

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԵԴԻԱԿԱՆ ԳԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2014



МХИТАРЯН СУРЕН МАНУКОВИЧ
(К 75-летию со дня рождения)

Именитому учёному в области смешанных краевых задач механики сплошной среды и математической физики, члену-корреспонденту НАН РА, доктору физико-математических наук, профессору Сурену Мануковичу Мхитаряну исполнилось 75 лет со дня рождения.

С.М.Мхитарян родился 4-ого мая 1939 года в селе Карчахпюр Варденисского района Армении. В 1963 году с отличием окончил механико-математический факультет Ереванского государственного университета и был оставлен на работу ассистентом на кафедре «Механика». В 1964-67 годы проходил аспирантское обучение на кафедре теоретической механики Одесского строительного института под руководством известного математика члена-корреспондента АН Украины, профессора М.Г.Крейна. С 1967-ого года работает в Институте механики НАН РА. В 1969 г. защитил кандидатскую, а в 1991 году – докторскую диссертации. В 2010 году был избран членом-корреспондентом НАН РА.

Фундаментальные научные исследования профессора С.М.Мхитаряна, направленные на развитие аналитических и численных методов решения контактных и смешанных краевых задач теорий упругости, вязкоупругости и ползучести, получение замкнутых решений для новых задач из этого класса, несомненно внесли существенный вклад в развитие механики деформируемого твёрдого тела. В этих исследованиях чётко прослеживается строгая математическая последовательность и стремление привлечь к решению задач механики всё новые элементы из богатейшего арсенала высшей математики, что, безусловно, является ценнейшим приобретением аспирантского обучения. При этом, получены и новые результаты в области математики, например, новые спектральные соотношения для сингулярных интегральных операторов.

Профессором С.М. Мхитаряном опубликовано более 120 научных статей и расширенных тезисов международных конференций. Достаточно широкий спектр полученных результатов обобщён в книге «Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками», написанной в соавторстве с профессором В.М.Александровым и изданной в 1983 году издательством «Наука».

Обширна и научно-педагогическая деятельность проф. С.М.Мхитаряна. Более тридцати лет он является фактическим руководителем научного направления контактных и смешанных задач теории упругости и вязкоупругости в Институте механики НАН РА. Совместно с научной деятельностью проф. С.М.Мхитарян преподавал в различных ВУЗ-ах республики. В последние годы его научно-организационная деятельность заметно активизировалась – С.М.Мхитарян возглавил кафедру прикладной математики Международного научного центра НАН РА и кафедру высшей математики Национального университета архитектуры и строительства Армении. Под его научным руководством и непосредственным консультативном участии защищены более 25 диссертаций, при этом, за последние пять лет: 3 кандидатские и 1 докторская диссертации.

Профессор С.М.Мхитарян долгие годы является членом редакционной коллегии журнала «Известия НАН Армении. Механика».

Редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» сердечно поздравляет дорогого Сурена Мануковича со славным юбилеем, желает крепкого здоровья, новых творческих успехов, всяческих благ в жизни.

УДК 539.3

**О НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО
КОМПОЗИТА В ВИДЕ ПАКЕТА ИЗ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО
ЧИСЛА УПРУГИХ КЛИНЬЕВ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

Гаспарян А.В., Давтян З.А.

Ключевые слова: композит, теория упругости, конечно-разностные уравнения, кусочно-однородный клин.

Keywords: composite, elasticity theory, equations of finite-difference, piece-wise homogeneous wedge

Գասպարյան Ա.Վ., Դավթյան Ջ.Ա.

Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ կամայական վերջավոր թվով առաձգական սեպերից բաղկացած փաթեթի տեսքով կտոր առ կտոր համասեռ կոմպոզիտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի մասին

Մեկինի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ դիտարկվում է ֆիզիկական և երկրաչափական տարբեր բնութագրիչներ ունեցող կամայական վերջավոր թվով առաձգական սեպերից բաղկացած փաթեթի տեսք ունեցող կտոր առ կտոր անհամասեռ առաձգական կոմպոզիտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ:

Gasparyan A.V., Davtyan Z.A.

On Stress-Strain State of a Non-Homogeneous Composite in Form of a Package Composed of an Arbitrary Finite Number of Elastic Wedges under Anti-Plain Deformation

With the application of Mellin transforms stress-strain state of a piecewise non-homogeneous composite in form of a package composed of an arbitrary finite number of elastic wedges with different physical and geometrical parameters is considered under anti-plain deformation.

При помощи интегрального преобразования Меллина рассматривается напряжённо-деформированное состояние кусочно-однородного композита, представляющего собой пакет из произвольного конечного числа упругих клиньев, спаянных по боковым поверхностям, с разными физическими и геометрическими характеристиками при антиплоской деформации.

В настоящей работе при антиплоской деформации рассматривается граничная задача теории упругости о напряжённом состоянии составного клина с произвольным углом раствора, представляющего собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа клиньев, спаянных по боковым поверхностям с различными упругими и геометрическими характеристиками.

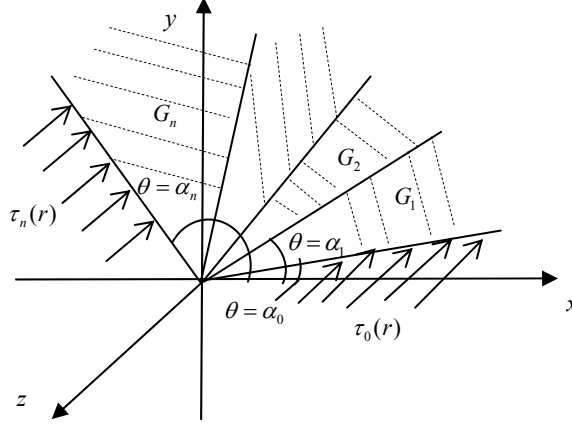
Аналогичные задачи для упругих слоёв и конечных цилиндров рассмотрены в работах [1, 2].

Решение указанной задачи при помощи интегрального преобразования Меллина сводится к решению конечно-разностного неоднородного уравнения [3]. Решение последнего, в свою очередь, сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть в цилиндрической системе координат (r, θ, z) с полюсом в начале координат в декартовой системе $Oxyz$ и полярной осью Ox упругий композит представляет собой пакет из n слоёв-клиньев с модулями сдвига G_k (фиг. 1), занимающих области

$$\Omega_k = \{-\infty < z < \infty, \quad 0 \leq r < \infty, \quad \alpha_{k-1} \leq \theta \leq \alpha_k\} \quad (k = \overline{1, n})$$

$$-\pi \leq \alpha_i < \pi, \quad (i = \overline{0, n}), \quad 0 < \alpha_n - \alpha_0 < 2\pi$$



Фиг. 1

Касательные силы интенсивностей $\tau_0(r)$ и $\tau_n(r)$, приложенные, соответственно, на крайних гранях композита $\theta = \alpha_0$ и $\theta = \alpha_n$, вызывают антиплоскую деформацию в направлении оси Oz с базовой плоскостью $r\theta$:

$$\tau_{\theta z}(r, \theta)|_{\theta=\alpha_0} = \tau_0(r), \quad \tau_{\theta z}(r, \theta)|_{\theta=\alpha_n} = \tau_n(r).$$

Требуется найти напряжения и перемещения в композите.

Будем считать, что на бесконечности клина напряжения отсутствуют. Тогда при помощи закона Гука для k -ого слоя Ω_k описанная задача сформулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \theta^2} = 0 \\ \left. \frac{G_k}{r} \frac{\partial w_k}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha_{k-1}} = \tau_{k-1}(r), \quad \left. \frac{G_k}{r} \frac{\partial w_k}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha_k} = \tau_k(r) \\ \tau_{\theta z}, \tau_{rz} \rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty \quad (\alpha_{k-1} \leq \theta \leq \alpha_k) \end{cases} \quad (1.1)$$

где $w_k = w_k(r, \theta)$ – единственная отличная от нуля компонента смещения точек клина Ω_k в направлении оси Oz при антиплоской деформации, а $\tau_{k-1}(r)$ и $\tau_k(r)$ – пока неизвестные касательные контактные напряжения, соответственно, на гранях $\theta = \alpha_{k-1}$ и $\theta = \alpha_k$, $(k = \overline{1, n})$ клина Ω_k .

Решение граничной задачи (1.1) построим при помощи интегрального преобразования Меллина [4], полагая

$$\bar{w}_k = \bar{w}_k(p, \theta) = \int_0^\infty w_k(r, \theta) r^{p-1} dr, \quad \bar{\tau}_k(p) = \int_0^\infty \tau_k(r) r^p dr.$$

Далее, применяя к (1.1) преобразование Меллина, придём к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}_k}{d\theta^2} + p^2 \bar{w}_k = 0 & (\alpha_{k-1} < \theta < \alpha_k, \quad k = \overline{1, n}), \\ G_k \frac{d\bar{w}_k}{d\theta} \Big|_{\theta=\alpha_{k-1}} = \bar{\tau}_{k-1}, \quad G_k \frac{d\bar{w}_k}{d\theta} \Big|_{\theta=\alpha_k} = \bar{\tau}_k & (\lambda - 1 < \operatorname{Re} p < 0; \quad 0 < \lambda < 1). \end{cases} \quad (1.2)$$

Решение граничной задачи (1.2) представляется формулой

$$\bar{w}_k = \bar{w}_k(p, \theta) = A_k \cos p\theta + B_k \sin p\theta \quad (\alpha_{k-1} \leq \theta \leq \alpha_k), \quad (1.3)$$

где коэффициенты A_k и B_k определяются из граничных условий (1.2) при помощи матричного равенства

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \frac{1}{pG_k \sin p(\alpha_k - \alpha_{k-1})} \begin{pmatrix} \cos p\alpha_k - \cos p\alpha_{k-1} \\ \sin p\alpha_k - \sin p\alpha_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{k-1} \\ \bar{\tau}_k \end{pmatrix} \quad (k = \overline{1, n}).$$

$$A_k = \frac{\bar{\tau}_{k-1} \cos p\alpha_k - \bar{\tau}_k \cos p\alpha_{k-1}}{pG_k \sin p(\alpha_k - \alpha_{k-1})}, \quad B_k = \frac{\bar{\tau}_{k-1} \sin p\alpha_k - \bar{\tau}_k \sin p\alpha_{k-1}}{pG_k \sin p(\alpha_k - \alpha_{k-1})} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (1.4)$$

При помощи (1.3) условие непрерывности смещений на линии контакта $\theta = \alpha_k$ слоёв Ω_k и Ω_{k+1}

$$\bar{w}_k \Big|_{\theta=\alpha_k} = \bar{w}_{k+1} \Big|_{\theta=\alpha_k}, \quad (k = \overline{1, n-1})$$

запишется в виде

$$A_k \cos p\alpha_k + B_k \sin p\alpha_k = A_{k+1} \cos p\alpha_k + B_{k+1} \sin p\alpha_k \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.5)$$

Далее, приняв во внимание (1.4), из (1.5) после простых преобразований получим следующую систему конечно-разностных уравнений второго порядка относительно трансформантов Меллина неизвестных касательных напряжений $\bar{\tau}_k$:

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1})$$

$$a_k = \frac{1}{G_k \sin p\varphi_k}, \quad b_k = \frac{\operatorname{ctg} p\varphi_k}{G_k}, \quad \varphi_k = \alpha_k - \alpha_{k-1} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.6)$$

Теперь из (1.6) сразу находим

$$\bar{\tau}_k = \frac{G_{k+1} \sin(p\varphi_{k+1}) \bar{\tau}_{k-1} + G_k \sin(p\varphi_k) \bar{\tau}_{k+1}}{G_{k+1} \sin(p\varphi_{k+1}) \cos(p\varphi_k) + G_k \sin(p\varphi_k) \cos(p\varphi_{k+1})}. \quad (1.7)$$

Для сведения (1.6) к конечно-разностным уравнениям первого порядка положим

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - b_k \bar{\tau}_k = f_k \quad (1.8)$$

$$a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} - b_{k+1} \bar{\tau}_k = g_{k+1} \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.9)$$

Тогда система уравнений (1.6) перейдёт в систему

$$f_k + g_{k+1} = 0, \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.10)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению конечно-разностных уравнений первого порядка (1.8), (1.9) и (1.10).

После решения этих уравнений, по формуле (1.4) определяются коэффициенты A_k и B_k , а затем по формуле (1.3) – функции $\bar{w}_k(p, \theta)$. Далее, при помощи обратного интегрального преобразования Меллина получим перемещения:

$$w_k(r, \theta) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{w}_k(p, \theta) r^{-p} dp$$

$$(0 < r < \infty; \lambda - 1 < c = \operatorname{Re} p < 0; 0 < \lambda < 1; k = \overline{1, n}),$$

а при помощи последних определяются напряжения в любой точке композита.

2. Решение определяющих конечно-разностных уравнений первого порядка. Решения определяющих конечно-разностных уравнений (1.8) и (1.9) построим методом, изложенным в [3]. Сначала уравнение (1.8) представим в форме

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_k &= [1 - P(k)] \bar{\tau}_{k-1} + Q(k), \\ P(k) &= \frac{b_k - a_k}{b_k}, \quad Q(k) = -\frac{f_k}{b_k} \quad (k = \overline{1, n-1}), \end{aligned}$$

решение которого имеет вид

$$\bar{\tau}_k = -\prod_{j=1}^k [1 - P(j)] \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{b_i \prod_{r=1}^i [1 - P(r)]} - \bar{\tau}_0 \right\} \quad k = \overline{1, n-1} \quad (2.1)$$

Аналогичным образом решение уравнения (1.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_k &= -\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{1 - \tilde{P}(j+1)} \left\{ \sum_{i=k}^{n-1} \frac{g_{i+1}}{a_{i+1}} \prod_{r=i+1}^{n-1} [1 - \tilde{P}(r+1)] - \bar{\tau}_n \right\} \\ \tilde{P}(k+1) &= \frac{(a_{k+1} - b_{k+1})}{a_{k+1}} \quad k = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Теперь приравнявая выражения (2.1) и (2.2) и учитывая (1.10), относительно неизвестных коэффициентов f_i ($i = \overline{1, n-1}$) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=k}^{n-1} G_{i+1} \sin(p\varphi_{i+1}) \frac{\prod_{r=i+1}^{n-1} \cos(p\varphi_{r+1})}{\prod_{j=k}^{n-1} \cos(p\varphi_{j+1})} f_i + \frac{\bar{\tau}_n}{\prod_{j=k}^{n-1} \cos(p\varphi_{j+1})} =$$

$$= -\sum_{i=1}^k G_i \operatorname{tg}(p\varphi_i) \frac{\prod_{r=1}^i \cos(p\varphi_r)}{\prod_{j=1}^k \cos(p\varphi_j)} f_i + \frac{\bar{\tau}_0}{\prod_{j=1}^k \cos(p\varphi_j)}, \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (2.3)$$

Вводя обозначения

$$A_i = G_i \operatorname{tg}(p\varphi_i), \quad (i = \overline{1, k}), \quad B_i = G_{i+1} \sin(p\varphi_{i+1}), \quad (i = \overline{k, n-1})$$

$$C_i = \prod_{r=1}^i \cos(p\varphi_r), \quad (i = \overline{1, k}), \quad D_i = \prod_{r=i}^{n-1} \cos(p\varphi_{r+1}), \quad (i = \overline{k, n-1})$$

систему (2.3) запишем в виде

$$A_k f_k + \sum_{i=1}^{k-1} A_i \frac{C_i}{C_k} f_i + \sum_{i=k}^{n-1} B_i \frac{D_{i+1}}{D_k} f_i = \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} - \frac{\bar{\tau}_n}{D_k}, \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.4)$$

Полагая

$$K_n = \prod_{r=1}^n \cos(p\varphi_r),$$

будем иметь:

$$D_{i+1} = \prod_{r=i+1}^{n-1} \cos(p\varphi_{r+1}) = \frac{K_n}{\cos(p\varphi_{i+1}) C_i}; \quad D_k = \prod_{j=k}^{n-1} \cos(p\varphi_{j+1}) = \frac{K_n}{C_k}$$

$$(i = \overline{k, n-1}, k = \overline{1, n-1}).$$

С учётом последнего система (2.4) преобразуется к следующей системе с левой треугольной матрицей:

$$\sum_{i=1}^k L_{ki} f_i = h_k, \quad (k = \overline{1, n-1})$$

$$L_{ki} = \begin{cases} A_i C_i - \frac{C_k^2}{C_i} A_{i+1}, & (i = \overline{1, k-1}), \\ A_k C_k, & (i = k) \end{cases} \quad h_k = \bar{\tau}_n - C_k^2 (X_n + \frac{\bar{\tau}_n}{K_n}), \quad X_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} f_i,$$

решение которой приведено в [1].

3. Частные случаи и числовые результаты. Рассмотрим двухслойный композит, который подвергается антиплоской деформации, вызванной силами $\tau_0(r)$ и $\tau_2(r)$, приложенными на крайних гранях композита $\theta = \alpha_0$ и $\theta = \alpha_2$ соответственно. Тогда, для преобразования Меллина неизвестного касательного напряжения на линии контакта слоев-клиньев из (1.7) получим

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\mu \sin(p\varphi_2) \bar{\tau}_0 + \sin(p\varphi_1) \bar{\tau}_2}{\mu \sin(p\varphi_2) \cos(p\varphi_1) + \sin(p\varphi_1) \cos(p\varphi_2)} \quad (3.1)$$

где $\varphi_2 = \alpha_2 - \alpha_1$, $\varphi_1 = \alpha_1 - \alpha_0$, $\mu = G_2/G_1$.

Применяя формулу обращения Меллина

$$\tau_1(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\tau}_1 r^{-p-1} dp,$$

после несложных вычислений [5, 6] придём к формуле

$$\tau_1(r) = \frac{1}{2\pi r} \left(\mu \int_0^\infty K(x, r) \tau_0(x) dx + \int_0^\infty L(x, r) \tau_2(x) dx \right) \quad (3.2)$$

где

$$K(x, r) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(s\varphi_2) \cos(s \ln \frac{x}{r}) ds}{\mu \text{sh}(s\varphi_2) \text{ch}(s\varphi_1) + \text{sh}(s\varphi_1) \text{ch}(s\varphi_2)}$$

$$L(x, r) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(s\varphi_1) \cos(s \ln \frac{x}{r}) ds}{\mu \text{sh}(s\varphi_2) \text{ch}(s\varphi_1) + \text{sh}(s\varphi_1) \text{ch}(s\varphi_2)} \quad (0 < r < \infty)$$

Далее для простоты допустим, что на крайних гранях композита приложены одинаковые сосредоточенные силы, т.е.

$$\tau_0(r) = \tau_2(r) = T \delta(r - r_0),$$

где $\delta(r)$ – функция Дирака. Тогда

$$\tau_1(r) = \frac{T}{4\pi r} (\mu K(r_0, r) + L(r_0, r))$$

$$K(r_0, r) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(s\varphi_2) \cos(s \ln \frac{r_0}{r}) ds}{\mu \text{sh}(s\varphi_2) \text{ch}(s\varphi_1) + \text{sh}(s\varphi_1) \text{ch}(s\varphi_2)} \quad (3.3)$$

$$L(r_0, r) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(s\varphi_1) \cos(s \ln \frac{r_0}{r}) ds}{\mu \text{sh}(s\varphi_2) \text{ch}(s\varphi_1) + \text{sh}(s\varphi_1) \text{ch}(s\varphi_2)} \quad (0 < r < \infty)$$

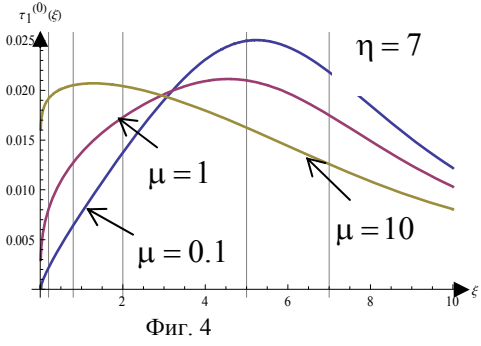
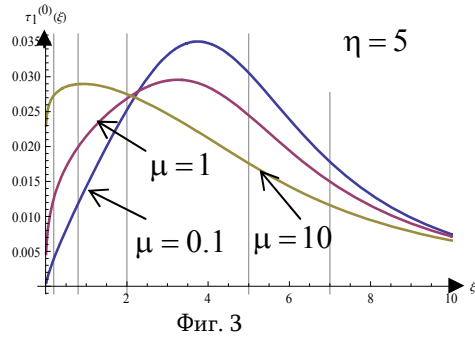
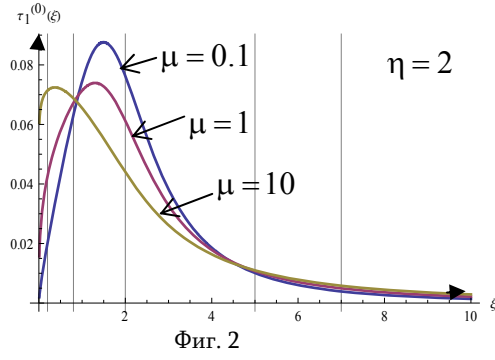
После введения безразмерных величин

$$r = a\xi, \quad r_0 = a\eta, \quad \tau_1^{(0)}(\xi) = \frac{a}{T} \tau_1(a\xi)$$

из (3.3) получим

$$\tau_1^{(0)}(\xi) = \frac{1}{4\pi\xi} (\mu K(\xi, \eta) + L(\xi, \eta)). \quad (3.4)$$

а) На фиг. 2-4 приведены графики безразмерного напряжения $\tau_1^{(0)}(\xi)$ в зависимости от безразмерной переменной ξ для различных значений μ при фиксированных значениях $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ и $\eta = 2, 5, 7$ соответственно.



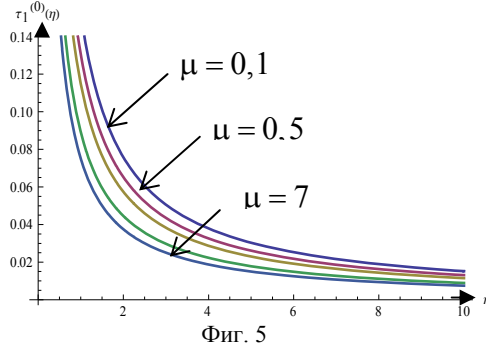
Из графиков видно, что при $\mu > 1$ контактное напряжение вблизи вершины клина больше, а при $\mu < 1$ меньше, чем контактное напряжение там же в однородном случае ($\mu = 1$).

б) При $r = r_0$ ($\xi = \eta$) из (3.3) и (3.4) получим

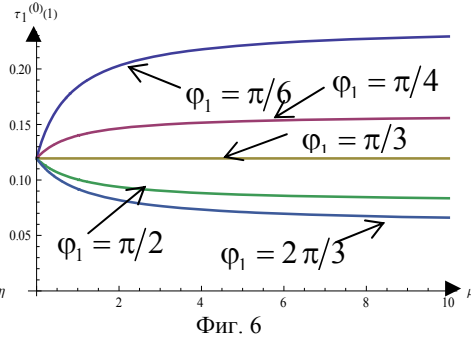
$$\tau_1^{(0)}(\eta) = \frac{1}{4\pi\eta} (\mu K(\eta, \eta) + L(\eta, \eta))$$

$$K(\eta, \eta) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(s\varphi_2) ds}{\mu \text{sh}(s\varphi_2) \text{ch}(s\varphi_1) + \text{sh}(s\varphi_1) \text{ch}(s\varphi_2)} \quad (3.5)$$

$$L(\eta, \eta) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(s\varphi_1) ds}{\mu \text{sh}(s\varphi_2) \text{ch}(s\varphi_1) + \text{sh}(s\varphi_1) \text{ch}(s\varphi_2)} \quad (0 < \eta < \infty)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 5 приведены графики изменения $\tau_1^{(0)}(\eta)$ для различных значений $\mu = 0, 1; 0, 5; 1; 3; 7$ при $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$. Эти графики характеризуются строгим монотонным убыванием напряжений, причём при возрастании коэффициента μ контактное напряжение уменьшается.

в) На фиг. 6 приведены графики изменения $\tau_1^{(0)}(\eta)$ в точке $\eta = 1$ в зависимости от параметра μ соответственно для различных значений $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ и при $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$.

3.2 При равных углах слоёв-клиньев $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ из (1.7) получим

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\mu \bar{\tau}_0 + \bar{\tau}_2}{(1 + \mu) \cos(p\alpha)}. \quad (3.6)$$

Если $\tau_0 = \tau_2$, то $\bar{\tau}_1 = \frac{\bar{\tau}_0}{\cos(p\alpha)}$, т.е. напряжение на плоскости контакта клиньев не зависит от отношения модулей сдвига слоёв μ , что подтверждают также графики на фиг. 4.

Далее, применяя к (3.6) формулу обращения, после несложных преобразований и вычислений [5, 6] получим

$$\tau_1(r) = \frac{1}{2\alpha r(\mu + 1)} \left(\mu \int_0^\infty \tau_0(x) \frac{(x/r)^{\pi/2\alpha}}{1 + (x/r)^{\pi/\alpha}} dx + \int_0^\infty \tau_2(x) \frac{(x/r)^{\pi/2\alpha}}{1 + (x/r)^{\pi/\alpha}} dx \right). \quad (3.7)$$

I. В случае, когда антиплоская деформация двухслойного композита вызвана одинаковыми равномерно распределёнными силами, приложенными на крайних гранях композита $\tau_0(r) = \tau_2(r) = P$, из (3.7) посредством простых вычислений получим

$$\tau_1(r) = \frac{P}{2 \cos \alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

II. В случае, когда антиплоскую деформацию композита вызывают одинаковые сосредоточенные силы на её крайних гранях $\tau_0(r) = \tau_2(r) = T\delta(r - r_0)$, из (3.7) получим

$$\tau_1(r) = \frac{T}{4\alpha r} \frac{(r_0/r)^{\pi/2\alpha}}{1 + (r_0/r)^{\pi/\alpha}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации //Изв.НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С.10-20.
2. Гаспарян А.В., Давтян З.А. Кручение круглого слоистого цилиндра конечной длины //Сб.трудов международной школы-конференции молодых ученых. 28 сентября – 1 октября 2009, Агавнадзор, Армения, с.186-189.
3. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М: Наука, 1967. 375с.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л: Наука, 1967. 403с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. М.: Наука, 1969. 343с.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108с.

Сведения об авторах:

Гаспарян Ануш Вараздатовна

К.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2

Тел.: (+37410) 52-48-90,

E-mail: anush@mechins.sci.am

Давтян Завен Азибекевич

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2

Тел.: (+37410) 52-48-90,

E-mail: anush@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 26.11.2013

**О ФЛАТТЕРЕ УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ,
ОБТЕКАЕМОЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА,
НАБЕГАЮЩИМ НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ**

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость упругой прямоугольной пластинки, дивергенция, локализованная дивергенция, флаттер, сверхзвуковое обтекание

Key words: the stability of an elastic rectangular plate, the divergence, the localized divergence, flutter, supersonic gas flow

Բեռնվողական Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ր.

**Ուղղանկյուն առի ֆլատերի մի խնդրի մասին, որի ազատ եզրին գերձայնային զազի հոսքը
վրավազը է կատարում**

Դիտարկված է գերձայնային զազի հոսքում ուղղանկյուն առի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր հողակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հողակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տրված դիվերգենցիայի և ֆլատերի առաջացման հնարավորությունը:

Գտնված են զազի հոսքի կրիտիկական արագության արժեքները:

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge

The linear problem of the dynamic stability of an elastic rectangular plate in a supersonic flow of gas is investigated. The flow is in a direction from the free edge to on the contrary hinge joint supported edge, and at the other two edges parallel to the flow are hinge joint supported. Its solution shows that the divergence or the localized divergence and the flutter are possible.

В линейной постановке исследуется динамическое поведение возмущённого движения вблизи границ области устойчивости тонкой упругой прямоугольной пластинки постоянной толщины с одним свободным и тремя шарнирно закреплёнными краями, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа в направлении от свободного края к противоположному шарнирно закреплённому краю, в предположении, что вдоль свободного края приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Установлена связь между характеристиками собственных колебаний пластинки и скоростью обтекающего её невозмущённого потока газа, позволяющая делать некоторые выводы об устойчивости возмущённого движения пластинки. Показана возможность потери статической и динамической устойчивости в зависимости от значений параметров: в пространстве «характерных» параметров задачи выделены области, при значениях параметров, из которых имеет место либо статическая потеря устойчивости – дивергенция или локализованная дивергенция, либо динамическая потеря устойчивости – флаттер пластинки. Найдены соответствующие критические скорости потока, превышение которых приводит к потере устойчивости возмущённого движения пластинки.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера обшивок сверхзвуковых летательных аппаратов.

Рассмотрение задач устойчивости тонких упругих пластинок, в которых поведение пластинки жёстко связано с воздействием обтекающего её сверхзвукового потока газа, имеет важное прикладное и теоретическое значение. Вопрос об упругой

устойчивости панелей обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки, неизбежно возникает на этапе проектирования и конструирования любого летательного аппарата для обеспечения безопасности полета. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а именно: статическую и динамическую неустойчивости или, в соответствии с новой терминологией, дивергентную и флаттерную неустойчивости соответственно. Деформации, возникающие при флаттере, более опасны для конструкции, так как быстро приводят к потере прочности и развитию усталостных трещин [1, стр. 175]. Изучению дивергентной и флаттерной неустойчивости пластинок и оболочек посвящено огромное количество работ. Монография [2] содержит всеобщий обзор, посвященный данному вопросу.

В 1947 г. А.А. Ильюшиным был открыт закон «плоских сечений» в аэродинамике сверхзвуковых скоростей [3], который пространственную задачу удлиненного тела или тонкого профиля сводит к двумерной. Одно из следствий этого закона – локальная формула поршневой теории для давления аэродинамического взаимодействия колеблющейся пластинки с потоком газа. Если зависимость от времени выделить сомножителем $\exp(\lambda t)$, то задача о флаттере пластины сводится к задаче на собственные значения для несамосопряженного оператора. Первые фундаментальные теоретические результаты в такой постановке получил А.А. Мовчан [4] при исследовании задачи о флаттере прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Эти результаты послужили основой для подавляющего числа исследований в последующие сорок с лишним лет.

Далее, В.В. Болотин [5], А.А. Ильюшин и И.А. Кийко [2] сформулировали в рамках закона «плоских сечений» новые постановки задачи о флаттере пластин, решены классы новых задач и обнаружены новые механические эффекты.

Примерно в это же время Ю.К. Коненковым [6] при исследовании изгибных колебаний тонкой полубесконечной пластины была обнаружена изгибная волна, локализованная в окрестности её свободного края, обладающая свойствами «рэлеевской волны» в полубесконечном пространстве – изгибная волна рэлеевского типа. Как оказалось, изгибная рэлеевская волна обладает наименьшей скоростью распространения по сравнению с остальными видами волн в тонкой пластинке [6]. В работе [7], по аналогии с изгибными локализованными колебаниями, исследован эффект локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы в окрестности её свободного края, сжатой по полубесконечным шарнирно закреплённым кромкам. В работах [8–10] исследуется последующая аналогия – локализованная дивергенция, возникающая в окрестности свободного края полубесконечной пластины-полосы [8], а также, прямоугольной пластинки [9,10], при обтекании сверхзвуковым потоком газа, набегающим на свободный край, соответственно, пластинки-полосы и прямоугольной пластинки.

В предлагаемой работе исследуется динамическое поведение возмущённого движения вблизи границ устойчивости тонкой упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край, в предположении, что вдоль свободного края пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота [5 (с. 27, 101), 11]. Поток газа направлен от свободного края пластики к шарнирно закреплённому краю параллельно остальным двум шарнирно закреплённым краям. Получена зависимость, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего её потока газа, позволяющая делать некоторые выводы об устойчивости возмущённого движения пластинки. С помощью аналитических методов анализа в пространстве «характерных» параметров задачи выделены области, при значениях параметров из которых возмущённое движение пластинки

теряет статическую, либо динамическую устойчивость: имеет место дивергенция либо локализованная дивергенция в окрестности свободного края пластинки, либо флаттер пластинки. Найдены соответствующие критические скорости потока газа, при превышении которых имеет место потеря устойчивости в дивергентной и флаттерной формах.

Показана существенная зависимость критической скорости дивергенции от коэффициента Пуассона и от относительной длины и ширины пластинки, в то время, как критическая скорость дивергенции не зависит от сосредоточенных инерционных моментов поворота и масс, приложенных вдоль свободного края пластинки.

Установлено, что в случае, в котором ширина пластинки превосходит её длину более чем в два раза, наблюдается только лишь явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края пластинки, аналогичное явлению локализованной дивергенции, возникающей при обтекании полубесконечной пластины-полосы сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край [8]. А в случае, в котором отношение ширины пластинки к её длине примерно порядка одной тысячной и меньше, можно полагать, что поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа аналогично поведению обтекаемой удлинённой пластинки: имеют место явления дивергенции и флаттера, которые при изменении скорости потока газа либо чередуются, либо флаттер возникает в зоне дивергентной неустойчивости.

Потеря устойчивости возмущённого движения пластинки наиболее ярко проявляется при умеренных значениях отношения ширины пластинки к её длине, при которых имеет место как дивергентная, так и флаттерная неустойчивости. Как правило, критические скорости дивергенции меньше критических скоростей флаттера. В этом случае, также зоны дивергентной и флаттерной неустойчивости при изменении скорости потока газа либо чередуются, либо, при определённых значениях параметров задачи, флаттерная неустойчивость возникает в зоне дивергентной неустойчивости.

Найдены опасные границы области устойчивости в смысле терминологии работы Н.Н.Баутина [12], при переходе через которых происходит потеря прочности и возникновение усталостных трещин в материале пластинки [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная тонкая упругая пластинка, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа будем считать плоским и потенциальным. А также будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромка $x=0$ пластинки свободна, а кромки $x=a$, $y=0$ и $y=b$ шарнирно закреплены. Предполагается, что шарниры идеальны. Вдоль края $x=0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c одновременно [5 (с.101), 11].

Под влиянием каких-либо причин невозмущённое состояние равновесия пластинки может быть нарушено и пластинка начнёт совершать возмущённое движение с прогибом $w=(x, y, t)$. Прогиб w вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [3]:

$\Delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать, что прогибы w малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия пластинки, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными вдоль свободного края пластинки $x = 0$ сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c . При этом, влиянием распределённой массы пластинки и сил сопротивления можно пренебречь согласно примечанию 1.

Малые изгибные колебания точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [3] описываются дифференциальным уравнением [4, 5 (с. 245)]

$$D \Delta^2 w + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

где $\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [5, 11]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D^{-1} I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D^{-1} m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad x = 0;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = a; \quad (1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \text{ и } y = b, \quad (1.3)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшее значение скорости потока газа – критическую скорость V_{cr} , приводящую к неустойчивости: при $V \geq V_{cr}$ устойчивое возмущённое движение пластинки становится неустойчивым. Иными словами, требуется определить значения параметра V , при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), (1.3).

Примечание 1. Как известно, методы исследования неконсервативных задач упругой устойчивости могут быть разбиты на две группы. К первой группе принадлежат методы, основанные на непосредственном анализе дифференциальных уравнений, описывающих движение упругого тела – «точные методы». К другой группе относятся приближённые методы, суть которых сводится к замене упругого тела некоторой эквивалентной системой с конечным числом степеней свободы с последующим анализом этой эквивалентной системы [5 (с. 27, 101)]. В данной работе, с целью получения возможности аналитического исследования в рассматриваемой задаче устойчивости, распределённая масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными массами и моментами поворота, приложенными вдоль свободного края пластинки [5 (с. 101), 11]. Такая замена вовсе не приводит к искажению динамической картины явления, быть может, с точностью

до численных значений критических скоростей потока газа: значения критических скоростей являются несколько завышенными.

Примечание 2. Решение задачи в линейной постановке позволяет находить критическую скорость потока, при которой невозмущённая скорость пластинки перестаёт быть устойчивой по отношению к малым возмущениям и позволяет оценить лишь тенденцию колебаний. Но при этом не удаётся предсказать дальнейшее развитие процессов, в то время как нелинейная теория позволяет определить характеристики переходного процесса [1,5,13,14]. Несмотря на это, рассмотрение задачи в линейной постановке, допускающей аналитическое исследование, имеет смысл: её результаты ценны, так как предвосхищают результаты исследования задачи в нелинейной постановке.

2. Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости пластинки (1.1) – (1.3) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), (1.3), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot \sin(\mu_n y) \cdot \exp(\lambda t), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

n – число полуволн вдоль стороны пластинки b .

Тогда, в соответствии с выражением (2.1), рассматриваемая задача о флаттере пластинки (1.1) – (1.3) сводится к следующей краевой задаче на собственные значения λ несамосопряжённого оператора для обыкновенного дифференциального уравнения относительно форм колебаний $f_n(x)$:

$$f_n^{IV}(x) - 2\mu_n^2 f_n''(x) + a_0 \rho_0 V D^{-1} f_n'(x) + \mu_n^4 f_n(x) = 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} f_n'' - \mu_n^2 v f_n(x) &= I_c D^{-1} \lambda^2 f_n'(x), \\ f_n''' - \mu_n^2 (2 - v) f_n'(x) &= -m_c D^{-1} \lambda^2 f_n(x), \quad x = 0; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$f_n(x) = 0, \quad f_n''(x) = 0, \quad x = a.$$

Система «пластинка–поток», описываемая соотношениями (1.1) – (1.3), асимптотически устойчива, если все собственные значения λ краевой задачи (2.2), (2.3) для обыкновенного дифференциального уравнения имеют отрицательные вещественные части ($\text{Re } \lambda < 0$), и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re } \lambda > 0$). Критическая скорость потока V_{cr} , характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости возмущённого движения пластинки, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\text{Re } \lambda = 0$).

Частное решение дифференциального уравнения (2.2) примем в виде

$$f_n(x) = C_n \exp(\mu_n p x), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.4)$$

C_n – произвольные постоянные.

Подставляя решение (2.4) в дифференциальное уравнение (2.2), получаем характеристическое уравнение, являющееся алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$p^4 - 2p^2 + \alpha_n^3 p + 1 = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}, \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad \alpha_n^3 > 0,$$

или

$$(p^2 - 1)^2 + \alpha_n^3 p = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}, \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad \alpha_n^3 > 0. \quad (2.5)$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (2.5) имеет два отрицательных действительных корня $p_1 < 0$, $p_2 < 0$ и пару комплексно-сопряжённых корней $p_{3,4} = \alpha \pm i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha > 0$. Следовательно, общее решение уравнения (2.2), в соответствии с выражением (2.4), запишется в виде суммы

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^4 C_{nk} \exp(\mu_n p_k x), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.6)$$

C_{nk} – произвольные постоянные.

В работе [8] подробно излагается решение характеристического уравнения (2.5) с помощью алгоритма Феррари [15], в соответствии с которым алгебраическое уравнение четвёртой степени сводится к эквивалентной системе двух квадратных уравнений. При этом корни характеристического уравнения (2.5) определяются следующими выражениями [8]:

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2(q+1)}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - \frac{q-1}{2}}, \quad p_1 < 0, \quad p_2 < 0; \quad (2.7)$$

$$p_{3,4} = \frac{\sqrt{2(q+1)}}{2} \pm i \sqrt{\sqrt{q^2-1} + \frac{q-1}{2}}; \quad (2.8)$$

$$q > 1; \quad (2.9)$$

q – единственный действительный корень кубического уравнения [8]

$$8 \cdot (1+q)^2 (q-1) = \alpha_n^6, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}, \quad \mu_n = \pi n b^{-1}. \quad (2.10)$$

Отметим, что из соотношений (2.10) и положительности дискриминанта

$$Q = \alpha_n^6 \left(\frac{1}{27} + \frac{\alpha_n^6}{256} \right)$$

кубического уравнения очевидно, что кубическое уравнение (2.10) при условии $\alpha_n^3 > 0$ имеет один действительный корень q ($q > 1$) и пару комплексно-сопряжённых корней.

Из соотношений (2.10) легко можно получить выражение зависимости скорости потока газа V от параметров системы

$$V = 2\sqrt{2(q-1)} \cdot (q+1) \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \quad (2.11)$$

или

$$V = 2\sqrt{2(q-1)} \cdot (q+1) \cdot \pi^3 n^3 D (a_0 \rho_0 b^3)^{-1}, \quad (2.12)$$

где через γ обозначено отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b :

$$\gamma = ab^{-1}. \quad (2.13)$$

В соответствии с соотношением (2.6), корням (2.7), (2.8) соответствует следующее общее решение дифференциального уравнения (2.2) при граничных условиях (2.3):

$$f_n(x) = C_{n1} \exp(-0.5\sqrt{2(q+1)} - \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1)})\pi n b^{-1} x + \\ + C_{n2} \exp(-0.5\sqrt{2(q+1)} + \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1)})\pi n b^{-1} x + \quad (2.14)$$

$$+ \exp(0.5\sqrt{2(q+1)})\pi n b^{-1}x \cdot \left(C_{n3} \cos(\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)}) \cdot \pi n b^{-1}x \right) + \\ + C_{n4} \sin(\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)})\pi n b^{-1}x \Big),$$

где q – единственный действительный корень кубического уравнения (2.10); C_{nk} , $k = \overline{1,4}$ – произвольные постоянные.

Подставляя общее решение (2.14) дифференциального уравнения (2.2) в граничные условия (2.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвертого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Для того, чтобы

$\sum_{k=1}^4 C_{nk}^2 \neq 0$, что соответствует условию существования нетривиального решения

$f_n(x) \neq 0$, необходимо, чтобы равнялся нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы уравнений. Раскрывая определитель и приравнявая его к нулю, после несложных преобразований получаем дисперсионное уравнение в безразмерных переменных относительно собственного значения λ краевой задачи (2.2), (2.3) в виде биквадратного уравнения

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2) \lambda^2 + A_3 = 0. \quad (2.15)$$

Здесь

$$\chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \quad \delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \quad (2.16)$$

– приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c соответственно, приложенных вдоль свободного края пластинки $x = 0$;

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma) = \quad (2.17)$$

$$= (1 - \exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n \gamma) \cdot B_1 B_2 + \exp(-\sqrt{2(q+1)} \cdot \pi n \gamma) \cdot \\ \cdot [(\sqrt{2(q-1)} - \sqrt{2(q+1)}) \cdot B_1 \cdot \text{ch}(\pi n \gamma B_1) \cdot \sin(\pi n \gamma B_2) - \\ - (\sqrt{2(q-1)} + \sqrt{2(q+1)}) \cdot B_2 \text{sh}(\pi n \gamma B_1) \cdot \cos(\pi n \gamma B_2)]];$$

$$A_1 = A_1(q, n, \gamma) = \sqrt{2(q+1)} \left\{ (q - \sqrt{(q^2-1)}) B_1 B_2 + \quad (2.18)$$

$$+ (q + \sqrt{(q^2-1)}) B_1 B_2 \exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n \gamma) + \\ + \left[\sqrt{(q^2-1)} \cdot (\sqrt{2(q-1)} + \sqrt{2(q+1)}) \text{sh}(\pi n \gamma B_1) + \right. \\ + 2(2q-1) B_1 \text{ch}(\pi n \gamma B_1) \left. \right] B_2 \cos(\pi n \gamma B_2) \cdot \exp(-\sqrt{2(q+1)} \cdot \pi n \gamma) + \\ + \left[(q-1) \text{sh}(\pi n \gamma B_1) + \sqrt{(q^2-1)} \cdot (\sqrt{2(q+1)} - \sqrt{2(q-1)}) B_1 \text{ch}(\pi n \gamma B_1) \right] \cdot \\ \cdot \sin(\pi n \gamma B_2) \cdot \exp(-\sqrt{2(q+1)} \cdot \pi n \gamma) \Big\};$$

$$A_2 = A_2(q, n, \gamma) = \sqrt{2(q+1)} \left[(1 + \exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n \gamma) \cdot B_1 B_2 - \quad (2.19) \right. \\ \left. - 2 B_1 B_2 \text{ch}(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) \cdot \exp(-\sqrt{2(q+1)} \cdot \pi n \gamma) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +3(q-1)\text{sh}(\pi n \gamma B_1) \sin(\pi n \gamma B_2) \cdot \exp(-\sqrt{2(q+1)} \cdot \pi n \gamma) \Big]; \\
A_3 = A_3(q, n, \gamma, v) = & \left[2(q+1)(q - \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1-v)^2 \right] B_1 B_2 - \\
& - \left[2(q+1)(q + \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1-v)^2 \right] B_1 B_2 \exp(-2\sqrt{2(q+1)} \pi n \gamma) + \\
& + \left\{ [(4q^2 + 2q - 1)\sqrt{2(q-1)} - (2q^2 - 4q + 1)\sqrt{2(q+1)} - \right. \\
& - 2((2q-1)\sqrt{2(q+1)} - q\sqrt{2(q-1)})v + \\
& + (\sqrt{2(q+1)} + \sqrt{2(q-1)})v^2] \text{sh}(\pi n \gamma B_1) + \\
& + 4(q+1)\sqrt{q^2 - 1} \cdot B_1 \text{ch}(\pi n \gamma B_1) \Big\} B_2 \cos(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1)} \pi n \gamma) + \\
& + [-B_1 \cdot ((4q^2 + 2q - 1)\sqrt{2(q-1)} + (2q^2 - 4q + 1)\sqrt{2(q+1)} + \\
& + 2((2q-1)\sqrt{2(q+1)} + q\sqrt{2(q-1)})v - \\
& - (\sqrt{2(q+1)} - \sqrt{2(q-1)})v^2) \text{ch}(\pi n \gamma B_1) - \\
& - 6(q^2 - 1)\sqrt{(q^2 - 1)} \text{sh}(\pi n \gamma B_1) \Big] \sin(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1)} \pi n \gamma);
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$B_1(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1} - 0.5(q-1)}, \quad B_2(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1} + 0.5(q-1)}, \tag{2.21}$$

$q (q > 1)$ – единственный действительный корень кубического уравнения (2.10); γ – отношение сторон пластинки, определяемое выражением (2.13); v – коэффициент Пуассона.

Учитывая условие (2.9), из выражений (2.21) имеем

$$B_1(q) > 0, \quad B_2(q) > 0 \quad \text{для всех } q > 1. \tag{2.22}$$

В силу условий (2.22), из соотношений (2.17) и (2.19) следует, что

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma) > 0, \quad A_2 = A_2(q, n, \gamma) > 0 \tag{2.23}$$

для всех $q > 1$, $n \geq 1$ и $\gamma > 0$.

Ясно, что дисперсионное уравнение (2.15), устанавливающее зависимость собственного значения λ от «характерных» параметров a , b , n , v , m_c , I_c , q (или V в соответствии с (2.11), (2.12)), не что иное, как характеристическое уравнение системы (2.2), (2.3). Поэтому, для выяснения свойств возмущённого движения системы «пластинка–поток» (2.2), (2.3), необходимо изучить характер влияния её параметров на собственные значения λ – корни характеристического уравнения (2.15): система (2.2), (2.3) устойчива, если все собственные значения λ находятся в левой части комплексной плоскости ($\text{Re } \lambda \leq 0$).

Следует отметить, что среди параметров исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа (1.1)–(1.3), наиболее существенное влияние на её динамическое поведение оказывают следующие параметры: $\gamma = ab^{-1}$ – отношение ширины пластинки к её длине; $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$ – отношение коэффициентов, характеризующих влияние сосредоточенных инерционных моментов поворота и масс соответственно, приложенных вдоль свободного края пластинки; v – коэффициент Пуассона;

$q (q > 1)$ – единственный действительный корень кубического уравнения (2.10), характеризующий, в соответствии с выражениями (2.11) или (2.12), скорость V обтекающего пластинку потока газа; n – число полуволн вдоль стороны b . Значения остальных параметров («нехарактерных») примем фиксированными.

Таким образом, анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия прямоугольной пластинки в потенциальном сверхзвуковом потоке газа при наличии сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки, сводится к исследованию поведения корней характеристического уравнения (2.15) системы (2.2), (2.3), определяющих собственные движения пластинки, в зависимости от «характерных» параметров исходной задачи устойчивости (1.1)-(1.3).

3. Исследуем характеристическое уравнение (2.15) при условии

$$\gamma \in (0, \infty), \chi_n > 0, \delta_n > 0, \quad (3.1)$$

где γ, χ_n, δ_n определены выражениями (2.13) и (2.16) соответственно.

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}, \quad (3.2)$$

характеристическое уравнение (2.15), в соответствии с условиями (2.23) и (3.1), перепишем в виде

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2) \chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0, \quad (3.3)$$

где $\chi_n, \delta_n, A_0, A_1, A_2, A_3$ определены, соответственно, выражениями (2.16)–(2.20).

Введём в рассмотрение области M_0, M_1, M_2 и M_3 в пространстве «характерных» параметров M рассматриваемой динамической системы «пластинка–поток», при значениях параметров, из которых, соответственно, либо все корни характеристического уравнения (3.3) находятся в левой части комплексной плоскости $(\operatorname{Re} \lambda \leq 0) (M_0)$, либо среди корней имеется один положительный корень (M_1) , либо имеются два положительных корня (M_2) , либо имеется пара комплексно-сопряжённых корней с положительной вещественной частью (M_3) . Следовательно, возмущённое движение пластинки при значениях параметров из области M_0 устойчиво, а при значениях параметров из областей M_1, M_2 и M_3 – неустойчиво.

Область устойчивости возмущённого движения пластинки $M_0 \in M$ рассматриваемой динамической системы определяется соотношениями

$$k_n A_1 + A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \Delta > 0. \quad (3.4)$$

Здесь Δ – дискриминант характеристического уравнения (3.3):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, v, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3. \quad (3.5)$$

Очевидно, что при условиях (3.4) уравнение (3.3) имеет две пары чисто мнимых корней: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$. При этом прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

Границами области устойчивости M_0 возмущённого движения прямоугольной пластинки в пространстве её параметров M при условии

$$k_n A_1 + A_2 > 0 \quad (3.6)$$

являются гиперповерхности [12]

$$A_3 = 0, \quad (3.7)$$

$$\Delta = 0. \quad (3.8)$$

На гиперповерхности (3.7) характеристическое уравнение (3.3) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2; а на гиперповерхности (3.8) характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

Из способа разбиения пространства параметров M задачи на области устойчивости и неустойчивости возмущённого движения пластинки, очевидно, что области неустойчивости M_1 , M_2 , M_3 определяются, соответственно, соотношениями:

$$A_3 < 0, \quad \Delta > 0; \quad (3.9)$$

$$A_3 > 0, \quad \Delta > 0, \quad k_n A_1 + A_2 < 0; \quad (3.10)$$

$$A_3 > 0, \quad \Delta < 0. \quad (3.11)$$

На границе области устойчивости M_0

$$\Delta > 0, \quad k_n A_1 + A_2 > 0, \quad A_3 = 0 \quad (3.12)$$

возмущённое движение теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция. Критические скорости $V_{cr.div}^{(1)}$, соответствующие первому корню $q_0^{(1)} = q_0^{(1)}(n, \gamma, \nu)$ уравнения (3.7), и подсчитанные по формуле (2.11), разграничивают области устойчивости M_0 и статической (дивергентной) неустойчивости M_1 возмущённого движения прямоугольной пластинки. Очевидно, что

$$V_{cr.div}^{(1)} = V_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, \nu). \quad (3.13)$$

С увеличением скорости потока газа при скоростях $V \geq V_{cr.div}^{(1)}$ происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ задачи (2.2), (2.3), вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения от устойчивости к дивергентной неустойчивости. Это приводит к соответствующему изменению динамического поведения пластинки: в пластинке, совершающей гармонические колебания, возникают напряжения, приводящие к изменению формы – пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Так как монотонное «выпучивание» пластинки не имеет колебательного характера, то может рассматриваться как квазистатический процесс – дивергенция.

Уравнение (3.7), в точности такое же, какое дисперсионное уравнение, полученное в работе [9] при исследовании задачи устойчивости прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа, направленном от свободного края пластинки к шарнирно закреплённому краю вдоль остальных двух шарнирно закреплённых краёв, в статической постановке ($m_c = 0$, $I_c = 0$). Следовательно, при исследовании исходной задачи устойчивости (1.1)–(1.3) можно учитывать результаты, полученные в работе [9], в которой найдены значения $V_{cr.div}^{(1)}$ для различных значений n , γ и ν . При этом показано, что в случае, в котором $\gamma < 2$, имеет место дивергентная устойчивость (пластинка вся «выпучивается»), а в случае,

в котором $\gamma \geq 2$, с некоторым допущением можно принять, что имеет место локализованная дивергентная неустойчивость в окрестности свободного края пластинки $x = 0$ (пластинка «выпучивается» только лишь вдоль окрестности свободного края $x = 0$) [8,9]; критическая скорость потока $V_{cr.div}^{(1)}$ меньше в пластинках из материалов с бóльшим коэффициентом Пуассона ν ; наименьшее значение $V_{cr.div}^{(1)}$ достигается при $n = 1$ [8,9].

Область M_1 состоит из двух подобластей M_{11} и M_{12} , которые определяются соотношениями $A_3 < 0$, $\Delta > 0$, $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $A_3 < 0$, $\Delta > 0$, $k_n A_1 + A_2 < 0$ соответственно. Уравнение $k_n A_1 + A_2 = 0$

$$(3.14)$$

разграничивает область M_1 на подобласти M_{11} и M_{12} . В обеих подобластях характеристическое уравнение (2.15) имеет два действительных корня: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых (из двух собственных движений пластинки, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2 , одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону), прогибы будут возрастать во времени по экспоненциальному закону. При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div}^{(1)}$ попадаем в подобласть M_{11} , в которой $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, а при дальнейшем увеличении скорости потока газа попадаем в подобласть M_{12} , в которой $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Это означает, что в случае попадания в подобласть M_{12} интенсивность возрастания прогибов повышается. Второму корню $q_0^{(2)}$ уравнения (3.7) соответствует значение $V_{cr.div}^{(2)}$, подсчитанное по формуле (2.11). Очевидно, что $V_{cr.div}^{(2)} > V_{cr.div}^{(1)}$. Если это состояние прямоугольной пластинки удастся каким-либо способом перейти, то при дальнейшем увеличении скорости потока газа V из области дивергентной неустойчивости M_1 попадаем в область M_2 , определяемую условиями (3.10), в которой явление дивергенции более ярко выражено. В области M_2 характеристическое уравнение (2.15) имеет четыре действительных корня λ_i , среди которых два корня положительные ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$), а два корня отрицательные ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$): из четырёх собственных движений пластинки два затухают, а остальные два неограниченно отклоняются по экспоненциальному закону. При дальнейшем увеличении скорости потока газа V из области дивергентной неустойчивости M_2 попадаем либо в область устойчивости M_0 , либо в область флаттерной неустойчивости M_3 . В области M_3 характеристическое уравнение (2.15) имеет, по крайней мере, два комплексно-сопряжённых корня с положительной вещественной частью. При переходе из области M_2 в область M_3 проявляется явление панельного флаттера, имеющее характер колебаний по нарастающей амплитуде, наряду с дивергенцией – монотонным выпучиванием пластинки.

На границе области устойчивости M_0

$$k_n A_1 + A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \Delta = 0 \quad (3.15)$$

и на границе области статической неустойчивости M_2

$$k_n A_1 + A_2 < 0, \quad A_3 > 0, \quad \Delta = 0 \quad (3.16)$$

возмущённое движение пластинки теряет динамическую устойчивость – пластинка совершает флаттерные колебания.

Критические скорости $V_{cr.fl}^{(1)}$ потока газа, соответствующие первому корню $q_{fl}^{(1)} = q_{cr.fl}^{(1)}(n, \gamma, v, k_n)$ уравнения (3.8) и подсчитанные по формуле (2.11), разграничивают либо область устойчивости M_0 от области динамической неустойчивости M_3 , определяемых соотношениями (3.4), (3.11) соответственно, либо область статической неустойчивости M_2 от области динамической неустойчивости M_3 , определяемых соотношениями (3.10), (3.11) соответственно, в зависимости от значений параметров γ и k_n , определяемых соответственно выражениями (2.13), (3.2). В обоих случаях при значениях скоростей потока газа $V \geq V_{cr.fl}^{(1)}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям.

Таким образом, критические скорости дивергентной неустойчивости $V_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, v)$ и флаттерной неустойчивости $V_{cr.fl}^{(1)}(n, \gamma, v, k_n)$ возмущённого движения прямоугольной пластинки, соответствующие, соответственно, первым корням $q_0^{(1)} = q_0^{(1)}(n, \gamma, v)$ и $q_{fl}^{(1)} = q_{cr.fl}^{(1)}(n, \gamma, v, k_n)$ уравнений (3.7) и (3.8), определяются по формулам (2.11) и (2.12) с достаточной точностью. При этом, в соответствии с соотношениями (2.23), (3.1), происходит «мягкий» переход возмущённого движения пластинки от устойчивости к неустойчивости как в дивергентной, так и во флаттерной формах.

4. В данной работе с помощью методов графо-аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, v, k_n)\}$, параметризованных надлежащим образом. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому ограничимся иллюстрациями типичных случаев, выделяя наиболее представительные из семейства кривых $\{q(n, \gamma, v, k_n)\}$ в многопараметрическом пространстве M .

С помощью численных методов анализа найдены первые и вторые корни, соответственно $q_{cr}^{(1)}$ и $q_{cr}^{(2)}$, уравнений (3.7), (3.8) и (3.14), соответствующие различным значениям параметров $\gamma = ab^{-1}$, $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, n , v в предположении $\gamma \neq 0$, $\chi_n \neq 0$, $\delta_n \neq 0$. Подставляя полученные значения $q_{cr}^{(1)}$ в выражение (2.11) или (2.12), получаем соответствующие значения критических скоростей потока газа V_{cr} , разграничивающие области устойчивости M_0 и неустойчивости M_1 , M_2 и M_3 в пространстве «характерных» параметров исходной задачи устойчивости (1.1)–(1.4). При этом, численные расчёты, проведённые для различных n , показали, что при фиксированных значениях остальных параметров наименьшее значение $V_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, v)$ и $V_{cr.fl}^{(1)}(n, \gamma, v, k_n)$ достигается при $n = 1$:

$$V_{\text{cr.div.}}(\gamma, \nu) = V_{\text{cr.div.}}^{(1)}(1, \gamma, \nu) = \min_n V_{\text{cr.div.}}^{(1)}(n, \gamma, \nu), \quad (4.1)$$

$$V_{\text{cr.fl.}}(\gamma, \nu, k_1) = V_{\text{cr.fl.}}^{(1)}(1, \gamma, \nu, k_1) = \min_n V_{\text{cr.fl.}}^{(1)}(n, \gamma, \nu, k_n). \quad (4.2)$$

Из уравнений (3.7) и (3.8), в силу соотношений (2.12), (2.17)–(2.20) и (3.5), очевидно, что, начиная с $\gamma \geq 2$, критическая скорость дивергенции (4.1) зависит только от коэффициента Пуассона ν , а в случае динамической неустойчивости влияние коэффициента Пуассона ν на значение критической скорости флаттера (4.2) незначительно, в особенности, при значениях $\gamma \leq 0.3$, что хорошо согласуется с результатами численного анализа.

Легко показать, что уравнение (3.7) в предельном случае, когда $\gamma \rightarrow 0$ ($b \rightarrow \infty$) при всех $q > 1$ и ν , обращается в тождество, а в случае, когда $\gamma \geq 2$, приводится к уравнению

$$2(q+1) \cdot (q - \sqrt{q^2 - 1} - \nu) - (1 - \nu)^2 = 0, \quad \gamma \in [2, \infty), \quad (4.3)$$

которое в точности совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в работе [8] при изучении явления локализованной дивергентной неустойчивости, возникающей в окрестности свободного края ($x = 0$) упругой полубесконечной пластины-полосы ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа вдоль полубесконечных шарнирно закреплённых краёв в направлении от свободного края $x = 0$ к закреплённому краю $x = a$. Отсюда, очевидно, следует, что в предельном случае $\gamma \rightarrow 0$ ($b \rightarrow \infty$) невозмущённая форма равновесия пластинки является статически неустойчивой, а при $\gamma \geq 2$ можно сказать, что при $q = q_{\text{div}}^*$ (q_{div}^* – решение уравнения (4.3)) имеет место явление локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ рассматриваемой прямоугольной пластинки. При этом, как следует из уравнения (4.3), его решение q_{div}^* и соответствующее значение приведённой критической скорости дивергенции $V_{\text{div}}^* \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, найдённой по формуле (2.11), зависят только от коэффициента Пуассона ν , что согласуется с полученными численными результатами.

В табл. 1–4 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки (1.1)–(1.3), характеризующие наиболее представительные случаи зависимости критической скорости потока газа $V_{\text{cr.div}}$ и $V_{\text{cr.fl}}$ от параметров задачи.

В результате расчёта было установлено следующее.

При всех $\gamma \in (0, 2)$ значение критической скорости дивергенции $V_{\text{cr.div}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ зависит от коэффициента Пуассона ν и параметра $\gamma = ab^{-1}$ – отношения сторон прямоугольника: $V_{\text{cr.div}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν , а с возрастанием γ критическая скорость дивергенции растёт (табл. 1).

В случае достаточно длинных пластинок ($\gamma = ab^{-1} \leq 0.0001$) значение критической скорости дивергенции, примерно, порядка $V_{\text{cr.div}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \approx 10^{-7}$,

а с уменьшением γ стремится к нулю [11]: $V_{cr.div.} \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$. Это означает, что при значениях $\gamma \leq 0.0001$ поведение обтекаемой в сверхзвуковом потоке газа прямоугольной пластинки, примерно, такое же, как и у удлинённой пластинки $\gamma \rightarrow 0$ ($b \rightarrow \infty$): в обоих случаях невозмущённая форма равновесия пластинки, являясь изначально до обтекания статически неустойчивой, остается такой же и при обтекании её потоком газа.

Таблица 1

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.375	0.5
$1 \cdot 10^{-4}$	$0.365 \cdot 10^{-6}$	$0.332 \cdot 10^{-6}$	$0.294 \cdot 10^{-6}$	$0.265 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$0.365 \cdot 10^{-2}$	$0.332 \cdot 10^{-2}$	$0.294 \cdot 10^{-2}$	$0.265 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-1}$	0.365	0.332	0.294	0.265
$5 \cdot 10^{-1}$	14.95	13.51	10.78	9.06
$8 \cdot 10^{-1}$	80.47	60.09	46.75	35.95
1.0	323.52	157.17	101.04	70.21
1.2	613.53	320.01	194.87	133.24
1.5	980.85	595.82	388.36	269.25
1.8	1695.90	992.19	695.13	440.55
2.0	2598.09	1382.02	953.54	604.31

Далее, начиная с $\gamma = 2$, найденные в данной работе для различных значений коэффициента Пуассона ν значения $q_{cr.div}^{(1)}$ и приведённой критической скорости дивергенции $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, пересчитанной по формуле (2.12) $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$, примерно равны (с точностью порядка 10^{-4}) соответствующим значениям $\tilde{q}_{div}$ и приведённой критической скорости локализованной дивергенции $\tilde{V}_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$, полученных в работе [8] при исследовании задачи локализованной дивергенции в окрестности свободного края полубесконечной пластины–полосы (табл. 2).

Таблица 2

ν	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$	2453.012	537.191	173.371	120.741	77.398

Следовательно, при значениях $\gamma \geq 2$ прямоугольная пластинка в потоке газа теряет статическую устойчивость при скоростях потока $V \geq V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3) \approx V_{loc.div}^* \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ (табл. 2), при которых наблюдается явление локализованной дивергенции в окрестности свободного края

$x = 0$ полубесконечной пластины–полосы [8]. При этом, критическая скорость локализованной дивергенции прямоугольной пластинки $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ зависит только от коэффициента Пуассона ν : она меньше в пластинах из материалов с бóльшим коэффициентом Пуассона ν [8]. Так как в этом предельном случае $q_{cr.div}^{(1)}$ определяется из простого выражения (4.3.), то можно сказать, что для значений $\gamma \geq 2$ найдено приближённое выражение (4.3), позволяющее легко найти критическую скорость дивергенции $V_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ (табл.1) или $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ (табл.2), подставляя полученные значения $q_{cr.div}^{(1)}$ в выражение (2.11) или (2.12) соответственно.

В табл. 3 представлены значения приведённой критической скорости $V_{cr.fl.}^{(1)} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ потока газа, соответствующие различным значениям параметров $\gamma \in [0.2, 0.72]$, $k_1 \in [0.1, 10]$, определяемых соответственно выражениями (2.13), (3.2), и коэффициента Пуассона ν , которые разграничивают область устойчивости M_0 от области динамической неустойчивости M_3 , определяемых соотношениями (3.12), (3.11). При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}^{(1)}$ происходит плавный переход из области M_0 в область M_3 : возмущённое движение пластинки от гармонических колебаний «мягко» переходит к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям.

Переход из области M_0 в область M_3 имеет место только при значениях $\gamma \in [0.2, 0.72]$ и $k_1 \in [0.1, 200]$. При этом, зависимость приведённой критической скорости флаттера $V_{cr.fl.}^{(1)} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ от параметров k_1 , γ и ν сложная (табл.3). При значениях $k_1 \in [0.1; 10)$ критическая скорость $V_{cr.fl.}^{(1)} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ зависит от параметров γ и ν : при фиксированных значениях параметров k и ν приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.}^{(1)} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ возрастает с увеличением γ , а при фиксированных значениях параметров k_1 и γ – больше в пластинах из материалов с бóльшим коэффициентом Пуассона ν . При $k_1 \in (10; 200]$ потеря динамической устойчивости имеет место только при значениях $\gamma = 0.72$ и $\nu = 0.125$. При этом, приведённая критическая скорость флаттера не зависит от k_1 и равна $V_{cr.fl.}^{(1)} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \approx 147.05$ для всех $k_1 \in (10; 200]$.

В табл. 4 представлены значения критической скорости флаттера $\tilde{V}_{cr.fl.}^{(1)} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, разграничивающие область статической неустойчивости M_2 от области динамической неустойчивости M_3 , определяемых соотношениями (3.10), (3.11) соответственно. При этом, переход из области M_2 в область M_3 – потеря динамической устойчивости – возможен только при значениях $\gamma \in [0.0001, 0.6]$ и $k_1 \in [0.001, 10]$. В этом случае при скоростях потока газа $V \geq \tilde{V}_{cr.fl.}^{(1)}$ наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки, не имеющего колебательного характера,

происходит плавный переход к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям.

Таблица 3

$\begin{matrix} k \\ \gamma \end{matrix}$	0.1	0.5	1	5	10
0.2	$\begin{Bmatrix} 81.40 \\ 82.16 \\ 82.68 \\ 83.46 \end{Bmatrix}$	∞	∞	∞	∞
0.3	$\begin{Bmatrix} 108.22 \\ 109.49 \\ 112.06 \\ 114.64 \end{Bmatrix}$	∞	∞	∞	∞
0.4	∞	$\begin{Bmatrix} 98.56 \\ 102.33 \\ 106.39 \\ 109.78 \end{Bmatrix}$	∞	∞	∞
0.5	∞	$\begin{Bmatrix} 123.73 \\ 135.17 \\ 139.05 \\ 142.97 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 110.78 \\ 118.50 \\ 126.75 \\ 137.11 \end{Bmatrix}$	∞	∞
0.6	∞	∞	$\begin{Bmatrix} 140.27 \\ 151.89 \\ 163.77 \\ 174.91 \end{Bmatrix}$	∞	∞
0.65	∞	∞	∞	132.62	∞
0.68	∞	∞	∞	$\begin{Bmatrix} 135.13 \\ 195.83 \\ \infty \\ \infty \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 128.72 \\ 142.87 \\ \infty \\ \infty \end{Bmatrix}$
0.72	∞	∞	∞	147.05	147.05

В табл. 3 и 4 значения критической скорости флаттера, взятые в фигурные скобки, соответствуют, соответственно, следующим значениям коэффициента Пуассона ν : 0.125; 0.25; 0.375 и 0.5.

Таблица 4

$\gamma \backslash k$	0.1	0.5	1	5	10
0.0001	160.84	160.84	160.84	160.84	160.84
0.001	157.67	157.67	157.67	157.67	157.67
0.1	93.32	121.90	133.30	146.27	152.89
0.2	∞	100.01	114.04	128.69	140.82
0.3	∞	95.75	101.92	119.86	127.84
0.4	∞	∞	96.35	112.43	121.80
0.5	∞	∞	∞	123.73	131.35
0.6	∞	∞	∞	$\left\{ \begin{matrix} 128.90 \\ 140.26 \\ 151.89 \\ 163.77 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 140.26 \\ 146.04 \\ 157.80 \\ 169.81 \end{matrix} \right\}$

Приведённая критическая скорость флаттера $\tilde{V}_{cr.fl.}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при значениях $\gamma \in [0.0001; 0.1)$ зависит только от γ : критическая скорость уменьшается с увеличением γ (табл.4). При значениях $\gamma \in [0.1; 0.5]$ критическая скорость $\tilde{V}_{cr.fl.}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ зависит от k_1 , γ и не зависит от коэффициента Пуассона ν : с увеличением k_1 возрастает при фиксированном γ , а с увеличением γ убывает при фиксированном k_1 . Начиная с $\gamma = 0.5$, критическая скорость флаттера $\tilde{V}_{cr.fl.}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ с увеличением γ и k_1 возрастает. При значениях $\gamma \in (0.5; 0.6]$ критическая скорость флаттера зависит от всех трёх параметров k_1 , γ , ν : с увеличением k_1 , γ и ν – возрастает. При значениях $k_1 \leq 10^{-3}$ и $\gamma \leq 10^{-4}$ флаттер отсутствует: $\tilde{V}_{cr.fl.}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \approx \infty$.

Из численных результатов, приведённых в табл. 3 и 4, следует, что критическая скорость флаттера достигает наименьшего значения при $\gamma \in [0.1; 0.4]$ и $k_1 \in [0.1, 1]$. Это означает, что «опасной» границей области устойчивости M_0 в смысле терминологии, применённой Н.Н. Баутиным в работе [12], является граница перехода из области устойчивости M_0 в область флаттерной неустойчивости M_3 , определяемая соотношением (3.15): $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, $\Delta = 0$. При этом происходит быстрая потеря прочности и появление усталостных трещин в материале пластинки, приводящее к разрушению пластинки [1]. Подсчитывая коэффициенты Ляпунова, по их знаку нетрудно подтвердить полученный численный результат более строго [12].

Рассмотрим частные случаи.

5.1. Пусть $k_n = 0$ ($\chi_n = 0$, $\delta_n > 0$): вдоль свободной кромки $x = 0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c , а инерционные моменты I_c отсутствуют. В этом случае характеристическое уравнение (2.15) запишется в виде

$$\delta_n A_2 \lambda^2 + A_3 = 0, \quad (5.1)$$

где A_2, A_3 определены выражениями (2.19), (2.20) соответственно; δ_n – выражением (2.16): $\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}$.

Корни уравнения (5.1) равны

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-A_3 \cdot (\delta_n \cdot A_2)^{-1}}. \quad (5.2)$$

Область устойчивости возмущённого движения пластинки $M_0 \in M$ рассматриваемой динамической системы определяется соотношениями

$$A_2 > 0, \quad A_3 > 0. \quad (5.3)$$

Очевидно, что при условиях (5.3) уравнение (5.1) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. При этом, прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

Границами области устойчивости M_0 возмущённого движения прямоугольной пластинки в пространстве её параметров M при условиях (2.16) и (2.23)

$$\delta_n > 0, \quad A_2 > 0 \quad (5.4)$$

является гиперповерхность [12]

$$A_3 = 0. \quad (5.5)$$

На гиперповерхности (5.5) характеристическое уравнение (5.1) имеет нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2.

В силу условий (5.4), область неустойчивости M_1 определяется соотношением

$$A_3 < 0. \quad (5.6)$$

Отсюда, очевидно, следует, что при значениях параметров из области неустойчивости M_1 характеристическое уравнение имеет два действительных корня, один из которых положительный: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Это означает, что одно из двух собственных движений пластинки является возрастающим по экспоненциальному закону.

На границе области устойчивости M_0

$$A_3 = 0 \quad (5.7)$$

возмущённое движение теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция.

Критические скорости дивергенции $V_{cr.div}$ разграничивают области устойчивости

M_0 и дивергентной неустойчивости возмущённого движения прямоугольной

пластинки M_2 . В силу тождественности условий (3.7) и (5.7), критические

скорости дивергенции $V_{cr.div}$, найденные подстановкой значений первого корня

$q_0^{(1)} = q_0^{(1)}(n, \gamma, \nu)$ уравнения (5.7) в выражение (2.11), равны значениям

критических скоростей дивергенции $V_{cr.div}^{(1)}$ (табл.1 и 2), соответствующим случаям, в

которых $m_c = 0$ и $I_c = 0$ [9], $m_c \neq 0$ и $I_c \neq 0$ (раздел 4). Следовательно, наличие m_c не влияет на значения критической скорости дивергенции $V_{cr.div}$, приведённых в табл. 1 и 2 для $\gamma < 2$ и $\gamma \geq 2$ соответственно. Ясно, что и в этом случае $V_{cr.div}$ достигает наименьшего значения при $n = 1$, которому соответствует $k_1 = 1$.

С увеличением скорости потока газа при значениях скорости потока газа $V \geq V_{cr.div}$ происходит «мягкий» переход через нуль – точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ задачи (2.2), (2.3), вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения от устойчивости к дивергентной неустойчивости. При этом, как следует из выражений (2.16) и (5.2), при фиксированных значениях остальных параметров с увеличением m_c корни $\lambda_{1,2}$ по модулю уменьшаются. А это означает, что при скоростях $V \geq V_{cr.div}$ с увеличением m_c интенсивность возрастания прогибов пластинки снижается.

Из выражения (5.2), очевидно, следует, что в рассматриваемом случае панельный флаттер отсутствует.

Таким образом, в случае, в котором $m_c \neq 0$, $I_c = 0$, имеет место только дивергентная неустойчивость возмущённого движения пластинки: флаттерная неустойчивость отсутствует. При этом при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div}^{(1)}$ для значений $\gamma < 2$ имеет место явление дивергенции, сопровождающееся «выпучиванием» всей пластинки, а для значений $\gamma \geq 2$ имеет место локализованная дивергенция в окрестности свободного края $x = 0$ прямоугольной пластинки – «выпучивается» только часть пластинки-полосы вдоль окрестности свободного края. Наличие инерционной массы m_c не влияет на значение $V_{cr.div}^{(1)}$ (табл.1, 2), а влияет только на интенсивность возрастания прогибов пластинки: с увеличением m_c снижается интенсивность возрастания прогибов пластинки при потере статической устойчивости.

5.2. Пусть $k_n = \infty$ ($\chi_n > 0$, $\delta_n = 0$): вдоль свободной кромки $x = 0$ приложены только сосредоточенные инерционные моменты I_c , а инерционные массы m_c отсутствуют. Характеристическое уравнение (2.15) запишется в виде

$$\chi_n A_1 \lambda^2 + A_3 = 0, \quad (5.8)$$

где A_1 и A_3 определяются, соответственно, выражениями (2.18) и (2.20), а χ_n – выражением (2.16): $\chi_n = I_c b \cdot (\pi n D)^{-1}$.

Корни уравнения (5.8) равны

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-A_3 \cdot (\chi_n \cdot A_1)^{-1}}. \quad (5.9)$$

Область устойчивости возмущённого движения пластинки $M_0 \in M$ в рассматриваемом случае определяется соотношением

$$A_1 \cdot A_3 > 0. \quad (5.10)$$

Очевидно, что при условии (5.10) уравнение (5.8) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. При этом прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

Границами области устойчивости M_0 возмущённого движения прямоугольной пластинки в пространстве её параметров M при условии $\chi_n > 0$ являются гиперповерхности [12]

$$A_3 = 0, \quad (5.11)$$

$$A_1 = 0. \quad (5.12)$$

На гиперповерхности (5.11) характеристическое уравнение (5.8) имеет нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности (5.12) – пару мнимых корней $\lambda_{1,2}^2 = \pm \infty$.

В силу условия (5.10), области неустойчивости M_1 и M_2 , соответственно, определяются следующими соотношениями:

$$A_1 > 0, \quad A_3 < 0, \quad (5.13)$$

$$A_1 < 0, \quad A_3 > 0, \quad (5.14)$$

откуда следует, что в областях неустойчивости M_1 и M_2 характеристическое уравнение (5.8) имеет два действительных корня: $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$. Это означает, что прогибы пластинки будут монотонно возрастать по экспоненциальному закону.

На границе области устойчивости M_0

$$A_1 > 0, \quad A_3 = 0 \quad (5.15)$$

возмущённое движение пластинки теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция. Критические скорости $V_{cr.div}$, найденные подстановкой значений первого корня $q_0^{(1)} = q_0^{(1)}(n, \gamma, v)$ уравнения (5.15) в формулу (2.11), разграничивают области устойчивости M_0 и дивергентной неустойчивости M_1 возмущённого движения пластинки.

В силу совпадения уравнений (3.7), (5.7) и (5.15), $V_{cr.div}$ равны значениям критических скоростей дивергенции $V_{cr.div}^{(1)}$, приведённым для $\gamma < 2$ и $\gamma \geq 2$, соответственно, в табл. 1 и 2, соответствующим случаям, в которых $m_c = 0$ и $I_c = 0$ [11], $m_c \neq 0$ и $I_c \neq 0$ (разд. 4), $m_c \neq 0$ и $I_c = 0$ (разд. 5.1). Следовательно, наличие I_c не влияет на критическую скорость дивергенции $V_{cr.div}^{(1)}$ (табл. 1, 2). С увеличением скорости потока газа при значениях $V \geq V_{cr.div}^{(1)}$ происходит «мягкий» переход через нуль – точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ задачи (2.2), (2.3), вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения от устойчивости (пластинка совершает гармонические колебания) к дивергентной неустойчивости (пластинка меняет форму: при всех $\gamma < 2$ «выпучивается» вся поверхность пластинки с ограниченной

скоростью «выпучивания»; при всех $\gamma \geq 2$ «выпучивается» только окрестность вдоль свободного края $x = 0$ пластинки, а остальная часть поверхности пластинки остаётся почти плоской – локализованная дивергенция в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки).

Из выражений (2.16) и (5.9) следует, что с увеличением I_c , при фиксированных значениях остальных параметров, корни $\lambda_{1,2}$ по модулю уменьшаются. А стало быть, при скоростях $V \geq V_{cr.div}$ с увеличением I_c интенсивность возрастания прогибов пластинки снижается.

На границе области устойчивости M_0

$$A_1 = 0, \quad A_3 > 0 \quad (5.16)$$

возмущённое движение также теряет статическую устойчивость. Критические скорости $\tilde{V}_{cr.div.}$, разграничивающие области устойчивости M_0 и неустойчивости M_2 , легко определяются подстановкой первого корня $q^{(1)}$ уравнения $A_1 = 0$ в выражение (2.11). Однако переход через границу областей M_0 и M_2 вызывает не плавное, а скачкообразное (мгновенное) изменение характера движения от устойчивых движений с $\lambda^2 = -\infty$ к неустойчивым движениям с $\lambda^2 = \infty$ с бесконечной скоростью «выпучивания» – перескок. Такой переход обычно сопровождается разрушением пластинки.

В соответствии с соотношениями (2.11) и (2.18), очевидно, что приведённая скорость $\tilde{V}_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ не зависит от v и k_n , а зависит только от n и γ .

Численные расчёты показали, что уравнение $A_1 = 0$ имеет решение только при значениях $\gamma \leq 0.9$; при $\gamma > 0.9$ имеем $A_1 > 0$. Тогда, в соответствии с соотношениями (5.10), (5.15) и (5.16), следует, что переход из области M_0 в область M_2 возможен только для значений $\gamma \leq 0.9$, а для значений $\gamma > 0.9$ имеет место только переход из области M_0 в область M_1 , сопровождающийся «мягкой» потерей статической устойчивости при скоростях $V \geq V_{cr.div}$ (табл. 1, 2).

В этом случае, также для всех $\gamma \leq 0.9$ критическая скорость $\tilde{V}_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ достигает наименьшего значения при $n = 1$.

Значения критических скоростей $\tilde{V}_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, соответствующие переходу из области M_0 в область M_2 , приведены в табл.5.

Таблица 5

γ	0.01	0.1	0.5	0.6	0.9
$\tilde{V}_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	6.36	6.86	28.49	45.04	1250.97

Из сопоставления значений критических скоростей $V_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ (табл. 1) и $\tilde{V}_{cr.div.} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ (табл.5) очевидно, что $V_{cr.div.} \leq \tilde{V}_{cr.div.}$.

В соответствии с выражением (5.9), в рассматриваемом случае динамическая потеря устойчивости невозможна.

Таким образом, в случае, в котором $k_n = \infty$ ($\chi_n > 0$, $\delta_n = 0$), имеет место только статическая потеря устойчивости, а динамическая потеря устойчивости невозможна. При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ имеет место «мягкая» потеря статической устойчивости: дивергенция при всех $\gamma < 2$ и локализованная дивергенция в окрестности свободного края пластинки при всех $\gamma \geq 2$. При этом, критическая скорость дивергенции $V_{cr.div.}$ зависит от параметров γ и ν (табл.1,2). При скоростях потока газа $V \geq \tilde{V}_{cr.div.}$ для всех $\gamma \leq 0.9$ имеет место «мгновенная» потеря статической устойчивости – «перескок», приводящая к разрушению пластинки. Критическая скорость дивергенции $\tilde{V}_{cr.div.}$ зависит только от параметра γ (табл.5).

Из сопоставления значений $V_{cr.div.}$ и $\tilde{V}_{cr.div.}$ при равных значениях параметра γ , приведённых в табл.1, 2 и 5, соответственно, очевидно, что $V_{cr.div.} < \tilde{V}_{cr.div.}$.

Наличие сосредоточенного инерционного момента поворота I_c ($\chi_n > 0$), приложенного вдоль свободной кромки пластинки, влияет на интенсивность нарастания прогиба при монотонном «выпучивании»: с увеличением χ_n интенсивность уменьшается.

5.3. Рассмотрим случай, в котором $a \gg b$.

Легко показать, что в этом случае характеристическое уравнение (2.15) преобразуется к виду

$$\chi_n \delta_n \lambda^4 + (a_{11} \chi_n + a_{21} \delta_n) \lambda^2 + a_{31} = 0, \quad (5.17)$$

где

$$a_{11} = \sqrt{2(q+1)} \cdot (q - \sqrt{q^2 - 1}); \quad a_{21} = \sqrt{2(q+1)}; \quad (5.18)$$

$$a_{31} = 2(q+1) \left(q - \sqrt{q^2 - 1} - \nu \right) - (1 - \nu)^2;$$

$$\chi_n = I_c b \cdot (\pi n D)^{-1}, \quad \delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \quad \chi_n > 0, \quad \delta_n > 0; \quad (5.19)$$

ν – коэффициент Пуассона.

В силу условий (5.19), очевидно, что для всех $q > 1$

$$a_{11} \chi_n + a_{21} \delta_n > 0. \quad (5.20)$$

Область устойчивости D_0 в соответствии с условием (5.20) определяется соотношениями

$$a_{31} > 0, \quad \Delta > 0. \quad (5.21)$$

Здесь

$$\Delta = (a_{11} \chi_n + a_{21} \delta_n)^2 - 4 \chi_n \delta_n a_{31} \quad (5.22)$$

– дискриминант биквадратного уравнения (5.17).

Непосредственной подстановкой выражения (5.18) в соотношение (5.22) можно убедиться, что

$$\Delta > 0 \quad (5.23)$$

при всех $q > 1$, $\chi_n > 0$, $\delta_n > 0$.

В самом деле, подставляя выражения (5.18) в соотношение (5.22), после несложных преобразований получаем очевидное неравенство:

$$\Delta = 2(q+1)\left((q-\sqrt{q^2-1})\chi_n - \delta_n\right)^2 + 8(q+1)\chi_n\delta_nv + (1-v)^2\chi_n\delta_n > 0,$$

поэтому, границей области устойчивости M_0 в рассматриваемом случае, в котором $a \gg b$, является только гиперповерхность

$$a_{31} = 0, \quad (5.24)$$

на которой характеристическое уравнение (5.17) имеет нулевой корень $\lambda_{1,2} = \lambda_0 = 0$ кратности 2 и пару чисто мнимых корней $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$.

Условие (5.24) определяет потерю устойчивости возмущённого движения пластинки дивергентного вида (наличие нулевого корня $\lambda_0 = 0$) при переходе из области устойчивости M_0 в область дивергенции M_1 .

В силу условий (5.20), (5.21) и (5.23) область неустойчивости M_1 определяется соотношением

$$a_{31} < 0, \quad (5.25)$$

откуда следует, что в области неустойчивости M_1 характеристическое уравнение

(5.17) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и два действительных корня

$\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 > 0$ (из двух собственных движений пластинки одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону): пластинка монотонно «выпучивается».

На границе области устойчивости M_0

$$a_{11}\chi_n + a_{21}\delta_n > 0, \quad \Delta > 0, \quad a_{31} = 0 \quad (5.26)$$

возмущённое движение пластинки теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция. Критические скорости $\tilde{V}_{cr,div}$, разграничивающие области устойчивости M_0 и дивергентной неустойчивости M_1 возмущённого движения пластинки, находятся подстановкой в формулу (2.12) значений первого корня $q_0^{(1)} = q_0^{(1)}(v)$ уравнения (5.24): $a_{31} = 0$ или уравнения

$$2(q+1)\left(q-\sqrt{q^2-1}-v\right)-(1-v)^2=0 \quad (5.27)$$

в соответствии с соотношением (5.18).

В рассматриваемом случае, как показывают проведённые численные результаты, приведённая критическая скорость $\tilde{V}_{cr,div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ достигает наименьшего значения при $n = 1$, которому соответствует $k_n = k_1 = \chi_1 \cdot \delta_1^{-1}$.

В соответствии с соотношениями (2.12) и (5.27), очевидно, что $\tilde{V}_{cr,div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ не зависит от коэффициентов χ_1 и δ_1 , а зависит только от коэффициента Пуассона v : коэффициенты χ_1 и δ_1 влияют на интенсивность нарастания «выпучивания».

При скоростях потока $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.div}}$ происходит «мягкий» переход через нуль – точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ задачи (2.2), (2.3), вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения от устойчивости (пластинка совершает гармонические колебания) к дивергентной неустойчивости (пластинка меняет форму – «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания»).

В силу совпадения уравнений (4.3) и (5.27), а также дисперсионного уравнения, полученного в работе [8] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа пластины-полосы $(a \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow \infty)$, в рассматриваемом случае $(a \gg b)$ критические скорости дивергенции $\tilde{V}_{\text{cr.div}}$ равны значениям критических скоростей дивергенции $V_{\text{cr.div}}$ (табл. 2), соответствующим случаям, в которых $m_c \neq 0$, $I_c \neq 0$, $\gamma \geq 2$ (разд.4) и $m_c = 0$, $I_c = 0$, $a \rightarrow \infty (\gamma \rightarrow \infty)$ [8] соответственно. Отсюда следует, что при скоростях $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.div}}$ имеет место локализованная дивергентная неустойчивость в окрестности свободного края $x = 0$ прямоугольной пластинки: «выпучивается» только окрестность вдоль свободного края $x = 0$ пластинки, а остальная часть поверхности пластинки остаётся почти плоской. При этом, критическая скорость $\tilde{V}_{\text{cr.div}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ зависит только от коэффициента Пуассона ν : она меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл. 2).

Таким образом, в случае $a \gg b$ прямоугольная пластинка теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ при скоростях потока $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.div}}$: $\tilde{V}_{\text{cr.div}} = V_{\text{cr.div}}$ (табл. 2). Критическая скорость локализованной дивергенции $\tilde{V}_{\text{cr.div}}$ зависит только от коэффициента Пуассона ν : $\tilde{V}_{\text{cr.div}}$ меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν . Коэффициенты χ_1 и δ_1 , характеризующие сосредоточенные инерционные моменты I_c и массы m_c , соответственно, влияют на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания».

5.4. Рассмотрим случай, в котором $a \ll b$. Проведённые численные исследования характеристического уравнения (2.15) показали, что её решения, соответствующие этому случаю, удовлетворяют условию

$$q \gg 1. \quad (5.28)$$

Учитывая условие (5.28), характеристическое уравнение (2.15) для всех $r > 0$ можно преобразовать к виду

$$a_{02} \tilde{\chi}_n \tilde{\delta}_n \lambda^4 + (a_{12} \tilde{\chi}_n + a_{22} \tilde{\delta}_n) \lambda^2 + a_{32} = 0, \quad (5.29)$$

где

$$a_{02} = (1 - \exp(-r)) \cdot (0.5 + 0.5 \exp(-r) - \exp(-0.5r) \cos(0.5\sqrt{3}r)); \quad (5.30)$$

$$a_{12} = \exp(-0.5r) \cdot (0.5 \exp(-1.5r) + \cos(0.5\sqrt{3}r)); \quad (5.31)$$

$$a_{22} = 0.5(1 + \exp(-2r)) - \exp(-0.5r) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) - \quad (5.32)$$

$$- \exp(-1.5r) \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}r\right);$$

$$a_{32} = \exp(-0.5r) \cdot \left(-0.5 \exp(-1.5r) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \right). \quad (5.33)$$

Здесь

$$r = \sqrt{2q} \cdot \pi n \gamma, \quad r > 0; \quad \gamma = ab^{-1}; \quad \tilde{\chi}_n = I_c a (Dr)^{-1}; \quad \tilde{\delta}_n = I_c a^3 (Dr^3)^{-1}. \quad (5.34)$$

В соответствии с условием (5.28) и обозначением (5.34), выражение (2.11) преобразуется к виду

$$V = r^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \quad (5.35)$$

Можно показать, что

$$a_{02} > 0, \quad a_{22} > 0 \quad \text{при всех } r > 0. \quad (5.36)$$

Характеристическое уравнение (2.15) для $r = 0$ описывается соотношением

$$\tilde{\chi} \cdot \tilde{\delta} \cdot \lambda^4 + 3 \cdot (\tilde{\chi} + \tilde{\delta}) \cdot \lambda^2 = 0, \quad \tilde{\chi} = I_c a D^{-1}, \quad \tilde{\delta} = m_c a^3 D^{-1}. \quad (5.37)$$

Откуда очевидно, что характеристическое уравнение, соответствующее случаю, в котором $V = V_0 = 0$ (или $r = 0$) – необтекаемая пластинка, имеет нулевой корень кратности 2. Это означает, что первое значение критической скорости дивергенции равно нулю: $V_{\text{cr.div}}^{(1)} = V_0 = 0$, откуда следует, что при скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(1)}$ (или $V \geq V_0 = 0$) возмущённое движение пластинки является статически неустойчивым при значениях параметров из области статической неустойчивости M_1 .

Характеристическое уравнение (5.29) и выражение (5.35) такие же, как, соответственно, дисперсионное уравнение и формула для подсчёта скорости потока в задаче устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа удлинённой пластинки ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \infty$), набегающим на её свободный край $x = 0$ в предположении, что вдоль свободного края пластинки приложены сосредоточенные инерционные моменты поворота I_c и массы m_c . Следовательно, картина поведения возмущённого движения прямоугольной пластинки в рассматриваемом случае, в котором $a \ll b$, примерно такая же, как и в случае удлинённой пластинки ($b \rightarrow \infty, \gamma = ab^{-1} = 0$).

Область устойчивости M_0 , в соответствии с условиями (5.36), определяется соотношениями

$$a_{12} \tilde{\chi}_n + a_{22} \tilde{\delta}_n > 0, \quad a_{32} > 0, \quad \Delta > 0, \quad (5.38)$$

где

$$\Delta = (a_{12} \tilde{\chi}_n + a_{22} \tilde{\delta}_n)^2 - 4 \tilde{\chi}_n \tilde{\delta}_n a_{02} a_{32} \quad (5.39)$$

– дискриминант биквадратного уравнения (5.29).

Границами области устойчивости M_0 при условии

$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n > 0 \quad (5.40)$$

являются гиперповерхности

$$a_{32} = 0, \quad (5.41)$$

$$\Delta = 0. \quad (5.42)$$

На гиперповерхности (5.41) характеристическое уравнение (5.29) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2; а на гиперповерхности (5.42) характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

Учитывая условие $a_{02} > 0$, области неустойчивости M_1 , M_2 , M_3 для всех $r > 0$ определяются, соответственно, соотношениями

$$a_{32} < 0, \quad \Delta > 0; \quad (5.43)$$

$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n < 0, \quad a_{32} > 0, \quad \Delta > 0, \quad (5.44)$$

$$a_{32} > 0, \quad \Delta < 0. \quad (5.45)$$

На границе области устойчивости M_0

$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n > 0, \quad \Delta > 0, \quad a_{32} = 0 \quad (5.46)$$

возмущённое движение пластинки теряет статическую устойчивость.

На границе области неустойчивости M_1

$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n < 0, \quad \Delta > 0, \quad a_{32} = 0 \quad (5.47)$$

возмущённое движение прямоугольной пластинки в рассматриваемом случае, в котором $a \ll b$, становится более статически неустойчивым: при скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}$ из области дивергентной неустойчивости M_1 попадаем в область M_2 , определяемую условиями (5.44), в которой явление дивергенции более ярко выражено. В области M_2 характеристическое уравнение имеет четыре действительных корня λ_i , среди которых два корня положительные ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$).

Из соотношений (5.38), (5.43), (5.44), (5.46) и (5.47) очевидно следует, что в зависимости от значения $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$ критические скорости дивергенции $V_{\text{cr.div}}$ разграничивают либо области M_0 , M_1 , либо области M_1 , M_2 соответственно.

При этом, в обоих случаях критические скорости $V_{\text{cr.div}}$ определяются по формуле (5.35) подстановкой в неё корней уравнения (5.41) или

$$\left(-0.5 \exp(-1.5r) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} r \right) \right) = 0 \quad (5.48)$$

в соответствии с обозначением (5.33), и не зависят от $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$ и коэффициента Пуассона ν .

Подставляя первые три корня $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, $r^{(3)}$ уравнения (5.48) в формулу (5.35), получаем соответствующие значения критической скорости дивергенции:

$$V_{\text{cr.div}}^{(1)} = 0, \quad V_{\text{cr.div}}^{(2)} = 74.09 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \quad V_{\text{cr.div}}^{(3)} = 474.55 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \quad (5.49)$$

Отсюда, очевидно, следует, что возмущённое движение обтекаемой пластинки при скоростях потока газа $V < V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ является статически неустойчивым.

В соответствии с условиями (5.43)–(5.45), при обтекании пластинки потоком газа и достижении скорости потока значений $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ в зависимости от значений $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$ происходит плавный переход возмущённого движения пластинки либо из области статической неустойчивости M_1 в область устойчивости M_0 , либо в область M_2 – область более ярко выраженной статической неустойчивости.

На границе области устойчивости M_0

$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n > 0, \quad a_{32} > 0, \quad \Delta = 0 \quad (5.50)$$

и на границе области статической неустойчивости M_2

$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n < 0, \quad a_{32} > 0, \quad \Delta = 0 \quad (5.51)$$

возмущённое движение пластинки теряет динамическую устойчивость: переходит в область флаттерной неустойчивости M_3 .

Из соотношений (5.50) и (5.51) очевидно следует, что при динамической потере устойчивости приведённые критические скорости $V_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $\tilde{V}_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, соответствующие переходам из области M_0 в область M_3 , либо из области M_2 в область M_3 соответственно, зависят только от $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$.

Можно показать, что, примерно, при значениях $k_n \in [2, 10]$ и скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ происходит «мягкий» переход из области M_1 в область M_0 . А при дальнейшем увеличении скорости – при скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.fl}}$ происходит «мягкий» переход из области M_0 в область M_3 , при котором гармонические колебания пластинки плавно переходят во флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде.

При значениях $k_n \in (10, \infty)$ и скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ происходит «мягкий» переход из области M_1 в область M_2 . А при дальнейшем увеличении скорости – при скоростях потока газа $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.fl}}$ происходит «мягкий» переход из области M_2 в область M_3 , при котором наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки, не имеющего колебательного характера, происходит плавный переход к флаттерным колебаниям. При $k_n \gg 1$ переход из области M_2 в область M_3 невозможен ($V_{\text{cr.fl}} = \infty$), что подтверждается численными расчётами.

Проведённые численные исследования показали следующее.

В рассматриваемом случае ($a \ll b$) критические скорости дивергенции $V_{\text{cr.div}}$ и флаттера $V_{\text{cr.fl}}$, также, как и в остальных случаях, достигают наименьшего значения при $n = 1$ и, соответственно, при $k_n = k_1$.

При значениях $k_1 < 2$ возможна только лишь потеря статической устойчивости возмущённого движения прямоугольной пластинки. В соответствии с выражениями

(5.49), при скоростях $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ происходит переход из области статической неустойчивости M_1 в область статической устойчивости M_0 . При увеличении скорости потока газа – при скоростях $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(3)}$ – из области M_0 переходим в область M_1 . При дальнейшем увеличении скорости потока газа переходы из области M_0 в область M_1 и обратно чередуются.

При значениях $k_1 \in [2, 10]$ и скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ из области статической неустойчивости M_1 происходит «мягкий» переход в область устойчивости M_0 , а при дальнейшем увеличении скорости потока газа – при скоростях $V \geq V_{\text{cr.fl}}$ происходит «мягкий» переход из области M_0 в область динамической неустойчивости M_3 (гармонические колебания пластинки плавно переходят в автоколебания – флаттерные колебания).

При значениях $k_1 > 10$ и скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ из области статической неустойчивости M_1 происходит «мягкий» переход в область M_2 – область, в которой статическая неустойчивость более ярко выражена, а при дальнейшем увеличении скорости потока газа – при скоростях $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.fl}}$ – происходит «мягкий» переход из области M_2 в область динамической неустойчивости M_3 (наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки происходит плавный переход к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям).

В табл. 6 и 7 представлены значения приведённых критических скоростей флаттера $V_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $\tilde{V}_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ с точностью до 10^{-3} , соответствующие некоторым значениям $k_1 \in [2, 10]$ и $k_1 > 10$ соответственно.

Таблица 6

k_1	2	3	5	7	10
$V_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	91.12	75.67	76.49	76.94	78.57

Таблица 7

k_1	15	30	50	100	300
$\tilde{V}_{\text{cr.div}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	85.18	91.13	103.82	125.04	132.65

Из сопоставления значений критических скоростей флаттера (табл. 1 и 2) видно, что $V_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $\tilde{V}_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ одного порядка. При этом, приведённая критическая скорость флаттера достигает наименьшего значения при $k_1 = 3$.

Таким образом, в случае, в котором $a \ll b$, поведение возмущённого движения прямоугольной пластинки аналогично поведению возмущённого движения удлинённой пластинки ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \infty$): при отсутствии обтекания

($V = V_0 = 0$) возмущённое движение является статически неустойчивым. При обтекании поведение возмущённого движения пластинки зависит от значения k_1 – коэффициента отношения относительных величин сосредоточенных инерционных моментов I_c и масс m_c , приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки, соответствующего одной полуволне ($n = 1$). При скоростях потока $V \geq V_{cr.div}^{(2)} \approx 74.09 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$ возмущённое движение пластинки становится либо устойчивым ($k_1 \leq 10$), либо более ярко выраженным статически неустойчивым ($k_1 > 10$).

При дальнейшем увеличении скорости потока газа для всех $k_1 < 2$ при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div}^{(3)} \approx 474.55 D(a_0 \rho_0 a^3)$ возмущённое движение пластинки из области устойчивости переходит в область статической неустойчивости. При дальнейшем увеличении скорости потока газа переходы из области M_0 в область M_1 чередуются. При скоростях потока $V \geq V_{cr.fl}$ для всех $k_1 \in [2, 10]$ происходит «мягкий» переход из области M_0 в область динамической неустойчивости M_3 (гармонические колебания пластинки плавно переходят в автоколебания – флаттерные колебания). При скоростях потока $V \geq \tilde{V}_{cr.fl}$ для всех $k_1 > 10$ происходит «мягкий» переход из области M_2 в область динамической неустойчивости M_3 (наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки происходит плавный переход к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям).

6. Основные результаты.

С помощью графо-аналитических и численных методов исследования исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, в предположении, что вдоль свободного края пластинки имеются сосредоточенные инерционные моменты и массы, описываемой соотношениями (1.1)–(1.3), получены следующие основные результаты.

Найдены интервалы изменения значений $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$ и $\gamma = ab^{-1}$ – отношения коэффициентов, характеризующих сосредоточенные инерционные моменты поворота и массы, приложенные вдоль свободного края пластинки, и отношение ширины пластинки к её длине соответственно, при которых имеет место потеря устойчивости возмущённого движения прямоугольной пластинки относительно невозмущённой формы равновесия.

Установлено, что для всех $\gamma \in (0, \infty)$ имеет место статическая потеря устойчивости – явление дивергенции, приводящее к монотонному «выпучиванию» поверхности пластинки, критическая скорость которой достигает наименьшего значения при $n = 1$ (при одной полуволне). При этом, для всех $\gamma \in (0, 2)$ критическая скорость дивергенции не зависит от $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$, а зависит от $\gamma = ab^{-1}$ – отношения сторон пластинки и от коэффициента Пуассона ν : $V_{cr.div}$ меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν , а с возрастанием γ критическая скорость дивергенции растёт (табл.1). Для всех $\gamma \geq 2$ имеет место явление локализованной дивергенции в окрестности свободного края

пластинки, критическая скорость которой $V_{\text{loc.div}}$ зависит только от коэффициента Пуассона ν : она меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл.2).

Для всех $\gamma \in [0.0001, 0.72]$ и $k_n \geq 0.001$ при скоростях потока газа $V \geq V_{\text{cr.fl}}$ и $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.fl}}$ имеет место динамическая потеря устойчивости – явление флаттера, приводящее к возникновению колебаний по нарастающей амплитуде – автоколебаний флаттерного типа в системе «пластинка – поток». Значения критических скоростей флаттера для некоторых значений параметров представлены в табл. 3 и 4. Следует отметить, что критические скорости флаттера достигают наименьшего значения при $n=1$, которому соответствует $k_n = k_1$. При этом, для всех значений $\gamma \in [0.2, 0.72]$, $k_1 \in [0.1, 200]$ и коэффициента Пуассона ν при скоростях потока газа $V \geq V_{\text{cr.fl}}$ (табл. 3) происходит плавный переход от гармонических колебаний пластинки к флаттерным колебаниям; для всех значений $\gamma \in [0.0001, 0.6]$, $k_1 \in [0.001, 10]$ и ν при $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.fl}}$ (табл.4) наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки, не имеющего колебательного характера, происходит плавный переход к флаттерным колебаниям.

Из сопоставления значений критических скоростей флаттера (табл. 3, 4) видно, что $V_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $\tilde{V}_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, примерно, одного порядка. При этом, когда $k_1 = 0.1$, приведённая критическая скорость флаттера $V_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ достигает наименьшего значения. Следовательно, граница перехода из области устойчивости M_0 в область динамической неустойчивости M_3 является «опасной» в смысле Н.Н. Баутина [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.
2. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с.
3. Ильющин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733–755.
4. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе.// Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. № 2. С.211–222.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.
6. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С.124–126.
7. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности». Ереван: Изд-во ЕГУ, 1997. С. 95–99.
8. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.29–34.
9. Мартиросян С.Р. Об устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа.// Тр. III Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящённой

- 100-летию со дня рождения академика НАН РА Н.Х. Арутюняна; 8-12 октября, Цахкадзор –2012 (Армения), Т. 2, с. 29–34.
10. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об одной задаче устойчивости прямоугольной пластинки с двумя свободными краями в сверхзвуковом потоке газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. № 4. С.55–64.
 11. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33–44.
 12. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176с.
 13. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. Т.1. № 1. С.92–98.
 14. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 3. С.24–38.
 15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832с.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096

E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 14.10.2013

**СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ ТИПА БЛОХА-ФЛОКЕ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ
ФЕРРОМАГНИТНОЙ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ**

Даноян З.Н., Атоян Л.А., Манукян Г.А., Даноян Н.З.

Ключевые слова: спиновые волны, слоистая ферромагнитная структура, волны типа Блоха-Флоке

Keywords: spin waves, layered ferromagnetic structure, Bloch-Floquet type waves.

Դանոյան Զ.Ն., Աթոյան Լ.Ա., Մանուկյան Գ. Ա., Դանոյան Ն.Զ.

**Բլոխ-Ֆլոքեի տիպի սպինային ալիքները պարբերական ֆերոմագնիսական շերտավոր
կառուցվածքում**

Շերտավոր պարբերական ֆերոմագնիսական կառուցվածքում ուսումնասիրված է Բլոխ-Ֆլոքեի տիպի քվազիպարբերական սպինային ալիքների գոյության և տարածման խնդիրը: Ստացվել է և հետազոտվել է այդ ալիքների գոյության դիսպերսիոն հավասարումը: Պարզաբանվել է հաճախությունների արգելափակված գոտիների գոյության և կառուցվածքի հարցը:

Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Manoukyan G.A., Danoyan N.Z.

Bloch-Floquet type waves in periodic ferromagnetic layered structure

The Bloch-Floquet type waves existence and propagation in ferromagnetic periodic layered structure are investigated. The dispersion equation obtained and investigated. It is shown that the waves spectrum contains forbidden zones.

В ферромагнитной слоистой периодической структуре исследуются вопросы существования и распространения волн типа Блоха-Флоке. Получено дисперсионное уравнение этих волн, а также исследован вопрос существования и структура частотных запретных зон.

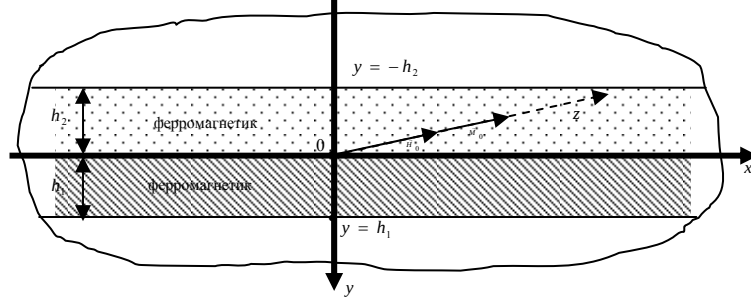
1.Введение. В предыдущей нашей работе исследовались вопросы существования и распространения спиновых квазипериодических волн Блоха-Флоке в периодической бесконечной структуре с ячейкой ферромагнит-диэлектрик. Данная работа посвящена исследованию тех же вопросов в структуре ферромагнит-ферромагнит.

Исследованию существования и распространения спиновых и упруго-спиновых волн в периодических структурах в настоящее время посвящено множество работ, в частности [1-9], это обусловлено, в первую очередь, их большим практическим значением. Особый интерес вызывает вопрос существования запрещённых частотных полос, когда волновой процесс Блоха-Флоке невозможен, что наблюдается в большинстве случаев прохождения волн различной природы через периодические структуры. Это явление лежит в основе производства различных приборов электроники и спинтроники, в частности, частотных фильтров [1,2].

В настоящей работе на основе линеаризованных уравнений, описывающих процесс распространения спиновых волн в непроводящих ферромагнитных средах [1,2], исследуются условия существования и распространения квазипериодических волн Блоха-Флоке [4,6,9,10] при соответствующих контактных условиях и условиях Блоха-Флоке на границах ячейки периодичности рассматриваемой конструкции. Кроме того, исследуется вопрос существования запретных полос в спектре частот спиновых волн, т.е. частотных зон, при которых волновой процесс Блоха-Флоке невозможен. Из теории Флоке о квазипериодических волнах известно, что

достаточно изучить волновой процесс только в одной ячейке периодичности структуры, чтобы иметь представление о волновом процессе во всей структуре.

2. Постановка задачи. Пусть задана периодическая структура, состоящая из бесконечно чередующихся двух различных ферромагнитных слоёв толщины h_1 и h_2 . Описываемая структура изображена на фиг. 1.



Фиг.1. Ячейка периодичности ферромагнитной конструкции

Положим, что рассматриваемая конструкция находится во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$, объёмные плотности намагниченностей слоёв описываются векторами $\vec{M}_1 = \rho_1 \vec{\mu}_1$ и $\vec{M}_2 = \rho_2 \vec{\mu}_2$ ($\vec{\mu}_j$ – плотности намагниченностей, отнесённые к единице массы, ρ_j – плотности материалов ферромагнетиков ($j=1,2$)). Векторы $\vec{M}_j$ и $\vec{H}_0$ параллельны и направлены по оси лёгкого намагничивания, которую будем считать совпадающей с осью Oz. Далее будем пренебрегать деформациями слоёв и будем полагать, что магнитные возмущения в структуре не зависят от координаты z и характеризуются вектором магнитного момента $\vec{\mu}_j = \{\mu_j(x, y, t), v_j(x, y, t), 0\}$ и магнитостатическим потенциалом $\varphi_j(x, y, t)$. Компоненты возмущения магнитного поля выражаются через магнитостатический потенциал следующей формулой:

$$\vec{H}^{(j)} = -\text{grad}(\varphi_j(x, y, t)), \quad (1)$$

где $\vec{H}^{(j)}$ и φ_j – возмущения напряжённостей магнитного поля и потенциалов в соответствующих слоях. Волновой процесс при пренебрежении обменными эффектами, в области $y \in [-h_2, h_1]$ описывается следующей системой уравнений [1,2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_j}{\partial t} &= \Omega_{Mj} (\rho_j^{-1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + b_j v_j), \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} &= -\Omega_{Mj} (\rho_j^{-1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + b_j \mu_j), \\ \Delta \varphi_j &= \rho_j \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) (j=1,2), \end{aligned} \quad (2)$$

где b_j – постоянные анизотропии слоёв, $\Omega_{Mj} = \gamma_0 M_{0j}$, $\gamma_0 = 7\pi \times 10^4$ м/а.сек – гирромагнитное отношение, M_{0j} – объёмные плотности намагниченностей слоёв.

Контактные условия на поверхности $y=0$ и условия Блоха-Флоке на соответствующих поверхностях $y=-h_2$ и $y=h_1$ ячейки периодичности конструкции представляются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\varphi_1(0) &= \varphi_2(0), \\ \frac{\partial \varphi_1(0)}{\partial y} - \rho_1 v_1(0) &= \frac{\partial \varphi_2(0)}{\partial y} - \rho_2 v_2(0); \\ \varphi_1(h_1) &= \ell \varphi_2(-h_2), \\ \frac{\partial \varphi_1(h_1)}{\partial y} - \rho_1 v_1(h_1) &= \ell \left(\frac{\partial \varphi_2(-h_2)}{\partial y} - \rho_2 v_2(-h_2) \right).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь $\ell = e^{iqa}$, $a = h_1 + h_2$, q – так называемая постоянная Блоха-Флоке или волновое число Блоха-Флоке.

3. Решение задачи в виде плоских волн. Решение системы (2) ищем в виде гармонических плоских волн:

$$(\mu_j, v_j, \varphi_j) = (M_j, N_j, \Phi_j) e^{r_j y} e^{i(px - \omega t)} \quad (j = 1, 2),\tag{4}$$

где M_j, N_j, Φ_j – амплитудные коэффициенты, $r_j > 0$ – поперечные волновые числа, $\omega > 0$, $p > 0$ – круговая частота и продольное волновое число.

Подставим (4) в (2) и выпишем условие существования нетривиальных решений полученной системы, тем самым, придём к дисперсионным уравнениям в каждой полосе:

$$(r_j^2 - p^2)(\Omega_j^2 - \Omega_{SVj}^2) = 0,\tag{5}$$

где $\Omega_j = \omega / \Omega_{Mj}$, $\Omega_{SVj}^2 = b_j(b_j + 1)$.

Из дисперсионных соотношений (5) следует:

$$r_1^2 = r_2^2 = p^2.\tag{6}$$

Таким образом, общее решение системы (2) в каждой полосе представляется так:

$$\begin{aligned}\mu_j &= (M_1^{(j)} e^{-pr} + M_2^{(j)} e^{pr}) e^{i(px - \omega t)}, \\ v_j &= (N_1^{(j)} e^{-pr} + N_2^{(j)} e^{pr}) e^{i(px - \omega t)}, \\ \varphi_j &= (\Phi_1^{(j)} e^{-pr} + \Phi_2^{(j)} e^{pr}) e^{i(px - \omega t)}, \quad (j = 1, 2),\end{aligned}\tag{7}$$

где $M_1^{(j)}, M_2^{(j)}, N_1^{(j)}, N_2^{(j)}, \Phi_1^{(j)}$ и $\Phi_2^{(j)}$ – неизвестные постоянные, входящие в выражения для амплитуд, а $M_1^{(j)}, M_2^{(j)}, N_1^{(j)}$ и $N_2^{(j)}$ с использованием системы (2) выражаются через $\Phi_1^{(j)}$ и $\Phi_2^{(j)}$ следующим образом:

$$M_1^{(j)} = -\frac{ip\Phi_1^{(j)}}{\rho_j(\Omega_j + b_j)}, M_2^{(j)} = -\frac{ip\Phi_2^{(j)}}{\rho_j(\Omega_j - b_j)},$$

$$N_1^{(j)} = \frac{p\Phi_1^{(j)}}{\rho_j(\Omega_j + b_j)}, N_2^{(j)} = -\frac{p\Phi_2^{(j)}}{\rho_j(\Omega_j - b_j)}.$$
(8)

Подставляя общие решения (7) в граничные условия (3), с учётом соотношений (8), получим алгебраическую систему для определения неизвестных постоянных $\Phi_1^{(j)}, \Phi_2^{(j)}$:

$$\Phi_1^{(1)} + \Phi_2^{(1)} - \Phi_1^{(2)} - \Phi_2^{(2)} = 0,$$

$$-\Phi_1^{(1)} \frac{\Omega_1 + b_1 + 1}{\Omega_1 + b_1} + \Phi_2^{(1)} \frac{\Omega_1 - b_1 - 1}{\Omega_1 - b_1} + \Phi_1^{(2)} \frac{\Omega_2 + b_2 + 1}{\Omega_2 + b_2} + \Phi_2^{(2)} \frac{-\Omega_2 + b_2 + 1}{\Omega_2 - b_2} = 0,$$

$$\Phi_1^{(1)} e^{-ph_1} + \Phi_2^{(1)} e^{ph_1} - \Phi_1^{(2)} \ell e^{ph_2} - \Phi_2^{(2)} \ell e^{-ph_2} = 0,$$

$$-\Phi_1^{(1)} \frac{\Omega_1 + b_1 + 1}{\Omega_1 + b_1} e^{-ph_1} + \Phi_2^{(1)} \frac{\Omega_1 - b_1 - 1}{\Omega_1 - b_1} e^{ph_1} + \Phi_1^{(2)} \ell \frac{\Omega_2 + b_2 + 1}{\Omega_2 + b_2} e^{ph_2} +$$

$$\Phi_2^{(2)} \ell \frac{-\Omega_2 + b_2 + 1}{\Omega_2 - b_2} e^{-ph_2} = 0.$$
(9)

Условие существования нетривиальных решений этой системы приводит к дисперсионному соотношению волн Блоха-Флоке:

$$\ell^2 - 2f\ell + 1 = 0,$$
(10)

где

$$f = (LD\text{chp}(h_2 - h_1) - XH\text{chp}(h_2 + h_1)) / Q, Q = 4(\Omega_1^2 - \Omega_{SV1}^2)(\Omega_2^2 - \Omega_{SV2}^2) / ((\Omega_1^2 - b_1^2)(\Omega_2^2 - b_2^2)),$$

$$L = -1 / (\Omega_1 - b_1) + 1 / (\Omega_2 - b_2), D = -1 / (\Omega_1 + b_1) + 1 / (\Omega_2 + b_2),$$

$$X = -1 / (\Omega_1 + b_1) + 1 / (\Omega_2 - b_2) - 2, H = -1 / (\Omega_1 - b_1) + 1 / (\Omega_2 + b_2) + 2.$$
(11)

С целью упрощения (10) введём обозначения: $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = \alpha\Omega_1$, $\alpha = \Omega_{M1} / \Omega_{M2}$, $\Omega^2 = \chi$, после чего подставим в (10) параметр $\ell = e^{iqa}$ ($a = h_1 + h_2$), в результате, дисперсионное уравнение (10) волн Блоха-Флоке примет вид:

$$\cos qa = f,$$
(12)

где

$$f = (d_1 x^2 + d_2 x + d_3) / (e_1 x^2 + e_2 x + e_3), e_1 = 4\alpha^2, e_2 = -4(\Omega_{SV1}^2 + \Omega_{SV2}^2),$$

$$e_3 = 4\Omega_{SV1}^2 \Omega_{SV2}^2, d_1 = 4\alpha^2 \text{chp}(h_1 + h_2),$$

$$d_2 = (2\alpha - \alpha^2 - 4b_1 \alpha^2 - 1 - 4b_2 - 4b_2^2 - 4b_1^2 \alpha^2) \text{chp}(h_1 + h_2) + (\alpha - 1)^2 \text{chp}(h_2 - h_1),$$

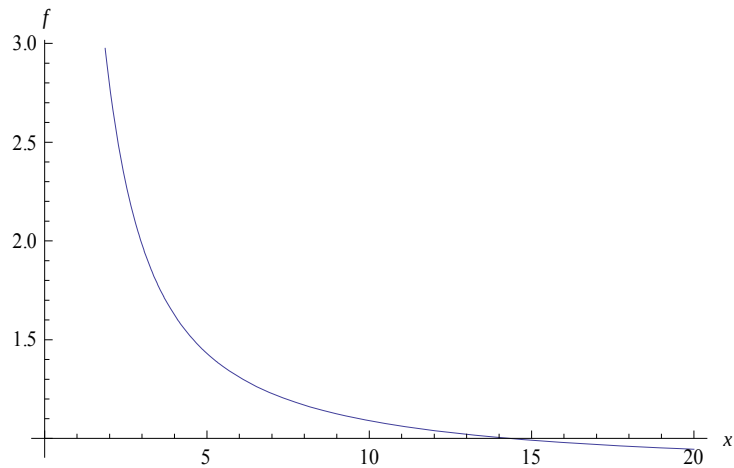
$$d_3 = (b_2^2 + 2b_1 b_2 + 4b_1 b_2^2 + b_1^2 + 4b_1^2 b_2 + 4b_1^2 b_2^2) \text{chp}(h_1 + h_2) - (b_1 - b_2)^2 \text{chp}(h_2 - h_1).$$

Если параметры рассматриваемой конструкции таковы, что выполняется следующее неравенство:

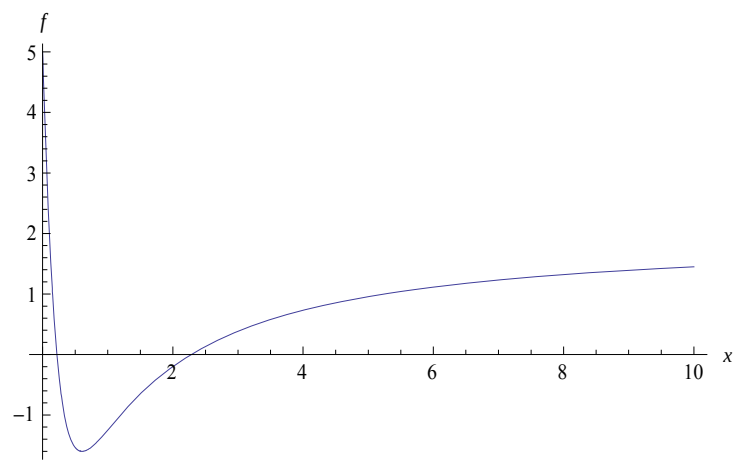
$$|f| > 1,$$
(13)

то волновой процесс Блоха-Флоке отсутствует. Такие полосы частот называются запрещёнными.

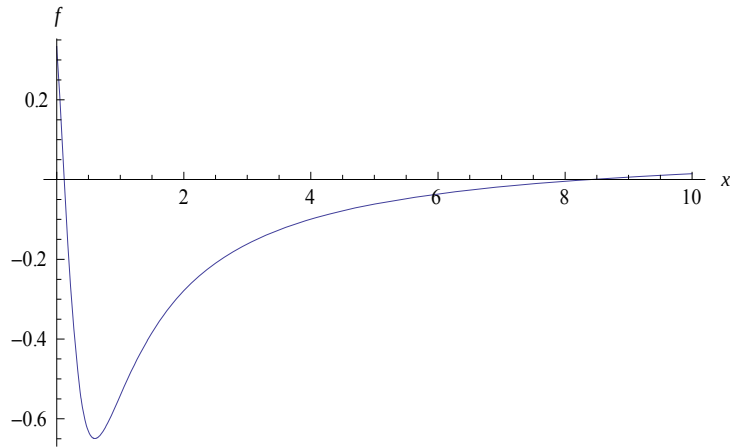
Приведём результаты некоторых численных экспериментов, выражающих зависимости f от x . Полученные кривые графически подтверждают существование полос пропускания и запретных полос в спектре частот волн Блоха-Флоке.



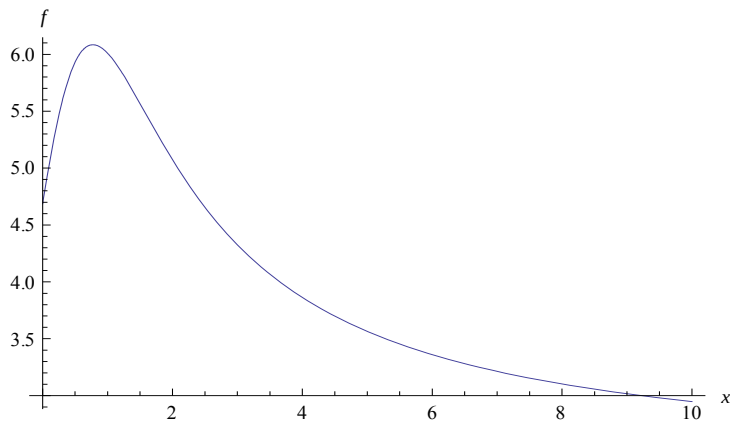
Фиг.2. $d_1 = 37.6, d_2 = 90, d_3 = 120; e_1 = 46, e_2 = -24, e_3 = 25.6$.



Фиг.3. $d_1 = 2, d_2 = -5, d_3 = 1; e_1 = 1, e_2 = 0.4, e_3 = 0.2$.



Фиг.4. $d_1 = 2, d_2 = -17, d_3 = 2; e_1 = 22, e_2 = -0.4, e_3 = 6$.



Фиг.5. $d_1 = 37.6, d_2 = 90, d_3 = 120; e_1 = 16, e_2 = -0.4, e_3 = 25.6$.

На фиг.2 представлен случай существования одной полубесконечной полосы пропускания $[14,3; -\infty)$, полоса $[0; 14,3)$ является запретной. Фиг.3 изображает случай существования двух конечных полос пропускания $[0,15; 0,33]$ и $[1,2; 5,2]$. На фиг.4 представлен случай отсутствия запретных полос и на фиг.5 приведён случай, когда вся полуось Ox является запретной полосой, т.е. при данных характеристиках структуры волновой процесс невозможен. Анализ вида правой части (12) даёт нам основание утверждать, что больше двух полос пропускания для рассматриваемой структуры без учёта обменных эффектов быть не может.

Как видим, манипулируя магнито-физическими характеристиками слоёв структуры, можно добиться того, чтобы рассматриваемая структура обладала необходимыми свойствами, что, в свою очередь, может быть полезно при конструировании различных приборов спинтроники.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 13-2C097 (тематическое финансирование).

ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560с.
2. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. М.: Наука, 1973.
3. Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A. Magnonic crystals and spin waves in periodic structures. //Doklady Physic. Vol.46. No.10. 2001. Pp.469-471.
4. S.A. Nikitov, Ph. Tailhades, C.S. Tsai. Spin waves in Periodic Magnetic Structures – Magnonic crystals. //J.Magnet.Mater.Vol.23. No.3. 2001. Pp.320-331.
5. K. Sekiguchi et al. Attenuation of propagating spin wave induced by layered nanostructures. //Appl.Phys.Lett. Vol.100, iss.13. 2012.
6. P.Landeros, D.Mills. Spin waves in periodically perturbed films.// Phys. Rev. B85. 054424, 2012.
7. S. Tacchi, G. Duerr et al. Forbidden Band Gaps in the Spin wave Spectrum.// Phys. Rev.Lett.. 109. 137202. 2012.
8. C.S. Lin et al, Band Gaps parameters of 1D bicomposit nanostructured Magnonic Crystal.// Appl. Phys. Lett. Vol.98. 022504. 2011.
9. Bader S.D., Parkin S.S. (2010) «Spintronics»: Annual Review of Condensed Matter Physics, 1:71.
10. Ani P.Velo, G.A. Gazonas et al, Recursive Dispersion Relations in one-dimensional Periodic Elastic Media. //J. Appl.Math. Vol.69. No 3. Pp.670-689.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович – доктор физ.-мат.наук, зав.отделом Института механики НАН Армении.

Адрес: Республика Армения, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.

E-mail: zavendanoyan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович –канд. физ.-мат. наук, старш. науч.сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: Республика Армения, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.

E-mail: levous@mail.ru

Манукян Гоар Аслановна – канд.физ.-мат.наук, старш. науч.сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: Республика Армения, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.

E-mail: mechins@sci.am.

Даноян Нерсес Завенович – младш. науч. сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: Республика Армения, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.

E-mail: mechins@sci.am.

Поступила в редакцию 12.12.2013

УДК 539.3

**НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ
МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК**

Саркисян С.О.

Ключевые слова: термоупругость, микрополярный, тонкая оболочка, энергетические теоремы, вариационное уравнение.

Key words: thermoelasticity, micropolar, thin shell, energetic theorems, variation equation.

Մարգարյան Ս.Ն.

Միկրոպոլյար բարակ թաղանթների ջերմաառաձգականության տեսության մի քանի ընդհանուր հարցեր

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ բնույթ ունեցող վարկածների մեթոդի հիման վրա կառուցված է միկրոպոլյար բարակ թաղանթների ջերմաառաձգականության կիրառական տեսությունը, արտածված է էներգետիկ հաշվեկշռի հավասարումը, ապացուցված են էներգետիկ թեորեմները, կառուցված է այդ տեսության վարիացիոն հավասարումը:

Sargsyan S.H.

On Some General Questions of Theory of Thermoelasticity of Micropolar Thin Shells

In the present paper on the basis of the hypotheses method, which has asymptotic nature, applied theory of thermoelasticity of micropolar thin shells is constructed, balance equation is obtained, energetic theorems are proved and variation functional is constructed for this theory.

В работе на основе метода гипотез, который имеет асимптотическую природу, построена прикладная теория термоупругости микрополярных тонких оболочек, выведены уравнения баланса энергии, доказаны энергетические теоремы, построен вариационный функционал этой теории.

Введение. В работах [1-3] изложены основы классической теории термоупругости, изучены энергетические вопросы и вариационные постановки соответствующих краевых задач. В работах [4-6] построены классические математические модели термоупругости изотропных и трансверсально-изотропных тонких оболочек без учёта и с учётом поперечных сдвиговых деформаций, доказаны общие энергетические теоремы и построены соответствующие общие вариационные функционалы. В работах [7-9] изложены основы трёхмерной термоупругости микрополярных тел, изучены энергетические вопросы и вариационные постановки краевых задач этой теории.

В настоящее время считается актуальным построение общей теории термоупругости микрополярных тонких оболочек и пластин и изучение основных вопросов энергетического поведения и вариационной постановки соответствующих краевых задач.

Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких оболочек и пластин заключается в приближённом, но адекватном сведении трёхмерной задачи микрополярной термоупругости к двумерной краевой задаче. В работах [10, 11] асимптотическим методом установлены качественные стороны поведения решения краевой задачи трёхмерной микрополярной теории упругости в тонких областях пластинки или оболочки, а в работах [12-14] сформулированы адекватные гипотезы и построены общие теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек. В работах [15, 16] развит этот системный подход, построено асимптотическое решение микрополярной термоупругости в тонкой области оболочки, сформулированы

адекватные гипотезы и изложены основные положения теории термоупругости микрополярных тонких оболочек.

В данной работе изложена теория термоупругости микрополярных тонких оболочек с точки зрения энергетических соображений, доказаны энергетические теоремы и построен соответствующий вариационный функционал этой теории.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое изотропное микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории несвязанной термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений [7]:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (H_j \cdot \sigma_{ji}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (H_i \cdot \sigma_{ji}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_i \cdot H_j \cdot \sigma_{3i}) + \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{ij} + \\ & + H_j \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \sigma_{i3} - \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{jj} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \cdot \sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \cdot \sigma_{23}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 \cdot H_2 \cdot \sigma_{33}) - \\ & H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \sigma_{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{22} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (H_j \cdot \mu_{ji}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (H_i \cdot \mu_{ji}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_i \cdot H_j \cdot \mu_{3i}) + \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \mu_{ij} + \\ & + H_j \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \mu_{i3} - \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \mu_{jj} + H_i \cdot H_j (\sigma_{j3} - \sigma_{3j}) = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \cdot \mu_{13}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \cdot \mu_{23}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 \cdot H_2 \cdot \mu_{33}) - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \mu_{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \mu_{22} + \\ & + H_1 \cdot H_2 (\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 0; \end{aligned} \quad (1.4)$$

физические соотношения термоупругости

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{33})] + \alpha_t T, \quad \gamma_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha_t T, \quad (1.5)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{ij} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{ji}, \quad \gamma_{i3} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{i3} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{3i}, \quad \gamma_{3i} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{3i} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{i3},$$

$$\chi_{ii} = \frac{\gamma + \beta}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left[\mu_{ii} - \frac{\beta}{2(\beta + \gamma)} (\mu_{jj} + \mu_{33}) \right],$$

$$\chi_{33} = \frac{\gamma + \beta}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left[\mu_{33} - \frac{\beta}{2(\beta + \gamma)} (\mu_{11} + \mu_{22}) \right],$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{4\gamma\epsilon} [(\gamma + \epsilon)\mu_{ij} - (\gamma - \epsilon)\mu_{ji}], \quad \chi_{i3} = \frac{1}{4\gamma\epsilon} [(\gamma + \epsilon)\mu_{i3} - (\gamma - \epsilon)\mu_{3i}], \quad (1.6)$$

$$\chi_{3i} = \frac{1}{4\gamma\epsilon} [(\gamma + \epsilon)\mu_{3i} - (\gamma - \epsilon)\mu_{i3}],$$

либо в обратной форме

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \lambda(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}) + 2\mu\gamma_{ii} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_i T, \\
\sigma_{33} &= \lambda(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}) + 2\mu\gamma_{33} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_i T, \quad \sigma_{ij} = (\mu + \alpha)\gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\gamma_{ji}, \\
\sigma_{i3} &= (\mu + \alpha)\gamma_{i3} + (\mu - \alpha)\gamma_{3i}, \quad \sigma_{3i} = (\mu + \alpha)\gamma_{3i} + (\mu - \alpha)\gamma_{i3}, \\
\mu_{ii} &= 2\gamma\chi_{ii} + \beta(\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33}), \quad \mu_{33} = 2\gamma\chi_{33} + \beta(\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33}), \\
\mu_{ij} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ji}, \quad \mu_{i3} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{i3} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{3i}, \\
\mu_{3i} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{3i} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{i3};
\end{aligned}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
\gamma_{ii} &= \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} V_j + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} V_3, \\
\gamma_{ij} &= \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} V_i + (-1)^i \omega_3, \\
\gamma_{i3} &= \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} V_i + (-1)^j \omega_j, \quad \gamma_{3i} = \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_3} + (-1)^i \omega_j, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_3}, \\
\chi_{ii} &= \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \omega_j + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \omega_3, \quad \chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_3}, \\
\chi_{i3} &= \frac{1}{H_j} \cdot \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \omega_1, \quad \chi_{3i} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_3}, \quad \chi_{ij} = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \omega_i. \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{i3}, \sigma_{3i}, \sigma_{33}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{i3}, \mu_{3i}, \mu_{33}$ – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; $\gamma_{ii}, \gamma_{ij}, \gamma_{i3}, \gamma_{3i}, \gamma_{33}, \chi_{ii}, \chi_{ij}, \chi_{i3}, \chi_{3i}, \chi_{33}$ – компоненты тензоров деформации и изгиба-кручений; $\vec{V}(V_1, V_2, V_3)$, $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – соответственно, вектор перемещений и вектор свободного поворота; T – функция температуры;

$$E, \nu \left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon - \text{упругие константы}$$

микрополярного материала; α_i – линейный коэффициент температурного

расширения; $i, j = 1, 2, \quad i \neq j$; $H_i = A_i \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i} \right)$, $H_3 = 1$ – коэффициенты

Ляме криволинейной системы координат α_i, α_3 , применяемые в теории оболочек [17], R_i – главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

К основным уравнениям микрополярной теории термоупругости (1.1)-(1.8) присоединим соответствующие граничные условия.

На лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ примем граничные условия первой граничной задачи микрополярной теории упругости:

$$\sigma_{3i} = \pm q_i^\pm, \quad \sigma_{33} = \pm q_3^\pm, \quad \mu_{3i} = \pm m_i^\pm, \quad \mu_{33} = \pm m_3^\pm. \quad (1.9)$$

На поверхности края оболочки Σ , в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, граничные условия записываются в

силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или, в общем случае, в смешанном виде.

Следует отметить, что основной физической постоянной, удерживающей модель (1.1)-(1.9) на уровне микрополярной теории термоупругости, является упругий коэффициент α (при $\alpha = 0$ из указанной системы отделяются уравнения трёхмерной классической теории термоупругости).

2. Уравнение баланса энергии, энергетические теоремы, теорема взаимности Бетти и вариационный функционал трёхмерной термоупругости микрополярного тела.

Уравнение баланса энергии в трёхмерной теории микрополярной термоупругости имеет вид [7]:

$$\iint_S \int_{-h}^h W H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha = A, \quad (2.1)$$

где W – плотность потенциальной энергии деформации:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{11}\gamma_{11} + \sigma_{22}\gamma_{22} + \sigma_{33}\gamma_{33} + \sigma_{12}\gamma_{12} + \sigma_{21}\gamma_{21} + \sigma_{13}\gamma_{13} + \sigma_{23}\gamma_{23} + \sigma_{32}\gamma_{32} + \mu_{11}\chi_{11} + \mu_{22}\chi_{22} + \mu_{33}\chi_{33} + \mu_{12}\chi_{12} + \mu_{13}\chi_{13} + \mu_{31}\chi_{31} + \mu_{23}\chi_{23} + \mu_{32}\chi_{32}) - \frac{\alpha T}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad (2.2)$$

A – работа внешних поверхностных усилий и моментов на перемещениях и поворотах деформации:

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-h}^h d\alpha_3 \int_{l_1}^h (\sigma_{21}^0 V_1 + \sigma_{22}^0 V_2 + \sigma_{23}^0 V_3 + \mu_{21}^0 \omega_1 + \mu_{22}^0 \omega_2 + \mu_{23}^0 \omega_3) H_1 d\alpha_1 + \int_{-h}^h d\alpha_3 \int_{l_2}^h (\sigma_{11}^0 V_1 + \sigma_{12}^0 V_2 + \sigma_{13}^0 V_3 + \mu_{11}^0 \omega_1 + \mu_{12}^0 \omega_2 + \mu_{13}^0 \omega_3) H_2 d\alpha_2 \right\} + \left[\iint_{S^+} (q_1^+ V_1 + q_2^+ V_2 + q_3^+ V_3 + m_1^+ \omega_1 + m_2^+ \omega_2 + m_3^+ \omega_3) H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_{S^-} (q_1^- V_1 + q_2^- V_2 + q_3^- V_3 + m_1^- \omega_1 + m_2^- \omega_2 + m_3^- \omega_3) H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right]. \quad (2.3)$$

Плотность потенциальной энергии деформации (2.2) на основе закона Гука (1.5), (1.6) можно выражать либо через компоненты тензоров деформации и изгибов-кручений, либо через компоненты силовых и моментных напряжений. Представим плотность потенциальной энергии W через компоненты тензоров деформации и изгибов-кручений:

$$W = \frac{1}{2} \left\{ 2\mu (\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2) + \lambda (\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33})^2 + (\mu + \alpha) (\gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{32}^2) + 2(\mu - \alpha) (\gamma_{12}\gamma_{21} + \gamma_{13}\gamma_{31} + \gamma_{23}\gamma_{32}) + 2\gamma (\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + \chi_{33}^2) + \beta (\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33})^2 + (\gamma + \varepsilon) (\chi_{12}^2 + \chi_{21}^2 + \chi_{13}^2 + \chi_{31}^2 + \chi_{23}^2 + \chi_{32}^2) + 2(\gamma - \varepsilon) (\chi_{12}\chi_{21} + \chi_{13}\chi_{31} + \chi_{23}\chi_{32}) \right\} - \frac{3}{2} (3\lambda + 2\mu) \alpha T (\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}) + \frac{3}{2} (3\lambda + 2\mu) \alpha T^2. \quad (2.4)$$

Отметим, что подчеркнутый член в выражении W относится к температурному полю (его можно просто опустить).

Из формул (2.4) и (1.5), (1.6) вытекают следующие соотношения (типа формул Кастилиано) между величиной W и компонентами тензоров силовых-моментных напряжений и деформаций-изгибов-кручений:

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_{11}} = \sigma_{11}, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{32}} = \sigma_{32}, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \chi_{11}} = \mu_{11}, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \chi_{32}} = \mu_{32}. \quad (2.5)$$

Отметим, что в трёхмерной микрополярной теории термоупругости имеет место и теорема взаимности Бетти, которая выражается следующим образом [7]:

$$\begin{aligned} & \left\{ \iint_{S^+} (q_1^+ V_1' + q_2^+ V_2' + q_3^+ V_3' + m_1^+ \omega_1' + m_2^+ \omega_2' + m_3^+ \omega_3') H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \right. \\ & + \iint_{S^-} (q_1^- V_1' + q_2^- V_2' + q_3^- V_3' + m_1^- \omega_1' + m_2^- \omega_2' + m_3^- \omega_3') H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_1} (\sigma_{21}^0 V_1' + \sigma_{22}^0 V_2' + \sigma_{23}^0 V_3' + \mu_{21}^0 \omega_1' + \mu_{22}^0 \omega_2' + \mu_{23}^0 \omega_3') H_1 d\alpha_1 + \\ & + \left. \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_2} (\sigma_{11}^0 V_1' + \sigma_{12}^0 V_2' + \sigma_{13}^0 V_3' + \mu_{11}^0 \omega_1' + \mu_{12}^0 \omega_2' + \mu_{13}^0 \omega_3') H_2 d\alpha_2 \right\} - \\ & - \left\{ \iint_{S^+} (q_1^+ V_1 + q_2^+ V_2 + q_3^+ V_3 + m_1^+ \omega_1 + m_2^+ \omega_2 + m_3^+ \omega_3) H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \right. \\ & + \iint_{S^-} (q_1^- V_1 + q_2^- V_2 + q_3^- V_3 + m_1^- \omega_1 + m_2^- \omega_2 + m_3^- \omega_3) H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \int_{-h}^h d\alpha_3 \int_{l_1} (\sigma_{21}' V_1 + \sigma_{22}' V_2 + \sigma_{23}' V_3 + \mu_{21}' \omega_1 + \mu_{22}' \omega_2 + \mu_{23}' \omega_3) H_1 d\alpha_1 + \\ & + \left. \int_{-h}^h d\alpha_3 \int_{l_2} (\sigma_{11}' V_1 + \sigma_{12}' V_2 + \sigma_{13}' V_3 + \mu_{11}' \omega_1 + \mu_{12}' \omega_2 + \mu_{13}' \omega_3) H_2 d\alpha_2 \right\} = \\ & = \alpha_T \iint_{S} \int_{-h}^h [T'(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - T(\sigma_{11}' + \sigma_{22}' + \sigma_{33}')] H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь имеем в виду два напряжённо-деформированных состояния микрополярного упругого тела, из которых первое характеризуется силовыми и моментными напряжениями σ_{mn}, μ_{mn} , деформациями и изгибами-кручениями $\varepsilon_{mn}, \chi_{mn}$, перемещениями и поворотами u_m, ω_m , возникающими под действием внешних сил и моментов: $q_1^\pm, q_2^\pm, q_3^\pm, m_1^\pm, m_2^\pm, m_3^\pm, \sigma_{21}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{23}^0, \mu_{21}^0, \mu_{22}^0, \mu_{23}^0, \sigma_{11}^0, \sigma_{12}^0, \sigma_{13}^0, \mu_{11}^0, \mu_{12}^0, \mu_{13}^0$ и температурного поля T , а второе – силовыми и моментными напряжениями σ'_{mn}, μ'_{mn} , деформациями и изгибами-кручениями $\varepsilon'_{mn}, \chi'_{mn}$, перемещениями и поворотами u'_m, ω'_m , возникающими под действием

внешних сил и моментов: $q_1^{\pm'}, q_2^{\pm'}, q_3^{\pm'}, m_1^{\pm'}, m_2^{\pm'}, m_3^{\pm'}, \sigma_{21}^{0'}, \sigma_{22}^{0'}, \sigma_{23}^{0'}, \mu_{21}^{0'}, \mu_{22}^{0'}, \mu_{23}^{0'}, \sigma_{11}^{0'}, \sigma_{12}^{0'}, \sigma_{13}^{0'}, \mu_{11}^{0'}, \mu_{12}^{0'}, \mu_{13}^{0'}$ и температурного поля T' .

Во многих случаях, как в классической теории упругости, так и в микрополярной теории упругости, для определения температурных напряжений эффективно применение вариационных методов. В связи с этим рассмотрим общий вариационный принцип в микрополярной теории термоупругости, функционал которого выражается следующим образом [7]:

$$\begin{aligned}
I = & \int_{-h}^h \iint_S \left\langle W - \left[\sigma_{11} \left[\gamma_{11} - \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} V_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} V_3 \right) \right] + \right. \right. \\
& + \sigma_{22} \left[\gamma_{22} - \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial V_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} V_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} V_3 \right) \right] + \sigma_{33} \left[\gamma_{33} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_3} \right] + \\
& + \sigma_{12} \left[\gamma_{12} - \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial V_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} V_1 - \omega_3 \right) \right] + \sigma_{21} \left[\gamma_{21} - \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} V_2 + \omega_3 \right) \right] + \\
& + \sigma_{31} \left[\gamma_{31} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_3} - \omega_2 \right) \right] + \sigma_{13} \left[\gamma_{13} - \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} V_1 + \omega_2 \right) \right] + \\
& + \sigma_{32} \left[\gamma_{32} - \left(\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_3} + \omega_1 \right) \right] + \sigma_{23} \left[\gamma_{23} - \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} V_2 - \omega_1 \right) \right] + \\
& + \mu_{11} \left[\chi_{11} - \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \omega_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \omega_3 \right) \right] + \\
& + \mu_{22} \left[\chi_{22} - \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \omega_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \omega_3 \right) \right] + \mu_{33} \left[\chi_{33} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_3} \right] + \\
& + \mu_{12} \left[\chi_{12} - \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \omega_1 \right) \right] + \mu_{21} \left[\chi_{21} - \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \omega_2 \right) \right] + \\
& + \mu_{13} \left[\chi_{13} - \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \omega_1 \right) \right] + \mu_{31} \left[\chi_{31} - \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_3} \right] + \\
& + \mu_{23} \left[\chi_{23} - \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \omega_2 \right) \right] + \mu_{32} \left[\chi_{32} - \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_3} \right] \Bigg\rangle H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 - \\
& - \iint_{S^+} \left[q_1^+ V_1 + q_2^+ V_2 + q_3^+ V_3 + m_1^+ \omega_1 + m_2^+ \omega_2 + m_3^+ \omega_3 \right]_{\alpha_3=h} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \iint_{S^-} \left[q_1^- V_1 + q_2^- V_2 + q_3^- V_3 + m_1^- \omega_1 + m_2^- \omega_2 + m_3^- \omega_3 \right]_{\alpha_3=-h} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l'_1} \left(\sigma_{21}^0 V_1 + \sigma_{22}^0 V_2 + \sigma_{23}^0 V_3 + \mu_{21}^0 \omega_1 + \mu_{22}^0 \omega_2 + \mu_{23}^0 \omega_3 \right) H_1 d\alpha_1 +
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_1''} \left[\sigma_{21} (V_1 - V_1^0) + \sigma_{22} (V_2 - V_2^0) + \sigma_{23} (V_3 - V_3^0) + \mu_{21} (\omega_1 - \omega_1^0) + \right. \\
& \left. + \mu_{22} (\omega_2 - \omega_2^0) + \mu_{23} (\omega_3 - \omega_3^0) \right] H_1 d\alpha_1 + \\
& + \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_2''} \left(\sigma_{11}^0 V_1 + \sigma_{12}^0 V_2 + \sigma_{13}^0 V_3 + \mu_{11}^0 \omega_1 + \mu_{12}^0 \omega_2 + \mu_{13}^0 \omega_3 \right) H_2 d\alpha_2 + \\
& + \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_2''} \left[\sigma_{11} (V_1 - V_1^0) + \sigma_{12} (V_2 - V_2^0) + \sigma_{13} (V_3 - V_3^0) + \mu_{11} (\omega_1 - \omega_1^0) + \right. \\
& \left. + \mu_{12} (\omega_2 - \omega_2^0) + \mu_{13} (\omega_3 - \omega_3^0) \right] H_2 d\alpha_2,
\end{aligned}$$

здесь W является работой деформации, отнесённой к единице объёма (2.4). Функционал (2.7) назовём полным функционалом трёхмерной микрополярной теории термоупругости. На его основе можно получить вариационное уравнение: $\delta I = 0$, считая виртуальные приращения $\delta \gamma_{mn}$, $\delta \chi_{mn}$, δU_n , $\delta \omega_n$, $\delta \sigma_{mn}$, $\delta \mu_{mn}$ взаимно независимыми. Тогда, в качестве уравнений Эйлера будут выступать все основные уравнения (1.1)-(1.8), естественные граничные условия (1.9) и условия на Σ трёхмерной задачи микрополярной термоупругости.

3. Термоупругость микрополярных тонких оболочек.

Предполагается, что толщина оболочки весьма мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности оболочки. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее напряжённо-деформированное состояние тонкого трёхмерного тела, образующего оболочку, состоит из внутреннего напряжённо-деформированного состояния, охватывающего всю оболочку, и пограничного слоя, локализирующего вблизи поверхности края оболочки Σ . Построение общей прикладной-двумерной теории термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек тесно связано с построением внутренней задачи.

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, будем строить теорию термоупругости микрополярных оболочек на основе метода гипотез. Сами гипотезы сформулируем на основе результата асимптотического анализа поставленной трёхмерной граничной задачи микрополярной теории термоупругости в тонкой трёхмерной области оболочки.

С учётом качественных результатов [15] асимптотического решения системы уравнений (1.1)-(1.8) с указанными выше граничными условиями, в основу предлагаемой ниже теории термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек можем ставить следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

1. В процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически можем записать так: перемещения точек тела-оболочки распределены по толщине оболочки по линейному закону следующим образом:

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.1)$$

кроме того, будем считать, что тангенциальные повороты и нормальный поворот также имеют линейное распределение по толщине оболочки следующего характера:

$$\omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \mathbf{i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2). \quad (3.2)$$

Отметим, что с точки зрения перемещений принятая гипотеза (3.1), по сути дела, совпадает с кинематической гипотезой Тимошенко в классической теории упругих оболочек [5, 6]. Гипотезу (3.1), (3.2), в целом, назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек.

2. Силовым напряжением σ_{33} в обобщённом законе Гука (1.5) можно пренебречь относительно силовых напряжений σ_{ii} , а также моментное напряжение μ_{3i} в обобщённом законе Гука (1.6) можно пренебречь относительно моментного напряжения μ_{i3} .

3. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений сначала для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем:

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{33} = \mu_{33}^0(\alpha_1, \alpha_2). \quad (3.3)$$

После вычисления указанных величин значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим путём прибавления к значениям (3.3) соответственно слагаемые, получаемые интегрированием первых двух (1.1) ($i=1,2$) и шестого уравнений равновесия (1.4), для которых потребуем выполнения условия, чтобы усреднённые по толщине оболочки величины были равны нулю.

4. Принимаем, что температура по толщине оболочки меняется по линейному закону, а именно:

$$T = T_0(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_3}{h} \Delta T(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.4)$$

$$\text{где } T_0 = \frac{1}{2}(T^+ + T^-), \quad (\Delta T) = T^+ - T^-, \quad (3.5)$$

$T^+(\alpha_1, \alpha_2)$ и $T^-(\alpha_1, \alpha_2)$ – температуры соответственно на внешней ($\alpha_3 = h$) и внутренней ($\alpha_3 = -h$) поверхностях оболочки.

1. Величинами $\frac{\alpha_3}{R_i}$ по сравнению с единицей будем пренебрегать.

В соответствии с обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко (3.1), (3.2), для компонентов тензоров деформаций, изгиба-кручений из уравнений (1.7), (1.8) получим:

$$\gamma_{ii} = \Gamma_{ii}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 K_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{ij} = \Gamma_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.6)$$

$$\gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\chi_{ii} = k_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{ij} = k_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.7)$$

$$\chi_{i3} = k_{i3}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 l_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{33} = k_{33}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{33} = 0, \quad \chi_{3i} = 0,$$

где

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i,$$

$$\begin{aligned}
K_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_j, & K_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_i, \\
\Gamma_{i3} &= -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j, & \Gamma_{3i} &= \psi_i - (-1)^j \Omega_j, & \vartheta_i &= -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, \\
\kappa_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_i}, & \kappa_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \\
\kappa_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, & l_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial l}{\partial \alpha_i}, & k_{33} &= 1.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Далее, на основе обобщённого закона Гука (1.5), (1.6), уравнений равновесия (1.1)-(1.4) и принятых гипотез, для компонентов тензоров силовых и моментных напряжений будем иметь следующие окончательные формулы:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}) - (1+\nu) \alpha_T T_0 \right] + \alpha_3 \frac{E}{1-\nu^2} \left[(K_{ii} + \nu K_{jj}) - (1+\nu) \alpha_T \frac{\Delta T}{h} \right] \\
\sigma_{ij} &= [(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}] + \alpha_3 [(\mu + \alpha) K_{ij} + (\mu - \alpha) K_{ji}], \\
\sigma_{i3} &= (\mu + \alpha) \Gamma_{i3} + (\mu - \alpha) \Gamma_{3i},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} &= \overset{0}{\sigma}_{33}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \left\{ -\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 \sigma_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 \sigma_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + \left(\frac{\overset{0}{\sigma}_{11}}{R_1} + \frac{\overset{0}{\sigma}_{22}}{R_2} \right) \right\} = \\
&= \frac{q_3^+ - q_3^-}{2} + \alpha_3 \frac{q_3^+ + q_3^-}{2h}, \\
\sigma_{3i} &= \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \left\{ -\frac{1}{A_i A_j} \left[\frac{\partial (A_j \overset{0}{\sigma}_{ii})}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial (A_i \overset{0}{\sigma}_{ji})}{\partial \alpha_j} \right] + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \overset{0}{\sigma}_{jj} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \overset{0}{\sigma}_{ij} - \frac{\overset{0}{\sigma}_{i3}}{R_i} \right\} + \\
&+ \left(\frac{\alpha_3^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \left\{ -\frac{1}{A_i A_j} \left[\frac{\partial (A_j \overset{1}{\sigma}_{ii})}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial (A_i \overset{1}{\sigma}_{ji})}{\partial \alpha_j} \right] + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \overset{1}{\sigma}_{jj} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \overset{1}{\sigma}_{ij} \right\} \\
\overset{0}{\sigma}_{3i} &= (\mu + \alpha) \Gamma_{3i} + (\mu - \alpha) \Gamma_{i3}, & \mu_{ii} &= (\beta + 2\gamma) k_{ii} + \beta (k_{jj} + k_{33}), \\
\mu_{ij} &= (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}, & \overset{0}{\mu}_{33} &= (\beta + 2\gamma) \kappa_{33} + \beta (k_{11} + k_{22}), \\
\mu_{3i} &= \overset{0}{\mu}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \left\{ -\frac{1}{A_i A_j} \left[\frac{\partial (A_i \mu_{ii})}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial (A_j \mu_{ji})}{\partial \alpha_j} \right] - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \mu_{ij} - \right. \\
&\left. - \frac{\overset{0}{\mu}_{i3}}{R_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \mu_{jj} - (-1)^j \left(\sigma_{i3} - \overset{0}{\sigma}_{3j} \right) \right\} = \frac{m_i^+ - m_i^-}{2} + \alpha_3 \frac{m_i^+ + m_i^-}{2h},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \mu_{33} = \mu_{33}^0(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \left\{ -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial \left(A_2^0 \mu_{13}^0 \right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \left(A_1^0 \mu_{23}^0 \right)}{\partial \alpha_2} \right) + \left(\frac{\mu_{11}^0}{R_1} + \frac{\mu_{22}^0}{R_2} \right) - \left(\sigma_{12}^0 - \sigma_{21}^0 \right) \right\} + \\ + \left(\frac{\alpha_3^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \left\{ -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial \left(A_2^1 \mu_{13}^1 \right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \left(A_1^1 \mu_{23}^1 \right)}{\partial \alpha_2} \right) - \left(\sigma_{12}^1 - \sigma_{21}^1 \right) \right\}, \\ \mu_{i3} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} k_{i3} + \alpha_3 \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3}. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{ii}^0, \sigma_{ij}^0, \mu_{i3}^0, \sigma_{ii}^1, \sigma_{ij}^1, \mu_{i3}^1$ представляют собой соответственно постоянную и линейную по α_3 части силовых напряжений σ_{ii}, σ_{ij} и моментного напряжения μ_{i3} .

С целью приведения трёхмерной задачи микрополярной теории термоупругости к двумерной, что уже выполнено для перемещений, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в теории микрополярных упругих тонких оболочек вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики: усилия $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$, моменты $M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}$ и гипермоменты Λ_{i3} , которые с учётом предположения 4) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{ii} = \int_{-h}^h \sigma_{ii} d\alpha_3, \quad S_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} d\alpha_3, \quad N_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} d\alpha_3, \quad N_{3i} = \int_{-h}^h \sigma_{3i} d\alpha_3, \\ M_{ii} = \int_{-h}^h \alpha_3 \sigma_{ii} d\alpha_3, \quad H_{ij} = \int_{-h}^h \alpha_3 \sigma_{ij} d\alpha_3, \quad L_{ii} = \int_{-h}^h \mu_{ii} d\alpha_3, \quad L_{ij} = \int_{-h}^h \mu_{ij} d\alpha_3, \\ L_{33} = \int_{-h}^h \mu_{33} d\alpha_3, \quad L_{i3} = \int_{-h}^h \mu_{i3} d\alpha_3, \quad \Lambda_{i3} = \int_{-h}^h \alpha_3 \mu_{i3} d\alpha_3. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Основная система уравнений термоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений выразится так:

$$\begin{aligned} \text{уравнения равновесия} \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) + \frac{N_{i3}}{R_i} = -(q_i^+ + q_i^-), \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (H_{ji} + H_{ij}) - N_{3i} = -h(q_i^+ - q_i^-), \\ \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] = q_3^+ + q_3^-, \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \frac{L_{i3}}{R_i} = \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = -(m_i^+ + m_i^-), \\
& \frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (S_{12} - S_{21}) = (m_3^+ + m_3^-), \\
& L_{33} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (H_{12} - H_{21}) = h(m_3^+ - m_3^-); \\
& \text{физические соотношения термоупругости} \\
& T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} [(\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}) - (1+\nu) \Gamma_T], \quad S_{ij} = 2h[(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}], \\
& M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [(K_{ii} + \nu K_{jj}) - (1+\nu) K_T], \quad H_{ij} = \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha) K_{ij} + (\mu - \alpha) K_{ji}], \\
& N_{i3} = 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{i3} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{3i}, \quad N_{3i} = 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{3i} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{i3}, \\
& L_{ii} = 2h[(\beta + 2\gamma) \kappa_{ii} + \beta(\kappa_{jj} + \iota)], \\
& L_{ij} = 2h[(\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}], \quad L_{33} = 2h[(\beta + 2\gamma) \iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})], \\
& L_{i3} = 2h \left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3} \right], \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} \right].
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Здесь

$$\Gamma_T = \frac{1}{2h} \alpha_t \int_{-h}^h T d\alpha_3 = \alpha_t T_0, \quad K_T = \frac{3}{2h^3} \alpha_t \int_{-h}^h T \alpha_3 d\alpha_3 = \alpha_t \frac{\Delta T}{h}. \tag{3.14}$$

К уравнениям равновесия (3.12) и соотношениям термоупругости (3.13) микрополярных оболочек следует присоединить геометрические соотношения (3.8).

Представим «смягчённые» граничные условия на граничном контуре Γ срединной поверхности оболочки, считая, что этот контур совпадает с координатной линией $\alpha_1 = \text{const}$ [13]:

$$\begin{aligned}
& T_{11} = T_{11}^* \quad \text{или} \quad u_1 = u_1^*, \quad S_{12} = S_{12}^* \quad \text{или} \quad u_2 = u_2^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^*, \\
& M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad K_{11} = K_{11}^*, \quad H_{12} = H_{12}^* \quad \text{или} \quad K_{12} = K_{12}^*, \\
& L_{11} = L_{11}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{11} = \kappa_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, \\
& L_{13} = L_{13}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \quad \text{или} \quad l_{13} = l_{13}^*.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Система уравнений (3.12), (3.13), (3.8) и граничные условия (3.15) представляют собой математическую модель термоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Эта модель представляет собой систему дифференциальных уравнений 18-го порядка с 9-ю граничными условиями на каждом из контуров срединной поверхности оболочки Γ . Это – система из 52 уравнений относительно 52 неизвестных функций: $u_i, w, \psi_i, \Omega_i, \Omega_3, \iota, \vartheta_i, T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{33}, L_{i3}, \Lambda_{i3}, \Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, \kappa_{ii}, \kappa_{ij}, \kappa_{i3}, l_{i3}$.

Отметим, что при $\alpha = 0$ из модели (3.12), (3.13), (3.8), (3.15) будут отделяться система уравнений и граничные условия классической термоупругости тонких

оболочек типа Тимошенко [5, 6] с учётом деформаций сдвига (с некоторым отклонением, связанным с нашей статической гипотезой 3)).

Если в математической модели оболочки (3.12), (3.13), (3.8), (3.15) вместо главных кривизн срединной поверхности $\frac{1}{R_i} (i = 1, 2)$ подставить ноль, то получим

независимо друг от друга основные уравнения и граничные условия термоупругости микрополярных тонких пластин для обобщённого плоского напряжённого состояния и изгиба.

4. Уравнение баланса энергии, энергетические теоремы, теорема взаимности и вариационный функционал термоупругости микрополярных тонких оболочек.

С учётом принятых гипотез 1)-5), полученные на их основе выражения для перемещений и поворотов (3.1), (3.2), компонентов тензоров деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений (3.6), (3.7), (3.9), (3.10) (с учётом формул (3.11)), произведя в уравнении баланса энергии (2.1) трёхмерной теории микрополярной термоупругости интегрирование по толщинной координате α_3 в пределах от $-h$ до $+h$, приходим к уравнению баланса энергии для прикладной теории термоупругости микрополярных тонких оболочек:

$$\iint_S W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = A_0, \quad (4.1)$$

где W_0 – плотность потенциальной энергии деформации прикладной теории термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек:

$$\begin{aligned} W_0 = & \frac{1}{2} (T_{11} \Gamma_{11} + T_{22} \Gamma_{22} + S_{12} \Gamma_{12} + S_{21} \Gamma_{21} + M_{11} K_{11} + M_{22} K_{22} + H_{12} K_{12} + H_{21} K_{21} + \\ & + N_{13} \Gamma_{13} + N_{31} \Gamma_{31} + N_{23} \Gamma_{23} + N_{32} \Gamma_{32} + L_{11} k_{11} + L_{22} k_{22} + L_{33} k_{33} + L_{12} k_{12} + L_{21} k_{21} + \\ & + L_{13} k_{13} + L_{23} k_{23} + \Lambda_{13} l_{13} + \Lambda_{23} l_{23}) - \frac{\alpha_T}{2} (T_{11} + T_{22}) T_0 - \frac{\alpha_T}{2h} (M_{11} + M_{22}) \Delta T, \end{aligned} \quad (4.2)$$

A_0 – работа внешних усилий, моментов и гипермоментов:

$$\begin{aligned} A_0 = & \frac{1}{2} \left\{ \int_{l_1} (S_{21}^0 u_1 + H_{21}^0 \psi_1 + T_{22}^0 u_2 + M_{22}^0 \psi_2 + N_{23}^0 w + L_{21}^0 \Omega_1 + L_{22}^0 \Omega_2 + L_{23}^0 \Omega_3 + \Lambda_{23}^0 \iota) A_1 d\alpha_1 + \right. \\ & + \int_{l_2} (T_{11}^0 u_1 + M_{11}^0 \psi_1 + S_{12}^0 u_1 + H_{12}^0 \psi_2 + N_{13}^0 w + L_{11}^0 \Omega_1 + L_{12}^0 \Omega_2 + L_{13}^0 \Omega_3 + \Lambda_{23}^0 \iota) A_2 d\alpha_2 + \\ & + \iint_S [(q_1^+ + q_1^-) u_1 + (q_1^+ - q_1^-) h \psi_1 + (q_2^+ + q_2^-) u_2 + (q_2^+ - q_2^-) h \psi_2 + \\ & + (q_3^+ + q_3^-) w + (m_1^+ + m_1^-) \Omega_1 + (m_2^+ + m_2^-) \Omega_2 + (m_3^+ + m_3^-) \Omega_3 + (m_3^+ + m_3^-) h \iota] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \Big\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Плотность потенциальной энергии деформации W_0 на основе физических соотношений (3.13) можно выражать через компоненты деформаций-изгибов-кручений (3.8) прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек:

$$\begin{aligned} W_0 = & \frac{1}{2} \left\langle \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\nu \Gamma_{11} \Gamma_{22}) + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (K_{11}^2 + K_{22}^2 + 2\nu K_{11} K_{22}) + \right. \\ & + \left[2h(\mu + \alpha)(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + 2(\mu - \alpha) \Gamma_{12} \Gamma_{21} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2h^3}{3} \left[(\mu + \alpha)(K_{12}^2 + K_{21}^2) + 2(\mu - \alpha)K_{12}K_{31} \right] + \\
& + 2h \left[(\mu + \alpha)(\Gamma_{13}^2 + \Gamma_{31}^2 + \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{32}^2) + 2(\mu - \alpha)(\Gamma_{13}\Gamma_{31} + \Gamma_{23}\Gamma_{32}) \right] + \quad (4.4) \\
& + 2h \left[(\beta + 2\gamma)(k_{11}^2 + k_{22}^2 + k_{33}^2)^2 + 2\beta(k_{11}k_{22} + k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33}) \right] + 2h \left[(\gamma + \varepsilon)(k_{12}^2 + k_{21}^2) + \right. \\
& + 2(\gamma - \varepsilon)k_{12}k_{21} \left. \right] + 2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} (k_{13}^2 + k_{23}^2) + \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} (l_{13}^2 + l_{23}^2) \left. \right\rangle - \frac{2Eh}{1-\nu} (\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) \alpha_T T_0 - \\
& - \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} (K_{11} + K_{22}) \alpha_T \frac{\Delta T}{h} - \frac{2Eh}{1-\nu} \alpha_T^2 T_0^2 - \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_T^2 \left(\frac{\Delta T}{h} \right)^2.
\end{aligned}$$

Отметим, что в формуле (4.4) можно не учитывать двух последних подчеркнутых слагаемых, т.к. они относятся к температурному полю.

На основе уравнения энергетического баланса (4.1) в микрополярной термоупругости тонких оболочек можем доказать теорему единственности, теорему существования и другие энергетические теоремы, а также обосновать вариационные методы Ритца и Бубнова-Галеркина [18] для решения краевой задачи (3.12), (3.13), (3.8), (3.15). В частности, на основе (4.4) имеют место следующие формулы:

$$T_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial \Gamma_{11}}, \quad S_{12} = \frac{\partial W_0}{\partial \Gamma_{12}}, \quad \dots, \quad M_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial K_{11}}, \quad H_{12} = \frac{\partial W_0}{\partial K_{12}}, \quad \dots, \quad L_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial k_{11}}, \dots \quad (4.5)$$

В прикладной теории термоупругости микрополярных тонких оболочек имеет место теорема взаимности Бетти. Для доказательства этой теоремы на основании уравнений равновесия (3.12) легко прийти к следующему равенству:

$$\begin{aligned}
& - \int_{l_1} (S_{21}u'_1 + T_{22}u'_2 + N_{23}w' + H_{21}\psi'_1 + M_{22}\psi'_2 + L_{21}\Omega'_1 + L_{22}\Omega'_2 + L_{23}\Omega'_3 + \Lambda_{23}\iota') A_1 d\alpha_1 + \\
& + \int_{l_2} (T_{11}u'_1 + S_{12}u'_2 + N_{13}w' + M_{11}\psi'_1 + H_{12}\psi'_2 + L_{11}\Omega'_1 + L_{12}\Omega'_2 + L_{13}\Omega'_3 + \Lambda_{13}\iota') A_2 d\alpha_2 - \\
& - \iint_{(S)} (T_{11}\Gamma'_{11} + T_{22}\Gamma'_{22} + S_{12}\Gamma'_{12} + S_{21}\Gamma'_{21} + N_{13}\Gamma'_{13} + N_{31}\Gamma'_{31} + N_{23}\Gamma'_{23} + N_{32}\Gamma'_{32} + \quad (4.6) \\
& + M_{11}K'_{11} + M_{22}K'_{22} + H_{12}K'_{12} + H_{21}K'_{21} + L_{11}k'_{11} + L_{22}k'_{22} + L_{12}k'_{12} + L_{21}k'_{21} + \\
& + L_{13}k'_{13} + L_{23}k'_{23} + \Lambda_{13}l'_{13} + \Lambda_{23}l'_{23} + L_{33}k'_{33}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
& = - \iint_{(S)} \left[(q_1^+ + q_1^-)u'_1 + (q_2^+ + q_2^-)u'_2 + (q_3^+ + q_3^-)w' + h(q_1^+ - q_1^-)\psi'_1 + h(q_2^+ - q_2^-)\psi'_2 + \right. \\
& + (m_1^+ + m_1^-)\Omega'_1 + (m_2^+ + m_2^-)\Omega'_2 + (m_3^+ + m_3^-)\Omega'_3 + h(m_3^+ - m_3^-)\iota' \left. \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{aligned}$$

Используя физические соотношения (3.13), можно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\begin{aligned}
& T_{11}\Gamma'_{11} + T_{22}\Gamma'_{22} + S_{12}\Gamma'_{12} + S_{21}\Gamma'_{21} + N_{13}\Gamma'_{13} + N_{31}\Gamma'_{31} + N_{23}\Gamma'_{23} + N_{32}\Gamma'_{32} + M_{11}K'_{11} + \\
& + M_{22}K'_{22} + H_{12}K'_{12} + H_{21}K'_{21} + L_{11}k'_{11} + L_{22}k'_{22} + L_{12}k'_{12} + L_{21}k'_{21} + L_{13}k'_{13} + L_{23}k'_{23} + \\
& + \Lambda_{13}l'_{13} + \Lambda_{23}l'_{23} + L_{33}k'_{33} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{11}\Gamma'_{11} + \Gamma_{22}\Gamma'_{22}) + \frac{2Eh\nu}{1-\nu^2} (\Gamma_{22}\Gamma'_{11} + \Gamma_{11}\Gamma'_{22}) + \\
& + 2h(\mu + \alpha)(\Gamma_{12}\Gamma'_{12} + \Gamma_{21}\Gamma'_{21} + \Gamma_{13}\Gamma'_{13} + \Gamma_{23}\Gamma'_{23} + \Gamma_{31}\Gamma'_{31} + \Gamma_{32}\Gamma'_{32}) + \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2h(\mu-\alpha)(\Gamma_{21}\Gamma'_{12}+\Gamma_{12}\Gamma'_{21}+\Gamma_{31}\Gamma'_{13}+\Gamma_{13}\Gamma'_{31}+\Gamma_{32}\Gamma'_{23}+\Gamma_{23}\Gamma'_{32})+ \\
& +\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11}K'_{11}+K_{22}K'_{22})+\frac{2Eh^3\nu}{3(1-\nu^2)}(K_{22}K'_{11}+K_{11}K'_{22})+ \\
& +\frac{2h^3}{3}(\mu+\alpha)(K_{12}K'_{12}+K_{21}K'_{21})+\frac{2h^3}{3}(\mu-\alpha)(K_{21}K'_{12}+K_{12}K'_{21})+ \\
& +2h(\beta+2\gamma)(k_{11}k'_{11}+k_{22}k'_{22}+k_{33}k'_{33})+2h\beta(k_{11}k'_{22}+k_{33}k'_{22}+k_{11}k'_{33}+k_{22}k'_{33}+ \\
& +k_{22}k'_{11}+k_{33}k'_{11})+2h(\gamma+\varepsilon)(k_{12}k'_{12}+k_{21}k'_{21})+2h(\gamma-\varepsilon)(k_{21}k'_{12}+k_{12}k'_{21})+ \\
& +2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}k_{13}k'_{13}+2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}k_{23}k'_{23}+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}l'_{13}+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}l'_{23}- \\
& -\frac{2Eh}{1-\nu}\alpha_T T_0(\Gamma'_{11}+\Gamma'_{22})-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)}\alpha_T\frac{\Delta T}{h}(K'_{11}+K'_{22}).
\end{aligned}$$

Имея в виду симметричность выражения (4.7), из равенства (4.6) получим теорему взаимности Бетти для прикладной теории термоупругости микрополярных тонких оболочек:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \int_{l_1} \left[\left(\int_{-h}^h \sigma_{22} d\alpha_3 \right) u'_2 + \left(\int_{-h}^h \sigma_{21} d\alpha_3 \right) u'_1 + \left(\int_{-h}^h \sigma_{23} d\alpha_3 \right) w' + \left(\int_{-h}^h \sigma_{22} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \psi'_2 + \right. \right. \\
& + \left(\int_{-h}^h \sigma_{21} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \psi'_1 + \left(\int_{-h}^h \mu_{21} d\alpha_3 \right) \Omega'_1 + \left(\int_{-h}^h \mu_{22} d\alpha_3 \right) \Omega'_2 + \left(\int_{-h}^h \mu_{23} d\alpha_3 \right) \Omega'_3 + \\
& + \left. \left(\int_{-h}^h \mu_{23} d\alpha_3 \right) \mathfrak{v}' \right] A_1 d\alpha_1 + \int_{l_2} \left[\left(\int_{-h}^h \sigma_{11} d\alpha_3 \right) u'_1 + \left(\int_{-h}^h \sigma_{12} d\alpha_3 \right) u'_2 + \left(\int_{-h}^h \sigma_{13} d\alpha_3 \right) w' + \right. \\
& + \left(\int_{-h}^h \sigma_{11} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \psi'_1 + \left(\int_{-h}^h \sigma_{12} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \psi'_2 + \left(\int_{-h}^h \mu_{11} d\alpha_3 \right) \Omega'_1 + \left(\int_{-h}^h \mu_{12} d\alpha_3 \right) \Omega'_2 + \\
& + \left. \left(\int_{-h}^h \mu_{13} d\alpha_3 \right) \Omega'_3 + \left(\int_{-h}^h \mu_{13} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \mathfrak{v}' \right] A_2 d\alpha_2 + \iint_{(S)} \left[(q_1^+ + q_1^-) u'_1 + (q_2^+ + q_2^-) u'_2 + \right. \\
& + (q_3^+ + q_3^-) w' + h(q_1^+ - q_1^-) \psi'_1 + h(q_2^+ - q_2^-) \psi'_2 + (m_1^+ + m_1^-) \Omega'_1 + (m_2^+ + m_2^-) \Omega'_2 + \\
& + (m_3^+ + m_3^-) \Omega'_3 + h(m_3^+ - m_3^-) \mathfrak{v}' \left. \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \Bigg\rangle - \left\langle \int_{l_1} \left[\left(\int_{-h}^h \sigma'_{22} d\alpha_3 \right) u_2 + \left(\int_{-h}^h \sigma'_{21} d\alpha_3 \right) u_1 + \right. \right. \\
& + \left(\int_{-h}^h \sigma'_{23} d\alpha_3 \right) w + \left(\int_{-h}^h \sigma'_{22} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \psi_2 + \left(\int_{-h}^h \sigma'_{21} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \psi_1 + \left(\int_{-h}^h \mu'_{21} d\alpha_3 \right) \Omega_1 + \\
& + \left. \left(\int_{-h}^h \mu'_{22} d\alpha_3 \right) \Omega_2 + \left(\int_{-h}^h \mu'_{23} d\alpha_3 \right) \Omega_3 + \left(\int_{-h}^h \mu'_{23} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \mathfrak{v} \right] A_1 d\alpha_1 + \quad (4.8) \\
& + \int_{l_2} \left[\left(\int_{-h}^h \sigma'_{11} d\alpha_3 \right) u_1 + \left(\int_{-h}^h \sigma'_{12} d\alpha_3 \right) u_2 + \left(\int_{-h}^h \sigma'_{13} d\alpha_3 \right) w + \left(\int_{-h}^h \sigma'_{11} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \psi_1 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_{-h}^h \overset{0}{\sigma'}_{12} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \Psi_2 + \left(\int_{-h}^h \overset{0}{\mu'}_{11} d\alpha_3 \right) \Omega_1 + \left(\int_{-h}^h \overset{0}{\mu'}_{12} d\alpha_3 \right) \Omega_2 + \left(\int_{-h}^h \overset{0}{\mu'}_{13} d\alpha_3 \right) \Omega_3 + \\
& + \left(\int_{-h}^h \overset{0}{\mu'}_{13} \alpha_3 d\alpha_3 \right) \mathfrak{I} \left[A_2 d\alpha_2 + \iint_{(S)} \left[(q_1^{++} + q_1^{--}) u_1 + (q_2^{++} + q_2^{--}) u_2 + (q_3^{++} + q_3^{--}) w + \right. \right. \\
& + h(q_1^{++} - q_1^{--}) \Psi_1 + h(q_2^{++} - q_2^{--}) \Psi_2 + (m_1^{++} + m_1^{--}) \Omega_1 + (m_2^{++} + m_2^{--}) \Omega_2 + \\
& + (m_3^{++} + m_3^{--}) \Omega_3 + h(m_3^{++} - m_3^{--}) \mathfrak{I} \left. \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \Bigg] = \iint_S \left\{ \left[\frac{2Eh}{1-\nu} \alpha_T (\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) T'_0 + \right. \right. \\
& + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_T \frac{\Delta T'}{h} (K_{11} + K_{22}) \Bigg] - \left[\frac{2Eh}{1-\nu} \alpha_T (\Gamma'_{11} + \Gamma'_{22}) T_0 + \right. \\
& + \left. \left. \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_T \frac{\Delta T}{h} (K'_{11} + K'_{22}) \right] \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{aligned}$$

На основании вариационного функционала (2.7) трёхмерной задачи микрополярной термоупругости, при помощи формул (3.1), (3.2), (3.6), (3.7), (3.9), (3.10), (3.11) получим вариационный функционал прикладной теории термоупругости микрополярных тонких оболочек:

$$\begin{aligned}
I_0 = & \iint_S \left\langle W_0 - \left[T_{11} \left[\Gamma_{11} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{w}{R_1} \right) \right] + \right. \right. \\
& + M_{11} \left[K_{11} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Psi_2 \right) \right] + T_{22} \left[\Gamma_{22} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Psi_1 \right) \right] + \\
& + S_{12} \left[\Gamma_{12} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 - \Omega_3 \right) \right] + M_{12} \left[K_{12} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Psi_1 - \mathfrak{I} \right) \right] + \\
& + S_{21} \left[\Gamma_{21} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 + \Omega_3 \right) \right] + M_{21} \left[K_{21} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Psi_2 + \mathfrak{I} \right) \right] + \\
& + N_{31} \left[\Gamma_{31} - (\Psi_1 - \Omega_2) \right] + N_{13} \left[\Gamma_{13} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{R_1} + \Omega_2 \right) \right] + \\
& + N_{32} \left[\Gamma_{32} - (\Psi_2 + \Omega_1) \right] + N_{23} \left[\Gamma_{23} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{R_2} - \Omega_1 \right) \right] + \\
& + L_{11} \left[k_{11} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_1} \right) \right] + \\
& + L_{22} \left[k_{22} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Omega_1 + \frac{\Omega_3}{R_1} \right) \right] + L_{33} (k_{33} - \mathfrak{I}) + \tag{4.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +L_{32} \left[k_{12} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_1 \right) \right] + L_{21} \left[k_{21} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Omega_2 \right) \right] + \\
& +L_{13} \left[k_{13} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_1} - \frac{\Omega_1}{R_1} \right) \right] + \Lambda_{13} \left[l_{13} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial \alpha_1} \right] + \\
& +L_{23} \left[k_{23} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\Omega_2}{R_2} \right) \right] + \Lambda_{23} \left[l_{23} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial \alpha_2} \right] \Bigg\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \iint_S \left(q_1^+ u_1 + q_1^+ h \psi_1 + q_2^+ u_2 + q_2^+ h \psi_2 + q_3^+ w + m_1^+ \Omega_1 + m_2^+ \Omega_2 + \right. \\
& + m_3^+ \Omega_3 + m_3^+ h \Big) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_S \left(q_1^- u_1 - q_1^- h \psi_1 + q_2^- u_2 - q_2^- h \psi_2 + q_3^- w + m_1^- \Omega_1 + m_2^- \Omega_2 + \right. \\
& + m_3^- \Omega_3 - m_3^- h \Big) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \int_{l_1'} \left(S_{21}^0 u_1 + T_{22}^0 u_2 + H_{21}^0 \psi_1 + M_{22}^0 \psi_2 + N_{23}^0 w + L_{21}^0 \Omega_1 + L_{22}^0 \Omega_2 + L_{23}^0 \Omega_3 + \Lambda_{23}^0 \mathfrak{t} \right) A_1 d\alpha_1 + \\
& + \int_{l_1''} \left[S_{21} (u_1 - u_1^0) + H_{21} (\psi_1 - \psi_1^0) + T_{22} (u_2 - u_2^0) + M_{22} (\psi_2 - \psi_2^0) + N_{23} (w - w^0) + \right. \\
& + L_{21} (\Omega_1 - \Omega_1^0) + L_{22} (\Omega_2 - \Omega_2^0) + L_{23} (\Omega_3 - \Omega_3^0) + \Lambda_{23} (\mathfrak{t} - \mathfrak{t}^0) \Big] A_1 d\alpha_1 + \\
& + \int_{l_2'} \left(T_{11}^0 u_1 + M_{11}^0 \psi_1 + S_{12}^0 u_2 + H_{12}^0 \psi_2 + N_{13}^0 w + L_{11}^0 \Omega_1 + L_{12}^0 \Omega_2 + L_{13}^0 \Omega_3 + \Lambda_{13}^0 \mathfrak{t} \right) A_2 d\alpha_2 + \\
& + \int_{l_2''} \left[T_{11} (u_1 - u_1^0) + M_{11} (\psi_1 - \psi_1^0) + S_{12} (u_2 - u_2^0) + H_{12} (\psi_2 - \psi_2^0) + \right. \\
& + N_{13} (w - w_0) + L_{11} (\Omega_1 - \Omega_1^0) + L_{12} (\Omega_2 - \Omega_2^0) + L_{13} (\Omega_3 - \Omega_3^0) + \Lambda_{13} (\mathfrak{t} - \mathfrak{t}^0) \Big] A_2 d\alpha_2.
\end{aligned}$$

Варьируя I_0 по всем независимым функциональным аргументам, из вариационного уравнения $\delta I_0 = 0$ получим основные уравнения и граничные условия ((3.12)-(3.13), (3.8), (3.15)) микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

Отметим, что с точки зрения приведённого утверждения, сформулированная выше вариационная задача соответствует наиболее общему вариационному принципу термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек. Поэтому, из последнего, как частный случай, будут следовать экстремальные принципы термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек типа принципов Лагранжа и Кастилиано. К каждому из полученных вариационных уравнений могут быть приложены прямые методы приближённого их решения (в частности, методы Ритца и Галеркина [18]), сводящие граничную задачу теории микрополярных упругих тонких оболочек к решению системы алгебраических уравнений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2с154.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Изд-во «Мир», 1964. 518с.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 564с.
3. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Изд-во «Вища школа», 1975. 216с.
4. Подстригач Я.С., Швац Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Изд-во «Наукова думка», 1978. 344с.
5. Швец Р.Н., Лунь Е.И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учётом инерции вращения и поперечного сдвига // Прикладная механика. 1971. Т.7. № 10. С.121-125.
6. Подстригач Я.С., Пелех Б.Л. Термоупругие задачи для оболочек и пластин с низкой сдвиговой жёсткостью // В сб.: «Тепловые напряжения в элементах конструкций». 1970. Вып.10. С.17-23.
7. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, Ets. «Pergamon Press», 1986. 383p.
8. Nowacki W. Couple-Stresses in the Theory of Thermoelasticity // Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids. IUTAM Symposia. Vienna, 1966. P.260-278.
9. Новацкий В. Моментные напряжения в термоупругости // Прикладная механика. 1967. Т.3. № 1. С.3-17.
10. Саркисян С.О. Краевые задачи несимметричной теории упругости для тонких пластин // Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147.
11. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. Вып.2. С.325-343.
12. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С.148-155.
13. Sargsyan S. H. General Theory of Micropolar Elastic Thin Shells// Journal of Physical Mesomechanics. 2012. V.15. №1-2. P.69-79.
14. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады РАН. 2011. Т.436. № 2. С.195-198.
15. Sargsyan S.H. Thermoelasticity of Thin Shells on the Basis of Asymmetrical Theory of Elasticity//Journal of Thermal Stresses. 2009. Vol.32. №8. P.791-818.
16. Саркисян С.О. Термоупругость микрополярных тонких оболочек// В сборнике научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 8-12 октября 2012. Цахкадзор. Армения. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2012. С.184-189.
17. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
18. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Изд-во «Наука», 1970. 512с.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович – Чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. Высшей математики Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.

Тел.: (093) 15 16 98

E-mail: s_sargsyan@yahoo.com; slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 14.10.2013

УДК 624.07:534.1

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ И НАБЛЮДЕНИИ УПРУГИХ
КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ**

Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: уравнение колебаний упругой балки, оптимальное управление, наблюдение, идеальный сигнал.

Keywords: equation of oscillations of elastic beam, optimal control, observation, ideal signal.

Բարսեղյան Վ.Ռ., Մովսիսյան Լ.Ա.

Հեծանի առաձգական տատանումների օպտիմալ ղեկավարման և դիտման մասին

Դիտարկված է ազատ եզրերով հենված առաձգական հեծանի տատանումների օպտիմալ ղեկավարման և դիտման խնդիրները, երբ առկա է առանցքային սեղմում, ընդ որում էյլերյան կրիտիկական արժեքը գերազանցող ուժերի համար: Օգտվելով Ֆուրյեի փոփոխականների անջատման եղանակից օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը բերված է յուրաքանչյուր հարմոնիկի համար համապատասխան խնդրին, որը լուծված է մոմենտների պրոբլեմով: Կառուցված է օպտիմալ ղեկավարող ադդեցությունը և ցույց է տրված համապատասխան շարքերի զուգամիտությունը: Լուծված է ժամանակի տրված պահին կատարված չափումներով հեծանի սկզբնական պայմանների վերականգնման խնդիրը:

Barseghyan V.R., Movsisyan L.A.

On optimal control and observation of the elastic vibrations of the beam

The problems of optimal control and observation of vibrations of an elastic beam with free supported ends are considered, when there is an axial compression, and, for the forces exceeding a critical value of Euler. Using the method of the variables separation, the problems of the optimal control are modified to solving the relevant problems, described by ordinary differential equations, which are solved by the moment problems. An explicit solution to the optimal control problem of an elastic beam is constructed and the convergence of obtained series is shown. The problem of recovering the initial conditions of the beam with measures done at given moment of times is solved.

Исследуются задачи оптимального управления и наблюдения колебаниями упругой балки со свободно опёртыми концами при наличии осевого сжатия, причём, для силы, превышающей критическое значение по Эйлеру. Методом разделения переменных решение задачи оптимального управления приводится к решению соответствующих задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые решаются с помощью проблем моментов. Построено явное решение задачи оптимального управления упругой балки и показана сходимость полученных рядов. Решена также задача восстановления начальных условий балки по измерениям в заданные моменты времени.

Введение. Теория управления и наблюдения систем с распределёнными параметрами, т.е. системами, которые описываются с помощью краевых задач для уравнений с частными производными, всё больше расширяет область приложения. Эта тематика не теряет своей актуальности из-за разнообразия распределённых систем, описывающих процессы самых различных областей физики, механики и т.д..

В [1-8] исследованы задачи оптимального управления упругих систем, когда управление осуществляется через нормальную нагрузку, приложенную по всей длине

объекта [1-5, 8] и задачи, когда управление осуществляется через граничные условия [6, 7].

В [1,2] обсуждаются вопросы восстановления неизвестных характеристик систем с распределёнными параметрами и приведена обширная библиография. В работах [9,10] для различных систем с распределёнными параметрами с учётом некоторой предыстории поступающего сигнала методом разделения переменных построены оптимальные операции, восстанавливающие состояния всех точек систем в любой момент времени. В [11] рассматриваются задачи наблюдения упругих колебаний балки с различными граничными условиями в отдельные фиксированные моменты времени.

В настоящей статье методом проблем моментов изучается задача оптимального управления упругой балкой со свободно опёртыми концами при наличии осевого сжатия, причём, для силы, превышающей критическое значение по Эйлеру (неустойчивое состояние). Для такой системы исследуется также задача наблюдения: по данным наблюдениям восстановить неизвестные начальные условия или предсказать состояние через заданное время.

1. Постановка задачи оптимального управления. Рассматривается однородная, упругая балка с шарнирно-опёртыми концами, на которую действуют распределённые воздействия (искомые), перпендикулярные к оси балки и осевая сила (сжимающая). Тогда малые колебания балки описываются уравнением

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$W(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.2)$$

и однородными граничными условиями

$$W(0, t) = W(l, t) = 0, \quad W_{xx}(0, t) = W_{xx}(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.3)$$

Обозначения общепринятые. В уравнении (1.1) функция $f(x, t)$ – управляющее воздействие.

Задача оптимального управления упругими колебаниями балки ставится следующим образом.

Задача 1. Среди возможных управлений $u(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ требуется найти оптимальное управление $u^0(x, t)$, переводящее систему из заданного начального состояния (1.2) в конечное состояние

$$W(x, T) = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.4)$$

и минимизирующее функционал

$$\int_0^T \int_0^l [u(x, t)]^2 dx dt, \quad (u(x, t) = \frac{1}{\rho S} f(x, t)) \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) имеет смысл «энергии», затраченной на управление данной колебательной системой.

Отсутствие в (1.1) нагрузки и однородных конечных условий (1.4) обусловлено только краткостью записи.

2. Решение задачи оптимального управления. При заданных граничных условиях (1.3) решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$W(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(t) \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad (2.1)$$

$$\text{где } W_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l W(x, t) \sin \lambda_k x dx.$$

Так как в промежутке $[0, l]$ система функций $\{\sin \lambda_k x\}, (k=1, 2, \dots)$ – ортогональная и полная, то функции $u(x, t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно разложить в ряд Фурье. Представив функции $u(x, t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в виде рядов Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x, \quad \text{где } u_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \lambda_k x dx; \quad (2.2)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \lambda_k x, \quad \text{где } \varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \lambda_k x dx; \quad (2.3)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin \lambda_k x, \quad \text{где } \psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (2.4)$$

и подставив значения $W(x, t)$ из (2.1) и $u(x, t)$ из (2.2) в уравнение (1.1), с учётом ортогональности функций $\{\sin \lambda_k x\}, k=1, 2, \dots$ в промежутке $[0, l]$, получим

$$\ddot{W}_k(t) + \omega_k^2 \left(1 - \frac{P}{P_k}\right) W_k(t) = u_k(t), \quad k=1, 2, \dots \quad (2.5)$$

где введены следующие обозначения:

$$\omega_k^2 = \frac{EJ}{\rho S} \lambda_k^4, \quad P_k = EJ \lambda_k^2$$

Таким образом, функции $W_k(t)$, $0 \leq t \leq T$ должны удовлетворять обыкновенным линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами со следующими начальными и конечными условиями (которые получены с учётом (2.1), (2.3), (2.4) из (1.2) и (1.4)):

$$W_k(0) = \varphi_k, \quad \dot{W}_k(0) = \psi_k \quad (2.6)$$

$$W_k(T) = 0, \quad \dot{W}_k(T) = 0 \quad (2.7)$$

Рассмотрим следующие случаи.

Пусть существует число m такое, что при всех $k < m$ имеет место $P > P_k$. В

этом случае имеем $1 - \frac{P}{P_k} < 0$. Обозначим

$$\Omega'_k = \omega_k (P / P_k - 1)^{1/2}$$

Для всех $k \geq m$ имеет место $P < P_k$, следовательно, $1 - \frac{P}{P_k} > 0$. Тогда

обозначим

$$\Omega_k = \omega_k (1 - P / P_k)^{1/2}$$

(При $P = P_m$ имеем $\Omega_m = 0$ – тривиальный случай).

Следовательно, уравнения (2.5) соответственно для $k < m$ и $k \geq m$ запишутся следующим образом:

$$\ddot{W}_k(t) - (\Omega'_k)^2 W_k(t) = u_k(t) \quad k < m \quad (2.8)$$

$$\ddot{W}_k(t) + \Omega_k^2 W_k(t) = u_k(t) \quad k \geq m \quad (2.9)$$

Отметим, что при $P < 0$ для любых $k = 1, \dots, m, \dots$ будем иметь $1 - \frac{P}{P_k} > 0$.

Общие решения уравнений (2.8) и (2.9) с начальными условиями (2.6) соответственно будут:

$$W_k(t) = \varphi_k \operatorname{ch} \Omega'_k t + \frac{1}{\Omega'_k} \psi_k \operatorname{sh} \Omega'_k t + \frac{1}{\Omega'_k} \int_0^t u_k(\tau) \operatorname{sh} \Omega'_k (t - \tau) d\tau$$

при $k = 1, \dots, m-1$, (2.10)

$$W_k(t) = \varphi_k \cos \Omega_k t + \frac{1}{\Omega_k} \psi_k \sin \Omega_k t + \frac{1}{\Omega_k} \int_0^t u_k(\tau) \sin \Omega_k (t - \tau) d\tau$$

при $k = m, m+1, \dots$ (2.11)

Таким образом, искомое решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) или (2.6), согласно (2.10) и (2.11), имеет вид:

$$W(x, t) = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\varphi_k \operatorname{ch} \Omega'_k t + \frac{1}{\Omega'_k} \psi_k \operatorname{sh} \Omega'_k t + \frac{1}{\Omega'_k} \int_0^t u_k(\tau) \operatorname{sh} \Omega'_k (t - \tau) d\tau \right) \sin \lambda_k x +$$

$$+ \sum_{k=m}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \Omega_k t + \frac{1}{\Omega_k} \psi_k \sin \Omega_k t + \frac{1}{\Omega_k} \int_0^t u_k(\tau) \sin \Omega_k (t - \tau) d\tau \right) \sin \lambda_k x \quad (2.12)$$

Первые два слагаемых в обеих скобках в выражении (2.12) характеризуют собой решение задачи о свободных колебаниях балки при заданных начальных условиях, а третьи слагаемые – о вынужденных колебаниях под действием внешней силы при нулевых начальных условиях.

Дифференцируя $W(x, t)$ в (2.12) по t и учитывая, что функции $W(x, t)$ и $W_t(x, t)$ соответственно должны удовлетворять условиям (1.4) или (2.7), и проведя некоторые преобразования, найдём, что функция $u_k(t)$ должна удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

при $k < m$

$$\int_0^T u_k(\tau) \operatorname{sh} \Omega'_k \tau d\tau = \Omega'_k \varphi_k, \quad \int_0^T u_k(\tau) \operatorname{ch} \Omega'_k \tau d\tau = -\psi_k, \quad (2.13)$$

а при $k \geq m$

$$\int_0^T u_k(\tau) \sin \Omega_k \tau d\tau = \Omega_k \varphi_k, \quad \int_0^T u_k(\tau) \cos \Omega_k \tau d\tau = -\psi_k. \quad (2.14)$$

Преобразуя минимизируемый функционал (1.5), получим:

$$\int_0^T \int_0^l [u(x, t)]^2 dx dt = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T u_k^2(\tau) d\tau.$$

Но так как $\int_0^T u_k^2(\tau) d\tau \geq 0$, минимизация функционала (1.5) равносильна

минимизации функционалов

$$\int_0^T u_k^2(\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.15)$$

Таким образом, для решения **задачи 1** получили задачу условного экстремума (2.13) и (2.14), минимизируемым функционалом (2.15) с соответствующими значениями k . Решим полученные вариационные задачи методом проблемы моментов [3, 12] при $k < m$ и $k \geq m$. Тогда для искомых оптимальных функций $u_k(t)$ получим:

при $k < m$

$$u_k^0(t) = A_k \operatorname{sh} \Omega'_k t - B_k \operatorname{ch} \Omega'_k t, \quad (2.16)$$

при $k \geq m$

$$u_k^0(t) = C_k \sin \Omega_k t + D_k \cos \Omega_k t, \quad (2.17)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_k &= X_k \left(\frac{\operatorname{sh}^2 \Omega'_k T}{\Omega'_k} + T \frac{\Omega'_k \Phi_k}{\Psi_k} + \frac{\Phi_k}{2\Psi_k} \operatorname{sh} 2\Omega'_k T \right), \\ B_k &= X_k \left(\frac{\operatorname{sh} 2\Omega'_k T}{2\Omega'_k} + \frac{\Phi_k}{\Psi_k} \operatorname{sh}^2 \Omega'_k T - T \right) \\ C_k &= Y_k \left(\frac{\sin^2 \Omega_k T}{\Omega_k} + T \frac{\Omega_k \Phi_k}{\Psi_k} + \frac{\Phi_k}{2\Psi_k} \sin 2\Omega_k T \right), \\ D_k &= Y_k \left(\frac{\sin 2\Omega_k T}{2\Omega_k} - \frac{\Phi_k}{\Psi_k} \sin^2 \Omega_k T - T \right) \\ X_k &= \frac{2\Psi_k}{\frac{\operatorname{sh}^2 \Omega'^2_k T}{\Omega'^2_k} - T^2}, \quad Y_k = \frac{2\Psi_k}{T^2 - \left(\frac{\sin 2\Omega_k T}{2\Omega_k} \right)^2} \end{aligned}$$

Теперь значение функционала (2.15) будет равно:

при $k < m$

$$\int_0^T (u_k^0(t))^2 dt = X_k \Psi_k \left\{ T \left[\left(\frac{\Omega'_k \Phi_k}{\Psi_k} \right)^2 - 1 \right] + \left[\left(\frac{\Omega'_k \Phi_k}{\Psi_k} \right)^2 + 1 \right] \frac{\operatorname{sh} 2\Omega'_k T}{2\Omega'_k} + 2 \frac{\Phi_k}{\Psi_k} \operatorname{sh}^2 \Omega'_k T \right\}$$

при $k \geq m$

$$\int_0^T (u_k^0(t))^2 dt = Y_k \Psi_k \left\{ T \left[1 + \left(\frac{\Omega_k \Phi_k}{\Psi_k} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\Omega_k \Phi_k}{\Psi_k} \right)^2 - 1 \right] \frac{\sin 2\Omega_k T}{2\Omega_k} + 2 \frac{\Phi_k}{\Psi_k} \sin^2 \Omega_k T \right\}$$

Полностью определены функции $u_k^0(t)$, ($k = 1, 2, \dots$), имеющие вид при $k < m$ (2.16), а при $k \geq m$ – (2.17). Подставляя выражение (2.16) и (2.17) в ряд (2.2), будем иметь:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t) \sin \lambda_k x &= \sum_{k=1}^{m-1} (A_k \operatorname{sh} \Omega_k' t - B_k \operatorname{ch} \Omega_k' t) \sin \lambda_k x + \\ &+ \sum_{k=m}^{\infty} (C_k \sin \Omega_k t + D_k \cos \Omega_k t) \sin \lambda_k x \end{aligned} \quad (2.18)$$

Докажем, что ряд (2.18) сходится, при этом сумма этого ряда $u^0(x, t)$ будет решением поставленной задачи, т.е. $u^0(x, t)$ – оптимальное управляющее воздействие. Для этой цели оценим общий член ряда (2.18). Учитывая, что в (2.18) первая сумма при $k < m$ конечна, приведём оценку общего члена второго ряда:

$$\left| u_k^0(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \right| \leq \frac{3/\lambda_k + 2T}{T^2 - 1/\lambda_k^2} (|\Psi_k| + \lambda_k |\Phi_k|). \quad (2.19)$$

Для этого ряда построили мажорирующий ряд, общий член которого есть правая часть неравенства (2.19).

Мы должны убедиться в непрерывности функции (2.12). Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда для $W(x, t)$, т.к. общий член этого ряда – непрерывная функция, а равномерно сходящийся ряд непрерывных функций определяет непрерывную функцию.

Надо также доказать равномерную сходимость рядов $W_t(x, t)$, $W_{tt}(x, t)$, $W_{xx}(x, t)$ и $W_{xxxx}(x, t)$, что необходимо, чтобы функция $W(x, t)$ удовлетворяла уравнению (1.1). Для этого достаточно доказать возможность двукратного почленного дифференцирования рядов для $W(x, t)$ по всем переменным и четырёхкратного дифференцирования по x , для чего, в свою очередь, достаточно доказать сходимость мажорантных рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 |\Phi_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 |\Psi_k|. \quad (2.20)$$

Для сходимости рядов (2.20) достаточно потребовать, чтобы:

- 1) начальное отклонение $\varphi(x)$ имело непрерывные производные до 4-ого порядка.
- 2) начальная скорость $\psi(x)$ имела непрерывные производные до 3-ого порядка и чтобы выполнялись следующие условия:

$$\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0$$

Эти условия являются достаточными условиями для сходимости указанных рядов.

3. Задача наблюдения за упругими колебаниями балки. Рассмотрим упругие колебания балки, которая описывается краевой задачей (1.1), (1.3), с предположением, что начальные и конечные условия не заданы.

Для восстановления колебательного процесса балки предположим, что имеется возможность измерения состояния балки в некоторые моменты времени. Пусть через измерительные устройства поступает идеальный сигнал, который связан с состоянием балки соотношением

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(x, t_1) \\ W_t(x, t_1) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где t_1 ($t_1 > 0$) – некоторый фиксированный момент времени, a_{ik} – заданные постоянные ($i, k = 1, 2$). Предполагается, что $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Отметим, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – результаты измерения, т.е. заданные функции.

Задача наблюдения за упругими колебаниями балки ставится следующим образом.

Задача 2. Требуется восстановить начальные условия процесса, т.е. функции $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(x)$ для колебательного процесса балки (1.1) с краевыми условиями (1.3) по заданным измерениям $y(x)$ (3.1).

Из формулы (3.1) имеем:

$$\begin{aligned} a_{11}W(x, t_1) + a_{12}W_t(x, t_1) &= y_1(x) \\ a_{21}W(x, t_1) + a_{22}W_t(x, t_1) &= y_2(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Формальное представление функции $W(x, t)$ и $W_t(x, t)$ через неизвестные начальные условия запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \sum_{j=1}^{m-1} \left(\varphi_j^0 \operatorname{ch} \Omega_j' t + \frac{1}{\Omega_j'} \psi_j^0 \operatorname{sh} \Omega_j' t + \frac{1}{\Omega_j'} \int_0^t u_j(\tau) \operatorname{sh} \Omega_j'(t-\tau) d\tau \right) \sin \lambda_j x + \\ &+ \sum_{k=m}^{\infty} \left(\varphi_k^0 \cos \Omega_k t + \frac{1}{\Omega_k} \psi_k^0 \sin \Omega_k t + \frac{1}{\Omega_k} \int_0^t u_k(\tau) \sin \Omega_k(t-\tau) d\tau \right) \sin \lambda_k x \\ W_t(x, t) &= \sum_{j=1}^{m-1} \left(\varphi_j^0 \Omega_j' \operatorname{sh} \Omega_j' t + \psi_j^0 \operatorname{ch} \Omega_j' t + \int_0^t u_j(\tau) \operatorname{ch} \Omega_j'(t-\tau) d\tau \right) \sin \lambda_j x + \\ &+ \sum_{k=m}^{\infty} \left(-\varphi_k^0 \Omega_k \sin \Omega_k t + \psi_k^0 \cos \Omega_k t + \int_0^t u_k(\tau) \cos \Omega_k(t-\tau) d\tau \right) \sin \lambda_k x \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\varphi_k^0 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi^0(x) \sin \lambda_k x dx; \quad \psi_k^0 = \frac{2}{l} \int_0^l \psi^0(x) \sin \lambda_k x dx; \quad k = 1, \dots, m, \dots$$

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ представим в виде рядов Фурье

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(i)} \sin \lambda_k x, \quad \text{где } y_k^{(i)} = \frac{2}{l} \int_0^l y_i(x) \sin \lambda_k x dx; \quad (i = 1, 2) \quad (3.4)$$

Для момента времени $t = t_1$ функции $W(x, t_1)$ и $W_t(x, t_1)$ из (3.3) и $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из (3.4), подставляя в (3.2), будем иметь следующие соотношения:

при $k < m$

$$\varphi_k^0 (a_{11} \text{ch} \Omega'_k t_1 + a_{12} \Omega'_k \text{sh} \Omega'_k t_1) + \psi_k^0 \left(\frac{a_{11}}{\Omega'_k} \text{sh} \Omega'_k t_1 + a_{12} \text{ch} \Omega'_k t_1 \right) +$$

$$+ \int_0^{t_1} u_k(\tau) \left(\frac{a_{11}}{\Omega'_k} \text{sh} \Omega'_k (t_1 - \tau) + a_{12} \text{ch} \Omega'_k (t_1 - \tau) \right) d\tau = y_k^{(1)},$$

$$\varphi_k^0 (a_{21} \text{ch} \Omega'_k t_1 + a_{22} \Omega'_k \text{sh} \Omega'_k t_1) + \psi_k^0 \left(\frac{a_{21}}{\Omega'_k} \text{sh} \Omega'_k t_1 + a_{22} \text{ch} \Omega'_k t_1 \right) +$$

$$+ \int_0^{t_1} u_k(\tau) \left(\frac{a_{21}}{\Omega'_k} \text{sh} \Omega'_k (t_1 - \tau) + a_{22} \text{ch} \Omega'_k (t_1 - \tau) \right) d\tau = y_k^{(2)};$$

при $k \geq m$

$$\varphi_k^0 (a_{11} \cos \Omega_k t_1 - a_{12} \Omega_k \sin \Omega_k t_1) + \psi_k^0 \left(\frac{a_{11}}{\Omega_k} \sin \Omega_k t_1 + a_{12} \cos \Omega_k t_1 \right) +$$

$$+ \int_0^{t_1} u_k(\tau) \left(\frac{a_{11}}{\Omega_k} \sin \Omega_k (t_1 - \tau) + a_{12} \cos \Omega_k (t_1 - \tau) \right) d\tau = y_k^{(1)}$$

$$\varphi_k^0 (a_{21} \cos \Omega_k t_1 - a_{22} \Omega_k \sin \Omega_k t_1) + \psi_k^0 \left(\frac{a_{21}}{\Omega_k} \sin \Omega_k t_1 + a_{22} \cos \Omega_k t_1 \right) +$$

$$+ \int_0^{t_1} u_k(\tau) \left(\frac{a_{21}}{\Omega_k} \sin \Omega_k (t_1 - \tau) + a_{22} \cos \Omega_k (t_1 - \tau) \right) d\tau = y_k^{(2)}.$$

При каждом значении k из вышеполученных равенств соответственно для $k < m$ и $k \geq m$ получим:

при $k < m$

$$\begin{aligned} \varphi_k^0 = & \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left[(a_{21}y_k^{(1)} - a_{11}y_k^{(2)}) \frac{\text{sh} \Omega'_k t_1}{\Omega'_k} + (a_{22}y_k^{(1)} - a_{12}y_k^{(2)}) \text{ch} \Omega'_k t_1 \right] + \\ & + \frac{1}{\Omega'_k} \int_0^{t_1} u_k(\tau) \text{sh} \Omega'_k \tau d\tau; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \psi_k^0 = & \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left[(a_{12}y_k^{(2)} - a_{22}y_k^{(1)}) \Omega'_k \text{sh} \Omega'_k t_1 + (a_{11}y_k^{(2)} - a_{21}y_k^{(1)}) \text{ch} \Omega'_k t_1 \right] - \\ & - \int_0^{t_1} u_k(\tau) \text{ch} \Omega'_k \tau d\tau, \end{aligned}$$

при $k \geq m$

$$\begin{aligned}
\varphi_k^0 &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left[(a_{21}y_k^{(1)} - a_{11}y_k^{(2)}) \frac{\sin \Omega_k t_1}{\Omega_k} + (a_{22}y_k^{(1)} - a_{12}y_k^{(2)}) \cos \Omega_k t_1 \right] + \\
&\quad + \frac{1}{\Omega_k} \int_0^{t_1} u_k(\tau) \sin \Omega_k \tau d\tau, \\
\psi_k^0 &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left[(a_{22}y_k^{(1)} - a_{12}y_k^{(2)}) \Omega_k \sin \Omega_k t_1 - (a_{21}y_k^{(1)} - a_{11}y_k^{(2)}) \cos \Omega_k t_1 \right] - \\
&\quad - \int_0^{t_1} u_k(\tau) \cos \Omega_k \tau d\tau.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Таким образом, искомые функции $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(x)$ находятся в виде рядов Фурье

$$\varphi^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^0 \sin \lambda_k x, \quad \psi^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^0 \sin \lambda_k x$$

Заметим, что при отсутствии внешних сил $u(x, t) = 0$, в случае $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, т.е. при $y_1(x) = W(x, t_1)$, $y_2(x) = W_t(x, t_1)$ из (3.5) и (3.6) соответственно будем иметь:

при $k < m$

$$\varphi_k^0 = y_k^{(1)} \operatorname{ch} \Omega'_k t_1 - \frac{1}{\Omega'_k} y_k^{(2)} \operatorname{sh} \Omega'_k t_1, \quad \psi_k^0 = y_k^{(2)} \operatorname{ch} \Omega'_k t_1 - \Omega'_k y_k^{(1)} \operatorname{sh} \Omega'_k t_1,$$

при $k \geq m$

$$\varphi_k^0 = y_k^{(1)} \cos \Omega_k t_1 - \frac{1}{\Omega_k} y_k^{(2)} \sin \Omega_k t_1, \quad \psi_k^0 = \Omega_k y_k^{(1)} \sin \Omega_k t_1 + y_k^{(2)} \cos \Omega_k t_1.$$

Заключение. Методом разделения переменных решения задачи оптимального управления упругой балкой со свободно опёртыми концами при наличии осевого сжатия и задачи восстановления неизвестных начальных условий (измеряя состояния балки в некоторые моменты времени) приводятся к решению соответствующих задач бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Построено явное решение задачи оптимального управления упругой балкой и показана сходимость полученных рядов. Решена задача восстановления начальных условий балки по измерениям в заданные моменты времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Короткий А.И. Обратные задачи динамики управляемых систем с распределёнными параметрами // Изв. ВУЗов. Математика. 1995. № 11. С.101–124.
2. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Синтез оптимального управления в системах с распределёнными параметрами при неполном измерении состояния (обзор) // Изв. АН СССР. Кибернетика. 1983. № 2. С.123–136.
3. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1975. 568с.
4. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176с.

5. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем // МТТ. № 6. 1999. С.146-153.
6. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи математических наук. 2005. Вып. 6(366). С.89-114.
7. Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению колебанием упругих систем // Прикладная механика. 2012. Т.48. №2. С.137-142.
8. Барсегян В.Р. Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях // Уч. записки ЕГУ. 1998. № 1(188). С.24-29.
9. Барсегян В.Р. Задача оптимального восстановления состояния систем с распределенными параметрами при наличии погрешностей в неполных измерениях // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. № 1. С.70–75.
10. Barseguyan V. R. The Problem for Optimal Restoration of the State of the System Described by an Integro-Differential Equation in the Presence of Errors in Measurements // Automation and Remote Control. 2012. Vol.73. № 8. P.1365-1370.
11. Егоров А.И. О наблюдаемости упругих колебаний балки // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т.48. № 6. С.967-973.
12. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.

Сведения об авторах:

Барсегян Вая Рафаелович – доктор физ. мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор ЕГУ, факультет математики и механики.

Тел.: (10) 52 36 40; **E-mail:** barseghyan@sci.am

Мовсисян Лаврентий Александрович – доктор техн.наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: Ереван, Армения, пр. Маршала Баграмяна 24/2

Поступила в редакцию 20.01.2014

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Սուրեն Մանուկի Մխիթարյան Ծննդյան 75-ամյակի առթիվ	3
Գասպարյան Ա.Վ., Դավթյան Զ.Ա. Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ կամայական վերջավոր թվով առաձգական սեպերից բաղկացած փաթեթի տեսքով կտոր առ կտոր համասեռ կոմպոզիտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի մասին.....	5
Բելուֆեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ. Ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին, որի ազատ եզրին գերձայնային գազի հոսքը վրավազք է կատարում	14
Դանոյան Զ.Ն., Աթոյան Լ.Հ., Մանուկյան Գ. Ա., Դանոյան Ն.Զ. Բլոխ-Ֆլոբեի տիպի սպինային ալիքները պարբերական ֆերոմագնիսական շերտավոր կառուցվածքում	45
Սարգսյան Ս.Հ. Միկրոպոլյար բարակ թաղանթների ջերմաառաձգականության տեսության մի քանի ընդհանուր հարցեր	52
Բարսեղյան Վ.Ռ., Մովսիսյան Լ.Ա. Հեծանի առաձգական տատանումների օպտիմալ դեկավարման և դիտման մասին	69

СОДЕРЖАНИЕ

Мхитарян Сурен Манукович – К 75-летию со дня рождения.....	3
Гаспарян А.В., Давтян З.А. О напряжённом состоянии кусочно-однородного композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих клиньев при антиплоской деформации	5
Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край	14
Даноян З.Н., Атоян Л.А., Манукян Г.А., Даноян Н.З. Спиновые волны типа Блоха-Флоке в периодической ферромагнитной слоистой структуре.....	45
Саркисян С.О. Некоторые общие вопросы теории термоупругости микрополярных тонких оболочек	52
Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А. Об оптимальном управлении и наблюдении упругих колебаний балки	69

CONTENTS

Suren M. Mkhitaryan – 75-th Anniversary	3
Gasparyan A.V., Davtyan Z.A. On Stress-Strain State of a Non-Homogeneous Composite in Form of a Package Composed of an Arbitrary Finite Number of Elastic Wedges under Anti-Plain Deformation.....	5
Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge.....	14
Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Manoukyan G.A., Danoyan N.Z. Bloch-Floquet type waves in periodic ferromagnetic layered structure	45
Sargsyan S.H. On Some General Questions of Theory of Thermoelasticity of Micropolar Thin Shells	52
Barseghyan V.R., Movsisyan L.A. On optimal control and observation of the elastic vibrations of the beam	69

Заказ № 517.
Тираж 150.
Сдано в производство 03.06.2014г.
Формат 70 x 100¹/₁₆ . 5 печ. л.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН Армении
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24