ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №3, 2014 Механика

УДК 539.3

О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗОК ОТ СИСТЕМЫ РАЗНОРОДНЫХ СТРИНГЕРОВ К УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ ИЛИ СЛОЮ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Григорян М.С.

Ключевые слова: стрингер, упругое полупространство, антиплоская деформация, контактные напряжения
Key Words: stringer, elastic half-space, antiplane deformation, contact stresses

Գրիգորյան Մ.Ս.
Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ տարասեռ ստրինգերների համակարգից առաձգական կիսատարածությանը կամ շերտին բեռերի փոխանցման մասին

Դիտարկվում է հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ առաձգական կիսատարածությանը կամ տարածական շերտին կամայական վերջավոր թվով տարասեռ և համագիծ ստրինգերների համակարգից շոշափող ուժերի փոխանցման վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրը:

Grigoryan M.S.
On the transfer of loads from the system of dissimilar stringers to elastic half-space or layer in the antiplane deformation

This paper in antiplane deformation considers the contact problem on the transfer of tangential forces from the system of an arbitrary finite number of dissimilar and collinear stringers to the elastic half-space or layer.

В работе при антиплоской деформации рассматривается контактная задача о передаче касательных сил от системы из произвольного конечного числа разнородных и коллинеарных стрингеров к упругому полупространству или слою.

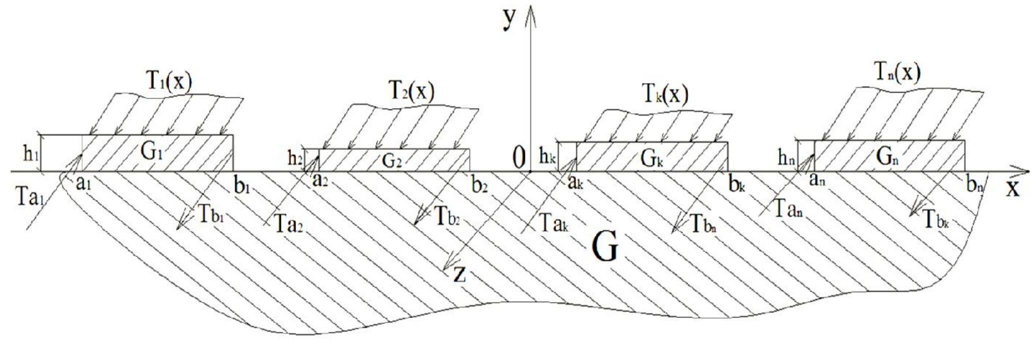
Рассматриваются контактные задачи о передаче касательных сил от коллинеарной системы разнородных стрингеров, обладающих различными жёсткостями на растяжение или сжатие, к упругому полупространству или упругому слою при антиплоской деформации.

Задачи о передаче нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров (накладок) к массивным деформируемым телам ввиду их актуальности для теоретических исследований и практических приложений в инженерных расчётах стали предметом рассмотрения многих авторов. Первые исследования в этой области восходят к известной работе Мелана [1], а дальнейшее обобщение и развитие идей этой работы дано в [2-4], а также в других работах, довольно подробная библиография которых до 1976г. приведена в [5]. Укажем также на работы [6-9] и на монографию [10].

В настоящей работе рассматриваются две смешаные задачи о передаче касательных сил от коллинеарной системы из произвольного конечного числа разнородных стрингеров, обладающих различными геометрическими и упругими характеристиками, к упругому полупространству или упругому слою при антиплоской деформации. В рамках физической модели Мелана при антиплоской деформации для стрингеров [11] решения обсуждаемых задач сводятся к решениям двух отдельных сингулярных интегральных уравнений (СИУ). Для решения этих определяющих СИУ применяется известный численно-аналитический метод решения СИУ [12-14], основанный на квадратурных формулах Гаусса для обычных и сингулярных с ядром Коши интегралов. В результате, касательные контактные напряжения под стрингерами и коэффициенты их концентрации в концевых точках стрингеров представляются явными формулами. Рассматриваются частные случаи и проводится их численный анализ.

1. Рассмотрим задачу контактного взаимодействия между упругим полупространством и системой стрингеров при антиплоской деформации. Пусть отнесённое к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ полупространство $z<0$ обладает модулем сдвига G и на своей граничной плоскости $z=0$ усилено системой Ω из произвольного конечного числа n упругих полос ω_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ с модулями сдвига G_k и высотами h_k, бесконечных в обе стороны по направлению оси Oz (фиг. 1), т.е. $\left(a_k<b_k<a_{k+1}; \quad k=\overline{1,n-1}, \quad a_n<b_n \right)$:

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{n}\omega_k \quad \omega_k=\left\{a_k\le x\le b_k; 0\le y\le h_k; -\infty<z<\infty\right\}$$



Фиг. 1

Предположим, что на верхней грани $y=h_k$ каждой полосы ω_k в направлении оси Oz действуют равномерно распределённые по оси Oz касательные силы $T_k\left(x\right)$, т.е.

$$\tau_{yz}\Big|_{y=h_k}=T_k\left(x\right) \quad \left(a_k<x<b_k;\ k=\overline{1,n}\right),$$

где τ_{yz} – компонента касательных напряжений. Кроме того, предположим, что на граничных поверхностях $x=a_k$ и $x=b_k$ полосы ω_k в направлении оси Oz действуют равномерно распределённые по этой оси касательные сосредоточенные силы T_{a_k} и T_{b_k}, соответственно.

Примем, что под действием совокупности указанных касательных сил полупространство вместе с системой упругих полос Ω находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. Тогда описанная задача сведётся к задаче для нижней упругой полуплоскости $y<0$, усиленная на границе $y=0$ системой упругих накладок L, причём,

$$L=\bigcup_{k=1}^{n} L_k\,; \quad L_k=\{y=0,\ a_k<x<b_k\} \ \left(k=\overline{1,n}\right)$$

и верхняя грань $y=h_k$ k -ой накладки нагружена касательными силами $T_k(x)$.

Далее для накладок примем $G_k>>G$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ и $h_k<<\min\limits_{1\le k\le n}(b_k-a_k)$ и тогда будем считать, что для стрингеров справедлива модель одномерного упругого континуума Мелана [11]. При сделанных предположениях требуется определить касательные контактные напряжения $\tau(x)$ под системой стрингеров L, т.е. функцию

$$\tau_{yz}\big|_{y=0}=\tau(x) \qquad \left(x\in L=\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)\right)$$

и коэффициенты концентрации этих напряжений в концевых точках каждого стрингера.

С целью вывода определяющего СИУ поставленной задачи воспользуемся известным выражением единственной отличной от нуля компоненты смещений $u_z(x,0)$ граничных точек упругой полуплоскости от распределённых касательных сил интенсивности $\tau(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ [15]:

$$u_z(x,0)=w(x,0)=\frac{1}{\pi G}\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau(s)\,ds+\mathrm{const} \tag{1}$$

Далее воспользуемся дифференциальным уравнением деформирования k -ого стрингера по модели Мелана при антиплоской деформации [11]

$$h_kG_k\frac{d^2w_k}{dx^2}=\tau(x)-T_k(x) \quad \left(a_k<x<b_k;\,k=\overline{1,n}\right) \tag{2}$$

где $w_k=w_k(x)$ – компонента смещений точек k -ого стрингера в направлении оси Oz. При этом, условие равновесия этого стрингера имеет вид:

$$\int_{a_k}^{b_k}\tau(x)\,dx=T_{b_k}-T_{a_k}+\int_{a_k}^{b_k}T_k(x)\,dx \quad \left(k=\overline{1,n}\right) \tag{3}$$

Интегрированием (2) легко находим $\left(a_k\le x\le b_k;\,k=\overline{1,n}\right)$

$$h_kG_k\frac{dw_k}{dx}=\frac{1}{2}\left(T_{a_k}+T_{b_k}\right)+\frac{1}{2}\int_{a_k}^{b_k}\mathrm{sign}(x-s)\left[\tau(s)-T_k(s)\right]ds \tag{4}$$

Теперь в условиях контакта упругой полуплоскости и системы стрингеров

$$w(x,0)=w_k(x) \text{ или } \frac{dw(x,0)}{dx}=\frac{dw_k(x)}{dx} \quad \left(a_k\le x\le b_k;\,k=\overline{1,n}\right)$$

подставим выражения $w(x,0)$ и $w_k(x)$ из (1) и (4), соответственно. После простых преобразований придём к следующему определяющему СИУ контактной задачи:

$$\frac{1}{\pi G}\sum_{p=1}^{n}\int_{a_p}^{b_p}\frac{\tau(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{2h_kG_k}\int_{a_k}^{b_k}\operatorname{sign}(s-x)\,\tau(s)ds=$$
$$=\frac{1}{2h_kG_k}\left[T_{a_k}+T_{b_k}+\int_{a_k}^{b_k}\operatorname{sign}(s-x)\,T_k(s)ds\right]\quad\left(a_k<x<b_k,\,k=\overline{1,n}\right)\tag{5}$$

Решения СИУ (5) должны удовлетворять условиям (3).

Далее в (5) и (3) введём безразмерные координаты и величины:

$\xi=x/a,\quad \eta=s/a,\quad \alpha_k=a_k/a,\quad \beta_k=b_k/a,\quad h_k^0=h_k/a\quad \left(k=\overline{1,n}\right),$

$\lambda_k=(\pi G)/\left(2h_k^0G_k\right),\ T_k^0=T_{a_k}/(aG),\ T_{\beta_k}^0=T_{b_k}/(aG);\ \tau_0(\xi)=\tau(a\xi)/G,$

$T_k^0(\xi)=T_k(a\xi)/G,$

где a – координата одной из концевых точек отрезков $\left[a_k,b_k\right]$, отличная от нуля. Например, при $a_1\neq 0$ $a=a_1$. После несложных преобразований СИУ (5) представим в виде:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\left[\frac{1}{\eta-\xi}+\lambda_k\operatorname{sign}(\eta-\xi)\right]\tau_0(\eta)\,d\eta+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}\int_{\alpha_p}^{\beta_p}\frac{\tau_0(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi}=$$
$$=\frac{\lambda_k}{\pi}\left[T_{\alpha_k}{}^0+T_{\beta_k}{}^0+\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\operatorname{sign}(\eta-\xi)\,T_k^0(\eta)\,d\eta\right]\quad\left(\alpha_k<\xi<\beta_k;\,k=\overline{1,n}\right),\tag{6}$$

а условия (3) – в виде:

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\tau_0(\xi)\,d\xi=T_{\beta_k}{}^0-T_{\alpha_k}{}^0+\int_{\alpha_k}^{\beta_k}T_k{}^0(\xi)\,d\xi\quad\left(k=\overline{1,n}\right)\tag{7}$$

Чтобы к СИУ (6)-(7) применить известный численно-аналитический метод решения СИУ [6-8], каждый отрезок $\left[\alpha_k,\beta_k\right]$ преобразуем в отрезок $[-1,1]$, полагая

$$\xi=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t+\frac{\alpha_k+\beta_k}{2},\quad \eta=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}u+\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\quad\left(k=\overline{1,n};\ -1\le t,u\le 1\right).$$

Тогда, СИУ (6) запишется в виде $\left(-1<t<1,\,k=\overline{1,n}\right)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{u-t}+\lambda_k{}^0\operatorname{sign}(u-t)\right]\tau_k{}^0(u)\,du+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}R_{kp}(t,u)\,\tau_p{}^0(u)\,du=\frac{\lambda_k}{\pi}f_k{}^0(t)\tag{8}$$

$$R_{kp}(t,u)=\frac{\beta_p-\alpha_p}{\left(\beta_p-\alpha_p\right)u-\left(\beta_k-\alpha_k\right)t+\beta_p-\beta_k+\alpha_p-\alpha_k};\quad \lambda_k^0=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}\lambda_k,$$

$$\tau_k{}^0(u)=\tau_0\left(\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}u+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right);\quad \tilde{T}_k(u)=T_k^0\left(\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}u+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right),$$

$$f_k^{\,0}(t)=T_{\alpha_k}{}^0+T_{\beta_k}{}^0+\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}\int_{-1}^{1}\operatorname{sign}(u-t)\,\tilde{T}_k(u)\,du$$

а условия (7) – в виде:

$$\int_{-1}^{1}\tau_k^0(t)\,dt=Q_k,\quad Q_k=\frac{2}{\beta_k-\alpha_k}\left(T_{\beta_k}^0-T_{\alpha_k}^0\right)+\int_{-1}^{1}\tilde{T}_k(t)\,dt\qquad\left(k=\overline{1,n}\right)\tag{9}$$

Теперь, полагая

$$\tau_k{}^0(t)=\chi_k(t)\Big/\sqrt{1-t^2}\qquad\left(-1<t<1;\,k=\overline{1,n}\right),\tag{10}$$

где $\chi_k(t)$ – функции из гельдеровского класса на отрезке $[-1,1]$, и следуя известной процедуре из [12-14], СИУ (8)-(9) сведём к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{u_m-t_r}+\lambda_k{}^0\operatorname{sign}(u_m-t_r)\right]\chi_k(u_m)+\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}R_{kp}(u_m,t_r)\chi_p(u_m)=\frac{\lambda_k}{\pi}f_k^{\,0}(t_r)\\[2ex]\dfrac{\pi}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\chi_k(t_m)=Q_k\quad\left(k=\overline{1,n}\right);\ \left(r=\overline{1,M-1}\right)\end{cases}\tag{11}$$

Здесь M – любое натуральное число, а

$$u_m=\cos\left((2m-1)\pi/2M\right)\left(m=\overline{1,M}\right);\quad t_r=\cos(\pi r/M)\quad\left(r=\overline{1,M-1}\right)$$

– известные чебышевские узлы.

Коэффициенты концентрации (КК) касательных контактных напряжений на концах k-ого стрингера определим по формулам:

$$K_{a_k}=\lim_{x\to a_k+0}\sqrt{x-a_k}\,\tau(x);\ K_{b_k}=\lim_{x\to b_k-0}\sqrt{b_k-x}\,\tau(x),\tag{12}$$

а затем перейдём к безразмерным величинам. Тогда, после решения системы (11) безразмерные КК контактных напряжений в концевых точках k-ого стрингера будут вычисляться при помощи формул:

$$K_{a_k}{}^0=\left(\sqrt{\beta_k-\alpha_k}\,\chi_k(-1)\right)\Big/2,\quad K_{b_k}{}^0=\left(\sqrt{\beta_k-\alpha_k}\,\chi_k(1)\right)\Big/2\quad\left(k=\overline{1,n}\right),$$

где $\chi_k(t)$ – функция из (10), а величины $\chi_k(\pm1)$ после решения системы (11) определяются при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа [14]:

$$\begin{gathered}\chi_k(1)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}\chi_k(u_m)\operatorname{ctg}\left[\frac{(2m-1)\pi}{4M}\right];\\ \chi_k(-1)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{M+m}\chi_k(u_m)\operatorname{tg}\left[\frac{(2m-1)\pi}{4M}\right]\end{gathered}\tag{13}$$

$$\left\{K_{a_k}{}^0,K_{b_k}{}^0\right\}=\left(\sqrt{a}G\right)^{-1}\left\{K_{a_k},K_{b_k}\right\}\quad\left(k=\overline{1,n}\right)$$

В случаях абсолютно жёстких стрингеров при $\lambda_k=0$ и одного стрингера, СИУ (6)-(7) и, соответственно, системы (11) примут более простой вид.

2. Перейдём ко второй задаче. Пусть имеем упругую полосу $\Pi=\{-\infty<x,z<\infty;\,-H\le y\le0\}$ высотой H и модуль сдвига G, нижняя грань $y=-H$ которой жёстко защемлена, а на её верхней грани $y=0$ в направлении оси Oz действуют касательные силы интенсивности $\tau(x)$. При помощи интегрального преобразования Фурье по переменной x для перемещений точек верхней грани полосы, нагружённой по совокупности отрезков L, получим формулу:

$$w(x,0)=\frac{1}{\pi G}\int_L \ln\operatorname{cth}\left(\pi|x-s|/4H\right)\tau(s)\,ds=\frac{1}{\pi G}\sum_{p=1}^{n}\int_{a_p}^{b_p}\ln\operatorname{cth}\left(\pi|x-s|/4H\right)\tau(s)\,ds$$

Отсюда дифференцированием по x находим

$$\frac{dw(x,0)}{dx}=\frac{1}{2GH}\int_L\frac{\tau(s)\,ds}{\operatorname{sh}\left[\pi(s-x)/2H\right]}\quad(-\infty<x<\infty).$$

Перейдя теперь к формулировке основных уравнений второй задачи, будем считать, что полоса Π на своей верхней грани $y=0$ по совокупности отрезков L усилена стрингерами с описанными в предыдущем пункте геометрическими и упругими характеристиками и подвержены тем же силовым факторам. Тогда, поступив совершенно аналогично сделанному в п.1, придём к следующей определяющей системе СИУ поставленной задачи для полосы $\left(a_k<x<b_k;\ k=\overline{1,n}\right)$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2GH}\sum_{p=1}^{n}\int_{a_p}^{b_p}\frac{\tau(s)\,ds}{\operatorname{sh}\left[\pi(s-x)/2H\right]}-\frac{1}{2h_kG_k}\int_{a_k}^{b_k}\operatorname{sign}(s-x)\tau(s)\,ds=\\=\frac{1}{2h_kG_k}\left[T_{a_k}+T_{b_k}+\int_{a_k}^{b_k}\operatorname{sign}(s-x)T_k(s)\,ds\right]\end{gathered}\tag{14}$$

Так как $\lim\limits_{H\to\infty}2H\operatorname{sh}\left[(s-x)/2H\right]=\pi(s-x)$, то эта система СИУ при предельном переходе $H\to\infty$ переходит в систему СИУ первой задачи (5). При этом, условие равновесия k -ого стрингера опять имеет вид (3).

Далее в (14) и в условиях (3), как в предыдущем пункте, введём безразмерные переменные и величины.

$$\xi=\pi x/H,\ \eta=\pi s/H,\ \alpha_k=\pi a_k/H,\ \beta_k=\pi b_k/H\ \left(k=\overline{1,n}\right);$$

$$\lambda_k=HG/2h_kG_k;\ \tau_0(\xi)=\tau\left(\pi^{-1}\xi H\right)/G,\ T_k^{(0)}(\xi)=T_k\left(\pi^{-1}\xi H\right)/G;$$

$$T_{\alpha_k}^{(0)}=\pi T_{a_k}/HG;\ T_{\beta_k}^{(0)}=\pi T_{b_k}/HG$$

В результате, система СИУ (14) примет вид $\left(\xi\in(\alpha_k,\beta_k),\ k=\overline{1,n}\right)$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\left[\sum_{p=1}^{n}\int_{\alpha_p}^{\beta_p}\frac{\tau_0(\eta)\,d\eta}{2\operatorname{sh}\left[(\eta-\xi)/2\right]}+\lambda_k\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\operatorname{sign}(\eta-\xi)\tau_0(\eta)\,d\eta\right]=\frac{\lambda_k}{\pi}f_k(\xi),\\ f_k(\xi)=T_{\alpha_k}^{(0)}+T_{\beta_k}^{(0)}+\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\operatorname{sign}(\eta-\xi)\,T_k^{(0)}(\eta)\,d\eta,\end{gathered}\tag{15}$$

а условие равновесия k -ого стрингера – вид

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \tau_0(\xi) d\xi = T_{\beta_k}^{(0)} - T_{\alpha_k}^{(0)} + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} T_k^{(0)}(\xi) d\xi \quad \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{16}$$

Систему СИУ (15) и условия (16) преобразуем, перейдя к ядру Коши. С этой целью, полагая

$$t = e^{\xi}, \quad u = e^{\eta}, \quad \gamma_k = e^{\alpha_k}, \; \delta_k = e^{\beta_k} \qquad \left(k = \overline{1,n}\right), \tag{17}$$

после простых преобразований системы СИУ (15) преобразуем в следующую систему:

$$\frac{1}{\pi}\left[\sum_{p=1}^{n} \int_{\gamma_p}^{\delta_p} \frac{\omega_0(u)\,du}{u-t} + \frac{\lambda_k}{\sqrt{t}} \int_{\gamma_k}^{\delta_k} \operatorname{sign}(u-t)\,\omega_0(u) \frac{du}{\sqrt{u}}\right] = \frac{\lambda_k}{\pi} g_k(t) \tag{18}$$

$$\omega_0(u) = \tau_0(\ln u)\big/\sqrt{u}\,; \; S_k^{(0)}(u) = T_k^{(0)}(\ln u)\big/\sqrt{u}\,; \; \left(\gamma_k < t < \delta_k;\, k = \overline{1,n}\right),$$

$$g_k(t) = f_k(\ln t)\big/\sqrt{t} = \frac{T_{\alpha_k}^{(0)} + T_{\beta_k}^{(0)}}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\gamma_k}^{\delta_k} \operatorname{sign}(u-t) \frac{S_k^{(0)}(u)}{\sqrt{u}} du, \; \left(k = \overline{1,n}\right),$$

а условия (16) – в условия

$$\int_{\gamma_k}^{\delta_k} \omega_0(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = T_{\beta_k}^{(0)} - T_{\alpha_k}^{(0)} + \int_{\gamma_k}^{\delta_k} \frac{S_k^{(0)}(t)\,dt}{\sqrt{t}}, \qquad \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{19}$$

При этом, из цепи замены переменных легко находим:

$$t = e^{\pi x/H}, \; u = e^{\pi s/H}, \; \gamma_k = e^{\pi a_k/H}, \; \delta_k = e^{\pi b_k/H} \quad \left(k = \overline{1,n}\right)$$

В системе СИУ (18) и в условиях (19) каждый интервал $\left(\gamma_k, \delta_k\right)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ преобразуем в интервал $(-1,1)$, полагая

$$t = \frac{\delta_k - \gamma_k}{2}\varsigma + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2}; \qquad u = \frac{\delta_p - \gamma_p}{2}v + \frac{\delta_p + \gamma_p}{2} \quad \left(-1 < \varsigma, v < 1;\, k = \overline{1,n}\right). \tag{20}$$

Новые переменные ς, v с исходными переменными x, s связаны соотношениями:

$$\varsigma = \frac{2e^{\pi x/H} - \left(e^{\pi a_k/H} + e^{\pi b_k/H}\right)}{e^{\pi b_k/H} - e^{\pi a_k/H}}, \; v = \frac{2e^{\pi s/H} - \left(e^{\pi a_k/H} + e^{\pi b_k/H}\right)}{e^{\pi b_k/H} - e^{\pi a_k/H}} \quad \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{21}$$

В результате несложных преобразований система определяющих СИУ (18)-(19) преобразуется в систему СИУ:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{v-\varsigma} + \frac{\lambda_k\left(\delta_k-\gamma_k\right)\operatorname{sign}(v-\varsigma)}{\sqrt{\left[\left(\delta_k-\gamma_k\right)v+\delta_k+\gamma_k\right]\left[\left(\delta_k-\gamma_k\right)\varsigma+\delta_k+\gamma_k\right]}}\right\}\tau_k^{(0)}(v)\,dv + \\ +\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}\int_{1}^{-1} R_{kp}^{(0)}(\varsigma,v)\,\tau_p^{(0)}(v)\,dv = \frac{\lambda_k}{\pi}\, f_k^{(0)}(\varsigma)\end{gathered} \tag{22}$$

$$R_{kp}^{(0)}(\varsigma,v)=\frac{\delta_p-\gamma_p}{(\delta_p-\gamma_p)v-(\delta_k-\gamma_k)\varsigma+\delta_p-\delta_k+\gamma_p-\gamma_k}\qquad\left(k,p=\overline{1,n}\right)$$

$$\tau_k^{(0)}(v)=\omega_0\left(\frac{\delta_k-\gamma_k}{2}v+\frac{\delta_k+\gamma_k}{2}\right);\quad f_k^{(0)}(\varsigma)=g_k\left(\frac{\delta_k-\gamma_k}{2}\varsigma+\frac{\delta_k+\gamma_k}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left[T_{\alpha_k}^{(0)}+T_{\beta_k}^{(0)}\right]}{\sqrt{(\delta_k-\gamma_k)\varsigma+\delta_k+\gamma_k}}+(\delta_k-\gamma_k)\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{sign}(v-\varsigma)\tilde{S}_k(v)\,dv}{\sqrt{\left[(\delta_k-\gamma_k)v+\delta_k+\gamma_k\right]\left[(\delta_k-\gamma_k)\varsigma+\delta_k+\gamma_k\right]}},$$

$$\tilde{S}_k(v)=S_k^{(0)}\left(\frac{\delta_k-\gamma_k}{2}v+\frac{\delta_k+\gamma_k}{2}\right).$$

При этом, условия (20) преобразуются в условия $\left(k=\overline{1,n}\right)$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\tau_k^{(0)}(v)\,dv}{\sqrt{(\delta_k-\gamma_k)v+\delta_k+\gamma_k}}=\frac{\sqrt{2}\left[T_{\beta_k}^{(0)}-T_{\alpha_k}^{(0)}\right]}{\delta_k-\gamma_k}+\int_{-1}^{1}\frac{\tilde{S}_k(v)\,dv}{\sqrt{(\delta_k-\gamma_k)v+\delta_k+\gamma_k}}. \tag{23}$$

Итак, решение второй задачи о взаимодействии системы стрингеров с полосой П свелось к решению системы СИУ (22)-(23).

Эту систему СИУ, в свою очередь, как в п.1, можно свести к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\Phi_k(u_m)$ $\left(k=\overline{1,n};\ m=\overline{1,M}\right)$:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\left[\dfrac{1}{v_m-\varsigma_r}+\dfrac{\lambda_k(\delta_k-\gamma_k)\operatorname{sign}(v_m-\varsigma_r)}{\sqrt{\left[(\delta_k-\gamma_k)v_m+\delta_k+\gamma_k\right]\left[(\delta_k-\gamma_k)\varsigma_r+\delta_k+\gamma_k\right]}}\right]\times\\ \times\Phi_k(v_m)+\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n}R_{kp}^{(0)}(\varsigma_r,v_m)\Phi_p(v_m)=\dfrac{\lambda_k}{\pi}f_k^{(0)}(\varsigma_r)\ \left(r=\overline{1,M-1}\right)\\ \dfrac{\pi}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\dfrac{\Phi_k(v_m)}{\sqrt{(\delta_k-\gamma_k)v_m+\delta_k+\gamma_k}}=\dfrac{\sqrt{2}\left[T_{\beta_k}^{(0)}-T_{\alpha_k}^{(0)}\right]}{\delta_k-\gamma_k}+\dfrac{\pi}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\dfrac{\tilde{S}_k(v_m)\sqrt{1-v_m^2}}{\sqrt{(\delta_k-\gamma_k)v_m+\delta_k+\gamma_k}}.\end{cases} \tag{24}$$

Здесь

$$v_m=\cos\left[(2m-1)\pi/2M\right],\ \varsigma_r=\cos(\pi r/M)\ \left(m=\overline{1,M},\ r=\overline{1,M-1}\right)$$

и принято

$$\tau_k^{(0)}(v)=\Phi_k(v)\Big/\sqrt{1-v^2}\qquad\left(k=\overline{1,n}\right), \tag{25}$$

где $\Phi_k(v)$ – гельдеровские функции на отрезке $[-1,1]$.

3. Рассмотрим несколько частных случаев поставленных задач. В первом частном случае предположим, что все стрингеры в первой задаче обсолютно жёсткие, т.е. $G_k=\infty$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$. Тогда придём к однородному СИУ

$$\int_L \frac{\tau(s)\,ds}{s-x}=0 \quad (x\in L),$$

которое совпадает с СИУ классической плоской контактной задачи теории упругости, когда в нижнюю упругую полуплоскость вдавливается система штампов с плоскими основаниями. Замкнутое решение этого СИУ при условиях типа (3) приведено в [17].

Во втором частном случае предположим, что в первой задаче $n=1$ и $a_1=-a,\ b_1=a,\ T_1(x)\equiv 0$. В этом случае $\alpha_1=-1,\ \beta_1=1$ и определяющее СИУ задачи (6) примет вид:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\eta-\xi}+\lambda_1 \operatorname{sign}(\eta-\xi)\right]\tau_0(\eta)\,d\eta=\frac{\lambda_1}{\pi}\left(T_{-1}^{(0)}+T_1^{(0)}\right) \tag{26}$$

$$\lambda_1=\frac{\pi a G}{2h_1G_1},\quad T_{-1}^{(0)}=T_{-a}/aG;\ T_1^{(0)}=T_a/aG,$$

а условие (3) – вид:

$$\int_{-1}^{1}\tau_0(\xi)\,d\xi=T_1^{(0)}-T_{-1}^{(0)}. \tag{27}$$

В итоге, СИУ (26)-(27) сведётся к системе линейных уравнений (11), которая в данном частном случае запишется в форме:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{M}\left[\frac{1}{\eta_m-\xi_r}+\lambda_1\operatorname{sign}(\eta_m-\xi_r)\right]\chi(\eta_m)=\frac{\lambda_1}{\pi}\left(T_{-1}^{(0)}+T_1^{(0)}\right) & \left(r=\overline{1,M-1}\right)\\ \displaystyle\sum_{m=1}^{M}\frac{\pi}{M}\chi(\eta_m)=T_1^{(0)}-T_{-1}^{(0)} & \left(k=\overline{1,n}\right)\end{cases} \tag{28}$$

Коэффициенты концентрации напряжений вычисляются по формулам (13).

В третьем частном случае примем, что во второй задаче $n=1$, $a_1=-a,\ b_1=a$ и $T_1(x)\equiv 0$. В этом случае по вторым формулам (17) $\alpha_1=-\pi a/H=-\alpha,\ \beta_1=\pi a/H=\alpha;\ \gamma_1=e^{-\alpha},\ \delta_1=e^{\alpha}$ и определяющее СИУ задачи по (22) запишется виде $(-1<\varsigma<1)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{\nu-\varsigma}+\frac{\lambda_1\,\mathrm{sh}\alpha\,\operatorname{sign}(\nu-\varsigma)}{\sqrt{(\mathrm{sh}\alpha\,\nu+\mathrm{ch}\alpha)(\mathrm{sh}\alpha\,\varsigma+\mathrm{ch}\alpha)}}\right\}\tau_1^{(0)}(\nu)\,d\nu=\frac{\lambda_1}{\pi}f_1^{(0)}(\varsigma) \tag{29}$$

$$f_1^{(0)}(\varsigma)=\left(T_{-\alpha}^{(0)}+T_{\alpha}^{(0)}\right)\Big/\sqrt{(\mathrm{sh}\alpha\,\varsigma+\mathrm{ch}\alpha)}$$

а условие (23) – в виде

$$\int_{-1}^{1}\frac{\tau_1^{(0)}(\nu)\,d\nu}{\sqrt{(\mathrm{sh}\alpha\,\nu+\mathrm{ch}\alpha)}}=\frac{T_{\alpha}^{(0)}-T_{-\alpha}^{(0)}}{\mathrm{sh}\alpha} \tag{30}$$

В соответствии с (24) СИУ (29)-(30) сводится к системе линейных уравнений:

$$
\begin{cases}
\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{M}\left[\frac{1}{v_m-\varsigma_r}+\lambda_1\frac{\mathrm{sh}\alpha\,\mathrm{sign}\left(v_m-\varsigma_r\right)}{\sqrt{\left(\mathrm{sh}\alpha\, v_m+\mathrm{ch}\alpha\right)\left(\mathrm{sh}\alpha\,\varsigma_r+\mathrm{ch}\alpha\right)}}\right]\Phi_1\left(v_m\right)=\frac{\lambda_1}{\pi}f_1^{(0)}\left(\varsigma_r\right) \\
\left(r=\overline{1,M-1}\right) \\
\sum_{m=1}^{M}\frac{\pi}{M}\frac{\Phi_1\left(v_m\right)}{\sqrt{\left(\mathrm{sh}\alpha\, v_m+\mathrm{ch}\alpha\right)}}=\frac{T_{\alpha}^{(0)}-T_{-\alpha}^{(0)}}{\mathrm{sh}\alpha}
\end{cases}
\qquad (31)
$$

Коэффициенты концентрации напряжений опять вычисляются по формулам (13), в которых следует $\chi_1\left(u_m\right)$ заменить на $\Phi_1\left(v_m\right)$, а из формул (21)

$$
\varsigma=\frac{e^{\alpha\xi_0}-\mathrm{ch}\alpha}{\mathrm{sh}\alpha},\quad v=\frac{e^{\alpha\eta_0}-\mathrm{ch}\alpha}{\mathrm{sh}\alpha}\ \left(\xi_0=x/a,\ \eta_0=s/a;\alpha=\pi a/H\right),
$$

откуда

$$
\xi_0=\left[\ln\left(\mathrm{ch}\alpha+\varsigma\mathrm{sh}\alpha\right)\right]/\alpha,\quad \eta_0=\left[\ln\left(\mathrm{ch}\alpha+v\mathrm{sh}\alpha\right)\right]/\alpha \qquad (32)
$$

С другой стороны, по формулам (20) в разбираемом частном случае будем иметь:

$$
t=\varsigma\mathrm{sh}\alpha+\mathrm{ch}\alpha,\quad u=v\mathrm{sh}\alpha+\mathrm{ch}\alpha \qquad (33)
$$

Теперь, при помощи (32)-(33) расчётную формулу для безразмерных контактных напряжений можем записать в виде

$$
\tau_0\left(\alpha\xi_0\right)=e^{\alpha\xi_0/2}\tau_1^{(0)}\left(\varsigma\right),
$$

откуда, приняв во внимание формулу (25) при $k=1$, будем иметь:

$$
\tau_0\left(\alpha\xi_0\right)=e^{\alpha\xi_0/2}\frac{\Phi_1\left(\varsigma\right)}{\sqrt{1-\varsigma^2}}
$$

и, следовательно, через решение линейной системы уравнений (31) получим:

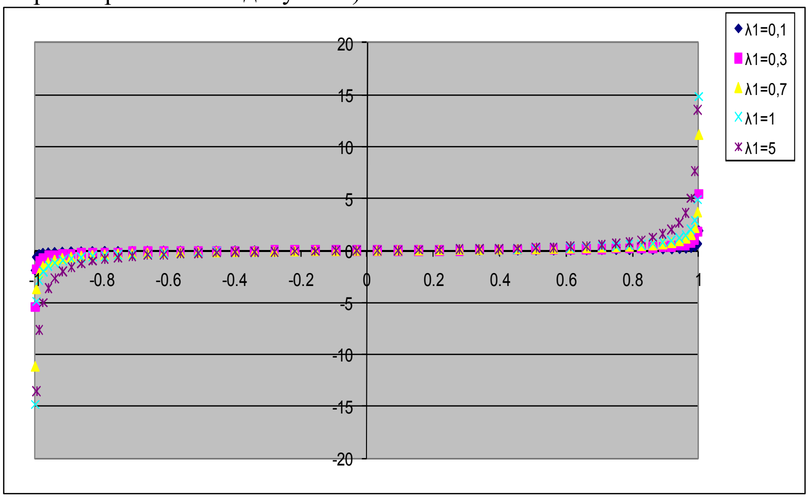
$$
\tau_0\left(\alpha\xi_0^{(m)}\right)=e^{\alpha\xi_0^{(m)}/2}\frac{\Phi_1\left(v_m\right)}{\sqrt{1-v_m^2}},\quad \xi_0^{(m)}=\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{ch}\alpha-v_m\mathrm{sh}\alpha\right)\quad \left(m=\overline{1,M}\right) \qquad (34)
$$

Определяющие системы линейных алгебраических уравнений (28) и (31) можно записать в канонической форме.

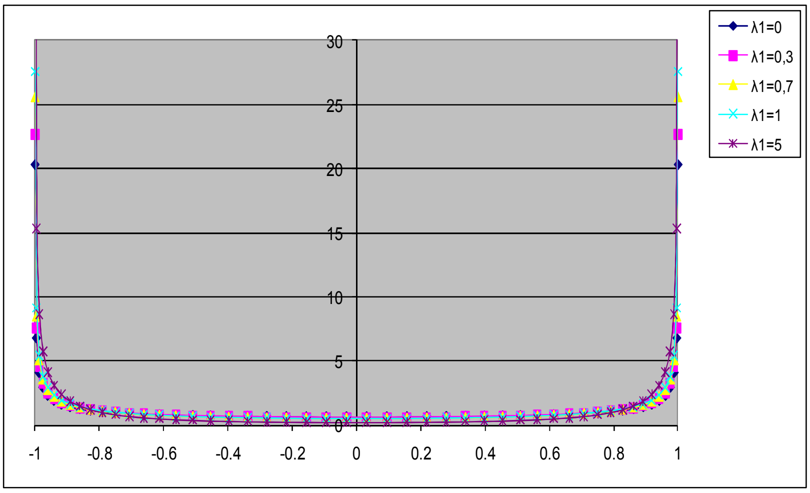
Проведён численный анализ рассматриваемых частных случаев исходных задач. Во втором частном случае обсуждаются два подслучая: a) $T_1^{(0)}=T_{-1}^{(0)}=T_0=1,$ т.е. когда верхняя грань стрингера свободна от касательных сил, а в его концевых сечениях действуют равные по величине, но противоположные по направлению сосредоточенные касательные силы единичной величины; b) $T_1^{(0)}=-T_1^{(0)}=1,$ т.е. когда в концевых сечениях действуют равные по величине и одинаково направленные касательные сосредоточенные силы единичной величины. В этих подслучаях при различных значениях параметра λ_1, характеризующего относительную жёсткость системы стрингер-основание, решалась система линейных уравнений (35), где $T_1^{(0)}+T_{-1}^{(0)}=2$; $T_1^{(0)}-T_{-1}^{(0)}=0$ – в подслучае a) и $T_1^{(0)}+T_{-1}^{(0)}=0$; $T_1^{(0)}-T_{-1}^{(0)}=2$ – в подслучае b). На основании решения этой системы по формуле

$$
\tau_0\left(\eta_m\right)=X_m\Big/\sqrt{1-\eta_m^2}\qquad \left(m=\overline{1,M}\right)
$$

для различных значений λ_1 в подслучае a) (фиг.2, кососимметричное распределение напряжений) и в подслучае b) (фиг.3, симметричное распределение напряжений) построены графики изменения безразмерных касательных контактных напряжений. Анализ этих графиков показывает, что при малых λ_1, т.е. когда стрингер жёстче основания, эти напряжения увеличиваются, причём, в концевых точках стрингера они резко увеличиваются. Значения безразмерного КК на правом конце стрингера K_1^0 приведены в таблице, где в первой строчке записаны значения K_1^0 в подслучае a), а во второй строчке – в подслучае b).



Фиг. 2

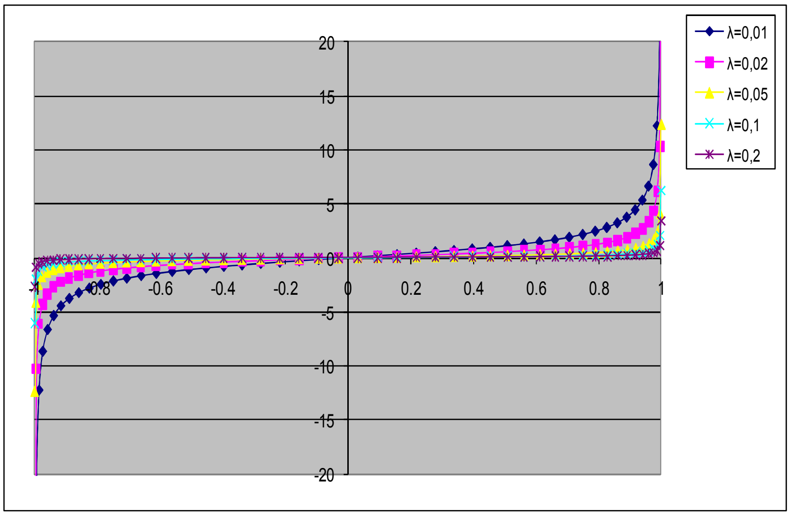


Фиг. 3

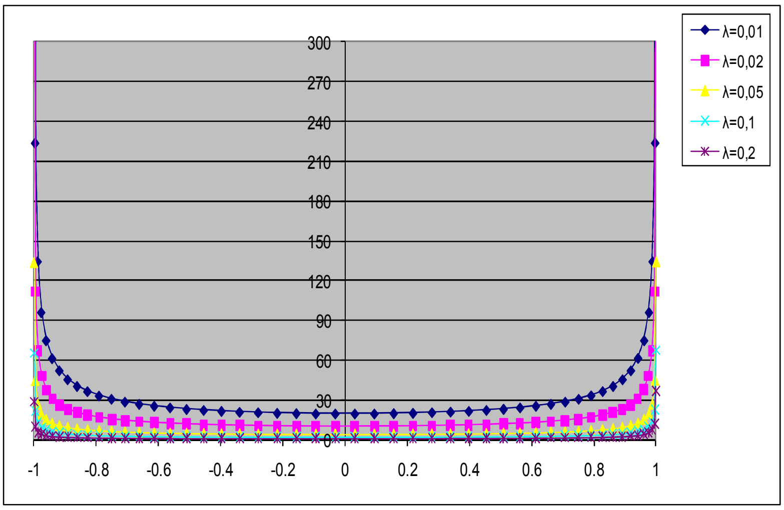
На фиг. 4 и 5 приведены графики изменения касательных контактных напряжений, соответственно, в подслучаях a) и b) третьего частного случая, рассчитанные по формуле (34) при различных λ $(\alpha = \pi\lambda)$. На этих графиках также наблюдаются отмеченные выше закономерности.

Значения K_1^0 Таблица

λ_1	*0*	*0.1*	*0.3*	*0.5*	*0.7*	*1*	*5*
K_1^0 ***a)***	0	0.043281	0.1208	0.18889	0.24957	0.3299	0.94412
K_1^0 ***b)***	0.45015	0.46817	0.50295	0.53622	0.56813	0.61373	1.0699



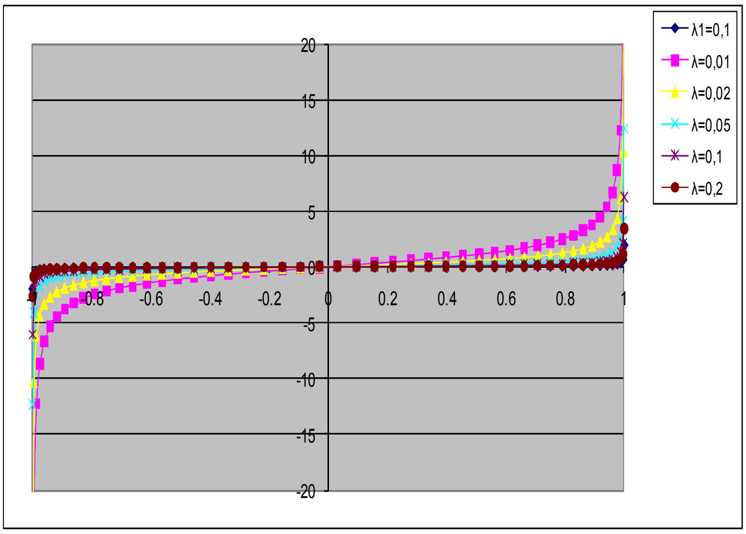
Фиг. 4



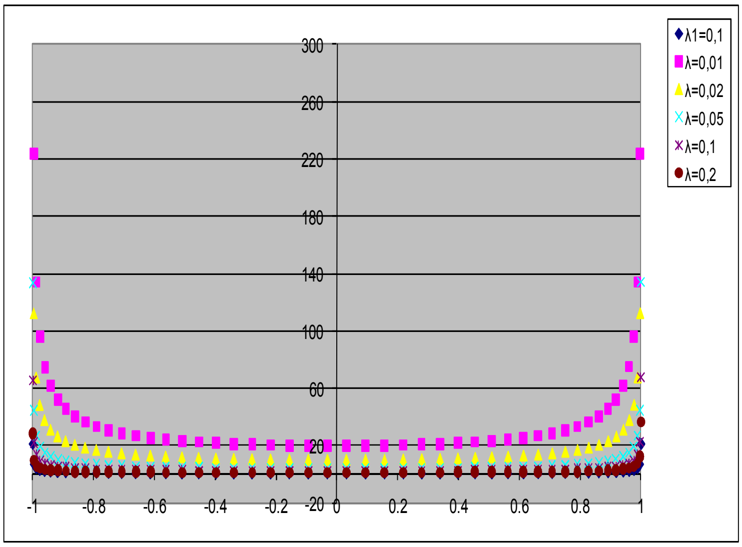
Фиг. 5

На этих графиках также наблюдаются отмеченные выше закономерности.

Наконец, на фиг. 6 и 7, соответственно, подслучаям a) и b), для сравнения приведены графики изменения касательных контактных напряжений второго и третьего частных случаев. Это сравнение показывает, что при фиксированном λ_1 и при уменьшении параметра $\alpha = a/H = \pi\lambda$, когда высота H полосы возрастает и, следовательно, в предельном случае полоса переходит в полуплоскость, значения контактных напряжений приближаются к соответствующим значениям в случае полуплоскости, т.е. напряжения в третьем частном случае приближаются к соответствующим значениям во втором частном случае. Это подтверждается также таблицами числовых значений контактных напряжений, которые из-за недостатка места здесь не приводятся.



Фиг. 6



Фиг. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. //Ingr. Arch., 1932. Bd.3. №2. S.123-129.
2. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. //Quart. J. Mech. and Appl. Math.,1955. V.8. №2. Pp.164-178.
3. Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben über geschweißte oder geklebte Verbindungen. //Österr. Ing. – Arch., 1964. Bd.18. №3-4. S.284-292.
4. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от краевого ребра жёсткости к листу (пересмотр задачи Мелана). // Прикл. мех. Труды амер. общ. инж.- мех., сер. Е. 1967. Т.34. №3. С.233-242.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493с.
6. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т.32. Вып.4. С.632-646.
7. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. //ПММ. 1972. Т.36. Вып.5. С.770-787.
8. Григорян Э.Х. О коэффициентах интенсивности контактных напряжений в задачах для упругих тел с накладками. //Межвузовский сб. научных трудов, Механика. Ереван: Изд. ЕГУ. №5. С.130-140.
9. Агаян К.Л. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками. //Изв. АН СССР. МТТ. 1972. №5. С.34-45.
10. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
11. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. // В сб.: «Механика деформируемого твердого тела». Ереван: Изд-во НАН Армении, 1993. С.129-143.
12. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis a solution of crack problems, pp 368-425, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
13. Theocaris P.S., Iokimidis N.I. Numerical Integration Methods for the Solution of singular Integral Equations. //Quart. Appl Math. Vol. XXXV. №1. Pp.173-185. 1977.
14. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
15. Манукян Э.А., Мкртчян М.С. Об антиплоской задаче кусочно-однородного упругого слоя, содержащего на линии спая систему щелей и абсолютно жёстких тонких включений. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С. 21-33.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. М.: Наука, 1969. 344с.
17. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 270с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Григорян Марине Самвеловна – мл. н. сотр. Института механики НАН РА,
Тел.: (374 91)63 97 58., **E-mail:** gmarinchka@mail.ru

Поступила в редакцию 24.02.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №3, 2014 Механика

УДК 539.1

ПРОНИКАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В УПРУГУЮ ИЗОТРОПНУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ЧАСТЬ ГРАНИЦЫ КОТОРОЙ ИМЕЕТ ДВИЖУЩУЮСЯ ЖЁСТКУЮ ОПОРУ

Давтян А.В.

Ключевые слова: интегральные преобразования, свёртка, движущиеся трещины, смешанные граничные задачи.
Key words: integral transforms, convolution, moving cracks, mixed boundary value problems.

Դավթյան Ա.Վ.
Հարվածային ալիքի ներթափանցումը եզրի մի մասում փոփոխական արագությամբ շարժվող կոշտ հիմք ունեցող իզոտրոպ առաձգական կիսահարթություն

Դիտարկվում է հարվածային ալիքի՝ առաձգական իզոտրոպ կիսահարթություն թափանցման հարթ խնդիրը, որի մի մասն ունի կոշտ հիմք: Հիմքի եզրը շարժվում է փոփոխական արագությամբ: Խնդիրը լուծված է Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների և փաթույթների մեթոդով: Լուծված են կիսատարածության եզրով տարածվող հարվածային ալիքի վերաբերյալ մասնակի խնդիրներ: Որոշված են լարումների ինտենսիվության գործակիցները և լարումը կոնտակտի գծի վրա:

Davtyan A.V.
Penetration shock wave in elastic isotropic half-plane, boundary of which has the rigid support moving with arbitrary velocity

In present paper is considered the problem of penetration of the pressure in an isotropic elastic half-plane, boundary of which has the rigid support moving with arbitrary velocity. Solution of the plane problem is sought by method of integral transforms Laplace, Fourier and by method of the convolutions. Partial problems about a shock wave propagating along the boundary half-plane are solved. The stress intensity factors, stress on the line of contact is calculated.

Задача о распространении давления, заданного на границе, в глубь упругого или жидкого полупространства, изучалась в [1,2,3]. Решения краевых задач для анизотропной среды методом Смирнова-Соболева даны в [4], а методом интегральных преобразований – в [5,6]. Применение методов Смирнова-Соболева и интегральных преобразований к задачам динамической упругости дано в [7,8,9].

В настоящей работе рассматривается задача проникания давления в упругую изотропную полуплоскость, часть границы которой имеет жёсткую опору, а край опоры движется с переменнной скоростью. Решение плоской задачи находится методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье и методом свёрток [10,12,14]. Решаются частные задачи об ударной волне, распространяющейся по границе полуплоскости. Найдены коэффициенты интенсивности напряжений и напряжения на линии контакта.

§1. Возникновение фронта давления на жёсткой опоре

Рассматривается задача проникания давления в упругую изотропную полуплоскость, часть границы которой имеет жёсткую опору и опора движется с переменнной скоростью $\dot{\ell}(t)$, где $\ell(t)$ – закон движения края опоры. Опора занимает часть границы $x < \ell(t)$. В момент $t = 0$ имеем $u(0,x) = 0$ при $x < \ell(0)$ и $\sigma_{xy}(0,x) = -P \cdot H(\xi - x)$ при $x > \ell(0)$, где $\xi < 0$ и $H(x)$ есть единичная функция Хевисайда.

Уравнения движения для изотропной среды в плоском случае имеют вид:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$a^2\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}+b^2\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где a, b – скорости продольных и поперечных упругих волн.

Граничные условия при $y=0$ имеют вид

$$\sigma_{xy}=\rho b^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)=\sigma^+=-P_1 H\left(Vt+\xi-x\right) \text{ при } x>\ell(t),$$
$$u(t,x)=u^-(t,x)=0 \text{ при } x<\ell(t), \tag{1.2}$$
$$\sigma_{yy}=\rho\left(\left(a^2-2b^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+a^2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)=0 \text{ при } |x|<\infty,$$

где ρ – плотность среды, V есть скорость ударной волны, $P=\mathrm{const}$, $V=\mathrm{const}$, $V>a$. При $t=0$ имеем нулевые начальные условия $u=v=\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$.

Значения $\sigma_{xy}=\sigma^-(t,x)$ при $x<\ell(t)$ и $u=u^+(t,x)$ при $x>\ell(t)$ неизвестны.

Уравнения (1.1) и (1.2) будем решать с помощью преобразования Лапласа по времени t и преобразования Фурье по координате x (преобразование LF) и решение ищем в виде:

$$u=\frac{1}{4\pi^2 i}\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}u_n^{LF}(\mathrm{s},\mathrm{q})\exp\left(st-i\bar\beta_n y-iqx\right)dsdq,$$
$$\mathrm{v}=\frac{1}{4\pi^2 i}\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathrm{v}_n^{LF}(\mathrm{s},\mathrm{q})\exp\left(st-i\bar\beta_n y-iqx\right)dsdq, \tag{1.3}$$
$$\bar\beta_1(s,q)=i\sqrt{\frac{s^2}{a^2}+q^2},\quad \bar\beta_2(s,q)=i\sqrt{\frac{s^2}{b^2}+q^2}.$$

Тогда изображения функций $\sigma_{xy}(t,x)$, $u(t,x)$ (обозначим через σ_{xy}^{LF}, u^{LF}) связаны соотношениями:

$$u^{LF}(s,q)=S^{LF}(s,q)\sigma_{xy}^{LF}(s,q), \tag{1.4}$$

$$S^{LF}(s,q)=-\frac{s^2\sqrt{\dfrac{s^2}{b^2}+q^2}}{\rho b^4 R(s,q)},\quad R(s,q)=\left(\frac{s^2}{b^2}+2q^2\right)^2-4q^2\sqrt{\frac{s^2}{a^2}+q^2}\sqrt{\frac{s^2}{b^2}+q^2}$$

Здесь $s=-i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа, $\sigma_0>0$ и мало, $R(s,q)$ есть функция Рэлея. Стандартным путём можно провести факторизацию, т.е. представить $S^{LF}(s,q)=S_+^{LF}(s,q)S_-^{LF}(s,q)$, причём вид сомножителей $S_\pm^{LF}(s,q)$ зависит от диапазона, которому принадлежит скорость распространения трещины $\dot\ell(\mathrm{t})$. Аналитическая функция $S^{LF}(s,q)$ имеет следующие особые точки: $q=\pm is/a$,

$q=\pm is/b$ (точки ветвления) и $q=\pm is/c_R$ (простые полюса), где c_R – величина скорости волны Рэлея. Следуя [11] обычным путём, можно получить

$$S_+^{LF}(s,q)=\frac{\sqrt{\frac{s}{b}-iq}}{\frac{s}{c_R}-iq}D_+\left(\frac{iq}{s}\right),\ S_-^{LF}=-\frac{1}{2\rho b^4\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)}\frac{\sqrt{\frac{s}{b}+iq}}{\frac{s}{c_R}+iq}D_-\left(\frac{iq}{s}\right), \tag{1.5}$$

$$D_\pm\left(\frac{iq}{s}\right)=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{1/a}^{1/b}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta\mp\frac{iq}{s}}d\zeta\right),\ \varphi(\zeta)=\operatorname{arctg}\left[\frac{4\zeta^2\sqrt{\frac{1}{b^2}-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2-\frac{1}{a^2}}}{\left(\frac{1}{b^2}-2\zeta^2\right)^2}\right]$$

Для облегчения дальнейщих вычислений представим $D_\pm\left(\frac{iq}{s}\right)$ в некоторой иной форме [10,12]:

$$D_\pm\left(\frac{iq}{s}\right)=1+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}F_1(u)\frac{du}{u\mp\frac{iq}{s}},\ D_\pm^{-1}\left(\frac{iq}{s}\right)=1+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}F_2(u)\frac{du}{u\mp\frac{iq}{s}}, \tag{1.6}$$

$$F_1(u)=\gamma(u)\exp\left[\chi(u)\right],\quad F_2(u)=-\gamma(u)\exp\left[-\chi(u)\right],$$

$$\gamma(u)=\frac{\frac{4}{\pi}u^2\sqrt{u^2-\frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{b^2}-u^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}-2u^2\right)^4+16u^4\left(\frac{1}{b^2}-u^2\right)\left(u^2-\frac{1}{a^2}\right)}},\ \chi(u)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-u}.$$

Введём функции $P_\pm^{LFF}=1/S_\pm^{LFF}$. Обозначим через $S_\pm(t,x),P_\pm(t,x)$ оригиналы, соответственно, $S_\pm^{LF}(s,q),\ P_\pm^{LF}(s,q)$ и вычисляя их аналогично [10,12], получим

$$S_+(t,x)=\frac{H(x)}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[1-\frac{\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{1}{b}}}{\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}}}BH\left(\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}\right)\right]H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{b}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_{1/a}^{t/x}\frac{F_1(u)\sqrt{\frac{1}{b}-u}H\left(\frac{1}{b}-\frac{t}{x}\right)}{\left(\frac{1}{c_R}-u\right)\sqrt{\frac{t}{x}-u}}duH\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{a}\right)\right\}, \tag{1.7}$$

$$P_+(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\frac{H(x)}{\sqrt{x}}\left[D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\delta\left(t-\frac{x}{b}\right)+\int_{1/a}^{1/b}F_3(h)\delta(t-hx)dh\right]\right\}, \tag{1.8}$$

$$F_3(h)=\int\limits_{1/a}^{h}\frac{d}{du}\left(\frac{F_2(u)}{\sqrt{\frac{1}{b}-u}}\right)\frac{du}{\sqrt{h-u}},\ D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)=1+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_2(u)du}{u-\frac{1}{b}},\ B=1+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_1(u)du}{u-\frac{1}{c_R}},$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака, $F_1(u),F_2(u)$ даются формулой (1.6). Функции $S_-(t,x),P_-(t,x)$ получаются из (1.7) и (1.8) заменой x на $-x$ и умножением на постоянные соответственно $\left(-2\rho b^4\left(b^{-2}-a^{-2}\right)\right)^{-1}$ и $-2\rho b^4\left(b^{-2}-a^{-2}\right)$.

Представим функции $u^{LF}(s,q),\ \sigma_{xy}^{LF}(s,q)$ в виде

$$u^{LF}=u_+^{LF}+u_-^{LF},\quad \sigma^{LF}=\sigma_+^{LF}+\sigma_-^{LF},\tag{1.9}$$

где u_+^{LF},σ_-^{LF} – неизвестные функции, u_-^{LF},σ_+^{LF} есть изображения оригиналов $u_-(t,x),\sigma_+(t,x)$. Кроме того, нетрудно заметить, что функция $S^{LF}(s,q)$ такова, что указанная факторизация приводит к функциям $S_\pm^{LF}(s,q),P_\pm^{LF}(s,q)$, оригиналы которых удовлетворяют условиям:

$$S_-(t,x)=P_-(t,x)=0 \text{ при } x>-c_Rt,\tag{1.10}$$

$$S_+(t,x)=P_+(t,x)=0 \text{ при } x<c_Rt,\quad -c_R<\dot{\ell}(\mathrm{t})<c_R,$$

где $\dot{\ell}(\mathrm{t})$ – гладкая функция.

Подставляя (1.9) в (1.4) и учитывая (1.10), можно, как и в [10,12], получить решения поставленной задачи в форме свёрток по x,t:

$$\sigma_-(t,x)=-P_-**\left[\left(S_-**\sigma_+-P_+**u_-\right)H\left(\ell-x+0\right)\right];\tag{1.11}$$

$$u_+(t,x)=S_+**\left[\left(S_-**\sigma_+-P_+**u_-\right)H\left(x-\ell+0\right)\right].$$

Здесь символы $**$ означают свёртку по t,x.

Подставляя (1.7), (1.8) и значение σ_+ из (1.2) в (1.11) и учитывая, что по условию задачи $u_-=0$, на оси x получим:

$$\sigma_-(t,x)=-P_-**\left[\left(S_-**\sigma_+\right)H\left(\ell-x+0\right)\right];$$

$$u_+(t,x)=S_+**\left[\left(S_-**\sigma_+\right)H\left(x-\ell+0\right)\right].\tag{1.12}$$

Используя формулы (1.12), (1.8) и (1.2), вычислим свёртку $S_-**\sigma_+$, которая записывается в виде

$$S_-**\sigma_+=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{t}S_-\left(t',x'\right)\sigma_+\left(t-t',x-x'\right)dt'dx'.\tag{1.13}$$

Вычисление интеграла (1.13) с учётом (1.2) даёт

$$S_-**\sigma_+=\frac{P_0}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t-\frac{x-\xi}{V}}\,\mathrm{H}\left(t-\frac{x-\xi}{V}\right),\tag{1.14}$$

$$P_0 = \frac{-PB_1C_0}{\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{V}}},\ B_1 = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{V}}{\frac{1}{c_R}+\frac{1}{V}} D_-\left(\frac{1}{V}\right),\ C_0 = \frac{-1}{2\rho b^4\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)}$$

Подставляя (1.14) и значение $P_-\left(t,x\right)$ из (1.8) в (1.12), получаем:

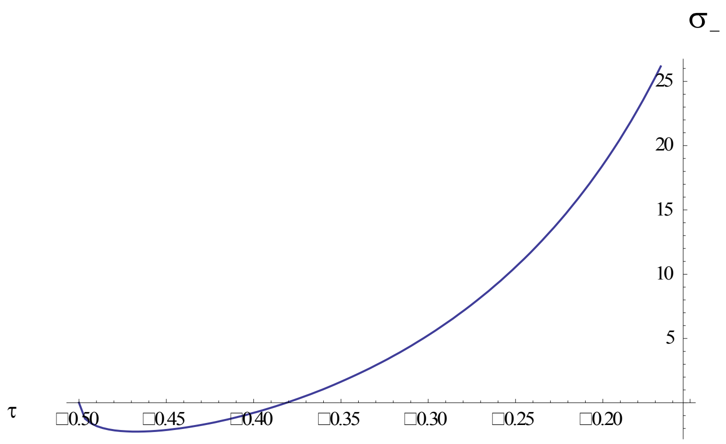
$$\sigma_-(t,x) = \frac{PB_1}{\pi}\left[D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)N\left(x,t,\xi,\frac{1}{b}\right)+\int\limits_{1/a}^{1/b}F_3\left(h\right)N\left(x,t,\xi,h\right)dh\right], \tag{1.15}$$

$$N\left(x,t,\xi,h\right)=\frac{1+\frac{1}{c_R}\dot{\ell}}{1+h\dot{\ell}}\theta\left(\frac{1}{b}\right)H\left(T_0-\frac{1}{V}\right)+\frac{\left(\frac{1}{c_R}+\frac{1}{V}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\theta\left(h\right)H\left(T_0-\frac{1}{V}\right)\right)}{\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{V}}\sqrt{h+\frac{1}{V}}},$$

$$\theta\left(h\right)=\sqrt{\frac{\left(\ell_0-\xi\right)\left(T_0-\frac{1}{V}\right)}{\left(\ell_0-x\right)\left(h+\frac{1}{V}\right)}},\ T_0=\frac{t_0}{\ell_0-\xi},\ \ell_0=\ell\left(t_0\right),\ \ell\left(t_0\right)-x-\frac{t-t_0}{h}=0.$$

Аналогичным путём можно получить значение функции $u^+\left(t,x\right)$ при $x>\ell\left(t\right)$.

Сделаны расчёты по (1.15) для неподвижного случая, т.е. при $\ell\left(t\right)\equiv 0$, для следующих значений параметров $a/b=2,\ a/V=0.5,\ P=100$ и построен график функции σ_- в зависимости от $\tau=\dfrac{x}{a\left(t+\xi V^{-1}\right)}$ (фиг.1).



Фиг.1

Как видно, на участке $-\dfrac{1}{2}<\tau<-0.38$ имеет место растяжение, а при $-0.38<\tau<0$ имеет место сжатие.

Учитывая, что при $x \to \ell(t)$ и $t_0 \to t$ имеем $\dfrac{\ell(t)-x}{\ell(t_0)-x} \to 1+h\dot{\ell}(t)$, можно из (1.15) получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x\to\ell-0} \sigma^- \sqrt{2\pi(\ell-x)} = \frac{\sqrt{2}PB_1B_2\left(1+\dfrac{\dot{\ell}}{c_R}\right)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{V}}}\sqrt{T-\frac{1}{V}}\sqrt{\ell-\xi}\,H\left(T-\frac{1}{V}\right), \tag{1.16}$$

$$B_2 = \frac{D_+^{-1}\left(\dfrac{1}{b}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{b}\dot{\ell}}} + \int\limits_{1/a}^{1/b} \frac{F_3(h)}{\sqrt{1+h\dot{\ell}}}dh,\ \ T=\frac{t}{\ell-\xi},\ \ \ell=\ell(t),\ \ \dot{\ell}=\dot{\ell}(t).$$

Подставляя из (1.8) значение функции $F_3(h)$ в (1.16) и изменив порядок интегрирования в двухкратном интеграле, можно записать:

$$\lim_{x\to\ell-0} \sigma^- \sqrt{2\pi(\ell-x)} = \frac{PB_1\sqrt{2}\left(1+c_R^{-1}\dot{\ell}\right)K\left(\dot{\ell}\right)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{V}}\sqrt{1+\dfrac{1}{b}\dot{\ell}}}\sqrt{T-\frac{1}{V}}\sqrt{\ell-\xi}\,H\left(T-\frac{1}{V}\right), \tag{1.17}$$

$$K\left(\dot{\ell}\right) = \left\{1+\dot{\ell}\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_2(u)}{1+u\dot{\ell}}du\right\}.$$

§2. Взрыв на границе полуплоскости вне опоры.

В случае, когда взрыв производится при $x=\xi,\ \xi>0$ вне опоры в момент $t=0$ и край опоры движется со скоростью $\dot{\ell}(t)$, граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{xy} = \sigma_+ = -PH(Vt-x+\xi)H(Vt+x-\xi) \quad \text{при } x>\ell(t)$$

$$u(t,x) = u^-(t,x) = 0 \quad \text{при } x<\ell(t) \tag{2.1}$$

$$\sigma_{yy} = \rho\left(\left(a^2-2b^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+a^2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)=0 \quad \text{при } |x|<\infty.$$

Подставляя значение $S_-(t,x)$ из (1.7) и σ_+ из (2.1) в (1.13), получаем

$$S_-**\sigma_+ = \frac{PC_0}{\sqrt{\pi}}\left\{P\sqrt{t-\frac{x-\xi}{V}}H\left(t-\frac{\xi-x}{b}\right)H\left(t-\frac{x-\xi}{V}\right)+\right. \tag{2.2}$$

$$+P_2\sqrt{t+\frac{x-\xi}{V}}H\left(\frac{\xi-x}{b}-t\right)H\left(t+\frac{x-\xi}{V}\right)+$$

$$+P_3\sqrt{\frac{\xi-x}{c_R}-t}H\left(t-\frac{\xi-x}{b}\right)H\left(\frac{\xi-x}{c_R}-t\right)+$$

$$+P_4\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{t}{\xi-x}}\frac{\psi(u)\sqrt{t+u(x-\xi)}}{\left(c_R^{-1}-u\right)}duH\left(\frac{\xi-x}{b}-t\right)H\left(t+\frac{x-\xi}{a}\right)\Bigg\},$$

$$\psi(u)=\frac{F_1(u)\sqrt{\frac{1}{b}-u}}{\frac{1}{V^2}-u^2},\ P_1=\frac{2\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{V}}}{\frac{1}{c_R}+\frac{1}{V}}D_-\left(\frac{1}{V}\right),\ P_2=\frac{2\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{V}}}{\frac{1}{c_R}-\frac{1}{V}}D_+\left(\frac{1}{V}\right),$$

$$P_3=\frac{-\frac{4B}{V}\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{1}{b}}}{\frac{1}{c_R^{\,2}}-\frac{1}{V^2}},\ P_4=\frac{4}{V},\ D_\pm\left(\frac{1}{V}\right)=1+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_1(u)}{u\mp\frac{1}{V}}du,\ B=1+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_1(u)}{u-\frac{1}{c_R}}du.$$

Произведя выкладки аналогично [10], из (1.12), (2.2) можно получить:

$$\sigma^-(t,x)=\frac{P}{\pi}\left[D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)M\left(t,x,\xi,\frac{1}{b},\right)+\int\limits_{1/a}^{1/b}F_3(h)M\left(t,x,\xi,h\right)dh\right],\qquad(2.3)$$

$$M(t,x,\xi,h)=M_0(t,x,\xi,h)+M_+(t,x,\xi,h)+M_-(t,x,\xi,h)+M_1(t,x,\xi,h),$$

$$M_0(t,x,\xi,h)=\frac{1+c_R^{-1}\dot{\ell}(t_0)}{1+h\dot{\ell}(t_0)}\left\{P_1\sqrt{t_0-\frac{\ell_0-\xi}{V}}H\left(t_0-\frac{\xi-\ell_0}{b}\right)H\left(t_0-\frac{\ell_0-\xi}{V}\right)+\right.$$

$$+P_2\sqrt{t_0+\frac{\ell_0-\xi}{V}}H\left(\frac{1}{b}-T_0\right)H\left(T_0-\frac{1}{V}\right)+P_3\sqrt{\frac{\xi-\ell_0}{c_R}-t_0}H\left(\frac{\xi-\ell_0}{c_R}-t_0\right)H\left(t_0-\frac{\xi-\ell_0}{b}\right)+$$

$$\left.+P_4\int\limits_{1/a}^{T_0}\frac{\psi(u)\sqrt{t_0+u(\ell_0-\xi)}}{\left(\frac{1}{c_R}-u\right)}duH\left(\frac{\xi-\ell_0}{b}-t_0\right)H\left(t_0+\frac{\ell_0-\xi}{a}\right)\right\}\frac{H(\ell_0-x)}{\sqrt{\ell_0-x}},$$

$$M_\pm(t,x,\xi,h)=\frac{P_1\left(c_R^{-1}\pm V^{-1}\right)}{\sqrt{h\pm V^{-1}}}\left\{\frac{\pi}{2}-\theta\left(\pm\frac{1}{V}\right)H\left(t_0\pm\frac{\xi-\ell_0}{V}\right)\right\}\varphi_\pm,$$

$$M_1(t,x,\xi,h)=P_4\left\{\frac{\pi}{2}\int\limits_{1/a}^{T}\frac{\psi(u)}{\sqrt{h-u}}du-\int\limits_{1/a}^{T_0}\frac{\psi(u)\theta(-u)}{\sqrt{h-u}}duH\left(T_0-\frac{1}{a}\right)\right\}\varphi_1,$$

$$\theta(u)=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(T_0+u)(\xi-\ell_0)}{(h+u)(\ell_0-x)}},\ \ell(t_0)-x-\frac{t-t_0}{h}=0,\ \ell_0=\ell(t_0),$$

$$\varphi_+=H\left(t-\frac{x-\xi}{V}\right)H\left(t-\frac{\xi-x}{b}\right)H(\ell_0-x),\varphi_-=H\left(T-\frac{1}{V}\right)H\left(\frac{1}{b}-T\right)H(\ell_0-x),$$

$$\varphi_1=H\left(T-\frac{1}{a}\right)H\left(\frac{1}{b}-T\right)H(\ell_0-x),\ T_0=\frac{t_0}{\xi-\ell_0},T=\frac{t}{\xi-x}.$$

Учитывая значение функции $F_3(h)$ из (1.8), для коэффициента интенсивности напряжений будем иметь:

$$\lim_{x\to\ell-0}\sigma^-\sqrt{2\pi(\ell-x)}=P\sqrt{\frac{2}{\pi}}K(\dot{\ell})\frac{\left(1+\dot{\ell}c_R^{-1}\right)}{\sqrt{1+\dot{\ell}b^{-1}}}M'(t,x,\xi)H(\ell-x), \tag{2.4}$$

$$M'(t,x,\xi)=P_1\sqrt{t-\frac{\ell-\xi}{V}}H\left(t-\frac{\xi-\ell}{b}\right)H\left(t-\frac{\ell-\xi}{V}\right)+$$

$$+P_2\sqrt{t+\frac{\ell-\xi}{V}}H\left(\frac{1}{b}-T_1\right)H\left(T_1-\frac{1}{V}\right)+P_3\sqrt{\frac{\xi-\ell}{c_R}-t}H\left(\frac{1}{c_R}-T_1\right)H\left(T_1-\frac{1}{b}\right)+$$

$$+P_4\int_{1/a}^{T_1}\frac{\psi(u)\sqrt{t+u(\ell-\xi)}}{\left(c_R^{-1}-u\right)}du H\left(\frac{1}{b}-T_1\right)H\left(T_1-\frac{1}{a}\right),$$

$$K(\dot{\ell})=\left\{1+\dot{\ell}\int_{1/a}^{1/b}\frac{F_2(u)}{1+u\dot{\ell}}du\right\},\ T_1=\frac{t}{\xi-\ell},\ \ell=\ell(t),\ \dot{\ell}=\dot{\ell}(t)\cdot$$

Из (1.17) и (2.4) видно, что при $x\to\ell(t)-0$ имеется особенность вида $\left(\ell(t)-x\right)^{-1/2}$. В обеих задачах вычисления для σ_{xy} показывают, что около границы $x=0$ имеет место растяжение, а дальше – сжатие.

Полученные результаты позволяют изучить напряжённое состояние грунта при наличии опоры, создаваемое ударной волной от взрыва. При $\ell(t)=0$ эти задачи решены в работе [10] методом Винера-Хопфа, полученные решения совпадают.

Автор благодарит д.ф.-м.н., профессора А.Н.Мартиросяна за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А.Я., Поручиков В.Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. М.: МГУ, 1970. 121с.
2. Огурцов К.И. Динамические задачи для полупространства в случае осевой симметрии. //Уч. зап. ЛГУ, сер. мат. 1951. №149. Вып. 24. С.3–117.
3. Багдоев А.Г. Пространственные нестационарные задачи движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1961. 276с.
4. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела.//ПММ. 1961. Т.25. Вып.5.

5. Norris A.N., Achenbach J.D. Elastic Wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material.//Q.J. Mech. Appl. Math. 1984. Vol. 37. Pt.4. P.565-580.
6. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н. Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы. //МТТ. 1976. №1. С.107–117.
7. Freund L.B. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading .//J. Mech. Phys. Solids. V.20. 1972. I, p.129, II, p.141.
8. Багдоев А.Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитотермоупругости.//Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1974. Т.27. №2. С.13–23.
9. Флитман Л.М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости. //ПММ. 1959. Т.23. Вып.4. С.697–705.
10. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. Ереван: «Зангак-97», 2007. 244с.
11. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ, 1962. 280с.
12. Сарайкин В.А., Слепян Л.И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. //МТТ. 1979. №4.
13. Baker B.R. Dynamic stresses created by a moving crack. // Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V.29. №3.
14. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328с.

Сведения об авторе:

Давтян Ануш В. – преподаватель кафедры математики Горисского государственного университета

Тел.: 077071366

E-mail: davtyananush@gmail.com

Поступила в редакцию 18.02.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №3, 2014 Механика

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ДУГОВУЮ ЧАСТЬ КОНТУРА КРУГОВОГО СЕКТОРА НА ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ГЛАДКОГО КОНТАКТА НА РАДИАЛЬНЫХ СТОРОНАХ. ЧАСТЬ II.

Саргсян А.М.

Ключевые слова: круговой сектор, гладкий контакт, метод разделения переменных, особенность напряжений, коэффициент при особенности.
Key words: circular sector, smooth contact, method of separation of variables, singularity of stresses, coefficient with the singularity.

Սարգսյան Ա.Մ.
Շառավղային կողմերին ողորկ կոնտակտային պայմաններով շրջանային սեկտորում լարումների վարքի վրա եզրագծի աղեղային մասի եզրային պայմանների տիպի ազդեցության մասին: Մաս II

Դիտարկված է բարակ շրջանային սեկտորի առաձգական վիճակը, երբ շառավղային կողմերի վրա տեղի ունի ողորկ կոնտակտի պայման, իսկ եզրագծի աղեղային մասի վրա տրված են նորմալ և շոշափող տեղափոխությունները:

Նախորդ աշխատանքներում [1-6] սեկտորի եզրագծի աղեղային մասի վրա տրված էին՝ 1) նորմալ և շոշափող լարումներ, 2) նորմալ լարում և շոշափող տեղափոխություն, 3) նորմալ տեղափոխություն և շոշափող լարում: Ցույց էր տրված, որ այն դեպքերում, երբ սեկտորի բացվածքի α անկյանը ձգտում է π-ի կամ 2π-ի, լարումները ունենում են $r^{-1+\varepsilon}$ տիպի եզակիության ($\varepsilon \to 0$, երբ $\alpha \to \pi$, կամ $\alpha \to 2\pi$), իսկ եզակիության գործակիցները, եզրագծի աղեղային մասի ընդհանուր բեռնավորման դեպքում, առաջին խնդրում զրոից տարբեր են, երկրորդ և երրորդ խնդրում ձգտում են զրոի:

Այստեղ հետազոտված է սեկտորի եզրագծի աղեղային մասի բեռնավորման չորրորդ դեպքը: Խնդրի լուծումը կառուցված է փոփոխականների անջատման մեթոդի օգնությամբ:

Sargsyan A.M.
On the influence of boundary conditions type on the arch part of the contour of circular sector on the behavior of stresses in the conditions of a smooth contact on the radial sides. Part II.

An elastic state of a thin circular sector, when on the radial sides the condition of contact with rigid stamp without friction (conditions of smooth contact) is established and on the arch part of the contour normal and tangential displacements are given, is considered.

In the earlier investigations [1-6] on the arch part of the contour of the sector 1) normal and tangential stresses, 2) normal stress and tangential displacement, 3) normal displacement and tangential stress were given. It has been shown, that in these cases, when the wedge angle opening α tends to π or 2π, the stresses have the singularity of $r^{-1+\varepsilon}$ type ($\varepsilon \to 0$ at $\alpha \to \pi$ or $\alpha \to 2\pi$) and the coefficients with such singularity in the conditions of general loading of the contour arch part in the first problem are different from zero, and in the second and third problems they vanish.

Here the fourth case of loading of the arch part of the boundary sector is analized. The solution of the problem is built with the help of the method of separation of variables.

Рассматривается упругое состояние тонкого кругового сектора, когда на радиальных сторонах осуществляются условия соприкасания с жёстким штампом без трения (условия гладкого контакта), а на дуговой части контура заданы нормальные и касательные перемещения.

В ранних исследованиях [1– 6] на дуговой части контура сектора были заданы: 1) нормальные и касательные напряжения; 2) нормальное напряжение и окружное перемещение; 3) нормальное перемещение и касательное напряжение. Было показано, что в этих случаях, когда угол раствора клина α стремится к π или 2π, напряжения имеют особенность типа $r^{-1+\varepsilon}$ ($\varepsilon \to 0$ при $\alpha \to \pi$ или $\alpha \to 2\pi$). Коэффициенты при такой особенности в условиях общего нагружения дуговой части контура в первой задаче отличны от нуля, а во второй и третьей задачах они стремятся к нулю.

Здесь анализируется четвёртый случай нагружения дуговой части границы сектора. Решение задачи строится с помощью метода разделения переменных.

Упругое состояние кругового сектора с единичным радиусом и произвольным углом раствора α определяется решением бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta\Phi\left(r,\varphi\right)=0 \tag{1}$$

при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах [7]

$$\tau_{r\varphi}\left(r,0\right)=u_{\varphi}\left(r,0\right)=0, \tag{2}$$

$$\tau_{r\varphi}\left(r,\alpha\right)=u_{\varphi}\left(r,\alpha\right)=0, \tag{3}$$

когда на дуговой части контура заданы компоненты перемещений:

$$u_r\left(1,\varphi\right)=f_1\left(\varphi\right),\ u_{\varphi}\left(1,\varphi\right)=f_2\left(\varphi\right),\ f_2\left(0\right)=f_2\left(\alpha\right)=0. \tag{4}$$

Методом разделения переменных решение бигармонического уравнения представляется в виде [8]

$$\Phi\left(r,\varphi\right)=r^{\lambda+1}\left[AS_{\varphi}^{+}+BC_{\varphi}^{+}+CS_{\varphi}^{-}+DC_{\varphi}^{-}\right], \tag{5}$$

где A,B,C,D – постоянные интегрирования, λ – произвольный параметр,

$$S_{\varphi}^{\pm}=\sin\left(\lambda\pm1\right),C_{\varphi}^{\pm}=\cos\left(\lambda\pm1\right)\varphi.$$

Напряжения через функцию Эри $\Phi\left(r,\varphi\right)$ выражаются формулами:

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},\quad \sigma_{\varphi}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2},\quad \tau_{r\varphi}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right). \tag{6}$$

С помощью закона Гука, соотношения Коши и формул (6) для перемещений $u_{\varphi}\left(r,\varphi\right)$ получим:

$$Eu_{\varphi}\left(r,\varphi\right)=\left[-A\lambda^{+}\nu^{+}C_{\alpha}^{+}+B\lambda^{+}\nu^{+}S_{\alpha}^{+}-C\left(\lambda^{-}\nu^{+}+4\right)C_{\alpha}^{-}+D\left(\lambda^{-}\nu^{+}+4\right)S_{\alpha}^{-}\right]r^{\lambda}, \tag{7}$$

$$\lambda^{\pm}=\lambda\pm1,\quad \nu^{\pm}=1\pm\nu.$$

Удовлетворяя граничным условиям (2) и (3), для определения неизвестных постоянных A, B, C и D получим однородную систему линейных алгебраических уравнений [1– 6]. Условие существования нетривиального решения этой системы даёт $A=C=0$,

$$\sin(\lambda+1)\alpha\sin(\lambda-1)\alpha=0. \tag{8}$$

Корни уравнения (8) действительные и простые,

$$\lambda_k=\alpha_0 k+1,\quad \tilde{\lambda}_n=\alpha_0 n-1,\quad \alpha_0=\pi/\alpha, \tag{8$'$}$$

причём, $\lambda_k>0,\quad \tilde{\lambda}_n>0.$ (9)

Условия (9), в зависимости от величины α, ограничивают область изменения k и n;

I. $0<\alpha<2\pi,\ (k=0,1,2,...),\ (n=2,3,4,...),$

II. $0<\alpha<\pi,\ (k=0,1,2,...),\ (n=1,2,3,...),$

III. $\pi<\alpha<2\pi,\ (k=-1,0,1,...),\ (n=2,3,4,...).$

Исходя из того, что функции

$$\Phi_{kn}(r,\varphi)=D_k r^{\lambda_k+1}\cos(\lambda_k-1)\varphi+B_n r^{\tilde{\lambda}_n+1}\cos(\tilde{\lambda}_n+1)\varphi$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2), (3), функции напряжений Эри для этих трёх случаев будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix}\Phi_I\\ \Phi_{II}\\ \Phi_{III}\end{Bmatrix}&=D_{-1}\begin{Bmatrix}0\\0\\\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{2-\alpha_0}+D_0r^2+D_1\begin{Bmatrix}\cos\alpha_0\varphi\\0\\\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{2+\alpha_0}+\\ &+\begin{Bmatrix}a=2\\a=1\\a=2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k r^{\lambda_k+1}+B_k r^{\tilde{\lambda}_k+1}\right]\cos\alpha_0 k\varphi.\end{aligned} \tag{10}$$

Напряжения и перемещения, соответствующие этим функциям, примут вид:

$$\begin{aligned}\text{I.}\ \begin{Bmatrix}\sigma_\varphi\\ \tau_{r\varphi}\\ \sigma_r\end{Bmatrix}&=+2D_0\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix}+D_1\begin{Bmatrix}(1+\alpha_0)(2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\\ \alpha_0(1+\alpha_0)\sin\alpha_0\varphi\\ (1+\alpha_0)(2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{\alpha_0}+\\ &+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\begin{Bmatrix}(\lambda_k+1)\\(\lambda_k-1)\\(3-\lambda_k)\end{Bmatrix}\lambda_k r^{\lambda_k-1}+B_k\tilde{\lambda}_k(\tilde{\lambda}_k+1)\begin{Bmatrix}1\\1\\-1\end{Bmatrix}r^{\tilde{\lambda}_k-1}\right]\begin{Bmatrix}\cos\alpha_0k\varphi\\ \sin\alpha_0k\varphi\\ \cos\alpha_0k\varphi\end{Bmatrix},\end{aligned} \tag{11$'$}$$

$$\text{II.}\ \begin{Bmatrix}\sigma_\varphi\\ \tau_{r\varphi}\\ \sigma_r\end{Bmatrix}=2D_0\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k\begin{Bmatrix}(\lambda_k+1)\\(\lambda_k-1)\\(3-\lambda_k)\end{Bmatrix}\lambda_k r^{\lambda_k-1}+B_k\tilde{\lambda}_k(\tilde{\lambda}_k+1)\begin{Bmatrix}1\\1\\-1\end{Bmatrix}r^{\tilde{\lambda}_k-1}\right]\begin{Bmatrix}\cos\alpha_0k\varphi\\ \sin\alpha_0k\varphi\\ \cos\alpha_0k\varphi\end{Bmatrix}, \tag{11$''$}$$

$$\text{III. }\begin{Bmatrix}\sigma_\varphi\\ \tau_{r\varphi}\\ \sigma_r\end{Bmatrix}=D_{-1}\begin{Bmatrix}(1-\alpha_0)(2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\\ (1-\alpha_0)\alpha_0\sin\alpha_0\varphi\\ (1-\alpha_0)(2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{-\alpha_0}+$$

$$+2D_0\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix}+D_1\begin{Bmatrix}(1+\alpha_0)(2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\\ \alpha_0(1+\alpha_0)\sin\alpha_0\varphi\\ (1+\alpha_0)(2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{\alpha_0}+ \qquad (11''')$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\begin{Bmatrix}(\lambda_k+1)\\ (\lambda_k-1)\\ (3-\lambda_k)\end{Bmatrix}\lambda_k r^{\lambda_k-1}+B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)r^{\tilde{\lambda}_k-1}\right]\begin{Bmatrix}\cos\alpha_0 k\varphi\\ \sin\alpha_0 k\varphi\\ \cos\alpha_0 k\varphi\end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix}u_{rI}\\ u_{rII}\\ u_{rIII}\end{Bmatrix}=D_{-1}\cos\alpha_0\varphi\begin{Bmatrix}0\\0\\ \left(\lambda_1^+\nu^+-4\nu\right)\end{Bmatrix}r^{1-\alpha_0}+$$

$$+2D_0\nu^-r+D_1\cos\alpha_0\varphi\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix}\left(\lambda_1^+\nu^+-4\right)r^{1+\alpha_0}-$$

$$-\begin{Bmatrix}a=2\\a=1\\a=2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^+\nu^+-4\right)r^{\lambda_k}+B_k\lambda_k^-\nu^+r^{\tilde{\lambda}_k}\right]\cos\alpha_0 k\varphi, \qquad (12)$$

$$\begin{Bmatrix}u_{\varphi I}\\ u_{\varphi II}\\ u_{\varphi III}\end{Bmatrix}=D_{-1}\sin\alpha_0\varphi\begin{Bmatrix}0\\0\\ \left(\lambda_1^-\nu^+-4\right)\end{Bmatrix}r^{1+\alpha_0}+D_1\sin\alpha_0\varphi\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix}\left(\lambda_1^-\nu^++4\right)r^{1+\alpha_0}+$$

$$+\begin{Bmatrix}a=2\\a=1\\a=2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^++4\right)r^{\lambda_k}+B_k\lambda_k^-\nu^+r^{\tilde{\lambda}_k}\right]\sin\alpha_0 k\varphi. \qquad (13)$$

Входящие в (10)–(13) неизвестные B_k и D_k определяются из граничных условий (4):

$$\text{I.}\ \ 2D_0\nu^- - D_1\left(\lambda_1^+\nu^+ - 4\right)\cos\alpha_0\varphi - \sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^+\nu^+ - 4\right) + B_k\lambda_k^-\nu^+\right]\cos\alpha_0\varphi = Ef_1(\varphi),$$

$$D_1\left(\lambda_1^-\nu^+ + 4\right)\sin\alpha_0\varphi + \sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^+ + 4\right) + B_k\lambda_k^-\nu^+\right]\sin\alpha_0 k\varphi = Ef_2(\varphi), \quad (14)$$

$$\text{II.}\ \ 2D_0\nu^- - \sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^+\nu^+ - 4\right) + B_k\lambda_k^-\nu^+\right]\cos\alpha_0 k\varphi = Ef_1(\varphi),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^+ + 4\right) + B_k\lambda_k^-\nu^+\right]\sin\alpha_0 k\varphi = Ef_2(\varphi), \quad (14'')$$

$$\begin{gathered}\text{III.}\ D_{-1}\left(\lambda_1^+\nu^+ - 4\nu\right)\cos\alpha_0\varphi + 2D_0\nu^- - D_1\left(\lambda_1^+\nu^+ - 4\right)\cos\alpha_0\varphi - \\ -\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^+\nu^+ - 4\right) + B_k\lambda_k^-\nu^+\right]\cos\alpha_0 k\varphi = Ef_1(\varphi), \\ D_{-1}\left(\lambda_1^-\nu^+ - 4\right)\sin\alpha_0\varphi + D_1\left(\lambda_1^-\nu^+ + 4\right)\sin\alpha_0\varphi + \\ +\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^+ + 4\right) + B_k\lambda_k^-\nu^+\right]\sin\alpha_0 k\varphi = Ef_2(\varphi).\end{gathered} \quad (14''')$$

Так же, как и в работах [1– 6], умножая первые уравнения (14′) – (14‴) на $\cos\alpha_0 m\varphi\left(m = 0,1,2,...\right)$, а вторые уравнения – на $\sin\alpha_0 m\varphi\left(m = 1,2,3,...\right)$ и интегрируя по φ в интервале $(0,\alpha)$, находим все неизвестные величины:

$$\begin{gathered}\text{I.}\ \ 2D_0 = \frac{E}{\nu^-\alpha}\int_0^{\alpha} f_1(\varphi)d\varphi, \qquad D_1 = \frac{2E}{\alpha(\lambda_1^-\nu^+ + 4)}\tilde{f}_{21} = \frac{-2E}{\alpha(\lambda_1^+\nu^+ - 4)}\tilde{f}_{11}, \\ D_k = -\frac{E}{\alpha}\frac{(\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k})\lambda_k^-\nu^+}{\nu^{+2}\left(\nu^+ - 4\right)\lambda_k^-}, \quad B_k = \frac{E}{\alpha}\frac{\tilde{f}_{1k}\left(\lambda_k^-\nu^+ + 4\right) + \tilde{f}_{2k}\left(\lambda_k^+\nu^+ - 4\right)}{\nu^{+2}\left(\nu^+ - 4\right)\lambda_k^-},\end{gathered} \quad (15)$$

где

$$\tilde{f}_{1k} = \int_0^{\alpha} f_1(\varphi)\cos\alpha_0 k\varphi, \quad \tilde{f}_{2k} = \int_0^{\alpha} f_2(\varphi)\sin\alpha_0 k\varphi d\varphi, \quad \left(k = 2,3,4\right).$$

При этом, имеет место соотношение

$$\tilde{f}_{11}\left(\lambda_1^-\nu^+ + 4\right) + \tilde{f}_{21}\left(\lambda_1^+\nu^+ - 4\right) = 0, \quad (16)$$

$$\tilde{f}_{11} = \int_0^{\alpha} f_1(\varphi)\cos\alpha_0\varphi d\varphi, \ \tilde{f}_{21} = \int_0^{\alpha} f_2(\varphi)\sin\alpha_0\varphi d\varphi.$$

II. В этом случае выражения для D_0, D_k и B_k имеют вид (15), однако, здесь $k = 1,2,3...$

$$\text{III.}\quad D_{-1} = \frac{E}{\alpha}\,\frac{\tilde{f}_{11}\left(\lambda_1^- \nu^+ + 4\right) + \tilde{f}_{21}\left(\lambda_1^+ \nu^+ - 4\right)}{\left[\lambda_1^{-2} \nu^{+2} + 8\nu^-\right]},$$

$$D_1 = -\frac{E}{\alpha}\,\frac{\tilde{f}_{11}\left(\lambda_1^- \nu^+ - 4\right) - \tilde{f}_{21}\left(\lambda_1^+ \nu^+ - 4\nu\right)}{\left[\lambda_1^{-2} \nu^{+2} + 8\nu^-\right]}, \tag{17}$$

а для D_0 , D_k и B_k получим те же формулы (15) $(k = 2, 3, 4...)$.

Таким образом, решение поставленной задачи получено в виде сходящихся рядов (11′) – (11‴), коэффициенты которых определяются в явном виде. На дуговой части контура сектора ($r = 1$) эти ряды окажутся сходящимися при определённых условиях на функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$. Для улучшения их сходимости можно использовать известную методику [10].

Теперь с помощью формул (11′) – (11‴) исследуем поведение напряжений в окрестности угловой точки кругового сектора.

I. $0 < \alpha < 2\pi$. Из (11′) следует, что окрестность вершины кругового сектора находится в малонапряжённом состоянии (напряжения стремятся к нулю при $r \to 0$) [9], если $0 < \alpha < \pi$.

Если угол раствора клина $\alpha > \pi$, то напряжения при $r \to 0$ имеют степенную особенность типа $r^{\tilde{\lambda}_k - 1}$, причём, $-1 < \tilde{\lambda}_k - 1 < 0\,(k = 2, 3)$. Коэффициенты при такой особенности в общем случае отличны от нуля, но когда $\alpha \to 2\pi$, хотя показатель степенной особенности стремится к -1 (при $k = 2$), коэффициент при возникшей особенности $r^{-1+\varepsilon}$ ($\varepsilon \to 0$ при $\alpha \to 2\pi$), благодаря наличию множителя $\left(\tilde{\lambda}_k - 1\right)$, стремится к нулю. Этот вывод существенно отличается от того, который был получен в работе [4], где на дуговой части контура кругового сектора были заданы нормальные и касательные напряжения. Там коэффициенты при $r^{-1+\varepsilon}$ отличны от нуля.

II. $0 < \alpha < \pi$. Здесь при $0 < \alpha \le \pi/2$ окрестность угловой точки сектора находится в малонапряжённом состоянии, а при $\pi/2 < \alpha < \pi$ – напряжения имеют степенную особенность $r^{\tilde{\lambda}_k - 1}$, причём, $-1 < \tilde{\lambda}_k - 1 < 0$.

Коэффициенты при степенной особенности в общем случае отличны от нуля. И в данном случае, когда $\alpha \to \pi$, показатель степенной особенности $\left(\tilde{\lambda}_k - 1\right) \to -1$, а коэффициенты при такой особенности стремятся к нулю, благодаря множителю $\tilde{\lambda}_1 = \alpha_0 - 1$.

Если функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$, входящие в граничные условия (4), удовлетворяют условию (16), то, как следует из (15), коэффициент $B_1 = 0$ для любого значения угла α из интервала $0 < \alpha \le \pi$. Т.е. окрестность угловой точки сектора всегда находится в малонапряжённом состоянии. Отсюда и механический смысл условий (16) – это условие малонапряжённости окрестности вершины кругового сектора при $0<\alpha\leq\pi$.

III. $\alpha<\pi<2\pi$. При приближении к угловой точке сектора напряжения всегда имеют степенную особенность. Особенности напряжений обусловлены как первыми членами правой части (11‴), содержащими множители $r^{-\alpha_0}$, так и соответствующими членами рядов с множителями $r^{\tilde{\lambda}_k-1}$, причём, $-1<\alpha_0<-1/2$, $-1<\tilde{\lambda}_k-1<0 \quad (k=2,3)$.

Коэффициенты при особенности $r^{-\alpha_0}$ в общем случае нагружения дуговой части контура отличны от нуля. Но, когда $\alpha\to\pi$, эти коэффициенты стремятся к нулю. Если между функциями $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ имеет место соотношение (16), то тогда, $D_{-1}=0$ и в формулах (11‴) исчезает первый тип особенности напряжений.

При $\alpha\to 2\pi$ показатель особенности $\left(\tilde{\lambda}_k-1\right)\to -1$, однако, коэффициенты при особенности стремятся к нулю из-за наличия множителя $\tilde{\lambda}_k\,(k=2)$.

Таким образом, при рассмотрении задач упругого равновесия кругового сектора, когда на радиальных сторонах осуществляются условия гладкого контакта, а на дуговой части контура заданы четыре типа граничных условий, выяснилось, что только в первом случае из этих четырёх граничных условий коэффициенты при возникшей степенной особенности напряжений $r^{-1+\varepsilon}$ (где $\varepsilon\to 0$ при $\alpha\to\pi$ или $\alpha\to 2\pi$) отличны от нуля, а при трёх других случаях они стремятся к нулю. Это – случай нагружения дуговой части контура нормальным и касательным напряжениями. Поэтому, с точки зрения механики разрушения, первый тип нагружения дуговой части контура кругового сектора является наиболее опасным случаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды Международной конференции, посвящённой 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна, 25 – 28 сентября 2007, Цахкадзор, Армения. С. 368–372.
2. Саргсян А.М. Об упругом равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VII Международной конференции, 19 – 23 сентября, Горис – Степанакерт, 2008. С.394–398.
3. Саргсян А.М. О равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63, №4. С.31–37.
4. Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий, заданных на дуговой части контура кругового сектора, на поведение напряжений в условиях гладкого

контакта на радиальных сторонах. Часть I. //В сб. научных трудов Международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 4 – 8 октября, Дилижан, Армения, 2010. С.16–19.
5. Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий, заданных на дуговой части контура кругового сектора, на поведение напряжений в условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. Часть II. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VII Международной конференции, 19 – 23 сентября, Горис – Степанакерт, 2011. С.366–371.
6. Саргсян А.М. О влиянии типа граничных условий на дуговую часть контура кругового сектора на поведение напряжений в условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды международной конференции, посвящённой 100-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна. Т.2. 8 – 12 октября, 2012, Цахкадзор, Армения. С.171–175.
7. Каландия А.И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. // ПММ. 1969. Т.33. №1. С.132–135.
8. Williams M.L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extentions. // Journal of applied mechanics. 1952. December. P. 526 – 528.
9. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1987. 338с.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. М.: Наука, 1974. 655с.

Сведения об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич – канд.физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24/2.
Тел.: (+37410) 52-48-90.

E-mail: azat-sargsyan@mail.ru

Поступила в редакцию 06.12.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №3, 2014 Механика

УДК 539.3

ОБ УЛУЧШЕНИИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЕСОМОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Торосян В.С.

Ключевые слова: совокупность нерегулярных бесконечных систем, улучшение сходимости рядов, численный эксперимент.
Key words: set of non-regular infinite systems, numerical experiment.

Թորոսյան Վ.Ս.
Վերջավոր երկարությամբ կշիռ ունեցող հոծ առաձգական գլանի կոնտակտային խնդրի թվային լուծման զուգամիտության արագացումը

Աշխատանքում, հիմնվելով ոչ ռեգուլյար գծային հանրաշվական անվերջ հավասարումների համախմբի լուծումների ասիմպտոտիկայի վրա, գտնվել է մոտեցում, որը հնարավորություն է տալիս էապես կրճատել կարճեցված հավասարումների քանակը, որի լուծումների միջոցով հաշվվում են լարումները և տեղափոխությունները, ինչպես նաև պարզել լարումների վարքը անկյունային կետին մոտենալիս:

Torosyan V.S.
On improvement of convergence of the numerical solution of the contact problem for an elastic heavy cylinder of finite length

In the paper, based on the solutions of an infinite system of non-regular linear algebraic equations, an approach is found that allows to reduce essentially the number of shortened equations through which solutions the stresses and displacements are calculated as well as to determine the behavior of the stresses when approaching to the angular point.

В работе на основе анализа решения нерегулярной бесконечной системы, образованной из трёх бесконечных систем, после установления асимптотических свойств коэффициентов, посредством которых выражаются смещения и напряжения в цилиндре, используя новый метод ускорения сходимости тригонометрических рядов Фурье, удалось существенно сократить число уравнений, удерживаемых при решении нерегулярной системы, а также установить характер напряжений при подходе к угловой точке.

В работе [1] при помощи бигармонической функции А. Лява было получено решение осесимметричной задачи для сплошного упругого цилиндра конечной длины, находящегося под действием собственного веса, когда на нижнем торце цилиндра отсутствуют перемещения, а на другом торце и на боковой поверхности отсутствуют напряжения. После удовлетворения граничным условиям, решение задачи сведено к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, образованной из трёх нерегулярных бесконечных систем. И, как результат, при вычислении смещений и напряжений на торцевых поверхностях цилиндра мы сталкиваемся с плохой сходимостью рядов Фурье-Дини. Очевидно, что традиционные способы улучшения сходимости этих рядов [2] в этом случае не применимы. И, следовательно, основой для эффективного вычисления этих рядов может служить лишь анализ решений трёх нерегулярных бесконечных систем, т.е. установление асимптотических свойств неизвестных бесконечных систем, посредством которых выражаются смещения и напряжения.

В предлагаемой работе, основываясь на характер убывания коэффициентов рядов, посредством которых выражаются напряжения в цилиндре, предложен способ улучшения сходимости этих рядов.

1. Рассмотрим вначале выражение для нормального напряжения $\sigma_z(Ra,0)$ на нижнем торце цилиндра. Имеем [1]

$$\sigma_z(Ra,0)=-1+(1-\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_k Ra)}{J_0(\mu_k R)}q_1(k)\quad(0\le a<1) \tag{1.1}$$

Учитывая, что $a>0$ и используя асимптотическое выражение для функций Бесселя вещественного аргумента и корней уравнения $J_1(\lambda)=0$ [3], представление (1.1) запишем в виде:

$$\sigma_z(Ra,0)=-1+(1-\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{a}}\cos\left(k\pi a-\frac{\pi}{4}(1-a)\right)q_1(k)+$$

$$+(1-\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{J_0(\mu_k Ra)}{J_0(\mu_k R)}-\frac{(-1)^k}{\sqrt{a}}\cos\left(k\pi a-\frac{\pi}{4}(1-a)\right)\right]q_1(k) \tag{1.2}$$

Анализ численных результатов, проведённых в [1], показывает, что

$$q_1(k)\approx O\left(\frac{1}{k}\right). \tag{1.3}$$

Учитывая последнее и используя значения сумм рядов [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin ny}{n}=\frac{y}{2}\qquad(-\pi<y<\pi) \tag{1.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos ny}{n}=\ln\left(2\cos\frac{y}{2}\right)\qquad(-\pi<y<\pi), \tag{1.5}$$

выражение для $\sigma_z(Ra,0)$ представим в виде

$$\sigma_z(Ra,0)\approx-1+(1-\nu)\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{J_0(\mu_k Ra)}{J_0(\mu_k R)}-\frac{(-1)^k}{\sqrt{a}}\cos\left(k\pi a-\frac{\pi}{4}(1-a)\right)\right]q_1(k)+$$

$$+A\frac{(1-\nu)}{\sqrt{a}}\left[-\cos\frac{\pi(1-a)}{4}\ln\left(2\cos\frac{\pi a}{2}\right)+\frac{\pi a}{2}\sin\frac{\pi(1-a)}{4}\right]. \tag{1.6}$$

Постоянную A, входящую в выражение (1.6) и корректирующую связь (1.3), можно найти различными способами. Здесь использован следующий подход. Из совокупности урезанных бесконечных систем определяются коэффициенты $q_1(k)$.

Далее, вычисляя напряжение $\sigma_z(Ra,0)$ по формуле (1.1) и по формуле (1.6), содержащей неизвестную постоянную A, и приравнивая их в двух точках $a=0.02$ и $a=0.98$, найдём два значения A_1 и A_2, среднее арифметическое которых и принимается значением для постоянной A в формуле (1.6).

Из (1.6) непосредственно замечаем, что при подходе к угловой точке $a=1$ нормальное напряжение обладает логарифмической особенностью.

Рассмотрим теперь выражение $\tau_{rz}(Ra,0)$. Легко убедиться в том, что при вычислении касательного напряжения на нижнем закреплённом торце цилиндра плохая сходимость обусловлена наличием в выражении $\tau_{rz}(Ra,0)$ ряда по функциям Бесселя [1], который обозначим через $\tilde{\tau}_{rz}(Ra,0)$

$$\tilde{\tau}_{rz}(Ra,0)=\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{J}_1(\mu_k Ra)q_2(k) \quad (0\le a<1). \tag{1.7}$$

Учитывая, что $a>0$ и используя асимптотическое выражение для функций Бесселя вещественного аргумента, получаем:

$$\tilde{\tau}_{rz}(Ra,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathrm{J}_1(\mu_k a)-\frac{\sqrt{8}\cos\left[ka\pi-\frac{\pi}{4}(3-a)\right]}{\pi\sqrt{a}\sqrt{4k+1}}\right)q_2(k)+$$

$$+\frac{\sqrt{8}}{\pi\sqrt{a}}\cos\frac{\pi(3-a)}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_2(k)}{\sqrt{4k+1}}\cos(ka\pi)+$$

$$+\frac{\sqrt{8}}{\pi\sqrt{a}}\sin\frac{\pi(3-a)}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_2(k)}{\sqrt{4k+1}}\sin(ka\pi)\,. \tag{1.8}$$

Из численных результатов [1] следует, что

$$\frac{q_2(k)}{\sqrt{4k+1}}\approx O\left(\frac{(-1)^{\kappa}}{k^{3/5}}\right). \tag{1.9}$$

Введя обозначения для сумм рядов, которые можно выразить также через полилогарифмическую функцию,

$$S_0(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{3/5}}\sin n\pi y\,, \tag{1.10}$$

$$S_1(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{3/5}}\cos n\pi y\,, \tag{1.11}$$

составляющую $\tilde{\tau}_{rz}(Ra,0)$ можно представить в виде

$$\tilde{\tau}_{rz}\left(Ra,0\right)\approx\sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{J}_1\left(\mu_k Ra\right)-\frac{\sqrt{8}}{\pi\sqrt{a}\sqrt{4k+1}}\cos\left(ka\pi-\frac{\pi(3-a)}{4}\right)\right]q_2\left(k\right)+$$

$$+B\frac{\sqrt{8}}{\pi\sqrt{a}}\cos\frac{\pi(3-a)}{4}S_1\left(a\right)+B\frac{\sqrt{8}}{\pi\sqrt{a}}\sin\frac{\pi(3-a)}{4}S_0\left(a\right),\qquad(1.12)$$

откуда можно сделать вывод о существовании разрыва для касательного напряжения $\tau_{rz}\left(Ra,0\right)$ в угловой точке. Входящая в выражение (1.12) постоянная B определяется аналогично предыдущему случаю.

Рассмотрим теперь выражение $2Gu_r\left(R,za\right)$, которое, согласно [1], представляется тригонометрическим рядом Фурье

$$2Gu_r\left(R,za\right)=\left(1-\nu\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(k\pi a\right)q_3\left(k\right)\qquad\left(0\le a\le 1\right).\qquad(1.13)$$

Предполагается, что $\dfrac{\partial u_r\left(R,z\right)}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial^2 u_r\left(R,z\right)}{\partial^2 z}$ имеют скачки в угловой точке. Улучшение сходимости этого ряда проводится на основе метода, который изложен в работе [5].

2. В численном примере решаются укороченные бесконечные системы из 750, 150 и 96 уравнений [1]. Используя значения найденных из бесконечной системы неизвестных коэффициентов, построены графики для контактного давления $\sigma_z\left(r,0\right)/\rho gl,$ касательного напряжения $\tau_{rz}\left(r,0\right)/\rho gl$ и осевого перемещения $2Gu_{rz}\left(R,z\right)/\rho gl^2$, когда:

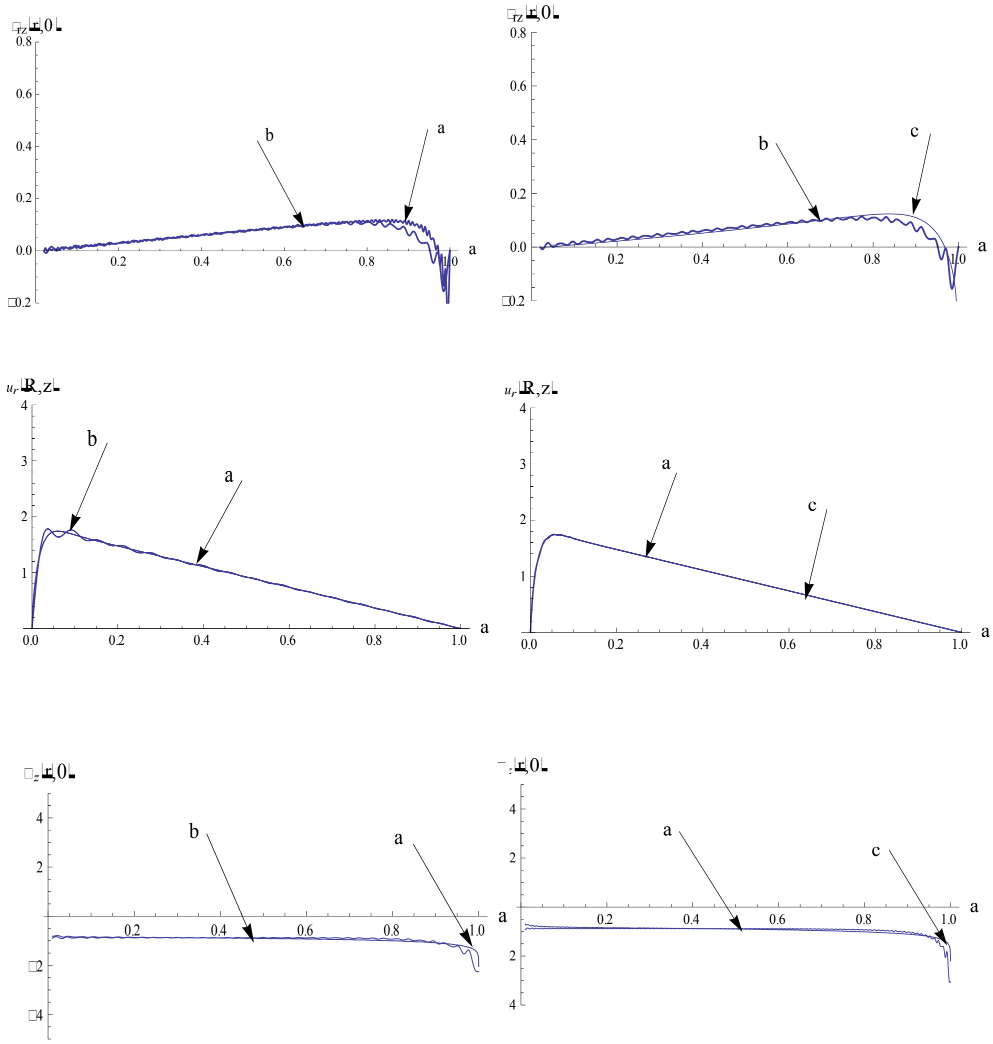
а) коэффициенты, входящие в эти ряды, определяются посредством решений из укороченной бесконечной системы из 750 уравнений [1];

b) коэффициенты, входящие в эти ряды, определяются посредством решений из укороченной бесконечной системы из 150 и 96 (для вычисления осевого перемещения) уравнений;

c) коэффициенты, входящие в эти ряды, определяются посредством решений из укороченной бесконечной системы из 150 и 96 (для вычисления осевого перемещения) уравнений с применением предлагаемых способов улучшения сходимости этих рядов.

Следует отметить, что, как и в работе [1], число коэффициентов, посредством которых при помощи соответствующих рядов вычисляются напряжения и перемещения, равно $\dfrac{n}{3}$.

Для наглядного представления эффективности предлагаемых способов улучшения сходимости рядов для $\sigma_z\left(r,0\right)/\rho gl,$ $\tau_{rz}\left(r,0\right)/\rho gl$, $2Gu_{rz}\left(R,z\right)/\rho gl^2$, графики, соответствующие разным случаям численного эксперимента, на фиг.1 приведены попарно.



Фиг.1. $\nu = 0.3,\ \ \beta = 16$

Заключение. На основе численных результатов решения бесконечной системы, после установления асимптотических свойств коэффициентов, посредством которых выражаются смещения и напряжения в цилиндре, используя при этом значения сумм некоторых бесконечных рядов, можно значительно улучшить их сходимость. Даже, урезав из нерегулярной бесконечной системы относительно небольшое количество уравнений, удаётся проводить эффективные вычисления для $\sigma_z\left(r,0\right), \tau_{rz}\left(r,0\right)$ и $u_z\left(R,z\right)$, а также установить характер особенностей напряжений при подходе к угловой точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Торосян В.С. Численно-аналитическое решение контактной задачи для весомого упругого цилиндра конечной длины. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 1. С.14-22.
2. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264с.
3. Грей Э., Метьюз Г.В. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во Иностр.Литер., 1953. 371с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100с.
5. Нерсесян А.Б. Квазиполиномы типа Бернулли и ускорение сходимости рядов Фурье кусочно-гладких функций. //Докл. НАН Армении. 2004. Т.104. №4. С.273-279.

Сведения об авторе:

Торосян Вардан Степаевич – научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: Республика Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (095)36 20 06; **E-mail:** mechins@sci.am

Поступила в редакцию 25.11.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №3, 2014 Механика

УДК 539.3

SHEAR WAVES IN PERIODIC WAVEGUIDE WITH ALTERNATING BOUNDARY CONDITIONS

Piliposyan D.G, Ghazaryan R.A., Ghazaryan K.B.

Keywords: shear waves, wavequide, Bloch conditions, Brillouin zone.
Ключевые слова: сдвиговые волны, волновод, условия Блоха, зона Брюллена.

Փիլիպոսյան Դ.Գ., Ղազարյան Ռ.Ա., Ղազարյան Կ.Բ.

Սահքի ալիքները խառը եզրային պայմաններով առաձգական պարբերական ալիքատարում

Ուսումնասիրված է սահքի ալիքների տարածման խնդիրը առաձգական պարբերական կառուցվածքով ալիքատարում: Ալիքատարը կազմված է տարբեր եզրային պայմաններով երեք տարբեր համասեռ նյութերից: Ֆլոկեյի տեսության սահմաններում, օգտագործելով անցման մատրիցի գաղափարը, Ֆլոկեյի ալիքային թվի ալիքի հաճախությունից կախվածության որոշման խնդիրը բերված է օրթոգոնալ անցման մատրիցի սեփական արժեքների որոշմանը: Թվային և անալիտիկ մոթոդների հիման վրա բերված է սահքի ալիքների հաճախությունների արգելված գոտիների կառուցվածքի հետազոտությունը:
Ցույց է տրված, որ իրարից տարբեր պարբերական եզրային պայմանների դեպքում հնարավոր է արգելման գոտիների տեղաշարժ՝ դեպի Բրյուլենի գոտու կենտրոն:

Пилипосян Д.Г., Казарян Р.А., Казарян К.Б.

Сдвиговые волны в упругом периодическом волноводе с альтернативнымн граничными условиями

Исследована задача распространения сдвиговых волн в упругом волноводе периодической структуры, состоящей из трёх различных материалов с однородными или альтернативно меняющимися граничными условиями на стенках волновода. В рамках теории Флоке, используя концепцию матрицы перехода, задача определения зависимости волновых чисел Флока от частоты волны сведена к задаче определения собственных чисел ортогональной блок-матрицы. Аналитически и численно проведён анализ дисперсионных соотношений структуры запретных зон частот сдвиговых волн. В случае альтернативных граничных условий задача решена численно. Показано, что в случае альтернативных граничных условий возможно смещение запретных зон частот к середине зоны Брюллена.

The propagation of shear waves in elastic waveguide of periodic structure consisting of three different materials with alternating along the guide walls boundary conditions is investigated. Using the transfer matrix approach the problem is reduced to the solution of a block transfer matrix eigenvalue problem. Bloth the dispersion and the band gap structure analysis have been carried out numerically. It is shown that for alternating boundary conditions along the waveguide walls, by modulating the ratio of the length of the unit cell to the width of the waveguide, the minimum widths of the stop bands can be moved to the middle of the Brillouin zone

The present paper is concerned with the study of Bloch waves in phononic waveguides. Phononic crystals are periodic materials that have a potential to control the propagation of elastic and acoustic waves [1]. In particular they have frequency ranges in which waves cannot propagate, called acoustic band gaps [2, 3]. Interest in this class of materials has been motivated by recent investigations of the electromagnetic analogues called photonic crystals [4]. These materials exhibit band gaps for electromagnetic waves, and are referred to in the popular scientific literature as «invisibility cloaks» [5].

The complete band gap phenomenon plays an important role in designing phononic crystal applications such as elastic wave filters, couplers, and waveguides, especially. The phononic crystal waveguide is an important elementary component to build an acoustic wave circuit. Different methods have been developed for investigating the properties of Bloch waves in waveguides. Using asymptotic methods the influence of the periodically varying thickness of a homogeneous waveguide on the trapped modes and cutoff frequencies has been studied in [6,7]. A modal decomposition approach based on eigenfunction expansion of elastic displacements and stresses, where the eigenfunctions are orthogonal wavefield modes of an infinite homogeneous waveguide, the problem of wave propagation in periodic waveguides has been investigated in [8,9]. This approach has been further applied to study the band gap spectrum and associated Bloch eigenfunction for out of plane and in-plane waves in acoustic waveguides with alternating boundary conditions along the guide walls for [10,11]. In all these papers the unit cell in a periodic waveguide is consist of two different materials. It is interesting to see the effect of an additional element in the unit cell on the properties of the dispersion curves and the band structure.

The purpose of this paper is to investigate shear Bloch waves in a finite-width infinite periodic elastic waveguide with the unit cell of a period *d* consisting of three different perfectly bonded homogeneous materials (Figure 1). We will investigate the effect of both non alternating and periodically alternating boundary conditions along the guide walls on the structure and properties of band gaps.

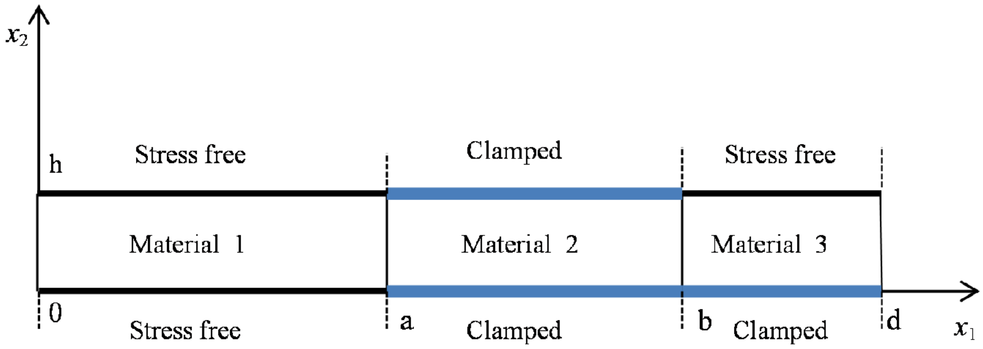


Fig.1. Periodic unit cell consisting of three different elastic materials under alternating boundary conditions along the guide walls

The equation of motion of elastic SH wave propagation in a waveguide is the following

$$\frac{\partial\sigma_{13}^{(s)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s)}}{\partial x_2}+\rho_s\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial t^2}=0,\quad s=1,2,3, \tag{1}$$

$$\sigma_{13}^{(s)}=G_s\frac{\partial u^{(s)}(x_1,x_2,t)}{\partial x_1},\quad \sigma_{23}^{(s)}=G_s\frac{\partial u^{(s)}(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}, \tag{2}$$

where ρ_s and G_s are the mass density and the rigidity respectively, superscripts s indicates that the functions belong to media s. Harmonic time dependence, $\exp(i\omega t)$ for the all physical variables with ω as wave angular frequency is assumed henceforth.

We will solve the problem of shear wave propagation in the periodic waveguide with the following three types of boundary conditions along the waveguides walls

I. Stress free boundary conditions in sub-domain $(s)=1,\quad x_1\in(0,a)$

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1,h,t)=0,\quad \sigma_{23}^{(1)}(x_1,0,t)=0,$$

II. Clamped boundary conditions in sub-domain $(s)=2,\quad x_1\in(a,b)$.

$$u^{(2)}(x_1,0,t)=u^{(2)}(x_1,h,t)=0,$$

III. Stress free on the upper wall and clamped on the lower wall $(s) = 3$ in sub-domain $x \in (b,d)$ $\sigma_{yz}^{(3)}(x_1, h, t) = 0$, $u^{(3)}(x, 0, t) = 0$.

Introducing dimensionless coordinates $x_1 = xh$, $x_2 = yh$ and parameters $\omega = \tilde{\omega} h / c_1$ $\alpha_s = c_s / c_1$ ($c_s = \sqrt{\rho_s / G_s}$) the solutions of equation (1) can be written as follows

$$u^s(x,y) = \sum_n \left[C_n^{(s)} \exp(iq_n^{(s)} x) + D_n^{(s)} \exp(-iq_n^{(s)} x) \right] \psi_n^{(s)}(y), \tag{3}$$

where

$q_n^{(s)} \neq 0$, $C_n^{(s)}, D_n^{(s)}$ are constants and $\psi_n^{(1)}(y) = \cos\left(p_n^{(1)} y\right)$,

$\psi_n^{(2)}(y) = \sqrt{2} \sin\left(p_n^{(2)} y\right)$, $\psi_n^{(3)}(y) = \sqrt{2} \sin\left(p_n^{(3)} y\right)$

$$p_n^{(1)} = \pi(n-1), \quad p_n^{(2)} = \pi n, \quad p_n^{(3)} = \pi(2n-1)/2, \tag{4}$$

$$q_n^{(s)} = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}^2}{\alpha_s^2} - \left(p_n^{(s)}\right)^2}. \tag{5}$$

To use the matrix based approach [8] the solution of (1)-(2) within each homogeneous material of the guide can be rewritten in the following vector form

$$\boldsymbol{U}^{(s)}(x,y) = \begin{pmatrix} u^{(s)}(x,y) \\ \dfrac{G_s}{G_1} \dfrac{\partial u^{(s)}(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix} = \sum_n^N \begin{pmatrix} a_n^{(s)}(x) \psi_n^{(s)}(y) \\ iq_n^{(s)} \gamma^{(s)} b_n^{(s)}(x) \psi_n^{(s)}(y) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

where

$$a_n^{(s)}(x) = C_n^{(s)} \exp(iq_n^{(s)} x) + D_n^{(s)} \exp(-iq_n^{(s)} x), \tag{7}$$

$$b_n^{(s)}(x) = C_n^{(s)} \exp(iq_n^{(s)} x) - D_n^{(s)} \exp(-iq_n^{(s)} x), \tag{8}$$

$\gamma^{(s)} = G_s / G_1$, $y \in (0, h)$.

Since the interface and Bloch conditions can be applied to each component of the vector $\boldsymbol{U}(x,y)$ they can be rewritten as follows:

$$\boldsymbol{U}^{(1)}(\beta_1, y) = \boldsymbol{U}^{(2)}(\beta_1, y), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{U}^{(2)}(\beta_2, y) = \boldsymbol{U}^{(3)}(\beta_2, y), \tag{10}$$

$$\boldsymbol{U}^{(1)}(0, y) = \lambda \boldsymbol{U}^{(3)}(\beta_3, y), \tag{11}$$

where $\lambda = \exp(ikd)$, k is the Bloch number, $\beta_1 = a/h$, $\beta_2 = b/h$, and $\beta_3 = d/h$.

Multiplying both sides of condition (9) by a single mode $\psi_m^{(2)}(y)$ and (10) and (11) by $\psi_m^{(3)}(y)$, integrating over the thickness of the waveguide, and introducing the vectors

$\boldsymbol{A}^{(s)}(x) = \left(a_1^{(s)}(x), a_2^{(s)}(x) \ldots a_N^{(s)}(x), b_1^{(s)}(x), b_2^{(s)}(x) \ldots b_N^{(s)}(x)\right)^T$,

conditions (9)-(11) can be written in the following block matrix form

$$\hat{M}_{12} \boldsymbol{A}^{(1)}(\beta_1) = \hat{M}_{22} \boldsymbol{A}^{(2)}(\beta_1), \tag{12}$$

$$\hat{M}_{23}\boldsymbol{A}^{(2)}(\beta_2) = \hat{M}_{33}\boldsymbol{A}^{(3)}(\beta_2), \tag{13}$$

$$\lambda\hat{M}_{13}\boldsymbol{A}^{(1)}(0) = \hat{M}_{33}\boldsymbol{A}^{(3)}(\beta_3). \tag{14}$$

In (12)-(14) $\hat{M}_{sj}$ are the following block matrices

$$\hat{M}_{12} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{12} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_1\hat{L}_{12} \end{pmatrix},\ \hat{M}_{13} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{13} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_1\hat{L}_{13} \end{pmatrix}, \hat{M}_{23} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{23} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_2\hat{L}_{23} \end{pmatrix},$$

$$\hat{M}_{22} = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_2 \end{pmatrix},\ \hat{M}_{33} = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_3 \end{pmatrix},$$

$\hat{I}$ is the identity matrix, and L_{sk} and Q_s are $N \times N$ matrices with the following elements

$$L_{sk}^{nm} = \int_0^1 \psi_n^{(s)}\psi_m^{(k)}dy,\ s < k,\quad Q_s^{mn} = i\gamma^{(s)}q_n^{(s)}\delta_{mn}, \tag{15}$$

where δ_{mn} is the Kronecker delta operator. We also need the transfer matrix within a homogeneous material [7]

$$\hat{T}^{(s)}(x',x) = \begin{pmatrix} \hat{C}^{(s)}(x',x) & i\hat{S}^{(s)}(x',x) \\ i\hat{S}^{(s)}(x',x) & \hat{C}^{(s)}(x',x) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

where $\hat{C}^{(s)}(x',x)$, $\hat{S}^{(s)}(x',x)$ are matrices with entries $\cos\left(q_n^{(s)}(x'-x)\right)$, $\sin\left(q_n^{(s)}(x'-x)\right)$.

First by using the transfer matrix we compute $\boldsymbol{A}^{(3)}(\beta_3)$ in terms of $\boldsymbol{A}^{(3)}(\beta_2)$ within material 3

$$\boldsymbol{A}^{(3)}(\beta_3) = \hat{T}^{(3)}(\beta_3,\beta_2)\boldsymbol{A}^{(3)}(\beta_2). \tag{17}$$

It follows from (13) that the interface transmission condition at $x = \beta_2$ can be written in the form

$$\boldsymbol{A}^{(3)}(\beta_2) = \left(\hat{M}_{33}\right)^{-1}\hat{M}_{23}\boldsymbol{A}^{(2)}(\beta_2), \tag{18}$$

where $\left(\hat{M}_{33}\right)^{-1}$ is the inverse matrix of $\hat{M}_{33}$. Further applying this procedure again

$$\boldsymbol{A}^{(2)}(\beta_2) = \hat{T}^{(2)}(\beta_2,\beta_1)\boldsymbol{A}^{(2)}(\beta_1),$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)}(\beta_1) = \left(\hat{M}_{22}\right)^{-1}\hat{M}_{12}\boldsymbol{A}^{(1)}(\beta_1),$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)}(\beta_1) = \hat{T}^{(1)}(\beta_1,0)\boldsymbol{A}^{(1)}(0),$$

and substituting these into (18) we will obtain the following relationship between $\boldsymbol{A}^{(3)}(\beta_3)$ and $\boldsymbol{A}^{(1)}(0)$

$$\boldsymbol{A}^{(3)}(\beta_3) = \hat{T}^{(3)}(\beta_3,\beta_2)\left(\hat{M}_{33}\right)^{-1}\hat{M}_{23}\hat{T}^{(2)}(\beta_2,\beta_1)\left(\hat{M}_{22}\right)^{-1}\hat{M}_{12}\hat{T}^{(1)}(\beta_1,0)\boldsymbol{A}^{(1)}(0) \tag{19}$$

Finally after applying the Bloch-Floquet boundary conditions (14) we arrive at the following matrix eigenvalue problem for $\boldsymbol{A}^{(1)}(0)$

$$\left(\hat{M} - \lambda \hat{I}\right)\boldsymbol{A}^{(1)}(0) = 0, \tag{20}$$

where

$$\hat{M} = \left(\hat{M}_{13}\right)^{-1}\hat{M}_{33}\hat{T}^{(3)}(\beta_3,\beta_2)\left(\hat{M}_{33}\right)^{-1}\hat{M}_{23}\hat{T}^{(2)}(\beta_2,\beta_1)\left(\hat{M}_{22}\right)^{-1}\hat{M}_{12}\hat{T}^{(1)}(\beta_1,0) \tag{21}$$

is the transfer matrix.

For homogeneous boundary conditions on the guide walls, L_{sk} in (15) become identity matrices, the propagating modes separate from each other [7] and, after writing $\lambda = \exp(\imath k\beta)$, each gives rise to the following dispersion equation

$$\cos\left(k_n d\right) = A_n \cos\left(\left(\beta_3 - \beta_2\right)q_n^{(3)}\right) - \left(R_1 + R_2\right)\sin\left(\left(\beta_3 - \beta_2\right)q_n^{(3)}\right), \tag{22}$$

$$A_n = \cos\left(\beta_1 q_n^{(1)}\right)\cos\left(\beta_2 q_n^{(2)}\right) - \frac{\left(G^{(1)^2} q_n^{(1)^2} + G^{(2)^2} q_n^{(2)^2}\right)}{2 q_n^{(1)} q_n^{(2)} G^{(1)} G^{(2)}}\sin\left(\beta_1 q_n^{(1)}\right)\sin\left(\beta_2 q_n^{(2)}\right) \tag{23}$$

$$R_{1,2} = \frac{G^{(1,2)}q^{(1,2)} + G^{(3)}q^{(3)}}{G^{(1,2)}G^{(3)}q^{(1,2)}}\sin\left(\beta_{(1,2)}q^{(1,2)}\right)\cos\left(\beta_{(2,1)}q^{(2,1)}\right), \tag{24}$$

where the first values in subscripts and superscripts in (24) correspond to R_1 and the second values to R_2.

Numerical results

The structure of wave propagation depends on the ratio of the length of the unit cell to the height of the waveguide β / h, the reduced wave number $k\beta$, the filling fraction, and differences between the elastic properties of three materials. The Bloch parameter k is a phase shift across the Brillouin zone, and hence the graphs are $2\pi/d$ periodic and even. Therefore only values $0 \le k \le \pi/d$ will be shown on graphs.

It follows from (5) that for non alternating boundary conditions when the lower and upper walls are clamped there exist cut off frequencies in the acoustic region for each material below which waves do not propagate. Below the lowest of these three frequencies no propagation will be possible creating a total stop band. In the case of non alternating boundary conditions when the waveguide walls are traction free, the propagating solutions start at $\omega = 0$.

Figure 2 shows the band structure, calculated using the dispersion equation (22), of the first and second modes for two periodic waveguides of the same geometry but consisting of different materials. Both waveguides have homogeneous boundary conditions along the guide walls. Dashed lines correspond to the first mode and the bold lines correspond to the second mode for traction free boundaries (which is the same as the first mode for the clamped boundaries). The two graphs clearly demonstrate that the band gaps are larger for a waveguide with bigger differences between the impedances of the constituent materials.

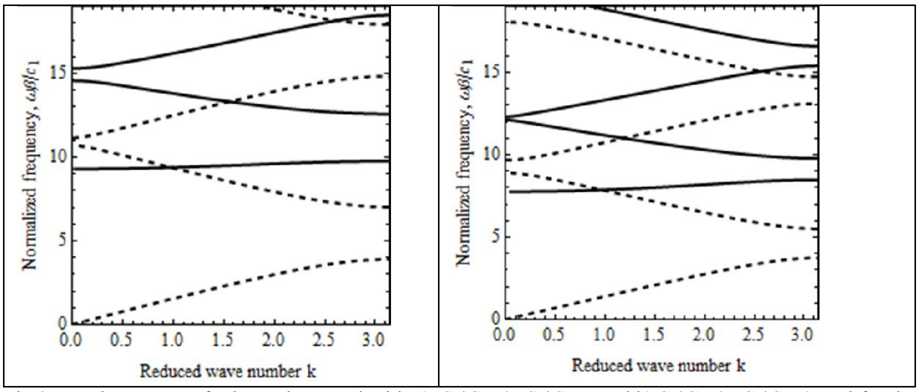


Fig.2. Band structure of phononic crystal with a) G_2/G_1=6, G_3/G_1=7 and b)G_2/G_1=3, G_3/G_1=4, and for the traction free waveguide, β/h=0.8. Dashed lines solid lines and show the band structure for the first and second modes for traction free boundary conditions on the guide wall (Solid lines describe the band structure of the first mode for clamped boundaries as well).

It follows from (5) that for non alternating boundary conditions when the lower and upper walls are clamped there exist cut off frequencies in the acoustic region for each material below which waves do not propagate. Below the lowest of these three frequencies no propagation will be possible creating a total stop band. In the case of non alternating boundary conditions when the waveguide walls are traction free, the propagating solutions start at $\omega = 0$.

For the waveguide with three different constituent materials and non alternating clamped boundary conditions along the guide walls (the horizontal lines show the cut-off frequencies in the three constituent materials) Figure 3 shows wave trapping for the lowest mode. Wave trapping occurs when the waves exponentially decay in one material and propagate in another. This happens when at least two of three materials in the waveguide have different cut-off frequencies. The nature of the trapping is not different from a waveguide described in detail in [11] and is affected by both the difference in acoustic impedances and the wavelength in the sense [6].

In Figure 3a the wave exponentially decays in the first material and propagates in the two others. In Figure 3b the wave exponentially decays in two materials and propagates only in the last one. So by choosing the material properties and the height to length ratio of the waveguide it is possible to control wave trapping in the waveguide with three constituent materials in the unit cell.

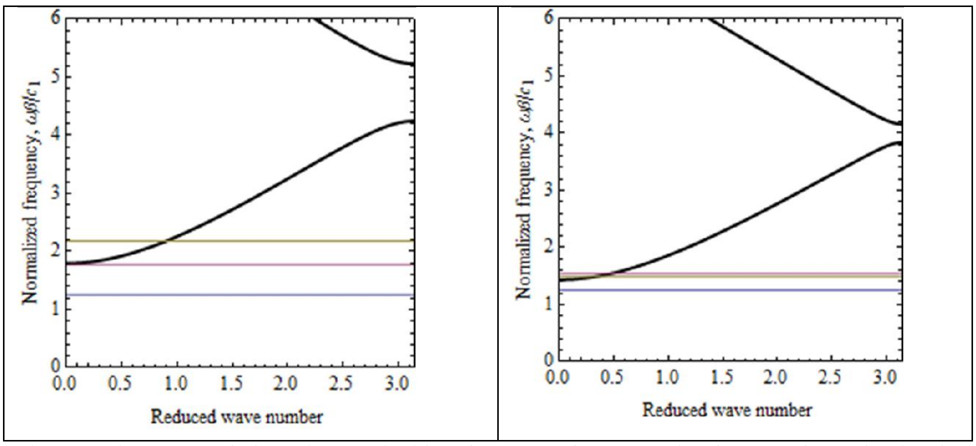


Fig.3. Band structure of phononic crystal with G_2/G_1=1.5, G_3/G_1=1.4, and G_2/G_1=2, G_3/G_1=3 for the clamped waveguide,β/h=0.4. Solid lines and dashed lines show the band structure for n=1 and n=2 modes.

For a homogeneous waveguide made from one constituent material but alternating clamped boundary conditions along the guide walls, the eigenvalue problem (20) has to be solved numerically. In this case the band structure shows that even in a homogeneous guide alternating boundary conditions can created stop bands, i.e. frequency regions where waves do not propagate [7]. Figure 4 shows the dispersion diagrams for different values of the cell length to height ratio. For $\beta / h = 0.3$ there is only a zero frequency cut off and no other band gaps since here the ratio of acoustic impedances is unity and the effect of mixed boundary conditions is not strong. As the cell length increases $(\beta / h = 1.3)$ the modes start mixing (Fig.4b), the zero frequency cut offs become larger and stop band gaps appear with a clear minima within the Brillouin zone, an unusual feature for one-dimensional periodic structures. This feature is more prominent here compared to homogeneous waveguides with only two constituent materials in the unit cell [7]. As the ratio β / h increases the lower mode bounding the band gap becomes nearly flat with no propagating energy (Fig.4b) and this is associated with modes trapped in the layers with Dirichlet boundary condition above and below.

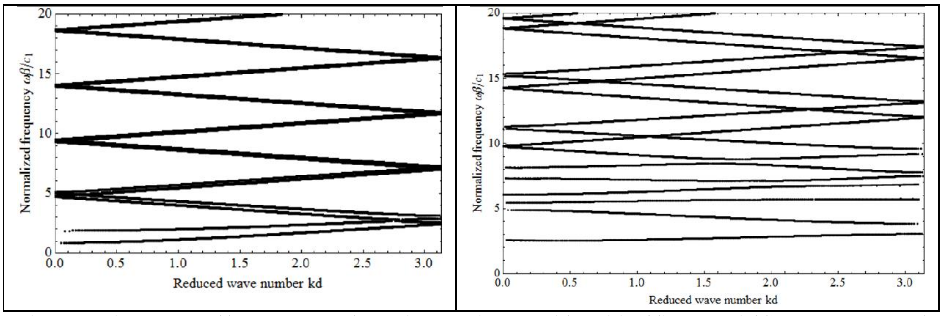


Fig.4. Band structure of homogenous phononic crystal waveguide, with (β/h=0.3 and β/h=1.3), σ_{yz}=0 on the lower and upper walls in the first material, u=0on the lower and upper walls in the second material and with u=0 on the lower and σ_{yz}=0 on the upper wall in third material

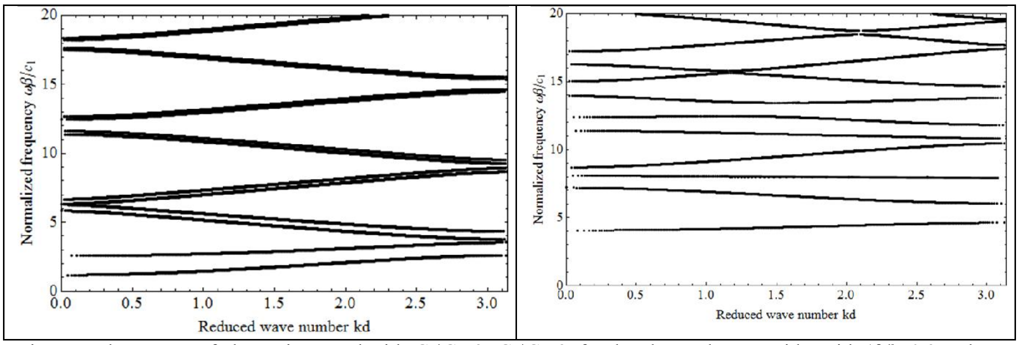


Fig5. Band structure of phononic crystal with G_2/G_1=2, G_3/G_1=3, for the clamped waveguide, with (β/h=0.3 and β/h=1.3),σ_{yz}=0 on the lower and upper walls in the first material, $u = 0$ on the lower and upper walls in the second material and with u=0 on the lower and σ_{yz}=0 on the upper wall in third material

The eigenvalue problem (20) has also been used to carry out calculations for band gap structure for a phononic crystal waveguide consisting of three different materials and having alternating boundary conditions along the guide walls (traction-free on the lower and upper walls $(\sigma_{yz} = 0)$, in the first material, displacement-clamped on the lower and upper walls (u=0), in the second material, and traction-free $\left(\sigma_{yz}=0\right)$ on the upper wall, with displacement-clamped on the lower wall in the third material). Here unlike the homogeneous waveguide with alternating boundary conditions (Fig.4a) there are frequency band gaps as well as a zero frequency cut-off for short cell lengths $(\beta/h=0.3)$. As the cell length increases $\left(\beta/h=1.3\right)$ here again the zero frequency cut offs become larger and stop band gaps appear with a clear minima within the Brillouin zone. This feature is better defined in Figure 5b where the waveguide has three constituent materials in the unit cell and alternating boundaries on the guide walls.

Conclusion

The propagation of elastic SH waves in a quasi one dimensional periodic waveguide has been considered in this paper. Using the orthogonality relationship the transfer matrix method is applied to solve the problem for homogeneous and mixed boundary conditions along the waveguide walls.

The results show that for homogeneous clamped boundary conditions along the guide walls by choosing the material properties and the height to length ratio of the waveguide it is possible to control wave trapping in the waveguide with three constituent materials in the unit cell. If the waveguide is homogeneous then only alternating boundary conditions along the guide walls can create forbidden frequency regions. Moreover stop band gaps appear with a clear minima within the Brillouin zone which is an unusual feature for one-dimensional periodic structures. This feature is more prominent here compared to homogeneous waveguides with only two constituent materials in the unit cell [11].

For alternating boundary conditions along the guide walls the spectrum depends very much on the conditions on the waveguide walls and the parameter characterizing the ratio of the unit cell length to the waveguide height. By modulating this parameter it is possible to move the extrema of the band gaps well within the Brillouin zone. These gaps are considerably larger than in the case of non homogeneous waveguide with alternating boundary conditions. Trapped modes and zero frequency band gaps also have been obtained and discussed.

For a periodic waveguide with homogeneous boundary conditions on the waveguide walls the modal solutions decouple and the analytical expression for the dispersion equation is obtained.

References

1. M. M. Sigalas, E.N. Economou (1992), Elastic and acoustic wave band structure. //J. Sound and Vibration, 158(2), 377-382.
2. J. O. Vasseur, P.A. Deymier, B. Chenni, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, D. Prevost (2001), Experimental and theoretical evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional solid phononic crystals. Physics Review Letters 86(14), 3012–3015.
3. M.S. Kushwaha, P. Halevi, G. Martínez, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani (1994), Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. Physics Review B 49, 2313–2322.
4. E. Yablonovitch (1987), Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. Phys. Rev. Lett. 58, 2059–2062.
5. S. Guenneau, R.C. McPhedran, S. Enoch, A.B. Movchan, M. Farhat, N.A.P. Nicorovici (2011), The colors of cloaks. J. Opt.13, 024014.

6. J. Postnova, R.V. Craster, Trapped modes in topographically varying elastic waveguides, Wave Motion 44 (2007) 205-221.
7. R.V. Craster, S. Guenneau, S.D.M. Adams. Mechanism for slow waves near cutoff frequencies in periodic waveguides. Physical Review B 79,(2009), 045129.
8. Pagneux, V. & Maurel, A. Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides. Proc. R. Soc. A 458, (2002), 1913–1930.
9. Pagneux V., Maurel A. Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness. Proc. R. Soc. A , (2006), 462, 1315–1339.
10. S.D.M. Adams, R.V. Craster, S. Guenneau, Guided and standing Bloch waves inperiodic elastic strips. Waves in Random and Complex Media,
11. v.19(2), (2009), 321-346.
12. S.D.M. Adams, R.V. Craster, S. Guenneau, Bloch waves in periodic multi-layered acoustic *waveguides,* Proc. R. Soc. A,464 (2008) 2669-2692.

Сведения об авторах:

Пилипосян Давид Гагикович – аспирант Института механики НАН Армении
Тел.: **(**374 91**)** 24 11 11; **E-mail:** davitpiliposyan@gmail.com

Казарян Рафаель Аракелович – старший научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (093) 39 63 44

Казарян Карен Багратович – доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Адрес: РА, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24/2,
Тел.: (374 10) 22 73 95, (374 955) 22 73 95
E-mail: kghazaryan@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 26.11.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №3, 2014 Механика

УДК 539.3

ВОЛНЫ ТИПА ЛЯВА В СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ С НЕОДНОРОДНЫМИ СЛОЯМИ, СОЕДИНЁННЫХ ОДНОРОДНЫМ СЛОЕМ

Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З.

Ключевые слова: волны Лява, сдвиговые поверхностные волны, неоднородные слои.
Keywords: Love waves, shear surface waves, inhomogeneous layers

Դանոյան Զ.Ն.,Աթոյան Լ.Հ., Սահակյան Ս.Լ. Դանոյան Ն.Զ.
Լյավի տիպի ալիքները շերտավոր առաձգական կառուցվածքում՝ բաղկացած համասեռ շերտով իրար միացված անհամասեռ շերտերով երկու համասեռ կիսատարածություններից

Ուսումնասիրված են Լյավի տիպի ալիքները շերտավոր առաձգական կառուցվածքում՝ բաղկացած համասեռ շերտով իրար միացված անհամասեռ շերտերով երկու համասեռ կիսատարածություններից: Դիտարկված են հորիզոնական բևեռացված սահքի հարթ համասեռ և անհամասեռ ալիքները նկարագրող լուծումները, որոնցից առանձնացվել են շերտերին զուգահեռ տարածվող Լյավի տեսակի մակերևութային ալիքները: Ստացվել և հետազոտվել է այդ ալիքների գոյության դիսպերսիոն հավասարումը: Կառուցվել են դիսպերսիոն կորերը կառուցվածքի որոշ մասնավոր դեպքերի համար: Ցույց է տրված լռության՝արգելափակված գոտիների առկայությունը կառուցվածքի որոշ դեպքերի և մակերևույթային ալիքի որոշ ձևերի (մոդաների) համար:

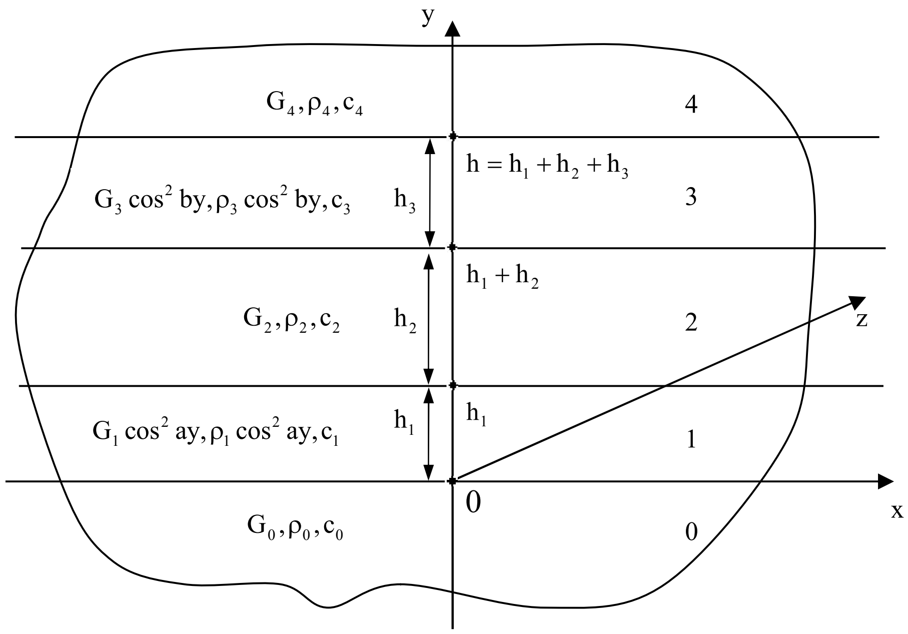
Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Sahakyan S.L., Danoyan N. Z.
Love Waves in a layered elastic media consisting of two semi-infinite half-spaces with inhomogeneous layers and homogeneous layer between them

Love type waves in a layered elastic media consisting of two semi-infinite half-spaces with inhomogeneous layers and homogeneous layer between them are investigated. The solutions corresponding to horizontally polarized shear plane homogeneous and inhomogeneous waves are considered. Especially surface Love type waves, which propagate parallel to layers, are discussed. The dispersion equation according to above mentioned waves is obtained and investigated. For some special cases of structure dispersion curves are drawn and the existence of forbidden zones (band gaps) is shown.

Исследуются поверхностные волны типа Лява в слоистой упругой структуре, состоящей из двух однородных полупространств с неоднородными слоями, соединённые однородным слоем. Рассматриваются решения, представляющие горизонтально поляризованные сдвиговые плоские однородные и неоднородные волны, причём, выделены поверхностные волны типа Лява, которые распространяются параллельно слоям. Получено и исследовано дисперсионное уравнение, соответствующее этим волнам. Для некоторых частных случаев структуры построены дисперсионные кривые. Показано существование частотных зон умолчания или запрещённых зон для определённых случаев структур и мод волн.

1. Введение. Вопросами распространения волн типа Лява в слоистой упругой конструкции, когда однородный слой конечной толщины скреплён двумя изотропными полупространствами, занимался Стоунли [1]. Случай, когда слой между полупространствами является неоднородным по толщине, изучался в работах [2,3]. В настоящей статье обсуждается случай структуры, когда между двумя однородными полупространствами есть два неоднородных слоя, соединённые однородным слоем. Получено дисперсионное соотношение, на основе которого построены кривые зависимостей фазовых скоростей поверхностных волн от приведённой суммарной толщины слоёв.

2. Постановка задачи. Рассмотрим упругую слоистую структуру, состоящую из двух однородных полупространств с неоднородными слоями, (функции неоднородностей слоёв разные), разделённых однородным слоем (фиг.1).



Фиг. 1.

Выше приняты следующие обозначения: индексами 0, 1, 2, 3 и 4 отмечаются величины, относящиеся, соответственно, к первому однородному полупространству, к первому неоднородному слою, к однородному среднему слою, ко второму неоднородному слою и ко второму однородному полупространству, через $w_j(x, y, t)$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$ обозначены упругие перемещения по оси z в соответствующих областях, они являются функциями только переменных x, y и t (t – время), G_j – модули сдвига, ρ_j – плотности масс, $c_j^2 = G_j / \rho_j$ – фазовые скорости сдвиговых волн, $h = h_1 + h_2 + h_3$ – общая толщина слоёв, h_1, h_2, h_3 – толщины соответствующих слоёв.

В двух неоднородных слоях предполагается, что все параметры, характеризующие данный неоднородный слой, меняются по одному и тому же закону:
в первом неоднородном слое –

$$G_1(y) = G_1 \cos^2(ay),\ \rho_1(y) = \rho_1 \cos^2(ay), \tag{1}$$

во втором неоднородном слое –

$$G_3(y) = G_3 \cos^2(by),\ \rho_3(y) = \rho_3 \cos^2(by), \tag{2}$$

где выше G_1, G_3, ρ_1, ρ_3, a, b – постоянные.

Волновой процесс в нашей структуре описывается следующими уравнениями:

$$\Delta w_0 = \frac{1}{c_0^2}\ddot{w}_0, \tag{3}$$

$$\Delta w_1 + a^2 w_1 = \frac{1}{c_1^2}\ddot{w}_1, \tag{4}$$

$$\Delta w_2 = \frac{1}{c_2^2}\ddot{w}_2, \tag{5}$$

$$\Delta w_3 + b^2 w_3 = \frac{1}{c_3^2}\ddot{w}_3, \tag{6}$$

$$\Delta w_4 = \frac{1}{c_4^2}\ddot{w}_4, \tag{7}$$

где $w_1 = w^{(1)}\cos(ay)$, $w_3 = w^{(3)}\cos(by)$. $w^{(1)}$, $w^{(3)}$, w_0, w_2, w_4 – реальные перемещения по оси Oz в соответствующих слоях.

Контактные условия между слоями, отражающие непрерывность перемещений и напряжений, выражаются следующими соотношениями:

$$w_0(0) = w_1(0), \tag{8}$$

$$G_0\frac{\partial w_0(0)}{\partial y} = G_1\frac{\partial w_1(0)}{\partial y}, \tag{9}$$

$$\frac{w_1(h_1)}{\cos(ah_1)} = w_2(h_1), \tag{10}$$

$$G_2\frac{\partial w_2(h_1)}{\partial y} = G_1\left(\frac{\partial w_1(h_1)}{\partial y}\cos(ah_1) + w_1(h_1)a\sin(ah_1)\right), \tag{11}$$

$$w_2(h_1+h_2) = \frac{w_3(h_1+h_2)}{\cos(b(h_1+h_2))}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &G_2\frac{\partial w_2(h_1+h_2)}{\partial y} = \\ &= G_3\left(\frac{\partial w_3(h_1+h_2)}{\partial y}\cos(b(h_1+h_2)) + w_3(h_1+h_2)b\sin(b(h_1+h_2))\right), \end{aligned} \tag{13}$$

$$w_4(h) = \frac{w_3(h)}{\cos(bh)}, \tag{14}$$

$$G_4\frac{\partial w_4(h)}{\partial y} = G_3\left(\frac{\partial w_3(h)}{\partial y}\cos(bh) + w_3(h)b\sin(bh)\right). \tag{15}$$

В этих соотношениях аргументы x и t опущены.

Кроме контактных условий необходимо учесть также условия затухания в бесконечности, которые представляются следующим образом:

$$w_0(y) \to 0 \quad \text{при } y \to -\infty \tag{16}$$

$$w_4(y) \to 0 \quad \text{при} \quad y \to +\infty \tag{17}$$

2. Решение уравнений. Решения нашей задачи (3)-(7), удовлетворяющие условиям затухания (16), (17), будем искать в виде плоских волн:

$$w_0 = A_0 e^{ksy} e^{i(kx-\omega t)}, \tag{18}$$

$$w_1 = (A_1 \cos(kpy) + B_1 \sin(kpy)) e^{i(kx-\omega t)}, \tag{19}$$

$$w_2 = (A_2 \cos(kry) + B_2 \sin(kry)) e^{i(kx-\omega t)}, \tag{20}$$

$$w_3 = (A_3 \cos(kqy) + B_3 \sin(kqy)) e^{i(kx-\omega t)}, \tag{21}$$

$$w_4 = A_4 e^{-k\ell y} e^{i(kx-\omega t)}, \tag{22}$$

где k – волновое число, ω – круговая частота, s, p, r, q, ℓ – поперечные волновые числа, которые полагаются положительными, A_j, B_k – константы $(j = 0,1,2,3,4,\ k = 1,2,3)$.

Подставив (18)-(22) в уравнения (3)-(7), получим значения поперечных волновых чисел:

$$s = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2}},\ p = \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} + \frac{\beta_1^2}{\xi^2} - 1},\ r = \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1},\ q = \sqrt{\frac{c^2}{c_3^2} + \frac{\beta_3^2}{\xi^2} - 1},\ \ell = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_4^2}}, \tag{23}$$

где $c = \omega / k$ – фазовая скорость поверхностной волны, $c_j = G_j / \rho_j$ – фазовые скорости объёмных сдвиговых волн в соответствующих областях; $\xi^2 = k^2 h^2$, $\beta_1^2 = a^2 h^2$, $\beta_3^2 = b^2 h^2$.

Далее, подставляя решения (18)-(22) в граничные условия (8)-(15) и учитывая соотношения (23), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных A_j, B_k $(j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ k = 1,\ 2,\ 3)$, характеризующих амплитуды волн. Условие разрешимости полученной системы даёт дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости поверхностной волны:

$$\det A = 0, \tag{24}$$

где A – матрица восьмого порядка с элементами:

$$\begin{gathered}
a_{11} = 1,\ a_{12} = -1,\ a_{21} = G_0 ks,\ a_{23} = -G_1 kp, \\
a_{32} = \cos(kph_1),\ a_{33} = \sin(kph_1),\ a_{34} = -\cos(ah_1)\cos(krh_1), \\
a_{35} = -\cos(ah_1)\sin(krh_1), \\
a_{42} = -aG_1 \cos(kph_1)\sin(ah_1) + G_1 kp \cos(ah_1)\sin(kph_1), \\
a_{43} = -G_1 kp \cos(ah_1)\cos(kph_1) - aG_1 \sin(ah_1)\sin(kph_1), \\
a_{44} = -G_2 kr \sin(krh_1),\ a_{45} = G_2 kr \cos(krh_1), \\
a_{54} = -\cos(b(h_1+h_2))\cos(kr(h_1+h_2)), \\
a_{55} = -\cos(b(h_1+h_2))\sin(kr(h_1+h_2)), \\
a_{56} = \cos(kq(h_1+h_2)),\ a_{57} = \sin(kq(h_1+h_2)), \\
a_{64} = -G_2 kr \sin(kr(h_1+h_2)),\ a_{65} = -G_2 kr \cos(kr(h_1+h_2)),
\end{gathered} \tag{25}$$

$a_{66}=-bG_3\cos\left(kq(h_1+h_2)\right)\sin\left(b(h_1+h_2)\right)+G_3kq\cos\left(b(h_1+h_2)\right)\sin\left(kq(h_1+h_2)\right)$,

$a_{67}=-G_3kq\cos\left(b(h_1+h_2)\right)\cos\left(kq(h_1+h_2)\right)-bG_3\sin\left(b(h_1+h_2)\right)\sin\left(kq(h_1+h_2)\right)$,

$a_{76}=\cos\left(kqh\right)$, $a_{77}=\sin\left(kqh\right)$, $a_{78}=-e^{-klh}\cos\left(bh\right)$,

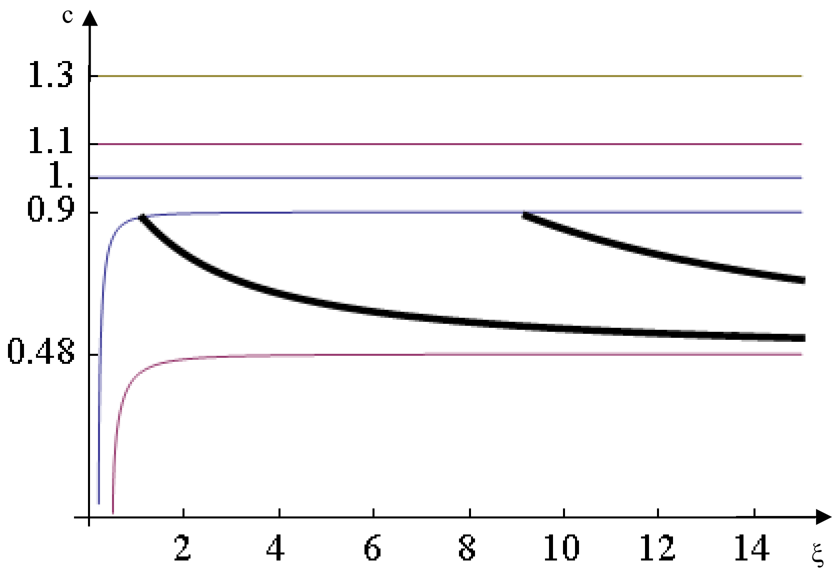
$a_{86}=-bG_3\cos\left(kqh\right)\sin\left(bh\right)+G_3kq\cos\left(bh\right)\sin\left(kqh\right)$,

$a_{87}=-G_3kq\cos\left(bh\right)\cos\left(kqh\right)-bG_3\sin\left(bh\right)\sin\left(kqh\right)$, $a_{88}=-e^{-klh}G_4kl$.

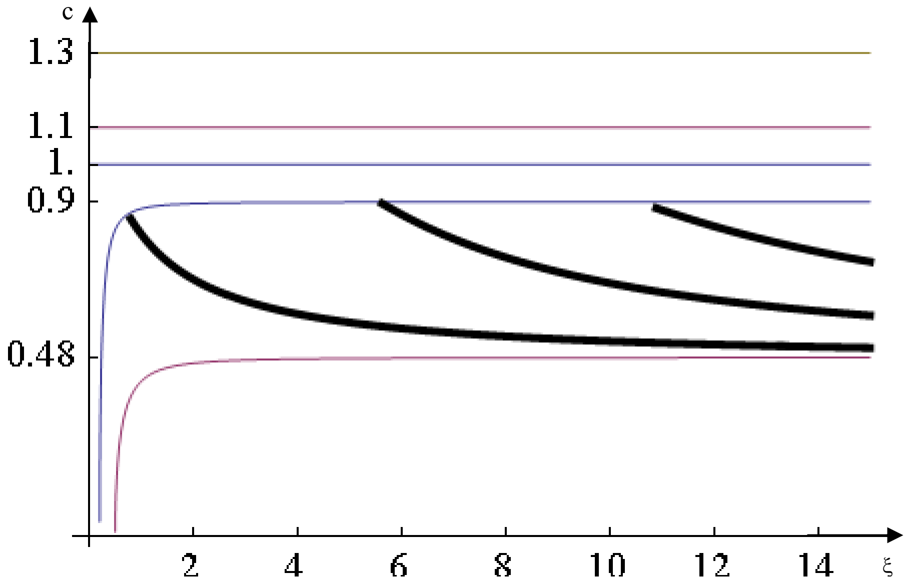
Элементы матрицы, равные нулю, здесь не приведены.

Ниже приведены дисперсионные кривые зависимостей фазовых скоростей волн Лява от приведённой толщины $\xi=kh$, где h – общая толщина слоёв.

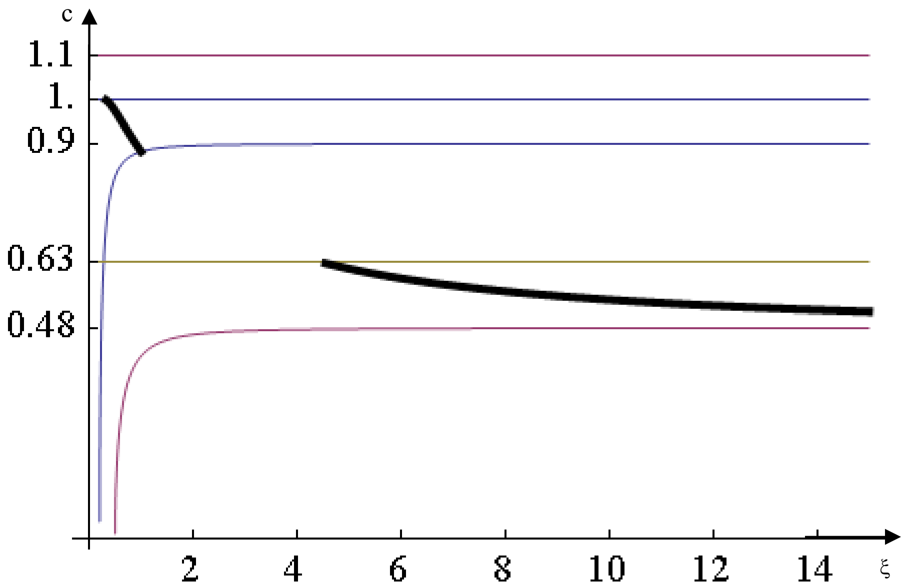
На фиг. 2, 3 и 4 жирной линией изображены дисперсионные кривые мод поверхностных волн Лява, тонкими линиями изображены скорости объёмных сдвиговых волн в разных областях нашей конструкции. При нахождении кривых мод волн Лява предполагаем, что общая толщина h остается постоянной. На фиг. 2 и 3 изображён случай, когда скорости объёмных сдвиговых волн в однородных областях больше скоростей объёмных волн в неоднородных областях. А на фиг.4 изображён случай, когда скорость объёмных сдвиговых волн c_2 в среднем однородном слое находится в промежутке $[c_1,c_3]$. В этом случае в спектре частот волн Лява возникают зоны (одна вблизи нуля, другая приблизительно от 1.5 до 4-х, см. фиг. 4), где нет волнового процесса, т.е. появляются, так называемые, зоны умолчания или запретные зоны.



Фиг.2. Зависимость фазовой скорости от приведённого волнового числа при $a=0.5$, $b=0.2$, $h_1=0.25$, $h_2=0.75$, $h=1$, $G_0=5.1$, $G_1=8.45$, $G_2=4.9$, $G_3=5.4$, $G_4=5.8$, $C_0=1.0$, $C_4=1.10$, $C_1=0.48$, $C_2=1.3$, $C_3=0.9$.



Фиг.3. Зависимость фазовой скорости от приведённого волнового числа при $a = 0.5$, $b = 0.2$, $h_1 = 0.4$, $h_2 = 0.6$, $h = 1.0$, $G_0 = 5.1$, $G_1 = 8.45$, $G_2 = 4.9$, $G_3 = 5.4$, $G_4 = 5.8$, $C_0 = 1.0$, $C_4 = 1.1$, $C_1 = 0.48$, $C_2 = 1.3$, $C_3 = 0.9$.



Фиг. 4. Зависимость фазовой скорости от приведённого волнового числа при $a = 0.5$, $b = 0.2$, $h_1 = 0.4$, $h_2 = 0.8$, $h = 1.0$, $G_0 = 5.1$, $G_1 = 3.45$, $G_2 = 4.9$, $G_3 = 8.4$, $G_4 = 5.8$, $C_0 = 1.0$, $C_4 = 1.1$, $C_1 = 0.48$, $C_2 = 0.63$, $C_3 = 0.9$.

Ввиду многочисленности различных вариантов характеристик рассматриваемой конструкции задача требует дальнейшего исследования.

Работа выполнена в рамках базового финансирования Института механики НАН РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoneley R. Elastic Waves at the Surface of Separation of two Solids. //Proc. Roy. Soc. Series A. 1924. V.106. P.424.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
3. Ghazaryan K.B., Piliposyan D.G. Love Waves in a Structure with an Inhomogeneous Layer. // Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. №2.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович –
Д.ф.-м.н., зав.отделом Института механики НАН Армении
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: zavendanoyan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович –
К. ф.-м.н., ст.науч.сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: levous@mail.ru

Саакян Саак Левонович –
К. ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: РА,0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: mechins@sci.am, ssahakyan@ysu.am

Даноян Нерсес Завенович –
мл. науч. сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: mechins@sci.am.

Поступила в редакцию 05.12.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №3, 2014 Механика

УДК 517.977.56+539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ГАСИТЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ ПОД УПРУГОЙ КОНЕЧНОЙ БАЛКОЙ ПРИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ

Хуршудян Ам. Ж., Хуршудян Ас. Ж.

Ключевые слова: оптимизация, метод Бубнова–Галёркина, билинейная система управления, гашение колебаний, проблема моментов
Key Words: optimization, Bubnov–Galerkin procedure, bilinear control system, vibration damping, moments problem

Խուրշուդյան Ամ.Ժ., Խուրշուդյան Աս.Ժ.
Շարժվող բեռի ազդեցությանը ենթարկվող առաձգական վերջավոր հեծանի տակ տատանումների առաձգամածուցիկ մարիչների օպտիմալ բաշխումը

Հետազոտվել է հոդակապորեն ամրացված, առաձգական, վերջավոր ձողի տակ տատանումների առաձգամածուցիկ մարիչների օպտիմալ բաշխման օրենքի որոշման խնդիրը, երբ հեծանը ենթարկվում է իր երկայնքով հաստատուն ինտենսիվությամբ և արագությամբ շարժվող բեռի ազդեցությանը: Ուսումնասիրության հիմնական նպատակը հեծանի տակ մարիչների բաշխման օպտիմալ ֆունկցիայի որոշումն է, իսկ օպտիմալության հայտանիշը՝ այդ բաշխման խտությունը: Խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպվել է որպես եզրային խնդիր՝ փոփոխական, ղեկավարվող գործակցով երկգծային դիֆերենցիալ հավասարման համար: Կիրառելով Բուբնով–Գալյորկինի մեթոդը՝ խնդրի լուծումը հաջողվել է հանգեցնել մոմենտների վերջավոր չափանի պրոբլեմի, որը բացահայտ լուծվել է: Ցույց է տրվել, որ նշված իմաստով օպտիմալ է մարիչների դիսկրետ (կետային) բաշխումը: Որոշվել է հեծանի ճկվածքի մոտարկման ֆունկցիան՝ փակ տեսքով: Բերված են թվային հաշվարկների հիմնական արդյունքները:

Khurshudyan Am. Zh., Khurshudyan As. Zh.
Optimal Distribution of Viscoelastic Dampers under Elastic Finite Beam under Moving Load

The problem of viscoelastic dampers optimal distribution function determination is investigated under simply supported elastic beam of finite length, subjected to a moving load with constant intensity, moving along the beam with constant velocity. Our main aim is the dampers optimal distribution function determination, and optimality criterion– the density of that distribution. Problem is mathematically formulated as initial–boundary problem for bilinear wave equation with variable controllable coefficient. Application of Bubnov–Gelerkin procedure allow us to reduce solution of the problem to finite–dimensional moments problem, which is resolved explicitly. It is proved, that optimal in mentioned sense is dampers discrete (pointwise) distribution. Approximating function of beam deflection is determined. Results of numerical calculations are presented.

Исследована задача нахождения оптимального закона распределения вязкоупругих гасителей колебаний под шарнирно опёртой упругой балкой конечной длины, подверженной воздействию подвижной нагрузки постоянной интенсивности, движущейся по балке с постоянной скоростью. Основной целью является определение оптимальной функции распределения демпферов под балкой, а критерием оптимальности – плотность их распределения. Задача математически сформулирована в виде начально-краевой задачи для билинейного дифференциального уравнения с переменным управляемым коэффициентом. Применив процедуру Бубнова–Галёркина, удаётся свести решение задачи оптимизации к конечномерной проблеме моментов, которая разрешена в явном виде. Показано, что оптимальным в указанном смысле является закон дискретного распределения гасителей. Определена приближённая функция прогиба балки в замкнутой форме. Приведены основные результаты вычислительного эксперимента.

В работе предложен способ решения задачи управления для билинейных систем, т.е. систем с управляемым коэффициентом на основе метода Бубнова–Галёркина. Используя обобщённое действительное интегральное преобразование Фурье, нахождение управляемого коэффициента системы в частных производных сведено к конечномерной проблеме моментов. Построенная процедура продемонстрирована на примере задачи оптимизации распределения вязкоупругих в смысле модели Кельвина–Фойхта гасителей колебаний под шарнирно опёртой упругой балкой конечной длины. Балка изгибается под воздействием подвижной нагрузки постоянной интенсивности, движущейся по балке с постоянной скоростью. Фактором оптимизации является переменный коэффициент дифференциального уравнения в частных производных четвёртого порядка, а критерием оптимальности – плотность распределения гасителей под балкой. Задача сведена к конечномерной проблеме моментов и решена в явном виде. Получено, что оптимальным в указанном смысле является дискретное (точечное) распределение демпферов. Задача вычисления определяющих точек, характеризующих положение демпферов под балкой, сведена к задаче нелинейного программирования. Определён оптимальный прогиб балки. Процесс вычисления определяющих точек продемонстрирован на численном примере.

Упругие балки, подверженные воздействию подвижных нагрузок, являются простейшими моделями мостов, по которым движутся поезда. В связи с этим, гашение изгибных колебаний таких балок за конечный промежуток времени имеет непосредственную прикладную ценность.

1. Описание метода решения задачи. Оптимизация топологии или структуры конструкции [1, 2] может привести не только к минимальному распределению материала в его объёме, представляющее собой непосредственную прикладную ценность, сохранив, или даже оптимизировав целевые свойства конструкции, но и влиять на процессы, в которые она вовлечена. Такие задачи теории оптимизации представляют собой не только практический интерес, но и выделяются сложностью исследования, поскольку математически они формулируются как билинейные системы в частных производных, т.е. системы с управляемыми коэффициентами. Билинейные в смысле наличия произведения двух искомых функций или их производных, системы являются важными подклассами нелинейных систем, имеющие приложение в инженерии, биологии, экономике и т.д. Задачи управления билинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений можно найти, например, в [3, 4], а билинейными системами в частных производных– в [5–7]. В монографии [5] описано множество интересных задач, моделируемых в виде билинейных систем управления.

В общей постановке задача топологической оптимизации требует минимизировать заданный критерий оптимальности, описывающий, как правило, распределение материала в объёме конструкции при дифференциальных и топологических ограничениях. Математически эту задачу можно сформулировать в виде задачи математического программирования: выбором параметра оптимизации u из заданного множества U допустимых функций минимизировать критерий оптимальности

$$\kappa[u] \to \min, \quad u \in U,$$

при дифференциальных и геометрических ограничениях

$$\mathcal{L}_u[w] = P(\boldsymbol{x}, t), \quad t > 0 \text{ и } \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{1.1}$$

Дифференциальные ограничения (1.1) являются уравнениями движения или равновесия конструкции, решение которой должно удовлетворять заданным условиям на границе

$$w\big|_{x\in\partial\Omega} = w_\partial(t), \quad t>0. \tag{1.2}$$

$\mathcal{L}_u[w]$ – дифференциальный оператор, определённый в области $\Omega\times\mathbb{R}^+$, действующий на функцию $w=w(\boldsymbol{x},t)$ и содержащую параметр оптимизации u как коэффициент этой функции, $P(\boldsymbol{x},t)$ – заданная функция, удовлетворяющая определенным условиям, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ – область пространства, необязательно односвязная, занимаемая конструкцией, а $\partial\Omega$, как обычно, обозначает границу области Ω. Примеры оператора $\mathcal{L}_u[\bullet]$ можно найти, например, в монографии [5] и в статьях [6, 7].

Задаются ещё начальные данные:

$$w(\boldsymbol{x},0)=w_0(\boldsymbol{x}),\ \left.\frac{\partial w(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{w}_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\Omega. \tag{1.3}$$

Целью задачи управления можно считать, например, выполнение некоторых конечных данных [7]:

$$w(\boldsymbol{x},T)=w_T(\boldsymbol{x}),\ \left.\frac{\partial w(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \dot{w}_T(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\Omega. \tag{1.4}$$

С целью решения поставленной задачи применим процедуру Бубнова–Галёркина [8]. Предположим, что нам удалось построить полную систему базисных (аппроксимирующих) функций $\{\varphi_k(\boldsymbol{x},t)\}_{k=0}^n$ краевой задачи (1.1), (1.2), первая из которых удовлетворяет неоднородным, а все остальные – однородным граничным условиям (1.2). Тогда, невязка, получаемая подстановкой приближённого решения

$$w_n(\boldsymbol{x},t)=\varphi_0(\boldsymbol{x},t)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t\in(0,T) \tag{1.5}$$

в уравнение (1.1), где α_k – постоянные, подлежащие определению, будет иметь вид:

$$\mathrm{N}_n(\boldsymbol{x},t)=\mathcal{L}_u[w_n]-P(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t\in(0,T). \tag{1.6}$$

Согласно методу Бубнова–Галёркина, искомые коэффициенты α_k определяются из условий ортогональности базисных функций $\{\varphi_k(\boldsymbol{x},t)\}_{k=0}^n$ к невязке (1.6) [8]:

$$\int_0^T\int_\Omega \mathrm{N}_n(\boldsymbol{x},t)\varphi_k(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x}dt=0, \quad k=\overline{0;n}. \tag{1.7}$$

После определения искомых коэффициентов α_k из системы линейных алгебраических уравнений (1.7) и подстановки в приближённое решение (1.5), учитывая, что в конечный момент времени T должны выполняться условия (1.4), после несложных алгебраических преобразований и выкладок, для определения параметра оптимизации получим систему ограничений вида:

$$\int_0^T \int_\Omega u \cdot \mathrm{K}_n(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x}dt = \mathrm{M}_k, \qquad k = \overline{0;n}, \tag{1.8}$$

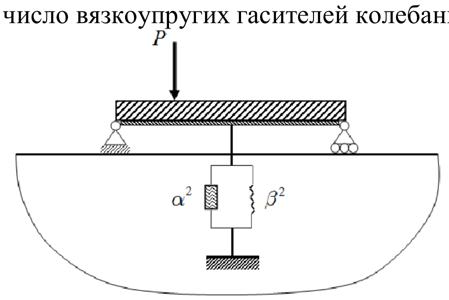
где ядра $\mathrm{K}_n(\boldsymbol{x}, t)$ и постоянные M_k зависят от параметров системы (1.1), (1.2).

Если при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ невязка (1.6) тождественно равна нулю: $\mathrm{N}_{n_0}(\boldsymbol{x}, t) \equiv 0,$ то соответствующая функция $w_{n_0}(\boldsymbol{x}, t)$ (1.5) будет точным решением задачи (1.1), (1.2). В противном случае, увеличив число n слагаемых в (1.5), можно приблизить искомое решение к точному с требуемой точностью.

Из системы (1.8) искомую функцию можно определить несколькими способами, например, способом, предложенным в [9], трактуя эту систему как проблему моментов [9, 10]. Удобность этого подхода состоит в том, что удаётся не только найти явный вид функции управления, но и установить условия его существования [7, 9–12].

2. Демпфирование изгибных колебаний балки вязкоупругими гасителями при подвижных воздействиях. Применим теперь указанную процедуру для решения задачи оптимизации распределения вязкоупругих гасителей колебаний под упругой балкой конечной длины $2l,$ шарнирно опёртой по краям $x_* = -l$ и $x_* = l.$ Балка изгибается под воздействием нагрузки постоянной интенсивности, движущейся по длине балки с постоянной скоростью (фиг. 1).

В недавних исследованиях [13–18] рассмотрено множество задач гашения колебаний систем, подвергающихся воздействию подвижных нагрузок. Основным параметром оптимизации является смещение гасителей (демпферов) при их фиксированных кон-фигурациях и расположениях под балкой [13–16]. В последнее время, с целью повышения сейсмостойкости сооружений исследуются также оптимальные расположения, а также число вязкоупругих гасителей колебаний [17, 18].



Фиг. 1. Иллюстрация балки с вязкоупругим демпфером

Предположив, что нагрузка сходит с балки в заданный момент времени $\tau_*,$ $v_* \tau_* = 2l,$ требуется обеспечить нулевые конечные условия (1.4) в заданный момент времени $T_* > \tau_*.$ Вводя безразмерные переменные и величины:

$$x = \frac{x_*}{l},\ w = \frac{w_*}{l},\ t = \omega t_*,\ P = \frac{P_* l^2}{EJ},\ v = \frac{v_*}{\omega l} = \frac{2}{\omega \tau_*},$$

$$\alpha^2 = \frac{\alpha_*^2 \omega l^4}{EJ},\ \beta^2 = \frac{\beta_*^2 l^4}{EJ},\ \gamma^2 = \frac{\rho S}{EJ}\omega^2 l^4,$$

на основе модели Кельвина–Фойхта вязкоупругого тела, задачу математически можно сформулировать в виде следующего дифференциального уравнения в частных производных [14]

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+u(x)\left[\alpha^2\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+\beta^2 w(x,t)\right]+\gamma^2\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=F(x,t), \tag{2.1}$$

$$x\in(-1,1),\ t\in(0,T),$$

при граничных условиях шарнирного опирания:

$$w(-1,t)=\left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=-1}=w(1,t)=\left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=1}=0,\quad t\in(0,T). \tag{2.2}$$

$EJ-$жёсткость на изгиб, $\rho-$плотность, $S-$площадь поперечного сечения, а $\omega-$частота свободных колебаний балки, α_*^2 и β_*^2-коэффициенты вязкого и упругого элементов гасителя, $u(x)-$ параметр оптимизации (функция управления), характеризующая распределение гасителей под балкой,

$$F(x,t)=P\delta(x+1-vt)\cdot\left[\theta(t)-\theta(t-\tau)\right],\quad x\in(-1,1),\ t\in(0,T),$$

представляет подвижную нагрузку, P_*- интенсивность, а v_*- скорость движения нагрузки, $\theta(t)-$единичная ступенька Хэвисайда, $\delta(x)-$ функция Дирака [19]. Случай $\alpha_*^2=0$ соответствует чисто упругому [14], а $\beta_*^2=0-$чисто вязкому гасителю [15, 16]. Поперечное сечение балки считается постоянной.

При получении уравнения (2.1) были использованы известные соотношения [19]: $\theta(|\lambda|t)=\theta(t)$ и $|\lambda|\delta(|\lambda|x)=\delta(x)$, $\lambda\neq 0$.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ заданы начальные условия:

$$w(x,0)=w_0(x),\ \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\dot{w}_0(x),\quad x\in(-1,1). \tag{2.3}$$

Множество допустимых управлений U состоит из функций u, обеспечивающих выполнение в заданный момент $t=T$ нулевых условий

$$w(x,T)=0,\ \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=T}=0,\quad x\in(-1,1). \tag{2.4}$$

Из этого множества мы должны выбрать ту функцию, которая минимизирует плотность распределения гасителей под балкой, т.е. функционал [9, 11, 12]

$$\kappa[u]=\int_{-1}^{1}u(x)\,dx,\quad u\in U. \tag{2.5}$$

Для согласованности граничных условий (2.2) и начальных, конечных данных (2.3), (2.4) необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$w_0(\pm1)=\dot{w}_0(\pm1)=0,\ w_0''(\pm1)=\dot{w}_0''(\pm1)=0.$$

Исходя из физических рассуждений, полагаем, что параметр оптимизации неотрицательный и является финитным с носителем в $[-1,1]$. Поскольку пространство $L^1[-1,1]$, измеримых на $[-1,1]$ функций, является банаховым относительно нормы

$\|u\|_{L^1[-1,1]} \equiv \kappa[u]$, то множество допустимых управлений состоит из неотрицательных, финитных, суммируемых на $[-1,1]$ функций, обеспечивающих условия (2.4): $U = \{0 \le u \in L^1[-1,1] : u \equiv 0, x \notin [-1,1]\}$. Оно всюду плотно в $L^1[-1,1]$ [19].

Уже на этом шаге можно было бы применить вышеуказанную процедуру, однако, пользуясь тем, что параметр оптимизации явно не зависит от переменной t, мы поступим немного иначе. Запишем дифференциальное уравнение (2.1) и условия (2.2) для всех $t \in \mathbb{R}$. Для этого введём оператор $\mathrm{A}_T[\bullet]$, определённый на всей числовой оси и действующей по формуле

$$\mathrm{A}_T[f] \equiv f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0,T]; \\ 0, & t \notin [0,T]. \end{cases}$$

Явный вид этого оператора можно построить по-разному, например, с помощью характеристической функции (индикатор) отрезка $[0,T]$:

$$\chi_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,T]; \\ 0, & t \notin [0,T]. \end{cases}$$

Выразив функцию $\chi_{[0,T]}(t)$ через функцию Хэвисайда [7, 11, 12]:

$$\mathrm{A}_T[f] = [\theta(t) - \theta(t-T)] f(t) \equiv f_1(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

мы можем не только записать задачу (2.1), (2.2) в классе обобщённых функций для всех $t \in \mathbb{R}$, но и включить в неё начальные и конечные данные (2.3) и (2.4):

$$\frac{\partial^4 w_1(x,t)}{\partial x^4} + u(x)\left[\alpha^2 \frac{\partial w_1(x,t)}{\partial t} + \beta^2 w_1(x,t)\right] + \gamma^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = G(x,t), \tag{2.6}$$

$$x \in (-1,1),\ t \in \mathbb{R},$$

$$w_1(-1,t) = \left.\frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=-1} = w_1(1,t) = \left.\frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

$$G(x,t) = F(x,t) + \alpha^2 u(x) w_0(x)\delta(t) + \gamma^2 [w_0(x)\delta'(t) + \dot{w}_0(x)\delta(t)],$$

причём, производная функции Дирака понимается в обобщённом смысле [19]. Поскольку $\tau < T$, то ясно, что $\mathrm{A}_T[F] = F(x,t)$. Ясно также, что функция $w_1(x,t) \equiv \mathrm{A}_T[w]$ является финитной с носителем в $[-1,1]\times[0,T]$, где совпадает с функцией $w(x,t)$.

Применим теперь к системе (2.6), (2.7) действительное обобщённое интегральное преобразование Фурье по переменной t [19]:

$$\frac{d^4 \overline{w}_1(x,\sigma)}{dx^4} + \left[\left(\beta^2 - i\sigma\alpha^2\right)u(x) - \sigma^2\gamma^2\right]\overline{w}_1(x,\sigma) = \overline{G}(x,\sigma), \tag{2.8}$$

$$x \in (-1,1),\ \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\overline{w}_1(-1,\sigma) = \left.\frac{d^2\overline{w}_1(x,\sigma)}{dx^2}\right|_{x=-1} = \overline{w}_1(1,\sigma) = \left.\frac{d^2\overline{w}_1(x,\sigma)}{dx^2}\right|_{x=1} = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

где

$$\mathcal{F}_t[f] \equiv \overline{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\sigma t} dt,\ \sigma \in \mathbb{R},$$

– преобразование Фурье функции $f(t)$ по переменной t, $\mathcal{F}_t[\bullet]$ – оператор, а σ – спектральный параметр.

Очевидно, что

$$\mathcal{F}_t[g_1] = \mathcal{F}_t\{\mathrm{A}_T[g]\} = \int_0^T g(t) e^{i\sigma t} dt,$$

$$\overline{G}(x,\sigma) \equiv \mathcal{F}_t[G] = \overline{F}(x,\sigma) + \alpha^2 u(x) w_0(x) + \gamma^2\left[\dot{w}_0(x) - i\sigma w_0(x)\right],$$

$$\overline{F}(x,\sigma) \equiv \mathcal{F}_t[F] = \frac{Pe^{i\sigma\frac{x+1}{v}}}{v}\left[\theta(x+1) - \theta(x+1-v\tau)\right].$$

Характерным для обыкновенного дифференциального уравнения (2.8) является то, что функция управления содержится не только в её коэффициентах, но и в правой части. Легко проверить, однако, что при $\beta^2 = 0$ (вязкий гаситель) вводя вспомогательную функцию $\overline{w}(x,\sigma) = i\sigma\overline{w}_1(x,\sigma) + w_0(x)$, функцию $u(x)$ можно исключить из правой части уравнения (2.8):

$$\frac{d^4\overline{w}(x,\sigma)}{dx^4} - \left[i\sigma\alpha^2 u(x) + \sigma^2\gamma^2\right]\overline{w}(x,\sigma) = \overline{G}_0(x,\sigma), \quad x \in (-1,1),\ \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\overline{G}_0(x,\sigma) = i\sigma\left[\overline{F}(x,\sigma) + \gamma^2\dot{w}_0(x)\right] + w_0^{IV}(x).$$

При $\alpha^2 = 0$ (упругий гаситель) функция управления будет фигурировать только в коэффициентах уравнения (2.8).

Применим теперь процедуру Бубнова–Галёркина. В качестве аппроксимирующих функций, взяв ортонормированную в $[-1,1]$ систему $\{\sin(\pi kx)\}_{k=1}^n$, представив решение системы (2.8), (2.9) в виде

$$\overline{w}_{1n}(x,\sigma) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(\sigma)\sin(\pi kx), \quad x \in [-1,1],\ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

из (1.7) для определения неизвестных коэффициентов α_k получим следующую сис– тему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \Lambda_{km} = \Omega_m, \quad m = \overline{1;n}, \tag{2.11}$$

$$\Lambda_{km}=\left[(\pi k)^4-\gamma^2\sigma^2\right]\delta_k^m+\left[\beta^2-i\sigma\alpha^2\right]J_{km}[u],\ \Omega_m=\int_{-1}^{1}\bar{G}(x,\sigma)\sin(\pi mx)\,dx,$$

$\delta_k^m=\delta_m^k$ − символ Кронекера, а фактор управления фигурирует в функционале

$$J_{km}[u]=\int_{-1}^{1}u(x)\sin(\pi kx)\sin(\pi mx)\,dx.$$

Очевидно, что интегралы $J_{km}[u]$ симметричны: $J_{km}[u]=J_{mk}[u]$. Более того, $J_{kk}[u]\geq 0$.

С целью нахождения ограничений типа равенств на интегралы $J_{km}[u]$, представим решение системы (2.11) в виде:

$$\alpha_k(\sigma)=\frac{\Delta_k(\sigma)}{\Delta(\sigma)},\quad k=\overline{1;n}, \tag{2.12}$$

где $\Delta(\sigma)-$ главный, а $\Delta_k(\sigma)-$ вспомогательные определители системы (2.11), и учитывая, что введённая функция $w_1(x,t)$ финитна с носителем в прямоугольнике $[-1,1]\times[0,T]$, поступим уже традиционным способом [20]. Именно, согласно известной теореме Винера–Пэли–Шварца [19, 20], функция $\bar{w}_1(x,z)$, $z\in\mathbb{C}$, является целой аналитической функцией, удовлетворяющей неравенству:

$$\left|z^{\nu}\cdot\bar{w}_1(x,z)\right|\leq C_{\nu}\cdot e^{\vartheta|\varsigma|},\quad x\in[-1,1],\ z\in\mathbb{C},$$

для всех $\nu=0,1,2,...,$ соответствующих действительным постоянным C_{ν}, $\vartheta>0$ тип функции $\bar{w}_1(x,z)$ и зависит лишь от величины T, следовательно, в точках $z_{\iota}=\sigma_{\iota}+i\varsigma_{\iota}$ комплексной плоскости, где знаменатель выражения (2.12), продол–женный на всю комплексную плоскость, равняется нулю:

$$\Delta(z)=0, \tag{2.13}$$

в нуль должен обращаться и числитель дроби (2.11):

$$\Delta_k(z_{\iota})=0,\quad k=\overline{1;n},\ \iota=1,2,\dots\ . \tag{2.14}$$

Легко доказывается, что равенства (2.14) при (2.13) выполняются для всех $k=\overline{1;n}$ одновременно [20], т.е. следует рассмотреть лишь одно из них.

Из общего вида главного определителя $\Delta(\sigma)$ следует, что равенство (2.13) имеет место лишь в конечном числе точек, чем и отличается от [20], ибо раскрывая определитель, относительно σ получим многочлен степени $2n$.

Равенства (2.14) при (2.13) и есть необходимые ограничения типа (1.8) на функционалы $J_{km}[u]$, откуда функция управления может быть найдена в явном виде. Опираясь на общую теорию моментов, можно показать [9–12, 20], что искомая функция $u^o(x)$, оптимальная в смысле функционала (2.5), есть

$$u^o(x)=\sum_{j=1}^{N}\delta\left(x-x_j^o\right),\quad x\in(-1,1),\tag{2.15}$$

где определяющие точки $-1<x_j^o<x_{j+1}^o<1$ соответствуют положениям гасителей и зависят от параметров $P,\nu,\tau,\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$.

Следует подчеркнуть, что оптимальное решение (2.15) не единственно [9–12, 20], в силу чего, из условий $\left\{x_j^o\right\}_{j=1}^{N}\subset(-1,1)$ число определяющих точек x_j^o однозначно вычислить, в общем случае, не удаётся.

Итак, решение поставленной задачи, в конечном счёте, свелось к вычислению определяющих точек x_j^o из нелинейных ограничений типа равенств, получаемых подстановкой в систему (2.14) функцию оптимального управления (2.15). Последнюю задачу можно решить эффективными численными методами нелинейного программирования [21].

После определения оптимальной функции (2.15), целесообразно определить и соответствующую функцию прогиба балки на основе разложения (2.9). Применив к (2.9) обратное обобщённое преобразование Фурье, получим:

$$w_{1n}(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\breve{\alpha}_k(t)\sin(\pi kx),\quad x\in[-1,1],\ t\in\mathbb{R},\tag{2.16}$$

где

$$\breve{\alpha}_k(t)=\mathcal{F}_t^{-1}\left[\alpha_k\right]\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_k(\sigma)e^{-i\sigma t}d\sigma,$$

где $\mathcal{F}_t^{-1}[\bullet]$ – обратный оператор Фурье.

Поскольку действительные части выражений $\Lambda_{km}(\sigma)$ и $\Omega_m(\sigma)$ являются чётными, а мнимые – нечётными:

$$\Re\Lambda_{km}(-\sigma)=\Re\Lambda_{km}(\sigma),\ \Re\Omega_m(-\sigma)=\Re\Omega_m(\sigma),$$

$$\Im\Lambda_{km}(-\sigma)=-\Im\Lambda_{km}(\sigma),\ \Im\Omega_m(-\sigma)=-\Im\Omega_m(\sigma),$$

то из общего вида главного и вспомогательных определителей системы (2.11) не–трудно заметить, что $\Re\alpha_k(-\sigma)=\Re\alpha_k(\sigma)$, а $\Im\alpha_k(-\sigma)=-\Im\alpha_k(\sigma)$. Как из–вестно, это является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $\breve{\alpha}_k(t)$, следовательно, и $w_{1n}(x,t)$, была действительной [19]. Тогда,

$$\breve{\alpha}_k(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\Re\alpha_k(\sigma)\cos(\sigma t)+\Im\alpha_k(\sigma)\sin(\sigma t)\right]d\sigma,$$

где

$$\Re\alpha_k(\sigma)=\frac{\Re\Delta_k\Re\Delta+\Im\Delta_k\Im\Delta}{(\Re\Delta)^2+(\Im\Delta)^2},\quad \Im\alpha_k(\sigma)=-\frac{\Re\Delta_k\Im\Delta-\Im\Delta_k\Re\Delta}{(\Re\Delta)^2+(\Im\Delta)^2}.$$

Более того, $\Re\Delta(-\sigma_\iota,\varsigma_\iota)=\Re\Delta(\sigma_\iota,\varsigma_\iota)$, а $\Im\Delta(-\sigma_\iota,\varsigma_\iota)=-\Im\Delta(\sigma_\iota,\varsigma_\iota)$, т.е. вместе с $z_\iota = \sigma_\iota + i\varsigma_\iota$ уравнению (2.13) одновременно удовлетворит и $z_\iota = -\sigma_\iota + i\varsigma_\iota$, следовательно, имея в виду, что $\Re\Delta_k\left(-\sigma_\iota, \varsigma_\iota\right) = \Re\Delta_k\left(\sigma_\iota, \varsigma_\iota\right)$, а $\Im\Delta_k\left(-\sigma_\iota, \varsigma_\iota\right) = -\Im\Delta_k\left(\sigma_\iota, \varsigma_\iota\right)$, из (2.14), на самом деле, имеем n ограничений.

3. Пример процедуры вычисления определяющих точек. Применим построенный алгоритм в случае, когда $n = 3$, $w_0(x) = \sin(\pi x)$, $\dot{w}_0(x) = 0$, тогда

$$\Delta(\sigma) = \mathrm{B}_4\mathrm{E}^4 + \mathrm{B}_5\mathrm{E}^3 - \mathrm{B}_6\mathrm{E}^2 + \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3,$$

$$\begin{aligned}\Delta_1(\sigma) = {} & \mathrm{E}^2 J_{23}[u]\left[-\Omega_1 J_{23}[u] + \Omega_2 J_{13}[u] + \Omega_3 J_{12}[u]\right] - \\ & - \mathrm{E}\left[\Omega_2\Gamma_3 J_{12}[u] + \Omega_3\Gamma_2 J_{13}[u]\right] + \Omega_1\Gamma_2\Gamma_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2(\sigma) = {} & \mathrm{E}^2 J_{13}[u]\left[\Omega_1 J_{23}[u] - \Omega_2 J_{13}[u] + \Omega_3 J_{12}[u]\right] - \\ & - \mathrm{E}\left[\Omega_1\Gamma_3 J_{12}[u] + \Omega_3\Gamma_1 J_{23}[u]\right] + \Omega_2\Gamma_1\Gamma_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3(\sigma) = {} & \mathrm{E}^2 J_{12}[u]\left[\Omega_1 J_{23}[u] + \Omega_2 J_{13}[u] - \Omega_3 J_{12}[u]\right] - \\ & - \mathrm{E}\left[\Omega_1\Gamma_2 J_{13}[u] + \Omega_2\Gamma_1 J_{23}[u]\right] + \Omega_3\Gamma_1\Gamma_2,\end{aligned}$$

$$\Omega_m = (-1)^m \lambda_m P \cdot \frac{1 - e^{2\frac{i\sigma}{v}}}{\lambda_m^2 - \sigma^2} - i\sigma\gamma^2\delta_1^m + \alpha^2 J_{1m}[u], \quad \lambda_m = \pi m v,$$

$$\mathrm{E} = \beta^2 - i\sigma\alpha^2, \Gamma_\iota = \mathrm{E}J_{\iota\iota}[u] + \mathrm{B}_\iota, \mathrm{B}_\iota = (\pi\iota)^4 - \gamma^2\sigma^2, \ \iota = \overline{1;3},$$

$$\mathrm{B}_4 = J_{13}[u]\left[J_{12}[u]J_{23}[u] + J_{13}[u]J_{22}[u]\right],$$

$$\mathrm{B}_5 = J_{23}[u]\left[J_{11}[u]J_{23}[u] - J_{12}[u]J_{13}[u]\right] - J_{12}^2[u]J_{33}[u],$$

$$\mathrm{B}_6 = \mathrm{B}_1 J_{23}^2[u] + \mathrm{B}_2 J_{13}^2[u] + \mathrm{B}_3 J_{12}^2[u].$$

Следует учесть при этом очевидное соотношение $J_{11}[u] + J_{22}[u] = 2J_{13}[u]$.

Применив вышеизложенную процедуру, для вычисления определяющих точек x_j^o имеем задачу минимизации функционала (2.5) при системе нелинейных уравнений типа равенств $\Re\Delta_1(z_\iota) = 0$, $\Im\Delta_1(z_\iota) = 0$, $\iota = \overline{1;6}$ (после отделения действительных и мнимых частей), где $z_\iota = \sigma_\iota + i\varsigma_\iota$– корни уравнения шестой степени $\Delta(z) = 0$ и ограничений типа неравенств $-1 < x_j^o < x_{j+1}^o < 1$.

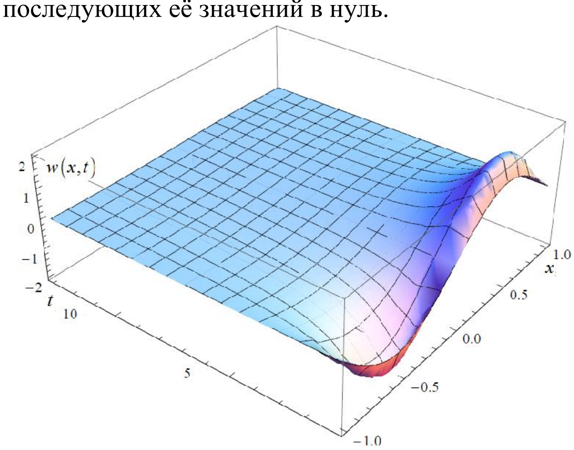
В табл. 1 приведены значения определяющих точек x_j^o для разных значений параметров $P_*, v_*, \tau_*, \alpha_*^2, \beta_*^2$, характеризующих интенсивность, скорость и момент отделения подвижной нагрузки, вязкость и упругость гасителей.

Таблица 1. Определяющие точки x_j^o

$\gamma^2 = \pi^4$

P_*	α_*^2	β_*^2	ν_*	τ_*	x_j^o
100	0.1	100	100	10	$x_1^o = -0.87, x_2^o = -0.26, x_3^o = 0., x_4^o = 0.72$
200	1	150	50	20	$x_1^o = -0.77, x_2^o = -0.06, x_3^o = 0., x_4^o = 0.69$
200	5	200	40	25	$x_1^o = -0.56,\ x_2^o = 0.,\ x_3^o = 0.61$

Фиг. 2 изображает зависимость безразмерного прогиба балки от переменных x и t. Как видно, функция $w(x,t)$, принимая при $t=0$ заданное значение $w_0(x)=\sin(\pi x)$, растёт до некоторого значения, которое существенно зависит, в основном, от параметров $P_*, \nu_*, \tau_*, \alpha_*^2, \beta_*^2$, потом убывает, обращаясь при заданном $T=2\pi$ и для последующих её значений в нуль.



Фиг. 2. Безразмерная функция прогиба балки

Это характерно для всех выбранных значений параметров $P_*, \nu_*, \tau_*, \alpha_*^2, \beta_*^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bendsøe M.P., Sigmund O. Topology Optimization. Berlin: Springer, 2003.
2. Christensen P., Klarbring A. An Introduction to Structural Optimization. Berlin: Springer, 2009.
3. Расина И.В., Батурина О.В. Оптимизация управления в билинейных системах // Автоматика и Телемеханика. 2013. Т.74. № 5. С.102–113.
4. Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батурина О.В. Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // Автоматика и Телемеханика. 2011. Т.72. № 6. С.64–78.
5. Pardalos P.M., Yatsenko V. Optimization and Control of Bilinear Systems. Berlin: Springer, 2008.
6. Beauchard K., Rouchon P. Bilinear Control of Schrödinger PDEs. Berlin: Springer, Encyclopedia of Systems and Control, vol. XXIV, 2400p. (to appear in 2015).
7. Jilavyan S.H., Khurshudyan As.Zh., Sarkisyan A.S. On Adhesive Binding Optimization of Elastic Homogeneous Rod to a Fixed Rigid Base as a Control Problem by Coefficient // A Quart. of Polish Acad. of Sci. Archives of Control Sciences. 2013, vol. 23 (LIX), № 4. pp.413–425.

8. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. 2-ое изд., доп. М.: Наука, 1970.
9. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
10. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
11. Khurshudyan As.Zh. On Optimal Boundary and Distributed Control of Partial Integro–Differential Equations // A Quart. of Polish Acad. of Sci. Archives of Control Sciences. 2014, vol. 24 (LX), №1, pp.5–25.
12. Khurshudyan As. Zh. On Optimal Boundary Control of Non–Homogeneous String Vibrations under Impulsive Concentrated Perturbations with Delay in Controls // Math. Bulletin of T. Shevchenko Scientific Society. 2013, vol. 10, pp.203–209.
13. de Silva C.W. Vibration Damping, Control and Design. CRC Press, 2007.
14. Soares R.M., del Prado Z., Gonsalves P.B. On the Vibration Control of Beams Using a Moving Absorber and Subjected to Moving Loads // Mecánica Computacioal. 2010, vol. 29, pp. 1829–1840.
15. Museros P., Moliner E., Martinez–Rodrigo M.D. Free Vibrations of Simply Supported Beam Bridges under Moving Loads. Maximum Resonance, Cancellation and Resonant Vertical Acceleration // Journal of Sound and Vibration. 2013, vol. 332, № 2, pp.326–345.
16. Museros P., Martinez–Rodrigo M.D. Vibration Control of Simply Supported Beams under Moving Loads Using Fluid Viscous Dampers // Journal of Sound and Vibration. 2007, vol.300, № 1–2, pp.292–315.
17. Qu Ji–ting, Li Hong–nan, Study on Optimal Placement and Reasonable Number of Viscoelastic Dampers by Improved Weight Coefficient Method // Mathematical Problems of Engineering. 2013, vol. 2013, ID 358709, 10p.
18. Fujita K., Moustafa A., Takewaki I. Optimal Placement of Viscoelastic Dampers and Supporting Members under Variable Excitations // Earthquakes and Structures. 2010, vol.1, № 1, pp. 43–67.
19. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. 2-ое изд. М.: МГУ, 1984.
20. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1975.
21. Betts J.T. Methods of Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming. 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2010.

Сведения об авторах:

Хуршудян Амалия Жораевна–аспирант факультета науки, технологий и коммуникаций Люксембургского университета.
Адрес: 1359, Люксембург, Ричарда Куденхов–Калерги, 6.
Тел.: +352 661 29 05 88, **E–mail:** amalya.khurshudyan@uni.lu

Хуршудян Асатур Жораевич – аспирант кафедры механики ЕГУ
Адрес: 0025, Ереван, Алека Манукяна, 1.
Тел.: +374 99 420–713, **E–mail:** asaturkhurshudyan@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.03.2014

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №3, 2014 Механика

УДК 621.38

О КИНЕМАТИКЕ МНОГОЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМИ СОЕДИНИТЕЛЬНЫМИ УЗЛАМИ И С УПРУГИМИ ЗВЕНЬЯМИ

Гукасян А.А.

Ключевые слова: многозвенный упругий манипулятор, кинематика, нерастяжимый упругий стержень, обобщенные координаты
Key words: multilink elastic manipulator, kinematics, inextensible elastic rod, generalized coordinates

Ղուկասյան Ա.Ա.
Առաձգական օղակներով և առաձգական հանգույցներով բազմօղակ մանիպուլյատորի կինեմատիկայի մասին

Առաձգական բազմօղակ մանիպուլյատորի մաթեմատիկական մոդելի հիման վրա ուսումնասիրվում է տարածական շարժման կինեմատիկան: Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ առաձգական հանդիսանում են ինչպես մանիպուլյատորի օղակները, այնպես էլ օղակների միացման հանգույցները: Մտցված են երեք խումբ ընդհանրացված կոորդինատներ, որոնք որոշում են մանիպուլյատորի բնութագրիչ կետերի տարածական դիրքերը և շարժման ընթացքում կոնֆիգուրացիան: Ենթադրելով, որ մանիպուլյատորի առաձգական հատկությունները որոշող կոորդինատները փոքր են, կինեմատիկական առընչությունները որոշված են առաձգականության գծային տեսության սահմաններում:

Ընդանուր դեպքում ստացված բանաձևերը (արտահայտությունները) կիրառված են շարժական հիմքով երկօղակ մանիպուլյատորի կինեմատիկայի ուսումնասիրության դեպքում: Մանիպուլյատորը ունի երեք ազատության աստիճան, երկրորդ օղակը հանդիսանում է առաձգական չձգվող ձող, իսկ միացման հանգույցները պարունակում են առաձգական էլեմենտներ:

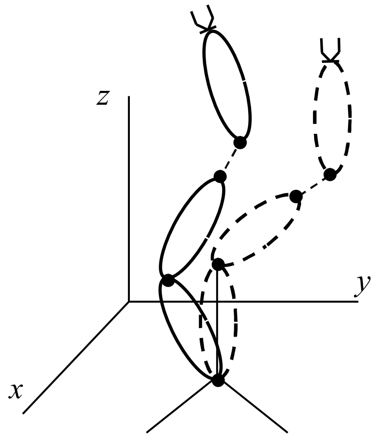
Ghukasyan A.A.
On the kinematics of multilink manipulator motion with elastic connecting nodes and elastic links

On the basis of mathematical model of elastic multilink manipulator the kinematics of spatial motion is investigated. The case when both the links and connecting nodes between links of manipulator are elastic is considered. Introduced three groups of generalized coordinates that define the spatial positions of the characteristic points of the manipulator and the configuration during movement. Assuming that the generalized coordinates describing the elastic properties of the manipulator are small the kinematic relationships are defined in the framework of linear theory of elasticity. The formula (expressions) that obtained in general case are used to investigate the kinematics of movment of two-link manipulator on a movable base. The manipulator has three degrees of freedom, the second link is inextensible elastic rod, and the connecting nodes contain the elastic elements.

На основе математической модели упругого многозвенного манипулятора исследуется кинематика пространственного движения. Рассматривается случай, когда упругими являются как звенья, так и соединительные узлы между звеньями манипулятора. Введены три группы обобщённых координат, которые определяют пространственные положения характерных точек манипулятора и конфигурацию во время движения. Предполагая, что обобщённые координаты, характеризующие упругие свойства манипулятора, малы, кинематические соотношения определены в рамках линейной теории упругости.

Полученные в общем случае формулы (выражения) применяются для исследования кинематики движения двухзвенного манипулятора на подвижном основании. Манипулятор имеет три степени свободы, второе звено является упругим нерастяжимым стержнем, а соединительные узлы содержат упругие элементы.

1. Математическая модель многозвенного упругого манипулятора. Исследуется кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора (фиг.1.а). Предполагается, что часть звеньев манипулятора моделируются как упругие тела или одномерные упругие стержни, а часть соединительных узлов между звеньями содержат упругие элементы большой жёсткости, которые в пределе превращаются в идеальные связи [1-5].



Фиг.1.а

Обобщённые координаты, определяющие конфигурацию манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и с идеальными соединительными узлами, обозначим через компоненты вектора

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)^T. \qquad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем символ «т» обозначает транспонирование вектора или матрицы.

Предполагается, что все соединительные узлы между звеньями представляют собой цилиндрическое шарниры (вращательные кинематические пары пятого класса), или поступательные кинематические пары пятого класса.

Компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha}$ обычно представляют собой совокупность углов относительных поворотов и линейных относительных смещений звеньев, связанных поступательными парами.

Через компоненты вектора

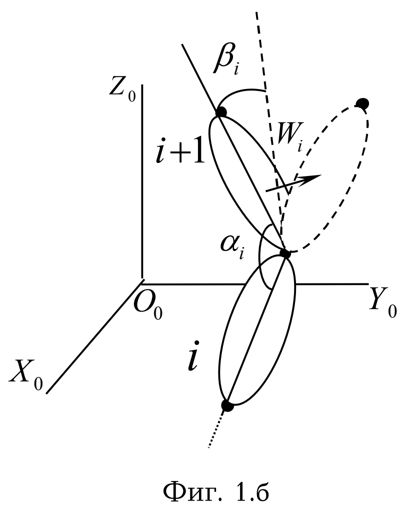
$$\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\right)^T, \quad \left(m \le n\right) \qquad (1.2)$$

обозначим дополнительные обобщённые координаты исходной системы, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах. Заметим, что координаты векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ зависят только от времени (фиг.1.б).

Обобщённые координаты, описывающие деформацию упругих звеньев манипулятора (смещение точек соответствующего звена относительно его недеформированного состояния), по аналогии с (1.1) и (1.2) являются компонентами вектора $\mathbf{w}\left(t, \xi\right)$

$$\mathbf{w}\left(t,\xi\right) = \left(w_1\left(t,\xi\right), w_2\left(t,\xi\right), \ldots, w_k\left(t,\xi\right)\right)^T, \qquad (1.3)$$

где ξ – произвольная точка упругого звена.



Фиг. 1.б

Положение инерционных элементов манипулятора в пространстве характеризуем N координатами:

$$\mathbf{q} = \left(q_1, q_2, \ldots, q_N\right)^T. \qquad (1.4)$$

Кинематику манипулятора с упругими звеньями и с упругими соединительными узлами между звеньями в общем случае можно исследовать на основе соотношения [1-4, 11, 13-16]

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}\right), \qquad (1.5)$$

где $\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}\right)$ – заданная N-мерная вектор-функция от вектор-аргументов, структура которой зависит от выбора обобщённых координат жёсткой (1.1) и упругой модели манипулятора (1.2), (1.3), а также от геометрии манипулятора.

Предположим, что матрицы частных производных

$$\mathbf{\Phi}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})=\left\{\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial\alpha_j}\right\}_{i,j=1}^{N,n}$$

$$\mathbf{\Phi}^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})=\left\{\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial\beta_j}\right\}_{i,j=1}^{N,m}$$

$$\mathbf{\Phi}^3(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})=\left\{\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial w_j}\right\}_{i,j=1}^{N,k}$$

имеют максимальные ранги, равные $r_1=\min(n,N)$, $r_2=\min(m,N)$ и $r_3=\min(N,k)$, соответственно. Если одно из этих условий нарушается, то можно уменьшить размерность одного из векторов $\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}$ или $\mathbf{w}$.

Для дальнейшего исследования основной задачи кинематики упругих манипуляторов, то есть вычисление координат, скоростей и ускорений произвольной точки относительно инерциальной или связанной с произвольным звеном системы отсчёта через обобщённые координаты $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}$, скорости $\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}},\dot{\mathbf{w}}$ и ускорения $\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\mathbf{w}}$, предполагаем, что обобщённые координаты β_i малы, а жёсткость c_i соединительных узлов велика, то есть

$$\beta_i\sim\varepsilon,\ c_i\sim\varepsilon^{-1}\quad(i=1,2,\ldots,m),\tag{1.6}$$

где $\varepsilon<<1$ – малый параметр, а координатный вектор $\mathbf{w}(t,\xi)$ в рамках линейной теории упругости мал по сравнению с линейными размерами упругого звена и удовлетворяет соотношениям [17-19]:

$$w_i(t,\xi)\sim\varepsilon,\quad w_i'(t,\xi)\sim\varepsilon,\ \dot{w}_i(t,\xi)\sim\varepsilon\tag{1.7}$$

(частные производные по ξ обозначим штрихом, а по t – точкой).

Заметим, что в пределе при $\varepsilon\to0$ соединительные узлы становятся идеальными, а упругие звенья – абсолютно твёрдыми телами.

В рамках предположений (1.6), (1.7) для исследования кинематики упругого манипулятора применим асимптотические методы малого параметра [1-5].

Формула Тейлора для функции (1.5) относительно $\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{w}$ с точностью ε по $\boldsymbol{\beta}$ и ε^2 по $\mathbf{w}$ будет:

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_i}\beta_i+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_j}w_j+O(\varepsilon^2).\tag{1.8}$$

Введя обозначения

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0),\quad\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_i}\beta_i,$$

$$\mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_j}w_j,\tag{1.9}$$

где имеет место

$$\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},0)\equiv 0, \quad \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},0)\equiv 0, \tag{1.10}$$

разложения (1.8) с учётом (1.9) можно представить в виде

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+\mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}). \tag{1.11}$$

Из (1.11) можно предположить, что положение инерциальных элементов упругого манипулятора описывается в рамках жёсткой модели путем введения дополнительного вектора $\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, обусловленного упругостью соединительных узлов между звеньями, порядок которого не превышает ε и вектора $\mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$, обусловленного упругой податливостью звеньев манипулятора, порядок которого не превышает ε^2. Движение рассматриваемой модели манипулятора имеет колебательный характер относительно движения жёсткой модели [1–4, 9, 11].

Формула (1.11) позволяет исследовать кинематику манипулятора, когда соединительные узлы между звеньями идеальные, а звенья – абсолютно жёсткие $(\boldsymbol{\beta}\equiv 0, \mathbf{w}\equiv 0)$, на основе кинематического соотношения

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{1.12}$$

между обобщёнными координатами $\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{q}$, а также в случае упругих соединительных узлов между звеньями и абсолютно жёсткими $(\mathbf{w}\equiv 0)$ звеньями

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \tag{1.13}$$

и когда звенья манипулятора являются упругими, а соединительные узлы – идеальными

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}). \tag{1.14}$$

Все эти частные математические модели манипулятора имеют место и широко исследуются в научной литературе [1-16 и др.].

2. Обобщённые скорость и ускорения движений упругого манипулятора. Вычисляя производные по времени от функций (1.11), получим вектор скорости характерных точек манипулятора в виде:

$$\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\mathbf{w}} \tag{2.1}$$

или

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})+\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})+\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) \tag{2.2}$$

где

$$\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})=\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{2.3}$$

определяет скорость движения манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами,

$$\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})=\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}}+F_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.4}$$

– дополнительный вектор скорости, обусловленный упругостью соединительных узлов, а

$$\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})=\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\mathbf{w}} \tag{2.5}$$

– вектор скорости, который зависит от упругих свойств звеньев манипулятора.

Заметим, что

$$\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0)\equiv 0, \quad \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0)\equiv 0.$$

Для определения компонентов вектора скорости (2.1) вычислим элементы матриц $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$, $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$.

Из (1.11) следует, что матрица $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ с размерностью $N \times n$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_N(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_N(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Матрица $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ имеет также размерность $N \times n$ с элементами

$$\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_N^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_N^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

где обшим элементом матрицы $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ является

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_l}\beta_l\right), \quad \frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_j} \equiv 0,$$
$$(i = 1,2,\dots,N,\ j = 1,2,\dots,n)$$

Матрица $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ с размерностью $N \times m$ имеет вид:

$$\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_m} \\ \frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_N^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial f_N^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_m} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

где

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j}=\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_l}\beta_l\right)=\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}$$

$(i=1,2,\ldots,N,\ j=1,2,\ldots,m)$

Аналогично, матрица $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ имеет размерность $N\times n$ с элементами

$$\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_N^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_N^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial f_N^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

где

$$\frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_j}=\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right),\quad \frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha},0)}{\partial \alpha_j}\equiv 0,$$

$(i=1,2,\ldots,N,\ j=1,2,\ldots,n)$

Матрица $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ с размерностью $N\times k$ имеет вид:

$$\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_k} \\ \frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_N^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_N^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial f_N^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_k} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

где

$$\frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_j}=\frac{\partial}{\partial w_j}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right)=\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_j}$$

$(i=1,2,\ldots,N,\ j=1,2,\ldots,k)$.

Следовательно, алгоритм вычисления скорости движения упругого манипулятора по формуле (2.2), в общем случае, сводится к необходимости определения элементов матриц (2.6)–(2.10). Из (2.7)–(2.10) следует, что дополнительный вектор – слагаемое $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})$– имеет порядок ε, а порядок вектора $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})$ не превышает ε^2.

Вычисляя производные по времени от функции (2.1), определим ускорение движений инерционных элементов упругого манипулятора

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} +$$
$$+ \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt`}\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\ddot{\mathbf{w}} \tag{2.11}$$

По аналогии с (2.2) вектор ускорения движений упругого манипулятора также можно определить в виде суммы трёх слагаемых:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}), \tag{2.12}$$

где

$$\mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{2.13}$$

соответствует ускорению движения абсолютно жёсткой модели манипулятора,

$$\mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} +$$
$$+ \frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.14}$$

зависит от упругости соединительных узлов между звеньями, а вектор ускорения

$$\mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} +$$
$$+ \frac{d}{dt`}\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\ddot{\mathbf{w}} \tag{2.15}$$

обусловлен упругостью звеньев манипулятора.

Дополнительные слагаемые в (2.12) тождественно равны нулю, когда соединительные узлы между звеньями идеальные, а звенья – абсолютно жесткие, то есть:

$$\mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},0,0,0) \equiv 0, \quad \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},0,0,0) \equiv 0. \tag{2.16}$$

Для определения вектора ускорения (2.11) необходимо также определить элементы матриц $\frac{d}{dt}\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$, $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ и $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$.

Согласно (2.6), элементы матрицы $\frac{d}{dt}F(\boldsymbol{\alpha})$ с размерностью $N \times n$ имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_1\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i & \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_2\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_n\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_2(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_1\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i & \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_2(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_2\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_2(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_n\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_N(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_1\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i & \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_N(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_2\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_N(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_n\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Матрица $\dfrac{d}{dt}\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ с размерностью $N\times n$ имеет следующие элементы:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} F_{11}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) & F_{12}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) & \dots & F_{1n}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) \\ F_{21}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) & F_{22}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) & \dots & F_{2n}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N1}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) & F_{N2}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) & \dots & F_{Nn}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}}) \end{pmatrix} \qquad (2.18)$$

где с учётом (2.7)

$$F_{ij}^1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\dot{\boldsymbol{\beta}})=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_j}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_l}\beta_l\right]=$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_p\partial\alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_l}\beta_l\right)\dot{\alpha}_p+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial\beta_k\partial\alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_l}\beta_l\right)\dot{\beta}_k$$

$$\left(F_{ij}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0)\equiv 0;\quad i=1,2,\dots,N;\quad j=1,2,\dots,n\right).$$

Матрица $\dfrac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} F_{11}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) & F_{12}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) & \dots & F_{1m}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \\ F_{21}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) & F_{22}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) & \dots & F_{2m}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N1}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) & F_{N2}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) & \dots & F_{Nm}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \end{pmatrix} \qquad (2.19)$$

Здесь элементы $F_{ij}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})$ матрицы (2.19) определяются согласно (2.8) и имеют вид

$$F_{ij}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_l\partial\beta_j}\dot{\alpha}_l\,,\quad (i=1,2,\dots,N;\quad j=1,2,\dots,m)$$

Матрица $\dfrac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ с размерностью $N\times n$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})=\begin{pmatrix} F_{11}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) & F_{12}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) & \dots & F_{1n}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) \\ F_{21}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) & F_{22}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) & \dots & F_{2n}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N1}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) & F_{N2}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) & \dots & F_{Nn}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) \end{pmatrix} \qquad (2.20)$$

Согласно (2.9), элементы $F_{ij}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})$ определяются следующим образом:

$$F_{ij}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_j}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_k\partial\alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right)\dot{\alpha}_k+\sum_{p=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial w_p\partial\alpha_j}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l}w_l\right)\dot{w}_p$$

$$\left(F_{ij}^{3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0)\equiv 0;\quad i=1,2,\ldots,N;\quad j=1,2,\ldots,n\right)$$

Элементами последней матрицы $\frac{d}{dt}F_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ с размерностью $N\times k$ являются:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})=\begin{pmatrix} F_{11}^{4}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}) & F_{12}^{4}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}) & \ldots & F_{1k}^{4}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}) \\ F_{21}^{4}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}) & F_{22}^{4}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}) & \ldots & F_{2k}^{4}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{N1}^{4}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}) & F_{N2}^{4}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}) & \ldots & F_{Nk}^{4}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}) \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

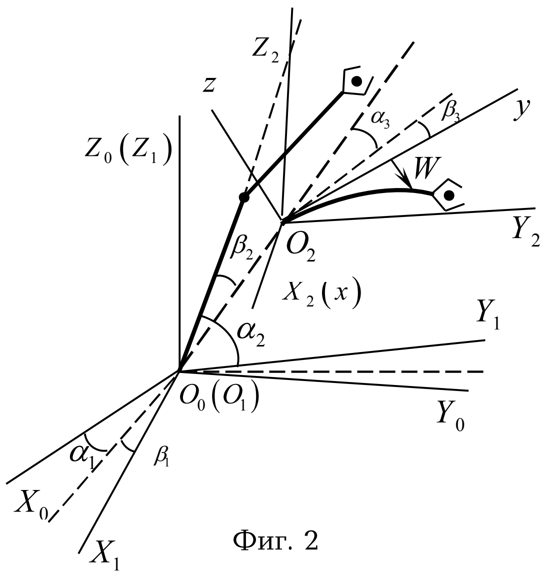
где, согласно (2.10),

$$F_{ij}^{4}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w})=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_l\partial w_j}\dot{\alpha}_l\,,\quad (i=1,2,\ldots,N;\quad j=1,2,\ldots,k).$$

Следовательно, для определения скорости и ускорения движений многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями в рамках линейной теории упругости необходимо вычислить элементы матриц (2.6)-(2.10), (2.17)-(2.21) и сделать ряд вычислений, которые для современной вычислительной техники являются весьма простыми.

Для иллюстрации алгоритма определения положений (1.11), скоростей (2.1) и ускорений (2.12) движений упругого манипулятора рассмотрим пространственное движение двухзвенного манипулятора с тремя степенями подвижности.

3. Модель двухзвенного упругого манипулятора. Манипулятор состоит из подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг.2). Рука состоит из двух звеньев, соединённых шарниром O_2. Первое звено соединено шарниром O_1 с платформой и является абсолютно твёрдым стержнем. Второе звено является упругим стержнем, на конце которого расположен схват. Предполагается также, что соединительные узлы между звеньями и платформой являются цилиндрическими шарнирами, которые содержат упругие элементы большой жёсткости. Манипулятор имеет три степени свободы.



Фиг. 2

Движение осуществляется посредством приводов, расположенных в шарнирах.

Введём обозначения: l_1 – длина первого звена, l_2 – длина второго звена, α_1 – угол поворота манипулятора относительно оси O_0z_0, β_1 – дополнительный угол поворота, обусловленный упругостью соединительного узла, обеспечивающего поворот манипулятора относительно оси O_0z_0, α_2 – угол поворота первого звена относительно платформы, α_3 – угол между касательной O_2y к упругому звену в точке O_2 и первым звеном (α_3 – угол поворота второго упругого звена), β_2, β_3 – дополнительные углы поворотов, обусловленные упругой податливостью соединительных узлов O_1, O_2, соответственно. $\mathbf{w}(t,\xi)$ – вектор упругой деформации точек нейтральной линии второго звена в системе координат O_2xyz $\left(\xi \in [O_2, l_2]\right)$, $\mathbf{R}(t,\xi)$ – радиус-вектор точек нейтральной линии второго звена относительно точки O_2 в момент времени t.

Здесь векторы (1.1)-(1.4) имеют следующие координаты:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T,$$

$$\mathbf{w} = \left(w_1(t,\xi), w_2(t,\xi), w_3(t,\xi)\right)^T, \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T \tag{3.1}$$

и

$$\mathbf{R}(t,\xi) = \left(w_1(t,\xi), \xi + w_2(t,\xi), w_3(t,\xi)\right)^T.$$

В рамках линейной теории упругих стержней предполагается, что вектор упругих деформаций точек нейтральной линии второго звена мал по сравнению с его длиной, то есть [17-19]:

$$w_i(t,\xi) \sim \varepsilon, \quad w_i'(t,\xi) \sim \varepsilon, \quad \dot{w}_i(t,\xi) \sim \varepsilon \qquad (i = 1,3)$$

$$w_2(t,\xi) \sim \varepsilon^2, \quad w_2'(t,\xi) \sim \varepsilon^2, \quad \dot{w}_2(t,\xi) \sim \varepsilon^2, \tag{3.2}$$

где $\varepsilon << 1$ – малый параметр $l_2 \sim 1$, частные производные по ξ обозначены штрихом, а по t – точкой.

Имеет место также предположение (1.6) относительно упругости соединительного узла и коэффициента жёсткости.

Используя матрицы перехода от системы координат O_2xyz к системе $O_2X_2Y_2Z_2$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma_2 - \gamma_3) & -\sin(\gamma_2 - \gamma_3) \\ 0 & \sin(\gamma_2 - \gamma_3) & \cos(\gamma_2 - \gamma_3) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

условия параллельностей осей системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ и $O_1X_1Y_1Z_1$, а также матрицы перехода от системы $O_1X_1Y_1Z_1$ к инерциальной системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} \cos\gamma_1 & -\sin\gamma_1 & 0 \\ \sin\gamma_1 & \cos\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

координаты произвольной точки второго звена манипулятора относительно системы $O_0X_0Y_0Z_0$ можно представить в виде [1, 14, 15, 19]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Gamma}_2 \left[\mathbf{\Gamma}_1 \cdot \mathbf{R}(t,\xi) + \begin{pmatrix} 0 & l_1\cos\gamma_2 & l_1\sin\gamma_2 \end{pmatrix}^T \right]$$

(здесь $\gamma_1=\alpha_1+\beta_1$; $\gamma_2=\alpha_2-\beta_2$; $\gamma_3=\alpha_3+\beta_3$)
или

$$q_1=f_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})=w_1(t,\xi)\cos(\alpha_1+\beta_1)-\big[l_1\cos(\alpha_2-\beta_2)+\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3-\beta_2-\beta_3)+$$
$$+w_2(t,\xi)\cos(\alpha_2-\alpha_3-\beta_2-\beta_3)-w_3(t,\xi)\sin(\alpha_2-\alpha_3-\beta_2-\beta_3)\big]\sin(\alpha_1+\beta_1)$$

$$q_2=f_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})=w_1(t,\xi)\sin(\alpha_1+\beta_1)+\big[l_1\cos(\alpha_2-\beta_2)+\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3-\beta_2-\beta_3)+$$
$$+w_2(t,\xi)\cos(\alpha_2-\alpha_3-\beta_2-\beta_3)-w_3(t,\xi)\sin(\alpha_2-\alpha_3-\beta_2-\beta_3)\big]\cos(\alpha_1+\beta_1);$$

$$q_3=f_3(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})=l_1\sin(\alpha_2-\beta_2)+\xi\sin(\alpha_2-\alpha_3-\beta_2-\beta_3)+ \qquad (3.5)$$
$$+w_2(t,\xi)\sin(\alpha_2-\alpha_3-\beta_2-\beta_3)+w_3(t,\xi)\cos(\alpha_2-\alpha_3-\beta_2-\beta_3).$$

Для рассматриваемой модели упругого манипулятора, (1.5) имеет вид (3.5).

Компоненты векторов $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ и $\mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ в разложении (1.11), имеют вид:

$$f_1(\boldsymbol{\alpha},0,0)=f_1(\boldsymbol{\alpha})=-\big[l_1\cos\alpha_2+\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3)\big]\sin\alpha_1$$
$$f_2(\boldsymbol{\alpha},0,0)=f_2(\boldsymbol{\alpha})=\big[l_1\cos\alpha_2+\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3)\big]\cos\alpha_1 \qquad (3.6)$$
$$f_3(\boldsymbol{\alpha},0,0)=f_3(\boldsymbol{\alpha})=l_1\sin\alpha_2+\xi\sin(\alpha_2-\alpha_3)$$

$$f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_i}\beta_i=-\beta_1\big[l_1\cos\alpha_2+\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3)\big]\cos\alpha_1-$$
$$-\beta_2\big[l_1\sin\alpha_2+\xi\sin(\alpha_2-\alpha_3)\big]\sin\alpha_1-\beta_3\big[\xi\sin(\alpha_2-\alpha_3)\big]\sin\alpha_1;$$

$$f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_2(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_i}\beta_i=-\beta_1\big[l_1\cos\alpha_2+\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3)\big]\sin\alpha_1+ \qquad (3.7)$$

$$+\beta_2\big[l_1\sin\alpha_2+\xi\sin(\alpha_2-\alpha_3)\big]\cos\alpha_1+\beta_3\big[\xi\sin(\alpha_2-\alpha_3)\big]\cos\alpha_1;$$

$$f_3^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_3(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_i}\beta_i=-\beta_2\big[\cos\alpha_2+\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3)\big]-\beta_3\cos(\alpha_2-\alpha_3)$$

$$f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_j}w_j=w_1(t,\xi)\cos\alpha_1+w_2(t,\xi)\cos(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1-$$
$$-w_3(t,\xi)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1;$$

$$f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f_2(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_j}w_j=w_1(t,\xi)\sin\alpha_1+$$
$$+w_2(t,\xi)\cos(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1-w_3(t,\xi)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1; \tag{3.8}$$
$$f_3^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f_3(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_j}w_j=w_2(t,\xi)\sin(\alpha_2-\alpha_3)+w_3(t,\xi)\cos(\alpha_2-\alpha_3)$$

Здесь, как и в общем случае, $f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha},0)\equiv 0$, $f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha},0)\equiv 0$, $i=1,2,3$.

Для иллюстрации алгоритма определения скорости движения произвольной точки упругого манипулятора (2.2) ограничимся частным случаем, когда соединительные узлы в шарнирах O_1 и O_2, обеспечивающих поворотные движения по степеням подвижности α_2 и α_3 – идеально цилиндрические $(\beta_2=0,\beta_3=0)$, а второе звено является нерастяжимым упругим стержнем ($w_2(t,\xi)\sim\varepsilon^2$ пренебрегается).

Определим элементы матриц $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$, $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ (2.6)-(2.10) для рассматриваемого частного случая.

Элементами матрицы $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ (2.6) являются:

$$f_{11}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_1}=-\left[l_1\cos\alpha_2+\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3)\right]\cos\alpha_1;$$
$$f_{12}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_2}=\left[l_1\sin\alpha_2+\xi\sin(\alpha_2-\alpha_3)\right]\sin\alpha_1;$$
$$f_{13}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_3}=-\xi\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1;$$
$$f_{21}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial f_2(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_1}=-\left[l_1\cos\alpha_2+\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3)\right]\sin\alpha_1;$$
$$f_{22}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial f_2(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_2}=\left[l_1\sin\alpha_2+\xi\sin(\alpha_2-\alpha_3)\right]\cos\alpha_1; \tag{3.9}$$
$$f_{23}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial f_2(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_3}=\xi\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1;\ f_{31}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial f_3(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_1}=0;$$
$$f_{32}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial f_3(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_2}=l_1\cos\alpha_2+\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3);$$
$$f_{33}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial f_3(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\alpha_3}=-\xi\cos(\alpha_2-\alpha_3).$$

Элементы матрицы $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ (2.7) в рассматриваемом случае определяются так:

$$\frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_1}=\beta_1\left[l_1\cos\alpha_2+\xi\cos\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\right]\sin\alpha_1\,;$$

$$\frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_2}=\beta_1\left[l_1\sin\alpha_2+\xi\sin\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\right]\cos\alpha_1\,;$$

$$\frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_3}=-\xi\beta_1\sin\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\cos\alpha_1\,;$$

$$\frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_1}=-\beta_1\left[l_1\cos\alpha_2+\xi\cos\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\right]\cos\alpha_1\,; \qquad (3.10)$$

$$\frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_2}=\beta_1\left[l_1\sin\alpha_2+\xi\sin\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\right]\sin\alpha_1\,;$$

$$\frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_3}=-\xi\beta_1\sin\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\sin\alpha_1\,;$$

$$\frac{\partial f_3^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_1}=\frac{\partial f_3^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_2}=\frac{\partial f_3^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_3}=0\,.$$

Элементами $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ матрицы являются:

$$\frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_1}=\frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial\beta_1}=-\left[l_1\cos\alpha_2+\xi\cos\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\right]\cos\alpha_1\,;$$

$$\frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_2}=\frac{\partial f_1^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_3}=0\,;$$

$$\frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_1}=-\left[l_1\cos\alpha_2+\xi\cos\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\right]\sin\alpha_1\,; \qquad (3.11)$$

$$\frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_2}=\frac{\partial f_2^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_3}=0\,;$$

$$\frac{\partial f_3^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_1}=\frac{\partial f_3^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_2}=\frac{\partial f_3^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_3}=0\,.$$

Элементы матрицы $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ и $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ зависят от упругости второго звена манипулятора.

Определим элементы матрицы $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$:

$$\frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_1}=-w_1(t,\xi)\sin\alpha_1-w_3(t,\xi)\sin\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\cos\alpha_1;$$

$$\frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_2}=-w_3(t,\xi)\cos\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\sin\alpha_1;$$

$$\frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_3}=-\frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_2};$$

$$\frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_1}=w_1(t,\xi)\cos\alpha_1+w_3(t,\xi)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1;$$

$$\frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_2}=-w_3(t,\xi)\cos(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1; \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_3}=-\frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_2};\ \frac{\partial f_3^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_1}=0;$$

$$\frac{\partial f_3^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_2}=-w_3(t,\xi)\sin(\alpha_2-\alpha_3);$$

$$\frac{\partial f_3^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_3}=-\frac{\partial f_3^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial\alpha_2}.$$

Элементами матрицы $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ являются:

$$\frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_1}=\cos\alpha_1;\quad \frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_2}=0;$$

$$\frac{\partial f_1^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_3}=-\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1;$$

$$\frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_1}=\sin\alpha_1;\quad \frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_2}=0; \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial f_2^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_3}=-\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1;$$

$$\frac{\partial f_3^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_1}=0;\quad \frac{\partial f_3^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_2}=0;\quad \frac{\partial f_3^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_3}=\cos(\alpha_2-\alpha_3).$$

Определим компоненты векторов $\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})$, $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})$, $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})$ согласно (2.2)-(2.5) с учётом (3.9)-(3.13).

$$v_i^1=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_j}\dot{\alpha}_j \qquad (i=1,2,3) \tag{3.14}$$

где $\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_j}$ $(i,j=1,2,3)$ определяются из (3.9)

$$v_i^2=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\alpha_j}\dot{\alpha}_j+\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_1}\dot{\beta}_1 \qquad (i=1,2;\ v_3^2\equiv 0) \tag{3.15}$$

Здесь $\dfrac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j}$ и $\dfrac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1}$ определяются из (3.10) и (3.11), соответственно.

$$v_i^3 = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_j}\dot{\alpha}_j + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_j}\dot{w}_j \quad (i = 1,2,3;\ w_2 = 0, \quad \dot{w}_2 = 0) \qquad (3.16)$$

$\dfrac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial \alpha_j}$, $(i, j = 1,2,3)$ определяются из (3.12), а $\dfrac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})}{\partial w_j}$, $(i, j = 1,2,3)$– из (3.13).

После вычисления компонентов векторов $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, $\mathbf{v}^3$ по формулам (3.14)-(3.16), можно стандартным образом определить модуль и направление вектора скорости (2.2) движения манипулятора в рассматриваемом случае. Аналогичным образом можно по формуле (2.12) также определить ускорение движения рассматриваемой модели манипулятора.

Следовательно, предложенный алгоритм позволяет в рамках принятой общей модели манипуляционных роботов определить все кинематические величины движения с определённой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М:. Наука, 1989. 363 с.
2. Черноусько Ф.Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. //Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. №5.
3. Черноусько Ф.Л. Динамика систем с упругими элементами большой жёсткости. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №4.
4. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Вешников В.Б., Самвелян К.В., Степанов В.П., Шушко Д.А. Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. Препринт N231, ИПМ АН СССР. М.:1984. С.66.
5. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. –М.:Наука, 1987. С.365.
6. Акуленко Л.Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия. //ПММ. 198. Т.45. Вып.6.
7. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управляемом вращении упругого стержня. //ПММ. 1982. Т.46. Вып.4.
8. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управлении поворотом упругого звена манипулятора. //Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. №1.
9. Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. //Изв. АН СССР. МТТ. 198. №3.
10. Акуленко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоским движением упругого звена манипулятора. //Изв.АН СССР. МТТ. 1983. №5.
11. Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Грудев А.И., Черноусько Ф.Л. О влиянии упругой податливости конструкции роботов на их динамику. //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №3.
12. Болотник Н.Н., Гукасян А.А. Управление движением манипулятора с учётом упругих колебаний струны. //Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №4.
13. Гукасян А.А. Кинематика многозвенного манипулятора с упругим последним звеном. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. №3. С.79.
14. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М:. Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. 478с.

15. Динамика управления роботами. Под редакцией Б.И.Юревича. М:. Наука, 1984. 336с.
16. Гукасян А.А., Мачкалян Р.Н. Кинематика движения манипулятора с упругими соединительными узлами в криволинейной системе координат. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.62-67.
17. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 245с.
18. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М:. Наука, 1979. 560с.
19. Лурье А.И. Аналитическая механика. М:. Наука, 1961.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апресович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
E-mail: ghukasyan10@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.02.2014

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

С О Д Е Р Ж А Н И Е

CONTENTS

Заказ № 531.
Тираж 150.
Сдано в производство 29.07.2014г.
Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$. 5,5 печ. л.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН Армении
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24