ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

УДК 539.3

ТРЁХМЕРНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОГО ВОЛНОВОДА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Белубекян В.М., Белубекян М.В.

Ключевые слова: трёхмерная волна, условия Навье, локализованные колебания.
Key Words: three dimensional wave, Navier`s conditions, localized vibrations.
Բանալի բառեր՝ եռաչափ ալիք, Նավյեի պայմաններ, տեղայնացված տատանումներ.

Բելուբեկյան Վ.Մ., Բելուբեկյան Մ.Վ.
Ուղղանկյուն կտրվածք ունեցող եռաչափ առաձգական ալիքատարի խնդիրը

Հետազոտվում է եռաչափ ալիքների տարածումը առաձգական պրիզմայում: Հաստատված են եզրային պայմաններ, որոնք բերում են խնդրի հավասարումների փոփոխականների անջատման: Ստացված են կիսաանվերջ ալիքատարի ազատ եզրի շրջակայքում տեղայնացված տատանումների գոյության պայմանները:

Belubekyan V.M., Belubekyan M.V.
The 3-D problem of the elastic wavequide with the rectungular cross section

The propogation of the 3-D elastic waves in the elastic prism is investigated. The boundary conditions are established for the dividing of the equations variables. The conditions of the existence of the localized vibrations near the semi-infinite wavequides are received.

Исследуется распространение трёхмерных волн в упругой призме. Установлены граничные условия, приводящие к разделению переменных в уравнениях задачи. Получены условия существования локализованных волн в окрестности свободного края полубесконечного волновода.

Введение. Пространственные задачи распространения упругих волн при наличии ограничивающих среду поверхностей более близки к реальным условиям, чем плоские.

Впервые трёхмерные волны типа Релея были рассмотрены Knowles-ом [1]. Случаи, когда на границе полупространства заданы смешанные граничные условия, исследованы в статьях [2–5]. Аналогичные задачи для анизотропных сред приведены в [6–8], для волн типа Стоунли – в [9].

В настоящей статье исследуется распространение волн в упругой среде, занимающей область $-\infty < x < \infty,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le d.$ На плоскостях $y = \mathrm{const}\, t$ и $\mathrm{z} = \mathrm{const},$ ограничивающих волновод, рассматриваются граничные условия типа Навье или скользящего контакта (анти-Навье), позволяющие для решения задач использовать метод разделения переменных. Приводится также решение задачи локализованных в окрестности свободного края колебаний полубесконечного волновода. Установлены условия существования локализованных колебаний в окрестности края волновода со смешанными граничными условиями.

1. Пусть упругие перемещения точек среды определяются вектором $\bar{u} = \bar{u}(u, \mathrm{v}, w)$.

Известно, что при помощи преобразований Ламе [10]

$$\bar{u} = \mathrm{grad}\varphi + \mathrm{rot}\bar{\psi} \tag{1.1}$$

уравнения движения изотропной упругой среды приводятся к виду:

$$c_e^2\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\ c_t^2\Delta\overline{\psi}=\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial t^2},\ \operatorname{div}\overline{\psi}=0. \tag{1.2}$$

В (1.2) приняты обозначения:

$$c_e^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\ c_t^2=\frac{\mu}{\rho}, \tag{1.3}$$

где λ,μ – упругие постоянные Ламе, ρ – плотность материала среды, Δ – трёхмерный оператор Лапласа.

Предполагается, что на плоскостях $y=0,b$, ограничивающих волновод, заданы условия Навье:

$$\sigma_{yy}=0,\ u=0,\ w=0\quad \text{при}\ y=\mathrm{const}. \tag{1.4}$$

Из закона Гука и из условий (1.4) следует, что условие $\sigma_{yy}=0$ приводит к условию $\partial v/\partial y=0.$ В этом случае граничные условия Навье, согласно (1.1), имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right)=0,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=0\end{gathered}\quad \text{при}\quad y=\mathrm{const}. \tag{1.5}$$

После определения $\partial\psi_1/\partial y$ и $\partial\psi_3/\partial y$ из второго и третьего условий (1.5) и подстановки в первое условие получается $\Delta\varphi=0$ (предполагается выполнение условия перемены очерёдности дифференцирования). Имея в виду, что в последующем будут рассматриваться гармонические колебания вида

$$\varphi(x,y,z,t)=\varphi_0(x,y,z)e^{i\omega t}, \tag{1.6}$$

из первого уравнения системы (1.2) получается $\varphi=0$ при $y=\mathrm{const}$. Отсюда следует, что во втором и третьем условиях (1.5) $\partial\varphi/\partial x=0,\ \partial\varphi/\partial z=0.$ В результате, условия (1.4) приводятся к виду:

$$\varphi=0,\ \ \frac{\partial\psi_3}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=0,\ \ \frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=0\quad \text{при}\quad y=\mathrm{const} \tag{1.7}$$

Используя (1.7), можно получить выражение

$$\Delta\psi_2=\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\overline{\psi}\quad \text{при}\quad y=\mathrm{const}. \tag{1.8}$$

Отсюда и из уравнения (1.2) и ограничения (1.6) получается $\psi_2=0$ при $y=\mathrm{const}.$ С учётом $\psi_2=0$, условия (1.7) приводятся к виду:

$$\varphi=0,\quad \psi_2=0,\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\psi_3}{\partial y}=0\quad \text{при}\quad y=\mathrm{const}. \tag{1.9}$$

В последующем, будет показано, что удовлетворяя условиям (1.9), автоматически удовлетворяются условия (1.7) и следовательно, (1.5) или (1.4).

Аналогичным образом, можно показать, что условия Навье

$$\sigma_{zz}=0,\ u=0,\ v=0\quad \text{при}\quad z=\mathrm{const} \tag{1.10}$$

приводятся к виду

$$\varphi = 0,\ \psi_3 = 0,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial\psi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = \text{const}. \tag{1.11}$$

Нетрудно также вывести, что условиям скользящего контакта

$$\sigma_{yx} = 0,\ v = 0,\ \sigma_{yz} = 0 \quad \text{при} \quad y = \text{const} \tag{1.12}$$

соответствуют условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = 0,\ \psi_1 = 0,\ \psi_3 = 0 \quad \text{при} \quad y = \text{const}, \tag{1.13}$$

а условиям

$$\sigma_{xz} = 0,\ \sigma_{zy} = 0,\ w = 0 \quad \text{при} \quad z = \text{const} \tag{1.14}$$

соответствуют

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial\psi_3}{\partial z} = 0,\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = \text{const}. \tag{1.15}$$

2. Приведённые условия Навье и скользящего контакта (анти-Навье) позволяют в задачах распространения трёхмерных волн применить метод разделения переменных. Пусть на гранях $y = 0, b;\ z = 0, d,$ волновода с прямоугольным поперечным сечением заданы условия Навье. Тогда, решения уравнений (1.2), удовлетворяющие граничным условиям (1.9), (1.11), можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}(x) e^{i\omega_{mn}t} \sin\lambda_m y \sin\mu_n z,\ \lambda_m = \frac{m\pi}{b} \\
\psi_1 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{1mn}(x) e^{i\omega_{mn}t} \cos\lambda_m y \cos\mu_n z,\ \mu_m = \frac{n\pi}{d} \\
\psi_2 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{2mn}(x) e^{i\omega_{mn}t} \sin\lambda_m y \cos\mu_n z, \\
\psi_3 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{3mn}(x) e^{i\omega_{mn}t} \cos\lambda_m y \sin\mu_n z
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Легко проверить, что и другие варианты записи граничных условий Навье – (1.4), (1.5), (1.7) и (1.10) также удовлетворяются. Это обстоятельство является обоснованием справедливости граничных условий (1.9) и (1.11).

В случае неограниченного по x волновода искомые функции из (2.1) можно представить в виде

$$\Phi_{mn} = A_{mn} e^{ikx}, \quad \Psi_{smn} = B_{smn} e^{ikx}, \quad s = 1,2,3 \tag{2.2}$$

Подстановка (2.2) в уравнение (1.2) приводит к раздельным дисперсионным уравнениям для продольной и поперечных сдвиговых волн

$$\omega_{mn}^2 = c_e^2\left(k^2 + r^2\right),\ \omega_{mn}^2 = c_t^2\left(k^2 + r^2\right),\ r^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2 \tag{2.3}$$

При этом, амплитуды сдвиговых волн связаны соотношением

$$ikB_{1mn} + \lambda_m B_{2mn} + \mu_n B_{3mn} = 0, \tag{2.4}$$

что означает наличие только двух независимых сдвиговых волн.

Рассмотрим задачу локализованных колебаний в окрестности свободного торца волновода. Пусть полубесконечный волновод в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область: $0 \le x < \infty,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le d.$ На полубесконечных кромках $y = 0; b$ и $z = 0; d$, ограничивающих волновод, заданы условия Навье (1.9) и (1.11). На прямоугольном торце волновода заданы условия свободного края

$$\sigma_{xx} = 0,\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_{xz} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0\,. \tag{2.5}$$

С помощью закона Гука и преобразования Ламе (1.1) граничные условия (2.5) приводятся к виду:

$$\begin{gathered}
\left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) - 2\mu\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\partial y}\right) = 0,\\
2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0\,,\\
2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = 0.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Требуется найти решения уравнений (1.2), удовлетворяющие граничным условиям (1.9), (1.11), (2.6) и условиям затухания

$$\lim_{x\to\infty}\varphi = 0,\ \lim_{x\to\infty}\overline{\psi} = 0\,. \tag{2.7}$$

Эта задача в частном случае $-\infty < z < \infty$ была исследована в [11]. В монографии [12] приведены решения задач локализванных колебаний в двумерной постановке.

Подстановка решений вида (2.1) в уравнения (1.2) приводит к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\Phi''_{mn} - r^2\left(1 - \theta\eta\right)\Phi_{mn} = 0, \quad \theta = \frac{c_t^2}{c_l^2}\\
&\Psi''_{Smn} - r^2\left(1 - \eta\right)\Psi_{Smn} = 0, \quad \eta = \frac{\omega_{mn}^2}{r^2 c_t^2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Условия затухания будут выполнены, если

$$\lim_{x\to\infty}\Phi_{mn} = 0,\ \lim_{x\to\infty}\Psi_{Smn} = 0\,. \tag{2.9}$$

Уравнения (2.8) имеют следующие решения, удовлетворяющие условиям затухания (2.9):

$$\Phi_{mn} = A_{mn}e^{-r\nu_1 x},\ \Psi_{Smn} = B_{Smn}e^{-r\nu_2 x}\ , \tag{2.10}$$

где

$$\nu_1 = \sqrt{1 - \theta\eta}\ ,\ \nu_2 = \sqrt{1 - \eta}\,. \tag{2.11}$$

С учётом неравенства $\theta < 1$, получается, что локализованное у края решение будет существовать, если

$$0 < \eta < 1 \tag{2.12}$$

Уравнение $\operatorname{div}\overline{\psi} = 0$ даёт связь между произвольными постоянными B_{Smn}

$$-r\nu_2 B_{1mn} + \lambda_m B_{2mn} + \mu_n B_{3mn} = 0 \tag{2.13}$$

3. Подстановка (2.1), с учётом (2.9), в граничные условия свободного края (2.6) приводит к системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_{mn}, B_{Smn}. Используя также связи (2.13), эту систему можно преобразовать к виду:

$$r\left(2 - \eta\right)A_{mn} - 2\nu_2\left(\mu_n B_{2mn} - \lambda_m B_{3mn}\right) = 0,$$

$$2r\nu_1\lambda_m A_{mn} - 2\lambda_m\mu_n B_{2mn} + \left[\lambda_m^2\left(2-\eta\right) - \mu_n^2\eta\right] B_{3mn} = 0, \tag{3.1}$$
$$2r\nu_1\mu_n A_{mn} - \left[\mu_n^2\left(2-\eta\right) - \lambda_m^2\eta\right] B_{2mn} + 2\lambda_m\mu_n B_{3mn} = 0.$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (3.1) есть условие существования нетривиального решения. После некоторых преобразований это условие приводится к уравнению

$$\left(2-\eta\right)^2 - 4\nu_1\nu_2 = 0\,. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2), с точностью обозначений для η, совпадает с известным уравнением Рэлея для поверхностных волн в полупространстве со свободной поверхностью [10].

Пусть на кромке полубесконечного волновода заданы условия стеснённого свободного края [2]

$$\sigma_{xx} = 0,\ \sigma_{xy} = 0,\ w = 0 \quad \text{при } x = 0\,. \tag{3.3}$$

Используя закон Гука и преобразования Ламе (1.1), граничные условия (3.3) приводятся к виду:

$$\left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) - 2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial y}\right) = 0,$$
$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} = 0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 0. \tag{3.4}$$

Подстановка решения (2.1) в граничные условия (3.4) и использование равенства (2.13) приводит к системе трёх однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_{mn}, B_{2mn}, B_{3mn}:

$$r\left(2-\eta\right)A_{mn} - 2\nu_2\left(\mu_n B_{2mn} - \lambda_m B_{3mn}\right) = 0,$$
$$2r\nu_1\lambda_m A_{mn} - 2\lambda_m\mu_n B_{2mn} + \left[\lambda_m^2\left(2-\eta\right) - \mu_n^2\eta\right] B_{3mn} = 0, \tag{3.5}$$
$$r\nu_2\mu_n A_{mn} + \left(\lambda_m^2 - r^2\nu_2^2\right) B_{2mn} + \lambda_m\mu_n B_{3mn} = 0.$$

Равенство нулю детерминанта системы (3.5) после ряда преобразований приводится к виду:

$$M\left(\eta\right) \equiv \lambda_m^2\left(2-\eta\right)\left[\left(2-\eta\right)^2 - 4\nu_1\nu_2\right] - \mu_n^2\nu_2^2\eta^2 = 0\,. \tag{3.6}$$

Задача со стеснённой свободной поверхностью для полупространства была исследована в [2], где в аналогичном с (3.6) дисперсионном уравнении имеется неточность, которая была исправлена в статье [5]. Уравнение (3.6) имеет корень $\eta = 0$, которому соответствует тривиальное решение $\overline{u} \equiv 0$. После исключения корня $\eta = 0$ получается новое дисперсионное уравнение

$$M_1\left(\eta\right) \equiv \lambda_m^2\left(2-\eta\right)\left[\eta - \frac{4\left(1-\theta\right)\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}\right] - \mu_n^2\nu_2^2\eta = 0\,. \tag{3.7}$$

Функция $M_1\left(\eta\right)$ обладает следующими свойствами:

$$M_1\left(0\right) = -4\lambda_m^2\left(1-\theta\right) < 0,\ M_1\left(1\right) = \lambda_m^2 > 0\,. \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что уравнение (3.7) имеет, по крайней мере, один корень, удовлетворяющий условию (2.12). Следовательно, в случае граничных условий со стеснением (3.3), также, как и в случае свободного края (2.5), имеют место

колебания, локализованные в окрестности кромки волновода $x = 0$.
Очевидно, локализованные колебания существуют также в случае граничных условий

$$\sigma_{xx} = 0,\ v = 0,\ \sigma_{xz} = 0\,. \qquad (3.9)$$

Можно показать, что локализованные колебания не существуют для кромочных условий закреплённого края, типа Навье и скользящего контакта.

Заключение. Установлены граничные условия, которые в пространственных задачах приводят к разделению волн. Для этих граничных условий получены формулы, определяющие фазовые скорости. Исследованы локализованные волны в окрестности свободного края полубесконечного волновода. Установлены условия существования локализованных колебаний при смешанных граничных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Knowles J.K. A note on surface waves. // J.of Geophysical research. 1966. V.21. №22. P.5480-5481.
2. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача поверхностных волн Рэлея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. №4. С.362-369.
3. Мгерян Д.Э. Распространение пространственной поверхностной волны, когда на поверхности полупространства одно касательное перемещение равно нулю. //Изв.НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №4. С.18-23.
4. Белубекян М.В. Волны Рэлея в случае упруго-стеснённой границы //Изв.НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С.3-6.
5. Ардазишвили Р.В. Трёхмерная волна Рэлея в случае смешанных граничных условий на поверхности полупространства. // В сб. научных трудов: «Механика». Ереван: Изд. ЕГУАС, 2013. С.74-78.
6. Белубекян В.М., Мгерян Д.Э. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде.//Изв.НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №2. С.3-9.
7. Mheryan D.N., Belubekyan V.M. On the problem of propagation of surfase waves in transversally isotropic medium. Proc.of XXXIV Summer School conf. «Advanced problems in mechanics», st. Petersburg 2006, p.363-370.
8. Белубекян М.В., Мгерян Д.Э. Пространственная задача распространения упругих поверхностных волн в полупространстве со свойствами кубической симметрии. //Изв.НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №1. С.23-29.
9. Саркисян С.В., Мелконян А.В. К трёхмерной задаче распространения поверхностных волн Стоунли. //В сб.: «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела». Ереван: Институт механики НАН Армении, 2012. С.245-249.
10. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ НКТП, 1935. 676 с.
11. Белубекян В.М. К задаче о поверхностных упругих волнах в толстой плите. //Изв.НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №1. С.9-15.
12. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Косович Л.Ю. Краевые интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280 с.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – к.ф.м.н., проф., главн. науч. сотр. Института механики НАН РА, Ереван 0019, Армения. **Тел.:** (+374 10) 52-15-03;
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 11.09.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

УДК 539.3

АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ФЛАТТЕРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНКИ В ДОКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О.

Ключевые слова: Гибкие пластинки, сверхзвуковой поток газа, амплитудно-частотная зависимость.
KeyWords: flexible plate; Supersonic gas flow; dependence amplitude-frequency.
Բանալի բառեր՝ ճկուն սալ, գազի գերձայնային հոսք, ամպլիտուդա- հաճախություն կապ:

Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O.
Dependence «amplitude-frequency» of non-linear flutter type oscillations of plates in pre-critical stage

The problem of nonlinear oscillations of an isotropic rectangular plate in a supersonic gas flow is examined. The study was conducted taking into account both types of nonlinearities: wind (quadratic and cubic) and geometric (cubic). It is known that nonlinear dependence of the frequency θ on the amplitude of the oscillations A of the plate in absence of flowing stream has a hard character, i.e. with increasing amplitude the frequency increases. In this paper it is established that the presence of flowing stream may cause both quantitative and qualitative changes of the character of noted monotonically increasing dependence.

Բաղդասարյան Գ.Ե.,Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ.
Ճկուն սալի ոչ գծային ֆլատերային տատանումների ամպլիտուդա- հաճախություն կապի բնույթը մինչկրիտիկական վիճակում

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող իզոտրոպ ուղղանկյուն սալի ոչ գծային տատանումների խնդիրը: Հետազոտությունը կատարված է երկու տիպի ոչգծայինությունների հաշվառմամբ. աերոառաձգական (քառակուսային և խորանարդային) և երկրաչափական (խորանարդային): Հայտնի է [1], որ շրջհոսող գազի բացակայության դեպքում սալի ոչ գծային տատանումների θ հաճախությունը A ամպլիտուդայից կախված ունի կոշտ բնույթ, այսինքն՝տատանումների ամպլիտուդայի մեծացման հետ հաճախությունն աճում է: Ներկայացվող աշխատանքում ցույց է տրված, որ շրջհոսող գազի առկայությունը բերում է նշված մոնոտոն աճող կապի ինչպես քանակական, այնպես էլ որակական փոփոխությանը:

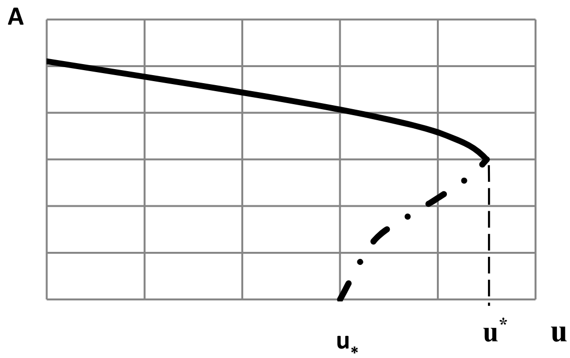
Рассматривается задача нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейности: аэродинамической (квадратичной и кубической) и геометрической (кубической). Известно [1], что зависимость частоты нелинейных колебаний пластинки θ от амплитуды A в отсутствие обтекающего потока носит жёсткий характер, т.е. с увеличением амплитуды частоты колебаний возрастают. В настоящей работе установлено, что присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости.

Введение. Имеются многочисленные исследования, посвящённые устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1-3] и в обзорной статье [4]. Исследования проведены как в линейной [1-7], так и в нелинейной постановке [2, 8-15]. Решением линейных задач получены те наименьшие значения u_{cr} величины скорости обтекающего потока $\vec{u}$, при которых рассматриваемая аэроупругая система теряет устойчивость. Линейные задачи были решены как точно, так и приближённо (в основном, используя метод Галеркина) [2]. Нелинейные задачи решены приближёнными методами и предметом исследований было изучение зависимости амплитуды A колебаний от скорости обтекающего потока как при докритических, так и при послекритических скоростях. Эти вопросы в задачах флаттера, когда пластинка обтекается с двух сторон с равными скоростями, детально исследованы в работах [2,13] и показано, что возможны следующие два типа нелинейных флаттерных колебаний:

а) «мягкое» возбуждение флаттера, т.е. при $u \le u_{cr}$ выполняется неравенство $\partial A / \partial u < 0$, а при $u > u_{cr}$ невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания. Т.е. в этом случае аэродинамические силы способны поддерживать незатухающие колебания при скоростях, меньших, чем критические;

б) возбуждение флаттерных колебаний носит «жёсткий» характер, т.е. при $u < u_{cr}$ возбудить незатухающие флаттерные колебания невозможно, а при $u \ge u_{cr}$ выполняется неравенство $\partial A / \partial u > 0$.

Нелинейные задачи флаттера пластин при учёте одной лишь геометрической нелинейности рассматривались также в работах [14,15]. В работах [8,9] показано, что аэродинамическая нелинейность (особенно её несимметричная квадратичная часть) приводит к появлению новых типов зависимостей «амплитуда-скорость» как в докритической стадии, так и послекритических скоростях. В частности, установлена возможность существования следующей зависимости между амплитудой нелинейных флаттерных колебаний и величиной скорости обтекающего потока (фиг.1): если постепенно увеличивать скорость потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до определённого значения скорости потока u^*, где колебания «сорвутся» и восстанавливается невозмущённое состояние пластинки. При снижении скорости невозмущённое состояние является устойчивой, пока $u > u_*$. При $u = u_*$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до определённого конечного значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает. u^* – «верхняя» критическая скорость флаттера [8,9] в том смысле, что при $u > u^*$ невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания, а u_* – «нижняя» критическая скорость флаттера, найденная на основе линейной теории, т.е. $u_* = u_{cr}$. В работе [10] исследованы влияния геометрической нелинейности на зависимость «амплитуда-скорость» в случае цилиндрической панели.



Фиг.1. Зависимость «амплитуда-скорость» с «нижними» и «верхними» критическими скоростями

Показано, что зависимость амплитуды нелинейных флаттерных колебаний от величины скорости обтекающего потока может иметь многозначный характер.

При изучении задач нелинейных колебаний другим очень важным вопросом является исследование амплитудно-частотной зависимости. В случае $u = 0$ характер зависимости амплитуды от частоты нелинейных колебаний пластинки носит жёсткий характер [1], т.е. с увеличением амплитуды частота колебаний увеличивается. Настоящая работа посвящена исследованию амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний тонкой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, т.е. изучению влияния скорости обтекающего потока на указанную зависимость. В работе [16] установлено, что присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости. В работе [17] исследована амплитудно-частотная зависимость нелинейных флаттерных колебаний в случае критического значения скорости обтекающего пластинку сверхзвукового потока. Показано, что: а) характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (благодаря аэродинамической нелинейности), идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек; б) область изменения допустимых частот, при которых можно возбудить установившиеся флаттерные колебания, может быть как конечной, так и полубесконечной; в) переход из одного типа амплитудно-частотной зависимости к другому можно регулировать (вплоть до невозможности возбуждения подобных колебаний) соответствующим выбором геометрических и физических параметров аэроупругой системы.

В настоящей работе исследуются влияния сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных флаттерных колебаний гибкой пластинки при докритических скоростях. Показано, что помимо результатов, полученных в случае критических скоростей, здесь имеют место также следующие: а) если скорость обтекающего потока намного меньше критической скорости, то существует интервал $\left[\theta_1, \theta_2\right]$ изменения частоты θ такой, что если $\theta < \theta_1$, то невозможно возбудить флаттерные колебания. При $\theta \in \left[\theta_1, \theta_2\right]$ функция $A(\theta)$ является однозначной, при $\theta > \theta_2$ функция $A(\theta)$ становится двузначной; б) с увеличением скорости обтекающего потока длина отрезка $\left[\theta_1, \theta_2\right]$ уменьшается и стремится к нулю при $\nu \to \nu_{cr}$; в) существует значение скорости обтекающего потока, начиная с которого характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (благодаря аэродинамической нелинейности), идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек.

1. Постановка задачи устойчивости

Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины h. Прямоугольная система координат α, β, γ выбрана так, что координатная плоскость α, β совпадает со срединной плоскостью пластинки, а координатные оси α и β направлены по сторонам рассматриваемой пластинки. Пусть, далее, пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью $\vec{u}$, направленной вдоль оси 0α. Принимаются следующие предположения:

а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях [18];

б) основные предположения теории гибких пластин, считая, что нормальные перемещения сравнимы с толщиной пластинки [1];

в) избыточное давление газа представляется по приближённой формуле «поршневой теории» [19,20].

На основе принятых предположений получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения пластинки [2]:

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 F+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2=0, \tag{1}$$

$$D\Delta^2 w-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}+$$

$$+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æ p_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}+æ p_\infty\left[M\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\right. \tag{2}$$

$$\left.+\frac{æ+1}{4}M^2\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{æ+1}{12}M^3\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^3\right]=0,$$

Здесь

$$D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)},\quad M=\frac{u}{a_\infty},\ a_\infty=\frac{æ p_\infty}{\rho_\infty},$$

$w(\alpha,\beta,t)$ – прогиб пластинки, M – число Маха, a_∞ – скорость звука для невозмущённого газа, æ – показатель политропы, μ – коэффициент Пуассона, ρ_0 – плотность материала пластинки, p_∞ и ρ_∞ – давление и плотность газа в невозмущённом состоянии, ε – коэффициент линейного затухания, $F=F(\alpha,\beta,t)$ – функция напряжений.

При исследовании вопросов устойчивости к уравнениям (1)–(2) присоединяются также условия на контуре пластинки. Здесь рассматривается шарнирно опёртая по всему контуру прямоугольная пластинка $\left(0\le\alpha\le a,\ 0\le\beta\le b\right)$, на краях которой действуют сжимающие усилия, средние значения которых равны p_α^0 и p_β^0, соответственно. Тогда, следуя [2], граничные условия задачи принимаются в виде:

при $\alpha=0,\ \ \alpha=a$

$$w=0,\quad M_\alpha=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)=0, \tag{3}$$

$$S^0=0,\ T_\alpha^0=-p_\alpha^0, \tag{4}$$

при $\beta=0,\ \beta=b$

$$w=0,\quad M_\beta=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right)=0, \tag{5}$$

$$S^0=0,\ T_\beta^0=-p_\beta^0, \tag{6}$$

где T_α^0, T_β^0, S^0 – средние значения усилий на кромках пластинки.

2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Приближённое решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3) и (5), будем искать в виде [2]:

$$w(\alpha,\beta,t) = f_1(t)\sin\lambda_1\alpha\cdot\sin\mu_1\beta + f_2(t)\sin\lambda_2\alpha\cdot\sin\mu_1\beta \tag{7}$$

$$\left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a},\ \mu_k = \frac{k\pi}{b}\right)$$

Подставив (7) в (1), получим линейное дифференциальное уравнение относительно функции F. Решение указанного уравнения, удовлетворяющего граничным условиям (4) и (6), представляется в виде:

$$F(\alpha,\beta,t) = \frac{Eh}{4}\left[-\frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}f_1f_2\cos(\lambda_1\alpha) + \frac{\mu_1^2}{8\lambda_1^2}f_1^2\cos(\lambda_2\alpha) + \frac{\mu_1^2}{9\lambda_1^2}f_1f_2\cos(\lambda_3\alpha) + \right.$$

$$+\frac{\mu_1^2}{32\lambda_1^2}f_2^2\cos(\lambda_4\alpha) + \frac{9\lambda_1^2\mu_1^2}{\Delta_{\lambda_1\mu_2}}f_1f_2\cos(\lambda_1\alpha)\cos(\mu_2\beta) -$$

$$\left. -\frac{\lambda_1^2\mu_1^2}{\Delta_{\lambda_3\mu_2}}f_1f_2\cos(\lambda_3\alpha)\cos(\mu_2\beta) + \left(\frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2}f_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{8\mu_1^2}f_1^2\right)\cos(\mu_2\beta)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left(P_\alpha^0\beta^2 + P_\beta^0\alpha^2\right),$$

Здесь и в дальнейшем $\Delta_{\lambda_i\mu_k} = \left(\lambda_i^2 + \mu_k^2\right)^2$.

Для определения $f_{ik}(t)$ воспользуемся уравнением (2). Подставляя (7) и найденное выражение для F в (2) и применяя метод Бубнова-Галеркина, для определения безразмерных неизвестных функций $x_1 = f_1(t)/h$, $x_2 = f_2(t)/h$ получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [2,13]:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3}k\nu x_2 + k\nu^2\left[\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_2^2 + \right.\\
&\qquad \left. +\nu x_2\left(\beta_{11}x_1^2 + \beta_{12}x_2^2\right)\right] + Qx_1\left(\gamma_{11}x_1^2 + \gamma_{12}x_2^2\right) = 0\\
&\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2x_2 + \frac{2}{3}k\nu x_1 + k\nu^2\left[\alpha_{21}x_1x_2 + \right.\\
&\qquad \left. +\nu x_1\left(\beta_{21}x_1^2 + \beta_{22}x_2^2\right)\right] + Qx_2\left(\gamma_{21}x_1^2 + \gamma_{22}x_2^2\right) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$, введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_i^2 = \frac{1}{\rho_0 h}\left[D\left(\lambda_i^2+\mu_1^2\right)^2 - \lambda_i^2 p_\alpha^0 - \mu_1^2 p_\beta^0\right] \quad (i=1,2),\\
&k = \frac{4æp_\infty}{\rho_0\omega_1^2 h^2}, \quad Q = \frac{h}{16\rho_0\omega_1^2},\\
&\nu = M\frac{h}{a}, \qquad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \qquad \chi = \frac{2}{\omega_1}\left(\varepsilon + \frac{æp_\infty}{\rho_0 h a_\infty}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{11} = \frac{2}{9}(æ+1), \quad \alpha_{12} = \frac{56}{45}(æ+1), \quad \alpha_{21} = \frac{16}{45}(æ+1),\\
&\beta_{11} = \beta_{21} = \frac{\pi^2}{40}(æ+1), \quad \beta_{22} = \frac{11\pi^2}{70}(æ+1), \quad \beta_{12} = -\frac{9\pi^2}{70}(æ+1),\\
&\gamma_{11} = Eh\left(\lambda_1^4+\mu_1^4\right), \ \gamma_{12} = \gamma_{21} = 4\gamma_{11} + Eh\left(\frac{81}{\Delta_{\lambda_1\mu_2}} + \frac{1}{\Delta_{\lambda_3\mu_2}}\right)\lambda_1^4\mu_1^4,\\
&\gamma_{22} = Eh\left(\lambda_2^4+\mu_1^4\right),
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где ω_1 и ω_2 – частоты первой и второй формы малых собственных колебаний пластинки, ν – приведённый параметр скорости.

3. Решение линейной задачи

Решению нелинейной задачи, как правило, предшествует анализ соответствующей линейной задачи. Это объясняется тем, что: а) на основе линейной задачи можно найти критическое значение параметра $\nu = \nu_{cr}$ (следовательно, и критическое значение скорости обтекающего потока $u_{cr} = ah^{-1}\nu_{cr}a_\infty$ или $M_{cr} = ah^{-1}\nu_{cr}$), при котором невозмущённое состояние пластинки становится неустойчивым относительно малых возмущений, и б) указанное критическое значение u_{cr} (или M_{cr} или ν_{cr}) будет необходимым и при исследовании задачи устойчивости в нелинейной постановке.

Итак, соответствующая (8) линейная система имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3}k\nu x_2 = 0,\\
&\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2 x_2 + \frac{2}{3}k\nu x_1 = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Представляя решение системы (11) в виде

$$x_1 = y_1 e^{\lambda\tau}, \quad x_2 = y_2 e^{\lambda\tau},$$

получим следующее характеристическое уравнение относительно λ:

$$\lambda^4 + 2\chi\lambda^3 + \left(\gamma^2+1+\chi^2\right)\lambda^2 + \chi\left(\gamma^2+1\right)\lambda + \gamma^2 + \frac{4}{9}k^2\nu^2 = 0.$$

Невозмущённая форма пластинки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица [21], записываются в виде:

$$\chi > 0, \quad \chi\left(1+\gamma^2\right) > 0,$$

$$\left(\gamma^2-1\right)^2 + 2\chi^2\left(1+\gamma^2\right) - \frac{16}{9}k^2\nu^2 > 0.$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из третьего неравенства следует, что в случае малых значений ν, все характеристические показатели λ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, и тривиальное решение $w \equiv 0$ асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям. Значение параметра $\nu = \nu_{cr}$, при котором два из характеристических показателей становятся чисто мнимыми, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическими, соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи. Согласно этому, из третьего неравенства получается следующая формула определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости пластинки [2]:

$$\nu_{cr} = \frac{3}{4}\frac{\gamma^2-1}{k}\sqrt{1+\frac{2\chi^2\left(\gamma^2+1\right)}{\left(\gamma^2-1\right)^2}}. \tag{12}$$

Принимая $\nu = \nu_{cr}$ из характеристического уравнения, найдём следующее значение θ_{cr} частоты колебания пластинки при линейном флаттере $\left(\lambda_{cr} = \pm i\theta_{cr}\right)$

$$\theta_{cr}^2 = \frac{1}{2}\left(\gamma^2+1\right). \tag{13}$$

Формулы, аналогичные (12) и (13), получены многими авторами (см. литературу, приведённую в [2,4]) и являются хорошими приближениями для ν_{cr} и θ_{cr}, определяемыми на основе точного решения [4-7, 22].

4. Исследование нелинейной задачи

Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (8). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости гибких пластин, загружённых консервативными силами, наличием членов с квадратичными нелинейностями. Указанные члены, имеющие аэродинамическое происхождение, характеризуют несимметричность нелинейности, присущую к задачам устойчивости гибких оболочек. Поэтому, приближённое периодическое решение системы (8) будем искать в виде [10]:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos\theta\tau + B_1\sin\theta\tau + C_1 + \ldots, \\ x_2 &= A_2\cos\theta\tau + B_2\sin\theta\tau + C_2 + \ldots \qquad \left(\theta = \omega/\omega_1\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $A_i,\ B_i,\ C_i\ \left(i=1,2\right)$ – неизвестные постоянные; ω – неизвестная частота нелинейных колебаний; точками обозначены члены, содержащие гармоники. Структура решения (14) отличается от существующих [2,13] наличием свободных членов $C_i \neq 0$, присутствие которых характерно задачам с квадратичной нелинейностью [10,23].

Подставим решение (14) в систему (8) и приравняем к нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos\theta\tau$ и $\sin\theta\tau$ (члены, содержащие гармоники, пренебрегаются).

Полученная при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближённого решения этой системы предполагается, что [10]: а) затухание системы достаточно мало ($\chi\left|B_i\right| << \left|A_i\right|,\ \left|B_i\right| << \left|A_i\right|;\ \left(i=1,2\right)$), и б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившееся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния, бесконечно мало отличающегося от невозмущённого $\left(\left|A_i\right| >> \left|C_j\right|;\ \ j=1{,}2\right)$. Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведениями величин B_1, B_2, C_1 и C_2, указанная нелинейная система представится следующими подсистемами:

уравнения, полученные приравниванием к нулю свободных членов:

$$C_1-\frac{2}{3}k\nu C_2+\frac{1}{2}k\nu^2\left(\alpha_{11}A_1^2+\alpha_{12}A_2^2\right)+k\nu^3A_2\left(\beta_{11}A_1C_1+\beta_{12}A_2C_2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}k\nu^3C_2\left(\beta_{11}A_1^2+\beta_{12}A_2^2\right)+QA_1\left(\gamma_{11}A_1C_1+\gamma_{12}A_2C_2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}QC_1\left(\gamma_{11}A_1^2+\gamma_{12}A_2^2\right)=0,$$

$$\gamma^2C_2+\frac{2}{3}k\nu C_1+\frac{1}{2}k\nu^2\alpha_{21}A_1A_2+k\nu^3A_1\left(\beta_{21}A_1C_1+\beta_{22}A_2C_2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}k\nu^3C_1\left(\beta_{21}A_1^2+\beta_{22}A_2^2\right)+QA_2\left(\gamma_{21}A_1C_1+\gamma_{22}A_2C_2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}QC_2\left(\gamma_{21}A_1^2+\gamma_{22}A_2^2\right)=0;$$

уравнения, полученные приравниванием к нулю коэффициентов при $\cos\theta\tau$:

$$\left(1-\theta^2\right)A_1+\chi\theta B_1-\frac{2}{3}k\nu A_2+2k\nu^2\left(\alpha_{11}A_1C_1+\alpha_{12}A_2C_2\right)+$$
$$+\frac{3}{4}k\nu^3A_2\left(\beta_{11}A_1^2+\beta_{12}A_2^2\right)+\frac{3}{4}QA_1\left(\gamma_{11}A_1^2+\gamma_{12}A_2^2\right)=0,$$
$$\left(\gamma^2-\theta^2\right)A_2+\chi\theta B_2+\frac{2}{3}k\nu A_1+\alpha_{21}k\nu^2\left(A_1C_2+A_2C_1\right)+$$
$$+\frac{3}{4}k\nu^3A_1\left(\beta_{21}A_1^2+\beta_{22}A_2^2\right)+\frac{3}{4}QA_2\left(\gamma_{21}A_1^2+\gamma_{22}A_2^2\right)=0;$$

уравнения, полученные приравниванием к нулю коэффициентов при $\sin\theta\tau$:

$$\left(1-\theta^2\right)B_1 - \frac{2}{3}k\nu B_2 - \chi\theta A_1 + \frac{1}{2}k\nu^3\beta_{11}A_1A_2B_1 +$$
$$+\frac{1}{4}k\nu^3\left(\beta_{11}A_1^2 + 3\beta_{12}A_2^2\right)B_2 + \frac{1}{4}Q\left(3\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2\right)B_1 +$$
$$+\frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_1A_2B_2 = 0,$$
$$\left(\gamma^2-\theta^2\right)B_2 - \chi\theta A_2 + \frac{2}{3}k\nu B_1 + \frac{1}{4}k\nu^3\left(3\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2\right)B_1 +$$
$$+\frac{1}{2}k\nu^3\beta_{22}A_1A_2B_2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1A_2B_1 +$$
$$+\frac{1}{4}Q\left(\gamma_{21}A_1^2 + 3\gamma_{22}A_2^2\right)B_2 = 0.$$

Третья подсистема учитывает эффект демпфирования. Согласно принятому предположению о малости затухания, указанная подсистема имеет следующее приближённое решение:

$B_1 \approx 0,\ \ B_2 \approx 0$ при $\chi \approx 0$

Пользуясь первой подсистемой, выразим C_1 и C_2 через A_1 и A_2 (см. (16)). Тогда, вторая подсистема, определяющая характеристики A_1 и A_2 амплитуды колебаний рассматриваемой аэроупругой системы в зависимости от параметров θ и ν, при $\chi \approx 0$ принимает вид:

$$\begin{aligned}
&A_1(1-\theta^2) - \frac{2}{3}k\nu A_2 + 2k\nu^2\alpha_{11}A_1C_1 + 2k\nu^2\alpha_{12}A_2C_2 +\\
&\quad+\frac{3}{4}k\nu^3A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0,\\
&A_2(\gamma^2-\theta^2) + \frac{2}{3}k\nu A_1 + k\nu^2\alpha_{21}(A_1C_2 + A_2C_1) +\\
&\quad+\frac{3}{4}k\nu^3A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{k\nu^2}{2\Delta}\left[(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_2 - \alpha_{21}A_1A_2\Delta_4\right]\\
C_2 &= -\frac{k\nu^2}{2\Delta}\left[\alpha_{21}A_1A_2\Delta_1 - \left(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2\right)\Delta_3\right]
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\Delta_1 = 1 + \frac{3}{2} Q\gamma_{11} A_1^2 + \frac{1}{2} Q\gamma_{12} A_2^2 + k\nu^3 \beta_{11} A_1 A_2$$

$$\Delta_2 = \gamma^2 + k\nu^3 \beta_{22} A_1 A_2 + \frac{3}{2} Q\gamma_{22} A_2^2 + \frac{1}{2} Q\gamma_{21} A_1^2$$

$$\Delta_3 = \frac{2}{3} k\nu + \frac{3}{2} k\nu^3 \beta_{21} A_1^2 + \frac{1}{2} k\nu^3 \beta_{22} A_2^2 + Q\gamma_{21} A_1 A_2$$

$$\Delta_4 = -\frac{2}{3} k\nu + \frac{3}{2} k\nu^3 \beta_{12} A_2^2 + \frac{1}{2} k\nu^3 \beta_{11} A_1^2 + Q\gamma_{12} A_1 A_2$$

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_3 \Delta_4 .$$

Отметим [2], что в частном случае, когда ν находится в достаточно малой окрестности ν_{cr}, то $A_1 \approx -A_2$. Действительно, из третьей подсистемы после линеаризации (учитывая достаточную малость затухания) получается:

$$\begin{aligned} &(1-\theta^2) B_1 - \frac{2}{3} k\nu B_2 - \chi\theta A_1 = 0, \\ &(\gamma^2 - \theta^2) B_2 + \frac{2}{3} k\nu B_1 - \chi\theta A_2 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Имея в виду, что на границе области флаттера $\nu = \nu_{cr}$ и $\theta = \theta_{cr}$, из (12), (13) и (17) находим:

$$\chi\theta_{cr} A_1 = \frac{1-\gamma^2}{2}\left(B_1 + B_2\right), \qquad -\chi\theta_{cr} A_2 = \frac{1-\gamma^2}{2}\left(B_1 + B_2\right);$$

Следовательно, $A_1 \approx -A_2$, если ν достаточно близко к ν_{cr} и θ к θ_{cr}.

Исследуем нелинейную систему (15) в двух случаях: $\nu = 0$ и $\nu < \nu_{cr}$.

4.1. Характер амплитудно-частотной зависимости в отсутствии обтекающего потока

Система (15) в этом случае ($\nu = 0$) имеет вид:

$$\begin{aligned} &A_1 (1-\theta^2) + \frac{3}{4} Q A_1 (\gamma_{11} A_1^2 + \gamma_{12} A_2^2) = 0, \\ &A_2 (\gamma^2 - \theta^2) + \frac{3}{4} Q A_2 (\gamma_{21} A_1^2 + \gamma_{22} A_2^2) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Легко заметить, что $A_1 = 0,\ A_2 = 0$ является решением этой системы (тривиальное решение). Рассмотрим вопрос существования нетривиальных решений. Здесь возможны три случая:

1) $A_1 \neq 0,\ A_2 = 0$,
2) $A_1 = 0,\ A_2 \neq 0$,
3) $A_1 \neq 0,\ A_2 \neq 0$.

1) ***Случай*** $A_1 \neq 0,\ A_2 = 0$. Из первого уравнения системы (18) в этом случае имеем (второе уравнение удовлетворяется) следующую известную [1] зависимость

между частотой и амплитудой нелинейных колебаний рассматриваемого типа $\left(w = f_1(t)\sin\lambda_1 x_1 \cdot \sin\mu_1 x_2\right)$:

$$1 - \theta^2 + \frac{3}{4}Q\gamma_{11}A_1^2 = 0,$$

которое показывает, что: а) при $\theta \le 1$ возбудить собственные установившиеся колебания невозможно, б) при $\theta \ge 1$ амплитудно-частотная зависимость, учитывая, что $\gamma_{11} > 0$, $Q > 0$, имеет «жёсткий» характер и представляется в виде:

$$\theta^2 = 1 + \frac{3}{4}Q\gamma_{11}A_1^2. \tag{19}$$

Формула (19) с учётом (9), (10) показывает, что амплитуда нелинейных собственных колебаний пластинки зависит только от отношения a/b.

2) ***Случай*** $A_1 = 0$, $A_2 \ne 0$. Характер амплитудно-частотной зависимости аналогичен предыдущему случаю. Помимо этого, вместо (19) имеем следующее представление:

$$\theta^2 = \gamma^2 + \frac{3}{4}Q\gamma_{22}A_2^2, \tag{20}$$

которое показывает, что частота собственных нелинейных колебаний рассматриваемого типа $\left(w = f_2(t)\sin\lambda_2 t \cdot \sin\mu_1 t\right)$ больше γ $\left(\gamma = \omega_2/\omega_1\right)$.

3) ***Случай*** $A_1 \ne 0$, $A_2 \ne 0$. Из системы (18) видно, что она может иметь ненулевое решение только при $\theta > \gamma$. С учетом этого, указанная система имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \frac{3}{4Q}\left[\gamma_{22}\left(\theta^2 - 1\right) + \gamma_{12}\left(\gamma^2 - \theta^2\right)\right]\frac{1}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \\ A_2^2 &= \frac{3}{4Q}\left[\gamma_{11}\left(\theta^2 - \gamma^2\right) + \gamma_{21}\left(1 - \theta^2\right)\right]\frac{1}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \end{aligned} \tag{21}$$

В силу (10), легко заметить, что $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 < 0$ (и равно нулю, когда $\mu_1 = 0$ $\left(b \to \infty\right)$). Следовательно, формулы (21) имеют место, если:

$$\gamma_{22}\left(\theta^2 - 1\right) + \gamma_{12}\left(\gamma^2 - \theta^2\right) < 0,$$

$$\gamma_{11}\left(\theta^2 - \gamma^2\right) + \gamma_{21}\left(1 - \theta^2\right) < 0$$

отсюда:

$$\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}}\left(\theta^2 - 1\right) < \theta^2 - \gamma^2 < \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\left(\theta^2 - 1\right). \tag{22}$$

Имея в виду, что $\gamma > 1$ и $\gamma_{12} > \gamma_{11}$, замечаем, что $\theta^2 - \gamma^2 < \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\left(\theta^2 - 1\right)$. Что касается левой части неравенства (22), то оно имеет место, если

$$\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}} < 1. \tag{23}$$

Соотношение $\dfrac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}}$ зависит только от $\dfrac{a}{b}$ и неравенство (23) имеет место, если $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \geq 2$. Если же $\gamma_{22} > \gamma_{11}$, то возбудить нелинейные колебания рассматриваемого типа ($A_1 \neq 0,\ A_2 \neq 0$) невозможно.

Таким образом, при отсутствии обтекающего потока, т.е. если $\nu = 0$, то нелинейные собственные колебания типа $w = \left(A_1 \sin \lambda_1 x_1 + A_2 \sin \lambda_2 x_1\right) \sin \mu_1 x_2 \cdot \cos \theta t$ (где $A_1 \neq 0$ и $A_2 \neq 0$) можно возбудить только при условии $\delta = \dfrac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}} < 1$. Тогда, частота колебаний указанного типа, согласно (22), удовлетворяет условию $\theta^2 > \left(\gamma^2 - \delta\right) \big/ \left(1 - \delta\right)$, а амплитуда колебаний определяется при помощи формул (21). Из этих формул, при условии (23) следует, что амплитуда колебаний является монотонно возрастающей функцией от частоты θ.

4.2. Характер амплитудно-частотной зависимости в докритической стадии

В этом случае система (15) решается численно при следующих исходных данных: $E = 7.3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\mu = 0.34$; $\rho_0 = 2.79 \cdot 10^3$ кг/м^3 (дюралюминий), $æ = 1.4$; $\rho_\infty = 1.29\,кг/м^3$; $a_\infty = 340.29\,м/с$ (воздух). Исследована зависимость амплитуды (в точке $\left(a/2, b/2, 0\right)$ пластинки) установившихся флаттерных колебаний A (в рассматриваемом случае $A = A_1$) от параметра θ при различных значениях ν, h/a и a/b.

Проведённые многочисленные расчёты показывают, что значения θ, при которых соответствующая (15) линейная система

$$\begin{cases} A_1\left(1 - \theta^2\right) - \dfrac{2}{3} k \nu A_2 = 0 \\ A_2\left(\gamma^2 - \theta^2\right) + \dfrac{2}{3} k \nu A_1 = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение, совпадает с корнем уравнения $A\left(\theta\right) = 0$. Указанные значения θ являются корнями уравнения

$$\left(1 - \theta^2\right)\left(\gamma^2 - \theta^2\right) + \frac{4}{9} k^2 \nu^2 = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) имеет два положительных корня при $\nu < \nu_{cr}$:

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \gamma^2 - \sqrt{\left(\gamma^2 - 1\right)^2 - \frac{16}{9} k^2 \nu^2}\right],\ \theta_2^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \gamma^2 + \sqrt{\left(\gamma^2 - 1\right)^2 - \frac{16}{9} k^2 \nu^2}\right]. \tag{25}$$

Приведённые численные расчёты показывают также, что, как и в случае $\nu = 0$, отношение a/b имеет существенное влияние (как качественное, так и количественное) на характер амплитудно-частотной зависимости. Поэтому, случаи $a > b$ и $a \le b$ рассматриваются отдельно.

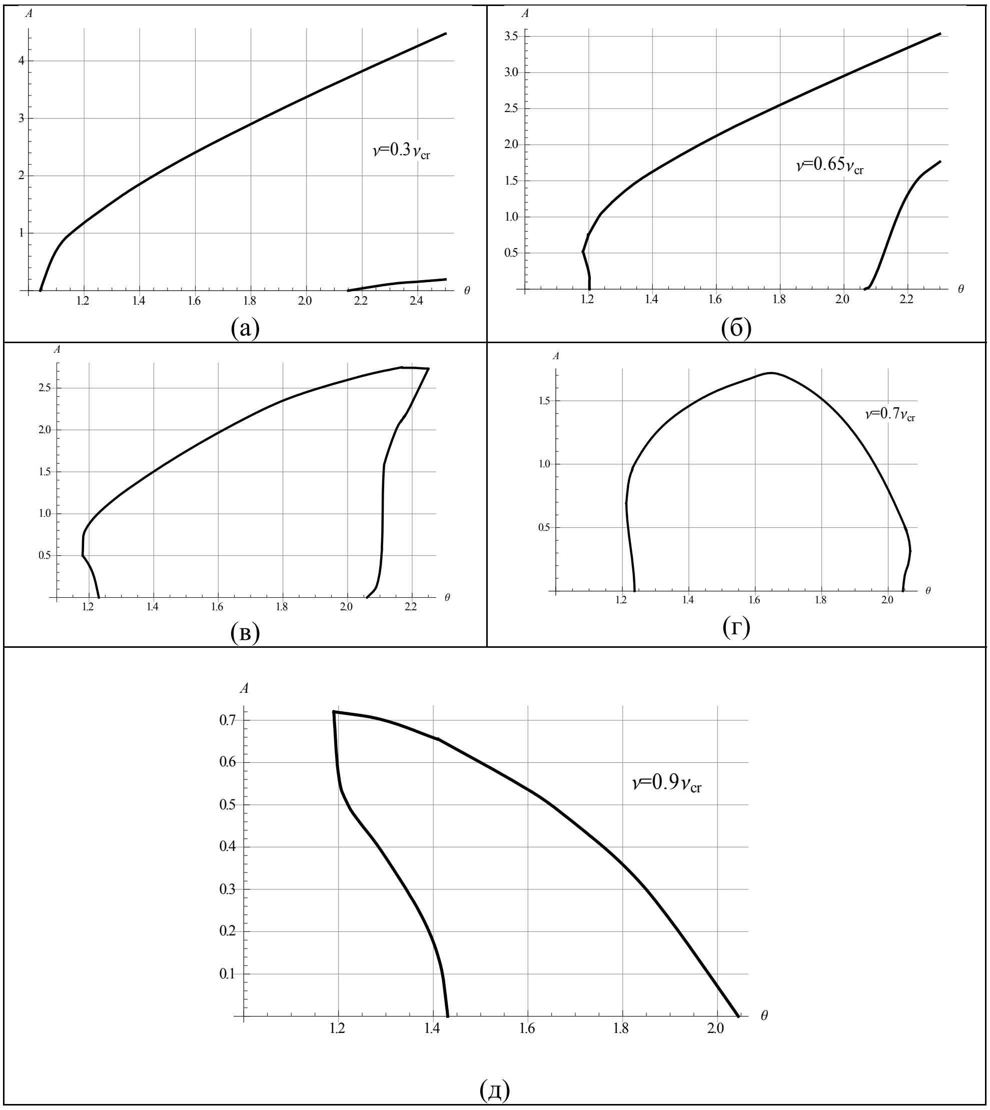
Случай $a > b$. Результаты вычисления значений амплитуды флаттерных колебаний при скоростях, меньших от критической скорости обтекающего потока, приведены в табл. 1. Для расчёта приняты: $\frac{b}{a} = 0{,}8$, $\frac{a}{h} = 70$.

Таблица 1. Значения $A(\theta)$ при различных значениях скорости обтекающего потока.

$\frac{v}{v_{cr}}$ \ θ	1.005	1.042	1.197	1.202	1.212	1.237	1.4	1.431	1.7	2.044	2.1	2.168	3
0.1	0	0.539	1.275	1.294	1.328	1.414	1.911	1.997	2.688	3.489	3.547	3.766 0	5.54 0.09
0.3	-	0	1.171	1.192	1.230	1.325	1.856	1.945	2.659	3.472	3.531	3.751 0.035	5.532 0.402
0.65	-	-	0.492 0.457	0.695 0	0.827	1.020	1.628	1.712	2.342	3.041	3.072 0	3.282 1.089	4.836 3.283
0.7	-	-	-	-	0.725 0.621	1.001 0	1.458	1.507	1.681	0.538 0	0.421 0.212	-	-
0.9	-	-	-	-	0.717 0.507	0.714 0.470	0.659 0.176	0.643 0	0.45	0	-	-	-

В табл. 1 и в последующих таблицах символ «-» означает, что система (15) имеет единственное тривиальное решение. В этой таблице, и в последующем, нулём обозначено кратное нулевое, тривиальное решение.

На основе табл.1 построена фиг.2, которая показывает изменение характера зависимости $A(\theta)$ от величины скорости обтекающего потока.



Фиг.2. Амплитудно-частотная зависимость при $a = 70h$ и $b / a = 0.8$ для различных значений скорости обтекающего потока

Из фиг.2 видно, что:

- если скорость обтекающего потока достаточно меньше критической скорости, то существует интервал $\left[\theta_1, \theta_2\right]$ изменения частоты θ такой, что при $\theta < \theta_1$ невозможно возбудить флаттерные колебания. При $\theta \in \left[\theta_1, \theta_2\right]$ функция $A(\theta)$ является однозначной, при $\theta > \theta_2$ функция $A(\theta)$ становится двузначной (фиг.2(а)). При этом, как показывают многочисленные расчёты, значения θ_1 и θ_2 совпадают с соответствующими значениями, полученными на основе формулы (25);

- с увеличением скорости обтекающего потока длина отрезка $\left[\theta_1, \theta_2\right]$ уменьшается и стремится к нулю при $\nu \to \nu_{cr}$;
- с увеличением скорости обтекающего потока характер амплитудно-частотной зависимости существенно меняется и в отличие от фиг.2(а) имеет место зависимость, представленная на фиг.2(б), левая ветвь которого идентична амплитудно-частотной зависимости нелинейных собственных колебаний;
- с дальнейшим увеличением скорости обтекающего потока область определения функции $A(\theta)$ из полубесконечной области $\left[\theta_1, +\infty\right)$ превращается в замкнутый отрезок $\left[\theta_*, \theta^*\right]$. Т.е. существует интервал $\left[\theta_*, \theta^*\right]$ изменения частоты θ, вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания. При этом, если $\theta \in \left[\theta_*, \theta^*\right]$, то значения амплитуды флаттерных колебаний находятся на границах замкнутых областей, как показано это на фигуре. Если $\theta \in \left[\theta_*, \theta_1\right]$ и $\theta \in \left[\theta_2, \theta^*\right]$, то $A(\theta)$ является двузначной функцией;
- при скоростях достаточно близко к критическим, амплитудно-частотная зависимость имеет мягкий характер в области $\left[\theta_*, \theta_2\right]$;

Таблица 2. Влияние относительной толщины пластинки на характер амплитудно-частотной зависимости при $\nu = 0.1\nu_{cr}$.

Случай $b = 0.8a$								
θ / $\frac{h}{a}$	1.0046	1.1	1.5	2	2.1685	2.3	3	10
1/70	0	0.877	2.184	3.389	3.766 0	4.054 0.032	5.538 0.088	19.486 0.437
1/110	0	0.877	2.1837	3.3897	3.766 0	4.0548 0.0322	5.5386 0.083	19.486 0.1892
Случай $b = 0.5a$								
θ / $\frac{h}{a}$	1.0019	1.2	1.5987	2	2.102	2.5	3	5
1/70	0	1.137	2.1461 0	2.977 0.448	3.1783 0.6087 0.2931	3.9392 1.076 0.9817 0.079	4.8628 1.5342 1.4645 0.058	8.4229 3.0522 3.0009 0.0501
1/110	0	1.137	2.1461 0	2.977 0.448	3.1783 0.6003 0.2931	3.9392 1.0689 0.9893 0.0611	4.8628 1.5264 1.4725 0.0382	8.4229 3.0402 3.0126 0.0181

Из таблиц 1 и 2, а также из фиг.2 видно, что если скорость обтекающего потока меньше критической скорости, то:

- когда скорость обтекающего потока достаточно меньше критической скорости, то амплитуда установившихся флаттерных колебаний практически не зависит от приведённой толщины h/a пластинки;
- предельные значения частот θ_1 и θ_2, будучи больше единицы, уменьшаются с увеличением a/b;

В табл. 2 рассмотрены только достаточно толстые пластинки, т.к. при $\nu = 0.1\nu_{cr}$ в тонких пластинках нарушается условие $M^2 > 2$.

Из фиг.2(б) видно, что характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (благодаря аэродинамической нелинейности), идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек. Т.е. функция $\theta(A)$ имеет единственную точку минимума, и значение этой функции в точке минимума увеличивается с уменьшением a/b. Численные расчёты показывают также, что: a) предельное значение частоты θ_* (меньше которого невозможно возбудить флаттерные колебания), будучи больше единицы, увеличивается с уменьшением a/b; b) установившиеся флаттерные колебания существуют при частотах $\theta > \theta_*$.

Таблица 3. Влияние абсолютной толщины на значения амплитуды флаттерных колебаний при $\nu = 0.9\nu_{cr}$ и $b = 0.8a$

θ / h/a	1	1.2	1.4	1.430	1.4307	1.9	1.914	2	3
1/70	-	0.7177 0.5246	0.6591 0.1759	0.6439 0.0269	0.6436 0	0.2284	0	-	-
1/100	-	-	-	0.4429 0.1617	0.48382 0	2.8977	2.9371 0	3.1417 0.2457	5.4760 1.0392
1/200	-	-	-	-	0	2.8952	2.9349 0	3.1707 0.2372	5.4817 0.7649
1/300	-	-	-	-	0	2.8951	2.9349 0	3.1707 0.2371	5.4817 0.7640

К дополнению рассмотренных случаев, ниже приведены также табл. 3 и 4, показывающие влияние геометрических параметров задачи на процесс перехода амплитудно-частотной зависимости из одного типа к другому. Причём, табл.3 показывает влияние h/a, а табл. 4 – влияние a/b на характер указанного перехода.

Табл. 3 показывает, что при достаточно больших скоростях обтекающего потока уменьшение h/a сначала приводит к изменению характера функции $A(\theta)$. А именно, фиг.2(г) переходит в фиг.2(в).

Таблица 4. Значения амплитуды флаттерных колебаний при $\nu = 0.9\nu_{cr}$ и $a = 70h$

θ / b/a	1.034	1.05	1.07	1.084	1.113	1.22	1.275	1.310	1.505	1.610	1.9	2.05
0.2	0	0.04	0.027	0	-	-	-	-	-	-	-	-
0.4	-	-	-	-	0	0.138	0.083	0	-	-	-	-
0.6	-	-	-	-	-	0.392 0.387	0.409 0	0.391	0.225	0	-	-
0.9	-	-	-	0.804 0.734	0.829 0.676	0.845 0.539	0.838 0.473	0.832 0.429	0.762 0	0.707	0.490	0

Таблица 4 показывает, что ширина области однозначности функции $A(\theta)$ увеличивается с уменьшением a/b.

Случай $a \le b$. В табл. 5 приведены результаты численных вычислений значений амплитуды $A(\theta)$ флаттерных колебаний квадратной пластинки в докритической стадии $(\nu < \nu_{cr})$ при различных значениях h/a и различных значениях докритической сверхзвуковой скорости потока.

Из этой таблицы видно, что с увеличением скорости обтекания характер амплитудно-частотной зависимости меняется и существует определённое значение $\overline{\nu}$ параметра скорости ν ($\overline{\nu}$ зависит от геометрических параметров задачи и $\overline{\nu} < \nu_{cr}$), при превышении которого происходит качественное изменение характера амплитудно-частотной зависимости. Указанное изменение происходит следующим образом:

- если $\nu < \overline{\nu}$, то амплитудно-частотная зависимость носит жёсткий характер (аналог фиг.2(а)). При этом существует интервал изменения частоты $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ (где $\theta_1 > 1$), в котором функция $A(\theta)$ является однозначной функцией.

Расчёты показывают, что: a) с уменьшением a/b амплитуда флаттерных колебаний уменьшается, b) если же $\theta > \theta_2$, то функция $A(\theta)$ является многозначной, c) с уменьшением h/a значение θ_1 увеличивается.

Таблица 5. Значения амплитуды флаттерных колебаний при $\nu < \nu_{cr}$ и $a = b$.

ν	θ / h/a	1.2	1.4	1.5	2	2.5	3	4
$\nu = 0.1\nu^*$	1/80	1.351	1.896	2.234	3.469	4.592 0.004	5.671 0.049	7.765 0.068
	1/200	1.351	1.896	2.234	3.469	4.592 0.004	5.671 0.049	7.765 0.068
$\nu = 0.5\nu^*$	1/80	0.651	1.771	2.013	3.384	4.548 0.107	5.643 0.305	7.751 0.552
	1/200	0.596	1.618	1.621	3.369	4.542 0.103	5.641 0.257	7.553 0.333
$\nu = 0.9\nu^*$	1/80	-	1.102	1.425 0.472	2.949	4.133 0.747	5.213 1.642	7.249 3.002
	1/200	-	-	-	3.081	4.414 0.367	5.571 0.521	7.724 0.612

Табл. 5 показывает также, что:

- если $\overline{\nu} < \nu < \nu_{cr}$, то характер амплитудно-частотной зависимости имеет вид, аналогичный фиг.2(б). При этом, с увеличением скорости обтекающего потока длина отрезка $[\theta_1, \theta_2]$ уменьшается и стремится к нулю при $\nu \to \nu_{cr}$;
- если пластинка достаточно толстая, то существует значение скорости обтекающего потока $\tilde{\nu}$ такое, что в отличие от рассмотренных случаев, где область определения функции $A(\theta)$ является полубесконечной, здесь область определения функции $A(\theta)$ является конечной (аналог фиг.2(в,г)).

Таким образом, установлена возможность существования незатухающих нелинейных колебаний с амплитудой $A(\theta)$. Выявлен характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний и исследовано влияние присутствия обтекающего потока на характер указанной зависимости. Установлено также, что переход от одного типа амплитудно-частотной зависимости к другому можно регулировать не только (вплоть до невозможности возбуждения подобных колебаний) соответствующим выбором геометрических и физических параметров рассматриваемой аэроупругой системы, но и величиной скорости обтекающего потока.

Отметим также, что в случае многозначности функции $A(\theta)$, характеризующей амплитудно-частотную зависимость флаттерных колебаний ($A=\varphi_1(\theta)$ и $A=\varphi_2(\theta)$, притом $\varphi_1(\theta)<\varphi_2(\theta)$), в зависимости от величины амплитуды возмущений система совершает незатухающие флаттерные колебания вокруг одного из указанных состояний.

5. Основные результаты

В заключении приведём некоторые на наш взгляд наиболее существенные, новые результаты, полученные в данной работе. Они являются следствием влияния набегающего потока газа на амплитудно-частотную зависимость нелинейных колебаний рассматриваемой аэроупругой системы. Для чёткости и наглядности отметим ещё раз [1], что зависимость частоты нелинейных колебаний пластинки θ от амплитуды A в отсутствие обтекающего потока носит жёсткий характер, т.е. с увеличением амплитуды частота колебаний монотонно возрастает. В настоящей работе установлено, что:

- присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости;
- переход одного типа амплитудно-частотной зависимости к другому можно регулировать соответствующим выбором как геометрических и физических параметров аэроупругой системы, так и выбором скорости набегающего потока.

Кроме указанных выше результатов, имеющих общий характер, приведём и другие, относящиеся к характеру функции $A(\theta)$:

- существует интервал $[\theta_1,\theta_2]$ изменения частоты θ такой, что при $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$ функция $A(\theta)$ является однозначной. При этом, как показывают многочисленные расчёты, значения θ_1 и θ_2 практически совпадают с соответствующими значениями, полученными на основе формулы (25);
- с увеличением скорости обтекающего потока длина отрезка $[\theta_1,\theta_2]$ уменьшается и стремится к нулю при $\nu\to\nu_{cr}$;
- с увеличением скорости обтекающего потока характер амплитудно-частотной зависимости может качественно меняться. В частности, характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (благодаря аэродинамической нелинейности), идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек;
- в зависимости от геометрии пластинки существует определённое значение скорости обтекающего потока, начиная с которого область определения функции $A(\theta)$ из полубесконечной области $[\theta_1,+\infty)$ превращается в замкнутый отрезок $[\theta_*,\theta^*]$. Т.е. существует интервал $[\theta_*,\theta^*]$ изменения

частоты θ, вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2C243.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек //Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел. М.: Наука, 1978. Т.11. С.67-122.
5. Хедежпет Д. Флаттер прямоугольных свободно опертых панелей при больших сверхзвуковых скоростях. // Сб. «Механика». 1958. ИЛ, №2. С.103-125.
6. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. //ПММ. 1956. Т.20. Вып.2. С.211-222.
7. Miles J. W., Supersonic flutter of a cylindrical shell, Journ. Aeronaut. Sci. 24, №2 (1957); 25, №5 (1958).
8. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Нелинейный флаттер ортотропной прямоугольной пластинки. //В сб. научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной сред». 2010. Т.1. С.118-123.
9. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. & Marzocca P. On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post- Critical Flight Conditions. Journal of Aerospace Engineering, 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000246 (Jul. 19, 2012), ISSN: 0893-1321, 2012.
10. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв.АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №1. С.92-98.
11. P. Marzocca, L. Librescu, D.H. Kim, I. Lee, S. Schober «Generalized Transonic Unsteady Aerodynamics via Computational-Fluid-Dynamics Indicial Approach», AIAA Journal, Vol. 43, №4, April 2005, pp.915-921.
12. D.-H. Kim, I. Lee. P. Marzocca, L. Librescu, S. Schober «Nonlinear Aeroelastic Analysis of an Airfoil Using CFD-Based Indicial Approach», //Journal of Aircraft, Vol. 42, №5, September–October 2005, pp. 1340-1344.
13. Болотин В.В., Гаврилов Ю.В., Макаров Б.П. и Швейко Ю.Ю. Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях. // Изв. АН СССР. ОТН. «Механика и машиностроение». 1959. № 3.
14. Fung Y. C, On two-dimensional panel flutter, Journ. Aeronaut. Sci. 25, № 3 (1958).
15. Шен С. Приближённое исследование нелинейных флаттерных задач. //Сб. «Механика». 1959. ИЛ, № 4.
16. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №3. С.24-37.
17. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки при критических скоростях. //Прикладная математика и механика, Гюмри, 2014. Вып.А. №1. С. 20-39.
18. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. М.: Гостехтеориздат, 1949.

19. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. //Journ. Aeronaut. Sci. 23. №6. 1956.
20. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.20. Вып.6.
21. Меркин Д.П. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312с.
22. Швейко Ю.Ю. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа. //Изв. АН СССР. ОТН. 1960. №6.
23. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек. //Изв. АН Арм.ССР. Сер.физ-мат. наук. 1960. Т.13. №1. С.47–58.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН Армении, профессор, ведущий научный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (060) 71 00 89; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Микилян Марине Александровна – к.ф.-м.н., доцент, старший научный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (091) 191129; **E-mail**: mikilyan@rau.am

Сагоян Рафаэль Оникович – внештатный работник Института механики НАН Армении
Тел.: (093) 248226; **E-mail:** rafael1984@mail.ru.

Поступила в редакцию 17.07.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

УДК 536.21; 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕСВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Геворкян Р.С.

Ключевые слова: Неклассическая краевая задача, асимптотический метод, внутренняя задача.

Keywords: The non-classical boundary value problem, asymptotic method, the internal task.

Բանալի բառեր. Ոչ դասական եզրայինխնդիր, ասիմպտոտիկ եղանակ, ներքին խնդիր:

Գևորգյան Ռ.Ս.

Երկշերտ սալի ստացիոնար ջերմահաղորդականության և ջերմաառաձգականության ոչ կապակցված ոչ դասական եզրային պայմաններով խնդիրների ասիմպտոտիկական լուծումները

Հաշվի առնելով ոչ դասական խնդիրների կիրառական նշանակությունը երկշերտ օրթոտրոպ սալի համար ասիմպտոտիկ եղանակով կառուցվում են ջերմահաղորդականության և ջերմաառաձգականության ոչ կապակցված ոչ դասական եզրային պայմաններով խնդիրների լուծումները: Բերված են վերլուծական օրինակներ:

Gevorgyan R.S.

Asymptotic solutions of non-stationary problems of thermal conductivity and thermoelasticity with nonclassical boundary conditions for the two-layer plates

The practical importance of the nonclassical solutions is well known. The solutions of the nonclassical boundary value problems of stationary heat conduction and nonconnected thermoelasticity theory are constructed for the orthotropic two-layer plates. Examples are given with their analysis.

В последние годы проявляется повышенный интерес к неклассическим краевым задачам математической физики, когда по какой-либо причине на одной части поверхности области, занимаемой материальным телом, заданы граничные условия больше,чем необходимы для краевой задачи данного класса, а на другой части – меньше, чем необходимы или вообще не заданы [1–5]. Возникновение таких задач, в частности, связано с изучением НДС литосферных плит Земли [6].

Одним из эффективных методов решения подобных задач является асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений [7,8]. В настоящей работе асимптотическим методом строятся общие интегралы в виде рекуррентных формул для уравнений стационарной задачи теплопроводности и несвязанной теории термоупругости. Удовлетворив неклассическим смешанным граничным условиям, однозначно определены все функции интегрирования, позволяющие вычислить температурную функцию, а также компоненты тензора напряжений и вектора перемещения двухслойной ортотропной пластины переменной толщины. Приведён пример. Задача, в частности, может моделировать напряжённо-деформированное состояние земной коры в зоне коллизии тектонических плит Земли [1,2,6,9].

1. Постановка краевых задач и общий интеграл разрешающих уравнений.

Рассмотрим двухслойный пакет пластин из ортотропных материалов, слои которого ограничены гладкими непересекающимися поверхностями и относительно выбранной прямоугольной системы координат Oxyz удовлетворяют условиям $\varphi_1(x,y) > \varphi_0(x,y) > \varphi_2(x,y),\ h = \mathrm{Sup}\left|\varphi_1 - \varphi_2\right| << l,\ -\infty < (x,y) < \infty$,

где $l -$ некоторый продольный характерный размер тонкого пакета.

Пусть на лицевой поверхности $z = \varphi_1(x,y)$ двухслойного пакета заданы неклассические граничные условия задачи стационарной теплопроводности (и изменение температуры, и плотность потока теплоты):

$$\begin{gathered} z = \varphi_1(x,y):\quad \theta = \theta^+,\quad \theta = T - T_0 \\ -\frac{q_x}{\Lambda_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{q_y}{\Lambda_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{q_z}{\Lambda_1} = q^+_{\vartheta_1}(x,y),\quad q_x = -\lambda_{11}\frac{\partial\theta}{\partial x}\ (x,y,z;\,1,2,3) \end{gathered} \tag{1.1}$$

а также неклассические механические граничные условия одновременно и первой, и второй краевых задач теори упругости:

$$\begin{gathered} z = \varphi_1(x,y):\ \frac{\sigma_{jx}}{\Lambda_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\sigma_{jy}}{\Lambda_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\sigma_{jz}}{\Lambda_1} = 0 \\ u_x(\varphi_1) = u_x^+\ \ (x,y,z),\quad \Lambda_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)^2},\ i = 0,1,2 \end{gathered} \tag{1.2}$$

противоположной лицевой поверхности $z = \varphi_2(x,y)$ пакета никакие условия не заданы. (Задачи с такими или аналогичными граничными условиями считаются неклассическими краевыми задачами теории упругости). Доказана, что всегда существует классическая краевая задача теории упругости, решение которой совпадает с решением неклассической задачи [6]. Требуется определить температурное поле и напряжённо-деформированное состояние пакета, когда между слоями выполняются условия полного теплового

$$\begin{gathered} z = \varphi_0(x,y):\ \theta^{(1)}(\varphi_0) = \theta^{(2)}(\varphi_0) \\ \left(q_x^{(1)} - q_x^{(2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \left(q_y^{(1)} - q_y^{(2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} - \left(q_z^{(1)} - q_z^{(2)}\right) = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

а также полного механического

$$\begin{gathered} z = \varphi_0:\ \left(\sigma_{jx}^{(1)} - \sigma_{jx}^{(2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \left(\sigma_{jy}^{(1)} - \sigma_{jy}^{(2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} + \\ +\sigma_{jz}^{(1)} - \sigma_{jz}^{(2)} = 0,\ \ u_j^{(1)} = u_j^{(2)},\ j = x,y,z \end{gathered} \tag{1.4}$$

контактов краевых задач теории упругости.

Для решения поставленных краевых задач приведём уравнения и соотношения теории термоупругости ортотропного тела с учётом объёмных сил $\vec{P} = \left\{P_x, P_y, P_z\right\}$ и изменения температурного поля $\theta = T - T_0$ по модели Дюгамеля – Неймана

$$\begin{gathered} \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + P_x = 0, \frac{\partial u_x}{\partial x} = e_1 + \beta_{11}\theta, \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = a_{44}\sigma_{yz} \\ e_m = a_{1m}\sigma_{xx} + a_{2m}\sigma_{yy} + a_{3m}\sigma_{zz},\quad m = 1,2,3\ \ (y,z,x;4,5,6) \end{gathered} \tag{1.5}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, u_x, u_y, u_z – компоненты вектора перемещения, a_{ij} – коэффициенты упругой податливости, β_{jj} – коэффициенты теплового линейного расширения.

Допускается возможное медленное изменение во времени заданных функций, при этом не вызывая ощутимых динамических эффектов в пакете слоёв. Исходя из этого, здесь и в дальнейшем в формулах и соотношениях время t не будет фигурировать. Приведём также уравнение стационарной задачи теплопроводности ортотропного тела [10,11]

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}=W,\ \ q_x=-\lambda_{11}\frac{\partial\theta}{\partial x}\ \left(x,y,x;\,1,2,3\right) \tag{1.6}$$

где q_x, q_y, q_z – компоненты вектора плотности теплового потока, $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$ – коэффициенты теплопроводности, W – заданная плотность источников тепла.

В уравнениях и соотношениях (1.5), (1.6) перейдём к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам:

$$\xi=\frac{x}{l},\ \ \eta=\frac{y}{l},\ \zeta=\frac{z}{h}=\varepsilon^{-1}\frac{z}{l},\ u=\frac{u_x}{l},\ v=\frac{u_y}{l},\ w=\frac{u_z}{l},\ \varepsilon=\frac{h}{l} \tag{1.7}$$

где l – некоторый продольный характерный размер слоёв.

Подставив (1.7) в (1.5), (1.6), получаем сингулярно-возмущённую геометрическим малым параметром ε систему уравнений и соотношений, асимптотическое решение которых согласно [7,8] складывается из двух решений. Первое из них, называемое внутренним решением, удовлетворяет граничным условиям, заданным на лицевых поверхностях пакета. Второе решение, называемое решением задачи пограничного слоя, на лицевых поверхностях пластины удовлетворяет соответствующим однородным (нулевым) условиям, а в сумме с внутренним решением должно удовлетворить граничным условиям, заданным на торцах пакета. Поскольку рассматриваются ортотропные слои (пластины бесконечных размеров), следовательно, решается только внутренняя задача, которое ищется в виде асимптотического разложения

$$Q^{(i)}\left(x,y,z\right)=\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{s+\chi_Q}Q^{(i,s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right),\ Q^{(i,m)}=0,\ m<0,\ i=1,2 \tag{1.8}$$

где $Q^{(i)}$ – любая из неизвестных компонент вектора перемещения u_j или тензора напряжений σ_{ij}; χ_Q характеризует асимптотический порядок соответствующей величины, причём $\chi_u=0$ для всех перемещений, $\chi_\sigma=-1$ – для всех напряжений, а для температурной функции и компонент вектора плотности теплового потока должны быть соответственно $\chi_\theta=-1,\ \chi_{q_x}=\chi_{q_y}=-1,\ \ \chi_{q_z}=-2$.

Одновременно представим заданные объёмные силы и плотности источников тепла W в виде асимптотичеких разложений:

$$P_x = \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{-2+s} l^{-1} P_x^{(s)} \left(\xi, \eta, \zeta\right) \ (x, y, z), \ W = \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{-3+s} l^{-1} W^{(s)} \left(\xi, \eta, \zeta\right)$$
$$Q^{(0)} = Q, \ Q^{(s)} = 0, \ s \neq 0, \ Q = \left\{P_j, W\right\} \tag{1.9}$$

Это означает, что объёмные силы и источник тепла могут влиять на напряжённо-деформированное состояние пакета слоёв, начиная с первого шага итерационного процесса, если их асимптотические порядки будут, соответственно, ε^{-2} и ε^{-3}.

Подставив (1.8), (1.9) в систему сингулярных уравнений и приравняв коэффициенты при $\varepsilon^s \left(s = 0, 1, 2, \ldots, S\right)$ в левых и правых частях уравнений, получим непротиворечивую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (1.8), что свидетельствует о правильности выбранной асимптотики. После интегрирования полученной системы разрешающих уравнений для температурной функции, компонент тензора напряжений и вектора перемещения получаются рекуррентные формулы, которым присвоим номер соответствующего слоя ($i = 1, 2$) пакета и представим в размерных координатах и перемещениях. Для температурной функции будет:

$$\theta_i^{(s)} = zA^{(i,s)} + B^{(i,s)} + \frac{1}{\lambda_{33}^{(i)}} \Psi^{(i,s)}$$
$$\Psi^{(i,s)} = -\int_0^z \left[\int_0^\beta \left(\lambda_{11}^{(i)} \frac{\partial^2 \theta_i^{(s-2)}}{\partial x^2} + \lambda_{22}^{(i)} \frac{\partial^2 \theta_i^{(s-2)}}{\partial y^2} + W_i^{(s)} \right) d\alpha \right] d\beta \tag{1.10}$$

и для компонент тензора напряжений и вектора перемещения

$$\sigma_{jz}^{(i,s)} = \sigma_{jz0}^{(i,s)}(x, y) + \sigma_{jz*}^{(i,s)}(x, y, z), \quad j = x, y, z$$
$$\sigma_{xx}^{(i,s)} = A_{13}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)}(x, y) + \sigma_{xx*}^{(i,s)}(x, y, z) \ (xx, yy;\, 1, 2)$$
$$u_x^{(i,s)} = u_{x0}^{(i,s)} \left(x, y\right) + zA_{55}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} + u_{x*}^{(i,s)}(x, y, z) \quad (x, y, z; 5, 4, 3), \ i = 1, 2$$
$$\sigma_{xy}^{(i,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(i)}} \left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial x} \right), \ \Delta^{(i)} = a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{12}^{(i)2}$$
$$\sigma_{jz*}^{(i,s)} = -\int_0^z \left(\frac{\partial \sigma_{jx}^{(i,s-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(i,s-1)}}{\partial y} + P_j^{(i,s)} \right) dz, \quad j = x, y, z$$
$$\sigma_{xx*}^{(i,s)}(x, y, z) = A_{13}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} + B_{11}^{(i)} \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial x} + B_{12}^{(i)} \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial y} + \gamma_{11}^{(i)} \theta_i^{(s)} \ \left(x, y; 1, 2\right)$$
$$u_{x*}^{(i,s)} = \int_0^z \left(a_{55}^{(i)} \sigma_{xz*}^{(i,s)} - \frac{\partial u_z^{(i,s-1)}}{\partial x} \right) dz \quad (x, y; 5, 4) \tag{1.11}$$
$$u_{z*}^{(i,s)} = \int_0^z \left(A_{33}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} - A_{13}^{(i)} \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial x} - A_{23}^{(i)} \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial y} + \gamma_{33}^{(i)} \theta_i^{(s)} \right) dz$$

$$A_{33}^{(i)}=a_{13}^{(i)}A_{13}^{(i)}+a_{23}^{(i)}A_{23}^{(i)}+a_{33}^{(i)},\qquad A_{kk}^{(i)}=a_{kk}^{(i)},\ k=4,5,6$$

$$A_{j3}^{(i)}=-a_{13}^{(i)}B_{j1}^{(i)}-a_{23}^{(i)}B_{j2}^{(i)},\ \ j=1,2;\ \ B_{11}^{(i)}=\frac{a_{22}^{(i)}}{\Delta^{(i)}},\ \ B_{12}^{(i)}=-\frac{a_{12}^{(i)}}{\Delta^{(i)}}\ \ (1,2)$$

$$\gamma_{11}^{(i)}=\frac{a_{12}^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-a_{22}^{(i)}\beta_{11}^{(i)}}{\Delta^{(i)}}\quad (1,2),\quad \gamma_{33}^{(i)}=A_{13}^{(i)}\beta_{11}^{(i)}+A_{23}^{(i)}\beta_{22}^{(i)}+\beta_{33}^{(i)}$$

Полученный общий интеграл (1.10), (1.11) системы уравнений (1.5), (1.6) содержит по восемь функций интегрирования для каждого слоя $A^{(i,s)},B^{(i,s)}$, $\sigma_{xz0}^{(i,s)},\sigma_{yz0}^{(i,s)},\sigma_{zz0}^{(i,s)},u_{x0}^{(i,s)},\ u_{y0}^{(i,s)},u_{z0}^{(i,s)},\ \ i=1,2$, которые однозначно определяются из неклассических тепловых и механических граничных условий (1.1)–(1.4) и условий контакта слоёв под номерами $i=1$ и $i=2$.

2. Решение поставленных краевых задач. Удовлетворив неклассическим граничным условиям (1.1), (1.2), получаем значения восьми функций интегрирования для первого слоя:

$$A^{(1,s)}=-\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}}\left(\Lambda_1 q_{\vartheta_1}^{+(s)}(x,y)-q_{1x}^{(s-2)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-q_{1y}^{(s-2)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\Psi^{(1,s)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=\varphi_1}$$

$$B^{(1,s)}=\theta^{+(s)}-\frac{1}{\lambda_{33}}\Psi^{(1,s)}\left(x,y,\varphi_1\right)+$$

$$+\frac{\varphi_1}{\lambda_{33}^{(s)}}\left(\Lambda_1 q_{\vartheta_1}^{+(s)}(x,y)-q_{1x}^{(s-2)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-q_{1y}^{(s-2)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\Psi^{(1,s)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=\varphi_1}$$

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)}(x,y)=F_x^{(s)}+\frac{A_{13}^{(1)}}{\Delta_1^{(1)}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\left(F_x^{(s)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+F_y^{(s)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+F_z^{(s)}\right)\ (x,y;1,2)\tag{2.1}$$

$$\sigma_{zz0}^{(1,s)}(x,y)=\frac{1}{\Delta_1^{(1)}}\left(F_x^{(s)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+F_y^{(s)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+F_z^{(s)}\right)$$

$$u_{x0}^{(1,s)}\left(x,y\right)=u_x^{+(1,s)}-A_{55}^{(1)}\varphi_1\sigma_{xz0}^{(1,s)}-u_{x*}^{(1,s)}(z=\varphi_1)\quad (x,y;5,4)$$

$$u_{z0}^{(1,s)}\left(x,y\right)=u_z^{+(1,s)}-A_{33}^{(1)}\varphi_1\sigma_{zz0}^{(1,s)}-u_{z*}^{(1,s)}(z=\varphi_1)$$

$$F_x^{(s)}=\Lambda_1\Phi_{\vartheta x}^{+(s)}+\sigma_{xx*}^{(1,s)}\left(z=\varphi_1\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\sigma_{xy}^{(1,s)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\sigma_{xz*}^{(1,s)}\left(z=\varphi_1\right)\quad (x,y)$$

$$F_z^{(s)}=\Lambda_1\Phi_{\vartheta z}^{+(s)}+\sigma_{xz*}^{(1,s)}\left(z=\varphi_1\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\sigma_{yz*}^{(1,s)}\left(z=\varphi_1\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\sigma_{zz*}^{(1,s)}\left(z=\varphi_1\right)$$

$$\Delta_k^{(i)}=1-A_{13}^{(i)}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2-A_{23}^{(i)}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)^2,\ \ i=1,2;\ \ k=0,1,2$$

$$\Phi_{\vartheta x}^{+(0)} = \Phi_{\vartheta x}^{+},\ \ u_x^{+(1,0)} = u_x^{+},\ \ \Phi_{\vartheta x}^{+(s)} = u_x^{+(1,s)} = 0,\ \ s \neq 0 \quad (x, y, z)$$

а из условий полного контакта слоёв (1.3),(1.4) получаем значения остальных восьми функций интегрирования для второго слоя:

$$A^{(2,s)} = \frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}}\left[\left(q_{1x}^{(s-2)} - q_{2x}^{(2,s-2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \left(q_{1y}^{(s-2)} - q_{2y}^{(s-2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} - q_{1z}^{(s)} - \frac{\partial\Psi^{(2,s)}}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=\varphi_0}$$

$$B^{(2,s)} = \varphi_0\left(A^{(1,s)} - A^{(2,s)}\right) + B^{(1,s)} + \left(\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}}\Psi^{(1,s)} - \frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}}\Psi^{(2,s)}\right)\Bigg|_{z=\varphi_0}$$

$$\sigma_{xz0}^{(2,s)} = W_{xz}^{(s)} + A_{13}^{(2)}\sigma_{zz0}^{(2,s)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} \qquad (x, y; 13, 23)$$

$$\sigma_{zz0}^{(2,s)} = \frac{1}{\Delta_0^{(2)}}\left(W_{zz}^{(s)} + W_{xz}^{(s)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + W_{yz}^{(s)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right) \tag{2.2}$$

$$u_{x0}^{(2,s)} = u_{x0}^{(1,s)} + \varphi_0\left(A_{55}^{(1)}\sigma_{xz0}^{(1,s)} - A_{55}^{(2)}\sigma_{xz0}^{(2,s)}\right) + u_{x*}^{(1,s)}(z=\varphi_0) - u_{x*}^{(2,s)}(z=\varphi_0)$$

$$(x, y, z; u, v, w; 5, 4, 3)$$

$$W_{xz}^{(s)} = \sigma_{xz}^{(1,s)} - \sigma_{xz*}^{(2,s)} - \left(\sigma_{xx}^{(1,s-1)} - \sigma_{xx*}^{(2,s-1)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - \left(\sigma_{xy}^{(1,s-1)} - \sigma_{xy}^{(2,s-1)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} \quad (x, y)$$

$$W_{zz}^{(s)} = \sigma_{zz}^{(1,s)} - \sigma_{zz*}^{(2,s)} - \left(\sigma_{xz}^{(1,s-1)} - \sigma_{xz*}^{(2,s-1)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - \left(\sigma_{yz}^{(1,s-1)} - \sigma_{yz*}^{(2,s-1)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}$$

Таким образом, рекуррентные расчётные формулы (1.10), (1.11) при учёте (2.1),(2.2) позволяют вычислить температурную функцию, а также компоненты тензора напряжений и вектора перемещения в слоях пластины с любой асимптотической точностью $O(\varepsilon^S)$ в размерных координатах и перемещениях

$$Q^{(i)}\left(x, y, z\right) = \sum_{s=0}^{S} Q^{(i,s)}\left(x, y, z\right). \tag{2.3}$$

В качестве примера рассмотрим частный случай, когда двухслойная пластина состоит из слоёв постоянной толщины $\varphi_k\left(x, y\right) = h_k = \mathrm{const}$, $k = 0,1,2$, постоянной плотности $\rho_k = \mathrm{const}$, с источниками тепла постоянной интенсивности $W_k = \mathrm{const}$, с постоянными граничными условиями:

$$\theta_1^{+} = \mathrm{const},\ \ \left(\theta_1^{+}, q_1^{+}, u_j^{*+}\right),\ \ j = x, y, z \tag{2.4}$$

Ограничиваясь исходным приближением с учётом (2.1)–(2.4) по рекуррентным расчётным формулам (1.10)–(1.11), вычислив значения температурных функций, компонент векторов плотностей потоков теплоты, а также компонент тензоров напряжений и векторов перемещений для первого слоя, получим:

$$\theta_1 = \theta_1^{+} + \frac{h_1 - z}{\lambda_{33}^{(1)}}q_1^{+} - \frac{\left(h_1 - z\right)^2}{2\lambda_{33}^{(1)}}W_1, \qquad q_1 = q_1^{+} + (h_1 - z)W_1$$

$$
\begin{aligned}
&u_x^{(1)} = u_x^+, \quad u_y^{(1)} = u_y^+, \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = 0 \\
&\sigma_{zz}^{(1)} = \rho_1 g\left(z-h_1\right), \quad \sigma_{xx}^{(1)} = \rho_1 g A_{13}^{(1)}\left(z-h_1\right) + \gamma_{11}^{(1)}\theta_1 \quad (x,y;1,2) \\
&u_z^{(1)} = u_z^+ + \frac{\left(z-h_1\right)^2}{2}\left(\rho_1 g A_{33}^{(1)} - \frac{\gamma_{33}^{(1)}}{\lambda_{33}^{(1)}} q^+\right) + \gamma_{33}^{(1)}\left(z-h_1\right)\left(\theta_1^+ - \frac{\left(z-h_1\right)^2}{6\lambda_{33}^{(1)}} W_1\right)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

а для второго слоя –

$$
\begin{aligned}
&\theta_2 = \theta_1^+ + \left(\frac{h_0 - z}{\lambda_{33}^{(2)}} + \frac{h_1 - h_0}{\lambda_{33}^{(1)}}\right) q^+ + \left[\frac{\left(h_0 - z\right)\left(h_1 - h_0\right)}{\lambda_{33}^{(2)}} - \frac{\left(h_1 - h_0\right)^2}{2\lambda_{33}^{(1)}}\right] W_1 - \\
&\quad - \frac{\left(h_0 - z\right)^2}{2\lambda_{33}^{(2)}} W_2, \qquad q_2 = q_1^+ + \left(h_1 - h_0\right) W_1 + (h_0 - z) W_2
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0, \ \sigma_{zz}^{(2)} = \rho_1 g\left(h_0 - h_1\right) + \rho_2 g\left(z - h_0\right), \ u_x^{(2)} = u_x^+ \\
&\sigma_{xx}^{(2)} = \rho_1 g A_{13}^{(2)}\left(\rho_1 g\left(h_0 - h_1\right) + \rho_2 g\left(z - h_0\right)\right) + \gamma_{11}^{(2)}\theta_2, \ (x,y;1,2), \ u_y^{(2)} = u_y^+ \\
&u_z^{(2)} = \overline{u}_z + \frac{\left(z-h_0\right)^2}{2}\left(\rho_2 g A_{33} - \frac{\gamma_{33}^{(2)}}{\lambda_{33}^{(2)}}\overline{q}\right) + \gamma_{33}^{(2)}\left(z-h_0\right)\left(\overline{\theta} - \frac{\left(z-h_0\right)^2}{6\lambda_{33}^{(2)}} W_2\right) \\
&\overline{u}_z = u_z^{(1)}(z = h_0), \ \ \overline{\theta} = \theta_1(z = h_0), \ \ \overline{q} = q_1(z = h_0)
\end{aligned}
$$

Заметим, что решение (2.5), (2.6) с неклассическими граничными условиями (2.4) математически точное (замкнутое), поскольку следующие шаги итерации дают нули. Учитывая это, на поверхности $z = \varphi_2(x,y) = h_2 = \mathrm{const}$ по формулам (2.6) вычислим

$$
Q^{-cal} = Q(z = h_2), \quad Q = \left\{\theta^{(2)}, q^{(2)}, \sigma_{xz}^{(2)}, \sigma_{yz}^{(2)}, \sigma_{zz}^{(2)}, u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, u_z^{(2)}\right\}
\tag{2.7}
$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться [2,6,9,10], что решение (2.5), (2.6) краевой задачи с неклассическими граничными условиями (2.4) одновременно является решением задачи с классическими граничными условиями:

$$
\begin{aligned}
&z = \varphi_1 = h_1: \quad \theta_1^+ = \mathrm{const}, \quad u_j^+(x,y) = \mathrm{const}, \quad j = x,y,z \\
&z = \varphi_2 = h_2: \ q_2^- = q_2^{-cal}, \sigma_{xz}^{-(2)} = \sigma_{xz}^{-cal} = 0 \quad (x,y), \ \sigma_{xz}^{-(2)} = \sigma_{zz}^{-cal}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Таким образом, асимптотическое решение каждой задачи стационарной теплопроводности и несвязанной теории термоупругости с асимптотической точностью $O(\varepsilon^S)$ совпадает с решением определённой краевой задачи с классическими граничными условиями.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКНМОНРА в рамках научного проекта № SCS13–2C0009SCS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян А.Г., Тоноян В.С., Хачикян А.С. Распределение деформаций в зоне взаимодействия Аравийской и Евразиатской плит на основе данных GPS/ Изв.НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №3. С.3-13.
2. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V. Mathematical simulation of collision of arabian and euroasian plates on the base of GPS data // Изв.НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №4. С.3-9.
3. Хачикян А.С. О гармонических и бигармонических задачах для уравнений с неклассическими граничными условиями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №4. С.24-31.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
5. Геворкян Р.С. Об асимптотическом анализе решений корректных и «некорректных по Адамару» задач для эллиптических уравнений математической физики (теплопроводности) // Труды II Международ. Конференции: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2010.Том I. С.182-186.
6. Aghalovyan L.A. On one class of three-dimensional problems of elasticity thory for plates //Proceedings of A. Razmadze Mathematikal Institute of Georgia. 2011. Vol.155, pp. 3-10.
7. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука.Физматлит, 1997. 414с.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн, 2005. 468с.
9. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Гулгазарян Л.Г. К определению напряжённо-деформированных состояний литосферных плит Земли на основе данных GPS систем // Доклады НАН Армении. 2012. Т.112. №3. С.264-270
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: ГИТТЛ, 1952. 392с.
11. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.

Сведения об авторе:

Геворкян Рубен Степанович− профессор, докт. ф-м.н, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА. **Тел.:** (37410) 270828; **e-mail:** gevorgyanrs@mail.ru

Поступила в редакцию 23.06.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ БАЛОК И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Мовсисян. Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: балка, цилиндрическая оболочка, начально-неоднородное напряжённое состояние, критические величины.
Key words: cylindrical shell, nonhomoqenous initial stressed state, critical rates.
Բանալի բառեր՝ հեծան, գլանային թաղանթ, նախնական անհամասեռ լարվածային վիճակ, կրիտիկական մեծություններ:

Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.
Առաձգամածուցիկ հեծանի և գլանային թաղանթի կայունության մասին

Հեծանի տատանումների և կայունության խնդիրներում կան դեպքեր, երբ չնայած տարբեր են եզրային պայմանները, ստացվում են նույն հաճախությունները, կամ կրիտիկական ուժերը: Սակայն անհամասեռ նախնական լարվածային վիճակի դեպքում բոլորովին տարբեր են ստացվում այդ մեծությունները:

Ձողի և գլանային թաղանթի համար դիտարկված են կայունության այդպիսի խնդիրներ:

Movsisyan L.A., Nersisyan G.G.
About stability of viscoelastis bars and cylindrical shells

There are cases in the problems concernig the stability and vibrations of bars, when thougt the boundary conditions are different, frequecy or critical forces are achieved. However in the case of nonhomogenous initial stressed state, quite different volumes are achieved.

Such problems concerning the bars and cylindrical shells are also considered.

В задачах колебаний и устойчивости балки есть случаи, когда при различных граничных условиях одинаковыми получаются частоты или критические силы. Однако, при начально-неоднородном напряжённом состоянии совершенно различными получаются эти величины.
Для стержня и цилиндрической оболочки рассмотрены такие задачи по устойчивости.

Введение. В задачах колебаний и устойчивости балок и цилиндрических оболочек существует пара граничных условий, при которых собственное значение (собственные частоты и критические силы) одинаковое, хотя формы колебаний или потери устойчивости различные.

Однако при неоднородном начальном напряжённом состоянии совершенно другими получаются и частоты, и критические параметры.

Здесь рассматриваются именно такие задачи по устойчивости для типично вязкоупругих балок и цилиндрических оболочек.

Постановка задачи.

1. Уравнение устойчивости вязкоупругой балки

$$\tilde{E}J\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \tag{1.1}$$

будем изучать для двух случаев граничных условий:

$$
\begin{aligned}
&1. w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \ \ x=0 \ и \ x=l \\
&2. \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \quad \text{при} \ \ x=0 \ \ и \ \ x=l
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Первые из (1.2) – известные условия шарнирного опирания, а вторые – так называемая «плавающая заделка» ([1],стр.153). Такие условия вполне корректные, в литературе встречаются не часто, но есть, например, [2]. Решения (1.1) для первого случая граничных условий (1.2) будем искать в виде

$$
w=\sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\lambda_m x, \ \ \lambda_m=\frac{m\pi}{l}\ , \tag{1.3}
$$

а для второго –

$$
w=\sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos\lambda_m x\,. \tag{1.4}
$$

Тогда, если продольную силу в общем виде представить как

$$
P=\frac{a_0(t)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{a}_k(t)\cos\lambda_m x, \tag{1.5}
$$

то на основании (1.3)–(1.5) из уравнения (1.1) получим бесконечную систему

$$
\begin{aligned}
&2\tilde{E}J\lambda_m^3 f_m+\left(a_0\pm a_{2m}\right)\lambda_m f_m+\sum_{q=1}^{m-1}\left(a_{m-q}\pm a_{m+q}\right)\lambda_q f_q+ \\
&+\sum_{q=m+1}^{\infty}\left(a_{q-m}\pm a_{q+m}\right)\lambda_q f_q=0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

В последней системе знак « $+$ » относится к случаю (1.3), а « $-$ » – к (1.4).

Кстати, из (1.6) видно, что при однородном начальном состоянии $a_0\neq 0,\ a_m=0,\ m\neq 0$ критические параметры получаются одинаковыми при обоих граничных условиях.

В качестве примера возьмём случай типичного материала

$$
\tilde{E}u=E\left(u-\frac{E-H}{En}\int_0^t e^{-\frac{1}{n}(1-\tau)}u\,d\tau\right). \tag{1.7}
$$

Тогда бесконечную систему (1.6) можно записать относительно производных f_k .

В векторной записи она выглядит как

$$
Xf'+Yf=0 \tag{1.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&Z_{mm}=a_0\pm a_{2n}\quad ,\quad Z_{mq}=\begin{cases} a_{m-q}\pm a_{m+q} & ,\ q<m \\ a_{q-m}\pm a_{m-q} & ,q>m \end{cases} \\
&X_{mm}=2EJ\lambda_{mm}^3+Z_{mm}\lambda_m\,,\ X_{mq}=Z_{mq} \\
&Y_{mm}=2\frac{HJ}{n}\lambda_m^3+\left(\frac{1}{n}Z_{mm}+Z'_{mm}\right)\lambda_m \\
&Y_{mq}=\frac{1}{n}Z_{mq}+Z'_{mq}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Критические параметры должны быть определены из условия разрешимости системы (1.6). В частности, для неподвижной нагрузки мгновенная критическая сила определится из условия равенства нулю детерминанта бесконечной матрицы $\mathrm{Det}X = 0$, а длительная – $\mathrm{Det}Y = 0\ \left(a'_m = 0\right)$.

Для подвижной нагрузки один из принятых подходов является критерий $f' = 0$, что приводит к определению критического времени. Последнее определяется из условия равенства нулю $\mathrm{Det}Y = 0, \left(a'_m \neq 0\right)$.

Начальное состояние такое: сосредоточенная сила P_0 движется от одного конца балки к другому с постоянной скоростью. Скорость движения силы (в дальнейшем давления) настолько мала, что пренебрегаем инерционным членом.

В качестве примеров здесь также будем рассматривать два вида граничных условий:

1. $u = 0$ при $x = 0$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $x = l$ (1.10)

2. $u = 0$ при $x = 0$ и $x = l$

Для первого случая из (1.10) продольная сила будет

$$P = \begin{cases} -P_0 & \text{при } 0 \pm x \le ct \\ 0 & \text{при } x > ct \end{cases} \tag{1.11}$$

а для второго –

$$P = \begin{cases} -P_0 \left(1 - \dfrac{ct}{l}\right), & 0 \le x \le ct \\ P_0 \dfrac{ct}{l}, & ct < x \le l \end{cases} \tag{1.12}$$

И, соответственно, коэффициенты a_k, входящие в систему (1.9), будут

$$a_0 = -2P_0 \frac{ct}{l},\ a_m = -\frac{2P_0}{m\pi} \sin \lambda_m ct$$

$$a_0 = -2P_0 \left(\frac{ct}{l} - 0{,}5\right),\ a_m = -\frac{2P_0}{m\pi} \left[\sin \lambda_m ct - \frac{1-(-1)^m}{m\pi}\right] \tag{1.13}$$

Кстати, так как в рассматриваемых примерах продольная сила постоянна на различных интервалах, то приведённые задачи можно решать, как в [3], т.е. вместо бесконечного детерминанта получить трансцендентное уравнение. Соответственно вот как выглядят они:

$$\begin{cases} \left[2 - x_1 - \dfrac{k^2 (1-x_1)^3}{3}\right] \mathrm{tg} k x_1 + k (1-x_1)^2 = 0 \\ \mathrm{tg} k (1-x_1) + k(1-x_1) = 0, \left(k^2 = \dfrac{P_0 l^2}{EJ}, x_1 = \dfrac{ct}{l}\right) \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} \left(1+\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)^2 + \frac{k_2}{k_1}\left[x_1-(1-x_1)\frac{k_2^2}{k_1^2}\right]\left[k_2 \mathrm{cth} k_1(1-x_1)-\right. \\ \left.-k_1 \mathrm{ctg} k_2 x_1\right]=0 \ , \ k_1^2=k^2 x_1 \\ k_2 \mathrm{ctg} k_2 x_1 + k_1 \mathrm{cth} k_1(1-x_1)=0, \ k_2^2=k^2(1-x_1) \end{cases} \tag{1.15}$$

В табл.I приведены относительные значения мгновенных критических сил для рассмотренных случаев, т.е. отношение истинного критического значения к критическому значению однородно сжатого шарнирно опёртого стержня: $\lambda=\frac{P_{\text{кр}}}{P^0_{\text{кр}}}, P^0_{\text{кр}}=\frac{EJ\pi^2}{l^2}$.

Как видно из формул (1.14), при $x_1=1$ оба случая граничных значений дают одинаковые значения для $\lambda(\lambda=1)$ в первой задаче.

Таблица 1

x_1	1.14 (а)	1.14(в)	1.15(а)	1.15(в)
0.9	1,210	1,022	21,16	10,50
0.8	1,437	1,046	12,40	5,892
0.7	1,661	1.144	8,957	4,631
0.6	1,831	1,331	8,356	4,306
0.5	1,891	1,668	8,000	4,533
0.4	1,897	2,303	5,666	5,395
0.3	1,984	3,663	4,070	7,447
0,2	2,343	7,474	3,759	13,11
0.1	3,743	27,18	5,112	40,29

Из приведённой таблицы видно, что критические значения параметра λ в общем случае для второго типа граничных условий (1.2) во много больше, чем для первого.

Значения длительных критических сил получим соответственно, если данные табл.1 умножим на $\frac{H}{E}$ (H – длительный модуль).

Для подвижной нагрузки, соответственно, есть необходимость понятия критического времени. Один из принятых в литературе подходов является условие $f'=0$. Это условие сводится к тому, что в (1.8) $\mathrm{Det}Y=0$ (но уже $a'_m \neq 0$):

$$\begin{aligned} &2m^2 f_n + \lambda\Big\{\left[a_0+a_{2m}+\alpha\left(b_0+b_{2m}\right)\right] m f_m + \\ &+\sum_{q=1}^{m-1}\left[a_{m-q}+a_{m+q}+\alpha\left(b_{m-q}+b_{m+q}\right)\right] q f_q + \\ &+\sum_{q=m+1}^{m-1}\left[a_{q-m}+a_{q+m}+\alpha\left(b_{q-m}+b_{q+m}\right)\right] q f_q \Big\}=0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Для первой задачи (1.11) коэффициенты будут $a_0 = -2x_1$, $a_m = -\dfrac{2}{m\pi}\sin m\pi x_1$,

$b_0 = -2$, $\quad b_m = -2\cos m\pi x_1$, $x_1 = \dfrac{ct}{l}$.

В табл. 2 приведены некоторые значения λ (здесь уже $\lambda = \dfrac{P_{k0}}{P'_{\text{кр}}}$, $\bar{P}_{\text{кр}} = \dfrac{HJ\pi^2}{l^2}$) для некоторых α и x_1, а $\alpha = cn/l$ (n – время релаксации).

Из табл.2 видно, что чем больше n, тем меньше критическая сила (время).

Таблица 2

x_1 \ α	0	0,3	0,5
0,5	1,891	1,819	1,685
0,6	1,831	1,459	1,231
0,7	1,662	1,149	0,928
0,8	1,437	0,909	0,711
0,9	1,209	0,718	0,547
1,0	1	0,565	0,423

2. Устойчивость цилиндрической оболочки будем изучать при граничных условиях, т.е. в данном случае имеются такие условия:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^3} = u = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = l \tag{2.1}$$

Одномерные уравнения осесимметричного начального состояния –

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + v\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \\ \tilde{D}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^4} + \frac{\tilde{E}h}{R\left(1-v^2\right)}\left(\frac{w_0}{R} + v\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = -Z\left(x\right) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Решения системы (2.2) должны удовлетворять первым трём условиям (2.1). Если искать его в виде рядов, удовлетворяющих этим условиям:

$$\begin{gathered} u_0 = \sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m \sin\lambda_m x,\ w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos\lambda_m x \\ Z\left(x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\lambda_m x,\ \lambda_m = \frac{m\pi}{l}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

то для начальных усилий получим выражения:

$$\begin{gathered} T_1^0 = -vC_0,\ \mathrm{T}_2^0 = -C_0 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{KC_m}{K+\lambda_m^4} \\ C_m = Ra_m,\ K = \frac{12\left(1-v^2\right)}{R^2h^2}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Заметим, что при классических граничных условиях свободного опирания $T_1^0 \equiv 0$. Решение уравнения устойчивости

$$\tilde{D}\Delta^4 w + \frac{\tilde{E}h}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \Delta^2\left(T_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{2.5}$$

будем искать в виде

$$w = \cos\mu_k y \sum_{m=0}^{m} f_m \cos\lambda_m x,\ \mu_k = \frac{k}{R},\ \lambda_m = \frac{m\pi}{R}\ , \tag{2.6}$$

удовлетворяющем условиям (2.1).

Тогда, бесконечная система, аналогичная (1.9), будет

$$Af' + Bf = 0 \tag{2.7}$$

$$a_{mm} = EL_{mk} + a_m\ ,\ a_{mp} = \frac{1}{2}\mu_k^2\begin{cases} C_{m-p} + C_{m+p},\ p < m \\ C_{p-m} + C_{m+p}\ ,\ p > m \end{cases}$$

$$L_{mk} = \frac{h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\Delta_{mk}^2 + \frac{h}{R^2}\frac{\lambda_m^4}{\Delta_{mk}^2},\ a_m = \left(\nu\lambda_m^2 + \mu_k^2\right)C_0 + \frac{1}{2}\mu_k^2 C_{mm}$$

$$b_{mm} = \frac{H}{n}L_{mk} + \frac{1}{n}a_m + ad_m,\ b_{mk} = \frac{1}{n}a_{mk} + a'_{mk}\ ,\ \Delta_{mk}^2 = \left(\lambda_m^2 + \mu_k^2\right)^2$$

Таблица 3

	$\pi R/l$					
	1,25			1,5		
	h/R					
x_1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
1,0	0,0390	0,0121	0,0037	0,0531	0,0145	0,0045
	0,0745	00232	0,0071	0,1023	0,0276	0,0087
0,9	0,0474	0,0148	0,0046	0,0648	0,0176	0,0056
	0,0806	0,0253	0,0076	0,1109	0,0298	0,0093
0,8	0,0568	0,0179	0,0054	0,0779	0,0212	0,0067
	0,0862	0,0269	0,0082	0,1190	0,0320	0,0101
0,7	0,0660	0,0209	0,0064	0,0909	0,0246	0,0077
	0,0912	0,0287	0,0087	0,1260	0,0338	0,0106
0,6	0,0724	0,0227	0,0070	0,0996	0,0260	0,0085
	0,0960	0,0301	0,0092	0,1330	0,0356	0,0112
0,5	0,0748	0,0234	0,0070	0,1024	0,0276	0,0086
	0,1020	0,0320	0,0096	0,1415	0,0377	0,0118
0,4	0,0754	0,0235	0,0071	0,1037	0,0278	0,0087
	0,1115	0,0351	0,0106	0,1554	0,0413	0,0131
0,3	0,0798	0,0249	0,0076	0,1107	0,0295	0,0093
	0,1299	0,0412	0,0123	0,1823	0,0484	0,0153
0,2	0,0967	0,0306	0,0092	0,1354	0,0359	0,0114
	0,1720	0,0549	0,0163	0,2432	0,0645	0,0204
0,1	0,1617	0,0521	0,0154	0,2296	0,0609	0,0193
	0,3102	0,1004	0,0298	0,4431	0,1171	0,0373

Для случая свободного опирания краёв оболочки бесконечная система будет выглядеть так, как и в (1.8) и (1.9).

Здесь также рассмотрим два примера.

1) Постоянное давление q_0 распространяется от одного конца оболочки в другой с постоянной скоростью c:

$$Z = \begin{matrix} -q_0 \, , \; 0 \le x \le ct \\ 0 \; , \; ct \le x \le l \end{matrix} \qquad (2.8)$$

Коэффициенты a_m, входящие в выражения начальных усилий по (2.4), будут:

$$a_0 - q_0 x_1 \; , \; a_k = q_0 \frac{2}{k\pi} \sin \lambda_n x_1 \, , \; x_1 = \frac{ct}{l} \qquad (2.9)$$

2) Вторая задача, когда давление в виде

$$Z = \begin{cases} -q_0 \left(1 - \dfrac{x}{ct}\right), \; 0 \le x \le ct \\ 0 \qquad\qquad\quad , \; ct \le x < l \end{cases} \qquad (2.10)$$

$$a_0 = -\frac{1}{2} q_0 x_1 \; , \; a_k = -q_0 \frac{2}{(k\pi)^2 x_1} \left(1 - \cos \lambda_k x_1\right) \qquad (2.11)$$

В табл.3 приведены критические значения для безразмерного параметра $\lambda = \dfrac{q_0}{E} \left(\dfrac{h}{R}\right)^2$ при различных геометрических параметрах.

В каждой клетке первые числа относятся к (2.9), а вторые – к (2.11).

В общем, ничего неожиданного. Критический параметр для второй задачи больше, чем для первой и с увеличением интервала действия нагрузки он уменьшается (зависимость нелинейная).

Заключение. В задачах устойчивости и колебаний балки есть пара граничных условий, при которых одинаковыми получаются критические силы и собственные частоты (формы различные). Однако, если начальное напряжённое состояние неоднородное, то совершенно различными получаются эти величины. Здесь рассматриваются именно такие две задачи устойчивости для балки и цилиндрической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрация в технике. Т.I. М.: Машиностроение, 1978. 352с.
2. Белубекян М.В. Локализованная неустойчивость сжатой пластинки. Проблема механики тонких деформируемых тел. //В сб., посв. 80-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2002. С.61-67.
3. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. //Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. №4. С.3-12.

Сведения об авторах:

Мовсисян Лаврентий Александрович,
Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2,**Тел.:** (+37410). 56821
E-mail: mechins@sci.am

Нерсисян Гриша Геворкович, К.ф.н., доцент, Ар.Г.А.У.
Адрес: г.Ереван, пр.Азатутян, 7б, кв.37.**Тел.:** 20-68-79.

Поступила в редакцию 29.04.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНЫЙ ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ

Аветисян В.В., Степанян В.С.

Ключевые слова: гарантированный поиск, оптимальное управление
Keywords: guaranteed search, optimal control
Բանալի բառեր. Երաշխավորված փնտրում, օպտիմալ ղեկավարում

Վ.Վ. Ավետիսյան, Վ.Ս. Ստեփանյան
Հարթության վրա շարժվող օբյեկտի օպտիմալ երաշխավորած դինամիկական փնտրումը

Դիտարկվում է հորիզոնական հարթության վրա շարժվող օբյեկտի օպտիմալ ըստ նվազագույն երաշխավորված ժամանակի փնտրման դինամիկ խնդիրը, երբ որոնելի օբյեկտի սկզբնական վիճակը հայտնի է տրված բազմության ճշտությամբ: Փնտրումն իրականացվում է տարածության մեջ արագացմամբ ղեկավարվող օբյեկտի կողմից: Մինիմաքսային մոտեցման հիման վրա ցույց է տրվել, որ դիտարկվող խնդիրը բերվում է աջ շարժական ծայրակետով օպտիմալ ըստ արագագործության ղեկավարման խնդրին: Պոնտրյագինի մաքսիմումի սկզբունքի մեթոդի կիրառմամբ՝ բացահայտ տեսքով ստացվել են բանաձևեր, որոնք թույլ են տալիս հաշվարկել օպտիմալ երաշխավորող ղեկավարումն ու երաշխավորված փնտրման համապատասխան նվազագույն ժամանակը, կախված փնտրողի հայտնաբերման շրջանի և որոնելի օբյեկտի անորոշության շրջանի կենտրոնների սկզբնական հեռավորությունից:

V.V. Avetisyan, W.S. Stepanyan
Optimal guaranteed dynamic search of mobile object on the plane

A problem of time-optimal guaranteed dynamic search of moving object with controllable acceleration in plane is observed, where the state of the sought object is known up to a given set. It is shown, that on a basis of minimax approach the problem can be reduced to time-optimal speed control problem with moving right end. Applying Pontryagin's maximum principle gives as a result explicit formulas which allow calculation of optimal guaranteed control and corresponding minimal guaranteed search time, depending on initial distance between the centers of the seeking object's discovery circle and sought object's uncertainty circle.

Рассматривается задача оптимального по минимальному гарантированному времени динамического поиска движущегося на горизонтальной плоскости объекта, начальное состояние которого известно с точностью до заданного множества. Поиск осуществлявтся объектом, управляемым по ускорению в пространстве. Показано, что на основе минимаксного подхода рассматриваемая задача сводится к задаче оптимального по быстродействию управления с подвижным правым концом. Применением метода принципа максимума Понтрягина в явном виде полученны формулы, позволяющие вычислить оптимальное гарантирующее управление и соответствующее минимальное время гарантированного поиска в зависимости от начального расстояния между центрами круга обнаружения ищущего и круга неопределённости искомого объектов.

Введение. Рассматривается задача построения управляемого по ускорению пространственного движения ищущего объекта, который из заданного начального состояния должен, совершив подходящий маневр, за возможно минимальное время обнаружить целевой движущийся объект, совершающий управляемое по ускорению движение на горизонтальной плоскости и начальное состояние которого известно ищущему объекту с точностью до заданного множества неопределённости. Искомый объект считается обнаруженным в случае его попадания в круговое основание конуса, координаты вершины которого – суть текущие координаты ищущего объекта. Как и в [1-3], при решении рассматриваемой задачи используется подход, состоящий в построении такого управления, при котором круг обнаружения ищущего объекта поглощает расширяющийся во времени область неопределённости искомого объекта за минимальное время. На основе минимаксного подхода, установлено, что для гарантированного обнаружения достаточно рассматривать случай, когда искомый объект в начальный момент времени находится на границе круга неопределенности и движется с максимальной скоростью по радиусу в направлении от центра, что обеспечивает расширение круга неопределенности с наибольшей скоростью. Тем самым, исходная задача поиска сводиться к задаче оптимального по быстродействию управления с подвижным правым концом, которая решается методом принципа максимума Понтрягина [4]. Разработан конструктивный алгоритм определения оптимального гарантирующего управления и соответствующего минимального гарантированного времени поиска, в зависимости от параметров задачи. Главное отличие постановки задачи данной работы от постановок задач гарантированного поиска целевого объекта, рассмотренных в [5-10] состоит в том, что в этих работах 1) ищущий и искомый объекты осуществляют управляемое по скорости движения (простые движения), 2) оба объекта могут перемещаться только в пределах заданной ограниченной плоской области ([5-8]), совпадающей с областью неопределённости искомого объекта, 3) поиск (в [9,10]) на плоскости начинается вне области неопределённости, однако в [9] обнаружение искомого объекта осуществляется с помощью круга постояннго радиуса, а в [10] – полуплоскости. Статья продолжает исследования, начатых в [1-3].

1. Описание поисковой системы и постановка задачи. Пусть имеются два точечных объекта X и Y, из которых X – ищущий, а Y – искомый. Объект X совершает пространственное движение в гравитационном поле Земли, а объект Y – движение на плоскости Земли. Уравнения движения объектов зададим в виде

$$X: \quad m_X\ddot{x} = f_X + m_X\mathrm{g}, \quad x(0) = x^0;\ \dot{x}(0) = 0, \quad x, f_X \in R^3, \\ \left|f_X(t)\right| \le F_X, \quad t \ge 0, \tag{1.1}$$

$$Y: \quad m_Y\ddot{y} = f_Y, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad y, f_Y \in R^2, \\ \left|\dot{y}(t)\right| \le V_Y, \quad \left|f_Y(t)\right| \le F_Y, \quad t \ge 0. \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2) x, y – векторы координат объектов; f_X, f_Y – векторы управляющих сил объектов, которые являются кусочно-непрерывными функциями от t и по модулю ограничены заданными величинами F_X, F_Y соответственно; V_Y – максимально возможная скорость объекта Y; $\mathrm{g} = (0,0,-g)$ – постоянный вектор ускорения свободного падения, а m_X, m_Y – массы объектов X и Y соответственно.

Введя новую переменную (с дальнейшим опусканием штриха) и обозначения

$$x' = x - \mathrm{g}t^2/2, \quad w_{X,Y} = f_{X,Y}/m_{X,Y}, \quad W_{X,Y} = F_{X,Y}/m_{X,Y}, \tag{1.3}$$

запишем систему (1.1), (1.2) в виде

$$X: \quad \ddot{x} = w_X, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x, w_X \in R^3, \\ \left|w_X(t)\right| \le W_X, \quad t \ge 0, \tag{1.4}$$

$$Y: \quad \ddot{y} = w_Y, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad y, w_Y \in R^2, \\ \left|\dot{y}(t)\right| \le V_Y, \quad \left|w_Y(t)\right| \le W_Y, \quad t \ge 0, \tag{1.5}$$

где w_X, w_Y – векторы управляющих ускорений объектов X, Y, а W_X, W_Y – их максимально возможные ускорения соответственно.

Будем полагать, что объекту X точно известны свои текущие фазовые координаты $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $t \geq 0$, максимальная величина своего управляющего ускорения W_X, а также максимальные величины управляющего ускорения и скорости обьекта Y – W_Y и V_Y. О фазовых координатах $y, \dot{y}$ объекта Y известно лишь то, что в начальный момент времени $t = 0$, Y находится в заданном множестве неопределенности

$$(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0, \tag{1.6}$$

$$D_0 = \{y^0 \in R^2 : \left|y^0 - y_c^0\right| \leq r_0\}, \quad \dot{D}_0 = \{\dot{y}^0 \in R^2 : \left|\dot{y}^0\right| \leq V_Y\},$$

где $D_0, \dot{D}_0$ – круги с центрами в точках $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0)$, $\dot{y}^0 = (0,0)$ и радиусами r_0, V_Y соответственно.

Возможность определения точных геометрических координат искомого объекта Y осуществляется с помощью подвижной и изменяющейся во времени информационной области

$$G(x(t), C) = \left\{ \begin{aligned} &\xi \in R^2 : \left|\xi(t) - x_c(t)\right| \leq l(t) = Cx_3(t), \quad C = \left|tg\alpha\right| \\ &\qquad x_c(t) = (x_{c1}(t), x_{c2}(t)), \qquad 0 < \left|\alpha\right| < \pi / 2 \end{aligned} \right\}, \quad t \geq 0, \tag{1.7}$$

$$G(x(0), C) = G(x_1(0), x_2(0), x_3(0), C) = G(x_c(0), l(0)) = G_0,$$

представляющая собой круговое (с центром $x_c = (x_{c1}, x_{c2})$) основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим значением вектора положения X. В дальнейшем, в записи для круга обнаружения G параметр C будем опускать.

При пространственном движении ищущего объекта эволюция информационного круга (1.7) на плоскости (x_1, x_2) при $t > 0$ определяется плоским движением его центра $x_c(t) = (x_{c1}(t), x_{c2}(t))$ с помощью вектора управления $(w_{X1}(t), w_{X2}(t))$ и расширением или сужением круговой области (1.7) путем изменения расстояния x_3 объекта X до плоскости (x_1, x_2) с помощью скалярного управления $w_{X3}(t)$, т.е. изменением её радиуса $l(t) = Cx_3(t)$ с помощью управления $Cw_{X3}(t)$: $\ddot{l}(t) = Cw_{X3}(t)$, $l_0 = l(0)$, $\dot{l}_0 = \dot{l}(0)$. При $w_{X3}(t) > 0$ круг G (1.7) расширяется, а при $w_{X3}(t) < 0$ сужается.

Пусть параметры y_{c1}^0, y_{c2}^0, r_0 и $x_{c1}^0, x_{c2}^0, x_3^0, C$ (или x_{c1}^0, x_{c2}^0, l_0) кругов неопределённости D_0 и обнаружения G_0 такие, что в начальный момент времени $t = 0$ выполняется условие

$$D_0 \cap G_0 = \varnothing. \tag{1.8}$$

Согласно (1.8), в начальный момент круг неопределенности находится вне начального круга обнаружения ищущего объекта.

Скажем, что положение искомого объекта Y становится точно известным в момент времени $t^* > 0$, когда впервые выполняется условие обнаружения, т.е. условие его попадания в круг обнаружения

$$y(t^*) \in G(x(t^*)) \text{, т.е. } \left| y(t^*) - x_c(t^*) \right| \le l(t^*), \quad x_c = (x_{c1}, x_{c2}). \qquad (1.9)$$

Определение 1. На плоскости (y_1, y_2) областью неопределенности $D(t, (y^0, \dot{y}^0))$ искомого объекта (1.5) с начальным условием $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$ при $t \ge 0$ назовем совокупность концов $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ всех траекторий этой системы, начинающихся в момент $t = 0$ в точках начального множества неопределенности $D_0 \times \dot{D}_0$ и построенных с помощью всевозможных кусочно-непрерывных управляющих ускорениях (допустимых управлениях) $w_Y(\tau) = (w_{Y1}(\tau), w_{Y2}(\tau))$, $\left| w_Y(\tau) \right| \le W_Y$, $0 \le \tau \le t$, при соблюдении ограничения на скорость $\left| \dot{y}(t) \right| \le V_Y$, $0 \le \tau \le t$.

Очевидно, что область $D(t, D_0 \times \dot{D}_0)$ является объединением всех областей вида $D(t, (y^0, \dot{y}^0))$, где $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$:

$$D(t, D_0 \times \dot{D}_0) = \bigcup_{(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0} D(t, (y^0, \dot{y}^0)). \qquad (1.10)$$

В дальнейшем, в записи для области неопределенности $D(t, D_0 \times \dot{D}_0)$ декартово произведение $D_0 \times \dot{D}_0$ будем опускать.

Поскольку круг обнаружения $G(x(t))$ (1.7) ищущего объекта X (1.4) в момент t при использовании им всевозможных кусочно-непрерывных управляющих ускорений (допустимых управлений) $w_X(\tau)$, $\left| w_X(\tau) \right| \le W_X$, $0 \le \tau \le t$, представляет собой круг, то условие обнаружения (1.9) гарантированно выполнимо, если существует момент T, $T \ge t^*$ и допустимое управление $w_X(t)$, $0 \le t \le T$, что выполняется включение

$$D(T) \subseteq G(x(T)). \qquad (1.11)$$

Определение 2. Для заданного начального состояния покоя $(x^0, \dot{x}^0 = 0)$ объекта X и заданных начальных кругов обнаружения G_0 (1.7) и неопределенностей D_0 и $\dot{D}_0$ (1.6), (1.8), число $T > 0$ и допустимое управление $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ объекта X назовем гарантированным временем поиска и гарантирующим управлением соответственно, если при любом начальном состоянии $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$ и любом допустимом управлении $w_Y(t)$, $0 \le t \le T$ объекта Y гарантируется условие обнаружения (1.9) в некоторый момент времени $t^* > 0$ – не позднее времени T: $t^* \le T$.

Будем полагать, что множество гарантирующих управлений $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ не пусто для всех рассматриваемых состояний покоя. Тогда, при фиксированном

($x^0, \dot{x}^0 = 0$) каждому гарантирующему управлению $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ соответствует траектория системы (1.4), приходящая в некоторую точку в момент T, так что выполняется условие поглощения (1.11).

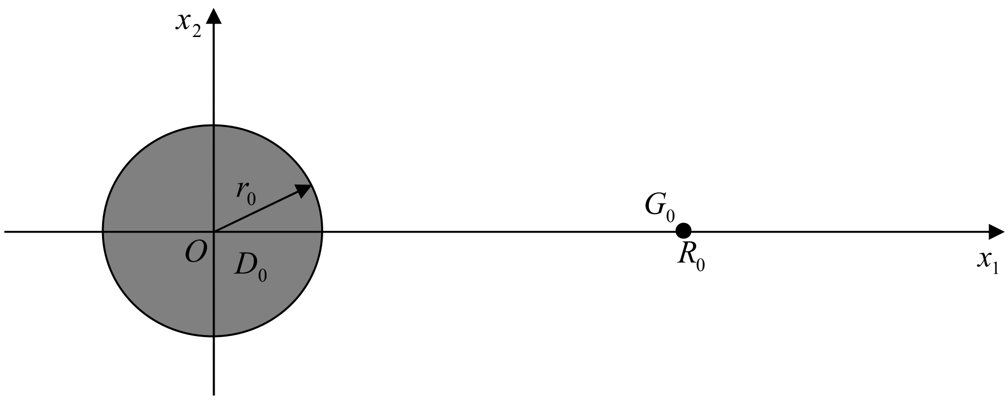
Сформулируем задачу о минимальном гарантированном обнаружении искомого подвижного объекта Y (1.5).

Задача. Найти минимальное гарантированное время быстродействия $T^*(x^0)$ и допустимое управление w_X^*, доставляющее минимум

$$T^*(x^0) = \min_{|w_X| \le W_X} \max_{|w_Y| \le W_Y} \max_{\left(y^0, \dot{y}^0\right) \in D_0 \times \dot{D}_0} T(x^0, w_X, w_Y, y^0, \dot{y}^0) . \tag{1.12}$$

2. Сведение к задаче оптимального быстродействия с подвижным правым концом. Не нарушая общности, положим, что центр $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0) \in R^2$ круга неопределенности $D_0 \subset R^2$ искомого объекта Y совпадает с началом декартовой системы координат Ox_1x_2, а ищущий объект X в начальный момент времени с нулевой скоростью (1.4) находится в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $x_1^0 = R_0 > 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$, т.е. круг обнаружения – точка $x_c^0 = (R_0,\ 0)$ на оси Ox_1 (фиг.1). Положим, что выполняется соотношение $R_0 > r_0$, которое полностью описывает начальное расположение (1.8) кругов G_0 и D_0:

$$G_0 = (R_0, 0), \quad D_0 = \left\{ (y_1, y_2) :\ y_1^2 + y_2^2 \le r_0^2 \right\} \tag{2.1}$$



Фиг.1

Обозначим через ∂D_0 и $\partial \dot{D}_0$ границы областей непределенности D_0 и $\dot{D}_0$ (1.6) соответственно:

$$\partial D_0 = \left\{ y^0 \in R^2 : \left| y^0 \right| = r_0 \right\}, \ \ \partial \dot{D}_0 = \left\{ \dot{y}^0 \in R^2 : \left| \dot{y}^0 \right| = V_Y \right\} . \tag{2.2}$$

Утверждение. Искомый объект (1.5) в момент времени t может оказаться на максимальном расстоянии от начала координат, если в начальный момент $t = 0$

находится на границе круга неопределенности D_0: $y^0 \in \partial D_0$, имеет максимальную по модулю начальную вектор–скорость $\dot{y}^0 \in \partial \dot{D}_0$, направленная по радиусу круга D_0 в сторону от центра

$$\dot{y}^0 = (\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0) = \left(V_Y y_1^0 r_0^{-1},\ V_Y y_2^0 r_0^{-1}\right) \tag{2.3}$$

и движется с нулевым ускорением

$$w_Y(\tau) \equiv 0,\ \ 0 \le \tau \le t\,. \tag{2.4}$$

Действительно. Используя решения уравнения (1.5)

$$y_i(t) = y_i^0 + t\dot{y}_i^0 + \int_0^t (t-\tau) w_{Yi}(\tau) d\tau\,, \quad \dot{y}_i(t) = \dot{y}_i^0 + \int_0^t w_{Yi}(\tau) d\tau\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{2.5}$$

где управляющие ускорения $w_{Yi}(\tau),\ 0 \le \tau \le t$ из класса кусочно-непрерывных функций, представим формулу для вычисления расстояния объекта Y от начала координат $r(t) = \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}$ в виде:

$$r(t) = \sqrt{\left|y^0\right|^2 + t^2\left|\dot{y}^0\right|^2 + 2t < y^0, \dot{y}^0 > + 2 < y^0 + t\dot{y}^0, Q(t) > + \left|Q(t)\right|^2}\,, \tag{2.6}$$

а ограничение на скорость $\sqrt{\dot{y}_1^2(t) + \dot{y}_2^2(t)} \le V_Y$ – в виде:

$$\dot{y}_1^2(t) + \dot{y}_2^2(t) = 2 < P(t), \dot{y}^0 > + \sum_{i=1}^{2}\left[\left(\int_0^t w_{Yi}(\tau) d\tau\right)^2 + (\dot{y}_i^0)^2\right] \le V_Y^2\,, \quad t \ge 0\,. \tag{2.7}$$

В (2.6), (2.7) введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered} Q(t) = \left(\int_0^t (t-\tau) w_{Y1}(\tau) d\tau,\ \int_0^t (t-\tau) w_{Y2}(\tau) d\tau\right)^{\mathrm{T}}, \\ P(t) = \left(\int_0^t w_{Y1}(\tau) d\tau,\ \int_0^t w_{Y2}(\tau) d\tau\right)^{\mathrm{T}}, \quad y^0 = \left(y_1^0, y_2^0\right)^{\mathrm{T}}, \quad \dot{y}^0 = \left(\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0\right)^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \tag{2.8}$$

где символом $< .\,,. >$ обозначено скалярное прозведение двух векторов, а символом $()^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования.

Так как максимум подкорневого выражения (2.6) относительно $y^0, \dot{y}^0$ достигается в такой граничной точке $(y^0, \dot{y}^0) \in \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0$ (2.2), что векторы $y^0 = \left(y_1^0, y_2^0\right)^{\mathrm{T}}$, $\dot{y}^0 = \left(\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0\right)^{\mathrm{T}}$ коллинеарны и одинаково направлены: $\dot{y}_i^0 = V_Y y_i^0 r_0^{-1}$, $i = 1, 2$, то при такой начальной вектор–скорости из (2.7) получим неравенство

$$2V_Y r_0^{-1} < P(t), y^0 > + < P(t), P(t) > \le 0\,, \quad t \ge 0\,. \tag{2.9}$$

Неравенство (2.9) будет заведомо выполнено, если выполняется

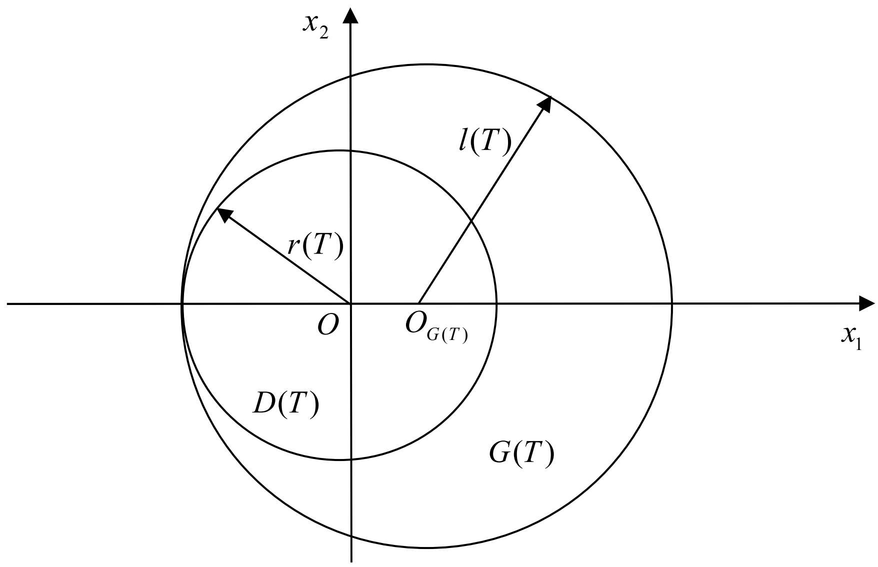
$$2V_Y\left[t\int_0^t[w_{Y1}^2(\tau)+w_{Y2}^2(\tau)]d\tau\right]^{1/2}+t\int_0^t[w_{Y1}^2(\tau)+w_{Y2}^2(\tau)]d\tau\le 0\,,\quad t\ge 0\,, \tag{2.10}$$

которое получается после последовательного применения к левой части (2.9) неравенств Коши – Буняковского и Шварца. Очевидно, что (2.10) имеет место только при $w_{Yi}(\tau)\equiv 0$, $0\le\tau\le t$, $i=1,2$. С учётом этого, из (2.8) получим $Q(t)\equiv 0$, $t\ge 0$ и тогда максимальное значение $r(t)$ (2.6) будет следующим:

$$\max_{|w_Y(t)|\le W_Y}\ \max_{(y^0,\dot{y}^0)\in D_0\times\dot{D}_0} r(t)=r_0+tV_Y\,. \tag{2.11}$$

Таким образом, для гарантированного поглощения (1.11) ищущий объект должен строить управление поиском с расчетом на то, что искомый объект в начальный момент времени находится на границе области неопределенности D_0 и имеет начальную скорость (2.3), что обеспечивает расширение круга неопределенности с наибольшей скоростью V_Y. Такой подход гарантирует успешный поиск, так как управление поиском строится с расчетом на движение искомого объекта в любом, в том числе наихудшем для ищущего объекта, направлении.

Из доказанного утверждения и геометрии взаимного расположения двух окружностей следует, что в момент времени $t=T$ одно из допустимых расположений кругов $G(x(T))$ и $D(T)$, отвечающее условию поглощения (1.11), является расположение, изображенное на фиг. 2 и характеризуемое следующими условиями:



Фиг.2

$$G(T)=\left\{(x_1,x_2):\ (x_1-R(T))^2+x_2^2\le l^2(T)\right\}, \tag{2.12}$$

$$D(T)=\left\{(y_1,y_2):\ y_1^2+y_2^2\le r^2(T)\right\},\quad r(T)=r_0+V_YT\,, \tag{2.13}$$

$$R(T) \ge 0, \quad R(T) = l(T) - r(T). \tag{2.14}$$

При переходе изменяющегося во времени круга обнаружения из начального положения (2.1) в конечное положение (2.12) в момент $t = T$, условие (2.14) в переменных x_1, x_3 запишется в следующем виде:

$$x_1(T) \ge 0, \quad x_1(T) = Cx_3(T) - r_0 - V_Y T. \tag{2.15}$$

Если ввести фазовые переменные $\dot{x}_i = v_i$ и записать уравнения (1.3) относительно x_i, v_i в виде

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = w_{Xi}, \; i = 1,2,3, \tag{2.16}$$

то придем к следующей задаче оптимального управления:
найти управляющее ускорение $w_X^*(t) = (w_{X1}^*(t), w_{X2}^*(t), w_{X3}^*(t))$, $t \in [0,T]$ (1.4), обеспечивающее приведение объекта X (2.16) из заданного начального состояния

$$\begin{aligned} &x_1(0) = R_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \\ &v_1(0) = 0, \quad\;\;\; v_2(0) = 0, \quad v_3(0) = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

в множество

$$S(x(T),T) = \left\{ x \in R^3 : \begin{array}{c} g_1(x(T),T) = x_1(T) \ge 0, \\ g_2(x(T),T) = x_2(T) = 0, \\ g_3(x(T),T) = x_1(T) - Cx_3(T) + r_0 + V_Y T = 0 \end{array} \right\} \tag{2.18}$$

за минимальное время T.

Задача (2.16)–(2.18) является задачей оптимального по быстродействию управления с закрепленным левым (17) и подвижным правым концами (2.18). К ней применим метод принципа максимума [4], дающего необходимые условия оптимальности управления $w_X(t)$ из достаточно широкого для приложений класса кусочно–непрерывных функций.

Покажем, что в классе постоянных управлений в задаче (2.16)–(2.18) существует гарантирующее управление и соответствующее гаратированное время поиска. Действительно, искомое ограниченное управление $w_X = (w_{X1}, w_{X2}, w_{X3})$ (1.4) выберем со следующими компонентами:

$$w_{X1} = w_{X2} = 0, \quad w_{X3} = W_X. \tag{2.19}$$

Проинтегрируем уравнения (2.16) при управлениях (2.19) и начальных условиях (2.17). Затем, полученные выражения при $t = T$ подставим в конечные условия в (2.18). Первое и второе соотношения выполняются автоматически, а третье соотношение преобразуется к квадратному уравнению относительно времени T:

$$-Cw_{X3}T^2 + 2V_Y T + 2(R_0 + r_0) = 0. \tag{2.20}$$

Уравнение (2.20) имеет один положительный корень:

$$T = \frac{2V_Y}{Cw_{X3}} + \sqrt{\left(\frac{2V_Y}{Cw_{X3}}\right)^2 + \frac{2(R_0 + r_0)}{Cw_{X3}}}. \tag{2.21}$$

Таким образом, управление $w_X = (w_{X1}, w_{X2}, w_{X3})$ с компонентами (2.19), в частности, является гарантирующим, а время (2.21) – гарантированным временем поиска, так как в этот момент выполняются краевые условия (2.18), равносильные условию поглощения, т.е. условию гарантированного обнаружения.

Перейдем к решению задачи (2.16) –(2.18). Введем сопряженные соответственно x_i, v_i переменные p_i, q_i и составим функцию Гамильтона [4]

$$H = p_0 + \sum_{i=1}^{3}(p_i v_i + q_i w_{Xi}), \qquad p_0 = \text{const}. \tag{2.22}$$

Определим оптимальное управление $w_X^* = (w_{X1}^*, w_{X2}^*, w_{X3}^*)$ из принципа максимума

$$H^* = \max_{|w_X| \le W_X} H, \quad |w_X^*| = W_X, \quad w_{Xi}^* = q_i W_X \left[\sum_{i=1}^{3} q_i^2\right]^{-1/2} \tag{2.23}$$

и выпишем двухточечную краевую задачу для гамильтоновой системы вида

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = w_{Xi}^*, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad i = 1,2,3, \tag{2.24}$$

$$x_1(0) = R_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = 1,2,3, \tag{2.25}$$

$$p_i(T) = \sum_{j=1}^{3} \mu_j \frac{\partial g_j(x(T),T)}{\partial x_i}, \quad q_j(T) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{\partial g_i(x(T),T)}{\partial v_j}, \quad j = 1,2,3, \tag{2.26}$$

$$\mu_1 g_1(x(T),T) = 0, \quad \mu_1 \le 0, \quad g_2(x(T),T) = 0, \quad g_3(x(T),T) = 0, \tag{2.27}$$

$$H^*(T) = -\sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{\partial g_i(x(T),T)}{\partial T}. \tag{2.28}$$

В условиях трансверсальности (2.26) – (2.28) функции g_j задаются из (2.18), а $\mu_j = const$ – множители Лагранжа, которые вместе с постоянной $p_0 \le 0$ одновременно не равняются нулю.

3. Решение краевой задачи принципа максимума. Найдем сопряженные переменные путем интегрирования сопряженных уравнений (2.24) при условиях (2.26) с учетом (2.18), (2.22):

$$q_i(t) = (T - t) p_i(t), \quad i = 1,2,3, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.1}$$

$$p_1(t) = -\mu_1 + \mu_3, \quad p_2(t) = \mu_2, \quad p_3(t) = -\mu_3 C, \quad 0 \le t \le T.$$

Используя решения (3.1), получим важный для дальнейших построений вывод о постоянстве во времени оптимальных управлений w_{Xi}^*, $i = 1,2,3$

$$w_{X1}^* = W_X \frac{-\mu_1 + \mu_3}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + \mu_2^2 + C^2 \mu_3^2}}, \quad w_{X2}^* = W_X \frac{\mu_2}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + \mu_2^2 + C^2 \mu_3^2}},$$

$$w_{X3}^* = W_X \frac{-C\mu_3}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + \mu_2^2 + C^2 \mu_3^2}}. \tag{3.2}$$

Интегрируя уравнения движения (2.24) при управлениях (3.2) с начальными условиями (2.25), получим:

$$x_1(t) = w^*_{X1}\frac{t^2}{2} + R_0, \quad x_2(t) = w^*_{X2}\frac{t^2}{2}, \quad x_3(t) = w^*_{X3}\frac{t^2}{2}, \tag{3.3}$$

$v_i(t) = w^*_{Xi}t,\ i = 1,2,3$.

Подставив (3.3) в условия (2.27), (2.28), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $T, p_0, \mu_i,\ i = 1,2,3$:

$$\mu_1(x_1(T)) = \mu_1(w^*_{X1}\frac{T^2}{2} + R_0) = 0, \tag{3.4}$$

$$x_2(T) = w^*_{X2}\frac{T^2}{2} = 0, \tag{3.5}$$

$$x_1(T) - Cx_3(T) + r_0 + V_Y T = (w^*_{X1} - Cw^*_{X3})\frac{T^2}{2} + V_Y T + R_0 + r_0 = 0, \tag{3.6}$$

$$p_0 + (-\mu_1 + \mu_3)w^*_{X1}T + \mu_2 w^*_{X2}T - \mu_3 C w^*_{X3}T = -\mu_3 V_Y. \tag{3.7}$$

Так как $T > 0$, то из (3.5)((3.2)) получаем $w^*_{X2} = 0$ ($\mu_2 = 0$), т.е. движение по координате x_2 отсутствует. Таким образом, имеем систему из трех нелинейных уравнений (3.4), (3.6), (3.7) относительно четырех неизвестных p_0, μ_1, μ_3, T. Из постановки задачи следует, что $\mu_3 < 0$, так как в противном случае круг обнаружения не может расширяться и задача теряет смысл. Согласно методу принципа максимума, рассмотрению подлежат случаи $p_0 = 0$ и $p_0 = -1$, а для каждого из этих случаев необходимо последовательно рассматривать два варианта удовлетворения условию дополняющему нежёсткости (2.27): $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 < 0$. Покажем, что в случае $p_0 = 0$ краевая задача (2.24) – (2.28) (или (3.4), (3.6), (3.7)) не имеет решения, т.е. из принципа максимума оптимальное управление не определяется.

Действительно, пусть $p_0 = 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_3 < 0$. Тогда из (3.2) получим

$$w^*_{X1} = -\frac{W_X}{\sqrt{1+C^2}}, \quad w^*_{X3} = -Cw^*_{X1} = \frac{C\,W_X}{\sqrt{1+C^2}}. \tag{3.8}$$

При управлениях (3.8) уравнения (3.6), (3.7) запишутся в виде

$$-\frac{W_X\sqrt{1+C^2}}{2}T^2 + V_Y T + R_0 + r_0 = 0, \tag{3.9}$$

$$\mu_3[-W_X T\sqrt{1+C^2} + V_Y] = 0. \tag{3.10}$$

Разрешив (3.10) относительно T и подставив найденное в (3.9), получим соотношение

$$\frac{V_Y{}^2}{2W_X\sqrt{1+C^2}} + R_0 + r_0 = 0,$$

которое не имеет место в силу положительности левой части .

Пусть $p_0 = 0$, $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$. Тогда из условия трансверсальности (3.7) получим

$$T = \frac{-\mu_3 V_Y}{-\mu_1 w^*_{X1} + \mu_3 (w^*_{X1} - C w^*_{X3})}. \tag{3.11}$$

Используя (3.2), можно (3.11) представить в виде:

$$\begin{gathered} T = \frac{-\mu_3 V_Y}{W_X \sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}} = \\ = \frac{-C\mu_3 V_Y}{C{W_X}^2 \sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}} W_X = \frac{V_Y}{C{W_X}^2} w^*_{X3}. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Подставим (3.12) в равносильное (3.4) уравнение

$$\frac{w^*_{X1}}{2} T^2 + R_0 = 0 \tag{3.13}$$

и в уравнение (3.6). Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{w^*_{X1}}{2} \left(\frac{V_Y}{C{W_X}^2} w^*_{X3} \right)^2 + R_0 = 0, \\ \frac{w^*_{X1} - C w^*_{X3}}{2} \left(\frac{V_Y}{C{W_X}^2} w^*_{X3} \right)^2 + \frac{{V_Y}^2}{C{W_X}^2} w^*_{X3} + R_0 + r_0 = 0. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Исключив из системы (3.14) параметр R_0 и разрешив полученное уравнение относительно r_0, найдем

$$r_0 = \frac{{V_Y}^2}{C{W_X}^2} w^*_{X3} \left(\frac{{w^*_{X3}}^2}{2{W_X}^2} - 1 \right). \tag{3.15}$$

Поскольку по условию задачи $r_0 > 0$, то из (3.15) следует неравенство ${w^*_{X3}}^2 > 2{W_X}^2$, которое невозможно согласно второму соотношению в (2.23).

Теперь рассмотрим второй случай $p_0 = -1$. Как и в предыдущем случае, для системы (3.4), (3.6), (3.7) исследуем следующие варианты, удовлетворяющие условию дополняющей нежесткости (3.4): А) $\mu_1 = 0$, $\mu_3 < 0$ и В) $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$.

Случай А) $\mu_1 = 0$, $\mu_3 < 0$.

Из (3.2) следует, что оптимальные управления w^*_{X1} и w^*_{X3} определяются по формулам (3.8) и система (3.4), (3.6), (3.7) запишется в виде:

$$-\frac{W_X}{\sqrt{1 + C^2}} \frac{T^2}{2} + R_0 \geq 0, \tag{3.16}$$

$$-W_X \sqrt{1 + C^2} \frac{T^2}{2} + V_Y T + R_0 + r_0 = 0, \tag{3.17}$$

$$\mu_3 (V_Y - W_X T \sqrt{1 + C^2}) = 1. \tag{3.18}$$

Для заданных параметров C, W_X, V_Y, r_0 выясним, при каких значениях $R_0 > 0$ система (3.16)–(3.18) разрешима относительно $T > 0$. В случае существования более одного положительного корня T, оптимальным будет наименьший из них – $T = T_1^{\min}\left(R_0\right)$.

Сначала рассмотрим уравнение (3.17). Оно имеет один положительный корень

$$T_1^{\min}\left(R_0\right) = \frac{V_Y + \sqrt{\left(V_Y\right)^2 + 2W_X(R_0 + r_0)\sqrt{1+C^2}}}{W_X\sqrt{1+C^2}}, \tag{3.19}$$

который должен удовлетворять равенству (3.18) при некотором $\mu_3 < 0$ и, следовательно, следующему ограничению:

$$T_1^{\min}\left(R_0\right) = -\frac{1-\mu_3 V_Y}{\mu_3 W_X\sqrt{1+C^2}} > \frac{V_Y}{W_X\sqrt{1+C^2}}, \tag{3.20}$$

вытекающему из (3.18), а также неравенству (3.16), т.е. ограничению

$$T_1^{\min}\left(R_0\right) \le \sqrt{\frac{2R_0\sqrt{1+C^2}}{W_X}}. \tag{3.21}$$

Из (3.20), (3.21) следует, что для существования решения $T_1^{\min}\left(R_0\right)$ системы (3.16)–(3.18) необходимо и достаточно, чтобы относительно $R_0 > 0$ было разрешимо неравенство

$$\frac{V_Y}{W_X\sqrt{1+C^2}} < \sqrt{\frac{2R_0\sqrt{1+C^2}}{W_X}}. \tag{3.22}$$

Разрешая неравенство (3.22), найдем

$$R_0 > R_0^* = \frac{{V_Y}^2}{2W_X(1+C^2)\sqrt{1+C^2}}. \tag{3.23}$$

При условии (3.23) и с учётом (3.19) рассмотрим неравенство (3.21), которое можно преобразовать к виду

$$\sqrt{V_Y^4 + 2W_X V_Y^2\left(R_0 + r_0\right)\sqrt{1+C^2}} \le W_X\left(R_0C^2 - r_0\right)\sqrt{1+C^2} - V_Y^2.$$

Это неравенство имеет положительную правую часть при значениях

$$R_0 > R_0^{**} = \frac{W_X r_0\sqrt{1+C^2} + V_Y^2}{W_X C^2\sqrt{1+C^2}} \tag{3.24}$$

и после несложных преобразований приводится к виду

$$R_0^2 W_X(1+2C^2)^2 - 2R_0[W_X(1+2C^2)r_0 + 4V_Y^2\sqrt{1+C^2}\,] + W_X r_0^2 \ge 0. \tag{3.25}$$

Решение квадратного неравенства (3.25) относительно параметра R_0 следующее:

$$R_0 \in (-\infty, R_0^-] \cup [R_0^+, \infty), \qquad R_0^-, R_0^+ > 0,$$

где R_0^-, R_0^+ определяются через известные параметры W_X, V_Y, r_0, C:

$$R_0^{\pm} = \frac{W_X C^2 r_0 + V_Y^2\sqrt{1+C^2} \pm \sqrt{2W_X r_0 V_Y^2 C^2\sqrt{1+C^2} + V_Y^4(1+C^2)}}{W_X C^4}. \tag{3.26}$$

Отметим, что для любого $r_0 \ge 0$ между R_0^* (2.16), R_0^{**} (2.17), R_0^-, R_0^+ (3.26) имеют место следующие соотношения:

$$R_0^- < R_0^{**} < R_0^+ \;, \quad R_0^* < R_0^{**} . \tag{3.27}$$

Из (3.27) следует, что оптимальные управления (3.8) реализуются для любого $R_0 \in [R_0^+, \infty)$. Соответствующее оптимальное гарантированное время определяется по формуле (3.19), а параметр $\mu_3 = \dfrac{1}{V_Y - W_X T\sqrt{1+C^2}}$ из (3.18) при $T = T_1^{\min}\left(R_0\right)$, в силу (3.20), – отрицательный.

Случай В) $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$.

Тогда оптимальные управления w_{X1}^* и w_{X3}^* определяются по соответствующим формулам (3.2). Далее, из (3.4) получим $x_1(T) = 0$, а из (3.3) при $t = T$ – следующие выражения для w_{X1}^*, w_{X3}^*:

$$w_{X1}^* = -\frac{2R_0}{T^2}\,, \qquad w_{X3}^* = \frac{2x_3(T)}{T^2}\,, \tag{3.28}$$

где $x_3(T)$ определяется из (3.6) следующим образом:

$$x_3(T) = \frac{r_0 + V_Y T}{C}\,. \tag{3.29}$$

Используя (3.28) и (3.29), для заданных параметров $C, W_X, V_Y, r_0 > 0$ из условия $\left|w_X^*\right| = W_X$ (2.23) получим следующее алгебраическое уравнение четвертого порядка относительно искомого T :

$$-T^4 + \frac{4V_Y^2}{C^2W_X^2}T^2 + \frac{8r_0V_Y}{C^2W_X^2}T + \frac{4(C^2R_0^2 + r_0^2)}{C^2W_X^2} = 0\,, \qquad r_0 < R_0 < \infty\,, \tag{3.30}$$

наименьший положительный корень которого обозначим через $T_2^{\min}\left(R_0\right)$.

Далее, из (3.2), (3.28) и (3.29) при $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ получим следующие соотношения для определения множителелей μ_1 и μ_3 :

$$\frac{w_{X1}^*}{w_{X3}^*} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 C}\,, \qquad \frac{w_{X1}^*}{w_{X3}^*} = -\frac{CR_0}{r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right)}\,, \tag{3.31}$$

откуда следует, что

$$\left[r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right)\right](\mu_1 - \mu_3) + C^2R_0\mu_3 = 0\,. \tag{3.32}$$

Условие трансверсальности (3.7) при управлениях (3.2) и $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ примет вид:

$$W_X T_2^{\min}\left(R_0\right)\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2\mu_3^2} = 1 - \mu_3 V_Y\,. \tag{3.33}$$

Разрешая систему (3.32), (3.33) относительно параметров μ_1 и μ_3, получим:

$$\mu_1 = A_\mu \mu_3, \qquad \mu_3 = -\frac{V_Y}{B} - \sqrt{\left(\frac{V_Y}{B}\right)^2 + \frac{1}{B}}, \tag{3.34}$$

$$B = \left[W_X T_2^{\min}\left(R_0\right)\right]^2 \left[(A_\mu - 1)^2 + C^2\right] - V_Y^2, \qquad A_\mu = \frac{r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right) - C^2 R_0}{r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right)}.$$

Численно-аналитическое исследование знаков множителей μ_1, μ_3 (3.34) по отношению параметра R_0 показывает, что если $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$, то $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$, если $R_0 = R_0^+$, то $\mu_1 = 0$, $\mu_3 < 0$, если $R_0 \in \left(R_0^+, \infty\right)$, то $\mu_1 > 0$, $\mu_3 < 0$. Следовательно, при значениях $R_0 \in \left[R_0^+, \infty\right)$ приходим к противоречию по отношению знака множителя μ_1.

Таким образом, для заданных параметров $C, W_X, V_Y, r_0 > 0$, случай В) реализуем только при $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$: сначала находится наименьший положительный корень $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ уравнения (3.30), затем из (3.32), (3.33) определяются множители $\mu_1\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right) < 0$, $\mu_3\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right) < 0$ по формулам (3.34) и в конце вычисляются оптимальные управляющие ускорения w_{X1}^* и w_{X3}^* (3.2).

Подытожив результаты, полученные в случаях А) и В), получаем, что оптимальное (минимальное) гарантированное время обнаружения искомого объекта и соответствующие оптимальные гарантирующие управления w_{X1}^*, w_{X3}^*, соответственно, определяются следующим образом:

$$T^*(R_0) = \begin{cases} T_2^{\min}\left(R_0\right), & \text{если} \quad r_0 < R_0 < R_0^+, \\ T_1^{\min}\left(R_0\right), & \text{если} \quad R_0^+ \le R_0 < \infty, \end{cases} \tag{3.35}$$

$$w_{X1}^*(R_0) = \begin{cases} \dfrac{(-\mu_1 + \mu_3) W_X}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}}, & \text{если} \quad R_0 \in \left(r_0,\, R_0^+\right), \\ -\dfrac{W_X}{\sqrt{1 + C^2}}, & \text{если} \quad R_0 \in \left[R_0^+,\, \infty\right). \end{cases} \tag{3.36}$$

$$w_{X3}^*(R_0) = \begin{cases} \dfrac{-C \mu_3 W_X}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}}, & \text{если} \quad R_0 \in \left(r_0,\, R_0^+\right), \\ -\dfrac{C W_X}{\sqrt{1 + C^2}}, & \text{если} \quad R_0 \in \left[R_0^+,\, \infty\right). \end{cases} \tag{3.37}$$

В (3.35)–(3.37) R_0^+ и $T_1^{\min}\left(R_0\right)$, $R_0 \in \left[R_0^+, \infty\right)$ вычисляются формулами (3.26) и (3.19) соответственно, $T_2^{\min}\left(R_0\right)$, $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения (3.30), а постоянные множители

$\mu_1\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right)<0$, $\mu_3\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right)<0$, $R_0\in\left(r_0,\,R_0^+\right)$ находятся в результате решения системы (3.32), (3.33).

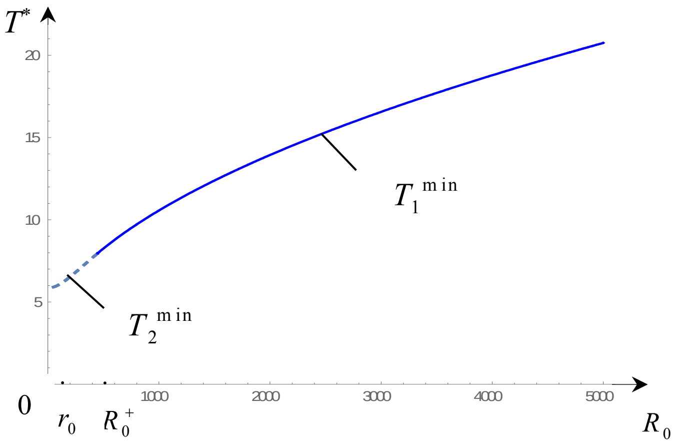
4. Результаты численного расчета оптимального гарантированного времени и оптимальных гарантирующих управлений. Для системы (1.4)–(1.6) со следующими параметрами:

$$W_X=20\,\text{мсек}^{-2},\quad V_Y=50\,\text{мсек}^{-1},\quad r_0=50\,\text{м},\quad C=1 \tag{4.1}$$

расчёт оптимального гарантированного времени поиска (3.35) и соответствующих управлений (3.36), (3.37) по изложенному в предыдущем пункте алгоритму производится по следующей последовательности:

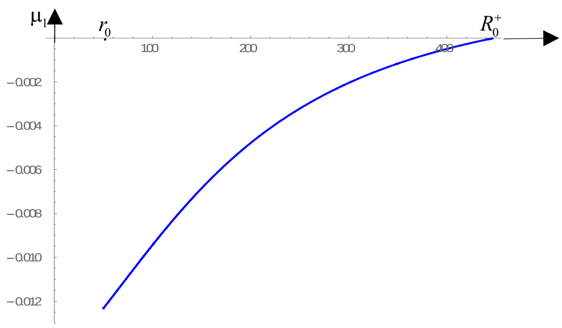
1) вычисляется значение $R_0^+=447.937$ м по формуле (3.26),

2) строится зависимость оптимального гарантированного времени $T^*(R_0)$, $R_0\in\left(r_0,\infty\right)$ согласно (3.35) (фиг. 3),

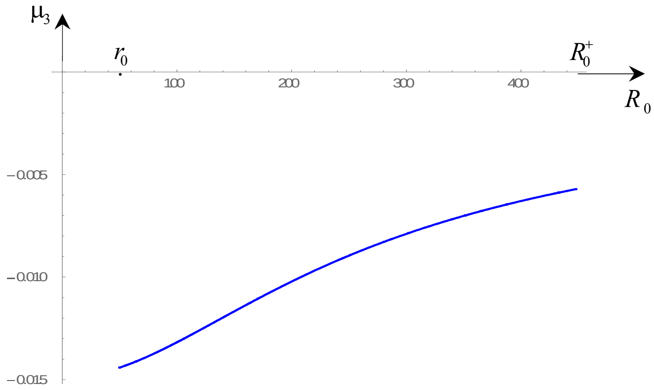


Фиг.3

3) определяются зависимости множителей $\mu_1\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right)$(фиг.4) и $\mu_3\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right)$(фиг.5) от параметра $R_0\in\left(r_0,R_0^+\right)$ путем использования формул (3.34),



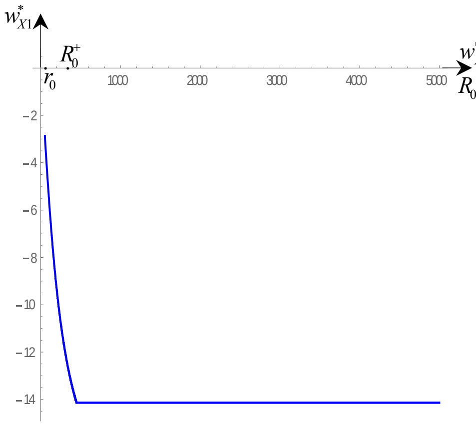
Фиг. 4

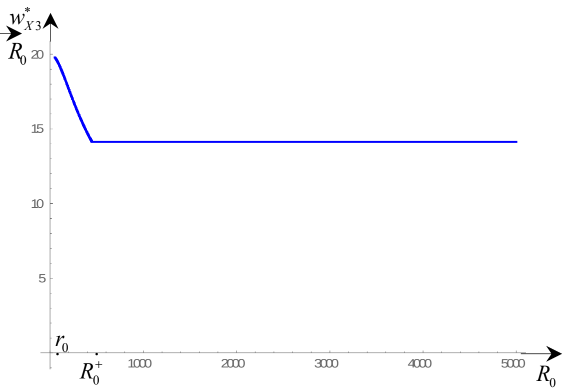


Фиг. 5

4) по формулам (3.36) и (3.37) вычисляются оптимальные гарантирующие управления $w_{X1}^{*}\left(R_0\right)$ (фиг. 6) и $w_{X3}^{*}\left(R_0\right)$ (фиг. 7)

Таким образом, установлено существование такого контрольного расстояния, вычисляемое по формуле (3.26), что для любого начального расстояния не меньше





Фиг. 6 Фиг.7

контрольного, наискорийший гарантированный поиск искомого объекта реализуется при одном и том же постоянном управляющем ускорении и, при этом, в наименьший гарантированный момент обнаружения, круг неопределенности искомого объекта содержится в круге обнаружения, имея с последним внутреннее касание. Для начальных расстояний меньше контрольного, в момент оптимального гарантированного обнаружения искомого объекта круги неопределенности и обнаружения совмещаются. При этом, к достижению ситуации совмещения, чем величина начального расстояния близка к величине радиуса начального круга неопределенности, тем круг обнаружения расширяется с большим ускорением, а прямолинейное движение центра круга обнаружения происходит с меньшим абсолютным значением ускорения.

Заключение. В задаче гарантированного динамической поиска подвижного объекта разработан конструктивный алгоритм управления, позволяющий ищущему объекту осуществить поиск за минимальное гарантированное время. Исходная задача, как задача построения управления, при котором круг обнаружения ищущего объекта поглощает расширяющийся во времени круг неопределённости искомого объекта, на основе минимаксного подхода сведена к задаче оптимального быстродействия с подвижным правым концом. Путем использования метода принципа максимума Понтрягина в явном виде получены формулы, позволяющие вычислить оптимальное гарантирующее управление и соответствующее минимальное время гарантированного поиска в зависимости от начального расстояния между центрами круга обнаружения ищущего и круга неопределённости искомого объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимальное гарантирующее управление поиском движущегося на плоскости целевого объекта // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 1. С.3-9.
2. Аветисян В.В. Оптимизация гарантирующего управления поиском подвижного объекта // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 2. С.68-78.
3. Аветисян В.В., Степанян В.С. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск подвижного объекта на плоскости // Изв. НАН РА. Механика. 2015. Т.60. № 1. С.68-80.
4. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1988. 344с.
5. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Вып.1. С.3-12.
6. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Вып. 4. № 1. С.827-862.
7. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. Гарантированное управление поиском подвижного объекта в прямоугольной области //Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С.58-66.
8. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С.31-39.
9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: 1987. 76с.
10. Меликян А.А. Задача оптимального быстродействия с поиском целевой точки // ПММ. 1990. Т.54. Вып.1. С.3-11.

Сведения об авторах:

Аветисян Ваган Вардгесович – д.ф.-м.н., профессор факультета математики и механики ЕГУ,
Тел.: (+374 94) 44 95 60;
E-mail: vanavet@yahoo.com

Степанян Ваан Сейранович – аспирант факультета математики и механики ЕГУ,
Тел.: (+374 98) 900846;
E-mail: nop144d@gmail.com

Поступила в редакцию 01.10.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

УДК 517.97 Письмо в редакцию

О НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ ПО ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ И НАБЛЮДЕНИЮ

Нерсесян А.Б.

Ключевые слова: Оптимальное управление, наблюдение, колебания струны, колебания балки, системы с распределенными параметрами
Keywords: Optimal control, observation, string vibration, beam vibration, systems with distributed parameters
Բանալի բառեր. Օպտիմալ, ղեկավարում, դիտում, լարի և հեծանի տատանումներ, բաշխված պարամետրերով համակարգեր:

Nersessian A.B.
About some studies on optimal control and observation
Errors and mistakes in some studies on optimal control and observation published in 1998-2014 is revealed

Ներսիսյան Հ.Բ.
Դիտման և օպտիմալ ղեկավարման վերաբերյալ մի քանի աշխատանքների մասին

Բացահայտվում են դիտման և օպտիմալ ղեկավարման վերաբերյալ 1998-2014թթ. տպագրված մի քանի աշխատանքներում տեղ գտած սխալները և մոլորությունները:

Выявляются ошибки и заблуждения в некоторых работах по оптимальному управлению и наблюдению, опубликованных в 1998-2014 г.г.

Введение

Обсуждаемые ниже пять работ В.Р.Барсегяна [1-5] (три – в соавторстве с А.А.Степаняном, М.А.Саакяном и Л.А.Мовсисяном соответственно) содержат необоснованные рассуждения, принципиальные ошибки и тривиальности. В них отсутствуют сколь-нибудь значимые новые научные результаты.

Ниже приводятся соответствующие обоснования. Цитаты из указанных работ приведены курсивом и в кавычках.

1. **Наблюдение за колебаниями струны.**

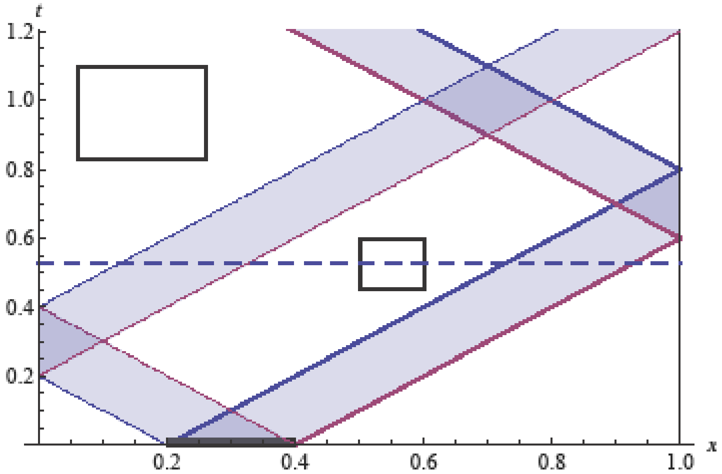
В работе [1] рассматривается (если перейти к безразмерным координатам) классическое уравнение колебания струны с закреплёнными концами

$$Q_{tt}(x,t)-Q_{xx}(x,t)=0, \qquad Q(0,t)=0, Q(1,t)=0, \qquad t\ge 0, \qquad 0\le x\le 1. \tag{1}$$

1.1. Изучается следующая задача наблюдения: "*Пусть имеется возможность с помощью измерительных устройств на некоторых участках струны положительной меры измерить некоторую величину, определенную на промежутке времени* $t-\vartheta\le t\le t$, *где* $\vartheta>0$ – *постоянное число – длина интервала, в течение которого учитывается некоторая предыстория поступающего сигнала. Число* ϑ *определяется из дополнительных требований, сопровождающих задачу о наблюдении, и зависит от физических возможностей измерительных устройств... Требуется по поступающему сигналу вычислить функцию состояния* $Q(x,t)$ *и* *скорость* $Q_t(x,t)$ *струны для любой точки* $x\in[0,1]$, *каково бы ни было реализованное в процессе (1) значение* $Q(x,t)$".

Автор имеет в виду восстановление приближенных значений $Q(x,t)$ и $Q_t(x,t)$ во всех точках струны $0\le x\le 1$ по приближенным же значениям в некоторой области указанного им вида. В резюме к работе утверждается, что "*построен универсальный оптимальный функцио нал, позволяющий определить прогиб и скорость всех точек струны в любой момент времени*".

1.2 Однако **задача в такой постановке не может быть решена в принципе**. Чтобы в этом убедиться, достаточно производимые измерения считать абсолютно точными и рассмотреть (см. рисунок) частный случай, когда (см. цитату выше) "*участок струны положительной меры*"– это некоторый отрезок струны, длина которого меньше единицы.



Рисунок

Пусть в начальный (условно) момент времени $t=0$ известны отклонения $Q(x,0)$ и скорости $Q_t(x,0)$ всех точек струны $x\in[0,1]$), как известно, однозначно описывающие весь колебательный процесс (см., например, [5], гл. 2, §2 и [7], гл. 1, §5). При росте t начальные данные $Q(x,0)$ и $Q_t(x,0)$ с отрезка $0.2\le x\le 0.4$ струны (отмеченного на приводимом рисунке жирной чертой) распространяются по выделенным затемненным полосам, определяемыми характеристиками $x\pm t=const$, с учетом отражения от закрепленных концов струны (полоса данных, распространяющихся при малых *t* вправо, обведена жирной чертой.

Допустим теперь, что, при этом, вне упомянутого отрезка, в начальный момент $t=0$, струна находится в покое (т.е, $Q(x,0)\equiv 0$ и $Q_t(x,0)\equiv 0$ при $x\notin[0.2,0.4]$), а на самом отрезке выполнено условие

$$\int_{0.2}^{0.4}(Q(x,0)^2+Q_t(x,0)^2)dx>0.$$

Очевидно, что при измерениях в любой части рисунка, но вне затемненных полос (скажем, внутри одного из двух отмеченных прямоугольников), точки струны будут находиться в полном покое и **любой прибор зарегистрирует там нулевые показания** (или зафиксирует только "шум"). В то же время сама струна не может находиться в покое никогда (см. указанное на рисунке пунктиром состояние струны, когда энергия колебаний положительна на множестве её пересечения с тёмными полосами).

Отсюда следует, что необходимо, чтобы промежуток времени $\vartheta > 0$, в течение которого проводятся наблюдения, был достаточно велик. Из приводимого рисунка следует, что необходимо, чтобы, **по крайней мере**, было $\vartheta \geq 2$, ибо в описанной на рисунке ситуации возможно, например, что полоса данных, распространяемых "влево", отсутствует (т.е. при малых t $Q(x,t) = Q(x-t)$.

1.3. Обратимся теперь подробно к рассуждениям и выкладкам работы [1], чтобы выявить допущенные в ней ошибки и заблуждения. Применяя стандартный метод разделения переменных, автор исходит из представления

$$Q(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sin \pi k x, t \geq 0, 0 \leq x \leq 1 \tag{2}$$

и считает, что применяемое им измерительное устройство наделено способностью приближенно распознавать сигналы $Z_k(\tau)$ вида[1]

$$Z_k(\tau) = f_k Q_k(\tau) + g_k \lambda_k \dot{Q}_k(\tau) + \Delta_k(\tau),\ \lambda_k = \pi k, f_k^2 + g_k^2 \neq 0, k \geq 1, \tag{3}$$

где f_k и g_k – синус-коэффициенты Фурье заранее известных функций $f(x)$ и $g(x)$, $x \in [0,1]$ соответственно, $\dot{Q}_k(\tau) = dQ_k(\tau)/d\tau$, а погрешность $\Delta_k(\tau)$ удовлетворяет оценке

$$\int_{t-\vartheta}^{t} \Delta_k^2(\tau) d\tau \leq \delta_k^2,\ k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

где $\{\delta_k\}$ – положительные постоянные (их поведение по k в работе **никак не уточняется**).

Алгоритм работы описанного устройства, якобы распознающий отдельные гармоники (3), приведен в конце п.1 работы в идеальном случае $\Delta_k = 0,\ k \geq 1$ и отмечено, что

$$2\sum_{k=1}^{\infty} Z_k(\tau) = \int_0^1 (f(x)Q(x,\tau) + g(x)\dot{Q}(x,\tau))dx, \tag{5}$$

а упомянутый в постановке задачи "*участок струны положительной меры*" – это множество тех x, для которых $f(x)^2 + g(x)^2 \neq 0$ (почти всюду). Наблюдаемый сигнал фактически является интегралом в (5) справа (см. также ниже, п. 2.2).

Автор никак не разъясняет, как, зная сумму в (5), можно выделить отдельные её слагаемые (3). На самом деле, как это следует из контрпримера в п. **1.1** выше, при произвольном $\vartheta > 0$ **это невозможно**.

1.4. На сказанном можно было бы остановиться. Однако примем (на время) что, при некоторых дополнительных предположениях (например, при $\vartheta \geq 2$, можно выделить величины (3) из (5). Проследим дальнейшие рассуждения автора.

1.4.1. Предлагается усовершенствование известной процедуры, основанной на использовании решения проблемы моментов (см., например, §§30-34 из [6]). Этот подход, видимо, является основой упомянутого выше "*построения оптимального универсального функционала*". Его суть состоит в следующем.

[1] В оригинале допущена небольшая неточность

При каждом $k = 1, 2...$ вместо "идеальных"(при $\Delta_k = 0$ **реальных сигналов** $\{Z_k\}$ рассматриваются следующие (см. стр. 74) "**усиленные**" сигналы

$$y_k(\tau) = \lambda_k^\alpha (f_k Q_k(\tau) + g_k \dot{Q}_k(\tau)), \quad \alpha = 1 + \epsilon, \qquad \epsilon > 0 \text{ –"}\textit{малое число}\text{".} \quad k \ge 1 \quad (6)$$

Неизвестные же величины $\{Q_k(t)\}$ и $\{\dot{Q}_k(t)\}$ ищутся в виде

$$Q_k(t) = \int_{t-\vartheta}^t y_k(\tau) V_{k1}(t,\tau) d\tau, \quad \dot{Q}_k(t) = \int_{t-\vartheta}^t y_k(\tau) V_{k2}(t,\tau) d\tau, \qquad k \ge 1, \quad (7)$$

при условиях оптимальности

$$\int_{-\vartheta}^0 (V_{k1}(t,t-\tau)^2 + V_{k2}(t,t-\tau)^2) d\tau \to \min, \; k \ge 1. \quad (8)$$

1.4.2. Однако, во-первых, можно насколько угодно усиливать сигнал, но это будет иметь отношение только к измерительному устройству, а не к самому наблюдаемому процессу. Во-вторых, при такой **дополнительной процедуре, ровно настолько же** (если не больше) увеличиваются и ошибки $\Delta_k(\tau)$.

У автора же оказывается (см. последние две формулы работы), что квадрат L_2 нормы "*оптимального*" вектора V^0

$$\| V^0 \|^2 = \sum_{k=1}^\infty \int_{-\vartheta}^0 (V_{k1}(t,t-\tau)^2 + V_{k2}(t,t-\tau)^2) d\tau \quad (9)$$

имеет вид

$$\| V^0 \|^2 = \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\vartheta \lambda_k^{2\alpha} (f_k^2 + g_k^2)(1 - \lambda_k^{-2} \vartheta^{-2} \sin^2 \lambda_k \vartheta)} \quad (10)$$

а равномерные ошибки операций (см. в работе (1.11), (2.4) и обозначения на стр. 73-74), восстанавливающих значения $Q_k(t)$ $\dot{Q}_k(t)$, удовлетворяют оценкам

$$| \varphi_{ki}[t, \Delta_k(\tau)] | \le \frac{2\delta_k}{\lambda_k^\alpha \sqrt{\vartheta (f_k^2 + g_k^2)(1 - \lambda_k^{-2} \vartheta^{-2} \sin^2 \lambda_k \vartheta)}}, i = 1, 2 \quad (11)$$

Видимо, считая, что тем самым цель работы достигнута, автор заключает: "*Подставляя полученные значения* $Q_k(t)$ *в (1.3), будем иметь функцию состояния струны* $Q(x,t)$ *(аналогично и для* $\dot{Q}(x,t)$*) для любой точки* $x \in (0,1)$. *Отметим, что сходимость полученного ряда следует из сходимости нормы (3.3)*" (то есть, нормы в (10) выше).

1.4.3. Но дело в том, что оценка (11) ошибочна: не учтено, что ошибка $x \in (0,1)$ Δ_k также "*усиливается*". Поэтому в знаменателе оценки (11) сомножитель λ_k^α не должен участвовать. Величины же (10) непосредственного отношения к задаче не имеют и являются лишними промежуточными звеньями в известном методе моментов (см., например, [6] и [8]).

Действительно, представления (7) можно переписать в виде

$$Q_k(t) = \int_{t-\vartheta}^t Z_k(\tau) U_{k1}(t,\tau) d\tau, \; \dot{Q}_k(t) = \int_{t-\vartheta}^t Z_k(\tau) U_{k2}(t,\tau) d\tau, \; k \ge 1, \; k \ge 1$$

где $U_{ki}(t,\tau) = \lambda_k^\alpha V_{ki}(t,\tau)$. Именно величины U_{ki} являются ядрами представлений (7) на основе **поступающих**, а не "*усиленных*" (а значит - **искаженных**) сигналов.

Наконец, сама декларируемая автором сходимость ряда (10) ничем не обоснована, коль скоро в работе нет никакой информации о величинах $(f_k^2+g_k^2)$.

В конечном счёте, важны сходимость **ряда (2)** для решения задачи и соответствующая оценка **итоговой погрешности. Именно это в работе отсутствует.**

1.5. Заключение. Работа [1] содержит принципиальные ошибки, а поставленная в ней задача наблюдений ни в коей степени не решена. Утверждения автора об эффективности метода "*универсального оптимального функционала*" являются его заблуждением.

2. Восстановления состояния систем с распределёнными параметрами

Через шесть лет после публикации работы [1] вышла работа того же автора [2], в которой, по сути, обобщаются результаты предыдущей, с применением вполне аналогичных методов. Как увидим ниже, при этом повторяются те же ошибки. Поэтому рассмотрим это исследование менее подробно.

2.1. Рассматривается следующая граничная задача общего вида[2]

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}=A_x w(x,t)+u(x,t),\ t\geq 0,\ x\in X,\ \alpha_x w(s,t)=0, \alpha_x w(s,t)=0, \qquad (12)$$
$$\alpha_x w(s,t),\ s\equiv x\in S,$$

"*в области* X *, с граничными условиями на границе* S *области* X *.... Здесь* $w(x,t)$ *и* $u(x,t)$ *– векторы состояния и управления,* A_x *и* α_x*, – матрицы линейных дифференциальных операторов, характеризующих объект и его воздействие на окружающую среду*".

Ни о размерности, связности или иных свойствах X и его границы $\partial X=S$ ничего не сказано[3]. Абсолютно не пояснены и свойства дифференциальных операторов A_x и α_x. Судя по дальнейшему, можно только предположить, что это – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

Неопределенность незначительно проясняется (см. начало п.2 работы [2]) предположением, что существует "$\Phi_i(x)$ – *некоторая полная система ортонормированных собственных функций оператора* A_x *с дискретными и простыми собственными числами* λ_i ".

Предполагается, что " *наблюдаемый m-мерный сигнал* $Z(\tau)$ " имеет вид

$$Z(\tau)=\int_X N(x,\tau)[w(x,\tau)+\omega(x,\xi(\tau))]dx,\ \tau\in[t-\vartheta,t],\ 0<\vartheta=\text{const}, \qquad (13)$$

где "*матрица* $N(x,\tau)$ *характеризует способ и участки объекта, подлежащие измерению*"}, а $\omega(x,\xi(\tau))$ – погрешность измерения. Автор не исключает, что

---

[2] Обозначения оригинала сохранены.

[3] Без таких разъяснений не имеет смысла говорить, например, о существовании операции α_x.

$N(x,\tau)$ может быть по x распределением. Разлагая функции в (13) (под интегралом) в ряд по системе $\{\Phi_i(x)\}$ и обозначив

$$N_i(\tau)=\int_X N(x,\tau)\Phi_i(x)dx,\ \ \Delta_i(\tau)=N_i(\tau)\omega_i(\tau),\ i\geq 1, \tag{14}$$

автор заключает: "*Таким образом, для каждой гармоники поступающий реальный сигнал можно представить в следующем виде*":

$$Z_i(\tau)=N_i(\tau)w_i(\tau)+\Delta_i(\tau),\qquad i\geq 1 \tag{15}$$

Далее автор оперирует "*усиленными*" сигналами (13) вида $y_i(\tau)=\lambda_i^{\alpha}e^{\lambda_i\vartheta}Z_i(\tau),$ где $\alpha=1+\epsilon$, а ϵ (как и в работе [1], см. п. **1.4** выше) – малое число.

В заключительном п.**3** работы приведено решение задачи и представлены формулы (3.7)-(3.8), вполне аналогичные формулам (10)-(11) (см. выше).

Отмечается, что (стр. 71): "*В частном случае уравнение (7) будет описывать управляемый процесс теплопроводности. Тогда в однородном случае* $\left(0\leq x\leq l\right)$*, объект – стержень конечной длины, задается одно из краевых условий* "

$$w(0,t)=w(l,t)=0,\qquad\qquad w_x(0,t)=w_x(l,t)=0\,, \tag{16}$$

$$w_x(0,t)+\lambda w(0,t)=0,\qquad\qquad w_x(l,t)+\mu w(l,t)=0\ . \tag{17}$$

2.2. Однако на самом деле разложение по $\{\Phi_i(x)\}$ приводит, всего лишь (см. начало стр. 73), к связи $Z(\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}Z_i(\tau)$ но автор (как и в работе [1], см. п**. 1.3** выше) **никак не разъясняет**, как он обнаруживает отдельные "*гармоники*" $Z_i(\tau)$ по наблюдаемому сигналу $Z(\tau)$.

2.3. В резюме к работе [2] читаем: "*Для каждой гармоники усиливая поступающий сигнал, строится универсальная оптимальная операция, позволяющая восстановить состояние всех точек в любой момент времени*".

Действительно, в данной работе повторяется (со ссылкой на работу [1], см.стр. 34-36) та же **бесполезная** (см. выше, п. **1.4**) процедура метода "*усиленного*" сигнала.
Здесь возникает естественный вопрос: если автор действительно верит в декларируемую им в [1] и [2] эффективность этого метода, то по какой причине он выбирает коэффициентом "усиления" именно λ_k^{α}, а не, скажем, гораздо более эффективную величину $100\exp(100\lambda_k)$?

2.4. Что касается упомянутого процесса теплопроводности (не говоря даже об общем случае (12)), то "*восстановление состояния всех точек в любой момент времени*", быть не может – хотя бы потому, что, даже зная, при $t<t_0$, приближенные значения $w(x,t_0),\forall x$, на практике невозможно восстановить значения $w(x,t),\forall x$. Такая задача, как хорошо известно (см., например, [6], гл. 1, §8), некорректна и поэтому итоговая погрешность "восстановления биографии процесса", практически не контролируема.

Более того, при краевых условиях (17), если $\mu\neq\nu$, задача эта не самосопряженная и, следовательно, никакой полной системы "$\Phi_i(x)$ ортонормированных собственных функций оператора A_x" **не существует**.

2.5. Кроме ошибок, аналогичных ошибкам работы [1], в данной работе содержатся и другие. Так (см. стр. 71), $\{w_j(t)\}$ – m -мерные векторы, $\{N_j(\tau)\}$ – $m\times m$ матрицы, а $\{N_j\}$ – постоянные $m\times m$ матрицы, $j\geq 1$. Но при $m\geq 2$ некоторые формулы автора содержат операции, которые в линейной алгебре не существуют. Например, формулы (3.2), (3.5) и (3.8) имеют, соответственно, следующий вид:

$$\lambda_j^{\alpha} e^{\lambda_j \vartheta}\int_{t=\vartheta}^{t} V_j(t,\tau)N_j(\tau)e^{\lambda_j(\tau-t)}d\tau=1, \qquad V_j(t,\tau)=\frac{2e^{\lambda_j(\tau-t)+\vartheta}}{\lambda_j^{\epsilon}N_j(e^{2\lambda_j\vartheta}-1)},$$

$$\| V^0 \|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\| V_j^0 \|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_j^{1+2\epsilon}N_j^2(e^{2\lambda_j\vartheta}-1)} \tag{18}$$

При $m\geq 2$ абсолютно непонятно: $\{V_j(t,\tau)\}$ и V^0 – скаляры, векторы или матрицы? В любом из этих случаев хотя бы одна из указанных формул бессмысленна. То же относится и к выражениям (3.3), (3.4) и (3.6) работы.

2.6. Заключение. Работа [2] изложена крайне небрежно. В ней повторяются ошибки работы [1], а поставленная задача не решена даже в случае процесса теплопроводности.

3. Колебания струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени

3.1. Авторская постановка задачи в работе [3] следующая: "*Рассмотрим однородную, упругую струну длиной* l*, края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью* $u(x,t)$*. Ограничимся рассмотрением малых колебаний струны и предположим, что участок, на который действуют распределенные силы, имеет положительную меру по Лебегу. Пусть* $Q(x,t)$ *при* $0\leq x\leq l$ *и* $t\geq 0$ *есть прогиб струны, подчиненный следующему уравнению:*

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+u(x,t) \tag{19}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0)=\varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_0(x), \qquad 0\leq x\leq l \tag{20}$$

и однородными граничными условиями

$$Q(0,t)=0, \qquad Q(l,t)=0, \qquad t>0, \tag{21}$$

где $\alpha^2=T_0/\rho$, T_0 *– натяжение,* ρ *– плотность однородной струны.*

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n<t_{n+1}=T$ *заданы значения состояния и скорости любой точки струны*

$$Q(x,t_j)=\varphi_j(x), \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_j}=\psi_j(x),\ (j=1,2,\ldots,n) \tag{22}$$

Задача оптимального управления колебаниями струны ставится следующим образом: среди возможных управлений $u(x,t)$ *при* $0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T$ *требуется* *найти оптимальное управление* $u^0(x,t)$, *переводящее струну из заданного начального состояния (20) через промежуточные состояния (22) в конечное состояние*

$$Q(x,T)=0, \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T}=0, \qquad 0\le x\le l \tag{23}$$

и минимизирующее функционал

$$\int_0^T\int_0^l u(x,t)^2\,dxdt\,. \tag{24}$$

3.2. Решение данной задачи очевидно: надо последовательно (по отрезкам $t\in[t_k,t_{k+1}],\ k=0,1,\dots,n$) решать n хорошо изученных (см. например, [7] и [9]) классических задач, соответствующих минимизациям частей $\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_0^l u(x,t)^2\,dxdt,$ функционала (24). Полученное при этом минимальное значение итогового функционала (24) **уменьшить невозможно**.

3.3 Авторы избрали неоправданно усложненный и излишне ограничительный путь решения элементарной задачи. Так (стр.53), почему-то предполагается, что $u_k(t)\ne 0$. На стр. 56 величины δ_k,δ_{jk} и A_k должны быть отличны от нуля (что авторами не оговорено). У авторов нет оснований делать выводы о скорости сходимости полученных рядов (см. стр. 58), ибо ими не получена оценка по k для $u_k(t)$.

3.4.Заключение. Решение поставленной в работе [3] задачи абсолютно тривиально.

4. Парето-оптимальная встреча управляемых аппаратов

Резюме к работе [4]: "*Рассматривается задача встречи нескольких управляемых космических аппаратов, когда движение происходит в тонком сферическом слое, двигатели управления работают непрерывно и кроме сил притяжения Земли все возмущающие силы пренебрегаются.Учитывая индивидуальные интересы управляющих сторон, сформулирована векторная функция выигрыша и построено парето-оптимальное решение. Приведен пример для встречи трех объектов.*"

4.1. Приведем постановку задачи со всеми деталями[4]: "*Рассмотрим процесс управления одновременной встречи нескольких сотрудничающих космических аппаратов. Предполагаем, что все космические аппараты встречаются с фиктивным неманеврирующим объектом (точкой), который находится на фиктивной орбите и является целью. Для описания относительного движения космических аппаратов и цели, считая их материальными точками, пренебрегая возмущениями от несферичности Земли, атмосферным сопротивлением и притяжением других небесных тел, запишем векторные уравнения движения для цели и каждого космического аппарата (управляемого объекта), участвующего в сближении*:

$$\ddot{\mathrm{r}}_{\text{ö}}+\frac{\mu}{r_{\text{ö}}^3}\mathrm{r}_{\text{ö}}=0, \qquad \ddot{\mathrm{r}}_a^{(i)}+\frac{\mu}{r_a^{(i)3}}\mathrm{r}_a^{(i)}=\mathrm{u}^{(i)}, \qquad (i=1,\dots,n), \tag{1.1}$$

[4] Авторская нумерация формул здесь сохранена.

где $\mathrm{r}_ц$ *и* $\mathrm{r}_a^{(i)}$ *– геоцентрические радиус-векторы цели и* i *-ого космического аппарата,* $\mathrm{u}^{(i)}$ *– равнодействующий вектор ускорения от тяги двигателей* i *-ого аппарата,* μ *– гравитационная постоянная Земли. Вычитая из второго уравнения (1.1) первое и определяя вектор дальности от цели до космических аппаратов* $\mathrm{D}^{(i)} = \mathrm{r}_a^{(i)} - \mathrm{r}_ö$ *, получим:*

$$\ddot{\mathrm{D}}^{(i)} + \frac{\mu}{r_ц^3}[(\mathrm{r}_ц + \mathrm{D}^{(i)})(1 + \mathrm{D}^{(i)2} / r_ц^2 + 2\mathrm{r}_ц \mathrm{D}^{(i)} / r_ц^2)^{-3/2} - \mathrm{r}_ц] = \mathrm{u}^{(i)}, i = 1, \ldots, n \qquad (1.2)$$

Пусть заданы начальные положения (в момент t_0 *) всех космических аппаратов*

$$\mathrm{D}^{(i)}(t_0) = \mathrm{D}_0^{(i)}, \qquad \dot{\mathrm{D}}^{(\mathrm{i})}(t_0) = \dot{\mathrm{D}}_0^{(i)}, \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1.3)$$

Предположим, что на интервале времени $[t_0, T]$ *затраты на управление каждого космического аппарата определяются величиной*

$$\mathfrak{J}_i(u^{(i)}) = \left(\int_{t_0}^{T} u^{(i)}(t)^2\, dt\right)^{1/2} \qquad (1.4)$$

Каждый космический аппарат стремится к встрече с остальными, определяемой конечным положением (в момент времени T *) с заданными параметрами*

$$\mathrm{D}^{(i)}(T) = \mathrm{D}_T(\alpha, \beta), \qquad \dot{\mathrm{D}}^{(\mathrm{i})}(T) = \dot{\mathrm{D}}_T, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1.5)$$

перелетая при этом с наименьшими затратами на управление. Здесь α *и* β *– некоторые величины, предстоящие определению.*

В рассматриваемой задаче о встрече предполагается, что все управляемые объекты имеют одинаковую информацию и у них есть возможность совместного выбора управлений. Исходя из непротивоположности интересов, можно составить кооперацию всех управляемых объектов с векторной функцией выигрыша. Решение полученной задачи должно учитывать как индивидуальные интересы управляющих объектов, так и интересы любых коалиций, которые могут быть образованы внутри кооперации.

Одним из способов решения такой задачи является выбор управляющими объектами парето-оптимальных управлений [2]. Управляемые объекты должны выбрать управляющие воздействия, доставляющие выигрыши, близкие к идеальной точке

$$\mathfrak{J}^* = \{\mathfrak{J}_i^*, i = 1, 2, \ldots, n | \mathfrak{J}_i^* = \min\nolimits_u \mathfrak{J}_i(u^{(i)})\} \qquad (1.6)$$

и в качестве меры “близости” используется следующая норма:

$$\| \mathfrak{J} \| = \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{J}_i(u^{(i)})^2 - \mathfrak{J}_i^{*2}| \qquad (1.7)$$

Величина $|\mathfrak{J}_i(u^{(i)})^2 - \mathfrak{J}_i^{*2}|$ *составляет величину дополнительных затрат на управление i -ого управляемого объекта, а норма* $\| \mathfrak{J} \|$ *характеризует “групповую потерю” объектов.*

Сформулируем следующую задачу. Требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u^{(i)^0}(t) = \{u_1^{(i)^0}(t), u_2^{(i)^0}(t), u_3^{(i)^0}(t)\}$ *и значения параметров* α *и* β*, переводящие сотрудничающие объекты (2) из начальных фазовых состояний (1.3) в* *конечное фазовое состояние (1.5) так, чтобы затраты (1.7) на управляющие воздействия* $u^{(i)}(t)$ *были наименьшими."*

В дальнейшем (начиная со стр.73) авторы используют, вместо нелинейного уравнения (1.2), его известный, линеаризированный вариант.

4.2 Из смысла поставленной задачи немедленно следуют следующие выводы:

4.2.1. Аппараты **встречаются в заданное время** T и (поскольку уравнение движения цели всем аппаратам известно) **в заданной** точке, т.е. $\mathrm{D}^{(i)}(T) = \mathrm{r}_a^{(i)}(T) - \mathrm{r}_ц(T) = 0$. Следовательно, условие (1.3) на самом деле **зафиксировано**. Непонятно, откуда взялась у авторов зависимость $\mathrm{D}^{(i)}(T)$ от α и β и **какая задача решается** в формулах (2.4)-(2.7) рассмотренного примера (стр. 76-78).

4.2.2. Это необъяснимое упущение авторов не только приводит к излишне усложненному и **ошибочному** решению (см. стр. 73-78), но и делает задачу **тривиальной**.

Действительно (как это следует из **4.1** выше), в работе решаются n хорошо изученных **независимых классических задач** оптимального управления (см., например, [6], [8]). Ясно, что, например (см. (1.6) и (1.7) и выше), $\|\mathfrak{I}\| = 0$ и у аппаратов нет никакой нужды сотрудничать.

4.3. Известно, что оптимальность по Парето – это такое состояние системы, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других (**Википедия**). Таким образом, в поставленной задаче **парето-оптимальность отсутствует**.

4.4. Заключение. Постановка задачи в работе [4] содержит серьёзную логическую ошибку, исправление которой тривиализирует исследование. Решенный частный пример не соответствует смыслу задачи встречи аппаратов.

5. Оптимальное управление и наблюдение колебаний балки

Работа [5] посвящена процессу, описываемому классическим уравнением малых, поперечных, вынужденных, упругих колебаний однородной балки на шарнирных опорах, при наличии сжимающей осевой силы.

5.1 В стандартных обозначениях речь идет об уравнении с постоянными коэффициентами

$$EJ\partial^4 W/\partial x^4 + P\partial^2 W/\partial x^2 + \rho S\partial^2 W/\partial t^2 = f(x,t), \qquad t>0, \quad 0 \le x \le l, \tag{25}$$

где $u(x,t) = f(x,t)/(\rho S)$ – управляющее воздействие. Заданы начальные

$$W(x,0) = \varphi(x), \quad W_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x < l \tag{26}$$

и граничные условия

$$W(0,t) = W_{tt}(0,t) = 0, \qquad W(l,t) = W_{tt}(l,t) = 0, \qquad 0 < x < l, \tag{27}$$

обеспечивающие (при определенных ограничениях, налагаемых на φ, ψ и u) существование и единственность решения $W(x,t)$ при $0 \le x \le l,\ 0 < t < T$.

Рассматриваются следующие две задачи.

Задача 1 (гашение колебаний). Найти управление $u = u^0(x,t)$, переводящее, в заданное время $T > 0$, решение W задачи (1)–(3) из состояния (2) в состояние

$$W(x,T) = 0, \qquad W_t(x,T) = 0, \qquad 0 < x < l \tag{28}$$

и минимизирующее функционал

$$\int_0^T \int_0^l |u(x,t)|^2 \, dx dt \tag{29}$$

Задача 2. (наблюдение за колебаниями). Предполагается, что в момент времени $t = t_1 > 0$ известны значения $W(x,t_1)$ и $W_t(x,t_1)$, $x \in [0,l]$, решения W уравнения (25) с граничными условиями (27). Требуется восстановить начальные значения (26).

5.2. Решение указанных задач очевидно, ибо уравнение (25) допускает разделение переменных в простейшем, явном виде. Решение подобных задач на основе метода моментов общеизвестно. Например, рассуждения и выкладки (для случая колебания струны), приведенные в книге [8] (стр. 171-175), здесь можно повторить с соответствующими, очевидными коррекциями деталей.

Тем не менее, авторы допустили ряд просчетов в простейшей ситуации. Именно:

5.2.1. При решении *Задачи 1*.:

1). В коэффициентах формулы (2.17)) есть ошибки. Так, в знаменателе величины X_k должно быть $\sinh^2 \Omega'_k T / \Omega'^2_k - T^2$, а для Y_k, соответственно, $T^2 - \sin^2 \Omega_k T / \Omega_k^2$.

2) Не исследован случай, когда последние величины обращаются в нуль.

3) Оценка (2.19) ошибочна, ибо, во-первых, знаменатель справа должен содержать величину $(1 - P / P_k)$, а во-вторых, вместо множителя λ_k должно быть λ_k^2.

4) Наконец, указанные авторами условия для того, чтобы функция (2.12) работы была решением уравнения (25) выше, недостаточны. Действительно, даже бесконечной дифференцируемости функции ψ недостаточно, ибо ни одно из граничных условий не выполнено. Что же касается φ, то к приведенным условиям необходимо добавить еще два: $\varphi''''(0) = \varphi''''(l) = 0$.

5.2.2. При решении *Задачи 2.:*

1) Авторы фактически используют функцию $u(x,t)$ (не отмечая в постановке задачи, что она задана) и при этом не замечают, что решают не задачу наблюдения, а хрестоматийную для метода разделения переменных начально-краевую задачу. Решение последней, как известно, неустойчиво (так как практически не поддается определению при малых $P - P_k$. При этом авторы забывают, что (см. (2.12) в работе сами уже, по сути, использовали в *Задаче 1* явное представление (с заменой t на $-t$) (3.3) решения W .

2). Представления (3.3) работы чисто формальны и для того, чтобы подставить в них $t = t_1$ (как это делают авторы) надо доказать, что соответствующие ряды сходятся равномерно. А для того, чтобы W из (3.3) было решением уравнения (1), надо наложить дополнительные условия на $W(x,t_1)$, $W_t(x,t_1)$ и $u(x,t)$. При решении *Задачи 1* авторы, в какой-то степени, учли это обстоятельство, а здесь такими вопросами они вообще не озабочены.

3). В отличие от Задачи 1, здесь случай непериодичной амплитуды (при $P = P_k$) необходимо предусмотреть. Он отнюдь не тривиален, как это (см. начало стр. 72) считают авторы.

4). Наличие критических точек $P = P_k$ ставит под сомнение возможность практического применения решения *Задачи 2*, ибо отсутствует учет погрешностей у используемого для наблюдения устройства.

5). Формулы (3.5) работы не вытекают из соотношений на стр.76, в которых содержится ряд ошибок.

5.3. Заключение. Работа [5] изложена крайне небрежно, а рассматриваемые в ней задачи (при правильной постановке, исключающей определенные окрестности значений P_k) абсолютно тривиальны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барсегян В.Р. Задача наблюдения колебаниями струны. //Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т.51. № 1. С.72 – 78.
2. Барсегян В.Р. Задача оптимального восстановления состояния систем с распределенными параметрами при наличии погрешностей в неполных измерениях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №1. С.70–75.
3. Барсегян В.Р., Саакян М.А. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №2. С.52–60.
4. Барсегян В.Р., Степанян А.А. Задача о парето-оптимальной встрече нескольких управляемых космических аппаратов. //Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.63 №4. С.71–78.
5. Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А. Об оптимальном управлении и наблюдении упругих колебаний балки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №2. С.69 – 78.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
7. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
8. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
9. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.

<u>Сведения об авторе:</u>

Нерсесян Анри Барсегович, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом Института математики НАН Армении, академик НАН Армении.
E-mail: nerses@instmath.sci.am

Поступила в редакцию 26.07.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

Ответ на письмо в редакцию журнала «Известия НАН РА. Механика» написанное академиком А.Б. Нерсесяном "О некоторых работах по оптимальному управлению и наблюдению"

Барсегян В.Р.

Բարսեղյան Վ.Ռ.

Պատասխան ակադեմիկոս Հ.Բ. Ներսեսյանի "Օպտիմալ ղեկավարման և դիտման որոշ աշխատանքների մասին" նամակի ներկայացված "ՀՀ ԳԱԱ տեղեկագիր. մեխանիկա" հանդեսի խմբագրություն

Barseghyan V.R.

The answer to the letter in editorial office of the magazine "Proceedings of NAS RA - Mechanics" written by the academician A.B. Nersessian "About some studies on optimal control and observation"

Как автор статей [1, 2] и соавтор статей [3-5], ознакомившись с содержанием письма в редакцию журнала «Известия НАН РА. Механика» (далее-Письмо), выражаю свое не согласие с автором Письма, поскольку приводятся лишь собственные рассуждения, а высказывания **"содержат необоснованые рассуждения"** и **"в них отсутствуют сколь-нибудь значимые научные"** обоснования. Здесь и далее в кавычках (**" "**) приводятся только цитаты из Письма.

Считаю необходимым дать некоторые разъяснения по содержанию Письма.

Прежде всего из заглавия Письма можно предположить, что в Письме обсуждаются некоторые работы не только одного автора, а вообще работы и других авторов по оптимальному управлению и наблюдению, опубликованые в журнале. Однако так как содержание Письма полностью посвящено работам только одного автора (некоторые из них в соавторстве), следовательно, такому содержанию Письма соответствует конкретное название «О некоторых работах В.Р. Барсегяна по оптимальному управлению и наблюдению». Автор Письма проявил необъективный научный подход, преднамеренно не называя так.

Хочу еще отметить, что относительно статьи [1] автор Письма еще 06.03.2014г. представил письмо (аналогичного содержания, изложенного в настоящем Письме) в редакцию журнала, на которое мною 03.04.2014г. был дан письменный ответ. Более того, мною были даны подробные разъяснения, в декабре 2014г. на семинаре (в Институте механики НАН РА), созванном редколегией журнала «Механика». Поэтому нелогично включение уже обсуждённых доводов в этом Письме. Если целью включения содержания указанного письма от 06.03.2014г. в Письмо является его опубликование, то вышеупомянутое письмо (от 06.03.2014г.) с моим ответом (03.04.2014г.) могло бы быть уже опубликовано в журнале «Механика» намного раньше. Однако общепринятый объективный подход публикации письма в редакцию с соответствующим ответом почему-то не устраивает автора Письма.

Несмотря на то, что по поводу статьи [1] мною 03.04.2014г. был дан подробный письменный ответ, а также был дан письменный ответ 30.10.2014г. на его письмо в редакцию журнала «Автоматика и телемеханика» о статье [6], тем не менее считаю необходимым в очередной раз дать некоторые разъяснения, в частности, по поводу приведенного автором Письма так называемого **"контрпримера"**.

Так, относительно статьи [1] (ниже приведенное относится и к статье [2]) автор Письма пишет **"Однако задача в такой постановке не может быть решена в принципе. Чтобы в этом убедиться, достаточно производимые измерения считать абсолютно точными и рассмотреть (см. рисунок) частный случай, …"**.

Здесь хотелось бы обратить внимание автора Письма на рисунок, приведенный им в Письме. Как известно (см., например, [7], стр. 52-71), приведенный в Письме рисунок является физической интерпретацией распространения лишь начального отклонения (т.е. когда $Q(x,0)\neq 0$, $Q_t(x,0)=0$ для $x\in[x_1,x_2]$, а при $x\notin[x_1,x_2]$, $Q(x,0)=0$, $Q_t(x,0)=0$) (см. пример 1, стр. 55, [7]). А интерпретация распространения только начальной скорости для тех же точек *x* струны (т.е. когда $Q(x,0)=0$, $Q_t(x,0)\neq 0$ для $x\in[x_1,x_2]$, а при $x\notin[x_1,x_2]$, $Q(x,0)=0$, $Q_t(x,0)=0$), имеет иной рисунок (см. пример 2, стр. 56, [7]). Поэтому приведенный в Письме рисунок не соответствует случаю интерпретации распространения начального отклонения и скорости (т.е. когда и $Q(x,0)\neq 0$, $Q_t(x,0)\neq 0$ для $x\in[x_1,x_2]$, а при $x\notin[x_1,x_2]$, $Q(x,0)=0$, $Q_t(x,0)=0$), как считает автор Письма. А так как в [1] рассматриваются установившиеся колебания, то для всех точек *x* струны для некоторого момента времени, в частности, при $t=0$, соответствует случай $Q(x,0)\neq 0$ и $Q_t(x,0)\neq 0$. Отметим также (по поводу приведенного в Письме примера) следующее обстоятельство (см. [7]), что функция $Q(x,t)$ может быть решением уравнения колебания струны только в том случае, если для всех точек x струны функция $Q_t(x,0)$ дифференцируема, а функция $Q(x,0)$ дифференцируема дважды. Поэтому ясно, что функции, которые будут соответствовать начальным состояниям, приведенным в примере Письма (изображенные на рисунке в Письме), не могут являться решением уравнения струны, так как они не удовлетворяют условию дифференцируемости. Более того, если функции $Q(x,0)$ и $Q_t(x,0)$ не дифференцируемы достаточное число раз, то при таких начальных условиях не существует решения этого уравнения (см. [7]). Так что приведенный в Письме пример (с рисунком) не относится к рассмотренным задачам как в статье [1], так и в статье [2], и ясно, что не может являться **“контрпримером”**. А если автор Письма **“действительно верит в декларируемое им”**, что якобы построил **“контрпример”**, то необходимо доказать, что общеизвестные математические факты, представленные в моих ответах, уже который раз, например из книги [7] (см. ссылки на книгу [7]) не верны. Очевидно, что это **“является его заблуждением”** и, следовательно, не стоит вводить читателя в заблуждение.

Теперь хочу отметить, что, исходя из содержания и оформления Письма, считаю целесообразным не комментировать все высказывания автора Письма, а разъяснить лишь те высказывания, которые имеют общий или заключительный характер.

Так, автор Письма, излагая свои рассуждения и доводы относительно статей [1-5], часто формулирует вопросы, которые, по его мнению, должны были быть разъяснены, и, в частности, пишет:

- **“Автор никак не разъясняет”** (стр.3, стр. 6)
- **“Этот подход, видимо, является основной”** (стр.3)
- **“можно насколько угодно усиливать сигнал, но это будет иметь отношение только к измерительному устройству, а не к самому наблюдаемому процессу”** (стр.4)
- **“Видимо, считая, что тем самым цель работы достигнута, автор заключает”** (стр.4)
- **“в работе нет никакой информации о величинах”** (стр.5)
- **“декларируемая автором”** (стр.5, стр. 6)

- **“по какой причине он выбирает коэффициентом “усиления” именно λ_k^α, а не, скажем, гораздо более эффективную величину $100(\exp 100\lambda_k^\alpha)$ ”** (стр.6)
- **“Непонятно, откуда взялось у авторов зависимость $D^i(T)$ от α и β ”** (стр.10)
- **“Не исследован случай, когда последние величины обращаются в нуль”** (стр.11)

Перечисление подобных высказываний можно продолжить.

Надо отметить, что при желании автор Письма мог бы заметить, что в содержаниях статей имеются или ответы на некоторые его вопросы, или соответствующие разъяснения, а ссылки на литературу, приведенную в статьях [1-5], достаточны для понимания использованных понятий и подходов, которые хорошо известны специалистам этой области. Однако предисловия формулировки вопросов, сами вопросы и сделанные после них предположения и выводы без обоснованных ссылок на научную литературу из этой области являются лишь его субъективным и необоснованным мнением.

Странно, что после всего этого, без соответствующих математических обоснований, автор Письма делает выводы, декларируя, например, что **“это невозможно”**, **“поставленная задача не решена”**, **“задачи абсолютно тривиальны”** и даже **“пример не соответствует смыслу задачи”**. Так как эти высказывания не обоснованны соответствующим образом, следовательно, естественно считать, что все подобные выводы являются лишь субъективным мнением автора Письма, чем он и стремится дезориентировать читателя.

Автор Письма пишет: **“Работа [1] содержит принципальные ошибки, а поставленная в ней задача наблюдений ни в коей степени не решена. Утверждения автора об эффективности метода “универсального оптимального функционала” является его заблуждением”** (см. стр.5, п. 1.5). Хочу отметить, что в статье [1] решение задачи обоснованным образом сведена к построению некоторой математической операции, которая решает поставленную задачу. А требуемая операция построена, исходя из общего представления линейных функционалов, и кроме этого, минимизируется выбранный критерий качества. Поэтому найденная операция была названа универсальной (так как эта операция была найдена из общего представления линейных функционалов) и оптимальной (так как минимизируется критерий качества), следовательно, иное необоснованное представление автора Письма об использованных понятиях и подходах **“является его заблуждением”**. Более подробно о вышесказанном и вообще об использованных понятиях и подходах можно найти, в частности, в работах [9-12].

Вообще, излагая свои рассуждения относительно статей [1-5], автор Письма в заключениях пишет, что работа **“изложена крайне небрежно”** или рассмотренные в ней **“задачи абсолютно тривиальны”**. Учитывая сущность этих высказываний, со всей ответственностью хочу отметить, что работы изложены согласно требованиям, предъявляемым к оформлению научных статей, при этом считаю, что возможные опечатки, или если изложение некоторых мыслей не воспринимаются так, как хотелось бы (если даже таковые имеются в [1-5]), не могут быть основанием для того, чтобы считать, что работа **“изложена крайне небрежно”**. Кроме того, несомненно были положительные рецензии на работы [1-5] от специалистов из этих областей и были соответствующие решения редколегии журнала, на основе которых они были опубликованы. Очевидно, что если работа **“изложена крайне небрежно”** или **“в ней рассмотренные задачи абсолютно тривиальны”**, то они не были бы опубликованы в журнале «Известия НАН РА. Механика». Конечно, автор Письма считает, что ему все дозволено и, перейдя даже границы этики, выражает подобные замечания.

Еще раз выражая свое несогласие с автором Письма, не могу не заметить, что замечание со словосочетанием **“изложена крайне небрежно”** как раз соответствует содержанию, представленному в Письме, в котором, начиная от заглавия и кончая списком литературы, на которые имеются ссылки, автор Письма проявил **“крайне небрежное”** отношение. Действительно, кроме вышеприведённых, автор Письма, в частности, в высказываниях относительно статей [1-5] в качестве обоснования того или иного рассуждения или доводов утверждает, что они приведены якобы в книгах [7], [8] (см. например, п. 1.4.1, п. 1.4.3, п. 4.2.2, п. 5.2), а на самом деле, это не так. Здесь дело не только в некорректности ссылок на эти книги, а, в основном, в сущности их содержания. Очевидность сказанного следует из контекстов ссылок и содержания этих книг. Разве подобное отношение позволяет ученому, автору Письма, без строгого обоснования делать выводы, что **“задачи абсолютно тривиальны”**.

Резюмируя изложенное, хочу отметить, что автору Письма также очевидно, что, оставляя за собой исключительное право интерпретации содержания работ [1-5] без соответствующих обоснований, его высказывания и доводы никак не могут влиять на достоверность полученных результатов.

В заключении приведу следующее высказывание великого мыслителя Конфуция:

\- **Тот, кто учится не размышляя, впадёт в заблуждение. Тот, кто размышляет, не желая учиться, окажется в затруднении**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барсегян В.Р. Задача наблюдения колебаниями струны. //Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т.51. № 1. С.72-78.
2. Барсегян В.Р. Задача оптимального восстанавления состояния систем с распределенными параметрами при наличии погрешностей в неполных измерениях. //Изв. НАН РА. Механика. 2004. Т.57. № 1. С.70-75.
3. Барсегян В.Р., Саакян М.А. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. //Изв. НАН РА. Механика. 2008, т. 61. № 2. С.52-60.
4. Барсегян В.Р., Степанян А.А. Задача о парето-оптимальной встрече нескольких управляемых космических аппаратов. //Изв. НАН РА. Механика. 2012. Т.63. № 4. С.71-78.
5. Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А. Об оптимальном управлении и наблюдении упругих колебаний балки. //Изв. НАН РА. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.69-78.
6. Барсегян В.Р. Задача оптимального восстановления состояния системы, описываемой интегро-дифференциальным уравнением при наличии погрешностей в измерениях. //Автоматика и телемеханика. 2012. № 8. С.111–118.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1977. 736с.
8. Годунов С.К. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.
9. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
10. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
11. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Наука, 1986. 216 с.
12. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.

Сведения об авторе:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ЕГУ, факультет математики и механики, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Тел.:** (10) 52 36 40; **E-mail:** barseghyan@sci.am

Поступила в редакцию 12.11.2015

Содержание 68 тома 2015 г. «Известия НАН Армении. Механика»

CONTENTS Mechanics 2015. V.68

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

C O N T E N T S

Заказ № 651.
Тираж 150.
Сдано в производство 03.12.2015г.
Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$. 5.25 печ. л.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН Армении
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24