ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

Մեխանիկա Volume 69, Issue 2, 2016 Mechanics

UDC 517.977.1+517.977.5

GREEN'S FUNCTION APPROACH IN APPROXIMATE CONTROLLABILITY PROBLEMS

Avetisyan A. S., Khurshudyan As. Zh.

Keywords: approximate controllability, system with distributed parameters, Green's function, infinite string, semi-infinite rod, source with switching intensity, parameter optimization

Ключевые слова: приближенная управляемость, система с распределенными параметрами, функция Грина, бесконечная струна, полубесконечный стержень, источник с кусочно-постоянной интенсивностью, оптимизация параметра

Բանալի բառեր. գրեթե ղեկավարելիություն, բաշխված պարամետրերով համակարգ, Գրինի ֆունկցիա, անվերջ լար, կիսաանվերջ ձող, կտոր առ կտոր հաստատուն ինտենսիվությամբ աղբյուր, պարամետրի օպտիմալացում

Метод функции Грина в задачах о приближенной управляемости

Аветисян А. С., Хуршудян Ас. Ж.

В настоящей статье предлагается математический метод решения задач управления, основанный на использовании функции Грина. Записав функцию состаяния с помощью формулы Грина и подставив в требуемые условия, находятся управляющие функции, обеспечивающие приближенную управляемость исследуемой системы, в явном виде. Выбрав управляющую функцию соответствующим образом, требуемые условия обеспечиваются с необходимой точностью.

Приводятся примеры, иллюстрирующие определение управляющих функций. В частности, рассматриваются бесконечная струна, управляемая сосредоточенной силой, полубесконечный стержень, нагреваемый точечным источником тепла, конечный стержень, нагреваемый с границы и оптимизация параметров электрической цепи. Обсуждаются основные результаты вычислений.

Գրինի ֆունկցիայի եղանակը գրեթե ղեկավարելիության խնդիրներում

Ավետիսյան Ա. Ս., Խուրշուդյան Աս. Ժ.

Սույն աշխատանքում առաջարկվում է ղեկավարման խնդիրների լուծման մաթեմատիկական մոտեցում՝ հիմնված Գրինի ֆունկցիայի եղանակի վրա: Վիճակի հավասարման լուծումը ներկայացնելով Գրինի բանաձևով և տեղադրելով պահանջվող վերջնական պայմանների մեջ՝ կառուցվում են ուսումնասիրվող համակարգի գրեթե ղեկավարելիությունն ապահովող ղեկավարումներ՝ բացահայտ տեսքով: Ընտրելով ղեկավարման ֆունկցիան համապատասխան կերպ՝ պահանջվող վերջնական պայմանները բավարարվում են բավարար ճշտությամբ:

Բերվում են ղեկավարումների որոշումը պարզաբանող օրինակներ: Մասնավորապես դիտարկվում են կետային ուժով ղեկավարվող անվերջ լարի, կետային աղբյուրով տաքացվող կիսաանվերջ ձողի և ծայրից տաքացվող վերջավոր հեծանի ղեկավարման և էլեկտրական շղթայի բնութագրիչների օպտիմալացման խնդիր–ներ: Քննարկվում են թվային հաշվարկի հիմնական արդյունքները:

A mathematical approach based on Green‘s function approach allowing to construct controls providing approximate controllability is suggested in the present paper. Representing the solution of governing system via Green’s formula and substituting it in prescribed terminal conditions, we obtain control functions providing approximate controllability of the system under study in explicit form. Choosing appropriate controls, we can provide required accuracy of approximation for prescribed conditions.

Examples illustrating the procedure are described. Particularly, infinite string, controlled by a concentrated force, semi-infinite rod heated by a point heat source, finite rod heated from its boundary and parameter optimization for electrical circuit are considered. Results of computsations are brought.

Introduction

Control systems are investigated in theory in order to be implemented in practice. Before being implemented, system‘s efficiency, expenses, requirements, reliability, areas and term of use, etc. are analyzed. During implementation we need not only a guarantee that it is possible to control the system, i.e. for *controllability*, but also the corresponding controls in explicit form. Nowadays efficient numerical techniques allow to approximate mathematical models of even very complex control systems, therefore theoretically it is much more important to analyze the controllability.

In many types of control problems, depending on state equation, type of control (boundary or distributed) or required terminal state, it is becoming impossible to ensure *exact* controllability, i.e. exact implementation of given conditions in given time, even if at our disposal we have controls from quite wide classes of functions. For instance, the main part of nonlinear control systems, even some linear control systems, systems defined in unbounded domains, etc., are not exactly controllable. Sometimes, by a specific choice of control parameter, prescribed terminal conditions may be implemented approximately:

$$||w_p - w_i|| \leq \varepsilon,$$

where w_p is the prescribed, and w_i is the implemented states, ε is a given positive number, the norm is understood in a reasonable sense.

This concept may arise, for instance, when by a choice of controls the energy of a particular system sufficiently decreases but does not equal to zero exactly.

Particularly, in [1] a class of controls ensuring the approximate controllability (the system is not exact controllable) of a rectangular elastic plate lying on a Winkler base with controllable distribution function subjected to uniformly moving load is explicitly represented. A numerical scheme based on the Bubnov–Galerkin procedure is suggested and the approximate controllability is derived in particular cases.

The approximate controllability of semilinear heat equation with some types of nonlinearities is considered in [2]. It is proved that if the control acts on a bounded subset of the domain, the system is approximate controllable, but not exact controllable. For further detailed review see [3].

There are several numerical approaches to analyze a given system to exact or approximate controllability. For systematic report of those approaches we refer to [3]. Even though those approaches are universal enough, there are some problems on controllability unsolved yet [4].

Approximate controllability may play an important role in long- or infinite-time control problems. In some processes in industry, finance, engineering, we encounter with necessity of achieving required state for the system and holding on that regime for practically a long time. This problem can be viewed as a problem of determination of controls transferring its initial state into a sufficiently narrow neighborhood of prescribed state (resolving approximate controllability problem) and at the same time ensuring that the state will stay in that neighborhood with $t \to \infty$ (ensuring stability). This article is intended to establish solution to the first part of the problem.

In this order here we represent the solution of the governing system via Green's function, and then, substituting it into prescribed terminal conditions, derive implicit representation for admissible controls. Due to non-uniqueness of solution, we chose the parameters of the control in such a way that the terminal conditions are satisfied with required accuracy. The approach is especially useful if Green‘s function of the system under study is known or its construction is easier than the study of the system.

We have chosen Green‘s function approach because it is very convenient in cases when the analysis of the governing boundary value problem is very complicated, but its Green‘s function is known from handbooks or other resources. Green‘s function approach is widely used in deformable body mechanics. In handbook [5], Green‘s functions for many ordinary and partial differential equations and their coupled systems, differential-difference equations, integral and integro-differential equations are brought explicitly. Handbooks [6–8] contain exact solutions of general equations and coupled systems of equations in terms of Green‘s function and not only: the procedure suggested in this article allows to solve control problems also for systems whose explicit solution is defined not necessarily by Green‘s function.

Note, that Green‘s function approach was used to solve control problems earlier, see, for instance, [9–11] and references therein.

1 Green‘s function approach and implicit representation of control functions

Suppose we deal with a mechanical system, the state of which is described by

$$\mathcal{D}[w] = f(\boldsymbol{x}, t, u_d) \quad \text{in} \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times (0, T) := \mathcal{O}, \tag{1.1}$$

subject to boundary condition

$$\mathcal{B}[w] = u_b(t) \quad \text{in} \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \tag{1.2}$$

Assume that the initial state of the system is given:

$$\mathcal{I}[w] = 0 \quad \text{at } t = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}. \tag{1.3}$$

Above $\mathcal{D}[\cdot]$, $\mathcal{B}[\cdot]$ and $\mathcal{I}[\cdot]$ are linear operators of state, boundary and initial conditions, $f : \mathcal{O} \times \mathcal{U}_d \to \mathbb{R}$ is given right-hand side, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ is the finite or infinite domain of the system, in the case when it is finite $\partial\Omega$ is its boundary and $\overline{\Omega}$– the ordinary closure, time moment T is fixed and given. We assume that Green‘s function for those inputs is known or may be constructed. The control can be carried out either via u_d (distributed control) or u_b (boundary control). Our aim is to implement such controls (distributed or boundary) that some required conditions are satisfied at T:

$$\mathcal{T}[w] = 0 \quad \text{at } t = T, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{1.4}$$

The sets of such controls we denote by $\mathcal{U}_d$ and $\mathcal{U}_b$, respectively, and call sets of admissible controls. If the set of admissible (distributed or boundary) controls is non-empty, system (1.1)–(1.3) is called controllable (in corresponding sense). If for some control function (1.4) holds exactly, system (1.1)–(1.3) is called exact controllable, and if $\|\mathcal{T}[w]\| \leq \varepsilon$ uniformly in Ω with sufficiently small $\varepsilon > 0$, it is called approximate controllable. Norm $||\cdot||$ is understood in a reasonable sense.

Denote Green's function of (1.1)–(1.3) by $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)$: it is the solution of the initial–boundary value problem

$$\mathcal{D}^{(\boldsymbol{x},t)}[G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)] = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta(t - \tau) \quad \text{in } \boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\xi}, \tau \in \overline{\mathcal{O}}, \tag{1.5}$$

$$\mathcal{B}_0^{(\boldsymbol{x},t)}[G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)] = 0 \quad \text{in } (\boldsymbol{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \tag{1.6}$$

$$\mathcal{I}_0^{(\boldsymbol{x},t)}[G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)] = 0 \quad \text{at } t = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}. \tag{1.7}$$

Here the superscript $(\boldsymbol{x}, t)$ means that the corresponding operator acts on the indicated variables, and subscript 0 corresponds to homogeneous parts, $\delta(\boldsymbol{x})$ denotes Dirac‘s spatial, and $\delta(t)$– one dimensional functions. If the solution of (1.5)–(1.7) is known, the solution of (1.1)–(1.3) is defined through the expression

$$w(\boldsymbol{x}, t) = \int_0^t \int_{\overline{\Omega}} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)\, W(\boldsymbol{\xi}, \tau, u_d, u_b)\, d\boldsymbol{\xi} d\tau, \tag{1.8}$$

in which $W(\boldsymbol{\xi}, \tau, u_d, u_b)$ is a distribution depending on f, and u_b linearly [5].

Forcing (1.8) to satisfy (1.4) at $t = T$, we derive implicit representation for unknown function:

$$\mathcal{T}\left[\int_0^t \int_{\Omega} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)\, W(\boldsymbol{\xi}, \tau, u_d, u_b)\, d\boldsymbol{\xi} d\tau\right] = 0, \tag{1.9}$$

whether it be distributed or boundary control function.

However, in practice, implicit representation of control function does not contain enough information for control system implementation and one needs their explicit representation. Since, in general, (1.9) is a nonlinear constraint on control function, therefore very often (1.9) cannot be satisfied exactly by any choice of admissible control (boundary or distributed). In such cases we will search for controls providing approximate satisfaction of (1.9) (controllability of (1.1)–(1.3)) with sufficient accuracy.

Suppose $\mathcal{T}\left[w\left(\boldsymbol{x},t\right)\right]=w\left(\boldsymbol{x},T\right)-w_T\left(\boldsymbol{x}\right)$, then

$$\int_0^T\int_\Omega G\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},T,\tau\right)f\left(\boldsymbol{\xi},\tau,u_d\right)d\boldsymbol{\xi}d\tau=w_T\left(\boldsymbol{x}\right)-$$
$$-\int_0^T\int_\Omega G\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},T,\tau\right)W_0\left(\boldsymbol{\xi},\tau,u_b\right)d\boldsymbol{\xi}d\tau,$$

a.e. in Ω, in which

$$W\left(\boldsymbol{\xi},\tau,u_d,u_b\right)=W_0\left(\boldsymbol{\xi},\tau,u_b\right)+f\left(\boldsymbol{\xi},\tau,u_d\right).$$

In particular, if f is linear in u_d, $f\left(\boldsymbol{x},\tau,u_d\right)=f_0\left(\boldsymbol{x},\tau\right)+u_d\left(\tau\right)$ for distributed controls we have

$$\int_0^T\int_\Omega G\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},T,\tau\right)u_d\left(\tau\right)d\boldsymbol{\xi}d\tau=w_T\left(\boldsymbol{x}\right)-\int_0^T\int_\Omega G\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},T,\tau\right)f_0\left(\boldsymbol{\xi},\tau\right)d\boldsymbol{\xi}d\tau-$$
$$-\int_0^T\int_\Omega G\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},T,\tau\right)W_0\left(\boldsymbol{\xi},\tau,u_b\right)d\boldsymbol{\xi}d\tau,$$

a.e. in Ω.

Similar expressions one can obtain also for boundary controls u_b. Right hand sides of derived equations are given, while left hand sides depend on controls that must be determined. Beside derived equalities, control function must satisfy admission conditions of (1.1)–(1.4). Searching unknown function in specific forms (power, trigonometric or other orthogonal polynomials, piecewise functions, etc.), one can make both sides of derived equalities close enough. In case of presence of a free parameter in control function, it is possible to consider the minimization problem

$$||w\left(\boldsymbol{x},T\right)-w_T\left(\boldsymbol{x}\right)||\to\min$$

with reasonable norm.

2 Examples and explicit representation of controls

Now let us demonstrate control function determination procedure in some particular cases, in which Green‘s function approach is interesting to compare with other usual approaches.

Example 1. Control of infinite string vibrations via concentrated controls

Let us consider infinitely long string controlled by a concentrated force with controllable time-dependent intensity. The governing equation for displacement of the string reads as

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f\left(x,t,u\right),\quad\left(x,t\right)\in\mathbb{R}\times\left(0,T\right),\tag{2.1}$$

$$f\left(x,t,u\right)=\mathcal{A}_{[0,T]}\left[u\right]\delta\left(x-x_0\right),\quad x_0\in\mathbb{R},$$

in which c is the velocity of wave propagation in the string, u is the control impact, in general the operator $\mathcal{A}_{[0,T]}\left[u\right]=u\left(t\right)\left[\mathbf{1}\left(t\right)-\mathbf{1}\left(t-T\right)\right]$ is defined like in [1, 12–15], $\mathbf{1}\left(t\right)$ is the unit step function, x_0 is some finite point of the string. Assume the initial state of the string

$$w\left(x,0\right)=w_0\left(x\right),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=w_0^1\left(x\right),\quad x\in\mathbb{R},\tag{2.2}$$

is known. Our aim is to find such bounded distributed controls u, $|u|\leq u_0$, that ensure the terminal conditions

$$w\left(x,T\right)=w_T\left(x\right),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=T}=w_T^1\left(x\right),\quad x\in\mathbb{R},\tag{2.3}$$

with required accuracy ε.

The solution of (2.1)–(2.3) is given by (c.f. (1.8)) [5]

$$\begin{aligned}w\left(x,t\right)=&\\ &=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G\left(x-\xi,t-\tau\right)\left[f\left(\xi,\tau,u\right)+w_0\left(\xi\right)\delta'\left(\tau\right)+w_0^1\left(\xi\right)\delta\left(\tau\right)\right]d\xi d\tau:=\\ &:=\Phi\left(x,t,u\right)+\Psi\left(x,t\right),\end{aligned}\tag{2.4}$$

in which δ' is understood in the sense of distributions,

$$G\left(x,t\right)=\mathbf{1}\left(ct-|x|\right),\ \Phi\left(x,t,u\right)=\frac{1}{2c}\int_0^t\mathbf{1}\left(c\left(t-\tau\right)-|x-x_0|\right)u\left(\tau\right)d\tau,$$

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G\left(x-\xi,t-\tau\right)\left[w_0\left(\xi\right)\delta'\left(\tau\right)+w_0^1\left(\xi\right)\delta\left(\tau\right)\right]d\xi d\tau.$$

It is easy to see that the solution decays when $x\to\pm\infty$. Thus, required controls must satisfy (c.f. (2.3))

$$\Phi\left(x,T,u\right)=w_T\left(x\right)-\Psi\left(x,T\right),\quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=T}=w_T^1\left(x\right)-\left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=T},\tag{2.5}$$

for almost all $x\in\mathbb{R}$. Here

$$\begin{aligned}\Psi\left(x,T\right)=-\theta\left(0\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial G\left(x-\xi,T-\tau\right)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}w_0\left(\xi\right)d\xi+\\ +\theta\left(0\right)\int_{-\infty}^{\infty}G\left(x-\xi,T\right)w_0^1\left(\xi\right)d\xi,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{1}{2c}\int_0^t\delta\left(c\left(t-\tau\right)-|x-a|\right)u\left(\tau\right)d\tau,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(c\left(t-\tau\right)-\left|x-\xi\right|\right)\left[w_0\left(\xi\right)\delta'\left(\tau\right)+w_0^1\left(\xi\right)\delta\left(\tau\right)\right]d\xi d\tau.$$

We have taken into account that in the sense of distributions $\mathbf{1}'=\delta$. Above $\theta\left(0\right)$ is the Heaviside function when $t=0$.

On the left-hand sides of (2.5) we have linear functionals on unknown $u\in\mathcal{U}$, while in the right-hand sides– the values of those functionals on particular admissible controls. Our aim is to find those particular functions. Since x is defined in unbounded domain, we will search for such a u that

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\left|\Phi\left(x,T,u\right)+\Psi\left(x,T\right)-w_T\left(x\right)\right| \text{ and } \max_{x\in\mathbb{R}}\left|\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=T}+\left.\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right|_{t=T}-w_T^1\left(x\right)\right| \tag{2.6}$$

uniformly converges to 0 with $x\to\pm\infty$.

Since in $[0,T]$ the point $x=x_0$ vibrates as u forces, we have

$$u\left(0\right)=\nu w_0\left(x_0\right) \quad \text{and } u\left(T\right)=\nu w_T\left(x_0\right), \tag{2.7}$$

up to normalizing coefficient ν which will be specified, for instance, by introducing dimensionless quantities.

Thus, for u we have to solve boundary value problem (2.5), (2.7). From (2.5) at $x=x_0$ we have

$$\frac{1}{2c}\int_0^T u\left(\tau\right)\mathbf{1}\left(T-\tau\right)d\tau=w_T\left(x_0\right)-\Psi\left(x_0,T\right),$$

$$\frac{\theta\left(0\right)}{2c^2}u\left(T\right)=w_T^1\left(x_0\right)-\left.\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right|_{x=x_0,\ t=T}.$$

Here we have taken into account that

$$\delta\left(c\left(T-\tau\right)\right)=\frac{1}{c}\delta\left(T-\tau\right),\quad \mathbf{1}\left(c\left(T-\tau\right)\right)=\mathbf{1}\left(T-\tau\right).$$

By virtue of (2.7), the second restriction is a kind of consistency requirement for initial and terminal data:

$$\frac{\theta\left(0\right)}{2c^2}w_T\left(x_0\right)=w_T^1\left(x_0\right)-\left.\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right|_{x=x_0,\ t=T}.$$

Thus, we have to solve the integral equation

$$\int_0^T u\left(\tau\right)\mathbf{1}\left(T-\tau\right)d\tau=\mathcal{M},\ \mathcal{M}=2c\left[w_T\left(x_0\right)-\Psi\left(x_0,T\right)\right], \tag{2.8}$$

subjected to boundary conditions (2.7). Naturally, it is non-unique. For instance,

$$u(t)=\nu w_0\left(x_0\right)+\nu\left(w_T\left(x_0\right)-w_0\left(x_0\right)\right)t+u_1 t\left(T-t\right), \tag{2.9}$$

in which $u_1 = const$, satisfies (2.7), (2.8) with

$$u_1 = \frac{6}{T^3}\left[\mathcal{M} - \nu w_0(x_0)\,T - \nu\left(w_T(x_0) - w_0(x_0)\right)\frac{T^2}{2}\right].$$

Substituting (2.9) into (2.5) and choosing x_0 in a proper way, we can make both (2.6) sufficiently small. We also have to take into account that $|u| \leq u_0$.

Among continuous solutions trigonometric (or whatever else) polynomials also can be considered. Indeed, if we seek such a_k, b_k and ω_k that

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \sin(\omega_k t) + b_k \cos(\omega_k t)\right], \tag{2.10}$$

then we have

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\omega_k}\left[a_k\left(1-\cos(\omega_k T)\right) + b_k \sin(\omega_k T)\right] = \mathcal{M}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \nu w_0(x_0)\,, \quad \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \sin(\omega_k T) + b_k \cos(\omega_k T)\right] = \nu w_T(x_0)\,,$$

and can require to minimize some cost functional under these constraints [16].

In finite domains usually Fourier method of variables separation is used, providing efficient numerical scheme. In unbounded domains integral transforms are used, in some cases providing explicit solutions in integral form. Sometimes, d'Alembert's formula is used to derive explicit solution in finite domain [19]. We will compare now the implicit representations provided by Green's function approach and d'Alembert's formula. The general solution of (2.1), (2.2) according to d'Alembert formula is given by

$$w(x,t) = \frac{w_0(x-ct) + w_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} w_0^1(\xi)\,d\xi +$$
$$+\frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \mathcal{A}_{[0,T]}[u](\tau)\,\delta(\xi - x_0)\,d\xi d\tau.$$

Comparing this expression with (2.4) we see that, indeed,

$$\Phi(x,t,u) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \mathcal{A}_{[0,T]}[u](\tau)\,\delta(\xi - x_0)\,d\xi d\tau.$$

$$\Psi(x,t) = \frac{w_0(x-ct) + w_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} w_0^1(\xi)\,d\xi,$$

i.e. both approaches provide the same implicit representation for control functions.

Example 2. Heating of semi-infinite rod

Suppose sufficiently thin semi-infinite rod is heated via point source, i.e. its temperature obeys heat equation on semi-axis:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = f(x,t) \quad \text{in} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,T), \tag{2.12}$$

$$f(x,t) = u(t)\,\delta(x - x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^+,$$

subjected to boundary condition

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 \quad \text{in} \quad x = 0, \quad t \in (0,T), \tag{2.13}$$

where x_0 is fixed, α^2 is the thermal diffusivity of the rod material. The initial temperature distribution in the rod is known:

$$\Theta(x,0) = \Theta_0(x) \quad \text{in} \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.14}$$

Our aim is the explicit representation of heating regimes u, $|u| \leq u_0$, implementing the terminal condition

$$\Theta(x,T) = \Theta_T(x) \quad \text{in} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

with required accuracy ε.

The solution of (2.12)–(2.14) is

$$\begin{aligned}\Theta(x,t) &= \int_0^t \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\left[f(\xi,\tau) + \Theta_0(\xi)\,\delta(\tau)\right] d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t G(x,x_0,t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau + \theta(0)\int_0^\infty G(x,\xi,t)\,\Theta_0(\xi)\,d\xi := \\ &:= \Phi(x,t,u) + \Psi(x,t),\end{aligned}$$

in which [5]

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\alpha^2 t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha^2 t}\right] \right\}.$$

It is easy to verify that Θ is uniformly bounded in $t \in [0,T]$ when $x \to \infty$.

Since the rod is sufficiently thin, we can always assume that all points of its cross section at every fixed moment have the same temperature, and its $x = x_0$ point is heated by u, then $\nu_0 \Theta(x_0,t) = u(t)$, $t \in [0,T]$, particularly, $u(0) = \nu_1 \Theta_0(x_0)$, $u(T) = \nu_2 \Theta_T(x_0)$, or

$$\Phi(x_0,T,u) + \Psi(x_0,T) = \Theta_T(x_0). \tag{2.15}$$

Here ν_0, ν_1 and ν_2 play the same role as in previous example.

Repeating the procedure above, we will finally arrive at the implicit representation for unknown controls

$$\int_0^T K(T-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} = \Theta_T(x_0) - \Psi(x_0, T), \tag{2.16}$$

in which

$$K(t) := G(x_0, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 t}} \left\{1 + \exp\left[-\frac{x_0^2}{\alpha^2 t}\right]\right\}.$$

Besides solutions indicated in the last example, in the case of (2.16) we can also use the form

$$u(t) = \frac{\mathcal{M}}{K(T-t)} L(t),$$

in which L ensures the inclusion $u \in L^2[0,T]$ (say) and satisfies

$$L(0) = \nu \frac{K(T)}{\mathcal{M}} \Theta_0(x_0), \quad \lim_{t \to T} \frac{L(t)}{K(T-t)} = \nu \frac{1}{\mathcal{M}} \Theta_T(x_0), \quad \int_0^T L(t)\,dt = 1.$$

It is a usual procedure to approximate the solution of (2.16) by families of orthogonal functions (Bessel functions, Chebyshev (or whatever else) polynomials, etc.). In any case we have to take into account the restriction $|u| \le u_0$.

A physically reasonable solution may be derived if the set of admissible controls is $\mathcal{U}_e = \left\{u \in L^1[0,T];\ |u| \le u_0,\ \operatorname{supp} u \subseteq [0,T]\right\}$. Then the unknown controls can be expressed as piecewise constant function [1, 14, 18]

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k \theta(t - t_k), \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T,$$

$$u_1 = \nu \Theta_0(x_0), \quad \sum_{k=2}^{n} u_k = \nu \Theta_T(x_0) - \nu \Theta_0(x_0) \quad \sum_{k=1}^{n} |u_k| \le u_0, .$$

It characterizes switching intensity: during the whole interval (t_{k-1}, t_k) the source heats with temperature u_k. After (somehow) explicit representation of controls from (2.16) we face with providing the equality

$$\Phi(x, T, u) + \Psi(x, T) = \Theta_T(x), \tag{2.17}$$

for almost all $x \in \mathbb{R}^+$. It is very useful to mention that the point x_0 can serve as robustness parameter regulating the difference between required and implemented states (e.g. (2.6)).

Example 3. Boundary heating of finite rod

Let finite, sufficiently thin non-homogeneous rod is thermo-isolated from external medium and is heated from its boundary. The temperature of the rod obeys one-dimensional heat equation

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\Theta}{\partial t}-\left(x^2+a^2\right)^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=0 \ \text{ in } \ (x,t)\in(0,l)\times(0,T)\,, \tag{2.18}$$

where $\alpha^2\left(x^2+a^2\right)^2$ is the coordinate-dependent thermal diffusivity, subjected to boundary conditions

$$\Theta(0,t)=u(t),\quad \Theta(l,t)=0,\quad t\in[0,T]\,. \tag{2.19}$$

The initial state of the rod

$$\Theta(x,0)=\Theta_0(x),\quad x\in[0,l]\,, \tag{2.20}$$

is known and our aim is to design boundary heating regime u, $|u|\le u_0$, ensuring exact or approximate satisfaction of terminal state

$$\Theta(x,T)=0,\quad x\in[0,l]\,.$$

From admission conditions we have

$$u(0)=\nu\Theta_0(0),\quad \Theta_0(l)=0,\quad u(T)=0,$$

up to a constant ν standing for correspondence in dimensions.

The solution of (2.18)–(2.20) is

$$\begin{aligned}\Theta\left(x,t\right)&=\int_0^t\int_0^l G\left(x,\xi,t-\tau\right)\left[\Theta_0\left(\xi\right)\delta\left(\tau\right)-u(\tau)(\xi^2+a^2)^2\delta'(\xi)\right]d\xi d\tau=\\&=\theta\left(0\right)\int_0^l G\left(x,\xi,t\right)\Theta_0\left(\xi\right)d\xi-\int_0^t u(\tau)G_0(x,t-\tau)d\tau:=\\&:=\Psi\left(x,t\right)-\Phi\left(x,t,u\right),\end{aligned}$$

in which [5]

$$G\left(x,\xi,t\right)=\frac{2a}{\gamma(l)\left(\xi^2+a^2\right)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(x\right)\varphi_k\left(\xi\right)\exp\left[-\alpha^2\lambda_k^2 t\right],\quad \gamma(x)=\arctan\frac{x}{a},$$

$$G_0(x,t)=\int_0^l G\left(x,\xi,t\right)\left(\xi^2+a^2\right)^2\delta'(\xi)d\xi=-2\pi\sum_{k=1}^{\infty}k\varphi_k(x)\exp\left[-\alpha^2\lambda_k^2 t\right],$$

$$\varphi_k\left(x\right)=\sqrt{x^2+a^2}\sin\left(\frac{\pi k}{\gamma(l)}\gamma(x)\right),\quad \lambda_k^2=a^2\left[\left(\frac{\pi k}{\gamma(l)}\right)^2-1\right].$$

Thus, in this case we have to ensure the equality

$$\Phi\left(x,T,u\right)=\Psi\left(x,T\right),\quad x\in[0,l]. \tag{2.21}$$

Quadratic solution, satisfying consistency conditions is

$$u(t) = \frac{T-t}{T}\Theta_0(0) + u_1 t\,(T-t)\,, \quad t \in [0,T]\,,$$

and $u_1 = const$ must be determined in order to minimize (2.6) or make it small enough. In numerical implementation below we compare results obtained using this form and those– using (2.10).

Since the rod (domain of the problem) is finite, then Green‘s function and Fourier method give exactly the same expressions. Indeed, representing the solution of (2.18) as $\Theta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(t)$, we obtain

$$\dot{g}_k(t) + \alpha^2 \lambda_k^2 g_k(t) = 0, \quad f_k''(x) + \frac{\lambda_k^2}{(x^2+a^2)^2} f_k(x) = 0,$$

which implies

$$g_k(t) = c_{0k} \exp\left[-\alpha^2 \lambda_k^2 t\right]$$

and

$$f_k(x) = \sqrt{x^2+a^2}\left[c_{1k}\sin\left(\sqrt{1+\frac{\lambda_k^2}{a^2}}\gamma(x)\right) + c_{2k}\cos\left(\sqrt{1+\frac{\lambda_k^2}{a^2}}\gamma(x)\right)\right].$$

Here c_{0k}, c_{1k} and c_{2k} are to be determined from boundary and initial conditions (2.19), (2.20):

$$f_k(0) = u_k, \quad f_k(l) = 0, \quad g_k(0) = \Theta_{0k},$$

where u_k are the coefficients of expansion of $u(t)$ by functions $g_k(t)$, and Θ_{0k} are the coefficients of $\Theta_0(x)$ by functions $f_k(x)$.

Example 4. Parameter optimization for time-dependent circuits

The last example that we would like to consider appears in study on non-linear time-dependent electrical oscillations in electronic circuits and allows exact satisfaction of terminal conditions. The phenomenon is described by Hill‘s differential equation in general (including Matthieu‘s equation as a particular case). In [20] it is solved for several circuit parameters in terms of Green‘s function. In particular, when circuit has parameters varying in time according to sawtooth law $u(t) = u_0 t + u_1$ with $u_0 \neq 0$, we have

$$\ddot{y} + u(t)y = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.22}$$

Suppose the input state is given $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_{01}$ and one is interested in obtaining a specific output state $y(T) = y_T$, $y'(T) = y_{0T}$ with the right choice of parameters of the circuit.

Based on Green‘s function expression of (2.22) (see [20], eq.(19)), its general solution is given by

$$y(t) = y_0 \int_0^1 G(t,\tau)\delta'(\tau)d\tau + y_{01}\int_0^1 G(t,\tau)\delta(\tau)d\xi,$$

with

$$G(t,\tau) = -\frac{\pi}{3}u^{\frac{1}{2}}(t)u^{\frac{1}{2}}(\tau)\left[Y_{\frac{1}{3}}\left(\sigma(\tau)\right)J_{\frac{1}{3}}\left(\sigma(t)\right) - J_{\frac{1}{3}}\left(\sigma(\tau)\right)Y_{\frac{1}{3}}\left(\sigma(t)\right)\right],$$

$$\sigma(\tau) = \frac{2u^{\frac{3}{2}}(\tau)}{3u_0^2}.$$

This can be derived also from fundamental solutions of (2.22)– Airy functions [6].

Thus, in order to implement the condition $y(T) = y_T$, $y'(T) = y_{0T}$ one has to ensure the equalities

$$-y_0 \frac{\partial G(t,\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0,\ t-T} + y_{01}G(T,0) = y_T,$$

$$-y_0 \frac{\partial^2 G(t,\tau)}{\partial\tau\partial t}\bigg|_{\tau=0,\ t=T} + y_{01}\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0,\ t=T} = y_{0T}.$$

Rescaling the time by factor T and assuming that all quantities are dimensionless (y is rescaled by y_0, $\dot{y}$– by y_{01}, u_0 by T^{-3} and u_1 by T^{-2}), numerical analysis is done and it is observed that there is a circuit parameter pair (u_0, u_1) for which the implemented $y(1)$, $y'(1)$ can be exactly equal to required (rescaled) y_T, y_{0T} (see Figure 1). The value of that pair is determined as the coordinates of the point of intersection of the contours $y(1) - \frac{y_T}{y_0} = 0$ and $y'(1) - \frac{y_{0T}}{y_{01}} = 0$ in the u_0u_1 plane. Particularly, if $\frac{y_T}{y_0} = 0.5$, $\frac{y_{0T}}{y_{01}} = 1$, we obtain $u_0 = -17.56$ and $u_1 = 7.372$. In this case $u(t)$ changes its sign in $[0,1]$.

Figure 2 shows the same contours for the case $\frac{y_T}{y_0} = 2$, $\frac{y_{0T}}{y_{01}} = 1$. Then $u_0 = -93.8$ and $u_1 = 123.8$, therefore $u(t) > 0$ for all $t \in [0,1]$.

2.1 Numerical implementation

In order to justify the described procedure, we did numerical computations in Examples 2 and 3 considered above. In Example 2 we have introduced the dimensionless variables and functions

$$\tilde{x} = \frac{x}{x_0},\quad \tilde{t} = \frac{t}{T},\quad \tilde{\Theta} = \frac{\Theta}{\Theta^0},\quad \tilde{u} = \frac{T}{\Theta^0 x_0}u,\quad \tilde{\alpha}^2 = \frac{T}{\Theta^0 x_0^2}\alpha^2,$$

in which $\Theta^0 = const$ is the reference temperature (for simplicity we take the intensity of initial temperature). Figures 3 and 4 shows the point plot of difference between required and implemented terminal states for quadratic and piecewise constant control laws ($\tilde{\alpha} = 1.515$). The maximal difference occurs at $\tilde{x} = 0.355$ and is equal to 0.0674

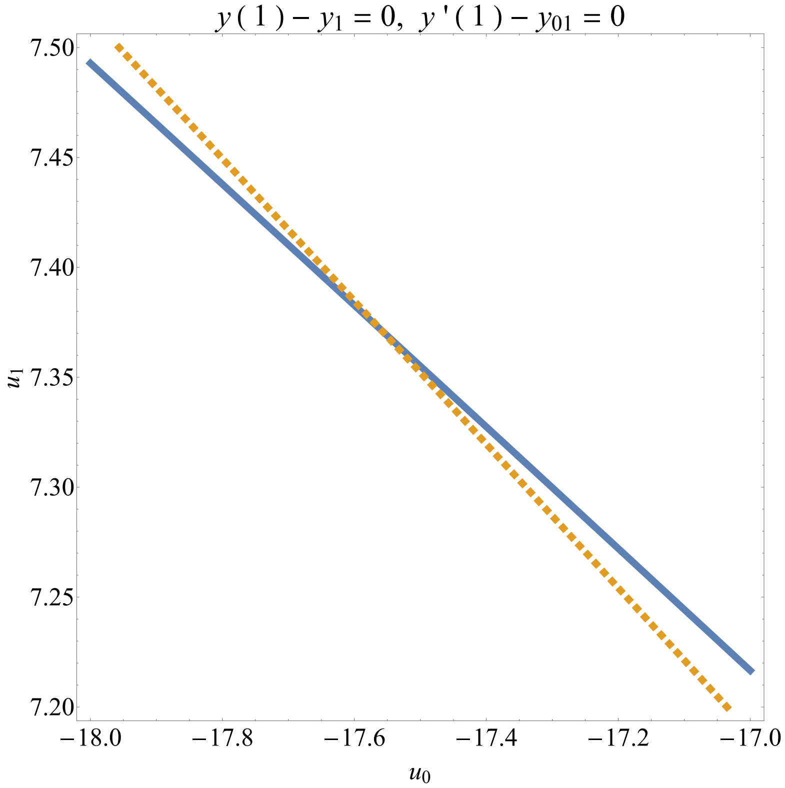


Figure 1: Contour plots of required and implemented states in the u_0u_1 plane: $y(1) = \dfrac{y_T}{y_0}$ (solid line) and $y'(1) = \dfrac{y_{0T}}{y_{01}}$ (dashed line)

and at $\tilde{x} = 0.36$ and is equal to 0.06, correspondingly.

In Example 3 we have introduced the dimensionless variables and quantities

$$\tilde{x} = \frac{x}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{\Theta} = \frac{\Theta}{\Theta^0}, \quad \tilde{u}_0 = \frac{u_0}{\Theta^0}.$$

The suggested procedure was implemented in Wolfram Mathematica 10.3 for entries $a = 1$, $\Theta_0\,(x) = \cos\,(\pi x)$, then $u(t) = (1 + u_1 t)(1 - t)$ (we omit $\tilde{}$ over dimensionless expressions). The series in Green‘s function expression is limited by 200 terms.

Numerical computations showed that $\Psi\,(x, T) \equiv 0$ in $x \in [0, 1]$, and for $u_1 = -0.5$

$$\max_{x\in[0,1]} |\Phi\,(x, T, u) - \Psi\,(x, T)| = |\Phi\,(x, T, u) - \Psi\,(x, T)|\,\big|_{x=0.5} = 10^{-4},$$

which decreases when x approaches the boundaries. Due to initial distribution of temperature It seems to be physically reasonable. One can manipulate further with u_1 to make the error smaller, but on this stage it is already satisfactory. For instance, when $u_1 = -1$, the error is of 10^{-6} order, and it decreases with decrease of u_1 (from

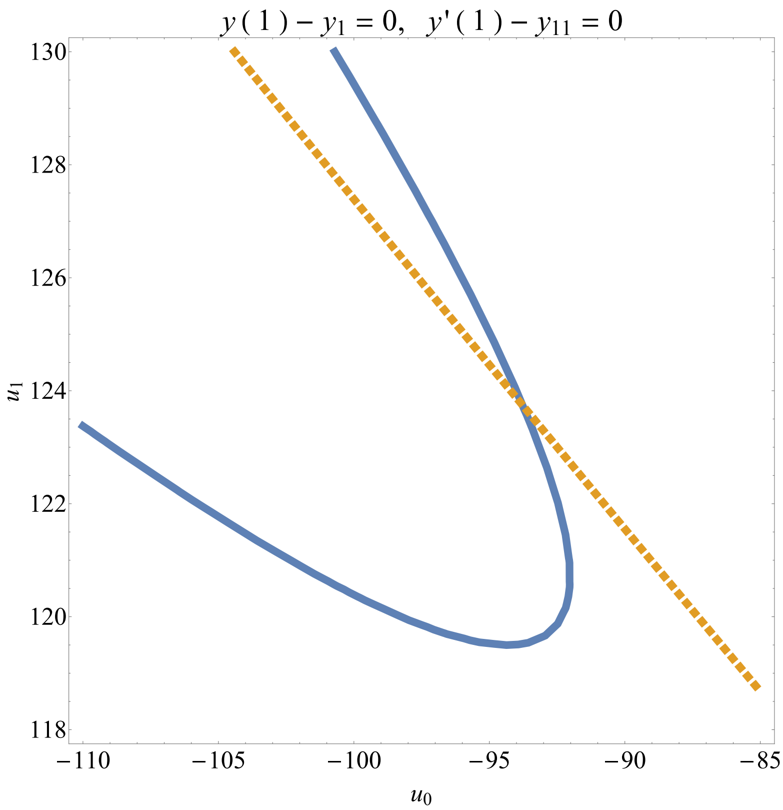


Figure 2: Contour plots of required and implemented states in the u_0u_1 plane: $y(1) = \dfrac{y_T}{y_0}$ (solid line) and $y'(1) = \dfrac{y_{0T}}{y_{01}}$ (dashed line)

-0.5 in negative direction) and decreases with increase of u_1 (from -0.5 in positive direction).

The same tendency is seen for $0 < a < 1$ and several other initial conditions like $\Theta_0(x) = \sin(\pi x)$ or $\tan(\pi x)$, etc., implying $u(t) = u_1 t(1-t)$.

Suppose now $a = 0.5$, $\Theta_0(x) = 1 - x$, then $u(t) = (1 + u_1 t)(1 - t)$ (admission conditions are satisfied) and the implementation of (2.21) is plotted in Figure 5. The error is of 10^{-6} order, which in this stage is satisfactory.

Figure 5 shows how efficient the boundary quadratic heating regime is for a particular system. Let us now find the characteristics of boundary heating regime (2.10) minimizing (more precisely– making small enough) the error of approximation. We seek the control in the form $u(t) = \beta \sin(\omega t + \epsilon)$. In Figure 6 (2.21) is plotted when $6\omega = 5\pi$, $6\epsilon = \pi$ and $\beta = -0.3165$ (admission conditions will be satisfied when $\Theta_0(x)$ has a multiplier $\left.\dfrac{\beta}{2}\right)$. The refinement is done with manipulating the frequency ω (mainly), even though it can be done either by β and ϵ or both. During computations we keep 200, 250 and 500 terms in the expression for Green‘s sum, and the result is

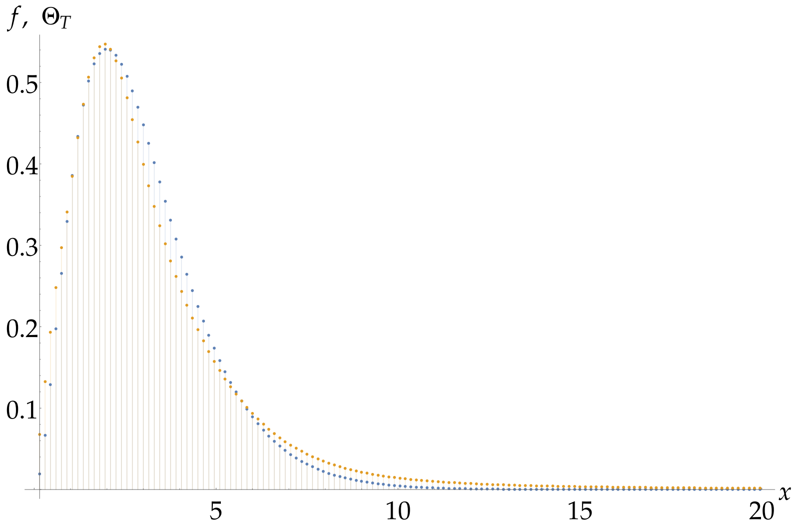


Figure 3: The left (with greater initial value) and right sides of (2.17) for $\tilde{\Theta}_0(\tilde{x}) = \dfrac{\tilde{x}}{1+\tilde{x}^2}$, $\tilde{\Theta}_T(\tilde{x}) = \tilde{x}^2 \exp\left[-0.5\tilde{x}\right]$ and quadratic control

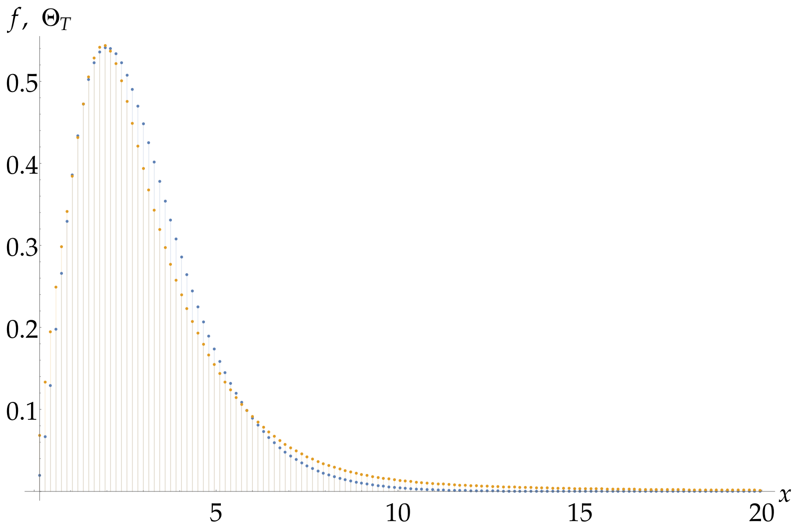


Figure 4: The left (with greater initial value) and right sides of (2.17) for $\tilde{\Theta}_0(x) = \tilde{x}(1+\tilde{x}^2)^{-1}$, $\tilde{\Theta}_T(\tilde{x}) = \tilde{x}^2 \exp\left[-0.5\tilde{x}\right]$ and piecewise constant control

almost the same.

Even though the error in the case of quadratic boundary heating is less than that in the last case, it takes much less computational time in the second case than in the first one: in this sense the second boundary heating regime is efficient.

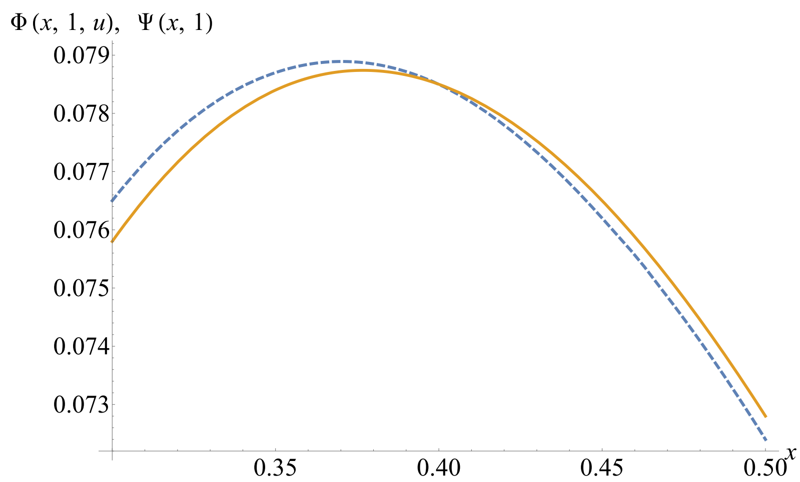


Figure 5: The graphs of $\Phi(x, 1, u)$ (dashed) and $\Psi(x, 1)$ (thick) for $u(t) = (1 - 1.3412t)(1 - t)$

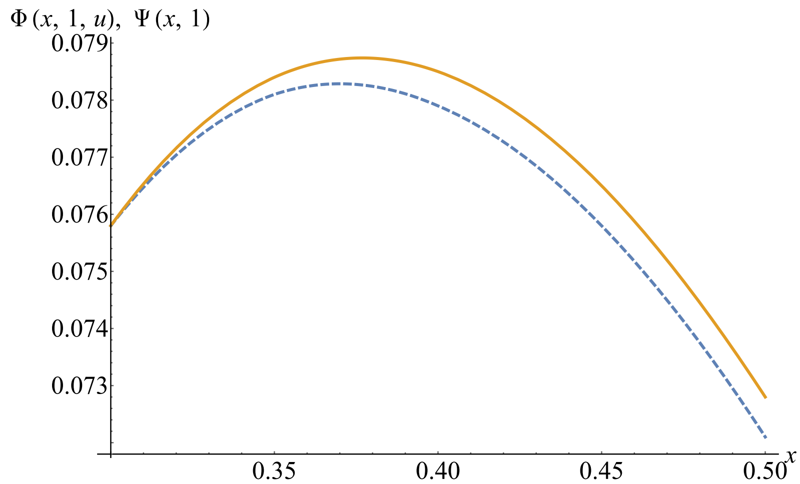


Figure 6: The graphs of $\Phi(x, 1, u)$ (dashed) and $\Psi(x, 1)$ (thick) for $u(t) = -0.3165 \sin\left(\frac{5\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right)$

Conclusion

Thus, Green's function approach provides numerically efficient mathematical tool for ensuring approximate controllability for particular systems and, at the same time, algorithm for corresponding controls derivation. The procedure is explained as for processes taking place in unbounded domains, as well as those taking place in finite ones. It is a useful tool to handle as distributed, as well as boundary control problems.

It provides explicit formulas which simplify qualitative and quantitative analysis of control system under investigation. Numerical implementation of the algorithm in semi-infinite and finite domains showed its efficiency. For a particular form solution the approximation error turned to be of 10^{-6} order when we keep 200 terms in Green‘s series (Example 3).

Consistency of the approach with d‘Alembert‘s and Fourier‘s methods is shown on particular examples.

The algorithm can be applied for much more complicated types of equations, their coupled systems arising in various applied problems: continuum mechanics, thermo- and electro-elasticity, wave-guides theory, to investigate control and optimization problems for non–homogeneous wave-guides and wave-guides with rough boundaries, etc. Further simplification of its implementability in general is needed.

Acknowledgements The second author would like to thank candidate of physical and mathematical sciences $\boxed{\text{H. Hovhannisyan}}$ for his impressible lectures on "Generalized Functions and Integral Transforms", when he explained the advantages of Green‘s function approach.

We acknowledge Prof. Ed. Grigoryan who has shown how Green‘s function approach works in cases when other approaches fail (see, for instance, his smart solution to the problem of "cork" [21]). Special thanks to Sh. Arakelyan and R. Ghazaryan for useful discussions.

References

[1] Jilavyan S. H., Khurshudyan As. Zh., Topology optimization for elastic base under rectangular plate subjected to moving load // Archives of Control Sciences, 2015, vol. 25 (LXI), issue 3, pp. 289–305.

[2] Zuazua E., Approximate controllability for semilinear heat equations with globally Lipschitz nonlinearities // Control and Cybernetics, 1999, vol. 28, issue 3, pp. 665–683.

[3] Glowinski R., Lions J.–L., He J., *Exact and Approximate Controllability for Distributed Parameter Systems: A Numerical Approach.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge, Cambridge University Press, 2008, 470 p.

[4] *Unsolved Problems in Mathematical Systems & Control Theory.* Part 7. Controllability, Observability. Edited by Blondel V., Megretski Al. Princeton, Oxford, Princeton University Press, 2004, 334 p.

[5] Butkovskiy A. G., Pustil'nikov L. M., *Characteristics of Distributed-Parameter Systems. Handbook of Equations of Mathematical Physics and Distributed-Parameter Systems.* Dordrecht, Springer, 1993, 386 p.

[6] Polyanin A. D., Zaitsev V. F., *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2003, 817 p.

[7] Polyanin A. D., *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2002, 800 p.

[8] Polyanin A. D., Zaitsev V. F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2012, 1912 p.

[9] Lurie K. A., *Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems*. New York, Springer, 1993, 499.

[10] Schulz M., *Control Theory in Physics and other Fields of Science: Concepts, Tools, and Applications*. Berlin, Springer, 2006, 300 p.

[11] Moshrefi-Torbati M., Simonis de Cloke C., Keane A. J., Vibrational optimization of a mass loaded stepped plate // Journal of Sound and Vibration, 1998, vol. 213, issue 5, pp. 865–887.

[12] Khurshudyan Am. Zh. Khurshudyan As. Zh., Optimal distribution of viscoelastic dampers under elastic finite beam under moving load // Proceedings of NAS of Armenia, Series Mechanics, 2014, vol. 67, issue 3, pp. 56–67 (in Russian).

[13] Khurshudyan As. Zh., The Bubnov–Galerkin method in control problems for bilinear systems // Automation and Remote Control, 2015, vol. 76, issue 8, pp. 1361–1368.

[14] Khurshudyan As. Zh., Generalized control with compact support for systems with distributed parameters // Archives of Control Sciences, 2015, vol. 25 (LXI), issue 1, pp. 5–20.

[15] Khurshudyan As. Zh., Generalized control with compact support of wave equation with variable coefficients // International Journal of Dynamics and Control, 2015, DOI:10.1007/s40435-015-0148-3.

[16] Betts J. T., *Methods of Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*. 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2010.

[17] Arakelyan Sh. Kh., Khurshudyan As. Zh., The Bubnov–Galerkin procedure in problems of mobile (scanning) control for system with distributed parameters // Proceedings of NAS of Armenia, Series Mechanics, 2015, vol. 68, issue 3, pp. 54–75.

[18] Sarkisyan S. V., Jilavyan S. H., Khurshudyan As. Zh., Structural optimization of an inhomogeneous infinite layer in problems on propagation of periodic waves // Mechanics of Composite Materials, 2015, vol. 51, issue 3, pp. 277–284.

[19] Il'in V. A., Moiseev E. I., Optimization of the boundary control by shift or elastic force at one end of string in a sufficiently long arbitrary time // Automation and Remote Control, 2008, vol. 69, issue 3, pp. 354–362.

[20] Thapliyal P. S., Indu B. D., Green's functions in non-linear oscillations // International Journal on of Mathematical Education in Science and Technology, 1979, vol. 10, issue 2, pp. 205–209.

[21] Grigoryan E. Kh., Solution of problem of finite elastic inclusion, terminating to the boundary of semi-plane // Proceedings of the Yerevan State University. Natural Sciences, 1981, issue 3, pp. 32–43 (in Russian).

Information about authors

Avetisyan Ara S., Dr. of Phys. Math. sciences, Corresponding member of National Academy of Sciences of Armenia
Affiliation: Department on Dynamics of Deformable Systems and Connected Fields, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia
Address: 24B Baghramyan Ave., 0019 Yerevan, Armenia
Tell: +374 93 004–455
E-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com

Khurshudyan Asatur Zh., PhD in Mechanics
Affiliation: Department on Dynamics of Deformable Systems and Connected Fields, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia
Address: 24B Baghramyan Ave., 0019 Yerevan, Armenia
E-mail: khurshudyan@ysu.am

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №2, 2016 Механика
УДК 539.3

ON A STRESS STATE OF ORTHOTROPIC PLANE WITH ABSOLUTELY RIGID INCLUSION

Hakobyan V., Dashtoyan L.

Ключевые слова: ортотропная плоскость, Кулоновское трение, абсолютно жёсткое включение, смешанная задача
Key words: orthotropic plane, Coulomb friction, absolutely rigid, mixed boundary value problem
Բանալի բառեր: օրթոտրոպ հարթություն, Կուլոնյան շփում, բացարձակ կոշտ ներդրակ, խառը խնդիր

Drawing on the discontinuous solutions of the elasticity theory for orthotropic plane, the study purports to offer exact solutions to mixed boundary value problems for orthotropic plane with absolutely rigid thin inclusion on one of the major directions, when one edge of it is wholly coupled with plane and the other side is in contact with plane under the condition of Coulomb friction.

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л.

О напряжённом состоянии ортотропной плоскости с абсолютно жёстким включением

В настоящей работе, на основе разрывных решений теории упругости для ортотропной плоскости, построено точное решение смешанной задачи для ортотропной плоскости, которая на одном из главных направлений содержит абсолютно жёсткое тонкое включение, одна из длинных сторон которого полностью сцеплена с плоскостью, а другая сторона контактирует с ней в условиях сухого трения.

Հակոբյան Վ.Ն., Դաշտոյան Լ.Լ.

Բացարձակ կոշտ ներդրակ պարունակող օրթոտրոպ հարթության լարվածային վիճակի մասին

Ուսումնասրված է օրթոտրոպ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղություններից մեկի վրա պարունակում է բացարձակ կոշտ ներդրակ, որի երկար կողմերից մեկը ամրակցված է հիմքին, իսկ մյուս կողմի և հիմքի կոնտակտի տեղամասում տեղի ունի շփման Կուլոնի օրենքը: Ստացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները երեք սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի տեսքով և կառուցվել է նրա փակ լուծումը: Ստացվել են պարզ բանաձևեր ներդրակի պտտման անկյան և կոնտակտի տեղամասերում գործող լարումների որոշման համար: Ցույց է տրված, որ կոնտակտային լարումները ներդրակի ծայրակետերում, բացի երեք տիպի աստիճանային եզակիություններից ունեն նաև, շփման առկայությամբ պայմանավորված, լոգարիթմական եզակիություն:

Introduction

A large number of research papers focus on the assessment of stress characteristics of elastic papers are devoted to study stress state of elastic massive bodies with thin acute-angled absolutely rigid inclusions within different models of contact of matrix with inclusion. The problems outlined above largely differ both depending on the model of contact of inclusion with matrix and elastic characteristics in case of compound bodies in boundary region could have logarithmic and some types of power singularities. Among these researches are papers [1-5], closest to the stated problem in present paper, as well as papers, given in [1]. In mentioned papers the exact solutions for some problems on stress state of homogeneous and compound elastic planes and space with thin acute-angled rigid inclusions, one edge of which is rigidly coupled and the other is in smooth contact with matrix is built. However, the case where one of the edges is rigidly coupled with matrix and the other is in contact with it by Coulomb friction, as the analysis suggests, is addressed for the first time.

1. The statement of problem and governing equations. Let the orthotropic elastic plane in Cartesian coordinate system Oxy, the directions of axes of which coincide with major directions of orthotropy of planes' material, contain the absolutely rigid thin inclusion with length $2a$, filled the interval $(-a,a)$ on line $y=0$. One of the long edges of inclusion is wholly coupled with plane and the other is in contact under conditions of Coulomb friction. It is assumed that the plane be deformed under action of moment M_0, normal and horizontal concentrated loads P_0 and T_0, applied in midpoint $x=a$ of inclusion (Fig.1). These loads do not lead to detachment the inclusion from matrix.

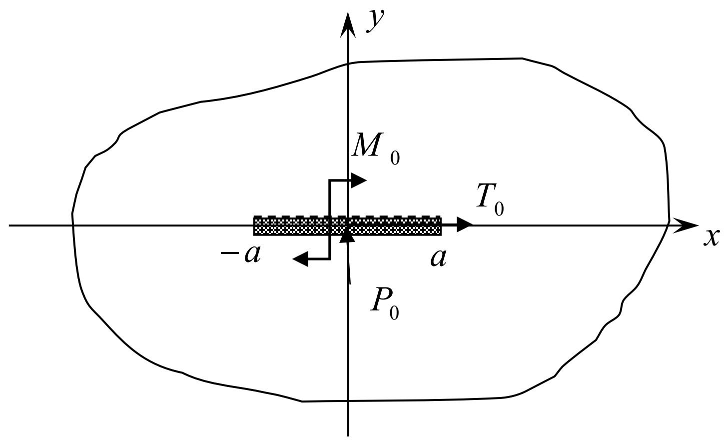


Fig.1

Problem is to determine the angle of rotation of inclusion and contact stresses, acting in regions of contacts of inclusion with matrix in explicit form, as well as to reveal the character of their changes depending on elastic characteristics of planes' material.

The stated problem can be mathematically represented as a following boundary value problem:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(+)}(x,+0)=\sigma_y^{(-)}(x,-0) \\ \tau_{xy}^{(+)}(x,+0)=\tau_{xy}^{(-)}(x,-0) \\ U_+(x,+0)=U_-(x,-0) \\ V_+(x,+0)=V_-(x,-0) \end{cases} \quad (|x|>a); \tag{1.1a}$$

$$\begin{cases} U_-\left(x,-0\right)=\delta \\ V_+\left(x,+0\right)=V_-\left(x,-0\right)=\gamma x+\gamma_0 \quad \left(\left|x\right|<a\right), \\ \tau_{xy}^{(+)}\left(x,+0\right)=k\sigma_y^{(+)}\left(x,+0\right) \end{cases} \tag{1.1b}$$

$U_\pm\left(x,y\right)$ and $V_\pm\left(x,y\right)$ are horizontal and normal components of displacements of points of corresponding semi-planes, each of which is satisfying Lame equations for orthotropic body in domain and is related with components of stress tensor $\sigma_y^{(\pm)}\left(x,y\right)$, $\tau_{xy}^{(\pm)}\left(x,y\right)$ by well-known formulas [6]. γ, γ_0 and δ are constants, determining the angle of rotation and rigid displacements of inclusion.

In order to solve the stated problem (1) we use the discontinuous solutions for orthotropic plane, obtained in [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dU_\pm(x,0)}{dx} &= -\frac{a_1}{\pi}\int_L \frac{V'(s)}{s-x}ds-\frac{b_1}{\pi}\int_L \frac{\tau(s)}{s-x}ds\pm\frac{1}{2}U'(x); \\ \frac{dV_\pm(x,0)}{dx} &= \frac{a_2}{\pi}\int_L \frac{U'(s)}{s-x}ds-\frac{b_2}{\pi}\int_L \frac{\sigma(s)}{s-x}ds\pm\frac{1}{2}V'(x); \\ \sigma_y^{(\pm)}(x,0) &= \frac{c_1}{\pi}\int_L \frac{V'(s)}{s-x}ds-\frac{a_1}{\pi}\int_L \frac{\tau(s)}{s-x}ds\pm\frac{1}{2}\sigma(x); \\ \tau_{xy}^{(\pm)}(x,+0) &= \frac{c_2}{\pi}\int_L \frac{U'(s)}{s-x}ds+\frac{a_2}{\pi}\int_L \frac{\sigma(s)}{s-x}ds\pm\frac{1}{2}\tau(x) \end{aligned} \qquad \left(-\infty<x<\infty\right) \tag{1.2}$$

$\sigma(x)$, $\tau(x)$, $V'(x)$ and $U'(x)$ be jumping functions of normal and horizontal components of stresses and displacements correspondingly

$$a_1=\frac{(a_{12}-\sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1+\mu_2)};\quad a_2=\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}a_1;\quad b_1=\frac{(1+\sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\mu_{12}\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1+\mu_2)};$$

$$b_2=\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}b_1;\qquad c_1=\frac{\mu_{12}(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1+\mu_2)};\qquad c_2=\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}c_1.$$

$a_{ij}=c_{ij}/c_{33}$; $\mu_{12}=c_{33}$ (c_{ij} $\left(i,j=1,2\right)$ – (Cauchy tensor components).

Using relations (1.2) and satisfying the conditions (1.1b) on inclusion, previously differentiating the conditions for displacements by variable x and taking into account that the difference between normal displacements of points for both sides of inclusion are the same, i.e. $V\left(x\right)=0$ we come to the following system of singular integral equations to determine the unknown jumping functions:

$$
\begin{cases}
U'(x)+\dfrac{2b_1}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\tau(\xi)}{\xi-x}d\xi=0\\
\dfrac{a_2}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{U'(\xi)}{\xi-x}d\xi-\dfrac{b_2}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\sigma(\xi)}{\xi-x}d\xi=\gamma\\
\tau(x)-k\sigma(x)+\dfrac{2c_2}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{U'(\xi)}{\xi-x}d\xi+\dfrac{2a_2}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\sigma(\xi)}{\xi-x}d\xi+\dfrac{2ka_1}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\tau(\xi)}{\xi-x}d\xi=0.
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

The system of equations (1.3) should be considered with conditions of equilibrium of inclusion and the equality to zero of displacements at the end-points of inclusion, i.e. with conditions

$$
\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a}\sigma(x)dx=P_0;\quad \int_{-a}^{a}\tau(x)dx=T_0;\\
&\int_{-a}^{a}x\sigma(x)dx=M_0;\quad \int_{-a}^{a}U'(x)dx=0.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Thus the solution of stated problem is reduced to the solution of system of singular integral equations (1.3) under conditions (1.4).

2. Solution of governing equations. The closed solution of system (1.3) should be built under conditions (1.4). In this order, from second equation (1.3), using the first and last conditions (1.4), we express function $U'(x)$ by function $\sigma(x)$. We get

$$
U'(x)=\frac{b_2}{a_2}\sigma(x)+\frac{\pi\gamma x-b_2P_0}{\pi a_2\sqrt{a^2-x^2}}
\tag{2.1}
$$

Substituting the values for $U'(x)$ from (2.1) into the first and last equations (1.3), after some transformations, the following system is obtained:

$$
\begin{cases}
\sigma(x)+\dfrac{a_1^*}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\tau(\xi)d\xi}{\xi-x}=f_1(x)\\
\tau(x)+\dfrac{a_2^*}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi-x}+\dfrac{kb_1^*}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\tau(\xi)d\xi}{\xi-x}=f_2(x),
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

Here

$$
f_1(x)=-\frac{\pi\gamma x-b_2P_0}{\pi a_2\sqrt{a^2-x^2}};\ f_2(x)=-2\gamma c_2+kf_1(x);\ a_1^*=2a_2b_1/b_2;
$$

$$
a_2^*=2\left(c_2b_2+a_2^2\right)/a_2;\ b_1^*=2\left(a_2b_1+a_1b_2\right)/\mathrm{b}_2.
$$

Let the functions $\varphi_j(x)$ be

$\varphi_j(x) = \sigma(x) + \lambda_j \tau(x) \quad (j = 1,2),$

$\lambda_j \quad (j = 1, 2)$ be the solutions of equation $\lambda^2 a_2^* - kb_1^* \lambda - a_1^* = 0$. The system of equations (2.2) will be represented as two independent singular integral equations of second kind:

$$\varphi_j(x) + \frac{q_j}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi_j(\xi) d\xi}{\xi - x} = g_j(x) \qquad (j = 1,2) \tag{2.3}$$

Here

$$g_j(x) = -\gamma A_0^{(j)} - \frac{\gamma A_1^{(j)} x - A_2^{(j)}}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$A_0^{(j)} = 2c_2 \lambda_j; \; A_1^{(j)} = \frac{1 + k\lambda_j}{b_2}; \; A_2^{(j)} = \frac{(1 + k\lambda_j) P_0}{\pi};$$

$$q_j = a_2^* \lambda_j = \left(kb_1^* + (-1)^{j+1} \sqrt{(kb_1^*)^2 + 4a_1^* a_2^*} \right) / 2.$$

In this case, the first three conditions (1.4) are written in the following form using functions $\varphi_j(x)$

$$\int_{-a}^{a} \varphi_j(x) dx = P_0^{(j)}; \; \int_{-a}^{a} [\lambda_2 \varphi_1(x) - \lambda_1 \varphi_2(x)] x dx = M_0;$$
$$\left(P_0^{(j)} = P_0 + \lambda_j T_0; \; j = 1,2 \right). \tag{2.4}$$

The solutions of the system of singular integral equations (2.3), satisfying the first of conditions (2.4) are given by the formulas [1,6]:

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1+q^2} \left[g_j(x) - \frac{q_j X_j^+(x)}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{g_j(s)}{X_j^+(s)(s-x)} ds \right] - \frac{P_0^{(j)} \sin \pi\gamma_j}{\pi \sqrt{G_j}} X_j^+(x) \tag{2.5}$$

Here $X_j^+(x) = -\sqrt{G_j} / \omega_j(x)$ be the values of analytic in whole plane cutting along interval $(-a, a)$ functions $X_j(z) = (z+a)^{-\gamma_j} (z-a)^{\gamma_j - 1} \quad (j = 1,2)$ on the upper bank of slit, where

$$\omega_j(x) = (a+x)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j};$$

$$\gamma_j = \frac{1}{2\pi i} \ln|G_j| + \frac{\vartheta_j}{2\pi}; \; 0 < \vartheta_j = \arg G_j < 2\pi; \; G_j = \frac{1 - iq_j}{1 + iq_j}.$$

Taking into account that the numbers $\lambda_j \; (j = 1,2)$ are real, it is not difficult to state that $|G_j| = 1$. Therefore, the exponents $\gamma_j = \vartheta_j / 2\pi, \; (j = 1,2)$ are real.

Then, substituting the values of functions $g_j(x)$ in (2.5) and taking into account the values of integrals [6,7]

$$\int_{-a}^{a}\frac{\omega_j(s)ds}{s-x}=-\frac{\pi}{\sin(\pi\gamma_j)}\left[\cos(\pi\gamma_j)\omega_j(s)+x+a(2\gamma_j-1)\right]\quad(|x|<a)$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{\omega_j(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}(s-x)}=\frac{\pi}{\cos(\pi\gamma_j)}\left[\frac{\sin(\pi\gamma_j)\omega_j(x)}{\sqrt{a^2-x^2}}-1\right]\quad(|x|<a),$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{s\omega_j(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}(s-x)}=-\frac{a(2\gamma_j-1)}{\cos(\pi\gamma_j)}+\frac{\pi x}{\cos(\pi\gamma_j)}\left[\frac{\sin(\pi\gamma_j)\omega_j(x)}{\sqrt{a^2-x^2}}-1\right]\quad(|x|<a)$$

for functions $\varphi_j(x)$ the following expressions are obtained:

$$\varphi_j(x)=B_0^{(j)}+\frac{B_1^{(j)}(x)}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{B_2^{(j)}(x)}{\omega_j(x)};\quad(|x|<a;\ j=1,2)\tag{2.6}$$

Here we use the following notation:

$$B_0^{(j)}=-\gamma A_0^{(j)}\frac{1+q_j\mathrm{ctg}(\pi\gamma_j)}{1+q_j^2};\ B_1^{(j)}=e_1^{(j)}x+e_0^{(j)};\ B_2^{(j)}=d_1^{(j)}x+d_0^{(j)};$$

$$e_1^{(j)}=-\gamma e_{1j}^*;\ e_0^{(j)}=\frac{A_2^{(j)}\left(1-q_j\mathrm{tg}(\pi\gamma_j)\right)}{1+q_j^2};\ d_1^{(j)}=-\gamma d_{1j}^*;\ d_0^{(j)}=-\gamma d_{0j}^*+\mathrm{m}_{0j}^*;$$

$$d_{0j}^*=\frac{a_0^{(j)}q_j}{1+q_j^2}\left[\frac{A_0^{(j)}}{\sin(\pi\gamma_j)}+\frac{A_1^{(j)}}{\cos(\pi\gamma_j)}\right];\ \mathrm{m}_{0j}^*=\frac{P_0^{(j)}\sin(\pi\gamma_j)}{\pi}+\frac{q_jA_2^{(j)}}{(1+q_j^2)\cos(\pi\gamma_j)};$$

$$e_{1j}^*=\frac{A_1^{(j)}\left(1-q_j\mathrm{tg}(\pi\gamma_j)\right)}{1+q_j^2};\ d_{1j}^*=\frac{q_j}{1+q_j^2}\left[\frac{A_0^{(j)}}{\sin(\pi\gamma_j)}+\frac{A_1^{(j)}}{\cos(\pi\gamma_j)}\right];\ a_0^{(j)}=a(2\gamma_j-1).$$

Now we can determine the angle of rotation γ of inclusion. In this order we use the second relation from (2.4). Substituting the values for functions $\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$ from (2.6) in this relation, and calculating obtained integrals, after some simplifications, we find

$$\gamma=\frac{M+\lambda_1D_2-\lambda_2D_1}{\lambda_1E_2-\lambda_2E_1},\tag{2.7}$$

here

$$D_j=-\frac{\pi a_0^{(j)}}{\sin(\pi\gamma_j)}m_{0j}^*;$$

$$E_j = \frac{\pi a^2}{2} e_{1j}^* + \frac{\pi a^2 \left(1 - 2\gamma_j \left(1 - \gamma_j\right)\right)}{\sin\left(\pi\gamma_j\right)} d_{1j}^* - \frac{\pi a_0^{(j)}}{\sin\left(\pi\gamma_j\right)} d_{0j}^* \ \left(j = 1, 2\right).$$

Now we can determine normal and shear stresses, acting on long edges of inclusion. Using formulas

$$\sigma\left(x\right) = \frac{\lambda_2 \varphi_1\left(x\right) - \lambda_1 \varphi_2\left(x\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}; \qquad \tau\left(x\right) = \frac{\varphi_1\left(x\right) - \varphi_2\left(x\right)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

first we determine the jump-functions of stresses. Substituting the expression for $\varphi_j\left(x\right)$ from (2.6), we get

$$\sigma\left(x\right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left\{\lambda_2 B_0^{(1)} - \lambda_1 B_0^{(2)} + \frac{\lambda_2 B_1^{(1)}\left(x\right) - \lambda_1 B_1^{(2)}\left(x\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{\lambda_2 B_2^{(1)}\left(x\right)}{\omega_1\left(x\right)} - \frac{\lambda_1 B_2^{(2)}\left(x\right)}{\omega_1\left(x\right)}\right\};$$

$$\tau\left(x\right) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left\{B_0^{(1)} - B_0^{(2)} + \frac{B_1^{(1)}\left(x\right) - B_1^{(2)}\left(x\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{B_2^{(1)}\left(x\right)}{\omega_1\left(x\right)} - \frac{B_2^{(2)}\left(x\right)}{\omega_1\left(x\right)}\right\}. \tag{2.8}$$

Using obtained relations and two last formulas (1.2) the following formulas is obtained for normal contact stresses:

$$\sigma_y^{\pm}\left(x, \pm 0\right) = A_{\pm} + \mathrm{B} \ln\left|\frac{a - x}{a + x}\right| \pm \frac{K_I\left(x\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{K_I^{(1)}\left(x\right)}{\omega_1\left(x\right)} + \frac{K_I^{(2)}\left(x\right)}{\omega_2\left(x\right)}. \tag{2.9}$$

In this case

$$A_{\pm} = -\frac{1}{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)}\left[a_1\left(\frac{d_1^{(2)}}{\sin\left(\pi\gamma_2\right)} - \frac{d_1^{(1)}}{\sin\left(\pi\gamma_1\right)}\right) \mp \frac{\left(\lambda_2 B_0^{(1)} - \lambda_1 B_0^{(2)}\right)}{\pi} + a_1\left(e_1^{(1)} - e_1^{(2)}\right)\right];$$

$$B = \frac{a_1\left(B_0^{(1)} - B_0^{(2)}\right)}{\pi\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)}; \ \mathrm{K}_I\left(x\right) = \pm\frac{\left(\lambda_2 B_1^{(1)}\left(x\right) - \lambda_1 B_1^{(2)}\left(x\right)\right)}{2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)};$$

$$\mathrm{K}_I^{(1)}\left(x\right) = \frac{2a_1 \operatorname{ctg}\left(\pi\gamma_1\right) \pm \lambda_2}{2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)} B_2^{(1)}\left(x\right); \ \mathrm{K}_I^{(2)}\left(x\right) = -\frac{2a_1 \operatorname{ctg}\left(\pi\gamma_2\right) \pm \lambda_1}{2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)} B_2^{(2)}\left(x\right).$$

For shear contact stresses, acting in junction region of inclusion with matrix, we have

$$\tau_{xy}^{-}\left(x, -0\right) = A_* + \mathrm{B}_* \ln\left|\frac{a - x}{a + x}\right| + \frac{K_{II}\left(x\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{K_{II}^{(1)}\left(x\right)}{\omega_1\left(x\right)} + \frac{K_{II}^{(2)}\left(x\right)}{\omega_2\left(x\right)},$$

here

$$A_* = \gamma c_2 + \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\left[B_0^{(1)} - B_0^{(2)} - a_2^*\left(\lambda_2 e_1^{(1)} - \lambda_1 e_1^{(2)}\right) - a_2^*\left(\frac{\lambda_2 d_1^{(1)}}{\sin(\pi\gamma_1)} - \frac{\lambda_1 d_1^{(2)}}{\sin(\pi\gamma_2)}\right)\right];$$

$$B_* = \frac{a_2^*\left(\lambda_2 B_0^{(1)} - \lambda_1 B_0^{(2)}\right)}{2\pi(\lambda_2 - \lambda_1)}; \; K_{II}(x) = \frac{B_1^{(1)}(x) - B_1^{(2)}(x)}{2(\lambda_2 - \lambda_1)};$$

$$\mathrm{K}_{II}^{(1)}(x) = \frac{\lambda_2 a_2^* \mathrm{ctg}(\pi\gamma_1) + 1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} B_2^{(1)}(x); \; \mathrm{K}_{II}^{(2)}(x) = -\frac{\lambda_1 a_2^* \mathrm{ctg}(\pi\gamma_2) + 1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} B_2^{(2)}(x).$$

As we can see from obtained formulas, the contact stresses at the contact stresses at the end-points of inclusion, besides three types of exponential singularities, have logarithmic singularity, which is due to the rotation of inclusion, arising as a result of asymmetrical loads. It is easy to check that in case of smooth contact $(k = 0)$ when torsion moment M_0 and horizontal load T_0 are absent, we get $\gamma = 0$ using formula (2.7). In consequence of this the coefficients $A_\pm$, B, A_* and B_* become zero and logarithmic singularity is vanished. From formulas (2.8) for stated case we get the expressions for jumps of stresses mentioned in [1]. For this special case the expressions for contact stresses are are the following:

$$\sigma_y^\pm(x, \pm 0) = \pm\frac{K_I}{\sqrt{a^2 - x^2}} + K_I^{(1)}(x)\left[\omega(x) + \omega(-x)\right];$$

$$\tau_y^-(x, -0) = K_{II}\left[\omega(x) + \omega(-x)\right].$$

Here

$$K_\mathrm{I} = \frac{P_0}{\pi(1+q^2)}\left[1 + q\mathrm{tg}\pi\gamma_1\right]; \; K_\mathrm{I}^{(1)} = \frac{P_0}{2\pi}\left[\sin\pi\gamma_1 + \frac{q}{(1+q^2)\cos\pi\gamma_1}\right];$$

$$K_\mathrm{II} = \frac{\left[\lambda a_2^* \mathrm{ctg}(\pi\gamma_1) - 1\right]}{4\lambda} K_\mathrm{I}^{(1)}; \; \omega(x) = (a+x)^{-\gamma_1}(a-x)^{\gamma_1 - 1};$$

$$\left(q_j = (-1)^{j+1} q; \; \lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda = 2\sqrt{a_1^* / a_2^*}; \; \gamma_2 = 1 - \gamma_1\right).$$

Summary. The exact solution for problem on a stress state of orthotropic elastic plane with absolutely rigid thin inclusion on one of the major direction, when one long edge of inclusion is wholly coupled with plane and the other side is in contact with plane under conditions of Coulomb friction, is built by the method of singular integral equations.
It is shown that under asymmetrical loading of inclusion the contact stresses, acting on long edge, besides exponential singularities, have logarythmic singularity as well. In stated problem the simple expression for one of the most important mechanical characteristics, which is angle of rotation of inclusion, is obtained.

REFERENCES

1. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2014. 322с.
2. Акопян В.Н., Саргсян А.О. О концентрации напряжений возле абсолютно жёсткого включения в составной упругой полуплоскости // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №4. С.12-22.
3. Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жёсткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве // В сб. трудов межд. конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посв. 95-летию со дня рожд. Акад. Н.Х.Арутюняна, Ереван-2007, с.45-51.
4. Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. Плоско-деформированное состояние составной плоскости с периодической системой абсолютно жёстких тонких включений. //«Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», сентябрь 19-23, 2011, Горис-Степанакерт, с.172-176.
5. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жёстком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.708с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.

Information about authors:

Hakobyan Vahram –Doctor of Sciences, Professor, Director of the Institute of Mechanics NAS RA, phone.: (37410) 52-48-90, **e-mail:** vhakobyan@sci.am

Dashtoyan Lilit – Doctor of Mechanics, Scientific Secretary of the Institute of Mechanics NAS RA, phone: (37410) 52-81-89, **e-mail:** lilit_dashtoyan@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 15.04.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №2, 2016 Механика

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ СТУПЕНЧАТО ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ С УЧЁТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Белубекян Э.В., Погосян А.Г.

Բանալի բառեր. տրանսվերսալ իզոտրոպ սալ, լայնական սահք, օպտիմալ նախագծում:
Ключевые слова: трансверсально-изотропная пластинка, поперечные сдвиги, оптимальное проектирование.
Keywords: transversely isotropic plate, transverse shifts, optimal design.

Բելուբեկյան Է.Վ., Պողոսյան Ա.Գ.

Կտոր առ կտոր հաստատուն հաստության տրանսվերսալ իզոտրոպ սալի նախագծումը ծռման դեպքում լայնական սահքերի հաշվառումով

Սալերի ծռման ճշգրտված տեսության հիման վրա, հաշվի առնելով լայնական սահքերի ազդեցությունը, լուծվում է տրանսվերսալ իզոտրոպ սալի օպտիմալ նախագծման խնդիրը, երբ այն ուժեղացված է միջին մակերևույթի նկատմամբ համաչափ դասավորված իզոտրոպ նյութից պատրաստված արտաքին շերտերով: Որոշվում են լրացուցիչ շերտերի օպտիմալ երկրաչափական պարամետրերը, որոնք կառուցվածքի հաստատուն կշռի և տրված գաբարիտային չափերի դեպքում ապահովում են նրա մեծագույն կոշտությունը:

Belubekyan E.V., Poghosyan A.G.

Design of a transversely isotropic plate of stepwise variable thickness under bending accounting for transverse shifts

Based on the enhanced theory of plate bending that takes into account the effect of transverse shifts, the problem of optimal design of rectangular transversely isotropic plate, reinforced in its middle part with additional isotropic layers, is solved. The optimal geometric parameters of the additional layers are determined that provide the highest rigidity of the structure for its given dimensions and total weight.

На основе уточнённой теории изгиба пластин, учитывающей влияние поперечных сдвигов, решается задача оптимального проектирования прямоугольной трансверсально-изотропной пластинки, усиленной в её средней части дополнительными изотропными слоями. Определяются оптимальные геометрические параметры дополнительных слоёв, обеспечивающие при заданных габаритных размерах и общем весе конструкции её наибольшую жёсткость.

Введение.

При расчётах анизотропных пластин переменной толщины факторы, которыми пренебрегают в классической теории оболочек и пластин, могут быть существенными при определении напряжённо-деформированного состояния. В связи с этим, зачастую бывает необходимым использование уточнённых моделей расчёта, учитывающих влияние поперечных сдвигов.

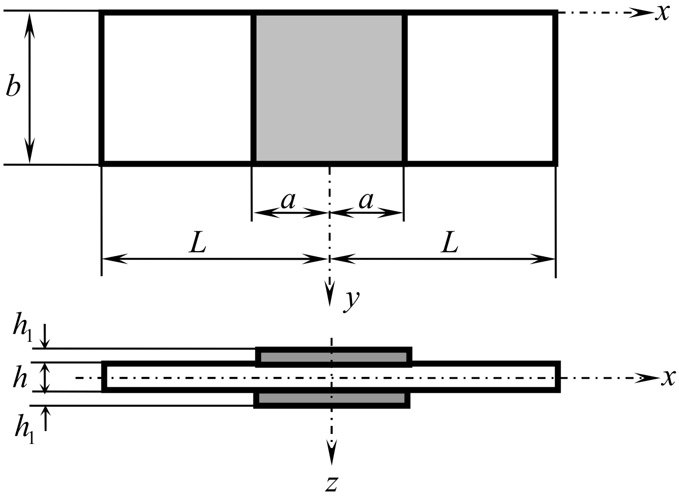
Здесь, на основе уточнённой теории анизотропных пластин С.А. Амбарцумяна [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов, решается задача оптимального проектирования прямоугольной трансверсально-изотропной пластинки, усиленной в её средней части дополнительными изотропными слоями. Определяются оптимальные геометрические параметры дополнительных слоёв, обеспечивающие при заданных габаритных размерах и общем весе конструкции её наибольшую жёсткость. На основе произведённых числовых расчётов производится анализ результатов, полученных на основе уточнённой и классической теорий.

Вопросы оптимального проектирования пластинки кусочно-постоянной толщины при изгибе на основе классической теории исследовались в работах [2-4].

Постановка задачи.

Рассматривается свободно опёртая по контуру прямоугольная пластинка размерами $2L \times b \times h$, изготовленная из трансверсально-изотропного материала, усиленная дополнительными симметрично расположенными относительно её срединной плоскости изотропными слоями размерами $2a \times b \times h_1$, под действием поперечной нагрузки q (фиг.1).

Ставится задача определения на основе уточнённой теории изгиба пластин С.А. Амбарцумяна [1] оптимальных геометрических параметров a и h_1 усиливающих слоёв пластинки, обеспечивающие наибольшую жёсткость пластинки при сохранении их веса, равного весу дополнительных слоёв заданной толщины h_0, постоянной по всей длине пластинки.



Фиг.1. Расчётная схема пластинки

Решение задачи.

Задача определения напряжённо-деформированного состояния рассматриваемой конструкции решаетя с учётом влияния поперечных сдвигов. При этом конструкция рассматривается как составленная из отдельных пластин: однослойной на участках $-L \le x \le -a$, $a \le x \le L$ и трёхслойной на участке $-a \le x \le a$ с учётом их совместной работы (условий сопряжения на линиях их раздела $x = \pm a$). Ввиду симметрии рассматривается правая половина пластинки $0 \le x \le L$.

Математическая модель рассматриваемой задачи описывается разрешающей системой дифференциальных уравнений для однослойной ($p=1$) тансверсально-изотропной пластинки толщиной h и трёхслойной ($p=2$) пластинки толщиной $h+2h_1$, условиями симметрии на линии $x=0$, сопряжения на линии $x=a$ и граничными условиями на сторонах $y=0$, $y=b$, $x=L$.

Разрешающая система уравнений с учётом поперечных сдвигов [1] для каждой из областей ($p=1,2$) пластинки приводится к виду:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_p}{\partial x}+\frac{\partial \psi_p}{\partial y}=-\frac{q}{K^{(p)}},\\
&D_{11}^{(p)}\frac{\partial^3 w_p}{\partial x^3}+\left(D_{12}^{(p)}+2D_{66}^{(p)}\right)\frac{\partial^3 w_p}{\partial x \partial y^2}-P_{11}^{(p)}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\\
&-P_{66}^{(p)}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}-\left(P_{12}^{(p)}+P_{66}^{(p)}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}+K^{(p)}\varphi=0,\\
&D_{22}^{(p)}\frac{\partial^3 w_p}{\partial y^3}+\left(D_{12}^{(p)}+2D_{66}^{(p)}\right)\frac{\partial^3 w_p}{\partial y \partial x^2}-P_{11}^{(p)}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}-\\
&P_{66}^{(p)}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}-\left(P_{12}^{(p)}+P_{66}^{(p)}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}+K^{(p)}\psi=0.
\end{aligned}\qquad(1)$$

Граничные условия пластинки:

- шарнирного опирания на сторонах $y=0$ и $y=b$

$$w_p=0,\quad M_y^{(p)}=0,\quad \varphi_p=0,\quad \left(p=1,\,2\right)\quad \text{при } y=0,\ y=b,\quad(2)$$

- симметрии на линии $x=0$

$$\varphi_2=0,\quad \frac{\partial w_2}{\partial x}=0,\quad M_{xy}^{(2)}=0\quad \text{при } x=0,\quad(3)$$

- шарнирного опирания на стороне $x=L$

$$w_1=0,\quad M_x^{(1)}=0,\quad \psi_1=0\quad \text{при } x=L,\quad(4)$$

- сопряжения на линии $x=a$

$$w_1=w_2,\quad -\frac{\partial w_1}{\partial x}+\left(\frac{h^2}{4}-\frac{z_0^2}{3}\right)\varphi_1=-\frac{\partial w_2}{\partial x}+\left(\frac{h^2}{4}-\frac{z_0^2}{3}\right)\varphi_2,\ \psi_1=\psi_2$$

$$M_x^{(1)}=M_x^{(2)},\,M_{xy}^{1}=M_{xy}^{(2)},\ N_x^{(1)}=N_x^{(2)}\quad \text{при } x=a.\quad(5)$$

Внутренние усилия в каждой из областей ($p=1,2$) пластинки определятся по формулам [1]:

$$M_x^{(p)}=-D_{11}^{(p)}\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2}-D_{12}^{(p)}\frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2}+P_{11}^{(p)}\frac{\partial \varphi_p}{\partial x}+P_{12}^{(p)}\frac{\partial \psi_p}{\partial y},$$

$$M_y^{(p)} = -D_{11}^{(p)} \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} - D_{12}^{(p)} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + P_{11}^{(p)} \frac{\partial \psi_p}{\partial y} + P_{12}^{(p)} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x},$$

$$M_{xy}^{(p)} = -2D_{66}^{(p)} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} + P_{66}^{(p)} \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial y} + \frac{\partial \psi_p}{\partial x} \right), \qquad (6)$$

$$N_x^{(p)} = K^{(p)} \varphi_p, \quad N_y^{(p)} = K^{(p)} \psi_p.$$

Здесь функции прогибов w_p и функции φ_p, ψ_p $(p = 1, 2)$ – искомые функции, с помощью которых определяются внутренние усилия (6) в отдельных областях пластинки.

Жёсткости $D_{ik}^{(p)}$ $(p = 1, 2)$ пластинки определяются по формулам:

$$D_{ik}^{(1)} = \frac{B_{ik} h^3}{12}, \; D_{ik}^{(2)} = \frac{1}{12} \left\{ B_{ik} h^3 + B_{ik}^{(1)} \left[(h + 2h_1)^3 - h^3 \right] \right\},$$

где

$$B_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \; B_{12} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}, \; B_{66} = G_{12} = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

$$B_{11}^{(1)} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}, \; B_{12}^{(1)} = \frac{E_1 \nu_1}{1 - \nu_1^2}, \; B_{66}^{(1)} = G_{12}^{(1)} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)},$$

E, ν, G_{12} – упругие постоянные материала трансверсально-изотропного слоя пластинки в плоскости изотропии, E_1, ν_1, $G_{12}^{(1)}$ – упругие постоянные материала изотропного слоя.

Коэффициенты $P_{ik}^{(p)}$, $K^{(p)}$ определяются из выражений:

$$P_{ik}^{(1)} = \frac{B_{ik} h^5}{120}, \quad K^{(1)} = \frac{G' h^3}{12},$$

$$P_{ik}^{(2)} = 2B_{ik} \left(J_1 + \frac{A}{G'} \frac{h^3}{24} \right) + 2B_{ik}^{(1)} \left[J_2 + \frac{R h_1 (h + h_1)}{2} \right],$$

$$K^{(2)} = Ah + 2G' J_3 + 2G_{12}^{(1)} J_4,$$

где

$$A = \frac{h_1}{2} (h + h_1) \left(G_{12}^{(1)} - G' \right), \; R = \frac{h h_1 (h + h_1)}{4} \left(\frac{G_{12}^{(1)}}{G'} - 1 \right),$$

$$J_1 = \frac{h^3}{48} \left[\left(h_1 + \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{h^2}{20} \right],$$

$$J_2 = \frac{(h/2 + h_1)^2}{6} \left[\left(h_1 + \frac{h}{2} \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] - \frac{1}{30} \left[\left[\left(h_1 + \frac{h}{2} \right)^5 - \left(\frac{h}{2} \right)^5 \right] \right],$$

$$J_3 = \frac{h}{4}\left[\left(h_1 + \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{h^2}{12}\right], \quad J_4 = \frac{h_1}{2}\left(h_1 + \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left[\left(h_1 + \frac{h}{2}\right)^3 - \frac{h^3}{8}\right],$$

G' – модуль сдвига материала трансверсально-изотропного слоя пластинки в плоскости нормальной к плоскости изотропии.

Принимая $q = \mathrm{const}$, выражения искомых функций w_p, φ_p, ψ_p $(p = 1, 2)$, удовлетворяющие уравнениям (1) и условиям (2) и (3), принимаются в виде [1]:

- для области $a \le x \le L$ (однослойная пластинка, $p = 1$)

$$w_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ \frac{4q\left(1+f\lambda_n^2\right)}{\pi n D_{11}^{(1)}\lambda_n^4} + C_{1n}^{(1)} \operatorname{ch}\lambda_n x + C_{2n}^{(1)} x \operatorname{sh}\lambda_n x + C_{3n}^{(1)} \operatorname{sh}\lambda_n x + C_{4n}^{(1)} x \operatorname{ch}\lambda_n x \right\} \sin\lambda_n y,$$

$$\varphi_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{2B_{11}}{G'}\lambda_n^2 \left(C_{2n}^{(1)} \operatorname{sh}\lambda_n x + C_{4n}^{(1)} \operatorname{ch}\lambda_n x\right) + \\ & + \frac{\lambda_n}{\omega_n^{(1)}}\left(C_{5n}^{(1)} \operatorname{ch}\omega_n^{(1)} x + C_{6n}^{(1)} \operatorname{sh}\omega_n^{(1)} x\right) \end{aligned} \right\} \sin\lambda_n y,$$

$$\psi_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \frac{4q}{\pi n \lambda_n G' h^3} - \frac{2B_{11}}{G'}\lambda_n^2 \left(C_{2n}^{(1)} \operatorname{ch}\lambda_n x + C_{4n}^{(1)} \operatorname{sh}\lambda_n x\right) + \\ & + \left(C_{5n}^{(1)} \operatorname{sh}\omega_n^{(1)} x + C_{6n}^{(1)} \operatorname{ch}\omega_n^{(1)} x\right) \end{aligned} \right\} \cos\lambda_n y. \qquad (7)$$

- для области $0 \le x \le a$ (трёхслойная пластинка, $p = 2$)

$$w_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ \frac{4q\left(1+f_1\lambda_n^2\right)}{\pi n D_{11}^{(2)}\lambda_n^4} + C_{1n}^{(2)} \operatorname{ch}\lambda_n x + C_{2n}^{(2)} x \operatorname{sh}\lambda_n x \right\} \sin\lambda_n y,$$

$$\varphi_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ -\frac{2D_{11}^{(2)}}{K^{(2)}}\lambda_n^2 C_{2n}^{(2)} \operatorname{sh}\lambda_n x + \frac{\lambda_n}{\omega_n^{(2)}} C_{6n}^{(2)} \operatorname{sh}\omega_n^{(1)} x \right\} \sin\lambda_n y, \qquad (8)$$

$$\psi_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ \frac{4q}{\pi n \lambda_n K^{(2)}} - \frac{2D_{11}^{(2)}}{K^{(2)}}\lambda_n^2 C_{2n}^{(2)} \operatorname{ch}\lambda_n x + C_{6n}^{(2)} \operatorname{ch}\omega_n^{(2)} x \right\} \cos\lambda_n y.$$

Здесь приняты обозначения:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{b}, \quad \omega_n^{(1)} = \sqrt{\lambda_n^2 + \frac{20G'\left(1+\nu\right)}{Eh^2}}, \quad \omega_n^{(2)} = \sqrt{\lambda_n^2 + \frac{K^{(2)}}{P_{66}^{(2)}}},$$

$$f=\frac{Eh^2}{10\left(1-\nu^2\right)G'},\quad f_1=\frac{P_{11}^{(2)}}{K^{(2)}}.$$

Коэффициенты $C_{in}^{(p)}$ ($p=1,2$; $i=1, 2,...,6$) определятся из условий (4) и (5), после чего из (7) и (8) определятся значения функций, w_p, φ_p, ψ_p $\left(p=1,\,2\right)$, а из (6) – значения внутренних усилий.

Поставленная задача оптимизации приводится к определению оптимальных геометрических параметров a или h_1, при которых наибольший прогиб пластинки при неизменном весе усиливающих слоёв достигнет наименьшего значения, т.е. к следующей задаче нелинейного программирования:
найти:

$$w=\min_{\bar{x}}\max_{p} w_p,\quad \bar{x}=\{a\},\quad \left(p=1,2\right), \tag{9}$$

при ограничениях:

$$h_1=h_0\,L/a \tag{10}$$

$$0.01\delta_1\le h_1\le 0.25\delta_1,\quad 0.01\delta_2\le h+2h_1\le 0.25\delta_2\,. \tag{11}$$

Ограничение (10) обеспечивает условие постоянства веса пластинки, а ограничения (11) обусловлены пределами применимости уточнённой теории. Здесь принимается: $\delta_1=L-a$, когда $L-a\le b$; $\delta_1=b$, когда $L-a\ge b$; $\delta_2=2a$, когда $2a\le b$, $\delta_2=b$, когда $2a\ge b$.

Задача решается методом деформируемого многогранника [5].

Числовые результаты и выводы.

Числовые расчёты произведены для случая, когда на пластинку действует равномерно распределённая нагрузка $q=\text{const}$ при $\xi=2L/b=1,\,2$, $\bar{h}=h/b=0.05,\ 0.10,\ 0.20$, $h_0=0.1h$, и следующих приведённых характеристиках материала пластинки:

$$\bar{B}_{12}=B_{12}/B_{11}=\nu=0.3,\quad \bar{G}_{12}=G_{12}/B_{11}=\left(1-\nu\right)/2=0.35,$$

$$\overline{G'}=G'/B_{11}=\left(1-\nu^2\right)G'/E\ \ \left(E/G'=0,\ 2.6,\ 5,\ 10\right),\quad \bar{B}_{11}^{(1)}=B_{11}^{(1)}/B_{11}=2,$$

$$\bar{B}_{12}^{(1)}=B_{12}^{(1)}/B_{11}=0.6,\quad \overline{G'}_1=\bar{G}_{12}^{(1)}=\bar{G}_{13}^{(1)}=G_1'/B_{11}=0.7\,.$$

Случай $E/G'=0$ соответствует расчёту изотропной пластинки по классической теории, а $E/G'=2.6,\ 5,\ 10$ – по уточнённой теории. Полученные значения оптимальных параметров $\bar{a}=a/2L$, $\bar{h}_1=h_1/b$, а также соответствующее значение наибольшего приведённого прогиба пластинки $\bar{w}=w B_{11}h^3/12q_0b^4$ приведены в таблице. Для сравнения в таблице приведены значения приведённых максимальных прогибов $\bar{w}_0$ пластинки постоянной толщины, а также значения отношения максимального прогиба, полученного по уточнённой теории к соответствующему прогибу, полученному по классической теории $k=w_{cor}/w_{cl}$.

Таблица

Оптимальные параметры и соответствующие значения максимальных прогибов пластинки

ξ	$\bar{h}$	E/G'	$\bar{a}$	$\bar{h}_1$	$\bar{w}_0 \cdot 10^2$	$\bar{w} \cdot 10^2$	k
1	0.05	0	0.337	0.00742	0.1654	0.1457	1
		2.6	0.2915	0.00858	0.1708	0.1526	1.047
		5.0	0.2915	0.00858	0.1710	0.1530	1.050
		10.0	0.2915	0.00858	0.1711	0.1538	1.056
	0.1	0	0.337	0.01484	0.1654	0.1457	1
		2.6	0.334	0.01498	0.1745	0.1631	1.119
		5.0	0.332	0.01506	0.1786	0.1644	1.128
		10.0	0.323	0.01548	0.1796	0.1669	1.145
	0.2	0	0.4	0.025	0.1654	0.1492	1
		2.6	0.4	0.025	0.2017	0.1942	1.301
		5.0	0.4	0.025	0.2083	0.1994	1.336
		10.	0.4	0.025	0.2233	0.2107	1.412
2	0.05	0	0.05	0.05	0.4124	0.2909	1
		2.6	0.05	0.05	0.4180	0.2986	1.026
		5.0	0.05	0.05	0.4188	0.2987	1.027
		10.0	0.05	0.05	0.4214	0.2989	1.027
	0.1	0	0.1	0.05	0.4124	0.32186	1
		2.6	0.2635	0.01897	0.4320	0.3374	1.048
		5.0	0.2635	0.01897	0.4336	0.3389	1.053
		10.0	0.2625	0.01905	0.4375	0.3422	1.064
	0.2	0	0.267	0.03745	0.4124	0.3245	1
		2.6	0.262	0.03817	0.4684	0.3743	1.153
		5.0	0.26	0.03846	0.4829	0.3803	1.172
		10.0	0.256	0.03906	0.5017	0.3935	1.212

Как показывают приведённые в таблице значения коэффициента $k = w_{cor}/w_{cl}$, учёт поперечных сдвигов в случае тонких пластин практически не влияет на результаты, полученные по классической теории, в то время как при увеличении толщины пластинки попереяные сдвиги оказывают существенное влияние на её прогибы (до 40% при $\xi = 1$ и до 20% при $\xi = 2$).

Из результатов таблицы также следует, что оптимальное распределение материала дополнительных слоёв пластинки по её поверхности приводит к значительному уменьшению максимального прогиба пластинки по сравнению с трёхслойной пластинкой постоянной толщины, причём это уменьшение тем значительнее, чем больше толщина пластинки. Так, при $\bar{h} = 0.20$, $E/G' = 2.6$ разница составляет 20%.

Следует отметить, что если не учитывать ограничения (11), обусловленные пределами применимости уточнённой теории изгиба пластин, при $\xi = 1$ и для сравнтельно тонких пластин $\bar{h} \le 0.10$ при $\xi = 2$, оптимальные проекты получаются при значительно малой длине дополнительных слоёв ($\bar{a} = 0.05$). Следовательно, в этих случаях целесообразнее пластинку усилить расположенным в её середине ребром жёсткости, равным по весу её дополнительным слоям.

Следует отметить также, что при $\xi = 2$ и $\bar{h} = 0.05$ максимальный прогиб получается в точке с координатой: $\bar{x} = 0.272$, в остальных случаях $\bar{x} = 0$.

В сравнительно длинных и толстых пластинках оптимальным будет проект с усиливающими слоями, расположенными в её средней части. Аналогичный результат получен в работе [4], где на основе классической теории изгиба исследованы вопросы оптимального проектирования ортотропной пластинки, усиленной дополнительными слоями или рёбрами жёсткости.

Заключение. На основе полученных в работе результатов можно заключить, что при расчёте анизотропных пластин ступенчато переменной толшины учёт поперечных сдвигов необходим для сравнительно толстых пластин, так как они дают существенные поправки к результатам классической теории изгиба пластин, Кроме того, оптимальным перераспределением материала усиливающих слоёв пластинки по её поверхности можно значительно увеличить жёсткость конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Белубекян Э.В., Погосян А.Г., Аветисян Г.Р. Оптимизация прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала при изгибе. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65, № 1. С.35-42.
3. Погосян А.Г., Аветисян Г.Р. Оптимизация прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины при изгибе. // Вестник Инженерной Академии Армении, Ереван, 2012, Т.9, № 1, С.127-131.
4. Belubekyan E.V. Poghosyan A.G., Khanikyan V.M. Bending of the rectangular plate made of composite material, strengthened by additional layers or stiffening ribs. //Proceedings of 3rd international conference on contemporaru problems in architecture and construction Beijing, China Nov.20-24, 2011, P. 2-1 - 2-6.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 266с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Белубекян Эрнест Вагаршакович – доктор технических наук, профессор.

E-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Погосян Аревшат Гургенович – к.ф.-м.н., доц. каф.«Алгоритмические языки и программирование», Национальный политехнический университет Армении (**НПУА**) фонд. **Адрес:** 0009, Ереван, ул.Теряна, 105. **Тел.**: (+37499) 099662335

E-mail: arevpoghosyan@mail.ru

Поступила в редакцию 06.10.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №2, 2016 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НАПОЛНИТЕЛЕМ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Мовсисян Л.А.

Բանալի բառեր. Գլանային թաղանթ, կայունություն, լցոն, խառը եզրային պայմաններ, նորմալ ճնշում:

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, устойчивость, наполнитель, смешанные граничные условия, нормальное давление.

Key words: cylindtical shell, stability, core, mixed boundary conditions, external normal pressure.

Մովսիսյան Լ.Ա.

Խառը եզրային պայմաններով լցոնված գլանային թաղանթի կայունության մասին

Դիտարկվում է լցոնված գլանային թաղանթի կայունությունը խառը եզրային պայմանների դեպքում արտաքին նորմալ ճնշման տակ: Լցոնի ազդեցությունը հաշվի է առնվում Վինկլերի մոդելի դրվածքով: Առաձգամածուցիկ լցոնի դեպքում միաչափ խնդիրը օղակի համար լուծվում է ճշգրիտ:

Movsisyan L.A.

About the stability of cylindrical shell with core for mixed boundary condition

The stability of cylindrical shell with a core for mixed boundary conditions under external normal pressure is conidered. The influence of the core is considered by the model of Vincler.
Onedemitional problen for the ring with viscoellastic core is solved with exaction.

Рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки с наполнителем при внешнем нормальном давлении. Влияние наполнителя учитывается по модели Винклера.

Одномерная задача для кольца с вязкоупругим наполнителем решается точно.

Введение. В [1,2] была рассмотрена устойчивость цилиндрических оболочек при внешнем нормальном давлении для различных граничных условий. Так как целью исследования оказывалось влияние тангенциальных граничных условий на значения критического давления, то аппаратом исследования является так называемая полубезмоментная теория оболочек, что вполне оправдано для такого типа деформирования. Между прочим, заметим, что для классического случая свободного опирания такая постановка и точная дают одинаковые результаты.

В [3,4] уже рассматривалась устойчивость цилиндрических оболочек при смешанных граничных условиях: на части торцов заданы одни условия, на оставшиеся – другие.

В предлагаемой работе изучается такая же задача, когда цилиндр – с наполнителем. Влияние последнего моделируется по модели пластинки на упругом основании – модель Винклера. Большое количество работ по устойчивости оболочек на основании этой же модели выполнено [5].

Одномерная задача (кольцо с наполнителем) в предположении сплошности наполнителя и скользящего контакта между кольцом и наполнителем, решается точно, в предположении, что материал наполнителя вязкоупругий. И вот, что интересно, при определении критического давления в выражении члена, учитывающего влияние наполнителя, количество волн не входит, т.е. своего рода – оправдание модели Винклера.

1. Постановка задачи. Уравнение устойчивости оболочки под нормальным давлением q с учётом влияния наполнителя [2,3] будет:

$$D\frac{\partial^8 w}{\partial y^8}+\frac{Eh}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+T_2^0\frac{\partial^6 w}{\partial y^6}+k\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0\,. \tag{1.1}$$

Здесь новое – последний член, где k – коэффициент постели. Как и в предыдущих исследованиях, учтено, что и потери устойчивости происходят по формам $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\gg\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. Здесь это условие выполняется тем более. Начальное кольцевое усилие определяется формулой

$$T_2^0=\frac{qR}{1+K},\ K=\frac{k(1-\nu^2)R^2}{Eh}. \tag{1.2}$$

Будем искать решение (1.1) в виде

$$w=\sum_{n=}^{\infty}\left(w_n^{(1)}\cos n\varphi+w_n^{(2)}\sin n\varphi\right)\ ,\ \ y=R\varphi, \tag{1.3}$$

тогда

$$\frac{d^4 w_n^{(i)}}{d\xi^4}-\lambda_n^4 w_n^{(i)}=0,\ \ n\le n_0 \tag{1.4}$$

$$\frac{a^4 w_n^{(i)}}{d\xi^4}+4\mu_n^4 w_n^{(i)}=0\ ,\ n>n_0. \tag{1.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\lambda_n^4=\frac{n^4}{l_1^4}\left|0,92 l_1 h_1^{3/2}\frac{n^2}{1+K}\lambda-\frac{n^4 h_1^2}{12\left(1-\nu^2\right)}-\frac{k_1}{h_1}\right|$$

$$h_1=\frac{h}{R},\ \ k_1=\frac{kR}{E},\ \ l_1=\frac{R}{l},\ \ \xi=\frac{x}{l} \tag{1.6}$$

$$4\mu_n^4=-\lambda_n^4\,,\ \lambda=\frac{q}{q_{kp}\,,},\ q_{kp}=0,92El_1\left(h_1\right)^{3/2}.$$

Как видно из (1.6), q_{kp} – это критическое давление свободно опёртой оболочки без наполнителя, что осуществляется при $n\approx 2.7\left(l_1\right)^{1/2}\left(h_1\right)^{-1/4}$.

Решение систем (1.4) и (1.5), соответственно,

$$w_n^{(i)}=A_n^{(i)}\cos\lambda_n\xi+B_n^{(i)}\sin\lambda_n\xi+C_n^{(i)}\mathrm{ch}\lambda_n\xi+D_n^{(i)}\mathrm{sh}\lambda_n\xi \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}w_n^{(i)}=A_n^{(i)}\mathrm{ch}\mu_n\xi\cos\mu_n\xi+B_n^{(i)}\mathrm{ch}\mu_n\xi\sin\mu_n\xi+\\+C_n^{(i)}\mathrm{sh}\mu_n\xi\sin\mu_n\xi+D_n^{(i)}\mathrm{sh}\mu_n\xi\cos\mu_n\xi\end{gathered} \tag{1.8}$$

Решение, соответствующее $n=0$, не записывается, так как при определении минимального критического давления оно не используется.

Начало координаты x берём в середине длины оболочки и будем считать, что на концах $\xi = \pm 0,5$ заданы смешанные условия, а именно:

$$
\begin{aligned}
&u = v = 0 \quad \text{при} \quad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 \\
&T_1 = v = 0 \quad \text{при} \quad -\pi \le \varphi - \varphi_0 \,,\ \varphi_0 < \varphi \le \pi.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Эти условия равнозначны следующим [2]:

$$
\begin{aligned}
&w = w'_\xi = 0 \quad \text{при} \quad -\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 \\
&w = w''_\xi = 0 \quad \text{при} \quad -\pi \le \varphi < -\varphi_0,\ \varphi_0 \le \varphi \le \pi.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Симметричные и антисимметричные формы потери устойчивости будем изучать в отдельности. Итак, для симметричного случая из (1.7) и (1.8) следует взять члены с коэффициентами A_n и C_n. Тогда, удовлетворяя условиям (1.10), для их определения получим следующие системы:

$$
\sum_{n=1}^{n_0} \left[X_n^{(i)} \frac{1}{\lambda_n} \left(\operatorname{tg} 0,5\lambda_n + \operatorname{th} 0,5\lambda_n \right) \right] \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix} +
$$

$$
+ \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left[X_n^{(i)} \frac{1}{\mu_n} \frac{\operatorname{sh}\lambda_n + \sin\lambda_n}{\operatorname{ch}\lambda_n + \cos\lambda_n} \right] \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0
$$

$$
\sum_{n=q}^{\infty} \left| X_n^{i} \right|_{\sin n\varphi}^{\cos n\varphi} = 0 \quad \text{при} \quad -\pi \le \varphi < -\varphi_0 \quad \varphi_0 < \varphi \le \pi
\tag{1.11}
$$

Здесь введены обозначения:

$$
\begin{aligned}
&X_n^{(i)} = -A_n \lambda_n^2 \cos 0,5\lambda_n \quad \text{при} \quad n \le n_0 \\
&X_n^{(i)} = A_n \mu_n^2 \frac{\operatorname{ch}^2 0,5\mu_n + \cos^2 0,5\mu_n - 1}{\operatorname{ch} 0,5\mu_n \cos 0,5\mu_n} \quad \text{при} \quad n > n_0
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Решение парных уравнений (1.11) сводится к решению следующих систем бесконечных алгебраических уравнений:

$$
X_m^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{mn}^{(i)} X_n^{(i)} \qquad (i = 1, 2)\,,
\tag{1.13}
$$

где введены обозначения:

$$
a_{mn}^{(i)} = d_n C_{mn}^{(i)}
$$

$$
d_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\lambda_n} \left(\operatorname{tg} 0,5\lambda_n + \operatorname{th} 0,5\lambda_n \right), & n \le n_0 \\[2ex] 1 - \dfrac{1}{\mu_n} \dfrac{\operatorname{sh}\mu_n + \sin\mu_n}{\operatorname{ch}\mu_n + \cos\mu_n}, & n \ge n_0 + 1 \end{cases}
\tag{1.14}
$$

$$C_{mn}^{(1)} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{m^2 - n^2}\left(m \sin m\varphi_0 \cos n\varphi_0 - n \sin n\varphi_n \cos m\varphi_0\right) \tag{1.15}$$

$$C_{mn}^{(2)} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{m^2 - n^2}\left(n \sin m\varphi_0 \cos n\varphi_0 - m \sin n\varphi_0 \cos m\varphi_0\right)$$

$$C_{mm}^{(1)} = \frac{1}{\pi}\left(\varphi_0 + \frac{1}{2m}\sin 2m\varphi_0\right),\ C_{mm}^{(2)} = \frac{1}{\pi}\left(\varphi_0 - \frac{1}{2m}\sin 2m\varphi_0\right)$$

Так как минимальные критические значения получаются при симметричных относительно $\xi = 0$ форм потери устойчивости, то подобная система при антисимметричных формах потери устойчивости не приводится.

Значения критического давления с удовлетворительной точностью получены из детерминантов восьмого-десятого порядков и так как минимальная $\lambda_{kp} = 1$ получается при $k = 0$ и $n = 2,7 \cdot l_i^{1/2} \cdot h_i^{-1/4}$, то детерминанты взяты выше, чем этот номер.

В табл. 1 приведены значения λ_{kp} для некоторых параметров и значений φ_0. Следует отметить, что, в общем, ничего неожиданного нет.

Таблица 1

h_1^{-1}	l_1^{-1} / φ_0 \ k_1	0,5				1,0			
		$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
100	0	1,304	1,372	1,507	1,544	1,120	1,197	1,408	1,525
	10^{-6}	1,308	1,376	1,511	1,549	1,121	1,198	1,409	1,526
	10^{-5}	1,344	1,408	1,544	1,582	1,132	1,208	1,418	1,533
200	0	1,218	1,297	1,488	1,516	1,119	1,183	1,394	1,547
	10^{-6}	1,235	1,312	1,504	1,532	1,123	1,188	1,398	1,532
	10^{-5}	1,383	1,453	1,641	1,668	1,164	1,226	1,432	1,558
300	0	1,115	1,179	1,381	1,515	1,098	1,162	1,333	1,514
	10^{-6}	1,161	1,219	1,415	1,549	1,109	1,171	1,342	1,523
	10^{-5}	1,566	1,582	1,728	1,854	1,203	1,259	1,420	1,601

2. Для одномерного случая (кольцо с наполнителем) будем изучать задачу устойчивости точно, в предположении, что наполнитель из типичного вязкоупругого материала:

$$\sigma = \tilde{E}_0 \varepsilon = E_0\left(\varepsilon - \frac{E_0 - H}{E_0 n}\int_0^t e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)}\varepsilon d\tau\right). \tag{2.1}$$

Если наполнитель сплошной, для начального состояния под равномерным давлением кольцевое усилие будет иметь вид (коэффициент Пуассона постоянен)

$$T_2^0 = \frac{Rq}{1 + \frac{\tilde{E}_0}{1-\nu_0} \cdot \frac{R}{hE}} \tag{2.2}$$

Так как нас интересует поведение систем при $t = 0$ и $t = \infty$, то в выражении T_2^0 в первом случае вместо $\tilde{E}_0$ надо брать E_0, а во втором – H. Точно так же систему уравнений возмущённого состояния во избежание длинных (и ненужных записей) запишем в одном виде. Система уравнений устойчивости в предположении, что в кольцевом направлении отсутствует сдвиговое напряжение, будет иметь вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \tilde{h} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} = 0 \quad , \quad \tilde{h} = \frac{h^2}{12R^2} \\ \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + w + \tilde{h} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{T_2^0}{Eh} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = -\frac{R^2}{Eh} Z \end{gathered} \tag{2.3}$$

В предположении сплошности наполнителя функцию напряжения возмущённого состояния можно брать в виде:

$$\Phi = \left(A_m r^m + B_m r^{m+2} \right) \cos m\varphi \tag{2.4}$$

Напряжения через Φ выражаются известным образом:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \ \sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \tag{2.5}$$

Условия контакта кольца с наполнителем $(r = R)$ при отсутствии сдвигового напряжения будут:

$$u_r = w, \ \sigma_r = Z, \ \sigma_{r\varphi} = 0 . \tag{2.6}$$

В окончательном виде для величин наполнителя получим (для случая $t = 0$)

$$\begin{gathered} u_r \Big|_{r=R} = \frac{2B_m}{E_0} \left(1 - \nu_0 \right) R^{m+1} \left(m+1 \right) \cos m\varphi \\ \sigma_r \Big|_{r=R} = 2B_m R^m \left(m+1 \right) \cos m\varphi \end{gathered} \tag{2.7}$$

что вместе с условием (2.6) даёт

$$Z = \frac{E_0}{1-\nu_0} \bar{w} \cos m\varphi \tag{2.8}$$

Если искать решение (2.3) в виде

$$w = \bar{w} \cos m\varphi \quad \text{и} \quad u = \bar{u} \sin m\varphi \tag{2.9}$$

с учётом (2.8), то критическое давление определяется из уравнения

$$\bar{h} \left(m^2 - 1 \right) + \frac{A}{m^2} = \frac{\lambda}{1+A} \ , \ \lambda = \frac{q}{E} \frac{R}{h} \ , \ A = \frac{E_0}{E} \frac{R}{h} \frac{1}{1-\nu_0} \ . \tag{2.10}$$

Отсюда относительное мгновенное критическое давление –

$$\overline{\lambda}=\frac{q_{kp}}{q_{kp}^{0}}=\frac{1}{3}(1+A)\left[2\left(\frac{A}{\overline{h}}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right] \tag{2.11}$$

и потери устойчивости по форме –

$$m_k=\left(\frac{A}{\overline{h}}\right)^{1/4},\quad q_{kp}^{(0)}=\frac{1}{4}\frac{Eh^3}{R^3}. \tag{2.12}$$

Для длительной потери устойчивости в выражении A надо E_0 заменить на H. Наличие наполнителя существенно увеличивает значение критического давления и формы потери устойчивости.

Для длительной потери устойчивости в формулах (2.11) и (2.12) в A надо E_0 заменить на H. Естественно, в последнем случае и давление будет меньше, чем в первом, и количество волн.

Заключение. Показано влияние вязкоупругого наполнителя на значения критического давления в зависимости от физических и геометрических параметров.

Для первой задачи были произведены вычисления, подробно приведённые в табл.1, но при k – в два раза больше, чем там, т.е., если в первом случае можно считать данные для длительной, то в последнем случае будут данные мгновенной потери устойчивости. И самая большая разница между ними – порядка 20%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саченков А.В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольных краевых условиях под действием равномерного поперечного давления. // Изв. Казан. филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн.наук. 1958. №12. С.127-132.
2. Алфутов Н.А. О зависимости значения верхнего критического давления цилиндрической оболочки от граничных условий для касательных составляющих перемещений. Теория оболочек и пластин (Тр.IV Всесоюзн. конф.). Ереван: 1964, с.193-198.
3. Мовсисян Л.А. Об устойчивости цилиндрической оболочки со смешанными граничными условиями. //ПМ. Т.XIV. №10. 1978. С.52-57.
4. Мовсисян Л.А. Две задачи по устойчивости для цилиндрической оболочки со смешанными граничными условиями при внешнем давлении. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №1. С.31-36.
5. Ильгамов М.А., Иванов Б.А., Гулин Б.В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. М.: Наука, 1977. 288с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Мовсисян Лаврентий Александрович,
Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** (+37410). 568201
E-mail: mechins@sci.am

Поступила в редакцию 30.03.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №2, 2016 Механика

УДК 539.3

АНАЛИЗ ПРОГИБА БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА КОНЦАХ

Саакян А.А.

Ключевые слова: изгиб балки, сосредоточенная сила, симметричный прогиб, максимальный прогиб
Keywords: beam bending, concentrated force, symmetrical deflection, maximum deflection.
Բանալի բառեր: հեծանի ծռում, կենտրոնացած ուժ, համաչափ ճկվածք, առավելագույն ճկվածք

Սահակյան Ա.Ա.
Կենտրոնացած ուժի ազդեցության տակ հեծանի ճկվածքի վերլուծությունը տարբեր եզրային պայմանների դեպքում

Հեծանի ծայրերի հենման պայմաններից կախված հետազոտվել է այն հատույթների տիրույթը, որտեղ հեծանը կենտրոնացած ուժի ազդեցության տակ կարող է ունենալ առավելագույն ճկվածք: Կատարվել է ստացված արդյունքների համեմատություն և պարզվել է, որ հետազոտվող տիրույթը ամենամեծն է հեծանի ծայրերի կոշտ ամրացման դեպքում և, գտնվելով հեծանի միջնակետի շուրջ, կազմում է նրա երկարության մեկ երրորդը: Կառուցվել է կենտրոնացած ուժերի էապես անհամաչափ համակարգ, որի ազդեցության տակ հեծանը կրում է համաչափից քիչ տարբերվող ճկվածք:

Sahakyan A.A.
Deflection Analysis of a Beam Subjected to Action of Concentrated Force at the Various Conditions on the Edges.

The interval of beam cross-section coordinates where beam can have the maximal deflection is investigated in dependence of the support conditions. Comparison of obtained results was conducted and it is found that mentioned interval is the largest in the case of fixed edges and is one-third the length of the beams around the mid-point. The essentially nonsymmetrical system of concentrated forces under action of which the beam gets almost symmetrical deflection is built.

Исследован интервал изменения координаты сечения балки, в которой она может иметь максимальный прогиб, в зависимости от условий опирания ее концов. Проведено сравнение полученных результатов и выяснено, что указанный интервал является наибольшим в случае жесткого закрепления обоих концов балки и составляет одну треть длины балки вокруг средней точки. Построена существенно несимметричная система сосредоточенных сил, под действием которой балка приобретает практически симметричный прогиб.

Введение. Общеизвестные задачи строительной механики для упругих балок (и пластин) требуют определение напряженно-деформированного состояния при заданных нагрузках и граничных условиях. Представляют также интерес задачи, когда по какой-либо характеристике деформированного или напряженного состояния необходимо определить приложеннную нагрузку. Одна из таких задач приводится в книге С.П.Тимошенко [1], где по величине угла наклона касательной к прогибу в точке свободного опирания балки необходимо найти точку приложения сосредоточенной нагрузки. В определенном смысле такие задачи являются обратными. К такому классу обратных задач можно отнести также исследования, проведенные в статьях [2-4]. В частности, в работе [4], по аналогии со статьей [5], ставится вопрос – можно ли услышать упругую опору.

В настоящей работе ставится вопрос как выбрать нагрузку, чтобы максимальный прогиб был в заданном поперечном сечении балки. Исходя из известной задачи для струны, где максимальный прогиб получается в точке приложения сосредоточенной силы, рассматриваемая задача также решается для случая сосредоточенной нагрузки. В результате получается, что не во всех сечениях балки можно получить максимальный прогиб. В зависимости от вида закрепления концов балки установлен интервал точек сечения балки, в которых она может иметь максимальный прогиб.

Постановка задачи и ее решение. В рамках классической теории Кирхгоффа-Лява рассмотрим уравнение изгиба балки

$$D\frac{d^4w}{dx^4}=-q\left(x\right) \tag{1}$$

где $D=EJ_x$ - жесткость балки на изгиб, E - модуль Юнга материала балки, J_x - момент инерции поперечного сечения.

Целью исследования является определение интервала точек, в которых балка, при различных условиях опирания на концах, может иметь максимальный прогиб. Поставленный вопрос будет правомочен, если каждый из концов балки либо шарнирно оперт, либо жестко защемлен.

Путем последовательного интегрирования уравнения (1) нетрудно получить общее представление прогиба $w\left(x\right)$. Оно имеет вид:

$$Dw\left(x\right)=\frac{1}{6}\int_0^x\left(s-x\right)^3q\left(s\right)ds+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4$$

Постоянные интегрирования $C_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ определятся из условий на концах балки.

Параллельно рассмотрим три возможных случая: а) шарнир-шарнир, б) защемление-шарнир, в) защемление-защемление (фиг. 1).

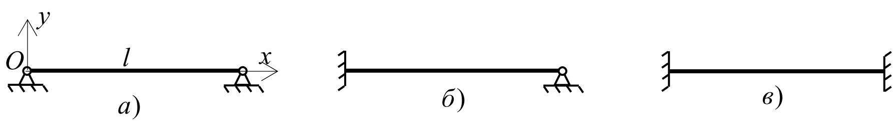


Рис. 1 Схематическое представление условий опирания балки

Случай а). Отметим, что полученные для этого случая результаты имеются и в работе [1], однако, для сохранения цельности изложения, приведем их заново.

Имеем граничные условия

$$w=0;\qquad \frac{d^2w}{dx^2}=0\qquad \text{при } x=0 \text{ и } x=l, \tag{3}$$

после удовлетворения которым найдем:

$$w(x)=\frac{1}{6D}\int_0^x (s-x)^3 q(s)\,ds+\frac{1}{6Dl}\int_0^l x(l-s)\left(x^2-2ls+s^2\right)q(s)\,ds \tag{5}$$

Полагая, что на балку приложена сосредоточенная сила $q(x)=q_0\delta(x-\zeta)$, будем иметь

$$6Dw(x)=q_0(\zeta-x)^3 H(x-\zeta)+\frac{q_0}{l}x(l-\zeta)\left(x^2-2l\zeta+\zeta^2\right) \tag{6}$$

Продифференцировав последнее по x и приравняв к нулю, получим уравнение для определения точки максимального прогиба балки

$$-3(\zeta-x)^2 H(x-\zeta)+\frac{1}{l}(l-\zeta)\left(3x^2-2l\zeta+\zeta^2\right)=0 \tag{7}$$

Очевидно, что наибольший прогиб под действием силы q_0 имеет место в случае, когда сила приложена в середине, и равен

$$w_{\max}=-\frac{1}{48}\frac{q_0 l^3}{D} \tag{8}$$

Из уравнения (7) нетрудно найти, что максимальный прогиб балки будет иметь место в точке

$$x=\begin{cases} l-\sqrt{\left(l^2-\zeta^2\right)/3} & \text{при} \quad \zeta<l/2 \\ \sqrt{\left(2l\zeta-\zeta^2\right)/3} & \text{при} \quad \zeta>l/2 \end{cases},$$

При стремлении $\zeta\to l$ найденная точка максимального прогиба стремится к значению $x_{\max}=l/\sqrt{3}$. Такое же значение для точки максимального прогиба было получено при приложении на конце балке момента [6], который является предельным случаем рассматриваемой здесь задачи, когда $\zeta\to l$ при условии постоянства произведения $q_0(\zeta)(l-\zeta)$.

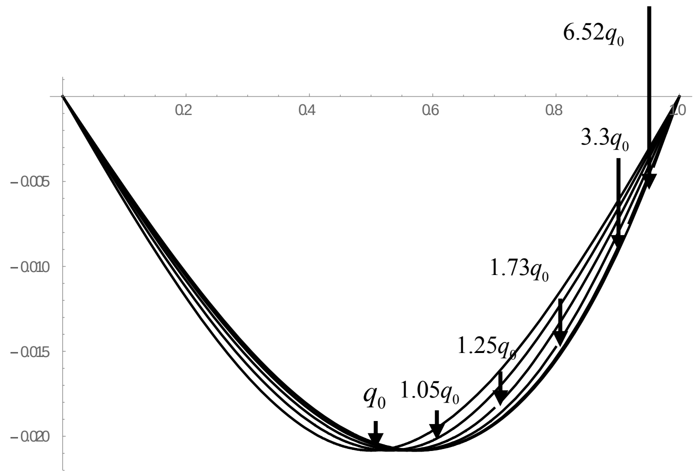
Таким образом, где бы не была приложена сосредоточенная сила, максимальный прогиб балки имеет место в средней части балки, занимающей интервал

$$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)l\approx 0.42265l<x<\frac{\sqrt{3}}{3}l\approx 0.57735l \tag{9}$$

При этом нетрудно убедиться, что наибольший прогиб балки может превосходить прогиб в средней точке максимально чуть более 2.5%.

Естественно ожидать, что и при любой распределенной, очевидно знакопостоянной, нагрузке, точка максимального прогиба балки будет находиться в этом же интервале.

На фиг.2 схематически приведены формы балки под действием указанных на рисунке сосредоточенных сил, приложенных в точках $\zeta/l = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 0.95$. Величины сосредоточенных сил выбраны так, чтобы во всех случаях максимальный прогиб был бы одинаковым. Из рисунка видно, что для сил, приложенных близко к концу, формы искривленной балки практически не отличаются друг от друга.



Фиг.2 Шарнир-шарнир

Случай б). Полагая, что защемленным является левый конец балки, будем иметь граничные условия:

$$w=0;\quad \frac{dw}{dx}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad w=0;\quad \frac{d^2w}{dx^2}=0 \quad \text{при} \quad x=l \tag{10}$$

Тогда прогиб определится формулой

$$w(x)=\frac{1}{6D}\int_0^x (s-x)^3 q(s)\,ds+\frac{x^2}{4Dl^2}\int_0^l \left\{lx-2ls+s^2-\frac{x(l-s)^2}{3l}\right\}(l-s)q(s)\,ds$$

Полагая, как и в предыдущем случае, $q(x)=q_0\delta(x-\zeta)$ найдем, что в этом случае точкой максимального прогиба является

$$x=\begin{cases}\left[1-\sqrt{\dfrac{l-\zeta}{3l-\zeta}}\right]l & \text{при} \quad \zeta<\left(2-\sqrt{2}\right)l\\[2ex] \dfrac{2l\zeta(2l-\zeta)}{2l^2+2l\zeta-\zeta^2} & \text{при} \quad \zeta\ge\left(2-\sqrt{2}\right)l\end{cases}$$

При этом наибольший прогиб под действием силы q_0 имеет место в случае, когда сила приложена в точке $\zeta = \left(2-\sqrt{2}\right) l$, и равен

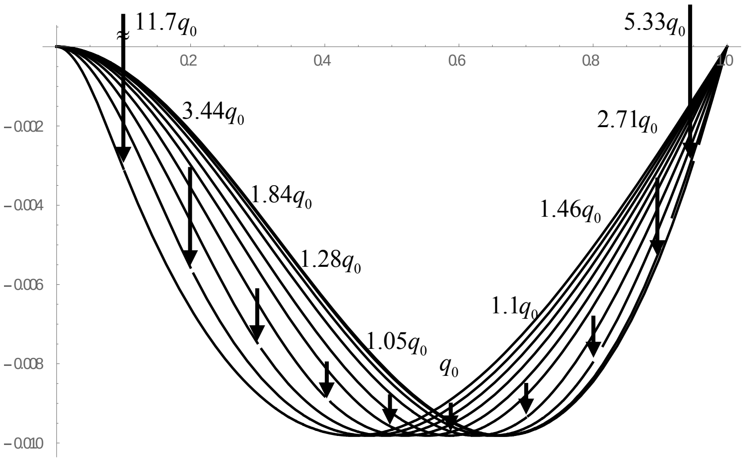
$$w_{\max} = \frac{q_0 l^3}{D}\left[-5\frac{2}{3}+4\sqrt{2}\right] \tag{11}$$

Сравнив значения (8) и (11), замечаем, что защемление одного конца балки приводит к более чем двухкратному уменьшению наибольшего прогиба балки.

Интервалом, в котором может находиться точка максимального прогиба в этом случае, будет

$$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) l < x < \frac{2}{3} l \qquad\qquad 0.42265 < \frac{x}{l} < 0.6666667$$

В этом случае, разница между наибольшим прогибом балки и прогибом в точке $\zeta = \left(2-\sqrt{2}\right) l$, соответствующей наибольшему прогибу (11), может достигнуть почти 11%, если сосредоточенная сила приближается к защемленному концу, и 4%, если сосредоточенная сила приближается к шарнирно опертому концу.



Фиг.3 Защемление - шарнир

На фиг.3 схематически приведены формы балки под действием указанных на рисунке сосредоточенных сил, приложенных в точках $\zeta / l = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4;$ $. 0.5; \left(2-\sqrt{2}\right); 0.7; 0.8; 0.9; 0.95$.Величины сосредоточенных сил, как и выше, выбраны так, чтобы во всех случаях максимальный прогиб был бы одинаковым.

Случай в). Граничные условия будут:

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l, \tag{12}$$

прогиб -

$$w(x) = \frac{1}{6D}\int_0^x (s-x)^3 q(s)\,ds + \frac{x^2}{6Dl^3}\int_0^l (l-s)^2 \left[x(l+2s) - 3ls\right] q(s)\,ds \tag{13}$$

Полагая, как и ранее, $q(x) = q_0\delta(x-\zeta)$ найдем, что в этом случае точкой максимального прогиба является

$$x = \begin{cases} l^2/(3l - 2\zeta) & \text{при} \quad \zeta \le l \\ 2\zeta l/(l + 2\zeta) & \text{при} \quad \zeta > l \end{cases}$$

Ввиду симметрии, как и в первом случае, наибольший прогиб под действием силы q_0 имеет место в случае, когда сила приложена в середине, и равен

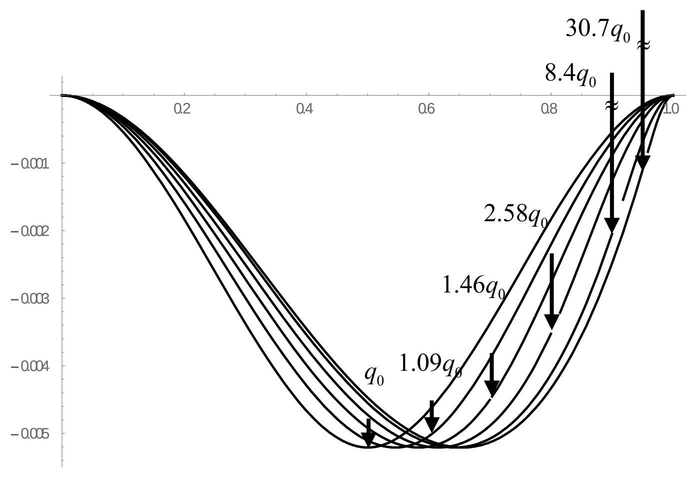
$$w_{\max} = -\frac{1}{192}\frac{q_0 l^3}{D} \tag{14}$$

Сравнив значения (8) и (14), замечаем, что защемление обоих концов балки приводит к четырехкратному уменьшению наибольшего прогиба балки.

В этом случае максимальный прогиб может иметь место в интервале:

$$\frac{1}{3}l < x < \frac{2}{3}l$$

а разность между наибольшим прогибом балки и прогибом в средней точке может достигнуть 15.6%.



Фиг. 4 Защемление - защемление

На фиг.4 схематически приведены формы балки под действием указанных на рисунке сосредоточенных сил, приложенных в точках $\zeta / l = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 0.95$. Как и выше, величины сосредоточенных сил выбраны так, чтобы во всех случаях максимальный прогиб был бы одинаковым.

Исследуя изгиб балки под действием сосредоточенной силы, приложенной в разных точках, уместно вспомнить о такой своеобразной точке как точка золотого сечения и найти точки максимального прогиба, когда сила приложена в этой точке и, наоборот, найти те точки, куда надо приложить силу, чтобы максимальный прогиб имел место в точке золотого сечения.

Пусть сила приложена в точке золотого сечения $\dfrac{\zeta}{l} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180...$. Тогда максимальный прогиб будет в следующих точках:

Случай 1. $$\frac{x_{\max}}{l} = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}-5}{6}} = 0.5335...$$

Случай 2. $$\frac{x_{\max}}{l} = \frac{2\left(10-3\sqrt{5}\right)}{11} = 0.5985...$$

Случай 3. $$\frac{x_{\max}}{l} = \frac{5-\sqrt{5}}{5} = 0.5527...$$

Теперь найдем такую точку приложения силы, чтобы максимальный прогиб имел место в точке золотого сечения $\dfrac{x_{\max}}{l} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180...$.

Случай 1. нет

Случай 2. $$\frac{\zeta}{l} = \frac{5-\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} = 0.6750...$$

Случай 3. $$\frac{\zeta}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\left(3-\sqrt{5}\right)} = 0.8090...$$

Поставим такой вопрос – можно ли в случаях 1) и 3) асимметрию изогнутой оси балки, вызванную сосредоточенной силой, приложенной вне центра балки, свести к минимуму посредством приложения подчиняющейся определенной закономерности системы сосредоточенных сил меньшей интенсивности.

Пусть сосредоточенная сила P приложена в $\zeta = pl \ \left(0.5 < p < 1\right)$. Предположим, что в точках $\zeta_k = p^k l \ \left(k = 2, 3, ...\right)$, составляющих геометрическую прогрессию со знаменателем p приложены силы $P_k = a^{k-1}P \ (0 < a < 1, k = 2, 3, ...)$, также составляющие убывающую геометрическую прогрессию.

Прогиб балки от такой нагрузки, например для случая 1), определится формулой

$$6Dw(x) = P\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}\left[(\zeta_k - x)^3 H(x-\zeta_k) + \frac{x}{l}(l-\zeta_k)(x^2 - 2l\zeta_k + \zeta_k^2)\right]$$

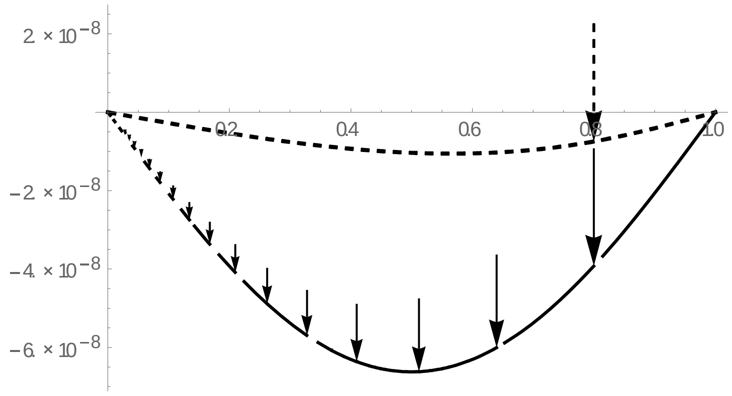
Из условия нахождения наибольшего прогиба в средней точке получим уравнение для определения знаменателя a:

$$\frac{p}{4(1-ap)} - \frac{p^3}{1-ap^3} + 3\sum_{i=1}^{m} a^{i-1}\left(p^k - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

Здесь $m = [\ln 0.5 / \ln p]$ - целая часть отношения в скобках.

В частности, если сила приложена в золотом сечении, т.е. $p = 0.6180...$, то $a = 0.5172...$. Отметим также другой интересный случай, когда сумма дополнительно приложенных сил равна величине заданной силы P. Это имеет место только при $p = 0.6087...$ и $a = 0.4999...$.

На фиг. 5 представлены изогнутые оси балки под действием силы P, приложенной в точке $\zeta = 0.8l\,(p = 0.8)$, (пунктир) и под действием системы сил $P_k = a^{k-1}P$ $(a = 0.7891.., k = 1, 2, ..)$ (сплошная линия).



Фиг. 5. Изогнутая ось балки

Наибольший прогиб под действием системы сил балка приобретает точно в средней точке, однако изогнутая ось не становится идеально симметричной относительно середины балки. При этом отклонение от симметрии является наибольшим у концов балки и в данном случае достигает всего 0.67%. Следует заметить, что величина отклонения от симметрии существенно зависит от точки приложения силы P, т.е. от точки $\zeta = pl$, и принимает максимальное значение около 3.5% при значении p около 0.57. При $p \to 1$ изогнутая ось балки становится симметричной, поскольку и $a \to 1$, т.е. бесконечная система сил стремится к равномерно распределенной нагрузке.

Аналогичный анализ для закрепленной по обоим концам балки показал, что при наибольшем прогибе в середине балки отклонение от симметрии в этом случае намного больше и достигает почти 20%, причем опять при значении p около 0.57.

Отметим, что прогиб балки под действием бесконечной системы сил изменяется в пределах, соответствующих прогибу от сосредоточенной силы P, приложенной в середине балки, и прогибу от равномерно распределенной нагрузки интенсивности P.

Заключение. Сравнение полученных для шарнирно-опертой и жестко закрепленной балок результатов показало, что при действии одной и той же силы наибольший прогиб в первом случае в четыре раза превышает прогиб во втором случае. Но несмотря на это, область, в которой этот прогиб возможен, чуть более чем в два раза меньше и занимает около 15.5% длины балки. Знание этой области может помочь в вопросе эффективного подпирания балки при действии на нее нагрузки, имеющей сильно выраженную несимметричность относительно середины балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т.1, М., Наука, 1965, 365с.
2. Гнуни В.Ц, Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости. В сб. «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем», Ереван, Изд-во ЕГУ, 1997, с.115-120.
3. Белубекян М.В., Гараков В.Г. Задача С.А.Амбарцумяна о выборе места расположения опор балки. В сб. «Седьмая годичная научная конференция РАУ», Ереван, Изд-во РАУ, 2013, с. 19-22.
4. Крейн М.Г., Яврян В.А. О функциях спектрального сдвига, возникающих при возмущениях положительного оператора. Journal of Operator Theory, Vol.6, Issue 1, 1981, pp. 155-191
5. Kac, Mark "Can one hear the shape of a drum?". The American Mathematical Monthly, vol. 73 (1966), No.4, Part 2, pp. 1-23.
6. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М.-Л., Гостехиздат, 1949, 772с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Саакян Арег Аветикович, аспирант Института механики НАН РА
Адрес: пр. М.Маштоца 45/1б кв.106, Ереван, 0019
Тел: (+37499)608866
E-mail: areg1992@gmail.com

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №2, 2016 Механика
УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И ЭНЕРГЕТИКА ДЕФОРМАЦИЙ ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО КРУГОВОГО ТОНКОГО СТЕРЖНЯ

Саркисян С.О., Хачатрян М.В.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, круговой, тонкий стержень, прикладная модель, вариационный принцип, основные уравнения, граничные условия, энергетические теоремы, вариационные методы
Key words: micropolar, elastic, circular, thin bar, applied model, variation principle, basic equations, boundary conditions, energetic theorems, variation methods
Բանալի բառեր. Միկրոպոլյար, առաձգական, շրջանային, բարակ ձող, կիրառական մոդել, վարիացիոն սկզբունք, հիմնական հավասարումներ, եզրային պայմաններ, էներգետիկ թեորեմներ, վարիացիոն մեթոդներ

Սարգսյան Ս.Հ., Խաչատրյան Մ.Վ.

Միկրոպոլյար առաձգական շրջանային բարակ ձողի դեֆորմացիայի կիրառական մոդելի վարիացիոն սկզբունքը և նրա էներգետիկան

Աշխատանքում դիտարկվում է շրջանային տիրույթի դեպքում առաձգականության միկրոպոլյար տեսության հարթ լարվածային վիճակի ընդհանուր վարիացիոն սկզբունքը, որի հիմքի վրա դուրս են բերվել այդ տեսության հիմնական հավասարումները և եզրային պայմանները:

Ընդունելով միկրոպոլյար առաձգական բարակ ուղիղ ձողերի, սալերի և թաղանթների տեսությունների կառուցման հայտնի վարկածները, հարթ լարվածային վիճակի վարիացիոն սկզբունքի հիման վրա ստացվել է միկրոպոլյար առաձգական շրջանային բարակ ձողերի կիրառական մոդելի ընդհանուր վարիացիոն սկզբունքը՝ ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ: Կառուցված վարիացիոն սկզբունքի հիման վրա արտածվել են միկրոպոլյար առաձգական շրջանային բարակ ձողերի կիրառական մոդելի հիմնական հավասարումները և բնական եզրային պայմանները: Ցույց է տրվում, որ միկրոպոլյար առաձգական շրջանային բարակ ձողերի կառուցված կիրառական մոդելի համար տեղի ունեն բոլոր էներգետիկ թեորեմները, ինչպես նաև հիմնավորվում է շրջանային ձողի այս մոդելի եզրային խնդիրների լուծման համար Ռիտցի, Բուբնով-Գալյորկինի վարիացիոն մեթոդների և վերջավոր էլեմենտների մեթոդի կիրարկումը:

Sargsyan S.H., Khachatryan M.V.

Variation principle and energetics of deformation of applied model of micropolar elastic circular thin bar

In the present paper the general variation principle of plane stress state of micropolar theory of elasticity is considered in a circular area, on the basis of which the basic equations and boundary conditions of the mentioned theory are obtained.

Accepting the known hypotheses of the construction of the theory of micropolar elastic thin straight bars, plates and shells, general variation principle for applied model of micropolar elastic circular thin bars with transverse shear deformations is obtained on the basis of variation principle of plane stress state. Based on the constructed variation principle the basic equations and natural boundary conditions of applied model of micropolar elastic circular thin bar are obtained. It is confirmed that all energy theorems and Ritz, Bubnov-Galerkin, FEM variation methods are applicable for the constructed model of micropolar elastic circular thin bar and for solutions of corresponding boundary value problems of the applied model.

В работе рассматривается общий вариационный принцип плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости для круговой области, на основе которого выводятся основные уравнения и граничные условия указанной теории.

Принимая известные гипотезы построения теории микрополярных упругих тонких прямолинейных стержней, пластин и оболочек, на основе вариационного принципа плоского напряжённого состояния, получен общий вариационный принцип для прикладной модели микрополярных упругих тонких круговых стержней с учётом поперечных сдвиговых деформаций. На основе построенного вариационного принципа выведены основные уравнения и естественные граничные условия прикладной модели микрополярных упругих круговых тонких стержней. Показываются, что для построенной прикладной модели микрополярных упругих круговых тонких стержней имеют место все энергетические теоремы, а также обосновывается применимость для решения краевых задач указанной модели кругового стержня вариационные методы Ритца, Бубнова-Галеркина и метода конечных элементов.

Введение. Законы деформирования как классического упругого тела [1], так и микрополярного упругого тела [2], могут быть выражены в виде так называемых вариационных принципов. Из этих принципов выводятся все основные уравнения классической и микрополярной теории упругости: геометрические, физические и равновесия, кроме того, вариационная постановка задач даёт возможность для применения прямых методов решения задач, обходя решение самых дифференциальных уравнений. Благодаря этому, задача определения напряжённого состояния как классического так и микрополярного упругого тела может быть сведена к вариационной задаче математической физики.

В работе [3] получены общие вариационные принципы прикладной теории микрополярной упругости тонких оболочек и пластин.

В данной работе развивается метод работы [3] и в результате получен общий вариационный принцип для прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня. Исходя из этого принципа, выводятся основные уравнения и естественные граничные условия прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня.

1.Постновка задачи. Рассмотрим стержень (фиг.1), среднее сечение которого представляет собой криволинейный прямоугольник, две стороны которого образованы дугами концентрических окружностей $(r=r_1, r=r_2)$, а две другие – отрезками радиусов $(\varphi=0,\ \varphi=\varphi_1)$. Поперечные сечения стержня представляют собой тонкий прямоугольник: $2h\times 2h^*$, где $2h$ – толщина, $2h^*$ – ширина стержня. Ось стержня – дуга окружности радиуса r_0. Будем считать, что в указанном среднем сечении имеют место уравнения и граничные условия, а также вариационный принцип плоского напряжённого состояния (в этом смысле можем принимать $2h^*=1$) микрополярной теории упругости [2]. Используем полярную систему координат (r,φ).

Сформулируем общий вариационный принцип для плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости. Для этого рассмотрим следующий функционал [2]:

$$I=\iint\limits_{(D)}\left[Э-\left\{\sigma_{11}\left[\gamma_{11}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}V_2\right)\right]+\sigma_{22}\left[\gamma_{22}-\frac{\partial V_2}{\partial r}\right]+\right.\right. \qquad (1.1)$$

$$+\sigma_{12}\left[\gamma_{12}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}V_1-\omega_3\right)\right]+\sigma_{21}\left[\gamma_{21}-\left(\frac{\partial V_1}{\partial r}+\omega_3\right)\right]+$$

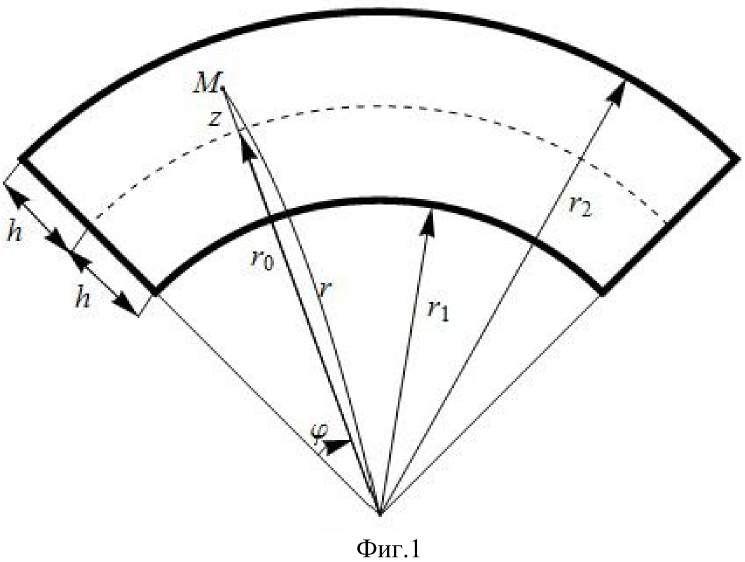
$$+\mu_{13}\left[\chi_{13}-\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_3}{\partial\varphi}\right]+\mu_{23}\left[\chi_{23}-\frac{\partial\omega_3}{\partial r}\right]\Bigg\}\Bigg]rdrd\varphi-$$

$$-\int_0^{\varphi_1}\left[q_1^+V_1+q_2^+V_2+m^+\omega_3\right]_{r=r_2}r_2d\varphi+\int_0^{\varphi_1}\left[q_1^-V_1+q_2^-V_2+m^-\omega_3\right]_{r=r_1}r_1d\varphi+I^*,$$

где $Э$ – удельная энергия деформации микрополярного упругого изотропного тела; I^* представляет собой:

а) $$I^*=\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}{}'V_1+\sigma_{12}{}'V_2+\mu_{13}{}'\omega_3\right]_{\varphi=0}dr-\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}{}''V_1+\sigma_{12}{}''V_2+\mu_{13}{}''\omega_3\right]_{\varphi=\varphi_1}dr \qquad (1.2)$$

в случае, когда на краевых сечениях области $(\varphi=0,\ \varphi=\varphi_1)$ как граничные условия заданы силовые и моментное напряжения (для величин σ_{11}, σ_{12}, μ_{13});



Фиг.1

б) $$I^*=\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}\left(V_1-V_1{}'\right)+\sigma_{12}\left(V_2-V_2{}'\right)+\mu_{13}\left(\omega_3-\omega_3{}'\right)\right]_{\varphi=0}dr-$$

$$-\int_{r_1}^{r_2}\left[\sigma_{11}\left(V_1-V_1{}''\right)+\sigma_{12}\left(V_2-V_2{}''\right)+\mu_{13}\left(\omega_3-\omega_3{}''\right)\right]_{\varphi=\varphi_1}dr, \qquad (1.3)$$

когда на краевых сечениях области $\left(\varphi=0,\ \varphi=\varphi_1\right)$ как граничные условия заданы перемещения и поворот (для величин V_1, V_2, ω_3);

в) $$I^* = \int_{r_1}^{r_2} \left[\sigma_{11}{}' V_1 + \sigma_{12} \left(V_2 - V_2{}' \right) + \mu_{13}{}' \omega_3 \right]_{\varphi=0} dr -$$

$$-\int_{r_1}^{r_2} \left[\sigma_{11}{}'' V_1 + \sigma_{12} \left(V_2 - V_2{}'' \right) + \mu_{13}{}'' \omega_3 \right]_{\varphi=\varphi_1} dr, \tag{1.4}$$

когда на краевых сечениях области $\left(\varphi=0,\ \varphi=\varphi_1\right)$ задан смешанный тип краевых условий (для величин σ_{11}, V_2, μ_{13}).

Удельная энергия деформации микрополярного упругого изотропного тела выражается следующей формулой [2]:

$$Э = \frac{1}{2}\left(\sigma_{11}\gamma_{11} + \sigma_{22}\gamma_{22} + \sigma_{12}\gamma_{12} + \sigma_{21}\gamma_{21} + \mu_{13}\chi_{13} + \mu_{23}\chi_{23}\right), \tag{1.5}$$

или

$$\begin{gathered} Э = \frac{E}{2\left(1-\upsilon^2\right)}\gamma_{11}{}^2 + \frac{E\upsilon}{1-\upsilon^2}\gamma_{11}\gamma_{22} + \frac{E}{2\left(1-\upsilon^2\right)}\gamma_{22}{}^2 + \frac{1}{2}\left(\mu+\alpha\right)\gamma_{12}^2 + \\ +\left(\mu-\alpha\right)\gamma_{12}\gamma_{21} + \frac{1}{2}\left(\mu+\alpha\right)\gamma_{21}^2 + \frac{1}{2}B\chi_{13}^2 + \frac{1}{2}B\chi_{23}^2. \end{gathered} \tag{1.6}$$

В вышеприведённых формулах: σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{21} – обычные напряжения; μ_{13}, μ_{23} – моментные напряжения, γ_{11}, γ_{22}, γ_{12}, γ_{21} – деформации; χ_{13}, χ_{23} – изгибы-кручения; V_1, V_2 – перемещения; ω_3 – свободный поворот; E, ν, $\mu = \dfrac{E}{2\left(1+\nu\right)}$, α, B – упругие постоянные микрополярного тела, (D) – область криволинейного прямоугольника (фиг.1).

Отметим, что если в выражениях функционала (1.1) и плотности потенциальной энергии деформации (1.6) подставить $\alpha=0$ (а также считать $\mu_{13}=\mu_{23}=0, \chi_{13}=\chi_{23}=0$, $\omega_3=0$), получим функционал и плотность потенциальной энергии деформации для классического случая.

На основе (1.1) составим вариационное уравнение

$$\delta I = 0\ . \tag{1.7}$$

Варьируя функционал (1.1) по всем функциональным аргументам, получим следующие основные уравнения плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{21}+\sigma_{12}\right) = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{22}-\sigma_{11}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\mu_{13}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial r}+\frac{1}{r}\mu_{23}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0 \tag{1.8}$$

соотношения упругости

$$\gamma_{11}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}\right],\quad \gamma_{22}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}\right],\quad \gamma_{12}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}$$

$$\gamma_{21}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12},\quad \chi_{13}=\frac{1}{B}\mu_{13},\quad \chi_{23}=\frac{1}{B}\mu_{23} \tag{1.9}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}V_2,\quad \gamma_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial r},\quad \gamma_{12}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}V_1-\omega_3,\quad \gamma_{21}=\frac{\partial V_1}{\partial r}+\omega_3,$$

$$\chi_{13}=\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_3}{\partial\varphi},\quad \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial r}, \tag{1.10}$$

а также следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}&\text{на } r=r_1:\ \sigma_{21}=q_1^-,\ \sigma_{22}=q_2^-;\ \mu_{23}=m^-,\\ &\text{на } r=r_2:\ \sigma_{21}=q_1^+,\sigma_{22}=q_2^+;\ \mu_{23}=m^+;\end{aligned} \tag{1.11}$$

в случае (1.2):

$$\begin{aligned}&\text{на } \varphi=0:\ \sigma_{11}=\sigma_{11}',\ \sigma_{12}=\sigma_{12}',\ \mu_{13}=\mu_{13}';\\ &\text{на } \varphi=\varphi_1,\ \sigma_{11}=\sigma_{11}'',\ \sigma_{12}=\sigma_{12}'',\mu_{13}=\mu_{13}'';\end{aligned} \tag{1.12}$$

в случае (1.3):

$$\begin{aligned}&\text{на } \varphi=0:\ V_1=V_1',\ V_2=V_2',\ \omega_3=\omega_3';\\ &\text{на } \varphi=\varphi_1,\ V_1=V_1'',\ V_2=V_2'',\ \omega_3=\omega_3'';\end{aligned} \tag{1.13}$$

в случае (1.4):

$$\begin{aligned}&\text{на } \varphi=0:\sigma_{11}=\sigma_{11}',\ V_2=V_2',\ \mu_{13}=\mu_{13}';\\ &\text{на } \varphi=\varphi_1,\ \sigma_{11}=\sigma_{11}'',\ V_2=V_2'',\ \mu_{13}=\mu_{13}''.\end{aligned} \tag{1.14}$$

На основе уравнений (1.8)-(1.10) известным способом получим закон сохранения энергии (т.е. теорему Клапейрона) для плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости для рассматриваемой круговой области:

$$\iint\limits_D Эrdrd\varphi = \frac{1}{2}A, \qquad (1.15)$$

где $\frac{1}{2}A$ – работа внешних усилий и моментов:

$$A = \int\limits_0^{\varphi_1}\left(q_1^+V_1 + q_2^+V_2 + m^+\omega_3\right)_{r=r_2} r_2 d\varphi - \int\limits_0^{\varphi_1}\left(q_1^-V_1 + q_2^-V_2 + m^-\omega_3\right)_{r=r_1} r_1 d\varphi -$$
$$-\int\limits_{r_1}^{r_2}\left(\sigma_{11}{}'V_1 + \sigma_{12}{}'V_2 + \mu_{13}{}'\omega_3\right)_{\varphi=\varphi_1} dr + \int\limits_{r_1}^{r_2}\left(\sigma_{11}{}''V_1 + \sigma_{12}{}''V_2 + \mu_{13}{}''\omega_3\right)_{\varphi=\varphi_2} dr. \qquad (1.16)$$

На основе закона сохранения энергии (1.15), с учётом того, что плотность потенциальной энергии деформации (1.6) положительно-определённая квадратичная форма, легко доказать теорему едиственности в микрополярной теории упругости [2] (в данном случае – для плоского напряжённого состояния). Также легко проверить, что имеют место формулы типа Кастильяно и Грина. Известным способом [2] можно доказать и закон взаимности Бетти в микрополярной теории упругости.

В дальнейшем стержень будем считать тонким, это означает, что $2h << r$ и $2h << l$, где l – длина средней линии стержня. Наша цель – построение прикладной (одномерной) модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня. Для этого удобно будет радиус-вектор r произвольной точки области представить так: $r = r_0 + z$, где $-h \le z \le h$ $\left(r_1 = r_0 - h,\ r_2 = r_0 + h\right)$, при этом, на основе тонкостенности стержня будем считать, что

$$1 + \frac{h}{r_0} \approx 1. \qquad (1.17)$$

2. Основные гипотезы. Сформулируем допущения (достаточно общие) [4-6], используемые при построении прикладной модели микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек.

1. В качестве исходной кинематической для перемещений, примем гипотезу прямой линии, т.е. гипотезу Тимошенко, это означает, это линейный элемент, первоначально перпендикулярный к средней линии срединной плоскости кругового стержня до деформации, остаётся после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии, а поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Кроме того, для свободного поворота ω_3 будем считать, что эта функция по толщинной координате z – постоянная. Вследствие указанных допущений будем иметь следующий линейный закон изменения перемещений и свободного поворота по толщине рассматриваемого стержня:

$$V_1 = u(\varphi) + z\psi(\varphi),\ V_2 = w(\varphi),\ \omega_3 = \Omega_3\varphi, \qquad (2.1)$$

где $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ – перемещения точек средней линии в направлениях по её касательной и по нормали (т.е. $w(\varphi)$ – это прогиб стержня); $\psi(\varphi)$ – угол поворота первоначально нормального элемента; $\Omega_3(\varphi)$ – свободный поворот точек этого элемента.

Кинематические гипотезы (2.1) в целом, как в работах [4-6], назовём обобщёнными гипотезами Тимошенко для случая микрополярного тонкого стержня (в данном случае, для кругового тонкого стержня).

2. Будем применять гипотезу о тонкостенности кругового стержня, при которой считаем, что имеет место приближённое равенство (1.15), а также, что

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0+z}=\frac{1}{r_0\left(1+\frac{z}{r_0}\right)}\approx\frac{1}{r_0}\,. \qquad (2.2)$$

3. Примем предположения о малости нормального напряжения σ_{22}, относительно нормального напряжения σ_{11}, в первом уравнении закона Гука ($(1.9)_1$).

4. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{21} примем

$$\sigma_{21}=\overset{0}{\sigma}_{21}(\varphi)\ . \qquad (2.3)$$

После определения указанных выше величин, формулу для σ_{21} будем поправлять следующим образом. Проинтегрируем по z второе из (1.8) ($(1.8)_2$) уравнение равновесия и, при определении постоянного интегрирования (вернее, функции от φ), потребуем равенство нулю интеграла от $-h$ до h от полученного выражения. После указанного интегрирования полученное окончательное выражение прибавим к формуле (2.3).

В соответствии с принятым законом распределения перемещений и поворота (2.1), подставляя их в формулы (1.10), находим деформации и изгибы-кручения:

$$\gamma_{11}=\left(\frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi}+\frac{1}{r_0}w\right)+z\frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi},\quad \gamma_{22}=0,\quad \gamma_{12}=\frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi}-\frac{1}{r_0}u-\Omega_3$$

$$\gamma_{21}=\psi+\Omega_3,\ \chi_{13}=\frac{1}{r_0}\frac{d\Omega_3}{d\varphi},\quad \chi_{23}=0 \qquad (2.4)$$

Примем следующие обозначения:

$$\Gamma_{11}=\frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi}+\frac{1}{r_0}w,\ \Gamma_{12}=\frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi}-\frac{1}{r_0}u-\Omega_3,\ \Gamma_{21}=\psi+\Omega_3,$$

$$K_{11}=\frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi},\quad k_{13}=\frac{1}{r_0}\frac{d\Omega_3}{d\varphi}\ , \qquad (2.5)$$

тогда для деформаций, изгибов – кручений получим:

$$\gamma_{11}=\Gamma_{11}+zK_{11},\ \gamma_{22}=0,\ \gamma_{12}=\Gamma_{12},\ \gamma_{21}=\Gamma_{21},\ \chi_{13}=k_{13},\ \chi_{23}=0 \qquad (2.6)$$

Здесь Γ_{11} представляет собой продольную относительную деформацию средней линии; K_{11}– изменение кривизны средней линии (от силовых напряжений); Γ_{12} , Γ_{21} – сдвиговые деформации; k_{13} – изменение кривизны средней линии (от моментных напряжений).

Используя гипотезу 3) и формулу $(2.6)_1$, из формулы $(1.9)_1$ для напряжений σ_{11} будем иметь

$$\sigma_{11} = \overset{0}{\sigma}_{11}(\varphi) + z\overset{1}{\sigma}_{11}(\varphi), \tag{2.7}$$

где

$$\overset{0}{\sigma}_{11}(\varphi) = E\Gamma_{11}, \quad \overset{1}{\sigma}_{11}(\varphi) = EK_{11}. \tag{2.8}$$

Для определения силового напряжения σ_{12} , используя формулы $(1.9)_3$, $(2.4)_3$, $(2.4)_4$, получим:

$$\sigma_{12} = (\mu+\alpha)\Gamma_{12} + (\mu-\alpha)\Gamma_{21}. \tag{2.9}$$

Принимая во внимание формулы для σ_{11} ((2.7)), σ_{12} ((2.9)), рассмотрим второе уравнение равновесия ($(1.8)_2$), которое проинтегрируем по r, с учётом тонкостенности области и граничных условий из (1.11) для σ_{22} , окончательно получим:

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}\left(q_2^+ + q_2^-\right) - \frac{h^2}{2}\frac{1}{r_0}\overset{1}{\sigma}_{11} + z\left(\frac{1}{r_0}\overset{0}{\sigma}_{11} - \frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{12}}{d\varphi}\right) + \frac{1}{r_0}\overset{1}{\sigma}_{11}\frac{z^2}{2}. \tag{2.10}$$

Для моментного напряжения μ_{13} на основании формул $(1.9)_5$ и, с учётом формулы из (2.6) для χ_{13} , будем иметь:

$$\mu_{13} = Bk_{13}. \tag{2.11}$$

Значение для моментного напряжения μ_{23} получим из третьего уравнения равновесия ($(1.8)_3$) интегрированием по r с учётом формул (2.11), (2.9) и (2.3):

$$\mu_{23} = \frac{1}{2}\left(m^+ + m^-\right) - z\left(\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\mu}_{13}}{d\varphi} + \overset{0}{\sigma}_{12} - \overset{0}{\sigma}_{21}\right) \tag{2.12}$$

Для определения силового напряжения σ_{21} , в основу примем гипотезу 4), тогда с использованием первого уравнения равновесия ($(1.8)_1$), а также формулу (2.3), окончательно получим:

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(\varphi) + \frac{h^2}{6}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi} - z\left(\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{0}{\sigma}_{11}}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}\overset{0}{\sigma}_{12}\right) - \frac{z^2}{2}\frac{1}{r_0}\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}}{d\varphi}. \tag{2.13}$$

3. Вариационный принцип прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня. С целью приведения двумерной задачи микрополярной теории упругости к одномерной, что уже выполнено для перемещений и поворота, деформаций и изгибов-кручения, силовых и моментных напряжений, в прикладной теории микрополярного упругого кругового стержня, вместо компонентов силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия: N, Q_1, Q_2 и моменты: M_{11}, L_{13}, которые выражаются следующими формулами:

$$\mathrm{N}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}dz\,,\ Q_1=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}dz\,,\ Q_2=\int_{-h}^{h}\sigma_{21}dz\,,\ \mathrm{M}_{11}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}zdz\,,\ L_{13}=\int_{-h}^{h}\mu_{13}dz \tag{3.1}$$

Теперь, в функционале (1.1) плоского напряжённого состояния микрополярного стержня используем формулы для деформаций, изгибов-кручений (2.6), силовых и моментных напряжений ((2.8), (2.9), (2.11)), перемещений и поворота (2.1), после выполнения интегрирования по z, от $-h$ до h, приходим к следующему функционалу:

$$I_0=\int_0^{\varphi_1}\left[\mathrm{Э}_0-\left\{\left[\Gamma_{11}-\left(\frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi}+\frac{1}{r_0}w\right)\right]N+\left(\mathrm{K}_{11}-\frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi}\right)\mathrm{M}_{11}+\right.\right.$$

$$+\left[\Gamma_{12}-\left(\frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi}-\frac{1}{r_0}u-\Omega_3\right)\right]Q_1+\left[\Gamma_{21}-\left(\psi+\Omega_3\right)\right]Q_2+$$

$$\left.\left.+\left[k_{13}-\frac{1}{r_0}\frac{d\Omega_3}{d\varphi}\right]L_{13}\right\}\right]r_0d\varphi-\int_0^{\varphi_1}\left[q_1^+\left(u+h\psi\right)+q_2^+w+m^+\Omega_3\right]\Big|_{z=h}r_0d\varphi+$$

$$+\int_0^{\varphi_1}\left[q_1^-\left(u-h\psi\right)+q_2^-w+m^-\Omega_3\right]\Big|_{z=-h}r_0d\varphi+I_0^{\prime}, \tag{3.2}$$

где

а) $$I_0^{\prime}=u\mathrm{N}'\big|_{\varphi=0}+\psi\mathrm{M}'\big|_{\varphi=0}+wQ_1'\big|_{\varphi=0}+\Omega_3L_{13}^{\prime}\big|_{\varphi=0}-u\mathrm{N}''\big|_{\varphi=\varphi_1}-$$

$$-\psi\mathrm{M}''\big|_{\varphi=\varphi_1}-wQ_1''\big|_{\varphi=\varphi_1}-\Omega_3L_{13}^{\prime\prime}\big|_{\varphi=\varphi_1} \tag{3.3}$$

б) $$I_0^{\prime}=\mathrm{N}\left(u-u'\right)\big|_{\varphi=0}+\mathrm{M}_{11}\left(\psi-\psi'\right)\big|_{\varphi=0}+Q_1\left(w-w'\right)\big|_{\varphi=0}+L_{13}\left(\Omega_3-\Omega_3^{\prime}\right)\big|_{\varphi=0}-$$

$$-\mathrm{N}\left(u-u''\right)\big|_{\varphi=\varphi_1}-\mathrm{M}_{11}\left(\psi-\psi''\right)\big|_{\varphi=\varphi_1}-Q_1\left(w-w''\right)\big|_{\varphi=\varphi_1}-L_{13}\left(\Omega_3-\Omega_3^{\prime\prime}\right)\big|_{\varphi=\varphi_1} \tag{3.4}$$

в) $$I_0^{\prime}=u\mathrm{N}'\big|_{\varphi=0}+\psi\mathrm{M}'\big|_{\varphi=0}+\Omega_3L_{13}^{\prime}\big|_{\varphi=0}+Q_1\left(w-w'\right)\big|_{\varphi=0}-u\mathrm{N}''\big|_{\varphi=\varphi_1}-$$

$$-\psi\mathrm{M}''\big|_{\varphi=\varphi_1}-\Omega_3L_{13}^{\prime\prime}\big|_{\varphi=\varphi_1}-Q_1\left(w-w''\right)\big|_{\varphi=\varphi_1}\ ; \tag{3.5}$$

$$Э_0 = \mathrm{E}h\Gamma_{11}^2 + \frac{\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11}^2 + (\mu+\alpha)h\Gamma_{12}^2 + (\mu+\alpha)h\Gamma_{21}^2 +$$
$$+2(\mu-\alpha)h\Gamma_{12}\Gamma_{21} + (\gamma+\varepsilon)hk_{13}^2 \tag{3.6}$$
из себя представляет плотность потенциальной энергии деформации микрополярного кругового тонкого стержня. Отметим, что в выражениях (3.3)-(3.5) одним или двумя штрихами обозначены значения соответствующих величин на краях $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$ кругового стержня.

Вариационное уравнение
$$\delta I_0 = 0 \tag{3.7}$$
будет представлять собой общий вариационный принцип прикладной модели микрополярного упругого кругового стержня.

Варьируя функционал (3.2) по всем функциональным аргументам, получим основные уравнения и естественные граничные условия прикладной модели микрополярного упругого кругового стержня:

уравнения равновесия
$$\frac{1}{r_0}\mathrm{N} - \frac{1}{r_0}\frac{dQ_1}{d\varphi} = q_2^+ - q_2^-, \qquad \frac{1}{r_0}Q_1 + \frac{1}{r_0}\frac{d\mathrm{N}}{d\varphi} = -\left(q_1^+ - q_1^-\right)$$
$$Q_2 - \frac{1}{r_0}\frac{d\mathrm{M}_{11}}{d\varphi} = h\left(q_1^+ + q_1^-\right), \qquad Q_2 - Q_1 - \frac{1}{r_0}\frac{dL_{13}}{d\varphi} = m^+ - m^-; \tag{3.8}$$
соотношения упругости
$$\mathrm{N} = 2\mathrm{E}h\Gamma_{11}, \quad Q_1 = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{12} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{21},$$
$$Q_2 = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{21} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12}, \quad \mathrm{M}_{11} = \frac{2\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11}, \; L_{13} = 2Bhk_{13}; \tag{3.9}$$
геометрические соотношения
$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0}u - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3,$$
$$\mathrm{K}_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0}\frac{d\Omega_3}{d\varphi}. \tag{3.10}$$

Граничные условия (например, для края $\varphi = 0$):

В случае (3.3):
$$\mathrm{N}\Big|_{\varphi=0} = \mathrm{N}' = \int_{-h}^{h}\sigma_{11}{}'dz, \qquad \mathrm{M}_{11}\Big|_{\varphi=0} = \mathrm{M}' = \int_{-h}^{h}\sigma_{11}{}'zdz;$$
$$Q_1\Big|_{\varphi=0} = Q_1{}' = \int_{-h}^{h}\sigma_{12}{}'dz, \qquad L_{13}\Big|_{\varphi=0} = L_{13}{}' = \int_{-h}^{h}\mu_{13}{}'dz. \tag{3.11}$$

Здесь, как частный случай, получим граничные условия свободного края:

$$\mathrm{N}=0,\ \ Q=0,\ \ \mathrm{M}_{11}=0,\ \ L_{13}=0; \tag{3.12}$$

В случае (3.4):

$$\begin{aligned} u\Big|_{\varphi=0} &= u' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_1{}' dz, \qquad \psi\Big|_{\varphi=0} = \psi' = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} V_1{}' zdz; \\ w\Big|_{\varphi=0} &= w' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_2{}' dz, \qquad \Omega_3\Big|_{\varphi=0} = \Omega_3{}' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \omega_3{}' dz. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Здесь, как частный случай, получим граничные условия жёсткого защемления:

$$u=0,\ \ w=0,\ \ \psi=0,\ \ \Omega_3=0; \tag{3.14}$$

В случае (3.5):

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\Big|_{\varphi=0} &= \mathrm{N}' = \int_{-h}^{h} \sigma_{11}{}' dz, \qquad \mathrm{M}_{11}\Big|_{\varphi=0} = \mathrm{M}' = \int_{-h}^{h} \sigma_{11}{}' zdz; \\ w\Big|_{\varphi=0} &= w' = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} V_2{}' dz, \qquad L_{13}\Big|_{\varphi=0} = L_{13}{}' = \int_{-h}^{h} \mu_{13}{}' dz. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Здесь, как частный случай, получим граничные условия шарнирного опирания:

$$w=0,\ \ N=N',\ \ M_{11}=M',\ L_{13}=L_{13}{}', \tag{3.16}$$

или $w=0,\ \ N=N',\ \ M_{11}=0,\ L_{13}=0$, когда край шарнирно опёрт и не нагружен внешними моментами.

Известным способом, на основе системы уравнений прикладной модели микрополярного кругового тонкого стержня (3.8)-(3.10), либо, на основе уравнения баланса энергии (1.15), с использованием гипотез раздела два, получим уравнение баланса энергии для указанной прикладной модели:

$$\int_0^a \text{Э}_0 dx_1 = \frac{1}{2}A_0\ , \tag{3.17}$$

где $\frac{1}{2}A_0$ – работа внешних приложенных усилий:

$$\begin{aligned} A_0 = &\int_0^{\varphi_1}\Big[\big(q_1^+ - q_1^-\big)u + \big(q_1^+ + q_1^-\big)h\psi + \big(q_2^+ - q_2^-\big)w + \big(m^+ - m^-\big)\Omega_3\Big] r_0 d\varphi - \\ &- u\mathrm{N}'\Big|_{\varphi=0} - \psi\mathrm{M}'\Big|_{\varphi=0} - wQ_1{}'\Big|_{\varphi=0} - \Omega_3 L_{13}{}'\Big|_{\varphi=0} + u\mathrm{N}''\Big|_{\varphi=\varphi_1} + \psi\mathrm{M}''\Big|_{\varphi=\varphi_1} + \\ &+ wQ''\Big|_{\varphi=\varphi_1} + \Omega_3 L_{13}{}''\Big|_{\varphi=\varphi_1} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Легко убедиться, что для построенной модели микрополярного упругого тонкого кругового стержня имеют место все энергетические теоремы (Клапейрона, единственности, взаимности работ), а также формулы типа Кастильяно и Грина.

Из общего вариационного уравнения (3.2), как частные случаи, следуют вариационные принципы типа Лагранжа и Кастильяно, следовательно, оправдано применение вариационных методов Ритца и Бубнова-Галеркина, а также метод конечных элементов.

Отметим, что если в функционале (3.2) и в формуле (3.6) для плотности потенциальной энергии деформации, подставить $\alpha = 0$ (а также $\Omega_2 = 0,\ L_{13} = 0,\ k_{13} = 0$), получим функционал и формулу для плотности потенциальной энергии деформации для классического случая упругого кругового тонкого стержня с учётом поперечных сдвигов[7].

4. Заключение. На основе метода гипотез построен общий вариационный принцип прикладной модели микрополярных упругих круговых тонких стержней. На основе указанного вариационного принципа получены основные уравнения и естественные граничные условия прикладной модели микрополярных упругих круговых тонких стержней. Изучается энергетика явления, а также обосновывается применимость вариационных методов и метода конечных элементов для решения краевых задач прикладной модели микрополярных упругих круговых тонких стержней.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542с.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. P.383.
3. Sargsyan S.H. Energy balance equation, energetic theorems and variation equation for the general theory of micropolar elastic isotropic thin shells//International Journal of Mechanics. 2014. Vol.8. P. 93-100.
4. Sargsyan S. H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// J. of Mat. Sci. and Engineering. 2012. V.2. № 1. P.98-108.
5. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик //Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С.148-155.
6. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66.
7. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учётом поперечных сдвиговых деформаций //Докл. НАН Армении. 2016. С.34-42.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН РА, д.ф.-м.н, проф., зав. каф. анализа и диф. уравнений Гюмрийского госпединститута им.М.Налбандяна.

Хачатрян Мелине Вардановна – аспирант Гюмрийского госпединститута им.М.Налбандяна. **Тел.:** (093) 15 16 98. **E-mail:** khachatryanmeline@mail.ru

Поступила в редакцию 28.03.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №2, 2016 Механика
УДК 539.3

DYNAMIC BIMORPH THERMO-PIEZOELECTRIC BENDERS WITH ARBITRARY SUPPORT LOCATION. PART II: APPLICATION TO ENERGY HARVESTING-NUMERICAL RESULTS AND DISCUSSIONS

Bagdasaryan Gevorg Y. , Hasanyan Armanj D., Hasanyan Davresh J.

Dedicated to the memory of late Professor Vardges Gnuni

Keywords: Thermo-electro-elastic effects, energy harvesting, resonant frequency, piezoceramic, pyroelectric effect

Ключевые слова: термоэлектроупругий эффект, накопитель энергии, резонансная частота, пьезокерамика, пироэлектрический эффект

Բանալի բառեր. Ջերմաէլեկտրաառաձգականություն, ռեզոնանսային հաճախություն, պիեզոկերամիկա, պիեզոէլեկտրիկ

Багдасарян Г.Е., Асанян А.Д., Асанян Д.Д.
Динамическая двухслойная термоупругая пластина с произвольно расположенными опорами.
Часть II. Применение к накоплению энергии – численные результаты и обсуждение.

Приводится численный анализ задачи, рассмотренной в предыдущем номере журнала, для частных примеров консольной и шарнирно опёртой балок.

Բաղդասարյան Գ.Ե., Հասանյան Ա.Դ., Հասանյան Դ.Ջ
Կամայականորեն տեղակայված հենարաններով երկշերտ ջերմաառաձգական դինամիկական սալ:
Մաս II: Էներգիայի կուտակում – թվային հետազոտություն և քննարկում

Ամսագրի նախորդ համարում դիտարկված խնդրի համար բերված են թվային արդյունքներ մասնավորապես կոնսոլային և հոդակապորեն ամրակցված հեծանների համար:

6. Discussions and Numerical Results

The effect of varying the vibrational frequency on the generation of charge is shown in Fig. 2. The parameters s, h, σ, α_T and $\tilde{p}$ are chosen according to Table 1. The regions that peak to infinity represent the vibrational frequency being equal to the natural frequency. In Fig 2a, the support location has a strong effect on the charge coefficient. Fig. 2b,c,d,e show the effect of varying the value of the follower force. When $\lambda > 0$ the follower force is in compression and when $\lambda < 0$, it is in tension. From these plots, λ has the strongest effect on the system when the vibration frequency is below the first natural frequency. When the system is static $(\Omega = 0)$, as seen in Fig. 3, by including the follower force, the energy harvesting coefficient can be improved. When the magnitude of the compressive follower force increases, the strongest effect is at higher values of α. For $\alpha = 1.0$, the charge coefficient approaches to infinity monotonically as the compressive follower force approaches λ_{cr}. Contrary to conventional uses of bimorphs, where a compressive follower force is applied, a tensile follower force is also considered. In Fig. 2d,e, or Fig. 3, for higher values of α , the tensile follower force decreases the energy harvesting coefficient, but for lower values of α, it can improve the energy harvester. For a cantilever plate-layer, the energy harvesting coefficient can be improved to $\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen} = 28$ for $\lambda = -1.6$ from $\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen} = 20$ for $\lambda = 0.$ This is a 40% increase of $\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$.

An energy harvester can also be improved by increasing the probability of capturing resonance in environments where the vibrational frequency fluctuates. For example, in Fig. 4, the first natural frequency of Fig. 2b,d is considered. In Fig. 4a, a compressive load is applied and the width of the peak, which will be called the bandwidth, is widest for $\alpha = 1$ as compared to $\alpha = 0$ and $\alpha = 0.5$. Conversely, in Fig. 4b, when there is tensile load, the bandwidth is widest for $\alpha = 0$ and $\alpha = 0.5$ as compared to $\alpha = 1$. Because of this, when designing an energy harvester, it can be optimized for environments where the frequency fluctuates. The formulation in this paper can also be a guild to experimenters who try to capture resonance with energy harvesters.

Note that in other context effect of location of boundary condition on critical buckling load was investigated by V. Ts. Gnuni in [1].

Next, the effect of the nondimensional energy harvester's properties $h, s,$ and ρ on the generation of charge is studied. The remaining material properties $L, \vartheta, \alpha_T, p_3^{(1)}$, and $d_{31}^{(1)}$ affect Q^{ϑ}_{gen} linearly from our formulation of Eqn. (44b) and they will not be considered. The variation of these properties represents changing the material properties while the piezoelectric properties are held constant. When plotting the changes of one of these parameters, the remaining parameters are set to the values of Table 1. In Fig 5, the effect of varying the volume fraction h is shown when $\Omega = 0$. In Fig. 5a, when $\lambda = 0$, the support location has no effect on the generation of charge as h is changed. At $h = 1.3$, the energy harvesting coefficient approaches a maximum value and increasing h to infinity, the energy harvesting coefficient converges to a constant value. These characteristics are also observed when there is a follower force included, as seen in Fig. 5,c,d,e. Similar to the discussion earlier, the charge coefficient is improved in the presence of a compressive follower force when $\alpha = 1$, and it is improved in the presence of a tensile follower force when $\alpha = 0$ and $\alpha = 0.5$.

Fig 6 shows the effect of varying the compliance ratio s on $\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$. From these results, it is determined that decreasing the stiffness of the material relative to the piezoelectric stiffness, the energy harvester improves. Increasing the material stiffness to infinity, the value of $\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$ converges to a finite value, but decreasing it, $\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$ approaches infinity.

Note that the effect of the varying the density ratio σ on $\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$. σ only appears as a product of Ω^4 in the expression of p and q . Because of this, the variation of σ will have no effect on $\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$, when $\Omega = 0$. Varying the densities of the piezoelectric and the substrate does change the values of the natural frequencies and consequently values of σ , $\tilde{Q}_{gen}^{9}$ is infinity. This is because of resonance effects.

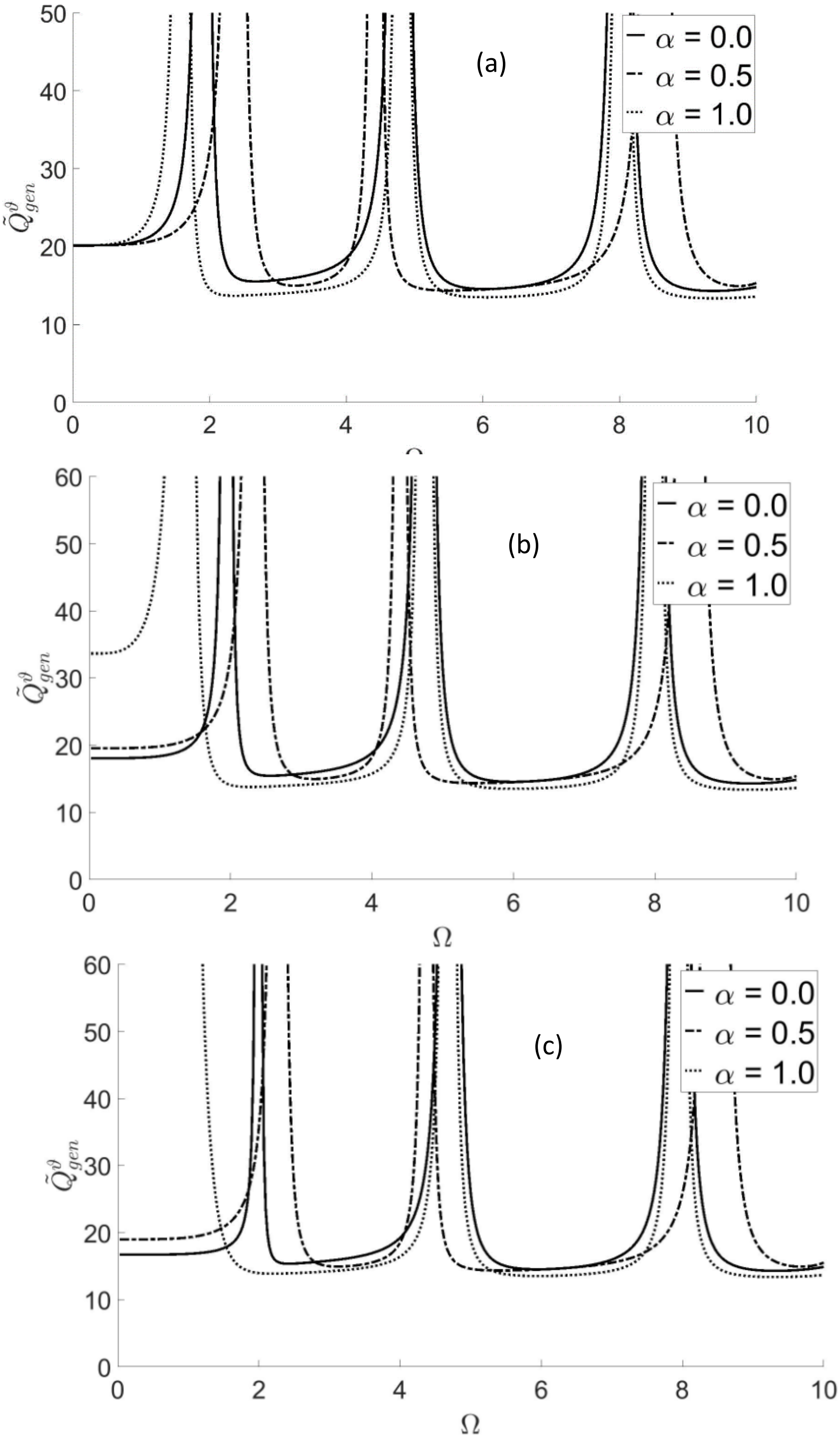
7. Conclusion

An analytical analysis of a bimorph's thermal energy harvesting coefficient was performed. The analysis also takes into account pyroelectric and thermal expansion effects. The most general analytical expression for the energy conversation coefficients are presented for bi-layer. These coefficients were derive for more general situations, when mechanical, electrical, thermal fields are present. We derive coefficients (transformation coefficients) for sensing, actuating and energy harvesting. As a particular case, the analytical expressions for energy harvesting coefficients due to pyroelectric and thermal expansion effects were obtained. The influences of support location, material properties, and a conservative follower force were analyzed in order to optimize the energy harvester. The numerical simulation of the thermal energy harvesting coefficient showed that support location strongly influences the generated charge. The follower force was seen to influence the energy harvester the most when the vibration frequency was below the first resonance frequency. Contrary to convention, where a compressive in plain follower force is applied, a tensile follower force was shown to also improve the energy harvester. In addition, by varying support location and the follower force, the bandwidth, or the range of vibrating frequency over which resonance effects are observed, can be made wider so that the probability of the energy harvester operating at resonance frequency can be increased. This is beneficial for designs which operate in environments where the vibration frequency fluctuates over a certain frequency range.

The effect of volume fraction and compliance ratio was studied for a static system. It was shown that at a certain volume fraction, the energy harvester is optimized. The compliance ratio improves the energy harvester by taking it close to zero. The density ratio does not affect the charge coefficient directly. By changing the densities of the two layers of the bimorph, the natural frequency of the system is changed, and this indirectly influences the charge coefficient. It was also shown that the density ratio has no effect for a static system as expected since it appears as a coefficient of the vibrational frequency in the equilibrium equations.

Table 1: Material properties used in the numerical simulation

Material Prop	**PZT-5A**	**Aluminum**
Compliance ($10^{-12} m^2/N$)	**16.4**	**14.3**
Density (kg/m^3)	**7750**	**2700**
Height (mm)	**0.75**	**0.5**
Thermal expansion ($10^{-6}\ K^{-1}$)	**2**	**22**
Pyroelectric coefficient ($10^{-6}\ Cm^{-2}/K$)	**238**	**-**
Piezoelectric coefficient ($10^{-12}\ C/N$)	**-171**	**-**
Dielectric permittivity ($10^{-12} F/m$)	**15051.8**	**-**


(a)
(b)
(c)
α = 0.0
α = 0.5
α = 1.0
$\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$
Ω

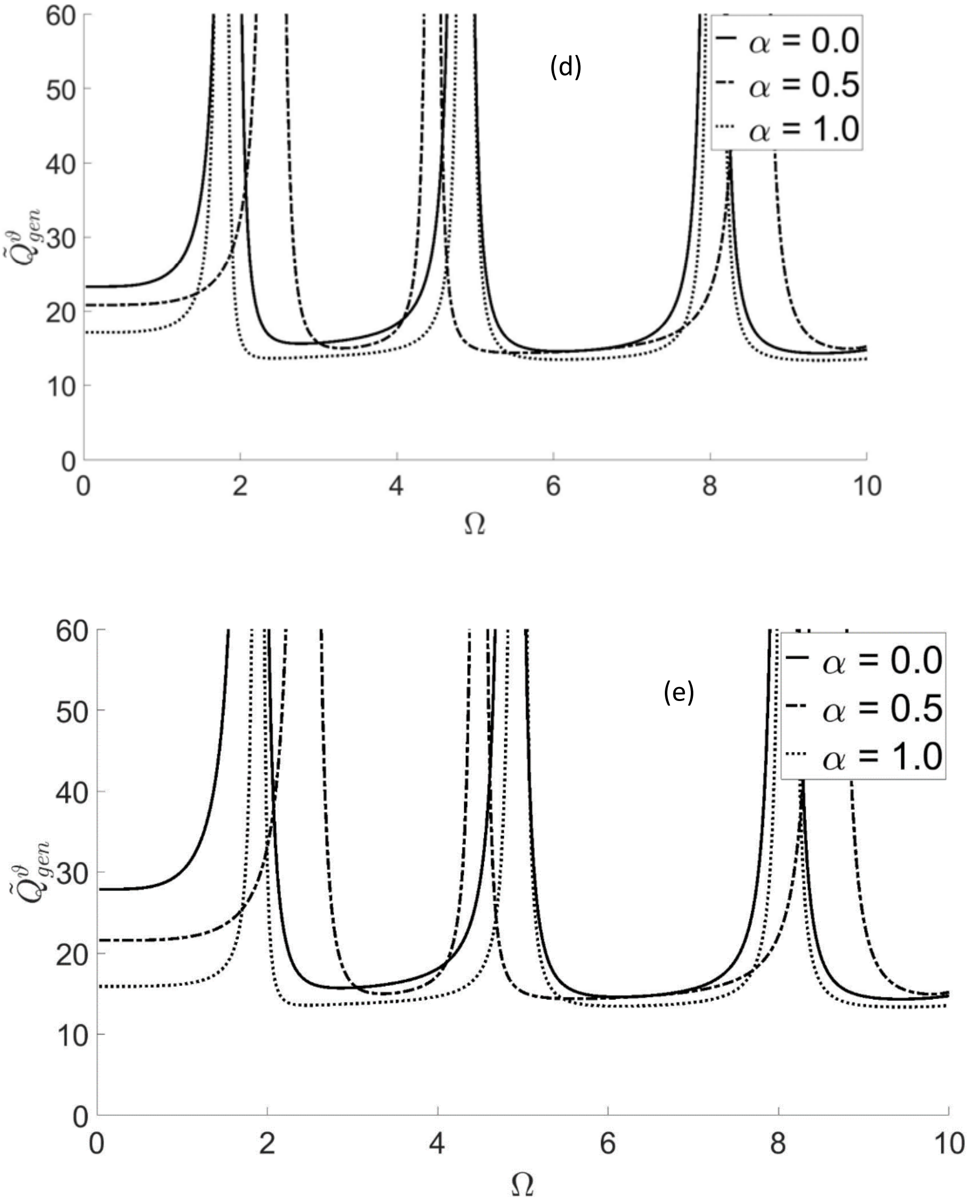


Figure 2. Non-dimensional charge coefficient $\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$ vs. non-dimensional frequency Ω for follower force (a) $\lambda = 0$, (b) $\lambda = 0.8$, (c) $\lambda = 1.6$, (d) $\lambda = -0.8$ and (e) $\lambda = -1.6$

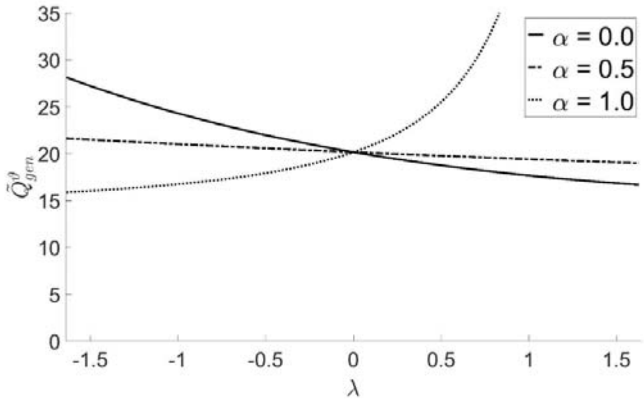


Figure 3. Non-dimensional charge coefficient $\tilde{Q}_{gen}^{\vartheta}$ vs. non-dimensional follower force λ for a static system $\Omega = 0$.

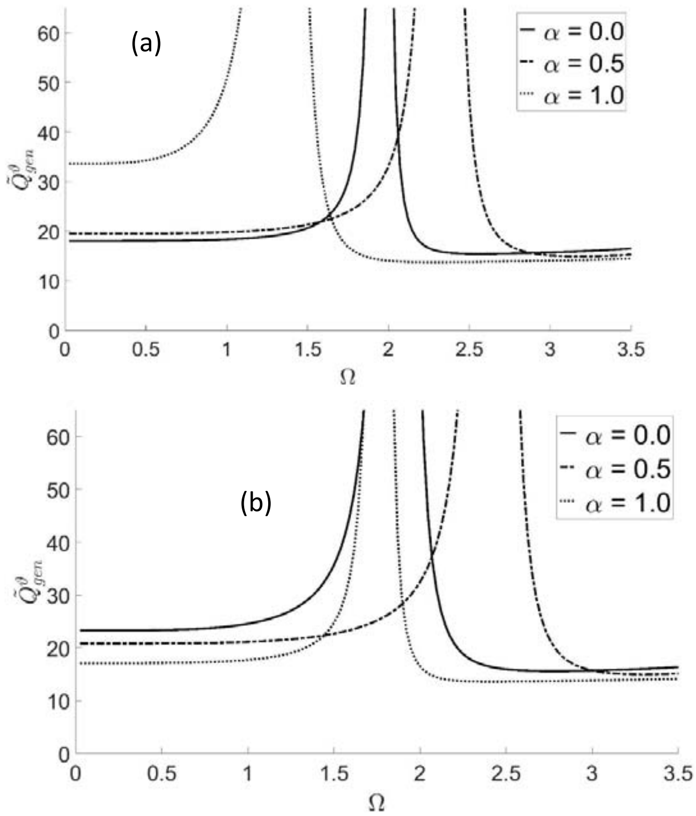
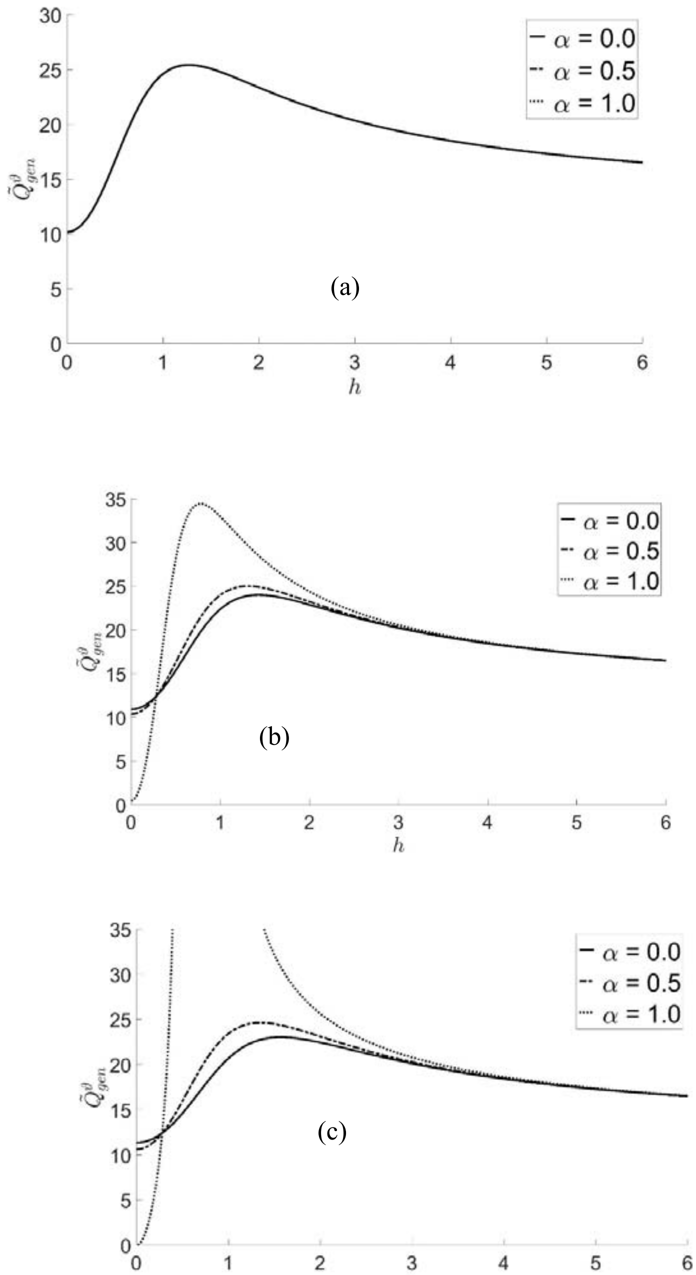
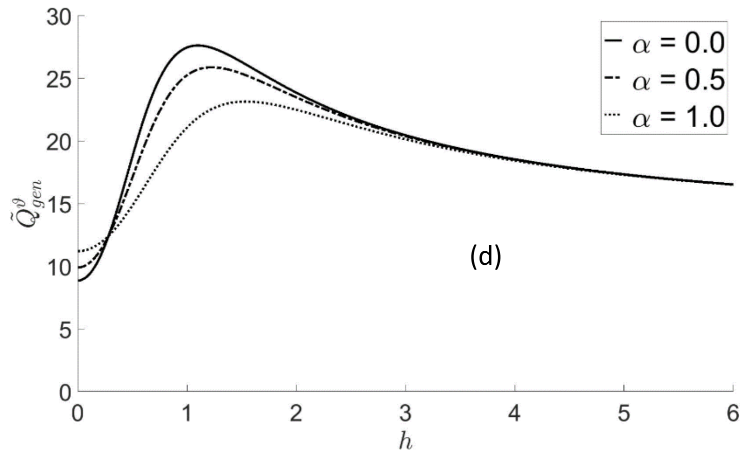


Figure 4. Display of the first natural frequency's bandwidth of Fig. 2b,d for follower force (a) $\lambda = 0.8$ and (b) $\lambda = -0.8$.



$\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$
h
α = 0.0
α = 0.5
α = 1.0
(a)
(b)
(c)



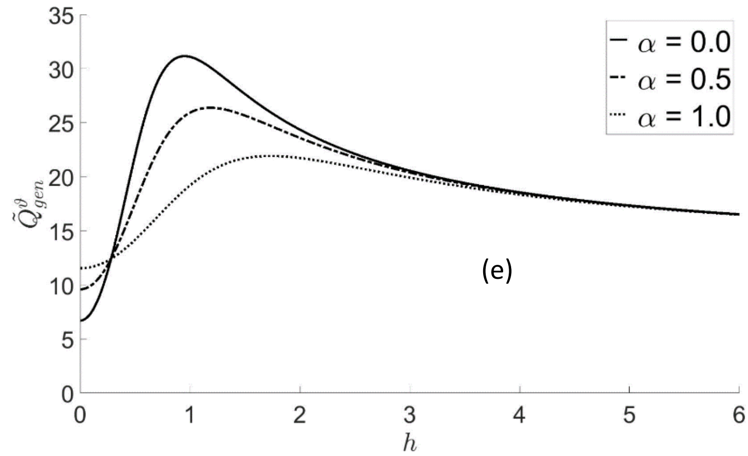
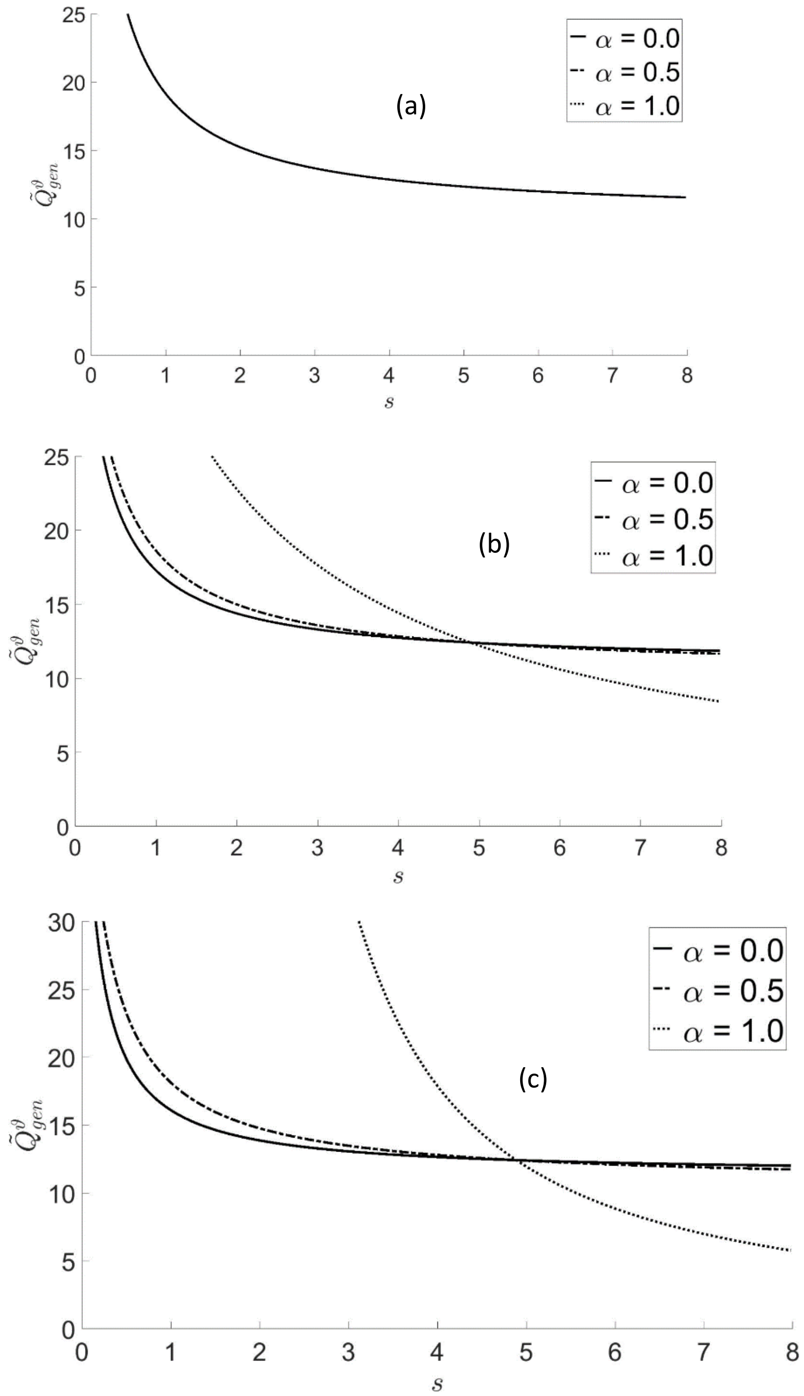
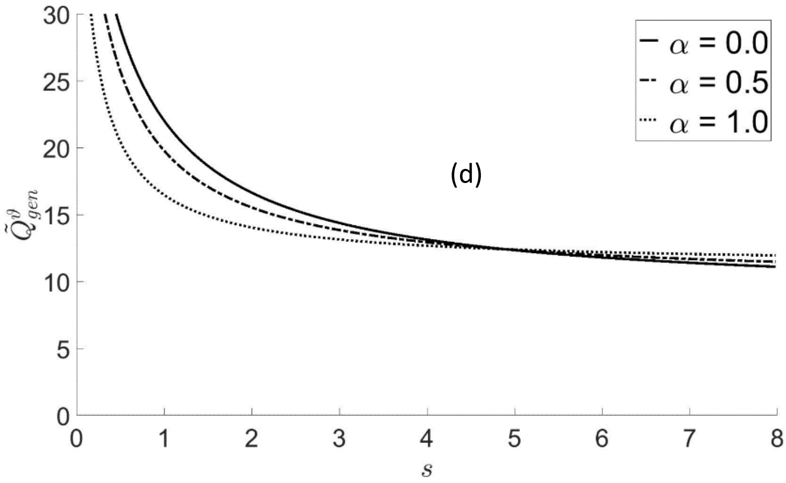


Figure 5. Non-dimensional charge coefficient $\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$ vs. volume fraction h for a static case $\Omega = 0$ at support locations $\alpha = 0$ (green), $\alpha = 0.5$ (black), $\alpha = 1.0$ (red) for follower force (a) $\lambda = 0$, (b) $\lambda = 0.8$, (c) $\lambda = 1.6$, (b) $\lambda = -0.8$ and (e) $\lambda = -1.6$.


(a)
(b)
(c)
α = 0.0
α = 0.5
α = 1.0
$\tilde{Q}^{\vartheta}_{gen}$
s



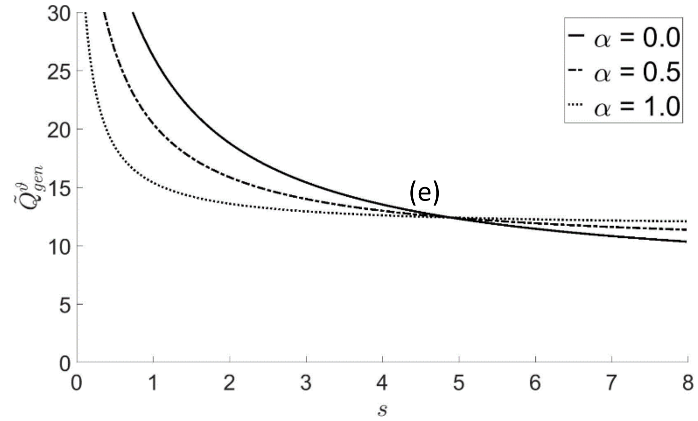


Figure 6. Non-dimensional charge coefficient $\tilde{Q}_{gen}^{\vartheta}$ vs. compliance ratio s at a static case state $(\Omega = 0)$, for follower force (a) $\lambda = 0$, (b) $\lambda = 0.8$,(c) $\lambda = 1.6$, (d) $\lambda = -0.8$ and (e) $\lambda = -1.6$

REFERENCES

1. Gnuni V.Ts., (2006) The stability of beam with two arbitrarily but symmetrical support locations under the action of following forces, Proceeding of National Academy of Science of Armenia, Mechanics, v.59, 1, pp.25-30.

About authors:

Gevorg Y. Bagdasaryan – Institute of Mechanics National Academy of Science of Armenia; **E-mail: gevorgb@rau.am**

Armanj D. Hasanyan, Davresh J. Hasanyan – Department of Aerospace Engineering, Ann Arbor, Michigan, USA; **E-mail: dhasanya@vt.edu**

Received 09.06.2015

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

С О Д Е Р Ж А Н И Е

CONTENTS