ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №1, 2016 Механика

ГЕВОРГ ЕРВАНДОВИЧ БАГДАСАРЯН
(К 80-летию со дня рождения)

13-го января 2016г. исполнилось 80 лет со дня рождения видного ученого–механика, заслуженного деятеля науки РА, академика НАН РА, доктора физико-математических наук, профессора Геворга Ервандовича Багдасаряна.

Г.Е. Багдасарян родился 13 января 1936г. в селе Цахкаовит области Арагацотн Республики Армения. Начальное образование получил в средней школе города Апаран. После окончания школы в 1953г., поступил на отделение механики физико-математического факультета Ереванского государственного университета, который с отличием окончил в 1958г. В 1964г. за диссертацию "Задачи устойчивости анизотропных оболочек и пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа" ему была присуждена ученая степень кандидата технических наук, а в 1977г. за диссертацию "Задачи магнитоупругости тонких пластин и оболочек" получил ученую степень доктора физико-математических наук. В 1990г. был избран членом-корреспондентом НАН РА, а в 1994г.– действительным членом НАН РА.

Трудовую деятельность Г.Е.Багдасарян начал с 1958 года в Институте механики НАН РА, проработав до 1964г. младшим научным сотрудником, в 1964-79гг. являлся старшим научным сотрудником, в 1979-88гг. – заведующим отделом магнитоупругости, а в 1986-87гг. - директором Института.

Долгие года академик Г.Е.Багдасарян развивает также плодотворную научно-организационную и педагогическую деятельность. С 1983 года и по сей день он является профессором кафедры математических методов и моделирования факультета прикладной математики и информатики Ереванского государственного университета. В 1988-2001гг. он занимал должность заведующего указанной кафедры, в 1993-1995 гг. был деканом факультета прикладной математики и информатики ЕрГУ. В 1994-1998гг. занимал должность ректора Армянского государственного педагогического института, в 1998-2002гг. – председателя Высшей Аттестационной Комиссии РА. В 2002-2007гг. занимал пост советника ректора ЕрГУ.

С 2006 года и по сей день Г.Е.Багдасарян является главным научным сотрудником Института механики НАН РА.

Опубликованные Г.Е.Багдасаряном многочисленные научные статьи и пять монографий (***Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.*** Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. Москва, "Наука", 1977, 288с., ***Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е.*** Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. Москва, "Наука", 1996, -288с., ***Багдасарян Г.Е.*** Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. ЕГУ, 1999, -440с., ***Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н.*** Электромагнитоупругие волны. Ереван, ЕГУ, 2006, -490с. и ***Baghdasaryan G., Mikilyan M.*** Effects of magnetoelastic interactions in conductive plates and shells. Springer, 2016, -345p.) являются существенным вкладом в механику сплошной среды. В этой области, совместно с одним из основателей армянской школы механики академиком С.А. Амбарцумяном и профессором М.В. Белубекяном, Г.Е. Багдасарян создал и развил такое актуальное и важное направление механики, какой является теория магнитоупругости.

В отечественном научном мире Г.Е.Багдасарян является пионером в области исследования устойчивости тонкостенных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, (флаттер).

Работы Г.Е.Багдасаряна, в которых предложены эффективные аналитические методы и расчетные схемы для исследования нелинейных вынужденных, параметрических и флаттерных колебаний слоистых анизотропных пластин и оболочек, при помощи которых в вынужденных колебаниях были выявлены резонансы нового типа, обусловленные учетом нелинейности, в случае докритических скоростей обтекания была показана возможность существования стационарных колебаний, существование нижней критической скорости и пути ее вычисления, получили всеобщее признание.

Построена общая теория описания и исследования взаимосвязанных механических и электромагнитных явлений для тонкостенных проводящих тел (совместно с академиком С.А. Амбарцумяном и профессором М.В. Белубекяном). Были сформулированы постановки новых задач математической физики, на основе решения которых выявлен ряд новых явлений, обусловленных взаимодействием сплошной среды и физическими полями разного характера. К таким явлениям, в частности, относятся исключение возможности параметрического резонанса, затухание опасных флаттерных колебаний, существенное уменьшение амплитуды вынужденных колебаний при помощи постоянного магнитного поля, возможность возбуждения резонансных колебаний вынужденного и параметрического типа при помощи нестационарного магнитного поля, оптимальное управление амплитудно-частотной характеристикой нелинейных магнитоупругих колебаний, а также управление поведением вынужденных и параметрических колебаний различного характера посредством постоянного магнитного поля.

Академиком Г.Е. Багдасаряном разработаны теоретические основы исследования распространения магнитоакустических взаимосвязанных волн в пьезоэлектрических, пьезомагнитных, магнитострикционных и ферромагнитных средах, доказана возможность возбуждения сдвиговых поверхностных и щелевых волн нового типа, обусловленных пьзомагнетическим (или магнитострикционным) эффектом, выявлена возможность существования также сопутствующих поверхностных колебаний, что позволяет акустические волны из одной пьезомагнитной среды без механического контакта передать в другую пьезомагнитную среду.

Предложены также методы математического моделирования и решения важных, имеющих практическое значение, задач прочности, колебаний и устойчивости сверхпроводящих и магнитомягких ферромагнитных тел, в частности, тонких пластин, в стационарных и нестационарных магнитных полях.

Основными признаками научной деятельности Г.Е. Багдасаряна являются актуальность, новаторство, универсальность и целеустремленность. Его научные статьи, доклады на международных конференциях и обзорные статьи известны во многих научных центрах России, Европейского Союза, Америки и других стран мира.

Академик Г.Е.Багдасарян является одним из выдающихся личностей армянской школы механики, сумевшим создать собственную научную школу. Велика заслуга Г.Е. Багдасаряна в деле подготовки высококвалифицированных научных кадров. Под его руководством защищены около двадцати кандидатских и докторских диссертаций.

Г.Е.Багдасарян является членом редколлегий ряда научных журналов – Доклады НАН РА, Известия НАН РА «Механика», «Математические методы и физико-механические поля» (Львов, Украина), «Айкакан банак». Является членом Национальных комитетов по теоретической и прикладной механике Армении и России, ученого совета Института механики НАН РА, специализированного совета Механика-047 ВАК РА, ученого совета факультета прикладной математики и информатики ЕрГУ, ученого совета ЕрГУ, совета попечителей Ереванского государственного университета.

Редколлегия журнала “Известия НАН Армении. Механика”, поздравляют **Геворга Ервандовича Багдасаряна** с юбилеем и желают ему доброго здоровья, плодотворной научной деятельности и дальнейших творческих успехов во благо развития науки в Армении.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №1, 2016 Механика

УДК 593.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНАМИ И НАКЛАДКАМИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Агаян К.Л., Закарян В.Г.

Ключевые слова: контактная задача, стрингер, трещина, полупространство, сингулярное уравнение
Keywords: contact problem, stringer, crack, half-space, singular equation
Բանալի բառեր. Կոնտակտային խնդիր, վերադիր, ճաք, կիսատարածություն, սինգուլյար հավասարում

Աղայան Կ.Լ., Զաքարյան Վ.Գ.

Ճաքեր և վերադիրներ պարունակող առաձգական կիսատարածության հակահարթ խնդիր

Դիտարկվում է բեռնվածքի՝բարակ առաձգական վերադիրից առաձգական կիսատարածությանը փոխանցման կոնտակտային խնդիրը: Կիսատարածությունը թուլացված է կիսատարածության եզրին ուղղահայաց վերջավոր երկարությամբ թունելային ճաքերի համակարգով: Կիսատարածության եզրը ուժեղացված է կիսատարածությանը կոշտ ամրակցված շերտեր–վերադիրներով: Վերադիրների և ճաքի ափերի վրա ազդող արտաքին բեռնվածքների ազդեցության տակ կիսատարածություն – շերտ համակարգը դեֆորմացվում է հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում: Վերադիրների համար Մելանի հայտնի մոդելի շրջանակներում խնդրի լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը, որի լուծումը կառուցված է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի օգնությամբ:

Aghayan K.L, Zakaryan V.G

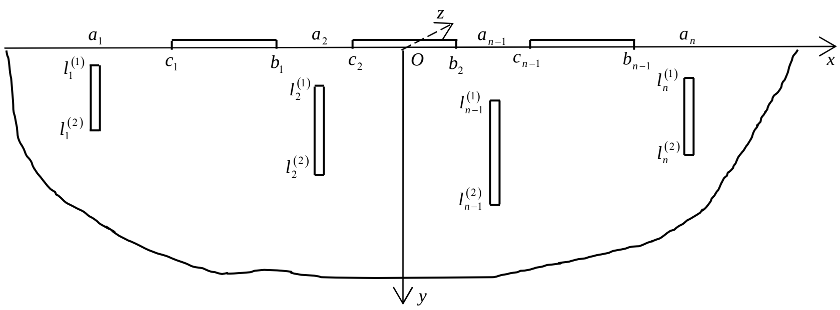
Antiplane contact problem for elastic half-space with cracks and stringers

The contact problem of load transfer of a thin elastic plate to the elastic half-space is considered. The half-space weakened by a system of finite length collinear tunnel cracks which are perpendicular to the half-space boundary. The border of half-space reinforced by stringers. By external forces applied to the plates and the banks of the cracks, the half-space - plate system deformed under antiplane strain. In the frame of well-known Melan model for stringer the solution of the problem is reduced to a system of singular integral equations, whose solution is built by numerically - analytical method of mechanical quadratures. The behavior of the contact stresses and stress intensity factors at the crack tip and the end points of stringers is investigated.

Рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от тонкой упругой пластины к упругому полупространству. Полупространство ослаблено системой коллинеарных туннельных трещин конечной длины, перпендикулярных к границе полупространства. Граница полупространства усилена сцеплёнными с ней полосами – накладками. Под воздействием внешних нагрузок, приложенных к накладкам и берегам трещин, полупространство деформируется в условиях антиплоской деформации. В рамках известной модели Мелана для накладок решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которой построено численно-аналитическим методом механических характеристик. Изучено поведение контактных напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений на концах трещин.

1. Введение. Задачи о передаче нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров (накладок) и включений к массивным деформируемым телам, ослабленных трещинами, ввиду их актуальности для теоретических исследований и практических приложений в различных расчётах инженерной практики, давно стали предметом рассмотрения многих авторов. Имеется огромное количество работ, посвящённых изучению контактных и смешанных задач подобного рода. Не имея возможности остановиться на всех этих работах, укажем лишь работы [1–11], в которых, в свою очередь, имеется библиография, тесно связанная с рассматриваемой здесь задачей. В этих работах, как и здесь, исследованы смешанные задачи, связанные с вопросом взаимовлияния концентраторов напряжений разного типа, в частности, трещин, штампов или стрингеров, когда один тип концентратора напряжений сочетается или пересекается с другими. Задачи этого типа отличаются тем, что в ядрах определяющих сингулярных уравнений появляются неподвижные особенности, которые, в конечном итоге приводят к появлению неклассических особенностей в решениях интегральных уравнений.

2. Постановка задачи и система определяющих уравнений. Пусть упругое пространство с модулем сдвига G, занимающее область $y>0$, отнесено к правосторонней декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространство по полосам $\Omega_j=\left\{x=a_j; l_j^{(1)}<y<l_j^{(2)}; |z|<\infty\right\}\left(l_j^{(1)}\geq 0; j=1,2,\ldots,n\right)$ ослаблено туннельными трещинами, а на границе $y=0$, по полосам $\omega_k=\left\{c_k\leq x\leq b_k; y=0; |z|<\infty\right\}$ $(a_k<c_k<b_k<a_{k+1})$, усилена упругими пластинами (накладками) малой толщины $h_s^{(k)}$ с модулями упругости $G_s^{(k)}, k=1,2,\ldots,(n-1)$.



Фиг. 1

Предполагается, что: а) на берегах трещин заданы касательные напряжения $\tau_{xz}\left(a_j\pm 0\right)$ или перемещения $w\left(a_j\pm 0\right)$; б) на верхних гранях накладок действуют распределённые нагрузки $\tau_{yz}\left(x,-h_s^{(k)}\right)$, в) к боковым граням $x=c_k$ и $x=b_k$ усиливающей пластины приложены сосредоточенные силы $T_c^{(k)}$ и $T_b^{(k)}$ (фиг. 1). При этом предполагается, что указанные воздействия равномерно распределены в направлении оси $Oz\left(|z|<\infty\right)$.

Относительно усиливающих пластин–накладок предполагается, что $G_s^{(k)}>G$, а $h_s^{(k)}<<b_k-c_k$. Это позволяет для усиливающей накладки принять известную в области контактных задач физическую модель Мелана при антиплоской деформации [3-4]. Другими словами, предполагается, что по толщине накладки перемещение $w_s\left(x,y\right)$ не меняется, т.е. $w_s\left(x,y\right)=w_s\left(x\right)$.

При этих предположениях требуется определить закон распределения контактных касательных напряжений, возникающих под стрингерами, а также коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещин.

Отметим, что под действием вышеуказанных воздействий рассматриваемая упругая система пластина–полупространство деформируется в условиях продольного сдвига (антиплоская деформация) с базовой плоскостью Oxy. Тогда, очевидно, что поставленную выше контактную задачу можно рассматривать как антиплоскую контактную задачу для полуплоскости $y>0$, ослабленной системой вертикальных трещин на линиях $x=a_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ и усиленной на границе $y=0$ упругими стрингерами.

При таком подходе поставленная контактная задача эквивалентна следующей краевой задаче для полуплоскости $y>0$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad , \quad -\infty<x<\infty \quad , \quad y>0 \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} G\left.\dfrac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right|_{x=a_j\pm 0}=\tau_j^{\pm}(y), & y\in L_j \\ w\left(a_j\pm 0,y\right)=w_j^{\pm}(y), & y\in L_j \end{cases} \quad \left(j=\overline{1,n}\right) \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\tau(x)=\begin{cases}\tau_k(x), & x\in\Gamma_k \\ 0, & x\overline{\in}\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}(\Gamma_k)\end{cases} \quad (k=\overline{1,n-1}) \tag{1.3}$$

$$L_j=\left\{l_j^{(1)}<y<l_j^{(2)},x=a_j\right\}, \quad \Gamma_k=\left\{y=0,\ c_k<x<b_k\right\}$$

с дополнительным условием контакта [3-5]

$$\left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right|_{y=0}=\frac{1}{h_s^{(k)}G_s^{(k)}}\int\limits_{c_k}^{x}\left[q_s^{(k)}(s)-\tau_k(s)\right]ds+\frac{T_c^{(k)}}{h_s^{(k)}G_s^{(k)}} \tag{1.4}$$

$$x\in\Gamma_k, k=\overline{1,n-1}$$

обеспечивающим совместное деформирование граничных точек полуплоскости и накладок в рамках принятой модели на каждом участке контакта.

Здесь $w(x,y)$ – единственная, отличная от нуля, компонента упругого перемещения, $\tau_j^{\pm}(y)$ – заданные касательные напряжения на правом и левом берегах j-ой трещины, $w_j^{\pm}(y)$ – заданные смещения точек соответствующих берегов j-ой трещины, $\tau_k(x)$ – неизвестные контактные касательные напряжения, возникающие под каждой накладкой, $q_s^{(k)}(x)$ – заданные касательные напряжения, действующие на верхней границе накладки. Очевидно, что в каждом конкретном случае на берегах отдельной трещины следует брать только два из граничных условий (1.2).

Приступим к построению разрывного решения краевой задачи (1.1) – (1.3), полагая $\tau(x)$ заданной, т.е. основные компоненты напряжённо-деформированного состояния полупространства выразим через скачки тангенциального напряжения и смещения, непременно присутствующих при наличии трещин или включений. Очевидно, что полученное решение будет непосредственно использовано для получения определяющего уравнения вышепоставленной контактной задачи. Решение (1.1) – (1.3) построим методом интегрального преобразования Фурье. Применив его к уравнению (1.1), имея при этом в виду условия (1.2), для определения $\overline{w}(\sigma,y)$ получаем уравнение:

$$\frac{d^2\overline{w}(\sigma,y)}{\partial y^2}-\sigma^2\overline{w}(\sigma,y)=\sum_{k=1}^{n}\left[-i\sigma g_k(y)+f_k(y)\right]e^{i\sigma a_k},\qquad y>0$$

$$\overline{w}(\sigma,y)=\int_{-\infty}^{\infty}w(x,y)e^{i\sigma x}dx, \tag{1.5}$$

где

$$g_k(y)=w(a_k+0,y)-w(a_k-0,y) \tag{1.6}$$

$$f_k(y)=\frac{1}{G}\left[\tau_k^+(y)-\tau_k^-(y)\right] \tag{1.7}$$

– указанные выше скачки перемещения и напряжения через линию k-той трещины.

Условие (1.3) после преобразования Фурье примет вид:

$$\left.\frac{d\overline{w}(\sigma,y)}{dy}\right|_{y=0}=\frac{1}{G}\overline{\tau}(\sigma) \tag{1.8}$$

Считая, что функции $f_k(y)$, $g_k(y)$ и $\tau(x)$ известны, решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условию (1.8) и исчезающее при $y\to\infty$, получим в виде

$$\overline{w}(\sigma,y)=\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\infty}(e^{-|\sigma||\eta-y|}+e^{-|\sigma||\eta+y|})\left[\frac{i}{2}\operatorname{sgn}\sigma g_k(\eta)-\frac{1}{2|\sigma|}f_k(\eta)\right]e^{i\sigma a_k}d\eta-$$
$$-\frac{e^{-|\sigma|y}}{|\sigma|G}\overline{\tau}(\sigma),\qquad (y>0) \tag{1.9}$$

Теперь, имея в виду условие непрерывности на продолжении трещин:

$$g_k(y)=f_k(y)=0,\ y\overline{\in}L_k,\ k=\overline{1,n} \tag{1.10}$$

после обратного преобразования, из (1.9) получим решение антиплоской задачи (1.1) – (1.3) в виде

$$w(x,y)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k}\left[\frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+(\eta-y)^2}+\frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+(\eta+y)^2}\right]g_k(\eta)d\eta-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k}\left[\ln\frac{1}{(x-a_k)^2+(\eta-y)^2}+\ln\frac{1}{(x-a_k)^2+(\eta+y)^2}\right]f_k(\eta)d\eta-$$
$$-\frac{1}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{y^2}{(t-x)^2+y^2}\tau(t)dt+\mathrm{const} \tag{1.11}$$

Очевидно, что только часть из скачков $g_j(y)$ и $f_j(y)$, входящих в (1.11), может быть неизвестной, причём, какая из них, определяется граничными условиями на берегах трещин. При этом, в каждом конкретном случае, в зависимости от граничных условий, т.е. выбора пары, непротиворечащих друг другу условий, фигурирующих в (1.2), число неизвестных может быть от n до $2n$.

Учитывая, что, обычно, второе из условий (1.2) заменяется производной по y, представим производные от выражения (1.11) в явном виде:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a_j\pm0}=\frac{1}{2\pi}\int_{L_j}\left[\frac{1}{\eta-y}+\frac{1}{\eta+y}\right]g_j'(\eta)\,dt\pm\frac{1}{2}f_j(y)+\frac{1}{\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_j-t}{\left(a_j-t\right)^2+y^2}\tau(t)dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(1-\delta_{ik})\int_{L_k}\left[K_{jk}^{+}(\eta,y)g_k{}'(\eta)-R_{jk}^{+}(\eta,y)f_k(\eta)\right]d\eta,\ y\in L_j \qquad (1.12)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=a_j\pm0}=\pm\frac{1}{2}g_j'(y)-\frac{1}{2\pi}\int_{L_j}\left[\frac{1}{\eta-y}+\frac{1}{\eta+y}\right]f_j(\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(1-\delta_{jk})\int_{L_k}\left[R_{jk}^{(-)}(\eta,y)g_k'(\eta)d\eta+\right.$$

$$\left.+K_{jk}^{(-)}f_k(\eta)\right]d\eta+\frac{1}{\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\tau(\eta)d\eta}{\left(\eta-a_j\right)^2+y^2},\qquad y\in L_j \qquad (1.13)$$

$$K_{jk}^{\pm}(\eta,y)=\frac{\eta-y}{(\eta-y)^2+\left(a_j-a_k\right)^2}\pm\frac{\eta+y}{(\eta+y)^2+\left(a_j-a_k\right)^2} \qquad (1.14)$$

$$R_{jk}^{\pm}(\eta,y)=\frac{a_j-a_k}{(\eta-y)^2+\left(a_j-a_k\right)^2}\pm\frac{a_j-a_k}{(\eta+y)^2+\left(a_j-a_k\right)^2} \qquad (1.15)$$

где $g_k'(t)=dg_k/dt$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Отметим, что в (1.12) и (1.13) и в дальнейшем, интегралы с ядром Коши $1/(\eta-y)$ следует понимать в смысле главного значения.

Теперь, при помощи (1.12), (1.13), удовлетворяя конкретно заданным на берегах трещин граничным условиям из (1.2), получим определяющую систему сингулярных интегральных уравнений, содержащей, максимально, $2n$ уравнений. Очевидно, что при одноимённых граничных условиях на берегах трещин и при определённой геометрической и физической симметрии задачи, число неизвестных, а, следовательно, и число определяющих уравнений уменьшаются.

Следует отметить, что решение (1.11) с выражениями (1.12) и (1.13) позволяет непосредственно выписать определяющие системы интегральных уравнений и для антиплоских контактных задач, когда в трещины вставлены тонкие жёсткие включения. При этом можно рассматривать случаи, когда: обе грани включения жёстко соединены с берегами трещины; одна грань жёстко соединена, а другая свободна; длина жёсткого включения короче длины трещины.

2. Система определяющих уравнений контактной задачи. Обратимся теперь к контактной задаче, сформулированной в начале статьи. Здесь уже касательная нагрузка на поверхности упругого полупространства является неизвестной и должна быть найдена из условия (1.4) контакта стрингера с полупространством. Для удовлетворения этому условию необходимо иметь представление производной смещения по x, которое, исходя из (1.11), имеет вид:

$$\left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right|_{y=+0}=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k}\left[\frac{\eta}{\eta^2+(a_k-x)^2}g_k'(\eta)+\right.$$

$$+\frac{a_k-x}{(a_k-x)^2+\eta^2}\,f_k(\eta)\Bigg]d\eta-\frac{1}{\pi G}\int_{\Gamma_j}\frac{\tau_j(t)}{t-x}dt, \qquad (2.1)$$

где $\tau_j(x)$ – интенсивность неизвестных контактных касательных напряжений, возникающих под накладками на участках контакта $\Gamma_j\,(j=1,2,...,n-1)$.

Удовлетворяя при помощи (2.1) условиям контакта (1.4) на каждом контактном участке, в итоге, получим соответствующее число дополнительных интегральных уравнений. Объединяя последние с уравнениями, указанными в пункте 1, получим окончательную систему определяющих интегральных уравнений, разрешающую поставленную контактную задачу.

Для частного случая, когда имеются две трещины $(n=2)$, на берегах которых заданы первые из условий (1.2) (фиг. 1), по вышеуказанной процедуре из (1.12) и (2.1) получим следующую систему определяющих интегральных уравнений относительно неизвестных скачков $g_k'(t),(k=1,2)$ и контактного напряжения $\tau_1(x)$.

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{a_1-t}{(a_1-t)^2+y^2}\frac{\tau_1(t)}{G}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\left[\frac{1}{t-y}+\frac{1}{t+y}\right]g_1'(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L_2}K_{12}^{+}(t,y)g_2'(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\tau_1^{+}(y)+\tau_1^{-}(y)}{G}+\frac{1}{\pi}\int_{L_2}R_{12}^{+}(t,y)f_2(t)dt, \qquad y\in\Gamma_1=(l_1^{(1)}<y<l_1^{(2)}) \qquad (2.2)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{a_2-t}{(a_2-t)^2+y^2}\frac{\tau_1(t)}{G}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{L_1}K_{21}^{+}(t,y)g_1'(t)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{L_2}\left[\frac{1}{t-y}+\frac{1}{t+y}\right]g'(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\tau_2^{+}(y)+\tau_2^{-}(y)}{G}+\frac{1}{2\pi}\int_{L_1}R_{21}^{+}(t,y)\,f_1(t)\,dt \qquad y\in\Gamma_2=(l_2^{(1)}<y<l_2^{(2)}) \qquad (2.3)$$

$$\int_{\Gamma_1}\left[\frac{1}{t-x}-\lambda_1\theta(x-t)\right]\frac{\tau(t)}{G}dt+\sum_{k=1}^{2}\int_{L_k}\frac{t\,g_k'(t)\,dt}{t^2+(a_k-x)^2}=\sum_{k=1}^{2}\int_{L_k}\frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+t^2}f_k(t)\,dt-$$

$$-\lambda_1\int_{\Gamma_1}\theta(x-t)q_s^{(1)}(t)\,dt-\frac{\pi T_{c_1}}{h_s^{(1)}G_s^{(1)}} \qquad x\in\Gamma_1=(c_1<x<b_1) \qquad (2.4)$$

где $\lambda_1=\pi G/h_s^{(1)}G_s^{(1)}$, $q_s^{(1)}(t)$ – внешняя нагрузка, приложенная к верхней грани стрингера, $f_k(t)$ – известная функция, определяемая из (1.7), а ядра $K_{ij}^{+}(t,y)$, $R_{ij}^{+}(t,y)$ даются формулами (1.14), (1.15).

Неизвестные функции из (2.2)-(2.4) должны удовлетворять ещё условиям

$$\int_{\Gamma_1}\tau(s)\,ds=\int_{\Gamma_1}q_s^{(1)}(s)\,ds+T_{c_1}-T_{b_1}, \qquad \int_{L_j}g_j'(s)\,ds=0. \qquad (2.5)$$

Здесь первое из условия отражает условие равновесия накладки в целом, а второе – непрерывность перемещений на концах трещины. В случае, когда трещина выходит на край полуплоскости, т.е. $l_k^{(1)}=0$, необходимость в удовлетворении второго условия отпадает, поскольку оно не выполняется.

3. Рассмотрим частный случай задачи, когда полуплоскость ослаблена двумя трещинами, расположенными симметрично относительно стрингера и выходящими на границу полуплоскости (фиг. 2). В таком случае, если принять

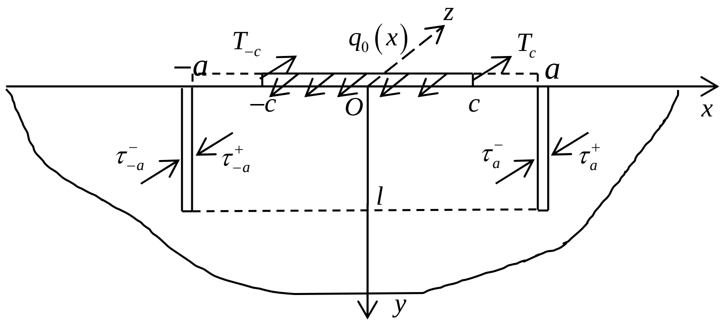
$l_j^{(1)}=0$, $l_j^{(2)}=l$, $(j=1,2)$, $a_2=a=-a_1$, $c_1=-c$, $b=c$,

$\tau_{xz}(-a+0,y)=\tau_{-a}^{+}(y)=P(y)$, $\tau_{xz}(-a-0,y)=\tau_{-a}^{-}(y)=Q(y)$,

$\tau_{xz}(a+0,y)=\tau_{a}^{+}(y)=-Q(y)$, $\tau_{xz}(a-0,y)=\tau_{a}^{-}(y)=-P(y)$,

$q_s^{(1)}(x)=q_0(x)$, $q_0(x)=q_0(-x)$, $T_c=-T_{-c}=T_0$,

то задача будет симметрична относительно оси Oy и, следовательно, будем иметь только одну неизвестную – $g(y)=g_1(y)=-g_2(y)$.



Фиг.2

Тогда, из системы уравнений (2.2) - (2.4), для рассматриваемого случая получим следующую систему сингулярных уравнений относительно контактных напряжений $\tau_1(x)$ под накладкой и производной скачка перемещения $g'(y)$:

$$\int_{-c}^{c}\left[\frac{1}{s-x}+\lambda\theta(x-s)\right]\tau_1(s)\,ds-\int_0^l\left[\frac{\eta}{\eta^2+(a+x)^2}-\frac{\eta}{\eta^2+(a-x)^2}\right]g'(\eta)\,d\eta=$$

$$=\int_0^l\left[\frac{a+x}{\eta^2+(a+x)^2}-\frac{a-x}{\eta^2+(a-x)^2}\right]R^-(\eta)\,d\eta-\lambda\int_{-c}^{c}\theta(x-s)q_0(s)\,ds+\frac{\pi T_a}{h_s^{(1)}G_s^{(1)}}$$

$$(-c<x<c) \qquad (3.1)$$

$$-\int_{-c}^{c}\frac{(a-t)\tau_1(t)}{(a-t)^2+y^2}dt+\int_0^l\left[\frac{1}{t-y}+\frac{1}{t+y}-\frac{t-y}{4a^2+(t-y)^2}-\frac{t+y}{4a^2+(t+y)^2}\right]g'(t)\,dt=$$

$$=\int_0^l\left[\frac{a}{4a^2+(t-y)^2}+\frac{a}{4a^2+(t+y)^2}\right]R^-(t)\,dt-\frac{\pi}{2}R^+(y) \qquad (0<y<l) \qquad (3.2)$$

$$R^{\pm}(y)=\frac{1}{G}\left[P(y)\pm Q(y)\right]; \qquad \lambda=\pi\frac{G}{h_s^{(1)}G_s^{(1)}}$$

Условие равновесия стрингера (2.5) теперь запишется в виде

$$\int_{-c}^{c} \tau(s)ds = \int_{-c}^{c} q_0(x)dx - 2T_0. \tag{3.3}$$

Обращаясь теперь к решению системы сингулярных интегральных уравнений (3.1), (3.2) с условием (3.3), заметим следующее. В зависимости от взаимного расположения стрингера и трещин следует уточнить постановку задачи и класс функций, в котором ищется решение задачи.

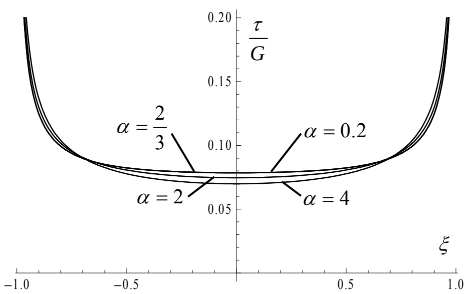
Из фиг.2 видно, что здесь возможны следующие случаи взаимного расположения стрингера и трещин: 1) $c < a$ – стрингер и трещина не пересекаются; 2) $c = a - 0$ – стрингер достигает края ближнего берега трещины; 3) $c \ge a + 0$, стрингер проходит через трещину, достигая лишь края дальнего берега трещины, либо далее на конечную величину. Рассмотрим только первые два случая.

В первом случае контактные напряжения на концах линии интегрирования имеют корневую особенность [12,13], а $g'(y)$ имеет корневую особенность при $y = l$ и принимает конечное значение при $y = 0$.

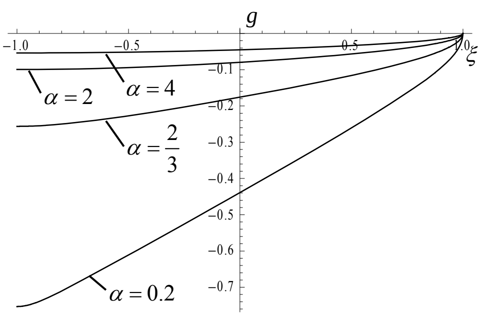
Во втором случае, как показывают исследования, функции $\tau(x)$ и $g'(y)$ имеют конечные значения в точке пересечения стрингера и трещины. При этом оказывается, что $\tau(c) = \tau(-c) = Gg'(0)$, а при $y = l$ - $g'(y)$ имеет корневую особенность.

Решение системы (3.1), (3.2) с условиями (3.3), предварительно сведя её на интервал $(-1,1)$, построено методом механических квадратур [14].

Численная реализация задачи для двух рассмотренных выше частных случаев, когда $c < a$ и $c = a - 0$, была проведена при предположении, что берега трещины и боковые грани накладки свободны от напряжений, а на верхней границе накладки приложена равномерно распределённая нагрузка, т.е. $P(t) = Q(t) = 0;\ \ T_{\pm c} = 0,$ $q_0 / G = 1,\ \ \lambda = 0.5\pi$.

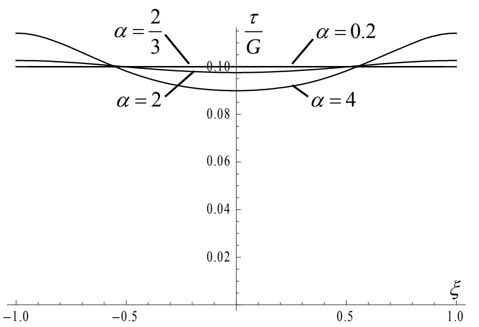


Фиг.3

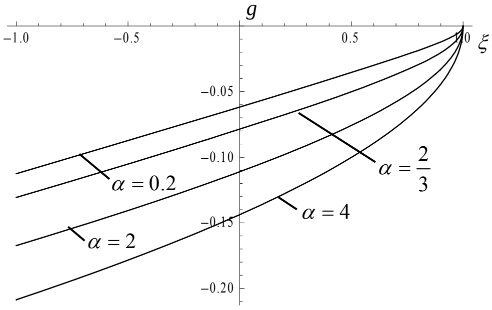


Фиг.4

Результаты вычислений в случае $c < a$ приведены на графиках (фиг.3, 4), а в случае $c = a - 0$ – на графиках (фиг.5, 6). На фиг.3 и 5 показано изменение контактных напряжений, а на фиг. 4 и 6 – относительное смещение берегов трещин в зависимости от параметра $\alpha = 2c / l$, т.е. от длины трещины при предположении длины стрингера неизменной. В табл.1 приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений K_{III} на конце трещины. Анализ численных результатов во втором случае показывает, что при увеличении длины трещин распределение контактных напряжений под стрингером стремится к равномерному.



Фиг.5



Фиг.6

Таблица 1. Коэффициент K_{III}

α	4	2	0.67	0.2
$c < a$	-0.0974	-0.0796	-0.0504	-0.0285
$c = a$	-0.1504	-0.1241	-0.102	-0.0883

Заключение. Построено разрывное решение антиплоской задачи для упругого полупространства, ослабленного параллельно расположенными туннельными трещинами, перпендикулярными к границе полупространства, при задании разных условий на берегах трещин и на границе полупространства. Оно позволяет непосредственно получить определяющие системы сингулярных интегральных уравнений и для соответствующих контактных задач, когда граница усилена упругими накладками. Исследовано поведение контактных напряжений под накладками и производной скачка перемещений берегов трещин в окрестности точки их пересечения. На частном примере исследованы изменения распределения контактных напряжений под накладками и коэффициентов интенсивности напряжений на концах трещин при различных расположениях трещин и накладок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Greif R., Sanders J.L. (Jr.) The effect of a stringer on the stress in a cracked sheet. //Trans. ASME, Ser. E: J. appl. Mech., 32 (1965), pp. 59–66.
2. Агаян К.Л. Взаимодействие стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной двоякопериодической системой трещин. // В сб.: «Механика деформируемых тел и конструкции». Ереван: Изд: АН Арм ССР, 1985, с.26 – 32.
3. Григорян Э.Х. О коэффициентах интенсивности контактных напряжений в задачах для тел с накладками. //Межвузовский сб. научных трудов. Механика. Ереван: Изд.ЕГУ, 1986, № 5, с.130 – 140.
4. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. //В сб.: «Механика деформируемого твёрдого тела». Ереван: Изд. НАН Армении. 1993, с.129 – 143.
5. Агаян К.Л., Саркисян В.Г. Контактная задача упругой плоскости с трещинами, армированной бесконечными включениями.//В сб.: «Механика деформируемого твёрдого тела». Ереван: Изд. НАН Армении. 1993, с.42 – 47.
6. Мхитарян С.М. О контакте между бесконечными стрингерами и упругой полубесконечной пластиной с вертикальной трещиной. //В сб. трудов межд. конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван 2012, с.74 – 78.

7. Агаян К.Л. Контактная задача для бесконечной пластины о взаимодействии пересекающихся трещины и стрингеров. //В сб. трудов «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела». Ереван 2012, с.42-47.
8. Акопян Л.В., Саакян А.В. Уточнённое решение смешанной задачи для упругого пространства с Т-образной трещиной при антиплоской деформации. //В сб. трудов межд. конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван – 2015, с.38 – 42.
9. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. Антиплоское напряжённое состояние составного пространства с трещинами при смешанных условиях. //Известия НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.16 – 22.
10. Закарян В.Г. Трещины и включения в составном полупространстве при продольном сдвиге. // В сб. трудов межд. конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван – 2015, с.204 – 208.
11. Григорян М.С. О передаче нагрузок от системы разнородных стрингеров к упругому полупространству или слою при антиплоской деформации. //Известия НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 3. С.3 – 16.
12. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т.32. Вып. 4. С.632 – 646.
13. Разрушение. Том 2. М.: Мир, 1975. 763с.
14. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 3. С.12-19.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Тел.: (+37491)485-566; **E-mail**: karo.aghayan@gmail.com

Закарян Ваге Гришаевич, аспирант Института механики НАН Армении.
Тел.: (+37477)789-264; **E-mail**: vahe-zaqaryan@mail.ru

Поступила в редакцию 17.02.2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №1, 2016 Механика

УДК 593.3

EDGE BENDING WAVES ON AN ORTHOTROPIC ELASTIC PLATE RESTING ON THE WINKLER-FUSS FOUNDATION

Althobaiti S., Prikazchikov D.A.

Key words: bending edge waves, Winkler-Fuss elastic foundation, orthotropic plate.
Ключевые слова: изгибные краевые волны, упругое основание Винклера–Фусса, ортотропная пластина.
Բանալի բառեր. ծռման եզրային ալիքներ, Վինկլեր-Ֆուսի առաձգական հիմք, օրթոտրոպ սալ

Ալտոբաիտի Ս., Պրիկազչիկով Դ.Ա.

Օրթոտրոպ սալի ծռման եզրային ալիքներ Վինկլեր-Ֆուսի առաձգական հիմքի վրա

Դիտարկված է կիսաանվերջ օրթոտրոպ սալի ծռման եզրային ալիքներ տարածումը Վինկլեր-Ֆուսի առաձգական հիմքի վրա ազատ եզրային պայմանների դեպքում: Ստացված դիսպերսիոն առընչության հետազոտումը ցույց է տալիս փակող հաճախության գոյությունը, ինչպես նաև ֆազային արագության լոկալ մինիմումի առկայությունը:

Альтобаити С., Приказчиков Д.А.

Изгибные краевые волны в случае ортотропной упругой пластины на основании Винклера–Фусса

Изучается задача распространения изгибных краевых волн в случае полубесконечной ортотропной пластины на упругом основании Винклера-Фусса со свободными граничными условиями на краю. Анализ полученного дисперсионного соотношения показал наличие частоты запирания, а также локального минимума фазовой скорости. Также получено представление для профиля изгибной краевой волны в терминах произвольной плоской гармонической функции, обобщающее случай стандартного синусоидального профиля.

The propagation of bending edge waves on an orthotropic plate supported by the Winkler-Fuss foundation subject to free edge boundary conditions is investigated. A dispersion relation is derived, with the analysis revealing a cut-off frequency and a local minimum of the phase velocity. The conventional sinusoidal profile of the eigensolution is then extended to a more general form, with the deflection expressed in terms of a single plane harmonic function.

Introduction. Edge waves in semi-infinite thin plates are known since 1960-s. The first contribution on bending edge wave was made by Konenkov [1], followed by a number of studies of edge waves and vibrations in plates and shells see [2-7] including the consideration of 3D edge modes [8-10]. The history of discovery and several re-discoveries of this wave along with an overview of the state-of-art of edge waves and resonances may be found in [11]. This paper aims at extension of the current state of art in two directions. First of all, it generalises the analysis in [2] for a free plate to a slightly more practical case of a plate supported by the Winkler-Fuss elastic foundation in line with a similar analysis for isotropic plate [12]. Secondly, the general profile of the wave is constructed in terms of an arbitrary plane harmonic function, being related to results of Chadwick [13] and a recent chapter [14]. Finally, several illustrative examples are considered including a conventional sinusoidal profile together with the general form of the eigensolution arising for arbitrary initial data. An example of initial conditions corresponding to a point load demonstrates more localized distribution along the longitudinal variable occurring with increase of the transverse variable moving away from the edge.

1. Statement of the problem. Consider an orthotropic elastic plate of thickness $2h$ supported by a Winkler-Fuss foundation, see Figure 1. For a detailed description of the Winkler-Fuss model and historical review of this and other types of foundations reader is referred to [15]. The plate occupies the region $(-\infty < x < \infty,\ 0 \le y < \infty,\ 0 \le z \le 2h)$, with the foundation domain given by $(-\infty < x < \infty,\ 0 \le y < \infty,\ 2h \le z < \infty)$.

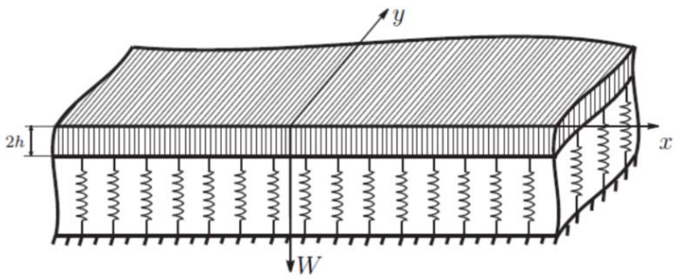


Fig.1. Elastic plate on the Winkler-Fuss foundation.

The deflection of the plate W is described by the plate bending equation

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \left(2D_1 + 4D_{xy}\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \beta W = 0, \tag{1.1}$$

where β is the Winkler coefficient, ρ is mass density and the bending stiffness moduli D_x, D_y, D_1 and D_{xy} are expressed in terms of the technical constants as

$$D_x = \frac{2E_1 h^3}{3\left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)}, \quad D_y = \frac{2E_2 h^3}{3\left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)}, \quad D_1 = \nu_{21} D_x, \quad D_{xy} = \frac{2G_{xy} h^3}{3}, \tag{1.2}$$

with $\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2$, for more details see [16].

The free edge boundary conditions at $y = 0$ are imposed, precluding moment and shear force, namely

$$D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \qquad \left(D_1 + 4D_{xy}\right)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + D_y \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} = 0. \tag{1.3}$$

It is noted that the bending stiffness moduli should satisfy the conditions ensuring positive density of the strain energy density

$$D_{xy} > 0, \quad D_x + D_y > 0, \quad D_x + D_y < D_1^2, \tag{1.4}$$

see [2].

2. Dispersion relation. Let us derive the dispersion relation. The deflection is conventionally sought in the form of a harmonic travelling wave of exponential profile

$$W(x,y,t) = A \exp\left[i\left(kx - \omega t\right) - k\lambda y\right], \tag{2.1}$$

where k is wavenumber, ω is frequency and the condition $\operatorname{Re}\lambda > 0$ ensures decay away from the edge. Substituting (2.1) into (1.1), one results in the following bi-quadratic equation

$$\lambda^4 - \frac{2D_1 + 4D_{xy}}{D_y}\lambda^2 + \frac{D_x k^4 + \beta - 2\rho h \omega^2}{D_y k^4} = 0, \tag{2.2}$$

which may be shown to have two roots satisfying the decay condition $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Therefore, the deflection is expressed in the form

$$W(x,y,t)=\sum_{j=1}^{2} A_j \exp\left[i\left(kx-\omega t\right)-k\lambda_j y\right], \tag{2.3}$$

with

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=\frac{2D_1+4D_{xy}}{D_y}, \quad \lambda_1^2\lambda_2^2=\frac{D_x k^4+\beta-2\rho h\omega^2}{D_y k^4}, \quad \left(\operatorname{Re}\lambda_j>0\right)\cdot \tag{2.4}$$

Substituting (2.3) into the boundary conditions (1.3), one obtains a homogeneous linear system in A_1 and A_2, which possesses non-trivial solutions provided the appropriate determinant vanishes giving

$$\lambda_2\left(\lambda_2^2 D_y-\left(D_1+4D_{xy}\right)\right)\left(\lambda_1^2 D_y-D_1\right)-\lambda_1\left(\lambda_1^2 D_y-\left(D_1+4D_{xy}\right)\right)\left(\lambda_2^2 D_y-D_1\right)=0. \tag{2.5}$$

Factorising the last equation and using the definitions (2.4), it is possible to obtain

$$D_y^2\lambda_1^2\lambda_2^2+4D_yD_{xy}\lambda_1\lambda_2-D_1^2=0, \tag{2.6}$$

which implies

$$\frac{D_x k^4+\beta-2\rho h\omega^2}{D_y k^4}=\frac{\left(\sqrt{D_1^2+4D_{xy}^2}-2D_{xy}\right)^2}{D_y^2}. \tag{2.7}$$

Some small algebraic manipulations lead to the dispersion relation of the form

$$2\rho h\omega^2-\beta=D_x k^4 c^4, \tag{2.8}$$

generalising the result of [12] to the case of orthotropic elastic plate. Here the constant

$$c=\left(1-\frac{\left(\sqrt{D_1^2+4D_{xy}^2}-2D_{xy}\right)^2}{D_xD_y}\right)^{1/4} \tag{2.9}$$

appearing first in the paper of Norris [2] generalises the well-known Konenkov constant [1] for isotropic plate

$$c_K=\left(\left(1-\nu\right)\left(3\nu-1+2\sqrt{2\nu^2-2\nu+1}\right)\right)^{1/4}. \tag{2.10}$$

Similarly to [12], the presence of elastic foundation causes a cut-off frequency

$$\omega_0=\sqrt{\frac{\beta}{2\rho h}}. \tag{2.11}$$

It should be noted that the value of the cut-off frequency is identical to that of the isotropic case due to the fact that the anisotropy is only affecting the coefficient within wave number. Moreover, formal similarity between the dispersion relations implies the critical speed of the associated moving load problem on a supported beam, corresponding to the local minimum of the phase velocity, for which

$$ck=\sqrt[4]{\frac{\beta}{D_x}}, \quad cV^{ph}=\frac{2\sqrt{\rho h}}{\sqrt[4]{\beta D_x}}, \tag{2.12}$$

where V^{ph} denotes the phase velocity, for more details see [KP14]. In view of the boundary conditions (1.3) the deflection profile may be written as

$$W=\exp\left[i\left(kx-\omega t\right)-k\lambda_1 y\right]-\frac{D_1-\lambda_1^2D_y}{D_1-\lambda_2^2D_y}\exp\left[i\left(kx-\omega t\right)-k\lambda_2 y\right]. \tag{2.13}$$

3. Free wave of arbitrary profile. Let us now extend the exponential profile (2.13) to a more general form following [13] and [14]. On introducing the dimensionless coordinates

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \tau = t\sqrt{\frac{D_x}{2\rho h^5}}, \tag{3.1}$$

the boundary value problem (1.1), (1.3) takes the form

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \frac{2D_1 + 4D_{xy}}{D_y}\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{D_x}{D_y}\left(\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \beta_1 W\right) = 0, \tag{3.2}$$

where $\beta_1 = \frac{\beta h^4}{D_x}$, subject to the following boundary conditions at the edge $\eta = 0$

$$D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + D_y \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0, \qquad \left(D_1 + 4D_{xy}\right)\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + D_y \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} = 0. \tag{3.3}$$

Similarly to [14], we adopt an assumption of a beam-like behaviour,

$$\gamma^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \beta_1 W = 0, \tag{3.4}$$

corresponding physically to parametric dependence on transverse coordinate η and mirroring the string-like analogy for Rayleigh waves, see [13] and also [17]. As will be shown later, the assumption (3.4) is additionally justified by the fact that the associated dispersion relation of this "effective" beam on the Winkler foundation coincides with the dispersion relation (2.8) of the bending edge wave. Here γ is a constant which will be determined later. In view of assumption (3.4) the plate equation (3.2) transforms to a pseudo-static form

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \frac{2D_1 + 4D_{xy}}{D_y}\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{D_x}{D_y}\left(1 - \gamma^4\right)\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} = 0, \tag{3.5}$$

which may be shown to be of elliptic type. The fourth order operator in the left hand side of (3.5) may be factorised as

$$\Delta_1 \Delta_2 W = 0, \tag{3.6}$$

where $\Delta_j = \partial_\eta^2 + \lambda_j^2 \partial_\xi^2$, and the constants λ_1 and λ_2 are determined from

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{2D_1 + 4D_{xy}}{D_y}, \quad \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{D_x}{D_y}\left(1 - \gamma^4\right), \quad \left(\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0\right). \tag{3.7}$$

The deflection is then expressed as a sum of two arbitrary plane harmonic functions (in the first two arguments)

$$W = \sum_{j=1}^{2} W_j\left(\xi, \lambda_j \eta, \tau\right), \tag{3.8}$$

satisfying the decay conditions at $\eta \to \infty$, generalising the exponential profile (2.3) considered in the previous section and allowing other types of decay. Substituting (3.7) into the boundary conditions (3.3) and employing the Cauchy-Riemann identities for the plane harmonic functions W_j

$$\frac{\partial W_j}{\partial \eta} = -\lambda_j \frac{\partial W_j^*}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial W_j}{\partial \xi} = \frac{1}{\lambda_j}\frac{\partial W_j^*}{\partial \eta}, \tag{3.9}$$

with the asterisk denoting the harmonic conjugate function, we deduce

$$\sum_{j=1}^{2}\left(D_1 - \lambda_j^2 D_y\right)\frac{\partial^2 W_j}{\partial \xi^2} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{2}\lambda_j\left(D_1 + 4D_{xy} - \lambda_j^2 D_y\right)\frac{\partial^3 W_j}{\partial \xi^3} = 0, \tag{3.10}$$

leading to equation (2.5), and therefore, to

$$\lambda_1^2\lambda_2^2 = \frac{\left(\sqrt{D_1^2 + 4D_{xy}^2} - 2D_{xy}\right)^2}{D_y^2}, \tag{3.11}$$

and, finally, to $\gamma = c$. Thus, the physical meaning of the parameter γ introduced in the assumption (3.4) is the coefficient in the dispersion relation (2.8). It is now clear that the dispersion relation corresponding to (3.4), coincides with (2.8). Using the properties of harmonic functions, it is now possible to relate the functions W_1 and W_2 from the boundary conditions (3.10).

Thus, the deflection profile (3.8) may be expressed in terms of an arbitrary single harmonic function as

$$W = W_1(\xi, \lambda_1\eta, \tau) - \frac{D_1 - \lambda_1^2 D_y}{D_1 - \lambda_2^2 D_y} W_1(\xi, \lambda_2\eta, \tau). \tag{3.12}$$

4. Illustrative examples. Let us now present several numerical examples, assuming

$$W_1(\xi, \lambda_1\eta, \tau) = \cos\xi \exp(-\lambda_1\eta - i\omega\tau), \tag{4.1}$$

where the frequency ω is determined from the assumption (3.4). The dependence on time is omitted here, with the curves on Fig. 2 showing the variation of the quantity

$$W_0(\xi, \lambda_1\eta) = \cos\xi \exp(-\lambda_1\eta) - \frac{D_1 - \lambda_1^2 D_y}{D_1 - \lambda_2^2 D_y} \cos\xi \exp(-\lambda_2\eta), \tag{4.2}$$

on the longitudinal coordinate ξ for several values of the transverse coordinate η.

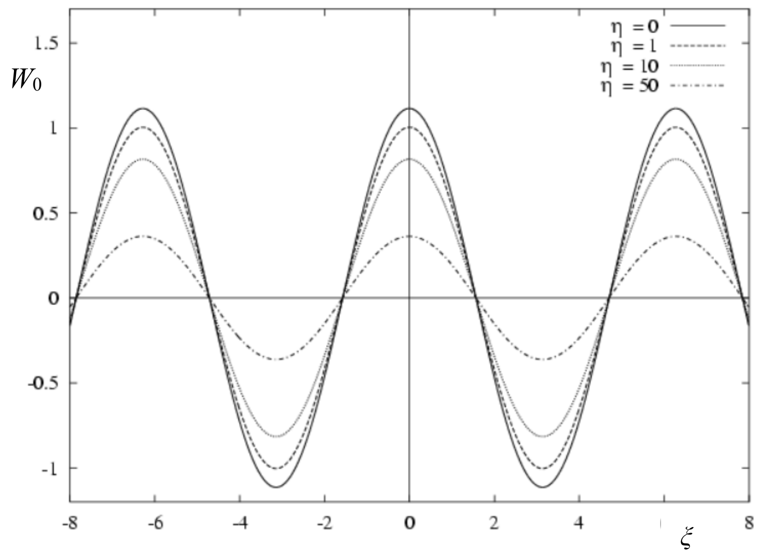


Fig. 2. Sinusoidal profile.

The calculations are performed for the following values of material parameters $E_1 = 54.2\text{GPa}$, $E_1 = 18.1\text{GPa}$, $G_{xy} = 8.96\text{GPa}$, $\nu_{12} = 0.25$, $h = 0.1m$, corresponding to a thin epoxy/glass plate, see [2]. Typically for edge bending waves, one of the attenuation parameters λ_1, λ_2 is close to zero, therefore the exponential decay away from the edge is rather slow, which is clearly confirmed by Fig. 2.

In addition to this expected behaviour the obtained representation (3.12) may allow other types of eigensolutions. Let us consider the wave profile originated by arbitrary initial conditions. According to (3.12) the deflection may be expressed in terms of the function $W_1(\xi, \lambda_1\eta, \tau)$ harmonic in the first two arguments, satisfying

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} = 0, \tag{4.3}$$

and

$$\gamma^4 \frac{\partial^4 W_1}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau^2} + \beta_1 W_1 = 0, \tag{4.4}$$

subject to the following initial conditions

$$W_1\big|_{\tau=0} = A(\xi, \lambda_1\eta), \qquad \frac{\partial W_1}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = B(\xi, \lambda_1\eta). \tag{4.5}$$

It is clear from (4.3) that $A(\xi, \lambda_1\eta)$ and $B(\xi, \lambda_1\eta)$ are harmonic functions. Applying the integral Fourier transform with respect to longitudinal variable *ξ* with parameter *k*, we deduce

$$W_1^F = w_1(k, \tau) e^{-\lambda_1\eta|k|}, \tag{4.6}$$

where W_1^F denotes the Fourier transform

$$W_1^F = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\xi, \lambda_1\eta, \tau) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Using (4.4), we have the following initial value problem for $w_1(k, \tau)$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + \left(\gamma^4 k^4 + \beta_1\right) w_1 = 0, \tag{4.7}$$

subject to

$$w_1\big|_{\tau=0} = a(k), \qquad \frac{\partial w_1}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = b(k). \tag{4.8}$$

Therefore the solution is given by

$$W_1(\xi, \lambda_1\eta, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{b(k)}{\delta}\sin(\delta\tau) + a(k)\cos(\delta\tau)\right] e^{-\lambda_1\eta|k| + ik\xi} dk, \tag{4.9}$$

where $\delta = \sqrt{\gamma^4 k^4 + \beta_1}$. Let us specify

$$A(\xi, \lambda_1\eta) = \frac{\lambda_1\eta}{\lambda_1^2\eta^2 + \xi^2}, \qquad B(\xi, \lambda_1\eta) = 0, \tag{4.10}$$

corresponding to point load at the edge

$$W_1\big|_{\tau=\eta=0} = \delta(\xi), \qquad \frac{\partial W_1}{\partial \tau}\Big|_{\tau=\eta=0} = 0. \tag{4.11}$$

The function W_1 is therefore given by

$$W_1(\xi, \lambda_1\eta, \tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(\delta\tau)\cos(k\xi) e^{-\lambda_1\eta k} dk, \tag{4.12}$$

with the deflection following from (3.12). In case of absence of the foundation $(\beta = 0)$ the last formula (4.12) may be simplified

$$W_1(\xi, \lambda_1\eta, \tau) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{2} \mathrm{Re}\int_0^{\infty} \exp\left[i\gamma^2\tau k^2 - \left(\lambda_1\eta + (-1)^m i\xi\right)k\right] dk, \tag{4.13}$$

which may be evaluate exactly through a standard integral

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-px^2 - qx\right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right) \mathrm{erfc}\left(\frac{q}{2\sqrt{p}}\right), \qquad \left(\mathrm{Re}\, p = 0, \mathrm{Im}\, p \neq 0, \mathrm{Re}\, q > 0\right). \tag{4.14}$$

see [20]. Using the last result (4.14), it is possible to obtain for the scaled deflection $W_s = 4\gamma\sqrt{\pi\tau}W(\xi,\eta,\tau)$ as

$$W_s(\xi,\eta,\tau) = \mathrm{Re}\left[e^{i\pi/4}\sum_{m=1}^{2}\left(f\left(\lambda_1\zeta+(-1)^m i\chi\right)-\frac{D_1-\lambda_1^2 D_y}{D_1-\lambda_2^2 D_y}f\left(\lambda_2\zeta+(-1)^m i\chi\right)\right)\right], \tag{4.15}$$

where $f(z) = e^{z^2}\mathrm{erfc}(z)$, with $\xi = 2\gamma\sqrt{\tau}\chi$ and $\eta = 2\gamma\sqrt{\tau}\zeta$.

The dependence of the scaled deflection W_s given by formula (4.15) for several values of ζ is shown on the next Fig. 3, clearly showing a different type of behaviour compared to Fig. 2. The calculations are performed for epoxy glass, with the values of material parameters are the same as for Figure 2. Indeed, the curves show a more localized type of distribution of the deflection along the longitudinal coordinate. Curiously, the localisation effect increases as we move away from the edge, see for example the curve for $\zeta = 50$. Indeed, as seen from Fig.3, for most of the curves the deflection amplitude decays away from the centre, except for one at the edge $\zeta = 0$. This may be readily explaneed by the result for the integral (4.13) at $\eta = 0$,

$$\int_0^\infty \cos\left(\alpha k^2\right)\cos\left(\beta k\right)dk = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \tag{4.16}$$

see [20]. Using the last result, we deduce for the scaled deflection at the edge $\zeta = 0$

$$W_s(\chi,0,\tau) = \frac{2D_y\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)}{D_1-\lambda_2^2 D_y}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\chi^2\right). \tag{4.17}$$

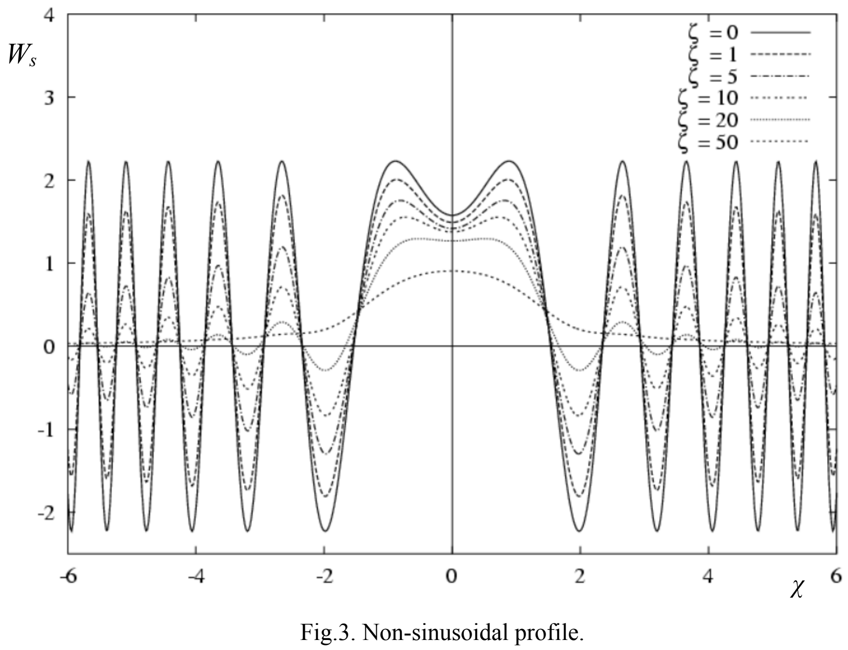


Fig.3. Non-sinusoidal profile.

5. Concluding remarks. Thus, we have considered bending edge waves on a thin orthotropic plate supported by the Winkler-Fuss elastic foundation. The dispersion relation has been analysed revealing similar features with that of isotropic Kirchhoff plate considered in [12]. Clearly, by setting $\beta = 0$ one obtains results for unsupported free plate. Extension of the analysis to different foundation models in line with [18] is possible along with consideration of variable elastic characteristics similarly to [19].

The consideration was then focused on generalisation of the harmonic exponential profile resulting in a general representation of the eigensolution in terms of a single plane harmonic function originating from [13]. The presented examples illustrate theoretical possibilities of not only sinusoidal but also localized profiles.

As one more direction of further development, we note a slow-time perturbation procedure which could be applied to the obtained eigensolution. The results should provide a parabolic-elliptic model for the bending edge wave, extracting its contribution to the overall dynamics response, generalising the results of [14] and [20]. Other plate theories may also be considered, see [21], along with the case of non-classical boundary conditions [3].

REFERENCES

1. Konenkov Yu. K. A Rayleigh-type bending wave. Soviet Physics and Acoustics, 6, 1960, pp. 122-123.
2. Norris A.N. Flexural edge waves. Journal of Sound and Vibration, 171(4), 1994, pp. 571-573.
3. Ambartsumyan S. A., Belubekyan M. V. On bending waves localized along the edge of a plate. International Applied Mechanics, 30(2), 1994, pp. 135-140.
4. Kaplunov J., Kossovich L.Yu., Wilde M.V. Free localised vibrations of a semi-infinite cylindrical shell. Journal of Acoustical Society of America, 107(3), 2000, pp. 1383-1393.
5. Kaplunov J., Wilde M.V. Edge and interfacial vibrations of shells of revolution. Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 51, 2000, pp. 530-549.
6. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localised bending waves in a rib-reinforced elastic orthotropic plate. Journal of Applied Mechanics, 74, 2007, pp. 169-171.
7. Piliposyan G.T., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Localized bending waves in transversely isotropic plate. Journal of Sound and Vibration, 329, 2010, pp. 3696-3605.
8. Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Rogerson G.A. On three-dimensional edge waves in semi-infinite isotropic plates subject to mixed face boundary conditions. Journal of Acoustical Society of America, 118(5), 2005, pp. 2975-2983
9. Zernov, V, and Kaplunov, J. Three dimensional edge-waves in plates. Proceedings of the Royal Society London A, 464, 2008, pp. 301-318.
10. Kryshynska A.A., Flexural edge waves in semi-infinite elastic plates. Journal of Sound and Vibration, 330, 2011, pp. 1964-1976.
11. Lawrie J., Kaplunov J. Edge waves and resonances on elastic structures: an overwiew. Mathematics and Mechanics of Solids, 17(1), 2012, pp. 4-16.
12. Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Rogerson G.A., Lashab M.I. The edge bending wave on elastically supported Kirchhoff plate. Journal of Acoustical Society of America, 136(4), 2014, pp. 1487-1490.
13. Chadwick P. Surface and interfacial waves of arbitrary form in isotropic elastic media. Journal of Elasticity, 6, 1976, pp. 73–80.
14. Kaplunov J., Prikazchikov D.A. Explicit models for surface, interfacial and edge waves. In “Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism”, CISM Lecture Notes, Springer, 547, 2013, pp. 73-114.
15. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory for anisotropic plates and shells. World Scientific Publishing, 2015. 376 p.
16. Jones R.M. Mechanics of composite materials. Philadelphia, Taylor & Francis, 1999, 519 p.

17. Kaplunov J., Nolde E.V., Prikazchikov D.A. A revisit to the moving load problem using an asymptotic model for the Rayleigh wave. Wave Motion, 47, 2010, pp. 440-451.
18. Kaplunov J., Nobili A. The edge waves on a Kirchhoff plate bilaterally supported by a two-parameter elastic foundation. Journal of Vibration and Control, to appear, 2015.
19. Aghalovyan L.A., Adamyan S.H. On the stress-strain state of the two-layer strip-rectangle with variable elastic characteristics. Izv. AN Arm. SSR, Mechanics, 39(5), 1986, pp. 3-15.
20. Prudnikov A.P., Brichkov Y.A., Marichev O.I. Integrals and series. Gordon & Breach, New-York, 1986.
21. Kossovich E. PhD Thesis, Brunel University, 2011.
22. Zakharov D.D. Analysis of the acoustical edge bending mode in a plate using refined asymptotics. Journal of Acoustical Society of America, 116(4), 2004, pp. 872-878.

Сведения об авторах:

Prikazchikov Danila Alexandrovich – PhD, Lecturer in Applied Mathematics, School of Computing and Mathematics, Keele University
E-mail: d.prikazchikov@keele.ac.uk

Altobaiti Saad – PhD student, School of Computing and Mathematics, Keele University
E-mail: s.n.b.althobaiti@keele.ac.uk

Поступила в редакцию 02.11.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №1, 2016 Механика

УДК 593.3

DYNAMIC BIMORPH THERMO-PIEZOELECTRIC BENDERS WITH ARBITRARY SUPPORT LOCATION.

PART I: APPLICATION TO ENERGY HARVESTING-ANALYTICAL DERIVATIONS

Bagdasaryan Gevorg Y. , Hasanyan Armanj D. , Hasanyan Davresh J.

Dedicated to the memory of late Professor Vardges Gnuni

Keywords: Thermo-electro-elastic effects, energy harvesting, resonant frequency, piezoceramic, pyroelectric effect
Ключевые слова: термоэлектроупругий эффект, накопитель энергии, резонансная частота, пьезокерамика, пироэлектрический эффект
Բանալի բառեր. Ջերմաէլեկտրաառաձգականություն, ռեզոնանսային հաճախություն, պիեզոկերամիկա, պիեզոէլեկտրիկ

Багдасарян Г.Е., Асанян А.Д, Асанян Д.Д.
Динамическая двухслойная термоупругая пластина с произвольно расположенными опорами.
Часть I. Применение к накоплению энергии - аналитический вывод.

Приведён подробный теоретический анализ динамического термо-пьезоэлектрического двухслойного накопителя энергии. Учтены пироэлектрические и температурные эффекты расширения. Получено общее аналитическое выражение для коэффициента энергетических преобразований в случае двухслойной пластинки, когда учитываются механические, электрические и температурные поля.

В частном случае получено аналитическое выражение для коэффициента накопителя энергии, обусловленного пироэлектрическим и тепловым расширением.

В качестве частных примеров приводятся результаты для консольной и шарнирно опёртой балок.

Բաղդասարյան Գ.Ե., Հասանյան Ա.Դ., Հասանյան Դ.Ջ

Կամայականորեն տեղակայված հենարաններով երկշերտ ջերմաառաձգական դինամիկական սալ:

Մաս I: Էներգիայի կուտակում – տեսական հետազոտություն

Կատարված է դինամիկ ջերմապիեզոէլեկտրական երկշերտ էներգիայի կուտակիչի մանրակրկիտ տեսական հետազոտություն: Հաշվի են առնված պիրոէլեկտրական և ջերմային էֆեկտները: Ստացված է էներգիայի կուտակիչի գործակցի անալիտիկ արտահայտությունը երկշերտ սալի դեպքում, երբ հաշվի են առնվում մեխանիկական, էլեկտրական և ջերմային դաշտերը: Մասնավոր դեպքում ստացված է էներգիայի կուտակիչի գործակցի անալիտիկ արտահայտությունը՝ պայմանավորված պիրոէլեկտրական և ջերմային ընդարձակմամբ: Որպես մասնավոր օրինակ բերված են արդյունքները կոնսոլային և հոդակապորեն ամրակցված հեծանների համար:

Abstract
A comprehensive theoretical analysis of a dynamic thermo-ferro-electric pre-stressed bimorph energy harvester is performed. The analysis also takes into account pyroelectric and thermal expansion effects. The most general analytical expression for the energy conversation coefficients are presented for bi-layer. These coefficients we derive for more general situation when mechanical, electrical, thermal fields are present. We derive coefficients (transformation coefficients) for sensing, actuating, and energy harvesting. As a particular case, we derive an analytical expression for the energy harvesting coefficient due to pyroelectric and thermal expansion effects in a rater general situation. This is a function of material properties, location of boundary conditions, vibration frequency, and in plane compressive/tensile follower force. Numerical simulations of the analytical results are presented. Effects of volume fraction, material properties, applied mechanical loads, and boundary conditions on the harvesting coefficients are introduced in the figures. The results for a cantilever and a simply-supported plate-layer are obtained as particular cases. The result for a low frequency (static) system is obtained as a particular case by approaching the

vibration frequency to zero. It is shown that volume fraction, material properties, plain compressive/tensile follower force, the location of the boundary conditions, and the vibrational frequency of the bimorph strongly influence the

strain distribution, and this in effect influences the charge coefficient and the generation of energy. The proposed model can be extended to thermal energy harvesters of piezoelectric-shape memory alloy (SMA) composites.

1. Introduction

Piezoelectric materials have found widespread applications in the last decade in sensors, actuators, loud speakers, etc. because of their ability to convert electrical energy to mechanical, thermal, and magnetic energy, and vice versa. This has led to an accumulation of research to develop piezoelectric based energy harvesting devices as power generators in a variety of portable and low power consuming devices. The process of extracting energy from the surrounding environment is termed as energy harvesting. Energy harvesting, which originated from the windmill and water wheel, is widely being considered as a low maintenance solution for a wide variety of applications.

Note that energy harvesting techniques are numerous [3, 5-11, 14-16, 18- 20, 22-26]. Photovoltaic-solar energy is directly converted into electrical energy using polarized solar cells (semiconductor devices); mechanical (vibrations), electrostatic method -a relative movement between electrically isolated charged capacitor planes is utilized. The work against the electrostatic force between the plates provides the harvested energy, electromagnetic method – an electromagnetic induction arising from the relative motion (rotation or linear) between a magnetic flux and a conductor is used, piezoelectric method- active materials are employed to generate the energy when mechanically stressed [3, 5-11, 14-16, 18- 20, 22-26].

Other attractive area for harvesting energy is from thermal sources. Thermal energy (temperature gradient) is converted into electrical energy using e.g. Seebeck's effect [10, 24]. Thermal-energy (temperature variation) is converted via the pyroelectric effect [9, 18, 23,26]. Mention that using a thermoelectric module a limited temperature gradient due to the limited heat exchange (Seebeck's effect), a maximum efficiency of ~3-4% can be expected. However, on the contrary, a pyroelectric device may reach efficiency up to 50% of efficiency [3,24].

Vibration energy can be converted into electrical energy through piezoelectric, electromagnetic and capacitive transducers. Among them, piezoelectric vibration-to electricity converters have received much attention, as they have high electromechanical coupling and no external voltage source requirement, and they are particularly attractive for use in MEMS [1, 2, 4, 13,17,21].

Authors in [20] discussed a recent commercial wristwatch that uses thermoelectric modules to generate enough power to run the clock's mechanical components. The thermoelectric modules in the clock work by the thermal gradient produced through body heat. Pyroelectric effect is another possibly for converting heat into electricity. Authors in [9, 16, 23, 26] proposed a pyroelectric energy harvesting using materials such as PZT-5A, PMN-PT, PVDF, and thin-films. It was concluded that with a higher pyroelectric coefficient, more power is generated. Authors [18] proposed a thermal energy harvester with a piezo-shape memory alloy (SMA) composite. The combined electro elastic coupling of the piezoelectric with the thermal response of the SMA was studied.

More details about energy harvesting methods, challenges, and thermal sources, the reader is referred to [3, 10, 18, 22, 26].

A piezoelectric energy harvester in an infinite degree of freedom system is often modeled as a mass+ spring + damper + piezo structure (as a lumped model) together with an energy storage system. This approach is simple but cannot capture all phenomena's specific to distributed system. We model an energy harvester as a distributed system and in particular we show that effect of boundary conditions on energy harvesting coefficient can have a significant influence.

The work presented in the paper deals with the modeling of harvesting from mechanical, electrical (piezoelectric), and thermal (pyroelectric) bi-morph type structures. Also, the influence of boundary condition, in plain conservative follower force, vibration frequency, and material properties on a bimorph energy harvester is analyzed while under a thermal-electrical field. The pyroelectric and thermal expansion coefficients are also considered.
The proposed model for the bimorph can be extended for more general cases, for example: to the composites made of magneto-thermo-electro-elastic shape memory alloy's (SMA).

2. Model and Constitutive Equations

A thermally active thermo-piezoelectric bilayer structure of length 2L and thickness $H = h_p + h_m$, where h_p is the thickness of the piezoelectric layer and h_m is the thickness of the elastic layer is considered. The system of coordinates is chosen in such a way that x_1 axis is directed along the neutral line, the x_2 axis is directed across the width, and the x_3 axis is orthogonal to both of them. For simplicity, the structure is assumed to be a two dimensional x_1 plate-layer, where the field functions depend only on the space coordinates x_1 and x_3. We also consider a piezoelectric layer that is poled in the x_3 direction (Fig. 1a, b).

Furthermore, we assume that

- The material of each layer is linearly elastic,
- The strains and displacements are small,
- The length of the composite is much larger than its total thickness $(L >> H)$,
- The thermal field distribution is constant across each layer,
- Bernoulli's (Kirchhoff's) hypothesis is valid for both layers. The displacement in x_1 and x_3 directions are given as

$$\begin{cases} u_1\left(x_1, x_3\right) = u\left(x_1\right) - x_3 \dfrac{\partial w}{\partial x_1} \\ u_3\left(x_1, x_3\right) = w\left(x_1\right) \end{cases} \tag{1}$$

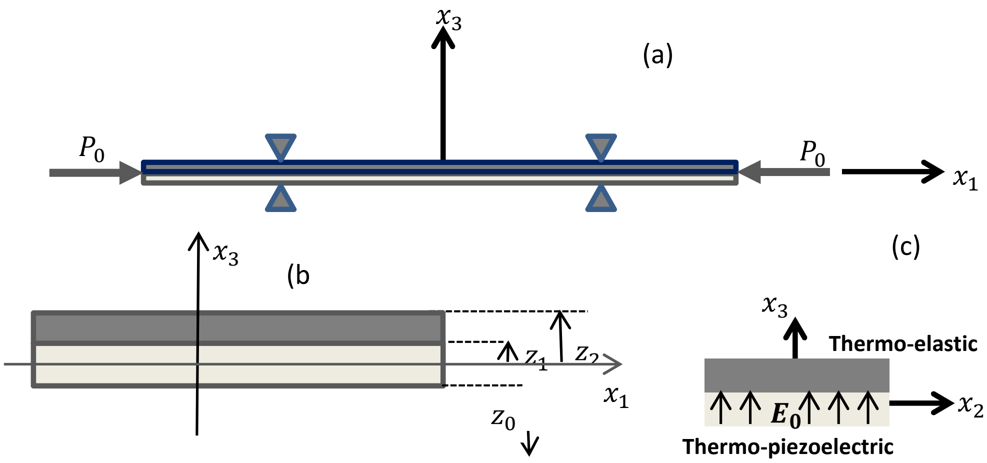


Fig. 1. (a) Thermo-piezoelectric and thermos-elastic bi-layer under thermal field ϑ and a conservative compressive follower force P_0 ; (b) Locations of neutral line from the interfaces; (c) The bi-layer's cross section.

Based on the above assumptions, the equations of motion and Maxwell's electro-magneto static equations for the thermo-elastic and thermo-electro-elastic layers are written as ([1,2,4,13,17,21)

$$T_{ij,i}^{(k)} = \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_j^{(k)}}{\partial t^2} \tag{2}$$

$$D_{i,i}^{(k)} = 0 \quad \text{and} \quad e_{ijm} E_{j,m}^{(k)} = 0, \left(k = 1, 2\right), \tag{3a,b}$$

Where $F_{,i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, T_{ij} is the stress tensor, ρ is the density, D_i is the electric displacement, E_i is the electric field, and e_{ijm} is the permutation index. The superscript "*k*" is used to denote the layer, with *k*=1 indicating the thermo-piezoelectric layer and *k*=2 indicating the thermo-elastic layer.

The constitutive equations are written in a form of

$$\begin{cases} S_i^{(1)} = s_{ij}^{(1)} T_j^{(1)} + d_{ji}^{(1)} E_j^{(1)} + \alpha_i^{(1)} \vartheta \\ D_i^{(1)} = d_{ij}^{(1)} T_j^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} E_j^{(1)} + p_i^{(1)} \vartheta \end{cases} \tag{4}$$

for thermos-pieso-electric layer, where we introduce one index notation for tensors. For example:

two index stress T_{ij} and one index stress T_i related as $T_{11} = T_1,\, T_{22} = T_2, T_{12} = T_6$ and ctr (for details see [9, 12, 13, 17]).

For demonstration purposes only constative equations (4) for $i = 1$ can be written as

$$S_1^{(1)} = s_{11}^{(1)} T_1^{(1)} + s_{12}^{(1)} T_2^{(1)} + s_{13}^{(1)} T_3^{(1)} + d_{31}^{(1)} E_3^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \vartheta$$

$$D_1^{(1)} = d_{11}^{(1)} T_1^{(1)} + d_{12}^{(1)} T_2^{(1)} + d_{13}^{(1)} T_3^{(1)} + \varepsilon_{13}^{(1)} E_3^{(1)} + p_1^{(1)} \vartheta$$

For the thermo-elastic layer

$$S_i^{(2)} = s_{ij}^{(2)} T_j^{(2)} + \alpha_i^{(2)} \vartheta \; (i = 1, 6) \tag{5}$$

In these equations, S_i is the strain vector, T_i is the stress vector, ϑ is the thermal field across the two layers, s_{ij} is the compliance matrices of the piezoelectric and pure elastic media, d_{ij} is the piezoelectric coefficient, ε_{ij} is the dielectric permittivity, α_i is the thermal expansion coefficient, and p_i is the pyroelectric coefficient.

Within the scope of Bernoulli's (Kirchhoff's) hypothesis of plate-layer theory, only the strain S_1 is induced in the plate-layer. This strain is given by

$$S_1 = \frac{\partial u_1\left(x_1, x_3\right)}{\partial x_1} = \frac{\partial u\left(x_1\right)}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \varepsilon - x_3 \kappa \tag{6}$$

where $\varepsilon = \dfrac{\partial u\left(x_1\right)}{\partial x_1}$ is a strain along the neutral axis and $\kappa = \dfrac{\partial^2 W(x_1, t)}{\partial x_1^2}$ is the bending of the neutral axis. Eqn. (6) denotes the linear behavior of the strain S_1 over the entire cross section of the plate-layer and x_3 defines the vertical distance from the neutral axis.

Next, the boundary conditions for the electrical quantities are provided. If there are no electrodes on the surface of the plate-layer and if the layer on these surfaces is in contact with a non-conductive medium (i.e., insulating glue or a vacuum or air), the component of the electric induction vector $D_1^{(1)}$ normal to these surfaces is equal to zero, i.e.

$$D_1^{(1)} = 0 \tag{7}$$

For the electrical field, the following boundary conditions should be satisfie

$$D_3^{(k)}\Big|_{x_3 = z_k} = D_3^{(k+1)}\Big|_{x_3 = z_k}, \quad E_1^{(k)}\Big|_{x_3 = z_k} = E_1^{(k+1)}\Big|_{x_3 = z_k} \tag{8}$$

where $(k = 0, 1, 2)$ and $x_3 = z_k$ is used to denote the location of the interface surfaces as shown in Fig 1. Later, we will assume that the surrounding air is a vacuum. If the electrodes are in a closed circuit condition with a known complex conductivity $Y = Y_0 + iY_1$, then [9, 17]

$$I = \iint \frac{dD_3^{(1)}}{dt} d\Gamma = 2VY \tag{9}$$

Γ is the surface over the electrodes, V is an applied voltage, and I is the magnitude of the current. If the electrodes are in an open circuit condition, then

$$I = \iint \frac{dD_3^{(1)}}{dt} d\Gamma = 0 \tag{10}$$

For the mechanical load on the surface of the plate-layer,

$$\begin{aligned} T_5^{(2)}\Big|_{x_3 = z_2} &= q_1^+, \quad T_5^{(1)}\Big|_{x_3 = z_0} = q_1^-, \\ T_3^{(2)}\Big|_{x_3 = z_2} &= q_3^+, \quad T_3^{(1)}\Big|_{x_3 = z_0} = q_3^- \end{aligned} \tag{11}$$

Where q_i^+ and q_i^- are the forces applied at $x_3 = z_2$ and $x_3 = z_0$. The boundary conditions on the composite edges are provided in the discussion of the vibration of a bilayer composite. In order to construct a theory of plate-layers, some additional assumptions regarding the electrical quantities must be made. As in the theory of piezoelectric shells and plates, the assumed hypotheses depend on the electrical conditions on the surfaces of the composite layers. For the piezoelectric layers, the electric field component $E_3^{(1)}\left(x_1, x_3, t\right)$ will be assumed not to be a function of the coordinates x_1 and x_3, i.e.

$$E_3^{(1)}\left(x_1, x_3, t\right) = E_0(t) \tag{12}$$

Note that more realistic general theory for transversely polarized piezoelectric plates is developed in [2]. Assumption (12) can be interpreted as a particular case from [2].

3. Tangential Force and Bending Moment.

Using the above constitutive relations (4)-(5) and representation (6), we express the induced stresses in the layers of various phases as

$$T_1^{(1)} = \frac{1}{s_{11}^{(1)}}\left(\varepsilon - x_3\kappa - d_{31}^{(1)}E_3^{(1)} - \alpha_1^{(1)}\vartheta\right) \tag{13}$$

for the thermo-piezoelectric layer and

$$T_1^{(2)} = \frac{1}{s_{11}^{(2)}}\left(\varepsilon - x_3\kappa - \alpha_1^{(2)}\vartheta\right) \tag{14}$$

for the thermo-elastic layer. By integrating the stress over the thickness, we obtain the resultant tangential force T_1 as

$$T_1 = \sum_{k=1}^{2}\int_{z_{k-1}}^{z_k} T_1^{(k)}\left(x_1, x_3, t\right)dx_3 = A\varepsilon - B\kappa - A_{01}E_0 - A_\vartheta\,\vartheta \tag{15}$$

where z_0, z_1 and z_2 are locations of layers surfaces from the mid-plane (in our case it could be neutral plane) with $z_1 - z_0 = h_p$, $z_2 - z_1 = h_m$;

$$B = \frac{z_1^2 - z_0^2}{2s_{11}^{(1)}} + \frac{z_2^2 - z_1^2}{2s_{11}^{(2)}},\ A_{01} = \frac{d_{31}^{(1)}\mathrm{h}_p}{s_{11}^{(1)}},\ A_\vartheta = \frac{\alpha_1^{(1)}\mathrm{h}_P}{s_{11}^{(1)}} + \frac{\alpha_1^{(2)}\mathrm{h}_m}{s_{11}^{(2)}} \tag{16a-c}$$

The bending moment M_1 is calculated according to

$$M_1 = \sum_{k=1}^{2}\int_{z_{k-1}}^{z_k} x_3T_1^{(k)}\left(x_1, x_3, t\right)dx_3 = B\varepsilon - D\kappa - C_1E_0 - C_\vartheta\vartheta \tag{17}$$

where

$$D = \frac{h_p^3}{3s_{11}^{(1)}} + \frac{h_m^3}{3s_{11}^{(2)}},\ C_1 = -\frac{d_{31}^{(1)}h_p^2}{2s_{11}^{(1)}},\ C_\vartheta = \frac{\alpha_1^{(2)}h_m^2}{2s_{11}^{(2)}} - \frac{\alpha_1^{(1)}h_p^2}{2s_{11}^{(1)}} \tag{18a-c}$$

In the context of the above simplification, the second equation in (4) is used to result in

$$D_3 = \int_{-h_p}^{0} D_3^{(1)} dx_3 = C_2 E_0 - C_3 \kappa - P_\vartheta \vartheta \tag{19}$$

Where

$$C_2 = \varepsilon_{33}^{(1)}\left(1 - K_1^2\right)\mathrm{h}_P, \quad C_3 = -\frac{\varepsilon_{33}^{(1)}}{2} h_p^2 \mathrm{r}_1, \quad K_1^2 = \frac{(d_{31}^{(1)})^2}{\varepsilon_{33}^{(1)} s_{11}^{(1)}},$$

$$\mathrm{r}_1 = \frac{d_{31}^{(1)}}{\varepsilon_{33}^{(1)} s_{11}^{(1)}}, \quad P_\vartheta = \left(\frac{\alpha_1^{(1)} d_{31}^{(1)}}{s_{11}^{(1)}} - p_3^{(1)}\right)\mathrm{h}_P. \tag{20a-e}$$

We then combine Eqns (15), (17), (19), and write

$$\begin{cases} A\varepsilon - B\kappa - A_{01}E_0 - A_\vartheta \vartheta = T_1, \\ B\varepsilon - D\kappa - C_1 E_0 - C_\vartheta \vartheta = M_1, \\ \quad C_2 E_0 - C_3 \kappa - P_\vartheta \vartheta = D_3. \end{cases} \tag{21a-c}$$

The unknown function $W(x_1, t)$ should be determined using Eqn. (2), Maxwell's Eqns. (3), and the boundary conditions on the composite edges $x_1 = \pm L.$

Note: From Eq (21) we can see that if the coefficient $B \neq 0,$ then the bending term κ produces a tension T_1 and vise version. These two modes can be decoupled only if $B = 0.$ However, it should be noted that the coefficient B is always zero for symmetric laminated composites. Also, in a general case, this coefficient depends on the choice of the coordinate system, and by choosing the position of the system of coordinates correctly, κ, T_1, ε and M_1 can be decoupled by $B = 0.$ From which we can determine for example z_0 location of system of coordinates from the bottom surface of plate-layer. For pure elastic case such choose give us location of neutral line. In our case (bi layer plate-strip), the z_0 location of the system of coordinates from the bottom surface of bi-layer is

$$z_0 = -\frac{h_p^2 / s_{11}^{(1)} + h_m^2 / s_{11}^{(2)} + 2h_p h_m / s_{11}^{(2)}}{2\left(h_p / s_{11}^{(1)} + h_m / s_{11}^{(2)}\right)} \quad .$$

In addition to $B = 0$ if we consider also low frequency vibration then longitudinal and transversal motions of plate-layer can be fully decoupled.

4. Equations of Motion of Bilayer Thermo-Electro-Elastic Composite

In plate-layer theory, the equations of motion are obtained by integrating the three-dimensional equations of motion (2)-(3) over the plate-layer thickness. We write the equations of motion in the following form;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_1}{\partial x_1} + X_1 = \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tilde{\rho} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \\ \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} + X_3 = \rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ Q = \dfrac{\partial M_1}{\partial x_1} - \tilde{\rho} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tilde{\tilde{\rho}} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \end{cases} \tag{22a-c}$$

Where $\rho = h_P \rho_P + h_m \rho_m$, $\tilde{\rho} = \frac{\rho_1}{2}(z_1^2 - z_0^2) + \frac{\rho_2}{2}(z_2^2 - z_1^2)$,

$\tilde{\tilde{\rho}} = \frac{\rho_1}{3}(z_1^3 - z_0^3) + \frac{\rho_2}{3}(z_2^3 - z_1^3)$, $X_1 = q_1^+ - q_1^-$; q_1^+ and q_1^- are applied shear stresses to the top and bottom of the composite, respectively, $X_3 = q_3^+ - q_3^-$; q_3^+ and q_3^- are the applied normal stresses to the top and the bottom of the composite, respectively.

The total charge Q on each electrode connected to the generator circuit is obtained by integrating the induction D_3 from (9) and (19) over the entire surface of the electrodes Γ. Then, the conduction current is calculated as

$$I = \iint \frac{dD_3^{(1)}}{dt} d\Gamma = 2VY = -\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma C_2 E_0 - \Gamma P_9 \vartheta - C_3 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} d\Gamma \right). \tag{23}$$

5. Problem Formulation for a Plate-layer with Arbitrary Support Locations

We assume that the plate-layer occupies the interval $-L \le x_1 \le L$ and is fixed at arbitrary points $x_1 = \pm c$. This plate-layer is subjected to a tangential follower force P_0 at the free ends $x_1 = \pm L$ (see Fig 1). It should be noted that a cantilever plate-layer is obtained for $c = 0$ and a simply-supported plate-layer is obtained for $c = L$.

As we mention above (see paragraph 4, **Note**) by choosing a position of a system of coordinates so that the coefficient $B = 0$ and considering low frequency type of motions, then the bending equation can be decoupled from longitudinal motion and from (22) we can get ([1,2,4,13,17,21])

$$-D \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} - P_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{24}$$

where P_0 is a follower tangential force. Next we are interested in a bilayer's pure bending harmonic motion i.e. $(W(x_1,t), E_0(t), \vartheta(t)) = (w(x_1), E, \theta)e^{i\omega t}$, where ω is the circular frequency of motion. The displacements are denoted as

$$\begin{aligned} &w_1(x_1) = w(x_1) \text{ if } c \le x_1 \le L \\ &w_3(x_1) = w(x_1) \text{ if } -L \le x_1 \le -c \\ &w_2(x_1) = w(x_1) \text{ if } -c \le x_1 \le c \end{aligned} \tag{25a-c}$$

We solve Eqn. (24) with the boundary conditions at $x_1 = \pm L$ and continuity conditions at $x_1 = \pm c$. The boundary conditions at $x_1 = \pm L$ are written as

$$M_1 = -D\frac{d^2 w}{dx_1^2} - C_1 E - C_9 \theta = 0 \text{ and } N = \frac{dM_1}{dx_1} = 0. \qquad (26)$$

The continuity conditions yield

$$w_1(c) = w_2(c) = 0,\ w_3(-c) = w_2(-c) = 0,\ \frac{dw_1(c)}{dx_1} = \frac{dw_2(c)}{dx_1},$$

$$\frac{dw_3(-c)}{dx_1} = \frac{dw_2(-c)}{dx_1},\ \frac{d^2 w_1(c)}{dx_1^2} = \frac{d^2 w_2(c)}{dx_1^2},\ \frac{d^2 w_3(-c)}{dx_1^2} = \frac{d^2 w_2(-c)}{dx_1^2}. \qquad (27a\text{-}f)$$

For simplicity, we will consider the symmetric problem. In this case, $w_3(x_1) = w_1(-x_1)$, $w_2(x_1) = w_2(-x_1)$, and the conditions at $x_1 = -c$ and $x_1 = -L$ (Eqns 27b, d, and f) are replaced by the symmetry conditions

$$\frac{dw_2(0)}{dx_1} = 0,\ \frac{dw_2(0)}{dx_1} = 0. \qquad (28)$$

Note that boundary value problem (24)-(28), without thermos-electric properties was discussed in [12] by prof V.Ts. Gnuni (2006).

Next, the following non-dimensional parameters are introduced; $x = x_1 / L,\ \alpha = c / L,$

$$\lambda = \frac{3P_0 L^2 s_{11}^{(1)}}{2h_p^3},\ \Omega^4 = \frac{3\omega^2 L^4 s_{11}^{(1)} \rho_p}{h_p^2},$$

$$p = \left(\left(\left(\frac{\lambda s}{s+h^3} \right)^2 + \frac{\Omega^4 s(1+h\sigma)}{s+h^3} \right)^{1/2} - \frac{\lambda s}{s+h^3} \right)^{1/2} \text{ and}$$

$$q = \left(\left(\left(\frac{\lambda s}{s+h^3} \right)^2 + \frac{\Omega^4 s(1+h\sigma)}{s+h^3} \right)^{1/2} + \frac{\lambda s}{s+h^3} \right)^{1/2},\ \text{where } s = s_{11}^{(2)} / s_{11}^{(1)},$$

$h = h_m / h_p$, and $\sigma = \rho_m / \rho_p$.

The solution of (24) is given by

$$\begin{aligned} w_k(x) = {} & a_{1+4(k-1)} \cosh(px) + a_{2+4(k-1)} \sinh(px) + \\ & + a_{3+4(k-1)} \cos(qx) + a_{4+4(k-1)} \sin(qx) \end{aligned} \qquad (29)$$

Where $a_{1+4(k-1)}$, $a_{2+4(k-1)}$, $a_{3+4(k-1)}$ and $a_{4+4(k-1)}$ $(k = 1, 2)$ are unknown coefficients to be determined from the boundary conditions (25)-(28).

Using the boundary conditions (25)-(28) for unknown coefficients a_{1+4k}, a_{2+4k}, a_{3+4k} and a_{4+4k}, $(k = 0,1)$ the following system of linear algebraic equations are obtained

$$\hat{A} \cdot \vec{X}^T = \frac{L^2}{D} C_1 E \vec{X}_{01}^T + \frac{L^2}{D} C_9 \theta \vec{X}_{01}^T, \qquad (30)$$

Where $\vec{X}^T$ and $\vec{X}_{01}^T$ are transposes of

$$\vec{X} = \left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\right) \text{ and } \vec{X}_{01} = \left(0,0,0,0,0,0,-1,0\right). \tag{31}$$

We also let $\hat{A} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^3 & 0 & -q^3 \\ \cosh p\alpha & \sinh p\alpha & \cos q\alpha & \sin q\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh p\alpha & \sinh p\alpha & \cos q\alpha & \sin q\alpha \\ p\sinh p\alpha & p\cosh p\alpha & -q\sin q\alpha & q\cos q\alpha & -p\sinh p\alpha & -p\cosh p\alpha & q\sin q\alpha & -q\cos q\alpha \\ p^2\cosh p\alpha & p^2\sinh p\alpha & -q^2\cos q\alpha & -q^2\sin q\alpha & -p^2\cosh p\alpha & -p^2\sinh p\alpha & q^2\cos q\alpha & q^2\sin q\alpha \\ p^2\cosh p & p^2\sinh p & -q^2\cos q & -q^2\sin q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^3\sinh p & p^3\cosh p & q^3\sin q & -q^3\cos q & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Assuming $\Delta = \det(\hat{A}) \neq 0$ from (30), we find all unknown coefficients $\vec{X} = \left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\right)$, i.e.

$$\vec{X}^T = \hat{C} \cdot \frac{1}{\Delta}[\tilde{E}\vec{X}_{01}^T], \tag{33}$$

where the matrix $\hat{C}$ has elements $\hat{C} = (C_{i,j})$ equal to

$\hat{C} = \left(C_{i,j}\right) = \hat{A}^{-1}\det\left(\hat{A}\right) = \hat{A}^{-1}\Delta$ and $\tilde{E} = \frac{L^2}{D}C_1 E + \frac{L^2}{D}C_9\theta$. The solution (29) is then re-written in the following form

$$w_1(x) = -\frac{v_1}{\Delta}\tilde{E} \text{ and} \tag{34}$$

$$w_2(x) = -\frac{v_2}{\Delta}\tilde{E} \tag{35}$$

The detailed expressions for the coefficients in (34)-(35) are presented in Appendix A. Having the solution for (29) or (34)-(35), we determine the conversion and energy harvesting coefficients for piezoelectric-thermoelastic bimorphs. Under thermodynamic equilibrium, the internal energy density of an infinitesimally small volume element in the piezoelectric material is given by

$$U^p\left(x_1, x_3, t\right) = \frac{1}{2}S_1^{(1)}T_1^{(1)} + \frac{1}{2}E_3^{(1)}D_3^{(1)} \tag{36}$$

Substitution of (6) into (36), and using (4), we obtain

$$U^p\left(x_1, x_3, t\right) = \frac{1}{2s_{11}^{(1)}}(x_3\kappa)^2 + \frac{\alpha_1^{(1)}}{2s_{11}^{(1)}}x_3\kappa\,\vartheta + \frac{C_2}{2h_p}E_0^2 - \frac{P_9}{2h_p}E_0\vartheta, \tag{37}$$

Where $\kappa = \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}$, and C_2 and P_9 are defined in Eq (20a,e). The energy for the thermo-elastic layer is given by

$$U^m\left(x_1, x_3, t\right) = \frac{1}{2}S_1^{(2)}T_1^{(2)} = \frac{1}{2s_{11}^{(2)}}(x_3\kappa)^2 + \frac{\alpha_1^{(2)}}{2s_{11}^{(2)}}x_3\kappa\,\vartheta \tag{38}$$

Once we determine the internal energy density of each layer, the total energy of the bilayer bender is obtained by volume integration. Assuming that the width of the structure is unity, we write

$$U(t)=\int_{-L}^{L}\int_{0}^{h_p}U^p dx_3 dx_1+\int_{-L}^{L}\int_{-h_m}^{0}U^m dx_3 dx_1. \tag{39}$$

Using the symmetry conditions $w_3(x_1)=w_1(-x_1)$, $w_2(x_1)=w_2(-x_1)$, and non-dimensional parameters $x=x_1/L$, $\alpha=c/L$, Eqn. (39) results in

$$U(t)=C_2LE_0^2-P_\vartheta LE_0\vartheta+\frac{DL}{2}\int_{-1}^{1}k^2dx-\frac{C_\vartheta\vartheta L}{2}\int_{-1}^{1}kdx \tag{40}$$

or using (34)-(35), we write

$$U(t)=\gamma_1E_0^2+\gamma_2\vartheta^2+\gamma_3E_0\vartheta, \tag{41}$$

where $\gamma_i,(i=1,2,3)$ are presented in Appendix B. By treating the electrical and the coupled terms as $U(t)=QV_0$, where $Q(t)$ is the charge and $V_0(t)$ is the voltage, we derive the generated charge by substitution into Eq (41). An expression for the electrical field in terms of voltage $E_0(t)=V_0(t)/h_p$ is obtained. This is differentiated with respect to V_0, where h_p is the distance between the top and the bottom surfaces of the electrodes in the piezoelectric layer as shown in Fig 1. The result is

$$Q(t)=\frac{\partial U(t)}{\partial V_0}=\frac{2\gamma_1}{h_p^2}V_0(t)+\frac{\gamma_3}{h_p}\vartheta(t)=C_vV_0(t)+Q_\vartheta\vartheta(t), \tag{42}$$

where

$$C_v=\frac{2\gamma_1}{h_p^2}=\frac{2}{h_p^2}(C_2L+\frac{C_1^2L}{D\hat{\Delta}^2}R_1),$$

$$Q_\vartheta=\frac{\gamma_3}{h_p}=-\frac{P_\vartheta L}{h_p}+\frac{2C_1C_\vartheta L}{h_pD\hat{\Delta}^2}R_1+\frac{C_1C_\vartheta L}{h_pD\hat{\Delta}}R_2. \tag{43a,b}$$

The values of R_1 and R_2 are presented in appendix B. Using Eq (43), we determine the amplitude of the generated charge as:

a) from the applied voltage

$$V_0(t)=Ve^{i\omega t},\ Q_{gen}^V=C_vV=\frac{2}{h_p^2}(C_2L+\frac{C_1^2L}{D\hat{\Delta}^2}R_1)V,\text{ and} \tag{44a}$$

b) from the thermal gradient $\vartheta=\theta e^{i\omega t}$

$$Q_{gen}^\vartheta=Q_\vartheta\theta=(-\frac{P_\vartheta L}{h_p}+\frac{2C_1C_\vartheta L}{h_pD\hat{\Delta}^2}R_1+\frac{C_1C_\vartheta L}{h_pD\hat{\Delta}}R_2)\theta. \tag{44b}$$

Recognizing that $Q_{gen}^V=C_vV$, the capacitance is

$$C_v=\frac{2}{h_p^2}(C_2L+\frac{C_1^2L}{D\hat{\Delta}^2}R_1). \tag{45}$$

The generated voltage amplitude from ϑ is

$$V_{gen}^{\vartheta} = \frac{Q_{gen}^{\vartheta}}{C_v}. \tag{46}$$

The generated electrical energy amplitude from ϑ is

$$U_{gen}^{\vartheta} = \frac{1}{2} Q_{gen}^{\vartheta} V_{gen}^{\vartheta}. \tag{47}$$

6. Discussions and Numerical Results.

The non-dimensional thermal energy harvesting coefficient finally derived in the following form

$$\tilde{Q}_{gen}^{\vartheta} = \frac{-s_{11}^{(1)} Q_{gen}^{\vartheta}}{\alpha_1^{(1)} d_{31}^{(1)} L\theta} = (1-\tilde{p}) + \frac{3}{4}\frac{(\alpha_T h^2 - s)}{(s+h^3)}\left(\frac{2R_1}{\widehat{\Delta}^2} + \frac{2R_4}{\widehat{\Delta}}\right), \tag{48}$$

where $\alpha_T = \alpha_1^{(2)} / \alpha_1^{(1)}$, $\tilde{p} = (p_3^{(1)} s_{11}^{(1)}) / (\alpha_1^{(1)} d_{31}^{(1)})$, $h = h_m / h_p$, and $s = s_{11}^{(2)} / s_{11}^{(1)}$.

We can state that expression (48) is derived for the first time in such a general form. In particular, for a static case, assuming also $\alpha_T = 0$ expression (48) coincide with counterpart derived in [18]. The material properties shown in Table 1 will be considered during the numerical simulation of Eqn. (48). It should be noted that the derivation in this work can be extended to the magneto-thermo-electro-elastic shape memory alloy (SMA) composites. For simplicity, the two materials for shape-memory alloy can be also PZT-5A with an aluminum substrate (this case is discussed in [18]).

Using the following properties, the critical bucking load is $\lambda_{cr} \geq 1.65$. This is determined using the formula for a static Euler's column

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 D}{4L^2}. \tag{49}$$

The value of the follower force will be taken below the critical value.

Numerical results and discussions presented in Part II of this paper.

APPENDIX A

$$v_1 = \omega_1 p^3 \cosh px + \omega_2 q^3 \frac{\cosh px}{\cosh p(1-\alpha)} + \omega_3 p^3 + \omega_4 \frac{q^3}{\cosh p(1-\alpha)},$$

$$v_2 = \omega_5 p^3 \cosh px + \omega_6 pq^2 \frac{\cosh px}{\cosh p(1-\alpha)} + \omega_7 p^3 + \omega_8 \frac{pq^2}{\cosh p(1-\alpha)},$$

$$\widehat{\Delta} = p^3 q^2 \left(\frac{p^2}{q^2 \cosh p(1-\alpha)} + \frac{q^2}{p^2 \cosh p(1-\alpha)} + T\right),$$

$$T = 2\cos q(1-\alpha) - \frac{p \tanh p\alpha + q \tan q\alpha}{q} \sin q(1-\alpha) + \frac{q}{p} \tanh p(1-\alpha)(\sin q(1-\alpha) +$$

$$+ \frac{p \tanh p\alpha + q \tan q\alpha}{q} \cos q(1-\alpha) - \frac{p^2}{q^2} \sin q(1-\alpha)),$$

$$\omega_1 = 1 - \tanh p(1-\alpha) \tanh px,$$

$$\omega_2 = \frac{p}{q}\cos q\left(1-\alpha\right) + (\sin q\left(1-\alpha\right) + \frac{p\tanh p\alpha + q\tan q\alpha}{q}\cos q\left(1-\alpha\right))\tanh px,$$

$$\omega_3 = -\cos qx + \frac{p\tanh p\alpha + q\tan q\alpha}{q}\sin qx + \frac{p}{q}\sin qx\tanh p(1-\alpha),$$

$$\omega_4 = \frac{p}{q}\cos q\left(1-\alpha\right)\left(-\cos qx + \frac{p\tanh p\alpha + q\tan q\alpha}{q}\sin qx\right) -$$

$$\frac{p}{q}\sin qx\left(\sin q\left(1-\alpha\right) + \frac{p\tanh p\alpha + q\tan q\alpha}{q}\cos q\left(1-\alpha\right)\right),$$

$$\omega_5 = 1 + \tanh p\alpha\tanh px,\ \ \omega_6 = \cos q\left(1-\alpha\right)(1 + \tanh p\alpha\tanh px),$$

$$\omega_7 = -\cos qx + \tan q\alpha\sin qx,\ \ \omega_8 = \cos q\left(1-\alpha\right)(-\cos qx + \tan q\alpha\sin qx).$$

APPENDIX B

$$R_1 = \int_{-\alpha}^{0}\left(\frac{d^2 v_2}{dx^2}\right)^2 dx + \int_{0}^{1-\alpha}\left(\frac{d^2 v_1}{dx^2}\right)^2 dx, \quad R_2 = \int_{-\alpha}^{0}\frac{d^2 v_2}{dx^2}dx + \int_{0}^{1-\alpha}\frac{d^2 v_1}{dx^2}dx,$$

$$\gamma_1 = C_2 L + \frac{C_1^2 L}{D\widehat{\Delta}^2}R_1,\ \ \gamma_2 = \frac{LC_9^2}{D\widehat{\Delta}^2}R_1 + \frac{LC_9^2}{D\widehat{\Delta}}R_4,$$

$$\gamma_3 = -P_9 L + \frac{2C_1 C_9 L}{D\widehat{\Delta}^2}R_1 + \frac{C_1 C_9 L}{D\widehat{\Delta}}R_4.$$

REFERENCES

1. S.A. Ambartsumyan and G.E. Bagdasaryan, (1996), Electroconductive Plates and Shells in Magnetic Field, p.288, Nauka, Moscow (in Russian).
2. S.A.Ambartsumian, M. Belubekyan , (1991), “Some problems of electromagnetoelasticity of plates”. Yerevan, Yerevan State University Publishing House, Yerevan (in Russian), p.144.
3. Anton, S. R. and Sodano H.A. (2007). A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003-2006), Smart Mater. Struct., Vol. 16(3), R1-R21.
4. G. E. Bagdasaryan, (1999), Vibrations and Stability of Magnetoelastic Systems, p. 435, Yerevan State University Publishing House, Yerevan (in Russian).
5. Bauer, S., (2006), Piezo-, pyro- and ferroelectrets: soft transducer materials for electromechanical energy conversion, IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, 13(5), pp. 953 – 962.
6. Beeby, S. P.; Torah, R. N.; Tudor, M. J.; Glynne-Jones, P.; ODonnell, T.; Saha, C. R. & Roy, S. (2007). A micro electromagnetic generator for vibration energy harvesting, J. Micromech. Microeng., Vol.17, 12571265.
7. Blystad, L.-C. J.; Halvorsen, E. and Husa, S. (2008). Simulation of a MEMS Piezoelectric Energy Harvester Including Power Conditioning and Mechanical Stoppers. Technical Digest, PowerMEMS 2008, Sendai, Japan, November 2008, 237-240.
8. Blystad, L.-C. J., Halvorsen, E. & Husa, S. (2010). Piezoelectric MEMS energy harvesting systems driven by harmonic and random vibrations, IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr., Vol. 57(4), 908-919.
9. Borisenok, V. A., Koshelev, A. S. and Novitsky, E. Z., (1996), Pyroelectric materials for converters of pulsed ionizing radiation energy into electric power, Bulletin of the Russian Academy of Sciences, Physics, 60(10), pp. 1660 –1662.

10. Di Salvo F. J., (1999), Thermoelectric cooling and power generation, Science 285, 703-6.
11. Erturk A. & D. J. Inman (2008). Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters. Smart Mater. Struct. 17, paper # 065016.
12. Gnuni V.Ts., (2006) The stability of beam with two arbitrarily but symmetrical support locations under the action of following forces, Proceeding of National Academy of Science of Armenia, Mechanics, v.59, 1, pp. 25-30.
13. Hasanyan D., Gao J., Wang Y., Viswan R., Li M., Shen Y., Li J. and Viehland D., (2012). Theoretical and experimental investigation of magnetoelectric effect for bending-tension coupled modes in magnetostrictive-piezoelectric layered composites, J. Appl. Phys. 112, 013908 .
14. Jeon Y B, Sood R, Jeong J H and Kim S. G., (2005), MEMS power generator with transverse mode thin film PZT Sensors Actuators A 122 16–22.
15. Kim S, Clark W W and Wang Q. M. (2005), Piezoelectric energy harvesting with a clamped circular plate: analysis J. Intell. Mater. Syst. Struct. 16 847–54
16. Krommer M. and Irschik H., (2000). A Reissner-Mindlin-type plate theory including the direct piezoelectric and pyroelectric effect. Acta Mechanica 141, 51-69 .
17. Librescu L, Hasanyan D., Qin Z. & Ambur D.R., (2003), Nonlinear magnetothermoelasticity of anisotropic plates immersed in a magnetic field. Journal of Thermal Stresses Volume 26, Issue 11-12.
18. Namli O. C. and Taya M., (2011), Design of Piezo-SMA Composite for Thermal Energy Harvester Under Fluctuating Temperature, Journal of Applied Mechanics, v.78.
19. Paradiso J. A. and Starner T. (2005), Energy Scavenging for Mobile and Wireless Electronics, Pervasive Computing, IEEE, vol. 4, pp. 18-27.
20. Poulin G., Sarraute E. and Costa F. (2004), Generation of electric energy for portable devices: comparative study of an electromagnetic and a piezoelectric system. Sensors Actuators A 116 461–71.
21. Rogacheva N. N., (2010), Asymmetrically Laminated Piezoelectric Bars, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 74, pp. 1009-1027.
22. Roundy S, Steingart D, Frechette L, Wright P and Rabaey J, (2004), Power sources for wireless sensor networks Lect. Notes Comput. Sci. 2920 1–17.
23. Sebald G., Guyomar D. and Agbossou A., (2009), On thermoelectric and pyroelectric energy harvesting, Smart Mater. Struct. 18 , 125006.
24. Sodano, H. A., Simmers, G. E., Dereux, R., and Inman,D. J., (2007). Recharging batteries using energy harvestedfrom thermal gradients, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 18, pp. 3 – 10.
25. Ujihara, M., Carman, G. P., and Lee, D. G., (2007), Thermal energy harvesting device using ferromagnetic materials, Applied Physics Letters, 91, p.093508.
26. Xie J., Mane X. P., Green C. W., Mossi K. M. and Leang K. K., (2009), Performance of Thin Piezoelectric Materials for Pyroelectric Energy Harvesting, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol. 21, pp. 243-249.

About authors:

Gevorg Y. Bagdasaryan – Institute of Mechanics National Academy of Science of Armenia; **E-mail: gevorgb@rau.am**

Armanj D. Hasanyan, Davresh J. Hasanyan – Department of Aerospace Engineering, Ann Arbor, Michigan, USA; **E-mail: dhasanya@vt.edu**

Received 09.06.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №1, 2016 Механика

УДК 593.3

СВЕРХЗВУКОВОЙ ПАНЕЛЬНЫЙ ФЛАТТЕР ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, упругая прямоугольная пластинка, сверхзвуковое обтекание, дивергенция, локализованная дивергенция, флаттер, сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Key words: stability, elastic rectangular plate, supersonic overrunning, divergence, localized divergence, flutter, concentrated inertial masses and moments

Բանալի բառեր. Կայունություն, առաձգական ուղղանկյուն սալ, գերձայնային շրջհոսում, դիվերգենցիա, լոկալիզացված դիվերգենցիա, ֆլատեր, կենտրոնացված իներցիոն զանգված և մոմենտ

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.
Գերձայնային պանելային ֆլատերի մի խնդրի մասին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածի և մոմենտի առկայության դեպքում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տված դիվերգենցիայի և ֆլատերի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են կրիտիկական արագության արժեքները: Կախված խնդրի պարամետրերի հարաբերակցությունից ֆլատերային կրիտիկական արագությունը կարող է լինել մեծ կամ փոքր դիվերգենտ կրիտիկական արագությունից:

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.
Supersonic panel flutter in the presence of the concentrated inertial masses and the moments

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the phenomenon of divergence and of panel flutter of the overrunning of the gas flow at is free edge under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments at the free and fixed edges respectively. Its solution shows that the divergence or the localized divergence and the flutter are possible. The corresponding critical velocities of divergence and panel flutter are obtained. It is shown that depending on the relation between parameters of the problem, the critical flutter velocity can be either smaller or larger than the critical velocity of divergence.

В линейной постановке исследуется динамическое поведение возмущённого движения тонкой упругой прямоугольной пластинки вблизи границ области устойчивости при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край в предположении, что вдоль свободной кромки и шарнирно опёртой противоположной ей кромки приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты соответственно. Найдены критические скорости дивергенции панели, локализованной дивергенции в окрестности свободного края панели и панельного флаттера. Показано, что в зависимости от соотношения параметров задачи критическая скорость флаттера может быть как меньше, так и больше критической скорости дивергенции.

Введение. Среди аэроупругих явлений важное место занимают различные виды потери устойчивости авиаконструкций, в частности, «дивергенция панелей» («выпучивание» панелей) обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки, и «панельный флаттер» (интенсивные вибрации панелей обшивки с возрастающей амплитудой). Следствием этого является усталостное разрушение обшивки летательных аппаратов, что приводит к снижению их характеристик и потери управляемости.

Изучению дивергентной и флаттерной неустойчивости пластинок и оболочек посвящено огромное количество работ, всеобщий обзор которых содержится в монографии [3(стр. 210–245)] и в статье [4].

Модельные задачи устойчивости упругой пластинки, обтекаемой потоком газа, являются математической формулировкой условий, при которых невозмущённая форма плоских панелей перестаёт быть устойчивой. Пользуясь линейной теорией, можно найти наименьшее значение скорости потока газа (критическая скорость дивергенции или флаттера), приводящее к неустойчивости возмущённого движения системы «пластинка–поток» в форме дивергентной и флаттерной. Дивергентная и флаттерная неустойчивости отличаются поведением возмущённого движения системы «пластинка–поток» вблизи границы устойчивости: в первом случае возмущения монотонно возрастают, а во втором случае нарастание носит колебательный характер [1, стр. 63]. Как следствие этого, деформации, возникающие при панельном флаттере, более опасны для конструкции, так как быстро приводят к потере прочности и развитию усталостных трещин [2, стр. 175].

Известно [1, (стр. 283)], что критическая скорость, определяемая методами линейной теории аэроупругости, оказывается лишь верхней границей критических скоростей для реальных конструкций. Для реальных конструкций, для которых граница области устойчивости является «опасной» в смысле Н.Н. Баутина [5], явление неустойчивости может наступить при скорости, меньшей, чем найденная на основе линеаризованной теории критическая скорость для идеализированной конструкции.

В предлагаемой статье в линейной постановке исследуется динамическое поведение возмущённого движения тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем вблизи границ области устойчивости при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край. При этом предполагается, что вдоль свободного края и противоположного ему шарнирно опёртой кромки приложены, соответственно, сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота [1 (стр. 27, 101), 6].

С целью получения возможности аналитического исследования и выявления новых механических эффектов, к рассматриваемой задаче панельного флаттера применён подход, в соответствии с которым распределённая масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными массами и моментами поворота [1(стр. 27, 101), 6]. На основе этого подхода разработан удобный в применении новый метод нахождения аналитического решения для класса неконсервативных задач линейной устойчивости, подробно изложенный в работе [7]. В частности, с помощью этого метода исследован эффект дестабилизации в задаче панельного флаттера при различных моделях конструкционного трения в опорах пластинки [8], а так же, решена задача сверхзвукового панельного флаттера, в которой пластинка имеет два свободных края [9].

В работе получена зависимость, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего её потока газа, позволяющая в пространстве «существенных» параметров задачи выделить область устойчивости и области дивергентной, флаттерной и локализованной дивергентной неустойчивости.

Для различных значений параметров задачи найдены наименьшие значения скорости потока газа – критические скорости дивергенции, локализованной дивергенции и флаттера, при превышении которых система теряет устойчивость.

В задачах панельного флаттера в линейной постановке, как правило, критическая скорость дивергенции меньше критической скорости флаттера [1–4, 7-9,12]. В данной работе получен неожиданный результат. Оказалось, что в зависимости от соотношения параметров задачи критическая скорость флаттера может быть как меньше, так и больше критической скорости дивергенции.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V.

Течение газа будем считать плоским и потенциальным. А также, будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромка $x = 0$ пластинки свободна, а кромки $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. Вдоль кромок $x = 0$ и $x = a$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c соответственно [1 (с.27,101), 6].

Под влиянием каких-либо причин невозмущённое состояние равновесия пластинки может быть нарушено и пластинка начнёт совершать возмущённое движение с прогибом $w = (x, y, t)$. Прогиб w вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [10,11]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать, что прогибы w малы по отношению к толщине пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия пластинки, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными вдоль кромок пластинки $x = 0$ и $x = a$ сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c соответственно. При этом, влиянием распределённой массы пластинки и сил сопротивления пренебрегаем в соответствии с предлагаемым методом аналитического исследования.

Тогда, малые изгибные колебания точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [10,11] описываются дифференциальным уравнением [1 (стр. 245), 12]

$$D\Delta^2 w + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

где $\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1(стр.27,101), 6]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D^{-1} m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \; x = 0; \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_c D^{-1} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0\,, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,, \quad y = 0 \text{ и } y = b\,; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшее значение скорости потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к неустойчивости: при $V \geq V_{cr}$ устойчивое возмущённое движение системы «пластинка–поток» становится неустойчивым. Иными словами, требуется определить значения скорости V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2)-(1.4).

2. Общее решение задачи. Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot \sin(\mu_n y) \cdot \exp(\lambda t)\,, \ \mu_n = \pi n b^{-1}\,, \tag{2.1}$$

n – число полуволн вдоль стороны пластинки b.

Тогда, в соответствии с выражением (2.1), рассматриваемая задача о флаттере пластинки (1.1) – (1.4) сводится к следующей краевой задаче на собственные значения λ несамосопряжённого оператора для обыкновенного дифференциального уравнения относительно форм колебания $f_n(x)$:

$$f_n^{IV}(x) - 2\mu_n^2 f_n^{II}(x) + a_0 \rho_0 V D^{-1} f_n^{I}(x) + \mu_n^4 f_n(x) = 0\,, \tag{2.2}$$

$$f_n^{II}(x) = 0\,, \ f_n^{III} - \mu_n^2 (2 - \nu) f_n^{I}(x) = -m_c D^{-1} \lambda^2 f_n(x)\,, \quad x = 0\,; \tag{2.3}$$

$$f_n(x) = 0\,, \quad f_n^{II} - \mu_n^2 \nu f_n(x) = -I_c D^{-1} \lambda^2 f_n^{I}(x)\,, \ x = a\,. \tag{2.4}$$

Система «пластинка–поток», описываемая соотношениями (1.1) – (1.4), асимптотически устойчива, если все собственные значения λ краевой задачи (2.2) – (2.4) для обыкновенного дифференциального уравнения имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$), и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$). Критическая скорость V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости возмущённого движения системы «пластинка-поток», определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$).

Частное решение дифференциального уравнения (2.2) будем искать в виде

$$f_n(x) = C_n \exp(\mu_n p x)\,, \tag{2.5}$$

C_n – произвольные постоянные.

Подставляя решение (2.5) в дифференциальное уравнение (2.2), получаем характеристическое уравнение, являющееся алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$(p^2 - 1)^2 + \alpha_n^3 p = 0\,, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}\,, \quad \alpha_n^3 > 0\,. \tag{2.6}$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (2.6) имеет два отрицательных действительных корня $p_1 < 0$, $p_2 < 0$ и пару комплексно-сопряжённых корней $p_{3,4} = \alpha \pm i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha > 0$. Следовательно, общее решение уравнения (2.2), в соответствии с выражением (2.5), запишется в виде суммы

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\exp(\mu_n p_k x)\,, \tag{2.7}$$

C_{nk} – произвольные постоянные, p_k – корни характеристического уравнения (2.6).

Корни характеристического уравнения (2.6) определяются выражениями [12]:

$$p_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1)}\ ,\ p_1<0\,,\ p_2<0\,; \tag{2.8}$$

$$p_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)}\ . \tag{2.9}$$

Здесь q – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(1+q)^2(q-1)=\alpha_n^6,\quad \alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3}\,, \tag{2.10}$$

который удовлетворяет условию [13]

$$q>1\,. \tag{2.11}$$

Из соотношений (2.10) легко получить выражение зависимости скорости потока газа V от параметров системы

$$V=2\sqrt{2(q-1)}\cdot(q+1)\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1}\,, \tag{2.12}$$

или

$$V=2\sqrt{2(q-1)}\cdot(q+1)\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,, \tag{2.13}$$

где через γ обозначен параметр отношения ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b:

$$\gamma=ab^{-1}\,. \tag{2.14}$$

В соответствии с выражениями (2.7), корням (2.8), (2.9) характеристического уравнения (2.6) соответствует следующее общее решение дифференциального уравнения (2.2):

$$\begin{aligned} f_n(x)= {} & C_{n1}\exp(-0.5\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1)})\pi nb^{-1}x+ \\ & +C_{n2}\exp(-0.5\sqrt{2(q+1)}+\sqrt{\sqrt{(q^2-1)}-0.5(q-1)})\pi nb^{-1}x+ \\ & +\exp(0.5\sqrt{2(q+1)})\pi nb^{-1}x\cdot\Big(C_{n3}\cos(\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)})\cdot\pi nb^{-1}x)+ \\ & +C_{n4}\sin(\sqrt{\sqrt{(q^2-1)}+0.5(q-1)})\pi nb^{-1}x\Big),\quad q>1\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Подставляя решение (2.15) дифференциального уравнения (2.2) в граничные условия (2.3) и (2.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\chi_n\delta_n A_0\lambda^4+(\chi_n A_1+\delta_n A_2)\lambda^2+A_3=0\,. \tag{2.16}$$

Здесь

$$\delta_n=m_c D^{-1}b^3(\pi n)^{-3}\,,\ \chi_n=I_c D^{-1}b(\pi n)^{-1}\,, \tag{2.17}$$

приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, соответственно, приложенных на кромках $x=0$ и $x=a$ пластинки;

$$A_0=A_0(q,n,\gamma)= \tag{2.18}$$

$$= 2\sqrt{2(q+1)}\cdot\{(1-\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\cdot B_1B_2 +$$

$$+\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\cdot$$

$$\cdot\Big[(\sqrt{2(q-1)}-\sqrt{2(q+1)})\cdot B_1\cdot \mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)-$$

$$-(\sqrt{2(q-1)}+\sqrt{2(q+1)})\cdot B_2\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)\Big]\Big\}\,;$$

$$A_1 = A_1(q,n,\gamma) = 2\Big\{\Big[2(q+1)(q-\sqrt{(q^2-1)}-\nu)-(1-\nu)^2\Big]B_1B_2 + \tag{2.19}$$

$$+\Big[2(q+1)(q+\sqrt{(q^2-1)}-\nu)-(1-\nu)^2\Big]B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$

$$+2\Big[(q+1)\sqrt{(q^2-1)}\cdot(\sqrt{2(q-1)}+\sqrt{2(q+1)})\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$+(4q^2+2q-1+2q\nu+\nu^2)B_1\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big]B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot$$

$$\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)+$$

$$+\Big[((2q^2+3q-1)-2(3q^2+3q-2)\nu+(3q+1)\nu^2)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$+2(q+1)\cdot\sqrt{(q^2-1)}\cdot(\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{2(q-1)})B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big]\cdot$$

$$\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\Big\}\,;$$

$$A_2 = A_2(q,n,\gamma) = 4(q+1)\cdot\Big[(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\cdot B_1B_2 - \tag{2.20}$$

$$-2B_1B_2\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)+$$

$$+3(q-1)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\Big]\,;$$

$$A_3 = A_3(q,n,\gamma,\nu) = 2\sqrt{2(q+1)}\Big\{\Big[2(q+1)(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2\Big]B_1B_2 - \tag{2.21}$$

$$-\Big[2(q+1)(q+\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2\Big]\cdot B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$

$$+\Big\{\Big[(4q^2+2q-1)\sqrt{2(q-1)}-(2q^2-4q+1)\sqrt{2(q+1)}-$$

$$-2((2q-1)\sqrt{2(q+1)}-q\sqrt{2(q-1)})\nu+(\sqrt{2(q+1)}+\sqrt{2(q-1)})\nu^2\Big]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$+4(q+1)\sqrt{q^2-1}\cdot B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big\}B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$

$$+\Big[-B_1\cdot\Big((4q^2+2q-1)\sqrt{2(q-1)}+(2q^2-4q+1)\sqrt{2(q+1)}+$$

$$+2((2q-1)\sqrt{2(q+1)}+q\sqrt{2(q-1)})\nu-(\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{2(q-1)})\nu^2\Big)\mathrm{ch}(\pi\gamma B_1)-$$

$$-6(q^2-1)\sqrt{(q^2-1)}\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\Big]\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\Big\}\,;$$

$$B_1(q) = \sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1)}\,,\quad B_2(q) = \sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)}, \tag{2.22}$$

где q – параметр скорости потока газа – единственный действительный корень кубического уравнения (2.10); γ – параметр отношения сторон пластинки, определяемый выражением (2.14); ν – коэффициент Пуассона.

В силу условия (2.11), из выражений (2.22) следует, что $B_1(q) > 0$, $B_2(q) > 0$.

Дисперсионное уравнение (2.16), устанавливающее зависимость собственного значения λ от «существенных» параметров a, b, n, ν, m_c, I_c, q (или V) исходной задачи устойчивости (1.1)-(1.4), не что иное как характеристическое уравнение краевой задачи (2.2)-(2.4). Поэтому для выяснения свойств возмущённого движения системы «пластинка–поток», необходимо изучить характер влияния её параметров на поведение собственных значений λ – корней уравнения (2.16).

Таким образом, анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия прямоугольной пластинки в потенциальном сверхзвуковом потоке газа сводится к исследованию поведения корней характеристического уравнения (2.16) краевой задачи (2.2)–(2.4) в зависимости от «существенных» параметров задачи устойчивости пластинки (1.1)-(1.4).

3. Разбиение пространства параметров системы на области устойчивости и неустойчивости. Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}, \tag{3.1}$$

перепишем характеристическое уравнение (2.16) в виде

$$A_0\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2)\chi_n^{-1}\lambda^2 + \chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_3 = 0,\ \gamma \in (0,\infty),\ \chi_n > 0,\ \delta_n > 0. \tag{3.2}$$

где γ, k_n и A_i, $i=\overline{1,4}$ определяются выражениями (2.14), (2.23) и (2.18)-(2.21) соответственно.

Исследуем поведение корней характеристического уравнения (3.2) в пространстве «существенных» параметров M исходной задачи устойчивости.

Существенное влияние на поведение возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1)-(1.4) оказывают следующие параметры: $\gamma = ab^{-1}$, $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$, коэффициент Пуассона ν, параметр скорости обтекающего пластинку потока газа q и n – число полуволн вдоль стороны b.

Значения остальных («несущественных») параметров принимаются фиксированными.

В пространстве параметров M введём в рассмотрение области M_0, M_1, M_2 и M_3, в которых, соответственно, либо все корни характеристического уравнения (3.2) находятся в левой части комплексной плоскости, либо среди корней имеется один положительный корень, либо имеются два положительных корня, либо имеется пара комплексно-сопряжённых корней с положительной вещественной частью. Ясно, что возмущённое движение системы «пластинка–поток» в области M_0 устойчиво, а в областях M_1, M_2 и M_3 – неустойчиво.

Область устойчивости возмущённого движения пластинки $M_0 \in M$ рассматриваемой динамической системы определяется соотношениями

$$A_0 > 0,\quad k_n A_1 + A_2 > 0,\quad A_3 > 0,\quad \Delta > 0. \tag{3.3}$$

Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.2):

$$\Delta = \Delta(n,\gamma,\nu,k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3. \tag{3.4}$$

При условиях (3.3) уравнение (3.2) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$. При этом пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого состояния равновесия.

Из способа разбиения пространства параметров M задачи на области устойчивости и неустойчивости возмущённого движения пластинки следует, что области неустойчивости M_1, M_2, M_3 определяются, соответственно, следующими соотношениями: $A_0 > 0$, $A_3 < 0$, $\Delta > 0$; $A_0 > 0$, $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, $\Delta > 0$; $A_0 > 0$, $A_3 > 0$, $\Delta < 0$. В области M_1 характеристическое уравнение (3.2) имеет два действительных корня разных знаков и два чисто мнимых корня.

Границами области устойчивости M_0 возмущённого движения прямоугольной пластинки в пространстве её параметров M при условии

$$A_0 > 0, \quad k_n A_1 + A_2 > 0 \tag{3.5}$$

являются гиперповерхности:

$$A_3 = 0, \tag{3.6}$$

$$\Delta = 0. \tag{3.7}$$

На гиперповерхности (3.6) характеристическое уравнение (3.2) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2 и пару чисто мнимых корней, а на гиперповерхности (3.7) – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

На границе области устойчивости M_0

$$A_0 > 0, \quad k_n A_1 + A_2 > 0, \quad A_3 = 0, \quad \Delta > 0 \tag{3.8}$$

возмущённое движение системы теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция. Критические скорости дивергенции $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n, \gamma, \nu)$ – скорости, найденные подстановкой первого корня $q_{cr.div} = q_{cr.div}(n, \gamma, \nu)$ уравнения (3.6) в формулу (2.13), разграничивают области устойчивости M_0 и дивергентной неустойчивости M_1 возмущённого движения прямоугольной пластинки. При значениях скорости потока газа $V \geq V_{cr.div}$, происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ задачи (2.2)–(2.4), вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к дивергентной неустойчивости. Это приводит к соответствующему изменению динамического поведения пластинки: в пластинке, совершающей гармонические колебания, возникают напряжения, приводящие к изменению её формы – пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Так как монотонное «выпучивание» пластинки не имеет колебательного характера, то может рассматриваться как квазистатический процесс, т.е. как дивергенция.

На границе области устойчивости M_0

$$A_0 > 0, \; k_n A_1 + A_2 > 0, \; A_3 > 0, \; \Delta = 0 \tag{3.9}$$

возмущённое движение пластинки теряет динамическую устойчивость: возникает явление панельного флаттера, имеющее характер колебаний по нарастающей амплитуде. Критические скорости флаттера $V_{cr.fl} = V_{cr.fl}(n, \gamma, \nu, k_n)$ – скорости, найденные подстановкой первого корня $q_{cr.fl}$ уравнения (3.7) в формулу (2.13), разграничивают область устойчивости M_0 и область флаттерной неустойчивости M_3. При значениях скорости потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ происходит «мягкий» (плавный) переход от гармонических колебаний к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям.

Легко показать, что в предельном случае, в котором $\gamma \to 0$ ($b \to \infty$), уравнение (3.6) тождественно равно нулю при всех $q > 1$ и ν. Отсюда следует, что невозмущённая форма равновесия пластинки, являясь статически неустойчивой изначально, остаётся такой же и при обтекании её потоком газа. А в предельном случае, в котором $\gamma \to \infty$ ($a \to \infty$), уравнение (3.6) приводится к виду

$$2(q+1)\cdot(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2=0\,,\ \ \gamma\to\infty\,, \tag{3.10}$$

тождественному дисперсионному уравнению, полученному при исследовании явления локализованной дивергентной неустойчивости, возникающее в окрестности свободного края упругой полубесконечной пластины–полосы ($0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа в направлении от свободного края $x=0$ к закреплённой кромке $x=a$ [13]. Это означает, что при значениях скорости потока газа $V \ge V_{loc.div}$ имеет место локализованная дивергенция в окрестности свободного края $x=0$ пластинки, при которой возникают напряжения, приводящие к монотонному «выпучиванию» узкой полосы поверхности пластинки в окрестности её свободного края.

Очевидно, что решение $q_{loc.div}$ уравнения (3.10) зависит только от коэффициента Пуассона ν: $q_{loc.div}=q_{loc.div}(\nu)$. А значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $\tilde{V}_{loc.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ (или $V_{loc.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$), найденные подстановкой $q_{loc.div}$ в формулу (2.12) (или (2.13)), зависят от числа полуволн n и от коэффициента Пуассона ν. При этом приведённая скорость локализованной дивергенции достигает наименьшего значения при значении $n=1$ [13].

Таким образом, критические скорости дивергенции $V_{cr.div}(n,\gamma,\nu)$, панельного флаттера $V_{cr.fl}(n,\gamma,\nu,k_n)$ и локализованной дивергенции $V_{loc.div}(n,\nu)$ возмущённого движения системы «пластинка–поток», соответствующие, соответственно, первым корням $q_{cr.div}=q_{cr.div}(n,\gamma,\nu)$, $q_{fl}=q_{cr.fl}(n,\gamma,\nu,k_n)$ уравнений (3.6), (3.7) и решению $q_{loc.div}=q_{loc.div}(\nu)$ уравнения (3.10), определяются по формулам (2.12) или (2.13) с достаточной точностью.

4. Численные результаты. В данной работе с помощью аналитических методов и методов численного анализа строились семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,k_n)\}$, параметризованных надлежащим образом в многопараметрическом пространстве M задачи. Ограниченность размера статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. В таблицах 1–6 приведены лишь только результаты численных исследований типичных случаев, в которых выделены наиболее представительные из семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,k_n)\}$.

Численные расчёты, проведённые для различных n, показали, что при фиксированных значениях остальных параметров критические скорости дивергенции и панельного флаттера достигают наименьшего значения при значении $n=1$, аналогично критической скорости локализованной дивергенции.

При всех $\gamma \in (0,2)$ имеет место дивергенция панели. Приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr\,div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ зависит от коэффициента Пуассона ν и параметра γ: $V_{cr\,div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, а с возрастанием γ критическая скорость дивергенции растёт (табл. 1, 2).

Таблица 1

ν / γ	0.125	0.25	0.33	0.375	0.5
0.01	$0.345\cdot10^{-2}$	$0.297\cdot10^{-2}$	$0.268\cdot10^{-2}$	$0.243\cdot10^{-2}$	$0.197\cdot10^{-2}$
0.1	0.352	0.306	0.273	0.240	0.197
0.2	1.511	1.290	1.163	1.063	0.882
0.3	3.650	3.324	2.912	2.721	2.619
0.4	7.789	6.758	5.985	5.507	4.478
0.5	14.945	13.503	11.078	10.778	9.056
0.6	26.284	21.790	19.146	18.608	13.889
0.7	45.587	37.826	31.267	29.552	25.011

Как оказалось, начиная с $\gamma = 2$, значения первого корня $q_{cr.div}$ уравнения (3.6) не зависят от параметра γ, а зависят только от коэффициента Пуассона ν. Подставляя значения $q_{cr.div}$ в формулу (2.12), получаем критические скорости дивергенции $V_{cr.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$, которые с точностью порядка 10^{-4} равны критическим скоростям локализованной дивергенции $\tilde{V}_{loc.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$, найденных для различных значений коэффициента Пуассона при исследовании задачи локализованной дивергенции в окрестности свободного края полубесконечной пластины–полосы в работе [13] .

Таблица 2

ν / γ	0.125	0.25	0.33	0.375	0.5
0.9	473.50	96.90	78.72	70.05	53.15
1.0	522.80	157.17	117.21	101.74	70.21
1.2	613.51	320.02	225.85	194.87	133.24
1.4	830.05	495.72	367.77	315.35	214.99
1.5	980.85	595.80	448.61	388.36	269.25
1.6	1166.20	704.47	544.44	470.73	326.25
1.8	1695.90	992.18	762.25	695.12	440.54
2.0	2598.09	1382.02	1045.62	953.53	604.31

Тем самым, при значениях $\gamma \geq 2$ прямоугольная пластинка в потоке газа при скоростях потока $V \geq V_{cr\,div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) \approx \tilde{V}_{loc.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ (табл. 3) теряет статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ прямоугольной пластинки, что аналогично потере статической устойчивости полубесконечной пластины–полосы со свободным краем [13]. Критическая скорость локализованной дивергенции прямоугольной пластинки $V_{cr\,div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ зависит только от коэффициента Пуассона ν: она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл.3).

Таблица 3

ν	0.125	0.25	0.33	0.375	0.5
$V_{loc.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$	324.761	173.371	130.702	120.741	77.398

Отсюда следует, что для значений $\gamma \geq 2$ первый корень $q_{cr.div}$ уравнения (3.6) может быть найден проще, а именно, из уравнения (3.10).

В случае, в котором $n=1$, для значений параметров $\gamma \in [10^{-3}, 0.7]$, $k_1 \in [10^{-4}, \infty)$ и $\gamma \in [0.9, 2.0]$, $k_1 \in [4, \infty)$ при всех $\nu \in (0, 0.5)$ имеет место панельный флаттер. Приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, полученная подстановкой первого корня $q_{cr.fl} = q_{cr.fl}(1, \gamma, \nu, k_1)$ уравнения (3.7) в формулу (2.13), зависит от параметров γ, k_1 и ν. При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ происходит плавный переход из области M_0 в область M_3: возмущённое движение системы от гармонических колебаний «мягко» переходит к колебаниям по нарастающей амплитуде.

При всех $\gamma \in [10^{-3}, 0.3)$ и $k_1 \in [10^{-4}, \infty)$ приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ не зависит от коэффициента Пуассона; критическая скорость флаттера при значениях $\gamma \in [0.3, 0.7]$ и $k_1 \in [10^{-4}, \infty)$ больше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл. 4, 5), а при значениях $\gamma \in [0.9, 2]$ и $k_1 \in [4, \infty)$ она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл.6). Значения критических скоростей флаттера при всех $\gamma \in [0.3, 0.7] \cup [0.9, 2]$, приведённые в табл. 4–6, соответствуют $\nu = 0.33$.

Таблица 4

γ \ k_1	0.0001	0.01	0.1	0.5	1.0
0.01	88.89	131.03	152.89	156.55	157.66
0.1	–	88.01	92.91	124.34	134.81
0.2	–	–	81.41	101.67	116.95
0.3	–	–	108.24	95.76	108.24
0.4	–	–	–	103.02	107.54
0.5	–	–	–	131.35	121.88
0.6	–	–	–	–	151.92
0.7	–	–	–	–	–

При всех $k_1 \in [10^{-4}, \infty)$ критическая скорость флаттера в интервале $\gamma \in [10^{-3}, 0.3)$ убывает (табл.4, 5), а в промежутках $\gamma \in [0.3, 0.7]$ и $\gamma \in [0.9, 2]$ возрастает (табл.6). При этом критическая скорость $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ достигает минимального значения в интервалах $\gamma \in (0.2, 0.3)$ и $\gamma \in [0.9, 1.2]$. К примеру, при значениях $\gamma = 0.9$ и $k_1 = 15$ приведённая критическая скорость флаттера равна $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ ≈ 60.94.

Из сопоставления значений приведённых критических скоростей дивергенции $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и флаттера $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, соответствующим одним и тем же значениям параметров γ и ν, следует, что в промежутке $\gamma \in [10^{-3}, 0.7]$ при всех $k_1 \in [10^{-4}, \infty)$ критическая скорость дивергенции $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, по крайней мере, на порядок больше критической скорости флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл.1,4,5). А в промежутке $\gamma \in [0.9, 2.0]$ при всех $k_1 \in [4, 10^4)$, наоборот, критическая скорость дивергенции $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ примерно на порядок больше критической скорости флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл.2,6). При значениях $\gamma \in [0.9, 1.6]$ и $k_1 \geq 10^4$ критические скорости флаттера и дивергенции равны с точностью порядка 10^{-2}: $V_{cr.fl.}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \geq V_{cr\,div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл.2,6). Это означает, что при значениях $\gamma \in [0.9, 1.6]$ и $k_1 \geq 10^4$ одновременно имеют место потери статической и динамической устойчивости. При значениях $\gamma \in (1.6, 2]$ и $k_1 \geq 10^4$ имеет место только дивергенция, а флаттер отсутствует.

Таблица 5

k_1 / γ	4.0	10.0	15.0	100.0	10000.0
0.01	159.27	160.07	160.23	160.55	–
0.1	148.69	153.42	153.42	158.19	161.40
0.2	140.85	147.05	147.05	159.72	166.19
0.3	136.02	149.96	155.67	170.23	174.68
0.4	138.35	153.39	163.69	182.24	193.13
0.5	146.95	167.19	175.51	201.23	218.98
0.6	157.83	182.11	194.62	226.98	–
0.7	191.48	213.71	227.36	274.54	–

Таблица 6

k_1 / γ	4.0	10.0	15.0	100.0	10000.0
0.9	–	–	60.94	68.27	73.56
1.0	–	71.52	77.01	94.87	105.64
1.2	82.87	116.21	133.07	178.48	206.64
1.4	115.80	196.26	225.82	315.15	352.53
1.5	135.47	250.75	290.78	403.25	446.36
1.6	166.13	311.01	363.25	498.67	541.72
1.8	257.70	472.35	553.33	–	–
2.0	358.15	689.25	–	–	–

В известных основополагающих работах, посвящённых исследованию панельного флаттера в линейной постановке, в случае, в котором имеют место потери устойчивости обоих видов: дивергенция панели и панельный флаттер, как правило, критическая скорость дивергенции панели на порядок меньше критической скорости панельного флаттера при одних и тех же значениях параметров задачи. Тем самым, система «пластинка–поток» теряет статическую устойчивость при более малых скоростях потока газа, нежели динамическую. В данном исследовании, можно сказать, что получен неожиданный результат. При малых значениях параметра отношения сторон $\gamma \in [10^{-3}, 0.7]$ прямоугольной пластинки – пластинка более удлинённая в направлении, перпендикулярном к потоку газа, дивергенция панели имеет место раньше панельного флаттера. А при умеренных значениях параметра $\gamma \in [0.9, 2.0]$ – пластинка почти квадратная – наоборот, флаттер наступает раньше дивергенции.

При больших значениях параметра $\gamma \in [2, \infty)$ – пластинка более удлинённая по направлению потока газа – имеет место только потеря статической устойчивости в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки.

Таким образом, «опасными» границами области устойчивости M_0 в смысле терминологии работы Н.Н. Баутина [5] являются значения параметра $V_{cr.\,fl.}$, разграничивающие область устойчивости M_0 и область флаттерной неустойчивости M_3 (табл. 4–6).

Заключение. Пользуясь аналитическим методом исследования поставленной задачи панельного флаттера, проведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости.

Исследована граница области устойчивости. При этом выявлен ряд новых механических эффектов.

Показана возможность статической потери устойчивости не только в традиционном смысле – в виде дивергенции панели, но и в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края панели.

Найдены критические скорости дивергенции, флаттера и локализованной дивергенции, которые разграничивают область устойчивости и области неустойчивости.

Как оказалось, в зависимости от соотношения параметров задачи критическая скорость флаттера может быть как меньше, так и больше критической скорости дивергенции. Так, при малых значениях параметра отношения сторон панели и при всех значениях параметра отношения инерционных момента поворота и массы имеют место потери устойчивости в виде дивергенции панели и в виде панельного флаттера. При этом критическая скорость дивергенции, примерно, на порядок меньше критической скорости флаттера. А при умеренных значениях параметров отношения сторон панели и отношения инерционного момента поворота и масс, наоборот, критическая скорость дивергенции на порядок больше критической скорости флаттера.

При умеренных значениях параметров отношения сторон панели и достаточно больших значениях параметра отношения инерционных момента поворота и массы критические скорости флаттера и дивергенции равны.

При больших значениях параметра отношения сторон панели имеет место только статическая потеря устойчивости в виде локализованной дивергенции панели в окрестности ее свободного края.

Значения критической скорости флаттера, разграничивающие область устойчивости и область флаттерной неустойчивости определяют «опасные» границы области устойчивости в смысле терминологии работы Н.Н.Баутина [5]. При переходе через них возникает явление панельного флаттера, приводящее к потере прочности и возникновению усталостных трещин в материале пластинки.

Заметим, что решение задач панельного флаттера в линейной постановке позволяет находить скорость потока, при которой невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» перестаёт быть устойчивым по отношению к малым возмущениям и позволяет оценить лишь тенденцию колебаний. Но при этом не удаётся предсказать дальнейшее развитие процесса, в то время, как нелинейная теория позволяет определить характеристики переходного процесса [2,3,14,15]. Несмотря на это, рассмотрение задачи панельного флаттера в линейной постановке, допускающее аналитическое исследование, имеет смысл: её результаты ценны, так как предвосхищают результаты исследования задачи панельного флаттера в нелинейной постановке.

Результаты работы могут быть использованы при исследовании задач панельного флаттера в нелинейной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твёрдых тел. М.: Наука, 1978. Т.11. С. 67–122.
5. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
6. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагружённый следящей силой. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33–44.
7. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.12–42.
8. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the Destabilizing Effect of Constructional Friction in Supports on the Stability of a Plate in a Supersonic Gas Flow. // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 205, № 4, Mart, 2015; 1072-3374/13/1714-01, Springer Science+Business Media New Jork.
9. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об одной задаче устойчивости прямоугольной пластинки с двумя свободными краями в сверхзвуковом потоке газа, набегающим на её свободный край.// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. № 4. С.55–64.
10. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733–755.
11. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. №12. P.1109–1118.
12. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. //Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. № 2. С. 211–222.
13. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.29–34.
14. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. Т.1. №1. С.92–98.
15. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 3. С.24–38

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – к.ф.м.н., проф., главный н.с. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – к.ф.м.н., ведущий н.с. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редацию 18.11.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №1, 2016 Механика
УДК 62-50

COMBINED CONTROL OF GUARANTEED SEARCH FOR A MOVING OBJECT WITH GEOMETRIC CONSTRAINTS

Avetisyan V.V., Stepanyan V.S.

Keywords: guaranteed search, combined control
Բանալի բառեր. Երաշխավորված փնտրում, կոմբինացված ղեկավարում
Ключевые слова: гарантированный поиск, комбинированное управление

Ավետիսյան Վ.Վ., Ստեփանյան Վ.Ս.
Շարժական օբյեկտի երաշխավորած փնտրման կոմբինացված ղեկավարումը երկրաչափական սահմանափակումների դեպքում

Դիտարկվում է հորիզոնական հարթության վրա շարժվող որոնելի օբյեկտի երաշխավորված փնտրման խնդիրը, որի սկզբնական վիճակը հայտնի է տրված բազմության ճշտությամբ: Փնտրումն իրականացվում է եռաչափ տարածության մեջ արագացմամբ ղեկավարվող օբյեկտի կողմից, որի ուղղահայաց կոորդինատի վրա դրված երկրաչափական սահմանափակումն արգելում է փնտրող օբյեկտին բարձրանալ ավելի, քան տրված թույլատրելի բարձրությունը: Մշակվել է կոմբինացված ղեկավարման ալգորիթմ, որի դեպքում որոնելի օբյեկտի երաշխավորված փնտրումն իրագործվում է տարածական հետագծով՝ կազմված ուղղագիծ հատվածներից և կորագիծ հատվածներից՝ մոնոտոն նվազող շառավղներով շրջանագծերի տեսքով: Խնդրի երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի համար ստացվել է պայման, որի դեպքում ղեկավարման առաջարկված ալգորիթմը լուծում է երաշխավորված փնտրման խնդիրը:

Аветисян В.В., Степанян В.С.
Комбинированное управление гарантированным поиском подвижного объекта при геометрических ограничениях

Рассматривается задача гарантированного поиска движущегося на горизонтальной плоскости искомого объекта, начальное состояние которого известно с точностью до заданного множества. Поиск осуществляется в трехмерном пространстве управляемым по ускорению ищущим объектом, на вертикальную координату которого наложено геометрическое ограничение, запрещающее ищущему объекту подниматься выше заданной допустимой высоты. Разработан алгоритм комбинированного управления, при котором гарантированный поиск искомого объекта реализуется по пространственной траектории, состоящей из прямолинейных участков и криволинейных участков в виде окружностей с монотонно убывающими радиусами. Для геометрических и физических параметров задачи получено условие, при котором предложенный алгоритм управления разрешает задачу гарантированного поиска.

In this paper we consider the problem of locating an object moving on a horizontal plane, whose initial position is known to be from a given subset of points of the plane. The search is carried out by the means of accelerating an object through space, which adheres to certain geometrical constraints on the vertical plane such as that the object cannot move past a certain maximum elevation. A combined control algorithm has been developed, that is guaranteed to locate the object by means of a varying linear and curvilinear trajectories, modeled as circles with varying radii. Geometrical and physical parameters have been calculated which allow to solve the problem of guaranteed positioning.

Introduction. The problem of a variation law development of searching object's (SO) controlling acceleration vector limited by absolute value is considered. SO starts three-dimensional motion from a given initial state of rest and has to detect the moving target object (TO) in a finite time. TO's motion is horizontal and controlled by acceleration. The initial state of TO is known to SO up to a given set of uncertainty. The absolute values of the acceleration and the velocity of TO are limited. SO is geometrically constrained, so that it cannot collide with known still obstacles (e.g. ground) or the maximum elevation is limited in case of the object being a flying device. TO is considered to be detected if it lies within the circular base of a cone whose apex's coordinates are the current coordinates of SO. In [1] the time-optimal guaranteed search problem is solved without elevation constraints. A minimax approach was developed which allows to reduce the problem of optimal guaranteed search, i.e. fastest absorption of the domain of uncertainty that is expanding with maximal speed, to the optimal control problem with free right end solved with the Pontryagin's Maximum Principle [2] in the class of control problems with constant acceleration. Nevertheless, the implementation of the approach mentioned in [1] depending on the initial parameters of the searching system seems impossible for the problem of guaranteed search with constraints on elevation (including optimal guaranteed search) due to limited possibilities for detection disk expansion necessary for absorption of TO's uncertainty domain expanding in time. For this reason this paper offers another approach based on development of a combined control algorithm for SO allowing a multi-step search of TO by means of linear and curvilinear regions with monotonically decreasing radii. Other approaches to the related problems see in [3-5].

1. Problem statement. Suppose there are two point objects X and Y, where X is the searching one and Y is the target. X performs three-dimensional motion in the gravitational field of the Earth and Y on the surface of the Earth. The motion equations of the objects can be given in the following form:

$$\begin{aligned} X:\ & \ddot{x}_1 = w_{X1}, \quad \ddot{x}_2 = w_{X2}, \quad \ddot{x}_3 = w_{X3} - g, \\ & x_1(0) = R_0, \ x_2(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \\ & \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0, \ \dot{x}_3(0) = 0, \\ & 0 \le x_3(t) \le h, \ \left| w_{X1} \right| \le W_X, \quad w_X = (w_{X1}, w_{X2}, w_{X3})^{\mathrm{T}}, \quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} Y:\ & \ddot{y}_i = w_{Yi}, \quad i = 1,2, \\ & y_i(0) = y_i^0, \quad \dot{y}_i(0) = \dot{y}_i^0, \ i = 1,2, \\ & \left| \dot{y}(t) \right| \le V_Y, \quad \left| w_Y(t) \right| \le W_Y, \ \dot{y} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)^{\mathrm{T}}, \ w_Y = (w_{Y1}, w_{Y2})^{\mathrm{T}}, \ t \ge 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

In (1.1), (1.2) x_i, y_i – geometrical coordinates of the objects X, Y; w_{Xi}, w_{Yi} – coordinates of controlling accelerations of objects, which are piecewise continuous vector-functions of t; W_X, W_Y – maximal possible values of controlling accelerations w_X, w_Y respectively; V_Y – maximal possible speed of the object Y; h – maximal allowed value of coordinate x_3 of the object X during the motion; g – gravitational acceleration; R_0 – given positive number. The symbols $(\ )^{\mathrm{T}}$ and $|\cdot|$ are the operations of transposition and Euclidian norm of vectors, respectively.

Let us suppose that the only information about the phase coordinates of Y known to X is a given uncertainty set Y belongs to at the initial moment.

$$(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0, \ D_0 = \{y^0 \in R^2 : \left| y^0 \right| \le r_0\}, \ \dot{D}_0 = \{\dot{y}^0 \in R^2 : \left| \dot{y}^0 \right| \le V_Y\}.$$
(1.3)

TO is considered to be detected at the very first moment $t = t^*$, when the following statement is true

$$y(t^*) \in G(x(t^*)), \text{ т.е. } \left| y(t^*) - x_c(t^*) \right| \le l(t^*), \ x_c = (x_{c1}, x_{c2}) \tag{1.4}$$

– i.e. it belongs to the moving circular base of the following cone:

$$G(x(t),C)=\begin{Bmatrix} \xi\in R^2:\ |\xi(t)-x_c(t)|\le l(t)=Cx_3(t) \\ C=|\mathrm{tg}\alpha|,\ 0<|\alpha|<\pi/2 \end{Bmatrix},\quad t\ge 0, \tag{1.5}$$
$$G(x(0),C)=G(x_c(0),x_3(0),C)=G_0,\qquad x(0)=(R_0,0,0).$$

The detecting disk (1.5) of SO (1.1) at the moment t while using all possible piecewise continuous controlling accelerations (admissible controls) $w_X(\tau)$, $|w_X(\tau)|\le W_X$, $0\le\tau\le t$, on the plane (x_1,x_2), represents a disk with a moving center (by means of control $(w_{X1}(t),w_{X2}(t))$ with center $x_c(t)=(x_{c1}(t),x_{c2}(t))$ and varied by using $w_{X3}(t)$ scalar control with $l(t)=Cx_3(t)$: $l(t)>0$ radius when $w_{X3}(t)>0$ and $l(t)<0$ when $w_{X3}(t)<0$.

According to (1.5), at the initial moment the detection disk $G_0=(R_0,0)$ is a point on the axis Ox_1. We assume, that $R_0>r_0$, i.e. initially the uncertainty disk has no intersection with the detection disk:

$$D_0\cap G_0=\varnothing. \tag{1.6}$$

The primary problem. For a given initial state $(x^0,\dot{x}^0)$ and given initial disk of uncertainty D_0 (1.3) and disk of detection G_0 (1.5), satisfying (1.6), find a number $T>0$ and admissible control $w_X(t)$ of object X on the $[t_0,T]$ interval, so that for any initial state $(y^0,\dot{y}^0)$ (1.3) of Y and any admissible control $w_Y(t)$ on the $[t_0,T]$ interval, the detection condition (1.4) is satisfied at some moment t^* not later than T: $t^*\le T$.

We will call the number $T>0$ and the admissible control $w_X(t)$, $0\le t\le T$ of the X guaranteed search time and guaranteeing control, respectively.

For the system (1.1) – (1.6) when solving the time-optimal guaranteed search problem without the constraint on axis x_3 in [1] we introduce the concept of uncertainty domain at moment T: $D(T)$ on the plane (y_1,y_2) is consisting of end points $y(T)=(y_1(T),y_2(T))$ of all trajectories of TO (1.2) for all possible initial states $(y^0,\dot{y}^0)\in D_0\times\dot{D}_0$ and constructed with all kind of piecewise continuous admissible controlling accelerations $w_Y(t)=(w_{Y1}(t),w_{Y2}(t))$, $|w_Y(t)|\le W_Y$, $0\le t\le T$ with a constraint on speed $|\dot{y}(t)|\le V_Y$, $0\le t\le T$.

Considering the above, in [1] an approach is suggested consisting of constructing an admissible control on motion of X, such that the detection disk of SO absorbs the disk of uncertainty (expanding in time) within a minimal guaranteed time T:

$$D(T)\subseteq G(x(T)), \tag{1.7}$$

which ensures the fulfillment of the condition (1.4) at some point $t^*\le T$ in time.

Based on the minimax approach, it was found that for guaranteed detection it is sufficient to consider the case when TO is initially on the boundary of the uncertainty domain (1.3), has no acceleration and has a vector-speed directed radially away from the center of the disk

$$\dot{y}^0=(\dot{y}_1^0,\dot{y}_2^0)=\left(V_Y y_1^0 r_0^{-1},\ V_Y y_2^0 r_0^{-1}\right),\qquad w_Y(t)\equiv 0,\ 0\le t\le T, \tag{1.8}$$

i.e. the radius of the disk $D(t)$ is increasing linearly:

$$r(t) = r_0 + tV_Y \,. \tag{1.9}$$

Thereby the optimal guaranteed search problem was reduced to the problem of optimal control with free right end, which was solved with the Pontryagin's Maximum Principle [2] in the class of problems with constant accelerations. However, in presence of the constraint on the axes x_3 (1.1) in some cases depending on the initial state of the searching system, the implementation of this method of absorption (1.7) seems impossible in the problem of guaranteed (including optimal guaranteed) search, as the possibilities are limited for the detection disk to expand which is necessary when having the conditions (1.8), (1.9). For this reason, this paper offers another approach based on development of a hybrid control algorithm for SO allowing a multi-step search of TO.

2. Fastest maximum elevation reaching step. In this step, SO performs a vertical motion on purpose of reaching the maximum elevation with zero speed at the end of the motion. Such a motion is implemented with the solution of the following optimal performance problem.

Problem 1. Find a controlling acceleration $w^*_{Xi}(t)$, $t \in [0, t_1]$, $i = 1, 2, 3$ (1.1), that ensures the movement of X (1.1) from a given initial state of rest (1.1) to a given terminal state of rest

$$x_1(t_1) = R_0, \;\; \dot{x}_1(t_1) = 0, \;\; x_2(t_1) = 0, \;\; \dot{x}_2(t_1) = 0, \;\; x_3(t_1) = h, \;\; \dot{x}_3(t_1) = 0, \tag{2.1}$$

within the minimal time t_1.

This is a two-point optimal control problem. According to the Pontryagin's Maximum Principle of optimal control [2], providing the quickest transition from one point to another in the phase space is the vector function $w^*_X = (w^*_{X1}(t), w^*_{X2}(t), w^*_{X3}(t))$ with the following components:

$$\begin{aligned} &w^*_{X1} = w^*_{X2} = 0, \qquad 0 \le t \le t_1, \\ &w^*_{X3} = W_X \operatorname{sign}\left[\left(t_1/2 - t\right)h\right], \qquad t_1 = 2\sqrt{hW_X\left[\left(W_X + g\right)\left(W_X - g\right)\right]^{-1}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Thus, the control (2.2) ensures SO to reach maximum elevation $x_3 = h$ with zero terminal speed within minimal time t_1 (2.2). At the time $t = t_1$ the radius of the detection disk reaches a maximum value $l(t_1) = Cx_3(t_1) = Ch$, and the detection disk on the plane Ox_1x_2 takes the following form:

$$G(t_1) = \left\{(x_1, x_2):\; (x_1 - R_0)^2 + x_2^2 = l^2(t_1),\;\; l(t_1) = Cx_3(t_1) = Ch \right\}. \tag{2.3}$$

Since Y in the time interval $0 \le t \le t_1$ can be at a maximum distance from the center of the initial disk of uncertainty, if and only if at the initial time it is on the boundary of the uncertainty set (1.3) and has an initial velocity (1.8), which provides expansion of the disk of uncertainty with the highest rate V_Y (1.9) then at the moment $t = t_1$ it can be located in any point of the circle

$$D(t_1) = \left\{(y_1, y_2):\; y_1^2 + y_2^2 = r_1^2\right\}, \qquad r_1 = r(t_1) = r_0 + V_Y t_1 \,. \tag{2.4}$$

3. Step of fastest contiguation of the detection and uncertainty circles. While X is on the maximum permissible height with the zero-speed state (2.1) at the moment $t = t_1$, it performs a linear horizontal movement along the axis Ox_1 in the direction toward the center of the circle of uncertainty within the time interval $t_1 \le t \le t_2$ until the first contact at $t = t_2$ of the detecting circle $G(t_2)$ and the circle of uncertainty $D(t_2)$.

Since TO within the time interval $t_1 \le t \le t_2$ continues its motion having maximum absolute value of the velocity vector (1.8), then at the time $t = t_2$ it can be anywhere on the boundaries of the uncertainty circle

$$D(t_2) = \left\{(y_1, y_2):\ y_1^2 + y_2^2 = r_2^2\right\}, \tag{3.1}$$

where given (1.9), (2.4) r_2 is calculated as follows:

$$r_2 = r(t_2) = r_1 + V_Y(t_2 - t_1) = r_0 + V_Y t_2 . \tag{3.2}$$

This means that the required motion of SO can be implemented by the control vector $w_X^* = (w_{X1}^*(t), w_{X2}^*(t), w_{X3}^*(t))$, wherein the second and third components are specified as

$$w_{X2}^*(t) = 0\,,\ w_{X3}^*(t) = g\,,\quad t_1 \le t \le t_2 \tag{3.3}$$

and the first component is determined by solving the following optimal control problem.

Problem 2. Find an optimal control $w_{X1}^*(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ which satisfies the constraint

$$\left|w_{X1}(t)\right| \le \sqrt{W_X^2 - g^2} \tag{3.4}$$

(given (1.1), (3.3)) and along with given control constants (3.3) provides the displacement of the X from a rest state (2.1) to the terminal rest state

$$\begin{aligned} &x_1(t_2) = r_0 + V_Y t_2 + Ch, \quad x_2(t_2) = 0, \quad x_3(t_2) = h, \\ &\dot{x}_1(t_2) = 0, \quad \dot{x}_2(t_2) = 0, \quad \dot{x}_3(t_2) = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

within a minimal time $t_2 - t_1$.

Note that the first two boundary conditions in (3.5) can also be written in the form $x_1(t_2) = r_2 + Ch = y_1(t_2) + Ch$, $x_2(t_2) = y_2(t_2) = 0$ in view of (3.1), (3.2), express the situation of outside contact between the circles G and D at time t_2.

Since with the given controls (3.3) the system (1.1) does not move by the coordinates x_2, x_3 (with boundary conditions (2.1) and (3.5)), then the problem 2 is reduced to one-dimensional (regarding the coordinate x_1) problem of optimal control with free right end:

$$\ddot{x}_1 = w_{X1}, \quad x_1(t_1) = R_0, \quad \dot{x}_1(t_1) = 0, \quad x_1(t_2) = r_0 + V_Y t_2 + Ch, \quad \dot{x}_1(t_2) = 0\,. \tag{3.6}$$

Solving (3.6) as a two-point optimal problem, analytical expressions for the optimal control and the corresponding minimum travel time is found:

$$w_{X1}^* = \sqrt{W_X^2 - g^2}\,\mathrm{sign}\left\{\left[\left(t_2 + t_1\right)/2 - t\right]\left(r_0 + V_Y t_2 + Ch - R_0\right)\right\}, \tag{3.7}$$

$$t_2 = t_1 + 2\left[-\frac{V_Y}{\sqrt{W_X^2 - g^2}} + \sqrt{\frac{V_Y^2}{W_X^2 - g^2} + \frac{R_0 - Ch - r_0 - V_Y t_1}{\sqrt{W_X^2 - g^2}}}\right], \tag{3.8}$$

where t_1 is calculated according to (2.2).

Thus, at the moment $t = t_2$, in the state (3.5) of the object X, the circle of the detecting disk

$$G(t_2) = \left\{(x_1, x_2) :\ [x_1 - x_1(t_2)]^2 + x_2^2 = l^2(t_2),\ \ l(t_2) = Cx_3(t_2) = Ch\ \right\} \tag{3.9}$$

contacts the circle of uncertainty (3.1), (3.2) inside.

4. Helper problem. Starting at moment $t = t_2$ (3.8), when SO is in the rest state (3.5) and the detection disk (3.9) and the uncertainty disk (3.1) are in contact, SO performs the search via flat motion $x_3 = h$ and the detection disk has a constant radius $l = Cx_3(t) \equiv Ch$, $t \geq t_2$. Taking into account the equations of motion (1.1) and (3.5) for the x_3 coordinate and the velocity $\dot{x}_3$ at the moment $t = t_2$, X carries such a motion with

$$w^*_{X3}(t) \equiv g, \quad t \geq t_2. \tag{4.1}$$

It follows that only the flat movement of the X which is defined by the first two equations (1.1) is a subject to review. We introduce the polar coordinate system (ρ, φ, O) so that the pole O is in the center of the disk of uncertainty, and the polar axis runs through the center of the detection disk having coordinates (3.5) at the moment $t = t_2$. In the first two equations we switch to polar coordinates ρ, φ associated with the original Cartesian coordinates x_1, x_2 with the following relations:

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \quad x_2 = \rho\sin\varphi. \tag{4.2}$$

The equations of the plane motion of SO (1.1), represented in polar coordinates are as follows:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = w_\rho, \quad \frac{d}{dt}(\rho\dot{\varphi}) = w_\varphi, \tag{4.3}$$

where w_ρ and w_φ are radial and tangential components of acceleration of the X, respectively. They are associated with the first two components of the vector of controlling acceleration $w_X = (w_{X1}, w_{X2}, w_{X3})$ as follows:

$$w_{X1} = w_\rho\cos\varphi - w_\varphi\sin\varphi, \quad w_{X2} = w_\rho\sin\varphi + w_\varphi\cos\varphi. \tag{4.4}$$

In view of (4.1), (4.4) the constraint on the absolute value of controlling acceleration (1.1) takes the form

$$\sqrt{w_{X1}^2 + w_{X2}^2} = \sqrt{w_\rho^2 + w_\varphi^2} \leq \sqrt{W_X^2 - g^2}, \quad t \geq t_2, \tag{4.5}$$

and the initial conditions (3.5) will be

$$\rho(t_2) = r_2 + Ch, \quad \dot{\rho}(t_2) = 0, \quad \varphi_2(t_2) = 0, \quad \dot{\varphi}(t_2) = 0. \tag{4.6}$$

For the detection of TO, SO carries a circular motion around the center O with a radius $\rho(t_2) = \text{const}$ by choosing a direction for the encircling maneuver, which actually is the positive direction of the reference polar angle.

Then, motion controls (4.2) will be

$$-\rho(t_2)\dot{\varphi}^2 = w_\rho, \quad \rho(t_2)\ddot{\varphi} = w_\varphi, \tag{4.7}$$

Let us find the variation laws for the controlling accelerations $w_\rho(t)$ and $w_\varphi(t)$ which satisfy the constraint (4.5), while moving circumferentially with the constant radius

$\rho(t_2)$ according to the equations (4.7), the center of the detection disk goes from the state of rest (3.6) to the state of rest

$$\rho(t_*) = r_2 + Ch, \quad \dot{\rho}(t_*) = 0, \quad \varphi_2(t_*) = 0, \quad \dot{\varphi}(t_*) = 0. \tag{4.8}$$

within a minimal time $t_* - t_2$.

The required controls $w_\rho(t)$ and $w_\varphi(t)$ are as follows. Constraining the tangential control acceleration:

$$\left|w_\varphi(t)\right| \le \varepsilon, \quad t \in [t_2, t_*], \tag{4.9}$$

where $\varepsilon > 0$ and t_* – are unknown constant and time respectively.

First, from the two-point optimal control problem (4.6) - (4.9) we determine the optimal controlling tangential acceleration w_φ. The maximum principle implies that the desired control is an on-off control with the switching point $t = \tau$:

$$w_\varphi = \varepsilon \operatorname{sign}\left[2\pi(\tau - t)\right], \quad \tau = (t_* + t_2)/2, \quad t_* = t_2 + 2\sqrt{2\pi\rho(t_2)\varepsilon^{-1}}. \tag{4.10}$$

Then, by integrating the second equation (4.7) with the control (4.10) and the boundary conditions (4.6), (4.8), we find the function of the angular velocity of the time $\dot{\varphi}(t)$, and after applying it in the first equation (4.7), we find the variation of the radial acceleration of the time

$$w_\rho(t) = \begin{cases} \varepsilon^2 (t - t_2)^2 \rho^{-1}(t_2), & t_2 \le t \le \tau, \\ \varepsilon^2 (-t + 2\tau - t_2)^2 \rho^{-1}(t_2), & \tau \le t \le t_*. \end{cases} \tag{4.11}$$

The concave and continuous function (4.11) produces zeros on the ends of the interval $t_2 \le t \le t_*$: $w_\rho(t_2) = w_\rho(t_*) = 0$. In the interval $t_2 \le t \le t_*$ it monotonically increases and in the interval $\tau \le t \le t_*$ it monotonically decreases, producing the maximal value on the middle $\tau = (t_* + t_2)/2$ of the interval:

$$\max_{t_2 \le t \le t_*} w_\rho(t) = w_\rho(\tau)\Big|_{\tau = (t_* + t_2)/2} = \varepsilon^2 (t_* - t_2)^2 \rho^{-1}(t_2)/4 \Big|_{t_* - t_2 = 2\sqrt{2\pi\rho(t_2)\varepsilon^{-1}}} = 2\pi\varepsilon. \tag{4.12}$$

From (4.9) and (4.12) follows

$$w_\rho^2(t) + w_\varphi^2(t) < 4\pi^2\varepsilon^2 + \varepsilon^2, \quad t_2 \le t \le t_*. \tag{4.13}$$

By virtue of (4.13), in $t_2 \le t \le t_*$ the constraint (4.5) is ensured, if the following inequality is satisfied for $\varepsilon > 0$:

$$4\pi^2\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \le W_X^2 - g^2. \tag{4.14}$$

The solution of the inequality (4.14) is

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\left(W_X^2 - g^2\right)\left(4\pi^2 + 1\right)^{-1}}. \tag{4.15}$$

Thus, $\varepsilon = \varepsilon_0$ (4.15) is the maximal value when the constraint (4.14) is not violated where the time t_* and control (4.10) are optimal:

$$t_* = t_2 + 2\sqrt{2\pi\rho(t_2)\varepsilon_0^{-1}}, \quad w_\varphi = \varepsilon_0 \operatorname{sign}\left\{2\pi\left[(t_* + t_2)/2 - t\right]\right\}. \tag{4.16}$$

Moving with maximal velocity V_Y, SO being on some point of circle $D(t_2)$ (3.1) at the moment $t = t_2$, within the time $t_* - t_2$ will pass a distance $V_Y(t_* - t_2)$ and at the moment $t = t_*$ can be maximally displaced from the origin, i.e. on some point of circle $D(t_*) = \left\{(y_1, y_2):\ y_1^2 + y_2^2 = r_*^2\right\}$ with the radius $r_* = r_2 + V_Y(t_* - t_2)$. From this and (4.16) follows, that if the condition

$$r_* - r_2 = 2V_Y\sqrt{2\pi\rho(t_2)\varepsilon_0^{-1}} < 2Ch\,, \tag{4.17}$$

is satisfied, then within the optimal time of one full rotation of SO around the center O, TO does not have enough time to leave the circular ring with width $2l = 2Ch$ and stay undetected.

5. Combined control algorithm. Suppose that for the given initial parameters $r_0, R_0, C, h, V_Y, W_X, g$ at time $t = t_2$ the condition (4.17), written in the form

$$\sqrt{2\pi\rho(t_2)\varepsilon_0^{-1}} < ChV_Y^{-1} \tag{5.1}$$

is satisfied.

Starting from $t = t_2$, with the tangential acceleration equal to zero $w_\varphi = 0$, SO moves as fast as possible along the axis Ox_1 in the direction of the pole O from the state (4.6)((3.5)) performing a displacement $\Delta x_1^{(1)} > 0$ (defined below). Using (4.4) and the following controls

$$w_{X1}^*(t) = -\sqrt{W_X^2 - g^2}\,\mathrm{sign}\left\{\left[\left(t_3 + t_2\right)/2 - t\right]\Delta x_1^{(1)}\right\}, \tag{5.2}$$

$$w_{X2}^*(t) = 0\,,\quad w_{X3}^*(t) = g\,,\qquad t_2 \le t \le t_3\,,\qquad t_3 = t_2 + 2\sqrt{\Delta x_1^{(1)}\left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2}}$$

X will make the below transition to the state of rest within a minimum time $t_3 - t_2$:

$$x_1(t_3) = \rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}\,,\quad x_2(t_3) = 0\,,\quad \dot{x}_1(t_3) = 0\,,\quad \dot{x}_2(t_3) = 0\,. \tag{5.3}$$

Meanwhile, during the time $t_3 - t_2$ the uncertainty disk of TO (moving with V_Y velocity) will expand and its radius reaches the value

$$r(t_3) = r_3 = r_2 + V_Y(t_3 - t_2) \tag{5.4}$$

at the moment $t = t_3$.

We require that at time $t = t_3$ the right point $(r(t_3), 0)$ of intersection of the circle of uncertainty with the axis Ox_1 be more left than the right point $(x(t_3) + Ch, 0)$ of intersection of the circle of detection with the axis Ox_1: $r(t_3) < x_1(t_3) + Ch$, i.e. with (5.3), (5.4) the following condition to be satisfied

$$V_Y(t_3 - t_2) < 2Ch - \Delta x_1^{(1)}. \tag{5.5}$$

The inequality (5.5) sets a constraint on desired value for $\Delta x_1^{(1)} > 0$ and after replacement of $t_3 - t_2$ with (5.2) it is reduced to the following inequality:

$$\Delta x_1^{(1)} + 2V_Y\sqrt{\left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2}}\sqrt{\Delta x_1^{(1)}} - 2Ch < 0\,, \tag{5.6}$$

and the solution is

$$\Delta x_1^{(1)} \in (0,\ a), \quad a = \left[-V_Y \sqrt{\left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2}} + \sqrt{V_Y^2 \left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2} + 2Ch} \right]^2 . \quad (5.7)$$

If during the time $t_3 - t_2$ the detection of Y is not happening, then at $t = t_3$ being in the state (5.3), for which $\Delta x_1^{(1)}$ is from the interval (5.7), SO performs a fastest possible rotation with the constant radius $\rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}$ in the way described in the section 4 from the rest state

$$\rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}, \quad \dot{\rho}(t_3) = 0, \quad \varphi(t_3) = 0, \quad \dot{\varphi}(t_3) = 0 \quad (5.8)$$

to the terminal state of rest

$$\rho(t_4) = \rho(t_3) = \rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)}, \quad \dot{\rho}(t_4) = 0, \quad \varphi(t_4) = 2\pi, \quad \dot{\varphi}(t_4) = 0 \quad (5.9)$$

within a minimal possible time $t_4 - t_3$.

SO performs such a relocation with the tangential (4.16) and radial (4.11) control accelerations, also with the control (4.1), related to the time interval $t_3 \le t \le t_4$:

$$w_\varphi = \varepsilon_0 \mathrm{sign}\left\{2\pi\left[\left(t_4 + t_3\right)/2 - t\right]\right\}, \qquad t_4 = t_3 + 2\sqrt{2\pi\rho(t_3)\varepsilon_0^{-1}}\ , \quad (5.10)$$

$$w_\rho(t) = \begin{cases} \varepsilon_0^2 \left(t - t_3\right)^2 \rho^{-1}(t_3), & t_3 \le t \le \tau_4, \\ \varepsilon_0^2 \left(-t + 2\tau_4 - t_3\right)^2 \rho^{-1}(t_3), & \tau_4 \le t \le t_4, \end{cases} \qquad \tau_4 = \left(t_3 + t_4\right)/2 .$$

$$w_{X3}^*(t) = g, \quad t_3 \le t \le t_4,$$

where $\rho(t_3)$ and ε_0 are deduced from (5.8) and (4.15), respectively.

Given the constraint (5.7), the desired value for $\Delta x_1^{(1)}$ will be determined from the following equation:

$$r_3 + (t_4 - t_3)V_Y = r_2 + 2Ch - \Delta x_1^{(1)}, \quad (5.11)$$

which, using (5.2), (5.4) and (5.10) is transformed to

$$2V_Y \sqrt{2\pi(\rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)})\varepsilon_0^{-1}} = 2Ch - 2V_Y \sqrt{\Delta x_1^{(1)} \left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2}} - \Delta x_1^{(1)} . \quad (5.12)$$

Here, the value of $\rho(t_2)$ using (2.2) (3.2) (3.8) (4.6) is expressed in terms of the given known parameters $r_0, R_0, C, h, V_Y, W_X, g$ of the problem.

With the condition (5.1), the equation (5.12) is solvable against $\Delta x_1^{(1)}$ on the interval (5.7). Solving it, we find the value for $\Delta x_1^{(1)}$ wherein during the full rotation time $t_4 - t_3$ around O, TO moving with constant velocity from the boundary of the uncertainty disk, will be detected. The radius of the disk will be:

$$r(t_3) = r_3 = r_2 + 2V_Y \sqrt{\Delta x_1^{(1)} \left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2}} . \quad (5.13)$$

Thus, if no detection of TO (1.4) occurs at any moment $t^* \in [t_2, t_4]$ of the time interval $t_2 \le t \le t_4$, then the execution of the combined control (5.2), (5.10) during the time $t_4 - t_2$ results to reduction of the diameter $r_2 = r(t_2)$ of the uncertainty domain by $\Delta x_1^{(1)}$; $0 < \Delta x_1^{(1)} < Ch < r_2$, i.e. the uncertainty domain of TO at time $t = t_4$ is contained in a circle with a radius

$$r_4 = r(t_4) = r_2 - \Delta x_1^{(1)} > 0, \qquad 0 < r_4 < r_2. \tag{5.14}$$

Here, the following cases are possible:

$$\text{a) } r(t_4) = r_4 < Ch, \qquad \text{b) } r(t_4) = r_4 \geq Ch. \tag{5.15}$$

In case of (5.15)(a), let us find a condition, for which the controls

$$w_{X1}^* = -\sqrt{W_X^2 - g^2}, \quad w_{X2}^* = 0, \quad w_{X3}^* = g, \qquad t \geq t_4, \tag{5.16}$$

of linear motion along the axis Ox_1 from the state (5.9)(recorded in Cartesian coordinates (4.2)), ensure satisfaction of the absorption condition (1.7) not later than some finite time T .

First, we integrate the equation (1.1) given the controls (5.16) and initial conditions (5.9)((4.2)). Then, the resulting expressions for $t = T$ we put in the final terms

$$x_1(T) - Ch = y_1(T), \qquad x_1(T) \geq 0, \qquad y_1(T) = -r_4 - V_Y(T - t_4), \tag{5.17}$$

describing the relative position of the disks $G(x(T))$ and $D(T)$ [1], corresponding to the absorption condition (1.7) [1].

The relations (5.17) can also be represented as the following system against the parameter $T > 0$:

$$\begin{gathered} w_{X1}^* T^2 + V_Y T + R_4 = 0, \quad w_{X1}^* T^2 - w_{X1}^* t_4^2 - 2w_{X1}^* t_4 + 2r(t_4) \geq 0, \\ R_4 = -w_{X1}^* t_4^2 - 2w_{X1}^* t_4 + 4r(t_4) - 2_Y t_4. \end{gathered} \tag{5.18}$$

If (5.18) is solvable against $T > 0$, then the controls (5.16) are guaranteeing on the interval $t_4 \leq t \leq T$, and the time T (minimal positive root of the equation (5.18)) is the guaranteed search time, since at this point the boundary condition (5.17) is satisfied, which is equivalent to the absorption condition (1.7) and detection condition (1.4).

If (5.18) is not solvable, then in both (5.15)(a) and (b) cases, starting from the moment $t = t_4$ secondarily applying the controls (5.2) and (5.10) related to intervals $t_4 \leq t \leq t_5$ and $t_5 \leq t \leq t_6$, respectively, will give

$$r_6 = r(t_6) = r_4 - \Delta x_1^{(2)}, \tag{5.19}$$

where $\Delta x_1^{(2)}$ is determined from the following equation:

$$r_5 + (t_6 - t_5)V_Y = r_4 + 2Ch - \Delta x_1^{(2)}, \qquad \Delta x_1^{(2)} \in (0, a). \tag{5.20}$$

The equation (5.20) with the help of similar forumals (5.2), (5.4), (5.10), related to differences ($t_5 - t_2$), ($r_5 - r_4$), ($t_6 - t_5$), respectively, is recorded as

$$2V_Y\sqrt{2\pi\left(\rho(t_2) - \Delta x_1^{(1)} - \Delta x_1^{(2)}\right)\varepsilon_0^{-1}} = 2Ch - 2V_Y\sqrt{\Delta x_1^{(2)}\left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2}} - \Delta x_1^{(2)}, \tag{5.21}$$

$$\Delta x_1^{(2)} \in (0, a).$$

where $\Delta x_1^{(1)}$ is determined in the previous step on the interval $t_2 \leq t \leq t_4$.

According to (5.15), considering the following possible cases. In case of (5.15)(a), if the solution $\Delta x_1^{(2)}$ of the equation (5.21) satisfies the inequality

$$r_4 \leq \Delta x_1^{(2)} < Ch, \tag{5.22}$$

then from (5.19) follows, that $r_6 = r(t_6) = r_4 - \Delta x_1^{(2)} \leq 0$, i.e. the absorption of the uncertainty domain by the detection domain happens at the moment $t = t_6$.

In case of (5.15)(a), if the solution $\Delta x_1^{(2)}$ of the equation (5.21) satisfies the inequality

$$0 < \Delta x_1^{(2)} < r_4 < Ch\,, \tag{5.23}$$

i.e.

$$r_6 = r(t_6) = r_4 - \Delta x_1^{(2)} > 0 \tag{5.24}$$

on the interval $t_4 \le t \le t_6$ no detection occurs, then the uncertainty domain at moment $t = t_6$ is contained in a disk with diameter $r(t_6) = r_6 < r_4$, moreover, as it follows from (5.19), (5.24) and equations (5.12), (5.21) with the condition (5.1)

$$\Delta x_1^{(1)} = r_2 - r_4 < r_4 - r_6 = \Delta x_1^{(2)}\,. \tag{5.25}$$

Similarly to the case (5.15)(a), we can use the control (4.1) when $t \ge t_6$ and from the equation (5.18), where t_4 is replaced with t_6, we can find the guaranteed absorption time, if (5.18) is solvable against $T > 0$. Otherwise, and also in case of (5.15)(b), if on the interval $t_4 \le t \le t_6$ no detection happens and

$$0 < \Delta x_1^{(2)} < Ch \le r_4\,, \tag{5.26}$$

then at $t = t_6$ the relations (5.25) are relevant again. Then we move to the next step of the combined control and so on, until one of the conditions (5.22) or (5.23) related to the current step are satisfied.

Suppose that at moment $t = t_{2n}$, $n \ge 3$ before the n-th step, no detection has happened during the time $t_{2n-2} \le t \le t_{2n}$ and therefore, the execution of the combined control on the interval $t_{2n-2} \le t \le t_{2n}$ resulted to reduction of the radius $r_{2n-2} = r(t_{2n-2})$ of the uncertainty circle by $\Delta x_1^{(n-1)}$, $0 < \Delta x_1^{(n-1)} < Ch$, i.e. the uncertainty domain of TO at moment $t = t_{2n}$ is contained in a disk with the

$$r_{2n} = r(t_{2n}) = r_{2n-2} - \Delta x_1^{(n-1)}, \quad r_{2n-2} > r_{2n}, \quad n \ge 3\,. \tag{5.27}$$

Starting from the time $t = t_{2n}$ by applying the controls (5.2), (5.10) successively on time intervals $t_{2n} \le t \le t_{2n+1}$ и $t_{2n+1} \le t \le t_{2n+2}$, respectively, we get

$$r_{2n+2} = r(t_{2n+2}) = r_{2n} - \Delta x_1^{(n)}, \quad r_{2n} > r_{2n+2}, \quad n \ge 3\,, \tag{5.28}$$

where $\Delta x_1^{(n)}$ is determined from equation

$$r_{2n+1} + (t_{2n+2} - t_{2n+1})V_Y = r_{2n} + 2Ch - \Delta x_1^{(n)}, \quad n \ge 3\,,$$

recorded as

$$2V_Y\sqrt{2\pi\left(r_2 + Ch - \sum_{i=1}^{n}\Delta x_1^{(i)}\right)\varepsilon_0^{-1}} = 2Ch - 2V_Y\sqrt{\Delta x_1^{(n)}\left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2}} - \Delta x_1^{(n)}, \tag{5.29}$$

$$\Delta x_1^{(n)} \in (0, a), \quad n \ge 3,$$

with the help of similar to (5.10), (5.2), (5.8) recurrence formulas:

$$t_{2n+2} = t_{2n+1} + 2\sqrt{2\pi\rho(t_{2n+1})\varepsilon_0^{-1}}\,, \quad t_{2n+1} = t_{2n} + 2\sqrt{\Delta x_1^{(n)}\left(W_X^2 - g^2\right)^{-1/2}}\,, \tag{5.30}$$

$$\rho(t_{2n+1}) = \rho(t_{2n}) - \Delta x_1^{(1)} = r_2 + Ch - \sum_{i=1}^{n}\Delta x_1^{(i)}$$

Since, as if follows from (5.25), we have the recurrence relations

$$0 < r_{2n-2} - r_{2n} = \Delta x_1^{(n-1)} < \Delta x_1^{(n)} = r_{2n} - r_{2n+2} < Ch\,, \qquad n \ge 3\,, \tag{5.31}$$

then $0 < \Delta x_1^{(1)} < ... < \Delta x_1^{(n)} < Ch$ and the search process ends at such n, when $r_{2n} \le \Delta x_1^{(n)} < Ch$ or $\Delta x_1^{(n)} < r_{2n} \le Ch$. In the first case, $r_{2n+2} = r_{2n} - \Delta x_1^{(n)} \le 0$, i.e the absorption of the uncertainty domain by the detection disk is happening at time $t = t_{2n+2}$, and the detection of TO is occurring at some point of time on the interval $t_{2n} \le t \le t_{2n+2}$. In the second case, the uncertainty domain at time $t = t_{2n+2}$ is contained in a circle with radius $r(t_{2n+4}) = r_{2n+4} < r_{2n+2}$ and the controls (5.16) related to current time interval $t_{2n} \le t \le T$ (where T is the minimal positive root of the equation (5.18) written for the time t_{2n}) lead to the achievement of the absorption condition.

Here is an example of numerical implementation of the search control algorithm (5.27) - (5.31) for the system (1.1) - (1.6) with the following parameters

$$W_X = 100\,\text{ms}^{-2},\ V_Y = 5\,\text{ms}^{-1},\ r_0 = 25\,\text{m},\ h = 50\,\text{m}, \tag{5.32}$$
$$R_0 = 5000\,\text{m},\quad g = 9.8\,\text{ms}^{-2},\qquad C = 1\,.$$

First, for the parameters (5.32), with formulas (2.2), (2.4), (3.8), (3.2), (4.6), (5.18) the values $t_1 = 1,42$ s, $r_1 = 32,10$ m, $t_2 = 15,38$ s, $r_2 = 101,90$ m, $\rho(t_2) = 126,90$ m, $\varepsilon_0 = 15.64$ ms^{-2} were calculated, respectively and it has been established the feasibility of the condition (5.1), which by the proposed control algorithm ensures the detection of TO within a finite time. The calculation results showed that starting from time t_2 the search process, followed by detection of TO is carried out in three phases with combined control in the form of controls (5.2) (5.10) related to each step:

$$\text{Step-1}$$
$$15,38\text{s} = t_2 \le t \le t_4 = 30,72\text{s},\ \ \Delta x_1^{(1)} = 23.29\text{m},\ \ r_4 = r_2 - \Delta x_1^{(1)},\ \ r_2 = 101,90\text{m} \to r_4 = 78,61\text{m},$$
$$\text{Step-2}$$
$$30,72\text{s} = t_4 \le t \le t_6 = 44,31\text{s},\ \ \Delta x_1^{(2)} = 32.04\text{m},\ \ r_6 = r_4 - \Delta x_1^{(2)},\ \ r_4 = 78,62\text{m} \to r_6 = 46,58\text{m},$$
$$\text{Step-3}$$
$$44,31\text{s} = t_6 \le t \le t_8 = 54,43\text{s},\ \ r_8 = r_6 - \Delta x_1^{(3)},\ \ \Delta x_1^{(3)} = 49,44\text{m},\ \ r_6 = 46,57\text{m} \to r(t_8) = 0.$$

The table shows that the uncertainty domain of TO narrows after each step (the radius of the circle containing this region is reduced) and at the end of the third step it disappears. Consequently, at time $t_8 = 54,43$s the uncertainty domain is absorbed by the detection circle, i.e. the detection of TO happens not later than the guaranteed search time $T = t_8$.

Conclusion. For the problem of a guaranteed search of a moving object, a constructive combined control algorithm is developed, which allows the searching object moving in a fixed-height horizontal plane of a three-dimensional space to perform the search of the target object within a finite time. Using the produced guaranteeing controls in an explicit form, the search, followed by the detection of the target object is carried out on the spatial trajectory consisting of linear sections and curvilinear sections in a form of circles with monotonically decreasing radii.

References

1. Avetisyan V.V., Stepanyan V.S. Optimal guaranteed dynamic search of mobile object on the plane // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, Volume 68 (2015). Issue 4. P. 45-61.
2. Pontryagin L.S. and others. The mathematical theory of optimal processes. – M: Nauka. 1988. 344 p.
3. Chernousko F.L. Controlled search of movable object // PMM. 1980. Volume 44. Issue 1. P. 3-12.
4. Melikyan A. A. The problem of time-optimal with the search for a target point // PMM. 1990. Volume 54. Issue 1. P. 3-11.
5. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A. Optimal search in conflict situations. – Leningrad University. 1987. 75p.

About authors:

Vahan Avetisyan – Dr., Professor, Department of Mathematics and Mechanics, YSU,
Tel.: (+374 94) 44 95 60;
E–mail: vanavet@yahoo.com

Vahan Stepanyan – Ph.d student of the Faculty of Mathematics and Mechanics, YSU,
Tel.: (+374 98) 900846;
E–mail: nop144d@gmail.com

Received 25.12.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №1, 2016 Механика

УДК 517. 934

THE PROBLEM OF THE OPTIMAL STABILIZATION OF THE SPINNING TOP MOTION

Shahinyan S.G., Rezaei M.

Keywords: Dynamical Systems, Optimal Control, Optimal Stabilization.
Ключевые слова: Динамические системы, оптимальное управление, оптимальная стабилизация.
Բանալի բառեր՝ դինամիկ համակարգեր, օպտիմալ ղեկավարում, օպտիմալ ստաբիլացում

Шагинян С.Г., Резаи М.

Задача оптимальной стабилизации вращательного движения волчка

В настоящей работе рассматривается задача оптимальной стабилизации вращательного движения волчка в линейном приближении. По направлениям соответствующих обобщенных координат введенны управляющие воздействия, проверена полная управляемость линейного приближения полученной системы управления. Решена задача оптимальной стабилизации этой системы на классическом смысле. Потом предполагается, что на волчок на конечном интервале времени действуют интегрально малые возмущающие силы. Поставлена и решена задача оптимальной стабилизации и в этом случае. Для обоих случаев построены оптимальные функции Ляпунова и оптимальные управляющие воздействия, получены оптимальные значения минимизируемых функционалов. Сравнение оптимальных значений минимизируемых функционалов показало, что затраченная энергия в случае оптимальной стабилизации при интегрально малых возмущениях меньше, чем при решении этой задачи в классическим методом.

Շահինյան Ս.Գ., Ռեզայի Մ.

Հոլի պտտական շարժման օպտիմալ ստաբիլացումը

Աշխատանքում դիտարկվում է հոլի պտտական շարժման օպտիմալ ստաբիլացման խնդիրը գծային մոտավորությամբ: Համապատասխան ընդհանրացված կոորդինատների ուղղությամբ ներմուծելով ղեկավարող ազդեցություններ, ստուգված է ստացված ղեկավարվող համակարգի գծային մոտավորության լրիվ ղեկավարելիությունը և լուծված է այդ համակարգի համար օպտիմալ ստաբիլացման խնդիրը: Այնուհետև ենթադրված է, որ հոլի վրա ժամանակի վերջավոր միջակայքում ազդում են ինտեգրալով փոքր գրգռող ուժեր: Ձևակերպված և լուծված է նաև օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիրը այդ դեպքում: Երկու դեպքերի համար էլ կառուցված են Լյապունովի օպտիմալ ֆունկցիաները և օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները՝կախված համակարգի պարամետրերից: Ստացված են մինիմիզացվող ֆունկցիոնալների օպտիմալ արժեքները, որոնց համեմատությունը ցույց է տվել, որ ինտեգրալով փոքր գրգռումների դեպքում օպտիմալ ստաբիլացման ժամանակ ծախսվող էներգիան ավելի փոքր է, քան դասական իմաստով այդ խնդիրը լուծելիս:

The present work considers the optimal stabilization problem in motion of a Spinning Top when integrally small perturbations act during a finite interval of time. The optimal stabilization problem of considered motion is assumed and solved. In direction of the generalized coordinates introduced input controls, fully controllability of linear approximation of the obtained control system is checked up and the optimal stabilization problem of this system on classical sense is solved. Then, the problem will be limited to one input control, it is shown that the considered system is not fully controllable and for this case the optimal stabilization problem under integrally small perturbations of mentioned system is solved. For both cases optimal Lyapunov function is constructed, the optimal controls and the optimal value of performance index are obtained. The comparison between the optimal values of performance indexes proves that energy consumption at stabilization under integrally small perturbations is less than solving that issue in classical sense.

1.Introduction

Studies in the theory of optimal stabilization problem have begun from analytical design of regulators assumed by A.M. Letov [1-5]. Solution of the problem in this formulation is obtained by the classical variational method. To solve the problems of optimal stabilization, N.N. Krasovskii [6] proved the fundamental theorem of Lyapunov's second method, which is a connection method between Bellman dynamic programming [7] and the theorem of Lyapunov asymptotic stability. In [8], the problem of stabilizing controllers design in unstable motion of control system is considered. In [9, 10], the problem of stabilization of nonlinear control systems is studied. Like, the theory of stability, analogous to the theory of Lyapunov stability in the first approximation is developed [9], and, the problem of the minimization of the integral quality estimation for small initial perturbations is solved [10]. Rumyantsev [11] has carried out the task of optimal stabilization with respect to the variables, and has proved a theorem, that generalizes the fundamental theorem of optimal stabilization of all variables. In [12], the solution of stabilization problems and optimal stabilization of unstable motion of control system with sign-constant Lyapunov function usable state space has proved. Problem of stabilizing systems with alternate control is discussed in [13]. Using of alternate control imposes an additional condition for stabilizing control. It was shown, it should provide not only the asymptotic stability of the motion $q=0$ but also the absence of sliding modes in the system $\dot{q}=F(q,u)$. Methods of studying stability and transition processes in linear stationary systems are investigated in [14].

It is well known that the circular movement of the top round its vertical axis will be stable if it rotates at a higher speed than a certain angular speed. The question is: how is it possible to provide the needed angular speed? In the present paper the optimal stabilization problem in motion of a spinning top as a rigid body is solved.

2. Problem Statement

Consider heavy spinning top, rotating around its dynamical symmetric axis with rotational (angular) velocity $\dot{\varphi}$. Let's two external forces applied on the spinning top only: the gravitational force $\vec{P}$ applied to the center of mass C of the spinning top, and the reaction $\vec{R}_0$ reliance on O (Fig. 1). Position of the dynamical symmetric axis z relative to the spinning top fixed axis $\xi\eta\zeta$ (vertical axis $O\zeta$) will define with the angles α and β [15] (Fig. 2).

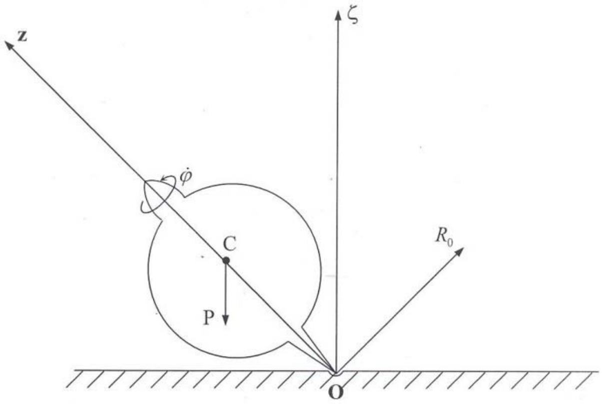


Fig. 1

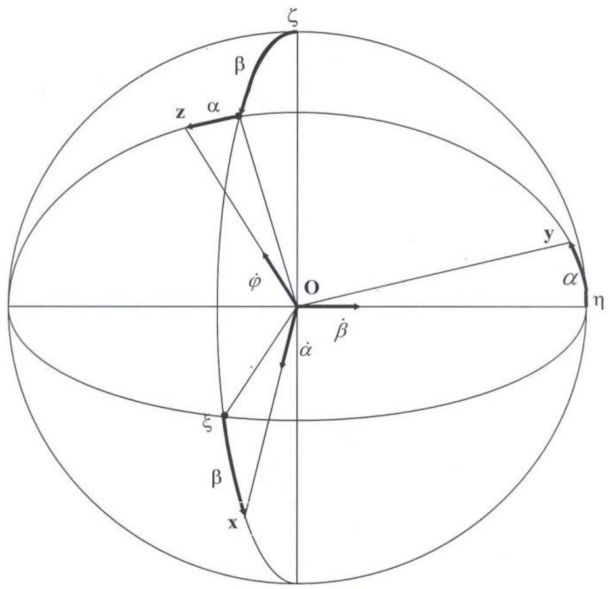


Fig. 2

We introduce the axes of x, y, z (Fig. 2) and p, q, r – the angular velocity about x, y, z axes, respectively, are defined by

$$\mathrm{p} = \dot{\alpha}, \quad \mathrm{q} = \dot{\beta}\cos\alpha, \quad \mathrm{r} = \dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha. \tag{1}$$

Kinetic energy T and potential energy Π of system will be

$$\begin{gathered} T = \frac{1}{2} I_x \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha\right) + \frac{1}{2} I_z \left(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha\right)^2, \\ \Pi = Pl\cos\alpha\cos\beta, \end{gathered} \tag{2}$$

where l is distance between the centre of gravity of spinning top, C and the point O, I_x and I_z are moments of inertia of the spinning top around the axes x and z, respectively (as the spinning top is rotating and Oz is dynamical symmetric axis, $I_x = I_y$).

Now, we investigate the stability of the motion

$$\begin{gathered} \alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \beta = 0, \quad \dot{\beta} = 0, \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \omega = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{3}$$

Using of Lagrange equations [16], the system of differential equations of the spinning top motion will be

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(I_x\dot{\alpha}\right) + \dfrac{1}{2} I_x \dot{\beta}\sin 2\alpha + I_z \dot{\varphi}\dot{\beta}\cos\alpha - \\ -\dfrac{1}{2} I_z \dot{\beta}^2 \sin 2\alpha = Pl\sin\alpha\cos\beta, \\ \dfrac{d}{dt}\left(I_x\dot{\beta}\cos^2\alpha - I_z\left(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha\right)\sin\alpha\right) = \\ = Pl\sin\beta\cos\alpha, \\ \dfrac{d}{dt}\left(I_z\left(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha\right)\right) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Let's make following notations:

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \dot{\alpha}, \quad x_3 = \beta,$$
$$x_4 = \dot{\beta}, \quad x_5 = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0. \tag{5}$$

so, we obtain the first approximation of differential equations of the spinning top motion (4) in the form of $\dot{x} = A \cdot x$ as follows:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = b \cdot x_1 - \sqrt{a} \cdot x_4, \\ \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \sqrt{a} \cdot x_2 + b \cdot x_3, \quad \dot{x}_5 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

where

$$a = \left(\frac{I_z}{I_x} \omega \right)^2, \quad b = \frac{Pl}{I_x}. \tag{7}$$

The characteristic equation for the system of differential equations (6) will be obtained as follows:

$$-\lambda \left(\lambda^4 + (a - 2b)\lambda^2 + b^2 \right) = 0$$

so, we obtain

$$\left[\lambda_1 = 0, \quad \lambda^4 + (a - 2b)\lambda^2 + b^2 = 0. \right. \tag{8}$$

since $\mathrm{rank} A = 4$, and under the following condition:

$$\omega > \frac{2\sqrt{I_x Pl}}{I_z} \tag{9}$$

all the roots of the second equation of (8) are purely imaginary, so, the system of differential equations (6) is marginally stable in the sense of Lyapunov [17].

Let's ω is given rotational (angular) velocity. Let's consider the input controls $\bar{u}_1$ and $\bar{u}_2$ in the x_2 and x_5 generalized coordinate directions, respectively, so the spinning top motion (3) would become asymptotically stable. Then, the system of differential equations of the spinning top motion (6) will be

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = b \cdot x_1 - \sqrt{a} \cdot x_4 + \bar{u}_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \sqrt{a} \cdot x_2 + b \cdot x_3, \quad \dot{x}_5 = \bar{u}_2. \end{cases} \tag{10}$$

Let's make following notations:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1, \quad y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a}} x_2, \quad y_3 = kx_3, \\ y_4 = \dfrac{1}{\sqrt{a}} x_4, \quad y_5 = \dfrac{1}{\sqrt{a}} x_5; \\ u_1 = \dfrac{\bar{u}_1}{a}, \quad u_2 = \dfrac{\bar{u}_2}{\sqrt{a}}, \quad k = \dfrac{b}{a}, \quad t' = \sqrt{a} t. \end{cases} \tag{11}$$

Let's write the system of differential equations (10) in dimensionless form

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ky_2, \quad \dot{y}_2 = y_1 - y_4 + u_1, \\ \dot{y}_3 = ky_4, \quad \dot{y}_4 = y_2 + y_3, \quad \dot{y}_5 = u_2. \end{cases} \tag{12}$$

Here $\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt'}$.

That is, it is required that optimal controls u_1^0 and u_2^0 be found so that the system (12) would be asymptotically stable and the functional would acquire a minimal value.

It is quite easy to see that in case any of the input controls u_1^0 and u_2^0 is missing the problem will not be solved (the system will became a not fully controllability) and there is no need to introduce more directories. Actually, full controllability [6] of system of differential equations (12) can be checked easily, and turned out that it is full controllable as following calculations;

$$\mathrm{rank}K = \mathrm{rank}\left[B,\ AB,\ A^2B,\ A^3B,\ A^4B\right] = 5,$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Let's solve the problem of optimal stabilization of the system of differential equations (12) in the given sense in [6] while minimizing the performance index

$$I[u] = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{5} y_i^2 + \sum_{k=1}^{2} u_k^2 \right) dt. \tag{13}$$

3. Solution of the problem

Let's make up the expression [6]

$$B[u] = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial V}{\partial y_i} \dot{y}_i + \sum_{i=1}^{5} y_i^2 + \sum_{k=1}^{2} u_k^2 \tag{14}$$

since the expression (14) at optimal control takes the minimum value equal to zero [6], then

$$B\big|_{u=u^0} = 0, \tag{15}$$

and

$$\left.\frac{\partial B}{\partial u}\right|_{u_i=u_i^0} = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{16}$$

where $u = (u_1 \quad u_2)^T$ and u_i^0 are optimal controls.

For Lyapunov function we will search in the form of

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{4} c_{ij} y_i y_j + \frac{1}{2} c_{55} y_5^2. \tag{17}$$

and c_{ij} − constants.

From equation (16) we obtain

$$u_1^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y_2}; \quad u_2^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y_5}. \tag{18}$$

By substituting the values u_i^0 of the equation (18) into equation (14), considering of equation (15), and using equation (17), we obtain the system of equations to define constants c_{ij} $(i, j = 1, \ldots, 5)$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}c_{12}^2 + c_{12} + 1 = 0, \quad \frac{k}{2}c_{11} + \frac{1}{2}c_{14} + \frac{1}{2}c_{22} - \frac{1}{4}c_{12}c_{22} = 0, \\ \frac{1}{2}c_{14} + \frac{1}{2}c_{23} - \frac{1}{4}c_{12}c_{23} = 0, \quad -\frac{1}{2}c_{12} + \frac{k}{2}c_{13} + \frac{1}{2}c_{24} - \frac{1}{4}c_{12}c_{24} = 0, \\ -\frac{1}{4}c_{22}^2 + kc_{12} + c_{24} + 1 = 0, \quad \frac{k}{2}c_{13} + \frac{1}{2}c_{24} + \frac{1}{2}c_{34} - \frac{1}{4}c_{22}c_{23} = 0, \\ \frac{k}{2}c_{14} - \frac{1}{2}c_{22} + \frac{k}{2}c_{23} + \frac{1}{2}c_{44} - \frac{1}{4}c_{22}c_{24} = 0, \\ -\frac{1}{4}c_{23}^2 + c_{34} + 1 = 0, \quad -\frac{1}{2}c_{23} + \frac{k}{2}c_{33} + \frac{1}{2}c_{44} - \frac{1}{4}c_{23}c_{24} = 0, \\ -\frac{1}{4}c_{24}^2 - c_{24} + kc_{34} + 1 = 0, \quad -\frac{1}{4}c_{55}^2 + 1 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

The obtained solutions for constants c_{12}, c_{55} are independent from the value of k, and are listed below:

$$c_{12} = \pm 0{,}8284; \quad c_{55} = \pm 2{,}0000. \tag{20}$$

In order to obtaining the solutions for constants $c_{11}, c_{13}, c_{14}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{33}, c_{34}, c_{44}$, let's solve the system of equations (19) for various value of k (for example $k = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, \ldots, 50.0$), choose those solutions for which the Lyapunov's function becomes positively definite, then plot the graphs of mentioned constants vs. k. For example the graph of constant c_{11} vs. k is plotted below:

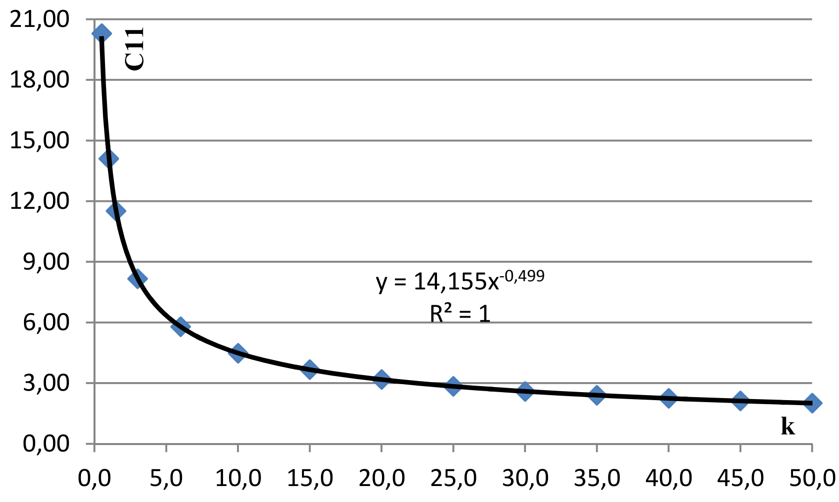


Fig. 3. Constant c_{11} vs. k and best estimated functions of constant c_{11} vs. k.

The dependence of constant c_{11} on k is displayed in fig. 3. The dots illustrate the solutions of c_{11} of the system (19) for corresponding k values, while the curve shows the best estimated functions of constant c_{11} vs. k.

Finally, for each values of k, we can similarly find the best estimated functions of constants $c_{11}^0, c_{13}^0, c_{14}^0, c_{22}^0, c_{23}^0, c_{24}^0, c_{33}^0, c_{34}^0, c_{44}^0$ vs. k, and we'll have;

$$
\begin{aligned}
& c_{11}^0 = 14.1550k^{-0.499}; \quad c_{22}^0 = 8.1943k^{0.5067}; \; c_{12}^0 = -0,8284; \\
& c_{13}^0 = \left(2\times10^{-8}\right)k^6 - \left(3\times10^{-6}\right)k^5 + 0.0002k^4 - 0.0074k^3 + \\
& +0.1226k^2 - 0.9883k - 22.8510; \\
& c_{14}^0 = \left(1\times10^{-7}\right)k^6 - \left(2\times10^{-5}\right)k^5 + 0.0012k^4 - 0.0408k^3 + \\
& +0.8058k^2 - 11.7640k - 14.7780; \\
& c_{23}^0 = 18.2040k^{0.5036}; \; c_{24}^0 = 18.4430k - 2.5861; c_{33}^0 = 84.0200k^{0.5029}; \\
& c_{34}^0 = 85.0500k - 6.0128; \; c_{44}^0 = 82.5020k^{1.5082}; \; c_{55}^0 = 2,0000.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Thus, optimal Lyapunov function will be

$$
\begin{aligned}
& V^0\left(y_1,\ldots,y_5\right) = \frac{c_{11}^0}{2}y_1^2 + \frac{c_{22}^0}{2}y_2^2 + \frac{c_{33}^0}{2}y_3^2 + \frac{c_{44}^0}{2}y_4^2 + y_5^2 - \\
& -0.8284y_1y_2 + c_{13}^0y_1y_3 + c_{14}^0y_1y_4 + c_{23}^0y_2y_3 + c_{24}^0y_2y_4 + c_{34}^0y_3y_4,
\end{aligned} \tag{22}
$$

and optimal controls will be

$$
\begin{aligned}
& u_1^0 = 0.4142y_1 - \frac{c_{22}^0}{2}y_2 - \frac{c_{23}^0}{2}y_3 - \frac{c_{24}^0}{2}y_4, \\
& u_2^0 = -y_5.
\end{aligned} \tag{23}
$$

For the optimal value of the performance index in equation (13) we obtain

$$
\begin{aligned}
& I^0 = V^0\left(y_{10},\ldots,y_{50}\right) = \frac{c_{11}^0}{2}y_{10}^2 + \frac{c_{22}^0}{2}y_{20}^2 + \frac{c_{33}^0}{2}y_{30}^2 + \frac{c_{44}^0}{2}y_{40}^2 + y_{50}^2 - \\
& -0.8284y_{10}y_{20} + c_{13}^0y_{10}y_{30} + c_{14}^0y_{10}y_{40} + c_{23}^0y_{20}y_{30} + \\
& +c_{24}^0y_{20}y_{40} + c_{34}^0y_{30}y_{40},
\end{aligned} \tag{24}
$$

where $y_{i0} = y_i(0) \quad (i = 1,\ldots,5)$.

4. Second Problem and its Solution

Consider again the system of differential equations (12). We assume that $u_1 = u; \quad u_2 = 0.$ Then the system of differential equations (12) will obtain

$$
\begin{cases}
\dot{y}_1 = ky_2, & \dot{y}_2 = y_1 - y_4 + u, \\
\dot{y}_3 = ky_4, & \dot{y}_4 = y_2 + y_3, \quad \dot{y}_5 = 0.
\end{cases} \tag{25}
$$

Let's replace the following problem: Finding such input control u^0 which will ensure the stability of the solution $y_i = 0 \quad (i = 1,\ldots,5)$ of the system of differential equations (25) under integrally small perturbations [18] and will minimize the performance index.

As the following calculations the system of differential equations (25) is not fully controllable;

$$\operatorname{rank} K = \operatorname{rank}\left[B_1, AB_1, A^2B_1, A^3B_1, A^4B_1\right] = 4,$$

Where $B_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$

Hence, the optimal stabilization problem for the system of differential equations (25) in the sense [6] is not solved.

The system of differential equations (25) may solve the optimal stabilization problem under integrally small perturbations [18]. Minimized performance index should be adopted in the form of

$$I_1[u] = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^4 y_i^2 + u^2 \right) dt. \tag{26}$$

Thus, it is required to resolve the optimal stabilization problem under integrally small perturbations for the system of differential equations (25) while minimizing the performance index in equation (26).

The expression of Bellman for the system of differential Equations (25) in this case will be

$$\begin{aligned} B[u] = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y_1} k y_2 + \frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1 - y_4 + u) + \frac{\partial V}{\partial y_3} k y_4 + \\ + \frac{\partial V}{\partial y_4}(y_2 + y_3) + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + u^2, \end{aligned} \tag{27}$$

since the expression in Equation (27) at optimal control takes the minimum value equal to zero [18], then

$$\left.\frac{\partial B}{\partial u}\right|_{u=u^0} = \frac{\partial V}{\partial y_2} + 2u^0 = 0,$$ so we obtain

$$u^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y_2}. \tag{28}$$

As

$$\left. B \right|_{u=u^0} = 0, \tag{29}$$

by substituting the value u^0 of the equation (28) into equation (29), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y_1} k y_2 + \frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1 - y_4) + \frac{\partial V}{\partial y_3} k y_4 + \frac{\partial V}{\partial y_4}(y_2 + y_3) + \\ + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)^2 = 0, \end{aligned} \tag{30}$$

For Lyapunov function we will search in the following form [18]:

$$V(t, y) = V_2(y) + V_1(t, y) + V_0(t), \tag{31}$$

where

$V_2(y)-$ the quadratic form with constant coefficients;

$V_1(t, y)-$ the first degree form with respect to y with the coefficients depending on time t;

$V_0(t)-$ the function of time t.

By substituting the value $V(t,y)$ of the expression (31) into equation (30), we obtain $V_1 = V_0 = 0$, and the equation (30) can be written as

$$\frac{\partial V_2}{\partial y_1}ky_2+\frac{\partial V_2}{\partial y_2}(y_1-y_4)+\frac{\partial V_2}{\partial y_3}ky_4+\frac{\partial V_2}{\partial y_4}(y_2+y_3)+$$
$$+y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_2}{\partial y_2}\right)^2=0, \tag{32}$$

Function $V_2(y)$ we can search in the form of $V_2(y)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{4}c_{ij}y_iy_j$. Then we can find the solutions for constants $c_{11},c_{12},c_{13},c_{14},c_{22},c_{23},c_{24},c_{33},c_{34},c_{44}$, which are similar to (20) and (21) exclusive of c_{55}.

Thus, optimal Lyapunov function will be

$$V^0(y_1,\ldots,y_4)=\frac{c_{11}^0}{2}y_1^2+\frac{c_{22}^0}{2}y_2^2+\frac{c_{33}^0}{2}y_3^2+\frac{c_{44}^0}{2}y_4^2-0.8284y_1y_2+$$
$$+c_{13}^0y_1y_3+c_{14}^0y_1y_4+c_{23}^0y_2y_3+c_{24}^0y_2y_4+c_{34}^0y_3y_4, \tag{33}$$

and optimal controls will be

$$u^0=0.4142y_1-\frac{c_{22}^0}{2}y_2-\frac{c_{23}^0}{2}y_3-\frac{c_{24}^0}{2}y_4. \tag{34}$$

For the optimal value of the performance index in equation (26) we obtain

$$I_1^0=V^0(y_{10},\ldots,y_{40})=\frac{c_{11}^0}{2}y_{10}^2+\frac{c_{22}^0}{2}y_{20}^2+\frac{c_{33}^0}{2}y_{30}^2+\frac{c_{44}^0}{2}y_{40}^2-$$
$$-0.8284y_{10}y_{20}+c_{13}^0y_{10}y_{30}+c_{14}^0y_{10}y_{40}+c_{23}^0y_{20}y_{30}+c_{24}^0y_{20}y_{40}+c_{34}^0y_{30}y_{40}, \tag{35}$$

where $y_{i0}=y_i(0)\quad (i=1,\ldots,4)$.

5. Conclusion

In the present work solved the optimal stabilization problem in motion of a Spinning Top. For constructing the solution in direction of the generalized coordinates introduced input controls, fully controllability of linear approximation of the obtained control system is checked up and the optimal stabilization problem of this system on classical sense is solved. Then, considers the optimal stabilization problem in motion of a Spinning Top when integrally small perturbations act during a finite interval of time. The optimal stabilization problem of considered motion is assumed and solved too. For both cases optimal Lyapunov function is constructed, the optimal controls and the optimal value of performance index are obtained.

A comparison between the values in Equation (24) and Equation (35) of the performance indexes in Equation (13) and Equation (26) has shown that $I_1^0 < I^0$.

It shows that energy consumption in stabilization at the given sense in [6] is more than stabilization under integrally small perturbations [18].

References

1. Letov A.M. Analytical Design of Regulators //Automation and Remote Control, Vol. 21, № 4, pp. 436-446, 1960.

2. Letov A.M. Analytical Design of Regulators. //Automation and Remote Control, Vol. 21, №5, pp. 561-571, 1960.
3. Letov A.M. Analytical Design of Regulators. //Automation and Remote Control, Vol. 21, №6, pp. 661-669, 1960.
4. Letov A.M. Analytical Design of Regulators. //Automation and Remote Control, Vol. 22, №4, pp. 363-372, 1961.
5. Letov A.M. Analytical Design of Regulators. //Further Development of the Problem, Automation and Remote Control, Vol. 23, №11, pp. 649-656, 1962.
6. Krasovskii N.N. Stabilization Problems of Controlled Motions. //In the I.G. Malkin's book; Stability Theory of Motion, Add. 4. M.: Nauka, pp. 475-517, 1966.
7. Bellman R.E. and Glickberg I., Gross O.A. Some Aspects of the Mathematical Theory of Control Processes, R-313, Santa Monica, RAND Corporation, 1958.
8. Krasovskii N.N. On the Stabilization of Unstable Motions by Additional Forces when the Feedback Loop is Incomplete. //Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 27, Issue 4, pp. 971-1004, 1963.
9. Galperin E.A. and Krasovskii N.N. On the Stabilization of Stationary Motions in Nonlinear Control Systems. //Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 27, Issue 6, pp. 1521–1546, 1963.
10. Al'brekht E.G. On the Optimal Stabilization of Nonlinear Systems. //Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 25, pp. 124-1266, 1961.
11. Rumyantsev V.V. On Optimal Stabilization of Controlled Systems. //Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 34, Issue 3, pp. 440–456, 1970.
12. Andreyev A.S. and Bezglasnyi S.P. The Stabilization of Controlled Systems with a Guaranteed Estimate of the Control Quality. //Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 61, Issue 1, pp. 41–47, 1997.
13. Zhechev M.M. The equilibrium position of autonomous systems; Stabilization by a sequential control. //Automation and Remote Control, 59(3 Part 1), pp. 305-309, 1998.
14. Roytenberg Y.N. Automatic control. M.: Nauka, p.552. 1978.
15. Merkin D.R. Introduction to the Theory of Stability. M.: Nauka, p.300. 1972.
16. Buchholz N.N. The Main Course of Theoretical Mechanics M.: The Science, h. 2,. 332c. 1972.
17. Lyapunov A.M. The General Problem of the Stability of Motion. M.-L.: Gostekhizdat, p.471. 1950.
18. Shahinyan S.G. The Stability of Dynamic Systems with integrally small perturbations. Publishing house «Scholars' Press», Germany, p.106, 2015.

<u>Сведения об авторах:</u>

Шагинян Смбат Григорьевич – к.ф.-м. наук, доцент кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (374 10) 66-37-41, (374 91) 21-55-82
E-mail: shahinyan@ysu.am
Резаи Масоуд – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики
E-mail: masoud.rezaei@hepcoir.com

Поступила в редакцию 13.03.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №1, 2016 Механика

50 ЛЕТ
ЖУРНАЛУ « ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ. МЕХАНИКА»

Журнал «Известия НАН Армении. Механика» является одним из трёх специализированных периодических журналов, которые с 1-го января 1966 года стали публиковаться вместо журнала «Известия АН Армянской ССР» (серия физико-математических наук). Журнал был предусмотрен для освещения результатов теоретических и экспериментальных исследований в области математической теории упругости, теории оболочек и пластин, теории ползучести и пластичности, а также теории механизмов и машин, аэрогидромеханики и строительной механики.

С 1966 по 1985 гг. ответственным редактором журнала был Н.Х.Арутюнян (зам.редактора – Абрамян Б.Л., уч. секр.– Гулканян Н.О.).

С 1986 по 1997 гг. ответственный редактор журнала – С.А.Амбарцумян (зам.ред. – Гнуни В.Ц., уч. секр. – Казарян К.Б.). Тематика журнала была расширена такими новыми направлениями механики, как теории электромагнитоупругости, вязкоупругости, управления и устойчивости движения систем и техника экспериментирования в этих областях.

С 1986 г. по август 1990 г. Издательство «Allerton Press» осуществляло издание параллельного перевода журнала на английский язык.

С 1998 по 2005 гг. ответственный (главный) редактор журнала – Гнуни В.Ц. (зам.ред. Аветисян А.С., с 1994 г. ответ.секретарь – Авдалян Ж.А.).

С 1998 г. академик С.А.Амбарцумян является почётным редактором журнала «Известия НАН Армении. Механика».

С конца 2005 г. по настоящее время главный редактор журнала – Аветисян А.С. (зам. гл. ред. – Акопян В.Н., отв.секр. – Авдалян Ж.А., техн.ред. – Геворкян Г.З.).

С 2010 г. журнал имеет также Международный редакционный Совет, в состав которого входят авторитетные учёные из разных стран.

Авторами научных статей в журнале «Известия НАН Армении. Механика», кроме учёных Армении, были также известные механики: Александров В.М., Арутюнян Р.А., Бабешко В.А., Баничук Н.В., Бардзокас Д.Л., Бровко Г.А., Вольмир А.С., Воробей В.В., Ватульян А.О., Григорян С.С., Гринченко В.Т., Гузь А.Н., Ерофеев В.И., Зильберглейт А.С., Каландия А.И., Киселёв М.И., Космодамианский А.С., Кудрявцев Б.А., Куршин Л.М., Ламперт Р.Е., Ломакин Е.В., Мазья В.Г., Манжиров А.В., Марзока П., Морозов Н.Ф., Москаленко В.Н., Немировский Ю.В., Новичков Ю.Н., Пальмов В.А., Пановко Я.Г., Партон В.З., Победря Б.Е., Попов Г.Я., Пряхина О.Д., Сабодаш П.Ф., Сагомонян А.Я., Сумбатян М.А., Ржаницын А.Р., Улитко А.Ф., Устинов Ю.А., Уфлянд Я.С., Фильштинский Л.А., Худаяров Б.А., Чарлетта М., Черепанов Г.П., Шерман Д.И., Шульга С.А. и многие другие.

В 1998 году был издан дополнительный номер журнала, в котором приводится список опубликованных в журнале «Известия НАН Армении. Механика» статей за период с 1966 по 1998 гг.

Редакция журнала желает всем авторам и читателям здоровья, счастья и успехов в научной работе и личной жизни.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Բաղդասարյան Գևորգ Երվանդի (Ծննդյան 80-ամյակի առթիվ) 3
Աղայան Կ.Լ., Զաքարյան Վ.Գ. Ճաքեր և վերադիրներ պարունակող առաձգական կիսատարածության հակահարթ խնդիր..6
Ալտոբաիտի Ս., Պրիկազչիկով Դ.Ա. Օրթոտրոպ սալի ծռման եզրային ալիքներ Վինկլեր-Ֆուսի առաձգական հիմքի վրա 16
Բաղդասարյան Գ.Ե., Հասանյան Ա.Դ., Հասանյան Դ.Ջ. Կամայականորեն տեղակայված հենարաններով երկշերտ ջերմաառաձգական դինամիկական սալ: Մաս I: Էներգիայի կուտակում – տեսական հետազոտություն 25
Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ. Գերձայնային պանելային ֆլատերի մի խնդրի մասին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածի և մոմենտի առկայության դեպքում 39
Ավետիսյան Վ.Վ., Ստեփանյան Վ.Ս. Շարժական օբյեկտի երաշխավորած փնտրման կոմբինացված ղեկավարումը երկրաչափական սահմանափա-կումների դեպքում...53
Շահինյան Ս.Գ., Ռեզայի Մ. Հոլի պտտական շարժման օպտիմալ ստաբիլացումը 66
Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի տեղեկագիր Մեխանիկա հանդեսը 50 տարեկան է...76

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Геворг Ервандович Багдасарян– К 80-летию со дня рождения.................................3
Агаян К.Л., Закарян В.Г. Контактная задача для упругого полупространства с трещинами и накладками при антиплоской деформации...6
Альтобаити С., Приказчиков Д.А. Изгибные краевые волны в случае ортотропной упругой пластины на основании Винклера–Фусса...16
Багдасарян Г.Е., Асанян А.Д, Асанян Д.Д. Динамическая двухслойная термоупругая пластина с произвольно расположенными опорами. Часть I. Применение к накоплению энергии - аналитический вывод. 25
Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой панельный флаттер при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов 39
Аветисян В.В., Степанян В.С. Комбинированное управление гарантированным поиском подвижного объекта при геометрических ограничениях...............................53
Шагинян С.Г., Резаи М. Задача оптимальной стабилизации вращательного движения волчка 66
50 лет журналу «Известия НАН Армении. Механика»...76

CONTENTS

Bagdasryan Gevorg Ervand – 80-th Anniversary..3
Aghayan K.L, Zakaryan V.G Antiplane contact problem for elastic half-space with cracks and stringers 6
Althobaiti S., Prikazchikov D.A. Edge bending waves on an orthotropic elastic plate resting on the Winkler-Fuss foundation 16
Bagdasaryan Gevorg Y. , Hasanyan Armanj D. , Hasanyan Davresh J. Dynamic bimorph thermo-piezoelectric benders with arbitrary support location. Part I: Application to energy harvesting-analytical derivations...25
Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. Supersonic panel flutter in the presence of the concentrated inertial masses and the moments 39
Avetisyan V.V., Stepanyan V.S. Combined control of guaranteed search for a moving object with geometric constraints 53
Shahinyan S.G., Rezaei M. The problem of the optimal stabilization of the spinning top motion 66
50 years of Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia “Mechanics” 76