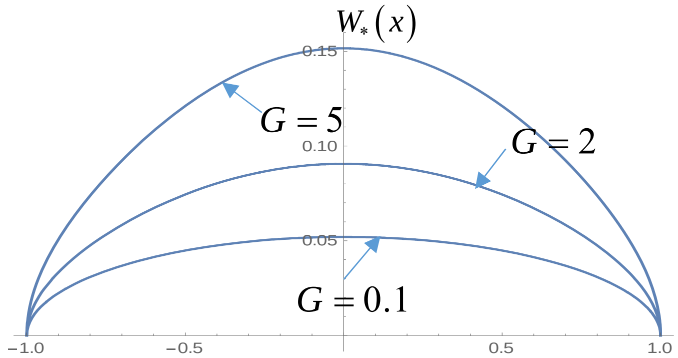
λ_2	0.1	0.5	1	2	5
$K_{III}(\pm a)$	0.09137	0.0887	0.0886	0.08856	0.08852

Проведён численный расчёт также в случае, когда $\tau_0^{(1)}(x)=-\tau_0$ и $\tau_0^{(2)}(x)=-0.5\tau_0\cos(\pi x/2)$. При этом, опять принято $\tau_0/G_1=0.1$. В этом случае при постоянной геометрии увеличение соотношений модулей сдвигов разнородных слоёв G приводит к уменьшению коэффициентов интенсивности напряжений (табл. 3).

Таблица 3. $\lambda_1=0.1$; $\lambda_2=0.5$

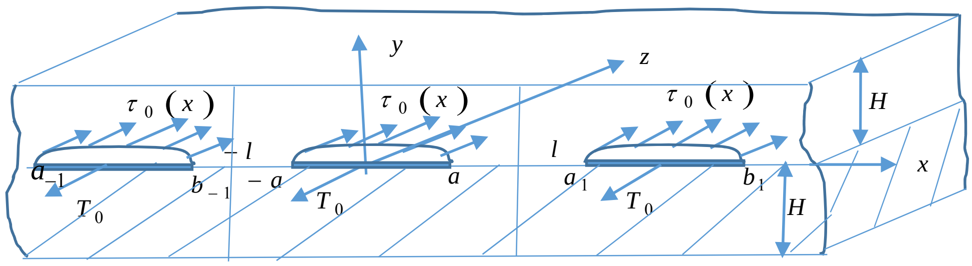
G	0.1	0.5	1	2	3	5
$K_{III}(\pm a)$	0.0825	0.0661	0.0547	0.0435	0.0378	0.0322

На фиг.1 приведены графики приведённой разности смещений точек берегов трещины $W_*(x)$ в зависимости от параметра G. Они показывают, что при увеличении G разность смещений также увеличивается.



Фиг.1

3. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с двоякопериодической системой частично отслоившихся абсолютно жёстких включений. Далее рассмотрим случай, когда дефекты представляют собой туннельные трещины длины $2a$, на нижнем берегу которых спаяно абсолютно жёсткое включение. Будем считать, что пространство деформируется под воздействием распределённой нагрузки $\tau_0(x)$, действующей на верхний берег трещины, и сосредоточенной нагрузки T_0, приложенной к включению (фиг.2).



Фиг.2

На берегах трещин выполняются условия:

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x,+0) = \tau_0(x); \\ W_2'(x,-0) = 0. \end{cases} \quad (|x| < a) \tag{3.1}$$

При помощи разрывных решений (1.5), удовлетворив этим условиям, придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{cases} \tau_*(x) + \dfrac{1}{\pi G}\displaystyle\int_{-a}^{a}\left[\dfrac{1}{s-x} + K_1^*(s-x)\right]W'(s)\,ds = \dfrac{G+1}{GG_1}\tau_0(x); \\ W'(x) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\left[\dfrac{1}{s-x} + K_2^*(s-x)\right]\tau_*(s)\,ds = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Эту систему рассмотрим вместе с условиями непрерывности смещений в концевых точках трещины и условием равновесия включения, записанного при помощи функции $\tau_*(x)$:

$$\int_{-a}^{a} W'(s)\,ds = 0, \quad \int_{-a}^{a} \tau_*(s)\,ds = T_0^*. \tag{3.3}$$

Здесь

$$K_2^*(x) = \frac{\pi}{2l} K_2(x) + \frac{\pi}{2l}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right) - \frac{1}{x};$$

$$\left(\tau_*(x) = \tau(x)/G_1;\ T_0^* = \left(\int_{-a}^{a} \tau_0(s)\,ds - T_0\right)/G_1\right).$$

Чтобы решить систему (3.2) методом механических квадратур, при помощи замены переменных сформулируем её на интервал $[-1,1]$, введём в рассмотрение функции $\varphi_j(x) = W'(ax) + (-1)^{j+1}\sqrt{G}\tau_*(ax) \quad (j=1,2)$

и обозначив

$$K_{11}(x) = \frac{a\left[K_1^*(ax) + K_2^*(ax)\right]}{2\pi\sqrt{G}};\ K_{12}(x) = \frac{a\left[K_1^*(ax) - K_2^*(ax)\right]}{2\pi\sqrt{G}};$$

$$K_{21}(x) = -K_{12}(x);\ \ K_{22}(x) = -K_{11}(x);$$

$$f_j(x) = (-1)^{j+1}\frac{G+1}{\sqrt{G}G_1}\tau_0(ax);\ (j=1,2),$$

запишем в виде:

$$\begin{gathered}\varphi_j(x) + \frac{(-1)^{j+1}}{\pi\sqrt{G}}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_j(s)\,ds}{s-x} + \int_{-1}^{1} K_{j1}(s-x)\varphi_1(s)\,ds + \\ + \int_{-1}^{1} K_{j2}(s-x)\varphi_2(s)\,ds = f_j(x)\end{gathered} \tag{3.4}$$

При этом, условия (3.3) примут вид:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_j(s)\,ds = (-1)^{j+1}\sqrt{G}T_0^*/a \quad (j=1,2). \tag{3.5}$$

Методом Мусхелишвили нетрудно убедиться, что искомые функции в точках ± 1 имеют показательную особенность типа $\omega_j(x) = (1+x)^{-\gamma_j}(1-x)^{\gamma_j - 1} \quad (j=1,2)$, где

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0.5 + \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\sqrt{G}}{1-G}\right) & (G \le 1) \\ 1 - \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\sqrt{G}}{G-1}\right) & (G \ge 1) \end{cases}; \quad \gamma_2 = 1 - \gamma_1.$$

Исходя из этого, решение системы (3.2) представим в виде

$$\varphi_j(x) = \varphi_j^*(x)\omega_j(x) \quad (j = 1, 2), \tag{3.6}$$

где $\varphi_j^*(x)$, как и в первой задаче, – непрерывная гладкая функция, ограниченная вплоть до концов интервала $[-1,1]$.

Подставляя значения функций $\varphi_j(x)$ в (3.3), (3.4) и используя соотношения, приведённые в [13], по стандартной процедуре, опять придём к системе алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_j(\xi_i)$ $(i = 1,....n)$. После определения $\varphi_j(\xi_i)$ легко восстановить функцию $\varphi_j(x)$ $(-1 < x < 1)$ и определить все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в двухкомпонентной ячейке. В частности, приведённые контактные напряжения, действующие на сцеплённой стороне включения и разность смещений точек берегов трещины, определятся формулами:

$$\tau_*^{(2)}(x) = -\frac{\tau_{yz}^{(2)}(ax,0)}{G_1} = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{2\sqrt{G}} - \frac{\tau_0(x)}{G_1};$$

$$W_*(x) = \frac{W(ax)}{2a} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{x}\left[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right]dx.$$

Приведённые же коэффициенты интенсивности в концевых точках трещины определяются при помощи формулы (1.5), которая при $|x| > 1$ в новых обозначениях можно записать в виде:

$$\frac{\tau_{yz}^{(j)}(ax,0)}{G_1} = \frac{1}{2\pi(G+1)}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-x} + K_1^*(s-x)\right](\varphi_1(s) + \varphi_2(s))ds$$

Подставляя сюда значения функций из (3.6) и учитывая соотношение (2.8), после некоторых преобразований запишем в виде:

$$\frac{\tau_{yz}^{(j)}(ax,0)}{G_1} = -\frac{\operatorname{sign}(x)}{2\pi(G+1)\sin(\pi\gamma_1)}\left\{\frac{\varphi_1^*(c)}{|x+1|^{\gamma_1}|1-x|^{1-\gamma_1}} + \frac{\varphi_2^*(c)}{|x+1|^{1-\gamma_1}|1-x|^{\gamma_1}}\right\} + R_2(x).$$

Здесь $c = \pm 1$, а функция $R_2(x)$ ограничена в точках $x = \pm 1$.

Тогда, для коэффициентов интенсивности безразмерных разрушающих напряжений получим формулы:

$$K_{III}(a) = -\frac{\sqrt{2\pi}\varphi_2^*(1)}{2^{2-\gamma_1}(G+1)\sin(\pi\gamma_1)}; \quad K_{III}(-a) = \frac{\sqrt{2\pi}\varphi_1^*(-1)}{2^{2-\gamma_1}(G+1)\sin(\pi\gamma_1)}.$$

Численные результаты. Проведён численный расчёт в случае, когда на верхний берег трещины действует равномерно распределённая нагрузка интенсивности τ_0, а на жёсткое включение действует уравновешивающая сосредоточенная нагрузка T_0, т.е. в случае, когда $\tau_0(x) = -\tau_0 = \text{const}$ и $T_0^* = 0$. При этом принято $\tau_0 / G_1 = 0.1$ и $\lambda_2 = H / l = 0.5$. Изучены закономерности изменения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины, контактных напряжений, действующих на сцеплённую с матрицей сторону включения, а также разности смещений точек берегов трещины в зависимости от изменения параметров G и $\lambda_1 = a / l$.

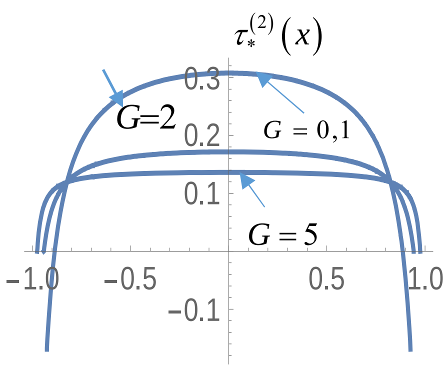
Результаты расчётов приведены в табл. 3-4 и фиг.3-6. Из приведённых таблиц явствует, что при постоянных геометрических характеристиках увеличение параметра G приводит к уменьшению коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений, а при постоянных размерах ячейки и постоянного значения параметра G, параметр λ_1 мало влияет на значения коэффициентов интенсивности.

Таблица 4. $\lambda_1 = 0.2$

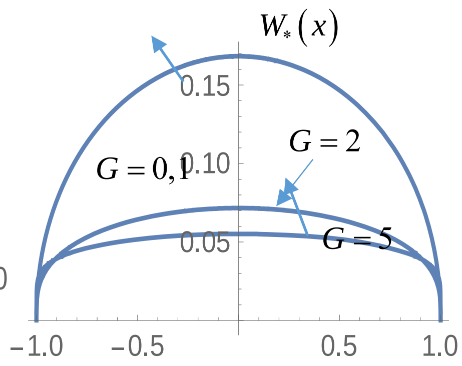
G	0.1	0.5	1	2	3	5
$K_{III}(\pm a)$	0.1069	0.03369	0.0189	0.0100	0.0068	0.0041

Таблица 5. $G = 0.5$

λ_1	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$K_{III}(\pm a)$	0.03330	0.03338	0.03369	0.03416	0.03475	0.03540



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 и 4 приведены, соответственно, графики безразмерных контактных напряжений $\tau_*^{(2)}(x)$ и разности смещений берегов трещины $W_*(x)=W(x)/2a$ при различных значениях G в случае, когда $\lambda_1=0.1$. Из графиков видно, что увеличение параметра G приводит к уменьшению как контактных напряжений в средней части зоны контакта, так и разности смещений берегов трещины $W_*(x)$.

Вычисления показывают также, что в случае, когда $G=0.5$, увеличение параметра λ_1 приводит к возрастанию контактных напряжений в средней части зоны контакта и разности смещений берегов трещины $W_*(x)$.

Заключение. Построены разрывные решения уравнений антиплоской задачи теории упругости для кусочно-однородного пространства с туннельными двоякопериодическими дефектами и на их основе построены эффективные решения двух конкретных задач. Показано, что когда дефект представляет собой конечную туннельную трещину, на берегах которой действуют противоположно направленные одинаковые по величине нагрузки, как напряжения в целом, так и коэффициенты интенсивности приведённых разрушающих напряжений не зависят от соотношения модулей сдвигов материалов слоёв. В случае же, когда дефектом является конечная туннельная трещина, на один из берегов которой спаяно абсолютно жёсткое тонкое включение, как напряжения, так и смещения при неизменной геометрии достаточно сильно зависят от соотношения модулей сдвигов материалов слоёв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с. Panasyuk V., Savruk M, Datsishin A. Stress distribution around cracks in plates and shells. Naukova Dumka. Kiev, 1976, 443p. (in Russian).
2. Бардзокас Д.И., Фильштинский Л.А. Фильштинский М.Л. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Т.1. Москва-Ижевск: 2010. 864с. Bardzokas D.I., Filshtinskii L.A., Filshtinsky M.L. Actual Problems of Coupled Physical Fields in Deformable Solids. Monograph in 5 Volumes, Volume 1. - M.–Izhevsk: NIC «Regulyarnaya I Khaoticheskaya Dinamika», 2010. - 864 p. (in Russian).
3. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. М.: Изд. Физматлит, 1994. 332с. Grigolyuk E., Filshtinsky L. Regular piece-homogeneous structures with defects. FizMatLit, 1994, 332p. (in Russian).
4. Мкртчян М.С., Мхитарян С.М. К задаче о напряжённом состоянии составного упругого бесконечного тела с периодической системой коллинеарных трещин при продольном сдвиге. //Докл. АН Арм. ССР. 1993. Т.94. № 2. С.104-110. Mkrtchyan M.S., Mkhitaryan S.M. On a stress state of compound elastic infinite body with periodic system of collinear cracks under longitudal displacement. // reports NAS RA, 1993, Vol. 94, N2, pp. 104-110 (in Russian).
5. Мкртчян М.С. Периодическая задача о напряжённом состоянии упругого кусочно-однородного пространства с абсолютно жёсткими включениями на линии соединения разнородных сред. //В сб.:“Контактные и смешанные задачи механики деформируемого тела”, НАН Армении, 1999, с.100-104. Mkrtchyan M. Periodic problem of stress state of the elastic piece-homogeneous space with absolutely rigid inclusions on junction line of heterogeneous media. // Proceedings «Contact and mixed

boundary-value problems of mechanics of deformable bodies», NAS of Armenia, 1999, pp. 100-104 (in Russian).
6. Акопян В.Н. Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин //Докл. НАН РА. 2002. Т.102. №1.С.29-34. Hakobyan V.N. Mixed boundary value problem for compound plane, weakened by periodical system of cracks. // Reports NAS RA, Vol. 102, 2002, pp.29-34 (in Russian).
7. Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. Плоско-деформированное состояние составной плоскости с периодической системой абсолютно жёстких тонких включений. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», сентябрь 19-23, 2011, Горис-Степанакерт, ст. 172-176. Dashtoyan L.L., Hakobyan L.V. Plane stress state of compound plane with periodic system of absolutely rigid this inclusions // Proceedings of international conference "The problems of dynamics of interaction of deformable media", September 19-23, 2011, Goris-Stepanakert, pp.172-176 (in Russian).
8. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Двоякопериодическая задача для кусочно-однородной плоскости с трещинами. //В сборн. трудов IV-ой международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015. С.33-37. Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L. Doubly periodic problem for piecewise-homogeneous plane with cracks // Proceedings of IV international conference "Topical Problems of Continuum Mechanics", Yerevan-2015, pp. 33-37 (in Russian).
9. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с периодической системой параллельных межфазных дефектов. //В сборнике трудов IV-ой международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015. С.28-32. Hakobyan V.N., Hakobyan L.V. The stress state of piece-wise homogeneous space with periodic system of parallel interface defects. // Proceedings of IV international conference "Topical Problems of Continuum Mechanics", Yerevan-2015, pp.28-32 (in Russian).
10. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщённых функций. М.: Наука, 1977. 288с. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P. Integral transformations of generalized functions, Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., 20, VINITI, Moscow, 1982,78–115 (in Russian).
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A. , Marichev O.I. Integrals and series // integrals and series. Nauka, 1981. 738p. (in Russian).
12. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 327с. Shilov G. Mathematical analysis. Second special course // Moscow. Nauka, 1965, 327pp. (in Russian).
13. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Известия НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 3. С.12-19. Sahakyan A.V. Application of the method of discrete singularities for solving the singular integral equations with unmoved singularities. // Proc. NAS RA "Mechanics", 2000, Vol. 53, N3, pp.12-19 (in Russian).

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – д.ф.м.н., проф., директор Института механики НАН Армении, тел.(37410) 52-48-90, **E-mail:** vhakobyan@sci.am

Акопян Лусине Ваграмовна – к.ф.м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90

Поступила в редакцию 15.04.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №3, 2016 Механика

THE INSTABILITY OF SHEAR NORMAL WAVE IN ELASTIC WAVEGUIDE OF WEAKLY INHOMOGENEOUS MATERIAL

Hunanyan A.A.

Keywords: inhomogeneous waveguide, instability of normal wave, band of frequency delay.
Բանալի բառեր. անհամասեռ ալիքատար, նորմալ ալիքի անկայունություն, հաճախությունների կասեցման գոտի:
Ключевые слова: неоднородный волновод, неустойчивость нормальной волны, полоса задержки частот.

Унанян А.А.
Неустойчивость нормальной сдвиговой волны в упругом волноводе из слабо-неоднородного материала

Исследуется влияние продольной, слабой неоднородности упругого материала волновода на распространение нормальной сдвиговой волны при разных механических граничных условиях. Показывается, что при защемлённых гладких поверхностях изотропного упругого слоя возникает асимметричная локализация волновой энергии около срединной плоскости слоя. При механически свободных гладких поверхностях появляются приповерхностные локализации волновой энергии у механически свободных границ волновода, но более интенсивная локализация появляется опять около срединной плоскости слоя. В обоих случаях вследствие воздействия неоднородности материала на нормальную волну, появляются искажения амплитуды и фазовой функции, обусловленные приведёнными коэффициентами (частотами) формообразования. В обоих случаях граничных условий слабая неоднородность материала приводит к появлению частотных зон пропускания или запрещению формированной волны. Оказывается, что при высших формах колебаний возможно возникновение внутреннего резонанса.

Հունանյան Ա.Ա.
Սահքի նորմալ, ալիքի անկայունությունը թույլ անհամասեռությամբ նյութից ալիքատարում

Հետազոտվում է ալիքատարի երկայնական, թույլ անհամասեռության ազեցությունը սահքի նորմալ ալիքի տարածման վրա,, տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Ցույց է տրվում, որ իզոտրոպ առաձգական շերտի ամրակցված հարթ եզրերի դեպքում, միջին մակերևույթի մոտ, առաջանում է ալիքային էներգիայի ասիմետրիկ տեղայնացում: Ալիքատարի մեխանիկորեն ազատ հարթ եզրերի դեպքում, առաջանում են ալիքային էներգիայի մերձմակերևութային տեղայնացումներ: Բայց ալիքային էներգիայի ավելի ինտենսիվ տեղայինացում, նորից տեղի է ունենում միջին մակերևույթի շուրջ: Երկու դեպքում էլ տարածվող ալիքի վրա նյութի անհամասեռության ազդեցության հետևանքով, բերված հաճախության (կամ ալիքի հարմոնիկայի) փոփոխության հետևանքով տեղի է ունենում ալիքի լայնույթի և/կամ փուլի խոտորում: Եզրային պայմանների երկու դեպքում էլ ալիքատարի նյութի թույլ անհամասեռությունը բերում է հաճախությունների արգելանքի կամ թողարկման տիրույթների առաջացման: Պարզվում է, որ բարձր հաճախությունների դեպքում հնարավոր է ներքին ռեզոնանսի առաջացում:

The influence of a weak longitudinal inhomogeneity on normal shear waves under different mechanical boundary conditions is investigated. It is shown, that for clamped smooth surfaces of isotropic elastic layer, occurs asymmetric localization of wave energy near the mid-surface layer. On the other side, for mechanically free smooth surfaces, near-surface localization of wave energy appears near mechanically free surfaces of the waveguide, but more intense localization appears again near the mid-surface layer. In both cases, due to the influence of material inhomogeneity on the normal wave, some distortion of amplitude and phase functions occur due to the change of formation coefficients (of frequencies). In both cases of boundary conditions, the weak inhomogeneity of the material leads to presence of frequency zones of transmission or prohibition of the formed wave. It is shown, that it is possible internal resonance in some higher forms.

Introduction. There are numerous studies on wave propagation in inhomogeneous media. More detail of characteristic phenomena can be found in the monographs [1÷4] etc., as well as analogical phenomena due to inhomogeneity of surface conditions and new physical mechanical properties of material of the waveguide, can be found in some articles of recent years [5÷10] etc. The monographs [11÷14] etc., are devoted to the discussion of structure modeling of inhomogeneous waveguides, as well to the propagation of normal waves in waveguides with longitudinal inhomogeneity of the layer, where the cases of continuous inhomogeneity of the material of the waveguide and the layered periodic structure of the waveguide are considered.

There is a growing range of studies on high-frequency fluctuations and distributions of short-wave signals, due to the advancement of modern technology. They can be used to identify the interaction effects of weak inhomogeneity of the material of the waveguide, as well as the effects of geometric heterogeneity of the surface of the waveguide, with more sensitive signals. Losses of stability of normal propagating high-frequency waves (short wavelength monochromatic signal), whether it is the localization of wave energies, internal resonance, the appearance of forbidden frequency zones or other, have been discussed in many works [15÷19], etc.

The present paper explores the nature of formation of the propagating elastic pure shear normal waves in an isotropic elastic layer with weak, longitudinal inhomogeneity of the material for different mechanical boundary conditions.

1. The Problem Statement. Two model problems on distributions of pure shear, horizontally polarized, elastic normal waves $\vec{U}(x,y,t)=\{0;\ 0;\ \mathrm{w}(x,y,t)\}$ in an isotropic weakly inhomogeneous layer- waveguide are considering.

The shear component of the displacement has the following form

$$\mathrm{w}(x,y,t)=A_0\cdot\exp\left[i(k_0x-\omega_0t)\right] \tag{1.1.1}$$

where A_0 – constant amplitude, k_0 – wave number, and ω_0 – the frequency of normal wave.

It is obvious that in the case of a homogeneous elastic medium, the body wave that is also the surface normal wave is localized throughout the thickness of the layer. The purpose of the examinations of the cases of weak inhomogeneity of the material of waveguide layer is to identify the losses of stability of normal wave in the waveguide for different types of boundary conditions on surfaces of weakly inhomogeneous waveguide

Task 1.1 Longitudinal inhomogeneity of the material and clamped surfaces of the layer-waveguide. Assume normal wave (1.1.1) is distributed in an isotropic, elastic, longitudinally weakly inhomogeneous layer $\{|x|<\infty;\ |y|\le h_0;\ |z|<\infty\}$ with clumped surfaces $y=\pm h_0$.

Then the equation of medium motion has the following form

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}=\rho(x)\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial t^2}, \tag{1.1.2}$$

where mechanical stresses according to the Hooke's law can be written in the following forms

$$\sigma_{zx}(x,y,t)=G(x)\frac{\partial \mathrm{w}(x,y)}{\partial x}\ ;\ \sigma_{zy}(x,y,t)=G(x)\frac{\partial \mathrm{w}(x,y)}{\partial y}\,, \tag{1.1.3}$$

here $G(x)$ – the shear modulus of the material, which, as the density of the material – $\rho(x)$, for longitudinally weakly inhomogeneous medium are presented in the following forms

$$G(x)=G_0\left[1+\varepsilon_1\sin(k_1x)+\delta_1\cos(k_1x)\right];$$

$$\rho(x)=\rho_0\left[1+\varepsilon_2\sin(k_1x)+\delta_2\cos(k_1x)\right]. \tag{1.1.4}$$

Here are taken designations:

$k_1\triangleq\pi/a$ – the number of inhomogeneity waviness of the material layer,

a – half step of inhomogeneity waviness of the material layer,

$\varepsilon_1;\ \varepsilon_2;\ \delta_1;\ \delta_2$ – small amplitudes of inhomogeneity, which, for weak inhomogeneity of the material satisfy the restriction $\varepsilon_n^2+\delta_n^2\ll 1$.

G_0 – the shear modulus and ρ_0 – the density of the corresponding homogeneous material.

We obtain the equation of motion with variable periodic coefficients considering (1.1.3) and (1.1.4)

$$\left[1+\varepsilon_1\sin(k_1x)+\delta_1\cos(k_1x)\right]\Delta w+k_1\left[\varepsilon_1\cos(k_1x)-\delta_1\sin(k_1x)\right]\frac{\partial w}{\partial x}=$$

$$=c_t^{-2}\left[1+\varepsilon_2\sin(k_1x)+\delta_2\cos(k_1x)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.1.5}$$

where $\Delta\triangleq\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ – the Laplace operator, and $c_{0t}^2\triangleq G_0/\rho_0$ – the speed of shear normal wave.

On clamped planes $y=\pm h_0$, the boundary conditions have the form

$$\mathrm{w}(x,-h_0,t)=\mathrm{w}(x,+h_0,t)=0\,. \tag{1.1.6}$$

Then the wave solution of the equation of motion (1.1.5) satisfying the clamped boundary conditions (1.1.6) can be represented in the form of Fourier series

$$\mathrm{w}(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{w}_n(x)\cdot\sin(\mu_n y)\cdot e^{i\omega_n t}\,, \tag{1.1.7}$$

where $\mu_n=\pi n/h_0$ – wave number on thickness of waveguide, $n\in\mathbb{N}\triangleq\{1;2;...\}$ – a natural number. It is obvious that under these boundary conditions the zero form does not exist $\mathrm{w}_0(x)\equiv 0$.

The representation of the solution in form (1.1.7), leads the equation of motion (1.1.5) to infinite system of ordinary differential equations with periodic coefficients with respect to amplitude functions of each succession of the n-th wave form

$$\left[\mathrm{w}_n''(x)+\mu_n^2\left(\eta_n^2-1\right)\mathrm{w}_n(x)\right]+$$

$$+\varepsilon_1\sin(k_1x)\left[\mathrm{w}_n''(x)-(k_1\delta_1/\varepsilon_1)\,\mathrm{w}_n'(x)+\mu_n^2\left(\varepsilon_{21}\eta_n^2-1\right)\mathrm{w}_n(x)\right]+$$

$$+\delta_1\cos(k_1x)\left[\mathrm{w}_n''(x)+(k_1\varepsilon_1/\delta_1)\,\mathrm{w}_n'(x)+\mu_n^2(\delta_{21}\eta_n^2-1)\mathrm{w}_n(x)\right]=0, \qquad (1.1.8)$$

here $\eta_n^2 \triangleq \omega_n^2/(c_{0t}^2\mu_n^2)$ – given phase speed of the n-th wave form.

It is obvious that due to the inhomogeneity of the material the process is represented by the interaction of three related normal wave modes characterized in equations (1.1.8) relations, given in square brackets. Since the interaction is due to inhomogeneity functions $\varepsilon_1\sin(k_1x)$ and $\delta_1\cos(k_1x)$ from (1.1.4), the solution of (1.1.8) with variable periodic coefficients is natural to look for, in general, in terms of expansion by given function of inhomogeneity, based on the fact of the features

$$\mathrm{w}_n(x)=a_{0n}+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\cdot\left(a_{mn}\cos(k_mx)+b_{mn}\sin(k_mx)\right);\quad n;m\in\mathbb{N}. \qquad (1.1.9)$$

where $k_m \triangleq mk_1=(m\pi/a)$ – wave number in the direction of wave propagation corresponding to the m-th harmonic of the wave, and $\gamma \triangleq \max\left\{\sqrt{\varepsilon_i^2+\delta_i^2}\right\}$, $i=1;2$ is small parameter which characterizes weak inhomogeneity of the material.

We obtain the recurrent infinite system of homogeneous algebraic equations for the constant amplitudes $\{a_{mn};\ b_{mn}\}$ generated by the interaction of the propagating normal wave modes (wave signal) and a longitudinal weak inhomogeneity of the material, substituting the relations (1.1.9) in equations (1.1.8)

$$\mu_n^2\left(\eta_n^2-1\right)a_{0n}+\mu_n^2\gamma\left[\left(\eta_n^2-\varepsilon_{12}\right)(\varepsilon_2/\gamma)\sin(k_1x)+\left(\eta_n^2-\delta_{12}\right)(\delta_2/\gamma)\cos(k_1x)\right]a_{0n}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\left[\mu_n^2\left(\eta_n^2-1\right)-k_m^2\right]\cdot\left[\sin(k_mx)b_{mn}+\cos(k_mx)a_{mn}\right]+ \qquad (1.1.10)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\cdot\left[\left(\mu_n^2\left(\varepsilon_{21}\eta_n^2-1\right)-k_m^2\right)\sin(k_mx)-(k_1\delta_1/\varepsilon_1)\,k_m\cos(k_mx)\right]\varepsilon_1\sin(k_1x)b_{mn}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\cdot\left[\left(\mu_n^2(\delta_{21}\eta_n^2-1)-k_m^2\right)\sin(k_mx)+(k_1\varepsilon_1/\delta_1)\,k_m\cos(k_mx)\right]\delta_1\cos(k_1x)b_{mn}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\cdot\left[\left(\mu_n^2\left(\varepsilon_{21}\eta_n^2-1\right)-k_m^2\right)\cos(k_mx)+(k_1\delta_1/\varepsilon_1)\,k_m\sin(k_mx)\right]\varepsilon_1\sin(k_1x)a_{mn}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\cdot\left[\left(\mu_n^2(\delta_{21}\eta_n^2-1)-k_m^2\right)\cos(k_mx)-(k_1\varepsilon_1/\delta_1)\,k_m\sin(k_mx)\right]\delta_1\cos(k_1x)a_{mn}=0$$

In the resulting relations appear characterizing interaction of independent normal harmonics of coefficients $\nu_j;\ \alpha_j;\ \beta_j$ on the distributions of wave signal in the layer with weak longitudinal inhomogeneity (1.1.4)

$$\nu_m=\mu_n^2\left(\eta_n^2-1\right)-k_m^2; \qquad (1.1.11)$$

$$\alpha_m=\mu_n^2\left(\varepsilon_2\eta_n^2-\varepsilon_1\right)-\varepsilon_1k_m^2; \qquad (1.1.12)$$

$$\beta_m=\mu_n^2\left(\delta_2\eta_n^2-\delta_1\right)-\delta_1k_m^2. \qquad (1.1.13)$$

The solution in the first approximation will have the following form, considering the fact that in the zero approximation $\gamma^0 = 1$ and $k_0 = 0$ are corresponding to the normal form on axis $0x$ in the case of homogeneous medium

$$\mathrm{w}_{0n}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \sin(\mu_{0n} y) \cdot e^{i\omega_{0n} t} . \tag{1.1.14}$$

From which, respectively, it follows that in zero approximation the weakly inhomogeneous layer allows only one group of discrete frequencies $\omega_{0n} = c_{0t}\left(\pi n/h_0\right)$ for propagating shear wave with appropriate numbers of formations $\mu_n = \pi n/h_0$.

In the first approximation $m = 1$ from the solution (1.1.9) will have

$$\mathrm{w}_1(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{0n} + \gamma a_{1n} \cos(k_1 x) + \gamma b_{1n} \sin(k_1 x) \right] \sin(\mu_{1n} y) \cdot e^{i\omega_0 t} . \tag{1.1.15}$$

The wave number μ_{1n} and amplitudes of first approximation will find from three related infinite system of following equations

$$\mu_n^2 \left[\left(\eta_n^2 - 1\right) + \varepsilon_2 \left(\eta_n^2 - \varepsilon_{12}\right) \sin(k_1 x) + \delta_2 \left(\eta_n^2 - \delta_{12}\right) \cos(k_1 x) \right] a_{0n} = 0 ; \tag{1.1.16}$$

$$\left[\mu_n^2 \left(\eta_n^2 - 1\right) - k_1^2 \right] \cdot b_{1n} \cdot \sin(k_1 x) = 0 ; \tag{1.1.17}$$

$$\left[\mu_n^2 \left(\eta_n^2 - 1\right) - k_1^2 \right] \cdot a_{1n} \cdot \cos(k_1 x) = 0 . \tag{1.1.18}$$

The wave number of formation of the first approximation obtain from the condition of existence of non-trivial solutions of the system (1.1.16)÷(1.1.18)

$$\mu_{1n}(k_1 x) = \left(\pi n/h_0\right) \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_2 \sin(k_1 x) + \delta_2 \cos(k_1 x)}{1 + \varepsilon_1 \sin(k_1 x) + \delta_1 \cos(k_1 x)}} . \tag{1.1.19}$$

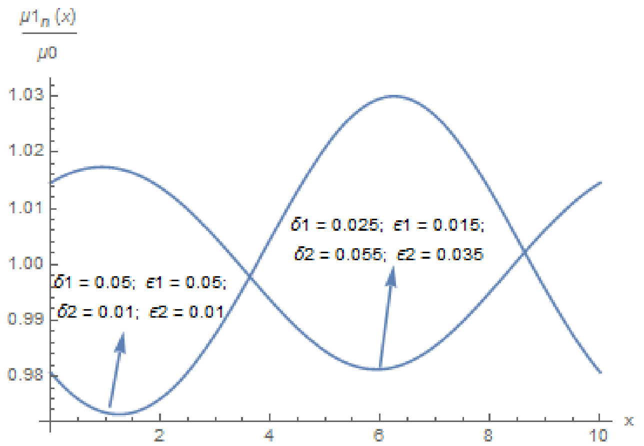


Fig. 1.1. The forms of change of formation coefficient (or frequency) on distributions of normal wave signal

It is obvious that the quantities under square root sign are positively defined (in the case of weak inhomogeneity of the material, when $\varepsilon_n^2 + \delta_n^2 \ll 1$).Therefore, forbidden frequency zones in the first approximation do not arise.

From (1.1.19) we see that the coefficient of formation (or phase function) $\mu_{1n} = \mu_{0n} \cdot f(x)$ is already variable because of the inhomogeneity of the material (Fig. 1.1). Fig. 1.1 also shows that at relatively large compared to the density, stiffness coefficients, when $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ and $\delta_1 > \delta_2$, and at relatively large compared to the stiffness, density coefficients, when $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ and $\delta_1 < \delta_2$, the changes of the oscillation frequencies are different, while remaining periodic.

From coincidence of harmonics, amplitudes $\{a_{1n}\}$ and $\{b_{1n}\}$ of first approximation expressed through the amplitudes of wave signal $\{a_{0n}\}$, will find from (1.1.16)÷(1.1.18)

$$b_{1n} = \frac{\mu_{1n}^2\left(\varepsilon_2\left(\pi n/h_0\right)^2 - \varepsilon_1\right)}{\left(\left(\pi n/h_0\right)^2 - \left(\pi/a\right)^2\right) - \mu_{1n}^2} a_{0n}; \quad a_{1n} = \frac{\mu_{1n}^2\left(\delta_2\left(\pi n/h_0\right)^2 - \delta_1\right)}{\left(\left(\pi n/h_0\right)^2 - \left(\pi/a\right)^2\right) - \mu_{1n}^2} a_{0n} . \tag{1.1.20}$$

From (1.1.20) it is seen that the amplitude distortion compared with the distortion of the phase function, is quadratic. Here also find the number of resonant harmonics, when $a_{1n} \to \infty$ and/or $b_{1n} \to \infty$, where occurs internal resonance (Fig.1.3)

$$n = \left(h_0/a\right)\sqrt{\frac{1+\gamma_1\sin(k_1x+\varphi_1)}{\gamma_\vartriangle\sin(k_1x+\varphi_\vartriangle)}} . \tag{1.1.21}$$

Here are taken the following designations

$$\gamma_1 \triangleq \sqrt{\varepsilon_1^{\,2}+\delta_1^{\,2}} ;$$

$$\varphi_\vartriangle \triangleq \arccos\frac{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)^2+\left(\delta_1-\delta_2\right)^2}} = \arcsin\frac{\left(\delta_1-\delta_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)^2+\left(\delta_1-\delta_2\right)^2}} ;$$

$$\gamma_\vartriangle \triangleq \sqrt{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)^2+\left(\delta_1-\delta_2\right)^2} ; \quad \varphi_1 \triangleq \arccos\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^{\,2}+\delta_1^{\,2}}} = \arcsin\frac{\delta_1}{\sqrt{\varepsilon_1^{\,2}+\delta_1^{\,2}}} .$$

It is easy to get the instability zones of harmonics from (1.1.21) (when the quantities under square root sign have not a positive value. (Fig. 1.2))

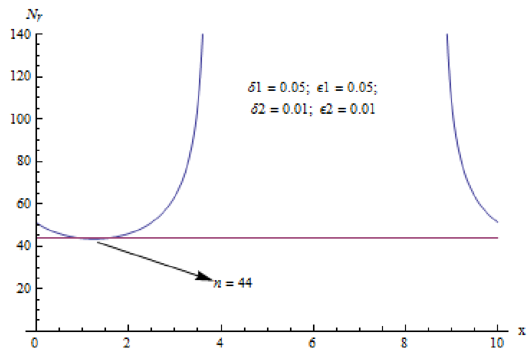


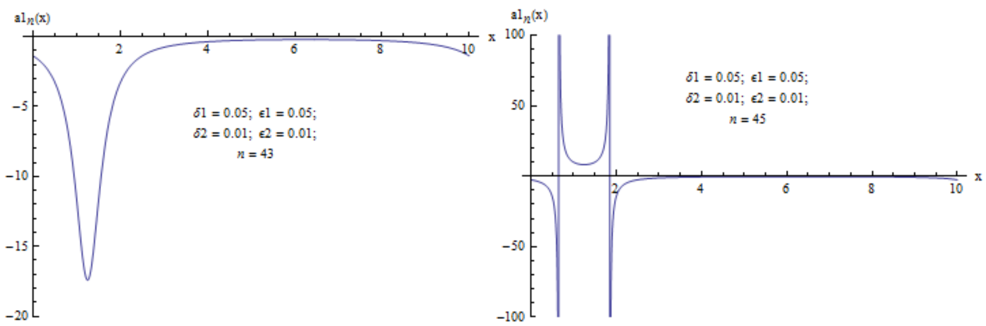
Fig.1.2. The line of resonance by harmonic $x_r \rightleftarrows N_r$ and by cuts

$$a\left(2m-1-\varphi_\vartriangle/\pi\right) \le x \le a\left(2m-\varphi_\vartriangle/\pi\right)$$

$$m = 0;1;2;... \tag{1.1.22}$$

Whence it follows that in some cases of medium inhomogeneity, the quantities under square root sign can be negative and then the corresponding harmonics lose stability and will be represented by exponential functions $\exp\left[\pm\mu_{1n}(\varepsilon_i;\delta_i;a/h_0)\cdot y\right]$.

From Fig. 1.2, in each section we can find the numbers of resonant forms. It is seen that starting from a certain numbers of harmonics, resonant forms periodically exist at certain intervals, by choosing the characteristics of inhomogeneity of the material, Fig. 1.3 (see formulas (1.1.23) and (1.1.24)).



a) b)

Fig. 1.3. The character of changes of amplitudes (a) and (b) for certain material inhomogeneity characteristics, before and after the occurrence of the resonance

And also find the number of resonant harmonics

$$N_r = (h_0/a)\sqrt{\frac{1+\gamma_1 \sin(k_1 x_r + \varphi_1)}{\gamma_\vartriangle \sin(k_1 x_r + \varphi_\vartriangle)}}\,, \tag{1.1.23}$$

and the respective values x_r of the intervals of definition

$$a(2m+1-\varphi_\vartriangle/\pi) > x_r > a(2m-\varphi_\vartriangle/\pi); \quad m = 0;1;2;... \tag{1.1.24}$$

In the second approximation when $m = 2$, the solution will have the following form

$$\mathrm{w}_2(x,y,t) = \mathrm{w}_1(x) + \gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{2n}\cos(k_2 x) + b_{2n}\sin(k_2 x)\right]\sin(\mu_{2n} y)\cdot e^{i\omega_0 t}$$

Considering (1.1.15), (1.1.19) and (1.1.20), from (1.1.10) for relatively constants a_{0n}, a_{2n} and b_{2n} amplitudes we have three infinite systems of homogeneous arithmetic equations. The formation number in second approximation will find from the condition of existence of non-trivial solution

$$\mu_n = (n\pi/h_0)\sqrt{\mathrm{N}(\varepsilon_i;\delta_i;k_1 x)/\mathrm{M}(\varepsilon_i;\delta_i;k_1 x)}\,, \tag{1.1.25}$$

where have been taken the following designations

$$\mathrm{N}(\varepsilon_i;\delta_i;k_1 x) \triangleq \left[\begin{array}{l} 1 + \dfrac{\varepsilon_2 n^2 a^2 + (n^2 a^2 - h_0^{\,2})\beta_{1n}}{n^2 a^2}\sin(k_1 x) + \\ \dfrac{1}{2}(\varepsilon_2\beta_{1n} + \delta_2\alpha_{1n}) + \dfrac{\delta_2 n^2 a^2 + (n^2 a^2 - h_0^{\,2})\alpha_{1n}}{n^2 a^2}\cos(k_1 x) + \\ + \dfrac{n^2 a^2(\delta_2\beta_{1n} + \varepsilon_2\alpha_{1n}) - 2h_0^2(\delta_1\beta_{1n} + \varepsilon_1\alpha_{1n})}{2n^2 a^2}\sin(2k_1 x) + \\ + \dfrac{2h_0^2(\varepsilon_1\beta_{1n} - \delta_1\alpha_{1n}) - n^2 a^2(\varepsilon_2\beta_{1n} - \delta_2\alpha_{1n})}{2n^2 a^2}\cos(2k_1 x) \end{array}\right]; \tag{1.1.26}$$

$$\mathrm{M}\left(\varepsilon_i;\delta_i;k_1x\right)\triangleq\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left(\varepsilon_1\beta_{1n}+\delta_1\alpha_{1n}\right)+\\ +2\left(1+\left(\varepsilon_1-\beta_{1n}\right)\sin(k_1x)+\left(\delta_1-\alpha_{1n}\right)\cos(k_1x)\right)+\\ +\left(\delta_1\alpha_{1n}-\varepsilon_1\beta_{1n}\right)\cos(2k_1x)-\left(\delta_1\beta_{1n}+\varepsilon_1\alpha_{1n}\right)\sin(2k_1x)\end{bmatrix}.$$

Amplitudes a_{2n} and b_{2n} will find from coincidence of harmonics

$$a_{2n}=\alpha_2\left(\varepsilon_i;\delta_i;\left(na/h_0\right)\right)a_{0n};\qquad b_{2n}=\beta_2\left(\varepsilon_i;\delta_i;\left(na/h_0\right)\right)a_{0n};$$

$$a_{2n}=\frac{A_{21}B_1-A_{11}B_2}{A_{21}A_{12}+A_{11}A_{22}}a_{0n};\quad b_{2n}=\frac{A_{22}B_1+A_{12}B_2}{A_{11}A_{22}+A_{12}A_{21}}a_{0n};$$

$$A_{11}\triangleq\left\{\varepsilon_1k_2k_1\cos(k_1x)-\delta_1k_2k_1\sin(k_1x)\right\};$$

$$A_{12}\triangleq\begin{Bmatrix}\left[\left(\left(n\pi/h_0\right)^2-\mu_n^2\right)-k_2^2\right]+\varepsilon_1\left(\left(\varepsilon_{21}\left(n\pi/h_0\right)^2-\mu_n^2\right)-k_2^2\right)\sin(k_1x)+\\ +\delta_1\left((\delta_{21}\left(n\pi/h_0\right)^2-\mu_n^2)-k_2^2\right)\end{Bmatrix};$$

$$B_1\triangleq-\frac{1}{2}\left\{\alpha_1\delta_1\left[\mu_n^2(\delta_{21}\eta_n^2-1)-2k_1^2\right]-\beta_1\varepsilon_1\left[\mu_n^2\left(\varepsilon_{21}\eta_n^2-1\right)-2k_1^2\right]\right\};$$

$$A_{21}\triangleq\begin{Bmatrix}\left[\mu_n^2\left(\eta_n^2-1\right)-k_2^2\right]+\delta_1\left(\mu_n^2(\delta_{21}\eta_n^2-1)-k_2^2\right)\cos(k_1x)-\\ -\varepsilon_1\left(\mu_n^2\left(\varepsilon_{21}\eta_n^2-1\right)-k_2^2\right)\sin(k_1x)\end{Bmatrix};$$

$$A_{22}\triangleq\left\{\delta_1k_2k_1\sin(k_1x)+\varepsilon_1k_2k_1\cos(k_1x)\right\};$$

$$B_2\triangleq-\frac{1}{2}\left\{\beta_1\delta_1\left[\mu_n^2(\delta_{21}\eta_n^2-1)-2k_1^2\right]+\alpha_1\varepsilon_1\left[\mu_n^2\left(\varepsilon_{21}\eta_n^2-1\right)-2k_1^2\right]\right\}.$$

The wave solution in second approximation will have the following form

$$\mathrm{w}_2(x,y,t)=\mathrm{w}_1(x,y,t)+\gamma^2\sum_{n=1}^{\infty}a_{0n}\begin{bmatrix}1+\beta_2\left(\varepsilon_i;\delta_i;\left(na/h_0\right)\right)\sin(k_2x)\\ +\alpha_2\left(\varepsilon_i;\delta_i;\left(na/h_0\right)\right)\cos(k_2x)\end{bmatrix}\sin(\mu_{2n}y)e^{i\omega_0t}\quad(1.1.27)$$

Find the forbidden frequency zone from the obtained relations, (the number of harmonics, for which occur the inequality)

$$\left|-b_n\pm\sqrt{b_n^2-c_n}\right|>1,\qquad(1.1.28)$$

where have taken the following designations

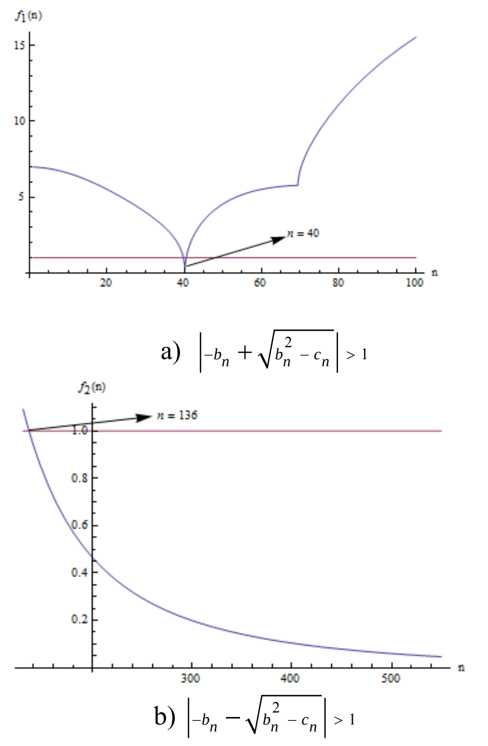
$$c_n\triangleq\frac{\left[\left(na/4h_0\right)^2-1\right]^2-\left[\left(\left(na/4h_0\right)^2\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\right)-\varepsilon_1\right)\right]^2-\delta_1^2/4}{\gamma_1^2/4+\left[\left(\left(na/4h_0\right)^2(\delta_2-\delta_1)-\delta_1\right)\right]^2+\left[\left(\left(na/4h_0\right)^2\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\right)-\varepsilon_1\right)\right]^2}.\quad(1.1.29)$$

The zones of instability of the harmonics are easily obtained from relations (1.1.25) and (1.1.26) (when the quantities under square root sign can be negative), whence it follows that in some cases of medium inhomogeneity, the quantities under square root sign can be negative and then the corresponding harmonics lose stability and will be represented by exponential functions $\exp\left[\pm\mu_{2n}(\varepsilon_i;\delta_i;a/h_0)\cdot y\right]$.

Numerical analysis of the obtained amplitude-phase distortion will be given along with the case of mechanically free boundary conditions of the waveguide. The zones of forbidden frequencies for different characterizing parameters of inhomogeneity of the material are given in Fig 1.4**.** In one case the forbidden frequency occurs for a limited number of harmonics n_i where $i \in \{m_1, m_1+1,...k\}$, but in the other case there are an unlimited number of harmonics $i \geq m_2$.

Task 1.2 Longitudinal inhomogeneity of the material and mechanically free surfaces of the layer-waveguide. Assume the normal wave is propagating in isotropic, elastic, longitudinally weak inhomogeneous layer with mechanically free surfaces $y = \pm h_0$. The weak inhomogeneity has the form set in (1.1.4)

$$\left.\frac{\partial \mathrm{w}(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=-h_0} = \left.\frac{\partial \mathrm{w}(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=+h_0} = 0. \tag{1.2.1}$$



a) $\left|-b_n + \sqrt{b_n^2 - c_n}\right| > 1$

b) $\left|-b_n - \sqrt{b_n^2 - c_n}\right| > 1$

Fig. 1.4. The zones of forbidden frequencies for certain material inhomogeneity characteristics

Proceeding analogously to the case of clamped surfaces, the wave solution of the equations of motion satisfying the boundary conditions for mechanically free surfaces (1.2.1) can be represented in the form

$$\mathrm{w}(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{w}_n(x)\cdot\cos(\mu_n y)\cdot e^{i\omega_n t} \tag{1.2.2}$$

where again $\mathrm{w}_n(x)$ is shown in the (1.1.9) and consequently the character of amplitude-phase distortion on the propagation of wave signal will be the same as in the case of clamped surfaces of layer.

Unlike the case of the waveguide with clamped surfaces, in this case the solution of the zero approximation is obtained in the form

$$\mathrm{w}_0(x,y,t) = a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}\cos(\mu_{0n} y)\cdot e^{i\omega_{0n} t} \tag{1.2.3}$$

where $a_{00} = \mathrm{w}_0(x, \pm h_0, t)$ – the values of shear strain on surfaces.

Considering the fact, that the nature of the change in direction of propagation of the

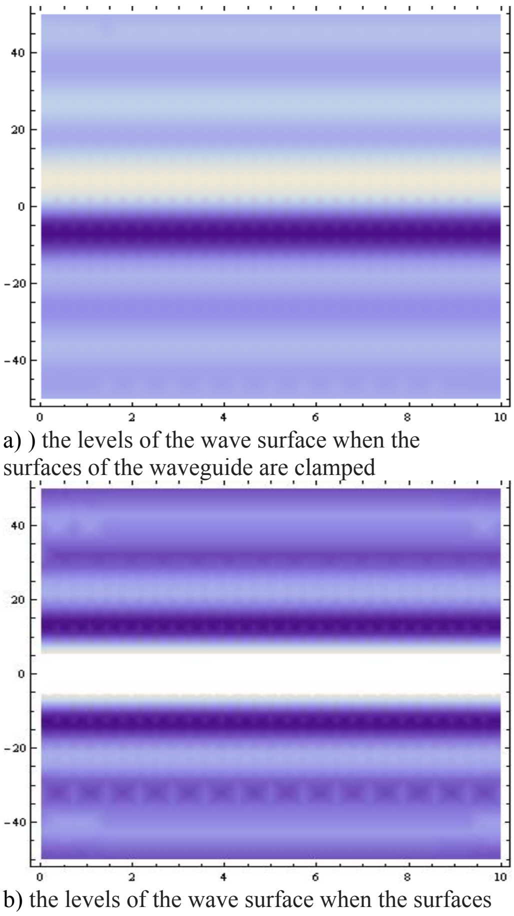
wave signal is again characterized by the equation (1.1.8), the wave field in the waveguide in the case of the mechanically free surfaces in the following approximations are obtained so:
a) in the first approximation, the solution is obtained in the form accounting the material inhomogeneity

$$\mathrm{w}_1(x,y,t) = a_{00} + \gamma\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{1n}\cos(k_1 x) + b_{1n}\sin(k_1 x)\right]\cos(\mu_{1n} y)\cdot e^{i\omega_0 t}, \tag{1.2.4}$$

where determining wave characteristics are the followings: μ_{1n} - wave formation number, and the amplitudes of harmonics a_{1n} and b_{1n} are described in relations (1.1.19) and (1.1.20) accordingly.
b) in the second approximation, the wave field will have the following form

$$\mathrm{w}_2(x,y,t) = \mathrm{w}_1(x) + \gamma^2\sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}\begin{bmatrix}\alpha_2\left(\varepsilon_i;\delta_i;\left(na/h_0\right)\right)\cos(k_2 x) + \\ +\beta_2\left(\varepsilon_i;\delta_i;\left(na/h_0\right)\right)\sin(k_2 x)\end{bmatrix}\cos(\mu_{2n} y)e^{i\omega_0 t}, \tag{1.2.5}$$

where determining wave characteristics are the followings: μ_{2n} – wave formation number, and the amplitudes of harmonics a_{2n} and b_{2n} are described in relations (1.1.25), (1.1.26) and (1.1.28), (1.1.29) accordingly.



a)) the levels of the wave surface when the surfaces of the waveguide are clamped

b) the levels of the wave surface when the surfaces of the waveguide are mechanically free

Fig. 2.1

2. Comparative analysis of the obtained results. As shown above, the frequency characteristics at different boundary conditions on the smooth surfaces of the waveguide of weakly inhomogeneous material are identical and because of the inhomogeneity are changed identically. The weak inhomogeneity leads to a distortion of the formation coefficients (Fig. 1.1) as in nature as in value. Formation coefficients $\mu_{1n}(k_1 x)$ are already changing periodically from the value $\mu_{0n} = \left(\pi n/h_0\right)$. At the clamped surfaces of the layer, as in the case of a homogeneous medium does not exist the first harmonic with a constant amplitude. Depending on the characteristics of the inhomogeneity of the material, at certain frequencies $n = N_r$ of the wave signal in certain sections $x = x_r$ occurs internal resonance (Fig. 1.3). The weak inhomogeneity of the material of the waveguide may lead to filtration of specific frequencies of the normal wave (Fig. 1.4).

In figures 2.1 (a) and (b) the levels of wave surfaces for different boundary conditions are given. It is obvious that the wave surface generally preserves the leveled character, existing in the case of homogeneous medium: preserves the symmetry (or asymmetry) through the thickness of the waveguide, but are distorted in the direction of wave propagation. On the lines of level changes jagged deviations are clearly appeared, characterized by the inhomogeneity of the material of the waveguide. At specific frequencies of the wave signal, the interaction of the signal and inhomogeneity leads to parametric resonance.

References

1. Biryukov, S.V., Gulyaev, Y.V., Krylov, V., Plessky, V. Surface acoustic waves in inhomogeneous media // Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20, 1995, 388p.
2. L. Brekhovskikh. Waves in Layered Media 2e. Applied mathematics and mechanics, Vol.16, Elsevier Science, 2012, 520p.
3. D. Royer, E. Dieulesaint, Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation, Springer Science & Business Media, 2000, 374p.
4. Bakirtas I. et Maugin G. A., Ondes de surface SH pures en elasticite inhomogene, Journal de Mechanique Theoretique et Appliquee, v. 1, № 6, 1982, p. 995–1013.
5. Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р. О существовании «стоячей» поверхностной волны вдоль периодически неровной поверхности. //Докл. АН Армении. 1992. Т.93. №2. С.63-67. Belubekian M. V., Mukhsikhachoyan A. R., The existence of a "standing" surface wave along the periodically irregular surface. Reports of NAS of Armenia, 1992, 93. №2. pp. 63-67.
6. Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабонеоднородных упругих средах. //Акустический журн. 1996. Т.42. №2. С.179-182. Belubekian M. V., Mukhsikhachoyan A. R., Shear Surface Waves in Weakly Inhomogeneous Elastic Media. Acoustic Journal, 42, №2, p. 179-182 (1996)
7. Potel C., Bruneua M., N'Djomo L.C.F., Leduc D., Elkettani M.E., Izbicki J.-L.; Shear horizontal acoustic waves propagating along two isotropic solid plates bonded with a non-dissipative adhesive layer: Effects of the rough interfaces, Jour. Of Appl. Physics vol. 118, (2015).
8. M.V. Predoi, M. Castaings, B. Hosten and C. Bacon. Wave propagation along transversely periodic structures. //J. Acoust. Soc. Am. 121, 1935–1952 (2007).
9. T. Krasnova, P.-A. Jansson and A. Bostr€om. Ultasonic wave propagation in an anisotropic cladding with a wavy interface, Wave Motion 41, 163–177 (2005).
10. Belyankova T.I., KalinchukV.V., Tukodova O.M. Peculiarities of the Surface SH-Waves Propagation in the Weakly Inhomogeneous Pre-stressed Piezoelectric Structures. In book: Advanced Materials, pp.413-429.
11. Avetisyan A.S. On the formulation of the electro-elasticity theory boundary value problems for electro-magneto-elastic composites with interface roughness. //Proc. of NAS Armenia, ser. Mechanics, vol. 68, №2, (2015), pp.29-42.
12. Avetisyan A.S., Sarkisyan S.V. About electromagnetoelastic vibrations and waves propagation in nonhomogeneous media. //Mechanical Modelling of New Electromagnetic Materials. Stockholm. 1990. p. 387-393
13. Аветисян А.С., Камалян А.А. О распространении электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое класса 6mm. //Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. №2. С.108-115.Avetisyan A.S., Kamalyan A.A. On

Propagation of Electroelastic Shear Wave in 6mm Class Piezodielectric Inhomogeneous Layer. Reports of NAS of Armenia, 2014, 114. №2. pp. 108-115.
14. Piliposian G. T., Avetisyan A.S., Ghazaryan K.B. Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium. //International Journal Wave Motion, Elsevier publisher, v. 49, iss. 1, January, 2012, pp.125-134.
15. Lobkist O.I., Chimenti D.E. Elastic guided waves in plates with rough surfaces// Appl. Phys. Lett. (1996), vol. **69**, pp. 3486-3502.
16. Golub M.V. and Zhang C. In-plane time-harmonic elastic wave motion and resonance phenomena in a layered phononic crystal with periodic cracks. //J. Acoust. Soc. Am. Vol.**137**, Issues 1, 2015, 238.
17. Gasparyan D.K., Ghazaryan K.B., Shear waves in funcyionally graded electro-magneto-elastic media, (2014), vol. 3, Issue 10, Int. Journal of Eng.Reserch and Technology, pp.769-776.
18. Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B., Piliposyan G.T. Internal resonances in a periodic magneto-electro-elastic structure. //J. Appl. Phys., (2014), vol. 116, 044107.
19. Vashishth A.K., Vishakha Gupta. Wave propagation in transversely isotropic porous piezoelectric materials. //Int. J. of Solids and Structures, (2009), vol. 46, pp. 3620-3632.

Information about author:

A.A. Hunanyan, Phd student, Institute of Mechanics,
National Academy of Sciences, Yerevan, Republic of Armenia
Phone: (+37491) 77-55-33; **E-mail:** hunanyan.areg21@gmail.com

Поступила в редакцию 22.06.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №3, 2016 Механика
УДК 539.3

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЁННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧЕ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НЕКОТОРЫХ НЕСУММИРУЕМЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Арабян М.О.

Բանալի բառեր: հատուկ կշռային տարածություններ, ընդհանրացված տատանումների ձևի ողորկություն, սեփական արժեքներ և տատանումների ձև, պտտման թաղանթ.
Ключевые слова: специальные весовые пространства, гладкость обобщенных форм колебаний, собственные значения и формы колебаний, оболочки вращения.
Key words: special weight spaces, the smoothness of generalized waveforms, eigenvalues and waveforms, shell rotation.

Արաբյան Մ. Հ.

Պտտման թաղանթի տատանումների խնդրի ընդհանրացված տատանումների ձևի ողորկությունը՝ կախված որոշ ոչ հանրագումարելի գործակիցներից

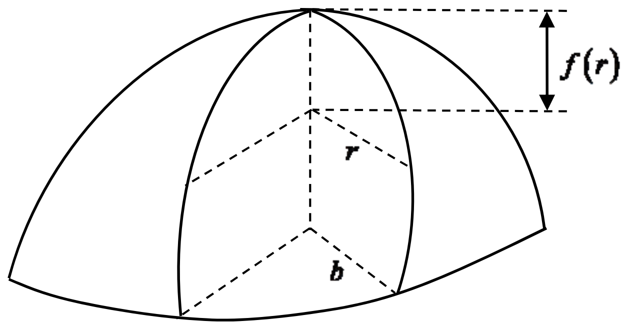
Աշխատանքում ուսումնասիրվում է պտտման թաղանթի տատանումների խնդիրը որոշ ոչ հանրագումարելի գործակիցներով: Գործակիցների վրա դրված որոշակի պայմանների դեպքում ապացուցվում է ընդհանրացված տատանումների ձևի ողորկությունը ներմուծված կշռային տարածություններում: Ցույց է տրվում, որ տատանումների ձևի ողորկությունը էապես կախված է թաղանթը բնութագրող այնպիսի գործակիցներից, ինչպիսիք են՝ հաստությունն ու ձևը:

Arabyan M.H.
The smoothness of generalized waveforms for the problem of rotation of the shell oscillations depending on certain nonsummable coefficients

In the paper we consider a problem of oscillations of rotation with certain nonsummable coefficients. Under certain conditions on the coefficients the smoothness of generalized waveforms in the introduced special weight spaces is proved. It is shown that the smoothness of waveforms are closely related to such factors characterizing the membrane, like thickness and shape.

В работе рассмотрена задача на собственные значения для дифференциальной системы с переменными коэффициентами, некоторые из которых имеют несуммируемую особенность. При некоторых предположениях изучаемая задача физически представляет задачу собственных колебаний оболочки вращения. При определённых условиях на коэффициенты доказана гладкость обобщённых решений краевой задачи, а также гладкость обобщённых форм колебаний в введённых специальных весовых пространствах. А это даёт возможность сделать дальнейшие исследования, в частности получить оценки скорости сходимости для приближённых решений. Показывается, что гладкость форм колебаний тесно связана с такими коэффициентами, характеризующими оболочку, как толщина и форма.

Введение. Задачи оптимального управления играют все более важную роль в науке и технике, имеют различные области приложения. Эффективные численные методы [1–3] имеют решающие значения для успешного применения оптимального управления в практических областях.



Огромное влияние на развитие теории оптимальных систем оказало стремление создать устройства, обладающие наилучшими характеристиками. Важными характеристиками конструкции являются вес и собственные частоты колебаний. Наиболее типичными в теории оптимального проектирования сжатых конструкций являются задачи максимизации критического значения ω_0, где ω_0 – минимальное из собственных значений при заданном весе конструкций и задачи минимального веса при ограничений $\omega_0 \geq \mu$, где μ – заданное число [4–7].

Оптимизационные задачи (1.1)–(1.5), (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) мало изучены. Сложность решения этих задач заключается в том, что некоторые коэффициенты уравнений имеют несуммируемую особенность.

1. Постановка задачи. В предлагаемой работе рассматривается следующая задача на собственные значения. При некоторых предположениях колебаний оболочки вращения описываются следующей системой уравнений [8]:

$$\left(rDW''\right)'' + \left(\left(\nu D' - \frac{D}{r}\right)W'\right)' + \left(f'\varphi\right)' = \lambda rh\rho W\,, \tag{1.1}$$

$$\left(ar\varphi'\right)' - \left(\frac{a}{r} + \nu a'\right)\varphi - f'W' = 0\,, \tag{1.2}$$

где $r \in (0,b)$ – радиус оболочки, $W(r)$ – амплитуда перемещения точек срединной поверхности оболочки в нормальном направлении, $\varphi(r)$ – функция усилий, характеризующая тангенциальное перемещение, $f(r)$ – функция, определяющая форму срединной поверхности оболочки вращения, $h(r)$ – толщина, а $\rho(r)$ – удельный вес материала оболочки,

$$D(r) = \frac{Eh^3(r)}{12\left(1-\nu^2\right)}, \quad a(r) = \frac{1}{Eh(r)},$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, краевые условия для закреплённой оболочки имеют вид:

$$W'\big|_{r=0} = \left(\frac{1}{r}\left[\left(rDW''\right)' + \left(\nu D' - \frac{D}{r}\right)W'\right]\right)\Bigg|_{r=0} = W\big|_{r=b} = W'\big|_{r=b} = 0,$$
$$a\left(r\varphi' - \nu\varphi\right)\big|_{r=0} = a\left(r\varphi' - \nu\varphi\right)\big|_{r=b} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\lambda = \omega^2$ – минимальное собственное число задачи (1.1)–(1.3). С этой задачей связаны различные задачи оптимального управления.

Одной из важнейших задач является минимизация веса оболочки

$$J\left(f'\right) = \int_0^b 2\pi r h \rho \sqrt{1 + f'^2}\, dr \to \inf \tag{1.4}$$

при условии

$$\lambda = \omega^2\left(f'\right) = \omega_0^2, \quad f' \geq 0. \tag{1.5}$$

Задача оптимизации заключается в отыскании функции $f\left(r\right)$, доставляющей минимум функционалу (1.4) и удовлетворящей условиям (1.5).

Заметим, что число рассматриваемых функционалов и накладываемых ограничениий, которые предполагаются непротиворечивыми, может быть, в принципе, сколь угодно большим. Оптимизируемый функционал (критерий качества конструкции) в каждой конкретной задаче только один. Так, например, при изгибе балки переменной толщины могут быть поставлены задачи в минимизации веса балки при ограничении на прогибы или минимизации максимального прогиба при заданном весе. Однако, задача одновременной минимизации двух функционалов веса балки и максимального прогиба не имеет смысла.

Оболочки и пластины являются механическими конструкциями, которые широко используются в технике.

Вес – одна из основных характеристик конструкции, и поэтому в большинстве работ по оптимальному проектированию этот функционал либо рассматривается в качестве оптимизируемого критерия качества, либо фигурирует среди других принимаемых ограничений. Вес конструкции характеризует как расход материалов, так и некоторые её эксплуатационные свойства.

Также рассматривается задача максимизации минимального собственного числа

$$\lambda = \omega^2\left(f'\right) \to \sup \tag{1.6}$$

при заданном весе оболочки

$$J\left(f'\right) = J_0, \quad f' \geq 0. \tag{1.7}$$

Такого типа задачи рассмотрены различными авторами. Известны монография Малкова В.П. и Угодчикова А.Г. [6] и журнальная статья Братуся А.С. и Сейраняна А.П. [15] .

Во всех перечисленных работах, в основном, рассматриваются задачи, в которых управлением является толщина пластины. Нам известна лишь работа [12], в которой рассматривается оболочка и проводится оптимизация как по толщине, так и по профилю оболочки.

Для изучения задачи колебаний сначала нужно изучить краевую задачу:

$$(Lu)_1 = f_1 \tag{1.8}$$

$$(Lu)_2 = f_2 \tag{1.9}$$

с фиксированным управлением $p(r) = f'(r)$ при краевых условиях (1.3), где $u = (W, \varphi)$. Первый вопрос, который возникает при исследовании задачи (1.1)–(1.5), это – как понимать решение задачи (1.1)–(1.3) при фиксированном управлении $p(r)$.

Дело в том, что некоторые коэффициенты уравнений имеют при $r = 0$ несуммируемую особенность. Поэтому введём следующие весовые пространства.

2. Весовые пространства и обобщённое решение

Исследование таких краевых задач для уравнений, имеющих несуммируемую особенность, оказывается, лучше всего вести в некоторых специальных весовых пространствах.

Введём весовые гильбертовы пространства $H_r^1[0,b]$, $H_r^2[0,b]$ со скалярными произведениями соответственно [9]:

$$\langle u,v\rangle_{H_r^1} = \int_0^b \left(ru'v' + \frac{uv}{r} \right) dr ,$$

$$\langle u,v\rangle_{H_r^2} = \int_0^b \left(ru''v'' + \frac{u'v'}{r} + uv \right) dr ,$$

и нормами:

$$\|u\|_{H_r^1} = \left(\langle u,u\rangle_{H_r^1}\right)^{1/2}, \quad \|u\|_{H_r^2} = \left(\langle u,u\rangle_{H_r^2}\right)^{1/2}.$$

Обозначим через V следующее линейное подпространство пространства $H_r^2 \times H_r^1$:

$$V = \left\{ v : \; v \in H_r^2 \times H_r^1, v_1(b) = v_1'(b) = 0 \right\}.$$

В пространстве V рассмотрим билинейную форму:

$$B(u,v) = \int_0^b \Big[rDu_1''v_1'' + (D - \nu D'r)\frac{u_1'v_1'}{r} - pu_2v_1' +$$

$$+aru_2'v_2' + (a + \nu a'r)\frac{u_2v_2}{r} + pu_1'v_2 \Big] dr - a\nu u_2v_2\Big|_0^b ,$$

порождённой дифференциальным оператором и краевыми условиями задачи (1.1)–(1.3).

Далее, при некоторых условиях на коэффициенты доказывается положительная определённость и ограниченность билинейной формы $B(u,v)$, а именно [9]:

$$B(u,v) \ge \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V \tag{2.1}$$

$$\left|B(u,v)\right| \le M \|u\|_V \|v\|_V \ \ \forall v \in V \tag{2.2}$$

где α и M – положительные постоянные и не зависят от u и v.

Также доказывается [9] существование обобщённого решения задачи (1.3), (1.8), (1.9), т.е. существование такого $u \in V$, для которого верно соотношение:

$$B(u,v) = \langle f_1, v_1 \rangle_{L_2} + \langle -f_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad \forall v \in V. \tag{2.3}$$

Возьмём любое $\psi \in L_2[0,b]$. Тогда условие

$$B(u,v) = \left\langle \sqrt{rh\rho}\ \psi, v_1 \right\rangle_{L_2}, \quad \forall v \in V,$$

полученное из (2.3) при $f = \begin{pmatrix} \sqrt{rh\rho}\ \psi \\ 0 \end{pmatrix}$, определяет функцию $u \in V$. Тем самым, определён оператор $G : \psi \in L_2[0,b] \to u = G\psi \in V$, причём верна оценка:

$$\|u\|_{H_r^2 \times H_r^1} = \|G\psi\|_{H_r^2 \times H_r^1} \le \alpha^{-1} \left\|\sqrt{rh\rho}\ \psi\right\|_{L_2} \le c_1 \|\psi\|_{L_2}. \tag{2.4}$$

Далее доказывается, что оператор $F_1\psi = \sqrt{rh\rho}\ (G\psi)_1$, как оператор, отображающий $L_2[0,b] \to L_2[0,b]$ – компактный и самосопряжённый [9].

3. Гладкость обобщённого решения краевой задачи. Энергетические оценки

Перейдём к изучению дифференциальных свойств решения задачи (2.3). Нам понадобятся ранее введённые [9] весовые гильбертовы пространства H_r^3, $\tilde{H}_r^2$ со скалярными произведениями соответственно:

$$\langle u,v \rangle_{\tilde{H}_r^2} = \int_0^b \left(ru''v'' + u'v' + \frac{uv}{r^2} \right) dr, \quad \langle u,v \rangle_{H_r^3} = \int_0^b \left(ru'''v''' + u''v'' + \frac{u'v'}{r^2} + uv \right) dr,$$

и нормами:

$$\|u\|_{\tilde{H}_r^2} = \left(\langle u,u \rangle_{\tilde{H}_r^2} \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{H_r^3} = \left(\langle u,u \rangle_{H_r^3} \right)^{1/2}.$$

Справедлива

Теорема 3.1. Пусть $D(r), a(r) \in H^2[0,b]$, $p(r) \in H^1[0,b]$, $f = (f_1, f_2)$, $f_1 \in L_2[0,b]$, $\frac{f_2}{r} \in L_2[0,b]$, $f_2 \in C[0,b]$, $D(r) \ge D_0 > 0$, $a(r) \ge a_0 > 0$, $D(r) - \nu D'(r) \ge D_1 > 0$, $0 < \nu = \mathrm{const} < 1$. Тогда решение задачи (2.3)

$$u = u(r) \in (u_1(r), u_2(r)) \in H_r^3 \times \tilde{H}_r^2$$

и справедлива оценка:

$$\|u\|_{H_r^3\times\tilde{H}_r^2}\le c_2\left(\|f_1\|_{L_2}+\left\|\frac{f_2}{r}\right\|_{L_2}+\max_{[0,b]}|f_2|\right). \tag{3.1}$$

Решение удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered}
u_1'(0)=u_1(b)=u_1'(b)=0,\\
a\left(ru_2'-\nu u_2\right)\Big|_{r=0}=a\left(ru_2'-\nu u_2\right)\Big|_{r=b}=0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Причём, краевые условия (3.2) выполняются в классическом смысле, а уравнение (1.2) – почти всюду.

Доказательство. Разобьём отрезок $[0,b]$ на N равных частей точками:

$0=r_0<r_1<\cdots<r_i<r_{i+1}<\cdots<r_N=b,$

$r_{i+1}=r_i+h$, $b=Nh$.

Напишем разностную схему для задачи (1.3), (1.8), (1.9). Имеем:

$$\delta_{r\bar{r}}\left((rD)_{i+1}\delta_{r\bar{r}}u_{1,i}\right)+\delta_r\left(\left(\nu D_i'-\frac{D_i}{r_i}\right)\delta_{\bar{r}}u_{1,i}\right)+\delta_r\left(p_iu_{2.i}\right)=f_{1.i},\ i=\overline{1,N-2} \tag{3.3}$$

$$\delta_r\left((ar)_i\delta_{\bar{r}}u_{2,i}\right)-\left(a_{i+1}+\nu r_i\delta_ra_i\right)\frac{u_{2,i}}{r_i}-p_i\delta_ru_{1,i}=f_{2.i},\ i=\overline{1,N-1} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r_1}\left(\delta_r\left((rD)_1\delta_{r\bar{r}}u_{1,0}\right)+\left(\nu D_1'-\frac{D_1}{r_1}\right)\delta_{\bar{r}}u_{1,1}\right)=\delta_{\bar{r}}u_{1,0}=0,\quad u_{1,N}=\delta_{\bar{r}}u_{1,N}=0\\
a(0)\left(0\cdot\delta_ru_{2,0}-\nu u_{2,0}\right)=0,\quad \text{т.е.}\quad u_{2,0}=0;\quad a(b)\left(b\delta_{\bar{r}}u_{2,N}-\nu u_{2,N}\right)=0,
\end{gathered} \tag{3.5}$$

где

$$f_{1,i}=\frac{1}{h}\int_{r_{i-1}}^{r_i}f_1\,dr,\ f_{2,i}=\frac{1}{h}\int_{r_{i-1}}^{r_i}f_2\,dr,\ D_i=D(r_i),\ D_i'=D'(r_i),\ a_i=a(r_i),\ p_i=p(r_i).$$

Введём следующие весовые дискретные пространства $H_{r,N}^1$, $H_{r,N}^2$, $\tilde{H}_{r,N}^2$, $H_{r,N}^3$ с нормами соответственно:

$$\|v\|_{H_{r,N}^1}^2=\sum_{i=1}^{N}r_i\left(\delta_{\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{v_i^2}{r_i}h,$$

$$\|v\|_{H_{r,N}^2}^2=\sum_{i=0}^{N-1}r_{i+1}\left(\delta_{r\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(\delta_{\bar{r}}v_i\right)^2}{r_i}h+\sum_{i=0}^{N}v_i^2h,$$

$$\|v\|_{\tilde{H}_{r,N}^2}^2=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{r_i^2}{r_{i+1}}\left(\delta_{r\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=1}^{N}\left(\delta_{\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{v_i^2}{r_i^2}h,$$

$$\|v\|_{H_{r,N}^3}^2=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{r_i^2}{r_{i+1}}\left(\delta_{rr\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=0}^{N-1}\left(\delta_{r\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(\delta_{\bar{r}}v_i\right)^2}{r_i^2}h+\sum_{i=0}^{N}v_i^2h.$$

Рассмотрим следующее подпространство V_h пространства $H_{r,N}^2\times H_{r,N}^1$:

$$V_h = \left\{ v : v \in H^2_{r,N} \times H^1_{r,N},\, \delta_{\bar r} v_{1,0} = \delta_{\bar r} v_{1,N} = v_{1,N} = v_{2,0} = 0 \right\}.$$

Умножим (3.3) на $v_{1,i}$, а (3.4) на $-v_{2,i}$ и просуммируем первое по i от 1 до $N-2$, а второе – от 1 до $N-1$. Пользуясь разностным аналогом формулы интегрирования по частям, краевыми условиями (3.5), получим:

$$a\left([u]_N, [v]_N\right) = \sum_{i=1}^{N-2} f_{1,i} v_{1,i} h - \sum_{i=1}^{N-1} f_{2,i} v_{2,i} h,\ \forall [v]_N \in V_h, \tag{3.6}$$

где $[u]_N = \left([u_1]_N, [u_2]_N\right)$, $[u_1]_N = \left(u_{1,-1}, u_{1,0}, \ldots, u_{1,N}\right)$, $[u_2]_N = \left(u_{2,0}, \ldots, u_{2,N}\right)$,

$$a\left([u]_N, [v]_N\right) = \sum_{i=0}^{N-1} (rD)_{i+1} \delta_{r\bar r} u_{1,i} \delta_{r\bar r} v_{1,i} h + \sum_{i=1}^{N-1} \left(D_i - \nu D_i' r_i\right) \frac{\delta_{\bar r} u_{1,i} \delta_{\bar r} v_{1,i}}{r_i} h -$$

$$-\sum_{i=1}^{N-1} p_i u_{2,i} \delta_r v_{1,i} h + \sum_{i=1}^{N-1} (ar)_r \delta_{\bar r} u_{2,i} \delta_{\bar r} v_{2,i} h +$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1} \left(a_{i+1} + \nu r_i \delta_r a_i\right) \frac{u_{2,i} v_{2,i}}{r_i} h + \sum_{i=1}^{N-1} p_i \delta_r u_{1,i} v_{2,i} h - \nu a_N u_{2,N} v_{2,N}.$$

Аналогично (2.1) можно доказать, что

$$a\left([v]_N, [v]_N\right) \ge \alpha_1 \left\| [v]_N \right\|^2_{H^2_{r,N} \times H^1_{r,N}},\ \ \forall [v]_N \in V_h,$$

где α_1 не зависит ни от h, ни от N. Отсюда и из (3.6) следует

$$\left\| [v]_N \right\|_{H^2_{r,N} \times H^1_{r,N}} \le M_1 \left(\sum_{i=1}^{N-2} \left(f_{1,\mathrm{i}}\right)^2 h + \sum_{i=1}^{N-1} \left(f_{2,\mathrm{i}}\right)^2 h \right)^{1/2}. \tag{3.7}$$

Аналогично задаче (2.3) [9] можно доказать существование, а из оценки (3.7) единственность решения задачи (3.6).

Наша задача состоит в том, чтобы для решения задачи (3.3)–(3.5) получить следующие оценки:

$$\left\| [u_1]_N \right\|^2_{H^3_{r,N}} \le M_2 \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left[\left(f_{1,\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{\left(f_{2,\mathrm{i}}\right)^2}{r_i^2} \right] h + \max_i \left(f_{2,\mathrm{i}}\right)^2 \right), \tag{3.8}$$

$$\left\| [u_2]_N \right\|^2_{\tilde H^2_{r,N}} \le M_2 \left(\sum_{i=1}^{N-2} \left(f_{1,\mathrm{i}}\right)^2 h + \sum_{i=1}^{N-1} \left(f_{2,\mathrm{i}}\right)^2 h \right), \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} M_2 = M_2\left(\max_{[0,b]} |a(r)|, \max_{[0,b]} |a'(r)|, \max_{[0,b]} |D'(r)|, \max_{[0,b]} |p| \right) = \\ = M_2\left(\|a\|_{H^2}, \|D\|_{H^2}, \|p\|_{H^1} \right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Для получения оценки (3.9) сначала умножим разностное уравнение (3.4) на $\dfrac{-u_{2,i}}{r_i} h$, просуммируем по i от 1 до $N-1$ и проинтегрируем по частям некие его члены. В результате получим:

$$\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\left(u_{2,i}\right)^2}{r_i^2}h+\sum_{i=1}^{N}\left(\delta_{\bar r}u_{2,i}\right)^2 h\le M_2\left(\sum_{i=1}^{N-2}\left(f_{1,\mathrm{i}}\right)^2 h+\sum_{i=1}^{N-1}\left(f_{2,\mathrm{i}}\right)^2 h\right),$$

где M_2 – из (3.10). Во второй раз умножим (3.4) на r_i, продифференцируем в разностном смысле по r_i, умножим на $\dfrac{-\delta_{\bar r}u_{2,i}}{r_i}h$ и просуммируем по i от 2 до $N-1$, снова применим формулу интегрирования по частям к членам высших производных, и, где нужно, учтём краевые условия (3.5). В результате получается оценка (3.9). Аналогично можно получить оценку (3.8). Далее, пусть $\left[u_1\right]_N=\left(u_{1,-1},u_{1,0},\ldots,u_{1,N}\right)$ и $\left[u_2\right]_N=\left(u_{2,0},u_{2,1},\ldots,u_{2,N}\right)$ – решение системы (3.3)–(3.5). Построим функции

$$u_1^h\left(r\right)=\sum_{i=-1}^{N}u_{1,i}\ell_{1,i}\left(r\right),\quad u_2^h\left(r\right)=\sum_{i=0}^{N}u_{2,i}\ell_{2,i}\left(r\right), \tag{3.11}$$

где

$$\ell_{1,i}\left(r\right)=\begin{cases}\dfrac{\left(r-r_{i-2}\right)^4}{24h^4}, & r_{i-2}\le r\le r_{i-1},\\[2mm] \dfrac{1}{12}+\dfrac{\left(r-r_{i-1}\right)^2}{2h^2}-\dfrac{\left(r-r_i\right)^4}{24h^4}-\dfrac{\left(r-r_{i-1}\right)^4}{8h^4}, & r_{i-1}\le r\le r_i,\\[2mm] \dfrac{1}{3}+\dfrac{\left(r-r_i\right)\left(r_{i+1}-r\right)}{h^2}+\dfrac{\left(r-r_i\right)^4}{8h^4}+\dfrac{\left(r-r_{i+1}\right)^4}{8h^4}, & r_i\le r\le r_{i+1},\\[2mm] \dfrac{1}{12}+\dfrac{\left(r-r_{i+2}\right)^2}{2h^2}-\dfrac{\left(r-r_{i+1}\right)^4}{24h^4}-\dfrac{\left(r-r_{i+2}\right)^4}{8h^4}, & r_{i+1}\le r\le r_{i+2},\\[2mm] \dfrac{\left(r-r_{i+3}\right)^4}{24h^4}, & r_{i+2}\le r\le r_{i+3},\\ & i=\overline{-1,N}.\end{cases} \tag{3.12}$$

$$\ell_{2,i}\left(r\right)=\begin{cases}\dfrac{\left(r-r_{i-2}\right)^3}{6h^3}, & r_{i-2}\le r\le r_{i-1},\\[2mm] \dfrac{r-r_{i-1}}{h}-\dfrac{\left(r-r_i\right)^3+2\left(r-r_{i-1}\right)^3}{6h^3}, & r_{i-1}\le r\le r_i,\\[2mm] \dfrac{\left(r_{i+1}-r\right)}{h}+\dfrac{\left(r-r_i\right)^3+2\left(r-r_{i+1}\right)^3}{6h^3}, & r_i\le r\le r_{i+1},\\[2mm] \dfrac{\left(r_{i+2}-r\right)^3}{6h^3}, & r_{i+1}\le r\le r_{i+2},\\ & i=\overline{0,N}.\end{cases} \tag{3.13}$$

Из (3.11) для $u_2^h\left(r\right)$ получим

$$u_2^h(r)=\begin{cases}\dfrac{r^3}{6h}\delta_{r\bar r}u_{2,1}+r\delta_{\bar r}u_{2,1}, & 0\le r\le h,\\ \dfrac{(r_i-r)^3}{6h}\delta_{r\bar r}u_{2,i-1}+\dfrac{(r-r_{i-1})^3}{6h}\delta_{r\bar r}u_{2,i}+(r-r_{i-1})\delta_{\bar r}u_{2,i}+u_{2,i-1}, & r_{i-1}\le r\le r_i,\\ & i=\overline{2,N-1}.\\ \dfrac{(r_N-r)^3}{6h}\delta_{r\bar r}u_{2,N-1}+(r-r_{N-1})\delta_{\bar r}u_{2,N}+u_{2,N-1}, & r_{N-1}\le r\le r_N.\end{cases}$$

Аналогично $u_2^h(r)$, с помошью (3.11) и (3.12) можно получить $u_1^h(r)$.

В силу краевых условий (3.5) имеем $\delta_{\bar r}u_{1,0}=u_{2,0}=0$, а значит, $\left(u_1^h\right)'(0)=u_2^h(0)=0$. Нетрудно доказать, что $u^h(r)=\left(u_1^h(r),u_2^h(r)\right)\in H_r^3\times\tilde H_r^2$ и справедливы оценки

$$\left\|u_1^h\right\|_{H_r^3}\le M_3\left\|[u_1]_N\right\|_{H_{r,N}^3}, \tag{3.14}$$

$$\left\|u_2^h\right\|_{\tilde H_r^2}\le M_4\left\|[u_2]_N\right\|_{\tilde H_{r,N}^2}. \tag{3.15}$$

Далее, в силу (3.6) имеем:

$$\begin{gathered}\left|B\left(u^h,v\right)-\left\langle f_1,v_1\right\rangle_{L_2}+\left\langle f_2,v_2\right\rangle_{L_2}\right|=\Big|\left(B\left(u^h,v\right)-a\left([u]_N,[v]_N\right)\right)-\\ -\left(\int_0^b f_1v_1\,dr-\sum_{i=1}^{N-2}f_{1,i}v_{1,i}h\right)+\left(\int_0^b f_2v_2\,dr-\sum_{i=1}^{N-1}f_{2,i}v_{2,i}h\right)\Big|\le\\ \le M_5\left(\left\|f_1\right\|_{L_2}+\left\|\frac{f_2}{r}\right\|_{L_2}+\max_{[0,b]}\left|f_2\right|\right)\left\|v\right\|_{H_r^2\times H_r^1}h^{1/2},\ \ \forall v\in V,\end{gathered} \tag{3.16}$$

где M_5 не зависит от h.

В силу оценок (3.8), (3.9), (3.14), (3.15) и в силу того, что

$$\sum_{i=1}^{N-1}\left(f_{1,i}\right)^2h=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{h^2}\left(\int_{r_{i-1}}^{r_i}f_1\,dr\right)^2h\le\left\|f_1\right\|_{L_2}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\left(f_{2,i}\right)^2}{r_i^2}h=\left\|\frac{f_2}{r}\right\|_{L_2}^2,\ \ \max_i\left|f_{2,i}\right|\le\max_{[0,b]}\left|f_2\right|,$$

имеем

$$\left\|u^h\right\|_{H_r^3\times\tilde H_r^2}^2\le\left(M_3^2+M_4^2\right)\left(M_2+M_2\right)\left(\left\|f_1\right\|_{L_2}^2+\left\|\frac{f_2}{r}\right\|_{L_2}^2+\max_{[0,b]}\left|f_2\right|^2\right)\le R.$$

Так как шар в $H_r^3 \times \tilde{H}_r^2$ является слабо компактным, то из множества $\{u_h\}$ при $h \to 0$ можно выделить такую последовательность $\{u^{h_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \in H_r^3 \times \tilde{H}_r^2$, что $u_n \to u$ слабо в $H_r^3 \times \tilde{H}_r^2$, причём, $u = (u_1, u_2) \in H_r^3 \times \tilde{H}_r^2$ и верна оценка

$$\|u\|_{H_r^3 \times \tilde{H}_r^2}^2 \le c_3 \left(\|f_1\|_{L_2}^2 + \left\| \frac{f_2}{r} \right\|_{L_2}^2 + \max_{[0,b]} |f_2|^2 \right). \tag{3.17}$$

В силу лемм 4 и 6 [9], из последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$\|u_{n_k} - u_{n_m}\|_{H_r^2 \times H_r^1} \to 0 \quad \text{при } k, m \to \infty .$$

Но тогда, поскольку в силу леммы 2 [9] пространство $H_r^2 \times H_r^1$ – полное, то имеем

$$\|u - u_{n_k}\|_{H_r^2 \times H_r^1} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty . \tag{3.18}$$

Докажем, что $u = (u_1, u_2)$ является решением задачи (2.3). В самом деле, в силу оценок (2.2), (3.16), (3.18) имеем:

$$\left| B(u,v) - \langle f_1, v_1 \rangle_{L_2} + \langle f_2, v_2 \rangle_{L_2} \right| \le \left| B(u - u_{n_k}, v) \right| +$$

$$+ \left| B(u_{n_k}, v) - \langle f_1, v_1 \rangle_{L_2} + \langle f_2, v_2 \rangle_{L_2} \right| \le M \|u - u_{n_k}\|_{H_r^2 \times H_r^1} \|v\|_{H_r^2 \times H_r^1} +$$

$$+ M_5 \left(\|f_1\|_{L_2} + \left\| \frac{f_2}{r} \right\|_{L_2} + \max_{[0,b]} |f_2| \right) \|v\|_{H_r^2 \times H_r^1} h^{1/2} \to 0 , \quad \forall v \in V ,$$

при $h \to 0$. Отсюда

$$B(u,v) = \langle f_1, v_1 \rangle_{L_2} - \langle f_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad \forall v \in V .$$

Аналогично, пользуясь оценками теорем вложения 2, 4 [9], можно доказать, что

$$u \in V , \quad a(ru_2' - \nu u_2)\big|_{r=0} = a(ru_2' - \nu u_2)\big|_{r=b} = 0 .$$

Таким образом, u – решение задачи (2.3) и для него справедлива оценка (3.17), из которой следует оценка (3.1). Выполнение условий $u_1'(0) = u_1(b) = u_1'(b) = 0$ в классическом смысле следует из теоремы вложения 2 [9], которая выглядит так:

Теорема 3.2 [9]. *Любая функция* $v \in H_r^2[0,b]$ *может быть отождествлена с функцией, имеющей непрерывную производную, причём*

$$\max_{[0,b]} \left(|v'(r)| + |v(r)| \right) \le c \|v\|_{H_r^2}, \quad v'(0) = 0 .$$

Установим, что уравнение (1.2) выполняется почти всюду. Из (2.3) при $v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$ с учётом (1.3) имеем:

$$0=\int_0^b\left(aru_2'v_2'+\left(\frac{a}{r}+\nu a'\right)u_2v_2+pu_1'v_2\right)dr-a\nu u_2v_2\Big|_0^b+\int_0^b f_2v_2\,dr=$$

$$=\int_0^b\left(\int_b^r\left[\left(a\xi u_2'\right)'-\left(\frac{a}{\xi}+\nu a'\right)u_2-pu_1'-f_2\right]d\xi\right)v_2'\,dr. \tag{3.19}$$

Можно убедиться, что

$$v_2=\int_0^r\int_b^z\left[\left(a\xi u_2'\right)'-\left(\frac{a}{\xi}+\nu a'\right)u_2-pu_1'-f_2\right]d\xi dz\in H_r^1\left[0,b\right].$$

Но тогда из (3.19) получим:

$$\int_r^b\left[\left(a\xi u_2'\right)'-\left(\frac{a}{\xi}+\nu a'\right)u_2-pu_1'-f_2\right]^2d\xi=0,\quad\forall r\in\left[0,b\right].$$

А это значит, что уравнение (1.2) выполняется почти всюду.

Теорема 3.1 доказана.

4. Гладкость обобщённых форм колебаний в задаче колебаний оболочки вращения

Определение. Функции $u\in V$, $u\not\equiv 0$ и число λ назовём обобщённой формой колебаний и собственным числом задачи (1.1)-(1.3), если выполняется следующее равенство:

$$B\left(u,v\right)=\lambda\left\langle rh\rho u_1,v_1\right\rangle_{L_2},\quad\forall v\in V. \tag{4.1}$$

В работе [9] при определённых условиях на коэффициенты доказано существование решения задачи на собственные значения (4.1). Справедлива следующая

Теорема 4.1. *Допустим выполнены условия теоремы 3.1, тогда обобщённые формы колебаний задачи (4.1)*

$u_k\in H_r^3\times\tilde{H}_r^2$.

Доказательство. Поскольку $F_1=\sqrt{rh\rho}\left(G\psi\right)_1$ – компактный и самосопряженный [9], то оператор F_1 имеет собственные значения и собственные функции [10],

$$F_1\psi=\mu\psi. \tag{4.2}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. *Если* μ *– собственное число, а* ψ *– соответствующая собственная функция задачи (4.2), то* $\lambda=\dfrac{1}{\mu}$ *и* $u=G\psi$ *являются собственным числом и обобщённой формой колебаний задачи* (4.1) [9].

Осталось доказать, что при выполнении условий теоремы

$u_k\in H_r^3\times\tilde{H}_r^2$.

Это следует из теоремы 3.1 и приведённой леммы, а из (2.4) следует

$$\|u\|_{H_r^3\times\tilde{H}_r^2} = \|G\psi\|_{H_r^3\times\tilde{H}_r^2} \le \alpha^{-1}\left\|\sqrt{rh\rho}\,\psi\right\|_{L_2} \le c_1\|\psi\|_{L_2}.$$

Теорема 4.1 доказана.

Заключение. Большую роль при выборе модели и формулировке задачи играет априорная информация о свойствах искомого решения. Информация о модели и знание принципиальных свойств её решения позволяют при постановке задачи оптимизации выделить существенные ограничения и отбросить «второстепенные» и тем самым привести задачу к такому виду, что её можно решить имеющимися численными или даже аналитическими методами.

В настоящей работе, введя весовые функциональные пространства, показываются свойства форм колебаний, а именно, что гладкость форм колебаний тесно связана, а вернее, непрерывно зависит от коэффициентов, характеризующих оболочку**,** толщины и формы**.**

ЛИТЕРАТУРА

1. Mayer C. and Rösch A. Superconvergence properties of optimal control problems. SIAM, Journal on Control and Optimization, 43 (2004) (3), pp. 970-985.
2. Y. Chen and W. B. Liu, Error estimates and superconvergence of mixed finite element for quadratic optimal control, International J. Numerical Analysis and Modeling, 3 (2006), no. 3, pp. 311-321.
3. Bramble J.H., Pasciak J.E., and Trenev D. Analysis of a finite pml approximation to the three dimensional elastic wave scattering problem. Math.Comput., v. 79, № 272, 2010, pp. 2079–2101.
4. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980, с 256. Banichuk N.V. Optimization forms of elastic bodies. M.: Nauka, 1980, p 256 (in Russian).
5. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. Наука, М., 1975. Lurie K.A. Optimal control in mathematical physics. M.: Nauka, 1975 (in Russian).
6. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. Наука, М., 1981. Malkov V.P., Ugodchikov A.G. Optimization of elastic systems. M.: Nauka, 1981 (in Russian).
7. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. Fichera G. Existence theorems in elasticity. M.: Mir, 1974 (in Russian).
8. Григолюк Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек. – Изв. АН СССР, Отдел тех. Наук, №3 (1955), сс. 33-68. Grigolyuk E.I. Nonlinear vibrations and stability of shallow cores and shells. Izv. AS USSR, Dep. Tech. Science, №3 (1955), pp. 33-68 (in Russian).
9. Арабян М.О. Исследование спектра одного вырождающегося оператора, ЕГУ, Ученые записки, №3 (2005), сс. 31-39. Arabyan M.H. On an eigenvalue problem. YSU, the researchers note, 3(2005), pp. 31-39 (in Russian).
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, М., 1976. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Nauka, M.,1976 (in Russian).

11. Багдасарян Ж.Е., Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек вращения.- Изв. АН Арм. ССР, Физ.-мат.н.,1960,13, №5, сс. 27-36 . Baghdasaryan Zh.E., Gnuni V.TS. On the theory of dynamic stability of laminated anisotropic shells of rotation. Izv. AS Arm. SSR, Phis. Math.Nauk, 1960, 13, №5, pp. 27-36 (in Russian).
12. Араркцян Б.Г., Гнуни В.Ц.,Оганесян А.О.Проектирование оболочек вращения минимальной массы.- Сб. Научных трудов посвященных 60-летию ЕГУ, 1981. Ararktsyan B.G. Gnuni V.TS., Hovhannisyan A.H. Designing a minimum weight of shells of rotation. Proccedings of Scientific papers dedicated to the 60th anniversary of Yerevan State University, 1981 (in Russian).
13. Лурье А.И. Применение принципа максимума к простейшим задачам механики.- Труды Ленинград. Политехн.ин-та., Л.-М.: Машиностроение, 1965, №252, сс. 34-46. LurieA.I. Applying the maximum principle to the simplest problems of mechanics. Proceedings of Leningrad Polytech. Institute, L. – M.: Mashinostroenie, 1965, №252, pp. 34-46 (in Russian).№
14. Гнуни В.Ц., Ншханян Ю.С. Оптимальный выбор закона изменения угла армирования.- Изв. Вузов, Машиностроение, 1980, №4, сс. 35-39. Gnuni V.TS., Nshkhanyan Yu. S. The optimal choice of the law of variation of the angle of reinforcement. – Izv. Vuzov, Mashinostronenie, 1980, №4, pp. 35-39 (in Russian).
15. Братусь А.С.,Сейранян А.П. Бимодальные решения в задачах оптимизации собственных значений.- ПММ,1983, т.47, Вып.4, сс. 546-554. Bratus A.S., Seyranyan A.P. Bimodal solutions in optimization problems of their eigenvalues. – PMM, 1983, N47, part 4, pp. 546-554 (in Russian).
16. Амбарцумян С.А.Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974, с.448 . Hambardzumyan S. A. The general theory of anisotropic shells. Moskva: Nauka, 1974, p. 448 (in Russian).

Сведения об авторе:

Арабян Мариам Овсеповна, к. ф.-м. н., доцент кафедры анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики ЕГУ.
Адрес: 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1; **тел.:** (+374 10) 577 937
E-mail: arabyan.mariam@mail.ru

Поступила в редакцию 10.05.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №3, 2016 Механика

UDK 539.3

ON A PROBLEM OF SUPERSONIC PANEL FLUTTER IN THE PRESENCE OF CONCENTRATED INERTIAL MASSES AND MOMENTS

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

Key words: stability, elastic rectangular plate, supersonic overrunning, divergence, localized divergence, flutter

Ключевые слова: устойчивость, упругая прямоугольная пластинка, сверхзвуковое обтекание, дивергенция, локализованная дивергенция, флаттер.

Բանալի բառեր. կայունություն, առաձգական ուղղանկյուն սալ, գերձայնային շրջհոսում, դիվերգենցիա, տեղայնացված դիվերգենցիա, ֆլատեր

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.
О задаче сверхзвукового панельного флаттера при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов

В линейной постановке исследуется динамическое поведение возмущённого движения тонкой упругой прямоугольной пластинки вблизи границ области устойчивости при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край в предположении, что вдоль свободной кромки и шарнирно опёртой противоположной ей кромки, приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота соответственно. Найдены критические скорости дивергенции и флаттера. Установлено, что инерционный момент поворота приводит к стабилизации возмущённого движения системы.

Բելուբեկյան Մ.Վ. , Մարտիրոսյան Ս.Ռ.
Գերձայնային պանելային ֆլատերի խնդրի մասին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածի և մոմենտի առկայության դեպքում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տված դիվերգենցիայի և ֆլատերի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են դիվերգենցիայի և ֆլատերի կրիտիկական արագության արժեքները:

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the loss stability phenomenon of the overrunning of the gas flow at is free edge under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments at the free and hinged edges respectively. For some special casesof a problem of a panel flutter critical velocities of divergence and flutter are found. It is established that inertial moment of rotation leads to the stabilization of perturbed motion of the system.

Introduction. In this paper we study some special cases of the problem of supersonic panel flutter, which the General case for moderate values of the parameters was investigated by an analytically method in [1]. Each of them is of independent interest for the study in terms of identifying new mechanical effects associated with the loss of stability of the system “plate–flow”.

The theoretical and numerical methods to study of the divergence and flutter instability of plates and shells devoted a huge amount of works, a General review of which is contained in the monography by Algazin S.D. and Kijko I.A. [2(pp. 210-245)] and the article by Novichkov J.N. [3].

The results can be used in the processing of experimental studies of divergence and panel flutter of the modern supersonic aircraft.

1. Statement of the problem. Considered a thin elastic rectangular plate, in a Cartesian coordinate system $Oxyz$ occupies the area: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. We choose the Cartesian coordinate system $Oxyz$ so that the Ox and Oy axes lie in the plane of the undisturbed plate, and the Oz axis is perpendicular to the plate and directed to the side of supersonic gas flow streamlining it from one side in the direction of the Ox axis with an undisturbed velocity V. We assume a plane, potential flow. And, also, we assume that the plate is not exposed to the tensil forces in the middle surface. Let the $x = 0$ edge of the plate is free and edges: $x = a$, $y = 0$, $y = b$ are hinged. We assume that the concentrated inertial masses m_c and rotation moments I_c are applied to the $x = 0$ free edge and to the $x = a$ hinged edge respectively [1, 4(p.27, 101), 5].

Under the influence of certain factors, the undisturbed equilibrium state of our plate can be broken down, and it will begin to perform disturbed motion with a deflection $w = (x, y, t)$. The deflection $w = (x, y, t)$ will cause an excess pressure Δp on to the upper streamlined surface of the plate from the side of streamlining gas flow, which is taken into account by the approximate formula of the "piston theory" [6, 7]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \, \partial w / \partial x$, where a_0 is the sound velocity in the undisturbed gas medium, ρ_0 is the density of undisturbed gas flow. Let us assume that the deflections $w = (x, y, t)$ are small as compared with the thickness $2h$ of the plate.

Find out the conditions under which the possible loss of stability of the undisturbed state of equilibrium of the plate, when the bending of the plate due to the corresponding aerodynamic loads Δp and concentrated inertial masses m_c and rotation moments I_c are applied to the free $x = 0$ edge. Thus, in accordance with the new approach, the influence of the distributed mass of the plate and the resistance forces can be neglected.

Then, under assumption of the validity of the Kirchhoff hypotheses and "piston theory", the small bending vibrations of the points of the plate middle surface about the undisturbed equilibrium state is described by the differential equation [1, 4(245)]

$$D\Delta^2 w + a_0 \rho_0 V \, \partial w / \partial x = 0, \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw is a Laplace's operator; D is a cylindrical rigidity.

In the accepted assumptions concerning a way of fixing of edges of the plate the boundary conditions can be written in the form [1, 4(101), 5]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D^{-1} m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \; x = 0; \tag{1.2}$$

$$w = 0, \; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_c D^{-1} \frac{\partial^3 w}{\partial x \, \partial t^2}, \; x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \text{ and } y = b; \tag{1.4}$$

The problem of the stability of an elastic thin rectangular plate streamlined by a supersonic gas flow, which is described by correlations (1.1)-(1.4), lies in finding the minimal value velocity V_{cr} (i.e. the critical velocity) such that, in the case $V < V_{cr}$, disturbed motion will be stable and, for $V \ge V_{cr}$ – unstable. In other words, is required to determine the values of velocity at which the equation (1.1) with the corresponding boundary conditions (1.2)-(1.4) has the non-trivial solutions.

We see that the analysis of the stability of the plane form of the plate in the potential supersonic flow reduces to a study of the differential equation (1.1) with the corresponding boundary conditions (1.2)-(1.4) for the deflections $w = (x, y, t)$.

2. **General solution of the problem**. For finding the general solution of the problem of stability of the plate (1.1)-(1.4), we will reduce it to a problem on eigenvalues for the ordinary differential equation.

We try to find the General solution to the boundary-value problem defined by equation (1.1) and by the boundary (1.2) - (1.4) in the form of harmonic vibrations [9]

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n px + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

then, in accordance with the expression (2.1), the considered problem of the panel flutter (1.1)–(1.4) is reduced to the following boundary value problem on eigenvalues λ of nonselfadjoint operator for the ordinary differential equations on the forms of vibrations $f_n(x) = C_n \exp(\mu_n px)$, where C_n are the arbitraries constants, which are not equal to zero simultaneously; n is the half–waves number along of side b; p – are the roots of the characteristic equation

$$(p^2 - 1)^2 + \alpha_n^3 p = 0\,,\ \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}\,,\ \alpha_n^3 > 0\,, \tag{2.2}$$

corresponding to differential equation (1.1). The characteristic equation (2.2) has two negative root $p_1 < 0$, $p_2 < 0$ and a pair of complex-conjugate roots $p_{3,4} = \alpha \pm i\beta$ with a positive real part $\alpha > 0$. The roots of the equation (2.2) are determined by the following expressions [10]:

$$p_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1)}\,, \tag{2.3}$$

$$p_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1)}\,, \tag{2.4}$$

$$q > 1\,. \tag{2.5}$$

Here q is the only real root of the cubic equation

$$8 \cdot (1+q)^2 (q-1) = \alpha_n^6,\ \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3},\ \mu_n = \pi n b^{-1}. \tag{2.6}$$

From the relations (2.6) it is easy to obtain the expressions of the dependence of the velocity V of gas flow on the system parameters

$$V = 2\sqrt{2(q-1)} \cdot (q+1) \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \tag{2.7}$$

As well as,

$$V = 2\sqrt{2(q-1)} \cdot (q+1) \cdot \pi^3 n^3 D (a_0 \rho_0 b^3)^{-1}. \tag{2.8}$$

Here γ is a relation of the width a of the plate to its length b

$$\gamma = a b^{-1}\,. \tag{2.9}$$

Then, the General solution (2.1) of the equation (1.1), due to ratios (2.3) and (2.4), can be written as

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n p_k x+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,. \tag{2.10}$$

Substituting the General solution (2.10) the differential equation (1.1) in the boundary conditions (1.2)-(1.4), we obtain a homogeneous system of algebraic equations of the fourth order relatively the arbitraries constants: C_{nk}. Equate to zero the determinant of this system of equations - characteristic determinant leads to the dispersion equation [1]

$$\chi_n\delta_n A_0\lambda^4+(\chi_n A_1+\delta_n A_2)\lambda^2+A_3=0\,. \tag{2.11}$$

And introducing the notation

$$k_n=\chi_n\cdot\delta_n^{-1}\,,\ \chi_n>0\,,\ \delta_n>0\,, \tag{2.12}$$

we can rewrite characteristic equation (2.11) in the form

$$A_0\lambda^4+(k_n A_1+A_2)\chi_n^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_3=0\,,\ \gamma\in(0,\infty)\,,\chi_n>0\,,\ \delta_n>0\,. \tag{2.13}$$

Here

$$\delta_n=m_c D^{-1}b^3(\pi n)^{-3}\ \text{ and }\ \chi_n=I_c D^{-1}b(\pi n)^{-1} \tag{2.14}$$

are the reduced values of the concentrated masses m_c and inertial moments of rotation I_c, applied to the free $x=0$ and hinged $x=a$ edges of the plate, respectively;

$$\begin{aligned}A_0=A_0(q,n,\gamma)&==2\sqrt{2(q+1)}\cdot\{(1-\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\cdot B_1B_2+\\&+\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\cdot\\&\Big[(\sqrt{2(q-1)}-\sqrt{2(q+1)})\cdot B_1\cdot\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)-\\&-(\sqrt{2(q-1)}+\sqrt{2(q+1)})\cdot B_2\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)\Big]\Big\}\,;\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}A_1=A_1(q,n,\gamma)&=2\Big\{\Big[2(q+1)(q-\sqrt{(q^2-1)}-\nu)-(1-\nu)^2\Big]B_1B_2+\\&+\Big[2(q+1)(q+\sqrt{(q^2-1)}-\nu)-(1-\nu)^2\Big]B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+\\&+2\Big[(q+1)\sqrt{(q^2-1)}\cdot(\sqrt{2(q-1)}+\sqrt{2(q+1)})sh(\pi n\gamma B_1)+\\&+(4q^2+2q-1+2q\nu+\nu^2)B_1\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big]B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot\\&\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)+\\&+\Big[((2q^2+3q-1)-2(3q^2+3q-2)\nu+(3q+1)\nu^2)sh(\pi n\gamma B_1)+\\&+2(q+1)\cdot\sqrt{(q^2-1)}\cdot(\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{2(q-1)})B_1\,ch(\pi n\gamma B_1)\Big]\cdot\\&\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\Big\}\,;\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}A_2=A_2(q,n,\gamma)&=4(q+1)\cdot\Big[(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\cdot B_1B_2-\\&-2B_1B_2\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)+\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$+3(q-1)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\big];$$

$$A_3=A_3(q,n,\gamma,\nu)=2\sqrt{2(q+1)}\left\{\left[2(q+1)(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2\right]B_1B_2-\right. \tag{2.18}$$
$$-\left[2(q+1)(q+\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2\right]\cdot B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$
$$+\{[(4q^2+2q-1)\sqrt{2(q-1)}-(2q^2-4q+1)\sqrt{2(q+1)}-$$
$$-2((2q-1)\sqrt{2(q+1)}-q\sqrt{2(q-1)})\nu+$$
$$+(\sqrt{2(q+1)}+\sqrt{2(q-1)})\nu^2\big]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$
$$+4(q+1)\sqrt{q^2-1}\cdot B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\}B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$
$$+\big[-B_1\cdot((4q^2+2q-1)\sqrt{2(q-1)}+(2q^2-4q+1)\sqrt{2(q+1)}+$$
$$+2((2q-1)\sqrt{2(q+1)}+q\sqrt{2(q-1)})\nu-(\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{2(q-1)})\nu^2\big)\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)-$$
$$\left.-6(q^2-1)\sqrt{(q^2-1)}\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\big]\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\right\};$$

$$B_1(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1)},\ B_2(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)}, \tag{2.19}$$

It follows that [1]

$$A_0=A_0(q,n,\gamma)>0,\ A_2=A_2(q,n,\gamma)>0, \tag{2.20}$$

for all numbers $q>1$, $n\geq 1$, $\gamma>0$ of parameters.

The system “plate–flow”, described by the relations (1.1) – (1.4) is asymptotically stable if all eigenvalues λ of the boundary value problem for ordinary differential equation have negative real parts, and unstable if at least one eigenvalue λ is on the right side of the complex plane.

The critical velocity V_{cr} that characterizes the transition from stability to instability of the disturbed motion of the system “plate-flow” is determined by the condition of equality to zero of the real part of one or more of the eigenvalues.

This article discusses four particular cases of the original problem of stability of (1.1)–(1.4) studied in [1] at moderate values of its “essential” parameters.

In [1] conducted a decomposition of the space of the “essential” parameters $M=\{\gamma,\ k_n,\ \nu,\ q,\ n\}$ of the problem of stability (1.1)–(1.4) on the stability region M_0 and the regions of instability M_1, M_2 and M_3 in which, respectively, either all roots of the characteristic equation are in the left part of the complex plane, or among the roots there is one positive root or has two positive roots, or a pair of complex–conjugate roots with positive real part. The behavior of the system “plate–flow” near the borders of the region of stability M_0 is investigated. The critical velocity of divergence of the panel and the critical velocity of localized divergence in the vicinity of the free edge of the plate, as well as, the critical velocity of panel flutter are found. It is shown that, depending on the relation between of the system parameters, the critical flutter velocity can be both less and greater than the critical velocity of divergence.

3.1. Considered the case where on the free edge $x = 0$ of the plate are applied the concentrated inertial masses m_c and inertial rotation moments I_c on the hinged edge $x = a$ are absent ($k_n = 0$).

In this case the characteristic equation (2.11) can be written in the form

$$\delta_n A_2 \lambda^2 + A_3 = 0 . \tag{3.1}$$

Here A_2 and A_3 are determined by the expressions (2.17) and (2.18) respectively.

The roots of the equation (3.1) is equal to

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-A_3 \cdot \left(\delta_n \cdot A_2\right)^{-1}} . \tag{3.2}$$

At $\delta_n > 0$ because of the conditions (2.20), the region of stability $M_0 \in M$ of the disturbed motion of the system "plate–flow" will be determined by the inequality

$$A_3 > 0 . \tag{3.3}$$

It is obviously, that under the condition (3.3) the equation (3.1) has a pair $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ of purely imaginary roots. This means, that the rectangular plate performs harmonic oscillations about the undisturbed equilibrium state.

The boundary of the region of stability $M_0 \in M$ of the disturbed motion of the system "plate–flow" in the space of its parameters M is the hypersurface

$$A_3 = 0 , \tag{3.4}$$

where the characteristic equation (3.1) has a zero root $\lambda_0 = 0$ of multiplicity 2. This means, that the system perturbed motion loses static stability, i.e. there is a divergence of panel.

From the condition (2.20) and the method of partitioning the parameters space M into the regions of the stability and the instability of the disturbed motion of the system, it follows that this particular case corresponds to the only region of instability M_1 defined by the correlation

$$A_3 < 0 . \tag{3.5}$$

Here the characteristic equation (3.1) has two real roots of different signs: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. This means that one of the two own motions of the plate is increasing exponentially (the deflections will increase over time according to the exponential law).

Substituting the first root $q_{cr.div} = q_{cr.div}(n, \gamma, \nu)$ of the equation (3.4) in the formula (2.7), we obtain the $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n, \gamma, \nu)$ critical divergence velocity, which delimits the stability region M_0 and the static instability (divergence) region M_1 of the disturbed motion of the system "plate-flow".

At the $V \geq V_{cr.div}$ velocities there is a "soft" transition trough point $\lambda_0 = 0$ in the right part of the complex plane of the eigenvalues λ of problem (1.1)-(1.4), causing the smooth changing the nature of disturbed motion of the system from harmonic vibrations to a monotonically increasing aperiodic motion. This changes the dynamic behavior of plates: in the plate, performing harmonic oscillations, there is stresses, leading to changes in the surface shape of the plate. The surface of the plate "buckles" with limited velocity of "buckling". As monotonous "buckling" of the plate has no oscillatory nature, it can be considered as quasi-static process, i.e. there is a divergence.

Numerical calculations have been performed for different values of the parameters of the problem, showed the following. And $n=1$ with fixed values of remaining parameters the critical velocity of divergence reaches a minimum value.

For all the value $\gamma \in (0,2)$ we can say, that when the velocity $V \geq V_{cr.div.}$ is the phenomenon of divergence observed. The value reduced critical velocity of divergence $V_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ depends on Poisson's ratio ν and the parameter $\gamma = ab^{-1}$ is the relationship of the sides a and b of the rectangular plate: it is less in plates from materials with the largeness of the Poisson's ratio ν, and with increase in parameter γ the reduced divergence critical velocity grows (see table 1).

Table 1.

γ \ ν	0.125	0.25	0.33	0.375	0.5
0.01	$0.345 \cdot 10^{-2}$	$0.297 \cdot 10^{-2}$	$0.268 \cdot 10^{-2}$	$0.243 \cdot 10^{-2}$	$0.197 \cdot 10^{-2}$
0.1	0.352	0.306	0.273	0.240	0.197
0.2	1.511	1.290	1.163	1.063	0.882
0.3	3.650	3.324	2.912	2.721	2.619
0.4	7.789	6.758	5.985	5.507	4.478
0.5	14.945	13.503	11.078	10.778	9.056
0.6	26.284	21.790	19.146	18.608	13.889
0.7	45.587	37.826	31.267	29.552	25.011
0.9	473.50	96.90	78.72	70.05	53.15
1.0	520.29	157.17	114.21	101.74	72.91
1.1	562.28	243.30	168.02	143.73	100.70
1.2	608.75	323.02	225.85	194.62	135.24
1.3	699.07	401.61	287.15	252.49	172.13
1.4	811.70	495.72	364.73	315.35	214.99
1.5	975.85	595.22	448.61	380.36	273.35
1.6	1166.20	704.47	544.44	470.73	326.25
1.8	1695.90	992.18	762.25	695.12	440.54
2.0	2598.09	1382.02	1045.62	953.53	604.31

It is easy to show that equation (3.4) in the limiting case, where $\gamma \to 0$ $(b \to \infty)$ when $q > 1$ and all ν identically equal to zero. Hence, in this limiting case the undisturbed form of equilibrium of the plate is statically unstable. And when values of $\gamma \geq 2$ equation (3.4) can be reduced to the simplified form

$$2(q+1)\cdot(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2=0, \quad \gamma \in [2,\infty). \tag{3.6}$$

Equation (3.6) exactly coincides with the dispersion equation obtained in the work [10] the study of phenomenon localized divergence arising in the vicinity of the free edge of the elastic semi-infinite plate-strip, streamlined by a supersonic gas flow in the direction from the free edge to the supported edge along the semi-infinite hinged edges. The reduced critical velocity of localized divergence $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ depends only on the Poisson's ratio ν : it is less in plates from materials with the largeness of the Poisson's ratio.

In table 2 for several values of Poisson's ratio values are given reduced critical velocities of localized divergence $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ of rectangular plate observed in the values that accuracy coincide with the values obtained in the work [10].

Thus for all the value $\gamma \in [2,\infty)$, we can say that when the velocity $V \geq V_{\mathrm{loc}.div}(\nu)$ is the phenomenon of localized divergence in the vicinity of the free edge $x=0$ of our plate observed, which is in good agreement with the results of numerical analysis (table 2). At the values of velocities $V \geq V_{\mathrm{loc}.div}(\nu)$ the vicinity of the free edge $x=0$ of the plate is «buckling». As in this case a parameter $q = q_{loc.div}$ is determined from the simplified equation (3.6), we can say, that for values $\gamma \in [2,\infty)$ found approximate expression (3.6), making it easy to find the reduced critical velocities $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ of the localized divergence, substituting these values $q_{loc.div.}$ in expression (2.8).

Table 2.

ν	0.125	0.25	0.33	0.375	0.5
$V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$	324.761	173.371	130.702	120.741	77.398

From expression (3.2) and conditions (3.4) follows, that static loss of stability in the form of divergence for values of and localized divergence takes place only, and dynamic loss of stability is absent.

In a conclusion we will mark that for values of $\gamma \in (0,2)$ at the $V \geq V_{cr.div}$ of gas flow velocities (Table 1) there is the divergence panel, resulting in a "buckling" of the plate. For values of $\gamma \in [2,\infty)$ at the $V \geq V_{\mathrm{loc}.div}(\nu)$ of gas flow velocities (Table 2) there is the divergence phenomenon localized in the vicinity of the free edge of the rectangular plate, in which the "buckling" just strip along the vicinity of the free edge of the plate. And the presence of the concentrated masses m_c on a free edge $x=0$ of the plate does not result in dynamic instability, i.e. the panel flutter is absent.

3.2. Considered the case where on the hinged edge $x=a$ of the plate are applied the inertial rotation moments I_c and concentrated inertial masses m_c on the free edge $x=0$ are absent ($k_n = \infty$).

In this case the characteristic equation (2.11) can be written in the form

$$\chi_n A_1 \lambda^2 + A_3 = 0 \tag{3.7}$$

Here A_1 and A_3 are determined by the expressions (2.16) and (2.18) respectively.

The roots of the equation (3.7) is equal to

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-A_3 \cdot (\chi_n \cdot A_1)^{-1}} \,. \tag{3.8}$$

At $\chi_n > 0$ because of the conditions (2.20), the region of stability $M_0 \in M$ of the disturbed motion of the system "plate–flow" will be determined by the inequalities

$A_1 > 0$, $A_3 > 0$. (3.9)

It is obviously, that under the condition (3.9) the equation (3.7) has a pair $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ of purely imaginary roots. This means, that the rectangular plate performs harmonic oscillations about the undisturbed equilibrium state.

The boundaries of the region of stability $M_0 \in M$ are the hypersurfaces

$A_1 = 0$, (3.10)

$A_3 = 0$. (3.11)

On the hypersurface (3.10) the characteristic equation (3.7) has two roots equal to infinity, i.e. $\lambda_{1,2} = \pm\infty$. And on the hypersurface (3.11) the characteristic equation (3.7) has a zero root $\lambda_0 = 0$ of multiplicity 2.

In this case, the region of instability M_1 consists of two subregions M_{11} and M_{12} which are determined by the relations respectively

$A_1 > 0$, $A_3 < 0$; (3.12)

$A_1 < 0$, $A_3 > 0$. (3.13)

It is obviously, that in both subregions M_{11} and M_{12} the characteristic equation (3.7) has two real roots of the different signs, namely: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. This means that one of the two disturbed motions of the system "plate-flow" is increasing exponentially.

On the boundary of the stability region M_0

$A_1 > 0$, $A_3 = 0$, (3.14)

the disturbed motion of the system loses of static stability: there is a divergence of panel.

Substituting the first root $q_{cr.div} = q_{cr.div}(n, \gamma, \nu)$ of the equation (3.11) in the formula (2.7), we obtain the $V_{cr.div}$ critical divergence velocity, which delimits the stability region M_0 and the static instability (divergence) region M_{11} of the disturbed motion of a rectangular plate. At $V \geq V_{cr.div}$ velocities of gas flow the roots $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ of the characteristic equation (3.7) of a "soft" transition through the point $\lambda_0 = 0$, respectively, to the left and to right parts of the complex plane of the eigenvalues λ and remain so, at least, when values of the velocity of the gas flow V close to the critical value $V_{cr.div}$, purely real: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. This changes the dynamic behavior of plates: in the plate, performing harmonic oscillations, there is stresses, leading to changes in the surface shape of the plate. The surface of the plate "buckles" with limited velocity of "buckling". As monotonous "buckling" of the plate has no oscillatory nature, it can be considered as quasi-static process, i.e. there is a divergence.

Numerical studies have shown that the transition across the border (3.14) from the region M_0 in a subregion M_{11} is possible only if values $\gamma \in (0, 0.83)$ of parameter. Because of identity of equations (3.4) and (3.14), $V_{cr\,div}$ equal to the corresponding critical divergence velocities, are shown in table 1. Thus the reduced critical divergence velocity $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ depends on the Poisson's ratio ν and parameter γ: it is less in plates from materials with the largeness of the Poisson's ratio ν and with increase in parameter γ the reduce divergence critical velocity grows (see table 1).

On the boundary of the stability region M_0

$$A_1 = 0, \ A_3 > 0 \tag{3.15}$$

the disturbed motion of the system loses of the dynamic stability: there is a “dynamic buckling”, which can be mistaken for “ panel flutter” [12 (c.719), 13]. The “flutter”critical velocities $V_{cr.fl.}$ delimited the region M_0 of stability and the subregion M_{12} of the instability of system disturbed motion are determined by substituting the first root $q_{cr.fl} = q_{cr.fl}(n,\gamma,\nu)$ of equation (3.10) in the expression (2.7). When the velocity of gas flow $V \geq V_{cr.fl.}$ there is a transition across the boundary (3.15), which takes place only for $\gamma \in (0.83, 1.5]$ values: the eigenvalues $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ transition through the infinitely distant point $\lambda = \infty$, respectively, on the left and on the right parts of the complex plane and remain so, at least, when values of the velocity of the gas flow V close to the critical value $V_{cr.fl.}$, real: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. There is an abrupt (“instant”) change in the character of the system disturbed motion from sustainable to unsustainable [5]. In the plate arise stresses, leading to an abrupt (“instant”) to change its form: so-called “dynamic buckling”, in which the plate “bulge” infinite speed “buckling” [12(p. 719]. This process is not oscillatory as well as divergence. However, despite the discrepancies existing in the scientific literature [4 (p. 63), 5, 12(p. 719), 13], it is conditionally possible to consider as “quasi-oscillatory” process, i.e. as the panel flutter, usually leading to the destruction of the plate [13]. Table 3 presents the several values of the reduced flutter critical velocity $V_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ are found by substitution of the first root $q_{fl} = q_{cr.fl}(n,\gamma,\nu)$ of the equation (3.10) for $n = 1$ and some $\gamma \in (0.83, 1.5]$ and ν in formula (2.7).

Table 3.

γ \ ν	0.125	0.25	0.33	0.375	0.5
0.9	109.68	85.44	73.56	66.57	53.15
1.0	191.38	126.24	105.64	96.09	72.91
1.1	492.51	185.72	146.83	131.12	97.05
1.2	591.77	274.98	206.46	178.48	126.00
1.3	673.97	378.02	257.51	242.36	166.22
1.4	802.32	483.93	352.53	302.71	207.61
1.5	936.02	595.22	448.61	380.12	273.35

From the data of table 3 it follows that the flutter critical velocity is less than in plates made of materials with a large Poisson's ratio ν, and with increasing γ it grows.

On the boundary of the instability region M_{11}

$$A_1 = 0, \ A_3 < 0 \tag{3.16}$$

at the velocities $V \ge \tilde{V}_{cr.fl.}$ of gas flow for all $\gamma \in (0, 0.83)$ the eigenvalues $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ moving through an infinitely remote points $\lambda_{1,2} = \pm\infty$ on the imaginary axis of the complex plane and remain so, at least, when values of the velocity V of the gas flow close to the critical value $\tilde{V}_{cr.fl.}$ of the pure imaginary: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. During this transition if the plate is not destroyed, the perturbed motion of the system "plate–flow" becomes stable [5, 13]. Table 4 presents the several values of the reduced flutter critical velocity $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ for some values $\gamma \in (0, 0.83)$ and Poisson's ratio ν.

Numerical results showed the following. The flutter critical velocity $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ is less than in plates made of materials with a large Poisson's ratio ν, and with increasing γ it grows for all values $\gamma \in (0.01, 0.83)$, and for all $\gamma \in (0, 0.01]$ the flutter critical velocity $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ does not depend on the parameters γ, ν and it equal to $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) = 6.3$ (tabl. 4).

Table 4.

ν / γ	0.125	0.25	0.33	0.375	0.5
0.01	6.33	6.33	6.33	6.33	6.33
0.1	6.72	6.69	6.63	6.58	6.56
0.2	8.16	7.62	7.49	7.25	6.87
0.3	10.76	9.94	9.51	9.20	8.40
0.4	15.14	13.62	12.66	11.97	10.59
0.5	22.04	19.35	17.44	16.61	13.78
0.6	32.02	25.31	24.82	22.82	18.61
0.7	46.68	38.82	33.67	31.52	27.15

Numerical results showed the following. The flutter critical velocity $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ is less than in plates made of materials with a large Poisson's ratio ν, and with increasing γ it grows for all values $\gamma \in (0.01, 0.83)$, and for all $\gamma \in (0, 0.01]$ the flutter critical velocity $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ does not depend on the parameters γ, ν and it equal to $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) = 6.3\,3$ (tabl. 4). Note that in monography [4] it is shown that in the problem of panel flutter of a console, the divergence critical velocity equal to 6.33 and the flutter critical velocity – 124.4. Comparison of these results with the results of this work, it follows that the flutter critical velocity $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ equal to the divergence critical velocity and about twenty times less than the flutter critical velocity which are found in the work [4].

It is easy to show that the limit of the ratio A_3 to A_1 is equal to 1 for all values $\gamma \in (1.5, \infty]$: $\lim A_3 \cdot A_1^{-1} = 1$. And this in accordance with the expression (3.8) means that the characteristic performances λ of the system "plate–flow" for all $\gamma \in (1.5, \infty]$ are purely imaginaries numbers $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ i.e. the system perturbed motion is stable. The plate makes harmonic oscillations about the unperturbed equilibrium state. Thus, applied to the edge $x = a$ the inertial rotation moments lead to stabilization of the system disturbed motion "plate–flow" for all $\gamma \in (1.5, \infty]$.

3.3. Consider the case in which $a \gg b$.

It is easy to show that in this case the characteristic equation (2.11) is transformed to the following

$$\tilde{\chi}_n \tilde{\tilde{\delta}}_n a_{01}\lambda^4 + (a_{11}\tilde{\chi}_n + a_{21}\tilde{\tilde{\delta}}_n)\lambda^2 + a_{31} = 0. \tag{3.17}$$

Here

$$a_{01} = \sqrt{2(q+1)}, \quad a_{11} = 2(q+1)\cdot(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2, \quad a_{21} = 2(q+1), \tag{3.18}$$

$$a_{31} = \sqrt{2(q+1)}\cdot[2(q+1)\cdot(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2]; \tag{3.19}$$

$$\tilde{\chi}_n = I_c\, b\cdot(\pi n D)^{-1}, \ \tilde{\tilde{\delta}}_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \ \tilde{\chi}_n > 0, \ \tilde{\tilde{\delta}}_n > 0. \tag{3.20}$$

For all $q > 1$ it follows that

$$a_{11}\tilde{\chi}_n + a_{21}\tilde{\tilde{\delta}}_n > 0, \ \mathit{\Delta} = (a_{11}\tilde{\chi}_n + a_{21}\tilde{\tilde{\delta}}_n)^2 - 4\tilde{\chi}_n\tilde{\tilde{\delta}}_n a_{01}a_{31} = (\tilde{\chi}_n a_{11} - \tilde{\tilde{\delta}}_n a_{12})^2 \geq 0. \tag{3.21}$$

Here $\mathit{\Delta}$ is the discriminant of the biquadratic equation (3.17).

In accordance with the conditions (3.21), the stability region M_0 defined by the correlation

$$a_{31} > 0. \tag{3.22}$$

Under this condition equation (3.17) has two pairs of purely imaginary roots $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: the rectangular plate performs harmonic oscillations about the unperturbed equilibrium state. And the region of instability M_1 by the correlation $a_{31} < 0$ is determined. It follows, that in the region M_1 of the characteristic equation (3.17) has a pair of purely imaginary roots $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ and two real roots $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 > 0$. This means that one of the two proper motions of the plate is dampened, and the other the movement of plates is unlimited deviation exponentially from the equilibrium state.

The boundary of the stability region M_0 is a hypersurface

$$a_{31} = 0. \tag{3.23}$$

Or, in accordance with the expression (3.19), is

$$2(q+1)\cdot(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2 = 0. \tag{3.24}$$

where the characteristic equation (3.17) has a zero root $\lambda_0 = 0$ of multiplicity 2 and a pair of pure imaginary roots are equal to $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2(q+1)\cdot\tilde{\chi}_n^{-1}}$ according to the expressions (3.18).

The condition (3.24) determines the loss of stability of the disturbed motion of the system "plate–flow" in the form of a localized divergence in the vicinity of the free edge $x = 0$ of the plate [10].

The critical velocities $V_{loc.div}$ of the localized divergence that delimites the stability region M_0 and the region of instability M_1 of the system perturbed motion are determined by substituting the first root $q_{loc.div} = q_{loc.div}(\nu)$ of equation (3.24) in expression (2.8). It follows that the reduce critical velocity $V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ of the localized divergence depends on the parameter n and Poisson's ratio ν: when a fixed value of parameter n the critical velocity is less than in plates made of materials with a large Poisson's ratio, and when the fixed of parameter ν it reaches the lowest value when $n = 1$ (tabl.2).

Thus, in the case in which $a \gg b$ the system "plate-flow" loses stability in a localized divergence in the vicinity of the free edge $x = 0$ of the plate at all the velocities $V \geq V_{loc.div}$ of the gas flow. The critical velocity $V_{loc.div}$ of localized divergence does not depend on the coefficients $\tilde{\chi}_n$ and $\tilde{\tilde{\delta}}_n$. The presence of the inertial moment I_c ($\tilde{\chi}_n \neq 0$) of rotation on the hinged edge $x = a$ leads to the stabilization when the inertial mass m_c ($\tilde{\tilde{\delta}}_n = 0$) on the free edge $x = 0$ is absent.

2.4. Let us consider the case corresponding to the condition $a \ll b$.

Numerical studies of the characteristic equation (2.11) has shown that its solution corresponding to the occasion, meet the condition

$$q \gg 1. \tag{3.25}$$

Then, introducing the notation

$$r = \sqrt{2q} \cdot \pi n \gamma, \tag{3.26}$$

the characteristic equation (2.11) and expression (2.7) can be written, respectively, as

$$a_{02}\tilde{\tilde{\chi}}\tilde{\tilde{\delta}}\lambda^4 + (a_{12}\tilde{\tilde{\chi}} + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}})\lambda^2 + a_{32} = 0, \tag{3.27}$$

$$V = r^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \tag{3.28}$$

Here

$$a_{02} = \mathrm{sh}(r) - 2\mathrm{sh}(r/2) \cdot \cos(\sqrt{3}r/2); \tag{3.29}$$

$$a_{12} = [1/2 \cdot \exp(-r) + \exp(r/2)\cos(\sqrt{3}r/2)] \cdot r^3; \tag{3.30}$$

$$a_{22} = [\mathrm{ch}(r) - \exp(r/2) \cdot \sin(\pi/6 - \sqrt{3}r/2) - \exp(-r/2) \cdot \sin(\pi/6 + \sqrt{3}r/2)] \cdot r \tag{3.31}$$

$$a_{32} = [-1/2 \cdot \exp(-r) + \exp(r/2) \cdot \sin(\pi/6 - \sqrt{3}r/2)] \cdot r^4; \tag{3.32}$$

$$\gamma = ab^{-1}; \ \tilde{\tilde{\chi}} = I_c a D^{-1}; \ \tilde{\tilde{\delta}} = m_c a^3 D^{-1}. \tag{3.33}$$

From expressions (3.29) and (3.31) it is obvious that

$$a_{02} > 0, \ a_{22} > 0 \text{ at all } r > 0. \tag{3.34}$$

It can be shown that in the absence of flow plates $V = 0$ or $r = 0$ the characteristic equation (3.27) describes by the correlation

$$\tilde{\tilde{\chi}} \cdot \tilde{\tilde{\delta}} \cdot \lambda^4 + 3 \cdot (\tilde{\tilde{\chi}} + \tilde{\tilde{\delta}}) \cdot \lambda^2 = 0. \tag{3.35}$$

At all values of $\tilde{\tilde{\chi}} \in (0, \infty)$, $\tilde{\tilde{\delta}} \in (0, \infty)$ the equation (3.35) has a pair of purely imaginary roots and the zero root $\lambda_0 = 0$ of multiplicity 2. This means that when the gas flow velocities $V \geq V^{(1)}_{cr.div.} = 0$ then the perturbed motion of the system loses stability in the form of divergence: the plate "buckles".

Note that the correlations (3.27), (3.35) and (3.28) are identical with the corresponding equations describing the characteristic equation and the formula for calculating the gas flow velocity to the problem of stability of a streamlined a supersonic flow of gas, an elongated plate $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y < \infty$ with a free edge $x = 0$ under the same assumptions.

Therefore, the behavior of the disturbed motion of the system "rectangular plate – flow" in this case is the same as in the case of a system "elongated plate – flow".

In accordance with the first of the inequalities (3.34), the stability region M_0 defined by the correlations

$$a_{12}\tilde{\tilde{\chi}} + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}} > 0\,,\quad a_{32} > 0\,,\quad \Delta > 0\,. \tag{3.36}$$

Here

$$\Delta = (a_{12}\tilde{\tilde{\chi}} + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}})^2 - 4\tilde{\tilde{\chi}}\tilde{\tilde{\delta}}a_{02}a_{32} \tag{3.37}$$

is the discriminant of the biquadratic equation (3.27).

And the instability regions M_1, M_2, M_3 will be determined, respectively, by the correlations: $a_{32} < 0$, $\Delta > 0$; $a_{12}\tilde{\chi} + a_{22}\tilde{\delta} < 0$, $a_{32} > 0$, $\Delta > 0$; $a_{32} > 0$, $\Delta < 0$.

The boundaries of the stability region M_0 of the condition $a_{12}\tilde{\tilde{\chi}}_n + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}}_n > 0$ are the hypersurfaces

$$a_{32} = 0\,, \tag{3.38}$$

$$\Delta = 0\,. \tag{3.39}$$

On the hypersurfacies (3.38) and (3.39) the characteristic equation (3.27) has a zero root $\lambda_0 = 0$ of multiplicity 2, and a pair of the purely imaginary roots $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ respectively.

On the boundary of the stability region M_0 of the

$$a_{12}\tilde{\tilde{\chi}} + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}} > 0\,,\quad \Delta > 0\,,\quad a_{32} = 0\,, \tag{3.40}$$

the perturbed motion of the system loses the static stability: there is a divergence of the panel. The critical divergence velocities $V_{cr.div}$ are determined by substituting the roots $r_{cr.div}$ of equation (3.38) into the expression (3.28).

On the boundary of the stability region M_0 of the

$$a_{12}\tilde{\tilde{\chi}} + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}} > 0\,,\quad a_{32} > 0\,,\quad \Delta = 0\,, \tag{3.41}$$

and on the boundaryof the static instability region M_2 of the

$$a_{12}\tilde{\tilde{\chi}} + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}} < 0\,,\quad a_{32} > 0\,,\quad \Delta = 0\,, \tag{3.42}$$

the system perturbed motion loses its dynamic stability: there is a panel flutter. The critical flutter velocities $V_{cr.fl}$ and $\tilde{V}_{cr.fl}$, respectively, delimited of the regions M_0, M_3 and of the regions M_2, M_3 are determined by substituting the roots of equation (3.39) into the expression (3.28). According to the correlations (3.28) and (3.37) the reduced critical flutter velocities $V_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ and $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ depend on the parameter $\tilde{\tilde{k}} = \tilde{\tilde{\chi}} \cdot \tilde{\tilde{\delta}}^{-1}$.

The numerical investigations showed the following.

For all $\tilde{\tilde{k}} \in [0,\infty]$ at the velocities $V \geq V_{cr.div}^{(1)} = 0$ of the gas flow is a loss of static stability of the system disturbed motion, i.e. divergence: in the plate undergoing harmonic oscillations, there is tension, leading to change its shape: the plate "bulge" with limited velocity "buckling". In accordance with these values $\tilde{\tilde{k}} \in [0, 0.06)$ is possible only the loss of stability of the disturbed motion of the system in the form of divergence. In this case, the transitions from the region of stability M_0 in the divergence instability region M_1 alternate: when the velocities $V \geq 76.22 \cdot D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$ of the gas flow the perturbed motion of the system, being statically unstable, becomes stable, and at the velocities $V \geq V_{cr.div}^{(2)} \approx 483.73 \cdot D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$ of the gas flow again loses static stability.

For values $\tilde{\tilde{k}} \in [0.06, 0.3)$ we have the loss of stability of both types: as the divergence of the panel, and panel flutter. Originally statically unstable perturbed motion of the system at velocities $V \geq 76.22 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$ of the gas flow becomes stable. But when the velocities $V \geq V_{cr.fl}$ we have the "soft" transition from the region M_0 of stability in the region M_3 of the dynamic instability: the harmonic vibrations of the plate gradually transformed into self-oscillations, i.e. the flutter oscillations.

Table 5 presents the values of the reduced critical flutter velocities $V_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ with an accuracy of the order of 10^{-3} for several values of the parameter $\tilde{\tilde{k}} \in [0.06, 0.3)$.

Table 5.

$\tilde{\tilde{k}}$	0.06	0.08	0.1	0.2	0.25
$V_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$	125	98.61	89.31	76.76	76.34

In this case, the reduced critical flutter velocity $V_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ decreases with the growth $\tilde{\tilde{k}} \in [0.06, 0.3)$ (table. 5).

At velocities $V \geq \tilde{V}_{cr.fl} > V_{cr.fl}$ of gas flow is a "soft" transition from the region of static instability M_2 to the region M_3 of the dynamic instability. We can say that the phenomenon of the buckled panel flutter is observed. There is as well as a "smooth" transition to the flutter oscillations in addition to the monotonous "buckling" of the plate that does not have an oscillatory character.

Table 6 presents the values of the reduced critical flutter velocities $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ with an accuracy of the order of 10^{-3} for some values of the parameter $\tilde{\tilde{k}} \in [0.3, \infty)$. As can be seen from table 6, the critical flutter velocity $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ grows with the parameter $\tilde{\tilde{k}} = \tilde{\tilde{\chi}} \cdot \tilde{\tilde{\delta}}^{-1}$.

It means that when the values of $\tilde{\tilde{k}} \in [0.3, \infty)$ the inertial moment of rotation I_c applied to the hinged edge $x = a$ of the plate leads to the stabilization.

However, the reduced critical flutter velocity $\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ is approximately equal to 6.33 when the value of parameter $\tilde{\tilde{k}} = \infty$ that by an order of magnitude less than the critical flutter velocity at $\tilde{\tilde{k}} \in [0.3, \infty)$ (tabl. 4, 6).

Table 6.

$\tilde{\tilde{k}}$	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0
$\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$	74.61	78.40	79.50	86.35	91.12
$\tilde{\tilde{k}}$	1.2	1.5	2	5	10
$\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$	96.07	100.54	105.15	122.76	132.65
$\tilde{\tilde{k}}$	20	50	100	1000	10000
$\tilde{V}_{cr.fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$	140.61	147.19	151.42	157.46	160.10

Of the identity of the dispersion equation (3.27) and the dispersion equation obtained in [8] in studying the problem of panel flutter of a plate elongated in the assumption that inertial mass and rotation moments applied simultaneously to the free edge $x = 0$ and to the opposite hinged edge $x = a$ do not exist, should identity in the behavior of the disturbed motion of the system “elongated plate plate–flow” these problems.

Thus, in the case when $a \ll b$ the behavior of the disturbed motion of the system “rectangular plate-flow”, similar to the behavior of the disturbed motion of the system “elongated plate-flow” ($0 \le x \le a, 0 \le y < \infty$). Namely, when the velocity of the gas flow is absent ($V = 0$), the system perturbed motion is statically unstable. In the flow ($V \ne 0$) the behavior of the system perturbed motion depends on the value of the ratio of relative values of concentrated inertial moments I_c and masses m_c are applied, respectively, to the hinged edge $x = a$ and free edge $x = 0$ of the plate.

Conclusion. Using an analytically method, investigated by special cases of the problem of panel flutter, where the General case is studied in [1]. On the partition of the space of the “essential” parameters of the system “plate–flow” in regions of the stability and instability is performed. The boundaries of the region of stability are investigated. The boundaries of the divergence of panel, localized divergence and panel flutter are determined. We found the “dangerous” of the boundaries of the stability region in the sense of terminology work N.N. Bautin [14]. You move through them arises the phenomenon of panel flutter, leading to a loss of strength and occurrence of fatigue cracks in the material of the plate. For different values of the problem parameters was found the critical velocity of divergence, localized divergence and flutter. In problems of panel flutter in a linear formulation, as a rule, the critical velocity of divergence less than the flutter critical velocity [2-4, 8, 9, 12].

As well as in [1], in this work, we obtained unexpected results. It turned out, that depending on the relation between the parameters of the problem the flutter critical velocity can be both less and greater than the divergence critical velocity. A number of new mechanical effects are revealed. In particular, shows the stabilizing role of the inertial moment of rotation, applied on the hinged edge of the plate. And also, from a comparison of the obtained results with the results of [8], it was found that the effect of the inertial moment of rotation on the behavior of the disturbed motion of the system "elongated plate–flow" does not depend on its place of application: for hinged edge, or free edge of the plate.
These results can be used for the preliminary quantitative analysis of the problem panel flutter in the nonlinear statement [4, 12, 15, 16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой панельный флаттер при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. №1. С.39-52. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. About problem of supersonic panel flutter in the presence of the concentrated inertial masses and the moments.// Izv. NAS of Armenia, Mekhanika, v. 69 (1), pp. 39-52.
2. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с. Algazin, S.D., Kijko, I.A. (2006). Flutter of Plates and Shells. Nauka. Moscow. 247p.
3. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел. М.: Наука, 1978. Т.11. С. 67-122. Novichkov J.N. Flatter of plates and covers.//Results of science and technology. Mechanics of deformable solid bodies. – M.: Science. 1978, v.11. pp. 67-122.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с. Bolotin , V.V. (1963). Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press. New Jork. 324 p.
5. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33-44. Rzhanitsyn A.R. A cantilever elastic beam loaded by a follower force. Izv. Acad. Nauk Arm. SSR, Mekhanika, 1985, 38, № 5, pp. 33-44.
6. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733–755. Il'yushin A.A.(1956). Law of Flat Sections at the Big Supersonic Velocity. PMM, v.20(6), pp. 733-755.
7. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. №12. P.1109–1118.
8. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.12-42. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge.// Izv. NAS of Armenia, Mekhanika, 2014. v.67, №2, pp.12-42.
9. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе.// Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. № 2. С. 211–222. Movchan A.A. (1956). About vibrations of a plate, moving in gas. Izv. Acad. Nauk USSR. PMM. V. 20. № 2, pp. 211-222.
10. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow. //Изв.НАН Армении. Механика. 2012. Т.65, №1. С.29–34. Izv. NAS of Armenia, Mechanics, v. 65, №1, pp. 29-34.

11. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Дивергентная неустойчивость прямоугольной пластинки при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край.// Труды VIII Международной научной конференции"Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Горис–Степанакерт (Армения), 2014, сентябрь 22-25, с.98–103. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. Divergence instability of a rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge. "The Problems of Dynamics of Interaction of Deformable Media". Proceedings of VIII International Conference. September 22-25Goris-Stepanakert (Armenia), 2014, pp. 98-103. (in Russian).
12. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с. Volmir A.S. (1972). Nonlinear dynamics of plates and shells. Nauka. Moscow. 432 p. (in Russian).
13. Лобас Я.Г., Ичанский В.Ю. Предельные циклы двойного маятника под воздействием следящей силы.// Прикладная механика. 2009. Т.45. №6. С.113-124. Lobas J.G., Ichanskii V.J. Limit cycles of a double pendulum under action of a following force. (2009). PM, v. 45(6), pp. 113-124.
14. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.176 с. Bautin N.N. (1984). Behavior of dynamic systems near area borders stability. Nauka. Moskow. 176 p.
15. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. Т.1. №1. С.92-98. Baghdasaryan G.Y. About stability of the flat covers which are flowed round by supersonic gas flow. Izv. AS of USSR. OTN. Mechanics and mechanical engineering (1963), v.1(1), pp. 92-98.
16. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 3. С.24-38 . Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O., Marzoca P. Influence of a supersonic gas flow on the nature of "amplitude-frequency" dependence of nonlinear oscillations of a flexible plate. //(2013) Izv.NAS of Armenia, Mekhanika, v.66 (3), pp.24-38.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения
Тел.: (+374 10) 521503, (+374 10) 580096. **E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения
Тел.: (+374 10) 524890. **E-mail:** mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 30.05.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №3, 2016 Механика

УДК 539.3

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА УПРУГО ЗАЩЕМЛЁННОЙ ПО КРАЮ ЧАСТИЧНО НАГРУЖЁННОЙ КРУГЛОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Ключевые слова: цилиндрическая ортотропия, круглая пластинка, упругое защемление, частичное нагружение, обжатие, разрыв первого рода.
Keywords: cylindrical orthotropy, round plate, elastically fastened, partial loading, reduction, first kind discontinuity.
Բանալի բառեր: գլանային օրթոտրոպ, կլոր սալ, առաձգական ամրակցում, սեղմում, առաջին սեռի խզում

Կիրակոսյան Ռ.Մ., Ստեփանյան Ս.Պ.

Եզրում առաձգական ամրակցված, մասնակիորեն բեռնավորված, կլոր, օրթոտրոպ սալի ոչ դասական եզրային խնդիրը

Լուծվում է եզրում առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծռման խնդիրը, ընդլայնական սահքի և սեղմման հաշվառմամբ, երբ սալի կենտրոնական մասում ազդում է հավասարաչափ բաշխված բեռ:

Սալի բեռնավորված մասի համար վերցվում է հայտնի լուծումը Համբարձումյան ([1], էջ.177,178), որը կպարունակի երկու ինտեգրման հաստատուն, եթե հաշվի առնենք, որ սալի կենտրոնում անկյունային կետ չկա: Բավարարելով եզրում առաձգական ամրակցման պայմանները, դեֆորմացվող սալի ողորկությունը և M_r ծռող մոմենտի անխզելիությունը սալի բեռնավորված և ոչ բեռնավորված եզրի վրա, ստացվում է ինտեգրման հինգ հաստատունների նկատմամբ հանրահաշվական հավասարումների համակարգ: Լուծելով այդ համակարգը, որոշվում են բոլոր անհայտ ֆունկցիաները:

Դիտարկվել է թվային օրինակ: Սալի ստացված անչափ հաշվարկային մեծությունների արդյունքում կատարվել է եզրակացություն: Մասնավորապես ցույց է տրվում, որ սեղմման հաշվառման դեպքում M_θ ծռող մոմենտը սալի բեռնավորված և ոչ բեռնավորված մասերի բաժանման սահմանի վրա ունի առաջին սեռի խզում:

Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P.

Non- classical boundary value problems of elastically fastened on the edge, partially loaded, round orthotropic plate

The problem of bending of orthotropic circular plate resiliently clamped along the contour is solved by taking into account the transverse shear and compression when a uniformly distributed load acts in the central part of the plate..For the loaded part of the plate the well-known solution of Hambardzumyan ([1], str.177,178) is taken, which, by taking into account the absence of corner point in the plate centre, contains two constants of integration. To satisfy the conditions of the boundary elastic fixation, the smoothness of the deforming plate, and the continuity of the bending moment M_r at the boundary of separation of loaded and non-loaded parts of the plate, a linear system of equations is obtained with respect to the five integration constants. By solving this system all the unknown functions are found. A numerical example has been considered. A conclusion has been made based on the obtained dimensionless calculation values of the plate. In particular it has been shown that in the case of taking into account the compression the bending moment M_θ has a first kind discontinuity on the boundary of separation of loaded and non-loaded parts of the plate.

Решается задача изгиба упруго-защемлённой по контуру ортотропной круглой пластинки при учёте влияний поперечного сдвига и обжатия, когда на центральной части пластинки действует равномерно распределённая поперечная нагрузка.

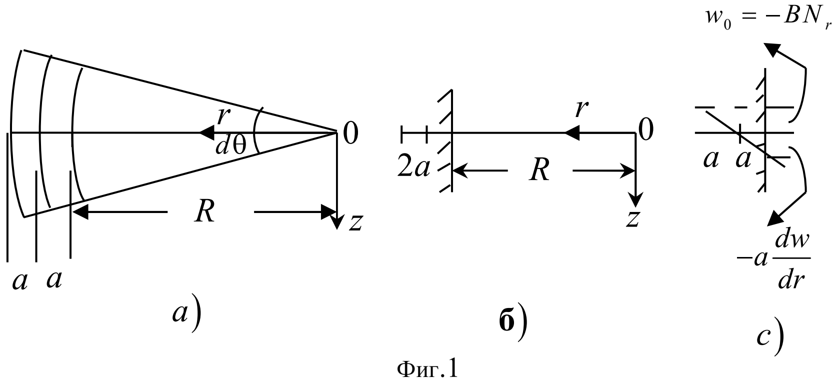
Для нагружённой части пластинки берётся известное решение С.А. Амбарцумяна ([1], стр.177,178), которое после учёта отсутствия угловой точки центра содержит две неизвестные постоянные интегрирования. Удовлетворив условиям упругого защемления контура, гладкости деформированной пластинки и неразрывности изгибающего момента M_r на границе раздела нагружённой и ненагружённой частей, получается система алгебраических уравнений относительно остальных пяти неизвестных постоянных интегрирования. Решая эту систему, определяются все неизвестные функции.

Рассмотрен численный пример. На основе полученных безразмерных значений расчётных величин пластинки делаются заключения. В частности, отмечается, что при учёте обжатия изгибающий момент M_ϑ на границе раздела нагружённой и ненагружённой частей пластинки имеет разрыв первого рода.

Введение. Обширное применение упруго-защемлённых опор в строительных сооружениях привело к практической необходимости их исследования. В научной литературе, например, в книгах [2] и [3], обычно рассматриваются теоретические модели упруго-защемлённых опор, не указывая их конкретные конструкции. Это часто приводит к некорректным понятиям. Например, на стр. 29 книги [3] в качестве условий упругого защемления края пластинки написаны: условие прямой пропорциональности производной прогиба к изгибающему моменту и условие равенства нулю прогиба. Эти условия, на самом деле, не являются условиями чисто упруго-защемлённой опоры, а скорее, условиями комбинации упруго-защемлённой опоры и шарнирной опоры, когда последняя опирается на абсолютно жёсткое основание.

Вопросам упруго-защемлённых опор тонкостенных элементов конструкций и их применениям посвящены также работа Г.З. Геворгяна [4] и работы авторов настоящей статьи ([5]- [13]). В этих работах чётко указывается конструкция опор, с помощью которой и определяются их условия.

Постановка задач. 1. В правой системе цилиндрических координат r, θ, z рассмотрим дифференциальный элемент круглой пластинки (фиг. 1).



Фиг.1

Краевая часть пластинки вставлена в упругий массив, образуя упруго-защемлённую опору. Длина этой части по радиусу $2a$ достаточно мала относительно радиуса пластинки R. Из-за малой длины будем считать, что вставленная часть пластинки, подобно абсолютно твёрдому элементу, может поступательно перемещаться и вращаться как одна целая. Поэтому в её пределах будем считать значение $\frac{dw}{dr}$ постоянным (r – радиальная координата, w – прогиб пластинки при изгибе). Отметим также, что из-за малости $2a$ расстояние центра тяжести вставленной части равно a.

На единичной длине опорного сечения $r = R$ при изгибе пластинки возникают поперечная сила N_r и изгибающие моменты M_r, M_θ.

Под действием момента поперечной силы aN_r и момента M_r вставленная часть будет вращаться на некоторый угол. Будем считать, что тангенс этого угла $\frac{dw}{dr}$ прямо пропорционален сумме этих моментов. Так как $\frac{dw}{dr}$, N_r и M_r имеют одинаковый знак, то можно написать

$$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=R} = D\left(aN_r + M_r\right) . \tag{1.1}$$

Положительная постоянная D – обратная величина жёсткости упруго- защемлённой опоры на вращение. В *СИ* она измеряется единицей H^{-1}.

Прогиб пластинки опорного сечения $r = R$ состоит из двух частей. Одна из них возникает от вращения вставленной части, а другая – от её поступательного вертикального перемещения. По аналогии с гипотезой Фусса-Винклера можно считать, что вторая часть w_0 опорного прогиба прямо пропорциональна поперечной силе N_r. Так как знак прогиба w отличается от знаков $\frac{dw}{dr}$ и N_r, то в итоге можно написать

$$\left. w\right|_{r=R} = -\left(a\frac{dw}{dr} + BN_r\right)\text{C} . \tag{1.2}$$

Положительная постоянная B – обратная величина жёсткости упруго-защемлённой опоры на вертикальное перемещение. В *СИ* она измеряется единицей $м^2H^{-1}$.

Таким образом, условия упруго-защемлённой опоры осесимметрично изгибаемой круглой пластинки имеют вид (1.1) и (1.2).

2. Получение связи параметров. Пользуясь гипотезой Фусса-Винклера и рисунками $a)-c)$ фиг.1, определим значения параметров рассмотренной упруго-защемлённой опоры B и D, когда торец вставленной части, как обычно, не контактирует с упругим массивом.

Так как упругий массив на верхнюю и нижнюю поверхности вставленной части действует нормальными напряжениями одинакового направления, прямо пропорциональными вертикальному перемещению w_0, то из условия равновесия с учётом (1.2) можно написать:

$$2k \cdot w_0 \cdot d\theta \int_0^{2a} \left(R+x\right)dx = 4kaw_0 \left(R+a\right)d\theta = \frac{w_0 R d\theta}{B} \Rightarrow B = \frac{R}{4ka\left(R+a\right)}, \quad (2.1)$$

где k – коэффициент пропорциональности. В *СИ* она измеряется единицей $H \cdot м^{-3}$.

Из условия равновесия моментов относительно центра вставленной части пластинки с учётом (1.1) получим:

$$2k\frac{dw}{dr}d\theta\left[\int_0^a \left(R+a+x\right)xdx + \int_0^a \left(R+a-x\right)xdx\right] = \frac{4}{3}ka^3\left(R+a\right)d\theta =$$

$$= \frac{dw}{dr}\frac{R}{D}d\theta \Rightarrow D = \frac{3R}{4ka^3\left(R+a\right)} \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) следует связь между параметрами упруго-защемлённой опоры D и B

$$D = \frac{3B}{a^2}. \quad (2.3)$$

3. Решение задачи. Рассмотрим ортотропную круглую пластинку радиуса R и постоянной толщины h. Координатная плоскость $r0\theta$ совпадает со срединной плоскостью пластинки, а главные направления анизотропии материала параллельны координатным линиям. Край пластинки $r = R$ имеет рассмотренную упруго-защемлённую опору.

На центральной части пластинки $0 \le r < \varepsilon$ действует равномерно распределённая поперечная нагрузка интенсивности $q = P/\pi\varepsilon^2$, а остальная часть пластинки $\varepsilon < r \le R$ свободна от нагрузок.

В рамках уточнённой теории С.А. Амбарцумяна [1] рассмотрим задачу изгиба пластинки при учёте влияния деформации поперечного сдвига и обжатия.

Расчётные величины пластинки w, N_r, M_r и M_θ интервала $\varepsilon < r \le R$ обозначим индексом «1» , а интервала $0 \le r < \varepsilon$ – индексом «2».

Пользуясь [1] (с.73, 74), получим следующие разрешающие уравнения задачи:

при $\varepsilon < r \le R$

$$r\frac{d^3 w_1}{dr^3} + \frac{d^2 w_1}{dr^2} - \frac{n^2}{r}\frac{dw_1}{dr} = \frac{P}{2\pi D_r} - \frac{3\left(1-n^2\right)a_r}{5\pi h}\frac{P}{r^2}, \quad (3.1)$$

при $0 \le r < \varepsilon$

$$r\frac{d^3 w_2}{dr^3} + \frac{d^2 w_2}{dr^2} - \frac{n^2}{r}\frac{dw_2}{dr} = \frac{\mathrm{Pr}^2}{2\pi D_r \varepsilon^2} + \frac{\mathrm{P}}{\pi\varepsilon^2}\left[\left(A_2 - A_1\right)\frac{h^2}{10 D_r} + \frac{3a_r}{5h}\left(n^2 - 1\right)\right] \quad (3.2)$$

Здесь

$$D_r = \frac{B_r h^3}{12}, \quad n^2 = \frac{D_\theta}{D_r} = \frac{E_\theta}{E_r} \quad (3.3)$$

$E_\theta, E_r, B_r, a_r, A_1,\ A_2$ – обшеизвестные механические параметры ортотропного тела [1]. Общие решения уравнений (3.1) и (3.2) имеют вид [1]:

$$w_1 = c_1 + c_2 r^{1+n} + c_3 r^{1-n} + \frac{p \cdot r^2}{4\pi\left(1-n^2\right)D_r} - \frac{3pa_r}{5\pi h}\ln\frac{r}{R} \tag{3.4}$$

$$w_2 = c_4 + c_5 r^{1+n} + b_1 r^2 + b_2 r^4 \tag{3.5}$$

Здесь c_i – постоянные интегрирования,

$$b_1 = \frac{Ph^2}{20\pi\varepsilon^2\left(1-n^2\right)}\left[\frac{6a_r\left(n^2-1\right)}{h^3} + \frac{A_2 - A_1}{D_r}\right], \quad b_2 = \frac{P}{8\left(9-n^2\right)\pi\varepsilon^2 D_r} \tag{3.6}$$

Изгибающие моменты определяются с помощью выражений [1] (стр.73):

$$M_{r1} = -D_r\left[\frac{d^2w_1}{dr^2} + \frac{\nu_\theta}{r}\frac{dw_1}{dr} - \frac{3Pa_r\left(1-\nu_\theta\right)}{5\pi hr^2}\right] \tag{3.7}$$

$$M_{\theta 1} = -n^2 D_r\left[\frac{1}{r}\frac{dw_1}{dr} + \nu_r\frac{d^2w_1}{dr^2} + \frac{3Pa_r\left(1-\nu_r\right)}{5\pi hr^2}\right] \tag{3.8}$$

$$M_{r2} = -D_r\left[\frac{d^2w_2}{dr^2} + \frac{\nu_\theta}{r}\frac{dw_2}{dr} + \frac{3Pa_r\left(1+\nu_\theta\right)}{5\pi\varepsilon^2 h} + \frac{A_1 h^2 P}{10\pi\varepsilon^2 D_r}\right] \tag{3.9}$$

$$M_{\theta 2} = -n^2 D_r\left[\frac{1}{r}\frac{dw_2}{dr} + \nu_r\frac{d^2w_2}{dr^2} + \frac{3Pa_r\left(1+\nu_r\right)}{5\pi\varepsilon^2 h} + \frac{A_2 h^2 P}{10\pi\varepsilon^2 n^2 D_r}\right] \tag{3.10}$$

$$\left(\varphi_1 = -\frac{6P}{\pi h^3}\frac{1}{r},\ \ \varphi_2 = -\frac{6Pr}{\pi h^3\varepsilon^2},\ \ N_{r1} = -\frac{P}{2\pi r},\ \ N_{r2} = -\frac{Pr}{2\pi\varepsilon^2}\right) \tag{3.11}$$

Для определения постоянных интегрирования c_i нужно использовать условия упругого защемления (1.1), (1.2) гладкости деформированной пластинки и неразрывности изгибающего момента M_r при $r = \varepsilon$

$$w_1 = w_2, \quad \frac{dw_1}{dr} = \frac{dw_2}{dr}, \quad M_{r1} = M_{r2} \quad \text{при} \quad r = \varepsilon \tag{3.12}$$

Последнее условие (3.12) вытекает из закона равенства действия и противодействия нагружённой и ненагружённой частей пластинки при отсутствии внешнего сосредоточенного момента M_r. Отметим, что при $r = \varepsilon$ равенство изгибающих моментов $M_{\theta 1}$ и $M_{\theta 2}$ не обязательно, поскольку эти моменты не являются действием и противодействием отмеченных частей пластинки.

4. Основные обозначения и получение системы разрешающих уравнений.

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$w_i = \overline{w}_i h, \quad h = mR, \quad r = \rho R, \quad \varepsilon = kR, \quad B_r a_r = \chi, \quad a = sh,$$

$$P=B_r h^2\overline{P},\;\; c_1=\overline{c}_1 h,\;\; c_2=\overline{c}_2 R^{-n},\quad c_3=\overline{c}_3 R^n,\; c_4=\overline{c}_4 h,$$

$$c_5=\overline{c}_5 R^{-n},\quad D=\frac{\alpha h}{D_r},\; B=\frac{\beta h^3}{12},\left(\frac{D}{B}=\frac{3}{a^2},\Rightarrow B=\frac{\alpha s^2 h^3}{3D_r}\right),$$

$$N_{ri}=\overline{N}_{ri} h B_r,\; M_{ri}=\overline{M}_{ri} B_r h^2,\; M_{\theta i}=\overline{M}_{\theta i} B_r h^2,\;\; b_1=\frac{\overline{b}_1}{h},\quad b_2=\frac{\overline{b}_2}{h^3} \tag{4.1}$$

С учётом (3.4) $\div$(3.11) в обозначениях (4.1) получим:

$$\overline{w}_1=\overline{c}_1+\frac{\overline{c}_2}{m}\rho^{1+n}+\frac{\overline{c}_3}{m}\rho^{1-n}+\frac{3\overline{P}\rho^2}{\pi m^2\left(1-n^2\right)}-\frac{3\chi\overline{P}}{5\pi}\ln\rho \tag{4.2}$$

$$\overline{w}_2=\overline{c}_4+\frac{\overline{c}_5}{m}\rho^{1+n}+\frac{\overline{b}_1\rho^2}{m^2}+\frac{\overline{b}_2\rho^4}{m^4},\quad \overline{N}_1=-\frac{m\overline{P}}{2\pi\rho} \tag{4.3}$$

$$\overline{N}_{r1}=-\frac{m\overline{P}}{2\pi\rho},\quad \overline{N}_{r2}=-\frac{m\overline{P}}{2\pi k^2}\rho \tag{4.4}$$

$$\overline{M}_{r1}=-\frac{m}{12}\left[\left(1+n\right)\left(n+\nu_\theta\right)\rho^{n-1}\cdot\overline{c}_2+\left(1-n\right)\left(\nu_\theta-n\right)\rho^{-n-1}\cdot\overline{c}_3+\frac{6\left(1+\nu_\theta\right)\overline{P}}{\pi m\left(1-n^2\right)}\right] \tag{4.5}$$

$$\overline{M}_{\theta 1}=-\frac{mn^2}{12}\left[\left(1+n\right)\left(1+n\nu_r\right)\rho^{n-1}\cdot\overline{c}_2+\left(1-n\right)\left(1-n\nu_r\right)\rho^{-n-1}\cdot\overline{c}_3+\frac{6\left(1+\nu_r\right)\overline{P}}{\pi m\left(1-n^2\right)}\right] \tag{4.6}$$

$$\overline{M}_{r2}=-\frac{m}{12}\left\{\begin{aligned}&\left(1+n\right)\left(n+\nu_\theta\right)\rho^{n-1}\overline{c}_5+\frac{2\left(1+\nu_\theta\right)}{m}\overline{b}_1+\\&+\frac{4\left(3+\nu_\theta\right)\rho^2}{m^3}\overline{b}_2+\frac{3m\overline{P}}{5\pi k^2}\left[\chi\left(1+\nu_\theta\right)+2A_1\right]\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

$$\overline{M}_{\theta 2}=-\frac{mn^2}{12}\left\{\begin{aligned}&\left(1+n\right)\left(1+n\nu_r\right)\rho^{n-1}\overline{c}_5+\frac{2\left(1+\nu_r\right)}{m}\overline{b}_1+\\&+\frac{4\left(1+3\nu_r\right)\rho^2}{m^3}\overline{b}_2+\frac{3m\overline{P}}{5\pi k^2 n^2}\left[\left(1+\nu_r\right)n^2\chi+2A_2\right]\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Здесь

$$\overline{b}_1=\frac{3m^2\overline{P}}{10\pi k^2\left(1-n^2\right)}\left[\chi\left(n^2-1\right)+2\left(A_2-A_1\right)\right],\quad \overline{b}_2=\frac{3m^2\overline{P}}{2\left(9-n^2\right)\pi k^2} \tag{4.9}$$

Условия упруго-защемлённой опоры и условия при $r=\varepsilon$ в обозначениях (4.1) примут вид:

1) $$\left(1+n\right)\left[1+\left(n+\nu_\theta\right)\alpha m\right]\bar{c}_2+\left(1-n\right)\left[1+\left(\nu_\theta-n\right)\alpha m\right]\bar{c}_3= =\frac{3\bar{P}}{5\pi m\left(1-n^2\right)}\left\{\chi m^2\left(1-n^2\right)-10-10\alpha m\left[sm\left(1-n^2\right)+\left(1+\nu_\theta\right)\right]\right\},$$

2) $$m\bar{c}_1+\left[1+ms\left(1+n\right)\right]\bar{c}_2+\left[1+ms\left(1-n\right)\right]\bar{c}_3= =\frac{\bar{P}}{5\pi m\left(1-n^2\right)}\left\{10\left(1-n^2\right)\alpha s^2m^3-15-3ms\left[10-\chi m^2\left(1-n^2\right)\right]\right\}, \qquad (4.10)$$

3) $$m\bar{c}_1+k^{1+n}\cdot\bar{c}_2+k^{1-n}\cdot\bar{c}_3-m\bar{c}_4-k^{1+n}\cdot\bar{c}_5=\frac{\bar{b}_1k^2}{m}+\frac{\bar{b}_2k^4}{m^3}- -\frac{3k^2\bar{P}}{\pi m\left(1-n^2\right)}+\frac{3\chi m\bar{P}}{5\pi}\ln k,$$

4) $$\left(1+n\right)k^n\cdot\bar{c}_2+\left(1-n\right)k^{-n}\cdot\bar{c}_3-\left(1+n\right)k^n\cdot\bar{c}_5=\frac{2\bar{b}_1k}{m}+\frac{4\bar{b}_2k^3}{m^3}- -\frac{6k\bar{P}}{\pi m\left(1-n^2\right)}+\frac{3\chi m\bar{P}}{5\pi k},$$

5) $$\left(1+n\right)\left(n+\nu_\theta\right)k^{n-1}\cdot\bar{c}_2+\left(1-n\right)\left(\nu_\theta-n\right)k^{-n-1}\cdot\bar{c}_3-\left(1+n\right)\left(n+\nu_\theta\right)k^{n-1}\cdot\bar{c}_5= =\frac{6\left(1+\nu_\theta\right)\bar{P}}{\pi m\left(1-n^2\right)}+\frac{2\left(1+\nu_\theta\right)\bar{b}_1}{m}+\frac{4\left(3+\nu_\theta\right)k^2\bar{b}_2}{m^3}+\frac{3m\bar{P}}{5\pi k^2}\left[\chi\left(1+\nu_\theta\right)+2A_1\right]$$

Определив постоянные $\bar{c}_i$, можно вычислить безразмерные значения всех расчётных величин пластинки.

5. **Численные результаты.** Рассмотрим численный пример.

Пользуясь линейностью задачи, положим $\bar{P}=1$. В каждом конкретном случае, умножив решение на действительное значение $\bar{P}$, получим истинные безразмерные значения расчётных величин.

Пусть

$$n=\sqrt{2}\left(E_\theta=2E_r\right), E_z=\frac{2E_r}{3},\ \chi=10,\ m=0.25,\quad k=0.5,\ s=0.5, \qquad (5.1)$$
$$\nu_r=0.15\left(\nu_r=\nu_{\theta r}\right),\ \nu_{zr}=0.4,\ \nu_{\theta z}=0.2,\quad \alpha=0.1,\ 1 \text{ и } 10$$

Из условий симметрии механических свойств ортотропного тела ([1], стр. 23 условия (4.16)) получим:

$$\nu_\theta=0.3\ \left(\nu_\theta=\nu_{r\theta}\right),\ \nu_{rz}=0.267,\ \nu_{z\theta}=0.6 \qquad (5.2)$$

Тогда, из формул [1] (стр. 47 , (5.2)) находим:

$$A_1 = -0.513, \qquad A_2 = -0.754 \tag{5.3}$$

Принятые механические параметры удовлетворяют условиям положительности энергии деформирования ортотропного тела [1], (стр. 24 условия (4.18)), поскольку

$\mu_{12} = \mu_{21} = -0.212, \qquad \mu_{13} = \mu_{31} = -0.327,\ \mu_{23} = \mu_{32} = -0.346,$

$$\left| \frac{\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{32}}{\sqrt{1-\mu_{12}^2}\sqrt{1-\mu_{23}^2}} \right| = 0.436 \tag{5.4}$$

Рассмотрим следующие частные случаи:

1. $\chi = A_1 = A_2 = 0$ (пренебрегаются влияния поперечного сдвига и обжатия)

2. $\chi = 10,\ \ A_1 = -0.513,\ \ A_2 = -0.754$ (учитываются эти влияния одновременно)

3. $\chi = 10,\ \ A_1 = A_2 = 0$ (учитывается только влияние поперечного сдвига)

4. $\chi = 0,\ \ A_1 = -0.513,\ \ A_2 = -0.754$ (учитывается только влияние обжатия).

Для этих частных случаев в табл. 1 приведены безразмерные значения прогиба $\overline{w}$, а в табл. 2 и 3 – изгибающих моментов $\overline{M}_r$ и $\overline{M}_\theta$ в некоторых точках пластинки. Для наглядности, на фигурах 2÷4 представлены графики изменения безразмерных величин прогиба и изгибающих моментов вдоль радиуса пластинки в случае **2**.

Таблица 1

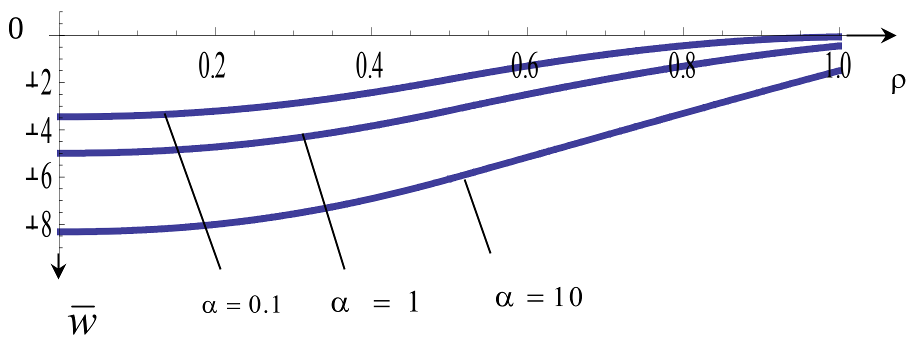
$\overline{w}$		ρ					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\alpha = 0.1$	1	1.990	1.969	1.878	1.708	1.466	1.173
	2	3.452	3.396	3.209	2.881	2.424	1.859
	3	3.520	3.463	3.271	2.936	2.468	1.891
	4	1.922	1.902	1.816	1.654	1.422	1.142
$\alpha = 1.0$	1	3.281	3.255	3.148	2.946	2.651	2.282
	2	4.994	4.934	4.727	4.361	3.839	3.185
	3	5.077	5.015	4.804	4.429	3.897	3.228
	4	3.198	3.174	3.072	2.877	2.594	2.239
$\alpha = 10$	1	6.113	6.080	5.942	5.674	5.275	4.759
	2	8.325	8.256	8.011	7.566	6.920	6.087
	3	8.436	8.365	8.115	7.661	7.003	6.154
	4	6.002	5.971	5.838	5.579	5.192	4.691

$\overline{w}$		ρ				
		0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\alpha = 0.1$	1	0.862	0.568	0.319	0.139	0.050
	2	1.291	0.811	0.434	0.178	0.059
	3	1.310	0.821	0.439	0.179	0.059
	4	0.844	0.558	0.314	0.137	0.049
$\alpha = 1.0$	1	1.872	1.451	1.047	0.682	0.377
	2	2.497	1.864	1.301	0.823	0.444
	3	2.527	1.884	1.314	0.831	0.448
	4	1.842	1.431	1.034	0.674	0.373
$\alpha = 10$	1	4.151	3.480	2.770	2.041	1.308
	2	5.162	4.229	3.299	2.383	1.492
	3	5.214	4.269	3.328	2.402	1.502
	4	4.099	3.441	2.742	2.022	1.298

Таблица 2

$\bar{M}_r \cdot 10^2$		ρ					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\alpha = 0.1$	**1**	0	4.52	5.23	4.90	3.77	1.89
	2	0.16	4.09	4.59	4.13	2.87	0.89
	3	0.00	3.89	4.39	3.91	2.65	0.67
	4	0.16	4.72	5.44	5.12	3.99	2.13
$\alpha - 1.0$	**1**	0	5.32	6.29	6.17	5.19	3.45
	2	0.16	5.05	5.88	5.64	4.58	2.77
	3	0.00	4.86	5.68	5.44	4.37	2.56
	4	0.16	5.51	6.49	6.37	5.39	3.67
$\alpha = 10$	**1**	0	6.90	8.39	8.65	7.99	6.53
	2	0.16	6.94	8.41	8.63	7.95	6.46
	3	0.00	6.78	8.23	8.46	7.77	6.29
	4	0.16	7.07	8.57	8.83	8.17	6.71

$\bar{M}_r \cdot 10^2$		ρ				
		0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\alpha = 0.1$	**1**	-0.09	-1.75	-3.19	-4.50	-5.70
	2	-1.25	-3.03	-4.58	-5.97	-7.25
	3	-1.41	-3.16	-4.69	-6.07	-7.34
	4	0.07	-1.62	-3.09	-4.41	-5.61
$\alpha - 1.0$	**1**	1.59	0.05	-1.30	-2.51	-3.63
	2	0.77	-0.87	-2.30	-3.58	-4.75
	3	0.62	-0.98	-2.39	-3.66	-4.82
	4	1.74	0.15	1.21	-2.44	-3.56
$\alpha = 10$	**1**	4.91	3.58	2.43	1.41	0.47
	2	4.75	3.37	2.18	1.13	0.17
	3	4.64	3.30	2.14	1.09	0.15
	4	5.01	3.65	2.48	1.44	0.49

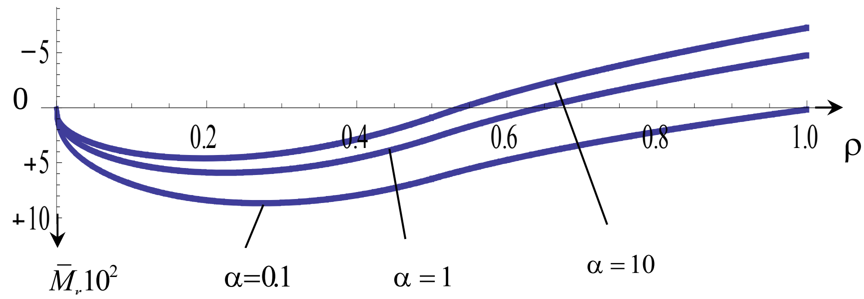


Фиг.2

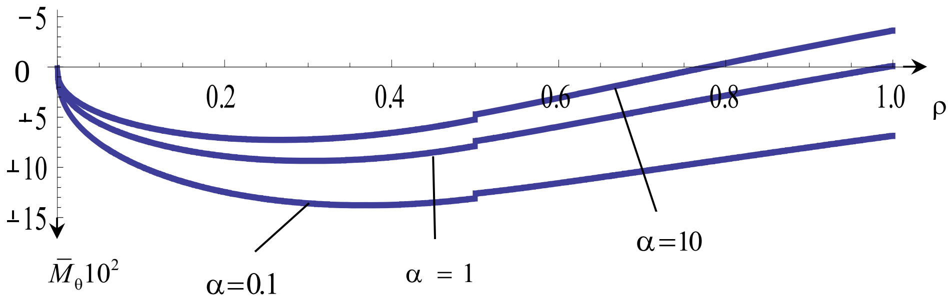
Таблица 3

$\bar{M}_\theta \cdot 10^2$		ρ						
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5-	0.5+
$\alpha = 0.1$	**1**	0	6.56	8.04	8.38	7.89	6.69	6.69
	2	0.16	5.88	7.08	7.22	6.57	5.22	4.74
	3	0.00	5.67	6.85	6.98	6.32	4.96	4.96
	4	0.16	6.77	8.27	8.62	8.15	6.96	6.48
$\alpha = 1.0$	**1**	0	7.69	9.55	10.17	9.91	8.90	8.90
	2	0.16	7.24	8.89	9.36	8.98	7.87	7.39
	3	0.00	7.04	8.68	9.14	8.75	7.63	7.63
	4	0.16	7.89	9.76	10.39	10.14	9.14	8.66
$\alpha = 10$	**1**	0	9.92	12.5	13.7	13.9	13.2	13.2
	2	0.16	9.92	12.46	13.59	13.74	13.09	12.62
	3	0.00	9.74	12.29	13.41	13.56	12.91	12.91
	4	0.16	10.09	12.69	13.87	14.05	13.44	12.96

$\bar{M}_\theta \cdot 10^2$		ρ				
		0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\alpha = 0.1$	**1**	5.07	3.39	1.76	0.17	-1.34
	2	3.09	1.35	-0.37	-2.04	-3.63
	3	3.20	1.40	-0.35	-2.04	-3.65
	4	4.96	3.34	1.73	0.18	-1.32
$\alpha = 1.0$	**1**	7.45	5.93	4.43	2.98	1.59
	2	5.94	4.39	2.84	1.34	-0.11
	3	6.08	4.48	2.89	1.37	-0.09
	4	7.31	5.85	4.38	2.96	1.58
$\alpha = 10$	**1**	12.1	10.9	9.71	8.53	7.39
	2	11.6	10.4	9.19	8.00	6.85
	3	11.7	10.5	9.30	8.09	6.93
	4	11.9	10.79	9.60	8.44	7.31



Фиг.3



Фиг.4

Заключение. Результаты решения приводят к заключениям:

1. С возрастанием параметра α жёсткости упруго-защемлённой опоры уменьшаются и прогибы пластинки всюду увеличиваются. При этом, относительные поправки прогибов уменьшаются. Как и следовало ожидать, учёт поперечного сдвига приводит к заметному увеличению, а учёт обжатия, наоборот, к незначительному уменьшению прогиба пластинки.

2. При учёте обжатия (случаи 2 и 4) изгибающие моменты M_r и M_θ в центре пластинки равны и отличны от нуля. В случае же 1 и 3 эти моменты равны нулю. При учёте обжатия изгибающий момент $\overline{M}_\theta$ на границе раздела нагружённой и ненагружённой частей пластинки имеет разрыв первого рода. Величина этого разрыва не зависит от значения параметра α.

В заключение отметим, что если независимо от значения радиуса нагружённой части $r=\varepsilon$ $(\rho=k)$ сумму нагрузки считать постоянной $(\tilde{p}=\text{const})$, то при $\varepsilon\to 0$ $(k\to 0)$ получим решение задачи для случая, когда в центре пластинки действует сосредоточенная сила. Однако, при учёте поперечного сдвига с приближением к центру пластинки прогиб и его производная стремятся к бесконечности и полученное решение становится неприемлемым [11]. В случае же $\varepsilon=R(k=1)$ получим решение задачи пластинки, целиком нагружённой равномерно распределённой нагрузкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumian S. A.Theory of anisotropic plates M. Nauka, 1987. 360p. (in Russian)
2. Прочность, устойчивость, колебания. /Справочник под ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. Т. 3. Изд. Машиностроение, 1964. 564с. Strenght, stability, vibrations Birger I.A., Panivko V3, 1964. 564p. (in Russian).
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки, под редакцией Г.С. Шапиро. М.: Изд. Наука, Физматлит., 1966. 632с. Timoshenko S., Voinowsky-Krieger S. Plates and shells. McGraw-Hill, New York. 1959. 623p.
4. Геворгян Г.З. Об изгибных колебаниях ортотропных полос переменной толщины с учётом поперечных эффектов при условиях упругой заделки. Актуальные проблемы механики сплошной среды. //Труды IV международной конференции 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения, с.129-133. Gevorgyan G.Z. Vibrations of orthotropic strips of variable thickness taking into account the transverse shear under conditions of elastic joints. Proceedings of IV international conference “Topical Problems of Continuum Mechanics”, Yerevan-2015, pp.129-133 (in Russian).
5. Киракосян Р.М. Упруго-защемлённая опора для осесимметрично изгибаемых круглых пластин. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VIII международной конференции, сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт, с.261-265. Kirakosyan R. M. Elasticaly-fixed support for an axi-simmetrical bending circular plates. Proceedings of VIII international conference “The problems of dynamics of interaction of deformable media”, September 22-26, 2014, Goris-Stepanakert, pp.172-176 (in Russian).

6. Степанян С.П. Неклассическая задача изгиба балки линейно-переменной толщины при наличии упруго-защемлённой опоры. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VIII международной конференции, сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт, с.408-412. Stepanyan S. P. Nonclassical problem of beam bending linearly variable thickness under the presence of elastically restrained supports. Proceedings of VIII international conference "The problems of dynamics of interaction of deformable media", September 22-26, 2014, Goris-Stepanakert, pp.408-412 (in Russian).
7. Киракосян Р.М. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-защемлённой опорой. // Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. № 2. С.101-107.. R. M. Kirakosyan Non-Classical Problem of a Bend Orthotropic Beams with the Elastic Clamped Support. NAS RA Reports, 2014,Volume 114, № 2, pp. 101-107
8. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки переменной толщины с упруго-защемлённой опорой. //Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. № 3. С.205-212. Kirakosyan R. M., Stepanyan S. P. Non Classical Problem of Bending of an Orthotropic Beam of Variable Thickness with Elastically Clamped Support. NAS RA Reports, 2014,Volume 114, № 3, pp. 205-212
9. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Устойчивость стержня при наличии упруго-защемлённой опоры. //Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. № 4. С.309-315. KirakosyanR. M. , Stepanyan S. P. Stability of the Rod in the Presence of Elastic Clamped Support. NAS RA Reports, 2014,Volume 114, No 4, pp. 309-315
10. Razmik M. Kirakosyan, Seyran P. Stepanyan**.** On a Model of Elastic Clamped Support of Plate-Strip. //International scientific Journal, Modeling of Artificial Intelligence. 2015. Vol.6. Is. 2, pp.67-74.
11. Киракосян Р.М. Об одной неклассической задаче изгиба упруго-защемлённой круглой пластинки. //Докл. НАН Армении. 2015. Т.115. №4. С.284-289. Kirakosyan R. M. On One Nonclasical Problem of a Bend of an Elastically Fastened Round Plate . NAS RA Reports, 2015,Volume 115, No 4, pp. 284-289
12. Степанян С.П. Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго- защемлённой опоры. //Докл. НАН Армении. 2016. Т.116. №1. С.26-33. S. P. Stepanyan Thermo-Elasticity Problem of an Orthotropic Plate-Strip of Variable Thickness at the Presence of an Elastically Fastened Support. NAS RA Reports, 2016,Volume 116, No 1, pp. 26-33.
13. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача изгиба упруго-защемлённой ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругом основании. //Докл. НАН Армении. 2016. Т.116. №2. С.120-127. R. M. Kirakosyan, S. P. Stepanyan. The Problem of Bending Resiliently Clamped Orthotropic Circular Plate Resting on the Elastic Foundation. NAS RA Reports, 2016,Volume 116, No 2, pp. 120-127.

Сведения об авторах:

Киракосян Размик Макарович – доктор техн. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА.**E–mail:** Kirakosyan Razmik@ mechins.sci.am

Степанян Сейран Павлович – к.ф.-м.н, доцент кафедры численного анализа и мат. моделирования факультета информатики и прикладной математики ЕГУ.
Тел: (+374 93) 524883, **E–mail:** seyran.stepanyan@ysu.am

Поступила в редакцию 11.10.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №3, 2016 Механика
УДК 539.3

ФЛАТТЕР УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ И НАЛИЧИИ ИНЕРЦИОННЫХ МОМЕНТОВ НА КРОМКАХ

Микаелян А.О.

Բանալի բառեր. ուղղանկյուն առաձգական սալ, դինամիկ կայունություն, գերձայնային հոսք, կրիտիկական արագություն:
Ключевые слова: прямоугольная упругая пластинка, динамическая устойчивость, сверхзвуковое обтекание, критическая скорость.
Key words: rectangular elastic plate, dynamic stability, supersonic gas flow, critical velocity.

Միքաելյան Հ.Հ.
Ուղղանկյուն առաձգական սալի ֆլատերը գերձայնային գազի հոսքի և սալի եզրերում իներցիոն մոմենտների առկայության դեպքում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Սալի բոլոր եզրերը հոդակապորեն ամրակցված են և գազի հոսքին ուղղահայաց երկու կողմերում կան կենտրոնացված մոմենտներ: Ցույց է տրված ֆլատերի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են ֆլատերային անկայունության հանգեցնող գազի հոսքի կրիտիկական արագության արժեքները:

Mikaelyan H.H.
Flutter of the elastic rectangular plate in supersonic gas flow at the presence of inertial moments at the edges

The problem of stability of an elastic rectangular plate in a supersonic gas flow is investigated. All edges of the plate are hinged and there are concentrated moments on two edges of the plate. The critical velocity of the gas flow is defined which leads to flutter instability.

Рассматривается задача устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Все края пластинки шарнирно опёрты, а на двух противоположных кромках пластинки, перпендикулярных к направлению потока газа, имеются сосредоточенные моменты. Найдены критические скорости потока газа, превышение которых приводит к потере устойчивости пластинки.

Введение. В предлагаемой работе исследуется устойчивость прямоугольной упругой пластинки постоянной толщины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Все края пластинки шарнирно опёрты, а на двух противоположных кромках пластинки, перпендикулярных к направлению потока газа, имеются сосредоточенные моменты. Найдены соответствующие критические скорости потока газа, превышение которых приводит к потере устойчивости пластинки.

Установлено, что в случае, когда из одной из кромок пластинки сосредоточенный момент отсутствует, пластинка находится в устойчивом состоянии.

1. Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная тонкая упругая пластинка, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке. Пластинка обтекается в направлении оси Ox сверхзвуковым потоком газа со скоростью V.

Пусть кромки $x=0$, $x=a$, $y=0$ и $y=b$ пластинки шарнирно закреплены. На кромках $x=0$ и $x=a$ приложены сосредоточенные моменты.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия пластинки, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками и приложенными вдоль кромок пластинки $x=0$ и $x=a$ сосредоточенными моментами.

Малые изгибные колебания точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [1] описываются дифференциальным уравнением [2,3]

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)+a_0\rho_0 V\frac{\partial W}{\partial x}=0. \tag{1.1}$$

Здесь $W=W(x,y,t)$ – прогиб точек срединной поверхности пластинки; ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде; D – цилиндрическая жёсткость пластинки на изгиб.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид:

$$W=0,\ \ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0,\ \ y=0;\ y=b, \tag{1.2}$$

$$W=0,\ \ D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=I_1\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2},\quad x=0, \tag{1.3}$$

$$W=0,\ \ D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=-I_2\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2},\quad x=a. \tag{1.4}$$

Требуется определить значения параметра V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2) – (1.4).

Заметим, что устойчивость удлинённой пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенного момента на кромках была исследована в работе [5].

2. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде:

$$W(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\sin(\lambda_n y)\exp(i\omega t)\ ,\quad \lambda_n=\pi n b^{-1}. \tag{2.1}$$

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение, являющееся алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$p^4-2p^2+\alpha_n^3 p+1=0\ ,\quad \alpha_n^3=a_0\rho_0 V D^{-1}\lambda_n^{-3}\ ,\quad \alpha_n^3>0 \tag{2.2}$$

или

$$\left(p^2-1\right)^2+\alpha_n^3 p=0\ ,\quad \alpha_n^3=a_0\rho_0 V D^{-1}\lambda_n^{-3}\ ,\quad \alpha_n^3>0. \tag{2.3}$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (2.3) имеет два отрицательных действительных корня: $p_1 < 0$, $p_2 < 0$ и пару комплексно-сопряжённых корней $p_{3,4} = \alpha + i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha > 0$.

В работе [6] подробно излагается решение характеристического уравнения (2.3) с помощью алгоритма Феррари [4], в соответствии с которым алгебраическое уравнение четвёртой степени сводится к эквивалентной системе двух квадратных уравнений. При этом, корни характеристического уравнения (2.3) определяются следующими выражениями [6]:

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2(q+1)}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - \frac{q-1}{2}}\ , \qquad p_1 < 0,\ p_2 < 0$$
$$p_{3,4} = \frac{\sqrt{2(q+1)}}{2} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + \frac{q-1}{2}}\ , \qquad p_{3,4} = \alpha \pm i\beta\ , \quad \alpha > 0 \tag{2.4}$$

q – единственный действительный корень кубического уравнения [6]

$$8(1+q)^2(q-1) = \alpha_n^6, \quad \alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\lambda_n^{-3}\ , \quad \lambda_n = \pi n b^{-1}. \tag{2.5}$$

Отметим, что из соотношений (2.5) и положительности дискриминанта $Q = \alpha_n^6\left(\frac{1}{27} + \frac{\alpha_n^6}{256}\right)$ кубического уравнения очевидно, что кубическое уравнение (2.5) при условии $\alpha_n^3 > 0$ имеет один действительный корень q $(q > 1)$ и пару комплексно-сопряжённых корней.

Из соотношений (2.5) легко можно получить выражение зависимости скорости потока газа V от параметров системы

$$V = 2\sqrt{2(q-1)}(q+1)\pi^3 n^3\gamma^3 D\left(a_0\rho_0 a^3\right)^{-1}, \tag{2.6}$$

где через γ обозначено отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b:

$$\gamma = ab^{-1}. \tag{2.7}$$

Общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1), в соответствии с вышеизложенным, можно представить в виде:

$$W(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(C_{n1}\exp(\lambda_n p_1 x) + C_{n2}\exp(\lambda_n p_2 x) + \exp(\lambda_n \alpha x)\times$$
$$\times\big(C_{n3}\cos(\lambda_n\beta x) + C_{n4}\sin(\lambda_n\beta x)\big)\Big)\exp(i\omega_n t)\sin(\lambda_n y), \tag{2.8}$$

где p_i, $\left(i = \overline{1,4}\right)$ – корни характеристического уравнения (2.3), определяемые выражениями (2.4); C_{nk}, $\left(k = \overline{1,4}\right)$ – произвольные постоянные, $\lambda_n = \pi n b^{-1}$.

Подставляя общее решение (2.8) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.3) и (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Далее, приравнивая нулю определитель полученной системы, получаем следующее алгебраическое уравнение относительно квадратов собственных частот колебаний пластинки:

$$k_1k_2A(q,\gamma,n)\omega^4-(k_1+k_2)B(q,\gamma,n)\omega^2+C(q,\gamma,n)=0, \tag{2.9}$$

где $k_1=I_1D^{-1}b(\pi n)^{-1}$; $k_2=I_2D^{-1}b(\pi n)^{-1}$;

$$A(q,\gamma,n)=2\Big\{\big(Q_1^2-Q_2^2-2(q+1)\big)\operatorname{sh}(\pi n\gamma Q_1)\sin(\pi n\gamma Q_2)+$$

$$+2Q_1Q_2\Big(\operatorname{ch}\Big(\pi n\gamma\sqrt{2(q+1)}\Big)-\operatorname{ch}(\pi n\gamma Q_1)\cos(\pi n\gamma Q_2)\Big)\Big\}; \tag{2.10}$$

$$B(q,\gamma,n)=2\Big\{\big(Q_1^3-2(q+1)Q_1+Q_1Q_2^2\big)\operatorname{ch}(\pi n\gamma Q_1)\sin(\pi n\gamma Q_2)-$$

$$-\Big(Q_1^2Q_2+Q_2\big(2(q+1)+Q_2^2\big)\Big)\operatorname{sh}(\pi n\gamma Q_1)\cos(\pi n\gamma Q_2)+$$

$$+Q_1Q_2\,2\sqrt{2(q+1)}\operatorname{sh}\Big(\pi n\gamma\sqrt{2(q+1)}\Big)\Big\}; \tag{2.11}$$

$$C(q,\gamma,n)=2\Big\{\Big(Q_1^4-2Q_1^2\big(q+1-Q_2^2\big)+Q_2^2\big(2(q+1)+Q_2^2\big)\Big)\times$$

$$\times\operatorname{sh}(\pi n\gamma Q_1)\sin(\pi n\gamma Q_2)+4(q+1)Q_1Q_2\Big(\operatorname{ch}\Big(\pi n\gamma\sqrt{2(q+1)}\Big)-$$

$$-\operatorname{ch}(\pi n\gamma Q_1)\cos(\pi n\gamma Q_2)\Big)\Big\}; \tag{2.12}$$

$$Q_1(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-\frac{1}{2}(q-1)}\ ;Q_2(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+\frac{1}{2}(q-1)}, \tag{2.13}$$

q $(q>1)$ – единственный действительный корень кубического уравнения (2.5); γ – отношение сторон пластинки, определяемое выражением (2.7).

Учитывая условие $q>1$, из выражений (2.13) имеем:

$$Q_1(q)>0\ ,\ Q_2(q)>0\ \text{ для всех } q>1. \tag{2.14}$$

С помощью графо-аналитических методов легко показать, что

$$A(q,\gamma,n)>0, B(q,\gamma,n)>0, C(q,\gamma,n)>0 \tag{2.15}$$

для всех $q>1$, $n\geq 1$ и $\gamma>0$.

Ясно, что дисперсионное уравнение (2.9) устанавливает зависимость собственной частоты колебаний пластинки ω от параметров a, b, n, I_1, I_2, q (или V в соответствии с (2.6)) системы (1.1)-(1.4).

Следует отметить, что среди параметров исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа (1.1)–(1.4), наиболее существенное влияние на её динамическое поведение оказывают следующие параметры: $\gamma=ab^{-1}$ – отношение ширины пластинки к её длине; k_1, k_2 – коэффициенты, характеризующие влияние сосредоточенных инерционных моментов, приложенных вдоль краёв пластинки $x=0$ и $x=a$; параметр скорости потока газа q $(q>1)$; n – число полуволн вдоль стороны b.

Таким образом, анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа при наличии сосредоточенных моментов I_1, I_2, приложенных вдоль краёв пластинки $x=0$ и $x=a$, сводится к исследованию поведения корней уравнения (2.9) в зависимости от параметров исходной задачи устойчивости (1.1)– (1.4).

Область устойчивости пластинки рассматриваемой динамической системы определяется соотношениями:

$$A(q,\gamma,n)>0,\ B(q,\gamma,n)>0, C(q,\gamma,n)>0, \Delta>0. \tag{2.16}$$

Здесь Δ – дискриминант характеристического уравнения (2.9):

$$\Delta=\Delta(q,\gamma,n)=\left((k_1+k_2)B(q,\gamma,n)\right)^2-4k_1k_2\,A(q,\gamma,n)C(q,\gamma,n). \tag{2.17}$$

При условии

$$\Delta>0,\ A(q,\gamma,n)>0, B(q,\gamma,n)>0, C(q,\gamma,n)=0 \tag{2.18}$$

пластинка теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция,
а при условии

$$A(q,\gamma,n)>0, B(q,\gamma,n)>0,\ C(q,\gamma,n)>0, \Delta=0 \tag{2.19}$$

пластинка теряет динамическую устойчивость – пластинка совершает флаттерные колебания.

Рассмотрим частные случаи.

3.1. Исследуем характеристическое уравнение (2.9) при условии

$$k_1=k\neq 0, k_2=0 \quad \text{или} \quad k_1=0, k_2=k\neq 0. \tag{3.1}$$

В этом случае решение характеристического уравнения (2.9) запишется в виде

$$\omega^2=C(q,\gamma,n)\left(k\,B(q,\gamma,n)\right)^{-1}. \tag{3.2}$$

Установлено, что в случае, когда в одной из кромок пластинки сосредоточенный момент отсутствует, пластинка находится в устойчивом состоянии.

3.2.Теперь рассмотрим случай, когда $k_1=k_2=k$.

Характеристическое уравнение (2.9) запишется в виде:

$$k^2A(q,\gamma,n)\omega^4-2k\,B(q,\gamma,n)\omega^2+C(q,\gamma,n)=0. \tag{3.3}$$

Учитывая условие (2.19), дискриминант характеристического уравнения (3.3) примет вид:

$$\Delta=\Delta(q,\gamma,n)=\left(2k\,B(q,\gamma,n)\right)^2-4k^2\,A(q,\gamma,n)C(q,\gamma,n)=0. \tag{3.4}$$

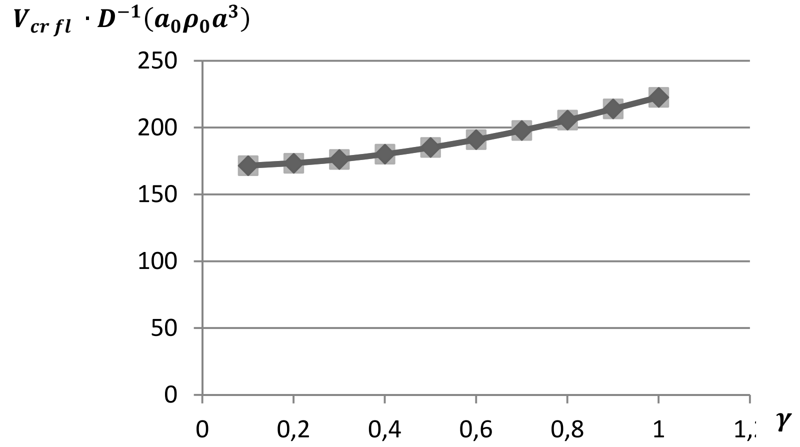
С помощью численных методов анализа из уравнения (3.4) найдены первые корни q_1 уравнения (2.2), соответствующие различным значениям параметра $\gamma\in(0;1)$. Подставляя полученные значения q_1 в соотношение (2.6), получаем соответствующие значения критической скорости потока $V_{cr\ fl}$, приводящие к флаттерной неустойчивости. Некоторые результаты расчётов – значения $V_{cr\ fl}\,D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$, соответствующие различным значениям γ, представлены в табл.1.

Отметим, что для всех γ наименьшее значение скорости потока достигается при значении $n = 1$.

Таблица 1

γ	q_1	$V_{cr\ fl}\, D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$
0.1	156.043	171.46
0.2	39.0373	173.32
0.3	17.3794	176.12
0.4	9.81094	180.14
0.5	6.32101	185.11
0.6	4.43957	190.98
0.7	3.32025	197.82
0.8	2.60937	205.57
0.9	2.13762	213.94
1.0	1.81527	222.62

В результате расчёта было установлено, что при значениях $\gamma \geq 0.1$ критическая скорость $V_{cr\ fl}$ зависит от отношения сторон $\gamma = ab^{-1}$ прямоугольника. С возрастанием γ значение критической скорости растёт (фиг.1).



Фиг.1

Можно полагать, что для всех $\gamma \in (0; 0.1)$ поведение прямоугольной пластинки ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) в сверхзвуковом потоке газа при наличии сосредоточенных моментов на кромках $x = 0$ и $x = a$ аналогично поведению обтекаемой удлинённой пластинки ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \infty$), при наличии сосредоточенных моментов на кромках $x = 0$ и $x = a$ [5] имеет место явление флаттера.

Из сопоставления значений $V_{cr\ fl}$ при $k_1 = k_2$, приведённых в табл.1 со значениями, полученными в работе [7], следует, что критическая скорость флаттера в случае, когда все четыре края шарнирно закреплены, превышает критическую скорость флаттера в случае, в котором один край свободен, а остальные края шарнирно закреплены.

Таким образом, в рассматриваемом случае, т.е. в случае, в котором все края пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, шарнирно закреплены и на двух кромках, перпендикулярных к направлению потока газа, имеются сосредоточенные моменты, имеет место только динамическая потеря устойчивости. При отсутствии приложенных инерционных моментов, хотя бы на одной из кромок, возмущённое движение пластинки устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733–755. Il'yushin A.A.(1956). Law of Flat Sections at the Big Supersonic Velocity. PMM, v.20(6), pp. 733-755.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с. Bolotin , V.V. (1963). Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press. New Jork. 324 p.
3. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе.// Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. № 2. С. 211–222. Movchan A.A. (1956). About vibrations of a plate, moving in gas. Izv. Acad. Nauk USSR. PMM. V. 20. № 2, pp. 211-222.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832с. Korn G., Korn T. Mathematical Handbook. McGraw-Hill, New York. 1968. 807p.
5. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Флаттер пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенной массы на кромках.//ISSN 0130-9420. Мат. методи та фiз.-мех. поля. 2006. Т.49. № 3. С.162-167. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. Flutter of plate with the supersonic gas flow and existense of concentrated mass on edges. Math. Methods and phys.-mech fields. 2006. V.49. № 3. p.162-167.
6. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край.// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. № 3. С.34–40. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the stability of a rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction from the free edge to the clamped edge.// Izv. NAS of Armenia, Mekhanika, 2012. v.65, №3, pp.34-40.
7. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.14-44. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge.// Izv. NAS of Armenia, Mekhanika, 2014. v.67, №2, pp.14-44.

Сведения об авторе:

Микаелян Асмик Овиковна – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (+374 77) 03 63 49; (+374 96) 03 63 49. **E-mail:** hasmik.mikaelyan.hm@gmail.ru

Поступила в редакцию 15.03.2016

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Հակոբյան Վ.Ն., Հակոբյան Լ.Վ. Երկպարբերական միջֆազային դեֆեկտներ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ տարածության լարվածային վիճակը 3

Հունանյան Ա.Ա. Սահքի նորմալ, ալիքի անկայունությունը թույլ անհամասեռությամբ նյութից ալիքատարում 16

Արաբյան Մ. Հ. Պտտման թաղանթի տատանումների խնդրի ընդհանրացված տատանումների ձևի ողորկությունը՝ կախված որոշ ոչ հանրագումարելի գործակիցներից 28

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ. Գերձայնային պանելային ֆլատերի խնդրի մասին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածի և մոմենտի առկայության դեպքում 41

Կիրակոսյան Ռ.Մ., Ստեփանյան Ս.Պ. Եզրում առաձգական ամրակցված, մասնակիորեն բեռնավորված, կլոր, օրթոտրոպ սալի ոչ դասական եզրային խնդիրը 59

Միքաելյան Հ.Հ. Ուղղանկյուն առաձգական սալի ֆլատերը գերձայնային գազի հոսքի և սալի եզրերում իներցիոն մոմենտների առկայության դեպքում 71

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Акопян В.Н., Акопян Л.В. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с двоякопериодической системой межфазных дефектов 3
Унанян А.А. Неустойчивость нормальной сдвиговой волны в упругом волноводе из слабо-неоднородного материала 16
Арабян М.О. Гладкость обобщённых форм колебаний в задаче колебаний оболочки вращения в зависимости от некоторых несуммируемых коэффициентов 28
Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О задаче сверхзвукового панельного флаттера при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов 41
Киракосян Р.М., Степанян С.П. Неклассическая краевая задача упруго защемлённой по краю частично нагружённой круглой ортотропной пластинки 59
Микаелян А.О. Флаттер упругой прямоугольной пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии инерционных моментов на кромках 71

CONTENTS

HakobyanV.N., Hakobyan L.V. Stress state of piece-wise homogeneous space with doubly-periodic system of interphase defects 3
Hunanyan A.A. The instability of shear normal wave in elastic waveguide of weakly inhomogeneous material 16
Arabyan M.H. The smoothness of generalized waveforms for the problem of rotation of the shell oscillations depending on certain nonsummable coefficients. 28
Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On a problem of supersonic panel flutter in the presence of concentrated inertial masses and moments 41
Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. Non-classical boundary value problems of elastically fastened on the edge, partially loaded, round orthotropic plate 59
Mikaelyan H.H. Flutter of the elastic rectangular plate in supersonic gas flow at the presence of inertial moments at the edges 71