ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №4, 2014 Механика

УДК 539.3

СДВИГОВЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ СО СВОЙСТВАМИ УПРОЩЁННОЙ МОДЕЛИ КОССЕРА

Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б.

Ключевые слова: периодическая система, сдвиговые волны, модель Коссера
Key words: Periodic systems, shear waves, Cosserat model

Համբարձումյան Ս.Ա., Բելուբեկյան Մ.Վ., Ղազարյան Կ.Բ
Սահքի առաձգական ալիքները Կոսերաների պարզեցված մոդելի հատկություններով պարբերական միջավայրում

Կոսերաների պարզեցված մոդելի շրջանակում դիտարկված է միաչափ սահքի ալիքի տարածումը, երբ ալիքն ուղղահայաց է երկու տարբեր, պարբերաբար հերթագայող, համասեռ առաձգական միջավայրերի եզրերին: Հաստատվել է,որ բարձր հաճախությունների ընդգրկույթում մոմենտային լարումների հաշվի առնելը, էականորեն ձևափոխում է միջավայրերի պարբերականությամբ պայմանավորված հաճախությունների արգելված գոտիների կառուցվածքը:

Ambartsumian S.A., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B.
Shear elastic waves in a periodic medium with the Cosserat simplified model properties

Based on the Cosserat simplified model a dynamic problem is considered for an one-dimensional shear elastic wave travelling perpendicularly to the boundaries of two different periodically alternating homogeneous media. The results show that Cosserat effect significantly alters the band gap structure in the range of high frequencies due to the Bragg scattering.

В рамках упрощённой модели Коссера рассмотрен вопрос распространения одномерной сдвиговой волны перпендикулярно к границам двух различных периодически чередующихся упругих однородных сред. Установлено, что в диапазоне высоких частот учёт моментных напряжений существенно изменяет структуру запретных зон частот, обусловленных периодичностью среды.

Имеется обширная литература по исследованию проблем механики на основе микрополярной теории упругости (или на основе среды Коссера). Из обзоров, в частности, отметим [1-3]. В общем случае, уравнения и связи микрополярной теории довольно сложные, поэтому для решения конкретных задач часто используют более простые модели [4-6]. С другой стороны, возможно, что наиболее существенные эффекты, связанные с учётом моментных напряжений, имеют место в динамических задачах. Для таких задач, в частности, для исследования распространения упругих волн на основе модели Коссера была предложена более простая модель, учитывающая только динамику внутреннего вращения частиц. Модель упрощённой среды Коссера для динамических задач, повидимому, впервые была предложена в [7]. На основе этой модели был решён ряд задач [8-14].

Большое количество статей посвященно задаче распространению акустических волн в периодической среде, например, обзор [15]. Были исследованы также сдвиговые волны в упругой периодической среде с усложнёнными свойствами [16-18].

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) уравнения движения упругой среды следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1,2,3 \tag{1.1}$$

где σ_{ji} – компоненты тензора напряжений, u_i – компоненты вектора упругих перемещений, ρ – плотность материала среды. Согласно упрощённой модели Коссера [7,11,14], материальные уравнения среды (обобщение закона Гука) принимаются в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\,\varepsilon_{kk} + J\,\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial t^2}. \tag{1.2}$$

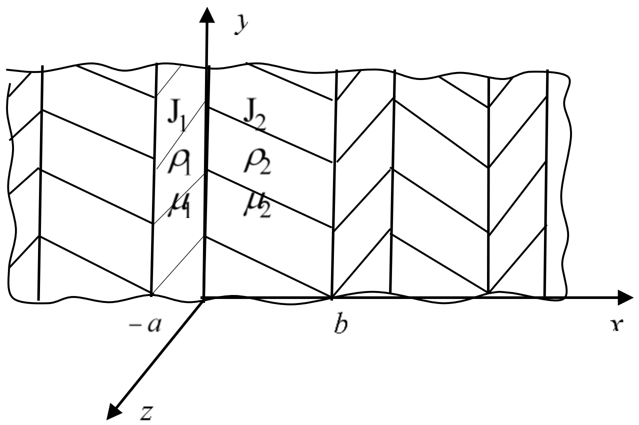
В (1.2) тензор деформаций ε_{ij} и тензор вращений ω_{ij} определяются посредством упругих перемещений:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad \omega_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \tag{1.3}$$

λ, μ – упругие коэффициенты Ламе, J – динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении).

Из (1.2) и выражения для ω_{ij} следует несимметричность тензора напряжений $\left(\sigma_{ji} \neq \sigma_{ij}\right)$ для динамических задач.

Рассматривается слоистая среда, периодически повторяющаяся по направлению координаты $x_1 = x$ (фиг.1)



Фиг.1. Периодическая среда, состоящая из двух различных упругих материалов.

Слои $k=1$ $(-a < x < 0)$ и $k=2$ $(0 < x < b)$ имеют различные физико-механические свойства и периодически повторяются, при этом, $-\infty < x_2 < \infty, \; -\infty < x_3 < \infty$. Предполагается, что в этой среде распространяются чисто сдвиговые одномерные волны (не зависящие от x_2, x_3). Согласно (1.2) и (1.3), для напряжений сдвига имеем следующие выражения:

$$\sigma_{13}^{(k)} = \mu_k \frac{\partial w_i}{\partial x} + J_k \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial t^2}, \quad \sigma_{31}^{(k)} = \mu_k \frac{\partial w_i}{\partial x} - J_k \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial t^2}, \quad k = 1,2 \tag{1.4}$$

где w_k – компонента вектора перемещения в направлении оси x_3 соответствующего слоя. Подстановка (1.4) в уравнения движения (1.1) при $i = 3$ даёт

$$c_{tk}^2 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + l_k^2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.5}$$

в (1.5) приняты следующие обозначения:

$$c_{tk}^2 = \frac{\mu_k}{\rho_k}, \; l_k^2 = \frac{J_k}{\rho_k} \tag{1.6}$$

Ввиду периодичности свойств среды вдоль координаты x, согласно Флоке, достаточно рассмотреть только часть пространства $-a \le x \le b$. Тогда условием контакта двух слоёв будет непрерывность перемещения и напряжения.

$$w_1 = w_2, \; \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)} \text{ при } x = 0. \tag{1.7}$$

Условия квазипериодичности (условия Флоке) будут иметь вид:

$$\begin{gathered} s\, w_1(-a,t) = w_2(b,t), \; s = e^{-ipd} \\ s\, \sigma_{13}^{(1)}(-a,t) = \sigma_{13}^{(2)}(b,t), \; d = a + b \end{gathered} \tag{1.8}$$

2. Решения уравнений (1.5) представляются в виде

$$w_k = f_k(x) e^{i\omega t}. \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в (1.5) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций $f_k(x)$, имеющим общие решения

$$f_k(x) = A_k \cos\alpha_k x + B_k \sin\alpha_k x, \tag{2.2}$$

где

$$\alpha_k = \omega\left(c_{tk}^2 - e_k^2\omega^2\right)^{-1/2} \tag{2.3}$$

и A_k, B_k – произвольные постоянные.

После удовлетворения граничным условиям контакта слоёв (1.7), для функций $f_k(x)$ получаются

$$\begin{gathered} f_1(x) = A\cos\alpha_1 x + B\sin\alpha_2 x \\ f_2(x) = A\cos\alpha_2 x + \gamma B\sin\alpha_2 x \end{gathered} \tag{2.4}$$

где A, B – новые произвольные постоянные

$$\gamma = \rho_1\alpha_2 / (\rho_2\alpha_1). \tag{2.5}$$

Подстановка (2.4) в условия Флоке (1.8) приводит к следующей системе однородных уравнений относительно произвольных постоянных A, B.

$$\begin{gathered} (s\cdot\cos\alpha_1 a - \cos\alpha_2 b)A - (s\cdot\sin\alpha_1 a - \gamma\sin\alpha_2 b)B = 0 \\ (s\cdot\sin\alpha_1 a + \gamma^{-1}\sin\alpha_2 b)A + (s\cdot\cos\alpha_1 a - \cos\alpha_2 b)B = 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (2.6) после некоторых преобразований приводится к уравнению

$$\cos pd = F(\omega) \tag{2.7}$$

$$F(\omega)=\cos a\alpha_1(\omega)\cos b\alpha_2(\omega)-0{,}5\left(\gamma(\omega)+\gamma(\omega)^{-1}\right)\sin a\alpha_1(\omega)\sin b\alpha_2(\omega)$$

Дисперсионные уравнения (2.7) определяют волновое число p в зависимости от частоты ω. Если имеются области значений ω, для которых $|F(\omega)|>1$, то в этой области частот распространение сдвиговой волны не имеет места (в этом случае волновое число p не является действительным).

Из (2.7) для непериодической среды, когда материалы одинаковы, имеем следующее дисперсионное уравнение и формулы для фазовой и групповой скоростей сдвиговых волн:

$$p=\frac{\omega}{\sqrt{c_t^2-l_1^2\omega^2}};$$

$$\mathrm{V}_f=\frac{\omega}{p}=\frac{c_t}{\sqrt{1+l^2p^2}};\quad \mathrm{V}_g=\frac{d\omega}{dp}=\frac{c_t}{\sqrt{(1+l^2p^2)^2}}.$$

В частном случае, когда

$$\rho_1\mu_1=\rho_2\mu_2,\quad \rho_1J_1=\rho_2J_2\,(\Rightarrow\gamma=1),\tag{2.8}$$

где первое равенство означает равенство импедансов материала слоёв, а второе – условно равенство «вращательных импедансов», из (2.7) следует:

$$pd=\frac{\omega a}{\sqrt{c_{t_1}^2-l_1^2\omega^2}}+\frac{\omega b}{\sqrt{c_{t_2}^2-l_2^2\omega^2}}+2n\pi.\tag{2.9}$$

Из (2.9) в рассматриваемом частном случае (2.8) следует, что при условии

$$\omega^2\ge\min\left(\frac{\mu_1}{J_1},\frac{\mu_2}{J_2}\right)\tag{2.10}$$

упругая сдвиговая волна не может распространяться вдоль периодической системы.

Пусть $\gamma=1$, но хотя бы одно из равенств (2.8) не имеет места. Это возможно, если частота колебаний упругой среды имеет значение

$$\omega=\sqrt{\frac{\rho_1\mu_1-\rho_2\mu_2}{\rho_1J_1-\rho_2J_2}}.\tag{2.11}$$

В этом случае, согласно (2.7), для волнового числа получается

$$pd=\frac{\rho_1a+\rho_2b}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\sqrt{\frac{\rho_1\mu_2-\rho_2\mu_2}{\mu_2J_1-\mu_1J_2}}+2n\pi.\tag{2.12}$$

Отсюда следует, что для частоты колебаний (2.11) волна Флоке возможна либо при

$$\rho_1\mu_2>\rho_2\mu_2,\quad \mu_2J_1>\mu_1J_2,\tag{2.13}$$

либо при

$$\rho_1\mu_2<\rho_2\mu_2,\quad \mu_2J_1<\mu_1J_2.\tag{2.14}$$

3. Рассматривается общий случай на основе уравнения (2.7). Пусть для определённости имеет место неравенство

$$\frac{\mu_1}{J_1}\le\frac{\mu_2}{J_2}.\tag{3.1}$$

При условии $\omega^2 < \mu_1/J_1$ уравнение (2.7) позволяет применить приближение

$$(\alpha_1 a)^2 << 1, \ (\alpha_2 b)^2 << 1, \tag{3.3}$$

откуда получается

$$\cos d = 1 - \frac{\rho_1 a + \rho_2 b}{2\rho_1 \rho_2}\left(\rho_2 \alpha_1^2 a + \rho_1 \alpha_2^2 b\right). \tag{3.4}$$

Из (3.4) можно легко вычислить значения $k\,d$ для конкретных материалов.

В диапазоне частот колебаний, удовлетворяющих условию $\mu_1/J_1 < \omega^2 < \mu_2/J_2$, уравнение (2.7) заменяется уравнением

$$\cos pd = \operatorname{ch} a\alpha_1 \sin b\alpha_{22} - 0,5\left(\gamma_0 - \gamma_0^{-1}\right)\operatorname{sh} a\alpha_1 \sin b\alpha_{22}. \tag{3.5}$$

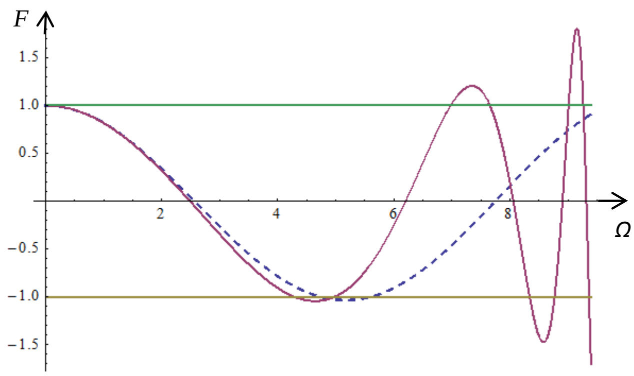
Для частот колебаний $\omega^2 > \mu_2/J_2$ вместо уравнения (2.7) имеем

$$\cos pd = \operatorname{ch} a\alpha_{11} \operatorname{ch} b\alpha_{22} + 0,5\left(\gamma_1 + \gamma_1^{-1}\right)\operatorname{sh} a\alpha_{11} \operatorname{sh} b\alpha_{22}, \tag{3.6}$$

где

$$\alpha_{11} = \frac{\omega}{\sqrt{l_1^2\omega^2 - c_{t1}^2}}, \ \alpha_{22} = \frac{\omega}{\sqrt{l_2^2\omega^2 - c_{t2}^2}}; \ \gamma_0 = \rho_1\alpha_{22}/(\rho_2\alpha_1);$$
$$\gamma_1 = \rho_1\alpha_{22}/(\rho_2\alpha_{11}) \tag{3.7}$$

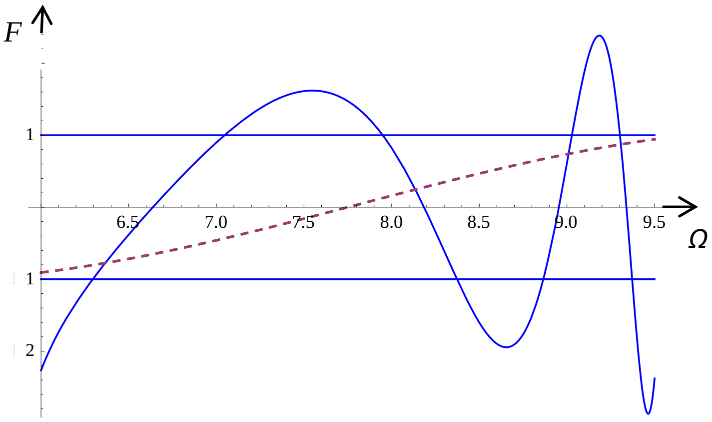
Нетрудно убедиться, что уравнение (3.7) для всех ω не имеет решений, для которых p является действительным.



Фиг. 2. График зависимости функции F от безразмерного параметра частоты Ω в диапазоне $\omega^2 < \mu_1/J_1$; $a = b; \rho_1/\rho_3 = 1/3; c_{t1}/c_{t2} = 1/5;$ $\frac{J_1}{d^2\rho_1} = 0.01; \ \frac{J_2}{d^2\rho_2} = 0.03.$

На основе численного анализа уравнений (2.7) и (3.5), на фиг. 2, 3 для слоистой среды приведены графики зависимости функции $F(\omega)$ от безразмерной частоты $\Omega = \frac{\omega d}{c_{t1}}$. Последовательности точек значений частот ω, где $F(\omega) = 1$ и

$F(\omega) = -1,$ определяют границы зон запирания частот. Пунктирные кривые относятся к обычным средам.



Фиг.3. График зависимости функции F от безразмерного параметра частоты Ω в диапазоне $\mu_1/J_1 < \omega^2 < \mu_2/J_2$; $a = b$; $\rho_1/\rho_3 = 1/3$; $c_{t1}/c_{t2} = 1/5$;

$$\frac{J_1}{d^2\rho_1} = 0.01; \ \frac{J_2}{d^2\rho} = 0.8.$$

Анализ этих кривых указывает на существенную роль эффекта, связанного с учётом моментных напряжений, на формирование новых структур границ зон запирания частот для сдвиговых волн. Роль этого эффекта ярко выражена в высокочастотном диапазоне и зависит от периода слоистой среды.

Исследование выполнено в рамках научного проекта за № SCS 13 – 2C 005 ГКН МОН РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твёрдых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 327с.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Прикладная микрополярная теория упругих оболочек. Ереван: Изд-во “Гитутюн” НАН РА, 2010. 136с.
3. Кантор М.М., Никабадзе М.У., Улиханян А.Р. Уравнения движения и граничные условия физического содержания микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами. //Изв.РАН. МТТ. 2013. №3. С.96-110.
4. Eringen A.S. Microcontinuum field theories. 1, Foundation and Solids. N.Y.: Springer, 1998. 325 p.
5. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. 214с. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН Армении, 2013. 222с.
6. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек //Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. Вып 2. С.325-343.
7. Schwartz L.M., Jonson D.L., Feng S. Vibrational models in granular materials // Physical Review Letters 1984, 52 (10), p.831-834.
8. Угодчиков А.Г. Моментная динамика линейного-упругого тела. //Докл. РАН. 1995. Т.340. №1. С.50-58.
9. Манукян В.Ф. О существовании поверхностных волн в микрополярных средах// Изв НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. №2. С.75-79.

10. Grekova E.F., Herman C.G. Wave propagation in solids and rock modeled as half-Cosserat continuum// XXXI School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» Book of Abstracts- St. Petersburg, 2003. P.45-46.
11. Белубекян М.В., Манукян В.Ф. О существовании и распространении поверхностных волн с учётом внутреннего вращения /В сб.: «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести». Ереван: Гитутюн, 2006. С.92-97.
12. Kulesh M.A., Grekova E.F., Schardakov I.N. Rayleigh waves in the isotropic and linear reduced Cosserat continuum// In Proc. of XXXI Summer School "Advanced Problems in Mechanics" St. Petersburg, RAS, 2006, p.281-289.
13. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебание упругой пластинки с учётом внутреннего вращения. //Изв. ЕГУАС. Ереван: 2008. Т.3. С.25-29.
14. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания весьма пологой сферической панели с учётом внутреннего вращения. //Вестник инженерной Академии Армении. Ереван. 2012. Т.9. №1. С.101-106.
15. Dowling J.P., Everitt H., Yablonovitch E. Photonic and sonic band-gap bibliography. See http:// phys.lsu.edu/ jdowling/ pbgbib.html.
16. Даноян З.Н., Казарян К.Б., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Квазипериодические спиновые волны типа Блоха-Флоке в периодической слоистой структуре из ферромагнитных и диэлектрических слоёв. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №4. С.29-37.
17. Piliposian G.T., Avetisyan A.S., Ghazaryan K.B. Shear wave propagation in periodic phononic/ photonic piezoelectric medium. // Wave Motion. 2012. V.49, Iss. 1. P.125-134.
18. D.G Piliposyan, K.B Ghazaryan, G.T Piliposian. Shear Bloch waves and coupled phonon–polariton in periodic piezoelectric waveguides //Ultrasonics, Vol.54. Issue 2. 2014. P.644–654.

Сведения об авторах:

Амбарцумян Сергей Александрович – доктор техн. наук, профессор, академик, член Президиума НАН Армении,
Тел.: 52-06-44; 52-15-03
E-mail: samb@sci.am

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ.-мат.наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения
Тел.: (+374 10) 52-15-03; (+374 10) 58-00-96
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Казарян Карен Багратович – доктор физ.-мат.наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (374 10) 22 73 95, (374 955) 22 73 95
E-mail: ghkarren@gmail.com

Поступила в редакцию 14.04.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №4, 2014 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ НА КРАЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В СОСТАВНОМ УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А.

Ключевые слова: локализованная волна, дифракция, трещина, составное тело, факторизация, асимптотика.
Keywords: localized wave, diffraction, crack, compound body, factorization, asymptotic

Գրիգորյան Է.Խ., Աղայան Կ.Լ., Ջիլավյան Ս.Հ.

Տեղայնացված սահքի ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ ճաքով թուլացված բաղադրյալ առաձգական տարածության մեջ

Դիտարկվում է անվերջությունից տարածվող Լյավի տեղայնացված սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը, անհամասեռության գծին զուգահեռ կիսաանվերջ ճաքով թուլացված, կտոր–առ–կտոր համասեռ տարածության համար: Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ, առաձգական ալիքների դիֆրակցիայի խառը եզրային խնդրի լուծումը բերվում է իրական առանցքի վրա Ռիմանի խնդրի, Դիրակի $\delta(x)$ ֆունկցիայով աջ մասով: Ֆունկցիոնալ հավասարման ընդհանրացված ֆունկցիաներով կառուցված լուծումը հնարավորություն է տվել ստանալ ալիքային դաշտի բաղադրիչները բաղադրյալ տարածության յուրաքանչյուր տեղամասում, ինչպես նաև ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են դիֆրակցված դաշտի առանձնահատկությունները հեռավոր տիրույթներում:

Grigoryan E.Kh., Aghayan K.L., Jilavyan S.H.

Diffraction of localized shear wave at the edge of semi-infinite crack in compound elastic space

The diffraction of localized shear plane Love`s wave, falling from infinity in a piecewise-homogeneous elastic space weakened by a semi-infinite crack parallel to the line of heterogeneity is considered.
With the help of Fourier transform, mixed boundary value problem of diffraction of elastic waves is reduced to the problem of Riemann type theory of analytic functions on the real axis with the right part of the generalized Dirac function $\delta(x)$. Obtaining in generalized functions solution of functional equations allowed us to obtain the distribution of wave field in each subregion of elastic space, as well as asymptotic formulas defining the characteristics of the diffraction field in remote areas.

Рассматривается задача дифракции локализованной сдвиговой плоской волны Лява, падающей из бесконечности, в упругом кусочно-однородном пространстве, ослабленной полубесконечной трещиной параллельной линии неоднородности. Используя преобразование Фурье, смешанная краевая задача дифракции упругих волн сводится к задаче типа Римана теории аналитических функций на действительной оси с правой частью обобщённой функции Дирака $\delta(x)$. Полученное в обобщённых функциях решение функционального уравнения позволило получить распределение волнового поля в каждой подобласти упругого пространства, а также асимптотические формулы, определяющие характерные особенности дифракционного поля в дальних зонах.

Проблемы динамической теории упругости, связанные с процессами колебаний, дифракции и распространения различных типов волн в неоднородных упругих средах представляют для исследователей несомненный интерес. По вопросам исследования характерных особенностей распространения и дифракции сдвиговых плоских волн в упругих и пьезоэлектрических средах, содержащих разнородные концентраторы напряжений, опубликовано немало работ, из которых, в частности, отметим [1-6] и цитированные там работы. Здесь, в отличие от указанных работ, где концентраторы напряжений располагаются на линии раздела материалов, рассматривается задача о дифракции локализованной сдвиговой плоской волны в упругом кусочно-однородном пространстве с концентратором напряжений в виде полубесконечной трещины, расположенной внутри одного из полупространств.

1. Рассмотрим кусочно-однородное упругое пространство состоящее из двух различных полупространств, занимающие в декартовой системе координат $Oxyz$, область $\Omega_1\left(|x|<\infty, y>0, |z|<\infty\right)$ и $\Omega_2\left(|x|<\infty, y<0, |z|<\infty\right)$. Полупространство Ω_2 ослаблено полубесконечной сквозной трещиной продольного сдвига по полуплоскости $\Omega_0\left(x<0, y=-h, |z|<\infty\right)$, а полупространства, контактирующие по плоскости $y=0$, находятся в условиях полного контакта.

В квандранте $\Omega_{11}\left(x<0, y>0, |z|<\infty\right)$ и контактирующей с ней полуслое $\Omega_{21}\left(x<0, -h<y<0, |z|<\infty\right)$ из безконечности, по направлению оси Ox распространяется заданная локализованная сдвиговая волна Лява [7]:

$$u_z^{(\infty)}\left(x,y,t\right)=w_L\left(x,y\right)e^{-i\omega t} \tag{1.1}$$

с амплитудой

$$w_L\left(x,y\right)=\begin{cases} w_L^{(1)}\left(x,y\right)=A_m^{(L)}\cdot e^{-i\sigma_m x}\cdot e^{-\gamma_m^{(1)}y}, & y\geq 0 \\ w_L^{(2)}\left(x,y\right)=A_m^{(L)}\dfrac{\operatorname{ch}\left(\gamma_m^{(2)}\left(y+h\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\gamma_m^{(2)}h\right)}e^{-i\sigma_m x}, & -h\leq y\leq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

где $A_m^{(L)}$ – постоянная, а

$$\gamma_m^{(1)}=\sqrt{\sigma_{m1}^2-k_1^2}, \qquad \gamma_m^{(2)}=\sqrt{\sigma_{m1}^2-k_2^2} \tag{1.3}$$

Здесь $k_j=\omega/c_j$ – волновые числа, $c_j=\sqrt{\mu_j/\rho_j}$ – скорости распространения сдвиговых упругих волн, μ_j,ρ_j – модуль сдвига и плотность среды в областях $\Omega_j\left(j=1,2\right)$, ω –частота колебаний, t –время, σ_{m1} – волновое число локализованной волны Лява, т.е. m -ый положительный корень функции

$$L_1\left(\sigma\right)=\mu_1\gamma_1\operatorname{ch}\left(\gamma_2 h\right)+\mu_2\gamma_2\operatorname{sh}\left(\gamma_2 h\right) \tag{1.4}$$

где h – толщина полуслоя Ω_{21}, а

$$\gamma_j=\sqrt{\sigma^2-k_j^2}; \quad j=1,2 \tag{1.5}$$

Не останавливаясь здесь на функциях (1.3) и (1.5) входящих в (1.4), к ним обратимся позже, отметим лишь, что $k_1<\sigma<k_2$, которое обеспечивает существование и распространение локализованных волн Лява в областях Ω_{11} и Ω_{21}.

Предполагая, что среда находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить дифрагированное волнове поле во всех областях составного пространства.

Разделим составное пространство на три части: Ω_1, $\Omega_2^{(1)}\left(|x|<\infty,-h<y<0,|z|<\infty\right)$ и $\Omega_2^{(2)}\left(|x|<\infty,y<-h,|z|<\infty\right)$.

Уравнения движения рассматриваемой задачи в амплитудах (гармонический множитель, как обычно опускается) запишутся в виде [7]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\begin{Bmatrix}k_1^2\\k_2^2\end{Bmatrix}\right)\begin{pmatrix}w_1\\w_2^{(j)}\end{pmatrix}=0 \quad (x,y)\in\begin{Bmatrix}\Omega_1\\\Omega_2^{(j)}\end{Bmatrix},\ i=1,2 \tag{1.6}$$

где $w_1(x,y),w_2^{(j)}(x,y)$ – амплитуды перемещений в областях Ω_1 и $\Omega_2^{(j)}$.

Для формулировки граничных условий заметим, что берега трещины свободны от напряжений, а на поверхностях соприкасания выполняются условия полного контакта. Так что, граничные и контактные условия посредством $w_1(x,y)$ и $w_2^{(j)}(x,y)$ запишутся в виде:

$$w_1(x,+0)=w_2^{(1)}(x,-0);\ \ \mu_1\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=+0}=\mu_2\left.\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial y}\right|_{y=-0},\ -\infty<x<\infty \tag{1.7}$$

$$w_2^{(1)}(x,-h+0)=w_2^{(2)}(x,-h-0);\ \ \mu_2\left.\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial y}\right|_{y=-h+0}=\mu_2\left.\frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial y}\right|_{y=-h-0},\ x>0 \tag{1.8}$$

$$\mu_2\left.\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial y}\right|_{y=-h+0}=\mu_2\left.\frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial y}\right|_{y=-h-0}=0,\qquad x<0 \tag{1.9}$$

Решение краевой задачи (1.6)–(1.9) должно удовлетворять также условию уходящей волны [8], к которому обратимся позже.

Выше имелось в виду, что [7]

$$\tau_{xz}(x,y)=\mu\frac{\partial w}{\partial x},\ \ \tau_{yz}(x,y)=\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.10}$$

Учитывая, что в областях $\Omega_{12}\left(x>0,y>0,|z|<\infty\right)$ и $\Omega_{22}\left(x>0,-h<y<0,|z|<\infty\right)$ имеются только излученные волны, представим, как обычно, в областях Ω_1 и $\Omega_2^{(1)}$:

$$W_1(x,y)=w_1(x,y)-w_L^{(1)}(x,y);\quad W_2(x,y)=w_2^{(1)}(x,y)-w_L^{(2)}(x,y), \tag{1.11}$$

и решение волновых уравнений (1.6), после преобразования Фурье, удовлетворяющие условиям уходящей волны, ищем в виде

$$\overline{W}_1(\sigma,y)=C_1e^{\gamma_1 y},\quad y\ge 0 \tag{1.12}$$

$$\overline{W}_2(\sigma,y)=Ae^{-\gamma_2 y}+Be^{\gamma_2 y},\quad -h\le y\le 0 \tag{1.13}$$

$$\overline{w}_3(\sigma,y)=C_3e^{\gamma_2, y},\ \ y\le -h \tag{1.14}$$

Применив теперь преобразование Фурье к граничным условиям (1.7)–(1.9) и удовлетворяя им при помощи (1.12)–(1.14), приходим к следующей краевой задаче типа Римана на действительной оси [2,8].

$$\mu_2^{-1}\bar{\Phi}^+(\sigma)+\gamma_2(\sigma)\bar{K}(\sigma)\left[\bar{\Psi}^-(\sigma)-\pi A_m^{(L)}\operatorname{ch}^{-1}\left(\gamma_m^{(2)}h\right)\delta(\sigma+\sigma_{m1})\right]=0 \tag{1.15}$$

$$\bar{K}(\sigma)=\frac{2L_1(\sigma)\cdot e^{-\gamma_2 h}}{\mu_1\gamma_1+\mu_2\gamma_2} \tag{1.16}$$

где $\delta(\sigma)$– известная функция Дирака, $L_1(\sigma)$ и $\gamma_j(\sigma)$ даются (1.4), (1.5). $\bar{\Phi}^+(\sigma)$ и $\bar{\Psi}^-(\sigma)$– трансформанты Фурье функции $\varphi^+(x)$ и $\psi^-(x)$ соответственно, которые связаны с амплитудами $w_2^{(j)}$ $(j=1,2)$ зависимостями:

$$w_2^{(1)}(x,-h+0)-w_2^{(2)}(x,-h-0)=2\psi^-(x);\quad -\infty<x<\infty \tag{1.17}$$

$$\left.\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial y}\right|_{y=-h+0}=\left.\frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial y}\right|_{y=-h-0}=\frac{1}{\mu_2}\varphi^+(x),\quad -\infty<x<\infty \tag{1.18}$$

и подчинены условиям:

$$\psi^-(x)=0 \text{ при } x>0;\qquad \varphi^+(x)=0 \text{ при } x<0 \tag{1.19}$$

Неизвестные функции из (1.12)–(1.14) при помощи решений функционального уравнения (1.15) выражаются формулами:

$$A=-\frac{\gamma_1\mu_1+\gamma_2\mu_2}{2\gamma_2\mu_2L_1(\sigma)}\bar{\Phi}^+(\sigma);\qquad B=\frac{\gamma_1\mu_1-\gamma_2\mu_2}{2\gamma_2\mu_2L_1(\sigma)}\bar{\Phi}^+(\sigma)$$

$$C_1=-\frac{\bar{\Phi}^+(\sigma)}{L_1(\sigma)},\qquad C_2=\frac{1}{\gamma_2\mu_2}e^{\gamma_2 h}\bar{\Phi}^+(\sigma) \tag{1.20}$$

Таким образом, решение поставленной выше задачи свелось к решению функционального уравнения (1.15). Имея решение (1.15), при помощи (1.20), (1.12)–(1.14) можно определить волновое поле в соответствующих областях рассматривамой задачи.

Прежде чем перейти к решению определяющего функционального уравнения, относительно функций $L_1(\sigma),\gamma_j(\sigma)$ $(j=1,2)$, входящих в (1.15), отметим следующее. Функция $L_1(\sigma)$ имеет симметрично расположенные действительные корни $\pm\sigma_{m1}$ при $k_1<|\sigma|<k_2$ [9,10]. Число этих корней и их распределение на действительной оси существенно зависит от параметра $h\sqrt{k_2^2-k_1^2}$ [2]. Оказывается, что если

$$(n-1)\pi<h\sqrt{k_2^2-k_1^2}\le(2n-1)\pi/2,\ n=1,2,...$$

то $L_1(\sigma)$ имеет ровно $2n$ корней, расположенных в интервалах

$$(hk_2)^2-(2n-2m-1)^2\pi^2/4\le(\pm\sigma_{m1}h)^2<(hk_2)^2-(n-m)^2\pi^2,\quad m=1,2,...,n \tag{1.21}$$

при этом, $(hk_1)^2>(hk_2)^2-(2n-1)^2\pi^2/4.$

Если же

$$\left(2n-1\right)\pi/2 < h\sqrt{k_2^2-k_1^2} \le \pi n, \qquad n=1,2,....$$

то $L_1(\sigma)$ опять имеет $2n$ корней, находящихся в интервалах

$$\left(hk_2\right)^2-\left(2n-2m+1\right)^2\pi^2/4<\left(\pm h\sigma_{m1}\right)^2<\left(hk_2\right)^2-\left(n-m\right)^2\pi^2$$
$$m=1,2,...,n \tag{1.22}$$

при этом, $\left(hk_1\right)^2<\left(hk_2\right)^2-\left(2n-1\right)^2\pi^2/4$.

Чтобы удовлетворялось условие уходящей волны, считается, что действительная ось обходит отрицательные корни $\sigma=-\sigma_{m1}$ функции $L_1(\sigma)$ сверху, а положительные корни $\sigma=\sigma_{m1}$ – снизу. Соответственно, для функции $\gamma_j(\sigma)$ из (1.3) принимается, что $\sqrt{\sigma^2-k_j^2}>0$ при $|\sigma|>k_j$, $\sqrt{\sigma^2-k_j^2}=-i\sqrt{k_j^2-\sigma^2}$, т.е. в (1.9) предполагается, что действительная ось обходит точки ветвления $\sigma_j=-k_j$ функции комплексного переменного $\gamma_j(\alpha)=\sqrt{\alpha^2-k_j^2}$ сверху, а $\sigma=k_j$ – снизу.

Методом факторизации [2,8] решение краевой задачи (1.15) при помощи известного представления

$$2\pi i\delta\left(\sigma+\sigma_{m1}\right)=\left(\sigma+\sigma_{m1}-i0\right)^{-1}-\left(\sigma+\sigma_{m1}+i0\right)^{-1}$$

получим в виде

$$\bar{\Phi}^+(\sigma)=-\bar{A}_m^{(L)}\frac{\mu_2\sqrt{\sigma+k_2}}{\sigma+\sigma_{m1}+i0}\bar{K}^+(\sigma), \tag{1.23}$$

$$\bar{\Psi}^-(\sigma)=\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{\sqrt{\sigma-k_2}\bar{K}^-(\sigma)}\cdot\frac{1}{\sigma+\sigma_{m1}-i0}, \tag{1.24}$$

где

$$\bar{A}_m^{(L)}=A_m^{(L)}\sqrt{k_2+\sigma_{m1}}\bar{K}^+\left(\sigma_{m1}\right)\mathrm{ch}^{-1}\left(\gamma_m^{(2)}h\right) \tag{1.25}$$

$$\bar{K}(\sigma)=\bar{K}^+(\sigma)\cdot\bar{K}^-(\sigma), \quad \bar{K}^\pm(\sigma)=\exp\left(\bar{F}_\pm(\sigma)\right)$$

$$\bar{F}_+(\sigma)=\int_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx, \quad \bar{F}_-(\sigma)=\int_{-\infty}^0 F(x)e^{ix(\sigma-i0)}dx \tag{1.26}$$

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \ln\left[1+\frac{\mu_1\gamma_1-\mu_2\gamma_2}{\mu_1\gamma_1+\mu_2\gamma_2}e^{-2\gamma_2 h}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{1.27}$$

Из (1.26) следует, что $\bar{F}_+(\sigma)=\bar{F}_-(-\sigma)$, следовательно, $\bar{K}^+(\sigma)=\bar{K}^-(-\sigma)$. При этом, $\bar{F}^+(\sigma)$ можно вычислить по формуле

$$\bar{F}^+(\sigma)=\frac{1}{2}\ln\bar{K}(\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \ln\bar{K}(t)\frac{dt}{t-\sigma}$$

Выше $\bar{K}^+(\sigma)\left(\bar{K}^-(\sigma)\right)$ – граничное значение функции $\bar{K}^+(\alpha)\left(\bar{K}^-(\alpha)\right)$, комплексной переменной $\alpha=\sigma+i\tau$, регулярной и не имеющей нулей при

$\mathrm{Im}\,\alpha > 0\left(\mathrm{Im}\,\alpha < 0\right)$. При этом, $\bar{K}^{\pm}\left(\alpha\right) \to 1$ при $\left|\alpha\right| \to \infty$ в своих областях регулярности [8].

2. Переходим к определнию излучённого волнового поля. При помощи (1.11)–(1.13), (1.18), (1.23)–(1.27), после обратного преобразования, для амплитуд упругих перемещений получим следующие представления:

1) В области $\Omega_1\left(y \geq 0\right)$

$$w_1\left(x,y\right) = \frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2\,\mathrm{ch}\left(\gamma_2 h\right)}{\sqrt{\sigma - k_2}\,\bar{K}^{-}\left(\sigma\right)\left(\sigma + \sigma_{m1} - i0\right)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{\sigma + k_2}\,e^{\gamma_2 h}}{\gamma_2}\frac{\bar{K}^{+}\left(\sigma\right)}{\sigma + \sigma_{m1} + i0}\right] e^{-\gamma_1 y - i\sigma x} d\sigma \tag{2.1}$$

2) В области $\Omega_2^{(1)}\left(-h \leq y \leq 0\right)$

$$w_2\left(x,y\right) = \frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2\,\mathrm{ch}\left(\gamma_2\left(y + h\right)\right)}{\sqrt{\sigma - k_2}\,\bar{K}^{-}\left(\sigma\right)\left(\sigma + \sigma_{m1} - i0\right)} - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{\gamma_2\left(y+h\right)}}{\gamma_2}\frac{\sqrt{\sigma + k_2}\,\bar{K}^{+}\left(\sigma\right)}{\sigma + \sigma_{m1} + i0}\right] e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{2.2}$$

3) В области $\Omega_2^{(2)}\left(y \leq -h\right)$

$$w_2^{(2)}\left(x,y\right) = -\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma + k_2}\,\bar{K}^{+}\left(\sigma\right)e^{\gamma_2\left(y+h\right)}}{\gamma_2\left(\sigma + \sigma_{m1} + i0\right)} e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{2.3}$$

При помощи (2.2) и (2.3) получим следующее представление:

$$\tau_{r\theta}\left(r,0\right) = \frac{\mu_2 \bar{A}_m^{(L)} e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi r}}\cos\frac{\theta}{2} + O\left(1\right), \quad \left(-\pi < \theta < \pi\right) \quad r \to 0 \tag{2.4}$$

определяющее распределение амплитуды сдвигающих напряжений $\tau_{r\theta}$ около конца трещины в полярных координатах.

3. Для изучения характерных особенностей волнового поля и получения асимптотических формул на дальних зонах рассматриваемой составной области, следует исследовать полученные интегральные составляющие, входящие в (2.1)–(2.3), в каждой подобластях Ω_1 и $\Omega_2^{(j)}$ $\left(j = 1,2\right)$.

Рассмотрим подобласть Ω_{11} $\left(x < 0, y \geq 0\right)$, где перемещение даётся (2.1). Исследование интегралов по вещественной оси, которая, как было отмечено выше, обходит точки $-\sigma_{n1}$ $\left(n = 1,2,...,N\right)$ и $-k_j$ $\left(j = 1,2\right)$ сверху, а точки σ_{n1} и k_j – снизу, входящих в (2.1), проведём при помощи подхода из [11]. Амплитуду перемещений (2.1) при помощи (1.26) и (1.28) представим в следующем виде:

$$w_{11}^{(1)}\left(x,y\right) = \frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma + k_2}\,\bar{K}^{+}\left(\sigma\right)}{L_1\left(\sigma\right)}\frac{e^{-\gamma_1 y - i\sigma x}}{\sigma + \sigma_{m1} + i0} d\sigma + w_L^{(1)}\left(x,y\right) \tag{3.1}$$

где $w_L^{(1)}\left(x,y\right)$ – падающая волна из (1.2).

Переходя в разрезанную комплексную плоскость $\alpha = \sigma + i\tau$, описанную в [2,5,6], и имея в виду особенности аналитического продолжения подынтегральных функций из (3.1) на верхнюю полуплоскость этой плоскости, амплитуду перемещений (3.1) в области Ω_{11} можно представить при помощи регулярных интегралов по береграм разрезов в следующем виде:

$$w_{11}(x,y) = -\frac{\bar{A}_m^{(L)}\mu_2}{\pi}\int_0^{k_1}\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i\sqrt{k_1^2-\sigma^2 y}}}{L_1(\sigma - i0)}\right\}\frac{\sqrt{k_2+\sigma}\bar{K}_{(\sigma)}^{+}}{\sigma+\sigma_{m1}}e^{-i\sigma x}d\sigma -$$
$$-\frac{\bar{A}_m^{(L)}\mu_2}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{-i\sqrt{k_1^2+\tau^2 y}}}{L_1(+0+i\tau)}\right\}\frac{\sqrt{k_2+i\tau}\bar{K}_{(\sigma)}^{+}}{\sigma_{m1}+i\tau}e^{-i\sigma x}d\tau + \tag{3.2}$$
$$+ i\bar{A}_m^{(L)}\mu_2\Lambda_L^{(1)}(x,y) + w_L^{(1)}(x,y), \qquad x,y\in\Omega_{11}$$

где

$$L_1(\sigma \pm i0) = -\mu_2\gamma_2^{(\sigma)}\sin\left(\gamma_2^{(\sigma)}h\right) \pm i\mu_1\gamma_1^{(\sigma)}\cos\left(\gamma_2^{(\sigma)}h\right)$$
$$L_1(0 \pm i\tau) = -\mu_2\gamma_2^{(\sigma)}\sin\left(\gamma_2^{(\tau)}h\right) \pm i\mu_1\gamma_1^{(\tau)}\cos\left(\gamma_2^{(\tau)}h\right) \tag{3.3}$$
$$\gamma_j^{(\sigma)} = \sqrt{k_j^2-\sigma^2}, \quad \gamma_j^{(\tau)} = \sqrt{k_j^2+\tau^2}$$

$$\Lambda_L^{(1)}(x,y) = iA_m^{(L)}\mu_2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{\sigma_{m1}+k_2}\bar{K}^{+}(\sigma_{m1})e^{-y\sqrt{\sigma_{m1}^2-k_1^2}}}{L_1'(\sigma_{m1})(\sigma_{n1}+\sigma_{m1})}e^{-i\sigma_{n1}}x \tag{3.4}$$

Таким образом, волновое поле в области Ω_{11} даётся формулой (3.2), где составляющая $\Lambda_L^{(1)}(x,y)$ представляет сумму излучённых локализованных волн Лява, соответствующих волновым числам $\sigma_{n1}(n=1,2,...N)$, $w_L^{(1)}(x,y)$– падающая волна, а интегральные составляющие представляют излучённое поле объёмных волн.

Следует отметить, что в связи с наличием в интеграле с бесконечным пределом из (3.2) экспоненцтально убивающего множителя, с вычислительной точки зрения формула (3.2) более удобна для анализа ближнего поля, чем исходный интеграл (2.1) по вещественной оси [16].

При определении асимптотических формул, представляющих волновое поле в дальних зонах, главным образом, исходят из формулы (3.1), используя различные подходы, наиболее распространенный из которых является метод перевала [16]. Оказывается, представление (3.2) более чем удобно для определения асимптотических формул, представляющих характерные особенности волнового поля в дальних зонах рассматриваемой области [12].

С этой целью в (3.2) перейдём к полярным координатам

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \pi/2 < \theta \le \pi \tag{3.5}$$

и запишем её в следующем виде:

$$w_{11}(r,\theta)=\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int_0^\infty\left[L_1(0-i\tau)e^{-r_n^{(-)}}-L_1(0+i\tau)e^{-rn^{(+)}}\right]\frac{\sqrt{k_2+i\tau}\bar{K}^+(i\tau)\,d\tau}{\Delta_1(\tau)(\sigma_{m1}+i\tau)}+$$

$$+\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int_0^{k_1}\left[L_1(\sigma+i0)e^{i\lambda^{(+)r}}-L_1(\sigma-i0)e^{-ir\lambda^{(-)}}\right]\frac{\sqrt{k_2+\sigma\_}\bar{K}^+(\sigma)}{\Delta_2(\sigma)}\frac{d\tau}{\sigma_{m1}+\sigma}+$$

$$+\Lambda_L^{(1)}(r,\theta)+w_L^{(1)}(r,\theta) \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1(\tau)&=\mu_2^2\left(k_2^2+\tau^2\right)\sin^2\left(\gamma_2^{(\tau)}h\right)+\mu_1^2\left(k_1^2+\tau^2\right)\cos^2\left(\gamma_2^{(\tau)}h\right)\\ \Delta_2(\sigma)&=\mu_2^2\left(k_2^2-\sigma^2\right)\sin^2\left(\gamma_2^{(\sigma)}h\right)+\mu_1^2\left(k_1^2-\sigma^2\right)\cos^2\left(\gamma_2^{(\sigma)}h\right)\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\lambda^{(\pm)}(\sigma)=\sigma|\cos\theta|\pm\sqrt{k_1^2-\sigma^2}\sin\theta,\qquad h^{(\pm)}(\tau)=\tau|\cos\theta|\pm\sqrt{k_1^2+\tau^2}\sin\theta \tag{3.8}$$

$$\left\{\Lambda_L^{(1)}(r,\theta),\ w_L^{(1)}(r,\theta)\right\}=\left\{\Lambda_L^{(1)}(x,y),\ w_L^{(1)}(x,y)\right\}_{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}} \tag{3.9}$$

Теперь, следуя [11], из (3.6) получим следующую асимптотическую формулу для волнового поля в квадранте Ω_{11} при $r\to\infty$

$$\begin{aligned}w_{11}(r,\theta)&=A_m^{(L)}e^{-\gamma_m^{(1)}r\sin\theta+i\sigma_{m1}r\cos\theta}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{A}_m^{(L)}\mu_2B_{11}^{(1)}\frac{e^{i(k_1r-\pi/4)}}{r^{1/2}}+\\ &+iA_m^{(L)}\mu_2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{k_2+\sigma_{n1}}\bar{K}^+(\sigma_{n1})}{L_1'(\sigma_m)(\sigma_{n1}+\sigma_{m1})}e^{-i\sigma_{n1}r\cos\theta-r\sin\theta\gamma_m^{(1)}}+0\left(r^{-3/2}\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$B_{11}^{(1)}=-\frac{L_1(k_1|\cos\theta|)}{\Delta_2(k_1|\cos\theta|)}\cdot\frac{\bar{K}^+(k_1|\cos\theta|)}{\sigma_{m1}+k_1|\cos\theta|}\frac{\sqrt{k_2+k_1|\cos\theta|}}{\sqrt{2}}\sqrt{k_1}\sin\theta \tag{3.11}$$

Из (3.10) видно, что при $r\to\infty$ в области Ω_{11} волновое поле представляется в виде суммы сдвиговой объёмной волны, локализованной падающей волны и конечного числа дифрагированных локализованных волн с волновыми числами $\sigma_n\,(n=1,2,\dots,N)$. При этом, последние две составляющие имеют доминирующий характер.

Аналогичным путем, из (2.1) для определения перемещений в области $\Omega_{21}^{(1)}\left(x<0,\quad -h<y<0\right)$ получим формулу:

$$\begin{aligned}w_{21}^{(1)}(x,y)&=\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{\pi}\int_0^\infty\frac{\gamma_1^{(\tau)}\cos\left(\gamma_2^{(\tau)}(y+h)\right)\sqrt{k_2+i\tau}\bar{K}^+(i\tau)}{\Delta_1(\tau)}\cdot\frac{e^{-\tau|x|}d\tau}{\sigma_{m1}+i\tau}+\\ &+\frac{i\bar{A}_m^{(L)}}{\pi}\int_0^{k_1}\frac{\gamma_1^{(\sigma)}\sqrt{k_2+\sigma}\bar{K}^+(\sigma)}{\Delta_2(\sigma)}\cdot\frac{e^{-i\sigma x}d\sigma}{\sigma_{m1}+\sigma}+w_L^{(2)}(x,y)+\Lambda_L^{(2)}(x,y)\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\Lambda_L^{(2)}(x,y)=i\bar{A}_m^{(L)}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{k_2+\sigma_{n1}}\bar{K}^+(\sigma_{n1})\Delta_3(\sigma_{n1})}{\sqrt{k_2^2-\sigma_{n1}^2}L_1'(\sigma_{n1})}\cdot\frac{e^{-i\sigma_{n1}}x}{\sigma_{n1}+\sigma_{m1}} \tag{3.13}$$

$$\Delta_3(\sigma_{n1})=\mu_1\sqrt{\sigma_{n1}^2-k_1^2}\sin\left(y\sqrt{k_2^2-\sigma_{n1}^2}\right)-\mu_2\sqrt{k_2^2-\sigma_{n1}^2}\cos\left(y\sqrt{k_2^2-\sigma_{n1}^2}\right)$$

$\Delta_1(\tau)$ и $\Delta_2(\sigma)$ даются формулами (3.7), а $w_L^{(2)}(x,y)$ – (1.3).

Из (3.12)–(3.14) следует, что волновое поле в Ω_{21} складывается из: а) локализованных волн с волновыми числами $\sigma_{n1}(n=1,2,...,N)$, б) падающей волны, в) дифрагированных объёмных волн.

Асимптотическая формула, представляющая распределение волнового поля в дальних зонах Ω_{21}, получена методом интегрирования по частям [11], и имеет вид:

$$w_{21}^{(1)}(x,y)=\Lambda_L^{(2)}(x,y)+w_L^{(2)}(x,y)-\frac{\bar{A}_n^{(L)}B_{21}(y)}{\sqrt{\pi}|x|^{3/2}}e^{-i(k_1x-\pi/4)}+O\left(|x|^{-5/2}\right),$$

$$x\to-\infty. \tag{3.14}$$

где

$$B_{21}(y)=\frac{\sqrt{2k_1(k_1+k_2)}\bar{K}^+(k_1)\cos\left((y+h)\sqrt{k_2^2-k_1^2}\right)}{\left(k_2^2-k_1^2\right)\sin^2\left(h\sqrt{k_2^2-k_1^2}\right)\left(\sigma_{m_1}+k_1\right)}$$

Третье слагаемое из (3.14) указывает, что дифрагированная объемная волна убывает как $|x|^{-3/2}$, а не $|x|^{-1/2}$ при $x\to-\infty$.

На контактной линии $y=0$ асимптотическую формулу при $x\to-\infty$ можно получить из (3.14), неподстредственно там подставляя $y=0$.

В области $\Omega_{12}(x>0,y>0)$ перемещение даётся формулой

$$\begin{aligned}W_{12}(x,y)=&\frac{2i\bar{A}_m^{(L)}}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\left(h\gamma_2^{(\tau)}+y\gamma_1^{(\tau)}\right)}{\mu_*+\gamma_1^{(\tau)}}\cdot\frac{\gamma_2^{(\tau)}(\sigma)e^{-\tau x}}{\sqrt{k_2+i\tau}\bar{K}^+(i\tau)}\frac{d\tau}{\sigma_{m_1}-i\tau}-\\&-\frac{2\bar{A}_m^{(L)}}{\pi}\int_0^{k_1}\frac{\sin\left(h\gamma_2^{(\sigma)}+y\gamma_1^{(\sigma)}\right)}{\mu_*\gamma_2^{(\sigma)}+\gamma_1^{(\sigma)}}\cdot\frac{\gamma_2^{(\sigma)}e^{i\sigma x}}{\sqrt{k_2+\sigma}\bar{K}^+(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma_{m_1}-\sigma}-\\&-\frac{2\bar{A}_m^{(L)}}{\pi}\int_{k_1}^{k_2}\frac{\mu_*\gamma_1^{(\sigma)}\cos\left(h\gamma_2^{(\sigma)}\right)-\gamma_2^{(\sigma)}\sin\left(h\gamma_2^{(\sigma)}\right)}{\left(\mu_*\left(\sigma^2-k_1^2\right)+\left(k_2^2-\sigma^2\right)\right)\sqrt{k_2+\sigma}}\cdot\frac{\gamma_2^{(\sigma)}e^{-y\gamma_1^{(\sigma)}}e^{i\sigma x}}{\bar{K}^+(\sigma)\left(\sigma_{m_1}-\sigma-i0\right)}d\sigma\end{aligned} \tag{3.15}$$

На линии контакта $y=0$ из (3.15) получим следующую асимптотическую формулу при $x\to+\infty$:

$$w_{12}(x,0)=\frac{2\bar{A}_m^{(L)}}{\sqrt{\pi}x^{3/2}}\left\{B_1e^{i(k_1x+\pi/4)}+B_2e^{i(k_2x+\pi/4)}\right\}+O\left(x^{-5/2}\right), \tag{3.16}$$

где

$$B_1 = \frac{\mu_* \sqrt{k_1} e^{-ih\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}}{\sqrt{2(k_2^2 - k_1^2)(k_1 + k_2)} \bar{K}^+ (k_1) \left(\sigma_{m_1} - k_1 \right)}$$

$$B_2 = \frac{1}{2\mu_* \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \bar{K}^+ (k_2) \left(k_2 - \sigma_{m_1} \right)} \tag{3.17}$$

Формулы (3.15), (3.16) показывают, что в дальних зонах области Ω_{12} отсутствует слагаемое, соответствующее падающей волне. Там распространяются только дифрагированные объёмные волны. При этом, по направлению линии контакта $y = 0$ распространяются объёмные волны со скоростями c_1 и c_2 с разными амплитудами (3.16), (3.17), зависящими от физических и геометрических параметров задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grigoryan E., Jilavyan S., Agayan K. Diffraction of waves in an elastic space with semi-infinite inclusion // Days on Diffraction 2004, p.90-99.
2. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-38.
3. Агаян К.Л. Дифракция сдвиговой плоской волны на крае упругого слоя в составном пространстве // Труды XIV межд. конф. Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. 2010. т.1. С.16-20.
4. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38-50.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве со щелью // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50-69.
6. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., [Гулян К.Г.] Дифракция сдвиговой плоской волны в составном упругом пространстве с полубесконечной трещиной параллельной линии неоднородности.// МТТ. №1. 2013. С.60-67.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 782с.
8. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с.
9. Бреховских Л.М., Гончаров Н.Н. Введение в механику сплошной среды. М.:1982, 332с.
10. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в системе с пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.46-55.

11. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн // Докл. НАН Армении. 2010. №3. С.261-271.
12. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284с.

Сведения об авторах:

Григорян Эдвард Хосровович, доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Тел.: (+37410) 230-389.

Агаян Каро Леренцович, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Тел.: (+37491) 485-566,

E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Джилавян Самвел Акопович, канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра механики ЕГУ.

Тел.: (+37491) 500-770,

E-mail: samjilavyan@ysu.am

Поступила в редакцию 10.10.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №4, 2014 Механика

УДК 539.3

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ, СЛОИСТОЙ, ФЕРРОМАГНИТНОЙ СТРУКТУРЕ С УЧЁТОМ ОБМЕННОГО ЭФФЕКТА

Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З.

Ключевые слова: спиновые волны, периодическая ферромагнитная слоистая структура, обменное взаимодействие.
Key words: spin waves, layered ferromagnetic periodic structure, exchange interaction.

Դանոյան Զ. Ն., Աթոյան Լ. Հ., Սահակյան Ս. Լ., Դանոյան Ն.Զ.
Սպինային ալիքները շերտավոր պարբերական ֆերոմագնիսական կառուցվածքում փոխանակային էֆեկտի առկայությամբ

Ֆերոմագնիսական շերտավոր պարբերական կառուցվածքում, փոխանակային էֆեկտի առկայությամբ ուսումնասիրվում են սպինային ալիքների գոյության և տարածման առանձնահատկությունները: Գտնվել են խնդրի դիսպերսիոն առնչությունը և հաճախությունների այն տիրույթները, երբ գոյություն ունի ալիքային պրոցես, ինչպես նաև բացահայտված են արգելափակված գոտիները:

Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Sahakyan S.L., Danoyan N.Z.
Spin waves in periodic layered ferromagnetic structure when exchange effect is considered

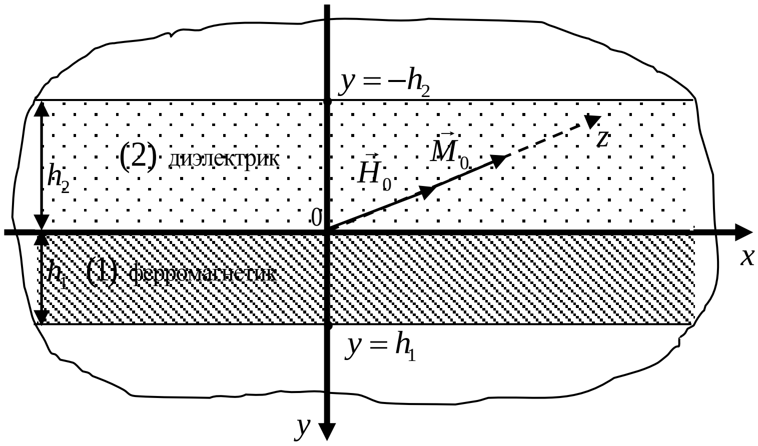
The problems of existence and propagation of spin waves in a layered periodic ferromagnetic structure taking into account exchange effect are investigated. The dispersion relations, frequencies bands of existence and band gaps are derived.

В работе исследуются вопросы существования и распространения спиновых волн в слоистой, периодической, ферромагнитной структуре с учётом обменного эффекта. Найдено дисперсионное соотношение и установлены области частот существования волн, а также запрещённые зоны, где нет волнового процесса.

1. Введение. В последние годы всё большее внимание исследователей стали привлекать вопросы распространения спиновых волн в слоистых, периодических, ферромагнитных структурах. По аналогии с фотонными и фононными (photonic, phononic) кристаллами их стали называть магнонными кристаллами (magnonic cristals) или магнитными сверхрешётками (magnetic superlattices) [13, 18, 20- 22]. В рассматриваемых задачах спиновые волны выступают в качестве носителей информации, при этом, вместе с вопросами существования и распространения этих волн особое внимание уделяется исследованию условий, при которых волновой процесс невозможен, т.е. существуют запретные полосы в частотном спектре исследуемых волн (band gaps), что является следствием ряда факторов в том числе и периодичности среды. Поэтому, как уже более подробно говорилось в наших предыдущих работах [4, 7,-9, 18], они находят широкое применение во многих областях современной техники. Много исследований посвящены также поверхностным спиновым и упругоспиновым волнам в слоистых средах [1, 2, 5, 10-16, 20-22], которые интересны и тем, что нет взаимности, т.е. нет симметрии при распространении волн в противоположных направлениях.

В настоящей работе учитывается, не учтённый ранее нами, эффект обменного взаимодействия в ферромагнитной среде.

2. Постановка задачи. Пусть задана периодическая слоистая структура, состоящая из бесконечно чередующихся ферромагнитных слоёв толщины h_1 и скреплённых с ними диэлектрическими слоями толщины h_2. Структура отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, как показано на фиг.1. Предполагается, что оси анизотропии лёгкого намагничивания ферромагнитных слоев параллельны друг другу и совпадают с направлением оси Oz.



Фиг.1. Ячейка периодичности ферромагнитной конструкции.

Предположим, что рассматриваемая структура находится во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$ и во всех ферромагнитных слоях объёмная плотность намагниченности $\vec{M}_0 = \rho_1\vec{\mu}_0$ ($\vec{\mu}_0$ – плотность намагниченности на единицу массы, ρ_1 – массовая плотность ферромагнетика) одинакова и параллельна магнитному полю $\vec{H}_0$ и оба вектора направлены по оси лёгкого намагничивания, т.е. по оси Oz. Рассмотрим случай, когда возмущения в структуре не зависят от координаты z и характеризуются магнитным моментом $\vec{\mu} = \left(\mu_1(x,y,t), \mu_2(x,y,t), 0\right)$ и магнитостатическим потенциалом $\varphi_1(x,y,t)$ в ферромагнитном слое, а в диэлектрическом слое – магнитостатическим потенциалом $\varphi_2(x,y,t)$, причём

$$\vec{H}_1 = -\mathrm{grad}\varphi_1,\ \vec{H}_2 = -\mathrm{grad}\varphi_2, \tag{2.1}$$

где $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ – возмущения напряжённости магнитного поля в ферромагните и диэлектрике, соответственно.

Ставится задача: на основе линеаризованных уравнений и соотношений, описывающих спиновой волновой процесс в непроводящих ферромагнитных средах [1, 2, 5], найти условия существования и распространения в вышеописанной периодической структуре спиновых волн при соответствующих контактных условиях и при граничных условиях типа Блоха-Флоке [13, 18, 21, 22] на границах ячейки периодичности рассматриваемой бесконечной структуры. Такие волны в литературе иногда называются квазипериодическими. Кроме того, исследуется вопрос существования, так называемых запретных полос в спектре частот (band gaps). Ячейка периодичности нашей конструкции занимает область $-h_2 \le y \le h_1$. Из теории Флоке известно, что достаточно изучить волновой процесс только в одной ячейке периодичности бесконечной периодической структуры, чтобы иметь представление о волновом процессе во всей структуре.

3. Уравнения в слоях, контактные условия между слоями и условия Блоха-Флоке на границах ячейки. Волновое поле в ферромагнитном и диэлектрическом слоях рассматриваемой ячейки периодичности, с учётом обменных эффектов, описывается уравнениями:

a) **Уравнения, описывающие волновой процесс в ферромагнитном слое** $0 \le y \le h_1$ **(уравнения движения намагниченности, квазистатические уравнения Максвелла для магнитного поля) :**

$$\Delta\varphi_1 = \rho_1\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial x} + \frac{\partial\nu_1}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial t} = \Omega_M\left(\rho_1^{-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \hat{b}\nu_1 - \lambda\Delta\nu_1\right), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\nu_1}{\partial t} = -\Omega_M\left(\rho_1^{-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \hat{b}\mu_1 - \lambda\Delta\mu_1\right),$$

где

$$\hat{b} = b + \chi_0^{-1},\ \chi_0 = M_0/H_0,\ \Omega_M = \gamma_0 M_0,$$

$\gamma_0 = 1.76\cdot 10^7$ $(Э\cdot с)^{-1}$ – гирромагнитное отношение, χ_0 – коэффициент магнитной восприимчивости, b – постоянная магнитной анизотропии, λ – обменная постоянная, φ_1 – магнитостатический потенциал магнитного поля в ферромагнетике.

b) **Уравнения магнитостатики в диэлектрике, в области** $-h_2 \le y \le 0$:

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, \tag{3.2}$$

где φ_2 – магнитостатический потенциал магнитного поля в диэлектрике.

c) Контактные условия между слоями ячейки при $y = 0\ (-\infty < x < +\infty)$:

$$\varphi_1 = \varphi_2,\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \rho_1\nu_1 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y},\ \mu_1 = 0,\ \nu_1 = 0, \tag{3.3}$$

здесь первое условие – это условие непрерывности магнитостатического потенциала на границе, второе – условие непрерывности нормальной составляющей напряжённости магнитного поля, последних два условия – это так называемые условия закрепления Киттеля (pinning) магнитных моментов на границе. Заметим, что условия закрепления магнитных моментов необходимо потребовать также и на другой границе ферромагнитного слоя при $y = h_1$:

$$\mu_1(h_1) = 0,\ \nu_1(h_1) = 0. \tag{3.4}$$

d) Граничные условия типа Блоха-Флоке на границах ячейки периодичности $y = h_1,\ y = -h_2$:

$$\varphi_1(h_1) = \ell\varphi_2(-h_2),\quad \frac{\partial\varphi_1(h_1)}{\partial y} - \rho_1\nu_1(h_1) = \ell\frac{\partial\varphi_2(-h_2)}{\partial y}, \tag{3.5}$$

где ℓ – параметр Флоке:

$$\ell = e^{iqa}\,,\ a = h_1 + h_2\,, \tag{3.6}$$

a – длина ячейки (период конструкции), q – усреднённая по периоду конструкции компонента волнового вектора, перпендикулярного к поверхностям слоёв конструкции, называемая волновым числом Блоха-Флоке [29, 31].

4. Решение задачи в виде плоских волн. Решение системы уравнений (3.1) в ферромагните будем искать в виде плоских волн:

$$\left(\mu_1, \nu_1, \varphi_1\right) = \left(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\varphi}\right) e^{ry} e^{i(\omega t - px)}, \tag{4.1}$$

$\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\varphi}$, r – постоянные, p и ω заданы и положительны.

Подставив (4.1) в (3.1) и выписав условия существования ненулевых решений полученной однородной алгебраической системы, мы получим характеристическое уравнение нашей системы и поскольку она определяет связь между волновым числом и частотой волны, то её будем называть дисперсионным соотношением:

$$\left(r^2 - p^2\right)\left\{\Omega^2 - \left[\hat{b} - \lambda\left(r^2 - p^2\right)\right]\left(1 + \hat{b} - \lambda\left(r^2 - p^2\right)\right)\right\} = 0\,, \tag{4.2}$$

где $\Omega = \dfrac{\omega}{\gamma_0 M_0}$.

Равенство (4.2) выполняется при условиях:

$$r_1^{\pm} = \pm p\,,\ r_2^{\pm} = \pm p\beta_1\,,\ r_3^{\pm} = \pm p\beta_2 \tag{4.3}$$

где

$$\beta_1 = \sqrt{1 + \frac{\Omega_{DE} - \sqrt{\Omega^2 + 1/4}}{\lambda p^2}}\,,\ \beta_2 = \sqrt{1 + \frac{\Omega_{DE} + \sqrt{\Omega^2 + 1/4}}{\lambda p^2}}\,, \tag{4.4}$$

$\Omega_{DE} = \hat{b} + 1/2$ – частота Дэймона-Эшбаха, характеризующая поверхностную спиновую волну, которая распространяется в недеформируемом ферромагнитном полупространстве, без учёта обменного эффекта [1, 5].

Таким образом, общее решение задачи (3.1) представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \left[\tilde{\varphi}_1^{\pm} e^{\pm py} + \tilde{\varphi}_2^{\pm} e^{\pm p\beta_1 y} + \tilde{\varphi}_3^{\pm} e^{\pm p\beta_2 y}\right] e^{i(\omega t - px)}, \\ \mu_1 &= \left[\tilde{\mu}_1^{\pm} e^{\pm py} + \tilde{\mu}_2^{\pm} e^{\pm p\beta_1 y} + \tilde{\mu}_3^{\pm} e^{\pm p\beta_2 y}\right] e^{i(\omega t - px)}, \\ \nu_1 &= \left[\tilde{\nu}_1^{\pm} e^{\pm py} + \tilde{\nu}_2^{\pm} e^{\pm p\beta_1 y} + \tilde{\nu}_3^{\pm} e^{\pm p\beta_2 y}\right] e^{i(\omega t - px)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Выше, например, под $\tilde{\nu}_1^{\pm} e^{\pm py}$ подразумевается сумма $\tilde{\nu}_1^{+} e^{py} + \tilde{\nu}_1^{-} e^{-py}$, причём амплитуды связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\tilde{\mu}_1^{\pm} = \frac{ip}{\rho_1\left(\hat{b} \mp \Omega\right)} \tilde{\varphi}_1^{\pm}\,,\ \tilde{\mu}_2^{\pm} = \frac{ip}{\rho_1}\left(\mp \frac{\beta_1 \Omega}{\sqrt{\Omega^2 + 1/4} - 1/2} - 1\right) \tilde{\varphi}_2^{\pm}\,, \\ &\tilde{\mu}_3^{\pm} = \frac{ip}{\rho_1}\left(\pm \frac{\beta_2 \Omega}{\sqrt{\Omega^2 + 1/4} + 1/2} - 1\right) \tilde{\varphi}_3^{\pm}\,,\ \tilde{\nu}_1^{\pm} = \frac{p}{\rho_1\left(\hat{b} \mp \Omega\right)} \tilde{\varphi}_1^{\pm}\,, \\ &\tilde{\nu}_2^{\pm} = \frac{ip}{\rho_1}\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + 1/4} - 1/2} \pm \beta_1\right) \tilde{\varphi}_2^{\pm}\,,\ \tilde{\nu}_3^{\pm} = \frac{ip}{\rho_1}\left(-\frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + 1/4} + 1/2} \pm \beta_2\right) \tilde{\varphi}_3^{\pm}\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

которые следуют из системы (3.1).

Далее найдём решение уравнения (3.2) в диэлектрике. Решение будем искать в виде $\varphi_2 = \tilde{\Phi} e^{sy} e^{i(px-\omega t)}$, где $\tilde{\Phi}$ и s – постоянные. Характеристическое уравнение представляется так:

$$s^2 = p^2, \tag{4.7}$$

т.е. $s^{\pm} = \pm p$. Как видим, характеристические числа $s^{\pm}$ и $r_1^{\pm}$ совпадают. Следовательно, общее решение уравнения (3.2) имеет следуюший вид:

$$\varphi_2 = (\tilde{\Phi}^{+} e^{py} + \tilde{\Phi}^{-} e^{-py}) e^{i(\omega t - px)}. \tag{4.8}$$

Здесь $\tilde{\Phi}^{\pm}$ – постоянные.

Подставляя решения (4.5), (4.8) в контактные и граничные условия (3.3), (3.4) и (3.5) с учётом соотношений (4.4) и (4.6), мы приходим к системе линейных однородных уравнений относительно восьми неизвестных амплитуд $\tilde{\varphi}_1^{\pm}$, $\tilde{\varphi}_2^{\pm}$, $\tilde{\varphi}_3^{\pm}$, $\tilde{\Phi}^{\pm}$:

$$\begin{gathered}
\tilde{\varphi}_1^{+} + \tilde{\varphi}_1^{-} + \tilde{\varphi}_2^{+} + \tilde{\varphi}_2^{-} + \tilde{\varphi}_3^{+} + \tilde{\varphi}_3^{-} - \tilde{\Phi}^{+} - \tilde{\Phi}^{-} = 0, \\
\frac{\hat{b} - \Omega + 1}{\hat{b} - \Omega} \tilde{\varphi}_1^{+} - \frac{\Omega}{\tilde{\Omega} - 1/2} \tilde{\varphi}_2^{+} + \frac{\Omega}{\tilde{\Omega} + 1/2} \tilde{\varphi}_3^{+} - \tilde{\Phi}^{+} - \\
- \frac{\hat{b} + \Omega + 1}{\hat{b} + \Omega} \tilde{\varphi}_1^{-} - \frac{\Omega}{\tilde{\Omega} - 1/2} \tilde{\varphi}_2^{-} + \frac{\Omega}{\tilde{\Omega} + 1/2} \tilde{\varphi}_3^{-} + \tilde{\Phi}^{-} = 0, \\
\frac{1}{\hat{b} - \Omega} \tilde{\varphi}_1^{+} + \left(\frac{-\beta_1 \Omega}{\tilde{\Omega} - 1/2} - 1 \right) \tilde{\varphi}_2^{+} + \left(\frac{\beta_2 \Omega}{\tilde{\Omega} + 1/2} - 1 \right) \tilde{\varphi}_3^{+} + \\
+ \frac{1}{\hat{b} + \Omega} \tilde{\varphi}_1^{-} + \left(\frac{+\beta_1 \Omega}{\tilde{\Omega} - 1/2} - 1 \right) \tilde{\varphi}_2^{-} + \left(\frac{\beta_2 \Omega}{\tilde{\Omega} + 1/2} - 1 \right) \tilde{\varphi}_3^{-} = 0, \\
\frac{-1}{\hat{b} - \Omega} \tilde{\varphi}_1^{+} + \left(\frac{\Omega}{\tilde{\Omega} - 1/2} + \beta_1 \right) \tilde{\varphi}_2^{+} + \left(\frac{-\Omega}{\tilde{\Omega} + 1/2} + \beta_2 \right) \tilde{\varphi}_3^{+} + \\
+ \frac{1}{\hat{b} + \Omega} \tilde{\varphi}_1^{-} + \left(\frac{\Omega}{\tilde{\Omega} - 1/2} - \beta_1 \right) \tilde{\varphi}_2^{-} + \left(\frac{-\Omega}{\tilde{\Omega} + 1/2} - \beta_2 \right) \tilde{\varphi}_3^{-} = 0, \\
e^{ph_1} \tilde{\varphi}_1^{+} + e^{p\beta_1 h_1} \tilde{\varphi}_2^{+} + e^{p\beta_2 h_1} \tilde{\varphi}_3^{+} - \ell e^{-ph_2} \tilde{\Phi}^{+} + \\
+ e^{-ph_1} \tilde{\varphi}_1^{-} + e^{-p\beta_1 h_1} \tilde{\varphi}_2^{-} + e^{-p\beta_2 h_1} \tilde{\varphi}_3^{-} - \ell e^{ph_2} \tilde{\Phi}^{-} = 0, \\
\frac{\hat{b} - \Omega + 1}{\hat{b} - \Omega} e^{ph_1} \tilde{\varphi}_1^{+} - \frac{\Omega e^{p\beta_1 h_1}}{\tilde{\Omega} - 1/2} \tilde{\varphi}_2^{+} + \frac{\Omega e^{p\beta_2 h_1}}{\tilde{\Omega} + 1/2} \tilde{\varphi}_3^{+} - \ell e^{-ph_2} \tilde{\Phi}^{+} - \\
- \frac{\hat{b} + \Omega + 1}{\hat{b} + \Omega} e^{-ph_1} \tilde{\varphi}_1^{-} - \frac{\Omega e^{-p\beta_1 h_1}}{\tilde{\Omega} - 1/2} \tilde{\varphi}_2^{-} + \frac{\Omega e^{-p\beta_2 h_1}}{\tilde{\Omega} + 1/2} \tilde{\varphi}_3^{-} - \ell e^{ph_2} \tilde{\Phi}^{-} = 0,
\end{gathered} \tag{4.9}$$

$$\frac{e^{ph_1}}{\hat{b}-\Omega}\tilde{\varphi}_1^+ + \left(\frac{-\beta_1\Omega}{\tilde{\Omega}-1/2}-1\right)e^{p\beta_1h_1}\tilde{\varphi}_2^\pm + \left(\frac{\beta_2\Omega}{\tilde{\Omega}+1/2}-1\right)e^{p\beta_2h_1}\tilde{\varphi}_3^\pm +$$
$$+\frac{e^{-ph_1}}{\hat{b}+\Omega}\tilde{\varphi}_1^- + \left(\frac{\beta_1\Omega}{\tilde{\Omega}-1/2}-1\right)e^{-p\beta_1h_1}\tilde{\varphi}_2^- + \left(\frac{-\beta_2\Omega}{\tilde{\Omega}+1/2}-1\right)e^{-p\beta_2h_1}\tilde{\varphi}_3^- = 0,$$
$$\frac{-e^{ph_1}}{\hat{b}-\Omega}\tilde{\varphi}_1^+ + \left(\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}-1/2}+\beta_1\right)e^{p\beta_1h_1}\tilde{\varphi}_2^+ + \left(\frac{-\Omega}{\tilde{\Omega}+1/2}+\beta_2\right)e^{p\beta_2h_1}\tilde{\varphi}_3^+ +$$
$$+\frac{e^{\pm ph_1}}{\hat{b}+\Omega}\tilde{\varphi}_1^- + \left(\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}-1/2}-\beta_1\right)e^{-p\beta_1h_1}\tilde{\varphi}_2^- + \left(\frac{-\Omega}{\tilde{\Omega}+1/2}-\beta_2\right)e^{-p\beta_2h_1}\tilde{\varphi}_3^- = 0.$$

Здесь для краткости введено обозначение $\tilde{\Omega}=\sqrt{\Omega^2+1/4}$. Из условия существования ненулевого решения системы (4.9), т.е. равенства нулю её детерминанта, следует характеристическое уравнение, которое имеет следуюший вид:

$$\ell^2-2f\ell+1=0\,. \tag{4.10}$$

Выражение для f ввиду чрезмерной громоздкости мы опускаем. Далее, подставляя параметр $\ell=e^{iqa}$ в (4.10), получим дисперсионное уравнение волн Блоха-Флоке:

$$\cos qa = f\,, \tag{4.11}$$

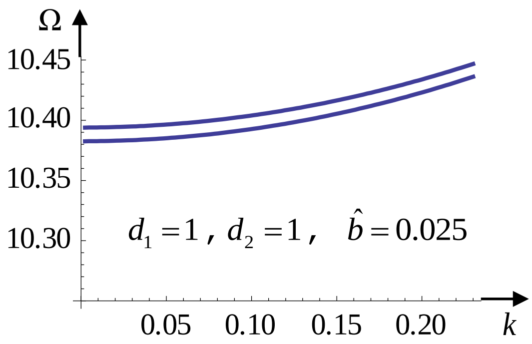
если q, p и Ω таковы, что имеет место неравенство:

$$\left|f\right|>1, \tag{4.12}$$

то волнового процесса Блоха-Флоке нет. Полоса частот в спектре, где нет волнового процесса, называется запрещённой полосой, или полосой непропускания. Отметим, что уравнение (4.10) при $\left|f\right|\le 1$ представляет собой зависимость частот волн Блоха-Флоке от их волнового числа q в полосе пропускания. Указанная зависимость является следствием периодичности среды, поскольку в случаях бесконечной или полубесконечной сред такой зависимости нет. Введём обозначения, которые в дальнейшем будут использованы при построении графиков:

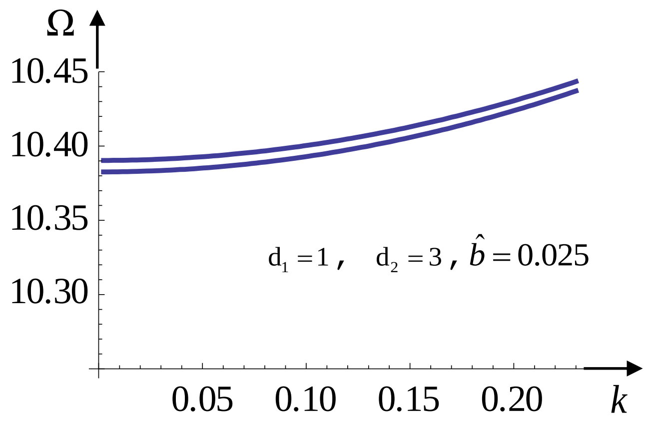
$$k=\sqrt{\lambda}\,p\,,\ \mathrm{d}_1=\frac{\mathrm{h}_1}{\sqrt{\lambda}},\ \mathrm{d}_2=\frac{\mathrm{h}_2}{\sqrt{\lambda}}\,.$$

На фиг. 2, 3 для различных толщин слоёв конструкции d_1 и d_2, на плоскости $\Omega\,,k$ представлены области существования волн Блоха-Флоке и области запрещённые, т.е.



Фиг.2.

области, где такого волнового процесса нет. Тонкие области между полученными кривыми на фиг. 2 и 3 являются областями существования спиновых волн Блоха-Флоке, вне этих полос нет таких волн.



Фиг.3.

Анализ кривых, изображённых на фигурах 2, 3, даёт нам основание утверждать, что ширина полосы существования искомых волн, в случае, когда толщины слоёв равны, наибольшая.

На основе результатов этой работы будет решаться упруго-спиновая задача.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 13-2С097.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492 с.
4. Даноян З.Н., Атоян Л.А. Отражение спиновых волн от границы ферромагнитной среды при обобщённых граничных условиях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.34-40.
5. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. М.: Наука,1973. 560 стр.
6. Danoyan Z.N., Piliposian G.T., Hasanyan D.J. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half space. Waves in Random and Complex Media.-Vol. 19. No. 4. November 2009, p. 567-584.
7. Даноян З.Н., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Магнитное состояние ферромагнитного полупространства при внешнем линейном возмущении магнитного потенциала. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №3. С.46-53.
8. Даноян З.Н., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Задача типа Лэмба для спинового ферромагнитного полупространства. //Труды 7-ой межд.конф.: “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Горис-Степанакерт, 2011, с.60-65.
9. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А., Атоян Л.А. Отражение спиновых (магнитных) волн от границы ферромагнитного полупространства. // Тр. VI межд.конф. Сентябрь, Горис-Степанакерт, 2008, с. 115-125.

10. Damon R. W., Eshbach J. R., Magneto static modes of a ferromagnetic slab. //J. Phys. Chem. Solids, 19, p.308-320.
11. Maugin G. A., Hakmi A. Magnetoelastic surface waves in elastic ferromagnets. //J. Acoust. Soc. Amer., 77, p.1010-1026.
12. Hasanyan D.J., Bagdasaryan G.E., Danoyan Z.N., Sahakyan S.L. The vibration of the piecewise-homogeneous ferromagnetic space with a crack.– Proceedings of ISTC of International Seminar, Yerevan, 2000, pp. 89-92.
13. Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A. Magnonic crystals and spin waves in periodic structures. Doklady Physics, vol.46, No. 10, 2001, pp. 469-471.
14. Danoyan Z. N., Chazaryan K. B., Piliposyan G. T. Surface gap wave propagation in layered electro-magneto-elastic structures.-Waves in Random and Complex Media., Vol.19, No. 3, August 2009, pp. 521-534.
15. Danoyan Z.N., Piliposian G.T. Surface Electro-Elastic Love Waves in a Layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric Layer. -International journal of solids and structures. 44 (2007), pp. 5829-5847.
16. Piliposyan G.T., Danoyan Z. N. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and two isotropic layers. Int. Journal of solids and structures. 46 (2009), pp.1345-1353.
17. Danoyan Z.N., Piliposian G.T., Hasanyan D. J. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half-space. Waves in Random and Complex Media. -Vol. 19, No. 4, November 2009, pp. 567–584.
18. Даноян З.Н., Казарян К.Б., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Квазипериодические спиновые волны типа Блоха-Флоке в периодической слоистой структуре из ферромагнитных и диэлектрических слоёв. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.66. №4. С.29-38.
19. Багдасарян Г.Е. Существование и характер распространения пространственных спиновых поверхностных волн в ферромагнетиках. // Изв.АН Армении. Физика. 2009. №6. С.405-416.
20. Danoyan Z.N, Atoyan L.H., Danoyan N.Z. Shear horizontal electro-magneto-elastic surface waves in a layered piezoelectric structure in the presence of an electric or magnetic screen. „Topical Problems of Continuum Mechanics’’. The proceedings of international Conference, 4-8 October 2010, Dilijan, Armenia, pp. 266-271.
21. S. A. Nikitov, Ph. Tailhades, C. S. Tsai. Spin waves in Periodic Magnetic Structures – Magnonic cristals. J.Magnet.Mater., v.23, 3, 2001, pp.320-331.
22. V.V.Kruglyk, A.N.Kuchko. Spectrum of spin waves propagation in a periodic magnetic structures. Physica B 339 (2003) pp. 130-133.

Сведения об авторах:
Даноян Завен Нерсесович, доктор физ.-мат. наук, зав отделом Института механики НАН Армении
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2;
E-mail: zavendanoyan@gmail.com.
Атоян Левон Арутюнович, канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник Института механики НАН Армении.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2; **E-mail:** levous@mail.ru.
Саакян Саак Левонович, канд.физ.-мат.наук, ассистент. Каф. числ. анализа и мат. моделирования фак-та информатики и прикл. математики ЕГУ.
Адрес: 0019, Ереван, ул. А.Манукяна 1, тел.: (+37477) 002-408,
E-mail: ssahakyan@ysu.am
Даноян Н.З., научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2,
E-mail: zavendanoyan@gmail.com.

Поступила в редакцию 16.05.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №4, 2014 Механика

УДК 532.529.5: 532.591

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБЫ, НАПОЛНЕННОЙ ПРОТЕКАЮЩЕЙ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСЬЮ

Оганян Г.Г., Саакян С.Л.

Ключевые слова: поперечный сдвиг, труба, несимметричные колебания, газ, жидкость, пузырёк.
Keywords: transverse dislocation, tube, nonsymmetrical vibrations, gas, liquid, bubble.

Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ.
Լայնական սահքերի հաշվառման ազդեցությունը հոսող երկֆազ խառնուրդով լցված խողովակի սեփական տատանումների վրա

Ուսումնասիրված է Տիմոշենկոյի տեսությանը համապատասխանող անվերջ գլանային խողովակի մոդելի ոչ համաչափ տատանումների որոշման խնդիրը: Խողովակը լցված է հոսող խոշոր և մանր չափի պղպջակներ պարունակող գազահեղուկ խառնուրդով: Համեմատված են Կիրխհոֆ-Լյավի և Տիմոշենկոյի մոդելներով հաշվարկված խողովակի սեփական տատանումների հաճախականությունները:

Ohanyan G.G., Sahakyan S.L.
The influence of transverse shear deformation on self vibrations of a tube, filled with flowing non viscous two componential mixture

The problem of nonsymmetrical free vibrations of infinite cylindrical tube corresponding to model of Timoshenko's theory is investigated. The tube filled by the flowing Gas–Liquid mixture, containing big and small bubbles. The frequencies of tube free vibrations, computed using the models of Kirchhoff-Love and Timoshenko are compared.

На основе линейной теории оболочек по Тимошенко, учитывающей эффект деформации поперечных сдвигов, рассмотрена задача определения несимметричных собственных колебаний трубы, наполненной невязкой газожидкостной смесью. Получено дисперсионное уравнение, описывающее распространение линейных волн в рассматриваемой гидроупругой системе. С целью выявления учитываемого эффекта проведено сравнение численных расчётов по полученному и другому дисперсионному уравнению, соответствующему теории оболочек по модели Кирхгофа-Лява.

В случае наличия смеси с мелкими пузырьками значения частот по модели Тимошенко для всех мод колебаний меньше значений частот по Кирхгофу-Ляву, т.е. учёт деформации поперечных сдвигов приводит к уменьшению частот. Для смеси с мелкими пузырьками при малых модах частоты совпадают по обеим моделям, означающее, что учитываемый эффект не влияет на значения частот. В то же время при больших значениях мод частоты по Кирхгофу-Ляву больше значений по Тимошенко, т.е. деформации поперечных сдвигов уменьшают значения реализуемых частот собственных колебаний трубы.

Вибрационные одночастотные воздействия на гидроупругую систему оболочка-газожидкостная смесь изучены в [1], где двухфазная среда моделируется как двускоростная смесь, состоящая из слоёв несущей жидкости с включениями в виде газовых пузырьков. При двухчастотном вибровозбужении в [2] приведены результаты экспериментов по нелинейной динамике стенок цилиндрической оболочки с газожидкостной смесью. Влияние динамического воздействия равномерно распределённого давления на поведение замкнутой цилиндрической оболочки, частично наполненной жидкостью, изучено в [3]. Методика расчета нестационарных колебаний оболочки с протекающей жидкостью, где нестационарность обусловлена действием внешних квазипериодических сил, с частотами, медленно меняющимися по времени, предложена в [4]. Исследования [1-5] выявили, что гидроупругая система оболочка–жидкость (газожидкостная смесь) обладает свойствами, не присущими отдельным её компонентам.

1. Уравнения гидродинамки. Пусть бесконечная длинная деформируемая цилиндрическая оболочка кругового сечения наполнена газожидкостной смесью, в которой несущей фазой является несжимаемая невязкая жидкость, а дисперсной–сферические пузырьки калорически совершенного газа одинаковых размеров.

Принимается односкоростная модель течения смеси, когда относительное перемещение фаз отсутствует, что идентично движению фаз с одинаковыми по величине и направлению скоростями. Процессами дробления, слипания и зарождения новых пузырьков, а также эффектами межфазного теплообмена и поверхностного натяжения пренебрегаются. Уравнения движения рассматриваемой монодисперсной газожидкостной смеси пузырьковой структуры имеют вид [6]:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t}+\left(\vec{\mathrm{v}}\nabla\right)\vec{\mathrm{v}}=-\frac{1}{\rho}\nabla P,\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\mathrm{v}}\nabla\rho+\rho\,\mathrm{div}\vec{\mathrm{v}}=0$$

$$P=\left(1-\beta\right)P_1+\beta P_2,\ \rho=\left(1-\beta\right)\rho_1+\beta\rho_2,\ \rho_2 a^3=\mathrm{const},\ \rho_1=\mathrm{const} \tag{1.1}$$

$$P_2-P_1=\rho_1 a\frac{d^2a}{dt^2}+\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{da}{dt}\right)^2,\ \ \frac{\beta\rho_2}{\left(1-\beta\right)\rho_1}=\mathrm{const},\ \ \frac{P_2}{P_0}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}}\right)^{\gamma}$$

Здесь начало цилиндрической системы координат $\left(r,\theta,x\right)$ с ортами $\vec{e}_x,\vec{e}_\theta,\vec{e}_x$ размещено в сечении $x=0$, t – время, $\vec{\mathrm{v}}$ – вектор скорости частиц смеси, P и ρ – давление и плотность, β – объёмное газосодержание, a – радиус пузырька, γ – показатель адиабаты газа, ∇ – оператор Гамильтона. Индексы 1 и 2 отнесены, соответственно, к параметрам жидкой и газовой фаз, а индекс 0 – к состоянию равновесия (покоя). Параметры, характеризующие смесь в целом, индексов не имеют.

Для последующего анализа удобно несколько видоизменить форму записи уравнения Рэлея-Лэмба, описывающего динамику совместного деформирования фаз. Заменим перепад давлений в фазах на перепад давлений в пузырьке и самой смеси, используя при этом определение давления всей смеси. В результате, получим уравнение

$$P_2-P=\left(1-\beta\right)\left[\rho_1 a\frac{d^2a}{dt^2}+\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right] \tag{1.2}$$

Пусть параметры смеси мало отклоняются от своих значений в состоянии покоя

$$P=P_0+P',\quad \rho=\rho_0+\rho',\quad \rho_2=\rho_{20}+\rho_2',$$

$$P_2=P_0+P_2',\quad a=a_0+a',\quad \beta=\beta_0+\beta',\ \ \vec{\mathrm{v}}=\vec{\mathrm{v}}'$$

где штрихи, которые в дальнейшем будут опущены, отнесены к возмущениям характеристик смеси. Малость возмущений позволяет линеаризовать систему уравнений (1.1), (1.2)

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\nabla P,\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=-\rho_0\mathrm{div}\vec{\mathrm{v}},\quad P_2-P=\left(1-\beta_0\right)\rho_1 a_0\frac{\partial^2 a'}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

$$\rho=\left(\rho_{20}-\rho_1\right)\beta_0+\beta_0\rho_2,\ \ \frac{\rho_2}{\rho_{20}}=-\frac{1}{1-\beta_0}\frac{\beta}{\beta_0},\ \ a=-\frac{a_0}{3}\frac{\rho_2}{\rho_{20}},\ \ P_2=\frac{\gamma P_0}{\rho_{20}}\rho_2. \tag{1.4}$$

Комбинируя соотношения (1.4), исключим из рассмотрения избыточные плотность ρ_2 и газосодержание β. В результате, придём к связям:

$$P_2=c_0^2\rho_2,\quad \rho=\frac{\beta_0\rho_0}{\rho_{20}}\rho_2,\quad a=-\frac{a_0}{3}\frac{1}{\beta_0\rho_0}\rho,\quad c_0^2=\frac{\gamma P_0}{\beta_0\rho_0}, \tag{1.5}$$

где c_0 – невозмущённая линейная скорость звука в смеси. Подстановка (1.5) в линеаризованное уравнение Рэлея-Лэмба позволяет получить соотношение

$$P = c_0^2\rho + \left(1-\beta_0\right)\frac{c_0^2}{\omega_{ar}^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_1 a_0^2}, \tag{1.6}$$

которое можно рассматривать как неголономное уравнение состояния смеси, поскольку давление зависит не только от плотности, но и от её второй производной по времени, отвечающей за радиальную инерцию жидкости. Здесь ω_{ar} – резонансная адиабатическая частота Миннаерта.

Рассмотрим потенциальное течение смеси, когда $\vec{\mathrm{v}} = \nabla\varphi$, где φ – скалярный потенциал. Тогда, из уравнений движения и неразрывности смеси (1.3) следуют уравнения:

$$P = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho_0\Delta\varphi, \quad \mathrm{div}\left(\nabla\varphi\right) = \Delta\varphi, \tag{1.7}$$

где Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат. Комбинирование выражений (1.6) и (1.7) приводит к линейному уравнению для определения потенциала $\varphi\left(r,\theta,x,t\right)$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_0^2\left[1 + \frac{1-\beta_0}{\omega_{ar}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Delta\varphi = 0\,. \tag{1.8}$$

Предположим, что однородный поток смеси движется внутри трубы вдоль положительного направления её образующей – оси x с постоянной скоростью V. Введём в рассмотрение систему координат $\left(r',\theta',x',t'\right)$, жёстко связанную с оболочкой

$$t = t', \quad r = r', \quad \theta = \theta', \quad x = x' - \mathrm{V}t$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \mathrm{V}\frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta'} \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r'}. \tag{1.9}$$

Ввод такой системы координат обусловлен тем, что поскольку модельные уравнения движения оболочек записываются в системе координат $\left(r',\theta',x',t'\right)$, то и уравнения гидродинамики должны быть представлены в той же системе координат. Тогда, уравнение (1.8) примет форму записи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{V}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\varphi -$$

$$-c_0^2\left[1 + \frac{1-\beta_0}{\omega_{ar}^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{V}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi = 0. \tag{1.10}$$

Здесь и далее штрихи над координатами опущены, что будет выполняться и впредь.

Решение уравнения (1.10) ищется в виде

$$\varphi\left(r,\theta,x,t\right) = f\left(r\right)e^{i\left(\omega t + \alpha x + n\theta\right)}, \tag{1.11}$$

где ω – циклическая частота, $\alpha = \pi/L$ – волновое число, L – длина полуволн вдоль образующей трубы, n – число окружных волн. Искомая функция f удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя:

$$f''+\frac{1}{r}f'-\left(\lambda^2+\frac{n^2}{r^2}\right)f=0,\ \ \lambda^2=\alpha^2-\frac{(\omega+\alpha\mathrm{V})^2}{c_0^2}\left[1-\frac{(\omega+\alpha\mathrm{V})^2}{\omega_{ar}^2}\right]^{-1}, \tag{1.12}$$

общим решением которого является линейная комбинация модифицированных функций Бесселя первого $I_n(\lambda r)$ и второго $K_n(\lambda r)$ родов порядка n. Поскольку при $r\to 0$ функция K_n неограниченно возрастает, постольку, в силу ограниченности функции f, она запишется в форме $f(r)=b_0 I_n(\lambda r)$, $b_0=\mathrm{const}$. Тогда, согласно (1.11), потенциал φ предстанет в форме записи:

$$\varphi(r,\theta,x,t)=b_0 I_n(\lambda r)e^{i(\omega t+\alpha x+n\theta)}. \tag{1.13}$$

Введём в рассмотрение число Маха:

$$M_1=\frac{1}{c_0}\left(\frac{\omega}{\alpha}+\mathrm{V}\right)=\frac{c_{ph}+\mathrm{V}}{c_0},\ \ c_{ph}=\frac{\omega}{\alpha},\ \ \lambda^2=\alpha^2\left[1-M_1^2\left(1-\frac{\alpha^2c_0^2}{\omega_{ar}^2}M_1^2\right)^{-1}\right],$$

где c_{ph} – фазовая скорость волн. Из условия $\lambda^2>0$ следует требование

$$\frac{1}{M_1^2}>1+\frac{\rho_0c_0^2}{3\gamma P_0}\alpha^2a_0^2,$$

которое соответствует дозвуковому $M_1<1$ режиму течения смеси.

Уравнение (1.12) можно переписать также в виде уравнения Бесселя:

$$f''+\frac{1}{r}f'+\left(\lambda_2^2-\frac{n^2}{r^2}\right)f=0,\ \ \lambda_2^2=-\alpha^2+\frac{(\omega+\alpha\mathrm{V})^2}{c_0^2}\left[1-\frac{(\omega+\alpha\mathrm{V})^2}{\omega_{ar}^2}\right]^{-1}=-\lambda^2$$

Приемлемым решением для потенциала φ явится функция

$$\varphi(r,\theta,x,t)=b_1J_n(\lambda_2 r)e^{i(\omega t+\alpha x+n\theta)},\ \ b_1=\mathrm{const}, \tag{1.1.4}$$

где $J_n(\lambda_2 r)$ – функция Бесселя первого рода порядка n. Из условия $\lambda_2^2>0$ следует требование $M_1>1$, соответствующее сверхзвуковому течению газожидкостной смеси.

Таким образом, при дозвуковом и сверхзвуковом режимах течения потенциал φ описывается, соответственно, формулами (1.13) и (1.14).

В дальнейшем будет исследоваться лишь дозвуковой режим внутреннего обтекания трубы. В принятой модели движения газожидкостной смеси пренебрегается поверхностным натяжением пузырька и пульсационным напряжением в жидкости. Компоненты тензора напряжений во всей смеси определяются через компоненты тензоров несжимаемой жидкости и газовой фазы посредством формул [6]:

$$\sigma_{rr}=(1-\beta_0)\sigma_{rr}^{(1)}+\beta_0\sigma_{rr}^{(2)}=-\left[(1-\beta_0)P_1+\beta_0P_2\right]=-P,\ \sigma_{r\theta}^{(1)}=0,\ \sigma_{rx}^{(1)}=0. \tag{1.15}$$

Здесь верхние индексы указывают на принадлежность тензоров к соответствующим фазам, при этом, $\sigma^{(2)}=-P_2\delta_{mn}$ является шаровым (δ_{mn} – символ Кронекера). Подставляя первое уравнение из (1.7) в (1.15), в координатах (1.9) получим формулы:

$$\sigma_{rr} = \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{V} \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi, \ \sigma_{r\theta} = 0, \ \sigma_{rx} = 0 . \tag{1.16}$$

В последующем будет рассмотрен лишь дозвуковой режим течения смеси. На этом гидродинамическая часть исследования поставленной задачи гидроупругости завершена. Перейдём к рассмотрению её упругой составляющей.

2. Уравнения движения цилиндрической оболочки кругового сечения. Модель Тимошенко.

В рассматриваемой модели отношение толщины трубы к радиусу её срединной поверхности несколько превосходит то же отношение для оболочек, теория которых построена на основании гипотез Кирхгофа-Лява. Поэтому в уравнениях движения трубы уместно учитывать деформацию поперечного сдвига и инерцию вращения нормальных элементов. Линеаризованные уравнения движения трубы имеют вид [5]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{Eh} q_x + \rho_* \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 , \\
\frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1-\nu^2}{Eh} q_\theta + \rho_* \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} = 0 \\
\frac{\nu}{R}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \theta} - \frac{w}{R^2} + \frac{1-\nu}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_\theta \right) \right] + \\
+ \frac{1-\nu^2}{Eh} q_r - \rho_* \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\
\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial x \partial \theta} - \frac{6(1-\nu)}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) - \rho_* \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \\
\frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial x^2} - \frac{6(1-\nu)}{h^2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_\theta \right) - \\
- \rho_* \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} = 0
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь u, v, w – смещения точек срединной поверхности, соответственно, в осевом направлении, вдоль дуги кругового сечения и по нормали к поверхности трубы (в радиальном направлении). Прогиб w считается положительным вдоль направления к центру кривизны; q_x, q_θ, q_r – составляющие внешней нагрузки на соответствующие координатные оси, ρ_* и h – плотность материала и толщина трубы, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, ψ_x и ψ_θ – углы поворота нормали, соотношения в скобках – компоненты деформации поперечного сдвига вдоль соответствующих осей. Условия на поверхности трубы будут в дальнейшем удовлетворяться на её срединной поверхности.

В точках примыкания смеси к стенкам трубы скорость частиц смеси в радиальном направлении r по величине должна совпадать со скоростью смещения w, что приводит к формулировке граничного кинематического условия непроницаемости или плавности обтекания стенок трубы:

$$\mathrm{v}_r \big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{V}\frac{\partial}{\partial x} \right) w \tag{2.2}$$

Воздействие нормального σ_{rr} и касательных напряжений смеси $\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}$ на внутреннюю поверхность трубы должны уравновешиваться, соответственно, радиальной q_r и касательными составляющими q_x, q_θ внешней силы, что позволяет, согласно (1.16), сформулировать динамическое граничные условия:

$$q_r = \sigma_{rr}\big|_{r=R} = \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{V} \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi\left(R, \theta, x, t\right), \qquad (2.3)$$

$$q_\theta = -\sigma_{r\theta}\big|_{r=R} = 0, \quad q_x = -\sigma_{rx}\big|_{r=R} = 0$$

Преобразуем условие (2.2). Вычисляя по решению (1.13) производные, будем иметь:

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\lambda I_n'\left(\lambda R\right)}{I_n\left(\lambda r\right)} \varphi = -\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{V} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varphi = -\frac{I_n\left(\lambda r\right)}{\lambda I_n'\left(\lambda R\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{V} \frac{\partial}{\partial x} \right) w \qquad (2.4)$$

Тогда, представление (2.3) компоненты q_r внешней силы перепишется в форме

$$q_r = -\rho_0 \frac{I_n\left(\lambda R\right)}{\lambda I_n'\left(\lambda R\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{V} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w\,. \qquad (2.5)$$

В выражениях (2.4), (2.5) штрих над функцией $I_n\left(\lambda r\right)$ означает дифференцирование по аргументу. В соответствии с представлениями (1.11) и (1.13), решение системы (2.1) будем искать в виде:

$$\left(u, \mathrm{v}, w\right) = \left(u_*, \mathrm{v}_*, w_*\right) e^{i\left(\omega t + \alpha x + n\theta\right)}, \quad \left(\psi_x, \psi_\theta\right) = \frac{1}{R}\left(\psi_x^*, \psi_\theta^*\right) e^{i\left(\omega t + \alpha x + n\theta\right)}, \qquad (2.6)$$

где u_*, v_*, w_* – амплитуды волн в соответствующих направлениях. Подставляя (2.6) в систему (2.1), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно амплитуд:

$$\left(\frac{\omega^2}{c_*^2} - \alpha^2 - \frac{1-\nu}{2}\frac{n^2}{R^2} \right) u_* - \frac{1+\nu}{2}\frac{n}{R}\alpha \mathrm{v}_* + i\frac{\nu}{R}\alpha w_* = 0, \quad c_*^2 = \frac{E}{\rho_*\left(1-\nu^2\right)}$$

$$-\frac{1+\nu}{2}\frac{n}{R}\alpha u_* + \left(-\frac{n^2}{R^2} - \frac{1-\nu}{2}\alpha^2 + \frac{\omega^2}{c_*^2} \right) \mathrm{v}_* - i\frac{n}{R^2} w_* = 0$$

$$i\frac{\nu}{R}\alpha u_* + i\frac{n}{R^2}\mathrm{v}_* + \left[\frac{\omega^2}{c_*^2} - \frac{1}{R^2} - \frac{1-\nu}{2}\alpha^2 - \frac{1-\nu}{2}\frac{n^2}{R^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_0}{c_*^2 \rho_* h} \frac{I_n\left(\lambda r\right)}{\lambda I_n'\left(\lambda R\right)} \left(\omega + \alpha \mathrm{V}\right)^2 \right] w_* + i\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{R}\alpha \psi_x^* + i\frac{1-\nu}{2}\frac{n}{R^2}\psi_\theta^* = 0 \qquad (2.7)$$

$$-i\frac{6\left(1-\nu\right)}{h^2}\alpha w_* + \frac{1}{R}\left[\frac{\omega^2}{c_*^2} - \frac{\alpha^2}{R^2} - \frac{1-\nu}{2}\frac{n^2}{R^2} - \frac{6\left(1-\nu\right)}{h^2} \right] \psi_x^* - \frac{1+\nu}{2}\frac{n}{R^2}\alpha \psi_\theta^* = 0$$

$$-i\frac{6\left(1-\nu\right)}{h^2}\frac{n}{R} w_* - \frac{1+\nu}{2}\frac{n}{R^2}\alpha \psi_x^* + \frac{1}{R}\left[\frac{\omega^2}{c_*^2} - \frac{1-\nu}{2}\alpha^2 - \frac{n^2}{R^2} - \frac{6\left(1-\nu\right)}{h^2} \right] \psi_\theta^* = 0$$

Здесь c_* – скорость звука (распространения продольных волн) в материале трубы.

Перейдём в системе (2.7) к безразмерным параметрам:

$$w_* = \frac{\omega R}{c_*},\ \mathrm{V}_* = \frac{\mathrm{V}}{c_*},\ \delta = \frac{a_0}{R},\ l = \frac{h}{R},\ \alpha_* = \alpha R,\ \ \lambda_* = \lambda R\,.$$

Для получения нетривиальных решений получаемой системы приравняем её определитель нулю, что приводит к дисперсионному уравнению

$$\det\left\|e_{ij}\right\| = 0;\ i, j = 1, 2, \ldots, 5\,, \tag{2.8}$$

где его элементами являются соотношения:

$$e_{11} = \omega_*^2 - \alpha_*^2 - \frac{1-\nu}{2}n^2,\ e_{12} = -\frac{1+\nu}{2}\alpha_* n,\ e_{13} = -i\nu\alpha_*,\ e_{14} = 0,\ e_{15} = 0$$

$$e_{21} = -\frac{1+\nu}{2}\alpha_* n,\ \ e_{22} = \omega_*^2 - \frac{1-\nu}{2}\alpha_*^2 - n^2,\ \ e_{23} = -in,\ e_{24} = 0,\ \ e_{25} = 0$$

$$e_{31} = i\nu\alpha_*,\ \ e_{32} = in, e_{33} = \omega_*^2 - 1 - \frac{1-\nu}{2}\left(\alpha_*^2 + n^2\right) + \frac{\rho_0}{\rho_*}\frac{I_n(\lambda_*)}{\lambda_* I_n'(\lambda_*)}\frac{\left(\omega_* + \alpha_* \mathrm{V}_*\right)^2}{l},$$

$$e_{34} = i\frac{1-\nu}{2}\alpha_*,\ e_{35} = i\frac{1-\nu}{2}n,\ e_{41} = 0,\ e_{42} = 0,\ e_{43} = -i\frac{6(1-\nu)}{l^2}\alpha_*,$$

$$e_{44} = \omega_*^2 - \alpha_*^2 - \frac{1-\nu}{2}n^2 - \frac{6(1-\nu)}{l^2},\ \ e_{45} = -\frac{1+\nu}{2}\alpha_* n,\ \ e_{51} = 0,\ \ e_{52} = 0,$$

$$e_{53} = -i\frac{6(1-\nu)}{l^2}n,\ \ e_{54} = -\frac{1+\nu}{2}\alpha_* n,\ \ e_{55} = \omega_*^2 - \frac{1-\nu}{2}\alpha_*^2 - n^2 - \frac{6(1-\nu)}{l^2}$$

$$\lambda_*^2 = \alpha_*^2 - \frac{c_*^2}{c_0^2}\left(\omega_* + \alpha_* \mathrm{V}_*\right)^2\left[1 - \frac{\rho_1 c_*^2}{3\gamma p_0}\delta^2\left(\omega_* + \alpha_* \mathrm{V}_*\right)^2\right]^{-1}$$

Уравнение (2.8) описывает распространение несимметричных линейных волн в цилиндрической трубе, внутри которой протекает смесь несжимаемой жидкости с пузырьками калорически совершенного газа.

Если же исходить от модели Кирхгофа-Лява, то аналогичные выкладки над уравнениями движения оболочки приведут к иному дисперсионному уравнению:

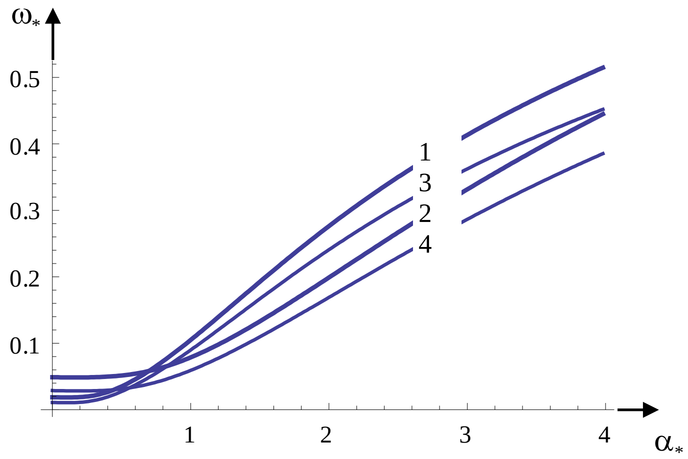
$$\left[\omega_*^2 - 1 - \frac{l^2}{12}\left(\alpha_*^2 + n^2\right)^2 + \frac{\rho_0}{\rho_*}\frac{I_n(\lambda_*)}{\lambda_* I_n'(\lambda_*)}\frac{\left(\omega_* + \alpha_* \mathrm{V}_*\right)^2}{l}\right]\left[\left(\omega_*^2 - \alpha_*^2 - \frac{1-\nu}{2}n^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\omega_*^2 - \frac{1-\nu}{2}\alpha_*^2 - n^2\right) - \left(\frac{1+\nu}{2}\alpha_* n\right)^2\right] - n^2\left[\omega_*^2 - (1-\nu)\alpha_*^2 - \frac{1-\nu}{2}n^2\right] -$$

$$-\nu^2\alpha_*^2\left(\omega_*^2 - \frac{1-\nu}{2}\alpha_*^2\right) = 0 \tag{2.9}$$

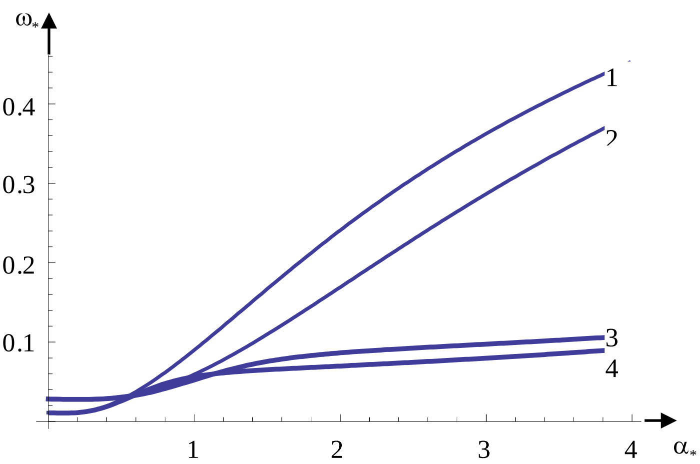
В качестве иллюстрации вышеизложенных теорий рассмотрены модели стальных труб и оболочек ($\nu = 0.3$, $\rho_* = 7800$ кг/м³, $c_* = 5308$ м/с, $l = 0.07$), наполненными водовоздушной смесью ($P_0 = 0.1$ МПа, $\rho_0 = 988$ кг/м³, $c_0 = 119$ м/с, $\gamma = 1.4$, $\beta_0 = 0.01$) с мелкими $\left(\delta = 5\cdot 10^{-4}\right)$ и крупными $\left(\delta = 2\cdot 10^{-2}\right)$ пузырьками. Численные расчёты проведены по уравнениям (2.8) и (2.9).

Фиг.1 отнесена к случаю трубы, наполненной чистой водой при параметрах гидроупругой системы $l = 0.02$, $\mathrm{V}_* = 0.005$ и модах $n = 2$ и 3. Частоты соответствующих колебаний $\omega_*(\alpha_*)$, вычисленные по теории Кирхгофа-Лява – кривые 1, 3 по величине больше частот по Тимошенко – кривые 2, 4, т.е. уточняющая классическую модель Кирхгофа-Лява иная модель уменьшает жёсткость гидроупругой системы, вследствие которой имеет место уменьшение значений собственных колебаний оболочки. По обеим теориям для значительно длинных волн $(\alpha_* \to 0)$ с увеличением n значения частот $\omega_*(\alpha_*)$ возрастают, а для коротких волн, наоборот, убывают. Такая же картина поведения кривых $\omega_*(\alpha_*)$ наблюдается и при больших $n \geq 4$.

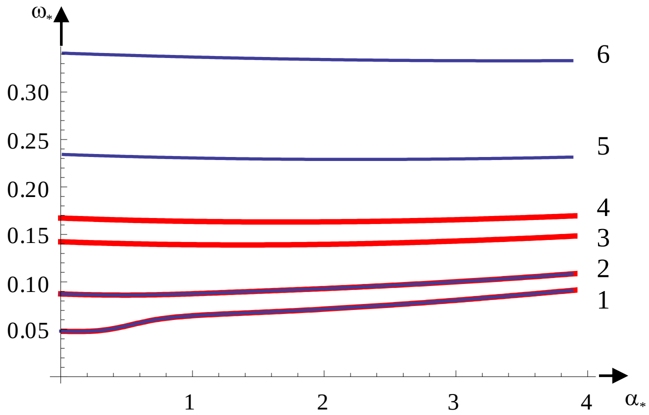


Фиг. 1. Величины частот по теориям Кирхгофа-Лява и Тимошенко.

На фиг. 2 при параметрах $l = 0.02$, $V_* = 0.005$ и наличии в трубе воды – кривые 1 ($n = 2$), 2 ($n = 3$) и смеси с мелкими $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ пузырьками кривые 3 ($n = 2$), 4 ($n = 3$) приведены зависимости $\omega_*(\alpha_*)$, вычисленные по теории Тимошенко. Видно, что частоты трубы с водой всегда превосходят по величине значения $\omega_*(\alpha_*)$ трубы со смесью.



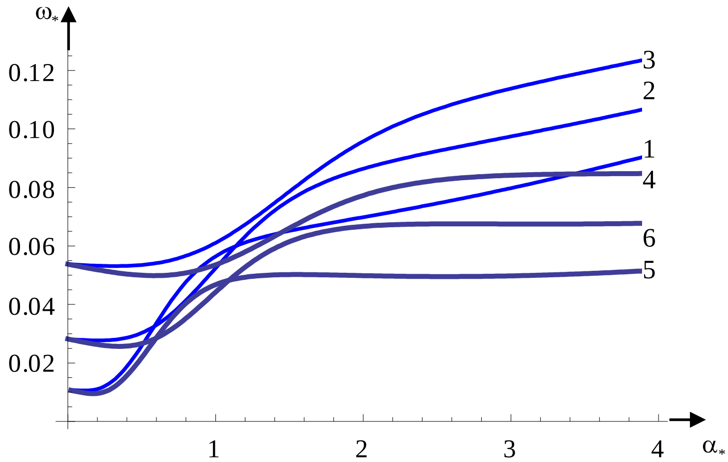
Фиг. 2. Значения частот при разных наполнителях.



Фиг. 3. Зависимости частот от числа окружных волн.

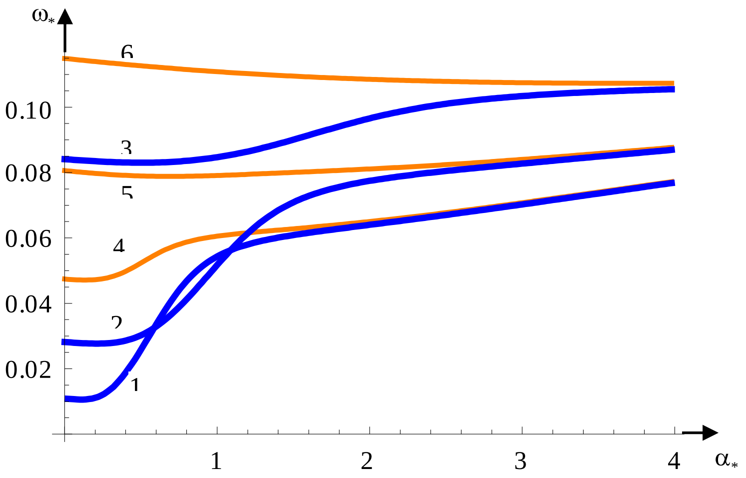
Фиг. 3 иллюстрирует зависимость частоты собственных колебаний трубы (оболочки) $\omega_*(\alpha_*)$ от моды n (числа окружных волн) при параметрах $l=0.07$, $V_*=0.005$ системы, наполненной смесью с мелкими $\delta=5\cdot10^{-4}$ пузырьками. Для значений $n=2$ и $n=3$ как по Кирхгофу-Ляву, так и Тимошенко, частоты колебаний совпадают (кривые 1 и 2). Различие проявляется для $n=6$ и $n=5$, при которых соответствующие частоты по Кирхгофу-Ляву – кривые 6, 5 превосходят по величине частоты по Тимошенко – кривые 4 и 3.

На фиг. 4 представлены кривые $\omega_*(\alpha_*)$ в зависимости от величины скорости протекания V_* при параметрах $l=0.02$, $\delta=5\cdot10^{-4}$; $V_*=0.005$ – кривые 1 $(n=2)$, 2 $(n=3)$, 3 $(n=4)$ и $V_*=0.015$ – кривые 5 $(n=2)$, 6 $(n=3)$, 4 $(n=4)$. Видно, что с увеличением V_* частоты по Тимошенко уменьшаются, при этом, как для длинных $(\alpha_*\to0)$, так и коротких волн с возрастанием моды n



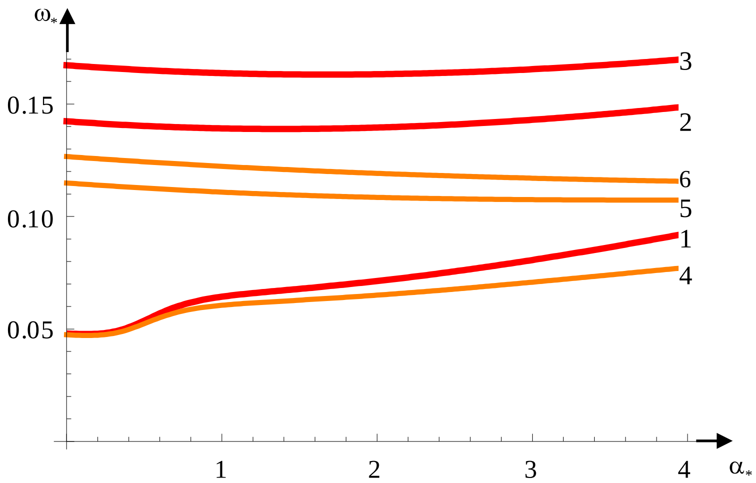
Фиг. 4. Поведение частот в зависимости от величины скорости протекания.

величины частот $\omega_*(\alpha_*)$ увеличиваются.



Фиг. 5. Значения частот в зависимости от толщины

Фиг. 5 отнесена к примерам труб разных толщин $l = 0.02$ – кривые 1 $(n=2)$, 2 $(n=3)$, 3 $(n=5)$ и $l = 0.07$ – кривые 4 $(n=2)$, 5 $(n=3)$, 6 $(n=5)$, которые заполнены протекающими с одинаковыми скоростями $V_* = 0.005$ смесями с крупными $\delta = 2 \cdot 10^{-2}$ пузырьками. С увеличением толщины жёсткость гидроупругой системы усиливается и поэтому частоты $\omega_*(\alpha_*)$ утолщённой трубы по величине больше частот трубы умеренной толщины. Вычисления проведены по теории Тимошенко. Повышение n увеличивает значения частот и для достаточно коротких волн значения частот смыкаются, т.е. влияние изменения толщин становится несущественным. Аналогичная картина поведения частот наблюдается и по теории Кирхгофа-Лява.



Фиг. 6. Зависимости поведения частот от размеров

На фиг. 6 приведены вычисленные по Тимошенко зависимости $\omega_*(\alpha_*)$ от размеров пузырьков мелких $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ – кривые 1 $(n=2)$, 2 $(n=5)$, 3 $(n=6)$ и крупных $\delta = 2 \cdot 10^{-2}$ – кривые 4 $(n=2)$, 5 $(n=5)$, 6 $(n=6)$ при фиксированных толщине $l = 0.07$ и скорости протекания $V_* = 0.005$. Для смеси с мелкими пузырьками значения $\omega_*(\alpha_*)$ превосходят по величине частоты трубы со смесью с крупными пузырьками. Такая же картина кривых $\omega_*(\alpha_*)$ имеет место и в случае использования теории Кирхгофа-Лява.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко В.Д., Лакиза В.Д., Павловский В.С., Пелых Н.А. Динамика упругогазожидкостных систем при вибрационных воздействиях. Киев: Наукова Думка, 1988. 256с.
2. Лакиза В.Д. Динамика упругой цилиндрической оболочки, несущей газожидкостную среду, при двухчастотном вибровозбуждении //Прикл. механика. 2008. Т.44. №11. С.112-122.
3. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Устойчивость цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, при внешнем динамическом давлении. //Изв. НАН Армении.Механика. 2007. Т.60. №1. С.25-32.
4. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов А.Н. Анализ нестационарных процессов в цилиндрических оболочках при взаимодействии с протекающей жидкостью. // Прикл. механика. 2010. Т.46. №10. С.36-52.
5. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости М.: Наука, 1979. 320с.
6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Оганян Гагик Гришаевич – ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, **тел.:** (+37493) 946-947,
E-mail: oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Левонович – ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики Ереванского госуниверситета.
Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, **тел.:** (+37477) 002-408 (моб.),
E-mail: ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 03.02.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №4, 2014 Механика

УДК 517.934

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫМИ СОСТАВНЫМИ СИСТЕМАМИ

Барсегян В.Р., Шагинян С.Г., Барсегян Т.В.

Ключевые слова: составная система, асимптотическая устойчивость, оптимальная стабилизация.
Keyword: compound system, asymptotic stability, optimal stabilization.

Բարսեղյան Վ.Ռ., Շահինյան Ս.Գ., Բարսեղյան Տ.Վ.
Գծային կապակցված համակարգերի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի մի խնդրի մասին

Հետազոտված է գծային կապակցված համակարգերի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիր: Օգտվելով Լյապունովի ֆունկցիայի եղանակից, առաջարկված է օպտիմալ ստաբիլիզացնող ղեկավարման կառուցման եղանակ: Բերված է կոնկրետ կապակցված համակարգի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդրի լուծում:

Barseghyan V.R., Shaninyan S.G., Barseghyan T.V.
About one problem of optimal stabilization of linear compound systems

The problem of optimal stabilization of linear compound system is investigated. Based on Lyapunov function method the method of building optimal stabilizing control action is suggested. The solution of the problem of optimal stabilization of a concrete compound system is given.

Исследуется задача оптимальной стабилизации линейной составной системы. На основе метода функции Ляпунова предложен способ построения оптимального стабилизирущего управления. Приведено решение задачи оптимальной стабилизации конкретной составной системы.

Введение. Решение многих прикладных задач и процессов управления сводится к исследованию составных систем. Следуя [1-3], составной называем динамическую систему управления, описываемую на разных интервалах времени разными дифференциальными уравнениями и некоторыми конечными связями для стыковки траекторий.

Движение многих управляемых механических систем описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, математические модели которых суть либо уравнения Лагранжа второго рода, весьма удобные при анализе динамических систем, либо системы дифференциальных уравнений типа уравнений Эйлера-Пуассона, которые часто используются при изучении вращательного движения твёрдых тел. В ряде практически важных случаев оказывается полезным использование как тех, так и других уравнений. Поэтому исследование различных задач управления и стабилизации движения для сложной нелинейной системы, методом кусочно-линейной аппроксимации нелинейной системы дифференциальных уравнений, приводится к исследованию аналогичных задач для линейной составной системы.

Важное теоретическое и прикладное значение имеет исследование и решение различных задач оптимальной стабилизации для составных систем. В работе [3] построен аналитический вид движения линейных составных систем, исследованы свойства движения и геометрическая структура области достижимости. Предложен метод решения задачи управления линейными составными системами и способ решения задачи оптимального управления. В работах [4, 5] синтезированы стабилизирующие оптимальные управления.

В данной работе исследуется задача оптимальной стабилизации линейной составной системы. На основе метода функции Ляпунова предложен способ построения оптимального стабилизирующего управления. В качестве иллюстрации изложенного приведено решение задачи оптимальной стабилизации конкретной составной системы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую составную динамическую систему, возмущённое движение которой на интервалах времени $t_{k-1} \le t \le t_k$ ($k = 1,\dots,m-1$) и $t_{k-1} \le t < \infty$ ($k = m$) описывается системой

$$\dot{x}^{(k)} = A_k(t)x^{(k)} + B_k(t)u^{(k)} \tag{1.1}$$

Здесь $x^{(k)}(t) \in R^{n_k}$, $x^{(k)}$ – фазовый вектор системы, $A_k(t)$, $B_k(t)$ ($k = 1,\dots,m$) – матрицы параметров системы (модели объекта); $u^{(k)}(t)$ –управляющие воздействия, соответственно, с размерностями $A_k(t) - (n_k \times n_k)$, $B_k(t) - (n_k \times r_k)$, $u^{(k)}(t) - (r_k \times 1)$. В общем случае будем предполагать, что элементы матриц $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбцов $u^{(k)}(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями.

Предполагается, что преемственность между составными системами (1.1) при $k = 1,\dots,m$ (стыковки траекторий) обеспечивается выполнением следующих условий в промежуточные моменты времени t_k ($0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < \infty$)

$$E_k x^{(k)}(t_k) + F_k x^{(k+1)}(t_k) = \alpha_k \quad (k = 1,\dots,m-1) \tag{1.2}$$

где $E_k - (n_{k+1} \times n_k)$-мерные, $F_k - (n_{k+1} \times n_{k+1})$-мерные матрицы, а $\alpha_k - (n_{k+1} \times 1)$ – вектор-столбец [3].

Предполагается, что матрицы E_k, F_k и вектор α_k известны, а матрицы F_k ($k = 1,\dots,m-1$) такие, что существуют F_k^{-1}, т.е. $\det F_k \ne 0$.

Учитывая следующие матричные представления

$$A_k(t) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)}(t) & a_{12}^{(k)}(t) & \cdots & a_{1n_k}^{(k)}(t) \\ a_{21}^{(k)}(t) & a_{22}^{(k)}(t) & \cdots & a_{2n_k}^{(k)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_k1}^{(k)}(t) & a_{n_k2}^{(k)}(t) & \cdots & a_{n_kn_k}^{(k)}(t) \end{pmatrix}, \quad x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_{n_k}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$B_k(t) = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)}(t) & b_{12}^{(k)}(t) & \cdots & b_{1r_k}^{(k)}(t) \\ b_{21}^{(k)}(t) & b_{22}^{(k)}(t) & \cdots & b_{2r_k}^{(k)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n_k1}^{(k)}(t) & b_{n_k2}^{(k)}(t) & \cdots & b_{n_kr_k}^{(k)}(t) \end{pmatrix}, \quad u^{(k)} = \begin{pmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ \vdots \\ u_{r_k}^{(k)} \end{pmatrix}$$

уравнения (1.1) запишем в виде

$$\dot{x}_i^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij}^{(k)}(t)x_j^{(k)} + \sum_{s=1}^{r_k} b_{is}^{(k)}(t)u_s^{(k)}, \; i = 1,\dots,n_k \tag{1.3}$$

Пусть для оценки движения составной системы (1.1) имеем следующий функционал:

$$
\begin{aligned}
I[\cdot] = \sum_{k=1}^{m} I_k[\cdot] = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sum_{j,s=1}^{n_k} \alpha_{js}^{(k)} x_j^{(k)} x_s^{(k)} + \sum_{j,s=1}^{r_k} \beta_{js}^{(k)} u_j^{(k)} u_s^{(k)} \right] dt + \\
+ \int_{t_{m-1}}^{\infty} \left[\sum_{j,s=1}^{n_k} \alpha_{js}^{(k)} x_j^{(k)} x_s^{(k)} + \sum_{j,s=1}^{r_k} \beta_{js}^{(k)} u_j^{(k)} u_s^{(k)} \right] dt
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

где предполагается, что квадратичные формы

$$
\sum_{j,s=1}^{n_k} \alpha_{js}^{(k)} x_j^{(k)} x_s^{(k)} \quad \text{и} \quad \sum_{j,s=1}^{r_k} \beta_{js}^{(k)} u_j^{(k)} u_s^{(k)}
$$

определённо положительны.

Сформулируем следующую задачу.

Задача 1. Требуется найти набор оптимальных управляющих воздействий $u^0(t) = \{u^{(1)0}(t), \ldots, u^{(m)0}(t)\}$, которые при произвольных начальных условиях обеспечивают асимптотическую устойчивость решения системы (1.1) с промежуточными условиями (1.2) и минимизируют функционал (1.4).

2. Решение задачи. Составная система (1.1) состоит из m систем линейных дифференциальных уравнений, из которых первые $m-1$ системы определены на конечном интервале времени $[t_0, t_{m-1}]$, а последняя система определена на интервале $[t_{m-1}, \infty)$. Поэтому, следуя [7] на конечном интервале времени $[t_0, t_{m-1}]$, для первых $m-1$ систем, должны найти оптимальные управляющие воздействия, которые с произвольными начальными и промежуточными (1.2) условиями обеспечивали устойчивое движение и минимальное значение соответствующего функционала (функционала (1.4) на интервале $[t_0, t_{m-1}]$). Следовательно, для решения сформулированной задачи оптимальной стабилизации целесообразно её разделить на две части, каждая из которых формулируется следующим образом.

Задача 1.1. Требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u_j^{(k)0}(\cdot)$, которые на движениях системы

$$
\dot{x}_i^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij}^{(k)}(t) x_j^{(k)} + \sum_{s=1}^{r_k} b_{is}^{(k)}(t) u_s^{(k)} \tag{2.1}
$$

$i = 1, \ldots, n_k,\ k = 1, \ldots, m-1,\ t \in [t_{k-1}, t_k)$

с произвольными начальными и промежуточными (1.2) условиями обеспечивают минимальное значение функционалу

$$
\bar{I}[\cdot] = \sum_{k=1}^{m-1} I_k[\cdot] = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sum_{j,s=1}^{n_k} \alpha_{js}^{(k)} x_j^{(k)} x_s^{(k)} + \sum_{j,s=1}^{r_k} \beta_{js}^{(k)} u_j^{(k)} u_s^{(k)} \right] dt \tag{2.2}
$$

Задача 1.2. Требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u_j^{(m)0}(\cdot)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость решения системы

$$\dot{x}_i^{(m)}(t)=\sum_{j=1}^{n_m}a_{ij}^{(m)}(t)x_j^{(m)}+\sum_{s=1}^{r_m}b_{is}^{(m)}(t)u_s^{(m)}\ ;\quad i=1,\ldots,n_m\ ,\ t\in[t_{m-1},+\infty) \tag{2.3}$$

и минимизируют функционал

$$I_m[\cdot]=\int_{t_{m-1}}^{\infty}\left[\sum_{j,s=1}^{n_m}\alpha_{js}^{(m)}x_j^{(m)}x_s^{(m)}+\sum_{j,s=1}^{r_m}\beta_{js}^{(m)}u_j^{(m)}u_s^{(m)}\right]dt \tag{2.4}$$

Для решения представленных задач предположим, что существуют определённо-положительные функции Ляпунова

$$\bar{V}=\sum_{k=1}^{m-1}V_k(x_1^{(k)},...,x_{n_k}^{(k)},t)\ \text{ и }\ V_m=V_m(x_1^{(m)},...,x_{n_m}^{(m)},t) \tag{2.5}$$

где $V_k(x_1^{(k)},...,x_{n_k}^{(k)},t)$, $(k=1,...,m)$ – определённо-положительные функции Ляпунова для подсистем, допускающие бесконечно малый высший предел, полные производные по времени которых вдоль решений соответствующих подсистем (1.1) суть определенно-отрицательные функции. При данных предположениях оптимальная стабилизация, применительная к системе (1.1), осуществляется на основе подхода, разработанного в работах [6, 7].

С целью решения **задачи 1.1** и **задачи 1.2** на основе функции Ляпунова (2.5) составим следующие выражения (функции Беллмана):

$$\begin{aligned}\bar{B}[\cdot]=\sum_{k=1}^{m-1}B_k[\cdot]=\sum_{k=1}^{m-1}\Bigg[&\frac{\partial V_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}\left(\sum_{j=1}^{n_k}a_{ij}^{(k)}(t)x_j^{(k)}+\sum_{s=1}^{r_k}b_{is}^{(k)}(t)u_s^{(k)}\right)+\\&+\sum_{j,s=1}^{n_k}\alpha_{js}^{(k)}x_j^{(k)}x_s^{(k)}+\sum_{j,s=1}^{r_k}\beta_{js}^{(k)}u_j^{(k)}u_s^{(k)}\Bigg]\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}B_m[\cdot]=&\frac{\partial V_m}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}\left(\sum_{j=1}^{n_m}a_{ij}^{(m)}(t)x_j^{(m)}+\sum_{s=1}^{r_m}b_{is}^{(m)}(t)u_s^{(m)}\right)+\\&+\sum_{j,s=1}^{n_m}\alpha_{js}^{(m)}x_j^{(m)}x_s^{(m)}+\sum_{j,s=1}^{r_m}\beta_{js}^{(m)}u_j^{(m)}u_s^{(m)}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Так как при оптимальных управляющих воздействиях $u_s^{(k)}=u_s^{(k)0}$ и $u_s^{(m)}=u_s^{(m)0}\ (s=1,\ldots,r_k,\ k=1,...,m-1)$ выражения (2.6) и (2.7) должны принимать минимальные значения, следовательно, будут иметь место условия [6, 7]:

$$\left.\frac{\partial\bar{B}[\cdot]}{\partial u_s^{(k)}}\right|_{u_s^{(k)0}}=0\ ;\qquad s=1,\ldots,r_k,\ k=1,...,m-1 \tag{2.8}$$

$$\left.\frac{\partial B_m[\cdot]}{\partial u_s^{(m)}}\right|_{u_s^{(m)0}}=0\ ;\qquad s=1,\ldots,r_k \tag{2.9}$$

В (2.8) и (2.9), подставляя выражения (2.6) и (2.7), соответственно, и вычисляя производные, получим:

$$\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}b_{is}^{(k)}(t)+2\sum_{j=1}^{r_k}\beta_{js}^{(k)}u_j^{(k)0}=0\ ;\qquad s=1,\ldots,r_k,\ k=1,...,m-1$$

$$\sum_{i=1}^{n_m} \frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}} b_{is}^{(m)}(t) + 2\sum_{j=1}^{r_m} \beta_{js}^{(m)} u_j^{(m)0} = 0; \qquad s = 1,\dots,r_k$$

которые можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{r_k} \beta_{js}^{(k)} u_j^{(k)0} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}} b_{is}^{(k)}(t) \tag{2.10}$$

$$\sum_{j=1}^{r_m} \beta_{js}^{(m)} u_j^{(m)0} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_m} \frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}} b_{is}^{(m)}(t) \tag{2.11}$$

Системы (2.10) и (2.11) являются относительно неизвестных управляющих воздействий $u_s^{(k)0}$ и $u_s^{(m)0}$ $(s = 1,\dots,r_k,\ k = 1,\dots,m-1)$ соответственно системами $r = \sum_{k=1}^{m-1} r_k$ и r_m линейных неоднородных алгебраических уравнений, которые будут иметь отличные от нуля решения, если их главные определители отличны от нуля, т.е.

$$\Delta^{(k)} \neq 0; \qquad k = 1,\dots,m-1 \tag{2.12}$$

$$\Delta^{(m)} \neq 0 \tag{2.13}$$

где

$$\Delta^{(k)} = \begin{vmatrix} \beta_{11}^{(k)} & \beta_{12}^{(k)} & \dots & \beta_{1r_k}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{r_k1}^{(k)} & \beta_{r_k2}^{(k)} & \dots & \beta_{r_kr_k}^{(k)} \end{vmatrix}, \quad \Delta^{(m)} = \begin{vmatrix} \beta_{11}^{(m)} & \beta_{12}^{(m)} & \dots & \beta_{1r_m}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{r_m1}^{(m)} & \beta_{r_m2}^{(m)} & \dots & \beta_{r_mr_m}^{(m)} \end{vmatrix}$$

Отметим, что условия (2.12) и (2.13) выполнены, так как для любого $k\ (k = 1,\dots,m)$ квадратичные формы $\sum_{j,s=1}^{r_k} \beta_{js}^{(k)} u_j^{(k)} u_s^{(k)}$ определённо положительны.

Учитывая условия (2.12) и (2.13), решения системы (2.10) и (2.11) представим в виде:

$$u_j^{(k)0} = \frac{\Delta_j^{(k)}}{\Delta^{(k)}} \qquad k = 1,\dots,m-1$$

$$u_j^{(m)0} = \frac{\Delta_j^{(m)}}{\Delta^{(m)}}$$

где

$$\Delta_j^{(k)} = \begin{vmatrix} \beta_{11}^{(k)} & \dots & \beta_{1\,j-1}^{(k)} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}} b_{i1}^{(k)}(t) & \beta_{1\,j+1}^{(k)} & \dots & \beta_{1r_k}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{r_k1}^{(k)} & \dots & \beta_{r_k\,j-1}^{(k)} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}} b_{ir_k}^{(k)}(t) & \beta_{r_k\,j+1}^{(k)} & \dots & \beta_{r_kr_k}^{(k)} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_j^{(m)}=\begin{vmatrix}\beta_{11}^{(m)} & \dots & \beta_{1\,j-1}^{(m)} & -\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}b_{i1}^{(m)}(t) & \beta_{1\,j+1}^{(m)} & \dots & \beta_{1r_m}^{(m)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \beta_{r_m1}^{(m)} & \dots & \beta_{r_m\,j-1}^{(m)} & -\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}b_{ir_m}^{(m)}(t) & \beta_{r_m\,j+1}^{(m)} & \dots & \beta_{r_mr_m}^{(m)}\end{vmatrix}$$

Разлагая определители $\Delta_j^{(k)}$ и $\Delta_j^{(m)}$ по элементам j -го столбца, получим

$$\Delta_j^{(k)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r_k}\Delta_{jn}^{(k)}\left(\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}b_{in}^{(k)}(t)\right);\qquad (k=1,\dots,m-1;\ j=1,\dots,r_k)$$

$$\Delta_j^{(m)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r_m}\Delta_{jn}^{(m)}\left(\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}b_{in}^{(m)}(t)\right);\qquad (j=1,\dots,r_m)$$

где

$$\Delta_{jn}^{(k)}=\begin{vmatrix}\beta_{11}^{(k)} & \cdots & \beta_{1\,j-1}^{(k)} & \beta_{1\,j+1}^{(k)} & \cdots & \beta_{1r_k}^{(k)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{n-11}^{(k)} & \cdots & \beta_{n-1\,j-1}^{(k)} & \beta_{n-1\,j+1}^{(k)} & \cdots & \beta_{n-1r_k}^{(k)}\\ \beta_{n+11}^{(k)} & \cdots & \beta_{n+1\,j-1}^{(k)} & \beta_{n+1\,j+1}^{(k)} & \cdots & \beta_{n+1r_k}^{(k)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{r_k1}^{(k)} & \cdots & \beta_{r_k\,j-1}^{(k)} & \beta_{r_k\,j+1}^{(k)} & \cdots & \beta_{r_kr_k}^{(k)}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_{jn}^{(m)}=\begin{vmatrix}\beta_{11}^{(m)} & \cdots & \beta_{1\,j-1}^{(m)} & \beta_{1\,j+1}^{(m)} & \cdots & \beta_{1r_m}^{(m)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{n-11}^{(m)} & \cdots & \beta_{n-1\,j-1}^{(m)} & \beta_{n-1\,j+1}^{(m)} & \cdots & \beta_{n-1r_m}^{(m)}\\ \beta_{n+11}^{(m)} & \cdots & \beta_{n+1\,j-1}^{(m)} & \beta_{n+1\,j+1}^{(m)} & \cdots & \beta_{n+1r_m}^{(m)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{r_m1}^{(m)} & \cdots & \beta_{r_m\,j-1}^{(m)} & \beta_{r_m\,j+1}^{(m)} & \cdots & \beta_{r_mr_m}^{(m)}\end{vmatrix}$$

Подставляя значения определителей $\Delta_j^{(k)}$ и $\Delta_j^{(m)}$ в выражения для $u_j^{(k)0}$ и $u_j^{(m)0}$, соответственно, получим:

$$u_j^{(k)0}=\frac{\Delta_j^{(k)}}{\Delta^{(k)}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r_k}\frac{\Delta_{jn}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}\left(\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}b_{in}^{(k)}(t)\right);(k=1,\dots,m-1;\ j=1,\dots,r_k)\quad(2.14)$$

$$u_j^{(m)0}=\frac{\Delta_j^{(m)}}{\Delta^{(m)}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r_m}\frac{\Delta_{jn}^{(m)}}{\Delta^{(m)}}\left(\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}b_{in}^{(m)}(t)\right);(j=1,\dots,r_m)\quad(2.15)$$

Таким образом, оптимальные управляющие воздействия $u_j^{(k)0}$ и $u_j^{(m)0}$, решающие **задачу 1.1** и **задачу 1.2,** получены в виде (2.14) и (2.15)**.** Эти выражения, подставляя в (2.6) и (2.7) и требуя, чтобы выполнялись условия $B_k[\cdot]=0$ $(k=1,\ldots,m)$, далее проведя некоторые преобразования, будем иметь относительно функций Ляпунова $\bar{V}$ и V_m дифференциальные уравнения с частными производными:

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{\partial V_k}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}a_{ij}^{(k)}(t)x_j^{(k)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\sum_{p,s=1}^{r_k}\frac{\Delta_{ps}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}\left(\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}b_{ip}^{(k)}(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_j^{(k)}}b_{js}^{(k)}(t)\right)+\sum_{i,j=1}^{n_k}\alpha_{ij}^{(k)}x_i^{(k)}x_j^{(k)}\right]=0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial V_m}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}a_{ij}^{(m)}(t)x_j^{(m)}-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{p,s=1}^{r_m}\frac{\Delta_{ps}^{(m)}}{\Delta^{(m)}}\left(\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}b_{ip}^{(m)}(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_j^{(m)}}b_{js}^{(m)}(t)\right)+\sum_{i,j=1}^{n_m}\alpha_{ij}^{(m)}x_i^{(m)}x_j^{(m)}=0 \tag{2.17}$$

Будем искать функции Ляпунова $\bar{V}$ и V_m в следующем виде:

$$\bar{V}=\sum_{k=1}^{m-1}V_k(x_1^{(k)},\ldots,x_{n_k}^{(k)},t)=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\sum_{i,j=1}^{n_k}c_{ij}^{(k)}x_i^{(k)}x_j^{(k)}\right), \tag{2.18}$$

$$V_m=V_m(x_1^{(m)},\ldots,x_{n_m}^{(m)},t)=\sum_{i,j=1}^{n_m}c_{ij}^{(m)}x_i^{(m)}x_j^{(m)} \tag{2.19}$$

Подставляя (2.18) и (2.19), соответственно, в (2.16) и (2.17) , получим:

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left[\sum_{i,j=1}^{n_k}\frac{dc_{ij}^{(k)}}{dt}x_i^{(k)}x_j^{(k)}+\sum_{i,j=1}^{n_k}\alpha_{ij}^{(k)}x_i^{(k)}x_j^{(k)}+2\sum_{i=1}^{n_k}\left(\sum_{j=1}^{n_k}c_{ij}^{(k)}x_j^{(k)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n_k}a_{ij}^{(k)}(t)x_j^{(k)}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{p,s=1}^{r_k}\frac{\Delta_{ps}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}\left(\sum_{i,j=1}^{n_k}c_{ij}^{(k)}b_{is}^{(k)}(t)x_j^{(k)}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n_k}c_{ij}^{(k)}b_{ip}^{(k)}(t)x_j^{(k)}\right)\right]=0 \tag{2.20}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n_m}\frac{dc_{ij}^{(m)}}{dt}x_i^{(m)}x_j^{(k)}+\sum_{i,j=1}^{n_m}\alpha_{ij}^{(m)}x_i^{(m)}x_j^{(m)}+2\sum_{i=1}^{n_m}\left(\sum_{j=1}^{n_m}c_{ij}^{(m)}x_j^{(m)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n_m}a_{ij}^{(m)}(t)x_j^{(m)}\right)-$$
$$-\sum_{p,s=1}^{r_m}\frac{\Delta_{ps}^{(m)}}{\Delta^{(k)}}\left(\sum_{i,j=1}^{n_m}c_{ij}^{(m)}b_{is}^{(m)}(t)x_j^{(m)}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n_m}c_{ij}^{(m)}b_{ip}^{(m)}(t)x_j^{(m)}\right)=0 \tag{2.21}$$

Для определения коэффициентов $c_{ij}^{(k)}(t)$ и $c_{ij}^{(m)}(t)$ в формулах (2.20) и (2.21) приравнивая к нулю коэффициенты при произведениях $x_i^{(k)}x_j^{(k)}$ и $x_i^{(m)}x_j^{(m)}$, получим:

$$\frac{dc_{ij}^{(k)}}{dt}+\sum_{p=1}^{n_k}\left(a_{pi}^{(k)}(t)c_{pj}^{(k)}+a_{pj}^{(k)}(t)c_{pi}^{(k)}\right)-\sum_{p,s=1}^{r_k}\frac{\Delta_{ps}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}\left(\sum_{l=1}^{n_k}c_{lj}^{(k)}b_{lp}^{(k)}(t)\right)\left(\sum_{q=1}^{n_k}c_{qi}^{(k)}b_{qs}^{(k)}(t)\right)$$

$$+\alpha_{ij}^{(k)}=0;\quad (i,j=1,...,n_k;\, c_{ij}^{(k)}=c_{ji}^{(k)};\, \alpha_{ij}^{(k)}=\alpha_{ji}^{(k)};\, k=1,...,m-1)$$

$$\frac{dc_{ij}^{(m)}}{dt}+\sum_{p=1}^{n_m}\left(a_{pi}^{(m)}(t)c_{pj}^{(m)}+a_{pj}^{(m)}(t)c_{pi}^{(m)}\right)-\sum_{p,s=1}^{r_m}\frac{\Delta_{ps}^{(m)}}{\Delta^{(m)}}\left(\sum_{l=1}^{n_m}c_{lj}^{(m)}b_{lp}^{(m)}(t)\right)\left(\sum_{q=1}^{n_m}c_{qi}^{(m)}b_{qs}^{(m)}(t)\right)$$

$$+\alpha_{ij}^{(m)}=0;\quad (i,j=1,...,n_m;\, c_{ij}^{(m)}=c_{ji}^{(m)};\, \alpha_{ij}^{(m)}=\alpha_{ji}^{(m)})$$

Таким образом, получили относительно переменных $c_{ij}^{(k)}(t)$ и $c_{ij}^{(m)}(t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати, откуда можно найти решения (если возможно найти аналитические решения) и подставляя эти решения в (2.18) и (2.19), получим функции Ляпунова $\bar{V}$ и V_m. Следовательно, имея функции Ляпунова $\bar{V}$ и V_m из формул (2.14) и (2.15), получим оптимальные управляющие воздействия $u_j^{(k)0}$ и $u_j^{(m)0}$, решающие **задачу 1.1** и **задачу 1.2**.

Найденные оптимальные управляющие воздействия $u_1^{(1)0},\ldots,u_{r_1}^{(1)0}$ подставляя в уравнение (1.1) (или (1.3)) при $k=1$ и решая эту систему с некоторым начальным условием $x^{(1)}(t_0)=x_0^{(1)}$, получим оптимальное движение $x^{(1)0}(t)$. При $t=t_1$ подставляя $x^{(1)0}(t_1)$ в формулу (1.2) (при $k=1$), будем иметь

$$x^{(2)0}(t_1)=F_1^{-1}[\alpha_1-E_1x^{(1)0}(t_1)].$$

Значение $x^{(2)0}(t_1)$ является начальным состоянием второго этапа. Продолжая эту процедуру, т.е. подставляя оптимальные управляющие воздействия $u_1^{(k)0},\ldots,u_{r_k}^{(k)0}$ в уравнение (1.1) (или (1.3)) и интегрируя полученные дифференциальные уравнения с соответствующим начальным условием, будем иметь $x^{(k)0}(t)$, следовательно, и фазовое состояние $x^{(k)0}(t_k)$, а состояние $x^{(k+1)0}(t_k)$ вычисляется по формуле

$$x^{(k+1)0}(t_k)=F_k^{-1}[\alpha_k-E_kx^{(k)0}(t_k)].$$

Таким образом, будем иметь оптимальные движения $x^{(k)0}(t)$ $(k=1,\ldots,m)$ и все значения $x^{(k+1)0}(t_k)$ $(k=1,\ldots,m-1)$ фазового вектора как начальное значение последующего этапа. Далее, согласно формуле (2.2), можно вычислить минимальное значение функционала $\bar{I}[\cdot]=\sum_{k=1}^{m-1}I_k[\cdot]$, а минимальное значение функционала (2.4), согласно [6, 7], будет равно $V_m(x_1^{(m)0}(t_{m-1}),...,x_{n_m}^{(m)0}(t_{m-1}))$.

3. Пример. Большой класс управляемых тепловых объектов содержит три основные части: управляемый источник тепла (нагреватель), нагреваемое тело (жидкость) и оболочка (корпус), отделяющая тело от окружающей среды. Динамические режимы таких объектов достаточно точно можно описать с последовательным использованием нескольких систем линейных дифференциальных уравнений, каждая из которых справедлива для своего временного интервала. Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим модель управляющего объекта (нагрева жидкости в тепловом аппарате), возмущённое движение которого описываются следующими дифференциальными уравнениями [8]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} \\ \dot{x}_2^{(1)} = b^{(1)}u^{(1)} \end{cases} \qquad t \in [t_0, t_1) \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} \\ \dot{x}_2^{(2)} = a_2^{(2)}x_2^{(2)} + b^{(2)}u^{(2)} \end{cases} \qquad t \in [t_1, t_2) \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(3)} = x_2^{(3)} \\ \dot{x}_2^{(3)} = a_1^{(3)}x_1^{(3)} + a_2^{(3)}x_2^{(3)} + b^{(3)}u^{(3)} \end{cases} \qquad t \in [t_2, +\infty) \tag{3.3}$$

Здесь

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_2^{(2)} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{(1)} \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{(2)} \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{(3)} \end{pmatrix}$$

где величины $a_2^{(2)}$, $a_1^{(3)}$, $a_2^{(3)}$, $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$ – отличные от нуля константы.

Здесь предполагается, что в промежуточные моменты времени конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, т.е. в моменты времени t_k $x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k)$ при $(k = 1, 2)$, который является частным случаем условия (1.2) ($n_1 = n_2 = n_3 = 2$, $\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_k = -F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$).

Пусть задан следующий функционал:

$$\bar{I}[\cdot] = I_1[\cdot] + I_2[\cdot] + I_3[\cdot] = \int_{t_0}^{t_1} \omega_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \omega_2 dt + \int_{t_2}^{\infty} \omega_3 dt, \tag{3.4}$$

где

$$\omega_1 = \alpha_{11}^{(1)} \left(x_1^{(1)}\right)^2 + 2\alpha_{12}^{(1)} x_1^{(1)} x_2^{(1)} + \alpha_{22}^{(1)} \left(x_2^{(1)}\right)^2 + \beta_1 \left(u^{(1)}\right)^2$$

$$\omega_2 = \alpha_{11}^{(2)} \left(x_1^{(2)}\right)^2 + 2\alpha_{12}^{(2)} x_1^{(2)} x_2^{(2)} + \alpha_{22}^{(2)} \left(x_2^{(2)}\right)^2 + \beta_2 \left(u^{(2)}\right)^2$$

$$\omega_3 = \alpha_{11}^{(3)} \left(x_1^{(3)}\right)^2 + 2\alpha_{12}^{(3)} x_1^{(3)} x_2^{(3)} + \alpha_{22}^{(3)} \left(x_2^{(3)}\right)^2 + \beta_3 \left(u^{(3)}\right)^2$$

Заметим, что для систем (3.1)-(3.3) матрицы Калмана [7] соответственно имеют вид: $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & b^{(1)} \\ b^{(1)} & 0 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & b^{(2)} \\ b^{(2)} & b^{(2)}a_2^{(2)} \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & b^{(3)} \\ b^{(3)} & b^{(3)}a_2^{(3)} \end{pmatrix}$

следовательно, системы (3.1)-(3.3) вполне управляемы (так как все коэффициенты ненулевые).

Для систем (3.1)-(3.3) и функционала (3.4) рассмотрим **задачу 1.1** и **задачу 1.2**. Предположим, что существуют определённо положительные функции Ляпунова $\bar{V} = V_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, t) + V_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, t)$ и $V_3 = V_3(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, t)$. Согласно формулам (2.6) и (2.7), составим выражения

$$\bar{B}[\cdot] = B_1[\cdot] + B_2[\cdot] = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1^{(1)}}\dot{x}_1^{(1)} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2^{(1)}}\dot{x}_2^{(1)} + \\ + \frac{\partial V_2}{\partial x_1^{(2)}}\dot{x}_1^{(2)} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2^{(2)}}\dot{x}_2^{(2)} + \omega_1 + \omega_2 \tag{3.5}$$

$$B_3[\cdot] = \frac{\partial V_3}{\partial x_1^{(3)}}\dot{x}_1^{(3)} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2^{(3)}}\dot{x}_2^{(3)} + \omega_3 \tag{3.6}$$

Выполняя соответствующие действия согласно формулам (2.14) и (2.15), получим оптимальные управляющие воздействия

$$u^{(1)0} = -\frac{1}{2\beta_1} b^{(1)} \frac{\partial V_1}{x_2^{(1)}},\ u^{(2)0} = -\frac{1}{2\beta_2} b^{(2)} \frac{\partial V_2}{x_2^{(2)}} \tag{3.7}$$

$$u^{(3)0} = -\frac{1}{2\beta_3} b^{(3)} \frac{\partial V_3}{x_2^{(3)}} \tag{3.8}$$

Будем искать функции Ляпунова $\bar{V}$ и V_3 в виде

$$\bar{V} = V_1 + V_2 = c_{11}^{(1)}\left(x_1^{(1)}\right)^2 + 2c_{12}^{(1)}x_1^{(1)}x_2^{(1)} + c_{22}^{(1)}\left(x_2^{(1)}\right)^2 + c_{11}^{(2)}\left(x_1^{(2)}\right)^2 + \\ + 2c_{12}^{(2)}x_1^{(2)}x_2^{(2)} + c_{22}^{(2)}\left(x_2^{(2)}\right)^2 \tag{3.9}$$

$$V_3 = c_{11}^{(3)}\left(x_1^{(3)}\right)^2 + 2c_{12}^{(3)}x_1^{(3)}x_2^{(3)} + c_{22}^{(3)}\left(x_2^{(3)}\right)^2. \tag{3.10}$$

Подставляя выражения оптимальных управляющих воздействий из (3.7), (3.8) и функции Ляпунова из (3.9), (3.10), соответственно, в выражения (3.5), (3.6) и проведя группировку по переменным $(x_1^{(1)})^2, x_1^{(1)}x_2^{(1)}$, $(x_2^{(1)})^2$, $(x_1^{(2)})^2$, $x_1^{(2)}x_2^{(2)}$, $(x_2^{(2)})^2$ в (3.5) и по переменным $(x_1^{(3)})^2, x_1^{(3)}x_2^{(3)}$, $(x_2^{(3)})^2$, в (3.6) получим относительно неизвестных величин $c_{11}^{(1)}$, $c_{12}^{(1)}$, $c_{22}^{(1)}$, $c_{11}^{(2)}$, $c_{12}^{(2)}$, $c_{22}^{(2)}$ и $c_{11}^{(3)}$, $c_{12}^{(3)}$, $c_{22}^{(3)}$ следующие уравнения:

$$\frac{1}{\beta_1\beta_2}\Big[(-(b^{(1)})^2(c_{12}^{(1)})^2\beta_2 + \alpha_{11}^{(1)}\beta_1\beta_2)(x_1^{(1)})^2 + (-2(b^{(1)})^2 c_{12}^{(1)}c_{22}^{(1)}\beta_2 + \\ +2c_{11}^{(1)}\beta_1\beta_2 + 2\alpha_{12}^{(1)}\beta_1\beta_2)x_1^{(1)}x_2^{(1)} + (-(b^{(1)})^2(c_{22}^{(1)})^2\beta_2 + 2c_{12}^{(1)}\beta_1\beta_2 + \\ +\alpha_{22}^{(1)}\beta_1\beta_2)(x_2^{(1)})^2 + (-(b^{(2)})^2(c_{12}^{(2)})^2\beta_1 + \alpha_{11}^{(2)}\beta_1\beta_2)(x_1^{(2)})^2 + \\ +(-2(b^{(2)})^2 c_{12}^{(2)}c_{22}^{(2)}\beta_1 + 2c_{11}^{(2)}\beta_1\beta_2 + 2a_2^{(2)}c_{12}^{(2)}\beta_1\beta_2 + 2\alpha_{12}^{(2)}\beta_1\beta_2)x_1^{(2)}x_2^{(2)} + \\ +(-(b^{(2)})^2(c_{22}^{(2)})^2\beta_1 + 2c_{12}^{(2)}\beta_1\beta_2 + 2a_2^{(2)}c_{22}^{(2)}\beta_1\beta_2 + \alpha_{22}^{(2)}\beta_1\beta_2)(x_2^{(2)})^2\Big] = 0 \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{\beta 3}\Big[(-(b^{(3)})^2(c_{12}^{(3)})^2+2a_1^{(3)}c_{12}^{(3)}\beta_3+\alpha_{11}^{(3)}\beta_3)x_1^{(3)2}+$$
$$+(-2(b^{(3)})^2c_{12}^{(3)}c_{22}^{(3)}+2c_{11}^{(3)}\beta_3+2a_2^{(3)}c_{12}^{(3)}\beta_3+2a_1^{(3)}c_{22}^{(3)}\beta_3+2\alpha_{12}^{(3)}\beta_3)x_1^{(3)}x_2^{(3)}+ \quad (3.12)$$
$$+(-(b^{(3)})^2c_{22}^{(3)2}+2c_{12}^{(3)}\beta_3+2a_2^{(3)}c_{22}^{(3)}\beta_3+\alpha_{22}^{(3)}\beta_3)(x_2^{(3)})^2\Big]=0$$

Из (3.11) и (3.12) относительно неизвестных величин $c_{11}^{(1)}$, $c_{12}^{(1)}$, $c_{22}^{(1)}$, $c_{11}^{(2)}$, $c_{12}^{(2)}$, $c_{22}^{(2)}$ и $c_{11}^{(3)}$, $c_{12}^{(3)}$, $c_{22}^{(3)}$ получим следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&-(b^{(1)})^2(c_{12}^{(1)})^2\beta_2+\alpha_{11}^{(1)}\beta_1\beta_2=0\\
&-2(b^{(1)})^2c_{12}^{(1)}c_{22}^{(1)}\beta_2+2c_{11}^{(1)}\beta_1\beta_2+2\alpha_{12}^{(1)}\beta_1\beta_2=0\\
&-(b^{(1)})^2(c_{22}^{(1)})^2\beta_2+2c_{12}^{(1)}\beta_1\beta_2+\alpha_{22}^{(1)}\beta_1\beta_2=0\\
&-(b^{(2)})^2(c_{12}^{(2)})^2\beta_1+\alpha_{11}^{(2)}\beta_1\beta_2=0\\
&-2(b^{(2)})^2c_{12}^{(2)}c_{22}^{(2)}\beta_1+2c_{11}^{(2)}\beta_1\beta_2+2a_2^{(2)}c_{12}^{(2)}\beta_1\beta_2+2\alpha_{12}^{(2)}\beta_1\beta_2=0\\
&-(b^{(2)})^2(c_{22}^{(2)})^2\beta_1+2c_{12}^{(2)}\beta_1\beta_2+2a_2^{(2)}c_{22}^{(2)}\beta_1\beta_2+\alpha_{22}^{(2)}\beta_1\beta_2=0
\end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
&-(b^{(3)})^2(c_{12}^{(3)})^2+2a_1^{(3)}c_{12}^{(3)}\beta_3+\alpha_{11}^{(3)}\beta_3=0\\
&-2(b^{(3)})^2c_{12}^{(3)}c_{22}^{(3)}+2c_{11}^{(3)}\beta_3+2a_2^{(3)}c_{12}^{(3)}\beta_3+2a_1^{(3)}c_{22}^{(3)}\beta_3+2\alpha_{12}^{(3)}\beta_3=0\\
&-(b^{(3)})^2c_{22}^{(3)2}+2c_{12}^{(3)}\beta_3+2a_2^{(3)}c_{22}^{(3)}\beta_3+\alpha_{22}^{(3)}\beta_3=0
\end{aligned} \quad (3.14)$$

Во избежание сложных представлений решений систем (3.13) и (3.14) предположим, что параметры систем (3.1)-(3.3) и коэффициенты в функционале (3.4) принимают следующие числовые значения: $a_2^{(2)}=1$, $a_1^{(3)}=-2$, $a_2^{(3)}=3$, $b^{(1)}=b^{(2)}=b^{(3)}=1$, $\alpha_{ij}^{(k)}=1$, $\beta_k=1\ (i,j=1,2;k=1,2,3)$.

Решая системы (3.13), (3.14) и выбирая только те решения, которые обеспечивают функциям Ляпунова положительно определённость, будем иметь:

$$c_{11}^{(1)}=-1+\sqrt{3}\approx 0.73,\ c_{12}^{(1)}=1,\ c_{22}^{(1)}=\sqrt{3}\approx 1.73,\ c_{11}^{(2)}=1,\ c_{12}^{(2)}=1,\ c_{22}^{(2)}=3 \quad (3.15)$$
$$c_{11}^{(3)}=10+\sqrt{5}\approx 12.24,\ c_{12}^{(3)}=-2+\sqrt{5}\approx 0.24,\ c_{22}^{(3)}=4+\sqrt{5}\approx 6.24 \quad (3.16)$$

Отметим, что полученные значения для $c_{11}^{(1)}$, $c_{12}^{(1)}$, $c_{22}^{(1)}$, $c_{11}^{(2)}$, $c_{12}^{(2)}$, $c_{22}^{(2)}$ и $c_{11}^{(3)}$, $c_{12}^{(3)}$, $c_{22}^{(3)}$ удовлетворяют условиям Сильвестра [9], т.е.

$$\bar{\Delta}_1=c_{11}^{(1)}>0,\ \bar{\Delta}_2=\begin{vmatrix}c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)}\\ c_{12}^{(1)} & c_{22}^{(1)}\end{vmatrix}>0,\ \bar{\Delta}_3=\begin{vmatrix}c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & 0\\ c_{12}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & 0\\ 0 & 0 & c_{11}^{(2)}\end{vmatrix}>0,$$

$$\bar{\Delta}_4=\begin{vmatrix}c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & 0 & 0\\ c_{12}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_{11}^{(2)} & c_{12}^{(2)}\\ 0 & 0 & c_{12}^{(2)} & c_{22}^{(2)}\end{vmatrix}>0$$

$$\Delta_1 = c_{11}^{(3)} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^{(3)} & c_{12}^{(3)} \\ c_{12}^{(3)} & c_{22}^{(3)} \end{vmatrix} > 0$$

Подставляя (3.15) и (3.16) в выражения (3.7) и (3.8), получим оптимальные управляющие воздействия в явном виде:

$$u^{(1)0} = -x_1^{(1)} - 1.73x_2^{(1)}, \; u^{(2)0} = -x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}, \; u^{(3)0} = -0.24x_1^{(3)} - 6.24x_2^{(3)} \quad (3.17)$$

Предположим, что $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, а движение системы (3.1) начинается из состояния $x_1^{(1)}(t_0) = 1$, $x_2^{(1)}(t_0) = 1$, тогда с учётом выражений оптимальных управлений (3.17), получим соответственно оптимальные движения системы (3.1) в виде:

$$x_1^{(1)0} = e^{-0.86t}(\cos(0.5t) + 3.72\sin(0.5t)),$$

$$x_2^{(1)0} = e^{-0.86t}(\cos(0.5t) - 3.72\sin(0.5t)) \quad (3.18)$$

системы (3.2) – в виде

$$x_1^{(2)0} = e^{-t}(1.04 + 2.01t), \; x_2^{(2)0} = e^{-t}(0.97 - 2.01t) \quad (3.19)$$

системы (3.3) – в виде

$$x_1^{(3)0} = 190.5e^{-3.99t} + 1.02e^{-0.25t}, \; x_2^{(3)0} = -760.48e^{-3.99t} - 0.25e^{-0.25t} \quad (3.20)$$

Теперь, имея выражения оптимальных управляющих воздействий (3.17) и соответствующие оптимальные движения (3.18) и (3.19), вычислим значения функционалов $I_1[\cdot]$ и $I_2[\cdot]$ из (3.4), которые являются $I_1 \approx 4.16$, $I_2 \approx 0.43$.

Следуя [6, 7],

$$\min I_3[\cdot] = V_3(x_1^{(3)}(2), x_2^{(3)}(2)).$$

Так как $x_1^{(3)}(2) = 0.68$, $x_2^{(3)}(2) = -0.41$ (которые являются начальным состоянием движения (3.20)), то согласно формулам (3.10) и (3.16), для минимального значения I_3 получим, что $I_3 = 6.67$. Следовательно, для полного значения функционала (3.4) будем иметь:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \approx 11.26.$$

Таким образом, с помощью предложенного способа решена задача оптимальной стабилизации конкретной составной системы (3.1)-(3.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами.//Докл. АН СССР. 1967. Т.176. № 4. С.754-756.
2. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями.// ПММ. 1981. Т.45. Вып.2. С.215-222.
3. Барсегян В.Р. Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами. // Проблемы управления. 2012. №4. С.11-17.
4. Щенникова Е.В., Дружинина О.В., Мулкиджан А.С. Об оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем // Труды Института

системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т.53(3). С.99–102.
5. Андреев А.С., Румянцев В.В. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы // Автоматика и телемеханика. 2007. №8. С.18–31.
6. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // В кн.: Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С.475-514.
7. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск: 1972, 274с.
8. Матвейкин В.Г., Муромцев Д.Ю. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения. М.: 2007, 128с.
9. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. 1987, 304 с.

Сведения об авторах:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ЕГУ, факультет математики и механики, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (10) 52 36 40; **E-mail:** barseghyan@sci.am

Шагинян Смбат Григоревич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры механики, Ереванский государственный университет
E-mail: shahinyan@ysu.am

Барсегян Тигран Ваняевич – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет
E-mail: t.barseghyan@mail.ru

Поступила в редакцию 24.01.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №4, 2014 Механика

УДК 621.38

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОЛОЖЕНИИ И ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ ЗВЕНЬЕВ МАНИПУЛЯТОРА

Гукасян А.А.

Ключевые слова: многозвенный упругий манипулятор, пространственное положение манипулятора, деформация упругого звена.
Key words: multi link elastic manipulator, spatial position of the manipulator, deformation of the elastic link.

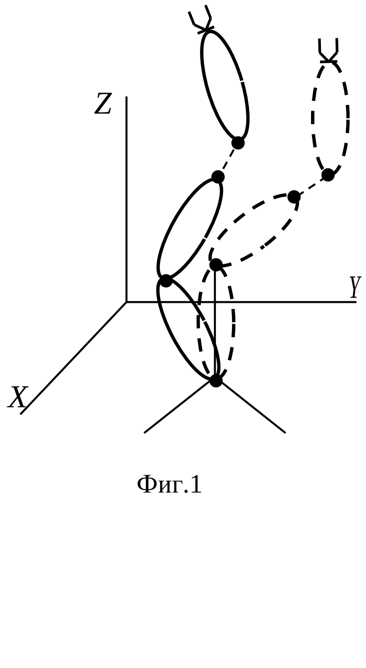
Ղուկասյան Ա.Ա.
Մանիպուլյատորի տարածական դիրքի և առաձգական օղակների դեֆորմացիայի մասին

Ուսումնասիրվում է մանիպուլյատորի տարածական դիրքերի որոշման հարցերը, երբ վերջին օղակը մոդելավորված է որպես առաձգական մարմին: Բերված են առաձգական օղակի կամայական էլեմենտի դեֆորմացիայի երկրաչափության ընդհանուր հասկացությունները և որոշված են դեֆորմացիայի կոմպոնենտները: Ստացված ընդհանուր բանաձևերը (արտահայտությունները) կիրառված են միաչափ մոդելի համար, երբ մանիպուլյատորի օղակները մոդելավորված են որպես առաձգական չձգվող ձողեր:

Ghukasyan A.A.
On a spatial position and deformation of manipulator elastic links

The questions of determining the spatial positions of the manipulator when the last link is modeled as an elastic body are studied. The general concepts of geometry of the deformation of any elements of the elastic link are given and the deformation components are defined. General formulas (expressions) obtained are used for the one-dimensional model, that is, when the links of manipulator are modeled as non-stretchable elastic bars.

Исследуются вопросы об определении пространственного положения манипулятора в случае, когда последнее звено моделируется как упругое тело. Приведены общие понятия о геометрии деформации произвольного элемента упругого звена и определены компоненты деформации. Полученные в общем случае формулы (выражения) применяются для одномерной модели, то есть когда звенья моделируются как упругие нерастяжимые стержни.



Фиг.1

Введение. Рассматривается многозвенный манипулятор, звенья которого (или часть из них) моделируются как упругие тела (фиг.1). Такие механические системы манипулятора являются распределёнными системами, то есть системы, конфигурация которых не может быть определена заданием конечного числа обобщённых координат [1-10]. Здесь предполагается, что упругие звенья манипулятора последовательно связаны между собой вращательными и поступательными кинематическими парами пятого класса, допускающими относительные повороты и линейные перемещения. Определяется пространственное положение упругого манипулятора и следуя работам [11,12], приведено общее понятие о деформации упругого тела, которое применено для изучения упругих манипуляционных роботов. Далее, в частном случае, исследуется одномерная модель упругого манипулятора, то есть когда звенья моделируются как упругие нерастяжимые стержни.

1. Относительное положение точек упругого звена манипулятора.

Для определения пространственного положения упругого многозвенного манипулятора во время движения, для определённости и не ограничивая общности, предполагаем, что последнее звено моделируется как упругое тело (фиг.2). В этом случае, представляя заданными положение основания последнего упругого звена относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ и элементы матриц направляющих косинусов осей локальной системы координат $Oxyz$, жёстко связанной с недеформированным состоянием упругого звена, можно определить положение точек (схвата) относительно подвижной и неподвижной систем.

Положение произвольной точки A звена в недеформированном состоянии относительно начала связанной системы координат $Oxyz$ определим радиус-вектором $\mathbf{r}(x, y, z)^T$. Здесь и в дальнейшем буква “т” обозначает транспонирование вектора или матрицы.

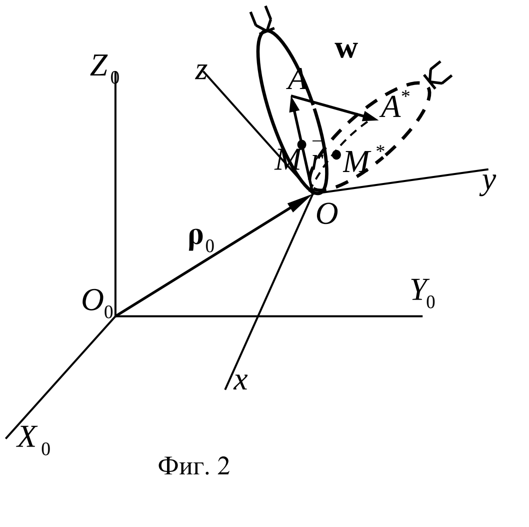
Вектор упругих перемещений точки A обозначим через $\mathbf{w}$, который зависит как от координат точки A, так и от времени

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, y, z, t) \tag{1.1}$$

Проекции вектора (1.1) на оси системы координат $Oxyz$ обозначим через $w_1(x, y, z, t),\ w_2(x, y, z, t),\ w_3(x, y, z, t)$, соответственно.

Следовательно, радиус-вектор абсолютного положения точек упругого звена манипулятора во время движения относительно инерциальной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяется радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}$

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{r} + \mathbf{w} \tag{1.2}$$



Фиг. 2

где $\boldsymbol{\rho}_0$ – радиус-вектор точки O относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$.

Радиус-вектор произвольной точки A звена после деформации относительно связанной системы координат $Oxyz$ будет

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + \mathbf{w} \tag{1.3}$$

или в проекциях

$$\begin{aligned} x_* &= x + \mathbf{w}_1(x, y, z, t); \\ y_* &= y + \mathbf{w}_2(x, y, z, t); \\ z_* &= z + \mathbf{w}_3(x, y, z, t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь функции $w_i\,(i = 1,2,3)$, а также их частные производные по x,y,z,t будем считать непрерывными. Это ограничение является условием непрерывности деформации.

Радиус-вектор произвольной точки A упругого звена после деформации относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяется соотношениями (1.2)–(1.4).

Представим (1.2) в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho_0} + \left(x + w_1(x,y,z,t)\right)\mathbf{i} + \left(y + w_2(x,y,z,t)\right)\mathbf{j} + \left(z + w_3(x,y,z,t)\right)\mathbf{k}, \quad (1.5)$$

где (**i,j,k**) – единичные векторы осей системы координат $Oxyz$.

Умножая (1.5) последовательно на единичные векторы $\left(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\right)$ осей системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, получим

$$\begin{aligned}
x_A &= x_0 + \left[x + w_1\left(x,y,z,t\right)\right]\alpha_{11} + \left[y + w_2\left(x,y,z,t\right)\right]\alpha_{21} + \\
&+ \left[z + w_3\left(x,y,z,t\right)\right]\alpha_{31} \\
y_A &= y_0 + \left[x + w_1\left(x,y,z,t\right)\right]\alpha_{12} + \left[y + w_2\left(x,y,z,t\right)\right]\alpha_{22} + \\
&+ \left[z + w_3\left(x,y,z,t\right)\right]\alpha_{32} \\
z_A &= z_0 + \left[x + w_1\left(x,y,z,t\right)\right]\alpha_{13} + \left[y + w_2\left(x,y,z,t\right)\right]\alpha_{23} + \\
&+ \left[z + w_3\left(x,y,z,t\right)\right]\alpha_{33}
\end{aligned} \quad (1.6)$$

или в матричном виде

$$\begin{aligned}
&\left(x_A, y_A, z_A\right)^T = \left(x_0, y_0, z_0\right)^T + \\
&+ \boldsymbol{\Gamma}^T\left(x + w_1\left(x,y,z,t\right), y + w_2\left(x,y,z,t\right), z + w_3\left(x,y,z,t\right)\right)^T,
\end{aligned} \quad (1.7)$$

где матрица преобразования $\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\Gamma}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Элементы $\left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,j=1}^{3,3}$ матрицы $\boldsymbol{\Gamma}^T$ являются направляющими косинусами осей системы координат $Oxyz$ в системе отсчёта $O_0X_0Y_0Z_0$.

Из условия ортогональности матрицы $\boldsymbol{\Gamma}$ следует, что обратная ей матрица совпадает с транспонированной [13,14]

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \boldsymbol{\Gamma}^T; \boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\Gamma}^T = \boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{E}. \quad (1.8)$$

Формулу обратного преобразования можно определить, проектируя (1.5) на оси системы координат $Oxyz$, связанной с недеформируемым состоянием упругого звена манипулятора.

Умножая (1.5) последовательно на единичные векторы (**i,j,k**), осей системы координат $Oxyz$, получим:

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}\left(x_A - x_0\right) + \alpha_{12}\left(y_A - y_0\right) + \alpha_{13}\left(z_A - z_0\right) - w_1\left(x,y,z,t\right) \\
y &= \alpha_{21}\left(x_A - x_0\right) + \alpha_{22}\left(y_A - y_0\right) + \alpha_{23}\left(z_A - z_0\right) - w_2\left(x,y,z,t\right) \\
z &= \alpha_{31}\left(x_A - x_0\right) + \alpha_{32}\left(y_A - y_0\right) + \alpha_{33}\left(z_A - z_0\right) - w_3\left(x,y,z,t\right)
\end{aligned} \quad (1.9)$$

или в матричном виде

$$(x,y,z)^T = \mathbf{\Gamma}\left[(x_A - x_0),(y_A - y_0),(z_A - z_0)\right]^T -$$
$$-\left[w_1(x,y,z,t), w_2(x,y,z,t), w_3(x,y,z,t)\right]^T . \qquad (1.10)$$

Преобразования (1.7) и (1.10), соответственно можно представить также в однородных координатах [13,14], то есть

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}^T & \mathbf{\Gamma}^T\mathbf{w} + \boldsymbol{\rho}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\rho}^* = \mathbf{T}\mathbf{r}^* \qquad (1.11)$$

и

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} & -\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или } \mathbf{r}^* = \mathbf{T}^*\boldsymbol{\rho}^* . \qquad (1.12)$$

Здесь (4×4)-мерные матрицы преобразования $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}^*$ имеют следующие структуры, соответственно:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}^T & \mathbf{\Gamma}^T\mathbf{w} + \boldsymbol{\rho}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} & -\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\rho}^* = \begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \end{pmatrix}^T$ – радиус-вектор абсолютного положения точек упругого звена манипулятора относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ в однородных координатах, а $\mathbf{r}^* = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}^T$ – радиус-вектор произвольной точки A относительно начала связанной системы $Oxyz$ в однородных координатах[13,14].

Преимуществом применения однородных координат в механике, как известно, является то обстоятельство, что движение твёрдого тела в евклидовом пространстве R^3, составленное из вращения (поворота), определяемого ортогональной матрицей $\mathbf{\Gamma}$ размерности 3x3 и параллельного переноса, задаваемого вектором $\boldsymbol{\rho}_0$, то есть преобразование вида $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{\Gamma}^T\mathbf{r}$ (1.6) при $\mathbf{w} \equiv 0$ $\left(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} \in R^3\right)$, эквивалентно в однородных координатах линейному преобразованию специального вида (1.11),(1.12) при $\mathbf{w} \equiv 0$. Здесь приведено обобщение применений однородных координат в случае пространственного движения тела, обладающего упругой податливостью (1.11), (1.12), в частности, для описания движения звеньев манипулятора с упругими свойствами.

2. Общие понятия о геометрии деформации упругого звена манипулятора.

Ниже для определённости приводятся некоторые общие понятия и соотношения теории упругости деформируемого тела, которые применимы для изучения кинематики и динамики упругих манипуляционных роботов [11,12].

По формуле (1.4) определим проекции произвольного линейного элемента тела после деформации, через его проекции до деформации. По направлению вектора $\mathbf{r}$ возьмём произвольный линейный элемент OM, проекцией которого в момент времени t на оси системы координат $Oxyz$ является (dx, dy, dz) фиг.2. После деформации точка M переместится в положение M_* на дуге OA_*. Координаты точки M_* в системе $Oxyz$ обозначим через dx_*, dy_*, dz_*, соответственно.

Связь между координатами точки M_* и M определяется согласно (1.4) в виде :

$$
\begin{aligned}
dx_* &= \left(1+\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial w_1}{\partial y}dy + \frac{\partial w_1}{\partial z}dz; \\
dy_* &= \frac{\partial w_2}{\partial x}dx + \left(1+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial w_2}{\partial z}dz; \\
dz_* &= \frac{\partial w_3}{\partial x}dx + \frac{\partial w_3}{\partial y}dy + \left(1+\frac{\partial w_3}{\partial z}\right)dz;
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

или $d\mathbf{r}_* = \mathbf{D}d\mathbf{r}$,

где $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}_*$ – векторы с компонентами $(dx, dy, dz)^T$ и $(dx_*, dy_*, dz_*)^T$, соответственно, а $\mathbf{D}$ – следующая матрица:

$$
\mathbf{D} = \begin{pmatrix}
1+\frac{\partial w_1}{\partial x} & \frac{\partial w_1}{\partial y} & \frac{\partial w_1}{\partial z} \\
\frac{\partial w_2}{\partial x} & 1+\frac{\partial w_2}{\partial y} & \frac{\partial w_2}{\partial z} \\
\frac{\partial w_3}{\partial x} & \frac{\partial w_3}{\partial y} & 1+\frac{\partial w_3}{\partial z}
\end{pmatrix}.
\tag{2.2}
$$

Решая систему (2.1) относительно dx, dy и dz, можно определить также координаты точки M до деформации через координаты точки M^* после деформации

$$
d\mathbf{r} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \cdot \mathbf{D}_* d\mathbf{r}_*
\tag{2.3}
$$

где $\mathbf{D}_*$ – матрица с элементами $\{d_{ij}\}_{i,j=1}^{3,3}$

$$
d_{11} = \left(1+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w_3}{\partial z}\right) - \frac{\partial w_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial w_3}{\partial y}; \quad d_{12} = \frac{\partial w_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial w_3}{\partial y} - \left(1+\frac{\partial w_3}{\partial z}\right)\frac{\partial w_1}{\partial y}
$$

$$
d_{13} = \frac{\partial w_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial w_2}{\partial z} - \left(1+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)\frac{\partial w_1}{\partial z}; \quad d_{21} = \frac{\partial w_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial w_3}{\partial x} - \left(1+\frac{\partial w_3}{\partial z}\right)\frac{\partial w_2}{\partial x}
$$

$$
d_{22} = \left(1+\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial w_3}{\partial z}\right) - \frac{\partial w_1}{\partial z}\frac{\partial w_3}{\partial x}; \quad d_{23} = \frac{\partial w_1}{\partial z}\frac{\partial w_2}{\partial x} - \left(1+\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\frac{\partial w_2}{\partial z}
$$

$$
d_{31} = \frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial w_3}{\partial y} - \left(1+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)\frac{\partial w_3}{\partial x}; \quad d_{32} = \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_3}{\partial x} - \left(1+\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\frac{\partial w_3}{\partial y}
$$

$$
d_{33} = \left(1+\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial x}
$$

Определим компоненты деформации упругого звена. Разность расстояния между точками O и M (фиг.2) до деформации и после деформации, то есть расстояниями между точками O и M_* с учётом (2.1) являются:

$$\left|OM\right|^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$
$$\left|OM^*\right|^2 = ds_*^2 = dx_*^2 + dy_*^2 + dz_*^2; \qquad (2.4)$$
$$ds_*^2 - ds^2 = 2\left(\varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2 + \varepsilon_{xy}dxdy + \varepsilon_{xz}dxdz + \varepsilon_{yz}dydz\right),$$

где

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x}\right)^2\right]$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w_3}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial z}\right)^2\right] \qquad (2.5)$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial w_3}{\partial y}$$
$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial w_3}{\partial z}$$
$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y}\frac{\partial w_3}{\partial z}$$

Данные шесть величин $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$, выражающиеся через перемещения формулами (2.5), будучи известными в каждой точке тела, полностью характеризуют его деформацию. Равенство их нулю во всех точках тела означает неизменность расстояний между любыми его двумя точками, что равносильно обсолютной жёсткой модели звена манипулятора. Компоненты деформации $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ характеризуют удлинения тех линейных элементов звена, которые до деформации параллельны координатным осям, а компоненты $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ – сдвиги. Если последние три компоненты деформации равны нулю, то углы между линейными элементами dx, dy, dz остаются прямыми и после деформации [11,12].

Пренебрегая в формулах (2.5) величинами второго порядка малости относительно первого, приходим к формулам классической теории упругости, где имеют место следующие выражения для компонентов деформации [11,12]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial w_3}{\partial z},$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y}. \qquad (2.6)$$

При описании математической модели различных распределённых систем применяются также принципы технической и уточнённой теории упругости [15]. Обычно в прикладных задачах звенья промышленных манипуляционных роботов моделируются как массивные тела, а звенья специальных манипуляционных роботов – как одномерные упругие тела, в частности, упругие нерастяжимые стержни со значительными линейными размерами.

Определим направляющие косинусы координатных линий. Пусть линейный элемент до деформации параллелен оси OX, имея проекции $(OM)_x = dx,\ (OM)_y = 0,\ (OM)_z = 0$ (фиг. 3). Тогда согласно (2.1) его проекции после деформации будут равны

$$dx_* = \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) dx, \quad dy_* = \frac{\partial w_2}{\partial x} dx, \quad dz_* = \frac{\partial w_3}{\partial x} dx. \tag{2.7}$$

Длина элемента после деформации будет

$$\begin{gathered}(ds_*)_x = \sqrt{(dx_*)^2 + (dy_*)^2 + (dz_*)^2}\, dx = \\ = \sqrt{1 + 2\frac{\partial w_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x}\right)^2}\, dx\end{gathered} \tag{2.8}$$

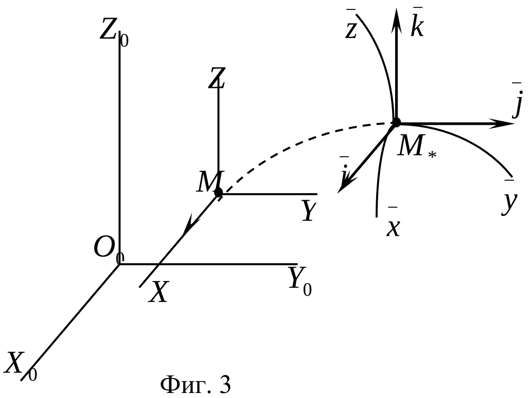
В соответствии с (2.5), имеем:

$$(ds_*)_x = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}\, dx \tag{2.9}$$

Отсюда косинусы углов, образуемых вектором OM^* с осями OX, OY, OZ (в том случае, когда OM параллелен оси OX), определяются формулами:

$$\cos(OM_*, OX) = \frac{dx_*}{(ds_*)_x} = \frac{1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}}; \tag{2.10}$$

$$\cos(OM_*, OY) = \frac{dy_*}{(ds_*)_x} = \frac{\frac{\partial w_2}{\partial x}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}}; \ \cos(OM_*, OZ) = \frac{dz_*}{(ds_*)_x} = \frac{\frac{\partial w_3}{\partial x}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}}$$



Фиг. 3

В случае, когда тело абсолютно жёсткое $(\mathbf{w} \equiv 0)$ (деформации отсутствуют), $\angle(OM, OX) = 0, \angle(OM, OY) = \frac{\pi}{2}$, $\angle(OM, OZ) = \frac{\pi}{2}$. Линейный элемент dx в результате деформации превращается в элемент дуги $\bar{x}$ в деформированном теле. Ввиду этого формулы (2.10) дают направляющие косинусы касательной к этой линии в точке M_* (фиг.3).

Путем аналогичных рассуждений, но применяя их к линейным элементам dy и dz, можно вывести выражения и для направляющих косинусов касательных к линиям $\bar{y}$ и $\bar{z}$ в той же точке.

Обозначая единичные векторы, направленные по касательным линиям $M_*\bar{x}, M_*\bar{y}, M_*\bar{z}$ в точке M_* через $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$ (фиг.3), можно составить следующую таблицу направляющих косинусов [11,12]:

Таблица 1

	$\bar{\mathbf{i}}$	$\bar{\mathbf{j}}$	$\bar{\mathbf{k}}$
x	$\dfrac{1+\dfrac{\partial w_1}{\partial x}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}}}$	$\dfrac{\dfrac{\partial w_1}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}}$	$\dfrac{\dfrac{\partial w_1}{\partial z}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{zz}}}$
y	$\dfrac{\dfrac{\partial w_2}{\partial x}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}}}$	$\dfrac{1+\dfrac{\partial w_2}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}}$	$\dfrac{\dfrac{\partial w_2}{\partial z}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{zz}}}$
z	$\dfrac{\dfrac{\partial w_3}{\partial x}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}}}$	$\dfrac{\dfrac{\partial w_3}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}}$	$\dfrac{1+\dfrac{\partial w_3}{\partial z}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{zz}}}$

где $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ определяются выражением (2.5).

Рассмотрим теперь случай, когда линейный элемент после деформации (dx_*) становится параллельным оси OX (фиг.4). Согласно (2.3) его проекции до деформации равны

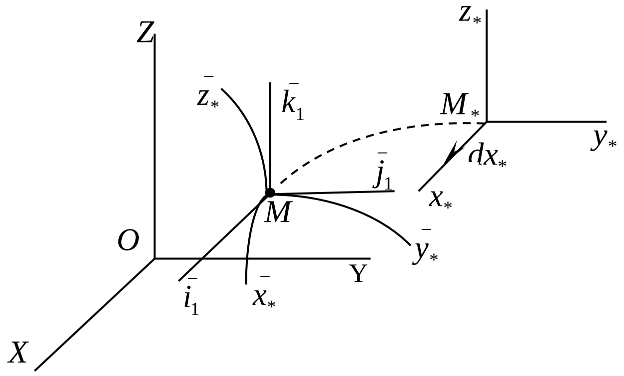
$$dx = \frac{d_{11}}{\det \mathbf{D}} dx_*, \quad dy = \frac{d_{21}}{\det \mathbf{D}} dx_*, \quad dz = \frac{d_{31}}{\det \mathbf{D}} dx_*, \tag{2.11}$$

а длина этого элемента до деформации будет

$$(ds)_{x_*} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2}\, dx_* \tag{2.12}$$

Направляющими косинусами до деформации элемента (2.11) в системе координат с единичными векторами $(\bar{\mathbf{i}}_1, \bar{\mathbf{j}}_1, \bar{\mathbf{k}}_1)$ являются:

$$\begin{aligned} \cos(OX, \bar{\mathbf{i}}_1) &= \frac{dx}{(ds)_{x_*}} = \frac{d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2}}; \\ \cos(OY, \bar{\mathbf{i}}_1) &= \frac{dy}{(ds)_{x_*}} = \frac{d_{21}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2}}; \\ \cos(OZ, \bar{\mathbf{i}}_1) &= \frac{dz}{(ds)_{x_*}} = \frac{d_{31}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2}}. \end{aligned} \tag{2.13}$$



Фиг. 4

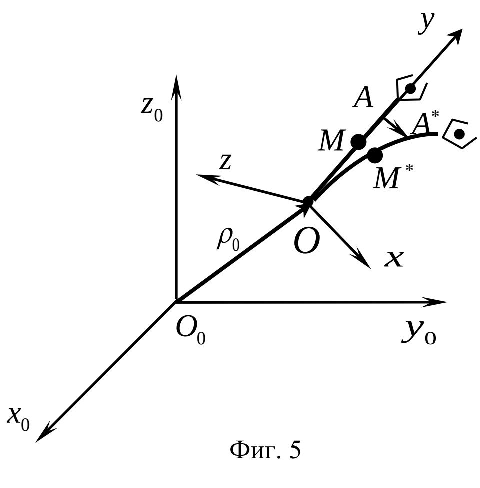
Косинусы (2.13) определяют направление (до деформации) того линейного элемента, проходящего через точку M, который в результате деформации становится параллельным оси OX, или они определяют направление касательной $\left(\overline{\mathbf{i}_1}\right)$ к линии $M\overline{x_*}$ в точке M.

Путём аналогичных рассуждений, но применяя их к линейным элементам dy_* и dz_*, которые параллельны осям OY и OZ, соответственно (фиг. 4), можно определить направляющие косинусы углов, задающих направление касательных к линиям $M\overline{y_*}$ и $M\overline{z_*}$ [11,12].

На основе проведённых вычислений, можно составить следующую таблицу направляющих косинусов:

Таблица 2

	$\overline{\mathbf{i}_1}$	$\overline{\mathbf{j}_1}$	$\overline{\mathbf{k}_1}$
x	$\frac{d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2+d_{21}^2+d_{31}^2}}$	$\frac{d_{12}}{\sqrt{d_{12}^2+d_{22}^2+d_{32}^2}}$	$\frac{d_{13}}{\sqrt{d_{13}^2+d_{23}^2+d_{33}^2}}$
y	$\frac{d_{21}}{\sqrt{d_{11}^2+d_{21}^2+d_{31}^2}}$	$\frac{d_{22}}{\sqrt{d_{12}^2+d_{22}^2+d_{32}^2}}$	$\frac{d_{23}}{\sqrt{d_{13}^2+d_{23}^2+d_{33}^2}}$
z	$\frac{d_{31}}{\sqrt{d_{11}^2+d_{21}^2+d_{31}^2}}$	$\frac{d_{32}}{\sqrt{d_{12}^2+d_{22}^2+d_{32}^2}}$	$\frac{d_{33}}{\sqrt{d_{13}^2+d_{23}^2+d_{33}^2}}$



Фиг. 5

Таблица 2 определяет направляющие косинусы касательных к линиям $M\overline{x_*}, M\overline{y_*}, M\overline{z_*},$ в точке M, или определяет направляющие косинусы тех волокон, проходящих через точку M, которые после деформации звена манипулятора становятся параллельными осям OX, OY, OZ, соответственно.

3. Одномерная модель упругого манипулятора (частный случай). Предполагается, что звенья манипулятора (или часть из них) моделируются как упругие стержни, а соединительные шарниры – идеально-цилиндрические. Не ограничивая общности, здесь также предполагается, что движение основания последнего упругого звена задано (фиг.5). Система координат $O_0X_0Y_0Z_0$ является инерциальной, а $Oxyz$ связана с упругим звеном и ось Oy совпадает с недеформированным состоянием упругого звена мянипулятора.

Приведём основные формулы, определяющие положение и упругие деформации манипулятора, полученные в пп.1.2.

Радиус-вектор произвольной точки A относительно системы координат $Oxyz$ и вектор упругих перемещений (1.1) здесь зависят только от координат y и t.

$$\mathbf{r}(0, y, 0), \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}(0, y, 0, t) \quad (w_1(0, y, 0, t), w_2(0, y, 0, t), w_3(0, y, 0, t)) \tag{3.1}$$

Радиус-вектор точки A после деформации относительно системы координат $Oxyz$ (1.3), (1.4) и $O_0X_0Y_0Z_0$ (1.5), (1.7) имеет соответствующий вид:

$$\begin{aligned} x_* &= w_1(0, y, 0, t) \\ y_* &= y + w_2(0, y, 0, t) \\ z_* &= w_3(0, y, 0, t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho_0} + w_1(0, y, 0, t)i + (y + w_2(0, y, 0, t)j + w_3(0, y, 0, t)k)$$

или

$$\begin{aligned} &(x_A, y_A, z_A)^T = (x_0, y_0, z_0)^T + \\ &+\boldsymbol{\Gamma}^T \left(w_1(0, y, 0, t),\ y + w_2(0, y, 0, t), w_3(0, y, 0, t)\right)^T \end{aligned} \tag{3.3}$$

Простым вычислением можно получить и формулы (1.9)-(1.12) для рассматриваемого случая.

Связь между координатами точек M и M_*, то есть связь между координатами точки до и после деформации нейтральной линии упругого стержня имеет вид:

$$dx_* = \frac{\partial w_1}{\partial y} dy\ ;\ dy_* = \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right) dy\ ;\ dz_* = \frac{\partial w_3}{\partial y} dy \tag{3.4}$$

Расстояние между точками O и M до и после деформации, то есть расстояние между точками O и M_* с учётом (3.4) имеет вид:

$$ds^2 = dy^2$$

$$ds_*^2 = \left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2 dy^2 + \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)^2 dy^2 \tag{3.5}$$

Условия нерастяжимости упругого звена манипулятора приводят к некоторому соотношению между функциями $w_1(0, y, 0, t)$, $w_2(0, y, 0, t)$, $w_3(0, y, 0, t)$, представляющему здесь уравнение связи [16]. Эту связь получим, предполагая, что длина ds элемента упругого звена остаётся неизменным после деформации, то есть

$ds_* = ds$,

или из (3.5)

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3.6}$$

Считая $w_1(0,y,0,t)$, $w_3(0,y,0,t)$ и их производные по y и t малыми величинами первого порядка относительно длины упругого звена [16],

$$w_i\left(0,y,0,t\right)\sim\varepsilon,\ w'_i\left(0,y,0,t\right)\sim\varepsilon,\ \dot{w}_i\left(0,y,0,t\right)\sim\varepsilon\quad\left(\varepsilon<<1\right)\quad\left(i=1,3\right)\tag{3.7}$$

следует на основании (3.6) принять, что $w_2(0,y,0,t)$, $w'_2(0,y,0,t)$ и $\dot{w}_2(0,y,0,t)$ имеют второй порядок малости, то есть

$$w_2\left(0,y,0,t\right)\sim\varepsilon^2,\ w'_2\left(0,y,0,t\right)\sim\varepsilon^2,\ \dot{w}_2\left(0,y,0,t\right)\sim\varepsilon^2\tag{3.8}$$

Следовательно, пренебрегая в (3.6) величиной $\left(w'_2\left(0,y,0,t\right)\right)^2$, как четвёртого порядка малости $\left(\varepsilon^4\right)$, можно условия связи (3.6) записать в виде

$$\frac{\partial w_2}{\partial y}=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)^2\right].\tag{3.9}$$

(производные по y в (3.7), (3.8) обозначены штрихом, а по t – точкой).

Исследование пространственного движения упругого манипулятора, звенья которого моделируются как нерастяжимые упругие стержни, в рамках линейной теории следует пренебрегать величиной w_2, как второго порядка малости. Подробные исследования приведены в работе [10].

Определим направляющие косинусы координатной линии. В данном случае линейный элемент OM нейтральной линии упругого стержня (звена манипулятора) находится на оси Oy, то есть $\left(OM\right)_x=0,\left(OM\right)_y=dy,\left(OM\right)_z=0$ и его проекции на осях системы координат $Oxyz$ после деформации определяются соотношением (3.4). Длина элемента после деформации с учётом (2.5) будет

$$ds_*=\sqrt{1+2\frac{\partial w_2}{\partial y}+\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)^2}\,dy=\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}\,dy\,.\tag{3.10}$$

Отсюда косинусы углов, образуемых вектором OM^* с осями Ox, Oy, Oz определяются функциями

$$\begin{aligned}
\cos\left(OM_*,OX\right)&=\frac{dx_*}{ds_*}=\frac{\dfrac{\partial w_1}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}},\\
\cos\left(OM_*,OY\right)&=\frac{dy_*}{ds_*}=\frac{1+\dfrac{\partial w_2}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}}\\
\cos\left(OM_*,OZ\right)&=\frac{dz_*}{ds_*}=\frac{\dfrac{\partial w_3}{\partial y}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}}
\end{aligned}\tag{3.11}$$

Линейный элемент dy в результате деформации превращается в элемент дуги $\bar{y}$ (фиг.3). Ввиду этого формулы (3.11) дают направляющие косинусы касательной к этой линии в точке M^*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.
2. Черноусько Ф.Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. //Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. №5. С.142-152.
3. Черноусько Ф.Л. Динамика систем с упругими элементами большой жёсткости. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №4. С.101-113.
4. Акуленко Л.Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия. //ПММ. 1981. Т.45. Вып.6. С.1095-1103.
5. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управляемом вращении упругого стержня. //ПММ. 1982. Т.46. Вып.4. С.587-595.
6. Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. №3. С.118-124.
7. Акуленко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоским движением упругого звена манипулятора. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №5. С.33-41.
8. Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Грудев А.И., Черноусько Ф.Л. О влиянии упругой податливости конструкции роботов на их динамику. //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №3. С.63-71.
9. Болотник Н.Н., Гукасян А.А. Управление движением манипулятора с учётом упругих колебаний струны. //Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №4. С.38-46.
10. Гукасян А.А. Кинематика многозвенного манипулятора с упругим последним звеном. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.79-87.
11. Новожилов В.В. Теория упругости. Ленинград: Судпромгиз, 1958. 245 с.
12. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
13. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. 478 с.
14.Динамика управления роботами. Под редакцией Б.И.Юревича. М.: Наука, 1984. 336 с.

15 Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384с.

16. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961. 824 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Гукасян Артуш Апресович - доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
E-mail: ghukasyan10@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.05.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №4, 2014 Механика

УДК 539.3

К ВОПРОСУ О СУММИРОВАНИИ УСТАЛОСТНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ МАТЕРИАЛОВ

Симонян А.М., Арутюнян А.С., Акопян Э.А.

Ключевые слова: усталостное повреждение, гипотеза о суммировании.
Key words: fatigue, damage, summation hypothesis.

Սիմոնյան Ա.Մ., Հարությունյան Ա.Ս., Հակոբյան Է.Ա.
Նյութերի հոգնածային վնասվածքների գումարման մասին

Փորձ է արված տալ ավելի ընդհանրական մոտեցում հոգնածային վնասվածքների գումարման հարցին: Տրվել է բանաձև և նկարագրվել մոտեցում, որը հնարավորություն է տալիս, հոգնածային վնասվածքների գումարման ժամանակ հաշվի առնել բեռնվածքի ցիկլերի հաջորդականությունը, ինչպես նաև ցիկլերի միջև դադարը:

Simonyan A.M., Harutyunyan A.S., Hakobyan E.A.
On the problem of summation of fatigue damage

The present paper analyzes versions of hypothesis of damage summation as well as offers the model for calculating number of cycles to destruction under varying conditions of cyclic loading, on the base of results obtained under constant conditions of cyclic loading. In contrast to hypothesis of damage summation, the proposed hypothesis reflects the sequence of condition changes of cyclic loading and the influence of relaxation on the results calculated according to suggested model.

В работе анализируются варианты гипотезы суммирования повреждений и предлагается соотношение для расчёта количества циклов до разрушения при переменных условиях циклического нагружения на основе данных, полученных при постоянных условиях циклического нагружения. В отличие от гипотезы линейного суммирования повреждений, в предлагаемой гипотезе отражается последовательность изменений условий циклического воздействия, а также влияния отдыхов.

Как известно, любой кристаллический материал изначально содержит в себе множество несовершенств. Это точечные (вакансии кристаллической решетки) и линейные несовершенства (дислокационные петли), инородные включения, микротрещины и др. [1]. При действии касательных напряжений дислокации перемещаются, размножаются, согласно источнику Франка-Рида [2], выходят к микротрещинам и расширяют их, что в конечном итоге приводит к разрушению. При циклических воздействиях происходят те же процессы с большей скоростью. Изучение механизма разрушения позволяет дать объяснения процессу, однако определение длительности сопротивления материала циклическим воздействиям может быть определено лишь в результате проведения соответственного эксперимента. Разброс экспериментальных данных о числе циклов до разрушения очень велик и для него принимаются разные виды вероятностных распределений: нормальное распределение [3, 4], распределение Пирсона [5], распределение Вейбулла [3, 6] и др. Ниже будут рассматриваться усреднённые значения количеств циклов до разрушения N, соответствующих условиям циклического воздействия (нагрузки, степень асимметрии, частота, температура и т.д.).

При эксплуатации конструкций условия циклического нагружения обычно не являются неизменными, как правило, нагружение чередуется с разгрузкой. В условиях циклических воздействий, переменных во времени, обычно используется так называемая гипотеза суммирования усталостных повреждений [4,7-10], которая может быть записана так:

$$\sum D_i = 1, \tag{1}$$

где D_i – повреждение материала, накопленное на i - м режиме циклического нагружения.

Наиболее употребляемой является гипотеза линейного суммирования усталостных повреждений Пальмгрена - Майнера [6,7,19], согласно которой

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}, \tag{2}$$

где n_i – количество циклов, осуществленных при i -ом режиме нагружения, N_i – общее количество циклов до разрушения при i -ом режиме, неизменном во времени.

В работе [6] приведены и другие выражения D_i:

$$D_i = \left(\frac{n_i}{N_i}\right)^c,\ D_i = 1 - \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right)^c,\ D_i = 1 - \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right)^c,\ D_i = B\frac{n_i}{N_i} - C\left(\frac{n_i}{N_i}\right)^2, \quad B = C + 1. \tag{3}$$

Отметим, что независимо от выбора выражения D_i, согласно гипотезе (1), на результаты испытания (количество циклов до разрушения) не должно влиять наличие отдыхов (остановки нагружения), а также очерёдность режимов испытания.

В работе [11] приводится модель Вулла, аналогичная модели Тайгея [6] и не соответствующая (1)

$$\frac{dD}{dn} = CD^m, \tag{4}$$

где $C=C(S(n))$ определяется условиями $S(n)$ циклического воздействия, соответственными циклу n. Соотношение (4) имеет смысл при $0<m<1$, при этом для повреждения D получим:

$$D = \sqrt[1-m]{(1-m)\int_0^n C\big(S(n)\big)\,dn}. \tag{5}$$

Разрушение происходит на N -м цикле, соответствующем $D = 1$, то есть, при

$$\int_0^N C\big(S(n)\big)\,dn = \frac{1}{1-m}. \tag{6}$$

Согласно модели Тсай Г.С., Дойла Д.Ф. и Сана С.Т. [12], которую можно представить в виде

$$\frac{dD}{dn} = \frac{K\big(S(n)\big)}{(1-D)^\alpha}, \tag{7}$$

повреждение D выражается так:

$$D(n) = 1 - \left[1 - (\alpha+1)\int_0^n K\big(S(n)\big)\,dn\right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \tag{8}$$

Причём разрушение будет иметь на N -м цикле при выполнении следующего условия

$$\int_0^N K\big(S(n)\big)\,dn = \frac{1}{1+\alpha}. \tag{9}$$

Хотя модели (4) и (7) не соответствуют (1), однако, согласно им, как и согласно гипотезе (1), последовательность режимов циклического нагружения не отражается на прогнозирование усталостного повреждения. Иначе говоря, если образец n_1 циклов находится в условиях усталостного нагружения S_1, а затем в условиях нагружения S_2, разрушился после n_2 циклов, то при n_2 циклов испытания в условиях нагружения S_2 и дальнейшем нагружении в условиях S_1 он должен разрушиться после n_1 циклов.

Следует отметить также и то, что согласно (1), а также (4) и (7), в случае циклического нагружения, чередующегося с разгрузкой (отдыхом), разрушение прогнозируется при количестве циклов, которое соответствовало разрушению при отсутствии отдыхов. Однако, как указано в [13], очерёдность режимов испытания существенно проявляется при испытании материалов. Кроме того, как показано, например, в работе [14] наличие отдыхов существенно влияет на общее количество циклов до разрушения.

Возможно, это обстоятельство связано с возвратом свойств, заключающимся в восстановлении структуры деформированного материала во времени [15,16], что приводит к уменьшению концентрации напряжений и к "залечиванию" дефектов. Отметим, что аналогичная ситуация имеет место при двухстадийной ползучести, когда обнаруживается "нормальное нарушение коммутативности" [17].

В настоящей работе делается попытка уточнения гипотезы суммирования повреждений способом, в некоторой мере, аналогичным использованию теории наследственности [18] с экспоненциальным ядром, описывающей затухающую память материала предыдущим нагружением.

Запишем гипотезу линейного суммирования усталостных повреждений в виде

$$\int_0^Q \frac{dx}{N\big(S(x)\big)} = 1, \tag{10}$$

где $N(S)$ – количество циклов до разрушения при постоянном режиме S циклического нагружения, Q – количество циклов до разрушения при изменении режимов нагружения, определяемом функцией $S(x)$. Очевидно, при постоянстве режима нагружения $S(x) = S_0$ будем иметь $Q = N(S_0)$.

Ниже рассмотрим соотношение

$$\int_0^Q \frac{1-\beta\big[1-\alpha x e^{-\alpha(Q-x)}\big]}{N\big(S(x)\big)}\,dx + \frac{\beta}{\alpha}\frac{1-e^{-\alpha Q}}{Q} = 1, \tag{11}$$

где $\alpha \geq 0$ и β – некоторые параметры, определяемые из экспериментов. Фактически, здесь суммируемость повреждений распространяется на $1\text{-}\beta$, а значение α может быть уподоблено скорости возврата.

При $\beta = 0$ соотношение (11) вырождается в (10). Отметим, что при устремлении α к нулю, из соотношения (11) вновь получим (10).

При неизменном режиме усталостного нагружения $S(x) = S_0$ из соотношения (11) при любых значениях α и β получим $Q = N(S_0)$. Таким образом, разница между соотношениями (10) и (11) обнаруживается лишь при переменном режиме нагружения.

Ниже рассмотрим прогнозирование усталостного разрушения, согласно соотношениям (10) и (11). Положим, что нагружение осуществляется по следующей программе:

$$S(x) = \begin{cases} S_1 \text{ при } 0 < x < n_1, \\ S_2 \text{ при } n_1 < x. \end{cases} \tag{12}$$

Сделаем следующие обозначения: $N_1 = N(S_1)$ – количество циклов до разрушения при испытании по неизменному режиму S_1; $N_2 = N(S_2)$ – то же, по режиму S_2; Q – количество циклов до разрушения для программы нагружения (12), согласно соотношению (11); Q_0 – количество циклов до разрушения для программы нагружения (12), согласно соотношению (10).

Соответственно программе изменения нагружения (12), получим:

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{Q - n_1}{N_2} = \\ = 1 - \beta \left[\begin{array}{c} \left(1 - e^{-\alpha(Q - n_1)}\right)\left(\left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N_1}\right) n_1 - \frac{1}{\alpha N_2}\right) + \frac{1}{\alpha Q}\left(1 - e^{-\alpha Q}\right) + \\ + \frac{e^{-\alpha Q}}{\alpha N_1}\left(1 + e^{\alpha n_1} \alpha n_1\right) \end{array} \right], \tag{13}$$

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{Q_0 - n_1}{N_2} = 1.$$

Рассмотрим теперь усталостное нагружение при изменении последовательности режимов S_1 и S_2:

$$S(x) = \begin{cases} S_2 \text{ при } 0 < x < n_2', \\ S_1 \text{ при } n_2' < x. \end{cases} \tag{14}$$

Обозначим общее количество циклов до разрушения по программе (14) через $Q' = n_1 + n'_2$. Согласно (11) будем иметь следующее:

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{Q' - n_1}{N_2} = 1 - \beta \left[\begin{array}{c} \left(1 - e^{-\alpha n_1}\right)\left(\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right)(Q' - n_1) - \frac{1}{\alpha N_1}\right) + \\ \frac{1}{\alpha Q'}\left(1 - e^{-\alpha Q}\right) + \frac{e^{-\alpha Q'}}{\alpha N_2}\left(1 + e^{\alpha(Q' - n_1)} \alpha (Q' - n_1)\right) \end{array} \right]. \tag{15}$$

Используя (13) и (15), можно сравнить количество циклов до разрушения, согласно программам (12) и (14), также выражения (13) и (15) дают принципиальную возможность определения значений α и β, если известны значения N_1 и N_2 в соответствии с программами экспериментов (12) и (14).

Ниже рассмотрим упрощённый вариант (11), соответствующий $\alpha \to \infty$:

$$(1 - \beta) \int_0^Q \frac{dx}{N(S(x))} + \frac{\beta Q}{N(S(Q))} = 1, \tag{16}$$

где $N(S(Q))$ – количество циклов до разрушения при неизменном режиме S, соответствующем циклу в момент разрушения N.

Соотношение (16) даёт возможность анализа момента разрушения при различных ступенчатых изменениях $S(x)$. Например, согласно (12), будем иметь:

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{Q - n_1}{N_2} = 1 - \beta n_1 \left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N_1}\right). \qquad (17)$$

Сравнивая (17) со вторым выражениям (13), можем заключить, что если режим S_1 менее нагружённый, чем S_2 ($N_1 > N_2$), то при $\beta > 0$ в правой части (17) будем иметь величину, меньшую 1, и, следовательно, $Q < Q_0$, то есть разрушение произойдет при меньшем количестве циклов, чем это прогнозируется гипотезой линейной суммируемости повреждений.

Значение коэффициента β может быть определено из полученного из экспериментов значения общего количества циклов Q до разрушения, согласно программе (12) по формуле:

$$\beta = 1 - \frac{N_1}{n_1} \frac{Q - N_2}{N_1 - N_2}. \qquad (18)$$

Ниже рассмотрим описание соотношением (16) временной разгрузки (отдыха), согласно следующей программе нагружения:

$$S(n) = \begin{cases} S_0 & 0 < n < n_1, \\ 0 & n_1 < n < n_2, \\ S_0 & n_2 < n. \end{cases} \qquad (19)$$

Согласно (16), получим:

$$Q = N_1 + (1 - \beta)(n_2 - n_1). \qquad (20)$$

Коэффициент β может быть определён из испытания по программе (19) по формуле:

$$\beta = 1 - \frac{Q - N_1}{n_2 - n_1}. \qquad (21)$$

Согласно гипотезе суммирования повреждений (10), вместо (20) имеем:

$$Q = N_1 + n_2 - n_1. \qquad (22)$$

Экспериментальные данные показывают, что при ступенчатом изменении режима испытания от менее нагружённого до более нагружённого ($N_1 > N_2$), разрушение происходит при меньшем числе циклов (Q), чем это прогнозируется гипотезой линейного суммирования повреждений и что соответствует $\beta > 0$ в соотношении (16). В данной ситуации ступенчатая разгрузка должна отрицательно отразиться на сопротивление материала, так как согласно (20) разрушение произойдёт быстрее, чем это прогнозируется гипотезой суммирования (22).

В заключение отметим, что соотношение (17) является более общим, чем гипотеза суммирования повреждений (10). Она даёт возможность прогнозировать усталостное разрушение в тех случаях, когда гипотеза суммирования не подтверждается экспериментом, при изменяющихся режимах нагружения, так как в этом случае может быть определён параметр β, устраняющий различие экспериментальных данных с теоретическими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лахтин Ю.М., Леонтьев В.П. Материаловедение. М.: Машиностроение, 1980. 493с.
2. Коттрелл А.Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. М.: Металуриздат,1968.

3. Хастингс Н., Пикок Д. Справочник по статистическим распределениям. М.: Статистика, 1980. 94с.
4. Серенсен С.В. О накоплении усталостного повреждения и запас прочности при переменной напряжённости случайного характера. Усталостная прочность материалов и элементов. Материалы конференции. Warszawa 1961. S.22-26.
5. Кендалль М.Д., Стюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966.
6. Xiong J.J. and Shenoi R.A. The new practical models for estimating reliability-based fatigue strength of composites. Journal of composite materials 2004 N1. p.1187-1209.
7. Стрижиус В.С. Современные теории усталости элементов композитных авиаконструкций. //Полёт. 2013. №4. С.11-19.
8. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. М.: Мир, 1984. 624с.
9. Robinson E.L. Effecst of temperature variation on the long rupture strength of steels. Trans ASME. 1952.v.74 N5. p.777-781.
10. Леметр П., Пламтри А. Применение понятия повреждаемости для расчёта разрушения в условиях одновременной усталости и ползучести. // Теоретические основы инженерных расчётов. 1979. №3. С.124-134.
11. Woll R.P. Material damage in polymer. Workshop on a continuum mechanics Approach to Damage and Life Prediction, Carrollton, Kentucky USA, 1980. pp. 28-35.
12. Tsai G.C., Doyle J.F. and Sun C.T. Frequency Effects on the fatigue life and damage of graphite/epoxy composite. Journal of Composite Materials. 1987.21. p. 2-13
13. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. С-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2004. 253с.
14. Кеннеди А.Дж. Ползучесть и усталость в металлах. М.: Металлургия, 1965. 312с.
15. Перриман Э.Ч.У. Возврат механических свойств. Ползучесть и возврат. М.: Металлургиздат, 1961. С.127-165.
16. Грант Н.Дж., Чаудхури А.Р. Ползучесть и разрушение. Ползучесть и возврат. М.: Металлургиздат, 1961. С.326-392.
17. Симонян А.М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Гитутюн, 1999. 260с.
18. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 742с.
19. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.

Сведения об авторах:

Симонян Арег Михайлович – вед. научный сотрудник Института механики НАН РА
Тел.: (+374) 93 457 086; **E-mail**: simonyanareg@mail.ru

Арутюнян Арам Симонович – инженер - исследователь
Тел.: (+374) 77 363 368; **E-mail**: aramasp@mail.ru, aramasp@gmail.com

Акопян Эдвин Арамаисович – магистр
Тел.: (+374) 94 650 656; **E-mail**: edvin-hakobyan@mail.ru

Поступила в редакцию 03.03.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №4, 2014 Механика

ГАБРИЕЛЯН МИША САРКИСОВИЧ

3 июля 2014г. после продолжительной болезни скончался доктор физико-математических наук, член Национального комитета Армении по теоретической и прикладной механике Миша Саркисович Габриелян.

М.С.Габриелян родился 12 июня 1937 года в Ереване, в семье рабочего. В 1944 году поступил и в 1954 году окончил 36-ю среднюю школу в Ереване. В том же году поступил на физико-математический факультет Ереванского государственного университета. В 1959 году после окончания университета был назначен ассистентом кафедры теоретической механики. Затем он поступил в аспирантуру Института математики Екатеринбурга (Свердловск) под руководством академика Н.Н.Красовского. Весной 1966 года защитил кандидатскую диссертацию по теме «Некоторые вопросы стабилизации и оптимального управления механическими системами».

После окончания аспирантуры он поступил на работу в Институт механики АН Арм.ССР, затем был приглашён старшим преподавателем на кафедру теоретической механики физико-математического факультета ЕГУ.

В 1986 году М.С.Габриелян успешно защитил докторскую диссертацию по теме «Дифференциальные игры с m целевыми множествами», получив учёную степень доктора физико-математических наук. В 1988 году ему было присвоено научное звание профессора. Профессор М.С.Габриелян занимался в ЕГУ и административной деятельностью. В 1965-1974гг. был заместителем декана механико-математического факультета, в 1982-1993 гг. – заведующим кафедрой теоретической механики.

Огромен вклад профессора М.С.Габриеляна в деле формирования и развития новых направлений в области теоретической механики в Армении. Его непосредственным участием на кафедре были созданы новые специализации: «Управление механическими системами», «Теория роботов и манипуляторов» и «Управление и устойчивость движения».

Профессор М.С. Габриелян – учёный, получивший широкое признание в областях теоретической механики и дифференциальных игр. Его ранние научные исследования посвящены вопросам оптимальной стабилизации и управления механическими системами. Затем были исследования по теории дифференциальных игр. В случае многоцелевых множеств профессор М.С.Габриелян исследовал задачи приближения всех целевых множеств и отклонения одного, приближения одного и отклонения многих, когда порядок приближения является фиксированным. Удалось построить стабильные множества для таких игровых задач, показать существование оптимальных траекторий в классе чисто позиционных и кусочно-позиционных стратегий. Используя конечную память, он сформулировал условие «мини-макса» и построил стратегии игроков и стабильных множеств на базе соответствующих программ. Профессор М.С.Габриелян исследовал также задачи приближения и отклонения при отсутствии условия седловой точки при нефиксированном порядке приближения целевых множеств в малой игре. Построив специальным образом семейство стабильных множеств, профессор М.С.Габриелян смог доказать теоремы относительно ε-равновесия в классе различных стратегий как в случае неизменной, так и поэтапно изменяющейся динамики.

В 1980-ые годы научные интересы профессора М.С.Габриеляна относятся к проблемам, посвящённым теориям стабильности движения, оптимальному управлению и стабилизации систем с распределёнными параметрами. Были продолжены научные исследования в области стохастических дифференциальных игр. Широкий круг выполненных научных работ способствовал тому, что сегодня на кафедре ведутся исследования в разных областях механики и прикладной математики: «Теория дифференциальных игр», «Теория оптимального управления и наблюдения», «Теория оптимального управления манипуляционными роботами», «Математическое моделирование и оптимальное управление механическими системами» и др.

Кроме научных работ, профессор М.С.Габриелян внёс большой вклад в подготовку научных кадров и создание учебно-методической литературы. Многие его ученики успешно работают в разных областях науки и образования.

Память замечательного товарища, известного ученого навсегда сохранится в сердцах его друзей, коллег, учеников.

Редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» глубоко скорбит по случаю его смерти.

Содержание 67 тома 2014 г. «Известия НАН Армении. Механика»

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

С О Д Е Р Ж А Н И Е

CONTENTS

Заказ № 559.
Тираж 150.
Сдано в производство 27.11.2014г.
Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$. 5 печ. л.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН Армении
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24