ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика

АГАЛОВЯН ЛЕНСЕР АБГАРОВИЧ
(к 75-летию со дня рождения)

Исполнилось 75 лет со дня рождения выдающегося учёного-механика, известного общественного деятеля, заведующего отделом «Механика тонкостенных систем» и советника директора Института механики НАН РА, заслуженного деятеля наук РА, академика НАН РА, доктора физико-математических наук, профессора Ленсера Абгаровича Агаловяна.

Л.А.Агаловян родился 3 февраля 1940 года в селе Колатак Мартакертского района Нагорного Карабаха в семье учителей. В 1961 году Л.А.Агаловян с отличием окончил механико-математический факультет Ереванского государственного университета по специальности механика. После окончания университета был оставлен на работу в качестве ассистента кафедры теоретической механики. В 1966 году успешной защитой кандидатской диссертации завершил очную аспирантуру ЕГУ. Трудовую деятельность в качестве старшего преподавателя продолжил на кафедре высшей математики ЕГУ. С 1969-го года отдаёт предпочтение научной деятельности и переходит на работу в Институт механики НАН РА в качестве старшего научного сотрудника. В 1980 году в Казанском государственном университете защищает докторскую диссертацию и ему присуждается учёная степень доктора физико-математических наук. В 1987 г. Л.А.Агаловян избирается на должность директора Института механики НАН РА и, неоднократно переизбираясь, почти 20 лет проработал на этом посту.

В 1996 году избирается действительным членом НАН РА.

С 2006 года по сей день Л.А.Агаловян является советником директора Института механики НАН РА и заведует отделом «Механика тонкостенных систем».

Круг научных интересов Л.А.Агаловяна достаточно широк и охватывает теорию анизотропных пластин и оболочек, смешанные краевые задачи теории упругости и вязкоупругости, неклассические статические и динамические краевые задачи тонких тел, проблемы сейсмологии и сейсмостойкого строительства, обоснование прикладных моделей оснований и фундаментов, волновые процессы, распространение волн в слоистых средах и др.

Всеобщее признание получили работы Л.А.Агаловяна, в которых, на основе уравнений трёхмерной теории упругости, впервые была построена асимптотическая теория анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Эта теория положила начало широкомасштабным исследованиям напряжённо-деформированного состояния тонкостенных конструкций, находящихся в стеснённых, с лицевых сторон, условиях. Такие задачи часто встречаются на практике, однако, в силу явного несоответствия гипотезам Кирхгофа-Лява, не могут быть решены в рамках классической теории пластин и оболочек. Построенная теория позволяет чётко выделить рамки применимости как классической, так и уточнённых теорий пластин и оболочек, построенных на основе гипотез, а также широко используемых для расчёта упругих оснований –фундаментов моделей Винклера-Фукса, Пастернака, Клейна, вычислить коэффициенты постели для слоистых и неоднородных оснований.

Л.А.Агаловян является одним из первоисследователей задач погранслоя для балок, пластин и оболочек. Полученное математически точное решение для погранслоя прямоугольника позволило ему установить связь между погранслоем и принципом Сен-Венана, доказать справедливость этого принципа в случае первой краевой задачи теории упругости и объяснить неприменимость его ко второй и смешанной граничным задачам.

Показана эффективность асимптотического метода при решении динамических задач для анизотропных и слоистых тел. Найдены частоты собственных колебаний слоистых пакетов в виде полос и пластин, содержащих сжимаемые и несжимаемые, а также вязкоупругие слои. Намечены пути использования этих результатов в сейсмостойком строительстве, в частности, показано, что при надлежащем выборе параметров основания можно максимально разнести частоты собственных колебаний и сейсмических волн и, тем самым, снизить риск разрушения сооружения при землетрясении.

Основные научные достижения Л.А.Агаловяна обобщены в двух объёмных монографиях (Л.А.Агаловян «Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек». М.: Наука, 1997. 415с. и Л.А.Агаловян, Р.С.Геворгян «Неклассические краевые задачи анизотропных балок, пластин и оболочек». Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.) и многочисленных научных статьях.

Велика заслуга Л.А.Агаловяна и в деле подготовки высококвалифицированных научных кадров. Под его руководством 15 человек защитили кандидатские диссертации, трое из них защитили и докторские диссертации.

Научные заслуги Л.А.Агаловяна признаны мировой научной общественностью. Он является членом European Mechanics Society (EUROMECH), European Association for the Control of Structures, Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, Президиума НАН РА, редколлегии журнала «Известия НАН РА, Механика», международных редакционных советов журналов «Прикладная механика» (Украина) и «Механика композитных материалов» (Латвия). Председатель Специализированного Совета по защитам докторских диссертаций по специальностям «Механика деформируемого твёрдого тела» и «Теоретическая механика» со дня его создания (1990 г.).

За большой вклад в развитие новых научных направлений в механике решение актуальных проблем механики и прикладной математики, большую научно-организационную работу Л.А.Агаловян награждён грамотами НАН Армении «Говестагир» и «Вастакагир». В 1995г. Ассоциация армянских инженеров и учёных США присудила ему премию им. Виктора Амбарцумяна, в 2009г. Американский биографический институт вручил Л.А.Агаловяну «Gold Medal For Armenia», а Международным биографическим центром признан одним из «Top 100 Scientists-2009».

Редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» поздравляет Ленсера Абгаровича Агаловяна с юбилеем и желает ему крепкого здоровья, долгих лет жизни, новых творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика

САРКИСЯН САМВЕЛ ОГАНЕСОВИЧ
(К 70-летию со дня рождения)

Известному учёному, члену-корреспонденту НАН Армении, доктору физико-математических наук, заслуженному деятелю науки Армении, профессору Самвелу Оганесовичу Саркисяну исполнилось 70 лет.

Самвел Оганесович Саркисян родился в Ленинакане (г. Гюмри) 5-го декабря 1944г. В 1967 году окончил Ленинаканский филиал Ереванского политехнического института по специальности «Приборы точной механики». В 1970 году поступил в аспирантуру механико-математического факультета Ереванского государственного университета. Здесь ему посчастливилось начать свою научную деятельность под руководством выдающегося учёного, академика НАН Армении Сергея Александровича Амбарцумяна. Встреча с Сергеем Александровичем оказала решающее влияние на формирование его научных и нравственных идеалов и на становление учёным-механиком.

На втором году аспирантуры по инициативе академика С.А. Амбарцумяна С.О. Саркисян был направлен в командировку в Государственный университет Ростова-на-Дону. Под руководством академика АН СССР Иосифа Израилевича Воровича он освоил достижения современного функционального анализа, актуального научного направления, которые он плодотворно использовал в области нелинейной теории тонких пластин и оболочек с целью доказательства существования решений граничных задач этой теории и математическому обоснованию методов Ритца и Бубнова-Галёркина для приближённого решения этих задач. Первые серьёзные результаты были получены уже к концу командировки и были представлены на научном семинаре академика И.И. Воровича.

В январе 1974 года в специализированном совете государственного университета Ростова-на-Дону С.О. Саркисян защищает кандидатскую диссертацию и получает учёную степень кандидата физико-математических наук.

После окончания аспирантуры С.О.Саркисян возвращается в Ленинаканский филиал ЕрПИ, где он работал сначала как ассистент, а с 1978 года – как доцент.

Продолжая свою научную деятельность, С.О. Саркисян взялся за исследования математических моделей контактных задач тонких пластин и оболочек, обосновывая необходимость применения известных уточнённых теорий, построенных академиком С.А. Амбарцумяном, для решения соответствующих классов задач. Об этих важных результатах отмечаются в ключевой статье Попова Г.Я., Толкачёва В.М. «Проблема контакта тел с тонкостенными элементами» // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1980. №4, и в известной монографии Григолюка Э.И., Толкачёва В.М. «Контактные задачи теории пластин и оболочек». М.: Машиностроение. 1980.

Рассматривая долгий плодотворный творческий путь С.О. Саркисяна, следует отметить работы, посвящённые применению в теории тонких пластин и оболочек одного из основных методов математической физики, а именно, асимптотического метода.

Обладая высокой эрудицией и творчески развивая труды академика АН СССР И.И. Воровича, проф. А.Л. Гольденвейзера и акад. НАН РА Л.А. Агаловяна в области асимптотологии, С.О. Саркисяну удалось построить совершенные, с математической точки зрения, асимптотические и прикладные модели магнитоупругости тонких пластин и оболочек, тем самым, подняв общую прикладную теорию магнитоупругости тонких пластин и оболочек, впервые построенную акад. С.А. Амбарцумяном, акад. Г.Е. Багдасаряном и проф. М.В. Белубекяном, на новый теоретический уровень. Исследования в этой области послужили основой для докторской диссертации, которую С.О. Саркисян защитил в 1986 году в Казанском государственном университете. В 1989 г. С.О. Саркисяну было присуждено научное звание профессора и в том же году он был избран зав.кафедрой теоретической механики Ленинаканского филиала ЕрПИ.

В 1994 году С.О. Саркисян был назначен ректором Гюмрийского государственного педагогического института. В этой должности он работал с огромной преданностью до декабря 1997 года. С 1995 года С.О.Саркисян руководит кафедрой Высшей математики ГГПИ.

Последние 20 лет С.О. Саркисян занимается на сегодняшний день весьма актуальной тематикой в сфере теории микрополярных тонких балок, пластин и оболочек, тем самым, развивая исследования академика С.А. Амбарцумяна в этой области. Продолжая развивать широкие возможности применения асимптотического метода, С.О. Саркисян разработал весьма оригинальный метод построения общих теорий микрополярных тонких балок, пластин и оболочек. Особенность метода состоит в том, что с помошью асимптотического метода рассматриваются сначала количественные и качественные характеристики решения граничных задач теории трёхмерной микрополярной упругости, далее формируются адекватные гипотезы, на основе которых строятся уже общие прикладные теории микрополярных тонких балок, пластин и оболочек, которые весьма доступны инженерам. По схожему подходу С.О. Саркисяну удаётся и построение общих прикладных моделей термоупругости и магнитоупругости микрополярных тонких балок, пластин оболочек. В настоящее время усилия С.Саркисяна и его учеников направлены на приложение математических моделей микрополярных тонких тел для решения задач механики микро- и наноматериалов и структур.

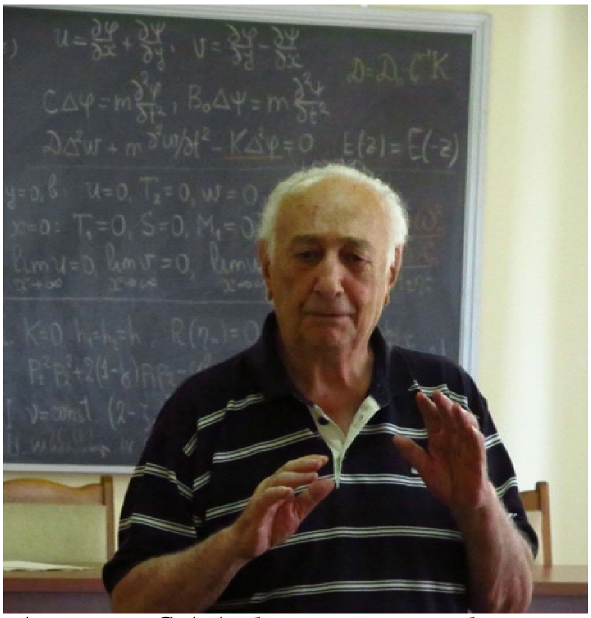
Помимо научной деятельности, много сил и времени С.О.Саркисян отдаёт педагогической работе со студентами и аспирантами. В работе с учениками С.О.Саркисян отличается научной щедростью, требовательностью и принципиальностью, простотою в общении и тактичностью. Эти черты являются самой яркой характеристикой С.О. Саркисяна, как учёного, педагога и человека. С.О.Саркисян ведёт большую научно-организационную деятельность. Он является членом редколлегии журнала «Известия НАН Армении. Механика» и главным редактором журнала «Учёные записки Гюмрийского государственного педагогического института», членом специализированного совета по механике, членом многих международных научных организаций. Своё 70-летие Самвел Оганесович встречает полным сил, энергии и творческих замыслов.

Редколлегия журнала «Известия НАН Армении. Механика» сердечно поздравляет Самвела Оганесовича Саркисяна с юбилеем и желает ему здоровья, долгих лет жизни и новых успехов в его плодотворной научной и педагогической деятельности.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика



Исполнилось 93 года выдающемуся учёному-механику Сергею Александровичу Амбарцумяну, который продолжает плодотворно работать и публиковать статьи и монографии в разных издательствах.

Редколлегия журнала «Известия НАН Армении, Механика» в знак благодарности и глубокой признательности перепечатывает одну из основополагающих статей академика НАН Армении С.А.Амбарцумяна, опубликованную более полувека назад в журнале «Прикладная математика и механика», на которую множество раз ссылались и продолжают ссылаться учёные Мира.

On a General Theory of Anisotropic Shells
(K obshchei teorii anizotropnykh obolochek)

PMM, Vol.22, №2, 1958, pp.226-237

S.A.Ambartsumian
(Erevan)

(Received 2 July 1958)

1. We consider a thin anisotropic shell of constant thickness h. Assume that the material of the shell obeys the generalized Hooke's law and that at each point there is only one plane of elastic symmetry, parallel to the middle surface of the shell. The latter surface will be used as surface of coordinates, and the shell will be referred to curvy-liner orthogonal coordinate's α and β, which coincide with the principle curvature lines of that surface. Let γ represent the distance, measured along the normal, between the point (α,β,γ) (α,β) of the middle surface and the point of the shell. We assume that

a) the line elements of the shell, normal to the middle surface, do not change their lengths after deformation;

b) the normal stresses σ_γ are small as compared with the stresses $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ and $r_{\alpha\beta}$;

c) the shear stresses $r_{\alpha\gamma}$ and $r_{\beta\gamma}$ vary in the direction of the thickness of the shell in accordance with the law of the quadratic parabola [13]

Being more rigorous in the formulation of the hypotheses [2,5], we can state here the assumptions (a) and (b) in the following form:

(a) $e_{\gamma\gamma} = 0$ approximately;

(b) the stresses σ_γ do not exert any essential influence on the strain components $e_{\alpha\alpha}$ and $e_{\beta\beta}$ and they can be neglected in the corresponding equations of the generalized Hooke's law.

2. By virtue of the assumption (c) concerning the shear stresses $r_{\alpha\gamma}$ and $r_{\beta\gamma}$ we have

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{X^+ - X^-}{2} + \frac{\gamma}{h}\left(X^+ + X^-\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\varphi(\alpha,\beta)$$
$$\tau_{\beta\gamma} = \frac{Y^+ - Y^-}{2} + \frac{\gamma}{h}\left(Y^+ + Y^-\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\psi(\alpha,\beta) \tag{2.1}$$

Where $X^+(\alpha,\beta)$, $Y^+(\alpha,\beta)$ and $X^-(\alpha,\beta)$, $Y^-(\alpha,\beta)$ are the components along the axes of the moving trihedron (in the direction of the positive tangents to the lines $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, respectively) of the intensity vectors of the surface loads, applied to the boundary surfaces $\gamma = \frac{1}{2}h$ and $\gamma = -\frac{1}{2}h$, respectively, while $\phi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$ are unknown functions. Substituting the value of the tangential stresses $r_{\alpha\gamma}$ and $r_{\beta\gamma}$ from (2.1) into the corresponding equations of the generalized Hooke's law [6], we obtain for the shear strain components $r_{\alpha\gamma}$ and $e_{\beta\gamma}$ the formulas

$$e_{\alpha\gamma} = X + \frac{\gamma}{h}X' + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\Phi_1(\alpha,\beta)$$
$$e_{\beta\gamma} = Y + \frac{\gamma}{h}Y' + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\Phi_2(\alpha,\beta) \tag{2.2}$$

Here we have introduced the following notations:

$$X = \tfrac{1}{2}\left[a_{55}\left(X^+ - X^-\right) + a_{45}\left(Y^+ - Y^-\right)\right]$$
$$Y = \tfrac{1}{2}\left[a_{44}\left(Y^+ - Y^-\right) + a_{45}\left(X^+ - X^-\right)\right] \tag{2.3}$$

$$X' = a_{55}\left(X^+ + X^-\right) + a_{45}\left(Y^+ + Y^-\right)$$
$$Y' = a_{44}\left(Y^+ + Y^-\right) + a_{45}\left(X^+ + X^-\right) \tag{2.4}$$

$$\Phi_1 = a_{55}\varphi + a_{45}\psi, \quad \Phi_2 = a_{44}\psi + a_{45}\varphi \tag{2.5}$$

where the quantities a_{ik} are elastic constants [6].

From the equations of the three-dimensional theory of elasticity, we have for the strain components [1]

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta}u_\beta + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \gamma}u_\gamma$$

$$e_{\beta\beta} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \gamma}u_\gamma + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha}u_\alpha \tag{2.6}$$

$$e_{\gamma\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} \tag{2.7}$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{H_1}u_\alpha\right) + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{H_2}u_\beta\right) \tag{2.8}$$

$$e_{\beta\gamma} = H_2\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{H_2}u_\beta\right) + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}u_\gamma$$

$$e_{\gamma\alpha} = H_1\frac{\partial}{\partial \alpha}u_\gamma + H_1\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{H_1}u_\alpha\right) \tag{2.9}$$

$$H_1 = A(1+k_1\gamma),\ \ H_2 = B(1+k_2\gamma) \tag{2.10}$$

In these formulas, $A = A(\alpha,\beta)$ and $B = B(\alpha,\beta)$ are the coefficients of the first quadratic form of the middle surface $k_1 = k_1(\alpha,\beta)$ and $k_2 = k_2(\alpha,\beta)$ are the principal curvatures of the middle surface; $u_\alpha = u_\alpha(\alpha,\beta,\gamma)$, $u_\beta = u_\beta(\alpha,\beta,\gamma)$ and $u_\gamma = u_\gamma(\alpha,\beta,\gamma)$ are the displacement components of arbitrary points of the shell in the directions of the tangents to the coordinate lines, respectively.

On the basis of the assumption (a) we find from (2.7)

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} = 0,\ \ u_\gamma = u_\gamma(\alpha,\beta) = w(\alpha,\beta) \tag{2.11}$$

Thus, like in all existing theories of thin shells, the displacement u_γ of any points of the shell is independent of the coordinates γ.

This displacement component has for all points of line elements of a normal to the shell a constant value, equal to the normal displacement components $\omega = \omega(\alpha,\beta)$ of the corresponding point of the middle surface of the shell.

Substituting the expressions for $e_{\alpha\gamma}, e_{\beta\gamma}, H_1, H_2$ and u_γ from (2.2), (2.10), and (2.11) into equations (2.9), we obtain differential equations for the displacement components u_α and u_β. Integrating these equations and taking into consideration that $u_\alpha = u(\alpha,\beta)$ and $u_\beta = v(\alpha,\beta)$ when $\gamma = 0$ we find

$$u_\alpha = (1+k_1\gamma)u - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \gamma\left(1+\gamma\frac{k_1}{2}\right)\frac{h^2}{8}\Phi_1 +$$
$$+\gamma^3\left(1+\gamma\frac{k_1}{4}\right)\frac{1}{6}\Phi_1 + \gamma\left(1+\gamma\frac{k_1}{2}\right)X + \gamma^2\left(1+\gamma\frac{k_1}{3}\right)\frac{1}{2h}X'$$
$$u_\beta = (1+k_2\gamma)v - \frac{\gamma}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} - \gamma\left(1+\gamma\frac{k_2}{2}\right)\frac{h^2}{8}\Phi_2 + \tag{2.12}$$
$$+\gamma^3\left(1+\gamma\frac{k_2}{4}\right)\frac{1}{6}\Phi_2 + \gamma\left(1+\gamma\frac{k_2}{2}\right)Y + \gamma^2\left(1+\gamma\frac{k_2}{3}\right)\frac{1}{2h}Y'$$

Where $u = u(\alpha,\beta)$, $v = v(\alpha,\beta)$ are the tangential displacement components of the corresponding point of the middle surface.

In the process of deriving the formulas (2.12) the accuracy was being confined to consideration of quantities up to those of the order of magnitude of γk_i, i.e. whenever a sufficiently precise estimation was possible, terms of the order of magnitude of $(\gamma k_i)^2$, were being neglected in comparison with unity.

Our formulas (2.12) show that, in the contract to known theories of thin shells [1,2,5,7], the tangential displacement components u_α and u_β of any point of the shell at a distance γ from the middle surface are, in the case considered here, as in the publication [8,9], non-linear functions of the distance γ.

By virtue of (2.12) the strain components $e_{\alpha\alpha}, e_{\beta\beta}, e_{\alpha\beta}$ can be expressed by polynomials in powers of γ, namely

$$e_{\alpha\alpha} = \varepsilon_1 + \gamma\kappa_1 + \gamma^2\eta_1 + \gamma^3\theta_1 + \gamma^4\xi_1,\ e_{\beta\beta} = \varepsilon_2 + \gamma\kappa_2 + \gamma^2\eta_2 + \gamma^3\theta_2 + \gamma^4\xi_2$$
$$e_{\alpha\beta} = w + \gamma\tau + \gamma^2 v + \gamma^3\lambda + \gamma^4 \tag{2.13}$$

Substituting the values of $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ from (2.12) and (2.11), respectively, into the relations (2.6) and (2.8), and comparing the resulting expressions for the strain components $e_{\alpha\alpha}, e_{\beta\beta}, e_{\alpha\beta}$ with the corresponding expressions (2.13), we obtain the following formulas for the coefficients of the expansions:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^\circ = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v + k_1 w \tag{2.14}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^\circ = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u + k_2 w \tag{2.15}$$

$$\omega = \omega^\circ = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right) \tag{2.16}$$

$$\kappa_1 = \kappa_1^\circ - \frac{h^2}{8}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Phi_2\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial X}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}Y \tag{2.17}$$

$$\kappa_2 = \kappa_2^\circ - \frac{h^2}{8}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Phi_1\right) + \frac{1}{B}\frac{\partial Y}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}X \tag{2.18}$$

$$\tau=\tau^{\circ}-\frac{h^2}{8}\left[\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\Phi_1}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\Phi_2}{B}\right)\right]+\left[\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{X}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{Y}{B}\right)\right] \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\eta_1 &= -k_1\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}u+k_1\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)+\\ &+k_1\frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{h^2}{16}\left(k_1\frac{1}{A}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha}-\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}\Phi_1\right)+\\ &+\frac{h^2}{8}\left(k_1-\frac{1}{2}k_2\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Phi_2-\frac{1}{2}\left(k_1\frac{1}{A}\frac{\partial X}{\partial\alpha}-\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}X\right)-\\ &-\left(k_1-\frac{1}{2}k_2\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}Y+\frac{1}{2h}\frac{1}{A}\frac{\partial X'}{\partial\alpha}+\frac{1}{2h}\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}Y'\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\eta_2 &= -k_2\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}v+k_2\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)+\\ &+k_2\frac{1}{BA^2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{h^2}{16}\left(k_2\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}\Phi_2\right)+\\ &+\frac{h^2}{8}\left(k_2-\frac{1}{2}k_1\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Phi_1-\frac{1}{2}\left(k_2\frac{1}{B}\frac{\partial Y}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}Y\right)-\\ &-\left(k_2-\frac{1}{2}k_1\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}X+\frac{1}{2h}\frac{1}{B}\frac{\partial Y'}{\partial\beta}+\frac{1}{2h}\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}X'\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}v &= k_2\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)+k_1\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)-\\ &-k_2\frac{1}{AB^2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}-k_1\frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\\ &+\frac{h^2}{16}\left[\frac{1}{B}\left(2k_2-k_1\right)\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\left(\frac{\partial k_1}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}k_1\right)\Phi_1\right]+\\ &+\frac{h^2}{16}\left[\frac{1}{A}\left(2k_1-k_2\right)\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha}-\frac{1}{A}\left(\frac{\partial k_2}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}k_2\right)\Phi_2\right]+\\ &+\frac{1}{2B}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(k_1X\right)-2k_2\frac{\partial X}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}k_1X\right]+\\ &+\frac{1}{2A}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k_2Y\right)-2k_1\frac{\partial Y}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}k_2Y\right]+\\ &+\frac{1}{2h}\left[\frac{1}{B}\left(\frac{\partial X'}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}X'\right)+\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Y'}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}Y'\right)\right]\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{1}{A}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\Phi_2 + \frac{h^2}{16}k_1\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial \alpha}\Phi_1 -$$
$$-\frac{1}{2}k_1\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial \alpha}X - \frac{1}{3h}\left(k_1\frac{1}{A}\frac{\partial X'}{\partial \alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial \alpha}X'\right) - \tag{2.23}$$
$$-\frac{1}{2h}\left(k_1 - \frac{1}{3}k_2\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}Y'$$

$$\theta_2 = \frac{1}{6}\frac{1}{B}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\Phi_1 + \frac{h^2}{16}k_2\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial \beta}\Phi_2 - \frac{1}{2}k_2\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial \beta}Y -$$
$$-\frac{1}{3h}\left(k_2\frac{1}{B}\frac{\partial Y'}{\partial \beta} - \frac{1}{2}\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial \beta}Y'\right) - \frac{1}{2h}\left(k_2 - \frac{1}{3}k_1\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}X' \tag{2.24}$$

$$\lambda = \frac{1}{6}\frac{1}{B}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} - \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\Phi_1 + \frac{1}{6}\frac{1}{A}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} -$$
$$-\frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\Phi_2 + \frac{1}{h}\left[\frac{1}{6}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(k_1X'\right) - \frac{1}{2}k_2\frac{1}{B}\frac{\partial X'}{\partial \beta} +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}k_1\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}X'\right] + \frac{1}{h}\left[\frac{1}{A}\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(k_2Y'\right) -\right. \tag{2.25}$$
$$\left.-\frac{1}{2}k_1\frac{1}{A}\frac{\partial Y'}{\partial \alpha} + \frac{1}{3}k_2\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}Y'\right]$$

$$\xi_1 = \frac{1}{24}\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial \alpha}\Phi_1 + \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\frac{k_2}{4} - k_1\right)\Phi_2 - \frac{1}{8}\frac{1}{A}k_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \tag{2.26}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{24}\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial \beta}\Phi_2 + \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(\frac{k_1}{4} - k_2\right)\Phi_1 - \frac{1}{8}\frac{1}{B}k_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial} \tag{2.27}$$

$$\zeta = \frac{1}{B}\left[\frac{1}{24}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(k_1\Phi_1\right) - \frac{1}{6}k_2\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + \frac{1}{8}\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta}k_1\Phi_1\right] +$$
$$+\frac{1}{A}\left[\frac{1}{24}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(k_2\Phi_2\right) - \frac{1}{6}k_1\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{8}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}k_2\Phi_2\right] \tag{2.28}$$

In the formulas (2.17) to (2.19) we have, in conformity the usual definition of curvature changes and torsion of the middle surface of the shell [2,5]

$$\kappa_1^{\circ} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}\right) - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}\right) \tag{2.29}$$

$$\kappa_2^{\circ} = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}\right) - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}\right) \tag{2.30}$$

$$\tau^{\circ} = -\frac{2}{AB}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) +$$
$$+\frac{2}{R_1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u\right) + \frac{2}{R_2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}v\right) \tag{2.31}$$

Where $R_1 = R_1(\alpha,\beta)$ and $R_2 = R_2(\alpha,\beta)$ are the principal radii of curvature of the middle surface.
Considering the expansions (2.13) we note that they have some similarity with the analogous expansions used in ref. [1]; the similarity is, however, only a superficial one. In the determination of the strain components $e_{\alpha\alpha}, e_{\beta\beta}, e_{\alpha\beta}$ ref. [1] actually uses expressions in terms of powers of γ keeping at the same time the hypothesis of non-deformable normal [1,2] while in the present paper , as in the publications [8,9], the relations (2.13) are being obtained on the basis of the basic assumptions of the theory offered here.
On the basis of (2.13) and of the original assumption (b) we derive from the generalized Hooke's law the following expressions for the stress components $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \tau_{\alpha\beta}$:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{16}\omega + \gamma\left(B_{11}\kappa_1 + B_{12}\kappa_2 + B_{16}\tau\right) +$$
$$+\gamma^2\left(B_{11}\eta_1 + B_{12}\eta_2 + B_{16}v\right) + \gamma^3\left(B_{11}\theta_1 + B_{12}\theta_2 + B_{16}\lambda\right) + \tag{2.32}$$
$$+\gamma^4\left(B_{11}\xi_1 + B_{12}\xi_2 + B_{16}\zeta\right)$$
$$\sigma_{\beta\beta} = B_{22}\varepsilon_2 + B_{12}\varepsilon_1 + B_{26}\omega + \gamma\left(B_{22}\kappa_2 + B_{12}\kappa_1 + B_{26}\tau\right) +$$
$$+\gamma^2\left(B_{22}\eta_2 + B_{12}\eta_1 + B_{26}v\right) + \gamma^3\left(B_{22}\theta_2 + B_{12}\theta_1 + B_{26}\lambda\right) + \tag{2.33}$$
$$+\gamma^4\left(B_{22}\xi_2 + B_{12}\xi_1 + B_{26}\zeta\right)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = B_{16}\varepsilon_1 + B_{26}\varepsilon_2 + B_{66}\omega + \gamma\left(B_{16}\kappa_1 + B_{26}\kappa_2 + B_{66}\tau\right) +$$
$$+\gamma^2\left(B_{16}\eta_1 + B_{26}\eta_2 + B_{66}v\right) + \gamma^3\left(B_{16}\theta_1 + B_{26}\theta_2 + B_{66}\lambda\right) + \tag{2.34}$$
$$+\gamma^4\left(B_{16}\xi_1 + B_{26}\xi_2 + B_{66}\zeta\right)$$

In these formulas the constants B_{ik} are given by the following expressions in terms of the elastic constants a_{ik} [10,11]

$$B_{11} = \frac{a_{22}a_{66} - a_{26}^2}{\Omega},\ B_{12} = \frac{a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}}{\Omega},\ B_{16} = \frac{a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}}{\Omega}$$
$$B_{22} = \frac{a_{11}a_{66} - a_{16}^2}{\Omega},\quad B_{66} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Omega},\quad B_{26} = \frac{a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}}{\Omega}, \tag{2.35}$$
$$\Omega = \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)a_{66} + 2a_{12}a_{16}a_{26} - a_{11}a_{26}^2 - a_{22}a_{16}^2$$

The stresses $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \tau_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$ produce internal forces $\left(T_1, T_2, S_1, S_2, N_1, N_2\right)$ and moments $\left(M_1, M_2, H\right)$, which must satisfy the following statistical conditions [1,2,5]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BT_1\right) - T_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(AS_2\right) + S_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + ABk_1N_1 = -ABX^* \\
&\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AT_2\right) - T_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BS_2\right) + S_2\frac{\partial B}{\partial\beta\alpha} + ABk_2N_2 = -ABY^* \\
&-\left(k_1T_1 + k_2T_2\right) + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BN_1\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(AN_2\right)\right] = -Z^* \\
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BH\right) + H\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(AM_2\right) - M_1\frac{\partial A}{\partial\beta} - ABN_2 = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AH\right) + H\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BM_1\right) - M_2\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} - ABN_1 = 0 \\
&S_1 - S_2 + k_1H - k_2H = 0
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

In these formulas the symbols

$X^* = X^*\left(\alpha,\beta\right),\ Y^* = Y^*\left(\alpha,\beta\right),\ Z^* = Z^*\left(\alpha,\beta\right)$

represent the components of the intensity vector of the applied surface load, referred to the middle surface of the shell [7], namely

$$
P^* = P^+\left(1 + \frac{h}{2R_1}\right)\left(1 + \frac{h}{2R_2}\right) + P^-\left(1 - \frac{h}{2R_1}\right)\left(1 - \frac{h}{2R_2}\right) \tag{2.37}
$$

where P stands generally for $X, Y, Z.$

The stress resultants appearing in (2.36) are determined in the usual manner [1,2,10]. Without going into details, we give here the simplest elasticity formulas, which identically satisfy the sixth equation of statics:

$$
\begin{aligned}
T_1 = {} & C_{11}\left(\varepsilon_1 + \frac{h^2}{12}\eta_1 + \frac{h^4}{80}\xi_1\right) + C_{12}\left(\varepsilon_2 + \frac{h^2}{12}\eta_2 + \frac{h^4}{80}\xi_2\right) + \\
& + C_{16}\left(\omega + \frac{h^2}{12}\lambda + \frac{h^4}{80}\zeta\right)
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2 = {} & C_{22}\left(\varepsilon_2 + \frac{h^2}{12}\eta_2 + \frac{h^4}{80}\xi_2\right) + C_{12}\left(\varepsilon_1 + \frac{h^2}{12}\eta_1 + \frac{h^4}{80}\xi_1\right) + \\
& + C_{26}\left(\omega + \frac{h^2}{12}\lambda + \frac{h^4}{80}\zeta\right)
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

$$S_1 = C_{16}\left(\varepsilon_1 + \frac{h^2}{12}\eta_1 + \frac{h^4}{80}\xi_1\right) + C_{26}\left(\varepsilon_2 + \frac{h^2}{12}\eta_2 + \frac{h^4}{80}\xi_2\right) +$$
$$+C_{66}\left(\omega + \frac{h^2}{12}\lambda + \frac{h^4}{80}\zeta\right) + k_2\left[C_{16}\left(\frac{h^2}{12}\kappa_1 + \frac{h^4}{80}\theta_1\right) + \right. \tag{2.40}$$
$$\left. +C_{26}\left(\frac{h^2}{12}\kappa_1 + \frac{h^4}{80}\theta_2\right) + C_{66}\left(\frac{h^2}{12}\tau + \frac{h^4}{80}\lambda\right)\right]$$

$$S_2 = C_{26}\left(\varepsilon_2 + \frac{h^2}{12}\eta_2 + \frac{h^4}{80}\xi_2\right) + C_{16}\left(\varepsilon_1 + \frac{h^2}{12}\eta_1 + \frac{h^4}{80}\xi_1\right) +$$
$$+C_{66}\left(\omega + \frac{h^2}{12}\lambda + \frac{h^4}{80}\zeta\right) + k_1\left[C_{26}\left(\frac{h^2}{12}\kappa_2 + \frac{h^4}{80}\theta_2\right) + \right. \tag{2.41}$$
$$\left. +C_{16}\left(\frac{h^2}{12}\kappa_1 + \frac{h^4}{80}\theta_1\right) + C_{66}\left(\frac{h^2}{12}\tau + \frac{h^4}{80}\lambda\right)\right]$$

$$M_1 = D_{11}\left(\kappa_1 + \frac{3h^2}{20}\theta_1\right) + D_{12}\left(\kappa_2 + \frac{3h^2}{20}\theta_2\right) + D_{16}\left(\tau + \frac{3h^2}{20}\lambda\right) \tag{2.42}$$

$$M_2 = D_{22}\left(\kappa_2 + \frac{3h^2}{20}\theta_2\right) + D_{12}\left(\kappa_1 + \frac{3h^2}{20}\theta_1\right) + D_{26}\left(\tau + \frac{3h^2}{20}\lambda\right) \tag{2.43}$$

$$H_1 = H_2 = H = D_{16}\left(\kappa_1 + \frac{3h^2}{20}\theta_1\right) + D_{26}\left(\kappa_2 + \frac{3h^2}{20}\theta_2\right) +$$
$$+D_{66}\left(\tau + \frac{3h^2}{20}\lambda\right) \tag{2.44}$$

$$N_1 = \frac{h}{2}\left(X^+ - X^-\right) - \frac{h^3}{12}\varphi(\alpha,\beta) \tag{2.45}$$

$$N_2 = \frac{h}{2}\left(Y^+ - Y^-\right) - \frac{h^3}{12}\psi(\alpha,\beta) \tag{2.46}$$

In these relations, we have the following formulas for the rigidity constants C_{ik} of compression and D_{ik} of bending:

$$C_{ik} = hB_{ik},\ D_{ik} = \frac{h^3}{12}B_{ik} \tag{2.47}$$

We state here that, in the process of substitution of the value of $\varepsilon_1, \ldots, \zeta$ all terms containing X and Y can be omitted, still maintaining a sufficiently high degree of accuracy [7], in all elasticity relations.

Using the formulas (2.29), (2.30), we can eliminate the displacement components u, v, ω of the middle surface from the relations (2.14) to (2.16) this lead to

$$
\begin{aligned}
&k_2\kappa_1^{\circ}+k_1\kappa_2^{\circ}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{1}{A}\left[B\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\right)-\frac{A}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\omega\right]\right\}+\\
&+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{B}\left[A\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)-\frac{B}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\omega\right]\right\}=0
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

The equation (2.48) is the third continuity relation for the deformation of the middle surface of the shell. As it should be expected, the relation does not differ in any way from the corresponding relation of the classical theory of thin shells [2,5]. The remaining two conditions of continuity for the deformation of the middle surface will not be needed in the present paper.

The equations (2.48) is the third continuity relation for the deformation of the middle surface of the shell. As it should be expected, the relation does not differ in any way from the corresponding relation of the classical theory of thin shells [2,5]. The remaining two conditions of continuity for the deformation of the middle surface will not be needed in the present paper.

The equations (2.14) to (2.31), (2.36), (2.38) to (2.46) taken together represent a complete system of equations of the theory of shells.

It is known [1,2,5] that such a complete system can be established in various ways. In view of its extreme complexity in the general case of a shell of arbitrary form, the complete system of equations will be considered here for one practically important type of shell only.

In the process of solving actual boundary value problems the differential equations of the shell have to be completed in the usual manner by statement of the boundary conditions [1,2,3]

3. Avoiding discussions of details, we mention here some possible special type of boundary conditions.

Free edge: This designation will characterize such an edge $(\alpha = \text{const})$ of the shell, for which

$$M_1 = 0,\ H = 0,\ S_1 = 0,\ T_1 = 0,\ N_1 = 0 \tag{3.1}$$

Simply supported edge. This designation will be used for such an edge $(\alpha = \text{const})$ of the shell, for which

$$M_1 = 0,\ T_1 = 0,\ w = 0,\ v = 0,\ B_{11}\theta_1 + B_{12}\theta_2 + B_{16}\lambda = 0 \tag{3.2}$$

Fixed edge with a hinge. This designation characterizes such an edge $(\alpha = \text{const})$ of the shell, for which

$$M_1 = 0,\ u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ \psi = 0 \tag{3.3}$$

Clamped edge: This designation refers to such an edge $(\alpha = \text{const})$ of the shell, for which

$$
\begin{aligned}
&u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ \psi = 0\\
&\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - k_1 u + \frac{h^2}{8}\Phi_1 = 0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Of course, other boundary conditions are still possible. The boundary conditions for an edge $\beta = \text{const}$ can be stated in an analogous manner.

Concluding this Section, we note that the subject of the boundary conditions requires special investigations.

A detailed study of the results presented in the first three Sections of this paper reveals the following fact: the special case, characterized by $\alpha_{44}=0,\ \alpha_{55}=0,\ \alpha_{45}=0,$ leads to the basic relations and equations of the theory of anisotropic shells based upon the hypotheses of non-deformable normals.

4. Consider a shell in the form of a circular cylinder of radius R. We take the α and β coordinate lines to be directed along the generators and the parallel circles of the middle surface, respectively. Assume that the shell is being acted upon by normally applied loading only. For such a shell

$$A=\text{const},\ B=\text{const},\ k_1=0,\ k_2=\frac{1}{R} \tag{4.1}$$

The coefficients of the expansions (2.13) are

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha},\ \varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{R}w,\ \ \omega=\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered}\kappa_1=-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}-\frac{h^2}{8}\frac{1}{A}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha}\\ \kappa_2=-\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R}\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{h^2}{8}\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta}\\ \tau=-\frac{2}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{2}{R}\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{h^2}{8}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha}\right)\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\eta_1=0,\ \eta_2=\frac{1}{R}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{h^2}{16}\frac{1}{R}\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta} \tag{4.4}$$

$$\nu=\frac{1}{R}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{h^2}{16}\frac{1}{R}\left(2\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha}\right)$$

$$\theta_1=\frac{1}{6A}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha},\ \theta_2=\frac{1}{6B}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta},\ \ \lambda=\frac{1}{6B}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta}+\frac{1}{6A}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha} \tag{4.5}$$

$$\xi_1=-\frac{1}{8B}\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta},\ \zeta=-\frac{1}{6R}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta}+\frac{1}{4A}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha}\right) \tag{4.6}$$

The equations of equilibrium assume the form

$$\begin{gathered}\frac{1}{A}\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial S_2}{\partial\beta}=0,\qquad \frac{1}{A}\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial M_2}{\partial\beta}-N_2=0\\ \frac{1}{B}\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial S_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{R}N_2=0,\ \ \frac{1}{B}\frac{\partial H}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial\alpha}-N_1=0\\ \frac{1}{A}\frac{\partial N_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial N_2}{\partial\beta}-\frac{1}{R}T_2=-Z\end{gathered} \tag{4.7}$$

Substituting the expressions for $\varepsilon_1,\ldots\zeta$ from (4.2) to (4.6) into the formulas (2.38) to (2.46), we obtain the stress resultants in term of the unknown functions u,v,w,ϕ,ψ . Substituting the obtained expressions of the stress resultants into the equations of equilibrium (4.7), we find a final system of the five differential equations for the five unknown functions u,v,w,ϕ,ψ , namely

$$
\begin{aligned}
&\nabla_1\left(C_{ik}\right)u+\nabla_6\left(C_{ik}\right)v+\left\{C_{12}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+C_{26}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\right.\\
&\left.+\frac{h^2}{12}\left[\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}+C_{16}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}+C_{26}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\right]\right\}\frac{w}{R}+\\
&+Q_4\left(C_{ik},a_{ik}\right)\psi+Q_5\left(C_{ik},a_{ik}\right)\varphi=0
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla_6\left(C_{ik}\right)u+\nabla_2\left(C_{ik}\right)v+\left\{C_{22}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+C_{26}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\right.\\
&\left.+\frac{h^2}{12}\left[C_{22}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}-C_{16}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}+C_{26}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}-C_{66}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}\right]\right\}\frac{w}{R}+\\
&+R_4\left(C_{ik},a_{ik}\right)\psi+R_5\left(C_{ik},a_{ik}\right)\varphi=0
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(C_{12}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+C_{26}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\frac{u}{R}+\left(C_{22}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+C_{26}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\frac{v}{R}+\\
&+\left[C_{22}+\frac{h^2}{12}\left(C_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+C_{26}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\beta}\right)\right]\frac{w}{R^2}+\\
&+P_4\left(C_{ik},a_{ik}\right)\psi+P_5\left(C_{ik},a_{ik}\right)\varphi=Z
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(D_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2D_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+3D_{26}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\frac{v}{R}-\\
&-E_2\left(D_{ik}\right)w-S_4\left(D_{ik},a_{ik}\right)\psi-S_5\left(D_{ik},a_{ik}\right)\varphi=0
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(D_{26}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2D_{16}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\left(2D_{66}+D_{12}\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\frac{v}{R}-\\
&-E_1\left(D_{ik}\right)w-K_4\left(D_{ik},a_{ik}\right)\psi-K_5\left(D_{ik},a_{ik}\right)\varphi=0
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

where

$$\nabla_1\left(C_{ik}\right)=C_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+C_{66}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2C_{16}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\nabla_2\left(C_{ik}\right)=C_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+C_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2C_{26}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\nabla_6\left(C_{ik}\right)=C_{16}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+C_{26}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$$

$$E_1\left(D_{ik}\right)=D_{11}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}+3D_{16}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}+$$

$$+\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}+D_{26}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}$$

$$E_2\left(D_{ik}\right)=D_{22}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}+3D_{26}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\beta^2\partial\alpha}+$$

$$+\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}+D_{16}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}$$

$$P_1\left(C_{ik},a_{ik}\right)=\left[\left(i-4\right)\frac{h^3}{12}-C_{26}\frac{3h^4}{640R^2}a_{4i}\right]\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+$$

$$+\left[\frac{h^4}{120R^2}\left(\frac{7}{16}C_{22}a_{4i}+C_{26}a_{i5}\right)-\left(i-5\right)\frac{h^3}{12}\right]\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}$$

$$R_i\left(C_{ik},a_{ik}\right)=\left(i-5\right)\frac{h^3}{12R}+\frac{h^4}{120R}\left[\left(\frac{7}{16}C_{22}a_{4i}+C_{26}a_{i5}\right)\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{9}{8}C_{26}a_{4i}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}-\left(\frac{25}{16}C_{66}a_{4i}+C_{16}a_{i5}\right)\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right]$$

$$Q_i\left(C_{ik},a_{ik}\right)=\frac{h^4}{120R}\left[\left(\frac{7}{16}C_{12}a_{4i}-\frac{9}{16}C_{66}a_{4i}+C_{16}a_{i5}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}-\right.$$

$$\left.-\frac{9}{16}C_{16}a_{4i}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\left(\frac{7}{16}C_{26}a_{4i}+C_{66}a_{i5}\right)\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]$$

$$S_i\left(D_{ik},a_{ik}\right)=\frac{h^2}{10}\left[\left(D_{16}a_{i5}+D_{66}a_{4i}\right)\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\left(2D_{26}a_{4i}+D_{66}a_{i5}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+D_{12}a_{i5}\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+\left(D_{22}a_{4i}+D_{26}a_{i5}\right)\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]-\left(i-5\right)\frac{h^2}{12}$$

$$K_i\left(D_{ik},a_{ik}\right)=\frac{h^2}{10}\left[\left(D_{11}a_{i5}+D_{16}a_{4i}\right)\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\left(2D_{16}a_{i5}+D_{66}a_{4i}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+D_{12}a_{4i}\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+\left(D_{26}a_{4i}+D_{66}a_{i5}\right)\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]+\left(i-4\right)\frac{h^3}{12}$$

Thus, the problem of the anisotropic cylindrical shell is reduced to a system of five differential equations (4.8) to (4.12) for the five unknown functions. Having obtained the latter, we will find without difficulty the stress resultants, as well as the stresses, by means of the formulas (2.32) to (2.34), to (2.46) and (4.2) to (4.6)

The system of equations (4.8) to (4.12) undergoes substantial simplification in the case of a transversely isotropic shell [10]. It is known that for a transversely isotropic solid we have

$$a_{16}=0,\ a_{26}=0,\ a_{45}=a_{54}=0,\ a_{44}=a_{55}=\frac{1}{G'}$$
$$B_{11}=B_{22}=\frac{E}{1-\mu^2},\ B_{12}=\mu B_{11},\ B_{66}=\frac{E}{2(1+\mu)} \tag{4.13}$$

where E is the modulus of elasticity in the plane of isotropy μ is Poisson's ratio, G' is the shear modulus for planes normal to the plane of isotropy.
We assume the plane of isotropy of the material to be parallel, at each points of the shell, to the middle surface of the latter.
The coordinates α,β are to be chosen in such a manner that the coefficients of the first quadratic form assume the following value [1,2]

$$A=1,\ B=R \tag{4.14}$$

By virtue of (4.13) and (4.14) the final system of equations becomes simpler and assumes the following form:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\mu}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{(1+\mu)h^2}{24R^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}+$$
$$+\frac{23\mu-9}{3840}\frac{h^4}{R^2}a_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1-\mu}{240}\frac{h^4}{R^3}a_{44}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}=0 \tag{4.15}$$

$$\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{h^2}{12R^4}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}-$$
$$-\frac{(1-\mu)h^2}{24R^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}+\frac{7h^4}{1920R^3}a_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+\frac{5(1-\mu)h^4}{768R}a_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}- \tag{4.16}$$
$$-\frac{(1-\mu^2)h^2}{12ER}\psi=0$$

$$\frac{\mu}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{w}{R^2}+\frac{h^2}{12R^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{7h^4}{1920R^3}a_{44}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+$$
$$+\frac{(1-\mu^2)h^2}{12ER}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{(1-\mu^2)h^2}{12E}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=\frac{1-\mu^2}{Eh}Z \tag{4.17}$$

$$\frac{1-\mu}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R^3}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}-\frac{1}{R^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+\frac{1-\mu^2}{E}\psi-$$
$$-\frac{h^2}{10}a_{44}\left(\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}\right)=0 \tag{4.18}$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}-\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}-$$
$$-\frac{h^2}{10}a_{44}\left(\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}\right)+\frac{1-\mu^2}{E}\varphi=0 \tag{4.19}$$

As an example, we shall treat here the problem of a horizontal tube, of transversely isotropic material, simply supported at its ends. The tube is entirely filled with a liquid of specific weight γ. The weight of the tube material shall be neglected [7,12].

Measuring the angle β from the lowest point of the cross section of the tube, we use the expansions

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_m \sum_n A_{mn} \cos n\beta \cos \frac{m\pi\alpha}{l}, \\
v &= \sum_m \sum_n B_{mn} \sin n\beta \sin \frac{m\pi\alpha}{l}, \quad \varphi = \sum_m \sum_n D_{mn} \cos n\beta \cos \frac{m\pi\alpha}{l} \\
w &= \sum_m \sum_n C_{mn} \cos n\beta \sin \frac{m\pi\alpha}{l}, \quad \psi = \sum_m \sum_n E_{mn} \sin n\beta \sin \frac{m\pi\alpha}{l}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

The chosen functions fulfil the boundary conditions of simple support along the edges $\alpha = 0,\ \alpha = l$, as well as the conditions of periodicity with the period 2π for the argument β. The acting load, the radial pressure of the fluid, is

$$q = R\lambda\left(1+\cos\beta\right) \tag{4.21}$$

It can be represented by the double series

$$Z = \sum_m \sum_n q_{mn} \cos n\beta \sin \frac{m\pi\alpha}{l} \tag{4.22}$$

Where the coefficients q_{mn} are given [7,12] by

$$q_{mn} = 0, \quad q_{mo} = \frac{4\gamma R}{mn}, \quad q_{m1} = \frac{4\gamma R}{mn} \tag{4.23}$$

In view of the good convergence of the expansions with respect to the subscript $m = 1, 3, 5, \ldots$ we will confine ourselves in the following to the first term

Substituting the functions u, v, w, ϕ, ψ from (4.20), and the function z from (4.22) into the corresponding equations of the system (4.15) to (4.19), we obtain, for each pair of values of m and n a system of a five equations for the five unknown coefficients $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}.$. In the special case, when $n = 0$, these system undergo essential simplifications.

Let us consider the numerical example treated in [7,12]; take $a = 50\text{cm},\ l = 25\text{cm},\ h = 7\text{cm}$, while $\mu = 0.3$. For the dimensions just given we shall examine three cases, for which the ratio E/G' equals 2.6; 5.0; 10.0, respectively.

In the case E/G'=2.6 we have evidently to deal with an isotropic shell, while in the second and in the third case we have transversely isotropic shells.

The value of the coefficients C_{mn} of the normal displacement component of the shell are given in Table 1 in the form of the ratio C_{mn}/N where $N = 24\gamma R^3 l^2 / E\pi h$. In the last column of table 1 are given the values of

Table 1.

$\frac{E}{G}$	$\frac{10^4}{N}C_{01}$	$\frac{10^4}{N}C_{11}$	$\frac{10^4}{N}C$
	0.7022	0.6708	1.3730
2.6	0.8103	0.8004	1.6107
5.0	0.9000	0.9138	1.8138
10.0	1.0616	1.0275	2.0891

The coefficient of the maximum normal displacement, i.e. the value of the coefficient of w at the point $\beta = 0,\ \beta = \frac{1}{2}l.$

For comparison, we give in the first line of Table 1 the value of the same coefficients C_{mn}/N, where $N = 24\gamma R^3 l^2 / E\pi h$. calculated by means of the theory based upon the hypothesis of non-deformable normal [7.12]

The comparison shows that the results obtained on the basis of the latter theory essentially differ from those derived from the theory offered in the present paper. We see that even in the case of an isotropic shell the error incurred in the classical theory (based upon the hypothesis of non-deformable normals) can amount to 15%. In the case of transversely isotropic shells the error can become quite substantial for the case of the example considered here, depending on the ratio E/G'. For instance, in the case of ratio E/G'=10 the error just mentioned rises to 35%.

Bibliography

1. Vlasov V.Z., Obshchaia teoriia obolochek (General Theory of Shells). Gostekhizdat.1949
2. Goldenveizer A.L., Teoriia uprugikh tonkikh obolochek (Theory of Elastic Thin Shells). Gostekhizdat. 1953
3. Ambartsumian S.A., Rashet pologikh tsilindricheskikh obolochek, sobrannykh iz anizotropnykh sloev (Analysis of shallow cylindrical shells, built up of anisotropic layers). Izvestiia Acad. Nauk Arm.SSR. seriia Fiz. Mat. i Tekh. Nauk. Vol.4, №5. 1951.
4. Ambartsumian S.A., K voprosu rascheta sloistykh anizotropnykh obolochek (On the problem of analysis of layered anisotropic shells). Izvestiia Akad. Nauk Arm. SSR, seria Fiz. Mat. I Tekh. Nauk. Vol.6. №3. 1953.
5. Novozhilov V.V., Teoriiatonkikh obolochek (Theory of Thin Shells). Sudpromgiz. 1951
6. Lekhnitskii S.G., Teoriia uprugosti anizotropnogo tela (Theory of Elasticity of an Anisotropic Solid). Gostekhizdat. 1950.
7. Lur'ye A.I., Statika tonkostennykh uprugikh obolochek (Statics of Thin-Walled Elastic Shells). Gostekhizdat. 1947.
8. Ambartsumian S.A., K raschetu dvukhsloinykh ortotropnykh obolochek (On the analysis of two-layered orthotropic shells). Izvestiia Acad. Nauk SSSR.Otd. Tekh. Nauk. №7. 1957.
9. Ambartsumian S.A., O dvukh metodakh rascheta dvukhsloinykh ortotropnykh obolochek (Two methods of analysis of two-layered orthotropic shells). Izvestiia Acad. Nauk Arm. SSR. Seria Fiz. Mat. nauk. Vol.10. №2. 1957.
10. Lekhnitskii S.G., Anizotropnyye plastinki (Anisotropic Plates). Gostekhizdat. 1947.
11. Ambartsumian S.A., K teorii anizotropnykh pologikh obolochek (On a theory of anisotropic shallow shells). PMM Vol.12, №1. 1948.
12. Timoshenko S.P., Plastinki I obolochki (Plates and Shells). Gostekhizdat. 1948.
13. Ambartsumian S.A., Theorii izgiba anizotropnykh plastinok (On a theory of bending of anisotropic plates). Izvestiia Acad. Nauk SSSR. Otd. Tekh. nauk. №4. 1958.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика

УДК 539.3

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЫХОДЯЩИМ НА ГРАНИЦУ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ТРЕЩИНОЙ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Բանալի բառեր՝ ճաք, կոշտ ներդրակ, լարվածային վիճակ, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում
Ключевые слова: трещина, жёсткое включение, напряжённое состояние, сингулярные интегральные уравнения.
Keywords: crack, rigid inclusion, stress state, singular integral equations

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա.
Եզր դուրս եկող բացարձակ կոշտ ներդրակ և ճաք պարունակող կիսահարթության լարվածային վիճակը

Ուսումնասիրված է եզր դուրս եկող բացարձակ կոշտ ներդրակ և նրա անմիջական շարունակությունը կազմող վերջավոր ճաք պարունակող կիսահարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն դեֆորմացվում է ներդրակի ծայրակետում կիրառված և եզրի հետ որոշակի անկյուն կազմող կենտրոնացված ուժի ազդեցության տակ: Խնդիրը բերված է Կոշու ընդհանրացված կորիզներով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որի լուծումը կառուցված է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի օգնությամբ:

Hakobyan V., Amirjanyan H.
Stress state of semi-infinite plane with absolutely rigid inclusion and crack

The plane stress state of elastic semi-infinite plane, containing perpendicularly situated collinear absolutely rigid inclusion and crack along boundary is considered. The case, when inclusion is on the boundary and crack continues, is discussed. The stated problem mathematically formulated as a system of singular integral equations with Cauchy generalized kernels. The solution is built by the method of mechanical quadratures.

Исследованию контактного взаимодействия упругой полуплоскости с конечными абсолютно жёсткими или деформируемыми включениями, перпендикулярно выходящими на границу полуплоскости, посвящён ряд работ [1-4]. В настоящей работе исследовано плоско-деформированное состояние упругой полуплоскости, содержащей расположенные перпендикулярно к границе коллинеарные абсолютно жёсткое включение и трещину. Рассмотрен случай, когда включение выходит на границу, а трещина непосредственно продолжает его. Задача математически формулируется в виде системы сингулярных интегральных уравнений с обобщёнными ядрами Коши, решение которой строится методом механических квадратур.

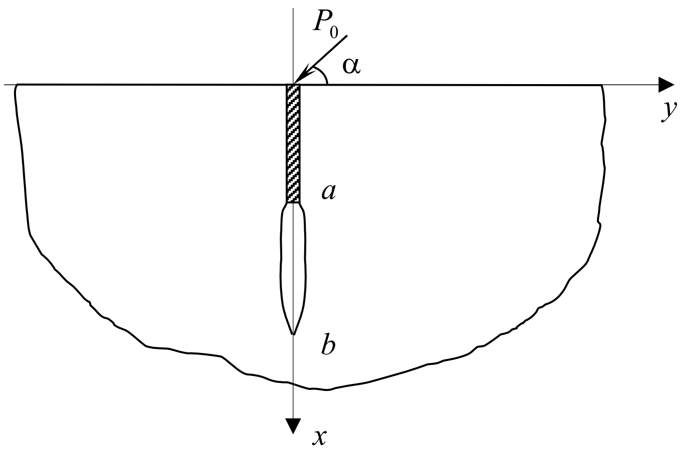
Введение

Исследование вопросов взаимовлияния различных типов концентраторов напряжений типа трещин (разрезов, щелей), абсолютно жёстких или инородных включений между собой и с однородными или составными массивными деформируемыми телами является одним из приоритетных направлений контактных и смешанных задач теории упругости, сформированное в последние десятилетия. Учёт взаимодействия различных типов концентраторов напряжений часто приводит к новым постановкам контактных и смешанных задач, качественно изменяет характер концентрации напряжений, существенно влияет на показатель особенности напряжений и на распределение напряжений в зонах концентрации [5].

Это направление тесно связано также с вопросами предотвращения распространения трещин в твёрдых деформируемых телах, что является актуальной проблемой не только с точки зрения механики деформируемого твёрдого тела и механики разрушения, но и имеет огромное практическое значение при расчётах различных конструкций и их деталей на прочность и долговечность.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть упругая полуплоскость, отнесённая к полярной системе координат $Or\varphi$, и занимающая область $\{0 \le r < \infty, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2\}$, на интервалах $(0,a)$ и (a,b) линии $\varphi = 0$ соответственно усилена абсолютно жёстким тонким включением и расслаблена конечной трещиной. Будем считать, что полуплоскость деформируется под воздействием сосредоточенной нагрузки величины P_0, приложенной к включению в точке $r = 0$ и составляющей с границей полуплоскости угол α (фиг.1). Требуется определить контактные напряжения, действующие на участках контакта включения с полуплоскостью, раскрытие трещины, коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений на линии $\varphi = 0$, а также угол поворота включения.



Фиг.1

Мысленно разделим полуплоскость по линии $\varphi = 0$ на две четверть-плоскости и снабдим компоненты напряжений и перемещений, относящиеся к точкам четверть-плоскостей $D_{\pm} = \{0 \le \pm\varphi \le \pi/2;\ 0 \le r < \infty\}$, верхними индексами (+) и (−) соответственно. Тогда поставленную задачу можем сформулировать в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\begin{cases} \tau_{r\varphi}^{\pm}(r, \pm\pi/2) = 0;\ \sigma_{\varphi}^{\pm}(r, \pm\pi/2) = 0; & (0 < r < \infty) \\ u_r^{+}(r,0) + iu_{\varphi}^{+}(r,0) = u_r^{-}(r,0) + iu_{\varphi}^{-}(r,0); & (b < r < \infty) \\ \sigma_{\varphi}^{+}(r,0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r,0) = \sigma_{\varphi}^{-}(r,0) - i\tau_{r\varphi}^{-}(r,0); & (b < r < \infty) \end{cases} \tag{1a}$$

$$\begin{cases} u_r^{\pm}(r,0)+iu_{\varphi}^{\pm}(r,0)=c+i\gamma r; & (0,a) \\ \sigma_{\varphi}^{\pm}(r,0)=-\sigma_0(r);\ \tau_{r\varphi}^{\pm}(r,0)=0; & (a,b) \end{cases} \tag{1б}$$

Здесь $u_r^{\pm}(r,\varphi)$ и $u_{\varphi}^{\pm}(r,\varphi)$ – компоненты смещения точек областей $D_{\pm}$, удовлетворяющие уравнениям Ламе и связанные с компонентами напряжений $\sigma_{\varphi}^{\pm}(r,\varphi)$ и $\tau_{\varphi}^{\pm}(r,\varphi)$ известными формулами закона Гука [7], c и γ – постоянные, определяющие соответственно поступательное движение и поворот включения.

Чтобы решить поставленную задачу, сначала построим разрывные решения уравнений Ламе для полуплоскости. С этой целью введём в рассмотрение функцию скачков напряжений $\chi(r)$, действующих на включение и разности смещений точек берегов трещины $W(r)$:

$$\left[\sigma_{\varphi}^{+}(r,0)-i\tau_{r\varphi}^{+}(r,0)\right]-\left[\sigma_{\varphi}^{-}(r,0)-i\tau_{r\varphi}^{-}(r,0)\right]=$$

$$=\begin{cases}\chi(r) & (0<r<a)\\ 0 & (a<r<b)\end{cases};$$

$$\left[u_r^{+}(r,0)+iu_{\varphi}^{+}(r,0)\right]-\left[u_r^{-}(r,0)+iu_{\varphi}^{-}(r,0)\right]= \tag{2}$$

$$=\begin{cases}0 & (0<r<a)\\ W(r) & (a<r<b)\end{cases}.$$

Решив при помощи интегрального преобразования Меллина [5,6] вспомогательную граничную задачу, определяемую условиями (1а) и (2), выразим компоненты напряжения и производные от смещений через введённые неизвестные функции $\chi(r)$ и $W(r)$. Получим:

$$\frac{d\left[u_r^{\pm}(r,0)+iu_{\varphi}^{\pm}(r,0)\right]}{dr}=\pm\frac{W'(r)}{2}-\frac{i\left(\vartheta_2^2-\vartheta_1^2\right)}{2\vartheta_2}\left\{\int_0^a R_{11}(r,r_0)\chi(r_0)\,dr_0+\right.$$

$$\left.+\int_a^b R_{12}(r,r_0)W'(r_0)\,dr_0+\int_a^b R_{13}(r,r_0)\overline{W}'(r_0)\,dr_0\right\}; \qquad (0<r<\infty) \tag{3}$$

$$\sigma_{\varphi}^{\pm}(r,0)-i\tau_{r\varphi}^{\pm}(r,0)=\pm\frac{\chi(r)}{2}+\frac{i\vartheta_1}{2\vartheta_2}\left\{\int_0^a R_{21}(r,r_0)\chi(r_0)\,dr_0+\right.$$

$$\left.+\int_a^b R_{22}(r,r_0)W'(r_0)\,dr_0+\int_0^a R_{23}(r,r_0)\overline{\chi}(r_0)\,dr_0\right\}, \qquad (0<r<\infty) \tag{4}$$

где

$$R_{11}(r,r_0)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{r_0-r}-\frac{A_{11}}{r_0+r}+B_{11}\frac{r_0(r_0-r)}{(r_0+r)^3}\right\};$$

$$R_{12}(r,r_0)=\frac{C_{12}}{\pi}\left\{\frac{2r_0}{r_0^2-r^2}-B_{12}\frac{r_0(r_0-r)}{(r_0+r)^3}\right\};$$

$$R_{13}(r,r_0)=\frac{2\vartheta_2}{\pi\left(\vartheta_2^2-\vartheta_1^2\right)}\frac{r_0}{(r_0+r)^2};\quad R_{21}(r,r_0)=R_{12}(r,r_0)/C_{12};$$

$$R_{22}(r,r_0)=-\frac{1}{\pi\vartheta_1}\left\{\frac{2r_0}{r_0^2-r^2}-\frac{2r_0(r_0-r)}{(r_0+r)^3}\right\};\ R_{23}(r,r_0)=\frac{2\vartheta_2}{\pi\vartheta_1}\frac{r_0}{(r_0+r)^2};$$

$$A_{11}=\frac{\vartheta_2^2+\vartheta_1^2}{\vartheta_2^2-\vartheta_1^2};\ B_{11}=\frac{2(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\vartheta_2+\vartheta_1};\quad B_{12}=2\left(1-\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right);\ C_{12}=\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2^2-\vartheta_1^2};$$

$$\vartheta_1=\frac{1}{2(\lambda+\mu)};\quad \vartheta_2=\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)},$$

а λ и μ – коэффициенты Ламе.

Далее, используя формулы (3) и (4), удовлетворим условиям (1б), первоначально продифференцируя первое из них. В итоге придём к следующей системе определяющих сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}\int_0^a R_{11}(r,r_0)\chi(r_0)\,dr_0+\int_a^b R_{12}(r,r_0)W'(r_0)\,dr_0+\\ +\int_a^b R_{13}(r,r_0)\overline{W}'(r_0)\,dr_0=-\gamma^* \qquad (0<r<a)\\ \int_0^a R_{21}(r,r_0)\chi(r_0)\,dr_0+\int_a^b R_{22}(r,r_0)W'(r_0)\,dr_0+\\ +\int_0^a R_{23}(r,r_0)\overline{\chi}(r_0)\,dr_0=\sigma_0^*(r), \quad (a<r<b)\end{cases} \tag{5}$$

$$\left(\sigma_0^*(r)=\frac{2i\vartheta_2}{\vartheta_1}\sigma_0(r);\quad \gamma^*=\frac{2\vartheta_2\gamma}{\vartheta_2^2-\vartheta_1^2}\right).$$

Систему (5) нужно рассматривать совместно с условиями равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_0^a \chi(r)\,dr=P_0^*;\quad \int_a^b W'(r)\,dr=0;\ \operatorname{Re}\int_0^a r\chi(r)\,dr=0; \tag{6}$$

$$\left(P_0^*=P_0e^{i\alpha}\right).$$

При помощи замены переменных $r_0 = a(s+1)/2,\ r = a(x+1)/2$ на интервале $(0,a)$ и $r_0 = ps+q,\ r = px+q$ ($p=(b-a)/2;\ q=(b+a)/2$) на интервале (a,b), систему (5) сформулируем на интервале $(-1,1)$ и, введя безразмерные функции

$$\varphi_1(x) = a\chi\big(a(x+1)/2\big)/P_0;\quad \varphi_2(x) = W'(px+q);$$

$$\varphi_3(x) = \overline{\varphi}_1(x);\quad \varphi_4(x) = \overline{\varphi}_2(x),$$

придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_j(s)}{s-x}ds + \sum_{k=1}^{4}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{jk}(s,x)\varphi_k(s)ds = f_j(x). \tag{7}$$

Условия (6) при этом примут вид:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_1(x)dx = e^{i\alpha};\ \operatorname{Re}\int_{-1}^{1}(x+1)\varphi_1(x)dx = 0;\ \int_{-1}^{1}\varphi_2(x)dx = 0. \tag{8}$$

Здесь введены обозначения:

$$K_{11}(x,s) = -\frac{\left[4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2\right]}{æ(s+x+2)} + \frac{2(s+1)(s-x)}{æ(s+x+2)^3};$$

$$K_{14}(x,s) = -\frac{4(1-\nu)E_0}{æ}\frac{(s+\lambda_3)}{(s+\lambda_4 x+2\lambda_2)^2};$$

$$K_{12}(x,s) = \frac{(1-2\nu)E_0}{(1+\nu)æ}\left\{\frac{1}{s-\lambda_4 x+\lambda_1} - \frac{1}{s+\lambda_4 x+\lambda_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(s+\lambda_3)(s-\lambda_4 x+\lambda_1)}{(1-2\nu)(s+\lambda_4 x+\lambda_2)^3}\right\};$$

$$K_{21}(x,s) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0}\left\{\frac{1}{\lambda_4 s-x-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_4 s+x+\lambda_2} + \right.$$

$$\left. \frac{2\lambda_4(s+1)(\lambda_4 s-x-\lambda_1)}{(1-2\nu)(\lambda_4 s+x+\lambda_2)^3}\right\};$$

$$K_{22}(x,s)=\frac{1}{s+x+2\lambda_3}+\frac{2(s+\lambda_3)(s-x)}{(s+x+2\lambda_3)^3};$$

$$K_{23}(x,s)=-\frac{4(1-\nu^2)}{E_0}\frac{\lambda_4(s+1)}{(\lambda_4 s+x+2\lambda_2)^2};$$

$$K_{13}(x,s)=K_{31}(x,s)=K_{24}(x,s)=K_{42}(x,s)=0;$$

$$K_{32}(x,s)=K_{14}(x,s);\ K_{33}(x,s)=K_{11}(x,s);$$

$$K_{34}(x,s)=K_{12}(x,s);\quad K_{41}(x,s)=K_{23}(x,s);$$

$$K_{43}(x,s)=K_{21}(x,s);\quad K_{44}(x,s)=K_{22}(x,s);$$

$$f_1(x)=f_3(x)=-\gamma_*=-\frac{4(1-\nu)\gamma}{æ(1+\nu)};f_2(x)=-f_4(x)=$$

$$=-\frac{4(1-\nu^2)}{E_0}\sigma_0^*(x);\qquad \sigma_0^*(x)=\frac{a\sigma_0(a(x+1)/2)}{P_0};$$

$$E_0=\frac{aE}{P_0};\ \lambda_1=\frac{\lambda}{\lambda-1};\lambda_2=\frac{\lambda+2}{\lambda-1};\ \lambda_3=\frac{\lambda+1}{\lambda-1};\ \lambda_4=\frac{1}{\lambda-1};\ \lambda=\frac{b}{a}>1;$$

чёрточка над функциями означает их комплексно-сопряжённые величины, E – модуль упругости материала полуплоскости, ν – коэффициент Пуассона.

Отметим, что решение системы (7) при условиях (8) можно представить в виде:

$$\varphi_j(x)=\varphi_j^{(1)}(x)\cos\alpha+\varphi_j^{(2)}(x)\sin\alpha\qquad (j=1-4),$$

где функции $\varphi_j^{(\kappa)}(x)$ $(j=1-4)$ при $k=1,2$ являются соответственно решениями системы (7) при условиях (8), когда $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$. Следовательно, учитывая, что угол поворота включения в случае $\alpha=\pi/2$ равен нулю ввиду симметрии задачи относительно оси Oy, для угла поворота включений при любом значении α будем иметь формулу:

$$\gamma_*(\alpha)=\gamma_*(0)\cos\alpha.$$

Заметим также, что безразмерные контактные напряжения под включением, задаваемые формулой (4) при $(0<r<a)$, в новых обозначениях через функции $\varphi_j(x)$ $(j=1-4)$ будут иметь вид:

$$\chi_*^{\pm}(x)=\frac{a\left[\sigma_\varphi^{\pm}(a(x+1)/2,0)-i\tau_{r\varphi}^{\pm}(a(x+1)/2,0)\right]}{P_0}=$$

$$=\pm\frac{\varphi_1(x)}{2}+\frac{i(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(s)}{s-x}ds+\sum_{j=1}^{3}\int_{-1}^{1}Q_j(x,s)\varphi_k(s)ds\ (-1<x<1), \tag{9}$$

где

$$Q_1(x,s) = -\frac{2i(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)}\left\{\frac{1}{(s+x+2)} + \frac{(s+1)(s-x)}{(1-2\nu)(s+x+2)^3}\right\};$$

$$Q_2(x,s) = -\frac{iE_0}{4\pi(1-\nu^2)}\left\{\frac{1}{s-\lambda_4 x+\lambda_1} - \frac{1}{s+\lambda_4 x+\lambda_2} + \frac{2(s+\lambda_3)(s-\lambda_4 x+\lambda_1)}{(s+\lambda_4 x+\lambda_2)^3}\right\};$$

$$Q_3(x,s) = \frac{2i}{\pi}\frac{(s+1)}{(s+x+2)^2},$$

а безразмерные разрушающие напряжения на линии $\varphi = 0$ при $r > b$ определятся по формуле

$$\chi_*^{\pm}(x) = \frac{a\left[\sigma_\varphi^{\pm}(a(x+1)/2,0) - i\tau_{r\varphi}^{\pm}(a(x+1)/2,0)\right]}{P_0} =$$

$$= -\frac{iE_0}{4\pi(1-\nu^2)}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(s)}{s-x}ds + \sum_{k=1}^{4}\int_{-1}^{1}K_{2k}(s,x)\varphi_k(s)ds\right\}. \qquad (x>1) \qquad (10)$$

При помощи этой формулы нетрудно определить также приведённые коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины $r = b$, что соответствует точке $x = 1$:

$$K_{\mathrm{I}}(1) - iK_{\mathrm{II}}(1) = \lim_{x\to 1+0}\sqrt{x-1}\,\chi_*^{\pm}(x) \qquad (11)$$

Для определения же приведённого раскрытия трещины будем иметь формулу:

$$v_*(x) = \frac{2}{a}\operatorname{Im}W\left(a(x+1)/2\right) = \operatorname{Im}\int_{-1}^{x}\varphi_2(s)\,ds. \qquad (12)$$

Решение определяющей системы уравнений

Решение определяющей системы уравнений (7) при условиях (8) будем строить методом механических квадратур [10]. Для этого определим поведение искомых функций в концевых точках интервалов интегрирования. С этой целью заметим, что функции $K_{ij}(x,s)$ $(i,j=1-4)$ – регулярные функции почти всюду в квадрате $(-1\le x,s\le 1)$, быть может, кроме точек $x+s=0$, где они могут иметь неподвижную особенность. Далее, методом Мусхелишвили [8] нетрудно установить, что функция $\varphi_j(x)$ $(j=1,3)$, как и следовало ожидать [9], в концевой точке $r=0$ $(x=-1)$ имеет особенность типа $(x+1)^{\beta-1}$ $(0\le\beta<1)$, где показатель β является корнем трансцендентного уравнения

$$\sin^2\frac{\beta\pi}{2} = \frac{(1+æ)^2}{4æ} - \frac{\beta^2}{æ}; \quad (æ = 3-4\nu).$$

В точке $r=a\ (x=\pm 1)$ функции $\varphi_j(x)\ (j=1-4)$ имеют особенность типа $(1\pm x)^{-\frac{1}{2}\pm i\beta_1}$ $(\beta_1=\ln æ/2\pi)$. В точке же $r=b\ (x=1)$ функции $\varphi_j(x)\ (j=2,4)$ имеют обычную корневую особенность.

Исходя из этого, искомые функции представим в виде :

$$\varphi_1(x)=\frac{\varphi_1^*(x)}{(1-x)^{0.5+i\beta_1}(1+x)^{1-\beta}};\ \varphi_2(x)=\frac{\varphi_2^*(x)}{(1-x)^{0.5}(1+x)^{0.5+i\beta_1}}\ , \qquad (13)$$

где $\varphi_i^*(x)\ (i=1,2)$ – непрерывные гладкие функции, ограниченные на отрезке $[-1,1]$.

Заметим, что в этом случае по формуле (11) для определения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины $r=b$ получим формулу:

$$K_{\mathrm{I}}(1)-iK_{\mathrm{II}}(1)=\frac{i\,2^{-2-i\beta_1}\sqrt{\pi}E_0}{(1-\upsilon^2)}\varphi_2^*(1).$$

Подставляя представления (12) в (7) и (8), на основе метода механических квадратур [10], придём к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}w_{ik}\left[\frac{(1-q_{ik}(x_k))}{s_{ik}-x_k}\right]\varphi_m^*(s_{ik})+\sum_{p=1}^{4}\ \sum_{i=1}^{n}w_{ip}K_{mp}^*(x_k,s_i)\varphi_p^*(s_{ip})=\pi f_m(x_k)$$

$$\sum_{i=1}^{n}w_{i1}\varphi_1^*(s_{i1})=e^{i\alpha}\quad \sum_{i=1}^{n}w_{i1}\varphi_3^*(s_{i3})=e^{-i\alpha}\quad \sum_{i=1}^{n}w_{ij}\varphi_3^*(s_{ij})=0;\ (j=2,4).$$

Здесь $s_{ik}\left(i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,2}\right)$ – корни полинома Якоби $P_n^{(\gamma_k,\sigma_k)}(x)$, $x_k\left(k=\overline{1,n-1}\right)$ – корни полинома Якоби $P_{n-1}^{(\gamma_k,\sigma_k)}(x)$, $(\gamma_1,\sigma_1)=(\beta-1,-0.5+i\beta_1)$; $(\gamma_2,\sigma_2)=(-0.5-i\beta_1,\beta-1)$

$$w_{ik}=\frac{2}{n+\gamma_k+\sigma_k}\frac{Q_n^{(\gamma_k,\sigma_k)}(s_{ik})}{P_{n-1}^{(\gamma_k,\sigma_k)}(s_{ik})}\ ;\qquad q_{ik}(z)=\frac{Q_n^{(\gamma_k,\sigma_k)}(z)}{Q_n^{(\gamma_k,\sigma_k)}(s_{ik})};$$

$$Q_n^{(\gamma_k,\sigma_k)}(z)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{z-1}\right)^{n+1}2^{2+\gamma_k+\sigma_k}\dfrac{\Gamma(n+\gamma_k)\Gamma(n+\sigma_k)}{\Gamma(2n+2+\gamma_k+\sigma_k)}F\left(n+1,n+\gamma_k;2n+2+\gamma_k+\sigma_k;\dfrac{2}{1-z}\right) & z\notin[-1,1]\\ \left(Q_n^{(\gamma_k,\sigma_k)}(z+i0)+Q_n^{(\gamma_k,\sigma_k)}(z-i0)\right)/2 & (-1<z<1).\end{cases}$$

Таким образом, получена замкнутая система для определения значений $\varphi_k^*(s_{ik})\left(i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,2}\right)$, посредством которых можно вычислить значения регулярных частей искомых скачков обезразмеренных напряжений $\varphi_j^*(x)$ $(j=1,2)$ в произвольной точке отрезка $[-1,1]$.

Численные расчёты

Проведён численный анализ поставленной задачи и изучены закономерности изменения распределения контактных напряжений под включением, угла поворота включения, раскрытия трещины и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины в зависимости от соотношения $\lambda = a/b$ и угла α в случае, когда берега трещины свободны от напряжений, т.е., когда $\sigma_0^*(x) \equiv 0$.

Результаты вычислений приведены в форме таблиц и графиков. В табл.1 приведены значения приведённого угла поворота включения $\gamma_*(0)$ в зависимости от изменения коэффициента Пуассона ν в случае, когда $\lambda = 2;\ E_0 = 10$. Из неё видно, что при увеличении коэффициента Пуассона угол поворота включений уменьшается.

Таблица 1. Угол поворота включения $\gamma(0)$

ν	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
$\gamma(0)$	0.2965	0.2936	0.2845	0.2683	0.2571

В табл.2 приведены значения приведённого коэффициента интенсивности $K_{\mathrm{I}}(1)$ в зависимости от λ в случае, когда $\alpha = \pi/2$, $E_0 = 10$ и $\nu = 0.3$. Из этой таблицы явствует, что при увеличении λ, что при постоянной длине включения можно трактовать как увеличение длины трещины, приведённый коэффициент интенсивности уменьшается, т.е., чем короче трещина, тем больше вероятность её распространения.

Таблица 2. Коэффициент интенсивности $K_{\mathrm{I}}(1)$

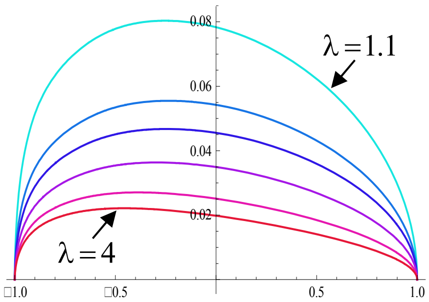
λ	1.1	1.5	2	2.5	3.	4.
$K_{\mathrm{I}}(1)$	0.7617	0.3292	0.2162	0.1636	0.1319	0.0946

В табл.3 приведены значения приведённого коэффициента интенсивности $K_{\text{I}}(1)$ и $K_{\text{II}}(1)$ в зависимости от угла α в случае, когда $\lambda = 2;\ E_0 = 10$ и $\nu = 0.3$. Из этой таблицы видно, что при увеличении угла α $K_{\text{I}}(1)$ увеличивается, а $K_{\text{II}}(1)$ уменьшается.

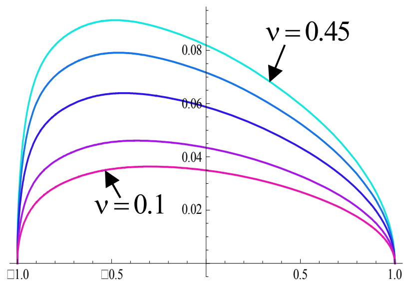
Таблица 3. Коэффициенты интенсивностей $K_{\text{I}}(1)$ и $K_{\text{II}}(1)$ (при $\nu = 0.3$)

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$K_{\text{I}}(1)$	0	0.1080	0.1528	0.11872	0.2162
$K_{\text{II}}(1)$	0.0258	0.0224	0.0183	0.0130	0

На фиг. 2 и 3 приведены графики нормальных составляющих приведённого раскрытия трещины соответственно в случаях, когда $\alpha = \pi/2$, $E_0 = 10$, $\nu = 0.4$ и когда $\alpha = \pi/2$, $\lambda = 2;\ E_0 = 10$. В первом случае исследована закономерность изменения приведённого раскрытия трещины в зависимости от параметра λ, а во втором случае – в зависимости от коэффициента Пуассона. Как видно из фигур, при увеличении λ приведённое раскрытие трещины уменьшается, а при увеличении коэффициента Пуассона – увеличивается.

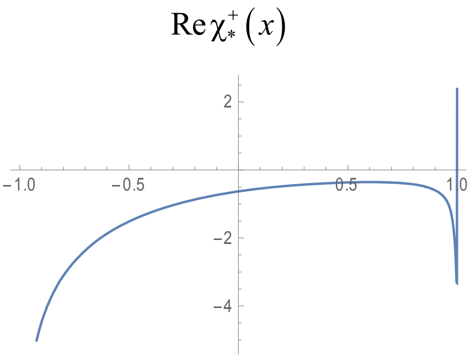


Фиг. 2

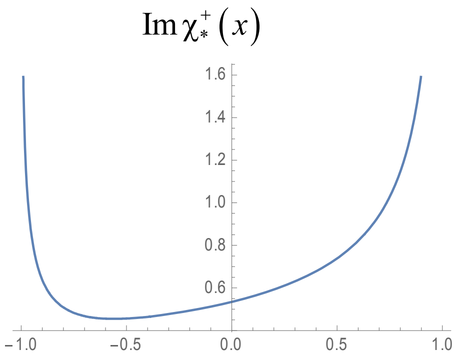


Фиг. 3

На фиг. 4 и 5 соответственно приведены графики приведённых нормальных и касательных контактных напряжений в случае, когда $\alpha = \pi / 2,\ b / a = 2,$ и $\nu = 0,4.$



Фиг. 4



Фиг. 5

Вычисления показывают, что контактные напряжения практически не зависят как от параметра b / a, так и от коэффициента Пуассона.

Заключение. Построено эффективное решение задачи о плоско-деформированном состоянии упругой полуплоскости, содержащей перпендикулярно выходящее на границу абсолютно жёсткое тонкое включение и непосредственно продолжающее его конечную трещину. Выявлены закономерности изменения контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения, раскрытия трещины и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины в зависимости от физическо-механических и геометрических характеристик задачи. Показано, что чем меньше длина трещины, тем больше коэффициент интенсивности разрушающих напряжений, и следовательно, больше угроза распространения трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reissner E. Note in the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet.- Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1940, v.26, p.300-305.
2. Абрамян Б.Л. Об одной контактной задаче для полуплоскости.//Изв. АН СССР. МТТ.1972. № 5. С.4-10.

3. Григорян Э.Х. Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости.//Учёные записки ЕГУ. Естеств. науки. 1981. № 3. С.32-43.
4. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. // Прикл. Механика. Труды амер. о-ва инж.-механиков. Сер. Е. 1968. Т.35. № 4. С.124-135.
5. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитуцюн», 2014. 323с.
6. Акопян В.Н., Амирджанян А.А. Напряжённое состояние полуплоскости с абсолютно жёстким включением и трещиной. //В сб. трудов 8-ой Межд. Конференции: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», сентябрь 22-26, 2014. Горис-Степанакерт. С.43-47.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
9. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311с.
10. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Georgia. Vol. 156 (2011), pp.101-111.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН Армении. **Тел.:**(37410) 52-48-90,
E-mail: vhakobyan@sci.am .

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Тел.:** (37410) 52-48-90,
E-mail: amirjanyan@gmail.com .

Поступила в редакцию 09.12.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика

УДК 539.3

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОГО ДИСКА В УСЛОВИЯХ ГЛАДКОГО КОНТАКТА НА БЕРЕГАХ ТРЕЩИНЫ

Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.

Բանալի բառեր: շրջանային սկավառակ, շառավղային ճաք, ողորկ կոնտակտ, փոփոխականների անջատման եղանակ, լարումների եզակիություն, եզակիության գործակից, մեխանիկական իմաստ:
Ключевые слова: круглый диск, радиальная трещина, гладкий контакт, метод разделения переменных, особенность напряжений, коэффициент особенности, механический смысл.
Key words: circular disk, radial crack, smooth contact, method of separation of resiables, singularity of stresses, coefficient of singularity, mechanical sense.

Ներսիսյան Գ.Գ., Սարգսյան Ա.Մ.
Շառավղային ճաքի ափերին ողորկ կոնտակտային պայմաններով շրջանային սկավառակի լարվածային վիճակը

Դիտարկված է շառավղային ճաքով շրջանային սկավառակի առաձգական հավասարակշռությունը, երբ ճաքի ափերը հպվում են կոշտ դրոշմների հետ, իսկ սկավառակի եզրագծի վրա տրված են՝ 1) նորմալ և շոշափող լարումներ, 2) նորմալ լարում և շոշափող տեղափոխություն, 3) նորմալ տեղափոխություն և շոշափող լարում, 4) նորմալ և շոշափող տեղափոխություններ:

Դրված խնդիրների փակ լուծումները ստացվել են փոփոխականների անջատման մեթոդով: Հետազոտված են լարումների եզակիությունները և եզակիության գործակիցների վարքը ճաքի գագաթի շրջակայքում:

Բացահայտված է սկավառակի եզրագծի վրա եզրային պայմանների միջև կապի մեխանիկական իմաստը, որն առաջանում է յուրաքանչյուր խնդրի լուծման ընդհացքում:

Nersisyan G.G., Sargsyan A.M.
Stress-state of a circular disc in the conditions of smooth contact on the borders of the radial crack

An elastic equilibrium of a thin circular disc with a radial crack, the borders of which are in contact with the rigid stamps without friction, and in the contour of the disc 1) normal and tangential stresses, 2) a normal stress and a tangential displacement, 3) a normal displacement and a tangential stress, 4) normal and tangential displacement are given, is considered.

The closed solutions of the stated problems are obtained by the method of separation of variables. The singularities of the stresses and the behavior of the coefficients with the singularitiy in the vicinityof the crack top are investigated. Mechanical sense of the correlations between the boundary conditions given on the contour of the disc and appeared during the solution of each problem, is established.

Рассматривается упругое равновесие тонкого кругового диска с радиальной трещиной, берега которого соприкасаются с жёсткими штампами без трения, а на обводе диска заданы: 1) нормальные и касательные напряжения, 2) нормальное напряжение и окружное перемещение, 3) нормальное перемещение и касательное напряжение, 4) нормальное и окружное перемещения.

Замкнутые решения поставленных задач получаются методом разделения переменных. Исследуются особенности напряжений и поведения коэффициентов при особенности в окрестности вершины трещин. Устанавливается механический смысл соотношений между заданными на обводе диска граничными условиями.

Введение. Вопросу об особенности напряжений в окрестности вершины тонкого кругового сектора с произвольным углом раствора $\alpha\ (0<\alpha<2\pi)$, когда на радиальных сторонах имеют место условия гладкого контакта, а на дуговой части контура заданы различные граничные условия, посвящено значительное число работ $[2-6]$. В данной работе эти задачи рассматриваются на случай $\alpha=2\pi$, т.е. исследуется упругое равновесие тонкого кругового диска, на берегах которого имеют место условия гладкого контакта, а на обводе диска заданы четыре различных граничных условий.

Постановка задачи. Отнесём круговой диск к декартовой и полярной системам координат, как показано на фиг.1.

Функция напряжения Эри, удовлетворяющая бигармоническому уравнению, имеет вид [1]:

$$\Phi\left(r,\varphi\right)=r^{\lambda+1}\left[AS_{\varphi}^{+}+BC_{\varphi}^{+}+CS_{\varphi}^{+}+DC_{\varphi}^{+}\right], \tag{1}$$

где A,B,C,D – постоянные интегрирования, λ – произвольный параметр,

$S_{\varphi}^{\pm}=\sin\left(\lambda\pm\right)\varphi,\quad C_{\varphi}^{\pm}=\cos\left(\lambda\pm\right)\varphi.$

На берегах трещины граничные условия таковы:

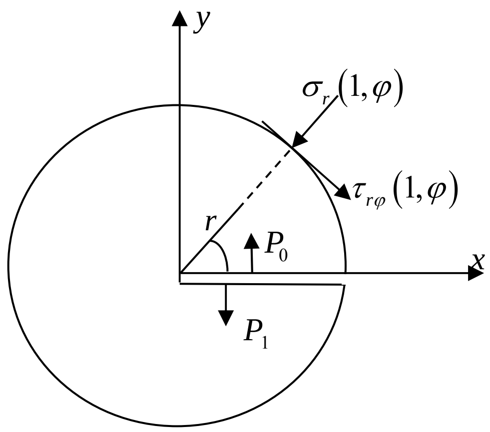
$$\tau_{r\varphi}\left(r,0\right)=u_{\varphi}\left(r,0\right)=0, \tag{2}$$

$$\tau_{r\varphi}\left(r,2\pi\right)=u_{\varphi}\left(r,2\pi\right)=0. \tag{3}$$

На обводе диска заданы четыре разных граничных условий:

1. $\sigma_r\left(1,\varphi\right)=f_1\left(\varphi\right),\quad \tau_{r\varphi}\left(1,\varphi\right)=f_2\left(\varphi\right),$ (4)
2. $\sigma_r\left(1,\varphi\right)=f_1\left(\varphi\right),\quad u_{\varphi}\left(1,\varphi\right)=f_2\left(\varphi\right),$ (5)
3. $u_r\left(1,\varphi\right)=f_1\left(\varphi\right),\quad \tau_{r\varphi}\left(1,\varphi\right)=f_2\left(\varphi\right),$ (6)
4. $u_r\left(1,\varphi\right)=f_1\left(\varphi\right),\quad u_{\varphi}\left(1,\varphi\right)=f_2\left(\varphi\right).$ (7)

В условиях (4) – (7) $f_2\left(0\right)=f_2\left(2\pi\right)=0.$



Фиг.1

Решение

Напряжения выражаются через функцию Эри следующим образом:

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\lambda\Phi}{\lambda r}+\frac{1}{r^2}\frac{\lambda^2\Phi}{r\lambda r},\quad \sigma_{\varphi}=\frac{\lambda^2\Phi}{\lambda r^2},\quad \tau_{r\varphi}=-\frac{\lambda}{\lambda r}\left(\frac{1}{r}\frac{\lambda\Phi}{\lambda\Phi}\right). \tag{8}$$

С помощью закона Гука, соотношения Коши и формул (1), (8), определяя напряжения $\tau_{r\varphi}\left(r,\varphi\right)$ и перемещения $u_{\varphi}\left(r,\varphi\right)$ и удовлетворяя граничным условиям (2), (3), для неизвестных A,B,C,D получим однородную систему линейных алгебраических уравнений [2, 3].

Условие существования нетривиального решения этой системы даёт $A=C=0$ и

$$\sin\left(\lambda+1\right)2\pi\cdot\sin\left(\lambda-1\right)2\pi=0. \tag{9}$$

Корни уравнения (9) – действительные и простые

$$\lambda_k=k/2+1,\quad \tilde{\lambda}_n=n/2-1, \tag{9'}$$

причём,

$$\lambda_k>0,\quad \tilde{\lambda}_n>0. \tag{10}$$

Условие (10), вытекающее из требования конечности упругой деформации в малой окрестности вершины трещины, налагает ограничение на пределы изменения параметров k и n:

$k = -1, 0, 1...; \qquad n = 3, 4, 5...$ (10′)

Учитывая, что функции

$$\Phi_{kn} = D_k r^{\lambda_k+1}\cos\left(\lambda_k - 1\right)\varphi + B_n r^{\tilde{\lambda}_n+1}\cos\left(\tilde{\lambda}_n + 1\right)\varphi$$

удовлетворяют бигармоническому уравнению и граничным условиям (2), (3), функция напряжения Эри с учётом (10′) примет следующий вид:

$$\Phi\left(r,\varphi\right) = D_{-1}r^{3/2}\cos\varphi/2 + D_0 r^2 + D_1 r^{5/2}\cos\varphi/2 + D_2 r^3\cos\varphi +$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\left[D_k r^{k/2+2} + B_k r^{k/2}\right]\cos k\varphi/2.$$

Напряжения и перемещения записываются в виде:

$$\sigma_\varphi = \frac{3}{4}D_{-1}r^{-1/2}\cos\varphi/2 + 2D_0 + \frac{15}{4}D_1 r^{1/2}\cos\varphi/2 + 6D_2 r\cos\varphi +$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\left(\lambda_k+1\right)r^{k/2} + B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)r^{k/2-2}\right]\cos k\varphi/2,$$

$$\sigma_r = \frac{5}{4}D_{-1}r^{-1/2}\cos\varphi/2 + 2D_0 + \frac{9}{4}D_1 r^{1/2}\cos\varphi/2 + 2D_2 r\cos\varphi + \tag{11}$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\left(3-\lambda_k\right)r^{k/2} - B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)r^{k/2-2}\right]\cos k\varphi/2,$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{4}D_{-1}r^{-1/2}\sin\varphi/2 + \frac{3}{4}D_1 r^{1/2}\sin\varphi/2 + 2D_2 r\sin\varphi +$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\left(\lambda_k-1\right)r^{k/2} + B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)r^{k/2-2}\right]\sin k\varphi/2,$$

$$Eu_\varphi\left(r,\varphi\right) = D_{-1}\left(\nu^+/2-4\right)r^{1/2}\sin\varphi/2 + D_1\left(\nu^+/2+4\right)r^{3/2}\sin\varphi/2 +$$

$$+D_2\left(\nu^++4\right)r^2\sin\varphi + \sum_{k=3}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^++4\right)r^{k/2+1} + B_k\tilde{\lambda}_k^-\nu^+ r^{k/2-1}\right]\sin k\varphi/2,$$

$$Eu_r = D_{-1}\left(3\nu^+/2-4\right)r^{1/2}\cos\varphi/2 + 2D_0\nu^- r - D_1\left(5/2\,\nu^+-4\right)r^{3/2}\cos\varphi/2 - \tag{12}$$

$$-D_2\left(3\nu^+-4\right)r^2\cos\varphi - \sum_{k=3}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^+-4\right)r^{k/2+1} + B_k\tilde{\lambda}_k^-\nu^+ r^{k/2-1}\right]\cos\alpha_0 k\varphi,$$

причём, должно иметь место условие равновесия каждого штампа

$$\int_0^1\sigma_\varphi(r,0)d_r = P_0, \quad \int_0^1\sigma_\varphi(r,2\pi)d_r = P_1, \quad \lambda^\pm = \lambda \pm 1,\ \nu^\pm = 1\pm\nu.$$

Входящие в (11), (12) неизвестные D_{-1}, D_0, D_1, D_2, D_k и B_k определяются из граничных условий (4) – (7):

$$1)\ D_{-1}\frac{5}{4}\cos\varphi/2+2D_0+D_1\frac{9}{4}\cos\varphi/2+2D_2\cos\varphi+$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\Big[D_k\lambda_k\left(3-\lambda_k\right)-B_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)\tilde{\lambda}_k\Big]\cos\frac{k}{2}\varphi=f_1\left(\varphi\right), \tag{13.1}$$

$$D_{-1}\frac{1}{4}\sin\varphi/2+D_1\frac{3}{4}\sin\varphi/2+2D_2\sin\varphi+$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\Big[D_k\lambda_k\left(\lambda_k-1\right)+B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)\tilde{\lambda}_k\Big]\sin\frac{k}{2}\varphi=f_2\left(\varphi\right).$$

$$2)\ D_{-1}\frac{5}{4}\cos\varphi/2+2D_0+D_1\frac{9}{4}\cos\varphi/2+2D_2\cos\varphi+$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\Big[D_k\lambda_k\left(3-\lambda_k\right)-B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)\Big]\cos\frac{k}{2}\varphi=f_1\left(\varphi\right),$$

$$D_{-1}\left(\frac{\nu^+}{2}-4\right)\sin\varphi/2+D_1\left(\frac{\nu^+}{2}+4\right)\sin\varphi/2+D_2\left(\nu^++4\right)\sin\varphi+$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\Big[D_k\left(\lambda_k^-\nu^++4\right)+B_k\lambda_k^-\nu^+\Big]\sin\frac{k}{2}\varphi=Ef_2\left(\varphi\right). \tag{13.2}$$

$$3)\ -D_{-1}\left(\frac{3\nu^+}{2}-4\right)\cos\varphi/2+2D_0\nu^--D_1\left(\frac{5\nu^+}{2}-4\right)\cos\varphi/2-D_2\left(3\nu^+-4\right)\cos\varphi-$$

$$-\sum_{k=3}^{\infty}\Big[D_k\left(\lambda_k^+\nu^+-4\right)+B_k\lambda_k^-\nu^+\Big]\cos\frac{k}{2}\varphi=Ef_1\left(\varphi\right),$$

$$D_{-1}\frac{1}{4}\sin\varphi/2+D_1\frac{3}{4}\sin\varphi/2+2D_2\sin\varphi+$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\Big[D_k\lambda_k\left(\lambda_k-1\right)+B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)\Big]\sin\frac{k}{2}\varphi=f_2\left(\varphi\right). \tag{13.3}$$

$$4)\ -D_{-1}\left(\frac{3\nu^+}{2}-4\right)\cos\varphi/2+D_0 2\nu^--D_1\left(\frac{5\nu^+}{2}-4\right)\cos\varphi/2-D_2\left(3\nu^+-4\right)\cos\varphi-$$

$$-\sum_{k=3}^{\infty}\Big[D_k\left(\lambda_k^+\nu^+-4\right)+B_k\lambda_k^-\nu^+\Big]\cos\frac{k}{2}\varphi=f_1\left(\varphi\right)E,$$

$$D_{-1}\left(\frac{\nu^+}{2}-4\right)\sin\varphi/2+D_1\left(\frac{\nu^+}{2}+4\right)\sin\varphi/2+D_2\left(\nu^++4\right)\sin\varphi+$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\Big[D_k\left(\lambda_k^-\nu^++4\right)+B_k\lambda_k^-\nu^+\Big]\sin\frac{k}{2}\varphi=f_2\left(\varphi\right)E. \tag{13.4}$$

Поступая так же, как в работах [2– 6], умножая первые уравнения (13.1) – (13.4) на $\cos m\varphi/2\left(m=0,1,2,...\right)$, а вторые уравнения на $\sin m\varphi/2\left(m=1,2,3,...\right)$ и интегрируя по φ в интервале $\left(0,2\pi\right)$, будем иметь:

1) $D_{-1}=\dfrac{2}{\pi}\left[\tilde f_{11}-3\tilde f_{21}\right],\quad 2D_0=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1\left(\varphi\right)d\varphi,\ D_1=-\dfrac{2}{3\pi}\left[\tilde f_{11}-5\tilde f_{21}\right],$

$$D_2=\tilde f_{12}/2\pi=\tilde f_{22}/2\pi,\ \lambda_k D_k=\frac{\tilde f_{1k}+\tilde f_{2k}}{2\pi},\quad B_k\tilde\lambda_k\left(\tilde\lambda_k+1\right)=\frac{\tilde f_{2k}-\tilde f_{1k}}{2\pi},$$

$$\tilde f_{1k}=\int\limits_0^{2\pi} f_1\left(\varphi\right)\cos\frac{k\varphi}{2}d\varphi,\quad \tilde f_{2k}=\int\limits_0^{2\pi} f_2\left(\varphi\right)\sin\frac{k\varphi}{2}d\varphi,\quad (k=1,2,3,...), \tag{14}$$

причём, между функциями $f_1\left(\varphi\right)$ и $f_2\left(\varphi\right)$ имеет место соотношение

$$\tilde f_{22}-\tilde f_{12}=0. \tag{15}$$

2) $D_{-1}=-\dfrac{\left(\nu^+/2+4\right)\tilde f_{11}-9/4\,\tilde f_{21}E}{\pi\left(\nu^+/2-14\right)},\quad 2D_0=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1\left(\varphi\right)d\varphi,$

$$D_1=\frac{\tilde f_{11}\left(\nu^+/2-4\right)-\tilde f_{21}E\,5/4}{\pi\left(\nu^+/2-14\right)},\quad D_2=\frac{\tilde f_{12}}{2\pi}=\frac{E\tilde f_{22}}{\pi\left(\nu^++4\right)}, \tag{16}$$

$$D_k=\frac{\tilde f_{1k}\nu^++\tilde f_{2k}E\left(k/2-1\right)}{2\pi\left[\nu^++2\left(k/2-1\right)\right]},\ B_k=\frac{-\tilde f_{1k}\left(\nu^+k/2+4\right)+\tilde f_{2k}\left(k/2+1\right)\left(2-k/2\right)E}{2\pi\left[\nu^++2\left(k/2-1\right)\right]k/2}.$$

Для этой задачи вместо (15) имеем следующее соотношение:

$$2E\tilde f_{22}-(\nu^++4)\,\tilde f_{12}=0. \tag{17}$$

3) $D_{-1}=-\dfrac{3E\tilde f_{11}+2(5\nu^+-8)\,\tilde f_{21}}{2\pi(\nu^+-4)},\quad 2D_0=\dfrac{E}{4\pi\nu^-}\int\limits_0^{2\pi} f_1\left(\varphi\right)d\varphi,$

$$D_1=\frac{\left[E\tilde f_{11}+2(3\nu^+-4)\,\tilde f_{21}\right]}{2\pi(\nu^+-4)},\quad (3\nu^+-4)D_2=\frac{-E}{\pi}\tilde f_{12},\ D_2=\frac{1}{2\pi}\tilde f_{22}, \tag{18}$$

$$D_k=\frac{1}{\pi}\frac{k\left(k/2-1\right)E\tilde f_{1k}+k\nu^+\tilde f_{2k}}{k\left(k-\nu^-\right)},\ B_k=\frac{-1}{\pi}\frac{k\left(k/2+1\right)E\tilde f_{1k}+\left(\left(k+4\right)\nu^+-8\right)\tilde f_{2k}}{k\left(k-\nu^-\right)}.$$

Здесь функции $f_1\left(\varphi\right)$ и $f_2\left(\varphi\right)$ связаны соотношением

$$\left(3\nu^+-4\right)\tilde f_{22}+2E\tilde f_{12}=0. \tag{19}$$

4) $D_{-1}=\dfrac{E\left[\left(\nu^+/2+4\right)\tilde f_{11}+\left(5\nu^+/2-4\right)\tilde f_{21}\right]}{\pi\Delta_1},\quad D_0=\dfrac{E}{4\pi\nu^-}\int\limits_0^{2\pi} f_1\left(\varphi\right)d\varphi,\quad (20)$

$$D_1 = \frac{-E\left[\left(\nu^+/2-4\right)\tilde{f}_{11} + \left(3\nu^+/2-4\right)\tilde{f}_{21}\right]}{\pi\Delta_1}, \; \left(3\nu^+ - 4\right)D_2 = \frac{-E\tilde{f}_{12}}{\pi}, \; \left(\nu^+ + 4\right)D_2 = \frac{E\tilde{f}_{22}}{\pi},$$

$$D_k = -\frac{E}{\left(\nu^+ - 4\right)}\frac{\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k}}{2\pi}, \quad B_k = \frac{\left(k\nu^+/2+4\right)\tilde{f}_{1k} - \left(\left(k/2+2\right)\nu^+ - 4\right)\tilde{f}_{1k}}{2\pi},$$

$$\Delta_1 = \nu^+\nu^+/2 - 16\nu^+ + 8.$$

В данном случае связь между функциями $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ такова:

$$\left(3\nu^+ - 4\right)\tilde{f}_{22} + \left(\nu^+ + 4\right)\tilde{f}_{12} = 0. \tag{21}$$

Итак, решения поставленных выше задач получены в виде сходящихся рядов (11) и (12), коэффициенты которых определены в явном виде (14), (16), (18) и (20).

Заметим, что в ходе решения каждой из этих задач между граничными условиями на обводе диска возникает определённая связь, которая, как показывает дальнейшее исследование, имеет конкретный механический смысл – это условие статического равновесия диска в направлении оси ox. Т.е. система сил, приложенная или возникшая на обводе диска, самоуравновешена на оси ox. Этого и следовало ожидать, так как прижимающие штампы силы P_0 и P_α не участвуют в условии статического равновесия в направлении оси ox. Остальные уравнения статического равновесия удовлетворяются автоматически.

Как видно из (11), при любых условиях нагружения обвода диска напряжения в окрестности вершины радиальной трещины имеют особенность типа $r^{-1/2}$. Причём, степенная особенность напряжений обусловлена как первыми членами правой части формул (11), так и соответствующими членами рядов с множителями $r^{k/2-2}$ при $k = 3$.

Коэффициенты при такой особенности в общем случае отличны от нуля. Однако, подходящим подбором внешних воздействий можно из решения (11) исключить и степенную особенность.

Принимая, например, в первой задаче

$$f_2(\varphi) = 0, \quad f_1(\varphi) = P\left[\delta\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right)\right], \tag{22}$$

для коэффициентов Фурье получим

$$\tilde{f}_{2k} = 0, \left(k = 1, 2, 3, \ldots\right), \qquad \tilde{f}_{1k} = 2P\cos\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{4},$$

откуда следует

$$\tilde{f}_{11} = \tilde{f}_{12} = \tilde{f}_{13} = 0.$$

Таким образом, при граничных условиях (22) удовлетворяется соотношение (15), коэффициенты D_{-1} и B_3 становятся равными нулю, а в выражениях для напряжений исчезнут члены со степенными особенностями.

Отметим одно важное обстоятельство. В отличие от решения задач для кругового сектора с произвольным углом раствора α [2– 6], в решениях задач для кругового диска с радиальной трещиной отсутствуют особенности напряжений типа $r^{-1+\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < 0,5$ ($\varepsilon \to 0$ при $\alpha \to 2\pi$). Более того, в первой задаче для сектора [2] коэффициенты при такой особенности принимают отличные от нуля конечные значения, что, с точки зрения хрупкого разрушения, является наиболее опасным случаем. Тем самым, задачи для диска с радиальной трещиной в корне отличаются от задач для сектора и предельным переходом невозможно достичь совпадения решений этих задач.

Покажем на одном примере те необходимые шаги, с помощью которых из решения задач для сектора можно получить соответствующее решение для диска с радиальной трещиной.

Рассмотрим случай, когда на дуговую часть контура сектора заданы перемещения [6]. Полагая в решении этой задачи $\alpha = 2\pi$, например, для нормального напряжения получим

$$\sigma_r = \frac{5}{4} D_{-1} r^{-1/2} \cos\varphi/2 + 2D_0 + \frac{9}{4} D_1 r^{1/2} \cos\varphi/2 - 2D_2 r \cos\varphi -$$

$$-B_2\tilde{\lambda}_2\left(\tilde{\lambda}_2+1\right)r^{-1}\cos\varphi + \sum_{k=3}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\left(3-\lambda_k\right)r^{\lambda_k-1} + B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)r^{\tilde{\lambda}_k-1}\right]\cos\alpha_0 k\varphi,$$

где

$$D_2 = -\frac{E}{2\pi}\frac{\tilde{f}_{12}+\tilde{f}_{22}}{\nu^+-4}, \quad B_2 = \frac{E}{2\pi}\frac{\tilde{f}_{11}(\nu^+ + 4) + \tilde{f}_{22}\left(3\nu^+-4\right)}{\nu^+(\nu^+-4)}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{2\pi}{\alpha} - 1.$$

В выражении σ_r для диска с радиальной трещиной отсутствует слагаемое с множителем r^{-1}, а вместо D_2 имеем:

$$\frac{E}{\pi\left(\nu^+ + 4\right)}\tilde{f}_{22} \quad \text{или} \quad \frac{-E}{\left(3\nu^+ - 4\right)\pi}\tilde{f}_{12}.$$

Оба решения совпадут, если учесть условие (21), левая часть которого входит в числитель B_2. Правда, в решении этой задачи для сектора слагаемое с множителем r^{-1} исчезает, благодаря множителю $\tilde{\lambda}_2$. Но в решении первой задачи для сектора, когда на дуговой части контура заданы внешние усилия, множитель $\tilde{\lambda}_2$ отсутствует и совпадение двух решений возможно только при повторном применении условий (15).

Заключение

1. В отличие от решения задач для кругового сектора с произвольным углом раствора α [2– 6], в решениях задач для кругового диска с радиальной трещиной отсутствуют особенности напряжений типа $r^{-1+\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < 0{,}5$ ($\varepsilon \to 0$ при $\alpha \to 2\pi$). При любых условиях нагружения обвода диска напряжения в окрестности вершины радиальной трещины имеют особенность типа $r^{-1/2}$.
2. Возникшие определённые связи между граничными условиями на обводе диска имеют конкретный механический смысл – это условия статического равновесия диска в направлении оси ox.

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M.L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extentions. // Journal of applied mechanics. 1952. December. P.526 – 528.
2. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды международной конференции, посвящённой 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна, 25 – 28 сентября 2007, Цахкадзор, Армения. С. 368 – 372.
3. Саргсян А.М. Об упругом равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VII международной конференции, сентябрь 19 – 23, Горис – Степанакерт, 2008. С. 394 – 398.
4. Саргсян А.М. О равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. №4. С.31-37.
5. Саргсян А.М. О влиянии типа граничных условий на дуговую часть контура кругового сектора на поведение напряжений в условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды международной конференции, посвящённой 100-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна, 08 – 12 октября 2012, Цахкадзор, Армения. Т.2. С.171 – 175.
6. Саргсян А.М. О влиянии типа граничных условий на дуговую часть контура кругового сектора на поведение напряжений в условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. Часть II. //Изв. НАН Армении. Механика, 2014. Т.67. №3. С.26–33.

Сведения об авторах:

Нерсисян Гриша Геворкович – к.ф.-м.н., доцент, Армянский Национальный Аграрный Университет,
Адрес: Армения, 0037, Ереван, пр.Азатутян, 7, кв.7.
Тел.: 20-68-79

Саргсян Азат Мкртычевич – к. ф.-м.н., ведущий научный сотрудник
Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: 52-48-90

Поступила в редакцию 18.02.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

Джилавян С.А., Казарян А.А.

Բանալի բառեր. դիֆրակցիա, ալիքային դաշտ, պիեզոէլեկտրիկ, մետաղական շերտ, դիէլեկտրիկ, կիսաանվերջ շերտ, մակերևութային ալիք:
Ключевые слова: дифракция, волновое поле, пьезоэлектрик, металлический слой, диэлектрик, полубесконечный слой, поверхностная волна.
Key words: diffraction,wave fild, piezoelectric,metallic layer, dielectric, semi-infinit layer,surface wave.

Ջիլավյան Ս.Հ., Ղազարյան Հ.Ա.

Պիեզոէլեկտրական կիսատարածությունում սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան դիէլեկտրիկ կիսատարածությունում առկա կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա

Դիէլեկտրիկ կիսատարածությունում գտնվող կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա սահքի հարթ էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը բերվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի տիպի խնդրի իրական առանցքի վրա:
Դիֆրակցիայի խնդիրը լուծվում է օգտագործելով Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդը: Կիսաանվերջ մետաղական շերտի՝ էլեկտրոդի ,առկայությունը բերում է ալիքների դիֆրակցիայի՝ պիեզոէլեկտրական կիսատարածությունում տարածվում են ծավալային և երկու մակերևութային ալիքներ: Բացահայտվել են ալիքային դաշտի մի քանի առանձնահատկություններ:

Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A.

Diffraction of Plane Shear Wave in Piezoelectric Semi-Space at a Semi-Infinite Metallic Layer in the Dielectric Medium

The problem of diffraction of plane shear electro-elastic wave in a piezoelectric medium with a semi-infinite metallic layer in dielectric half-space is reduced to the solution to Riemann problem in analytic functions theory. The problem of diffraction is solved using Fourier transformation. The presence of the semi-infinite metallic layer leads to a diffraction of waves and some special features,a result of which two surface electro-elastic waves occur in a piezoelectric medium.

Задача дифракции плоской электроупругой волны сдвига в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлектрическом полупространстве сводится к решению задачи типа Римана на действительной оси в теории аналитических функций. Решается задача методом интегрального преобразования Фурье. Наличие полубесконечного металлического слоя (электрода) в диэлектрике приводит к распространению дифрагированных объёмных и двух поверхностных электроупругих волн в пьезоэлектрическом полупространстве. Выявлены некоторые особенности волнового поля.

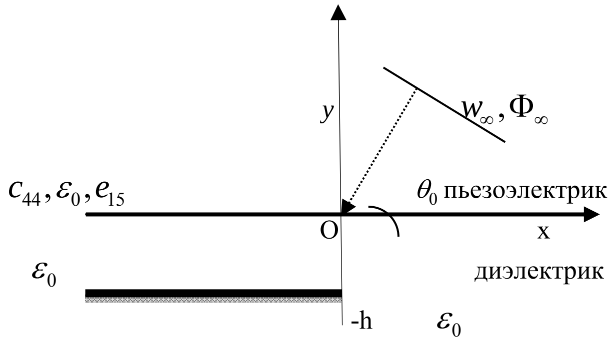
Введение. При исследовании волновых процессов в деформируемых средах некоторые характерные свойства существенно влияют на волновое поле, но важным из них является конструктивная неоднородность (слоистость, наличие включений), которая порождает новые эффекты – локализованные волны [1-4]. Изучения вопросов дифракции сдвиговых плоских волн и распространения локализованных (поверхностных) волн относятся к числу наиболее актуальных проблем динамических задач составных электроупругих сред. Задачи распространения сдвиговых поверхностных волн в сложных структурах при разных сочетаниях граничных условий исследованы во многих работах в этой области. Известно, что различные физико-механические свойства контактирующих сред приводят к существенным изменениям волнового поля, так, в пьезоэлектрическом полупространстве без акустического контакта с диэлектрической средой распространяются поверхностные сдвиговые волны [2, 3]. В данной работе рассмотрена задача дифракции плоской волны сдвига в электроупругой составной среде (пьезоэлектрик-диэлектрик) при наличии тонкого полубесконечного, металлического, заземлённого слоя (электрода) в диэлектрике. Этот слой является причиной дифракции электроупругой волны, при этом, в пьезоэлектрическом полупространстве возбуждаются поверхностные волны сдвига и проявляются некоторые особые явления. Задача решается методом интегрального преобразования Фурье, используя метод факторизации, аппарат обобщённых функций и методы теории функций комплексного переменного [5, 6]. Задача сводится к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси. Не только ярко выраженная анизотропия пьезоэлектрика усложняет исследование волнового процесса, но и ряд новых свойств, проявляющихся в результате взаимодействия физических полей разной природы.

1.Постановка задачи. Рассматривается задача дифракции сдвиговой плоской электроупругой волны в составном пространстве, отнесённом к декартовой системе координат $Oxyz$. Пьезоэлектрическая среда – пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла, занимает полупространство $y>0$, а диэлектрическая среда – полупространство $y<0$. Диэлектрическая среда граничит с пьезоэлектрическим полупространством в плоскости Oxz без акустического контакта. В пьезоэлектрическом полупространстве из бесконечности под углом θ_0 (угол скольжения падающей волны) к плоскости $y=0$ распространяется электроупругая волна сдвига (фиг.1)

$$w_\infty(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}$$

$$\Phi_\infty(x,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0} \tag{1.1}$$

В диэлектрическом полупространстве заземлённый металлический слой (электрод) занимает полуплоскость $y=-h,\ x<0$. Ставится задача определения электроупругого волнового поля в рассматриваемой среде, обусловленного наличием пьезоэффекта в полупространстве $y>0$ и полубесконечного металлического слоя в диэлектрическом полупространстве $y<0$.



Фиг.1

В этих соотношениях ω – частота колебаний, t – параметр времени, $k = \omega/c$, $c = \sqrt{c_{44}(1+\chi)/\rho}$ – волновое число и скорость распространения сдвиговой электроупругой волны в пьезоэлектрической среде, соответственно, $e_{15}, \varepsilon_{11}, c_{44}$ – пьезоэлектрическая, диэлектрическая и упругая постоянные пьезоэлектрика, а ρ – плотность, ε_0 – диэлектрическая постоянная среды $y < 0$.

Пьезоэлектрическая среда ($y > 0$) находится в условиях антиплоской деформации. Отметим, что учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля (временной множитель $e^{-i\omega t}$) и задача решается в амплитудах. Для определения амплитуды перемещения $w(x, y)$ точек в полупространстве $y > 0$ и амплитуд электрических потенциалов (в квазистатическом приближении) в двух полупространствах $\Phi(x, y), \Phi_1(x, y)$ имеем следующие уравнения [1]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 w = 0 \\ &\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w = 0 \end{aligned}\right\} \quad y > 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0 \qquad y < 0 \tag{1.3}$$

Решения уравнений (1.2), (1.3) должны удовлетворять следующим условиям на плоскости $y = 0$ (непрерывность электрического поля) [1-4]:

$$\sigma_{yz}(x, +0) = 0$$

$$\Phi(x,0) = \Phi_1(x,0), \qquad D_2(x,0) = D_{12}(x,0) \tag{1.4}$$

Здесь $\sigma_{yz}(x, y)$ – амплитуда напряжения в пьезоэлектрике, $D_2(x, y)$, $D_{12}(x, y)$ – составляющие вектора электрической индукции в пьезоэлектрике и диэлектрике, соответственно:

$$\sigma_{yz} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad D_2 = e_{15}\frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad y > 0$$

$$D_{12} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \qquad y < 0 \tag{1.5}$$

При наличии металлического слоя в полуплоскости $y = -h, x < 0$ имеют место следующие условия:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(x, -h+0) = \Phi_1(x, -h-0) = \Phi^+(x) \\ &D_{12}(x, -h+0) - D_{12}(x, -h-0) = -\varepsilon_0 \Psi^-(x) \end{aligned} \tag{1.6}$$

В соотношениях (1.6) введены функции:

$$\Phi^+(x) = \Phi_1(x, -h)\theta(x), \quad \varepsilon_0 \Psi^-(x) = d(x)\theta(-x),$$

где $d(x)$ представляет разницу значений $D_{12}(x, y)$ на $y = -h+0$ и $y = -h-0$ при $x < 0$, $\theta(x)$ – известная функция Хевисайда.

2. Решение задачи. Введём функции

$$\begin{aligned} &u(x, y) = w(x, y) - w_\infty(x, y) \\ &\varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_\infty(x, y) \end{aligned} \qquad y > 0 \tag{2.1}$$

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x к уравнениям (1.2), (1.3), получим уравнения относительно трансформантов [2-4]:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\overline{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2)\overline{u} = 0 \\ &\frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2\overline{\varphi} + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{u} = 0 \end{aligned} \qquad y > 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{d^2\overline{\Phi_1}}{dy^2} - \sigma^2\overline{\Phi_1} = 0 \qquad y < 0 \tag{2.3}$$

и следующие условия при $y = 0$:

$$c_{44}\frac{d\overline{w}}{dy} + e_{15}\frac{d\overline{\Phi}}{dy} = 0, \; e_{15}\frac{d\overline{w}}{dy} - \varepsilon_{11}\frac{d\overline{\Phi}}{dy} = -\varepsilon_0\frac{d\overline{\Phi_1}}{dy}, \; \overline{\Phi} = \overline{\Phi_1} \tag{2.4}$$

и условия при $y = -h$:

$$\begin{aligned} &\overline{\Phi^+}(\sigma) = \overline{\Phi_1}(\sigma, -h+0) = \overline{\Phi_1}(\sigma, -h-0) \\ &\overline{D_{12}}(\sigma, -h+0) - \overline{D_{12}}(\sigma, -\mathrm{h}-0) = -\varepsilon_0\overline{\Psi^-}(\sigma) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для трансформантов Фурье искомых функций получим:

$$\begin{aligned} &\overline{w} = C_1(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}\,y} + 2\pi e^{-iky\sin\theta_0}\delta(\sigma - k\cos\theta_0) \\ &\overline{\Phi} = C_2(\sigma)e^{-|\sigma|y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{w} \end{aligned} \qquad y > 0$$

$$\overline{\Phi_1} = C_3(\sigma)\operatorname{ch}|\sigma|y + C_4(\sigma)\operatorname{sh}|\sigma|y \qquad -h < y < 0$$

$$\overline{\Phi_1} = C_5(\sigma)e^{|\sigma|y} \qquad y < -h \tag{2.6}$$

Здесь $\delta(\sigma)$ – функция Дирака, $\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ обходит точку $\sigma=-k$ сверху, а точку $\sigma=k$ – снизу [4-5]. Для функций $C_m(\sigma)$ $m=\overline{1,5}$ имеем:

$$C_1(\sigma)=\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_0}{e_{15}}\overline{\Phi^+}e^{|\sigma|h}+\frac{\varepsilon_{11}\mathrm{sh}|\sigma|h+\varepsilon_0\mathrm{ch}|\sigma|h}{e_{15}|\sigma|}\overline{\Psi^-}-2\pi\delta(\sigma-k\cos\theta_0),$$

$$C_2(\sigma)=-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}}\overline{\Phi^+}e^{|\sigma|h}-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}}\frac{\mathrm{ch}|\sigma|h}{|\sigma|}\overline{\Psi^-},\qquad C_5(\sigma)=e^{|\sigma|h}\overline{\Phi^+}$$

$$C_3(\sigma)=\overline{\Phi^+}e^{|\sigma|h}+\frac{\mathrm{sh}|\sigma|h}{|\sigma|}\overline{\Psi^-},\tag{2.7}$$

$$C_4(\sigma)=\overline{\Phi^+}e^{|\sigma|h}+\frac{\mathrm{ch}|\sigma|h}{|\sigma|}\overline{\Psi^-}$$

Относительно трансформантов $\overline{\Phi^+}(\sigma),\overline{\Psi^-}(\sigma)$ получим следующее уравнение:

$$2|\sigma|K(\sigma)\overline{\Phi^+}(\sigma)+\overline{\Psi^-}(\sigma)=\frac{8\pi e_{15}k(1+\chi)\cos\theta_0 e^{-kh\cos\theta_0}}{K_2(k\cos\theta_0)}\delta(\sigma-k\cos\theta_0),\tag{2.8}$$

где

$$K(\sigma)=\frac{K_1(\sigma)}{K_2(\sigma)}\tag{2.9}$$

$$K_0(\sigma)=1+\chi-\frac{\chi|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k^2}},\qquad K_1(\sigma)=\varepsilon_{11}(1+\chi)+\varepsilon_0K_0(\sigma)$$

$$K_2(\sigma)=\varepsilon_0(1+e^{-2|\sigma|h})K_0(\sigma)+(1+\chi)\varepsilon_{11}(1-e^{-2|\sigma|h})\tag{2.10}$$

Прежде чем приступить к решению уравнения (2.8), рассмотрим частный случай, когда металлический слой занимает в диэлектрике всю плоскость $y=-h$. Тогда следует принять $\overline{\Phi^+}(\sigma)=0$, т.е $\Phi_1(x,y)=0$ при $y=-h$, $-\infty<x<\infty$. Из (2.6), (2.7), применяя обратное преобразование Фурье, получим амплитуду перемещений пьезоэлектрической среды ($y\ge 0$):

$$w(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}+(2A_0-1)e^{iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0},$$

$$A_0=2(1+\chi)e^{-kh\cos\theta_0}\frac{\varepsilon_{11}\mathrm{sh}(kh\cos\theta_0)+\varepsilon_0\mathrm{ch}(kh\cos\theta_0)}{K_2(k\cos\theta_0)},$$

при $\chi=0$ (отсутствие пьезоэффекта) $A_0=1$. Как и следовало ожидать, волновое поле перемещения в пьезоэлектрическом полупространстве состоит только из падающей волны и отражённой от свободной границы волны.

Вернёмся к решению полученного функционального уравнения (2.8), которое можно рассматривать как краевую задачу типа Римана на действительной оси. Функция $K(\sigma)$ имеет нули только в точках $\pm\sigma_1$, т.к σ_1 – единственный положительный корень уравнения $K_1(\sigma)=0$ и полюса – только в точках $\pm\sigma_2$,

σ_2 – единственный положительный корень уравнения $K_2(\sigma)=0$. Показано, что при $\sigma>k$ функции $K_0(\sigma)$, $K_1(\sigma)$, $K_2(\sigma)$ возрастают и $\sigma_0>\sigma_2>\sigma_1>k$

$K_0(\pm\sigma_0)=K_1(\pm\sigma_1)=K_2(\pm\sigma_2)=0,\ K_2(\sigma)>0$ при $\sigma>\sigma_0$

$$\sigma_0=k\frac{1+\chi}{\sqrt{1+2\chi}},\qquad \sigma_1=\sigma_0\frac{(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})\sqrt{1+2\chi}}{\sqrt{(1+\chi)^2(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})^2-\varepsilon_0^2\chi^2}}$$

Принимается, что в данной задаче типа Римана действительная ось обходит не только точки ветвления $\pm k$ функции $\gamma(\alpha)=\sqrt{\alpha^2-k^2}$, но и точки $\sigma=-\sigma_1,\sigma=-\sigma_2$ сверху, а точки $\sigma=\sigma_1$, $\sigma=\sigma_2$ снизу, обеспечивая условия уходящей волны. Функциональное уравнение (2.8) решается, используя такую же методику, как в [2,4,6-8], решения строятся, факторизируя функцию $K(\sigma)$, т.к $K(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$, $\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$, представляя

$$K(\sigma)=K^+(\sigma)K^-(\sigma), \tag{2.11}$$

где функции $K^\pm(\alpha)$. $\alpha=\sigma+i\tau$ регулярны и не имеют нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$ и $\operatorname{Im}\alpha<0$, соответственно, а $K^+(\sigma)$, $K^-(\sigma)$ – граничные значения этих функций.

При этом, $K^\pm(\alpha)\to 1$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности [2,4]

$$K^+(\alpha)=\exp(F^+(\sigma)),\ K^-(\alpha)=\exp(F^-(\sigma))$$

$$F^+(\sigma)=\int_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx,\ F^-(\sigma)=F^+(-\sigma),$$

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln K(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma,\ K^-(-\alpha)=K^+(\alpha)$$

Имея в виду (2.11) и представление

$$|\sigma|=(\sigma-i0)^{\frac{1}{2}}(\sigma+i0)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.12}$$

уравнение (2.8) сводится к виду

$$2(\sigma+i0)^{\frac{1}{2}}K^+(\sigma)\overline{\Phi^+}(\sigma)+\frac{\overline{\Psi^-}(\sigma)}{(\sigma-i0)^{1/2}K^-(\sigma)}=8\pi e_{15}a_0\delta(\sigma-k\cos\theta_0), \tag{2.13}$$

где $a_0=\dfrac{(1+\chi)\sqrt{k\cos\theta_0}K^+(k\cos\theta_0)e^{-kh\cos\theta_0}}{K_1(k\cos\theta_0)}$.

Из уравнения (2.13), используя формулу

$$2\pi i\delta(\sigma-k\cos\theta_0)=\frac{1}{\sigma-k\cos\theta_0-i0}-\frac{1}{\sigma-k\cos\theta_0+i0}, \tag{2.14}$$

получим следующие выражения для искомых функций:

$$\overline{\Psi^-}(\sigma)=-\frac{4ie_{15}a_0(\sigma-i0)^{1/2}K^-(\sigma)}{\sigma-k\cos\theta_0-i0} \tag{2.15}$$

$$\overline{\Phi^+}(\sigma)=\frac{2ie_{15}a_0}{(\sigma+i0)^{1/2}K^+(\sigma)(\sigma-k\cos\theta_0+i0)}. \qquad (2.16)$$

Следовательно, имея из (2.7) функции $C_m(\sigma)\ m=\overline{1,5}$, получим выражения функций $\overline{w}(\sigma,y),\overline{\Phi}(\sigma,y),\overline{\Phi_1}(\sigma,y)$. После обратного преобразования Фурье

$$w(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{w}e^{-i\sigma x}d\sigma,$$

амплитуда перемещений в пьезоэлектрическом полупространстве представляется в виде

$$w(x,y)=\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_0}{2\pi e_{15}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{|\sigma|h}e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}e^{-i\sigma x}\left(\overline{\Phi^+}(\sigma)+\frac{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}+(\varepsilon_0-\varepsilon_{11})e^{-2|\sigma|h}}{2|\sigma|(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})}\overline{\Psi^-}(\sigma)\right)d\sigma-$$

$$-e^{-ikx\cos\theta_0+iky\sin\theta_0}+e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}, \qquad (2.17)$$

а амплитуда потенциала электрического поля при $y>0$

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C_2(\sigma)e^{-|\sigma|y}e^{-i\sigma x}dx+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w(x,y) \qquad (2.18)$$

Рассмотрим волновое поле в пьезоэлектрическом полупространстве ($y>0$), когда $x<0$. Тогда, с помощью формулы (2.14), имея в виду (2.15), выражение (2.17) представляется в виде:

$$w(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}+(A_2-1)e^{-ikx\cos\theta_0+iky\sin\theta_0}+$$

$$+B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ie^{-|\sigma|h}|\sigma|e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}e^{-i\sigma x}d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-k^2}(\sigma+i0)^{1/2}K^+(\sigma)K_2(\sigma)(\sigma-k\cos\theta_0+i0)}, \qquad (2.19)$$

где $A_2=2A_{0,}\ \pi B=-\varepsilon_0\varepsilon_{11}\chi a_0$.

Таким образом, волновое поле состоит из падающей волны, отражённой волны и дифрагированной, обусловленной наличием полубесконечного металлического слоя в диэлектрическом полупространстве.

Следует сразу же отметить, что при $x>0$ из формулы (2.17), имея в виду (2.14) и (2.15), получим амплитуду перемещения $w(x,y)$ точек пьезоэлектрического полупространства при $x>0$:

$$W(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}+(A_1-1)e^{-ikx\cos\theta_0+iky\sin\theta_0}+$$

$$+B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i(\sigma-i0)^{1/2}K^-(\sigma)e^{-|\sigma|h}e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}e^{-i\sigma x}d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-k^2}K_1(\sigma)(\sigma-k\cos\theta_0-i0)}, \qquad (2.20)$$

$A_1=\dfrac{2(1+\chi)(\varepsilon_{11}+\varepsilon_0)}{K_1(k\cos\theta_0)}$, при $\chi=0$ получим $A_1=2$.

Рассмотрим интеграл в формуле (2.19)

$$I_2(x,y)=B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sigma+i0)^{-1/2}i|\sigma|e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}e^{-i\sigma x}d\sigma}{K^+(\sigma)M_2(|\sigma|,\gamma)(\sigma-k\cos\theta_0+i0)} \quad x<0 \qquad (2.21)$$

где принято, что

$M_2(|\sigma|,\gamma) \equiv M_2(\sigma) = e^{|\sigma|h}\sqrt{\sigma^2-k^2}K_2(\sigma)$, т.е.

$M_2(|\sigma|,\gamma) = \varepsilon_0(e^{|\sigma|h}+e^{-|\sigma|h})(\gamma(1+\chi)-\chi|\sigma|)+\varepsilon_{11}(1+\chi)\gamma(e^{|\sigma|h}-e^{-|\sigma|h})$,

здесь $\gamma=\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}$.

Интеграл (2.21) можно представить в следующем виде:

$$I_2(x,y) = I_2^{(1)}(x,y)+I_2^{(2)}(x,y) \qquad x<0 \tag{2.22}$$

$$I_2^{(1)} = B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sigma+i0)^{-1/2}i\sigma e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}}e^{-i\sigma x}d\sigma}{K^+(\sigma)N_2(\sigma,\gamma)(\sigma-k\cos\theta_0+i0)} \tag{2.23}$$

$$I_2^{(2)} = B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ie^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}e^{-i\sigma x}}{(\sigma+i0)^{1/2}K^+(\sigma)}\left(\frac{|\sigma|}{M_2(|\sigma|,\gamma)}-\frac{\sigma}{N_2(\sigma,\gamma)}\right)\frac{d\sigma}{(\sigma-k\cos\theta_0+i0)}, \tag{2.24}$$

где

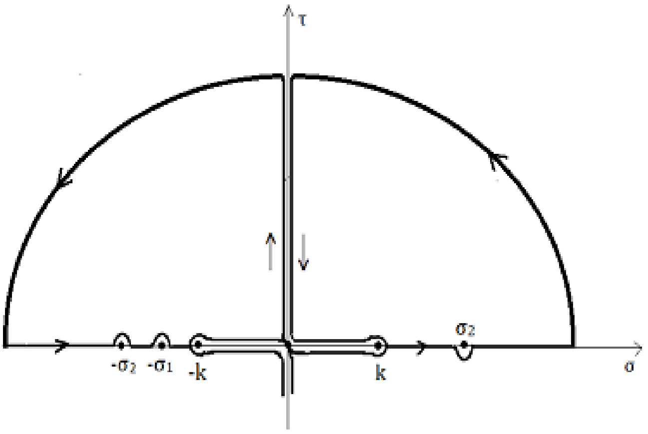
$$N_2(\sigma,\gamma)\equiv N_2(\sigma) = \varepsilon_0(e^{\sigma h}+e^{-\sigma h})(\gamma(1+\chi)-\chi\sigma)+\varepsilon_{11}(1+\chi)\gamma(e^{\sigma h}-e^{-\sigma h})$$

$N_2(\sigma,\gamma)=M_2(\sigma,\gamma)$ при $|\sigma|=\sigma$.

Преобразуем интегралы (2.23), (2.24) методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$, рассматривая при этом комплексную плоскость с разрезами, показанными на (фиг.2). Путь интегрирования замыкается в верхней полуплоскости, а действительная ось обходит точку $-\sigma_2$ сверху, а точку σ_2 – снизу, т.к. σ_2 – единственный положительный корень функции $K_2(\sigma)$. Аналитическое продолжение функции $N_2(\sigma)$, т.е. функция $N_2(\alpha)$ с такими разрезами в комплексной плоскости не имеет чисто мнимых корней, не имеет также комплексных корней, т.к. в противном случае получим составляющую приходящей волны, а это противоречит поставленной задаче (принцип уходящей волны) [2,7,8]. Аналитическое продолжение подынтегральной функции (2.23) внутри контура интегрирования имеет единственную особую точку $\sigma=\sigma_2$, где имеет простой полюс.

Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ представляется в виде

$$|\alpha| = \begin{cases}\alpha, \operatorname{Re}\alpha>0\\ -\alpha, \operatorname{Re}\alpha<0\end{cases} \tag{2.25}$$



Фиг.2

После контурного интегрирования, имея в виду вычет подынтегральной функции, получим:

$$I_2^{(1)}(x,y)=I_{20}^{(1)}(x,y)+w_*^{(2)}(x,y) \tag{2.26}$$

$$I_{20}^{(1)}(x,y)=I_{21}^{(1)}(x,y)+I_{22}^{(1)}(x,y)+I_{23}^{(1)}(x,y)+I_{24}^{(1)}(x,y)$$

$$I_2^{(2)}(x,y)=-B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\tau)^{1/2}e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}y}e^{-\tau|x|}}{K^+(i\tau)}\left(\frac{1}{M_2(-i\tau,-i\sqrt{k^2+\tau^2})}+\frac{1}{N_2(i\tau,-i\sqrt{k^2+\tau^2})}\right)\frac{d\tau}{i\tau-k\cos\theta_0},$$

$$I_{21}^{(1)}(x,y)=-B\int_0^{\infty}\frac{(i\tau)^{1/2}e^{-i\sqrt{k^2+\tau^2}y}e^{-\tau|x|}d\tau}{K^+(i\tau)N_2(i\tau,i\sqrt{k^2+\tau^2})(i\tau-k\cos\theta_0)},$$

$$I_{24}^{(1)}(x,y)=B\int_0^{\infty}\frac{(i\tau)^{1/2}e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}y}e^{-\tau|x|}d\tau}{K^+(i\tau)N_2(i\tau,-i\sqrt{k^2+\tau^2})(i\tau-k\cos\theta_0)} \tag{2.27}$$

$$I_{22}^{(1)}(x,y)=-B\int_0^{k}\frac{i\sigma e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}}e^{i\sigma|x|}d\sigma}{(\sigma+i0)^{1/2}K^+(\sigma)N_2(\sigma,i\sqrt{k^2-\sigma^2})(\sigma-k\cos\theta_0+i0)}$$

$$I_{23}^{(1)}(x,y)=B\int_0^{k}\frac{i\sigma e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}}e^{i\sigma|x|}d\sigma}{(\sigma+i0)^{1/2}K^+(\sigma)N_2(\sigma,-i\sqrt{k^2-\sigma^2})(\sigma-k\cos\theta_0+i0)}$$

$$w_*(x,y)=A_*^{(2)}e^{-\sqrt{\sigma_2^2-k^2}y}e^{i\sigma_2|x|} \tag{2.28}$$

$$A_*^{(2)}=\frac{Bi\sqrt{\sigma_2}e^{-\sigma_2 h}}{(\sigma_2-k\cos\theta_0)K^+(\sigma_2)\sqrt{\sigma_2{}^2-k^2}K_2'(\sigma_2)},\quad K_2'(\sigma_2)=\left.\frac{dK_2}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_2}$$

где (2.28) представляет амплитуду поверхностной волны

$$W_*(x,y,t)=w_*(x,y)e^{-i\omega t}$$

Таким образом, (2.11) получим в виде суммы регулярных интегралов, амплитуд падающей и отражённой волн, а также поверхностной волны.

$$w(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}+(A_2-1)e^{-ikx\cos\theta_0+iky\sin\theta_0}+$$
$$+I_{20}^{(1)}(x,y)+I_2^{(2)}(x,y)+A_*^{(2)}e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}e^{i\sigma_2|x|} \qquad (2.29)$$

На граничной поверхности $y=0$ амплитуда поверхностной волны принимает максимальное значение. Асимптотическое представление перемещений пьезоэлектрика на граничной поверхности ($y=0$) при $x\to-\infty$ имеет вид:

$$w(x,0)=A_2e^{-ikx\cos\theta_0}+A_*^{(2)}e^{i\sigma_2|x|}+B_2e^{i(kx-\frac{\pi}{4})}(|kx|^{-\frac{3}{2}}+$$
$$+O(|kx|^{-\frac{5}{2}}))+b_2(|kx|^{-\frac{3}{2}}+O(|kx|^{-\frac{5}{2}})) \qquad (2.30)$$

$$B_2=\frac{B}{\sqrt{2k}K^+(k)\varepsilon_0(1+\chi)\mathrm{ch}kh\sin^2\theta_0/2},\quad b_2=\frac{B}{\sqrt{k\pi}\sqrt{(\varepsilon_{11}+\varepsilon_0)\varepsilon_0}\cos\theta_0}$$

Волновое поле состоит из падающей волны, отражённой волны, дифрагированной затухающей объёмной волны, волны, распространяющейся от граничной поверхности в пьезоэлектрическую среду (имеющей неволновой характер по x) и, наконец, поверхностной (локализированной y граничной поверхности) волны с волновым числом σ_2. Поверхностная и другие дифрагированные волны обусловлены пьезоэффектом в полупространстве $y>0$ и наличием полубесконечного металлического слоя (электрода) в диэлектрическом полупространстве $y<0$.

При $x>0$ интеграл из формулы (2.20) представляется в виде:

$$I_1(x,y)=B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i(\sigma-i0)K^-(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}e^{-i\sigma x}d\sigma}{M_1(|\sigma|,\gamma)(\sigma-k\cos\theta_0-i0)}, \qquad (2.31)$$

где $M_1(|\sigma|,\gamma)\equiv M_1(\sigma)=e^{|\sigma|h}\sqrt{\sigma^2-k^2}K_1(\sigma)$,

т.е. $M_1(|\sigma|,\gamma)=e^{|\sigma|h}((1+\chi)\sqrt{\sigma^2-k^2}(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})-\varepsilon_0\chi|\sigma|)$.

Интеграл (2.31) можно представить в виде $I_1(x,y)=I_1^{(1)}(x,y)+I_1^{(2)}(x,y)$

$$I_2^{(1)}(x,y)=B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i(\sigma-i0)^{1/2}K^-(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}e^{-i\sigma x}d\sigma}{N_1(\sigma,\gamma)(\sigma-k\cos\theta_0-i0)} \qquad (2.32)$$

$$I_2^{(2)}(x,y)=B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i(\sigma-i0)^{1/2}K^-(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}e^{-i\sigma x}}{(\sigma-k\cos\theta_0-i0)}\left(\frac{1}{M_1(|\sigma|,\gamma)}-\frac{1}{N_1(\sigma,\gamma)}\right)d\sigma \qquad (2.33)$$

$$N_1(\sigma,\gamma)\equiv N_1(\sigma)=e^{-\sigma h}((1+\chi)\gamma(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})+\varepsilon_0\chi\sigma)$$

Теперь рассмотрим интегралы (2.32), (2.33) методом контурного интегрирования в комплексной плоскости. Путь интегрирования замыкается в нижней полуплоскости, а действительная ось обходит точку $-\sigma_1$ сверху, а точку σ_1 снизу, т.к. σ_1 – единственный положительный корень функции $K_1(\sigma)$. Аналитическое продолжение подынтегральной функции (2.32) имеет внутри контура интегрирования единственную особую точку $\sigma = -\sigma_1$, где она имеет простой полюс. Вычет подынтегральной функции в точке $-\sigma_1$

$$w_*(x,y) = A_*^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,y} e^{i\sigma_1 x} \tag{2.34}$$

это и есть амплитуда поверхностной волны при $x > 0$

$$A_*^{(1)} = \frac{B\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2-k^2}K^+(\sigma_1)e^{\sigma_1 h}}{(\varepsilon_0\chi\sqrt{\sigma_1^2-k^2}-\sigma_1(1+\chi)(\varepsilon_0+\varepsilon_{11}))(\sigma_1+k\cos\theta_0)}$$

Аналогично, как и при $x < 0$, решение представляется в виде суммы, регулярных интегралов, амплитуд падающей и отражённой волн, и поверхностной волны. Асимптотика перемещений на граничной поверхности при $x \to +\infty$ имеет вид:

$$w(x,0) = A_1 e^{-ikx\cos\theta_0} + A_*^{(1)} e^{i\sigma_1 x} + \\ + B_1 e^{i(kx+\frac{\pi}{4})}((kx)^{-\frac{3}{2}} + O(kx)^{-\frac{5}{2}}) + b_1((kx)^{-\frac{5}{2}} + O((kx)^{-\frac{3}{2}})) \tag{2.35}$$

$$B_1 = \frac{BK^+(k)}{\sqrt{k}(1+\chi)(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})\cos^2\theta_0/2},$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_0}{2\varepsilon_0}}\frac{3\sqrt{\pi}\varepsilon_0\chi B}{2\sqrt{k}(1+\chi)^2(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})^2\cos\theta_0}$$

Заключение. Исследование волнового процесса позволило выявить новые, обусловленные дифракцией и пьезоэффектом, свойства и особенности, присущие взаимосвязанным средам и полям. Наличие полубесконечного металлического слоя в диэлектрике приводит к существенному изменению волнового поля в пьезоэлектрическом полупространстве – возбуждаются две поверхностные – локализованные у граничной поверхности, волны с разными волновыми числами, а также появляются цилиндрическая волна и волна, распространяющаяся от граничной поверхности по направлению луча и имеющая неволновой характер по x на границе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ в рамках научного проекта 13RF-086.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50-69.
3. Аветисян А.С. Поверхностные сдвиговые волны в пьезоэлектрическом полупространстве с диэлектрическим слоем. // Материалы III симп. «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван: 1984. С.7-10.

4. Григорян Э.Х., Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик-диэлектрик. //Труды 7-ой межд.конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: 2011. С.137-143.
5. Нобль Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с.
6. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. //Уч. записки ЕГУ. 1979. №3. С.29-34.
7. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн. // Доклады НАН Армении. 2010. Т.110. №3. С.261-271.
8. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.56-66.

Сведения об авторах:

Джилавян Самвел Акопович – к.ф.-м.н., доцент, кафедра механики, Ереванский госуниверситет. **Тел.:** (+374 91) 50 07 70. **E-mail:** samjilavyan@ysu.am

Казарян Айказ Арменович – аспирант Института механики НАН Армении. **Тел.:** (+374 96) 00 96 06. **E-mail:** haykazghazaryan@gmail.com

Поступила в редакцию 04.02.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика

УДК 539.3

SHEAR FLOQUET WAVES IN MAGNETO-ELECTRO-ELASTIC SOLID WITH PERIODIC INTERFACES OF IMPERFECT CONTACTS

Gasparyan D.K., Ghazaryan K.B.

Բանալի բառեր՝ պիեզոմագնիսական, պիեզոէլեկտրական, պարբերական կառուցվածքներ, սահքի ալիքներ:
Ключевые слова: пьезомагнетик, пьезоэлектрик, периодическая структура, сдвиговые волны.
Key words: piezoelastic, piezomagnetic, periodic structure, shear waves.

Гаспарян Д.К., Казарян К.Б.

Сдвиговые волны Флоке в магнитоэлектроупругих средах с периодическими поверхностями неполного контакта

В работе исследуется распространение сдвиговых волн в магнито-электро-упругих средах с одномерной периодической структурой поверхностей неполного контакта. В рамках теории Флоке получены дисперсионные уравнения, определяющие частотные зоны пропускания и задержки сдвиговых волн. Для трёх различных условий неполного контакта проведён анализ дисперсионных соотношений.

Գասպարյան Դ.Կ., Ղազարյան Կ.Բ.

Ֆլոկեի սահքի ալիքները մագնիսա-էլեկտրա-առաձգական, ոչ լրիվ կոնտակտով պարբերական մակերևույթներ ունեցող միջավայրերում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է սահքի ալիքների տարածումը մագնիսա-էլեկտրա-առաձգական, միաչափ պարբերական կառուցվածքով ոչ լրիվ կոնտակտով մակերևույթներ ունեցող միջավայրերում: Ֆլոկեի տեսության շրջանակում ստացվել են դիսպերսիոն հավասարումները, որոնք որոշում են սահքի ալիքների բաց թողնման և կասեցման հաճախականության տիրույթները: Կատարված են դիսպերսիոն առնչությունների վերլուծություններ ոչ լրիվ կոնտակտի երեք տարբեր պայմանների համար:

This paper aims at investigating the shear waves propagation in magneto-electro-elastic piezo active homogeneous solid of the one-dimensional periodic structure of imperfect contact interfaces. In the framework of the Floquet theory the dispersion equations are obtained defining shear wave frequency pass and gap band structure. For three kinds of imperfect contact conditions the analysis of dispersion relations is presented.

1. Introduction

The advent of new magneto-electro-elastic crystals (MEE) has enlarged the application fields of wave propagation in periodic media. Magneto-electro-elastic MEE crystals are one class of new composites that consist of piezoelectric and piezomagnetic phases. The magnetoelectric effect of piezoelectric–piezomagnetic composites was first reported in [1]. In the MEE crystal magnetoelectric effect is a coupled two field effect, in which the application of either a magnetic field or an electrical field induces an electrical polarization as well as a magnetization [1-4]. Investigations related to surface and bulk wave propagation in homogeneous , , multilayered structures made of MEE materials are presented in [5-11], where the quasi-static approximation of Maxwell equations was used [12]. The dispersion relations of SH waves in a heteroestructure with magneto-electro-elastic properties of 6mm symmetry is studied in [5]. The propagation of Bleustein-Gulyaev surface wave is studied in [6] for transversely isotropic functionally graded MEE half-space. An analytical approach was used to investigate Love wave propagation in a layered MEE structure [7], where a solution of dispersion relations was obtained for magnetoelectrically open and short boundary conditions. In [8] the Rayleigh waves are investigated in MEE half plane. In [9] it is shown that shear surface waves with twelve different velocities in cases of different magnetoelectrical boundary conditions can be guided by the interface of two identical MEE half-spaces. The existence of shear surface wave travelling along the interface of two half spaces of different MEE materials is studied in [10]. The localized shear wave propagation is studied in [11] for MEE layer with quadratic and inverse quadratic inhomogeneity profiles of material parameters varying continuously along the layer thickness direction. A review of the most widely-used methods and approaches defining the Floquet waves in periodic multilayered structures are given in [12-13]. Dispersive behavior and band structure of SH waves in piezoelectric- piezomagnetic periodically layered structure are investigated in [14] .Within the full system of Maxwell's equations the effects of three kinds of imperfect contact transmission conditions on Floquet wave band gap structure are discussed in [15] for piezoelectric periodic structure.

The main goal of this work is related to the study of the behavior of shear Floquet waves in a magneto-electro-elastic homogeneous solid with periodically arranged 1D structure of imperfect interfaces structure . The following kinds of contacts are considered: electrically shorted, electromagnetically closed, sliding mechanical (lubricated) contacts. For all three kinds of contacts dispersion relations are derived. Typical numerical analyses of dispersion equations are presented and discussed for MEE solid made from $BaTiO_3$–$CoFe_2O_4$.

This paper is organized as follows: In Section 2 we present the basic equations and relations for MEE solid. In Section 3 we derive the dispersion relations . While numerical analysis and discussion are given in Section 4, conclusions are drawn in Section 5.

2. Governing equations and constitutive relations of MEE solid

For a transversely isotropic piezo active magneto-electro-elastic (MEE) solid, polarized along x_3 direction, the stiffness, piezo-electromagnetic, magnetic, dielectric properties and bulk density can be represented by 15 independent coefficients $\left(c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{44}, c_{66}=\left(c_{11}-c_{12}\right)/2\right)$,

$\left(\beta_{13}, \beta_{15}, e_{13}, e_{15}, \alpha_1, \alpha_3\right), \left(\mu_{11}, \mu_{33}\right), \left(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\right), \rho$ correspondingly.

Consequently, the constitutive relations can be written in terms of the following expanded matrix form [5]:

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{13} & 0 & 0 & -\beta_{13} \\
c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{13} & 0 & 0 & -\beta_{13} \\
c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{13} & 0 & 0 & -\beta_{13} \\
0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 & 0 & -\beta_{15} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 & -\beta_{15} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 & g_1 & 0 \\
e_{13} & e_{13} & e_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} & 0 & 0 & g_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & \mu_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & \mu_{11} & 0 \\
\beta_{13} & \beta_{13} & \beta_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 & \mu_{33}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ 2s_{32} \\ 2s_{31} \\ 2s_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_4 \end{pmatrix}
$$

Here σ_{ij} are components of the stress tensor, $s_{ij} = \left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)/2$ are components of the elastic strain tensor , E_i are components of the electrical field vector $\mathbf{E}$,, H_i are components of the magnetic field vector $\mathbf{H}$, D_i are components of the electrical displacement vector $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}_i$ are components of the magnetic induction vector $\left(i, j = 1,2,3\right)$, u_i are components of elastic displacement vector, the indices preceded by a comma denote space-coordinate differentiation.

The interconnected elastic and electro-magnetic excitations in a MEE solid will be considered on the base of quasi-static approximation of Maxwell electrodynamics equations and linear equations of motion [16]

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \mathbf{H} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$\partial_i s_{ij} = \rho \partial_{tt} u_i \tag{2}$$

here $\vec{\nabla} = \left(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3\right)$.

In the case of a two dimensional problem (when $\partial/\partial x_3 = 0$) equations and relations separate into plane and anti-plane problems, analogous to the case of pure piezoelectric 6mm symmetry crystal discussed in[17].

The anti-plane problem is described by the following equations and relations $\left(x_1 = x, x_2 = y\right)$

$$\sigma_{xz} = G\partial_x u - eE_x - \beta H_x; \qquad \sigma_{yz} = G\partial_y u - eE_y - \beta H_y;$$

$$D_x = e\partial_x u + \varepsilon E_x + gH_x; \qquad D_y = e\partial_x u_z + \varepsilon E_y + gH_y; \tag{3}$$

$$B_x = \beta\partial_x u + gE_x + \mu H_x; \qquad B_y = \beta\partial_y u_z + gE_y + \mu H_y;$$

Here $\beta_{15} = \beta, e_{15} = e, c_{44} = G, u_z = U, \varepsilon_1 = \varepsilon, \mu_1 = \mu$

From (1) follows that

$$E_x = -\partial_x \varphi; \qquad \vec{B} = -\vec{\nabla}\phi \tag{4}$$

where $\varphi(x, y), \phi(x, y)$ are potential functions.

Taking into account (4) we can write relations (1) in the form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \vec{\nabla}_0 \left(GU + e\varphi + \beta\phi\right), \\ \mathbf{B_0} &= \vec{\nabla}_0 \left(\beta U - \mu\phi - g\varphi\right), \\ \mathbf{D_0} &= \vec{\nabla}_0 \left(eU - \varepsilon\varphi - g\phi\right); \end{aligned} \tag{5}$$

Here the following notations are used

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\sigma_{zx}, \sigma_{zy}\right), \mathbf{B_0} = \left(B_x, B_y\right); \ \mathbf{D_0} = (D_x, \mathrm{D}_y); \vec{\nabla}_0 = \left(\partial_x, \partial_y\right) \tag{6}$$

Defining the new auxiliary potentials [5,15]

$$F = \beta U - \mu\phi - g\varphi; \qquad S = eU - \varepsilon\varphi - g\phi \tag{7}$$

and expressing potentials φ, ϕ via new potentials F, S

$$\phi = \left(-F\varepsilon + Sg + U\theta\right)\gamma^{-1}; \qquad \varphi = \left(-S\mu + U\eta + F\right)\gamma^{-1} \tag{8}$$

$$\gamma = \varepsilon\mu - g, \qquad \theta = \beta\varepsilon - eg, \qquad \eta = e\mu - \beta g$$

we come to separate equations with respect to functions u, F, S .

$$a^2 \Delta u - \partial_{tt}^2 u = 0; \qquad \Delta S = 0; \qquad \Delta F = 0 \tag{9}$$

where the dot denotes time differentiation, $\Delta \equiv \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)$; $a^2 = G_0/\rho ; G_0 = G + \left(e\eta + \beta\theta\right)\gamma^{-1}$, a is the velocity of shear bulk magneto-electro-elastic wave in the MEE solid.

Let us note that for transversely isotropic MEE crystal $\gamma > 0$ [2].

The other functions $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, B_x, B_y, D_x, D_y$ via sought functions u, F, S can be expressed as

$$\begin{aligned} &\sigma_{xz} = G_0 \partial_x u - \gamma^{-1} \partial_x \left(\eta F + \theta S\right), \qquad \sigma_{yz} = G_0 \partial_y u - \gamma^{-1} \partial_y \left(\eta F + \theta S\right); \\ &B_x = \partial_x F; \qquad B_y = \partial_y F; \qquad D_x = \partial_x S; \qquad D_y = \partial_y S \end{aligned} \tag{10}$$

2. Bloch–Floquet quasi-periodicity conditions, dispersion equations

We consider the plane Bloch -Floquet wave propagation along arbitrary direction in (x, y) plane of infinite homogenous MEE structure consisting of imperfect contact interfaces periodically arranged at points $x = nd, n = 0, \pm1, \pm2.....$ along x direction. The effect of the interface periodicity on the dynamic behavior will be investigated, considering only the elementary cell $x \in (0, \mathrm{d})$ and applying the Floquet–Bloch quasi-periodicity conditions connecting the ends of the elementary cell at $x = 0, x = d$ [12,13].Solutions of equations (10) in $x \in (0, \mathrm{d})$ in the form of plane waves can be written as

$$
\begin{aligned}
&U(x,y,t) = \left[A_1 \exp(iqx) + A_2 \exp(-iqx)\right]\exp\left[i(py - \omega t)\right] \\
&F(x,y,t) = \left[A_4 \exp(px) + A_2 \exp(-px)\right]\exp\left[i(py - \omega t)\right] \\
&S(x,y,t) = \left[A_5 \exp(px) + A_6 \exp(-px)\right]\exp\left[i(py - \omega t)\right]
\end{aligned} \tag{11}
$$

Here, where the coefficients A_j are unknown amplitudes of the waves, $q = \sqrt{\omega^2/a^2 - p^2}$, ω is the angular frequency, p is the wave number in y direction, i is the imaginary unit.

We consider several types of partial imperfect contact transmission conditions at the interfaces within the periodically repeated unit cell of d width (period): electrically shorted, electromagnetically closed, sliding mechanical (lubricated) contacts.

Note that electrically shorted conditions can be realized using a perfectly conducting film of negligible thickness; electromagnetically closed conditions can be realized using a perfectly conducting film of negligible thickness at the interfaces [15]. Smooth mechanical contacts correspond to lubricated interface conditions. The smooth mechanical contacts conditions were used in [15,18] for piezoelectric layered structures.

2.1 Electrically shorted interfaces with continuous elastic displacements , tractions, magnetic potential and magnetic induction

Suppose that at each point $x = nd, n = 0, \pm 1, \pm 2.....$ there are electrically shorted interfaces where the tangential component of electrical field vector have vanished and normal component of electric displacement undergoes a discontinuity. Consequently the boundary conditions can be written as

$$
\begin{aligned}
&\varphi(0,y,t) = 0; \quad \varphi(d,y,t) = 0 \\
&\sigma_x(0,y,t) = \lambda\sigma_x(d,y,t), \qquad u(0,y,t) = \lambda u(d,y,t) \\
&\phi(0,y,t) = \lambda\phi(d,y,t), \qquad B_x(0,y,t) = \lambda B_x(d,y,t)
\end{aligned} \tag{12}
$$

Here and hereafter $\lambda = \exp(ikd)$, k is the Floquet wave number.

Substituting solutions (11) into the Bloch–Floquet quasi-periodicity conditions and imperfect interface contact conditions(12) we come to the homogenous set of six simultaneous equations with respect to the unknown amplitudes A_j .The dispersion equation can be obtained by equating the determinants of the simultaneous sets of equations to zero, yielding

$$
\begin{aligned}
&\cos(dk) = F_1(\omega, p); \\
&F_1(\omega, p) = \frac{(K - K_\beta)\, p\cosh(dp)\sin(dq) - (1+K)\, q\cos(dq)\sinh(dp)}{(K - K_\beta)\, p\sin(dq) - (1+K)\, q\sinh(dp)}
\end{aligned} \tag{13}
$$

Here and hereafter the following notations are valid

$$
K_\beta = \frac{\beta^2}{G\mu}; K_e = \frac{e^2}{G\varepsilon}; K = \frac{K_e + K_\beta - 2\gamma_0\sqrt{K_e K_\beta}}{1-\gamma_0^2}; \gamma_0 = \frac{g}{\sqrt{\varepsilon\mu}} < 1
$$

where K_e is the electro-mechanical coupling coefficient, K_β is the magneto-mechanical coupling coefficient.

2.2 Electromagnetically closed interfaces with continuous elastic displacements and tractions

Let suppose now that at each point $x = nd, n = 0, \pm 1, \pm 2.....$ there are electromagnetically shorted interfaces where the tangential component of electric field vector, tangent component of magnetic field vector have vanished , while normal components of electric displacement and magnetic induction vectors undergo a discontinuity.
In this case the boundary conditions can be written as

$$\begin{aligned}
&\varphi(0,y,t) = \lambda\varphi(d,y,t); \phi(0,y,t) = \lambda\phi(d,y,t) \\
&D_x(0,y,t) = \lambda D_x(0,y,t); B_x(0,y,t) = \lambda B_x(0,y,t) \\
&\sigma_x(0,y,t) = 0, \qquad \sigma_x(d,y,t) = 0 \\
&\phi(0,y,t) = 0 \qquad \phi(d,y,t) = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

The following dispersion equation corresponds to these conditions:

$$\cos(dk) = F_2(\omega, p);$$

$$F_2(\omega, p) = \frac{Kp\cosh(dp)\sin(dq) - (1+K)q\cos(dq)\sinh(dp)}{Kp\sin(dq) - (1+K)q\sinh(dp)} \tag{15}$$

2.3 Mechanically sliding interface where normal elastic displacement undergo a discontinuity.

Let us suppose now that at each point $x = nd, n = 0, \pm 1, \pm 2.....$ periodically arranged mechanically sliding interfaces where the component of electric field vector, tangent component of magnetic field vector have vanished , while normal components of electric displacement and magnetic induction vectors undergo a discontinuity.
In this case the boundary conditions can be written as

$$\begin{aligned}
&\varphi(0,y,t) - \lambda\varphi(d,y,t) = 0; \quad \phi(0,y,t) - \lambda\phi(d,y,t) = 0; \\
&D_x(0,y,t) - \lambda D_x(0,y,t) = 0; \; B_x(0,y,t) - \lambda B_x(0,y,t) = 0 \\
&\sigma_x(0,y,t) = 0; \qquad \sigma_x(d,y,t) = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

The dispersion equation corresponding to these boundary conditions is the following

$$\cos(dk) = F_3(\omega, p)$$

$$F_3(\omega, p) = \frac{(1+K)q\cosh(dp)\sin(dq) + Kp\cos(dq)\sinh(dp)}{(1+K)q\sin(dq) + Kp\sinh(dp)} \tag{17}$$

4. Discussions and numerical results

The dispersion equations (13,15,17) defining ranges of frequencies associated with waves that can propagate in MEE solid (pass bands), alternated with ranges of frequencies corresponding
to waves that cannot be transmitted (stop or band gaps).

For one dimension wave travelling along periodicity direction $\left(p=0\right)$ or when there are no piezo effects $\left(K_e=0,K_b=0\right)$, under electrically shorted or electromagnetically closed imperfect contact conditions from dispersion equations (13,15) follows the simple dispersion relation $\omega=ak$; Under mechanically sliding condition instead of dispersion equation (17) we have $\cos\left(dk\right)=\cosh\left(dp\right)$, which means that the periodic structure does not allow propagation of elastic wave as was expected.

Let us now examine the behavior of the functions $F_1\left(\omega\right),F_2\left(\omega\right),F_3\left(\omega\right)$ the right parts of equations (13,15,17). For given values of oblique incidence wave number p and frequency ω the dispersion equations have not real solution for k , when the right part of dispersion equations $\left|F\left(\omega,p\right)\right|>1$. The range of ω in which there are no propagating solutions of dispersions equations corresponds to complete photonic frequency band gap. Frequency regions of ω outside of gaps correspond to frequency passes .

Numerical calculation will be carried out for MEE crystal $BaTiO_3$–$CoFe_2O_4$ for which dimensionless coupling coefficients are $K_e=0.24,K_\beta=0.36,\gamma_0=0,09$ [2].

The Fig.1, Fig2 illustrate dependence of right parts of dispersion equations (15,17) with respect to dimensionless phase speed $\xi=\omega\left(pa\right)^{-1}$, for sliding and shorted interfaces, correspondingly, when $pd=2$. Points of intersection of function $F\left(\omega,p\right)$ with straight lines ±1 determine the frequency band and pass ranges.

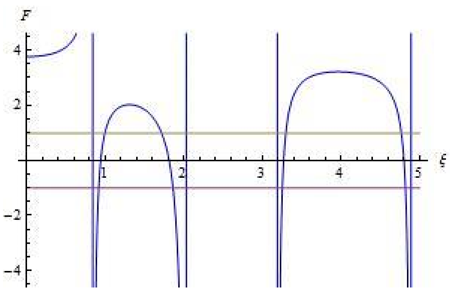


Fig1. *The right part of Eq.(17) as function of dimensionless phase velocity* ξ

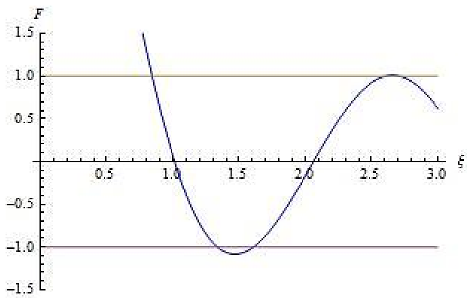


Fig 2. *The right part of Eq.(13) as function of dimensionless phase velocity* ξ

For sliding contact case from the Fig.1 follows that there are narrow ranges of frequency pass which means that periodically arranged interfaces of sliding contact may admit of shear wave transmission due to piezo effect. These passes are absent when the piezo effects are neglected. The layout of these pass ranges is $\xi\in(0.\to0.86),\xi\in(1.33\to1.64)$, $\xi\in(2.59\to2.76)$. The outside ranges correspond to the band gaps, the width of the band gaps significantly widens for higher frequencies.

Contrary to sliding contact case, for electromagnetically closed case from Fig.2 it follows that there are narrow ranges of gap zones caused by piezo effect. These gaps are absent when the piezo effects are neglected. The layout of these ranges are $\xi\in(0.90\to0.98),\xi\in(1.72\to1.86),\ \xi\in(3.22\to3.29),\xi\in(4.72\to4.79)$.

Outward of the gap ranges are the pass ranges, the width of which significantly widens for higher frequencies.

For electrically shorted case Fig.3 shows the dispersions curves $\mathrm{kd} = f\left(\omega da^{-1}\right)$ and pass and stop bands structures in first Brillouin zone of dimensionless wave number $\mathrm{kd} \in (0, \pi)$, where ωda^{-1} is the normalized dimensionless frequency. Dashed lines correspond to oblique wave number $pd = 2$, solid lines to $pd = 1$. The first and rest band gaps occur only at $\pi = \mathrm{kd}$. The width of the band gaps for MEE solids narrows for higher frequencies and gaps are absent when the piezo effects are neglected. The cut-off frequency are 0.89, 1.86 for $pd = 1$, for $pd = 2$, correspondingly.

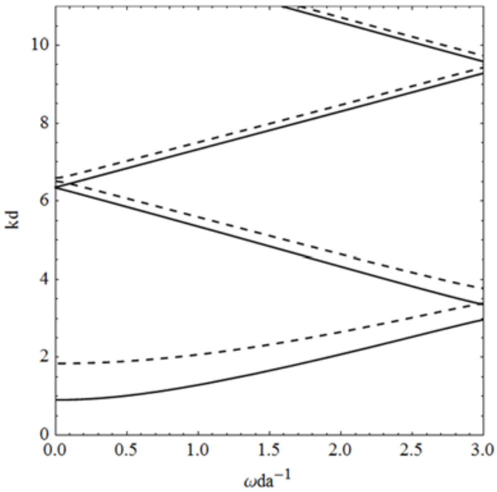


Fig 3. *Dispersion curves for electrically shorted case*

5. Conclusions

Based on quasi static approximation of Maxwell electrodynamics equations shear wave propagation in MEE homogeneous solid is studied . The well known Floquet quasi-periodicity boundary conditions are taken into consideration. Dispersion relations are derived for three kinds of imperfect contacts: electrically shorted, electromagnetically closed, sliding mechanical (lubricated) contacts. For MEE crystal $BaTiO_3$–$CoFe_2O_4$ the numerical analysis of dispersion equations determining the Floquet waves is carried out. The Floquet wave frequency pass and gap band structures are studied in conformity with contact conditions. The numerical results estimating effects of transmission conditions and piezo effects are presented. The results show that for periodically arranged electrically shorted or electromagnetically closed interfaces the possibility of frequency band gap is conditioned by piezo effect. It is also shown that periodically arranged mechanically sliding interfaces may admit shear wave transmission/ pass, which simply do not exist without a piezo effect.

References

1. J.van Suchtelen, Product properties: a new application of composite materials. //Philips Res Rep, v.27, 1972, pp. 28–37.
2. C.W. Nan, Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases. // Physical Review B, v.50, 1994, pp. 6082-6088.
3. Benveniste, Y.,. Magnetoelectric effect in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases. //Physical Review B, v.51, 1995, pp.16424–16427.

4. P. Kondaiah, K. Shankar, N. Ganesan, Pyroelectric and pyromagnetic effects on behavior of magneto-electro-elastic plate.// Coupled Systems Mechanics, v.2, №1, 2013, pp.1-22.
5. H. Calas, J.A. Otero, R. Rodrı´guez-Ramos, G. Monsivais, C. Stern, Dispersion relations for SH wave in magneto-electro-elastic heterostructures. // International Journal of Solids and Structures, v.45, 2008, pp. 5356–5367.
6. P. Li, F. Jin, Z.Qian, Propagation of the Bleustein-Gulyaev waves in a functionally graded transversely isotropic electro-magneto-elastic half-space. // European Journal of Mechanics A/Solids , 37, 2013, pp.17-23.
7. J.K. Du, X.Y. Jin, J. Wang, Love wave propagation in layered magnetoelectro-elastic structures. Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy, v. 51,2008 , pp. 617-631.
8. W.J. Feng, E. Pan, X. Wang, J. Jin, Rayleigh waves in magnetoelectro-elastic half planes. // Acta Mech., 2008, v.202, pp.127–134.
9. Melkumyan, Twelve shear surface waves guided by clamped/free boundaries in magneto-electro-elastic materials. // Journal of Solids and Structures, v.44, 2007, pp.3594-3599.
10. D. Piliposyan, Shear surface waves at the interface of two magnetoelectro-elastic media. //Multidiscipline Modelling in Materials and Structures, v.8, 2012, pp. 417–426.
11. D. Gasparyan., K. Ghazaryan, Shear Waves in Functionally Graded Electro-Magneto-Elastic Media. // International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), 3,10, 2014, pp.769-776.
12. J. Gazalet, S. Dupont, J.C. Kastelik, Q. Rolland , B. Djafari-Rouhani. A tutorial survey on waves propagating in periodic media: Electronic, photonic and phononic crystals. Perception of the Bloch theorem in both real and Fourier domains, Wave Motion, 50, 2013, pp. 619–654
13. A.Maurel, P.A.Martin, V.Pagneux, Effective propagation in a one-dimensional perturbed periodic structure:comparison of several approaches, Waves in Random and Complex Media, v. 20, 4, 2010, pp.634–6557
14. Yu Pang, Jin-Shan Gao, Jin-Xi Liu, SH wave propagation in magnetic-electric periodically layered plates, Ultrasonics, 54, (2014) pp.1341–1349
15. K.B Ghazaryan, D.G Piliposyan, Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structure. // Journal of Sound and Vibration, 330 (26), 2011, pp. 6456-6466.
16. С.А.Амбарцумян, М.В.Белубекян, Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин Ереван: Изд. Ереванского университета, 1991.143 с.
17. А.Аветисян, К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. // Изв.НАН Армении. Механика. 1985. Т.38. №1. С.12-19.
18. M.V. Belubekyan, V.M. Belubekyan, Surface waves in piezoactive elastic system of a layer on a semi-space. Proc. of the Yerevan State University., Phys.& Math. Sci., 2013, 3, pp.45–48.
19. Mei-Feng Liu, An exact deformation analysis for the magneto-electro-elastic fiber-reinforced thin plate. Applied Mathematical Modelling, 35, 2011, pp.2443–2461.

Сведения об авторах:

Казарян Карен Багратович – доктор физ.-мат.наук, профессор,
Главный научный сотрудник Института механики НАН Армении
E-mail: ghkaren@gmail.com

Гаспарян Давид Каренович – аспирант
E-mail: david.gasparyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 09.02.2015

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО МИНИМАЛЬНОМУ ГАРАНТИРОВАННОМУ ВРЕМЕНИ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ

Аветисян В.В., Степанян В.С.

Բանալի բառեր. Երաշխավորված փնտրում, օպտիմալ ղեկավարում
Ключевые слова: гарантированный поиск, оптимальное управление
Keywords: guaranteed search, optimal control

Ավետիսյան Վ.Վ., Ստեփանյան Վ.Ս.
Հարթության մեջ շարժվող օբյեկտի օպտիմալ ըստ նվազագույն երաշխավորած ժամանակի փնտրումը

Դիտարկվում է հարթության մեջ արագությամբ ղեկավարվող շարժական օբյեկտի օպտիմալ ըստ նվազագույն երաշխավորված ժամանակի փնտրման խնդիրը, երբ հայտնի է միայն, որ սկզբնական պահին որոնելի օբյեկտը գտնվում է տրված շրջանում: Որպես փնտրող է դիտարկվում եռաչափ տարածության մեջ արագությամբ ղեկավարվող օբյեկտը: Հայտնաբերումը՝ որոնելի օբյեկտի կոորդինատների որոշումն իրականացվում է շարժական կոնի հիմքի միջոցով, որի գագաթը կապված է փնտրող օբյեկտի ընթացիկ դիրքի հետ: Մշակվել է ղեկավարման ալգորիթմ, որի դեպքում որոնելի օբյեկտի երաշխավորված փնտրումն ավարտվում է նվազագույն ժամանակում:

Avetisyan V.V., Stepanyan V.S.
Time-optimi guaranteed search of mobile object in the plane

A problem of time-optimal guaranteed search of moving object with controllable speed in plane is observed, where in the initial moment only the circular of the sought object is known. The sought object is a object with controllable speed. The discovery, i.e. the identification of the precise coordinates of the object, is implemented through the moving information basis of the cone, the apex of which is connected to the current coordinates of the sough object. It is required to locate the object as quickly as possible. A control algorithm is proposed, in which r a guaranteed search of the sought object in minimal time is completed.

Рассматривается задача оптимального по минимальному гарантированному времени поиска подвижного объекта, совершающего управляемое по скорости движение на плоскости в предположении, что известен лишь круг, в котором в начальный момент находится искомый объект. Ищущим принимается объект, управляемый по скорости в трёхмерном пространстве. Поиск – определение координат искомого объекта осуществляется с помощью основания заданного конуса, вершина которого связана с текущим положением ищущего объекта. Разработан алгоритм управления, при котором гарантированный поиск искомого объекта завершается за минимальное время.

Введение. В задачах поиска целевых объектов, возникающих во многих областях, процесс поиска искомого объекта с последующим его обнаружением, ведётся с помощью информационной области, например, световой области, которую можно перемещать в «темном» пространстве поиска с целью освещения искомого объекта при его попадании в эту область. Описанная ситуация в данной работе моделируется с помощью следующей задачи [1,2]. Требуется построить управляемое по скорости пространственное движение ищущего объекта, который из заданного начального положения должен, совершив подходящий маневр, обнаружить целевой объект, совершающий управляемое по скорости движение на горизонтальной плоскости и начальное положение которого известно ищущему объекту с точностью до заданного круга неопределённости. При этом искомый объект считается обнаруженным в случае его попадания в круговое основание конуса, координаты вершины которого – суть текущие координаты ищущего объекта. Для решения этой задачи в [1,2] был предложен подход, состоящий в построении таких управлений, при которых круг обнаружения ищущего объекта за конечное время поглощает расширяющийся во времени круг неопределённости искомого объекта. Такой подход гарантирует успешный поиск, так как управление поиском строится с расчётом на движение искомого объекта в любом, в том числе наихудшем для ишущего объекта, направлении. Задача является многопараметрической и в отличие от [1,2], в которых исследованы случаи, связанные с некоторыми характерными соотношениями между геометрическими и физическими параметрами рассматриваемой поисковой системы, в данной работе исследуется случай, когда начальный радиус и скорость расширения круга обнаружения больше начального радиуса круга неопределённости искомого обьекта и его максимальной скорости, соответственно. Это приводит к расширению множества управлений ищущего объекта, гарантирующих обнаружение искомого объекта за конечное время. В построенном множестве гарантирующих управлений методами линейного программирования решена задача нахождения оптимального по минимальному гарантированному времени поиска управления. Основное отличие постановки задачи данной работы от постановок задач гарантированного поиска целевого объекта [3-11] состоит в том, что в [3-9] поиск ведётся внутри ограниченной области неопределённости искомого объекта, а в [10,11] поиск на плоскости начинается вне области неопределённости, однако в [10] обнаружение искомого объекта осуществляется с помощью круга постояннго радиуса, а в [8] – полуплоскости.

1. Описание поисковой системы и постановка задачи. Пусть имеются два точечных объекта X и Y, из которых X – ищущий, а Y – искомый. Оба объекта, обладая ограниченными линейными скоростями, имеют возможность в каждый момент времени произвольно изменять направление своих движений: X – в пространстве, а Y – на плоскости, согласно следующим уравнениям, ограничениям и начальным данным:

$$X:\ \dot{x} = u,\ \ x(0) = x^0,\ \ |u(t)| \le U,\ \ t \ge 0;\ \ \ x, u \in R^3, \tag{1.1}$$

$$Y:\ \dot{y} = \mathrm{v},\ \ y(0) = y^0,\ \ |\mathrm{v}(t)| \le V,\ \ t \ge 0;\ \ \ y, \mathrm{v} \in R^2. \tag{1.2}$$

В (1.1) и (1.2) x, y – векторы координат объектов; u, v – их управляющие вектор-скорости, которые являются кусочно-непрерывными функциями от t, $t \ge 0$; U, V – максимально возможные скорости объектов X, Y.

Положим, что в каждый момент времени $t \ge 0$ объекту X точно известны свои фазовые координаты и максимальная скорость объекта Y. О координатах Y объекту X известно лишь то, что в начальный момент времени $t = 0$ Y находится в заданном круге неопределённости

$$y^0 \in D_0 = \{y \in R^2:\ \ |y - y_c^0| \le r_0\ \} \tag{1.3}$$

с центром в точке $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0) \in R^2$ и радиусом r_0, которые также известны X.

Возможность установления точных координат искомого объекта Y осуществляется с помощью подвижной и изменяющейся во времени информационной области

$$G(x(t), C) = \left\{ \begin{array}{l} \xi \in R^2 :\ |\xi(t) - x_c(t)| \le l(t) = Cx_3(t),\ \ C = |\mathrm{tg}\alpha| \\ \qquad\qquad x_c(t) = (x_{c1}(t), x_{c2}(t)),\ \ \ \ 0 < |\alpha| < \pi/2 \end{array} \right\},\ \ t \ge 0, \tag{1.4}$$

$$G(x(0), C) = G(x_1(0), x_2(0), x_3(0), C) = G(x_c(0), l(0)) = G_0,$$

представляющая собой круговое (с центром $x_c = (x_{c1}, x_{c2})$) основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим значением вектора положения X. В дальнейшем, в записи круга обнаружения $G(x(t), C)$ параметр C будем опускать.

При пространственном движении ищущего объекта эволюция информационного круга (1.4) на плоскости (x_1, x_2) при $t > 0$ определяется плоским движением его центра $x_c = (x_{c1}, x_{c2})$ с помощью управлений u_1, u_2 и расширением или сужением области (1.4) путем изменения расстояния x_3 объекта X до плоскости (x_1, x_2) с помощью управления u_3, т.е. изменением её радиуса $l = C x_3$ с помощью управления Cu_3: $\dot{l} = Cu_3$, $l_0 = l(0)$. При $u_3 > 0$ круг G (1.4) расширяется, а при $u_3 < 0$ сужается.

Пусть параметры y^0_{c1}, y^0_{c2}, r_0 и $x^0_{c1}, x^0_{c2}, x^0_3, C$ (или x^0_{c1}, x^0_{c2}, l_0) кругов неопределённости и обнаружения такие, что в начальный момент времени $t = 0$ выполняется условие

$$D_0 \cap G_0 = \varnothing. \tag{1.5}$$

Согласно (1.5), в начальный момент круг обнаружения находится вне круга неопределённости.

Скажем, что положение искомого объекта Y становится точно известным в момент времени $t^* > 0$, когда впервые выполняется условие обнаружения, т.е. условие его попадания в круг обнаружения

$$y(t^*) \in G(x(t^*)), \text{ т.е. } \left| y(t^*) - x_c(t^*) \right| \le l, \quad x_c = (x_{c1}, x_{c2}). \tag{1.6}$$

Так как на плоскости (x_1, x_2) область достижимости искомого объекта (1.2) с фиксированным начальным положением в момент времени $t > 0$ представляет собой круг, то в тот же момент времени областью неопределённости искомого объекта с начальным включением (1.3) также будет круг $D(t)$, $D(t) \supseteq D_0$ с центром в точке y^0_c и с радиусом $r_0 + Vt$. Следовательно, условие обнаружения (1.6) гарантированно выполнимо, если существуют такой момент времени T и управление изменением круга обнаружения $u(t)$, $0 \le t \le T$, при которых выполняется включение

$$D(T) \subseteq G(x(T)). \tag{1.7}$$

Требуется найти такое управляемое движение объекта X, при котором условие поглощения (1.7) происходит за минимально возможное время T.

Для решения этой задачи сначала рассмотрим задачу 1 – задачу гарантированного поиска.

Задача 1. Для заданного начального положения $x^0 = (x^0_1, x^0_2, x^0_3) \in R^3$ и заданных начальных кругов обнаружения G_0 и неопределённости D_0, удовлетворяющих условию (1.5), найти число $T > 0$ и допустимое управление $u(t)$ объекта X на интервале $[0, T]$, для которых при любом начальном положении y^0

объекта Y в круге неопределённости D_0 (1.3) и любом допустимом управлении $\mathrm{v}(t)$ на интервале $[0,\,T]$ выполняется условие поглощения (1.7), т.е. гарантируется обнаружение (1.6) в некоторый момент времени $t^* > 0$, не позднее времени T: $t^* \le T$.

Для заданной начальной позиции $\{x^0, G_0, D_0\}$ (1.5) управление $u(t)$ – решение задачи 1 – назовём гарантирующим, а время T – гарантированным временем поиска или обнаружения.

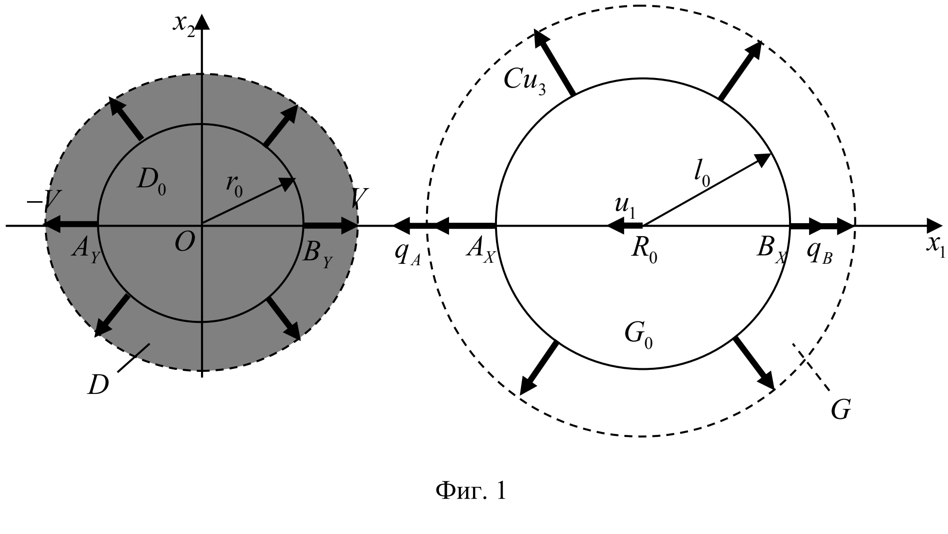
В зависимости от параметров $\{x^0, G_0, D_0, U, V\}$ исходной модели поисковой системы (1.1) - (1.5), задача 1 может иметь множество решений. Тогда для выделения единственного решения естественно наложить ещё требование оптимальности, например, времени поиска, т.е. рассмотреть задачу 2.

Задача 2. Для заданного начального положения $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$ и заданного круга неопределённости D_0 найти гарантирующее управление $u(t)$, при котором гарантированное время обнаружения искомого объекта T минимально.

2. Методика построения управлений, гарантирующих обнаружение за конечное время. Переходя к решению задачи 1, не нарушая общности, положим, что центр $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0) \in R^2$ круга неопределённости $D_0 \subset R^2$ искомого объекта Y совпадает с началом декартовой системы координат Ox_1x_2, а ищущий объект X в начальный момент времени $t = 0$, в соответствии с (1.5), находится в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $x_1^0 = R_0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = C^{-1} l_0$, $R_0 > 0$, т.е. центр круга обнаружения x_c^0 находится в точке $(R_0,\, 0)$ на оси Ox_1 (фиг. 1). Положим, что выполняются соотношения

$$R_0 > l_0 + r_0, \qquad l_0 > r_0, \tag{2.1}$$

которые полностью описывают начальное расположение (1.5) кругов D_0 и G_0.



Фиг. 1

Пусть $A_X(A_Y)$ и $B_X(B_Y)$ – соответственно, левая и правая точки пересечения круга обнаружения G_0 (круга неопределённости D_0) с осью Ox_1 (фиг.1). Для осуществления поглощения (1.7), в рамках метода экстремального прицеливания [12], X должен двигаться с такой скоростью $u=(u_1,u_2,u_3)$, чтобы точки круга обнаружения A_X и B_X перемещались вдоль оси Ox_1 (т.е. $u_2=0$). При этом, скорости точек A_X и B_X в их движении по оси Ox_1 будут, соответственно, $q_A=u_1-Cu_3$ и $q_B=u_1+Cu_3$. В соответствии с этим, необходимым и достаточным условием осуществления поглощения круга неопределённости кругом обнаружения является существование такого момента времени $T>0$ и управлений u_1,u_3 (1.1), при которых выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &q_A T+R_0-l_0\le -VT-r_0, \qquad q_A=u_1-Cu_3,\\ &q_B T+R_0+l_0\ge VT+r_0, \qquad q_B=u_1+Cu_3, \end{aligned} \tag{2.2}$$

Запишем систему (2.2) в виде:

$$R_0-l_0+r_0\le(-u_1+Cu_3-V)T, \tag{2.3}$$

$$R_0+l_0-r_0\ge(-u_1-Cu_3+V)T. \tag{2.4}$$

Из (2.3), (2.4) следует, что если для заданных параметров R_0,r_0,l_0 (2.1) и U,V,C относительно u_1,u_3 выполняется система неравенств

$$-u_1+Cu_3-V>0, \quad -u_1-Cu_3+V\le 0, \quad u_1^2+u_3^2\le U^2, \tag{2.5}$$

то условие поглощения (система соотношений (2.3), (2.4)) имеет место при любом $T\in[T^-,+\infty)$, где найденная из (2.3) величина

$$T^-=\frac{R_0-l_0+r_0}{-u_1+Cu_3-V}>0 \tag{2.6}$$

– это момент, начиная с которого точка A_X оказывается левее от левой точки A_Y.

Если для заданных параметров R_0,r_0,l_0 (2.1) и U,V,C относительно u_1,u_3 выполняется система неравенств

$$-u_1+Cu_3-V>0, \quad -u_1-Cu_3+V>0, \quad u_1^2+u_3^2\le U^2, \tag{2.7}$$

то из (2.4) можно определить и конечный момент времени

$$T^+=\frac{R_0+l_0-r_0}{-u_1-Cu_3+V}>0,$$

при котором B_Y пока ещё находится не правее от точки B_X.

Если при параметрах R_0,r_0,l_0 (2.1) и U,V,C (2.7) выполняется также неравенство $T^-\le T^+$, которое после несложных преобразований приобретает вид

$$R_0(Cu_3-V)\ge(l_0-r_0)u_1, \tag{2.8}$$

то система (2.3), (2.4), а значит, условие поглощения (1.7) имеет место при любом $T \in [T^-, T^+]$.

В обоих случаях ((2.5) и (2.7)-(2.8)) время T^- (2.6) является первым моментом поглощения, т.е. гарантированным временем поиска или обнаружения..

Учитывая (2.5) и (2.7)-(2.8), для заданных параметров R_0, r_0, l_0 (2.1) и U, V, C рассмотрим область

$$H = \bigcup_{i=1}^{3} H_i \,, \tag{2.9}$$

где

$$H_1 = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{l} -u_1 + Cu_3 - V > 0, \\ -u_1 - Cu_3 + V \le 0, \end{array} \quad u_1^2 + u_3^2 \le U^2 \right\}, \tag{2.10}$$

$$H_2 = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{ll} -u_1 + Cu_3 - V > 0, & R_0(Cu_3 - V) \ge (l_0 - r_0)u_1 \\ -u_1 - Cu_3 + V > 0, & Cu_3 - V \ge 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \le U^2 \end{array} \right\}, \tag{2.11}$$

$$H_3 = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{ll} -u_1 + Cu_3 - V > 0, & R_0(Cu_3 - V) \ge (l_0 - r_0)u_1 \\ -u_1 - Cu_3 + V > 0, & Cu_3 - V < 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \le U^2 \end{array} \right\}. \tag{2.12}$$

Области H_i, $i = 1, 2, 3$ (фиг.2) – выпуклые, так как представляют собой части круга, ограниченные дугами и двумя отрезками, соединяющими концы $u^P(u_1^P, u_3^P)$, $u^K(u_1^K, u_3^K)$; $u^N(u_1^N, u_3^N)$, $u^P(u_1^P, u_3^P)$; $u^M(u_1^M, u_3^M)$, $u^N(u_1^N, u_3^N)$ дуг $u^P u^K$; $u^N u^P$; $u^M u^N$, соответственно, с внутренней точкой $u^Q(u_1^Q, u_3^Q)$ круга. На фиг.2 горизонтальными отрезками заштрихована область H_1, вертикальными – области H_2 и H_3, угловые вершины u^P, u^Q, u^K, u^N, u^M которых имеют следующие координаты:

$$u_1^P = \frac{V - C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2}}{1+C^2} < 0, \quad u_3^P = \left[U^2 - \left(u_1^P\right)^2 \right]^{1/2} > 0 \tag{2.13}$$

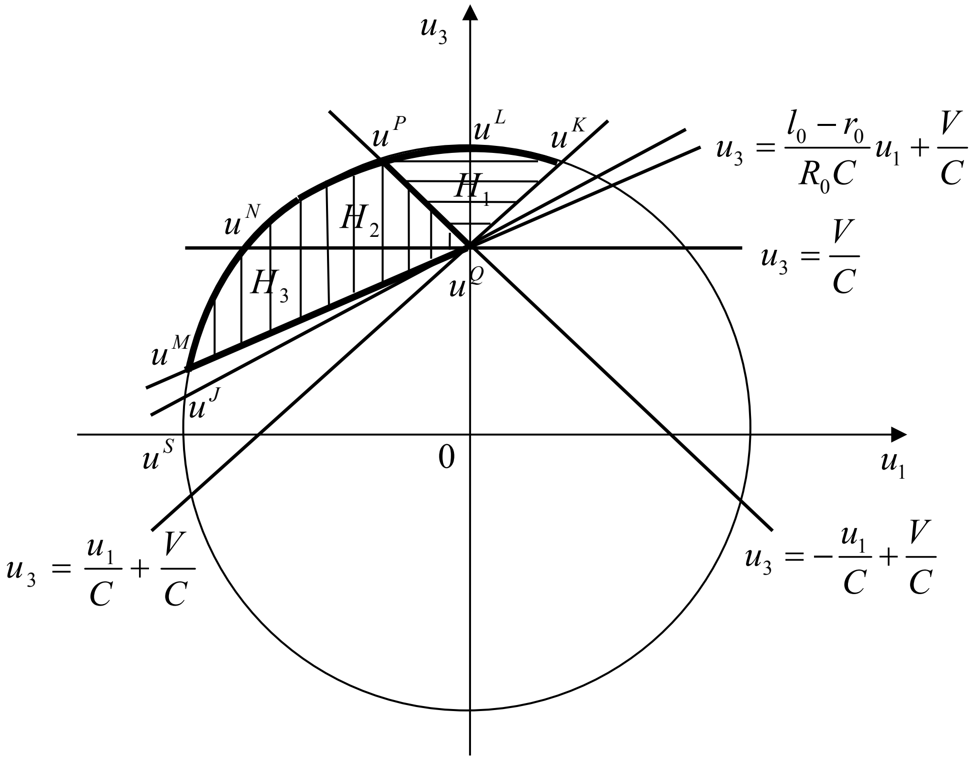
$$u_1^Q = 0, \quad u_3^Q = \frac{V}{C} > 0, \tag{2.14}$$

$$u_1^N = \left[U^2 - \left(u_3^N\right)^2 \right]^{1/2} > 0, \quad u_3^N = \frac{V}{C} > 0, \tag{2.15}$$

$$u_1^K = \frac{V + C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2}}{1+C^2} > 0, \quad u_3^K = \left[U^2 - \left(u_1^K\right)^2 \right]^{1/2} > 0 \tag{2.16}$$

$$u_1^M(R_0) = \frac{-[(l_0 - r_0)/R_0]V - C\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2} < 0, \tag{2.17}$$

$$u_3^M(R_0) = \frac{CV - [(l_0 - r_0)/R_0]\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2}.$$

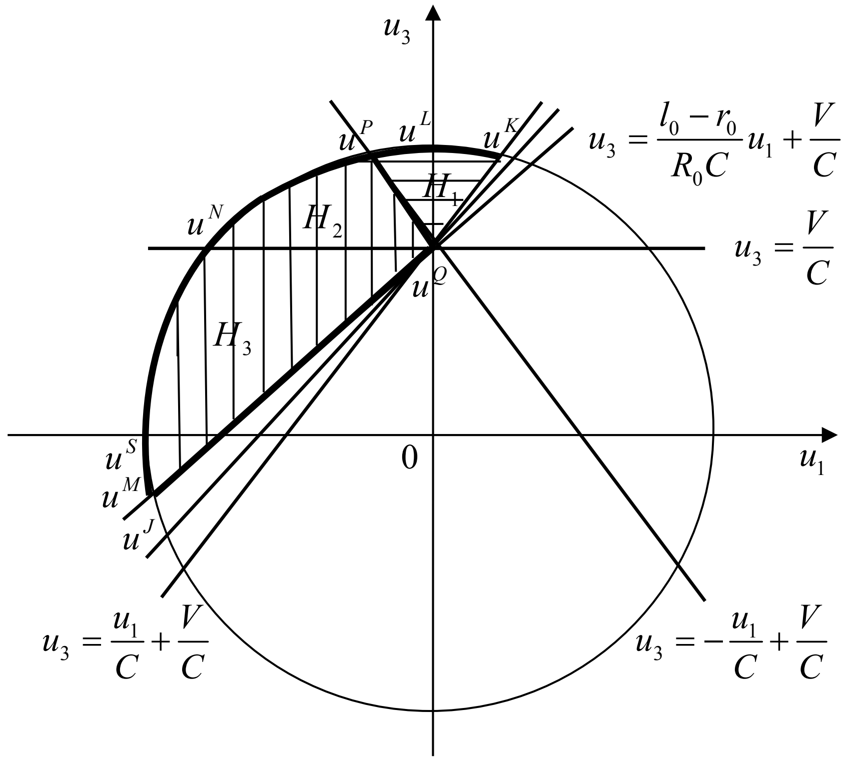


Фиг. 2

Как следует из (2.12) – (2.17) и фиг.2, где $u^S = (-U,0)$ и $u^L = (0,U)$, при $R_0 \to \infty$ линия $u^M(R_0)u^Q$ вращается вокруг точки u^Q по часовой стрелке и стремится к положению $u^N u^Q$ (координата $u_1^M(R_0)(u_3^M(R_0)) \to u_1^N(u_3^N)$. При $R_0 \to l_0 + r_0$ линия $u^M(R_0)u^Q$ вокруг точки u^Q вращается против часовой стрелки и стремится к положению линии $u^J u^Q$ (координата $u_1^M(R_0)(u_3^M(R_0)) \to u_1^J(u_3^J)$, где координаты точки u^J – точки пересечения прямой $u^M(R_0)u^Q$ с окружностью $u_1^2 + u_3^2 = U^2$ при $R_0 = l_0 + r_0$ определяются таким образом:

$$u_1^J = \frac{-[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]V - C\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]^2 + C^2} < 0,$$

$$u_3^J = \frac{CV - [(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]^2 + C^2}. \qquad (2.18)$$



Фиг. 3

Отметим, что знак координаты u_3^J (2.18) зависит от параметров задачи следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&u_3^J > 0, \quad \text{если} \quad V > \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U \qquad (a) \\
&u_3^J \le 0, \quad \text{если} \quad \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U \ge V \qquad (b)
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Случаю (2.19)(a) соответствует фиг.2, а случаю (2.19)(b) – фиг.3.

Из (2.10)-(2.12), с учётом (2.13)-(2.19), следует, что области H_1 и H_2 не зависят от параметра R_0, а область H_3 зависит. Поэтому, изменение области H от параметра R_0 следующее:

$$
\begin{aligned}
&H(R_0) \to H_1 \cup H_2 \quad \text{при} \quad R_0 \to \infty, \\
&H(R_0) \to H_3^J \cup H_2 \cup H_1 \quad \text{при} \quad R_0 \to l_0 + r_0,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

где

$$H_3^J = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \; u_1^J \le u_1 \le u_1^Q, \; u_3^J \le u_1 < u_3^N = u_3^Q, \; u_1^2 + u_1^2 \le U^2 \right\}.$$

Двигаясь при управлении $u = (u_1, 0, u_3)$, где $(u_1, u_3) \in H$ (2.9), объект X

обнаруживает Y не позже момента времени $T^-(u_1,u_3)$ (2.6). Причём, если $(u_1,u_3)\in H_1$, то $0<T^-<T^+=\infty$, а если $(u_1,u_3)\in H_2$, то $0<T^-\le T^+<\infty$.

Область H (2.9) назовём областью гарантирующих управлений, $u=(u_1,0,u_3)$ – управление, гарантирующее поиск за конечное время, а соответствующий момент первого поглощения $T^-(u_1,u_3)$ (2.6) – гарантированным временем поиска.

Из (2.10)-(2.12) следует, что $H_i\ne\varnothing,\ i=1,2,3$ в том и только в том случае, когда

$$CU>V. \tag{2.21}$$

Некоторые частные случаи, связанные с различными соотношениями между величинами CU и V, а также параметрами r_0 и l_0, были исследованы в [1,2].

3. Нахождение оптимальных гарантирующих управлений. Перейдём к решению задачи 2 – нахождению в области (2.9) гарантирующих управлений, доставляющих минимум гарантированному времени поиска (2.6):

$$T^{\min}=\min_{(u_1,u_3)\in H}T^-(u_1,u_3)=\min_{(u_1,u_3)\in H}\left(\frac{R_0-l_0+r_0}{-u_1+Cu_3-V}\right). \tag{3.1}$$

Задача (3.1) равносильна задаче

$$\varphi(u_1,u_3)=-u_1+Cu_3\to\max,\quad (u_1,u_3)\in H. \tag{3.2}$$

Так как в (3.2) $\operatorname{grad}\varphi(u_1,u_3)=(-1,C)$, $C>0$, то максимум в (3.2), а значит, минимум в (3.1) достигается в одной из точек части $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}$ дуговой границы $\overset{\frown}{u^Mu^K}$ области H:

$$\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}=\left\{(u_1,u_3):\ u_1^M(R_0)\le u_1<0,\ u_3^M(R_0)\le u_3<U,\ u_1^2+u_3^2=U^2\right\} \tag{3.3}$$

и представляет собой объединение дуг $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^N}$, $\overset{\frown}{u^Nu^P}$, $\overset{\frown}{u^Pu^L}$:

$$\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}=\overset{\frown}{u^M(R_0)u^N}\cup\overset{\frown}{u^Nu^P}\cup\overset{\frown}{u^Pu^L}, \tag{3.4}$$

где

$$\overset{\frown}{u^M(R_0)u^N}=\left\{(u_1,u_3):u_1^M(R_0)\le u_1<u_1^N;u_3^M(R_0)<u_3<u_3^N;u_1^2+u_3^2=U^2\right\} \tag{3.5}$$

$$\overset{\frown}{u^Nu^P}=\left\{(u_1,u_3):\ u_1^N\le u_1<u_1^P,\ u_3^N\le u_3<u_3^P,\ u_1^2+u_3^2=U^2\right\} \tag{3.6}$$

$$\overset{\frown}{u^Pu^L}=\left\{(u_1,u_3):\ u_1^P\le u_1<0,\ u_3^P\le u_3<U,\ u_1^2+u_3^2=U^2\right\} \tag{3.7}$$

$$u^L=(u_1^L,u_3^L),\quad u_1^L=0,\quad u_3^L=U$$

Таким образом, в соответствии с вышесказанным, задача (3.1) сведена к задаче отыскания максимума функции $\varphi(u_1,u_3)=-u_1+Cu_3$ на дуге $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}$:

$$\varphi(u_1,u_3) = -u_1 + Cu_3 \to \max, \quad (u_1,u_3) \in \overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}. \tag{3.8}$$

Зависимость дуги $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}$ от R_0, аналогично (2.20), следующая: $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L} \to \overset{\frown}{u^N u^L}$ при $R_0 \to \infty$; $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L} \to \overset{\frown}{u^J u^L}$ при $R_0 \to l_0 + r_0$ и, поэтому, имеют место включения:

$$\overset{\frown}{u^J u^L} \subset \overset{\frown}{u^M(R_0)u^L} \subset \overset{\frown}{u^N u^L}, \qquad l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \tag{3.9}$$

где

$$\overset{\frown}{u^J u^L} = \left\{ (u_1,u_3): \quad u_1^J \le u_1 < 0, \quad u_3^J \le u_3 < U, \quad u_1^2 + u_3^2 = U^2 \right\}. \tag{3.10}$$

Отметим, что, если выполняются соотношения (2.19)(*a*), то

$$\overset{\frown}{u^J u^L} \subset \overset{\frown}{u^S u^L}, \tag*{(3.11)(a)}$$

а, если выполняются соотношения (2.19)(*b*), то, наборот,

$$\overset{\frown}{u^J u^L} \supset \overset{\frown}{u^S u^L}, \tag*{(3.11)(b)}$$

где

$$\overset{\frown}{u^S u^L} = \left\{ (u_1,u_3): \quad -U < u_1 < 0, \quad 0 < u_3 < U, \quad u_1^2 + u_3^2 = U^2 \right\}. \tag{3.12}$$

Функция $\varphi(u_1,u_3) = -u_1 + Cu_3$ максимального значения на окружности $u_1^2 + u_3^2 = U^2$ достигает в точке

$$u^* = (u_1^*, u_3^*), \tag{3.13}$$

$$u_1^* = -\frac{U}{\sqrt{1+C^2}}, \quad u_3^* = \frac{CU}{\sqrt{1+C^2}}, \quad C > 0,$$

которая, с учётом вышесказанного, находится на дуге $\overset{\frown}{u^S u^L}$ (3.12).

Поскольку, с учётом (3.8)-(3.11),

$$\overset{\frown}{u^S u^L} = \overset{\frown}{u^S u^M(R_0)} \cup \overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}, \tag{3.14}$$

где

$$\overset{\frown}{u^S u^M(R_0)} = \left\{ (u_1,u_3): \ -U < u_1 \le u_1^M, \ \ 0 < u_3 \le u_3^M, \ \ u_1^2 + u_3^2 = U^2 \right\},$$

а $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}$ определяется согласно (3.3), (3.4), то в зависимости от параметров задачи R_0, U, V, C точка (3.13) либо принадлежит дуге $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}$ (3.3),

$$u^* \in \overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}, \tag{3.15}$$

либо находится вне этой дуги – на дуге $\overset{\frown}{u^S u^M(R_0)}$ (3.14) :

$$u^* \in \overset{\frown}{u^S u^M(R_0)} = \overset{\frown}{u^S u^L} \setminus \overset{\frown}{u^M(R_0) u^L} \ . \qquad (3.16)$$

В случае (3.15) точка (3.13) является оптимальной в задаче (3.1): $u^{\min} \equiv u^*$, а в случае (3.16) оптимальной является конечная точка $u^M(R_0)$ дуги $\overset{\frown}{u^S u^M(R_0)}$:

$$u^{\min} = u^M(R_0), \qquad (3.17)$$

т.е.

$$u_1^{\min} = u_1^M(R_0) = \frac{-[(l_0 - r_0)/R_0]V - C\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2}$$

$$u_3^{\min} = u_3^M(R_0) = \frac{CV - [(l_0 - r_0)/R_0]\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2}$$

Перейдём к нахождению условий для параметров задачи, при которых выполняется одно из включений (3.15) или (3.16).

После проведённого исследования с использованием формул (2.13) – (2.20) и представлений (3.4)-(3.7), (3.14), для случаев $C > 1$ и $C \le 1$ получены следующие результаты:

1. $u^* \in \overset{\frown}{u^P u^L}$, (3.18)

при

$$\frac{C^2 - 1}{\sqrt{1 + C^2}} U \ge V, \quad C > 1 \qquad (3.19)$$

для любого $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$,

2. $u^* \in \overset{\frown}{u^N u^P}$, (3.20)

при

$$\frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U \ge V > \frac{C^2 - 1}{\sqrt{1 + C^2}} U, \quad C > 1 \qquad (3.21)$$

или

$$\frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U \ge V > 0, \quad 0 < C \le 1 \qquad (3.22)$$

для любого $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$,

3. $u^* \in \overset{\frown}{u^S u^M(R_0) u^N}$, (3.23)

при

$$CU \ge V > \frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U, \quad C > 0 \qquad (3.24)$$

для любого $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$.

Более подробно остановимся на третьем случае (3.23), (3.24).

A) Пусть выполняются (2.19)(*a*), (3.11)(*a*). Так как, в этом случае

$$\overset{\frown}{u^S u^M (R_0) u^N} = \overset{\frown}{u^S u^J} \cup \overset{\frown}{u^J u^M (R_0) u^N},$$

то из (3.23) следует, что

$$u^* \in \overset{\frown}{u^S u^J} \ (1) \quad \text{или} \quad u^* \in \overset{\frown}{u^J u^M (R_0) u^N} \ (2). \tag{3.25}$$

В случае (3.25) (1), оптимальной в задаче (3.1) является точка $u^M(R_0)$ для всех $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$.

В случае (3.25) (2), для нахождения оптимальной точки определим то значение параметра $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$, при котором имеет место совпадение точек $u^M(R_0)$ (2.18) и u^* (3.13): $u^M(R_0) = u^*$. В рассматриваемом случае обе эти точки находятся на дуге $\overset{\frown}{u^S u^L}$ окружности (3.11), поэтому достаточно приравнять первые координаты (2.17) и (3.13) точек $u^M(R_0)$ и u^*, соответственно, и разрешить полученное уравнение

$$u_1^M(R_0) = u_1^* \tag{3.26}$$

или в явном виде уравнение

$$\frac{-[(l_0 - r_0)/R_0]V - C\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2} = -\frac{U}{\sqrt{1 + C^2}}$$

относительно R_0. Последнее после несложных преобразований приводится к следующему квадратному уравнению относительно $R_0 \in (r_0 + l_0, \infty)$

$$[V^2(1 + C^2) - C^4 U^2] R_0^2 - 2UV\sqrt{1 + C^2}(l_0 - r_0) R_0 + (l_0 - r_0)^2 U^2 = 0. \tag{3.27}$$

Так как в соответствии с (3.24) коэффициент у главного члена в (3.27) положительный, то это уравнение имеет два положительных корня, из которых условию равенства вторых координат точек $u^M(R_0)$ и u^* удовлетворяет наибольший корень

$$R_0^* = \frac{U(l_0 - r_0)}{V\sqrt{1 + C^2} - C^2 U}, \quad r_0 + l_0 < R_0^* < \infty. \tag{3.28}$$

Таким образом, получаем

$$u^* \in \overset{\frown}{u^J u^M (R_0)}, \ R_0^* < R_0 < \infty \quad \text{и} \quad u^* \in \overset{\frown}{u^M (R_0) u^N}, \ l_0 + r_0 < R_0 \le R_0^*. \tag{3.29}$$

B) Пусть теперь выполняются (2.19)(*b*), (3.11)(*b*). Тогда по аналогии со случаем A) (3.25)(2) получаем

$$u^* \in \overset{\frown}{u^S u^M (R_0)}, \ R_0^* < R_0 < \infty \quad \text{и} \quad u^* \in \overset{\frown}{u^M (R_0) u^N}, \ l_0 + r_0 < R_0 \le R_0^*, \tag{3.30}$$

где R_0^* определяется формулой (3.28).

Подытожив результаты (3.18) – (3.30), в итоге, для рассмотренных возможных случаев 1–3, получаем, что минимальное гарантированное время $T^{\min} = T^-(u_1^{\min}, u_3^{\min})$ в задаче (3.1) вычисляется при следующих оптимальных гарантирующих управлениях $u_1^{\min}, u_3^{\min}$:

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^* & \text{при } \; l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \quad \text{если } \; V \in \left(0, \dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U\right], \end{cases} \tag{3.31}$$

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^* & \text{при } \; l_0 + r_0 < R_0 \le R_0^*, \\ & \text{если } \; V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\; CU\right] \cap \left(0,\; \dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U\right], \\ u_{1,3}^M(R_0) & \text{при } \; R_0^* < R_0 < \infty, \\ & \text{если } \; V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\; CU\right] \cap \left(0,\; \dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U\right], \end{cases} \tag{3.32}$$

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^M(R_0) & \text{при } \; l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \quad \text{если } \; u_3^J \ge u_3^* \\ & \text{и } \; V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\; CU\right] \cap \left(\dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U,\; \infty\right), \end{cases} \tag{3.33}$$

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^* & \text{при } \; l_0 + r_0 < R_0 \le R_0^*, \quad \text{если } \; u_3^* > u_3^J \\ & \text{и } \; V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\; CU\right] \cap \left(\dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U,\; \infty\right), \\ u_{1,3}^M(R_0) & \text{при } \; R_0^* < R_0 < \infty, \quad \text{если } \; u_3^* > u_3^J \\ & \text{если } \; V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\; CU\right] \cap \left(\dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U,\; \infty\right), \end{cases} \tag{3.34}$$

в которых $u_1^M(R_0), u_3^M(R_0)$, u_3^*, R_0^* и u_3^J определяются уже известными соотношениями (2.17), (3.13), (3.28), (2.18) соответственно.

Расчёт оптимальных гарантирующих управлений (3.31)-(3.34) производится по следующей последовательности.

1. При заданных параметрах R_0, l_0, r_0 и U, V, C удовлеторяющих (2.1) и (2.21) соответственно, вычисляются величины $\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U$ и $\dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U$.

2. Если максимальная скорость искомого объекта $V \in \left(0,\ \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U\right]$, то согласно (3.31), управление объекта X, определяемое формулой (3.10), обеспечивает обнаружение искомого объекта за минимальное гарантированное время $T^{\min} = T^-(u_1^*, u_3^*)$ (2.6) при любом начальном расстоянии $R_0 \in (r_0 + l_0,\ \infty)$ между центрами кругов неопределённости D_0 и обнаружения G_0.

3. Если максимальная скорость искомого объекта Y удовлетворяет включению $V \in \left(0,\ \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U\right] \cap \left(0,\ \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U\right]$, то согласно (3.32), существует контрольное начальное расстояние R_0^*, вычисляемое по формуле (2.28), такое, что для любого $R_0 \in (r_0 + l_0,\ R_0^*]$ оптимальные гарантирующие управляющие скорости прямолинейного перемещения и расширения круга обнаружения неизменны и вновь вычисляются с помощью (3.13): $u_1^{\min} = u_1^*$, $u_3^{\min} = u_3^*$. А для $R_0 \in (R_0^*, \infty)$ оптимальные гарантирующие управляющие скорости вычисляются по формуле (3.17). Причём, с увеличением начального расстояния R_0 модуль постоянной скорости прямолинейного перемещения центра круга обнаружения $u_1^{\min} = u_1(R_0)$ уменьшается, а постоянная скорость $u_3^{\min} = \sqrt{U^2 - (u_1(R_0))^2}$ расширения круга обнаружения, наоборот, увеличивается.

4. Если максимальная скорость искомого объекта Y удовлетворяет включению $V \in \left(\frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\ CU\right] \cap \left(\frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U, \infty\right)$, то согласно (3.33), (3.34), оптимальные гарантирующие управляющие скорости определяются в зависимости от взаимного расположения точек u^J (2.18) и u^* (3.13) на дуге $\widehat{u^S u^N}$. Так, если $u_3^J > u_3^*$, то $u^{\min} = u^M(R_0)$ для всех $R_0 \in (r_0 + l_0,\ \infty)$ – (3.33), а если $u_3^J < u_3^*$, то в (3.34) оптимальные гарантирующие управления определяются тем же способом, как и в (3.32).

Заключение. В многопараметрической задаче поиска подвижного объекта предложен и обоснован конструктивный алгоритм управления, оптимальное по минимальному гарантированному времени поиска. Полученные в явном виде формулы (3.31)-(3.34) и (3.1) позволяют вычислить оптимальное гарантирующее управление и соответствующее минимальное время гарантированного поиска в зависимости от начального расстояния между центрами круга обнаружения ищущего и круга неопределённости искомого объектов. Изложенный алгоритм, в силу простоты и доступности, удобно применять в различных поисковых системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимальное гарантирующее управление поиском движущегося на плоскости целевого объекта // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 1. С.3-9.
2. Аветисян В.В. Оптимизация гарантирующего управления поиском подвижного объекта // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 2. С.68-78.
3. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Вып.1. С.3-12.
4. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Вып. 4. № 1. С.827-862.
5. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. Гарантированное управление поиском подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С.58-66.
6. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С.31-39.
7. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск неподвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С.62-69.
8. Аветисян В.В. Управление поиском неподвижного объекта с целью захвата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 6. С.160-168.
9. Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. Гарантированный поиск целевого объекта электромеханической системой при минимальных световых энергозатратах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 5. С.151-164.
10. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: 1987. 76с.
11. Меликян А.А. Задача оптимального быстродействия с поиском целевой точки // ПММ. 1990. Т.54. Вып. 1. С.3-11.
12. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи поиска и управления. М.: Наука, 1978. 270с.

Сведения об авторах:

Аветисян Ваган Вардгесович – д.ф.-м.н., профессор факультета математики и механики ЕГУ,
Тел.: (+374 94) 44 95 60;
E–mail: vanavet@yahoo.com

Степанян Ваан Сейранович – аспирант факультета математики и механики ЕГУ,
Тел.: (+374 98) 900846;
E-mail: nop144d@gmail.com

Поступила в редакцию 01.12.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика

УДК 517.977

ОБ УСЛОВИИ ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Барсегян Т.В.

Բանալի բառեր. էտապ առ էտապ փոփոխվող գծային համակարգ, համակարգի շարժում, լրիվ ղեկավարելիություն, լրիվ ղեկավարելիություն պայման:

Ключевые слова: поэтапно меняющаяся линейная система, движение, вполне управляемость, условия вполне управляемости.

Keywords: stage by stage changing linear system, movement, full controllability, condition of full controllability.

Բարսեղյան Տ.Վ.
Էտապ առ էտապ փոփոխվող գծային ստացիոնար համակարգերի լրիվ ղեկավարելիության պայմանի մասին

Դիտարկված է էտապ առ էտապ փոփոխվող գծային դինամիկ համակարգերի ղեկավարման խնդիր: Ստացված է էտապ առ էտապ փոփոխվող գծային ստացիոնար համակարգերի լրիվ ղեկավարելիության պայման, որի ապահովման դեպքում համակարգը կամայական սկզբնական վիճակից կարելի է տեղափոխել կամայական վերջնական վիճակ համապատասխան ղեկավարող ազդեցությամբ:

Barseghyan T.V.
About condition of full controllability of stage by stage changing linear stationary system

The problem of control of stage by stage changing linear dynamic system is considered. The condition of full controllability of stage by stage changing linear stationary system is obtained, in which case the system can move from any initial state to any other final state with corresponded control action.

Рассмотрена задача управления поэтапно меняющимися линейными динамическими системами. Получено условие вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы, при выполнении которого систему из произвольно заданного начального состояния можно перевести в любое заданное конечное состояние с соответствующим управляющим воздействием.

Введение. Задачи управления динамических объектов на множестве состояний функционирования, т.е. когда изменяются параметры модели динамики, имеют важные теоретическое и прикладное значения. Математическая модель динамики управляемого объекта с изменением состояния функционирования в жёстко ограниченных временных интервалах приведена в [1].

Как в обычных задачах управления, так и в задачах управления поэтапно меняющимися динамическими системами, принципиальным является вопрос управляемости таких систем. Вопросы управляемости линейных динамических систем исследованы в работах [1-5].

В [6, 7] сформулированные теоремы дают необходимые и достаточные условия полной управляемости поэтапно меняющейся линейной нестационарной системы. Однако, практическое применение указанной теоремы, даже для стационарных систем, связано с необходимостью строить фундаментальные матрицы решения однородных частей системы, дифференциальных уравнений, что неудобно. Поэтому целесообразно получить условие полной управляемости системы, выраженное непосредственно через исходные данные системы (т.е. параметры системы).

В данной работе для задачи управления поэтапно меняющейся линейной стационарной системы получено условие вполне управляемости, при выполнении которого систему из произвольно заданного начального состояния можно перевести в любое заданное конечное состояние с соответствующим управляющим воздействием. Построена конкретная система, для которой выполняется полученное условие вполне управляемости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается поэтапно меняющимися линейными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1(t)x + B_1(t)u & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ A_2(t)x + B_2(t)u & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ A_m(t)x + B_m(t)u & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор системы, $A_k(t)$, $B_k(t)$ $(\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{m})$ – матрицы параметров системы (модели объекта), $u(t)$ – управляющее воздействие, соответственно с размерностями $A_k(t) - (n \times n)$, $B_k(t) - (n \times r)$, $u(t) - (r \times 1)$. В общем случае предположим, что элементы матрицы функций $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбца $u(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями.

Предполагается, что в заданные промежуточные моменты времени

$$0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = T$$

– конец движения предыдущего этапа – является началом следующего этапа, то есть в моменты времени t_k

$$x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k) \text{ при } (k = 1, \ldots, m-1). \tag{1.2}$$

Определение. Система (1.1), для которой конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, если для любых начальных $x(t_0) = x_0$ и конечных $x(T) = x_T$ состояний можно указать управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ такое, что решение $x(t)$, начиная из состояния $x(t_0)$ в момент времени $t = T$, удовлетворяет условию $x(T) = x_T$.

Теперь рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается поэтапно меняющимися линейными стационарными дифференциальными уравнениями (стационарный случай системы (1.1)), т.е.

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1x + B_1u & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ A_2x + B_2u & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ A_mx + B_mu & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases} \tag{1.3}$$

Вполне управляемая система (1.1) (или (1.3)) обладает тем свойством, что с помощью соответствующего допустимого управления её можно перевести из произвольного заданного начального состояния в заданное конечное состояние.

Требуется найти условия, при которых объект, описываемый системой (1.3), будет вполне управляемым.

Суждение о существовании решения задачи управления системы (1.3), целесообразно иметь, опираясь лишь на исходные данные задачи. Поэтому желательно иметь условия, позволяющие судить о существовании решения задачи управления (о вполне управляемости) по элементам матрицы A_k и B_k $(k = 1,\ldots,m)$.

2. Движение поэтапно меняющейся линейной системы. Следующая теорема определяет представление решения системы (1.1) с условиями (1.2).

Теорема 1. Для любых начальных значений $x(t_0) = x_0$ и допустимых управлений $u(t)$ существует решение $x(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее условиям $x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k)$, $(k = 1,...,m-1)$ и для $t \in [t_{k-1}, t_k)$ представляется в виде

$$x(t) = V(t,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V(t,t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau]u(\tau)d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t} H_k[t,\tau]u(\tau)d\tau \tag{2.1}$$

где

$$V(t,t_j) = X_k[t,t_{k-1}]V(t_{k-1},t_j)$$

$$V(t_k,t_j) = \prod_{i=0}^{k-j-1} X_{k-i}[t_{k-i},t_{k-i-1}], \quad (k = 1,...,m;\ j = 0,...,k-1) \tag{2.2}$$

$H_k[t,\tau] = X_k[t,\tau]B_k(\tau)$, а через $X_k[t,\tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части k -го уравнения системы (1.1).

Отметим, что согласно введённому обозначению, при $j = k-1$ $V(t_k,t_{k-1}) = X_k[t_k,t_{k-1}]$, а при $j = k$ $V(t_k,t_k) = E$.

Доказательство. Формула (2.1) выведена в [6]. Поэтому здесь выводить не будем, а лишь непосредственной подстановкой убедимся, что решение системы (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ определяется формулой (2.1).

Пусть $t \in [t_{k-1}, t_k)$, дифференцируя обе части формулы (2.1), будем иметь:

$$\dot{x}(t) = \dot{V}(t,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} \dot{V}(t,t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau]u(\tau)d\tau + H_k[t,t]u(t) + \\ + \int_{t_{k-1}}^{t} \dot{H}_k[t,\tau]u(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

Учитывая, что

$$\dot{X}_k[t,t_{k-1}] = A_k(t)X_k[t,t_{k-1}]$$

$$H_k[t,t] = X_k[t,t]B_k(t) = B_k(t)$$

$$\dot{V}(t,t_0) = A_k(t)X_k[t,t_{k-1}]V(t_{k-1},t_0) = A_k(t)V(t,t_0)$$

$$\dot{V}(t,t_j) = \dot{X}_k[t,t_{k-1}]V(t_{k-1},t_j) = A_k(t)X_k[t,t_{k-1}]V(t_{k-1},t_j) = A_k(t)V(t,t_j)$$

$$\dot{H}_k[t,\tau] = \dot{X}_k[t,\tau]B_k(\tau) = A_k(t)X_k[t,\tau]B_k(\tau) = A_k(t)H_k[t,\tau]$$

из формулы (2.3) получим

$$\dot{x}(t) = A_k(t)V(t,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} A_k(t)V(t,t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau]u(\tau)d\tau + B_k(t)u(t) +$$

$$+\int_{t_{k-1}}^{t} A_k(t)H_k[t,\tau]u(\tau)d\tau = A_k(t)\left[V(t,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V(t,t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau]u(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. +\int_{t_{k-1}}^{t} H_k[t,\tau]u(\tau)d\tau \right] + B_k(t)u(t) = A_k(t)x + B_k(t)u(t)$$

Следовательно, решение (2.1) удовлетворяет уравнению (1.1) при $t \in [t_{k-1}, t_k)$. Кроме того, решение $x(t)$ (2.1) удовлетворяет начальному значению $x(t_0) = x_0$. Действительно, в случае $k = 1$ $t \in [t_0, t_1)$ при $t = t_0$ из формулы (2.1) имеем $x(t_0) = V(t_0,t_0)x(t_0) = x(t_0) = x_0$.

Справедливость теоремы доказана.

3. Условия вполне управляемости стационарной системы. Получим условия полной управляемости системы (1.3) с условиями (1.2), выраженные непосредственно через матрицы A_k и B_k $(k = 1,\dots,m)$.

Так как A_k – постоянная матрица, то нормированная фундаментальная матрица решений уравнений

$\dot{x} = A_k x \qquad t \in [t_{k-1}, t_k)$

имеет вид [3]

$X_k[t,t_{k-1}] = e^{A_k(t-t_{k-1})}$,

поэтому решение системы (1.3) для момента времени $t \in [t_{k-1}, t_k)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, согласно формулам (2.1) и (2.2), можно записать в виде

$$x(t) = V(t,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V(t,t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{A_j(t_j-\tau)}B_j u(\tau)d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t} e^{A_k(t-\tau)}B_k u(\tau)d\tau, \qquad (3.1)$$

где

$$V(t,t_j) = e^{A_k(t-t_{k-1})}V(t_{k-1},t_j)$$

$$V(t_k,t_j) = \prod_{i=0}^{k-j-1} e^{A_{k-i}(t_{k-i}-t_{k-i-1})} \qquad k = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,k-1 \qquad (3.2)$$

Если управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ обеспечивает переход движения системы (1.3) к моменту времени $t = T$ в положение $x(T) = x_T$, то при $t = t_m = T$ (при $k = m$) из (3.1) с учётом (3.2) будем иметь:

$$x(T) = V(T,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{m} V(T,t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{A_j t_j} e^{-A_j\tau} B_j u(\tau)d\tau. \qquad (3.3)$$

В теории матриц доказано, что матрица $e^{-A_j\tau}$ допускает представление

$$e^{-A_j\tau}=\sum_{i=0}^{p_j-1}\alpha_i^{(j)}(-\tau)A_j^i ,$$

где функции $\alpha_i^{(j)}(\tau)$ – коэффициенты интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра [4, 8] (скалярная функция) и функции $\alpha_i^{(j)}(\tau)$ $(i=0,\dots,p_j-1)$, линейно независимы. А p_j – степень минимального многочлена матриц A_j $(j=1,\dots,m)$. Числа p_j обусловлены кратностями собственных значений матрицы A_j. Очевидно, что $p_j \le n$ $(j=1,\dots,m)$, где n – размерность вектора состояния.

В частном случае, когда все корни характеристического уравнения матрицы A_j являются простыми, имеем:

$$e^{-A_j\tau}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^{(j)}(-\tau)A_j^i . \tag{3.4}$$

Не углубляясь в теорию матриц, вопросы теории функции от матриц подробно изучены в работах [8], отметим лишь то, что матричная экспонента может быть представлена линейной комбинацией степеней этой матрицы.

Учитывая приведённое представление матрицы $e^{-A_j\tau}$, уравнение (3.3) представим в виде:

$$\sum_{j=1}^{m}V(T,t_j)e^{A_jt_j}\sum_{i=0}^{p_j-1}A_j^iB_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}u(\tau)\alpha_i^{(j)}(-\tau)d\tau=x(T)-V(T,t_0)x(t_0). \tag{3.5}$$

Вводя следующие обозначения:

$$L=x(T)-V(T,t_0)x(t_0),\ C_j=V(T,t_j)e^{A_jt_j}\qquad j=1,\dots,m, \tag{3.6}$$

формула (3.5) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{m}C_j\sum_{i=0}^{p_j-1}A_j^iB_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}u(\tau)\alpha_i^{(j)}(-\tau)d\tau=L . \tag{3.7}$$

Запишем формулу (3.7) в виде

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}C_j\Bigg[&B_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}u(\tau)\alpha_0^{(j)}(-\tau)d\tau+A_jB_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}u(\tau)\alpha_1^{(j)}(-\tau)d\tau+\\&+\dots+A_j^{p_j-1}B_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}u(\tau)\alpha_{p_j-1}^{(j)}(-\tau)d\tau\Bigg]=L.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Вводя следующие обозначения:

$$h_i^{(j)}(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t_0\le t<t_{j-1}\\ \alpha_i^{(j)}(-t) & \text{при } t_{j-1}\le t<t_j \qquad i=0,1,\dots,p_{j-1}\\ 0 & \text{при } t_j\le t\le T \qquad j=1,2,\dots,m\end{cases}$$

равенство (3.8) запишется в виде:

$$\sum_{j=1}^{m} C_j \left[B_j \int_{t_0}^{T} u(t) h_0^{(j)}(t)dt + A_j B_j \int_{t_0}^{T} u(t) h_1^{(j)}(t)dt + \cdots + A_j^{p_j-1} B_j \int_{t_0}^{T} u(t) h_{p_j-1}^{(j)}(t)dt \right] = L$$

Введём следующие обозначения:

$$U^{(j)} = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{T} u(t) h_0^{(j)}(t)dt \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_{t_0}^{T} u(t) h_{p_j-1}^{(j)}(t)dt \end{pmatrix}, \quad K^{(j)} = C_j(B_j, A_j B_j, \ldots, A_j^{p_j-1} B_j) \tag{3.9}$$

где вектор $U^{(j)}$ имеет размерность $(p_j r \times 1) = (q_j \times 1)$, а блочная матрица $K^{(j)}$ имеет размерность $(n \times p_j r) = (n \times q_j)$.

С помощью обозначения (3.9) уравнение (3.7) (или (3.8)) запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{m} K^{(j)} U^{(j)} = L \,. \tag{3.10}$$

Полученное матричное уравнение (3.10) запишем по строкам. Поскольку

$$K^{(j)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(j)} & \cdots & K_{1q_j}^{(j)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1}^{(j)} & \cdots & K_{nq_j}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad U^{(j)} = \begin{pmatrix} U_1^{(j)} \\ \vdots \\ U_{q_j}^{(j)} \end{pmatrix},$$

$$V(T,t_0) = \begin{pmatrix} V_{11}(T,t_0) & \cdots & V_{1n}(T,t_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{n1}(T,t_0) & \cdots & V_{nn}(T,t_0) \end{pmatrix},$$

где $q_j = p_j r$, уравнения (3.10) с учётом (3.6) представятся в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} K_{11}^{(1)} U_1^{(1)} + \cdots + K_{1q_1}^{(1)} U_{q_1}^{(1)} + \cdots + K_{11}^{(m)} U_1^{(m)} + \cdots + K_{1q_m}^{(m)} U_{q_m}^{(m)} = x_1(T) - \sum_{i=1}^{n} V_{1i}(T,t_0) x_i(t_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{n1}^{(1)} U_1^{(1)} + \cdots + K_{nq_1}^{(1)} U_{q_1}^{(1)} + \cdots + K_{n1}^{(m)} U_1^{(m)} + \cdots + K_{nq_m}^{(m)} U_{q_m}^{(m)} = x_n(T) - \sum_{i=1}^{n} V_{ni}(T,t_0) x_i(t_0) \end{cases} \tag{3.11}$$

Пусть $q_j \geq n \quad (j = 1, \ldots, m)$. Введём вектор-столбец приведённой системы уравнений (3.11) $K_i^{(j)} = (K_{1i}^{(j)}, K_{2i}^{(j)}, \ldots, K_{ni}^{(j)})^T$ и

$$\tilde{x}(T)=\begin{pmatrix} x_1(T)-\sum_{i=1}^{n}V_{1i}(T,t_0)x_i(t_0) \\ \vdots \\ x_n(T)-\sum_{i=1}^{n}V_{ni}(T,t_0)x_i(t_0) \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Здесь и далее верхний индекс "T" означает операцию транспонирования.
Тогда, систему уравнений (3.11) можно записать так:

$$\tilde{x}(T)=\sum_{i=1}^{q_1}K_i^{(1)}U_i^{(1)}+\dots+\sum_{i=1}^{q_m}K_i^{(m)}U_i^{(m)}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{q_j}K_i^{(j)}U_i^{(j)}.$$

Таким образом, вектор $\tilde{x}(T)$ (3.12) (или произвольный вектор из R^n) представлен в виде линейной комбинации составляющих другого $\sum_{j=1}^{m}q_j$ -мерного вектора $U=(U_1^{(1)},\dots,U_{q_1}^{(1)},\dots,U_1^{(m)},\dots,U_{q_m}^{(m)})^T$.

Для того, чтобы таким образом представить любой n-мерный вектор $\tilde{x}(T)$ (3.12), достаточно иметь n независимых векторов среди векторов $K_i^{(j)}$ $(i=1,\dots,q_j;\ j=1,\dots,m)$. А это означает, что ранг матрицы

$$\begin{aligned}\bar{K}&=(K^{(1)},\dots,K^{(m)})=(K_1^{(1)},\dots,K_{q_1}^{(1)},\dots,K_1^{(m)},\dots,K_{q_m}^{(m)})=\\ &=\{C_1(B_1,A_1B_1,\dots,A_1^{p_1-1}B_1),\dots,C_m(B_m,A_mB_m,\dots,A_m^{p_m-1}B_m)\}\end{aligned} \tag{3.13}$$

равен n. Размерность матрицы $\bar{K}$ равен $\left(n\times\sum_{j=1}^{m}q_j\right)$.

Так как $\sum_{j=1}^{m}q_j=\left(\sum_{j=1}^{m}p_j\right)r\ge n$, то числа $U_1^{(j)},\dots,U_{q_j}^{(j)}$ $(j=1,\dots,m)$ определяются из (3.10) (или из (3.11)), вообще говоря, неоднозначно. Однако, их однозначность и не требуется. Важно, что эти числа существуют. Каждый их набор с помощью интегральных соотношений (3.9) определяет функции $u_1(t),\dots,u_r(t)$.

В самом деле, пусть числа $U_1^{(j)},\dots,U_{q_j}^{(j)}$ $(j=1,\dots,m)$ каким-либо способом определены. Тогда интегральные равенства (3.9) можно рассматривать как моментные соотношения относительно функций $u_1(t),\dots,u_r(t)$. При этом, следуя [4, 5], их можно разбить на группы. К первой группе относим моментные соотношения относительно функции $u_1(t)$. Ко второй – относительно $u_2(t)$ и т.д. Так как функции $\alpha_0^{(j)}(-t),\dots,\alpha_{p_m-1}^{(j)}(-t)$ $(j=1,\dots,m)$ (следовательно, и функции $h_0^{(j)}(t),\dots,h_{p_m-1}^{(j)}(t)$) линейно независимы, первая группа этих соотношений определяет $u_1(t)$. По этой же причине из остальных соотношений последовательно находим $u_2(t),\dots,u_r(t)$. Таким образом, если известны $U_1^{(j)},\dots,U_{q_j}^{(j)}$ $(j=1,\dots,m)$, то определение управления $u(t)$ всегда возможно [5].

Согласно обозначению (3.6), постоянные матрицы $C_j\ (j=1,\dots,m)$ с размерностями $n\times n$ имеют максимальный ранг, так как являются произведением фундаментальных матриц решения однородной части системы (1.3).

Поэтому ранг матрицы $\overline{K}$ (3.13) эквивалентен рангу матрицы
$K=\{B_1,A_1B_1,\dots,A_1^{p_1-1}B_1,\dots,B_m,A_mB_m,\dots,A_m^{p_m-1}B_m\}$.

Следовательно, полученный результат можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2. Линейная стационарная система (1.3) вполне управляема на отрезке времени $t_0\le t\le T$ тогда и только тогда, когда матрица

$$K=\{B_1,A_1B_1,\dots,A_1^{p_1-1}B_1,\dots,B_m,A_mB_m,\dots,A_m^{p_m-1}B_m\} \tag{3.14}$$

имеет ранг, равный n.

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 не требуется, чтобы постоянные $U_1^{(j)},\dots,U_{q_j}^{(j)}\ \ (j=1,\dots,m)$ определялись однозначно. Не нужно также, чтобы моментные соотношения (3.9) определяли вектор-функции $u(t)$ однозначно. Важно было установить лишь существование хотя бы одного управления, переводящего систему из одного заданного состояния x_0 в другое, также заданное состояние x_T.

Пусть система (1.3) такая, что все собственные значения матрицы A_j $(j=1,\dots,m)$ являются простыми, следовательно, имеет место формула (3.4). Тогда, согласно теореме 2, условия вполне управляемости можно сформулировать следующим образом.

Следствие. Если все собственные значения матрицы A_j $(j=1,\dots,m)$ являются простыми, то линейная стационарная система (1.3) вполне управляема на отрезке времени $t_0\le t\le T$ тогда и только тогда, когда матрица

$$K=\{B_1,A_1B_1,\dots,A_1^{n-1}B_1,\dots,B_m,A_mB_m,\dots,A_m^{n-1}B_m\} \tag{3.15}$$

имеет ранг, равный n.

Замечание. Если вместо системы (1.3) рассматривать стационарную систему
$\dot{x}=Ax+Bu$, $t\in[t_0,T]$,
то для вполне управляемости этой системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$(B,AB,\dots,A^{n-1}B)$$

был равен n [2-5], который также следует из теоремы 2 (или следствия).

4. Пример. Рассмотрим следующую поэтапно меняющуюся стационарную систему со скалярным управлением

$$\dot{x}=\begin{cases}A_1x+b^{(1)}u & \text{при } t\in[t_0,t_1)\\ A_2x+b^{(2)}u & \text{при } t\in[t_1,T]\end{cases}, \tag{4.1}$$

где

$$x\in R^2,\ A_i=\begin{pmatrix}a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)}\\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)}\end{pmatrix},\ b_i=\begin{pmatrix}b_1^{(i)}\\ b_2^{(i)}\end{pmatrix}\quad i=1,2$$

с промежуточным условием $x(t_1-0)=x(t_1+0)=x(t_1)$.

На отрезках времени $[t_0,t_1]$ и $[t_1,T]$ матрицы управляемости системы

$$\dot{x} = A_1 x + b^{(1)} u \text{ и } \dot{x} = A_2 x + b^{(2)} u \tag{4.2}$$

имеют вид:

$$K_i = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} & a_{11}^{(i)} b_1^{(i)} + a_{12}^{(i)} b_2^{(i)} \\ b_2^{(i)} & a_{21}^{(i)} b_1^{(i)} + a_{22}^{(i)} b_2^{(i)} \end{pmatrix} \quad i = 1,2 .$$

Предположим, что их ранги не равны двум. Это имеет место, в частности, при $a_{11}^{(i)} = a_{22}^{(i)} \neq 0$, $a_{12}^{(i)} = a_{21}^{(i)} = 0$, $b_j^{(i)} \neq 0$ $i = 1,2$; $j = 1,2$, так как в этом случае

$$\det K_i = (b_1^{(i)})^2 a_{21}^{(i)} - (b_2^{(i)})^2 a_{12}^{(i)} + b_1^{(i)} b_2^{(i)} (a_{22}^{(i)} - a_{11}^{(i)}) = 0 .$$

Матрица управляемости системы (4.1) на отрезке времени $[t_0, T]$ согласно формуле (3.14) (теоремы 2) будет:

$$K = (b^{(1)}, A_1 b^{(1)}, b^{(2)}, A_2 b^{(2)}) . \tag{4.3}$$

Чтобы система (4.1) на отрезке времени $[t_0, T]$ была вполне управляемой, согласно теореме 2, ранг матрицы управляемости (4.3) должен быть равен двум.

В частности, для системы (4.1) справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть выполнены следующие условия: $a_{11}^{(i)} = a_{22}^{(i)} \neq 0$, $a_{12}^{(i)} = a_{21}^{(i)} = 0$, $b_j^{(i)} \neq 0$ $i = 1,2$; $j = 1,2$. Тогда $\mathrm{rang} K_i \neq 2$ $(i = 1,2)$, а $\mathrm{rang} K = 2$, т.е. система (4.1) на отрезке времени $[t_0, T]$ вполне управляема.

Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой, т.е. вычисляя ранги соответствующих матриц управляемости, получим, что ранги матриц K_1 и K_2 не равны двум, а ранг матрицы K равен двум.

Иллюстрирующим примером такой системы является

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 + 2u \end{cases} \quad \text{при } t \in [t_0, t_1) \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - u \end{cases} \quad \text{при } t \in [t_1, T], \tag{4.5}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы управляемости K_1, K_2, K имеют следующий вид:

$$K_1 = (b^{(1)}, \; A_1 b^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; K_2 = (b^{(2)}, \; A_2 b^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$K = (b^{(1)}, \; A_1 b^{(1)}, \; b^{(2)}, \; A_2 b^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что ранги матриц K_1 и K_2 не равны двум, а ранг матрицы K равен двум. Поэтому поэтапно меняющаяся система (4.4)-(4.5) на отрезке времени $[t_0, T]$, согласно теореме 2, вполне управляема.

Заключение. Доказана теорема, определяющая представление решения поэтапно меняющейся линейной нестационарной системы. Получено условие вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы, выраженное непосредственно через исходные параметры системы. Проведено сравнение с известным условием Калмана. Показано, что на отдельных отрезках времени не вполне управляемыми системами образованная поэтапно меняющаяся система может быть вполне управляемой на всем отрезке времени. Широкое практическое применение может иметь полученное условие вполне управляемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвейкин В.Г., Муромцев Д.Ю. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения. М.: Наука, 2007. 128 с.
2. Калман Р. Об общей теории систем управления. //Труды I Конгресса ИФАК. Т.2. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С.521-547.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.
4. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.
5. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504с.
6. Barseghyan V.R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems. //Yugoslav Journal of Operations Resarch. 2012. Vol. 22. № 1. Pp. 31-39.
7. Барсегян В.Р. Об одной задаче управления поэтапно меняющимися линейными динамическим системами. Аналитическая механика, устойчивость и управление. //Тр. X международной Четаевской конференции. Казань, 12-16 июня 2012. Т.3. Часть I. С.191-197.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Барсегян Тигран Ваняевич – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет

E-mail: t.barseghyan@mail.ru

Поступила в редакцию 19.03.2014

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

С О Д Е Р Ж А Н И Е

CONTENTS

Заказ № 581.

Тираж 150.

Сдано в производство 31.03.2015г.

Формат 70 x 100 $^1/_{16}$. 5.75 печ. л.

Цена договорная.

Типография Издательства НАН Армении

Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24