

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻՍԻՆԵՂԵՂԵՎՈՒԹՅԱՆ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2015

**РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ
ПОЛОСУ И СИММЕТРИЧНЫЕ ТРЕЩИНЫ НА ЛИНИЯХ
КОНТАКТА**

Саркисян В.Г., Хачикян А.С.

Ключевые слова: полуплоскость, полоса, трещина, особенность, контактные напряжения.

Key words: half plane, strip, crack, concentration, contact stress.

Բանալի բառեր. Կիսահարթություն, շերտ, ճաք, կենտրոնացում, կոնտակտային լարումներ

Սարգսյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս.

**Շերտ և ամրակցման եզրերում սիմետրիկ ճաքեր պարունակող առաձգական հարթության
հավասարակշռությունը**

Դիտարկվում է երկու կիսահարթություններ պարունակող և այլ առաձգական նյութից շերտի միջոցով իրար միացված առաձգական հարթության հավասարակշռությունը: Շերտի և կիսահարթությունների հպման գծերի վրա կան սիմետրիկ դասավորված վերջավոր ճաքեր: Որոշված է հարթության լարվածային վիճակը և անջատված է եզակիության գործակիցը:

Sargsyan V.G., Khachikyan A.S.

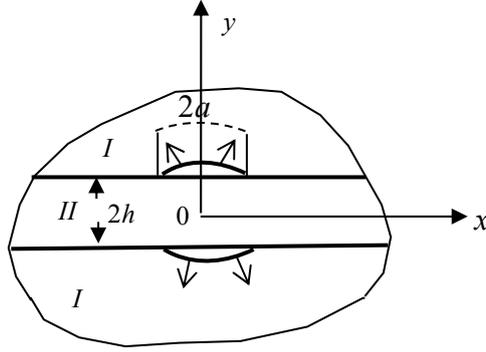
The equilibrium of the elastic plane with the strip and symmetric cracks on the lines of the contacts

The equilibrium of the elastic plane, which is composed from the two similar half plane, joined together by the strip from the other elastic material is considered. On the contact lines of the strip and half planes located two symmetric cracks of finite longitude. The stress station of the plane with separated stress concentration is determined.

Рассматривается напряжённое состояние упругой плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, соединённых полосой из другого упругого материала. На контактных линиях соединения полосы с полуплоскостями существуют две симметрично расположенные трещины. Определяется напряжённое состояние плоскости с выделенной особенностью около вершин трещины.

Введение. Определением напряжённого состояния составной плоскости, содержащей трещины, занимались многие исследователи [1-2]. Исследовались также многие случаи напряжённого состояния составной плоскости, содержащей периодические трещины и накладки [3-5]. Здесь рассмотрено напряжённое состояние составной плоскости с двумя симметричными трещинами.

Постановка задачи. Рассматривается упругая плоскость, составленная из двух одинаковых полуплоскостей, соединённых между собой посредством слоя из другого упругого материала. На линиях контакта слоя с полуплоскостями имеются симметрично расположенные трещины длиной $2a$. В силу симметричности задач рассматривается первая четверть плоскости (фиг.1).



Фиг. 1

Граничные условия на линиях контакта с введением новых неизвестных в виде разности перемещений в области трещины будут:

$$\begin{aligned}
 u_1 - u_2 = u; \quad v_1 - v_2 = v; \quad (0 \leq x < a, y = h), u = v = 0, (a < x < \infty, y = h); \\
 \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}; \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} \quad (y = h; x > 0) \quad \tau_{xy}^{(1)} = u_1 = 0 \quad (x = 0, y > h), \\
 \tau_{xy}^{(2)} = 0, u_2 = 0 \quad (x = 0; 0 < y < h) \quad \tau_{xy}^{(2)} = v_2 = 0, (y = 0, 0 < x < \infty);
 \end{aligned} \quad (1)$$

где индекс «1» относится к полуплоскости, а «2» – к слою. Внешняя нагрузка в виде симметричных усилий приложена к берегам трещин

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(1)} = f(x) \\
 \tau_{xy}^{(1)} = 0 \quad (y = h; 0 < x < a)
 \end{aligned} \quad (2)$$

Бигармоническую функцию Эри представим в виде:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y); & y > h, x > 0 \\ \Phi_2(x, y); & 0 < y < h, x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\Phi_1(x, y) = \int_0^{\infty} (A_1(\lambda) + \lambda y B_1(\lambda)) e^{-\lambda y} \cos \lambda x d\lambda$$

$$\Phi_2(x, y) = \int_0^{\infty} (A_2(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y B_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y) \cos \lambda x d\lambda, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{h}$$

Используя формулы, выражающие компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений [6], переходя к образам Фурье и удовлетворяя условиям (1), для подынтегральных коэффициентов в выражении бигармонической функции Эри получим:

$$\begin{aligned}
 A_1(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[a_2 (b_4 (\operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h) + 2e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda y (\lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \lambda h)) - \right. \\
 \left. - a_3 (b_2 (\operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h) + 2e^{-\lambda h} \operatorname{sh} \lambda h (\lambda h e^{\lambda h} - \operatorname{ch} \lambda h)) \right] e^{-2\lambda h}, \\
 B_1(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[-a_2 (b_1 (\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h) + 2 \operatorname{ch} \lambda h) + \right. \\
 \left. + a_3 (b_1 (\operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h) + \operatorname{sh} \lambda h) + 2 \operatorname{sh} \lambda h \right] e^{-2\lambda h},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(\lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[(a_2 \lambda h (b_4 - \lambda h b_1) + b_4 \operatorname{sh} \lambda h - 2 \operatorname{ch} \lambda h e^{-\lambda h}) + \right. \\
&+ a_3 (\lambda h e^{\lambda h} (\lambda h b_1 - b_2) - b_2 \operatorname{sh} \lambda h + 2 \operatorname{sh} \lambda h e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h} \Big] e^{-2\lambda h}, \\
B_2(\lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[a_2 e^{-\lambda h} (\operatorname{ch} \lambda h (b_1 \lambda h - b_4 - b_1) + \operatorname{sh} \lambda h (b_1 \lambda h - b_4)) + \right. \\
&+ a_3 e^{-\lambda h} (\operatorname{ch} \lambda h (b_2 - b_1 \lambda h + b_1) + \operatorname{sh} \lambda h (b_2 - b_1 \lambda h)) \Big] e^{-2\lambda h}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= -\frac{1}{4} (d + 4e^{-2\lambda h} \lambda h d_3 d_4 - e^{-4\lambda h} d_4 d_5), \\
d &= \left[(1 + \nu_2) + (3 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right] \left[(3 - \nu_2) + (1 + \nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right], \\
d_3 &= 1 + \nu_2 + (3 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1}; \quad d_4 = -(1 + \nu_2) + (1 + \nu_1) \frac{E_2}{E_1}, \\
d_5 &= 3 - \nu_2 - (3 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1},
\end{aligned} \tag{4}$$

$$a_2 = -\frac{2}{\lambda^2} \frac{E_2}{\pi} \int_0^a v^1(x) \sin \lambda x dx; \quad a_3 = \frac{2}{\lambda^2} \frac{E_2}{\pi} \int_0^a u^1(x) \cos \lambda x dx,$$

$$b_1 = d_4 e^{-\lambda h}; \quad b_2 = \left[-1(1 + \nu_2)(\lambda h - 1) + ((1 - \nu_1) + (1 + \nu_1)\lambda h) \frac{E_2}{E_1} \right] e^{-\lambda h},$$

$$b_4 = \left(\lambda h d_4 - 2 \frac{E_2}{E_1} \right) e^{-\lambda h}$$

Введём преобразование координат:

$$x = at, \quad y = a\tau; \quad \lambda h = \frac{\eta}{a_0}; \quad a_0 = \frac{a}{h}; \quad u^{(1)}(t) = u'(x); \quad v^{(1)}(t) = v'(x).$$

Удовлетворение условиям (2) приводит к следующим интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} + i\theta \varphi(t) + \int_{-1}^1 M_{11}(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 M_{12}(\tau, t) \bar{\varphi}(\tau) d\tau &= \frac{f(t) d\theta}{E_2 d_1} \\
\int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\theta = \frac{d_1}{2 \left(\frac{E_2}{E_1} + 1 \right)}; \quad \varphi(t) = u^{(1)}(t) + iv^{(1)}(t); \quad d_1 = 1 - \nu_2 - (1 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1}.$$

Решения (5) можно представить в виде [6]

$$\varphi(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \varphi^*(t), \quad (6)$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{2} - i\gamma; \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(1+\nu_2)E_1 + (3-\nu_1)E_2}{(1+\nu_1)E_2 + (3-\nu_2)E_1}; \quad \text{th}\pi\gamma = -\theta$$

Дискретизируя уравнения (5) при помощи квадратурных формул [5], решение (5) сведём к решению следующей системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi^*(\xi_i) \left(\frac{1}{z_j - \xi_i} + H_{11}(\xi_i, z_j) \right) + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{H}_{12}(\xi_i, z_j) \bar{\varphi}^*(\bar{\xi}_i) = i\pi f(z_j) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi^*(\xi_i) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n-1) (j=1, 2, \dots, n),$$

где

$$H_{11}(t, \tau) = i\pi M_{11}(t, \tau), \quad H_{12} = i\pi M_{12}(t, \tau), \quad a_i = \frac{\pi P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(\xi_i)}{n \text{ch}\pi\gamma P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)}$$

$\xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

z_j – корни многочлена Якоби $P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)$

$$M_{11}(t, \tau) = -\frac{1}{2}(K_{22}(t, \tau) - K_{12}(t, \tau)) + \frac{i}{2}(K_{11}(t, \tau) + K_{21}(t, \tau))$$

$$M_{12}(t, \tau) = -\frac{1}{2}(K_{22}(t, \tau) + K_{22}(t, \tau)) + \frac{i}{2}(K_{11}(t, \tau) - K_{21}(t, \tau))$$

$$K_{11}(t, \tau) = -\frac{d\theta}{d_1\pi} \int_0^\infty \cos \eta t \cos \eta \tau G_2(\eta) d\eta$$

$$K_{12}(t, \tau) = -\frac{d\theta}{d_1\pi} \int_0^\infty \cos \eta t \sin \eta \tau G_3(\eta) d\eta \quad (8)$$

$$K_{21}(t, \tau) = -\frac{d\theta}{d_1\pi} \int_0^\infty \sin \eta t \sin \eta \tau G_2(\eta) d\eta$$

$$K_{22}(t, \tau) = -\frac{d\theta}{d_1\pi} \int_0^\infty \sin \eta t \cos \eta \tau G_1(\eta) d\eta$$

$$\begin{aligned}
G_1(\eta) &= -\frac{e^{-\frac{2\eta}{a_0}}}{d\Delta(\eta)} \left\{ 2d \left(2\frac{\eta}{a_0} \frac{E_2}{E_1} - 1 \right) - 4d_3d_4 \frac{\eta}{a_0} \left(\frac{E_2}{E_1} + 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + e^{-\frac{2\eta}{a_0}} \left[d \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) + d_4d_5 \left(\frac{E_2}{E_1} + 1 \right) \right] \right\} \\
G_2(\eta) &= \frac{e^{-\frac{2\eta}{a_0}}}{d\Delta(\eta)} \left[\left(4\frac{\eta}{a_0} d_2d + 4d_1d_4 \frac{\eta}{a_0} \right) + e^{-\frac{2\eta}{a_0}} d_1 (d + d_4d_5) \right] \\
G_3(\eta) &= G_1(\eta) - 4 \frac{e^{-\frac{2\eta}{a_0}}}{\Delta(\eta)}
\end{aligned}$$

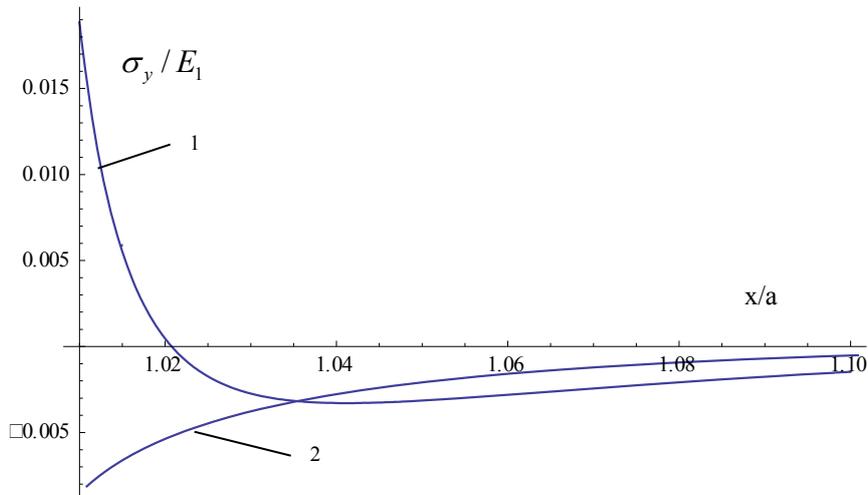
Напряжения на линии контакта имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_y^{(1)}(at)}{E_2} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_1(\xi_i) a_i}{t - \xi_i} \left(1 - \frac{q(t, \alpha, \beta)}{q(\xi_i, \alpha, \beta)} \right) - i\pi \sum_{i=1}^n \varphi_1(\xi_i) a_i K_{11}(\xi_i, t) - \\
&\quad - \pi \sum_{i=1}^n \varphi_1(\xi_i) a_i K_{12}(t, \xi_i) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_1(\xi_i) \bar{a}_i}{t - \bar{\xi}_i} \left(1 - \frac{q(t, \bar{\alpha}, \bar{\beta})}{q(\bar{\xi}_i, \bar{\alpha}, \bar{\beta})} \right) - \\
&\quad - \pi \sum_{i=1}^n \varphi_2(\xi_i) \bar{a}_i K_{11}(t, \bar{\xi}_i) + \pi \sum_{i=1}^n \varphi_2(\xi_i) \bar{a}_i K_{12}(t, \bar{\xi}_i), (1 < t < \infty) \\
\frac{\tau_{xy}^{(1)}(at)}{E_2} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_1(\xi_i) a_i}{\xi_i - t} \left(1 - \frac{q(t, \alpha, \beta)}{q(\xi_i, \alpha, \beta)} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_1(\xi_i) a_i K_{21}(t, \xi_i) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_1(\xi_i) a_i K_{22}(t, \xi_i) - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_1(\xi_i) \bar{a}_i}{\bar{\xi}_i - t} \left(1 - \frac{q(t, \bar{\alpha}, \bar{\beta})}{q(\bar{\xi}_i, \bar{\alpha}, \bar{\beta})} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_2(\xi_i) \bar{a}_i K_{21}(t, \bar{\xi}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_2(\xi_i) \bar{a}_i K_{22}(t, \bar{\xi}_i), (1 < t < \infty);
\end{aligned} \tag{9}$$

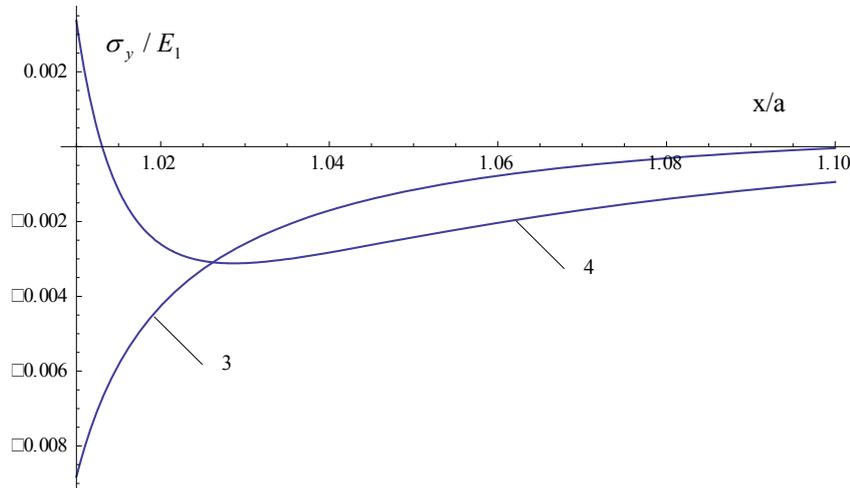
где

$$\begin{aligned}
q(t, \alpha, \beta) &= -\left(\frac{2}{t+1} \right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} B(n+\alpha+1, n+\beta+1) \cdot (n+1, n+\beta+1, \\
&\quad 2n+\alpha+\beta+2, \frac{2}{1+t}), \quad \varphi_1(t) = u^{(1)}(t) + iv^{(1)}(t), \quad \varphi_2(t) = u^{(1)}(t) - iv^{(1)}(t)
\end{aligned}$$

Были проведены вычисления значений контактных напряжений σ_y для некоторых значений отношений модулей упругости полосы и плоскости (фиг.2,3) при $f(t) = 10^8 \text{ Па}$.



Фиг.2. Нормальные контактные напряжения при $E_2/E_1 = 0,1; 0,2$



Фиг.3. Нормальные контактные напряжения при $E_2/E_1 = 5,0; 10,0$

В таблице приведены значения коэффициентов особенности напряжений при тех же значениях отношения модулей упругости.

$$K(1) = \frac{2}{n + \alpha + \beta + 1} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i^*(\xi_i) P_n^{(\alpha, \beta)}(1)}{(1 - \xi_i) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)} \quad (10)$$

Таблица. Коэффициенты особенностей напряжений

E_2/E_1	0,1	0,2	5,0	10,0
$k \cdot 10^3$	19,38	10,34	74,80	309,80

Как видно из таблицы, контактные напряжения при той же степени неоднородности, когда более жёстким является материал полосы, на порядок больше, чем, когда более жёстким является материал полуплоскости.

Для коэффициента напряжений, как видно из (6), получено выражение известного типа. Более детальный расчёт зависимости контактных напряжений показывает, что основная уравновешивающая часть напряжений распределена более равномерно в однородном случае. При увеличении разномодульности напряжения больше концентрируются около особой точки, при этом, более сильно, когда увеличивается жёсткость материала полосы.

Заключение: Полученное решение даёт возможность легко оценить контактные напряжения, что нетрудно распространить на всю плоскость. При этом, авторы хотели бы особо отметить положительное значение квадратурных формул [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. О напряжённом состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. //Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. №1. С.131-137.
2. Cook N.S., Erdogan F. Stresses in bounded materials with a crack perpendicular to the interface. // Int.J.Eng. Sci.-1972-10, №8.-р.677-697.
3. Акопян В.Н. Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин. //Доклады НАН Армении. 2002. Т.102. №1. С.29-34.
4. Ni L., Nemat-Nasser S. Interface cracks in anisotropic dissimilar materials: general case //Quarterly of Applied Mathematics. 1992. V.26. P.300-305.
5. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. //Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgia. Vol.156 (2011). Pp.101-111.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.

Сведения об авторах:

Саркисян Вардан Гарегинович – Кандидат техн.наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2

Телефон: 61-55-78

Хачикян Альберт Серобович – Кандидат физ.-мат.наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2

Телефон: 74-02-89.

Поступила в редакцию 20.08.2014

УДК 539.3

**РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ТРЕХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ НЕСИММЕТРИЧНОЙ
СТРУКТУРЫ**

Агаловян Л.А., Закарян Т.В.

Ключевые слова: трёхслойная полоса, динамическая задача, асимптотическое решение.

Key words: three-layer strip, dynamic problem, asymptotic solution.

Բանալի բառեր. Եռաշերտ, դինամիկա, ասիմպտոտիկ լուծում.

Աղալովյան Լ.Ա., Չաքարյան Տ.Վ.

Ոչ սիմետրիկ կառուցվածք ունեցող օրթոտրոպ եռաշերտի համար դինամիկական առաջին եզրային խնդրի լուծման մասին

Ասիմպտոտիկ մեթոդով որոշված է առաձգականության տեսության դինամիկական առաջին եզրային խնդրի լուծումը ոչ սիմետրիկ կառուցվածք ունեցող օրթոտրոպ եռաշերտի համար: Ընդունված է, որ եռաշերտը գտնվում է հարթ դեֆորմացիոն վիճակում, իսկ շերտերի միջև կոնտակտը լրիվ է: Գտնված է ներքին խնդրի ընդհանուր լուծումը: Ցույց է տրված, որ երբ արտաքին բեռը բազմանդամային ֆունկցիա է երկայնական կոորդինատներից, իտեռացիոն պրոցեսն ընդհատվում է և ստացվում է ներքին խնդրի մաթեմատիկորեն ճշգրիտ լուծումը: Այն լուսաբանված է մասնավոր օրինակով:

Aghalovyan L.A., Zakaryan T.V.

The solution of first dynamic boundary value problem for three-layer orthotropic strip of non-symmetric structure

The solution of first dynamic boundary value problem of the theory of elasticity for three-layer orthotropic strip of non-symmetric structure is founded by the asymptotic method. It's assumed that the strip is considered under conditions of plane deformation and the contact between the layers is full. It's shown that in case when the external forces are the polynomials of longitudinal coordinate the iteration process is interrupted and the mathematically exact solution is obtained for the internal problem of three-layer package. The special case is discussed.

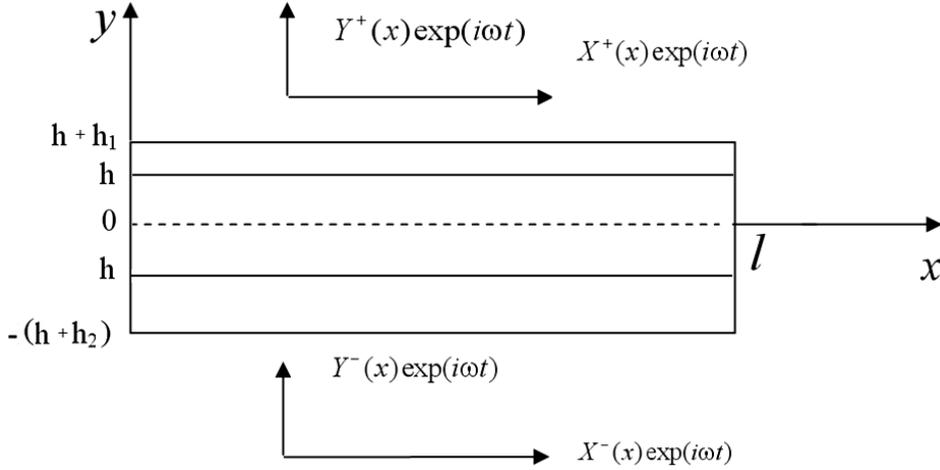
Асимптотическим методом найдено решение первой динамической краевой задачи теории упругости для трёхслойной ортотропной полосы несимметричной структуры. Считается, что полоса находится в условиях плоской деформации, а контакт между слоями – полный. Показано, что, когда внешние воздействия являются многочленами от продольной координаты, итерация обрывается и получается математически точное решение внутренней задачи для трёхслойного пакета. Сказанное проиллюстрировано на частном примере.

Введение. Для решения статических и динамических задач на основе уравнений и соотношений теории упругости для балок, пластин и оболочек весьма эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений. Решению статических краевых задач для однослойных и многослойных тонких тел асимптотическим методом посвящены монографии [1,2]. Решению смешанных динамических задач о собственных и вынужденных колебаниях полос, пластин и оболочек посвящены работы [3-7]. Первая краевая задача теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы асимптотическим методом решена в [8], а для ортотропной полосы – в [9]. Первая динамическая краевая задача для ортотропной прямоугольной пластинки решена в [10].

В данной работе асимптотическим методом найдено решение первой динамической краевой задачи о вынужденных колебаниях ортотропной трёхслойной полосы несимметричной структуры. Подобные задачи представляют большой интерес, в частности, в расчётах подкладок и включений.

1. Основные уравнения и постановка краевой задачи. Требуется найти решение уравнений и соотношений динамической плоской задачи (плоская деформация) теории упругости в области

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, -(h + h_2) \leq y \leq h + h_1, h_1 + 2h + h_2 = H \ll l\} \text{ (фиг.1).}$$



Фиг.1

уравнения движения –

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial y} = \rho^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} = \rho^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial t^2}, \quad k = I, II, III \quad (1.1)$$

соотношения упругости –

$$\frac{\partial u^k}{\partial x} = \beta_{11}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{12}^k \sigma_{yy}^k, \quad \frac{\partial v^k}{\partial y} = \beta_{12}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{22}^k \sigma_{yy}^k, \quad \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial x} = a_{66}^k \sigma_{xy}^k, \quad (1.2)$$

$$\beta_{ij}^k = \frac{1}{a_{33}^k} (a_{ij}^k a_{33}^k - a_{i3}^k a_{j3}^k), \quad i, j = 1, 2, \quad a_{66}^k = \frac{1}{G_{12}^k}, \quad k = I, II, III,$$

где $h_1, 2h, h_2$ – толщины первого, второго и третьего слоёв, $\sigma_{\alpha\gamma}$, u , v – компоненты, соответственно, тензора напряжений и вектора перемещения, ρ^k – плотность, a_{ij}^k – постоянные упругости, G_{12}^k – модуль сдвига, $k = I, II, III$ – номера слоёв.

Решение должно удовлетворять граничным условиям:

$$\sigma_{yy}(x, h + h_1) = Y^+(x) \exp(i\omega t), \quad \sigma_{xy}(x, h + h_1) = X^+(x) \exp(i\omega t), \quad (1.3)$$

$$\sigma_{yy}(x, -(h + h_2)) = -Y^-(x) \exp(i\omega t), \quad (1.4)$$

$$\sigma_{xy}(x, -(h + h_2)) = -X^-(x) \exp(i\omega t),$$

где ω – частота вынуждающего воздействия, и условиям полного контакта между слоями :

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^I(x, h) &= \sigma_{yy}^{II}(x, h), \quad \sigma_{xy}^I(x, h) = \sigma_{xy}^{II}(x, h), \\ u^I(x, h) &= u^{II}(x, h), \quad v^I(x, h) = v^{II}(x, h).\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{II}(x, -h) &= \sigma_{yy}^{III}(x, -h), \quad \sigma_{xy}^{II}(x, -h) = \sigma_{xy}^{III}(x, -h), \\ u^{II}(x, -h) &= u^{III}(x, -h), \quad v^{II}(x, -h) = v^{III}(x, -h),\end{aligned}\tag{1.6}$$

а также граничным условиям на поперечных сечениях $x = 0, l$, которые пока не конкретизируем.

Считается, что функции $X^\pm(x), Y^\pm(x)$ имеют производные требуемого порядка. В противном случае необходимо заранее их аппроксимировать полиномами или решение искать в пространстве обобщённых функций.

2. Асимптотическое решение задачи. Чтобы найти решение сформулированной краевой задачи, введём безразмерные координаты $\xi = x/l, \zeta = y/H$ и безразмерные перемещения $U_x^k = u^k/l, U_y^k = v^k/l$. В результате получим сингулярно-возмущённую малым параметром $\varepsilon = H/l$ систему:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial \zeta} = l^2 \rho^k \frac{\partial^2 U_x^k}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial \zeta} = l^2 \rho^k \frac{\partial^2 U_y^k}{\partial t^2},\tag{2.1}$$

$$\frac{\partial U_x^k}{\partial \xi} = \beta_{11}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{12}^k \sigma_{yy}^k, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_y^k}{\partial \zeta} = \beta_{12}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{22}^k \sigma_{yy}^k, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_x^k}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_y^k}{\partial \xi} = a_{66}^k \sigma_{xy}^k.$$

Решение системы (2.1) будем искать в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}^k(\xi, \zeta, t) = \sigma_{ij}^k(\xi, \zeta) \exp(i\omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, \quad i, j = 1, 2, \quad k = I, II, III,\tag{2.2}$$

$$(U_x^k(\xi, \zeta, t), U_y^k(\xi, \zeta, t)) = (U^k(\xi, \zeta), V^k(\xi, \zeta)) \exp(i\omega t).$$

Подставив (2.2) в (2.1), получим систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 \rho^k U^k &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 \rho^k V^k = 0, \\ \frac{\partial U^k}{\partial \xi} &= \beta_{11}^k \sigma_{11}^k + \beta_{12}^k \sigma_{22}^k, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^k}{\partial \zeta} = \beta_{12}^k \sigma_{11}^k + \beta_{22}^k \sigma_{22}^k,\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial U^k}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^k}{\partial \xi} = a_{66}^k \sigma_{12}^k, \quad \omega_* = H\omega, \quad k = I, II.$$

Решение сингулярно-возмущённой системы (2.3) складывается из решений внутренней задачи (Γ^{int}) и пограничного слоя (Γ^{b}) [1,11]

$$I = I^{\text{int}} + I^{\text{b}}\tag{2.4}$$

Решение внутренней задачи (Γ^{int}) имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{k \text{int}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{k(s)}(\xi, \zeta), \quad i, j = 1, 2, \quad s = \overline{0, N}, \\ (U^{k \text{int}}, V^{k \text{int}}) &= \varepsilon^s (U^{k(s)}, V^{k(s)}), \quad k = I, II, III.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Подставив (2.5) в (2.3), после известной процедуры для определения $\sigma_{ij}^{k(s)}, U^{k(s)}, V^{k(s)}$ получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \rho^k U^{k(s)} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \rho^k V^{k(s)} = 0, \\ \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} = \beta_{11}^k \sigma_{11}^{k(s)} + \beta_{12}^k \sigma_{22}^{k(s)}, \quad \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} = \beta_{12}^k \sigma_{11}^{k(s)} + \beta_{22}^k \sigma_{22}^{k(s)}, \\ \frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} = a_{66}^k \sigma_{12}^{k(s)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из этой системы напряжения можно выразить через перемещения по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(-\beta_{12}^k \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{22}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(\beta_{11}^k \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \\ \sigma_{12}^{k(s)} = \frac{1}{a_{66}^k} \left(\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \Delta_1^k = \beta_{11}^k \beta_{22}^k - (\beta_{12}^k)^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставив значение $\sigma_{12}^{k(s)}$ в первое уравнение (2.6), для определения $U^{k(s)}$ получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 U^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66}^k \omega_*^2 \rho^k U^{k(s)} = f_u^{k(s)}, \quad (2.8)$$

где

$$f_u^{k(s)} = -a_{66}^k \frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 V^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}. \quad (2.9)$$

Подставив значение $\sigma_{22}^{k(s)}$ из (2.7) во второе уравнение (2.6), получим следующее уравнение для определения $V^{k(s)}$:

$$\frac{\partial^2 V^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta_1^k}{\beta_{11}^k} \omega_*^2 \rho^k V^{k(s)} = f_v^{k(s)}, \quad (2.10)$$

где

$$f_v^{k(s)} = \frac{\beta_{12}^k}{\beta_{11}^k} \frac{\partial^2 U^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\Delta_1^k}{\beta_{11}^k} \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} \quad (2.11)$$

Решением уравнения (2.8) является

$$U^{k(s)} = C_1^{k(s)}(\xi) \sin \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta + C_2^{k(s)}(\xi) \cos \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta + \bar{u}^{k(s)} \quad (2.12)$$

а уравнения (2.10) –

$$V^{k(s)} = C_3^{k(s)}(\xi) \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^k}{\beta_{11}^k} \rho^k} \omega_* \zeta + C_4^{k(s)}(\xi) \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^k}{\beta_{11}^k} \rho^k} \omega_* \zeta + \bar{v}^{k(s)}, \quad (2.13)$$

где $\bar{u}^{k(s)}, \bar{v}^{k(s)}$ – частные решения уравнений (2.8), (2.10), соответственно.

Подставив значения $U^{k(s)}, V^{k(s)}$ в формулы (2.7), для вычисления напряжения $\sigma_{12}^{k(s)}$ будем иметь:

$$\sigma_{12}^{k(s)} = \omega_* \sqrt{\rho^k / a_{66}^k} \left(C_1^{k(s)} \cos \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta - C_2^{k(s)} \sin \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta \right) + f_{\sigma_{12}}^{k(s)}, \quad (2.14)$$

$$f_{\sigma_{12}}^{k(s)} = \frac{1}{a_{66}^k} \left(\frac{\partial \bar{u}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right),$$

а для напряжения $\sigma_{22}^{k(s)}$ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{k(s)} = \omega_* \sqrt{\beta_{11}^k \rho^k / \Delta_1^k} \left(C_3^{k(s)} \cos \sqrt{\Delta_1^k \rho^k / \beta_{11}^k} \omega_* \zeta - \right. \\ \left. - C_4^{k(s)} \sin \sqrt{\Delta_1^k \rho^k / \beta_{11}^k} \omega_* \zeta \right) + f_{\sigma_{22}}^{k(s)}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$f_{\sigma_{22}}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(\beta_{11}^k \frac{\partial \bar{v}^{k(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12}^k \frac{\partial u^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right).$$

Используя решения (2.14), (2.15), удовлетворим условиям (1.3), (1.4), которые примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) = X^{+(s)}, \quad \sigma_{12}^{II(s)}(\xi, -\zeta_2) = -X^{-(s)}, \\ \sigma_{22}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) = Y^{+(s)}, \quad \sigma_{22}^{II(s)}(\xi, -\zeta_2) = -Y^{-(s)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$X^{\pm(0)} = \varepsilon X^{\pm}, \quad X^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad (2.17)$$

$$Y^{\pm(0)} = \varepsilon Y^{\pm}, \quad Y^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0.$$

В результате, относительно функций $C_j^{I(s)}(\xi)$, $C_j^{III(s)}(\xi)$ получим систему:

$$\omega_* \sqrt{\rho^I / a_{66}^I} \left(C_1^{I(s)} \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta_1 - C_2^{I(s)} \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta_1 \right) + f_{\sigma_{12}}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) = X^{+(s)}(\xi),$$

$$\omega_* \sqrt{\beta_{11}^I \rho^I / \Delta_1^I} \left(C_3^{I(s)} \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* \zeta_1 - C_4^{I(s)} \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* \zeta_1 \right) +$$

$$+ f_{\sigma_{22}}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) = Y^{+(s)}(\xi),$$

$$\omega_* \sqrt{\rho^{III} / a_{66}^{III}} \left(C_1^{III(s)} \cos \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* \zeta_2 + C_2^{III(s)} \sin \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* \zeta_2 \right) +$$

$$+ f_{\sigma_{12}}^{III(s)}(\xi, -\zeta_2) = -X^{-(s)}(\xi), \quad (2.18)$$

$$\omega_* \sqrt{\beta_{11}^{III} \rho^{III} / \Delta_1^{III}} \left(C_3^{III(s)} \cos \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega_* \zeta_2 + C_4^{III(s)} \sin \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega_* \zeta_2 \right) +$$

$$+ f_{\sigma_{22}}^{III(s)}(\xi, -\zeta_2) = -Y^{-(s)}(\xi)$$

К системе (2.18) необходимо присоединить вытекающие из условий контакта между слоями (1.5), (1.6) алгебраические уравнения. Соответствующая объединённая алгебраическая система из двенадцати уравнений относительно двенадцати неизвестных $C_1^{k(s)}$, $C_2^{k(s)}$, $C_3^{k(s)}$, $C_4^{k(s)}$, $k = I, II, III$ распадается на две системы относительно соответствующих шести неизвестных. Решив первую из этих систем, определим $C_1^{k(s)}$, $C_2^{k(s)}$:

$$\begin{aligned}
C_1^{I(s)} &= \frac{1}{A_1^I} \left(d_1^{(s)} + \frac{A_2^I g_2^{(s)}}{g_1} \right), & C_2^{I(s)} &= \frac{g_2^{(s)}}{g_1}, \\
C_1^{II(s)} &= \frac{1}{b_1} \left(\frac{m_3 g_2^{(s)}}{g_1} - m_4^{(s)} \right), & C_2^{II(s)} &= \frac{1}{b_1} \left(\frac{m_1 g_2^{(s)}}{g_1} - m_2^{(s)} \right) \\
C_1^{III(s)} &= \frac{1}{A_1^{III}} \left(d_3^{(s)} - \frac{A_2^{III} g_3^{(s)}}{g_1} \right), & C_2^{III(s)} &= \frac{g_3^{(s)}}{g_1},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где

$$\begin{aligned}
m_1 &= -\frac{A_2^{II0}}{A_1^I} \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_1 A_1^{II0}}{A_1^I} \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0), \\
m_3 &= \frac{A_1^{II0}}{A_1^I} \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_1 A_2^{II0}}{A_1^I} \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0), \\
m_2^{(s)} &= b_1 A_1^{II0} \left(d_9^{(s)} - \frac{A_2^{I0} d_1^{(s)}}{A_1^I} \right) - A_2^{II0} \left(d_5^{(s)} - \frac{A_1^{I0} d_1^{(s)}}{A_1^I} \right), \\
m_4^{(s)} &= b_1 A_2^{II0} \left(d_9^{(s)} - \frac{A_2^{I0} d_1^{(s)}}{A_1^I} \right) + A_1^{II0} \left(d_5^{(s)} - \frac{A_1^{I0} d_1^{(s)}}{A_1^I} \right), \\
g_1 &= \frac{1}{b_1 A_1^I A_1^{III}} \left[\left(\cos 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \right. \\
&+ b_1 \sin 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \left. \right) \cos \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \\
&+ b_3 \left(b_1 \cos 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \\
&\left. \left. - \sin 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \sin \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \right], \\
g_2^{(s)} &= \frac{1}{b_1 A_1^{III}} \left[\left(b_1 d_7^{(s)} + A_1^{II0} m_4 + A_2^{II0} m_2 + \frac{b_1 b_3 A_1^{III0} d_3^{(s)}}{A_1^{III}} \right) \cos \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \right. \\
&\left. + \left(b_1 d_{10}^{(s)} - A_2^{II0} m_4 + A_1^{II0} m_2 - \frac{b_1 A_2^{III0} d_3^{(s)}}{A_1^{III}} \right) b_3 \sin \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \right], \\
g_3^{(s)} &= \frac{1}{b_1^2 A_1^I} \left[\left(b_1 d_7^{(s)} + A_1^{II0} m_4 + A_2^{II0} m_2 + \frac{b_1 b_3 A_1^{III0} d_3^{(s)}}{A_1^{III}} \right) \times \right. \\
&\times \left(b_1 \cos 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \\
&\left. \left. - \sin 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) - \right.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(b_1 d_{10}^{(s)} - A_2^{II0} m_4 + A_1^{II0} m_2 - \frac{b_1 A_2^{III0} d_3^{(s)}}{A_1^{III}} \right) \left(\cos 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \\
& \left. + b_1 \sin 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right), \\
& A_1^I = \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta_1, \quad A_2^I = \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta_1, \\
& A_3^I = \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* \zeta_1, \quad A_4^I = \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* \zeta_1, \quad I, III = \zeta_1, \zeta_2, \\
& A_1^{i0} = \cos \sqrt{a_{66}^i \rho^i} \omega_* \zeta_0, \quad A_2^{i0} = \sin \sqrt{a_{66}^i \rho^i} \omega_* \zeta_0, \\
& A_3^{i0} = \cos \sqrt{\Delta_1^i \rho^i / \beta_{11}^i} \omega_* \zeta_0, \quad A_4^{i0} = \sin \sqrt{\Delta_1^i \rho^i / \beta_{11}^i} \omega_* \zeta_0, \quad i = I, II, III, \\
& b_1 = \sqrt{a_{66}^I \rho^I / a_{66}^{II} \rho^{II}}, \quad b_2 = \sqrt{\beta_{11}^{II} \rho^{II} \Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I \Delta_1^{II}}, \\
& b_3 = \sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II} / a_{66}^{III} \rho^{III}}, \quad b_4 = \sqrt{\beta_{11}^{III} \rho^{III} \Delta_1^II / \beta_{11}^{II} \rho^{II} \Delta_1^{III}}, \\
& d_1^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \left(X^{+(s)}(\xi) - f_{\sigma_{12}}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) \right), \\
& d_2^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \left(Y^{+(s)}(\xi) - f_{\sigma_{22}}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) \right), \\
& d_3^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^{III} / \rho^{III}} \left(-X^{-(s)}(\xi) - f_{\sigma_{12}}^{III(s)}(\xi, -\zeta_2) \right), \\
& d_4^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \left(-Y^{-(s)}(\xi) - f_{\sigma_{22}}^{III(s)}(\xi, -\zeta_2) \right), \\
& d_5^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \left(f_{\sigma_{12}}^{II(s)}(\xi, \zeta_0) - f_{\sigma_{12}}^{I(s)}(\xi, \zeta_0) \right), \\
& d_6^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \left(f_{\sigma_{22}}^{II(s)}(\xi, \zeta_0) - f_{\sigma_{22}}^{I(s)}(\xi, \zeta_0) \right), \\
& d_7^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^{II} / \rho^{II}} \left(f_{\sigma_{12}}^{III(s)}(\xi, -\zeta_0) - f_{\sigma_{12}}^{II(s)}(\xi, -\zeta_0) \right), \\
& d_8^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^II / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \left(f_{\sigma_{22}}^{III(s)}(\xi, -\zeta_0) - f_{\sigma_{22}}^{II(s)}(\xi, -\zeta_0) \right), \\
& d_9^{(s)} = \bar{u}^{II(s)}(\xi, \zeta_0) - \bar{u}^{I(s)}(\xi, \zeta_0), \\
& d_{10}^{(s)} = \bar{u}^{III(s)}(\xi, -\zeta_0) - \bar{u}^{II(s)}(\xi, -\zeta_0), \\
& d_{11}^{(s)} = \bar{v}^{II(s)}(\xi, \zeta_0) - \bar{v}^{I(s)}(\xi, \zeta_0), \\
& d_{12}^{(s)} = \bar{v}^{III(s)}(\xi, -\zeta_0) - \bar{v}^{II(s)}(\xi, -\zeta_0).
\end{aligned}$$

Из второй системы определяются $C_3^{k(s)}$, $C_4^{k(s)}$:

$$\begin{aligned}
C_3^{I(s)} &= \frac{1}{A_3^I} \left(d_2^{(s)} + \frac{A_4^I \bar{g}_2^{(s)}}{\bar{g}_1} \right), & C_4^{I(s)} &= \frac{\bar{g}_2^{(s)}}{\bar{g}_1}, \\
C_3^{II(s)} &= \frac{1}{b_2} \left(\frac{\bar{m}_3 \bar{g}_2^{(s)}}{\bar{g}_1} - \bar{m}_4^{(s)} \right), & C_4^{II(s)} &= \frac{1}{b_2} \left(\frac{\bar{m}_1 \bar{g}_2^{(s)}}{\bar{g}_1} - \bar{m}_2^{(s)} \right), \\
C_3^{III(s)} &= \frac{1}{A_3^{III}} \left(d_4^{(s)} - \frac{A_4^{III} \bar{g}_3^{(s)}}{\bar{g}_1} \right), & C_4^{III(s)} &= \frac{\bar{g}_3^{(s)}}{\bar{g}_1},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{m}_1 &= -\frac{A_4^{II0}}{A_3^I} \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_2 A_3^{II0}}{A_3^I} \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0), \\
\bar{m}_3 &= \frac{A_3^{II0}}{A_3^I} \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_2 A_4^{II0}}{A_3^I} \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0), \\
\bar{m}_2^{(s)} &= b_2 A_3^{II0} \left(d_{11}^{(s)} - \frac{A_4^{I0} d_2^{(s)}}{A_3^I} \right) - A_4^{II0} \left(d_6^{(s)} - \frac{A_3^{I0} d_2^{(s)}}{A_3^I} \right), \\
\bar{m}_4^{(s)} &= b_2 A_4^{II0} \left(d_{11}^{(s)} - \frac{A_4^{I0} d_2^{(s)}}{A_3^I} \right) + A_3^{II0} \left(d_6^{(s)} - \frac{A_3^{I0} d_2^{(s)}}{A_3^I} \right), \\
\bar{g}_1 &= \frac{1}{b_2 A_3^I A_3^{III}} \left[\left(\cos 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_2 \sin 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \cos \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \right. \\
&\quad \left. + b_4 \left(b_2 \cos 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \sin \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \right], \\
\bar{g}_2^{(s)} &= \frac{1}{b_2 A_3^{III}} \left[\left(b_2 d_8^{(s)} + A_3^{II0} \bar{m}_4 + A_4^{II0} \bar{m}_2 + \frac{b_2 b_4 A_3^{III0} d_4^{(s)}}{A_3^{III}} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \cos \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \right. \\
&\quad \left. + \left(b_2 d_{12}^{(s)} - A_4^{II0} \bar{m}_4 + A_3^{II0} \bar{m}_2 - \frac{b_2 A_4^{III0} d_4^{(s)}}{A_3^{III}} \right) b_4 \sin \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \right], \\
\bar{g}_3^{(s)} &= \frac{1}{b_2 A_3^I} \left[\left(b_2 d_8^{(s)} + A_3^{II0} \bar{m}_4 + A_4^{II0} \bar{m}_2 + \frac{b_2 b_4 A_3^{III0} d_4^{(s)}}{A_3^{III}} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(b_2 \cos 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \right.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \\
& - \left(b_2 d_{12}^{(s)} - A_4^{II0} \bar{m}_4 + A_3^{II0} \bar{m}_2 - \frac{b_2 A_4^{III} d_4^{(s)}}{A_3^{III}} \right) \times \\
& \times \left(\cos 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \\
& \left. + b_2 \sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \Big].
\end{aligned}$$

Подставив значения $C_j^{k(s)}$ в формулы (2.12), (2.13), определим перемещения, а по формулам (2.7), (2.14), (2.15) вычисляются напряжения. Согласно формулам (2.12), (2.19), имеем:

$$U^{I(s)} = \frac{d_1^{(s)} g_1 + A_2^I g_2^{(s)}}{A_1^I g_1} \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta + \frac{g_2^{(s)}}{g_1} \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta + \bar{u}^{I(s)}, \quad (2.23)$$

$$U^{II(s)} = \frac{m_3 g_2^{(s)} - m_4^{(s)} g_1}{b_1 g_1} \sin \sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta + \frac{m_1 g_2^{(s)} - m_2^{(s)} g_1}{b_1 g_1} \cos \sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta + \bar{u}^{II(s)},$$

$$U^{III(s)} = \frac{d_3^{(s)} g_1 - A_4^{III} g_3^{(s)}}{A_1^{III} g_1} \sin \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* \zeta + \frac{g_3^{(s)}}{g_1} \cos \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* \zeta + \bar{u}^{III(s)},$$

а используя (2.13), (2.21), получим

$$V^{I(s)} = \frac{d_2^{(s)} \bar{g}_1 + A_4^I \bar{g}_2^{(s)}}{A_3^I \bar{g}_1} \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^I}{\beta_{11}^I} \rho^I} \omega_* \zeta + \frac{\bar{g}_2^{(s)}}{\bar{g}_1} \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^I}{\beta_{11}^I} \rho^I} \omega_* \zeta + \bar{v}^{I(s)}, \quad (2.24)$$

$$V^{II(s)} = \frac{\bar{m}_3 \bar{g}_2^{(s)} - \bar{m}_4^{(s)} \bar{g}_1}{b_2 \bar{g}_1} \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^{II}}{\beta_{11}^{II}} \rho^{II}} \omega_* \zeta + \frac{\bar{m}_1 \bar{g}_2^{(s)} - \bar{m}_2^{(s)} \bar{g}_1}{b_2 \bar{g}_1} \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^{II}}{\beta_{11}^{II}} \rho^{II}} \omega_* \zeta + \bar{v}^{II(s)},$$

$$V^{III(s)} = \frac{d_4^{(s)} \bar{g}_1 - A_4^{III} \bar{g}_3^{(s)}}{A_3^{III} \bar{g}_1} \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^{III}}{\beta_{11}^{III}} \rho^{III}} \omega_* \zeta + \frac{\bar{g}_3^{(s)}}{\bar{g}_1} \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^{III}}{\beta_{11}^{III}} \rho^{III}} \omega_* \zeta + \bar{v}^{III(s)}.$$

Как следует из формул (2.23), (2.24), при

$$g_1 = 0 \quad \text{и} \quad \bar{g}_1 = 0 \quad (2.25)$$

будет возникать резонанс. Уравнением для определения резонансных частот соответствующих $g_1 = 0$, согласно (2.20), является:

$$\begin{aligned}
& (1 + b_1) \left[(1 + b_3) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (1 - b_3) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \right] + \\
& + (1 - b_1) \left[(1 - b_3) \sin(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + (1 + b_3) \sin(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \right] = 0, \quad (2.26)
\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega h_1, \quad \alpha_2 = 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega h, \quad \alpha_3 = \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega h_2,$$

а уравнением резонансных частот соответствующих $\bar{g}_1 = 0$, согласно (2.22), является

$$(1+b_2)\left[(1+b_4)\sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+(1-b_4)\sin(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3)\right]+$$

$$+(1-b_2)\left[(1-b_4)\sin(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3)+(1+b_4)\sin(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3)\right]=0, \quad (2.27)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega h_1, \quad \gamma_2 = 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega h, \quad \gamma_3 = \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega h_2.$$

Как следует из формул (2.23), (2.24), (2.26), (2.27), во всех слоях возникает резонанс при одинаковых, соответствующих значениях резонансных частот.

Из полученного решения (2.7), (2.12)-(2.15), (2.19)-(2.22) легко вывести более простые формулы для пакета симметричной структуры. Для этого случая $h_1 = h_2$, $\zeta_1 = \zeta_2$, $a_{ij}^I = a_{ij}^{III}$.

Отметим, что найденное решение, как правило, не будет удовлетворять условиям на боковой поверхности. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя. Решение пограничного слоя и его сопряжение с решением внутренней задачи осуществляется, как в [1,9].

Если функции $X^\pm(x), Y^\pm(x)$ являются многочленами, итерационный процесс обрывается на определённом приближении и получается математически точное решение. В качестве иллюстрации приведём решение, соответствующее

$Y^+(x) = \text{const}$, $X^\pm = 0$, $Y^- = 0$. Согласно формулам (2.9), (2.12), (2.14), (2.19), (2.20), имеем:

$$C_1^{j(s)} = 0, \quad C_2^{j(s)} = 0, \quad U^{j(s)} = 0, \quad \sigma_{12}^{j(s)} = 0, \quad j = I, II, III. \quad (2.28)$$

Используя формулы (2.7), (2.11), (2.13), (2.15), (2.21), (2.22), будем иметь:

$$d_2^{(0)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I} \rho^I Y^{+(0)}, \quad d_k^{(0)} = 0, \quad d_i^{(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad k = 4, 6, 8, 11, 12,$$

$$C_3^{I(0)} = \frac{1}{A_3^I} \left(d_2^{(0)} + \frac{A_4^I \bar{g}_2^{(0)}}{\bar{g}_1} \right), \quad C_4^{I(0)} = \frac{\bar{g}_2^{(0)}}{\bar{g}_1},$$

$$C_3^{II(0)} = \frac{1}{b_2} \left(\frac{\bar{m}_3 \bar{g}_2^{(0)}}{\bar{g}_1} - \bar{m}_4^{(0)} \right), \quad C_4^{II(0)} = \frac{1}{b_2} \left(\frac{\bar{m}_1 \bar{g}_2^{(0)}}{\bar{g}_1} - \bar{m}_2^{(0)} \right),$$

$$C_3^{III(0)} = -\frac{A_4^{III} \bar{g}_3^{(0)}}{A_3^{III} \bar{g}_1}, \quad C_4^{III(0)} = \frac{\bar{g}_3^{(0)}}{\bar{g}_1},$$

$$\bar{m}_1 = -\frac{A_4^{II0}}{A_3^I} \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_2 A_3^{II0}}{A_3^I} \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0),$$

$$\bar{m}_3 = \frac{A_3^{II0}}{A_3^I} \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_2 A_4^{II0}}{A_3^I} \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0),$$

$$\bar{m}_2^{(0)} = \frac{d_2^{(0)}}{A_3^I} (A_4^{II0} A_3^{I0} - b_2 A_3^{II0} A_4^{I0}),$$

$$\bar{m}_4^{(0)} = -\frac{d_2^{(0)}}{A_3^I} (b_2 A_4^{II0} A_4^{I0} + A_3^{II0} A_3^{I0}),$$

$$\bar{g}_1 = \frac{1}{b_2 A_3^I A_3^{III}} \left[\left(\cos 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + b_2 \sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \cos \sqrt{\Delta_1''' \rho''' / \beta_{11}'''} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \\
& + b_4 \left(b_2 \cos 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \\
& \left. - \sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \sin \sqrt{\Delta_1''' \rho''' / \beta_{11}'''} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \Big], \\
\bar{g}_2^{(0)} &= \frac{1}{b_2 A_3'''} \left[\left(A_3'' \bar{m}_4 + A_4'' \bar{m}_2 \right) \cos \sqrt{\Delta_1''' \rho''' / \beta_{11}'''} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \right. \\
& \left. + \left(A_4'' \bar{m}_4 + A_3'' \bar{m}_2 \right) b_4 \sin \sqrt{\Delta_1''' \rho''' / \beta_{11}'''} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \right], \\
\bar{g}_3^{(0)} &= \frac{1}{b_2^2 A_3'} \left[\left(A_3'' \bar{m}_4 + A_4'' \bar{m}_2 \right) \times \right. \\
& \times \left(b_2 \cos 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \\
& \left. - \sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) - \\
& \left. - \left(A_4'' \bar{m}_4 + A_3'' \bar{m}_2 \right) \left(\cos 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \right. \\
& \left. \left. + b_2 \sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \right].
\end{aligned}$$

В результате, имеем следующее математически точное решение внутренней задачи

$$u^k = 0, \quad \sigma_{12}^k = 0, \quad v^k = lV^{k(0)} \exp(i\omega t),$$

$$V^{k(0)} = C_3^{\kappa(0)}(\xi) \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^\kappa}{\beta_{11}^\kappa}} \rho^k \omega_* \zeta + C_4^{\kappa(0)}(\xi) \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^\kappa}{\beta_{11}^\kappa}} \rho^k \omega_* \zeta, \quad (2.30)$$

$$V^{\kappa(s)} = 0, \quad s \neq 0$$

$$\sigma_{xx}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{11}^{k(0)} \exp(i\omega t), \quad \sigma_{yy}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{22}^{k(0)} \exp(i\omega t)$$

$$\sigma_{11}^{k(0)} = -\frac{\beta_{12}^k}{\Delta_1^k} \frac{\partial V^{k(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{22}^{k(0)} = \frac{\beta_{11}^k}{\Delta_1^k} \frac{\partial V^{k(0)}}{\partial \zeta}.$$

Заключение. Найдено решение первой динамической краевой задачи теории упругости для трёхслойной ортотропной полосы несимметричной структуры. Считается, что полоса находится в условиях плоской деформации. Асимптотическим методом выведены характеристические уравнения и рекуррентные формулы для определения компонент тензора напряжений и вектора перемещения. Установлены условия возникновения резонанса. Доказано, что значения резонансных частот для всех слоёв одинаковы и зависят от физико-механических и геометрических параметров всех слоёв. Показано, что при полиномиальных внешних нагружениях итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение во внутренней задаче. Приведён иллюстрационный пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468 с.
3. Агаловян Л.А., Халатян Л.М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях.// Докл. НАН Армении. 1999. Т.99 №4. С.315-321.
4. Агаловян Л.А., Саркисян Л.С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы. // В сб.: «Гр. XVIII Международной конф. по теории оболочек и пластин». Саратов: 1997. Т.1. С.30-38.
5. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. О характере вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.186-192.
6. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.18-28.
7. Агаловян М.Л. Пространственная задача о вынужденных колебаниях пластин с общей анизотропией. // В сб.: «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести». Ереван. Изд-во «Гитутюн» НАН Армении, 2006. С.42-49.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы. // Прикл. мат. и мех. (ПММ). 2008. Т.72. Вып.4. С.633-634; Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 72 (2008), pp 452-460. Elsevier 2008.
9. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Асимптотическое решение динамической первой краевой задачи теории упругости для ортотропной полосы. // В сб.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван. 2007. С. 21-27.
10. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки.// Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. №4. С.304-309.
11. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович,

Академик НАН Армении, зав. отделом Института механики НАН Армении

Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (+37410) 52-58-35; E-mail: aghal@mechins.sci.am

Закарян Татевик Владиковна,

Научн.сотр. Института механики НАН Армении

Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (+37410) 63-88-82; E-mail: zaqaryantatevik@mail.ru

Поступила в редакцию 16.10.2014

УДК 539.3

**ЕЩЁ РАЗ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ
ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ**

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: устойчивость, потеря устойчивости, внутреннее и внешнее давления.

Key words: stability, buckling, internal and external impressions.

Բանալի բառեր՝ Կայունություն, կայունության կորուստ, ներքին և արտաքին ճնշումներ

**Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.
Դարձյալ զլանային պանելի կայունության մասին**

Պանելի կայունությունը միաչափ դրվածքով դիտարկվում է բեռների և ջերմության ազդեցության տակ եզրային պայմանների երկու դեպքի համար: Մի դեպքում կայունության կորուստ տեղի է ունենում ներքին, Իսկ մյուս դեպքում արտաքին ազդեցությունների տակ: Առաջին դեպքում նախնական վիճակի կտրող ճիգի հաշվառումը էապես փոխում է կրիտիկական պարամետրերի արժեքները:

**Movsisyan L.A., Nersisyan G.G.
Again on the stability of cylindrical panels**

The stability of panels in one-dimensional formulation under loads and temperature for two-case boundary conditions are being considered. In one case buckling of the stability takes place under internal impressions in the other-external.

Устойчивость панели рассматривается в одномерной постановке при воздействии нагрузок и температуры для двух случаев граничных условий. В одном случае потеря устойчивости происходит при внутреннем воздействии, в другом – при внешнем. В первом случае учёт перерезывающего усилия существенно меняет значения критических параметров.

Введение. Известно [1], как изменения тангенциальных граничных условий существенно влияют на значения критических параметров для задачи устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Насколько нам известно, только в [2,3] показано, что для панели при нормальном давлении изменение тангенциального граничного условия приводит не только к количественному изменению критического значения, но и, что более существенно, к качественному: если при однородном условии относительно перемещения панель теряет устойчивость при внешнем давлении, то уже при однородном условии относительно усилия (классический случай свободного опирания) она теряет устойчивость уже при внутреннем давлении.

Оба эти типа задач отличаются друг от друга только тем, что из трёх граничных условий они отличаются друг от друга только одним условием.

В настоящей статье изучается ряд задач при обоих случаях граничных условий. Качественное отличие очевидно.

Постановка задачи

1. Бесконечная цилиндрическая панель находится в постоянном температурном поле и на неё действует нормальное давление (различного типа). Уравнения статики начального состояния для усилий и изгибающего момента дают (одномерная задача)

$$T^0 = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + R \int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \quad (1.1)$$

$$N^0 = -\frac{dT^0}{d\theta}, \quad M^0 = -RT^0 - RC_3$$

Эти величины выражаются через компоненты перемещений следующим образом:

$$T^0 = \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \left[\frac{dv^0}{d\theta} + w^0 - \alpha R(1+\nu)t_0 \right], \quad M^0 = -\frac{D}{R^2} \frac{d^2 w^0}{d\theta^2} \quad (1.2)$$

Обозначения обычные.

Будут рассмотрены два типа граничных условий

$$a) w^0 = M^0 = T^0 = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \theta = \theta_0 \quad (1.3)$$

$$б) w^0 = M^0 = v^0 = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \theta = \theta_0$$

Аналогичные условия будут и для возмущённого состояния.

В литературе первый случай именуется как «шарнирное опирание со свободным смещением в поперечном направлении», а второй – шарнирное опирание с закреплённым смещением.

2. В первом случае (1.3) кольцевое усилие (перерезывающее также) определяется непосредственно –

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{R}{\sin \theta_0} \int_0^{\theta_0} q \sin(\theta_0 - \varphi) d\varphi \quad (2.1)$$

Решение задачи. Будут рассмотрены две задачи.

Первая задача стандартная: панель под нормальным равномерным внутренним давлением q_0 . Только в этом случае именно внутренним получается сжимающее усилие

$$T^0 = Rq_0 \left(1 - \cos \theta - \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \cdot \sin \theta \right) \quad (2.2)$$

Как видно из (2.2), усилие T_0 вовсе не постоянное, как принято в [4] (стр.205-206), к тому же, с обратным знаком.

Вторая задача такая: равномерное усилие действует по длине панели в срединном

$$\text{сечении } \theta = \frac{\theta_0}{2}, \quad q = p\delta\left(\theta + \frac{\theta_0}{2}\right)$$

Тогда

$$T^0 = \begin{cases} C \sin \theta, C = -\frac{P}{2 \cos \frac{\theta_0}{2}}, 0 \leq \theta \leq \frac{\theta_0}{2} \\ C \sin \theta + P \sin \left(\theta - \frac{\theta_0}{2} \right), \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Усилие N^0 определяется по (1.1).

Система уравнений устойчивости записывается в виде [2]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta} - H \frac{d^3 w}{d\theta^3} - \bar{N}^0 \frac{d^2 w}{d\theta^2} &= 0 \\ H \frac{d^4 w}{d\theta^4} + \frac{dv}{d\theta} + w - \bar{T}^0 \frac{d^2 w}{d\theta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $H = \frac{h^2}{12R^2}$, $(\bar{T}^0, \bar{N}^0) = \frac{1-v^2}{Eh} (T^0, N^0)$.

Если представить усилия \bar{T}^0 и \bar{N}^0 в виде рядов

$$T^0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \mu_n \theta, \quad N^0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \mu_n \theta, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\theta_0}, \quad (b_n = \mu_n a_n) \quad (2.5)$$

и искать решение (2.4) в виде

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos \mu_n \theta, \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \mu_n \theta, \quad (2.6)$$

то определение критических параметров сводится к нахождению минимального корня из условия разрешимости следующей бесконечной системы:

$$\begin{aligned} \mu_k^2 (\mu_k^2 - 1) w_k + \lambda \left[a'_0 - \frac{1}{2} (1 + 2\chi) a'_{2k} \right] \mu_k^2 w_k + \\ + \frac{1}{2} \chi \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} \left[a'_{k-n} \left(1 + \chi \frac{k-n}{k} \right) - a'_{k+n} \left(1 + \chi \frac{k+n}{k} \right) \right] \mu_n^2 w_n + \right. \\ \left. + \sum_{n=k+1}^{\infty} \left[a'_{n-k} \left(1 + \chi \frac{n-k}{k} \right) - a'_{k+n} \left(1 + \chi \frac{k+n}{k} \right) \right] \mu_n^2 w_n \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для каждой задачи будет свой λ , при том,

$$\lambda a'_m = \frac{1-v^2}{EhH} a_m \quad (2.8)$$

Здесь $\chi = 0$ соответствует неучёту N^0 при определении критических параметров, а $\chi = 1$ – наоборот. Дело в том, что при обсуждаемых граничных условиях его учёт существенно изменяет значения критических параметров [3].

Для случая (2.2) коэффициенты

$$a'_0 = \frac{1}{\theta_0} \left(\theta_0 - 2 \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right)$$

$$a'_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\theta_0^2 - (n\pi)^2} \left\{ \sin \theta_0 - \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \left[\cos \theta_0 + (-1)^{n+1} \right] \right\}$$
(2.9)

а для второй задачи (2.3)

$$a'_0 = \frac{1}{\theta_0} \left(1 - \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$a'_0 = \frac{(-1)^{n+1} \theta_0}{\theta_0^2 - (n\pi)^2} \left\{ \frac{\cos \theta_0}{\cos \frac{\theta}{2}} + 2 \left[\cos \frac{\theta}{2} + (1)^n \cos \frac{n\pi}{2} \right] \right\}$$
(2.10)

Соответственно для первой и второй задач искомым λ будет:

$$\lambda = 12(1 - \nu^2) \frac{q}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^3 \quad \text{и} \quad \lambda = 12(1 - \nu^2) \frac{P}{Eh} \left(\frac{R}{h} \right)^2$$
(2.11)

В табл.1 приведены $\lambda_{\text{кр}}$ для обеих задач при некоторых θ_0 (очередность сохранена).

В каждой клетке первые числа соответствуют случаю $\chi = 0$ (без учёта N^0), а вторые – с учётом.

Как видно из таблицы, учёт N^0 существенно уменьшает значения критических параметров.

Таблица 1

θ_0	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$
№			
I	38.414 24.284	8.139 5,187	1.896 1.222
II	59.425 40.369	8.352 5.656	1.449 0.977

3. При граничных условиях по второму варианту из (1.3) рассмотрим три задачи.

В случае равномерного нормального давления (уже внешнего) с точностью

$\left(\frac{h}{R} \right)^2$ усилие T^0 – постоянное

$$T^0 = -Rq.$$
(3.1)

Теперь – аналог второй задачи из предыдущего пункта. Для получения выражения для T^0 начало новой системы координат поместим в середине сечения панели

(точек приложения усилия P). Тогда для систем (1.2) и (1.3) ($q = t_0 = 0$) будем иметь следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{dw^0}{d\theta} = v_0 = 0, \quad N^0 = -\frac{P}{2} \quad \text{при } \theta_1 = 0 \\ w = M^0 = v^0 = 0 \quad \text{при } \theta_1 = \frac{\theta_0}{2}, \quad \left(\theta = \theta_1 + \frac{\theta_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если перейти теперь от θ_1 к координатам θ , то в окончательном виде для T^0 получим выражение

$$\begin{aligned} T^0 = -\frac{P}{2}(\sin \theta + C \cos \theta) \\ C \left[\sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0}{2} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{2} \right) \cos \frac{\theta_0}{2} \right] = \cos \frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0}{2} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{12} \right) \sin \frac{\theta_0}{2} - 1 - \frac{1}{8} \theta_0^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Коэффициенты ряда T^0 будут:

$$\begin{aligned} a_0 = P \left(\cos \frac{\theta_0}{2} - 1 - C \sin \frac{\theta_0}{2} \right) \\ a_n = \frac{P\theta_0}{(h\pi)^2 - \theta_0^2} \left\{ \left[1 + (-1)^n \right] \left(C \sin \frac{\theta_0}{2} - \cos \frac{\theta_0}{2} \right) + 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

В случае, когда панель находится в постоянном температурном поле t_0 , решение соответствующей задачи для усилия T^0 даёт

$$\begin{aligned} T^0 = C \left(\cos \theta + \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \sin \theta \right), \quad C = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{R^2} \frac{\alpha t_0}{\Delta} \\ \Delta = \frac{2}{\theta_0} \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} - 1 - \frac{\theta_0^2}{12} \end{aligned} \quad (3.5)$$

а коэффициенты a_n для T^0 будут:

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{2C}{\theta_0 \Delta} \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \\ a_n = \frac{2(-1)^n \theta_0 C}{\Delta \left[\theta_0^2 - (n\pi)^2 \right]} \left\{ \sin \theta_0 + \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \left[(-1)^n - \cos \theta_0 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Как видно из первого примера, так и из общего исследования в рассматриваемом случае граничных условий, начальным перерезывающим усилием N^0 в уравнениях устойчивости можно пренебречь. Тогда, однажды интегрируя первое уравнение и учитывая его во втором, полученная бесконечная система будет такова:

$$\mu_n^2 (\mu_n^2 - 1) w_n + d_n f + \frac{1}{2} \lambda \left[(2a_0^1 - a_{2n}^1) \mu_n^2 w_n + \sum_{q=1}^{n-1} (a_{n-q}^1 - a_{n+q}^1) \mu_q^2 w_q + \sum_{q=n+1}^{\infty} (a_{q-n}^1 - a_{q+n}^1) \mu_q^2 w_q \right] = 0 \quad (3.7)$$

Здесь λ для первых двух задач имеет вид (2.11), а для температурной задачи – $\lambda = \alpha t_0$, f – постоянный множитель при интегрировании первого уравнения,

$$d_n = \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi} \quad (3.8)$$

Так как для первого примера $T^0 = \text{const}$, то систему (2.4) можно проинтегрировать и определение критического значения $\lambda_{\text{кр}}$ сведётся к следующему уравнению:

$$k\theta_0(1 - \lambda Hk^2) + \frac{1}{12} k^3 \theta_0^3 - 2(1 + Hk^2) \text{tg} \frac{k\nu_0}{2} = 0, \quad k = \sqrt{1 + \lambda} \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) не похоже на формулу (3.195) стр.157, Вольмир. работа [5].

В табл.2 приведены некоторые значения критической нагрузки.

Таблица 2

θ_0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2/3\pi$	$3/4\pi$
$\lambda_{\text{кр}}$	10.679	5.570	1.920	0.642	0.298

Критические значения параметров соответствующих задач приведены в табл.3.

Таблица 3

θ_0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
№						
IV	5.867	2.685	1.513	0.842	0.371	0.116
V	0.811	0.767	0.639	0.466	0.264	0.138

Заключение. Рассмотренные примеры позволяют сделать ряд выводов. Отметим наиболее существенные.

1. При равномерном давлении кольцевое усилие – сжимающее при внутреннем давлении при первых условиях из (1.3), в то время как для вторых условий, наоборот.
2. При равномерном давлении в первом случае кольцевое усилие существенно зависит от координаты, в то время как для второго с большей точностью можно принять постоянным.

3. При первых граничных условиях на значения критических параметров существенно влияет учёт начальных перерезывающих усилий.
4. При первых граничных условиях температурное поле на значения критических параметров не влияет, в то время как для второго случая возможна и потеря устойчивости только вследствие температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хофф Н. Низкие критические напряжения для круговой цилиндрической оболочки конечной длины, находящейся под действием осевого сжатия. //Прикладная механика (тр.амер.общ.мех.). 1965. №3. С.60-70.
2. Мовсисян Л.А. Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. //Докл. АН Арм.ССР. 1971. Т.ЛП. №2. С.70-75.
3. Мовсисян Л.А. К устойчивости цилиндрической круговой арки. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1984. Т.ХХХVII. №1. С.16-22.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.Л.: Огиз-Гостехиздат, 1946. 532с.
5. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: ГИФМЛ,1963. 879с.

Сведения об авторах:

Мовсисян Лаврентий Александрович,

Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА

Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (+37410) 568210; **E-mail:** mechins@sci.am

Нерсисян Гриша Геворкович,

К.ф.н., доцент, Ар.Г.А.У.

Адрес: г.Ереван, пр.Азатутян, 7^б, кв.37. **Тел.:** 20-68-79.

Поступила в редакцию 26.03.2014

УДК 539.3

**ON THE FORMULATION OF THE ELECTRO-ELASTICITY THEORY
BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELECTRO-MAGNETO-ELASTIC
COMPOSITES WITH INTERFACE ROUGHNESS**

Avetisyan A.S.

Բանալի բառեր. Հոծ միջավայրերի սահմանակցում, անհարթ մակերևույթ, անհամասեռ նյութ, եզրային խնդրի մոդելավորում, ֆիզիկամեխանիկական դաշտեր:

Ключевые слова: контакт сплошных сред, шероховатость поверхности, неоднородный материал, моделирование граничной задачи, физико-механические поля.

Key Words: contact of bodies, interface roughness, inhomogeneous material, modelling of boundary value problems, rough surface, physical and mechanical fields.

Ավետիսյան Ա.Ս.

Անհարթ մակերևույթներով ամրակցված բազմաշերտի էլեկտրա-մագնիսա-առաձգականության եզրային խնդրի մասին

Դիտարկվում է անհարթ եզրերով միացված միջավայրերում ֆիզիկամեխանիկական կապակցված դաշտերի դինամիկ խնդիր: Ներմուծելով մագնիսա (էլեկտրա, թերմո) առաձգական շերտավոր համակարգերի հիպոթեզներ (**hypothesis-MELS**), իրականացվում է կապակցված ֆիզիկամեխանիկական դաշտերով հոծ միջավայրերի անհարթ մակերևույթների ամրակցման եզրային խնդրի մոդելավորում: Պիեզոդիէլեկտրիկ շերտերի երկու տարբեր ամրակցումների դեպքերում առանձնացվում է ամրակցման ֆիզիկորեն կամ երկրաչափորեն անհամասեռ, մերձմակերևույթային շերտ: Շերտում, մակերևույթային-աստիճանային ֆունկցիաների (**SEF**) միջոցով տրվում են ֆիզիկամեխանիկական դաշտերի կամ թերմոդինամիկական հաստատունների բաշխման վարքերը: Այդ ֆունկցիաների ընտրությամբ իրականացվում է մակերևույթային անհարթությունների ազդեցությունը եզրային խնդրի հավասարումներում և նյութական առնչություններում: Վերլուծված է իզոտրոպ դիէլեկտրիկ շերտում, սահքի ալիքային ազդանշանի տարածման օրինակը:

Аветисян А.С.

О постановке краевых задач теории электро-магнито-упругости в трёхслойном композите с учётом шероховатости поверхностей

Рассматривается динамическая задача физико-механических связанных полей в композитах со стыками шероховатых поверхностей. Вводом гипотез магнито- (электро, термо) упругих слоистых систем (гипотезы-MELS) проводится моделирование граничной задачи контакта шероховатых поверхностей сплошных сред со связанными физико-механическими полями. При двух разных моделях соединений толстых пьезодиелектрических слоёв выделяется приповерхностный геометрически или физически неоднородный слой. В слое задаётся поверхностно-экспоненциальное поведение физико-механических полей или термодинамических постоянных. Выбором поверхностно-экспоненциальной функции (**SEF**) обеспечивается влияние поверхностной шероховатости в уравнениях и в термодинамических соотношениях задачи. В качестве примера анализируется распространение сдвигового волнового сигнала в изотропном диэлектрике.

The dynamic problem of coupled physical and mechanical fields is considered in composites with joints of rough surfaces. By means of new proposed hypotheses of magnetic- (electro-/thermo-) elastic layered systems (hypotheses-MELS) the boundary problem is modeled for rough interfaces contact of continuous media with interconnected physical and mechanical fields. In various models of joints of thick piezoelectric layers combinations geometrically or physically heterogeneous surface layer is allocated in which the surface-exponential behavior of physicomachanical fields or thermodynamic constants are given. The effect of surfaces roughness on the equations and the thermodynamic relations is achieved through the choice of surface-exponential functions (SEF). As an example the propagation of the shear wave signal is studied in an isotropic dielectric.

1. Introduction. Roughness and waviness as residual deformation of the surface layer of the machined surface of deformable element (Fig.1), are the result of uneven edges of the cutting tool, vibration, physical irregularities of the work piece material, etc. and generally violate the material geometric or physical uniformity at the surface zones of the elements of structure. Quantitatively, the surface roughness is set regardless of the method of surface treatment, but because of the nature of the origin of the residual inhomogeneities and physicomachanical characteristics of the material, the surface of the structural element reacts in different ways to electromechanical or thermo-mechanical loads, which in its turn leads to an additional stress on the surface contrary to a case of perfectly smooth surface of a homogeneous material. In studies of wave processes in structural elements, the fact of the presence of residual surface inconsistencies in the manufacture of this element is often neglected.

Naturally, this approach does not always allow to identify possible surface dynamic phenomena of the wave process, especially in the propagation of the wave signal with amplitude is comparable with size of the actually existing roughness on the surface of the waveguide, or at least does not allow quantitatively to calculate more accurately the characteristics of wave field in the surface area of the waveguide.

In terms of the reliability of research results, it is especially important to investigate propagation of short waves in crystal structures.

The interaction of ultrasound with a rough surface is actively investigated, both from a theoretical and experimental points of view, since the applications of elastic wave phenomena are becoming ever more important in telecommunications (signal processing), medicine (echography), metallurgy (non-destructive testing) and in other fields, too. E.g., millions wave filters, periodic topographic grid and resonators are currently produced each month for mobile phones and computers.

The most important results related to scattering of the waves on the local surface defects, such as grooves, random roughness, elastic wedges are obtained in [1-3], where various theoretical approaches and practical rules for tackling of surface waves problems are given.

Calculation of the effects of roughness and its waviness on the surface of a body does complicate the solution of the mathematical boundary value problem, but makes it possible to identify near-surface effects and more accurately evaluate the quantitative characteristics of

the wave field in the near-surface zone.

In [4] the experimental measurements and calculations of elastic wave propagation and dispersion are reported for a waveguide with randomly rough surfaces, as a model of incipient corrosion.

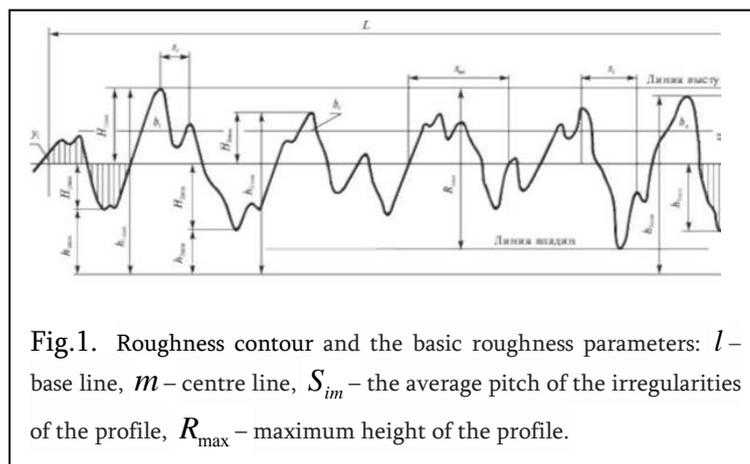


Fig.1. Roughness contour and the basic roughness parameters: l – base line, m – centre line, S_{im} – the average pitch of the irregularities of the profile, R_{max} – maximum height of the profile.

corrosion.

Most theoretical studies of acoustic problems in rough surface were studied by means of integral transform methods [5], or by the method of perturbation theory [6].

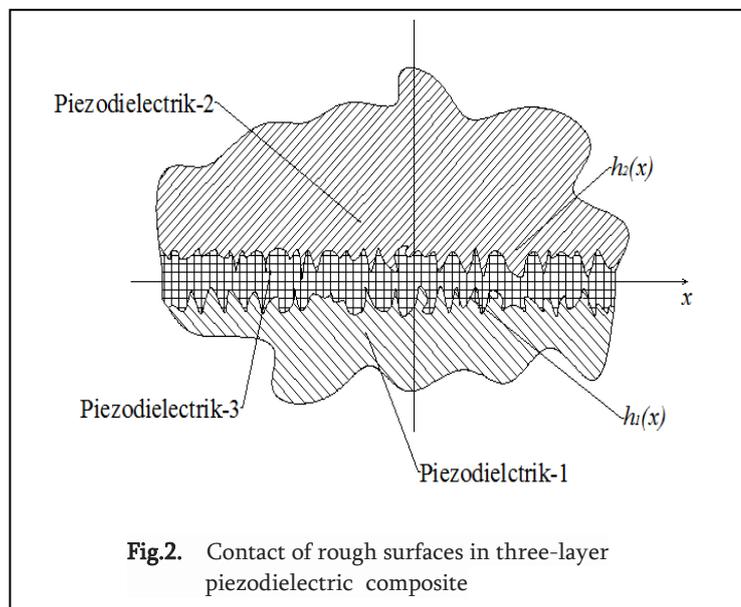
The propagation of surface acoustic waves across the randomly rough surface of an anisotropic solid is studied in [7]. In a small roughness limit, the dispersion relation for such waves is derived. The frequency dependences of the dispersion

and attenuation of surface acoustic waves are obtained for the case, when the wavelength is "compared to the transverse correlation length of the roughness. Crystals of cubic, tetragonal, trigonal, hexagonal, and orthorhombic symmetry, adopted in applications, are considered. The effects of piezoelectricity are taken into account through the approach of "partially stiffened elastic constants".

In paper [8] the dispersive effect of roughness is investigated for surface acoustic wave packets (30-200 MHz frequency range) for different degrees of nanometer roughness on silicon (001 cut) and (111 cut) surfaces. It is shown that the roughness induced frequency dispersion effect is significant, and although available theories agree qualitatively with the results, the theory is not adequate to predict the real surface acoustic wave dispersion.

The problem of a Love wave propagation in a corrugated isotropic layer over a homogeneous isotropic half-space has been investigated in [9] and the dispersion relation in a corrugated layer medium bounded by irregular boundaries is derived. In special cases, the dispersion relation is reduced for the corrugated layers bounded by periodic boundary surfaces, $d \cdot \cos(px)$, $d_1 \cdot \cos(px)$ and $d_2 \cdot \cos(px)$.

In [10] a simple and efficient matrix method is applied to analyze the reflected waves from a layered plate with certain interface features. It is shown that a thin, adhesive layer can be



modeled as an equivalent elastic interface with zero thickness characterized by two adjustable parameters. The paper [11] presents an elastodynamic analysis of two-dimensional time-harmonic elastic wave propagation in periodically multilayered elastic composites, which are also frequently referred to as one-dimensional phononic crystals, with a periodic

array of strip-like interior or interface cracks. The transfer matrix method and the boundary integral equation method, in conjunction with the Bloch-Floquet theorem are applied to compute the elastic wave fields in layered periodic composites. The effects of the crack size, spacing and location, as well as the incidence angle and the type of incident elastic waves on the wave propagation characteristics in the composite structure are investigated in details. In [12] authors have employed a numerical procedure to analyse the adhesive contact between a soft elastic layer and a rough-rigid substrate. The problem solution belonging to the class of the free boundary problems is obtained by calculating Green's function, which links the pressure distribution to the normal displacements at the interface. The problem is then formulated in the form of a Fredholm integral equation of the first kind with a logarithmic kernel.

When two bodies are separated by a small distance, the roughness starts to play an important role in the interaction between the bodies, their adhesion and friction. Control of this short-distance interaction is crucial for micro and nanoelectromechanical devices,

microfluidics, and for micro and nanotechnology. In [14] the review of the current state of this problem is considered and an introduction physical origin of the dispersion forces is given. Critical experiments, demonstrating the non-additivity of forces and strong influence of roughness on the interaction between bodies are reviewed.

In the theory of magnetoelasticity the hypothesis approach has been often used in [15] for vibration, stability and strength problems of thin-walled plates and shells.

In this paper, by introducing the new hypotheses related to distribution of the elastic displacement and potential of electromagnetic fields in a thin elastic layer of variable thickness of material with magneto-electric properties. The mathematical formulation of the boundary value problem for the three-layer composite electro-magneto-elasticity of piezoelectric crystals is established (Fig. 2).

2. Statement of the problem. Let us consider the propagation of shear plane electro elastic signal $f(x, y, t) = \{0, 0, w(x, y), \varphi(x, y), \psi(x, y)\} \exp i(kx - \omega t)$ in the three layer linear electro-magneto-elastic composite described by the following quasi-static equations and linear constitutive relations of electro-magneto-elasticity in each n-th layer.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(n)}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_i^{(n)}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial B_i^{(n)}}{\partial x_i} = 0, \quad \vec{E}^{(n)} = -\text{grad}\varphi^{(n)}, \quad \vec{B}^{(n)} = -\text{grad}\psi^{(n)}. \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(n)} &= c_{ijpq}^{(n)} \left(\frac{\partial u_p^{(n)}}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q^{(n)}}{\partial x_p} \right) + e_{mij}^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x_m} + d_{mij}^{(n)} \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial x_m} - \text{mechanical stresses,} \\ D_j^{(n)} &= e_{pqj}^{(n)} \left(\frac{\partial u_p^{(n)}}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q^{(n)}}{\partial x_p} \right) - \varepsilon_{ij}^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x_i} - g_{mj}^{(n)} \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial x_m} - \text{electrical displacements,} \\ B_j^{(n)} &= d_{pqj}^{(n)} \left(\frac{\partial u_p^{(n)}}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q^{(n)}}{\partial x_p} \right) - g_{ij}^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x_i} - \mu_{mj}^{(n)} \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial x_m} - \text{magnetic inductions.} \end{aligned} \quad (2.2)$$

As it is known [16], electro-magneto elasticity problems, as well as problems of the plane and anti-plane deformations decouple not for all symmetries of crystal depending both of mixed boundary conditions and the structure of the matrix of physical and mechanical constant $c_{ijpq}^{(n)}, e_{ipq}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)}, \mu_{pq}^{(n)}, d_{ipq}^{(n)}, g_{ij}^{(n)}$.

Based on the linear equations and relations (2.1) и (2.2), without loss of generality, the mathematical modeling of the electromagnetoelasticity boundary value problem is presented in the paper for piezo dielectric multilayered composite, in the case of adhesive electroelastic filling occupying region $\Omega_3 = \{|x| < \infty, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), |z| < \infty\}$

and two adjacent piezo dielectric half-spaces (thick layer) occupying regions $\Omega_1 = \{|x| < \infty, -\infty < y \leq h_1(x), |z| < \infty\}$

$\Omega_2 = \{|x| < \infty, h_2(x) \leq y < \infty, |z| < \infty\}$

with rough surfaces $y = h_1(x)$ and $y = h_2(x)$ respectively. The materials of adhered electromagnetoelastic thick layers, adhesive and piezo dielectric crystals belong to the class of 6mm hexagonal symmetry, physical anisotropy axis (the axis of polarization of piezoelectric crystals) coincide with the geometric axes oz and the plane oxy coincides

with the symmetry plane of piezocrystals. The coordinate axe $0x$ is directed along middle line of composite plane cut $y = [h_2(x) - h_1(x)]/2$ (Fig.2).

The anti-plane deformation electroelastic equations can be written as

$$G_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + e_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{32}^{(n)}}{\partial y} = \rho_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}, \quad e_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \varepsilon_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial D_2^{(n)}}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

where $\sigma_{23}^{(n)} = G_n (\partial w_n / \partial y) + e_n (\partial \varphi_n / \partial y)$ are electromechanical shear stresses, $D_2^{(n)} = e_n (\partial w_n / \partial y) - \varepsilon_n (\partial \varphi_n / \partial y)$ are normal components of the electric displacement, $G_n = c_{44}^{(n)}$ are shear modulus, ρ_n are the bulk densities, $e_n = e_{15}^{(n)}$ are the piezoelectric modulus, $\varepsilon_n = \varepsilon_{11}^{(n)}$ are coefficients of dielectric permittivity in $n = 1, 2, 3$ layers, correspondingly.

On rough interfaces $y(x) = h_1(x)$ и $y(x) = h_2(x)$ the following electromechanical conditions of the perfect contact of mechanical and electric fields should be considered:

$$\sigma_{23}^{(1)} [x, h_1(x), t] = \sigma_{23}^{(3)} [x, h_1(x), t], \quad \sigma_{23}^{(2)} [x, h_2(x), t] = \sigma_{23}^{(3)} [x, h_2(x), t], \quad (2.4)$$

$$D_2^{(1)} [x, h_1(x), t] = D_2^{(3)} [x, h_1(x), t], \quad D_2^{(2)} [x, h_2(x), t] = D_2^{(3)} [x, h_2(x), t], \quad (2.5)$$

$$\varphi_1 [x, h_1(x), t] = \varphi_3 [x, h_1(x), t], \quad \varphi_2 [x, h_2(x), t] = \varphi_3 [x, h_2(x), t], \quad (2.6)$$

$$w_1 [x, h_1(x), t] = w_3 [x, h_1(x), t], \quad w_2 [x, h_2(x), t] = w_3 [x, h_2(x), t], \quad (2.7)$$

together with attenuation conditions

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} w_1(x, y, t) &\rightarrow 0 & \lim_{y \rightarrow -\infty} w_2(x, y, t) &\rightarrow 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi_1(x, y, t) &\rightarrow 0 & \lim_{y \rightarrow -\infty} \varphi_2(x, y, t) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

In specific problems, layers may contact with each other directly, without an adhesive. In this case in (2.3) the equations with index $n=3$ should be omitted and the boundary conditions (2.4)-(2.7) should be transformed into new one at middle surface/line of the two roughness $y = [h_2(x) - h_1(x)]/2$.

When the interface adheres by other electro-magneto-elastic adhesive, in an adhesive layer equations do not coincide with (2.3) and the other equations should be considered.

Below it will be shown, that the assumption of the choice of materials and adhesives interface layers does not violate the principle of generality of mathematical modeling of boundary value problem for materials with different characteristics of electromagnetoelasticity.

3. Boundary problem modelling [17]. Taking into account the fact that the value of the maximum peaks and troughs in the surface roughness is much smaller than the thickness of the effective boundary layers where the wave energy is localized, but compared with length of propagating signal

$$H_3 = \max |h_3(x) = h_2(x) - h_1(x)| \ll \min \{H_1; H_2\}$$

$$H_3 = \max |h_3(x)| \sim \lambda = 2\pi/k$$

we can use a virtual model of a thin layer. Namely, for the gap of variable width between two adjacent bodies we propose the new hypotheses of thin layer presenting in the inner

layer for the elastic displacement and the potentials of the electric and magnetic fields in the following form

$$w_3(x, y, t) = \left[\frac{y - h_1(x)}{h_2(x) - h_1(x)} \right]^m \cdot [w_2(x, h_2(x), t) - w_1(x, h_1(x), t)] + w_1(x, h_1(x), t), \quad (3.1)$$

$$\varphi_3(x, y, t) = \left[\frac{y - h_1(x)}{h_2(x) - h_1(x)} \right]^k \cdot [\varphi_2(x, h_2(x), t) - \varphi_1(x, h_1(x), t)] + \varphi_1(x, h_1(x), t), \quad (3.2)$$

$$\psi_3(x, y, t) = \left[\frac{y - h_1(x)}{h_2(x) - h_1(x)} \right]^s \cdot [\psi_2(x, h_2(x), t) - \psi_1(x, h_1(x), t)] + \psi_1(x, h_1(x), t), \quad (3.3)$$

This character of hypothetical distributions of the unknown quantities is selected primarily based on the need to compliance with the boundary conditions on the interfaces of a thin layer .

By means of (3.1) and (3.2) the two pairs of boundary conditions (2.6) and (2.7) are satisfied immediately. Naturally, under other boundary conditions, for example, when the first layer is absolutely rigid, the distribution (3.1) takes the form

$$w_3(x, y, t) = \left[\frac{y - h_1(x)}{h_2(x) - h_1(x)} \right]^m \cdot w_2(x, h_2(x), t) \quad (3.1^*)$$

ensuring the fulfillment of the boundary conditions with a rigid boundary $y = h_1(x)$

$$w_3[x, h_1(x), t] = 0, \quad w_3[x, h_2(x), t] = w_2[x, h_2(x), t] \quad (2.7^*)$$

When the first layer is the perfect conductor, the distribution (3.2) becomes similar to (3.1 *) type

$$\varphi_3(x, y, t) = \left[\frac{y - h_1(x)}{h_2(x) - h_1(x)} \right]^k \cdot \varphi_2(x, h_2(x), t) \quad (3.2^*)$$

ensuring the fulfillment of the boundary conditions with an electrically shorted boundary $y = h_1(x)$

$$\varphi_3[x, h_1(x), t] = 0, \quad \varphi_3[x, h_2(x), t] = \varphi_2[x, h_2(x), t] \quad (2.6^*)$$

In the introduced hypotheses, the different degrees $\{m, k, s\} \in \{1; 2; 3; \dots\}$ correspond to the lowest differentiation orders of required quantities in adhesive constitutive relations are taken so that in equations describing the process in the variable thickness gap the corresponding terms do not vanish. In the linear theory of the electro-magneto elasticity, where (2.1) and (2.2) are taken into account, in the distributions (3.1) - (3.3) can be taken $m = k = s = 1$.

The proposed hypothesis of magneto-electro- elastic layered composite (hypothesis MELS) in the form (3.1)-(3.3) allow us to estimate physicommechanical field in a thin slit filled with an adhesive of appropriate characteristics.

In the framework of the proposed hypotheses for piezoelectric adhesive when $m = k = s = 1$ the mechanical stress and electric potential in layer are constant over the thickness of the gap, but vary longitudinally along surfaces depending on the gap width.

$$\xi(x) \triangleq h_3(x) = h_2(x) - h_1(x).$$

Introducing a new variable defining gap, the shear stress and electric displacement in the gap region can be described as

$$\sigma_{23}^{(3)} = G_3 \frac{\partial W(x, \xi, t)}{\partial \xi} + e_3 \frac{\partial \Phi(x, \xi, t)}{\partial \xi}, \quad D_2^{(3)} = e_3 \frac{\partial W(x, \xi, t)}{\partial \xi} - \varepsilon_3 \frac{\partial \Phi(x, \xi, t)}{\partial \xi} \quad (3.4)$$

Here $W(x, \xi, t) = w_2(x, h_2(x), t) - w_1(x, h_1(x), t)$,

$$\Phi(x, \xi, t) = \varphi_2(x, h_2(x), t) - \varphi_1(x, h_1(x), t)$$

are the difference shear elastic displacement and the difference electric potential in the region.

Hence, it is clear that the conditions of electromechanical field quantities finiteness (continuity condition) lead to the requirement of a limited difference of elastic displacement and electric potential at the surface irregularities. In fact, depending on the roughness of interfaces of contacting layers a longitudinally inhomogeneous electromechanical load arise at the interfaces of these layers.

On the other hand, these loads arise in a layer of sticker and satisfy to following equations

$$\left[\tilde{G}_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w_3(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varphi_3(x, y, t) - \frac{e_3}{\varepsilon_3} w_3(x, y, t) \right] = 0 \quad (3.5)$$

From (3.5), when $\{m, k, s\} \in \{1; 2; 3; \dots\}$ based on the hypotheses (3.1) and (3.2) and the last two pairs of boundary conditions (2.6) and (2.7), for the elastic displacements $w_n(x, y, t)$, $n=1, 2$ and the electric potentials $\varphi_n(x, y, t)$, $n=1, 2$, we obtain the new boundary relations

$$\left[\tilde{G}_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left[\frac{(h_2(x) - h_1(x)) w_2(x, h_2(x), t) + w_1(x, h_1(x), t)}{2} \right] = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left[\varphi_2(x, h_2(x), t) + \varphi_1(x, h_1(x), t) \right] \frac{h_2(x) - h_1(x)}{2} \right] = \\ & = \frac{e_3}{\varepsilon_3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left[w_2(x, h_2(x), t) + w_1(x, h_1(x), t) \right] \frac{h_2(x) - h_1(x)}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Let us pay attention (3.5) to the nature of the dynamics of shear displacement in the adhesive layer $w_3(x, y, t) \approx W_{03}(x, y) \cdot f[x \pm c_\phi(\omega)t]$, $c_\phi(\omega) = \tilde{G}_3/\rho_3$.

By integrating the equations of electrodynamics (2.3) and using MELS hypotheses (3.1), (3.2) related to linear distributions of elastic displacement and electric potential across the thickness of a thin layer of stickers, and taking into account the boundary conditions (2.4), (2.5), we obtain the generalized boundary conditions for stresses $\sigma_{23}^{(1)}(x, y, t)$

$$\begin{aligned} & \sigma_{23}^{(2)}(x, y, t) \text{ and electric displacements } D_2^{(1)}(x, y, t) \quad D_2^{(2)}(x, y, t) \\ & \tilde{G}_2 \frac{\partial w_2(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=h_2(x)} - \tilde{G}_1 \frac{\partial w_1(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=h_1(x)} = \\ & = \left[\rho_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \tilde{G}_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left[\left[w_2(x, h_2(x), t) + \frac{\alpha_{13}^2}{\alpha_{23}^2} w_1(x, h_1(x), t) \right] \frac{h_2(x) - h_1(x)}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=h_1(x)} - \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=h_2(x)} = \\ \varepsilon_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{h_2(x) - h_1(x)}{2} \cdot [\phi_1(x, h_1(x), t) + \phi_2(x, h_2(x), t)] \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

In (3.8), (3.9) $\alpha_{n3}^2 = 1 + (e_3/e_n)(G_n/G_3) \cdot \chi_n^2$ are interconnection coupling coefficients in a three-layer piezo dielectric composite $\chi_n^2 = e_n^2/(\varepsilon_n \cdot G_n)$, $n = 1, 2$, are electromechanical piezoelectric coupling coefficients of adjacent half-spaces, $\phi_n(x, y, t) = \varphi_n(x, y, t) - (e_n/\varepsilon_n)w_n(x, y, t)$, $n = 1, 2$, is the well-known notation the of electroelastic potential for piezo dielectrics of $6mm$ class of hexagonal symmetry. Thus the problem of the propagation of shortwave -electroelastic plane signal propagation in multilayer piezo dielectric composite, by means of the MELS hypotheses is reduced to the solution of the electro-elasticity quasi-static, anti-plane equations

$$G_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + G_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} + e_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + e_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} = \rho_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} \quad (3.10)$$

$$e_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + e_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - \varepsilon_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} - \varepsilon_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} = 0, \quad \text{при } n = 1, 2.$$

with attenuation conditions (2.8) and generalized boundary conditions (3.6)-(3.9) of full electromagnetic contact which can be presented in a rather simplified form

$$\begin{aligned} \left[G_1 \frac{\partial w_1(x, y, t)}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \varphi_1(x, y, t)}{\partial y} \right] \Big|_{y=h_1(x)} - \\ - \left[G_2 \frac{\partial w_2(x, y, t)}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \varphi_2(x, y, t)}{\partial y} \right] \Big|_{y=h_2(x)} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \left[e_1 \frac{\partial w_1(x, y, t)}{\partial y} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1(x, y, t)}{\partial y} \right] \Big|_{y=h_1(x)} - \\ - \left[e_2 \frac{\partial w_2(x, y, t)}{\partial y} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2(x, y, t)}{\partial y} \right] \Big|_{y=h_2(x)} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\left[\tilde{G}_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left[(h_2(x) - h_1(x)) \frac{w_2(x, h_2(x), t) + w_1(x, h_1(x), t)}{2} \right] = 0 \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[[\varphi_2(x, h_2(x), t) + \varphi_1(x, h_1(x), t)] \frac{h_2(x) - h_1(x)}{2} \right] = \\ = \frac{e_3}{\varepsilon_3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[[w_2(x, h_2(x), t) + w_1(x, h_1(x), t)] \frac{h_2(x) - h_1(x)}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

From these boundary conditions, it follows that non-smoothness boundary conditions $h_n(x)$, $n=1;2$, $\xi \triangleq h_3(x) = h_2(x) - h_1(x)$ play an important role transforming homogeneous boundary conditions into longitudinally conditions. The dynamics of adhesive longitudinally inhomogeneous thin layer is conditioned by these boundary conditions and may result both in a synchronism and in an internal resonance between waves in the adjacent semi-spaces.

4. Solution of the problem.

It is known that solutions of anti plane electroelastic problem attenuated along the depths of adjacent semi-spaces in the case of shear electroelastic signal propagation

$$F(x, y, t) = A(y) \cdot \exp\{i(kx - \omega t)\}$$

in adjacent semi-spaces can be presented as

$$w_n(x, y, t) = A_n \exp((-1)^n \alpha_n ky) \cdot \exp\{i(kx - \omega t)\}$$

$$\varphi_n(x, y, t) = \left\{ B_n \exp((-1)^n ky) + \frac{e_n}{\varepsilon_n} A_n \exp((-1)^n \alpha_n ky) \right\} \cdot \exp\{i(kx - \omega t)\} \quad (4.1)$$

where $\alpha_n^2 = 1 - (\omega^2 \rho_n^2) / (k^2 \tilde{G}_n^2)$ are characteristic wave numbers $n=1;2$;

$k = (2\pi)/\lambda$ is wave number, $\lambda = 2\pi/k$ is the length, ω – the frequency of the wave signal. Based on (4.1), from boundary conditions (3.11)-(3.14), we can obtain a transcendence characteristic equation describing the wave process in the composite

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{31} & f_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{23} & f_{24} \\ f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_{31} & f_{32} \\ f_{41} & f_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{13} & f_{14} \\ f_{23} & f_{24} \end{vmatrix} = 0, \quad (4.2)$$

where coefficients $f_{ij}(h_n(x), k(\omega))$ depend both on the relative physical and mechanical constants of materials: b_i/b_j , where $b \in \{G, \rho, e, \varepsilon\}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $d_{n3} = (e_n/\varepsilon_n - e_3/\varepsilon_3)$, $n=1;2$, and from functions of non-smooth interfaces of adjacent semi-spaces функций, phase function $k(\omega)$,

$$f_{12}(h_n(x), k(\omega)) = \tilde{G}_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 kh_2(x)}$$

$$f_{13}(h_n(x), k(\omega)) = e_1 e^{-kh_1(x)}, \quad f_{14}(h_n(x), k(\omega)) = e_2 e^{kh_2(x)}$$

$$f_{23}(h_n(x), k(\omega)) = \varepsilon_1 e^{-kh_1(x)}, \quad f_{24}(h_n(x), k(\omega)) = \varepsilon_2 e^{kh_2(x)}$$

$$f_{31}(h_n(x), k(\omega)) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\Delta h_{,xx}(x) + 2ik \Delta h_{,x}(x) - k^2 \alpha_3^2 \Delta h(x) \right] \\ - \left[2\Delta h_{,x}(x) + 2ik \Delta h(x) \right] \cdot \alpha_1 kh_{1,x}(x) \\ + \Delta h(x) \left[\alpha_1^2 k^2 h_{1,x}^2(x) - \alpha_1 kh_{1,xx}(x) \right] \end{array} \right\} \cdot e^{-\alpha_1 kh_1(x)}$$

$$\begin{aligned}
f_{32}(h_n(x), k(\omega)) &= \left\{ \begin{aligned} &\left[\Delta h_{,xx}(x) + 2ik\Delta h_{,x}(x) - k^2\alpha_3^2\Delta h(x) \right] \\ &+ \left[2\Delta h_{,x}(x) + 2ik\Delta h(x) \right] \cdot \alpha_2 kh_{2,x}(x) \\ &+ \Delta h(x) \left[\alpha_2^2 k^2 h_{2,x}^2(x) + \alpha_2 kh_{2,xx}(x) \right] \end{aligned} \right\} \cdot e^{\alpha_2 kh_2(x)} \\
f_{41}(h_n(x), k(\omega)) &= d_{13} \left\{ \begin{aligned} &\left[\Delta h_{,xx}(x) + 2ik\Delta h_{,x}(x) - k^2\Delta h(x) \right] \\ &- \left[2\Delta h_{,x}(x) + 2ik\Delta h(x) \right] \cdot \alpha_1 kh_{1,x}(x) \\ &+ \Delta h(x) \left[\alpha_1^2 k^2 h_{1,x}^2(x) - \alpha_1 kh_{1,xx}(x) \right] \end{aligned} \right\} \cdot e^{-\alpha_1 kh_1(x)} \\
f_{42}(h_n(x), k(\omega)) &= d_{23} \left\{ \begin{aligned} &\left[\Delta h_{,xx}(x) + 2ik\Delta h_{,x}(x) - k^2\Delta h(x) \right] \\ &+ \left[2\Delta h_{,x}(x) + 2ik\Delta h(x) \right] \cdot \alpha_2 kh_{2,x}(x) \\ &+ \Delta h(x) \left[\alpha_2^2 k^2 h_{2,x}^2(x) + \alpha_2 kh_{2,xx}(x) \right] \end{aligned} \right\} \cdot e^{\alpha_2 kh_2(x)} \\
f_{43}(h_n(x), k(\omega)) &= \left\{ \begin{aligned} &\left[\Delta h_{,xx}(x) + 2ik\Delta h_{,x}(x) - k^2\Delta h(x) \right] \\ &- \left[2\Delta h_{,x}(x) + 2ik\Delta h(x) \right] \cdot kh_{1,x}(x) \\ &+ \Delta h(x) \left[k^2 h_{1,x}^2(x) - kh_{1,xx}(x) \right] \end{aligned} \right\} \cdot e^{-kh_1(x)} \\
f_{44}(h_n(x), k(\omega)) &= \left\{ \begin{aligned} &\left[\Delta h_{,xx}(x) + 2ik\Delta h_{,x}(x) - k^2\Delta h(x) \right] \\ &+ \left[2\Delta h_{,x}(x) + 2ik\Delta h(x) \right] \cdot kh_{2,x}(x) \\ &+ \Delta h(x) \left[k^2 h_{2,x}^2(x) + kh_{2,xx}(x) \right] \end{aligned} \right\} \cdot e^{kh_2(x)} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

It is obvious, that this transcendental dispersion equation can be investigated numerically with the given functions of non-smooth semi-spaces. On the other hand it is clear that the longitudinal heterogeneity conditioned by boundary roughness, leads to wave signal scattering resulting for complex wave number $k = k_1 + ik_2$. Then in the solutions (4.1), as well as in expressions (3.1) and (3.2) the amplitude and velocity of propagation of the signal prior electroelastic may also vary along the wave signal propagation direction ox .

5. Specific example.

Let us consider the propagation of an anti plane shear plane wave signal $w(x, y, t) = [A_1 e^{\alpha ky} + A_2 e^{-\alpha ky}] \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ in a non piezo active waveguide $\{-\infty < x < +\infty, h_-(x) \leq y \leq h_+(x), -\infty < z < +\infty\}$ with surface roughness $y = h_{\pm}(x)$,

Introducing virtual heterogeneous subsurface layers, with middle planes $y = \pm h_0$, corresponding to rough surfaces and taking into account that waveguide surfaces are adjacent with vacuum, we obtain

$$\sigma_{32}^{(\pm)} [x, h_{\pm}(x), t] = 0 \text{ и } \varphi_{\pm} [x, h_{\pm}(x), t] = \varphi_{0\pm} [x, h_{\pm}(x), t].$$

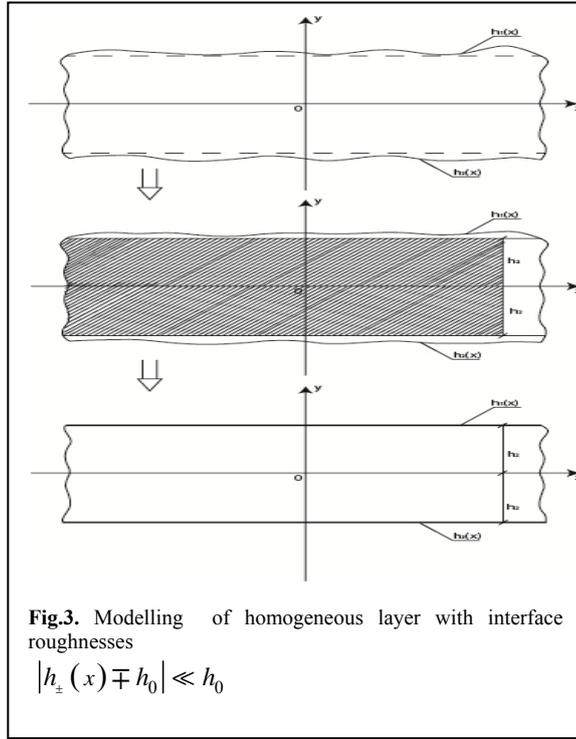
Based on MELS hypotheses from (3.1) and (3.2) introducing virtual distribution functions in surface layers from (3.1) и (3.2)

$$w_{\pm}(x, y, t) = \frac{y}{\pm h_0} w(x, \pm h_0, t),$$

$$\varphi_{\pm}(x, y, t) = \frac{y - h_{\pm}(x)}{\pm h_0 - h_{\pm}(x)} \left[\varphi(x, h_0, t) - \varphi_{0\pm}(x, h_{\pm}(x), t) \right] + \varphi_{0\pm}(x, h_{\pm}(x), t), \quad (5.1)$$

we obtain generalized boundary conditions which are taking into account roughness irregularities in the middle planes $y = \pm h_0$

$$G \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\pm h_0} = \frac{(h_{\pm}^2(x) - h_0^2)}{\pm 2h_0} \left[G \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \right] \Big|_{y=\pm h_0} \quad (5.2)$$



As seen, the roughness on the surfaces of the waveguide leads to the dynamic loads on the surfaces, which may generate waves of new harmonics or internal resonance in subsurface zone, as well as prohibit the propagation of waves of a certain frequency to form silent bands in the waveguide.

In fact, the roughness of the surface forms a longitudinal inhomogeneity layer, where the heterogeneity transforms a pre-wave signal to generalized shear waves

$$w(x, y, t) = \left[A_1(x, t) \cdot e^{\alpha ky} + A_2(x, t) \cdot e^{-\alpha ky} \right] \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

where wave number $k(\omega) = 2\pi/\lambda$, or vibration frequency $\omega(k)$ are complex ones.

A characteristic formation

number $p(\omega, x) = (2\pi \cdot \alpha(\omega, x))/\lambda$ depending also on the frequency of the propagating wave signal depends on the roughness zones $x \in [x_i; x_{i+1}]$ at the surface. The function $p(\omega, x)$ is determined from the transcendental dispersion equation

$$F(p, x) = e^{-4p} - \frac{\left[1 + \frac{p}{2}(d_-^2(x) - 1) \right] \cdot \left[1 + \frac{p}{2}(d_+^2(x) - 1) \right]}{\left[1 - \frac{p}{2}(d_-^2(x) - 1) \right] \cdot \left[1 - \frac{p}{2}(d_+^2(x) - 1) \right]} = 0 \quad (5.3)$$

where the following notations are used $d_{\pm}^2(x) = \Delta h_{\pm}^2(x)/h_0^2$ $\Delta h_{\pm}(x) = |h_{\pm}(x) \mp h_0|$.

Analytical analysis shows, that in the case of high-frequency signal propagation with speed $V_{0\phi} = C_0 = \sqrt{G/\rho}$ the availability of sagging irregularities (pits) on the surface of waveguide $d_{\pm}^2(x) - 1 \leq 0$ also leads to the appearance of new dispersion wave modes propagating with the speeds

$$V_{1\phi}(\omega, x) = C_0 \sqrt{1 - [p_1^*(\omega, x)]^2 / (kh)^2},$$

$$V_{2\phi}(\omega, x) = C_0 \sqrt{1 - [p_2^*(\omega, x)]^2 / (kh)^2}$$

The formation functions $p_1^*(\omega, x), p_2^*(\omega, x)$ $0 \leq p_1^*(\omega, x) < 2/\sqrt{1 - d_-^2(x)}$ $p_2^*(\omega, x) > 2/\sqrt{1 - d_+^2(x)}$ indicate the existence of a short and localized shear waves near the $y = -h, y = h$ surfaces, respectively.

In this case, for high-frequency signals there is a stopband region $2/\sqrt{1 - d_-^2(x)} \leq p(\omega, x) \leq 2/\sqrt{1 - d_+^2(x)}$, where the shear waves of certain frequencies cannot propagate.

Similarly, if we have a layer with tightening borders, i.e. $|h_{\pm}(x)| \geq h$ and hence $d_{\pm}^2(x) - 1 \geq 0$ at both surfaces of the layer, then in this case the shear wave can propagate with the speed $V = C_0^2 = G/\rho$ only.

And finally, if at some interval on one surface of the waveguide there is a pit, we suppose that $d_-^2(x) - 1 \leq 0$, if on at opposite surface there is a bulge we suppose that $d_+^2(x) - 1 \geq 0$, then in the case of propagation of high-frequency signal propagation with a speed $V_{0\phi} = C_0 = \sqrt{G/\rho}$ a new type of wave dispersion mode occurs, the nature of which is determined by the ratio of the "pit" depth and the "bulge" height:

a) If $h_+^2(x) < h_-^2(x) - 4h_-(x) \cdot \Delta h_-(x) + 2 \cdot \Delta h_-^2(x)$, then the wave dispersion mode occurs localized at $y = -h$ surface and propagate with speed

$$V_{3\phi}(\omega, x) = C_0 \sqrt{1 - [p_3^*(\omega, x)]^2 / (kh)^2}, \text{ where } 0 \leq p_3^*(\omega, x) < 2/\sqrt{1 - d_-^2(x)},$$

б) if $h_+^2(x) > h_-^2(x) - 4h_-(x) \cdot \Delta h_-(x) + 2 \cdot \Delta h_-^2(x)$, then the wave dispersion mode of other type occurs localized at $y = -h$ surface also and traveling with speed

$$V_{4\phi}(\omega, x) = C_0 \sqrt{1 - [p_4^*(\omega, x)]^2 / (kh)^2}, \text{ where } p_4^*(\omega, x) > 2/\sqrt{1 - d_-^2(x)},$$

Let us as a rough surface layer take the same equidistant surface $h_{\pm}(x) = \pm h_0 (1 + \gamma_0 \sin(k\delta x))$, where $2h_0$ is the estimated thickness of the layer, γ_0 is the maximum height of the roughness profile, and δ is the average pitch of surface irregularities profile. Then, according to (5.3) we have $\Delta h_{\pm}(x) = h_0 \gamma_0 \sin(k\delta x)$, $d_{\pm}^2(x) = \gamma_0^2 \sin^2(k\delta x)$ and therefore in this case the dispersion equation (5.3) separates into two simplified ones

$$F_1(p, x) = e^{-2p} - \frac{2 + p[\gamma_0^2 \sin^2(k\delta x) - 1]}{2 - p[\gamma_0^2 \sin^2(k\delta x) - 1]} = 0 \quad (5.3.1)$$

$$F_2(p, x) = e^{-2p} + \frac{2 + p \left[\gamma_0^2 \sin^2(k\delta x) - 1 \right]}{2 - p \left[\gamma_0^2 \sin^2(k\delta x) - 1 \right]} = 0 \quad (5.3.2)$$

From (5.3.1) and (5.3.2) follows, that for a perfectly smooth surface layer $\delta \equiv 0$ or $\gamma_0 \equiv 0$, only the primary signal propagates with the phase velocity $V_{0\phi} = C_0 = \sqrt{G/\rho}$. As always $\gamma_0^2 \sin^2(k\delta x) - 1 < 0$, and for formative number we have $0 < p(\omega, x) = (2\pi \cdot \alpha(\omega, x))/\lambda < \infty$, then the equations (5.3.1) and (5.3.2) besides the primary signal also allow new wave mode with the forming number close to $p = 2/\left[1 - \gamma_0^2 \sin^2(k\delta x)\right]$. At each change $(n/2) \cdot (\lambda/\delta) \leq x \leq ((n+1)/2) \cdot (\lambda/\delta)$ the formative number varies between $2 \leq p(\omega, x) \leq 2/(1 - \gamma_0^2)$, making one complete cycle.

Depending on the ratio of the wavelength to the average spacing irregularities, the periodic metric segment expands or narrows.

Conclusion.

The hypothesis of magneto-electro-mechanical field for rough border zone of magneto-electro elastic layered composites is formulated (hypothesis MELS), which allows to identify the nature of the dynamic effects of boundary roughness on the propagation of a wave magneto-electric elastic signal.

The dispersion relation for a three-layer piezo dielectric composite is obtained when the rough surfaces are in full contact.

On the illustrative task, the propagation of wave signals is considered in a single layer waveguide with a rough surface free of electromechanical surfaces it is shown that the roughness leads to the solution of the wave propagation problem in the waveguide with perfectly smooth boundaries on which there are additional dynamic electromechanical loads depending on the interaction of a propagating electroelastic signal with rough boundaries. The possibility of the appearance of new modes of shear wave caused by the surface roughness of the elastic waveguide is studied analytically.

References:

1. Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V., Plessky V. Surface acoustic waves in inhomogeneous media. // Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20, 1995, 388.
2. Brekhovskikh L. Waves in Layered Media 2e. // Applied mathematics and mechanics, Vol. 16, Elsevier Science, 2012, 520.
3. Daniel Royer. Eugene Dieulesaint Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation. // Springer Science & Business Media, 2000, 374.
4. Lobkist O.I., Chimenti D.E. Elastic guided waves in plates with rough surfaces. // Appl. Phys. Lett. Vol. 69, 3486-3497 (1996).
5. Berman D.H. Computations of rough surface reflection coefficients in a waveguide. // J. Acoust., Soc. Am. Vol. 96, 2834-2843 (1996).
6. Schmidt H. and Kuperman W.A. Spectral representations of rough interface reverberation in stratified ocean waveguides. // J. Acoust. Soc. Am. Vol. 97(4), 2199-2209 (1995).
7. Shchegrov A.V. Propagation of surface acoustic waves across the randomly rough surface of an anisotropic elastic medium. // J. Appl. Phys. Vol. 78, 1565 (1995).

8. Flannery CM, von Kiedrowski H. Effects of surface roughness on surface acoustic wave propagation in semiconductor materials. //Ultrasonics. 2002 Vol. 40 (Issues 1-8): 83-87.
9. Singh S.S. Love Wave at a Layer Medium Bounded by Irregular Boundary Surfaces. //Journal of Vibration and Control, 2010; Vol.16. 1177.
10. Mal A.K., P.-C. Xu Elastic Waves in Layered Media with Interface Features. //North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 35, 1989, p. 67–73.
11. Mikhail V. Golub and Chuanzeng Zhang. In-plane time-harmonic elastic wave motion and resonance phenomena in a layered phononic crystal with periodic cracks. //J. Acoust. Soc. Am. Vol.137, Issues 1, 2015, 238.
12. Carbone G., Scaraggi M., Tartaglino U. Adhesive contact of rough surfaces: comparison between numerical calculations and analytical theories., Eur Phys. J. E Soft Matter., 2009, Vol.30(Issues 1), 65-74.
13. Feng J., Zikun W., Tiejun W. The Bleustein–Gulyaev (B–G) wave in a piezoelectric layered half-space // Int. J. Eng Sci. 2001. Vol. 39. P. 1271–1285.
14. Svetovoy V.B., Palasantzas G. Influence of surface roughness on dispersion forces, Adv Colloid Interface Sci., 2015; 216, C.1-19.
15. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких пластин и оболочек. М.: Наука, 1977. 324с.
16. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т.38. №1. С.12-19.
17. Avetisyan A.S. The boundary problem modelling of rough surfaces continuous media with coupled physical and mechanical fields. //Reports of NAS of Armenia, 2015, vol.115, №2, pp.91-104.

Acknowledgment

This research was supported by State Committee of Science of Armenia Grant No. SCS 13-2C005.

Сведения об авторе:

Аветисян Ара Сергеевич – Чл.-корр. НАН РА, доктор физ.-мат.наук, Институт механики НАН Армении.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, **тел.:** (+37493)00-44-55.

E-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com

Поступила в редакцию 15.04.2015

NON –AXIS – SYMMETRICAL DYNAMIC PROBLEM OF ELECTRO ELASTICITY FOR THE AXIALLY – POLARIZED PIEZOCERAMIC CYLINDER

D.A. Shlyakhin

Key words: a problem of electro elasticity, a piezoceramic cylinder, a non-axis-symmetrical dynamic load.

Ключевые слова: задача электроупругости, пьезокерамический цилиндр, неосесимметричная динамическая нагрузка.

Բանալի բառեր. էլեկտրաառաձգականության խնդիր, պիեզոկերամիկ գլան, ոչ առանցքասիմետրիկ դինամիկ բեռ

Շլյախին Դ.Ա.

Անիզոտրոպ պիեզոկերամիկ առանցքային բևեռացված գլանի համար ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիր

Դիտարկված է ուղիղ պլեզոէլեկտի ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիր անիզոտրոպ պիեզոկերամիկ առանցքային բևեռացված գլանի համար երբ ճակատային մակերևույթների վրա ազդում են կամայական նորմալ լարումներ՝ կախված շառավղային, անկյունային կոորդինատներից և ժամանակից. Կառուցվել է նոր փակ լուծում սեփական վեկտոր-ֆունկցիաների վերլուծության միջոցով: Ստացված արտահայտություններ թույլ են տալիս որոշելու ոչ առանցքասիմետրիկ տատանումների հաճախականությունները և ինդուկցված էլեկտրական դաշտի բոլոր պարամետրերը.

Шляхин Д.А.

Неосесимметричная динамическая задача прямого пьезоэффекта для анизотропного пьезокерамического аксиально поляризованного цилиндра

Рассматривается неосесимметричная динамическая задача прямого пьезоэффекта для анизотропного пьезокерамического аксиально поляризованного цилиндра при действии на торцевых поверхностях нормальных напряжений, являющихся произвольными функциями радиальной, угловой координат и времени. Новое замкнутое решение построено методом разложения по собственным вектор-функциям в форме структурного алгоритма конечных преобразований. Полученные соотношения позволяют определять частоты собственных неосесимметричных колебаний, напряженно-деформированное состояние элемента, а также все параметры индуцируемого электрического поля.

We consider a non-axis-symmetrical dynamic problem of the direct piezoeffect for anisotropic piezoceramic axially-polarized cylinder when normal stresses being arbitrary functions of the radial and angular coordinates and time act on the end surfaces. A new closed solution is constructed by the method of decomposition in terms of vector-functions in the form of a structural algorithm of finite transformations. The obtained expressions allow us to determine the frequencies of natural non-axis-symmetrical vibrations, the stress-strain state of the element and the parameters of the induced electric field.

Introduction

The most common structural elements of piezoceramic transducers are canonical bodies in the form of solid cylinders of finite size (thick circular plates). To describe their operation in real conditions and the enhanced functionality the need for the deeper analyses of time-varying processes without which it is impossible to understand the effect of the interaction of mechanical and electrical stress fields arises. However, existing methods of calculation of the piezoelectric elements of structures with reference to non-stationary effects are far from being perfect and most of them are approximate, but much of the research is associated with the development of numerical [1,2] and approximate [3-5] methods of solution and also bringing these problems to static [6,7].

In this regard, methods making possible obtaining closed solutions of unsteady initial-boundary problems of elasticity theory for finite bodies in three-dimensional formulation are of prime consideration now. With their help you can perform qualitative and quantitative assessment of the coupling of electromechanical stress fields in the piezoceramic elements of designs.

In the paper presented the dynamic problem is investigated using a consistent application of the finite integral transformations on all spatial variables. This approach allows us to obtain accurate, in the framework of the used models, estimated ratios in the most general form for the test piezoceramic cylinder.

1.The problem formulation. The solid anisotropic cylinder occupies the area Ω : $\{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h\}$ in the cylindrical coordinate system (r_*, θ, z_*) and it is made of a piezoceramic material with of a hexagonal system class 6mm¹ in which the axis of symmetry is parallel to the axial coordinate. The end membrane-anchored surfaces with electrodes ($z_* = 0, h$) are under the arbitrary dynamic load (normal stresses) $q_1^*(r_*, \theta, t_*)$, $q_2^*(r_*, \theta, t_*)$ and connected to the measuring device with a high input resistance, what corresponds to the “idling mode”. Various mechanical conditions can be satisfied on cylindrical surfaces without electrodes. For the sake of definiteness we will consider them free from normal and tangential stresses. In this formulation the problem simulates the operation of the piezoelectric elements in the devices of the direct piezoelectric effect, transforming a mechanical effect to the corresponding electric signal. The mathematical formulation of the given problem of electro elasticity in the dimensionless form includes a system of differential equations in relation to the components of the displacement vector $U(r, \theta, z, t), V(r, \theta, z, t), W(r, \theta, z, t)$, the potential of the electric field $\Phi(r, \theta, z, t)$ and the initial-boundary conditions [8]:

$$\nabla_1^2 U + a_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} - a_4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + a_5 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_6 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$a_1 \nabla_1^2 V + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + a_2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + a_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + a_4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial z} + a_6 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

$$a_5 \frac{\partial}{\partial z} \left(\nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + a_2 \left(\nabla^2 W + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + a_7 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_8 \left(\nabla^2 \Phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

$$a_6 \frac{\partial}{\partial z} \left(\nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + a_8 \left(\nabla^2 W + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - a_9 \left(\nabla^2 \Phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) - a_{10} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$z = 0, L \quad \sigma_{zz|z=0} = a_{11} \left(\nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + a_7 \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = q_1(r, \theta, t) \quad (1.2)$$

$$\sigma_{zz|z=L} = a_{11} \left(\nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + a_7 \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = q_2(r, \theta, t)$$

$$U(r, \theta, 0, t) = U(r, \theta, L, t) = 0, \quad V(r, \theta, 0, t) = V(r, \theta, L, t) = 0$$

$$D_{z|z=0, L} = -a_{10} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + a_{12} \left(\nabla U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

$$\theta = 0, 2\pi \quad U(r, 0, z, t) = U(r, 2\pi n, z, t), \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2\pi n} \quad (1.3)$$

$$V(r, 0, z, t) = V(r, 2\pi n, z, t), \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2\pi n},$$

$$W(r, 0, z, t) = W(r, 2\pi n, z, t), \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2\pi n}$$

¹ Piezoceramics this class is a core material for manufacturing the conversion elements of different devices. It is explained how the parameters of these high piezoelectric materials and the ability to change their properties in a wide range by varying the molar concentration.

$$\varphi(r, 0, z, t) = \varphi(r, 2\pi n, z, t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2\pi n}$$

$$r=1, 0 \quad \sigma_{rr|_{r=1}} = \frac{\partial U}{\partial r} + a_{13} \frac{1}{r} \left(U + \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + a_{11} \frac{\partial W}{\partial z} + a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

$$\sigma_{rz|_{r=1}} = a_2 \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + a_8 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \sigma_{r\theta|_{r=1}} = a_1 \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - V \right) + \frac{\partial V}{\partial r} \right] = 0$$

$$D_{r|_{r=1}} = -a_9 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a_8 \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0$$

$$U(0, \theta, z, t) < \infty, \quad V(0, \theta, z, t) < \infty, \quad W(0, \theta, z, t) < \infty, \quad \varphi(0, \theta, z, t) < \infty;$$

$$t=0 \quad U(r, \theta, z, 0) = U_0(r, \theta, z), \quad \dot{U}(r, \theta, z, 0) = \dot{U}_0(r, \theta, z), \quad (1.5)$$

$$V(r, \theta, z, 0) = V_0(r, \theta, z), \quad \dot{V}(r, \theta, z, 0) = \dot{V}_0(r, \theta, z),$$

$$W(r, \theta, z, 0) = W_0(r, \theta, z), \quad \dot{W}(r, \theta, z, 0) = \dot{W}_0(r, \theta, z);$$

$$\text{where } \{U, V, W\} = \{U^*, V^*, W^*\} / b, \quad \varphi = \varphi^* e_{33} / (b C_{11}), \quad \{r, z, L\} = \{r_*, z_*, h\} / b,$$

$$t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11} / \rho}, \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}, \quad \nabla_2^2 = \nabla_1^2 + \frac{1}{r^2}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

$$a_1 = \frac{C_{66}}{C_{11}}, \quad a_2 = \frac{C_{55}}{C_{11}}, \quad a_3 = \frac{(C_{12} + C_{66})}{C_{11}}, \quad a_4 = \frac{(C_{11} + C_{66})}{C_{11}}, \quad a_5 = \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}}, \quad a_6 = \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}},$$

$$a_7 = \frac{C_{33}}{C_{11}}, \quad a_8 = \frac{e_{15}}{e_{33}}, \quad a_9 = \frac{C_{11} \epsilon_{11}}{e_{33}^2}, \quad a_{10} = \frac{C_{11} \epsilon_{33}}{e_{33}^2}, \quad a_{11} = \frac{C_{13}}{C_{11}}, \quad a_{12} = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad a_{13} = \frac{C_{12}}{C_{11}},$$

$\{q_1, q_2\} = \{q_1^*, q_2^*\} / C_{11}$; t_* – time; ρ, C_{ms}, e_{ms} – bulk density, electric constants and piezoelectric modules of the anisotropic piezoceramic material ($m, s = 1, 6$);

$\epsilon_{11}, \epsilon_{33}$ – dielectric permeability in the radial and axial directions; U^*, V^*, W^*, φ^* – the components of the vector of displacements and the potential of the electric field in a dimensional form; $U_0, \dot{U}_0, V_0, \dot{V}_0, W_0, \dot{W}_0$ – displacements and their velocities known at the initial moment of time.

Equations (1.3) and (1.4) at $r=0$ are the conditions of periodicity for circular areas and regularity of solutions. In equations (1.5) and those below the dot means differentiation by t

2. The construction of the general solution. The solution is made by the method of integral transformations consistently using the sine and cosine Fourier transform with finite limits on variables θ and z , as well as a generalized finite transformation [8] on the radial coordinate r . Each time first you must perform the procedure of standardization (harmonization of boundary conditions on the corresponding homogeneous coordinate). At the first stage the following representation is used for this purpose:

$$\{U(r, \theta, z, t), V(r, \theta, z, t)\} = H_1(r, \theta, z, t) + \{u(r, \theta, z, t), v(r, \theta, z, t)\} \quad (2.1)$$

$$W(r, \theta, z, t) = H_2(r, \theta, z, t) + w(r, \theta, z, t)$$

$$\varphi(r, \theta, z, t) = H_3(r, \theta, z, t) + \chi(r, \theta, z, t)$$

$$\text{Here } H_1 = (Lz - z^2)(q_1 + q_2), \quad H_3 = a_9^{-1} H_2$$

$$H_2 = a_9 (a_{10} - 1)^{-1} \left[\left(z - \frac{z^2}{2L} - \frac{L}{2} \right) q_1 + \frac{z^2}{2L} q_2 \right].$$

The substitution of (2.1) for (1.1) – (1.5) gives a new initial boundary problem regarding functions $u(r, \theta, z, t), v(r, \theta, z, t), w(r, \theta, z, t), \chi(r, \theta, z, t)$ with homogeneous boundary conditions on coordinates z and θ . As this takes place, differential equations (1.1) and boundary conditions (1.4) do not agree with $F_1 \div F_4$ and $N_1 \div N_4$, and the initial conditions (1.5) should be replaced by u_0, v_0, w_0 .

To the transformed boundary value problem (1.1) – (1.5) we consistently apply the sine and cosine Fourier transform with finite limits on variables z and θ using the following transformants:

$$\{u_s(r, \theta, n, t), v_s(r, \theta, n, t)\} = \int_0^L \{u(r, \theta, z, t), v(r, \theta, z, t)\} \sin(j_n z) dz, \quad (2.2)$$

$$\{w_c(r, \theta, n, t), \chi_c(r, \theta, n, t)\} = \int_0^L \{w(r, \theta, z, t), \chi(r, \theta, z, t)\} \cos(j_n z) dz,$$

$$\{U_c(r, m, n, t), W_c(r, m, n, t), \Phi_c(r, m, n, t)\} = \int_0^{2\pi} \{u_s(r, \theta, n, t), w_c(r, \theta, n, t), \chi_c(r, \theta, n, t)\} \cos(m\theta) d\theta,$$

$$V_s(r, m, n, t) = \int_0^{2\pi} v_s(r, \theta, n, t) \sin(m\theta) d\theta,$$

with the appropriate conversion formulas

$$\{u_s(r, \theta, n, t), w_s(r, \theta, n, t), \chi_s(r, \theta, n, t)\} = \quad (2.3)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{-1} \{U_c(r, m, n, t), W_c(r, m, n, t), \Phi_c(r, m, n, t)\} \cos(m\theta),$$

$$v_s(r, \theta, n, t) = \pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} V_s(r, m, n, t) \sin(m\theta),$$

$$\{u(r, \theta, z, t), v(r, \theta, z, t)\} = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \{u_s(r, \theta, n, t), v_s(r, \theta, n, t)\} \sin j_n z,$$

$$\{w(r, \theta, z, t), \chi(r, \theta, z, t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \{w_c(r, \theta, n, t), \chi_c(r, \theta, n, t)\} \cos j_n z,$$

$$j_n = n\pi / L, \quad P_m = \begin{cases} 2\pi, & (m=0) \\ \pi, & (m \neq 0) \end{cases}, \quad \Omega_n = \begin{cases} L, & (n=0) \\ L/2, & (n \neq 0) \end{cases}.$$

As a result we get the following initial-boundary problem concerning the Fourier transformants $U_c(r, m, n, t), V_s(r, m, n, t), W_c(r, m, n, t), \Phi_c(r, m, n, t)$:

$$\nabla_1^2 U_c - a_1 \frac{m^2}{r^2} U_c - a_2 j_n^2 U_c + a_3 \frac{m}{r} \frac{\partial V_s}{\partial r} - a_4 \frac{m}{r^2} V_s - a_5 j_n \frac{\partial W_c}{\partial r} - a_6 j_n \frac{\partial \Phi_c}{\partial r} - \frac{\partial^2 U_c}{\partial t^2} = R_{1c} \quad (2.4)$$

$$a_1 \nabla_1^2 V_s - \frac{m^2}{r^2} V_s - a_2 j_n^2 V_s - a_3 \frac{m}{r} \frac{\partial U_c}{\partial r} - a_4 \frac{m}{r^2} U_c + a_5 j_n \frac{m}{r} W_c + a_6 j_n \frac{m}{r} \Phi_c - \frac{\partial^2 V_s}{\partial t^2} = R_{2s}$$

$$a_5 j_n \left(\nabla U_c + \frac{m}{r} V_s \right) + a_2 \left(\nabla_2^2 W_c - \frac{m^2}{r^2} W_c \right) - a_7 j_n^2 W_c + a_8 \left(\nabla_2^2 \Phi_c - \frac{m^2}{r^2} \Phi_c \right) - j_n^2 \Phi_c - \frac{\partial^2 W_c}{\partial t^2} = R_{3c}$$

$$a_6 j_n \left(\nabla U_c + \frac{m}{r} V_s \right) + a_8 \left(\nabla_2^2 W_c - \frac{m^2}{r^2} W_c \right) - j_n^2 W_c - a_9 \left(\nabla_2^2 \Phi_c - \frac{m^2}{r^2} \Phi_c \right) + a_{10} j_n^2 \Phi_c = R_{4c},$$

$$r = 1, 0 \quad \frac{\partial U_c}{\partial r} + a_{13} \frac{1}{r} (U_c + mV_s) - a_{11} j_n W_c - a_{12} j_n \varphi_c = Y_{1c|r=1}, \quad (2.5)$$

$$a_2 \left(\frac{\partial W_c}{\partial r} + j_n U_c \right) + a_8 \frac{\partial \varphi_c}{\partial r} = Y_{2c|r=1}, \quad a_1 \left[\frac{\partial V_s}{\partial r} - \frac{1}{r} (mU_c + V_s) \right] = Y_{3s|r=1},$$

$$-a_9 \frac{\partial \varphi_c}{\partial r} + a_8 \left(\frac{\partial W_c}{\partial r} + j_n U_c \right) = Y_{4c|r=1},$$

$$U_c(0, m, n, t) < \infty, \quad V_s(0, m, n, t) < \infty, \quad W_c(0, m, n, t) < \infty, \quad \varphi_c(0, m, n, t) < \infty;$$

$$t = 0 \quad U_c(r, m, n, 0) = U_{0c}(r, m, n), \quad \dot{U}_c(r, m, n, 0) = \dot{U}_{0c}(r, m, n), \quad (2.6)$$

$$V_s(r, m, n, 0) = V_{0s}(r, m, n), \quad \dot{V}_s(r, m, n, 0) = \dot{V}_{0s}(r, m, n),$$

$$W_c(r, m, n, 0) = W_{0c}(r, m, n), \quad \dot{W}_c(r, m, n, 0) = \dot{W}_{0c}(r, m, n);$$

$$\text{where } \{R_{1c}, R_{3c}, R_{4c}, Y_{1c}, Y_{2c}, Y_{4c}, U_{0c}, \dot{U}_{0c}, W_{0c}, \dot{W}_{0c}\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{F_{1s}, F_{3c}, F_{4c}, N_{1s}, N_{2c}, N_{4c}, u_{0s}, \dot{u}_{0s}, w_{0c}, \dot{w}_{0c}\} \cos(m\theta) d\theta,$$

$$\{R_{2s}, Y_{3s}, V_{0s}, \dot{V}_{0s}\} = \int_0^L \{F_{2s}, N_{3s}, v_{0s}, \dot{v}_{0s}\} \sin(m\theta) d\theta,$$

$$\{F_{1s}, F_{2s}, N_{1s}, N_{3s}, u_{0s}, \dot{u}_{0s}, v_{0s}, \dot{v}_{0s}\} = \int_0^L \{F_1, F_2, N_1, N_3, u_0, \dot{u}_0, v_0, \dot{v}_0\} \sin(j_n z) dz,$$

$$\{F_{3c}, F_{4c}, N_{2c}, N_{4c}, w_{0c}, \dot{w}_{0c}\} = \int_0^L \{F_3, F_4, N_2, N_4, w_0, \dot{w}_0\} \cos(j_n z) dz.$$

Standardizing the problem once more (2.4) – (2.6) we represent the Fourier transformants U_c, V_s, W_c, φ_c as follows:

$$U_c(r, m, n, t) = H_4(r, m, n, t) + U_c^*(r, m, n, t), \quad (2.7)$$

$$V_s(r, m, n, t) = H_5(r, m, n, t) + V_s^*(r, m, n, t),$$

$$W_c(r, m, n, t) = H_6(r, m, n, t) + W_c^*(r, m, n, t),$$

$$\varphi_c(r, m, n, t) = H_7(r, m, n, t) + \varphi_c^*(r, m, n, t),$$

$$\text{where } H_4 = (r-1)Y_{1c|r=1}, \quad H_5 = a_1^{-1}(r-1)Y_{3s|r=1}, \quad H_6 = a_2^{-1}(r-1)(Y_{2c|r=1} - a_8 Y_{5c|r=1}),$$

$$H_7 = (r-1)Y_{5c|r=1}, \quad Y_{5c|r=1} = \frac{a_8}{a_2 a_9 + a_8^2} \left(Y_{4c|r=1} - \frac{a_2}{a_8} Y_{2c|r=1} \right).$$

The substitution of (2.7) for (2.4) – (2.6) gives the initial- boundary problem regarding functions $U_c^*, V_s^*, W_c^*, \varphi_c^*$ with homogeneous boundary conditions on the coordinate r . And it is necessary to take $R_{1c}^*, R_{2s}^*, R_{3c}^*, R_{2c}^*$ and $U_{0c}^*, \dot{U}_{0c}^*, V_{0s}^*, \dot{V}_{0s}^*, W_{0c}^*, \dot{W}_{0c}^*$ instead of the right-hand parts of differential equations $R_{1c}, R_{2s}, R_{3c}, R_{4c}$ (2.4) and initial conditions $U_{0c}, \dot{U}_{0c}, V_{0s}, \dot{V}_{0s}, W_{0c}, \dot{W}_{0c}$ (2.6).

The initial – boundary problem (2.4) – (2.6) regarding functions $U_c^*, V_s^*, W_c^*, \varphi_c^*$ is solved using a structural algorithm of the generalized method of finite integral transformations (FIT) [9]. Enter into the segment $[0,1]$ a generate FIT with the unknown components $K_1(\lambda_{imm}, r), K_2(\lambda_{imm}, r), K_3(\lambda_{imm}, r), K_4(\lambda_{imm}, r)$ of the vector-function of the kernel of transformations:

$$G(\lambda_{inn}, m, n, t) = \int_0^1 (U_c^* K_1 + V_s^* K_2 + W_c^* K_3) r dr, \quad (2.8)$$

$$\{U_c^*, V_s^*, W_c^*, \Phi_c^*\} = \sum_{i=1}^{\infty} G\{K_1, K_2, K_3, K_4\} \|K_{inn}\|^2, \quad (2.9)$$

$$\|K_{inn}\|^2 = \int_0^1 [K_1^2 + K_2^2 + K_3^2] r dr,$$

where λ_{inn} – are positive parameters that form a countable set ($i = \overline{1, \infty}$).

The equality (2.8) is a transformant and (2.9) are inversion formulas of the FIT method.

Circular frequencies of non-axis-symmetrical oscillations of the cylinder ω_{inn} are associated with the following function λ_{inn}

$$\omega_{inn} = \frac{\lambda_{inn}}{b} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}. \quad (2.10)$$

Subjecting a system of equations and conditions (2.4) – (2.6) under $U_c^*, V_s^*, W_c^*, \Phi_c^*$ functions to transformations in accordance with the structural algorithm [9] we get a countable set of Cauchy problems for the transformant $G(\lambda_{inn}, m, n, t)$, the solution of which has the following form:

$$G(\lambda_{inn}, m, n, t) = G_0 \cos(\lambda_{inn} t) + \dot{G}_0 \sin(\lambda_{inn} t) / \lambda_{inn} - \lambda_{inn}^{-1} \int_0^t F(\lambda_{inn}, m, n, \tau) \times \sin \lambda_{inn} (t - \tau) d\tau. \quad (2.11)$$

and a homogeneous boundary problem for components K_1, K_2, K_3, K_4 :

$$\left(\nabla_1^2 - a_1 \frac{m^2}{r^2} - a_2 j_n^2 + \lambda_{inn}^2 \right) K_1 + \left(a_3 \frac{m}{r} \frac{d}{dr} - a_4 \frac{m}{r^2} \right) K_2 - a_5 j_n \frac{dK_3}{dr} - a_6 j_n \frac{dK_4}{dr} = 0 \quad (2.12)$$

$$\left(a_1 \nabla_1^2 - \frac{m^2}{r^2} - a_2 j_n^2 + \lambda_{inn}^2 \right) K_2 - \left(a_3 \frac{m}{r} \frac{d}{dr} + a_4 \frac{m}{r^2} \right) K_1 + a_5 j_n \frac{m}{r} K_3 + a_6 j_n \frac{m}{r} K_4 = 0$$

$$a_5 j_n \left(\nabla K_1 + \frac{m}{r} K_2 \right) + \left[a_2 \left(\nabla_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) - a_7 j_n^2 + \lambda_{inn}^2 \right] K_3 + \left[a_8 \left(\nabla_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) - j_n^2 \right] K_4 = 0$$

$$a_6 j_n \left(\nabla K_1 + \frac{m}{r} K_2 \right) + \left[a_8 \left(\nabla_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) - j_n^2 \right] K_3 - \left[a_9 \left(\nabla_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) - a_{10} j_n^2 \right] K_4 = 0$$

$$r = 1 \quad \frac{dK_1}{dr} + a_{13} (K_1 + mK_2) - a_{11} j_n K_3 - a_{12} j_n K_4 = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{dK_3}{dr} + j_n K_1 = 0, \quad \frac{dK_4}{dr} = 0, \quad \frac{dK_2}{dr} - mK_1 - K_2 = 0$$

$$r = 0 \quad K_1 < \infty, \quad K_2 < \infty, \quad K_3 < \infty, \quad K_4 < \infty.$$

$$\text{Here } F(\lambda_{inn}, m, n, t) = \int_0^1 [R_{1s}^* K_1 + R_{2c}^* K_2 + R_{3s}^* K_3 + R_{4s}^* K_4] \cdot r dr$$

$$G_0(\lambda_{inn}, m, n) = \int_0^1 [U_{0c}^* K_1 + V_{0s}^* K_2 + W_{0c}^* K_3] \cdot r dr$$

$$\dot{G}_0(\lambda_{inn}, m, n) = \int_0^1 [\dot{U}_{0c}^* K_1 + \dot{V}_{0s}^* K_2 + \dot{W}_{0c}^* K_3] \cdot r dr$$

Investigating the system (2.12) we can come across two cases, i.e. $m = 0$ and $m \neq 0$. When $m = 0$ an axisymmetric problem is considered, the solution of which has been obtained by the author and is described in the work [10].

To solve (2.12) when $m \neq 0$ new functions K_5, K_6 are introduced on the basis of the following representations:

$$K_5 = r^s K_1, \quad K_6 = r^s K_2 \quad (s = \pm 1) \quad (2.14)$$

Then the particular solutions of the system of differential equations are found by the method of decomposition of functions $K_3 \div K_6$ into the following power series:

$$\{K_3, K_4, K_5, K_6\} = r^\beta \sum_{f=0,2,4}^{\infty} \{E_f, R_f, Y_f, P_f\} r^f \quad (\beta = \text{const}). \quad (2.15)$$

After substitution (2.15) in (2.12) we equate all multipliers with the same degree to zero and obtain values for the parameter β , as well as expressions for the coefficients E_f, R_f, Y_f, P_f . The result is four partial solutions which allow representing functions $K_1 \div K_4$.

Substituting functions $K_1 \div K_4$ in the boundary conditions at $r = 1$ (2.13) forms a homogeneous system of equations for constants $D_1 \div D_4$. Seeking for its non-trivial solution, we obtain a transcendental equation for computing λ_{imm} eigenvalues and expressions for $D_1 \div D_4$. Thus obtained solutions also meet the conditions of regularity of the solution in the center of the plate (the boundary conditions (2.13) at $r = 0$). Consistently applying inversion formulas (2.9), (2.3), (2.2) to the transformant (2.11) we obtain, taking into account (2.1) and (2.7), the following decomposition for $U(r, \theta, z, t), V(r, \theta, z, t), W(r, \theta, z, t), \varphi(r, \theta, z, t)$:

$$\begin{aligned} U(r, \theta, z, t) &= H_1 + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{-1} \left[H_4 + \sum_{i=1}^{\infty} GK_1 \|K_{imm}\|^{-2} \right] \cos(m\theta) \right\} \sin j_n z, \quad (2.16) \\ V(r, \theta, z, t) &= H_1 + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \left[H_5 + \sum_{i=1}^{\infty} GK_2 \|K_{imm}\|^{-2} \right] \sin(m\theta) \right\} \sin j_n z, \\ W(r, \theta, z, t) &= H_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{-1} \left[H_6 + \sum_{i=1}^{\infty} GK_3 \|K_{imm}\|^{-2} \right] \cos(m\theta) \right\} \cos j_n z, \\ \varphi(r, \theta, z, t) &= H_3 + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{-1} \left[H_7 + \sum_{i=1}^{\infty} GK_4 \|K_{imm}\|^{-2} \right] \cos(m\theta) \right\} \cos j_n z. \end{aligned}$$

The potential difference $Q(t_*)$ between the end surfaces with electrodes in the piezoceramic cylinder is determined by the following equality:

$$Q(t_*) = (\pi a^2)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^a [\varphi(r_*, \theta, L, t_*) - \varphi(r_*, \theta, 0, t_*)] \cdot r_* dr_* d\theta. \quad (2.17)$$

Numerical analysis of results. As an example, we consider piezoceramic cylinders made from ceramic compositions PZT-4, PZT-19, which have the following physical characteristics of the material:

$$\begin{aligned} \text{PZT-4: } \{e_{31}, e_{33}, e_{15}\} &= \{-5.2, 15.1, 12.7\} \quad \text{Кл/м}^2, \quad \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{6.46, 5.62\} \times 10^{-9} \quad \Phi/\text{м}, \\ \{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}, C_{55}, C_{66}\} &= \{13.9, 7.8, 7.4, 11.5, 2.5, 3.0\} \times 10^{10} \quad \text{Н/м}^2, \quad \rho = 7700 \quad \text{кг/м}^3, \\ \{k_p, k_{15}, k_{33}\}^* &= \{0.58, 0.39, 0.6\}; \end{aligned}$$

$$\text{PZT-19: } \{e_{31}, e_{33}, e_{15}\} = \{-4.9, 14.9, 10.6\} \text{ Кл/м}^2, \quad \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{7.73, 7.26\} \times 10^{-9} \text{ Ф/м},$$

$$\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}, C_{55}, C_{66}\} = \{10.9, 6.1, 5.4, 9.3, 2.4, 2.4\} \times 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \rho = 7730 \text{ кг/м}^3,$$

$$\{k_p, k_{15}, k_{33}\} = \{0.56, 0.29, 0.64\}^2.$$

The table shows the numerical values of the spectrum of natural frequencies ω_{imm} ($m = 0, 1, 2$); piezoceramic (PZT-4, PZT-19 – respectively upper and averages) and the ceramic cylinder (the bottom number) element having elastic characteristics similar to the composition of the PZT-19.

The numerical values of the elastic characteristics of piezoelectric ceramics PZT-4 more than the same value was PZT-19, at about the same electrical parameters. This results in a higher range of frequencies of natural oscillations. The highest difference is 9%. In addition, the first natural frequency of non-axis-symmetric oscillations corresponds to the formation of one half-wave on the angular coordinate ($m = 1$) and along the cylindrical surface ($n = 1$) of the element under investigation.

In addition, connectivity electroelastic fields having dimensions of the cylinder has a significant impact on the entire frequency spectrum and leads to an increase in the numerical values. The greatest difference between the calculated for the piezoceramic (averages number) and elastic (the bottom number) elements, reaches 8.5%.

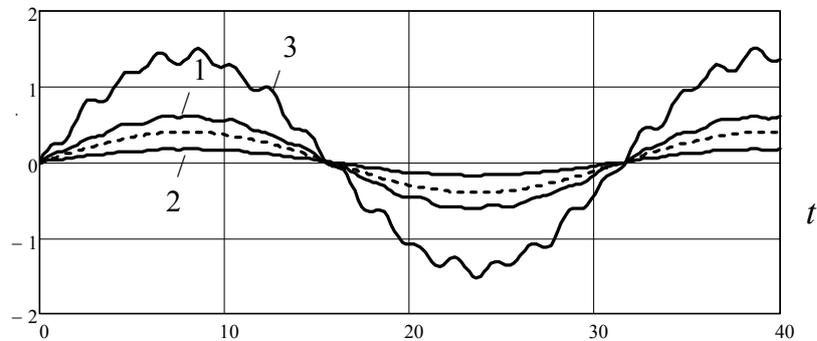
Table

ω_{imm} кГц	$m = 0$			$m = 1$			$m = 2$		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$i = 1$	122.4	276.5	336.1	80.6	173.1	262.4	100.8	179.2	265.8
	113.4	257.2	317.9	77.2	165.5	251.6	92.8	169.6	252.5
	98.3	166.7	246.2	77.0	163.8	246.6	92.7	169.2	250.2
$i = 2$	206.9	377.3	426.7	126.5	200.2	281.3	158.9	221.8	298.9
	187.2	344.3	396.5	117.5	190.6	273.1	145.2	209.2	285.5
	152.0	227.5	297.6	111.9	184.7	267.1	133.5	199.4	276.8
$i = 3$	245.6	444.3	487.5	173.8	227.2	299.6	213.4	265.8	326.6
	226.9	434.5	485.1	158.7	214.1	287.5	195.1	247.1	315.7
	200.3	285.7	351.4	136.3	203.2	281.6	170.3	230.0	300.4

Fig.1 shows graphs of the variation of vertical displacements $W(r, \theta, z, t)$ and the potential difference in time $Q(t)$ when evenly distributed harmonic load of q_0 intensity and with a frequency of forced oscillations β acts on the end surface of the cylinder composition PZT-19 ($0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$): $q_1(r, \theta, t) = q_1(r, \theta, t) = q_0 H(\pi - \theta) \sin \beta t$, where $H(\dots)$ – is the Heaviside unit function.

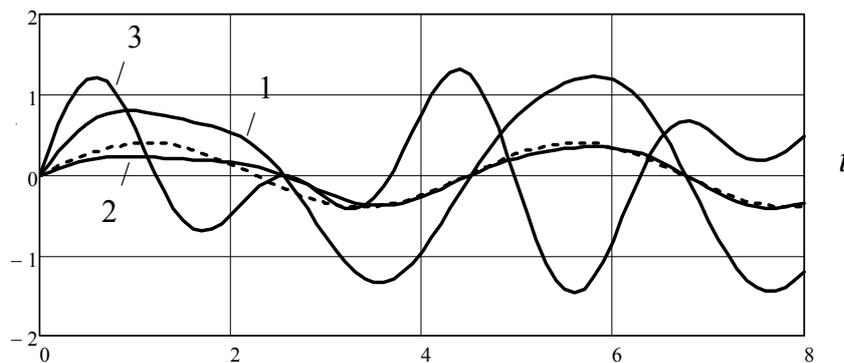
² Electromechanical coupling coefficients: k_p, k_{15}, k_{33} – respectively planar, shear, tension (compression) in thickness.

$$\{W(r, \theta, L, t), Q(t)\} / q_0$$



a) $\beta = 0.2\lambda_{inm} (i, n, m = 1)$

$$\{W(r, \theta, L, t), Q(t)\} / q_0$$



b) $\beta = 0.7\lambda_{inm} (i, n, m = 1)$

Fig.1. Graphs of $W(r, \theta, z, t)$ and $Q(t)$ in time:

$$1 - W(1, \pi/2, 0, t), 2 - W(1, 3\pi/2, 0, t), 3 - Q(t)$$

Functions $W(1, \pi/2, 0, t)$, $W(1, 3\pi/2, 0, t)$, $Q(t)$ are denoted by figures 1, 2, 3, respectively and the dotted line shows the nature of the changes in the external load with time.

It is obvious that the vertical component of the vector of displacements at the non-loaded section at $\theta = 3\pi/2$ is significantly less than the corresponding values in the zone of the load action at $\theta = \pi/2$.

The calculation results also show that under harmonic loads the assumption of steady state of forced vibrations used in the study of dynamic problems is true only when frequencies of forced oscillations are substantially less than the first natural frequency. At the high – frequency external influence due to the superposition of the reflected waves of deformation there is a more complex dependence of the change in the stress-strain state and the electric field of the system in time.

Conclusions. On the basis of the conducted researches it is possible to formulate the main results:

- 1) There has been built a new closed solution using the basic calculation ratios to describe the operation of the typical elements of piezoceramic transducers of resonant and non-resonant classes in the form of a solid cylinder exposed to dynamic non-axis-symmetric mechanical loads. In particular the design of piezoelectric power generators [11];
- 2) Numerical calculation results show that the use of the constructed algorithm of calculation allows in comparison with numerical methods to obtain more accurate values of the range of natural frequencies, the stress-strain state and the electric field of the piezoceramic cylinder;
- 3) In the case of high-frequency external harmonic load the assumption of steady-state forced oscillations cannot be used in the study of elastic and electro-elastic systems;
- 4) Calculated ratios allow you to automate the research, which significantly increases the theoretical level of engineering calculations.

References

1. Willberg C., Gabbert U. Development of a three-dimensional piezoelectric isogeometric finite element for smart structure applications //Acta Mechanica, Volume 223 (2012), Issue 8, pp.1837-1850.
2. Mohammad Arefi, Nonlinear thermoelastic analysis of thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder// Acta Mechanica, V. 224, 2013, Issue 11, pp. 2771-2783.
3. Sargsyan A.M. The principle of conformity in the problems of elasticity theory and elektroelasticity// Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, Volume 63 (2010), Issue 3, pp. 13-18.
4. Azatyan G.L., Gevorgyan R.S., Poghosyan H.M. Asymptotics of electroelasticity piezoceramicinhomogeneous plate with a circular hole and the thicknesspolarization// Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, Volume 65 (2012), Issue 2, pp. 14-25.
5. Hou Peng-Fei, The transient responses of magneto–electro–elastic hollow cylinders// Smart Mater. Struch, №13 (2004), pp. 762–776.
6. Avetisian A.G., Nersisian G.G., Sargsian A.M. On solution of four boundary problems of electro-elasticity for thin piezoelectric wedge// Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, Vol.59 (2006), Issue 3, pp. 27-33.
7. Grigoryan E.Kh., Sinanyan S.S.Linear source of shift oscillations problem inpiezoelectric space with infinite metallic layer// Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, Volume 62 (2009), Issue 1, pp. 40-51.
8. V.T. Grinchenko, A.F. Ulitko, N.A. Shul'ga, Mechanics of coupled fields in structural elements, Naukova Dumka, Kiev, 1989, 279 p.
9. Senitsky Yu.E., Multicomponent generalized finite integral transformation and its application to non-stationary problems of mechanics// Izvestiya vuzov: Mathematics, 4 (1991), pp. 57-63.
10. Yu. E. Senitskii, D.A. Shlyakhin, The nonstationary axisymmetric problem of electroelasticity for a thick circular anisotropic piezoceramic plate// Mechanics of Solids 1999, 34(1), pp. 66-74.
11. Patent №130164 RF U1 / Piezoelectric generator / Shlyakhin D.A., Litikov A.P., Tyurnikov V.V. – published 10.07.2013. Bulletin №19.

About author

Shlyakhin D.A.

443001, Samara, Russia, Samara State University of Architecture and Civil Engineering

E- mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.02.2015

УДК 621.38

О ДВУХ ПОДХОДАХ К ИССЛЕДОВАНИЮ КИНЕМАТИКИ УПРУГИХ
МАНИПУЛЯТОРОВ

Гукасян А.А.

Բանալի բառեր. Բազմօղակ առաձգական մանիպուլյատոր, կոորդինատային համակարգ, կինեմատիկական առնչություններ:

Ключевые слова: многозвенный упругий манипулятор, системы координат, кинематические соотношения.

Key words: Multilayer elastic manipulator, coordinate system, kinematic correlation

Ղուկասյան Ա.Ա.

Առաձգական մանիպուլյատորի կինեմատիկայի ուսումնասիրության երկու մոտեցումների մասին

Տարբեր կոորդինատական համակարգերում հետազոտվում է բազմօղակ առաձգական մանիպուլյատորի կինեմատիկան: Ենթադրվում է, որ մանիպուլյատորի օղակները մոդելավորվում են որպես առաձգական ձողեր, իսկ օղակների միացման հանգույցները պարունակում են մեծ կոշտության առաձգական էլեմենտներ: Ընդհանուր դեպքում, օգտվելով առաձգականության գծային տեսությունից ստացված են կինեմատիկական առնչությունները բնութագրող բանաձևեր ինչպես դեկարտյան, այնպես էլ կորագիծ կոորդինատական համակարգերում: Կինեմատիկական առնչությունները (բնութագրիչ կետերի դիրքը, նրանց շարժման արագությունը և արագացումը) ներկայացված են երեք գումարելիների տեսքով, որոնք բնութագրում են ինչպես բացարձակ կոշտ օղակներով և իդեալական միացման հանգույցներով, այնպես էլ միացման առաձգական հանգույցներով և առաձգական օղակներով մանիպուլյատորի շարժման կինեմատիկան: Ստացված առնչությունները դեկարտյան կոորդինատներով կախված են մանիպուլյատորի ընդհանրացված կոորդինատներից, որոնք որոշում են կոնֆիգուրացիան և առաձգական հատկությունները, իսկ կորագիծ կոորդինատներով՝ նաև Լյամեի գործակիցներից: Կոնկրետ դեպքերում կա հնարավորություն համեմատելու ընտրած եղանակներն ու հետազոտության արդյունքները:

Ghukasyan A.A.

On two Approaches to Research of Kinematics of Elastic Manipulators

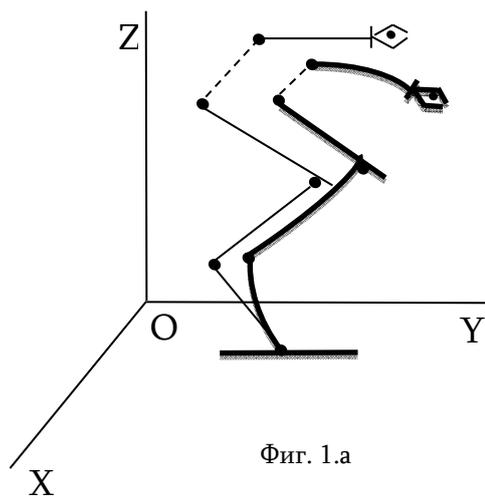
In different coordinate system the kinematics of motion of multilayer elastic manipulator is investigated. It is supposed that the links of manipulators are modeling as elastic bars and connecting points between links contain elastic elements of large rigidity. In general case with the application of linear theory of elasticity the formulas determining the kinematic correlation both for Cartesian coordinate system and curvilinear coordinate system are received. The kinematic correlation (position of character points, their velocity and motion acceleration) are presented in the form of a sum of three component which are characterise the kinematics of motion of manipulator both as absolutely rigidity links and ideal connection links as well as with elastic junctions and elastic links. Obtained correlations at Cartesian coordinates depend on generalized coordinates determined the configuration and elastic features of manipulator and in the curvilinear coordinate system – also from Lamé coefficient. In particular cases it is possible to compare the methods and results of investigations.

В различных системах координат исследуется кинематика движения многозвенного упругого манипулятора. Предполагается, что звенья манипулятора моделируются как упругие стержни, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жёсткости. В общем случае, с применением линейной теории упругости получены формулы, определяющие кинематические соотношения как в декартовых, так и в криволинейной системе координат. Кинематические соотношения (положения характерных точек, их скорость и ускорения движений) представлены в виде суммы трёх слагаемых, которые характеризуют кинематику движения манипулятора как с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами, так и с упругими узлами и упругими звеньями.

Полученные соотношения в декартовых координатах зависят от обобщённых координат, определяющих конфигурацию и упругие свойства манипулятора, а в криволинейной системе координат – также от коэффициентов Ляме. В конкретных случаях имеется возможность сравнения способов и результатов исследования.

Введение. Изучение кинематики движения пространственных манипуляторов является основой для исследования более сложных задач динамики и проектирования системы управления, поскольку кинематика манипулятора в основном определяет работоспособность робота. При исследовании кинематики манипуляторов следует придерживаться следующим основным порядкам: 1) выбрать наиболее подходящие системы координат; 2) составить кинематические уравнения и определить траекторию движения характерных точек звеньев и схвата манипулятора в избранной системе координат; 3) по уравнениям движения определить проекции векторов скорости и ускорения на оси выбранной системы координат; 4) определить модуль и направления вектора скорости, ускорения характерных точек, а также схвата.

Для исследователя выбор той или иной системы координат зависит как от технологического предназначения робота, так и от геометрии конструкции манипулятора. Ниже, на основе математической модели упругого многозвенного манипулятора приводятся результаты исследования кинематики пространственного движения как в декартовых координатах, так и в криволинейной системе координат. Предполагается, что звенья манипулятора (или часть из них) моделируются как



Фиг. 1.а

упругие стержни, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жёсткости [1-12]. Манипулятор с такими свойствами назовём манипулятором с обобщённой упругостью. Предполагается, что все соединительные узлы между звеньями представляют собой цилиндрические шарниры (вращательные кинематические пары пятого класса), или поступательные кинематические пары пятого класса. Исследования проводятся в рамках линейной теории упругости.

Постановка задачи. Целью настоящей работы является выявление возможности исследования кинематики упругих манипуляторов с применением различных систем координат, сравнение

результатов и способов исследования. Актуальность такой постановки исследования обуславливается тем, что для современных робототехнических систем пространственные движения всех звеньев, в целом и в отдельности, в зависимости от соединительных механизмов между ними, могут привести к необходимости в рамках исследования одной задачи применять различные системы координат.

1. Математическая модель многозвенного манипулятора. Следуя [8], приведём краткое описание упругой модели манипулятора фиг.1.а. Обобщённые координаты, определяющие конфигурацию манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и с идеальными соединительными узлами, обозначим через компоненты вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, дополнительные координаты, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах – через

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$ ($m \leq n$). Деформацию упругих звеньев манипулятора относительно их недеформированного состояния обозначим через вектор $\mathbf{w}(t, \xi) = (w_1(t, \xi), w_2(t, \xi), \dots, w_k(t, \xi))^T$, где ξ – произвольная точка упругого звена. Символ "T" обозначает транспонирование вектора или матрицы фиг. 1.б.

Согласно линейной теории упругости предполагаем, что жёсткость соединительных узлов между звеньями велика ($c_j \sim \varepsilon^{-1}$), обобщённые координаты β_j малы ($\beta_j \sim \varepsilon, j = 1, 2, \dots, m$), компоненты вектора упругих смещений звеньев малы по сравнению с их линейными размерами, то есть $w_l(t, \xi) \sim \varepsilon, w'_l(t, \xi) \sim \varepsilon, \dot{w}_l(t, \xi) \sim \varepsilon, (l = 1, 2, \dots, k)$, где $\varepsilon \ll 1$, частные производные по ξ обозначены штрихом, а по t – точкой. Согласно приведённым предположениям, в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ соединительные узлы становятся идеальными, а звенья – абсолютно твёрдыми телами.

2. Скорость движения упругого манипулятора.

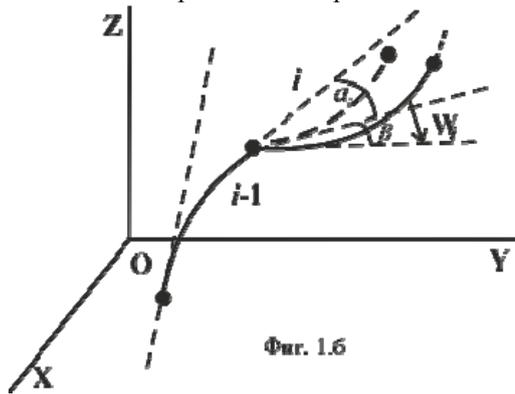
а) **Метод декартовых координат.** Положение характерных точек упругого манипулятора в пространстве определим через вектор \mathbf{q} , компоненты которого являются декартовыми координатами точек относительно инерциальной системы координат

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T \quad (2.1)$$

Кинематику манипулятора с упругими свойствами, в общем случае, можно исследовать на основе соотношения

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\alpha, \beta, \mathbf{w}), \quad (2.2)$$

где $\mathbf{f}(\alpha, \beta, \mathbf{w})$ – заданная N -мерная вектор-функция от вектор-аргументов, структура которой зависит от выбора обобщённых координат жёсткой (α) и



Фиг. 1.б

упругой модели (β, \mathbf{w}) манипулятора, а также от геометрии манипулятора.

В рамках предположений относительно величин вводимых параметров $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t), \mathbf{w} = \mathbf{w}(t, \xi)$, то есть

$$\alpha_i \sim 1, i = 1, 2, \dots, n, \beta_j \sim \varepsilon, j = 1, 2, \dots, m, w_l(t, \xi) \sim w'_l(t, \xi) \sim \dot{w}_l(t, \xi) \sim \varepsilon,$$

$$l = 1, 2, \dots, k, \varepsilon \ll 1, t \in [0, T], \xi \in [0, l], T \sim 1, l \sim 1,$$

дальнейшие исследования проведём асимптотическим методом малого параметра ε .

Разложение вектор-функции \mathbf{q} (2.2) относительно β и \mathbf{w} с точностью ε^2 по формуле Тейлора имеет вид:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\alpha, 0, 0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\alpha, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial \mathbf{f}(\alpha, 0, 0)}{\partial w_l} w_l + O(\varepsilon^2) \quad (2.3)$$

или

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\alpha) + \mathbf{f}^{1*}(\alpha, \beta) + \mathbf{f}^{2*}(\alpha, \mathbf{w}), \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0), \quad \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j, \quad \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) = \sum_{l=1}^k \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l$$

$$\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, 0) \equiv 0.$$

Из (2.3), (2.4) можно предположить, что в пределах линейной теории упругости положение инерционных элементов упругого манипулятора описывается в рамках жёсткой модели путем введения дополнительного вектора $\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, обусловленного упругостью соединительных узлов между звеньями, и вектора $\mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$, обусловленного упругой податливостью звеньев манипулятора.

Вычисляя производные по времени от функции (2.2) с учётом (2.3), получим вектор скорости характерных точек манипулятора в виде [8]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{w}} \quad (2.5)$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}), \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}},$$

$$\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{w}},$$

$$(\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0),$$

$\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ определяет скорость движения манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами, $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ – дополнительный вектор скорости, обусловленный упругостью соединительных узлов, а $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ зависит от упругих свойств звеньев манипулятора.

Для определения компонентов вектора скорости (2.6) необходимо вычислить элементы матриц $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$, $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$. Приведём структуры и общие элементы указанных матриц.

Матрица $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ размерности $(N \times n)$ имеет следующий общий элемент:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \left\{ \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{N,n} \quad (2.7)$$

$\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ имеет также размерность $(N \times n)$ с общим элементом

$$\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ \frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{N,n}, \quad (2.8)$$

где

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right),$$

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, 0)}{\partial \alpha_j} \equiv 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n).$$

Матрица размерности $(N \times m)$

$$\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ \frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \right\}_{i,j=1}^{N,m}, \quad (2.9)$$

где общим элементом матрицы $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ является

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) = \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j},$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, m).$$

Аналогично, матрица $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$ имеет размерность $(N \times n)$ с элементами

$$\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) = \left\{ \frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{N,n}, \quad (2.10)$$

где

$$\frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right), \frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, 0)}{\partial \alpha_j} \equiv 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n).$$

Матрица размерности $(N \times k)$

$$\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) = \left\{ \frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})}{\partial w_j} \right\}_{i,j=1}^{N,k}. \quad (2.11)$$

Общий элемент матрицы $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$ определяется следующим образом:

$$\frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})}{\partial w_j} = \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) = \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_j}, \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, k)$$

Следовательно, в общем случае алгоритм вычисления скорости движения упругого манипулятора в декартовой системе координат по формуле (2.5) сводится к необходимости определения элементов матриц (2.7)-(2.11). Из предположений относительно величин (обобщённых координат), обусловленных упругими свойствами соединительных узлов (шарниров) и звеньев, следует, что $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ имеет порядок ε , а порядок вектора $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ не превышает ε^2 .

б) Метод криволинейных координат. Криволинейные координаты s_p ($p = 1, 2, 3$) характерных точек манипулятора зависят от декартовых координат $s_p = s_p(q_1, q_2, q_3)$, удовлетворяющих необходимым требованиям дифференцируемости и условию однозначной разрешимости этих зависимостей относительно q_1, q_2, q_3 .

С учётом (2.2) имеем:

$$s_p = s_p[f_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), f_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), f_3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})] = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), \quad (p = 1, 2, 3), \quad (2.12)$$

то есть криволинейные координаты характерных точек манипулятора зависят как от геометрии, так и от обобщённых координат жёсткой и упругой моделей манипулятора [9,10]. Методы построения криволинейных систем координат

приведены в работах [13,14]. Здесь рассматриваются лишь ортогональные системы. Вектор скорости движения в криволинейной системе координат имеет вид:

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^3 H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \times \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial w_l} \dot{w}_l \right] \mathbf{s}_p^0, \quad (2.13)$$

где \mathbf{s}_p^0 ($p=1,2,3$) – орт данной оси криволинейных координат, а $H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ ($p=1,2,3$) – коэффициенты Ляме, которые определяются следующим образом:

$$H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \right| = \left[\left(\frac{\partial q_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial s_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial s_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial s_p} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (p=1,2,3) \quad (2.14)$$

Здесь $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s_1, s_2, s_3)$ – радиус-вектор произвольной точки манипулятора относительно инерциальной системы в зависимости от криволинейных координат. (2.13) определяется путём составления полной производной по времени вектора $\boldsymbol{\rho}(s_1, s_2, s_3)$ с учётом (2.12).

В рамках принятой модели манипулятора воспользуемся разложением функций $s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ и $H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ ($p=1,2,3$) по формуле Тейлора относительно упругих величин β_j ($j=1,2,\dots,m$) и $w_l(t, \xi)$ ($l=1,2,\dots,k$) с точностью ε .

$$s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l + O(\varepsilon^2) \quad (2.15)$$

$$H_p = H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l + O(\varepsilon^2), \quad (p=1,2,3). \quad (2.16)$$

Подставляя (2.15), (2.16) в (2.13) и выводя обобщённые матрицы Ляме $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$, $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0)$, $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w})$, $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ и $\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$, скорость движения манипулятора с обобщённой упругостью в криволинейной системе координат с точностью ε представим в виде [9]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}), \quad (2.17)$$

где

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \dot{\boldsymbol{\beta}},$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \dot{\mathbf{w}}.$$

Здесь также, как в (2.6), скорость движения удаётся представить в виде суммы трёх слагаемых, где $\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ также является вектором скорости движения характерных точек манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными шарнирами, а

$\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ и $\mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ обусловлены упругостью соединительных узлов и звеньев манипулятора, соответственно.

Матрица $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ имеет размерность $(3 \times n)$ с элементами

$$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \right\}_{p,i=1}^{3,n}. \quad (2.18)$$

Матрица $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0)$ имеет следующие элементы, которые зависят от упругости соединительных узлов:

$$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0) = \left\{ \sum_{j=1}^m \left[H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j \partial \alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \right] \beta_j \right\}_{p,i=1}^{3,n} \quad (2.19)$$

Элементы матрицы $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w})$ зависят от $\mathbf{w}(t, \xi)$ и являются

$$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w}) = \left\{ \sum_{l=1}^k \left[H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l \partial \alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} \right] w_l \right\}_{p,i=1}^{3,n} \quad (2.20)$$

Матрицы $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0)$ и $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w})$ имеют размерность $(3 \times n)$.

Матрицы $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ и $\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ имеют размерность $(3 \times m)$, $(3 \times k)$, соответственно с элементами

$$\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \right\}_{p,j=1}^{3,m}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} \right\}_{p,l=1}^{3,k}. \quad (2.22)$$

Из (2.18)-(2.22) следует, что при $\beta_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0$, а при $w_l(t, \xi) = 0$ ($l = 1, 2, \dots, k$) $\mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0$.

Итак, скорость движения характерных точек (схвата) манипулятора в криволинейной системе координат, в общем случае, в рамках принятой упругой модели, определяется путём вычисления элементов матриц (2.18) – (2.22).

3. Ускорение движения упругого манипулятора.

а) **Метод декартовых координат.** Вычисляя производные по времени от функции (2.5), можно определить ускорение движения характерных точек манипулятора с обобщённой скоростью в виде

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}). \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}})$ соответствует ускорению движения абсолютно жёсткой модели манипулятора и зависит от обобщённой координаты $\boldsymbol{\alpha}$, от обобщённой скорости $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ и ускорения $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$.

$$\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.2)$$

Элементы матрицы $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ определяются согласно (2.7), а матрица $\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ имеет следующие элементы:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k \right\}_{i,j=1}^{N,n}$$

Слагаемое $\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}})$ зависит от упругих свойств соединительных узлов манипулятора и является также функцией от обобщённых координат $\boldsymbol{\beta}$, скорости $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ и ускорения $\ddot{\boldsymbol{\beta}}$. При $\beta_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) $\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0, 0) \equiv 0$.

Из (2.5) следует:

$$\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \ddot{\boldsymbol{\beta}} \quad (3.3)$$

Матрицы $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ и $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ определяются согласно (2.8), (2.9), соответственно.

Матрица $\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ имеет размерность $(N \times n)$ с общим элементом

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ F_{ij}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right\}_{i,j=1}^{N,n},$$

$$\text{где } F_{ij}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \right] =$$

$$= \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_p \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \dot{\alpha}_p + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta_k \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \dot{\beta}_k$$

$$(F_{ij}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, n).$$

$$\text{Матрица } \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ F_{ij}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \right\}_{i,j=1}^{N,m}, \quad \text{где } \quad \text{согласно} \quad (2.9),$$

$$F_{ij}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \alpha_l \partial \beta_j},$$

$\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}})$ обусловлена упругостью звеньев манипулятора и определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}) = \\ = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \ddot{\mathbf{w}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где матрицами $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ и $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})$, согласно (2.10), (2.11),

соответственно, являются:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \left\{ F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \right\}_{i,j=1}^{N,n}, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \left\{ F_{ij}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) \right\}_{i,j=1}^{N,k},$$

где

$$\begin{aligned} F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \dot{\alpha}_k + \sum_{p=1}^k \frac{\partial^2}{\partial w_p \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \dot{w}_p \\ (F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, 0, 0) &\equiv 0; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, n) \\ F_{ij}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_i \partial w_j} \dot{\alpha}_l, \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

б) Ускорение в криволинейных координатах. Вектор ускорения \mathbf{a} в криволинейной системе координат можно представить в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{p=1}^3 a_p s_p^0. \quad (3.5)$$

Поскольку здесь рассматриваются только ортогональные системы, то из (3.5) следует, что [11,12]

$$\begin{aligned} a_p &= \mathbf{a} \cdot s_p^0 = \frac{1}{H_p} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \quad \text{или} \\ a_p &= \frac{1}{H_p} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \right\} \quad (p = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \dot{s}_p, \quad \text{то} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{s}_p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \quad \text{и} \\ \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} &= \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{s}_p} = \frac{\partial}{\partial \dot{s}_p} \frac{v^2}{2} \quad (p = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3.7)$$

с другой стороны,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial s_p \partial s_1} \dot{s}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial s_p \partial s_2} \dot{s}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial s_p \partial s_3} \dot{s}_3, \quad (3.8)$$

где, согласно (2.12),

$$\begin{aligned} \dot{s}_p &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial w_l} \dot{w}_l \\ (p &= 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Дифференцируя выражение для скорости \mathbf{v} по какой-либо координате s_p ($p = 1, 2, 3$), имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_p} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \quad (p = 1, 2, 3) \quad (3.10)$$

Подставляя (3.7) и (3.10) в (3.6), для проекции вектора ускорения получим следующее выражение:

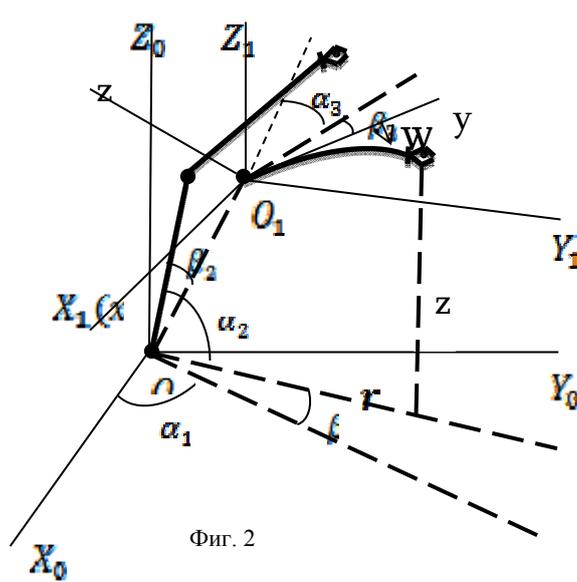
$$a_p = \frac{1}{H_p} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{s}_p} \right) - \frac{\partial v^2}{\partial s_p} \right\} \quad (p = 1, 2, 3), \quad (3.11)$$

где вектор скорости движения характерных точек манипулятора с обобщённой упругостью в криволинейной системе координат в рамках принятой математической модели с точностью ε представляется в виде [9,10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & \sum_{p=1}^3 \left[H_p(\mathbf{a}, 0, 0) \sum_{i=1}^n \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right] s_p^o + \\ & + \sum_{p=1}^3 \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(H_p(\mathbf{a}, 0, 0) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_j \partial \alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial H_p(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \right) \beta_j \right] \dot{\alpha}_i \right\} s_p^o + \\ & + \sum_{p=1}^3 \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{l=1}^k \left(H_p(\mathbf{a}, 0, 0) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l \partial \alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial H_p(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} \right) w_l \right] \dot{\alpha}_i \right\} s_p^o + \\ & + \sum_{p=1}^3 \left[H_p(\mathbf{a}, 0, 0) \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j \right] s_p^o + \sum_{p=1}^3 \left[H_p(\mathbf{a}, 0, 0) \sum_{l=1}^k \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} \dot{w}_l \right] s_p^o \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.11) и (3.12) также позволяют представить вектор ускорения в виде следующих трёх слагаемых:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}) + \mathbf{a}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{a}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}).$$



Вектор слагаемого $\mathbf{a}^1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}})$ соответствует ускорению движения абсолютно жёсткой модели манипулятора, а слагаемые $\mathbf{a}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}})$ и $\mathbf{a}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}})$ зависят от упругости соединительных узлов и упругости звеньев манипулятора, соответственно.

4. Пример. В качестве иллюстрации приведённых методов исследований, определим скорость движения двухзвенного упругого манипулятора в криволинейной системе координат фиг.2. Подробное описание математической модели упругого манипулятора и исследование

кинематики движения в декартовой системе координат в общем случае приведено в [8]. Результаты нижеприведённых вычислений можно сравнить с результатами, полученными в [8].

Обобщённые координаты абсолютно жёсткой модели обозначим через $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$. Координаты, обусловленные упругостью шарниров O_0 и O_1 по степеням подвижности, обозначим через $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$, а вектор упругих смещений точек $\xi \in [0, l_2]$ второго звена обозначим через $\mathbf{w}(t, \xi) = (0, 0, w_3(t, \xi))^T$. Линейные размеры звеньев обозначим через l_1, l_2 , соответственно.

Движение упругого манипулятора удобно исследовать цилиндрическими координатами (φ, r, z) :

$$\begin{aligned} s_1 &= \varphi = \varphi^*(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 + \beta_1, \\ s_2 &= r = r^*(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3(t, \xi)), \\ s_3 &= z = z^*(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3(t, \xi)), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} r^*(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3(t, \xi)) &= \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) - \\ &- w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) + l_1 \cos(\alpha_2 - \beta_2), \\ z^*(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3(t, \xi)) &= \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) + \\ &+ w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) + l_1 \sin(\alpha_2 - \beta_2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Разложения (2.15) для (4.2) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha_1 + \beta_1 \\ r &= r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0) + \frac{\partial r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_2} \beta_2 + \frac{\partial r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 + \\ &+ \frac{\partial r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial w_3} w_3 + o(\varepsilon^2), \\ z &= z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0) + \frac{\partial z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_2} \beta_2 + \frac{\partial z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 + \\ &+ \frac{\partial z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial w_3} w_3 + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Скорость движения упругого манипулятора в рамках принятой модели определяется выражением (2.17). Представим эту формулу в цилиндрических координатах для определения скорости движения произвольной точки рассматриваемого упругого манипулятора.

Коэффициенты Ляме (2.14) для цилиндрической системы имеют вид:

$$\begin{aligned} H_\varphi &= H_1(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3) = r(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3), \\ H_r &= H_2 = 1, \quad H_z = H_3 = 1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где, согласно (2.16),

$$H_1(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3) = H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0) + \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_2} \beta_2 + \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 + \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial w_3} w_3 + o(\varepsilon^2). \quad (4.5)$$

Из (4.2) следует:

$$\begin{aligned} H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0) &= \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + l_1 \cos \alpha_2 \\ \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_2} \beta_2 &= [\xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + l_1 \sin \alpha_2] \beta_2 \\ \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 &= \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial w_3} w_3 &= -w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Определим элементы обобщённых матриц Лямэ $\mathbf{H}_1^*(\alpha, 0, 0)$, $\mathbf{H}_2^*(\alpha, \beta, 0)$, $\mathbf{H}_3^*(\alpha, 0, \mathbf{w})$, $\mathbf{H}_4^*(\alpha, 0, 0)$ и $\mathbf{H}_5^*(\alpha, 0, 0)$.

Матрица $\mathbf{H}_1^*(\alpha, 0, 0)$ (2.18) для рассматриваемого манипулятора, согласно (4.2) – (4.6), имеет следующие элементы:

$$\mathbf{H}_1^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0) = \begin{pmatrix} l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 \sin \alpha_2 - \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) & \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 0 & l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & -\xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Вектором скорости движения произвольной точки второго звена (в том числе схвата при $\xi = l_2$) абсолютно жёсткой модели манипулятора, согласно (2.17), является $\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0) \dot{\alpha}$ или в проекциях

$$\begin{aligned} v_{1,\varphi} &= \dot{\alpha}_1 [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)], \\ v_{1,r} &= -\dot{\alpha}_2 l_1 \sin \alpha_2 - \xi (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_3) \sin(\alpha_2 - \alpha_3), \\ v_{1,z} &= \dot{\alpha}_2 l_1 \cos \alpha_2 + \xi (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_3) \cos(\alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Определим вектор \mathbf{v}_2 (2.17) скорости движения манипулятора с помощью матриц $\mathbf{H}_2^*(\alpha, \beta, 0)$ (2.19) и $\mathbf{H}_4^*(\alpha, 0, 0)$ (2.21). Проведя необходимые вычисления, с учётом (4.1) - (4.6), получим:

$$\mathbf{H}_2^*(\alpha, \beta, 0) = \begin{pmatrix} H_{2(1.1)}^* & 0 & 0 \\ 0 & H_{2(2.2)}^* & H_{2(2.3)}^* \\ 0 & H_{2(3.2)}^* & H_{2(3.3)}^* \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned}
H_{2(1.1)}^* &= [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
H_{2(2.2)}^* &= [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \\
H_{2(2.3)}^* &= -\beta_2 \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - \beta_3 \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \\
H_{2(3.2)}^* &= [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
H_{2(3.3)}^* &= -\beta_2 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)
\end{aligned}$$

Аналогичными вычислениями определим элементы матрицы $\mathbf{H}_4^*(\mathbf{a}, 0, 0)$.

$$\mathbf{H}_4^*(\mathbf{a}, 0, 0) = \begin{pmatrix} l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) & \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 0 & -l_1 \cos \alpha_2 - \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & -\xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Проекции вектора скорости \mathbf{v}_2 движения манипулятора, обусловленные упругостью соединительных узлов O_0 и O_1 (фиг. 2), согласно (2.17), (2.19), (2.21), (4.9), (4.10), с точностью до ε^2 имеют вид:

$$\begin{aligned}
v_{2,\varphi} &= \left\{ [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right\} \dot{\alpha}_1 + \\
&+ [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \dot{\beta}_1 \\
v_{2,r} &= \left\{ [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \right\} \dot{\alpha}_2 - \\
&- \xi (\beta_2 + \beta_3) \dot{\alpha}_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \dot{\beta}_2 + \xi \dot{\beta}_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
v_{2,z} &= \left\{ [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right\} \dot{\alpha}_2 - \\
&- \xi (\beta_2 + \beta_3) \dot{\alpha}_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \dot{\beta}_2 - \xi \dot{\beta}_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3)
\end{aligned} \quad (4.11)$$

Для определения вектора скорости \mathbf{v}_3 (2.17) вычислим элементы матрицы $\mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0, \mathbf{w})$ и $\mathbf{H}_5^*(\mathbf{a}, 0, 0)$ согласно (2.20), (2.22), (4.1) - (4.6):

$$\mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} -w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & -w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 0 & -w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) & w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Аналогичными вычислениями получим элементы обобщённой матрицы $\mathbf{H}_5^*(\mathbf{a}, 0, 0)$

$$\mathbf{H}_5^*(\mathbf{a}, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Проекции вектора скорости \mathbf{v}_3 (2.17) движения манипулятора, обусловленного упругостью второго звена (фиг. 2), согласно (2.17), (4.12) и (4.13), имеют вид:

$$\begin{aligned}
v_{3,\varphi} &= -\dot{\alpha}_1 w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3), \\
v_{3,r} &= w_3(t, \xi)(\dot{\alpha}_3 - \dot{\alpha}_2) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - \dot{w}_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
v_{3,z} &= w_3(t, \xi)(\dot{\alpha}_3 - \dot{\alpha}_2) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \dot{w}_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Следовательно, проекции вектора скорости движения манипулятора с обобщённой упругостью определяются следующими выражениями (3.12), (4.8), (4.11), (4.14):

$$\begin{aligned}
v_\varphi &= v_{1,\varphi} + v_{2,\varphi} + v_{3,\varphi} = \left\{ \left[l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \right. \\
&+ l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \left. \right\} \dot{\alpha}_1 + \\
&+ \left[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \dot{\beta}_1 \\
v_r &= v_{1,r} + v_{2,r} + v_{3,r} = \left\{ \left[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \beta_2 + \beta_3 \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - \right. \\
&- l_1 \sin \alpha_2 - \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \left. \right\} \dot{\alpha}_2 + \\
&+ \left[\xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \xi(\beta_2 + \beta_3) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \dot{\alpha}_3 + \\
&+ \left[l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \dot{\beta}_2 + \xi \dot{\beta}_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \dot{w}_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
v_z &= v_{1,z} + v_{2,z} + v_{3,z} = \left\{ \left[l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \right. \\
&+ l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \left. \right\} \dot{\alpha}_2 + \\
&+ \left[w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - \xi(\beta_2 + \beta_3) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \dot{\alpha}_3 - \\
&- \left[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \dot{\beta}_2 - \xi \dot{\beta}_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + \dot{w}_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Заключение. В рамках общей математической модели многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и упругими звеньями с применением линейной теории упругости параллельно приводятся результаты исследования кинематики движения как в декартовых, так и в криволинейной системах координат. Предложенный приближённый способ исследования в обоих случаях позволяет представить кинематические величины движения манипулятора в виде суммы трёх слагаемых, которые характеризуют кинематику движения манипулятора как с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами, так и с упругими узлами и упругими звеньями. Результаты исследования показывают возможность применения различных систем координат при изучении движений упругого манипулятора, эффективность которых зависит как от конструкции, так и от технологического предназначения робота.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.
2. Акуленко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоским движением упругого звена манипулятора. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №5. С.33-41.
3. Болотник Н.Н., Гукасян А.А. Управление движением манипулятора с учётом упругих колебаний струны. //Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №4. С.38-46.
4. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управляемом вращении упругого стержня. //ПММ. 1982. Т.46. Вып.4. С.587-595.

5. Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Грудев А.И., Черноусько Ф.Л. О влиянии упругой податливости конструкции роботов на их динамику. //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №3. С.63-71.
6. Гукасян А.А. Кинематика многозвенного манипулятора с упругим последним звеном. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.79-87.
7. Мачкалян Р.Н. Одна задача кинематического управления движением схвата двухзвенного манипулятора с упругими соединительными узлами. //АГПУ. Ученые записки. №2. 2005. С.13-19.
8. Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №3. С.68-83.
9. Гукасян А.А. Кинематика упругого манипулятора в криволинейной системе координат. //Доклады НАН РА. 2014. Т.114. №3. С.222-229.
10. Гукасян А.А., Мачкалян Р.Н. Кинематика движения манипулятора с упругими соединительными узлами в криволинейной системе координат. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.114-120.
11. К.Фу, Р. Гонсалес, К.Ли. Робототехника. / Перевод с английского под ред. доктора техн.наук В.Г. Градецкого. Мир, 1989. 620 с.
12. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004. 478 с.
13. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961. 824 с.
14. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть I. М.: Наука, 1967. 467с.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апрегович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
Е-mail: ghukasyan10@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.11.2014

УДК 532:629

**ОБ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЕ ПРИ
ЗАДАННОМ РЕЖИМЕ ДАВЛЕНИЯ**

Аветисян С.А., Мкртчян М.М.

Բանալի բառեր: Կայունացած ֆիլտրացիա, ֆիլտրացիայի գործակից, էքսպոնենցիալ անհամասեռ ծակոտկեն շերտ, արագություն, ճնշում, հեղուկի ծախս:

Ключевые слова. Установившаяся фильтрация, коэффициент фильтрации, пористая экспоненциально неоднородная полоса, скорость, давление, расход жидкости.

Key words. Steady filtration, filtration coefficient, inhomogeneous porous exponentially strip, speed, pressure, fluid flow rate.

Բնիկյան Ս.Ա., Մկրտչյան Մ.Մ.

**Ճնշման տրված ռեժիմի դեպքում ծակոտկեն էքսպոնենցիալ օրենքով անհամասեռ շերտերում
հեղուկի կայունացած ֆիլտրացիայի մասին**

Շերտի կայունացած ֆիլտրացիայի հարթ տեսության շրջանակներում դիտարկվում է հեղուկի ֆիլտրացիան ծակոտկեն գրունտային շերտում, որի ֆիլտրացիայի գործակիցը ըստ շերտի խորության փոփոխվում է էքսպոնենցիալ օրենքով: Ընդ որում հեղուկը շերտի վերին եզրի հատվածների համակարգից տրված ճնշման տակ ներարկվում է շերտին: Որոշվում են խնդրի ֆիլտրացիոն բնութագրիչները:

Avetisyan S.A., Mkrtychyan M.M.

**About the fluid stabilized filtration in porous nonhomogeneous strip
by exponential law in case of the given regim pressure**

In the framework of plane theory of fluid tablished filtration the boundary problem on fluind filtration in porous ground strip, the coefficient of which along the depth of the strip changes by exponential law, is considered. In this case by the system of the segments of the upper bound of the strip under the given pressure the fluid inject into the ground strip, and the lower bound of the strip is water-impermeable. Filtration characteristics of the problem are determined.

В рамках плоской теории установившейся фильтрации жидкости рассматривается граничная задача о фильтрации жидкости в пористой грунтовой полосе, коэффициент фильтрации которой по глубине полосы изменяется по экспоненциальному закону. При этом, жидкость через систему отрезков верхней грани полосы под заданным давлением впрыскивается во внутрь грунтовой полосы, а нижняя грань полосы водонепроницаема. Определяются фильтрационные характеристики задачи.

Введение

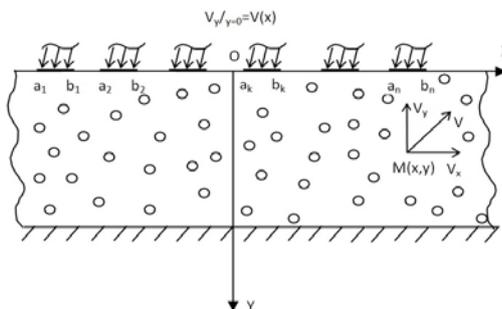
Строгая математическая теория фильтрации жидкости в недеформируемых пористых грунтовых массивах с многочисленными её приложениями обстоятельно изложена в монографиях [1–3], а основные достижения этой многогранной и обширной области механики сплошных сред до 1967г. отражены в коллективной монографии [4]. В недавних работах [5,6] развиты математические модели консолидации водонасыщенных пористых сред и установлены соотношения между теориями фильтрации и консолидации почв, которые приводят к новым задачам теории фильтрации. В монографии [7] изложены методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах. Задача напорной фильтрации жидкости под гидротехническими сооружениями типа плотины при плоском установившемся течении жидкости в пористом грунтовом слое, коэффициент фильтрации которого по глубине слоя изменяется по экспоненциальному закону, изучена в [8]. По этим же предположениям в работе [9] рассмотрена граничная задача об установившейся фильтрации жидкости в пористом грунтовом основании в форме полосы, когда жидкость через систему взаимно непересекающихся отрезков верхней грани полосы

с заданной вертикальной скоростью впрыскивается во внутрь полосы, а на нижней грани полосы вертикальная компонента скорости равна нулю. В работах [10,11] исследованы аналогичные плоские и пространственные граничные задачи теории установившейся фильтрации для пористых клиновидных и слоистых грунтовых оснований.

В настоящей работе решается обратная к рассмотренной в [9] граничная задача: каков должен быть закон распределения вертикальных скоростей впрыскиваемой жидкости на данной системе отрезков, чтобы на этой же системе отрезков давление равнялось наперёд заданной величине в виде известной функции. Решение этой задачи на основании результатов работы [9] сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ). Через решение определяющего СИУ вычисляются фильтрационные характеристики задачи: распределение вертикальной компоненты скорости на данных отрезках и расходы жидкости через вертикальные сечения полосы. Проведён численный анализ задачи. Отметим, что рассматриваемая здесь задача по своей постановке близка к известной задаче Ламба в гидродинамике [12] и тесно примыкает как в идейном, так и в методологических аспектах, к контактными и смешанным задачам теории упругости. В принципе, можно установить соответствие между граничными задачами теории установившейся фильтрации жидкости в пористых средах и граничными задачами из довольно широкого класса задач теории упругости при антиплоской деформации. Конкретно в данном случае можно рассматривать аналогичную задачу для упругой полосы теории упругости при антиплоской деформации, если модуль сдвига полосы по её глубине изменяется по экспоненциальному закону.

Следует подчеркнуть, что в цитированных выше работах [1–7] для решения граничных задач теории фильтрации, в основном, применяются методы теории функции комплексного переменного, особенно метод конформных отображений, аналитической теории дифференциальных уравнений, метод годографа скорости и разнообразные приближённые методы. Здесь, а также в работах [8–11], применяются методы интегральных преобразований в сочетании с методами теории интегральных уравнений, особенно методы СИУ. Эти методы более эффективны, так как сразу определяют нужные физические характеристики задач, более компактны и многие компьютерные вычислительные программы приурочены к методам интегральных уравнений.

1. Постановка задачи и вывод определяющего СИУ. Пусть отнесённый к прямоугольной системе координат Oxy (ось Oy направлена вертикально вниз) пористое грунтовое основание имеет форму полосы



Фиг. 1

$\Omega = \{-\infty < x < \infty ; 0 < y < H\}$ высоты H (фиг.1) и обладает коэффициентом фильтрации k , изменяющимся по вертикальной координате y по экспоненциальному закону

$$k = k(y) = k_0 \exp(\alpha y/2) \quad (0 \leq y \leq H; k_0, \alpha = \text{const})$$

Пусть далее грань $y = H$ полосы Ω водонепроницаема, т.е. вертикальная компонента скорости при $y = H$ равна нулю: $v_y|_{y=H} = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$, а через систему отрезков $L = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]$ верхней грани $y = 0$ жидкость с заданным

давлением

$$h(x, y)|_{y=0} = f(x) \quad (x \in L) \quad (1)$$

впрыскивается во внутрь грунтового основания.

Здесь $h = h(x, y) = p(x, y)/\gamma - y$ – пьезометрическое давление, γ – удельный вес жидкости, $p(x, y)$ – давление в жидкости, а $f(x)$ – наперёд заданная известная функция.

Требуется определить вертикальную компоненту скорости $v(x)$ на системе отрезков L :

$$v_y|_{y=0} = v(x) \quad (x \in L).$$

Для полноты постановки задачи должен быть задан также расход жидкости Q_j на каждом отрезке $[a_j, b_j]$ ($j = \overline{1, n}$) системы L :

$$\int_{a_j}^{b_j} v(s) ds = Q_j \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2)$$

Приступим к выводу определяющего интегрального уравнения поставленной задачи. С этой целью воспользуемся полученным в [9] выражением для пьезометрического давления через функцию $v(x)$ ($\lambda_* = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2}$):

$$h(x, y) = \frac{e^{-\alpha y/2}}{2\pi k_0} \int_L K_* (|x-s|, y) v(s) ds \quad (-\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq H) \quad (3)$$

$$K_* (|x-s|, y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos[\lambda(x-s)]}{\lambda^2 \text{sh}(\lambda_* H/2)} \left\{ \lambda_* \text{ch} \left[\frac{\lambda_* (H-y)}{2} \right] - \alpha \text{sh} \left[\frac{\lambda_* (H-y)}{2} \right] \right\} d\lambda$$

где λ – спектральный параметр Фурье.

Теперь, исходя из (3), реализуем граничное условие (1). В результате, относительно функции $v(x)$ придём к следующему определяющему интегральному уравнению Фредгольма первого рода поставленной задачи:

$$\frac{1}{2\pi k_0} \int_L K (|x-s|) v(s) ds = f(x) \quad (x \in L) \quad (4)$$

$$K(x) = \int_0^{\infty} \left[\lambda_* \text{cth}(\lambda_* H/2) - \alpha \right] \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda^2} d\lambda$$

Решение интегрального уравнения (4) должно удовлетворять условиям (2).

Далее интегральное уравнение (4) сведём к СИУ, для чего обе части (4) продифференцируем по x . В результате, придём к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi k_0} \int_L M(s-x) v(s) ds = f'(x) \quad (x \in L) \quad (5)$$

$$M(x) = -K'(x) = \int_0^\infty \left[\lambda_* \operatorname{cth} \left(\frac{\lambda_* H}{2} \right) - \alpha \right] \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} d\lambda \quad \left(\lambda_* = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2} \right)$$

Теперь выделим сингулярную часть ядра $M(x)$. Так как

$$\lambda_* = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2} = 2\lambda \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\lambda^2} \right)^{1/2} = 2\lambda \left(1 + \frac{\alpha^2}{8\lambda^2} + \dots \right) \sim 2\lambda \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

то

$$\frac{\lambda_* \operatorname{ctg}(\lambda_* H/2) - \alpha}{\lambda} = \frac{\lambda_* \operatorname{cth}(\lambda_* H/2) - \alpha}{\lambda} \sim \frac{2\lambda}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} = 2 - \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

интеграл Фурье для функции $M(x)$ из (5) можем преобразовать следующим образом:

$$M(x) = \int_0^\infty \left[\frac{\lambda_* \operatorname{cth}(\lambda_* H/2) - \alpha}{\lambda} - 2 + \frac{\alpha}{\lambda} \right] \sin(\lambda x) d\lambda + \int_0^\infty \left[2 - \frac{\alpha}{\lambda} \right] \sin(\lambda x) d\lambda,$$

где интегралы, вообще говоря, следует понимать в смысле теории обобщённых функций [13]. Приняв во внимание выражения известных интегралов Фурье из [14]

$$\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sign} \lambda e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{2i}{x}, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda} d\lambda = i\pi \operatorname{sign} x,$$

можем написать

$$M(x) = \frac{2}{x} - \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sign} x + N(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (6)$$

$$N(x) = \int_0^\infty \frac{\lambda_* \operatorname{cth}(\lambda_* H/2) - 2\lambda}{\lambda} \sin(\lambda x) d\lambda.$$

Учитывая (6), уравнение (5) представим в виде

$$\frac{1}{\pi k_0} \int_L \left[\frac{1}{s-x} + \frac{\alpha\pi}{4} \operatorname{sign}(s-x) + \frac{1}{2} N(s-x) \right] v(s) ds = f'(x). \quad (x \in L) \quad (7)$$

Итак, решение обсуждаемой задачи сводится к решению СИУ (7) при условиях (2). Отметим, что в СИУ (7) ядро представлено суммой сингулярной (ядра Коши) и регулярной частей.

Введём безразмерные величины:

$$\xi = x/a; \quad \eta = s/a; \quad \bar{\alpha} = \alpha a; \quad \hat{H} = H/a;$$

$$\alpha_j = a_j/a, \quad \beta_j = b_j/a \quad (j = \overline{1, n}); \quad L_0 = \bigcup_{j=1}^n [\alpha_j, \beta_j]; \quad \sigma = a\lambda$$

$$v_0(\xi) = v(a\xi)/k_0, \quad f_0(\xi) = f'(a\xi);$$

В этих безразмерных величинах СИУ (7) преобразуется в следующее СИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} \left[\frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\bar{\alpha}\pi}{4} \operatorname{sign}(\eta - \xi) + \frac{1}{2} N_0(\eta - \xi) \right] v_0(\eta) d\eta = f_0(\xi) \quad (\xi \in L_0) \quad (8)$$

$$N_0(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_* \operatorname{cth}(\sigma_* \hat{H}/2) - 2\sigma}{\sigma} \sin(\sigma \xi) d\sigma \quad (\sigma_* = \sqrt{\bar{\alpha}^2 + 4\sigma^2})$$

а условия (2) – в условия

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} v_0(\eta) d\eta = Q_j^0 \quad \left(Q_j^0 = \frac{Q_j}{ak_0}; j = \overline{1, n} \right), \quad (9)$$

где a – некий характерный линейный параметр, отличный от нуля, например, $a = a_1$, если $a_1 \neq 0$.

Таким образом, окончательно, решение поставленной граничной задачи сводится к решению определяющего СИУ (8) при условиях (9).

2. Решение определяющего СИУ и вычисление фильтрационных характеристик. Известным численно-аналитическим методом решения СИУ [15–17] решение СИУ (8)–(9) сведём к системе систем линейных алгебраических уравнений. С этой целью сначала каждый отрезок $[\alpha_j, \beta_j]$ системы L_0

преобразуем в отрезок $[-1, 1]$, полагая

$$\xi = \frac{\beta_j - \alpha_j}{2} t + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2}; \quad \eta = \frac{\beta_j - \alpha_j}{2} u + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2} \quad (-1 \leq u, t \leq 1; j = \overline{1, n}).$$

В результате, СИУ (8) преобразуется в следующую систему СИУ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_j(u) du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^n \int_{-1}^1 \left[R_{jp}(u, t) + \frac{\pi \bar{\alpha} (\beta_p - \alpha_p)}{8} S_{jp}(u, t) + \right. \\ \left. + \frac{\beta_p - \alpha_p}{4} N_{jp}(u, t) \right] v_p(u) du = f_j(t) \quad (j = \overline{1, n}; -1 < t < 1) \end{aligned} \quad (10)$$

а условия (9) – в следующие условия:

$$\int_{-1}^1 v_j(u) du = \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} Q_j^0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (11)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned} R_{jp}(u, t) &= \left[u - \frac{\beta_j - \alpha_j}{\beta_p - \alpha_p} t + \frac{\beta_p + \alpha_p}{\beta_p - \alpha_p} - \frac{\beta_j - \alpha_j}{\beta_p - \alpha_p} \right]^{-1}; \\ S_{jp}(u, t) &= \operatorname{sign} \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} u - \frac{\beta_p - \alpha_p}{2} t + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2} - \frac{\beta_p + \alpha_p}{2} \right); \quad (j, p = \overline{1, n}) \\ N_{jp}(u, t) &= \int_0^{\infty} \frac{\sigma_* \operatorname{cth}(\sigma_* H_0/2) - 2\sigma}{\sigma} \times \\ &\times \sin \left[\sigma \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} u - \frac{\beta_p - \alpha_p}{2} t + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2} - \frac{\beta_p + \alpha_p}{2} \right) \right] d\sigma; \\ &(\sigma_* = \sqrt{\alpha^2 + 4\sigma^2}) \quad (j, p = \overline{1, n}) \quad (-1 < t, u < 1) \end{aligned} \quad (12)$$

$$v_j(t) = v_0 \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} t + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2} \right), \quad f_j(t) = f_0 \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} t + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2} \right) \quad (j = \overline{1, n})$$

Далее положим

$$v_j(t) = \frac{\varphi_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < t < 1; \quad j = \overline{1, n}), \quad (13)$$

где $\varphi_j(t)$ – функции из гельдеровского класса функций, определённых на отрезке $[-1, 1]$. Следуя известной методике [15–17], систему СИУ (10)–(12) сведём к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^N \frac{X_m^{(j)}}{N(u_m - t_r)} + \sum_{\substack{p=1 \\ (p \neq j)}}^n \sum_{m=1}^N \frac{X_m^{(p)}}{N} [R_{jp}(u_m, t_r) + \\ \frac{\pi \bar{\alpha}(\beta_p - \alpha_p)}{8} S_{jp}(u_m, t_r) + \frac{\beta_p - \alpha_p}{4} N_{jp}(u_m, t_r)] = f_j(t_r) \quad (j = \overline{1, n}; \quad r = \overline{1, N-1}) \\ \sum_{m=1}^N \frac{\pi}{N} X_m^{(j)} = \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} Q_j^0 \quad (j = \overline{1, n}) \end{array} \right. \quad (14)$$

откуда определяются неизвестные

$$X_m^{(j)} = \varphi_j(u_m) \quad (j = \overline{1, n}; \quad m = \overline{1, N})$$

где N – любое натуральное число, а

$$u_m = \cos \left[\frac{\pi(2m-1)}{2N} \right] \quad (m = \overline{1, N}), \quad t_r = \cos \left(\frac{\pi r}{N} \right) \quad (r = \overline{1, N-1})$$

– чебышевские узлы, т.е. корни, соответственно, многочленов Чебышева первого рода $T_N(u)$ и второго рода $U_{N-1}(t)$.

Очевидно, что система систем линейных уравнений (13) состоит из nN числа уравнений и содержит столько же неизвестных.

После решения системы (14), согласно (13), величины безразмерных скоростей на j -том отрезке верхней грани полосы в чебышевских узлах u_m будут определяться по формуле

$$v_j(u_m) = \frac{\varphi_j(u_m)}{\sqrt{1-u_m^2}} = \frac{X_m^{(j)}}{\sqrt{1-u_m^2}} \quad (m = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, n}) \quad (15)$$

Теперь можно вычислить также важную фильтрационную характеристику задачи – расход жидкости $Q(x)$ через любое поперечное сечение $l_x = \{0 \leq y \leq H\}$ ($-\infty < x < \infty$) полосы, выражающийся формулой [4]

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_L \text{sign}(x-s) v(s) ds \quad (-\infty < x < \infty)$$

В этой формуле, как и выше, перейдём к безразмерным величинам:

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a; \quad v_0(\xi) = v(a\xi)/k_0, \quad Q_0(\xi) = Q(a\xi)/ak_0$$

В результате, получим

$$Q_0(\xi) = \frac{1}{2} \int_{L_0} \text{sign}(\xi - \eta) v_0(\eta) d\eta \quad (-\infty < \xi < \infty) \quad (16)$$

Если далее каждый отрезок $[\alpha_j, \beta_j]$ ($j = \overline{1, n}$) системы L_0 , как и выше, преобразовать в отрезок $[-1, 1]$, то формула (16) примет вид:

$$Q_0(\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j - \alpha_j}{4} \int_{-1}^1 \text{sign}\left(\xi - \frac{\beta_j - \alpha_j}{2} u - \frac{\beta_j + \alpha_j}{2}\right) v_j(u) du,$$

где функции $v_j(t)$ задаются формулой (13). Отсюда при помощи решения системы (14) придём к следующей расчётной формуле:

$$Q_0(\xi) = \frac{\pi}{4N} \sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j) \sum_{m=1}^N \text{sign}\left(\xi - \frac{\beta_j - \alpha_j}{2} u_m - \frac{\beta_j + \alpha_j}{2}\right) X_m^{(j)} \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

3. Частный случай, числовые результаты и выводы. Рассмотрим частный случай, когда $n = 1$ и, следовательно, система L состоит из одного отрезка $[a_1, b_1]$. Примем также $a_1 = -a$, $b_1 = a$. В этом случае определяющее СИУ задачи имеет вид (7), где $L = [-a, a]$, а после перехода к безразмерным величинам, согласно (8), – вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\bar{\alpha}\pi}{4} \text{sign}(\eta - \xi) + \frac{1}{2} N_0(\eta - \xi) \right] v_0(\eta) d\eta = f_0(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (17)$$

В данном частном случае имеем только одно условие (2):

$$\int_{-a}^a v(s) ds = Q,$$

которое в безразмерных величинах преобразуется в условие

$$\int_{-1}^1 v_0(\eta) d\eta = \bar{Q}_0 \quad (\bar{Q}_0 = Q/ak_0). \quad (18)$$

Теперь СИУ (17)–(18) по известной процедуре, как выше, можно свести к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^N \frac{1}{N} \left[\frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \frac{\bar{\alpha}\pi}{4} \text{sign}(\eta_m - \xi_r) + \frac{1}{2} N_0(\eta_m - \xi_r) \right] X_m = f_0(\xi_r) \quad (r = \overline{1, N-1}) \\ \sum_{m=1}^N \frac{\pi}{N} X_m = \bar{Q}_0 \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\eta_m = \cos \left[\frac{\pi(2m-1)}{2N} \right] \quad (m = \overline{1, N}); \quad \xi_r = \cos \left(\frac{\pi r}{N} \right) \quad (r = \overline{1, N-1})$$

и приняты обозначения

$$v_0(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (-1 < \xi < 1); \quad X_m = \varphi(\eta_m).$$

Функция $\Phi(\xi)$ определена на отрезке $[-1,1]$ и удовлетворяет условию Гельдера.

Систему линейных уравнений можем записать в канонической форме:

$$\sum_m^N K_{rm} X_m = c_r \quad (r = \overline{1, N}), \quad c_r = \begin{cases} f_0(\xi_r) & (r = \overline{1, N-1}); \\ Q_0 & (r = N) \end{cases}$$

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[\frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \frac{\bar{\alpha}\pi}{4} \text{sign}(\eta_m - \xi_r) + \frac{1}{2} N_0(\eta_m - \xi_r) \right] & (m = \overline{1, N}; r = \overline{1, N-1}); \\ \frac{\pi}{N} & (m = \overline{1, N}; r = N) \end{cases} \quad (20)$$

После решения системы (20) для вычисления безразмерных скоростей вместо (15) будем иметь расчётную формулу

$$v(\eta_m) = \frac{\Phi(\eta_m)}{\sqrt{1-\eta_m^2}} = \frac{X_m}{\sqrt{1-\eta_m^2}} \quad (m = \overline{1, N}), \quad (21)$$

а, согласно (16), в данном частном случае

$$Q_0(\xi) = \frac{\pi}{2N} \sum_{m=1}^N \text{sign}(\xi - \eta_m) X_m \quad (-\infty < \xi < \infty) \quad (22)$$

В данном частном случае по формуле (3) вычислим также пьезометрическое давление на нижнюю грань $y = H$ полосы Ω $(-\infty < x < \infty; \lambda_* = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2})$:

$$h(x, H) = \frac{e^{-\alpha H/2}}{2\pi k_0} \int_{-a}^a K_*(|x-s|, H) v(s) ds = \frac{e^{-\alpha H/2}}{2\pi k_0} \int_{-a}^a v(s) ds \int_0^\infty \frac{\cos[\lambda(x-s)] \lambda_* d\lambda}{\lambda^2 \text{sh}(\lambda_* H/2)}$$

Отсюда, после перехода к безразмерным величинам

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a; \quad v_0(\xi) = v(a\xi)/k_0,$$

$$h_0(\xi, \hat{H}) = h(a\xi, H)/a, \quad \hat{H} = H/a,$$

получим

$$h_0(\xi, \hat{H}) = \frac{e^{-\bar{\alpha}\hat{H}/2}}{2\pi} \int_{-1}^1 v_0(\eta) d\eta \int_0^\infty \frac{\sigma_* \cos[\sigma(\xi - \eta)]}{\sigma^2 \text{sh}(\sigma_* \hat{H}/2)} d\sigma$$

$$(-\infty < \xi < \infty; \sigma_* = \sqrt{\bar{\alpha}^2 + 4\sigma^2})$$

Для производной же от безразмерного пьезометрического давления будем иметь:

$$\frac{dh_0(\xi, \hat{H})}{d\xi} = -\frac{e^{-\bar{\alpha}\hat{H}/2}}{2\pi} \int_{-1}^1 v_0(\eta) d\eta \int_0^\infty \frac{\sigma_* \sin[\sigma(\xi - \eta)]}{\sigma \text{sh}(\sigma_* \hat{H}/2)} d\sigma \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

и, следовательно, приняв во внимание (21), можем записать

$$\frac{dh_0(\xi, \hat{H})}{d\xi} = -\frac{e^{-\bar{\alpha}\hat{H}/2}}{2N} \sum_{m=1}^N X_m \int_0^\infty \frac{\sigma_* \sin[\sigma(\xi - \eta_m)]}{\sigma \text{sh}(\sigma_* \hat{H}/2)} d\sigma. \quad (23)$$

Таким образом, в обсуждаемом частном случае расчётными формулами будут формулы (21)-(23). Для численной реализации этих формул рассмотрены два частных случая.

I случай. В этом случае принято, что

$$h(x, y)|_{y=0} = f(x) = \text{const} \quad (-a < x < a)$$

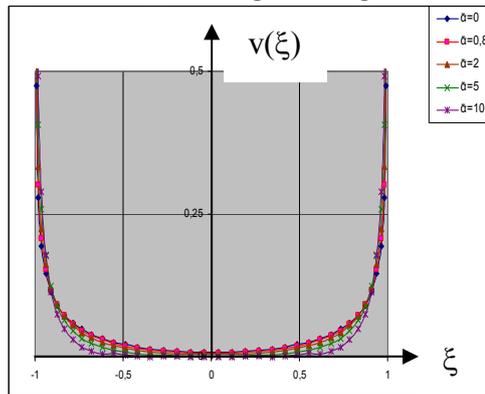
т.е. на интервале $(-a, a)$ заданное давление постоянно и, следовательно, $f_0(\xi) \equiv 0$.

Кроме того, принято $\bar{Q}_0 \equiv 0,1$; $\hat{H} = 0,5$.

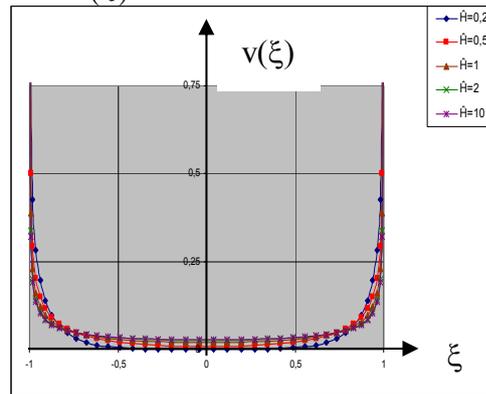
Для таких значений параметров по формуле (21) при различных значениях параметра неоднородности $\bar{\alpha}$ вычислены значения скорости $v(\xi)$ и по ним построены графики её изменения (фиг.2). Анализ этих кривых показывает, что в центральной части интервала $(-1,1)$ по мере возрастания $\bar{\alpha}$ значения $v(\xi)$ убывают, а вблизи его концов, наоборот, они возрастают, причём при $\xi \rightarrow +1$ скорости во всех случаях круто возрастают, стремясь к бесконечности. На фиг.3 приведены графики изменения $v(\xi)$ для различных значений приведённой высоты \hat{H} , когда

$$f_0(\xi) \equiv 0; \quad \bar{\alpha} = 0,5; \quad \bar{Q}_0 \equiv 0,1$$

Здесь наблюдается обратная картина изменения $v(\xi)$.



фиг. 2



фиг. 3

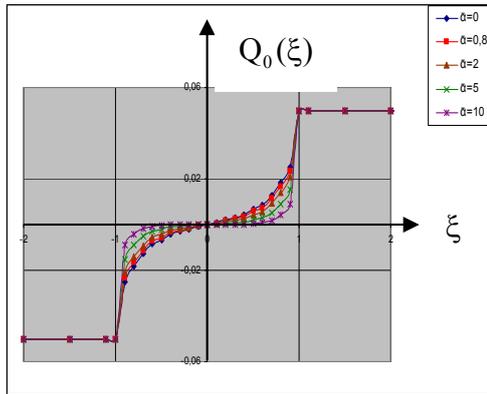
Далее по формуле (22) вычислены значения безразмерного расхода жидкости по вертикальным сечениям полосы \hat{H} для различных $\bar{\alpha}$, когда

$$f_0(\xi) \equiv 0; \quad \bar{Q}_0 \equiv 0,1; \quad \hat{H} = 0,5.$$

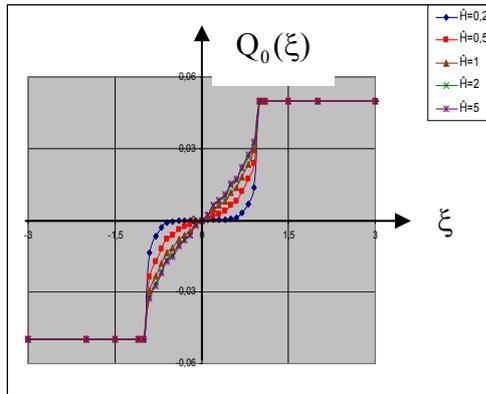
По результатам вычислений построены графики изменения $Q_0(\xi)$ (фиг. 4). Здесь по мере возрастания $\bar{\alpha}$ значения $Q_0(\xi)$ в интервале $(-1,1)$ по абсолютной величине убывают, а на лучах $(-\infty, 1)$ и $(1, \infty)$ постоянны, отличаясь друг от друга лишь знаком. На фиг.5 приведены графики $Q_0(\xi)$ для различных \hat{H} , когда

$$f_0(\xi) \equiv 0; \quad \bar{\alpha} = 0,5; \quad \bar{Q}_0 \equiv 0,1$$

Здесь в зависимости от \hat{H} наблюдается обратная картина изменения $Q_0(\xi)$.

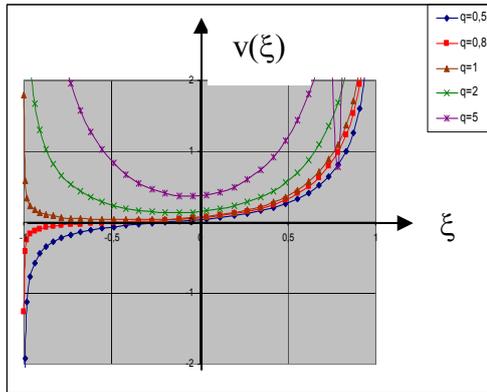


фиг. 4

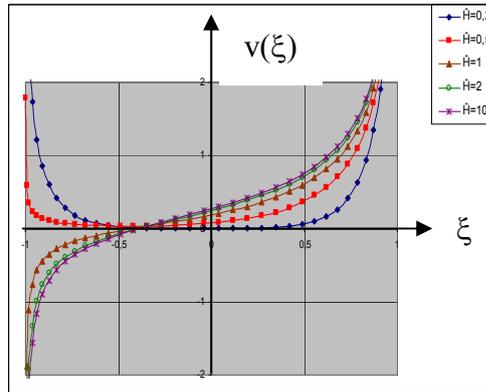


фиг. 5

II случай. В этом случае принято $f(x) \equiv \beta x$ и соответственно положено $f_0(\xi) \equiv 1$. При фиксированных $\hat{H} = 0,5$ и $\bar{\alpha} = 0,5$ и для различных $q = \bar{Q}_0$ построены графики скорости $v(\xi)$ изменения (фиг. 6).

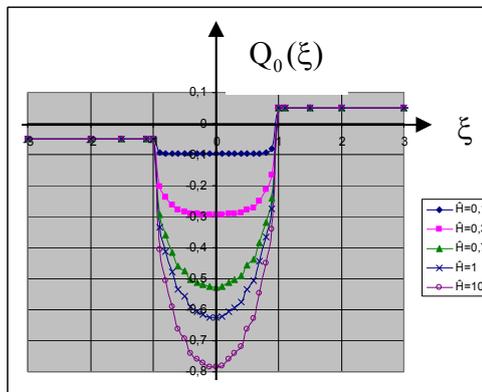


фиг. 6



фиг. 7

Здесь при возрастании $q = \bar{Q}_0$ значения $v(\xi)$ возрастают, причем в интервале $(-1, 0)$ они изменяют знак, становясь положительными с постепенным возрастанием. При $\xi \rightarrow \pm 1$ скорости бесконечно возрастают.



фиг. 8

На фиг.7 приведены графики изменения $v(\xi)$ при фиксированных $\bar{\alpha} = 0,5$; $q = \bar{Q}_0 = 0,1$, но для различных \hat{H} . Здесь также при возрастании \hat{H} в интервале $(-1,0)$ скорости меняют знак. На фиг.8 показаны графики изменения $Q_0(\xi)$ для различных \hat{H} .

4. Заключение. Основными результатами данной работы являются явные представления фильтрационных характеристик рассматриваемой задачи: пьезометрического давления, компонент скоростей, расхода жидкости и выявление закономерностей их изменения в довольно широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров, в том числе, показателя неоднородности грунтового основания. Одновременно в рассматриваемой задаче показана эффективность метода интегральных уравнений, который успешно может быть применён для решения широкого класса смежных граничных задач теории фильтрации и теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Фильчаков П.Ф. Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. Т.1–2. Киев: Изд. АН УССР, 1959–1960. 308с., 256с.
4. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М.: Наука, 1969. 546с.
5. Булавацкий В.М. Математические модели консолидации водонасыщенных пористых сред и нагруженные дифференциальные уравнения. // [Компьютерная математика](#). 2011. Вып.2. С.13–20.
6. Strzelecki T., Strzelecki M., Cuprum K. Relation between filtration and soil consolidation theories. // *Studia Geotechnica et Mechanica*. Vol. 37. №1. 2015. Pp.105–114.
7. Барсегян Р.М. Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1977. 303 с.
8. Tokmajyan H.V., Mkhitaryan S.M., Grigoryan M.S. On two Plane Problems Steady-State Fluid Filtration in Porous Heterogeneous Soil Laer. // *Proceedings of 3rd International Conference on Contemporary Problems in Architecture and Construction*. November 20-24, 2011, Beijing, China. Edited by Guo-hua SONG, Lin-an LIU, Tao CHEN and Fei LI, p. 2-14–2-19.
9. Аветисян С.А. О двух смежных граничных задачах теории фильтрации и теории упругости для экспоненциально неоднородной полосы. МЕХАНИКА-2013. //Труды межд. Школы-конференции молодых учёных, посвящ. 70-летию НАН Армении. 1–4 октября 2013, Цахкадзор, Армения. Ереван-2013, с.40-44.
10. Григорян М.С. О двух смежных граничных задачах теории фильтрации и теории упругости для клиновидной области. МЕХАНИКА-2013. //Труды Межд. Школы-конференции молодых учёных, посвящ. 70-летию НАН Армении. 1–4 октября 2013, Цахкадзор, Армения. Ереван-2013, с.129-133.
11. Мхитарян С.М., Токмаджян О.В., Шемян Л.А., Григорян М.С. О двух пространственных задачах теории установившейся фильтрации жидкости в пористом грунтовом слое конечной или бесконечной мощности. //Изв. ЕрГУАС. 2013. №2. С.46–57.
12. Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
13. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 327 с.
14. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщённых функций. М.: Наука, 1977. 288 с.

15. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
16. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis an solution of crack problems, pp.368-425, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
17. Theocaris P.S., Iokimidis N.I. Numerical Integration Methods for the Solution of singular Integral Equations. //Quart. Appl Math., vol. XXXV, №1, pp.173-185, 1977.

Сведения об авторах:

Аветисян Сирануш Араратовна,

Мл. науч. сотрудник, Институт механики НАН Армении,

Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, ИМех. НАН РА

Тел.: (37494)-99-98-42; **E-mail:** ashonik@rambler.ru

Мкртчян Мгер Мушегович,

Мл. науч. сотрудник, Институт механики НАН Армении.

Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, ИМех. НАН РА

Тел.: (37410)-43-16-52; **E-mail:** mher_1982@mail.ru

Поступила в редакцию 14.11.2014

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Սարգսյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս. Շերտ և ամրակցման եզրերում սիմետրիկ ճաքեր պարունակող առաձգական հարթության հավասարակշռությունը 3

Աղալովյան Լ.Ա., Ջաքարյան Տ.Վ. Ոչ սիմետրիկ կառուցվածք ունեցող օրթոտրոպ եռաշերտի համար դինամիկական առաջին եզրային խնդրի լուծման մասին 10

Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ. Դարձյալ գլանային պանելի կայունության մասին..... 22

Ավետիսյան Ա.Ս. Անհարթ մակերևութներով ամրակցված բազմաշերտի էլեկտրամագնիս-առաձգականության եզրային խնդրի մասին 29

Շյախին Դ.Ա. Անիզոտրոպ պիեզոկերամիկ առանցքային բեռնացված գլանի համար ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիր 43

Ղուկասյան Ա.Ա. Առաձգական մանիպուլյատորի կինեմատիկայի ուսումնասիրության երկու մոտեցումների մասին 53

Ավետիսյան Ս.Ա., Մկրտչյան Մ.Մ. Ճնշման տրված ռեժիմի դեպքում ծակոտկեն էքսպոնենցիալ օրենքով անհամասեռ շերտերում հեղուկի կայունացած ֆիլտրացիայի մասին..... 68

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Равновесие упругой плоскости, содержащей полосу и симметричные трещины на линиях контакта 3

Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Решение первой динамической краевой задачи для трёхслойной ортотропной полосы несимметричной структуры 10

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. Ещё раз об устойчивости цилиндрической панели при внутреннем давлении 22

Аветисян А.С. О постановке краевых задач теории электро-магнито-упругости в трёхслойном композите с учётом шероховатости поверхностей 29

Шляхин Д.А. Неосесимметричная динамическая задача прямого пьезоэффекта для анизотропного пьезокерамического аксиально поляризованного цилиндра 43

Гукасян А.А. О двух подходах к исследованию кинематики упругих манипуляторов 53

Аветисян С.А., Мкртчян М.М. Об установившейся фильтрации жидкости в пористой экспоненциально неоднородной полосе при заданном режиме давления 68

CONTENTS

Sargsyan V.G., Khachikyan A.S. The equilibrium of the elastic plane with the strip and symmetric cracks on the lines of the contacts 3

Aghalovyan L.A., Zakaryan T.V. The solution of first dynamic boundary value problem for three-layer orthotropic strip of non-symmetric structure 10

Movsisyan L.A., Nersisyan G.G. Again on the stability of cylindrical panels 22

Avetisyan A.S. On the formulation of the electro-elasticity theory boundary value problems for electro-magneto-elastic composites with interface roughness 29

D.A. Shlyakhin Non –axis – symmetrical dynamic problem of electro elasticity for the axially – polarized piezoceramic cylinder 43

Ghukasyan A.A. On two Approaches to Research of Kinematics of Elastic Manipulators 53

Avetisyan S.A., Mkrtychyan M.M. About the fluid stabilized filtration in porous nonhomogeneous strip by exponential law in case of the given regime pressure 68