

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՐՄԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2014



АРТУР ЯКОВЛЕВИЧ САГОМОНЯН

(К 100-летию со дня рождения)

23-го марта 2014 года исполняется 100 лет со дня рождения заслуженного деятеля науки РСФСР, доктора физико-математических наук, профессора кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ, заслуженного профессора Артура Яковлевича Сагомоняна.

А. Я. Сагомонян родился 23 марта 1914 года в г. Андижане в семье железнодорожного инженера-строителя Акопа Михайловича Сагомоняна (родом из села Бердашен Нагорно-Карабахской республики).

В 1939 году с отличием окончил механико-математический факультет МГУ, продолжил учёбу в аспирантуре НИИ механики МГУ. В 1941 г. вступил в ряды действующей армии, дважды был ранен. После победы в Великой Отечественной войне 1941-1945гг. вернулся в университет. В 1947г. окончил аспирантуру, защитил кандидатскую диссертацию и начал работать на кафедре аэромеханики мех.-мат. факультета. Одновременно Артур Яковлевич был назначен заместителем директора НИИ механики по научной работе. В 1949 г. получил звание доцента. В 1954 А. Я. Сагомонян защитил диссертацию на степень доктора физико-математических наук, а в 1955 году

получил звание профессора кафедры газовой и волновой динамики мех-мат. факультета МГУ.

Артур Яковлевич Сагомоян является крупным учёным-механиком. Его научное творчество было посвящено исследованиям в различных областях механики сплошных сред. Научные труды Артура Яковлевича были широко известны как в СССР, так и за рубежом, и нашли большой положительный отклик. Первые работы А. Я. Сагомояна опубликованы в конце 40-х годов 20-го столетия и посвящены применению интегральных преобразований при решении задач сверхзвукового обтекания тел газом. В дальнейшем основное внимание в своих исследованиях А. Я. Сагомоян уделял нестационарным задачам движения сплошной среды в лиейной и нелинейной постановках. Его исследования задач отражения и дифракции ударных и звуковых волн на поверхностях твёрдых тел, проникания тел в сжимаемую жидкость, грунты, бетон и другие деформируемые твёрдые среды, а также задач пробивания металлических преград имеют фундаментальное научное и практическое значение. Они способствовали решению современных технических проблем, нашли широкое применение в инженерной практике.

Последние научные работы Артура Яковлевича были посвящены проблемам моделирования, прогнозирования и предупреждения водной эрозии почв и её отрицательных экологических последствий. Разработана теория противозерозионной стойкости почв и методы её практического приложения. Создана новая полуэмпирическая модель ирригационной эрозии почв при поливе по бороздам и на её основе методы оценки и картографирования опасности ирригационной эрозии почв, расчёта элементов почвозащитной технологии полива по бороздам, а также их конкретное значение для сероземов Средней Азии. С использованием методов механики многофазных сред разработано новое экспериментально-теоретическое уравнение отрыва частиц почвы потоком воды и совместным действием потока воды и капель дождя (закон массообмена), основными элементами которого являются параметр массообмена и энергетический параметр, связанные экспоненциальной зависимостью. Проведена верификация этого закона, применительно к дождевой эрозии почв, по результатам полевых и лабораторных опытов. Подтверждена применимость закона массообмена для случая взаимодействия оттаивающей почвы с потоком воды при снеготаянии.

А. Я. Сагомоян – автор двухсот научных работ, в том числе восьми монографий и учебных пособий.

Артур Яковлевич систематически вёл большую педагогическую работу. На механико-математическом факультете он читал лекции по газовой

динамике, распространению волн напряжения в сплошных средах и другие курсы. Им подготовлено большое число научных работников. Многие его ученики успешно работают в различных отраслевых научно-исследовательских институтах, конструкторских бюро и высших учебных заведениях. Систематическую помощь оказывал инженерам, в том числе и военным инженерам, стремящимся повысить свою научную квалификацию. Под его руководством многие инженеры, работающие в промышленности, стали кандидатами технических наук.

Неоценим вклад Артура Яковлевича в дело развития гидромеханики и газовой динамики в Армении, где в различных научных и учебных заведениях успешно трудятся его ученики. Долгие годы Артур Яковлевич читал лекции на механико-математическом факультете Ереванского государственного университета и проводил научные семинары как в Институте механики НАН Армении, так и на мех.-мат. факультете ЕГУ, которые во многом способствовали подготовке специалистов-механиков высокой квалификации. Он был большим патриотом своей Родины и внимательно следил за развитием науки и техники и всячески способствовал этому. Артур Яковлевич часто посещал Армению, НКР, систематически приезжал в своё родное село Бердашен Мартунинского района НКР, после бомбежки отремонтировал отцовский дом и жил там. Во время Арцахского движения Артур Яковлевич, используя свой большой авторитет в МГУ и во всей Москве, всячески старался объяснить и помочь людям понять суть вопроса и добивался правдивого решения Арцахской проблемы.

За боевые заслуги в Великой Отечественной войне Артур Яковлевич был награждён орденами Красной Звезды, Отечественной войны I и II степени, а также многочисленными медалями. За научную и педагогическую работу он был награждён орденом «Знак Почета», почётной грамотой Президиума Верховного Совета РСФСР. Он неоднократно избирался секретарем партбюро факультета, членом бюро парткома МГУ, заместителем секретаря парткома МГУ. 18 августа 2001 года на 88-м году жизни научно-педагогическая общественность потеряла великого учёного и патриота Родины Артура Яковлевича Сагомояна.

УДК 539.3

**О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ
НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УЧЁТОМ СИЛ
В ЕЁ СРЕДИННОЙ ЛИНИИ**

Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шемян Л.А.

Ключевые слова: изгиб, балка, упругость, полуплоскость, осевые силы, давление балки.
Key words: bending, beam, elasticity, half-plane, the axial force, the pressure beams.

Ամիրբեկյան Ա.Ն., Մկրտչյան Մ.Ս., Մխիթարյան Ս.Մ., Շեմյան Լ.Ա.
**Առանցքային ուժերի հաշվառմամբ առաձգական կիսահարթության վրա
վերջավոր երկարության հեծանի ծռման մասին**

Մ.Պ. Տիմոշենկոյի ծռման մոդելի շրջանակներում դիտարկվում է կիսահարթության տեսքով առաձգական հիմքի վրա դրված վերջավոր երկարության հեծանի ծռման կոնտակտային խնդիրը, որտեղ ուղղաձիգ ուժերից բացի առանցքային սեղմող կամ ձգող ուժերը նույնպես ազդում են հեծանի ձկվածքի վրա:

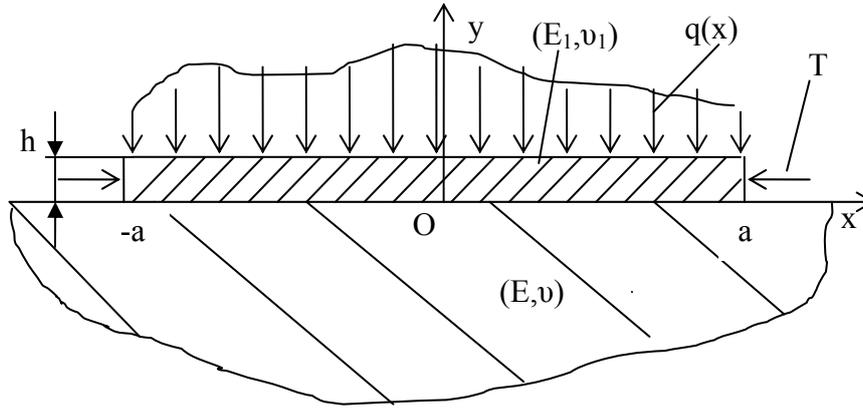
Amirbekyan A.N., Mkrtychyan M.S., Mkhitaryan S.M., Shekman L.A.
**About contact problem of bending of a beam of finite length on an elastic half-plane
in view of forces in its mid-line**

The contact problem of the bending of the beam of finite length on elastic foundation in the form of a half-plane being in the plane strain conditions, the generalized model of the bend in the framework of S.P. Timoshenko, where in addition to vertical forces axial compressive or tensile forces also affect the deflection of the beam is considered.

Рассматривается контактная задача об изгибе балки конечной длины на упругом основании в виде полуплоскости, находящейся в условиях плоской деформации, по обобщенной модели изгиба в рамках теории С.П. Тимошенко, где помимо вертикальных сил, осевые сжимающие или растягивающие силы также влияют на прогибы балки.

Обширные классы задач об изгибе тонкостенных элементов в виде балок, плит, оболочек на деформируемых основаниях различных форм и в рамках различных физических допущений, тесно примыкающие к классическим контактным задачам теории упругости, ввиду их актуальности и практической значимости стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на монографии [1-3], на обзорную статью [4] и на коллективную монографию [5]. Отметим также работы [6,7]. В работе [8] по классической теории изгиба балок методом сингулярных интегральных уравнений (СИУ) в сочетании с известным численно-аналитическим методом решения СИУ [9-11] построено решение задачи об изгибе балки конечной длины на деформируемом основании в виде упругой полуплоскости. В [12] эта задача вкратце рассмотрена в рамках теории изгиба балок и пластин С.П. Тимошенко [13,14], где вместе с влиянием вертикальных сил учитывается также влияние осевых сжимающих или растягивающих сил на прогибы балки. В настоящей работе продолжается исследование этой задачи, где подробнее излагается постановка задачи, приводятся результаты численного анализа основных механических характеристик задачи, выясняется эффект влияния на них сил на срединной линии балки.

1. Пусть балка, отнесённая к правой прямоугольной системе координат Oxy , длины $2a$, высоты h , модуля упругости E_1 и коэффициента Пуассона ν_1 под действием распределённых вертикальных сил интенсивности $q(x)$ изгибается и вдавливается в нижнюю упругую полуплоскость с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν (фиг. 1).



Фиг. 1

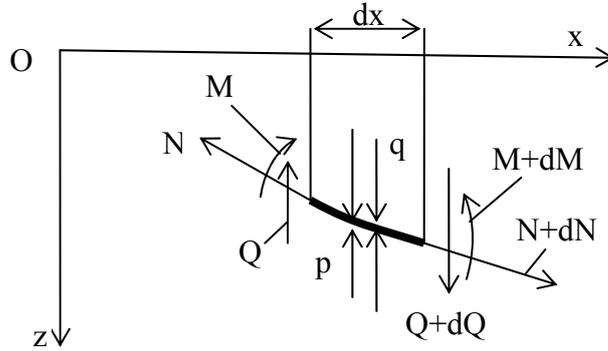
Предполагается, что упругая полуплоскость находится в условиях плоской деформации. Относительно балки предполагается, что она на упругом основании в виде полуплоскости $y < 0$ изгибается по модели С.П.Тимошенко [13,14], где помимо влияния распределённых вертикальных поперечных сил интенсивности $q(x)$ на прогибы балки осевые сжимающие силы постоянной величины T , действующие вдоль срединной линии балки, также влияют на эти прогибы. При этих физических допущениях требуется определить распределение нормальных контактных напряжений $\sigma_y|_{y=0} = -p(x)$ ($-a < x < a$) на отрезке контакта балки с упругой полуплоскостью, а также изгибающие моменты $M(x)$ и поперечные силы $Q(x)$ в сечениях балки по изложенной выше модели.

2. Рассмотрим равновесие малого элемента, находящегося под действием распределённых поперечных сил q , p и некоторой осевой растягивающей силы N балки, вырезанного из неё двумя параллельными плоскостями, перпендикулярные к оси Ox и отделены друг от друга на расстояние dx (фиг. 2).

Уравнения равновесия этого малого элемента балки, с учётом возникающих вследствие изгиба балки проекции сил N и $N + dN$ на оси Oz , будут:

$$\begin{aligned}
 -N + (N + dN) &= 0, \\
 -N \frac{dw}{dx} - Q + (q - p)dx + (Q + dQ) + (N + dN) \left(\frac{dw}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} dx \right) &= 0, \\
 -M - (q - p)dx \cdot \frac{dx}{2} + M + dM - (Q + dQ)dx &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где w – перемещения точек балки в направлении оси Oz . Отсюда, пренебрегая малыми величинами выше первого порядка малости, получим



Фиг. 2

$$N = \text{const}, \quad q - p + \frac{dQ}{dx} + N \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \frac{dM}{dx} - Q = 0. \quad (2)$$

Далее, учитывая соотношение $M = -D d^2 w / dx^2$ [14], где

$D = E_1 h^3 / 12 (1 - \nu_1^2)$ – жёсткость балки на изгиб, E_1 – её модуль упругости, ν_1 – коэффициент Пуассона, h – высота балки, получим

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - N \frac{d^2 w}{dx^2} = q(x) - p(x), \quad (3)$$

которое является дифференциальным уравнением изгиба балки при совместном воздействии поперечных сил и растягивающих сил в её срединной линии. Оно совпадает с формулой 217 на стр. 422 в [14], когда пластинка находится в условиях плоской деформации с базовой плоскостью Oxz .

В случае, когда балка сжимается осевой силой T (фиг. 1), то принимая в (3) $T = -N$ и $v_1 = w$, будем иметь

$$D \frac{d^4 v_1}{dx^4} + T \frac{d^2 v_1}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (4)$$

где $v_1 = v_1(x)$ – смещения точек балки в направлении оси Oy (фиг.1).

Дифференциальное уравнение изгиба балки (4) рассматривается при следующих граничных условиях:

$$M(x) \Big|_{x=\pm a} = D \frac{d^2 v_1}{dx^2} \Big|_{x=\pm a} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 v_1}{dx^2} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (5)$$

указывающих на то, что в концевых точках балки $x = \pm a$ отсутствуют изгибающие моменты $M(x)$. При этом условия равновесия балки имеют вид

$$\int_{-a}^a [p(x) - q(x)] dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^a p(x) dx = \int_{-a}^a q(x) dx = P, \quad (6a)$$

$$\int_{-a}^a x[p(x) - q(x)] dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^a xp(x) dx = \int_{-a}^a xq(x) dx = M. \quad (6b)$$

3. Приступим к решению дифференциального уравнения (4) при условиях (5). С этой целью сначала обе части уравнения (4) разделим на D и введём обозначения

$$k = \sqrt{T/D}, \quad g(x) = [p(x) - q(x)]/D, \quad y = d^2 v_1 / dx^2. \quad (7)$$

В результате, придём к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = g(x), \quad (-a < x < a). \quad (8)$$

Общее решение дифференциального уравнения (8) с учётом обозначения из (7) представляется формулой

$$y \equiv \frac{d^2 v_1}{dx^2} = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) g(s) ds, \quad (-a < x < a). \quad (9)$$

Отсюда

$$\frac{d^3 v_1}{dx^3} = -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos[k(x-s)] \operatorname{sign}(x-s) g(s) ds. \quad (10)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из (9) при помощи граничных условий (5). В результате, относительно них придём к простой системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 \cos ka + C_2 \sin ka = -\frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin[k(a-s)] g(s) ds, \\ C_1 \cos ka - C_2 \sin ka = -\frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin[k(a+s)] g(s) ds, \end{cases}$$

решение которой имеет вид:

$$C_1 = -\frac{\operatorname{tg}(ka)}{2k} \int_{-a}^a \cos(ks) g(s) ds, \quad C_2 = \frac{\operatorname{ctg}(ka)}{2k} \int_{-a}^a \sin(ks) g(s) ds. \quad (11)$$

Теперь выражения C_1 и C_2 из (11) подставим в (9) и (10). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{dx^2} &= \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a (\cos^2 ka \sin kx \sin ks - \sin^2 ka \cos kx \cos ks) g(s) ds + \\ &+ \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) g(s) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 v_1}{dx^3} &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a [\operatorname{tg}(ka) \sin(kx) \cos(ks) + \operatorname{ctg}(ka) \cos(kx) \sin(ks)] g(s) ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos[k(x-s)] \operatorname{sign}(x-s) g(s) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, исходя из (2) и (13), проверим условия

$$Q(x) \Big|_{x=\pm a} = \frac{dM}{dx} \Big|_{x=\pm a} = D \frac{d^3 v_1}{dx^3} \Big|_{x=\pm a} = 0 \Rightarrow \frac{d^3 v_1}{dx^3} \Big|_{x=\pm a} = 0,$$

указывающие на отсутствие поперечных сил $Q(x)$ в концевых точках балки. Будем иметь

$$\left. \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right|_{x=\pm a} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left(\frac{\sin ks}{\sin ka} \pm \frac{\cos ks}{\cos ka} \right) g(s) ds = \pm \frac{1}{\sin 2ka} \int_{-a}^a \sin[k(a \pm s)] g(s) ds. \quad (14)$$

Отсюда видно, что записанные условия отсутствия поперечных сил $Q(\pm a)$, вообще, не удовлетворяются.

Но если в (14) совершить предельный переход $k \rightarrow 0$ и принять во внимание условия равновесия балки (6а)-(6б) и обозначение $g(x)$ из (7), то

$$\left. \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right|_{x=\pm a} = \pm \int_{-a}^a \frac{(a \pm s)}{2a} g(s) ds = \pm \frac{1}{2} \int_{-a}^a g(s) ds + \frac{1}{2a} \int_{-a}^a s g(s) ds = 0,$$

и, следовательно, в классической теории изгиба балки условия $Q(\pm a) = 0$, как следствия условий равновесия балки, сразу выполняются.

Если же постоянные C_1 и C_2 определить из условий $Q(\pm a) = 0$, то при помощи (10) придём к системе уравнений

$$\begin{cases} -C_1 k \sin ka + C_2 k \cos ka = -\frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos(k(a-s)) g(s) ds, \\ C_1 k \sin ka + C_2 k \cos ka = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos(k(a+s)) g(s) ds, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = \frac{\text{ctg}(ka)}{2k} \int_{-a}^a \cos(ks) g(s) ds, \quad C_2 = -\frac{\text{tg}(ka)}{2k} \int_{-a}^a \sin(ks) g(s) ds. \quad (15)$$

Подставляя выражения C_1 и C_2 из (15) в (9), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{dx^2} &= \frac{1}{2k} \int_{-a}^a [\text{ctg}(ka) \cos(kx) \cos(ks) - \text{tg}(ka) \sin(kx) \sin(ks)] g(s) ds + \\ &+ \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) g(s) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) легко вытекает, что

$$\left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=\pm a} = \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a \cos(k(a \pm s)) g(s) ds. \quad (17)$$

Формулу (17) преобразуем следующим образом:

$$\left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=\pm a} = \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a \{\cos[k(a \pm s)] - 1\} g(s) ds + \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a g(s) ds$$

и используем условие равновесия балки (6а) в виде

$$\int_{-a}^a g(s) ds = 0.$$

В результате,

$$\left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=\pm a} = -\frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a \{1 - \cos[k(a \pm s)]\} g(s) ds. \quad (18)$$

Откуда при предельном переходе $k \rightarrow 0$ получим

$$\left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=\pm a} = -\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{(a \pm s)^2}{2} g(s) ds = -\frac{1}{4a} \int_{-a}^a s^2 g(s) ds, \quad (19)$$

Итак, при $k \rightarrow 0$

$$\left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=a} = \left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=-a} = -\frac{1}{4a} \int_{-a}^a s^2 g(s) ds,$$

т.е. условия $M(\pm a) = 0$ классической теории изгиба балки не выполняются. Поэтому дифференциальное уравнение (4) изгиба балки по теории С.П. Тимошенко будем рассматривать только при условиях (5), так как решение этой граничной задачи при предельном переходе $k \rightarrow 0$ переходит в известное решение классической теории изгиба балки и, следовательно, при достаточно малых k , при которых и здесь будет, в основном, рассматриваться контактная задача об изгибе балки на упругом основании, величины $Q(\pm a)$ сколь угодно малы. При более совершенных, но довольно непростых, моделях изгиба балки [15], можно достичь точного удовлетворения обеих пар граничных условий $M(\pm a) = 0$; $Q(\pm a) = 0$.

Отметим, что в случае осевых растягивающих сил T во всех предыдущих формулах следует параметр k формально заменить на ik , где i – мнимая единица, постоянную C_1 оставить без изменения, постоянную C_2 заменить на постоянную $-iC_2$ и везде от тригонометрических функций перейти к соответствующим гиперболическим функциям.

Далее, уравнение (9) ещё раз проинтегрируя, получим

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} = C_1 \frac{\sin kx}{k} + C_2 \frac{1 - \cos kx}{k} + \\ + \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \{1 - \cos[k(x-s)]\} \text{sign}(x-s) g(s) ds + C, \quad (-a \leq x \leq a). \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь выражения постоянных C_1 и C_2 из (11) подставляем в (20). В результате,

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a H(x, s) g(s) ds + C, \quad (-a \leq x \leq a) \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} H(x, s) = \{1 - \cos[k(x-s)]\} \text{sign}(x-s) + \\ + \text{ctg}(ka) [1 - \cos(kx)] \sin(ks) - \text{tg}(ka) \sin(kx) \cos(ks). \end{aligned}$$

4. Для вывода определяющих уравнений описанной контактной задачи сначала запишем выражение вертикальных перемещений $v(x)$ граничных точек нижней упругой полуплоскости [16]

$$v(x) = -\frac{2(1-v^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) ds + C_*, \quad (-\infty < x < \infty). \quad (22)$$

Далее запишем условие контакта балки и упругого основания $v(x) = v_1(x)$, $(-a < x < a)$, которое после дифференцирования принимает вид

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_1}{dx}, \quad (-a < x < a). \quad (23)$$

Теперь в условие контакта (23) подставим выражения (21) и (22). Будем иметь следующее сингулярное интегральное уравнение (СИУ):

$$\frac{2(1-v^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{s-x} = -\frac{1}{2k^2 D} \int_{-a}^a H(x,s) [p(s) - q(s)] ds + C, \quad (-a < x < a) \quad (24)$$

решение которого должно удовлетворять условиям равновесия балки (6a)-(6b).

В СИУ (24) введём безразмерные координаты и величины

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a, \quad \varphi(\xi) = p(a\xi)/E, \quad h(\xi) = q(a\xi)/E \quad (-1 < \xi, \eta < 1)$$

$$\chi = ka, \quad \lambda = \frac{3\pi E}{(1-v^2)\chi^2 E_1} \left(\frac{a}{h}\right)^3, \quad \gamma = \frac{C}{2(1-v^2)}. \quad (25)$$

Тогда в безразмерных величинах СИУ (24) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 K(\xi, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{\lambda}{\pi} f(\xi) + \gamma, \quad (26)$$

где введены обозначения

$$K(\xi, \eta) = \{1 - \cos[\chi(\xi - \eta)]\} \operatorname{sign}(\xi - \eta) + \operatorname{ctg}\chi [1 - \cos(\chi\xi)] \sin(\chi\eta) - \operatorname{tg}\chi \sin(\chi\xi) \cos(\chi\eta), \quad f(\xi) = \int_{-1}^1 K(\xi, \eta) h(\eta) d\eta. \quad (27)$$

В безразмерных величинах запишем также условия равновесия балки (6a)-(6b):

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi = P_0, \quad \left(P_0 = \frac{P}{aE}\right), \quad \int_{-1}^1 \xi \varphi(\xi) d\xi = M_0, \quad \left(M_0 = \frac{M}{a^2 E}\right). \quad (28)$$

Таким образом, определяющее СИУ (26) должно рассматриваться при условиях (28).

$$\text{Отметим, что полагая } \lambda = \mu/\chi^2, \quad \mu = \left[3\pi E/(1-v^2) E_1\right] \cdot (a/h)^3,$$

определяющее СИУ (26) можем записать в форме

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{\mu}{\pi\chi^2} \int_{-1}^1 K(\xi, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{\mu}{\pi\chi^2} f(\xi) + \gamma$$

откуда посредством предельного перехода $\chi \rightarrow 0$ получается определяющее СИУ поставленной задачи по обычной классической теории изгиба балки [12].

Далее СИУ (26) при условиях (29) известным численно-аналитическим методом [9-11] сведём к системе линейных алгебраических уравнений. С этой целью положим

$$\varphi(\xi) = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (-1 < \xi < 1), \quad (29)$$

где функция $\Phi(\xi)$ определена на отрезке $[-1 < \xi < 1]$ и принадлежит гёльдеровскому классу функций. В результате, придём к следующей системе уравнений:

$$\sum_{m=1}^N \frac{1}{N} \left[\frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \lambda K(\xi_r, \eta_m) \right] \Phi(\eta_m) = \frac{\lambda}{\pi} f(\xi_r) + \gamma \quad (r = 1, 2, \dots, N-1), \quad (30)$$

$$\frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N \Phi(\eta_m) = P_0, \quad \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N \eta_m \Phi(\eta_m) = M_0.$$

Система (30) состоит из $(N+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно $(N+1)$ неизвестных $\Phi(\eta_1), \Phi(\eta_2), \dots, \Phi(\eta_N), \gamma$, где

$$\eta_m = \cos\left(\frac{2m-1}{2N}\pi\right) \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad \xi_r = \cos\left(\frac{\pi r}{N}\right) \quad (r = 1, 2, \dots, N-1)$$

– известные чебышевские узлы.

Чтобы преобразовать систему (30) к каноническому виду, положим

$$X_m = \begin{cases} \Phi(\eta_m) & (m = 1, 2, \dots, N); \\ \gamma & (m = N+1); \end{cases} \quad (31)$$

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[\frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \lambda K(\xi_r, \eta_m) \right] & (r = 1, 2, \dots, N-1; m = 1, 2, \dots, N); \\ -1 & (r = 1, 2, \dots, N-1; m = N+1); \\ \pi/N & (r = N; m = 1, 2, \dots, N); \\ 0 & (r = N; m = N+1); \\ \pi \eta_m / N & (r = N+1; m = 1, 2, \dots, N); \\ 0 & (r = N+1; m = N+1); \end{cases} \quad (32)$$

$$a_r = \begin{cases} \frac{\lambda}{\pi} f(\xi_r) & (r = 1, 2, \dots, N-1); \\ P_0, & (r = N); \\ M_0, & (r = N+1). \end{cases} \quad (33)$$

Тогда система (30) запишется в виде

$$\sum_{m=1}^{N+1} K_{rm} X_m = a_r \quad (r = 1, 2, \dots, N+1). \quad (34)$$

Теперь решение системы (34) при правой части в виде вектора-столбца

$$a_r^{(1)} = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \lambda f(\xi_r), & (r = 1, 2, \dots, N-1) \\ 0, & (r = N, N+1) \end{cases}$$

обозначим через $X_m^{(1)}$ ($m = 1, 2, \dots, N+1$), решение системы (34) при правой части в виде вектора-столбца

$$a_r^{(2)} = \begin{cases} 0, & (r = 1, 2, \dots, N-1) \\ 1, & (r = N) \\ 0, & (r = N+1) \end{cases}$$

обозначим через $X_m^{(2)}$ ($m = 1, 2, \dots, N+1$), а при правой части – опять в виде вектора-столбца

$$a_r^{(3)} = \begin{cases} 0, & (r = 1, 2, \dots, N) \\ 1, & (r = N+1) \end{cases}$$

обозначим через $X_m^{(3)}$ ($m = 1, 2, \dots, N+1$). Тогда решение системы (34) можем представить в форме

$$X_m = X_m^{(1)} + P_0 X_m^{(2)} + M_0 X_m^{(3)}, \quad (m = 1, 2, \dots, N+1). \quad (35)$$

Обратимся к вычислению силовых факторов – изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных сил $Q(x)$ в сечениях балки x ($-a < x < a$). С этой целью дифференциальное уравнение изгиба балки (4) запишем в виде

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + k^2 M = p(x) - q(x), \quad (-a < x < a); \quad M(x) = D \frac{d^2 v_1}{dx^2}. \quad (36)$$

Решение уравнения (36) при граничных условиях $M(\pm a) = 0$, согласно (12) имеет вид

$$M(x) = \int_{-a}^a \frac{\cos^2(ka) \sin(kx) \sin(ks) - \sin^2(ka) \cos(kx) \cos(ks)}{k \sin(2ka)} [p(s) - q(s)] ds + \\ + \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) [p(s) - q(s)] ds \quad (-a \leq x \leq a). \quad (37)$$

Обратимся к поперечным силам $Q(x)$. Из (2) и (37) находим

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [\operatorname{tg}(ka) \sin(kx) \cos(ks) + \operatorname{ctg}(ka) \cos(kx) \sin(ks)] [p(s) - q(s)] ds + \\ + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos[k(x-s)] \operatorname{sign}(x-s) [p(s) - q(s)] ds, \quad (-a \leq x \leq a). \quad (38)$$

Далее в (37) и (38) совершим предельный переход $k \rightarrow 0$. Последовательно будем иметь

$$M(x) = \int_{-a}^a \frac{xs - a^2}{2a} [p(s) - q(s)] ds + \frac{1}{2} \int_{-a}^a |x-s| [p(s) - q(s)] ds =$$

$$= \frac{x}{2a} \int_{-a}^a s[p(s) - q(s)]ds - \frac{a}{2} \int_{-a}^a [p(s) - q(s)]ds + \frac{1}{2} \int_{-a}^a |x - s|[p(s) - q(s)]ds.$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \frac{s}{a}[p(s) - q(s)]ds + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \text{sign}(x - s)[p(s) - q(s)]ds.$$

Учитывая условия равновесия (6a)-(6b) балки, получим

$$M(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a |x - s|[p(s) - q(s)]ds, \quad Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \text{sign}(x - s)[p(s) - q(s)]ds,$$

что совпадают с классическим случаем [12].

Далее введём безразмерные величины, полагая

$$\overline{M}(\xi) = \frac{M(a\xi)}{a^2 E}, \quad \overline{Q}(\xi) = \frac{Q(a\xi)}{aE}.$$

Тогда из (37) и (38), с учётом (25) получим

$$\overline{M}(\xi) = \frac{1}{\chi \sin 2\chi} \int_{-1}^1 [\cos^2 \chi \sin(\chi\xi) \sin(\chi\eta) - \sin^2 \chi \cos(\chi\xi) \cos(\chi\eta)] [\varphi(\eta) - h(\eta)] d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\chi} \int_{-a}^a \sin(\chi|\xi - \eta|) [\varphi(\eta) - h(\eta)] d\eta; \quad (39)$$

$$\overline{Q}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\text{tg}\chi \sin(\chi\xi) \cos(\chi\eta) + \text{ctg}\chi \cos(\chi\xi) \sin(\chi\eta)] [\varphi(\eta) - h(\eta)] d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos[\chi(\xi - \eta)] \text{sign}(\xi - \eta) [\varphi(\eta) - h(\eta)] d\eta. \quad (40)$$

Приступим к расчёту нужных функций и величин. Рассматривая функцию $f(\xi)$ из (27), будем иметь

$$f(\xi_r) = \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N K(\xi_r, \eta_m) \sqrt{1 - \eta_m^2} h(\eta_m), \quad (r = 1, 2, \dots, N - 1). \quad (41)$$

Далее приняв во внимание формулу (29), вычислим функцию $\overline{M}(\xi)$ из (39):

$$\overline{M}(\xi_r) = \frac{\pi}{N\chi \sin 2\chi} \sum_{m=1}^N [\cos^2 \chi \sin(\chi\xi_r) \sin(\chi\eta_m) - \sin^2 \chi \cos(\chi\xi_r) \cos(\chi\eta_m)] \times$$

$$\times [X_m - \sqrt{1 - \eta_m^2} h(\eta_m)] + \frac{\pi}{2\chi N} \sum_{m=1}^N \sin(\chi|\xi_r - \eta_m|) [X_m - \sqrt{1 - \eta_m^2} h(\eta_m)], \quad (42)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Опять при помощи формулы (29) из (40)

$$\overline{Q}(\xi_r) = \frac{\pi}{2N} \sum_{m=1}^N [\text{tg}\chi \sin(\chi\xi_r) \cos(\chi\eta_m) + \text{ctg}\chi \cos(\chi\xi_r) \sin(\chi\eta_m)] [X_m - \sqrt{1 - \eta_m^2} h(\eta_m)] +$$

$$+ \frac{\pi}{2N} \sum_{m=1}^N \cos[\chi(\xi_r - \eta_m)] \text{sign}(\xi_r - \eta_m) [X_m - \sqrt{1 - \eta_m^2} h(\eta_m)], \quad (43)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Пусть теперь в определяющем СИУ (26)-(27) функция $h(\xi)$ – чётная, т.е. $h(-\xi) = h(\xi)$ ($-1 < \xi < 1$). Тогда по (27) $f(-\xi) = -f(\xi)$, т.е. функция $f(\xi)$ – нечётная. С другой стороны, если $h(\xi)$ – чётная функция, то из (20)

$$\left. \frac{dv_1}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a [1 - \cos(ks)] \text{sign}(s) g(s) ds + C = C.$$

Вследствие симметрии $C = 0$. Тогда

$$v_2(x) = \frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \{1 - \cos[k(x-s)]\} \text{sign}(x-s) g(s) ds + \\ + \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \{ \text{ctg}ka(1 - \cos kx) \sin ks - \text{tg}ka \sin kx \cos ks \} g(s) ds \quad (-a \leq x \leq a)$$

– нечётная функция от x .

Отсюда видно, что постоянная C и, следовательно, γ , характеризуют угол поворота сечения $x = 0$ балки и в случае симметрии относительно сечения $x = 0$ эта постоянная равна нулю.

Итак, при чётной функции $q(x)$ или $h(\xi)$ можно положить $C = 0$ или $\gamma = 0$, а решение $\varphi(\xi)$ определяющего СИУ (26), и, следовательно, функция $\Phi(\xi)$ из (29) – чётная функция. В этом случае моментное условие равновесия балки удовлетворяется тождественно, и, поэтому, последнее уравнение в (30) отпадает. В результате, определяющая система линейных уравнений (30) принимает вид

$$\sum_{m=1}^N K_{rm} X_m = a_r \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (44)$$

где

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[\frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \lambda K(\xi_r, \eta_m) \right], & (m = 1, 2, \dots, N; \quad r = 1, 2, \dots, N-1) \\ \frac{\pi}{N}, & (r = N; \quad m = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (45)$$

$$a_r = \begin{cases} \frac{\lambda}{\pi} f(\xi_r), & (r = 1, 2, \dots, N-1); \\ \frac{\pi}{N}, & (r = N). \end{cases} \quad (46)$$

Теперь решение системы (44) при правой части в виде вектора-столбца

$$a_r^{(1)} = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \lambda f(\xi_r), & (r = 1, 2, \dots, N-1) \\ 0, & (r = N) \end{cases}$$

обозначим через $X_m^{(1)}$ ($m = 1, 2, \dots, N + 1$), а решение системы (44) при правой части в виде вектора-столбца

$$a_r^{(2)} = \begin{cases} 0, & (r = 1, 2, \dots, N - 1); \\ 1, & (r = N) \end{cases}$$

обозначим через $X_m^{(2)}$ ($m = 1, 2, \dots, N$).

Тогда решение системы (44) представляется в форме

$$X_m = X_m^{(1)} + P_0 X_m^{(2)}. \quad (47)$$

Все остальные обозначения – прежние.

По интерполяционному многочлену Лагранжа по чебышевским узлам вычислим также значение расчётной функции $\Phi(\xi)$ в точке $\xi = 1$

$$\Phi(1) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \Phi(\eta_m) \operatorname{ctg} \left(\frac{2m-1}{4N} \pi \right). \quad (48)$$

Далее введём в рассмотрение коэффициент концентрации напряжений в концевой точке балки $\xi = 1$

$$K = \lim_{\xi \rightarrow 1-0} \left[\sqrt{1-\xi} \varphi(\xi) \right] = \frac{\Phi(1)}{\sqrt{2}}. \quad (49)$$

При помощи (48) из (49) будем иметь

$$K = \frac{1}{N\sqrt{2}} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} X_m \operatorname{ctg} \left(\frac{2m-1}{4N} \pi \right). \quad (50)$$

5. Численная реализация поставленной контактной задачи осуществлена при равномерно распределённых поперечных силах $q(x) = q = \text{const}$, вследствие чего по (25) $h(\xi) = q/E = q_0 = \text{const}$. Для числовых расчётов было принято $q_0 = 0.001$, $\nu = 0.3$, $E/E_1 = 0.1$, $a/h = 10$.

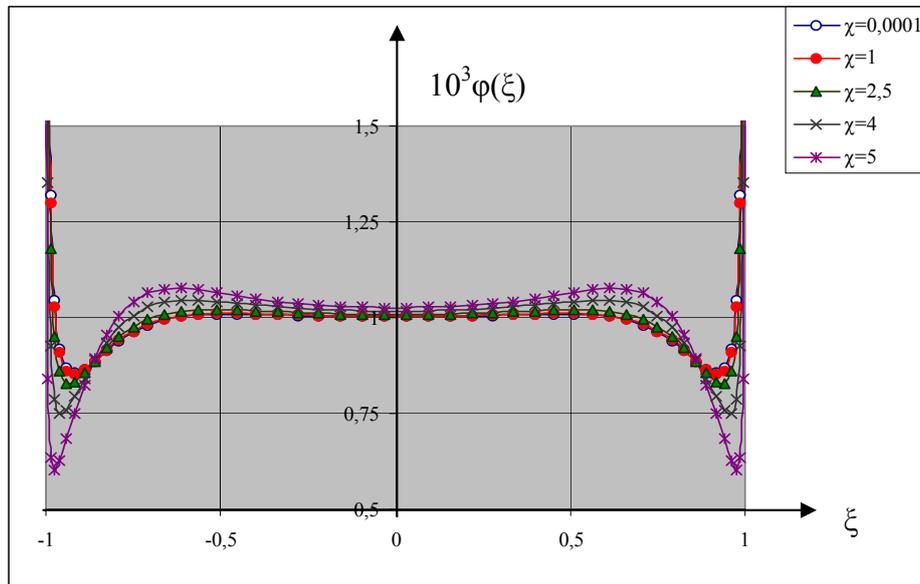
Чтобы выяснить эффекты влияния осевых сил T на характерные величины рассматриваемой задачи, в выражении параметра $\lambda = \mu/\chi^2$ параметр χ будем считать переменным, а в соответствии с указанными значениями других параметров $\mu \approx 1035$. Тогда после решения определяющей системы линейных уравнений (44)-(46) с решением в виде (47), основными расчётными формулами будут формула (29) для нахождения безразмерного давления балки на упругое основание, формулы (42)-(43) для нахождения безразмерных изгибающих моментов и перерезывающих сил в сечениях балки, и формула (50) для определения безразмерного коэффициента концентрации (КК) давления на правом конце балки. При этом, формулу (29) можно представить в форме

$$\varphi(\eta_m) = X_m / \sqrt{1-\eta_m^2}, \quad (m = 1, 2, \dots, N). \quad (51)$$

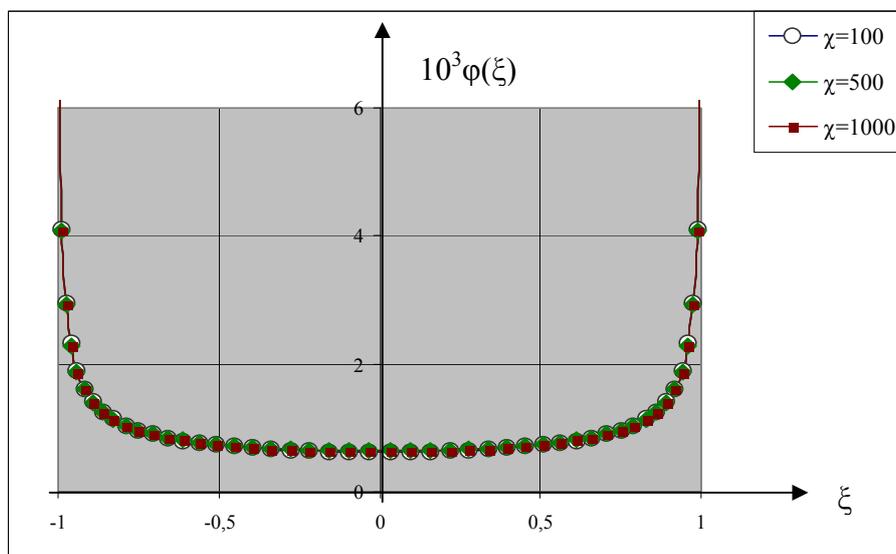
Вычисленные по формуле (51) значения затем умножены на 10^3 и по этим значениям построены графики изменения величины $10^3 \varphi(\xi)$ для различных значений параметра χ (фиг. 3).

Как видно из этих графиков, контактные давления в центральной части балки больше, чем в окрестностях концов балки на некотором расстоянии от них. При этом, в центральной части они с возрастанием параметра χ возрастают, а поближе к

концам, наоборот, уменьшаются, и при приближении к концам, как обычно, бесконечно возрастают. Это явление может быть объяснено тем, что из-за способности балки деформироваться вместе с основанием, её центральная часть вдавливается в основание глубже, чем её концевые части, склонные к отрыву от основания.



Фиг. 3



Фиг. 4

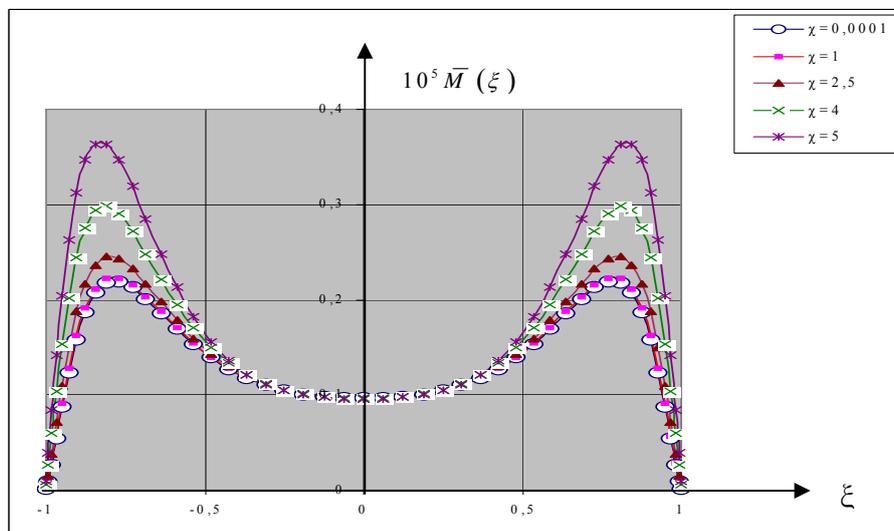
Минимальные значения $10^3 \varphi(\xi)$ при различных χ достигаются почти в последовательных узловых точках, в среднем, в точках $\xi \approx 0,93964$. Их значения в этой точке приведены в табл. 1. С возрастанием χ $\min 10^3 \varphi(\xi)$ уменьшается.

Таблица 1

| ξ | $\chi=0.0001$ | $\chi=1$ | $\chi=2.5$ | $\chi=4$ | $\chi=5$ |
|---------|---------------|----------|------------|----------|----------|
| 0,93964 | 0,855744 | 0,852174 | 0,828897 | 0,749554 | 0,627734 |

С другой стороны, при $\lambda \rightarrow 0$, что эквивалентно формальному безграничному увеличению χ , графики на фиг.3, сливаясь между собой в своих центральных частях, спускаются к оси абсцисс и в предельном случае $\lambda = 0$ переходят в известную параболу (фиг.4), соответствующую решению Садовского для классической контактной задачи о вдавливании штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость [16].

На фиг.5 и 6 приведены, соответственно, графики величин $10^5 \overline{M}(\xi)$ и $10^4 \overline{Q}(\xi)$, вычисленные по формулам (42) и (43).



Фиг. 5

Максимальные значения $10^5 \overline{M}(\xi)$ на фиг. 5 для различных χ достигаются почти в последовательных узловых точках, в среднем, в точке $\xi \approx 0.80795$. Эти значения $\max 10^5 \overline{M}(\xi)$ приведены в табл. 2.

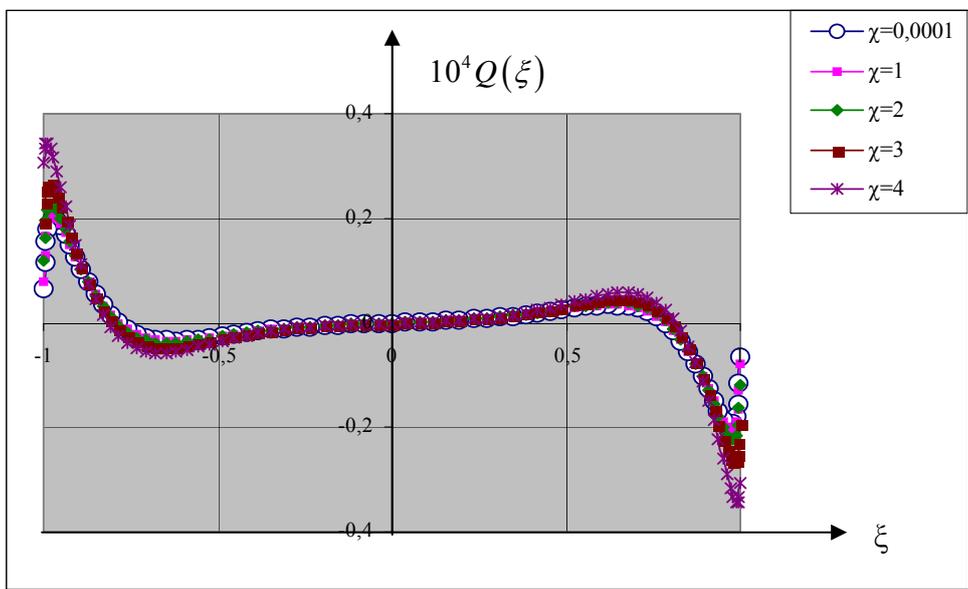
Таблица 2

| ξ | $\chi=0.0001$ | $\chi=1$ | $\chi=2.5$ | $\chi=4$ | $\chi=5$ |
|---------|---------------|----------|------------|----------|----------|
| 0,80795 | 0,219316 | 0,222949 | 0,24537 | 0,29854 | 0,363425 |

Значения $10^4 \overline{Q}(\xi)$, вычисленные при помощи интерполяционного многочлена Лежандра по узлам ξ_r , при различных χ приведены в табл. 3. Данные этой таблицы показывают, что по мере уменьшения χ , безразмерные перерезывающие силы приближаются к нулю.

Таблица 3

| ξ | $\chi=0.0001$ | $\chi=1$ | $\chi=2$ | $\chi=3$ | $\chi=4$ |
|-------|---------------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | -0.03704 | -0.05044 | -0.09242 | -0.16884 | -0.29186 |



Фиг. 6

Наконец, в табл. 4 приведены вычисленные по формуле (48) и умноженные на 10^3 значения КК для нескольких значений χ .

Таблица 4

| χ | 0.01 | 0.05 | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.8 |
|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| $10^3 K$ | 0.131249 | 0.131243 | 0.131223 | 0.131018 | 0.130607 | 0.129599 |
| χ | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $10^3 K$ | 0.128662 | 0.12536 | 0.120608 | 0.106125 | 0.0832359 | 0.0481198 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491с.
2. Корнев Б.Г. Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. М.: Госстройиздат, 1954. 232с.
3. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415с.
4. Попов Г.Я., Толкачев В.М. Проблема контакта жёстких тел с тонкостенными элементами. // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. №4. С.192-206.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493с.
6. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Изгиб балки на границе упругой полуплоскости. // Труды международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посвящ. 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна. Цахкадзор, Армения. 25-28 сентября 2007. С.32-36.
7. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С.5-19.
8. Амирбекян А.Н. Решение интегрального уравнения изгиба балки на упругом основании // В сб. трудов международной школы-конференции молодых учёных

- «Механика», 28 сентября – Октября, Агавнадзор, Армения. Ереван, 2009. С.135-139.
9. Erdogan F., Gupta G. D., Gook T. S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems. // Intern.Publ., Leyden, 1973. P. 368-425.
 10. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl.Math. Vol. 35. №1. 1997. P.173-185.
 11. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
 12. Амирбекян А.Н. О контактном взаимодействии изгибающейся по теории С.П. Тимошенко балки конечной длины с упругой полуплоскостью. // Труды II межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Дилижан, Армения. Ереван. 4-8 октября 2010. С.76-80.
 13. Тимошенко С. П. Соппротивление материалов. Т.2. М.: Наука, 1965. 480с.
 14. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636с.
 15. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
 16. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Госмехтеориздат, 1949. 270с.

Сведения об авторах:

Амирбекян Аревик Норайровна – младший научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (37410) 52-48-90. **E-mail:** a.amirbekyan@mail.ru

Мкртчян Мушег Сережаевич – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (37410) 43-16-52, (37410) 80-19-56, **E-mail:** muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

Мхитарян Сурен Манукович – член-корр. НАН РА, докт. физ.-мат. наук, проф., Институт механики НАН РА

Тел: (+37410)621025; (+37493)936117; **E-mail:** smkhitaryan@mechins.sci.am

Шекян Лаврентий Арамович - докт. физ.-мат. наук, Государственный инженерный университет Армении

Тел: (+37410)39 89 01; (+37499)28 34 40; **E-mail:** lshekyan@mail.ru

Поступила в редакцию 14.06.2013

УДК 539.3

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ И
БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ УПРУГИМИ
НАКЛАДКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВЫХ ПРОСЛОЕК
(Посвящается светлой памяти академика НАН РА В.С. Саркисяна)**

Керопян А. В.

Ключевые слова: упругая полоса, бесконечная пластина, контакт, накладка (стрингер), сдвиг, система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, система бесконечных систем линейных уравнений

Keywords: elastic layer, infinite plate, contact, overlay (stringer), shear, system of singular integro-differential equations, infinite systems of linear equations

Քերոպյան Ա. Վ.

Երկու վերջավոր առաձգական վերադիրներով կոնտակտային խնդիրներ առաձգական շերտի և անվերջ սալի համար, սահքի միջնաշերտերի առկայությամբ

Դիտարկված է խնդիրներ առաձգական շերտի և անվերջ սալի համար, որոնք xOy հարթության մեջ $y = 0$ գծի երկարությամբ վերջավոր տեղամասերում (սալի համար xOy -ը նրա միջին հարթությունն է) ուժեղացված են տարբեր առաձգական բնութագրեր և հաստատուն հաստություն ունեցող երկու վերջավոր վերադիրներով: Կոնտակտային փոխազդեցությունը վերադիրների և դեֆորմացվող հիմքերի միջև իրագործվում է այլ ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական բնութագրեր ունեցող սահքի միջնաշերտերի (սուսնձի բարակ շերտերի) միջոցով: Վերադիրները դեֆորմացիայի են ենթարկվում նրանց ծայրերում կիրառված հորիզոնական ուժերի ազդեցության տակ: Անհայտ կոնտակտային լարումների որոշման խնդիրը հանգեցված է տարբեր միջակայքերում Կոշու կորիզով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրողիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծմանը որոշակի եզրային պայմաններով: Այդ համակարգերի լուծումը հանգեցված է քվադրիլոպին ռեգուլյար գծային անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծմանը, որոնց ստացման համար օգտագործվել է Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատը: Դիտարկված են հնարավոր մասնավոր դեպքեր և պարզաբանված է կոնտակտային լարումների վարքը կոնտակտի տարբեր տեղամասերում:

Kerobyan A.V.

Contact Problems for an Elastic Layer and the Infinite Plate with Two Finite Elastic Overlays in the Presence of Shear Interlayers

The problems of contact interaction is observed for an elastic layer and the infinite plate which at $y = 0$ in the plane xOy (for the plate xOy - its average plane) are strengthened by two finite overlays (stringers) with different elastic characteristics and constant thickness. The contact interaction between deformable foundations and overlays is realized through a thin layer of glue with other physico-mechanical properties and geometric configuration. The overlays are deformed under the action of horizontal forces. The determinational problem of unknown contact stresses are reduced to the system of singular integro-differential equations with Cauchy's kernel of second kind with two unknown functions within the different intervals with certain boundary conditions. Its solutions are constructed using apparatus Chebishev's orthogonal polynomials and unknown coefficients are received from the quasiperfectly regular infinite systems of the linear algebraic equations. Possible particular cases are observed and the behaviors of contact stresses are illustrated in different constant parts.

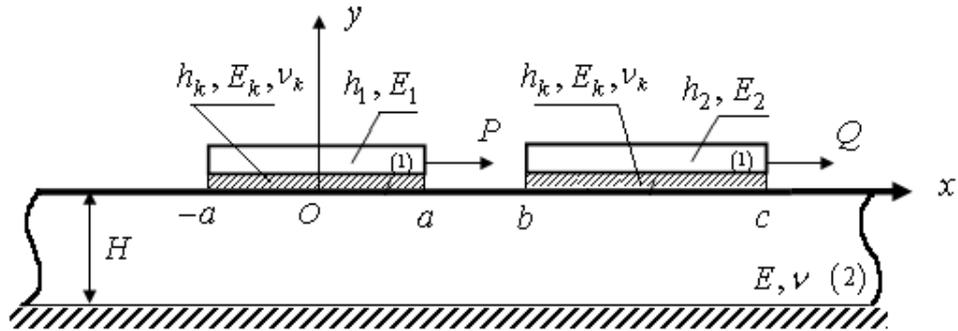
В работе рассматриваются задачи для упругой полосы и бесконечной пластины, которые на конечных отрезках вдоль линии $y = 0$ в плоскости xOy (для пластины xOy – её средняя плоскость) усилены двумя конечными накладками (стрингерами) с различными модулями упругости и постоянной толщины. Контакт между накладками и деформируемыми основаниями осуществляется посредством сдвиговых прослоек (в виде слоёв клея, каждый дифференциальный элемент которой находится в условии чистого сдвига) с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками. Контактующая тройка (накладка, прослойка, деформируемые основания) деформируются под действием горизонтальных сил, приложенных к накладкам. Задача определения неизвестных касательных контактных напряжений сведена к решению систем сингулярных интегро-дифференциальных уравнений второго рода с ядрами Коши на различных интервалах при определённых граничных условиях. Решение этих систем сведено к системам квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, при получении которой был применён аппарат ортогональных многочленов Чебышева. Рассмотрены некоторые возможные частные случаи и выяснено поведение контактных напряжений, действующих в различных контактных участках.

В качестве основной из поставленных задач выбрана задача для упругого основания в виде полосы. Результаты для бесконечной пластины приведены по ходу решения и по возможности с одинаковыми обозначениями.

1. Постановка задачи и вывод основных разрешающих уравнений. Пусть упругая бесконечная полоса (плоская деформация, модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν и толщина H) жёстко соединена с недеформируемым основанием гранью $y = -H$ и на конечных участках $[-a, a]$ и $[b, c]$ ($b > a$) своей границы $y = 0$ (в плоскости xOy) усилена двумя конечными накладками малых постоянных толщин h_1 и h_2 , модуль упругости которых при $x \in [-a, a]$ равен E_1 , а при $x \in [b, c]$ равен E_2 (фиг.1). Контактное взаимодействие между накладками и деформируемым основанием осуществляется посредством сдвиговых прослоек (в виде слоёв клея, каждый дифференциальный элемент которой находится в условии чистого сдвига) с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками (E_k, ν_k, h_k) . Задача заключается в определении неизвестных контактных напряжений, когда на конечных точках накладок $x = a$ и $x = c$ приложены горизонтальные силы P и Q соответственно, которые направлены вдоль оси Ox в одну сторону.

Контактная задача для упругой полуплоскости с двумя конечными накладками при наличии сдвиговых прослоек рассмотрена в [1]. Контактные задачи с двумя конечными стрингерами посредством сдвиговой прослойки с одним стрингером рассмотрены в [2,3]. В работе [4] на основе комплексного преобразования Фурье и метода Винера-Хопфа приводится новый подход для решения сингулярного интегрального уравнения на конечном интервале.

Для накладок (стрингеров) принимается модель одномерного упругого континуума в сочетании с моделью контакта по линии, а для прослоек – условия чистого сдвига, благодаря чему под накладками действуют только касательные контактные напряжения [1-3,5].



Фиг. 1

Имея в виду вышесказанное, из условия равновесия элементов накладок (стрингеров) и закона Гука, получим дифференциальные уравнения равновесия накладок. Для одной из них, находящейся на отрезке $[-a, a]$, уравнение имеет вид:

$$\frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{1}{E_1 h_1} \int_{-a}^x \tau_1(s) ds, \quad -a \leq x \leq a \quad (1.1)$$

при условии

$$\int_{-a}^a \tau_1(s) ds = P \quad (1.2)$$

а для накладки, находящейся на участке $[b, c]$, будем иметь:

$$\frac{du_1^{(1)}}{dx} = \frac{1}{E_2 h_2} \int_b^x \tau_2(s) ds, \quad b \leq x \leq c \quad (1.3)$$

при условии

$$\int_b^c \tau_2(s) ds = Q. \quad (1.4)$$

Здесь $u^{(1)}(x)$ и $u_1^{(1)}(x)$ — горизонтальные перемещения точек накладок, а $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ — касательные контактные напряжения, действующие под накладками на участках $[-a, a]$ и $[b, c]$ соответственно.

После интегрирования (1.1) и (1.3), для перемещения точек накладки $u^{(1)}(x)$ будем иметь

$$u^{(1)}(x) = \frac{1}{E_1 h_1} \int_{-a}^x (x-s) \tau_1(s) ds + u^{(1)}(-a), \quad -a \leq x \leq a, \quad (1.5)$$

а для перемещения $u_1^{(1)}(x)$ будем иметь

$$u_1^{(1)}(x) = \frac{1}{E_2 h_2} \int_b^x (x-s) \tau_2(s) ds + u_1^{(1)}(b), \quad b \leq x \leq c. \quad (1.6)$$

Далее, для горизонтальных перемещений $u^{(2)}(x, 0)$ граничных точек упругой полосы согласно вышеизложенному, будем иметь [3]:

$$u^{(2)}(x, 0) = \int_{-a}^a K_n(|x-s|) \tau_1(s) ds + \int_b^c K_n(|x-s|) \tau_2(s) ds. \quad (1.7)$$

Здесь

$$K_n(|x|) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (1.8)$$

$$K_n(\sigma) = \frac{(2\chi+1)[(\chi+1)\text{sh}2H|\sigma| + 2\chi H|\sigma|]}{2\mu|\sigma|[2\chi(\chi+1)\text{ch}2H|\sigma| + \chi^2(4H^2\sigma^2 + 1) + (\chi+1)^2]}, \quad \chi = \frac{\lambda + \mu}{2\mu},$$

λ, μ – упругие постоянные Ламе материала полосы.

При решении задачи для упругой бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния, в предположении, что накладки (стрингеры) находятся на поверхности пластины по линии $y = 0$ (xOy – средняя плоскость пластины), вместо (1.7) будем иметь:

$$u^{(2)}(x, 0) = \frac{b_1^*}{\pi A} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} \tau_1(s) ds + \frac{b_1^*}{\pi A} \int_b^c \ln \frac{1}{|x-s|} \tau_2(s) ds + c, \quad (1.9)$$

где $A = 8Gd / (3 - \nu)$, d – толщина пластины, G – модуль сдвига материала пластины, b_1^* – ширина стрингеров в контактных участках, c – некоторое постоянное.

Теперь полагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условии чистого сдвига, для накладки, находящейся на участке $-a \leq x \leq a$, будем иметь условие [1-3,5]:

$$u^{(1)}(x) - u^{(2)}(x, 0) = k\tau_1(x), \quad -a \leq x \leq a, \quad (1.10)$$

а на участке $b \leq x \leq c$ будем иметь

$$u_1^{(1)}(x) - u^{(2)}(x, 0) = k\tau_2(x), \quad b \leq x \leq c, \quad (1.11)$$

где $k = h_k / G_k$, $G_k = E_k / 2(1 + \nu_k)$, G_k – модуль сдвига материала клея.

Для бесконечной пластины в (1.1)–(1.6), а также (1.10)–(1.11), следует $\tau_j(x)$ ($j = 1, 2$) заменить на $b_1^* \tau_j(x)$ ($j = 1, 2$), h_j ($j = 1, 2$) следует заменить площадями поперечных сечений накладок $F_j = b_1^* h_j$ ($j = 1, 2$), а k – на $k^* = k / b_1^*$.

Далее, в силу (1.5), (1.7) и (1.10), а также на основании (1.6) и (1.11), после замены переменных x на ax , s на as , получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
t_1(x) &= \lambda_1^* \int_{-1}^x (x-s)t_1(s) ds - \alpha^* \int_{-1}^1 \tilde{K}_n(|x-s|)t_1(s) ds - \\
&\quad - \alpha^* \int_{\delta_1}^{\delta_2} \tilde{K}_n(|x-s|)t_2(s) ds + c_1, \quad -1 \leq x \leq 1,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}
t_2(x) &= \lambda_2^* \int_{\delta_1}^x (x-s)t_2(s) ds - \alpha^* \int_{\delta_1}^{\delta_2} \tilde{K}_n(|x-s|)t_2(s) ds - \\
&\quad - \alpha^* \int_{-1}^1 \tilde{K}_n(|x-s|)t_1(s) ds + c_2, \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2.
\end{aligned}$$

Для бесконечной пластины будем иметь систему уравнений в виде

$$\begin{aligned}
t_1(x) &= \lambda_1^* \int_{-1}^x (x-s)t_1(s) ds - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{a|x-s|} t_1(s) ds - \\
&\quad - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln \frac{1}{a|x-s|} t_2(s) ds + c_1^*, \quad -1 \leq x \leq 1,
\end{aligned} \tag{1.12*}$$

$$\begin{aligned}
t_2(x) &= \lambda_2^* \int_{\delta_1}^x (x-s)t_2(s) ds - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln \frac{1}{a|x-s|} t_2(s) ds - \\
&\quad - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{a|x-s|} t_1(s) ds + c_2^*, \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2.
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
t_j(x) &= a\tau_j(ax) \quad (j=1,2), \quad \tilde{K}_n(x) = K_n(ax), \quad \lambda_j^* = a^2/kE_j h_j \quad (j=1,2), \\
\alpha^* &= a/k, \quad \alpha_1^* = a/kA, \quad \delta_1 = b/a, \quad \delta_2 = c/a, \quad c_1 = au^{(1)}(-a)/k, \\
c_2 &= au_1^{(1)}(b)/k, \quad c_1^* = a[u^{(1)}(-a) - c]/k, \quad c_2^* = a[u_1^{(1)}(b) - c]/k,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

а постоянные величины c_1 и c_2 или c_1^* и c_2^* — соответственно будут определяться из условий

$$\int_{-1}^1 t_1(s) ds = P, \quad \int_{\delta_1}^{\delta_2} t_2(s) ds = Q. \tag{1.14}$$

В дополнение отметим также, что для пластины в (1.12*), (1.13) и (1.14) следует иметь в виду, что $t_j(x) = ab_1^* \tau_j(ax)$ и $\lambda_j^* = a^2/kE_j F_j$, $j=1,2$.

Далее, из (1.12) и (1.13) следует, что функции $t_1(x)$, $x \in [-1,1]$ и $t_2(x)$, $x \in [\delta_1, \delta_2]$ в конечных точках $x = \pm 1$ и $x = \delta_1$, $x = \delta_2$ имеют конечные значения.

Отметим также, что при $\lambda_j^* = 0$ (при $E_j \rightarrow \infty$ ($j=1,2$)) имеем случай жёстких накладок) вместо системы (1.12) будем иметь:

$$t_1(x) = -\alpha^* \int_{-1}^1 \tilde{K}_n(|x-s|) t_1(s) ds - \alpha^* \int_{\delta_1}^{\delta_2} \tilde{K}_n(|x-s|) t_2(s) ds, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1.15)$$

$$t_2(x) = -\alpha^* \int_{\delta_1}^{\delta_2} \tilde{K}_n(|x-s|) t_2(s) ds - \alpha^* \int_{-1}^1 \tilde{K}_n(|x-s|) t_1(s) ds, \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2,$$

а для бесконечной пластины будем иметь:

$$t_1(x) = -\frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{a|x-s|} t_1(s) ds - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln \frac{1}{a|x-s|} t_2(s) ds + c_1^*, \quad 1 \leq x \leq 1, \quad (1.15^*)$$

$$t_2(x) = -\frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln \frac{1}{a|x-s|} t_2(s) ds - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{a|x-s|} t_1(s) ds + c_2^*, \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2,$$

где $c_j^* = -ac/k$, $j=1,2$.

Теперь после дифференцирования (1.12) по x и в силу представления [3]

$$\tilde{K}'_n(x) = \frac{d}{dx} \tilde{K}_n(x) = -\frac{A_1}{\pi} \left[\frac{1}{x} - K_*(x) \right], \quad (1.16)$$

где

$$K_*(x) = \int_0^\infty [1 - K(\sigma)] \sin \sigma x d\sigma, \quad K(\sigma) = \frac{\sigma}{A_1} K_n(\sigma), \quad \int_0^\infty \sin \sigma x d\sigma = \frac{1}{x}, \quad (1.17)$$

$$A_1 = \frac{2\chi + 1}{4\chi\mu},$$

получим следующую систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений второго рода с ядрами Коши:

$$\alpha \psi''(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\varphi'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_*(x-s) \psi'(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} K_*(x-s) \varphi'(s) ds = \lambda_1 \psi(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1.18)$$

$$\alpha \varphi''(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\varphi'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} K_*(x-s) \varphi'(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_*(x-s) \psi'(s) ds = \lambda_2 \varphi(x), \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \psi(-1) &= 0, & \psi(1) &= P, \\ \varphi(\delta_1) &= 0, & \varphi(\delta_2) &= Q, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где введены обозначения

$$\psi(x) = \int_{-1}^x t_1(s) ds, \quad \varphi(x) = \int_{\delta_1}^x t_2(s) ds, \quad (\psi'(x) = t_1(x), \varphi'(x) = t_2(x)) \quad (1.20)$$

$$\lambda_j = \frac{\lambda_j^*}{A_1 \alpha^*} \quad \alpha = \frac{1}{\alpha^* A_1}.$$

Функция $K_*(x)$ имеет суммируемую с квадратом производную на отрезках $[-1, 1]$ и $[\delta_1, \delta_2]$.

Для бесконечной пластины соответствующая система (1.18) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \psi''(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\varphi'(s) ds}{s-x} &= \bar{\lambda}_1 \psi(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \\ \bar{\alpha} \varphi''(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\varphi'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi'(s) ds}{s-x} &= \bar{\lambda}_2 \varphi(x), \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2 \end{aligned} \quad (1.18^*)$$

при граничных условиях (1.19), где

$$\bar{\lambda}_j = \frac{\lambda_j^*}{\alpha^*} = \frac{aA}{E_j F_j}, \quad j=1, 2, \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1^*} = \frac{kA}{a}.$$

Теперь рассмотрим некоторые возможные частные случаи, которые непосредственно можно получить из систем уравнений (1.18) и (1.18*). В случае $\alpha = 0$ или $\bar{\alpha} = 0$ (т.е. при $k = h_k / G_k = 0$), системы сингулярных уравнений (1.18) или (1.18*) будут разрешающими системами уравнений аналогичной задачи без учёта прослоек. В случае $\lambda_j = 0$ или $\bar{\lambda}_j = 0$ (т.е. при $E_j \rightarrow \infty$, $j=1, 2$), будем иметь случай жёстких накладок, а при $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$ (или $\bar{\lambda}_2 = 0$, $\bar{\lambda}_1 \neq 0$) или наоборот, будем иметь случай одной жёсткой накладки. В случае $2a \rightarrow 0$ получим случай одной накладки, заданной на отрезке $[b, c]$ (в случае $\delta_2 \rightarrow \delta_1$ будем иметь случай одной накладки, заданной на отрезке $[-1, 1]$) и вместо систем (1.18) или (1.18*) будем иметь одно разрешающее уравнение в виде:

$$\alpha \varphi''(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\varphi'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} K_*(x-s) \varphi'(s) ds = \lambda_2 \varphi(x), \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2, \quad (1.21)$$

а для бесконечной пластины

$$\bar{\alpha} \varphi''(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\varphi'(s) ds}{s-x} = \bar{\lambda}_2 \varphi(x), \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2 \quad (1.21^*)$$

при граничных условиях

$$\varphi(\delta_1) = 0, \quad \varphi(\delta_2) = Q. \quad (1.19^*)$$

2. Решение системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.18) при граничных условиях (1.19). Как уже было выяснено выше из системы

(1.12) или (1.12*), следует, что касательные контактные напряжения в концевых точках накладок $x = \pm 1$, $x = \delta_1$ и $x = \delta_2$ имеют конечные значения. Следовательно, представим решения системы (1.18) в виде рядов

$$\psi'(x) = A^* + B^*x + \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n} U_{n-1}(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.1)$$

$$\varphi'(x) = A_1^* + B_1^*h(x) + \sqrt{1-h^2(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{n} U_{n-1}[h(x)], \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2, |h(x)| \leq 1, \quad (2.2)$$

где

$$A^* = \frac{\psi'(1) + \psi'(-1)}{2}, \quad B^* = \frac{\psi'(1) - \psi'(-1)}{2}, \quad h(x) = \frac{2x - \delta_1 - \delta_2}{\delta_2 - \delta_1}, \quad (2.3)$$

$$A_1^* = \frac{\varphi'(\delta_1) + \varphi'(\delta_2)}{2}, \quad B_1^* = \frac{\varphi'(\delta_2) - \varphi'(\delta_1)}{2},$$

а $\psi'(1)$, $\psi'(-1)$ и $\varphi'(\delta_1)$, $\varphi'(\delta_2)$ – значения контактных напряжений в концевых точках накладок $x = \pm 1$ и $x = \delta_1$, $x = \delta_2$ соответственно, $U_{n-1}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) – многочлены Чебышева второго рода, в дальнейшем $T_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – многочлены Чебышева первого рода [6,7], а $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Теперь, вычисляя $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ при условиях (1.19):

$$\psi(x) = A^*(x+1) + B^*(x^2-1)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n} Q_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$\varphi(x) = A_1^*(x-\delta_1) + \frac{B_1^*(x-\delta_1)(x-\delta_2)}{\delta_2-\delta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{n} P_n[h(x)], \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2, |h(x)| \leq 1,$$

$$Q_n(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-s^2} U_{n-1}(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad X_1 = \frac{2}{\pi}(P - 2A^*),$$

$$P_n[h(x)] = \int_{\delta_1}^x \sqrt{1-h^2(s)} U_{n-1}[h(s)] ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad Y_1 = \frac{4[Q - A_1^*(\delta_2 - \delta_1)]}{\pi(\delta_2 - \delta_1)},$$

а также $\psi''(x)$ и $\varphi''(x)$, подставляя вместе с (2.1), (2.2) в систему (1.18), и пользуясь соотношениями [2,6,7]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2} U_{n-1}(s) ds}{s-x} = \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^n}, \quad n=1,2,\dots, x>1,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sqrt{1-h^2(s)} U_{n-1}[h(s)] ds}{s-x} = -T_n[h(x)], \quad n=1,2,\dots, |h(x)|<1, \quad (2.4)$$

$$\frac{2}{\delta_2 - \delta_1} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{T_n[h(x)] T_m[h(x)] dx}{\sqrt{1-h^2(x)}} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n = 1, 2, \dots \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

известным способом [8-11], после некоторых несложных вычислений, получим следующую систему бесконечных систем линейных уравнений:

$$X_m + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} R_{m,n}^{(1)} X_n + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} L_{m,n}^{(1)} Y_n = f_m, \quad m=1,2,3,\dots, \quad (2.5)$$

$$Y_m + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} R_{m,n}^{(2)} Y_n + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} L_{m,n}^{(2)} X_n = g_m, \quad m=1,2,3,\dots,$$

или

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} R_{1,n}^{(1)} X_n + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} L_{1,n}^{(1)} Y_n = a_1, \quad m=1,$$

$$X_m + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} R_{m,n}^{(1)} X_n + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} L_{m,n}^{(1)} Y_n = a_m, \quad m=2,3,\dots,$$

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} R_{1,n}^{(2)} Y_n + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} L_{1,n}^{(2)} X_n = b_1, \quad m=1, \quad (2.6)$$

$$Y_m + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} R_{m,n}^{(2)} Y_n + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} L_{m,n}^{(2)} X_n = b_m, \quad m=2,3,\dots,$$

где

$$R_{m,n}^{(1)} = K_{m,n}^{(1)} + \lambda_1 K_{m,n}^{(2)} + K_{m,n}^{(3)}, \quad L_{m,n}^{(1)} = K_{m,n}^{(4)} + K_{m,n}^{(5)}, \quad a_1 = f_1 - \left(1 + \frac{1}{\alpha} R_{1,1}^{(1)}\right) X_1 - \frac{1}{\alpha} L_{1,1}^{(1)} Y_1,$$

$$R_{m,n}^{(2)} = K_{m,n}^{(6)} + \lambda_2 K_{m,n}^{(7)} + K_{m,n}^{(8)}, \quad L_{m,n}^{(2)} = K_{m,n}^{(9)} + K_{m,n}^{(10)}, \quad b_1 = g_1 - \left(1 + \frac{1}{\alpha} R_{1,1}^{(2)}\right) Y_1 - \frac{1}{\alpha} L_{1,1}^{(2)} X_1,$$

$$\begin{aligned}
R_{m,1}^{(1)} &= K_{m,1}^{(1)} + \lambda_1 K_{m,1}^{(2)} + K_{m,1}^{(3)}, \quad L_{m,1}^{(1)} = K_{m,1}^{(4)} + K_{m,1}^{(5)}, \quad a_m = f_m - \frac{1}{\alpha} (R_{m,1}^{(1)} X_1 + L_{m,1}^{(1)} Y_1), \\
R_{m,1}^{(2)} &= K_{m,1}^{(6)} + \lambda_2 K_{m,1}^{(7)} + K_{m,1}^{(8)}, \quad L_{m,1}^{(2)} = K_{m,1}^{(9)} + K_{m,1}^{(10)}, \quad b_m = g_m - \frac{1}{\alpha} (R_{m,1}^{(2)} Y_1 + L_{m,1}^{(2)} X_1), \\
K_{m,n}^{(1)} &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi n} \left[\frac{1}{(m-n)^2 - 1} + \frac{1}{(m+n)^2 - 1} \right], & |m-n| \neq 1 \\ 0, & |m-n| = 1, \end{cases} \\
K_{m,n}^{(1)} &= \frac{4(2n^2 - 1)}{\pi n(4n^2 - 1)}, \quad m = n, \quad K_{1,1}^{(1)} = \frac{4}{3\pi}, \quad (2.7) \\
K_{m,1}^{(1)} &= -\frac{4m^2}{\pi [(m-1)^2 - 1][(m+1)^2 - 1]}, \quad m \neq 2, \\
K_{m,n}^{(2)} &= \frac{2}{\pi n} \int_{-1}^1 Q_n(x) T_m(x) dx = 0 \quad \text{при } n \geq 2, \quad m \neq n, \quad |n-m| \neq 2, \\
K_{1,1}^{(2)} &= 3/8, \quad K_{m,1}^{(2)} = -(m^2 - 1)^{-1}, \quad m \geq 2, \\
K_{m,n}^{(2)} &= [2(n^2 - 1)]^{-1} \quad \text{при } n \geq 2, \quad m = n, \quad K_{2,2}^{(2)} = 1/6, \\
K_{m,n}^{(2)} &= -[4n(n+1)]^{-1} \quad \text{при } n \geq 2, \quad m = n+2, \quad K_{4,2}^{(2)} = -1/24, \\
K_{m,n}^{(2)} &= -[4n(n-1)]^{-1} \quad \text{при } n > 2, \quad m = n-2, \quad K_{1,3}^{(2)} = -1/24, \\
K_{m,n}^{(3)} &= -\frac{2}{\pi^2 n} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K_*(x-s) \sqrt{1-s^2} U_{n-1}(s) ds T_m(x) dx, \\
K_{m,n}^{(4)} &= -\frac{2}{\pi n} \int_{-1}^1 \frac{T_m(x) dx}{[h(x) + \sqrt{h^2(x) - 1}]^n}, \\
K_{m,n}^{(5)} &= -\frac{2}{\pi^2 n} \int_{\delta_1}^1 \int_{\delta_1}^{\delta_2} K_*(x-s) \sqrt{1-h^2(s)} U_{n-1}[h(s)] ds T_m(x) dx, \quad m, n = 1, 2, \dots \\
K_{m,n}^{(6)} &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} K_{m,n}^{(1)}, \quad K_{m,n}^{(7)} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{4} K_{m,n}^{(2)}, \\
K_{m,n}^{(8)} &= -\frac{2}{\pi^2 n} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_{\delta_1}^{\delta_2} K_*(x-s) \sqrt{1-h^2(s)} U_{n-1}[h(s)] ds T_m[h(x)] dx, \quad m, n = 1, 2, \dots \\
K_{m,n}^{(9)} &= -\frac{2}{\pi n} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{T_m[h(x)] dx}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\pi n} \int_{-1}^1 \frac{T_m(t) dt}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^n}, \quad m, n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

$$K_{m,n}^{(10)} = -\frac{2}{\pi^2 n} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_{-1}^1 K_*(x-s) \sqrt{1-s^2} U_{n-1}(s) ds T_m[h(x)] dx, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

$$f_m = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_m(x) dx, \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$f_1(x) = B^* \left(1 + \frac{2}{\pi\alpha}\right) - \frac{\lambda_1}{\alpha} \left[A^*(x+1) + \frac{B^*}{2}(x^2-1) \right] + \frac{1}{\pi\alpha} (A^* + B^*x) \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{A^*}{\pi\alpha} \int_{-1}^1 K_*(x-s) ds + \frac{B^*}{\pi\alpha} \int_{-1}^1 s K_*(x-s) ds,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\pi\alpha} \left[2B_1^* + \left(A_1^* - \frac{B_1^*(\delta_1 + \delta_2)}{\delta_2 - \delta_1} + \frac{2B_1^*x}{\delta_2 - \delta_1} \right) \ln \frac{\delta_2 - x}{\delta_1 - x} \right] + \frac{1}{\pi\alpha} \left[A_1^* - \frac{B_1^*(\delta_1 + \delta_2)}{\delta_2 - \delta_1} \right] \int_{\delta_1}^{\delta_2} K_*(x-s) ds + \frac{2B_1^*}{\pi\alpha(\delta_2 - \delta_1)} \int_{\delta_1}^{\delta_2} s K_*(x-s) ds,$$

$$g_m = \frac{2}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x) T_m[h(x)] dx, \quad g(x) = g_1(x) + g_2(x),$$

$$g_1(x) = \frac{2B_1^*}{\delta_2 - \delta_1} + \frac{1}{\pi\alpha} \left[2B_1^* + \left(A_1^* - \frac{B_1^*(\delta_1 + \delta_2)}{\delta_2 - \delta_1} + \frac{2B_1^*x}{\delta_2 - \delta_1} \right) \ln \frac{\delta_2 - x}{x - \delta_1} \right] - \frac{\lambda_2}{\alpha} \left[A_1^*(x - \delta_1) - \frac{B_1^*(x - \delta_1)(\delta_2 - x)}{\delta_2 - \delta_1} \right] + \frac{1}{\pi\alpha} \left[A_1^* - \frac{B_1^*(\delta_1 + \delta_2)}{\delta_2 - \delta_1} \right] \int_{\delta_1}^{\delta_2} K_*(x-s) ds + \frac{2B_1^*}{\pi\alpha(\delta_2 - \delta_1)} \int_{\delta_1}^{\delta_2} s K_*(x-s) ds,$$

$$g_2(x) = \frac{1}{\pi\alpha} \left[2B^* + (A^* + B^*x) \right] \ln \frac{x-1}{x+1} + \frac{A^*}{\pi\alpha} \int_{-1}^1 K_*(x-s) ds + \frac{B^*}{\pi\alpha} \int_{-1}^1 s K_*(x-s) ds.$$

Далее, как следует из полученных систем разрешающих интегро-дифференциальных уравнений для бесконечной пластины, соответствующую бесконечную систему уравнений можно получить непосредственно из системы (2.5), если в ней отбросим ядра $K_{m,n}^{(3)}$, $K_{m,n}^{(5)}$, $K_{m,n}^{(8)}$, $K_{m,n}^{(10)}$ и все члены с интегралами, входящими в выражения функций $f(x)$ и $g(x)$, а λ_1, λ_2 и α заменить на $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ и $\bar{\alpha}$ соответственно.

Система уравнений (2.5) или (2.6) исследуется аналогично, как в [9-11]. Оказывается, что при произвольных значениях параметров λ_1/α , λ_2/α ($0 < (\lambda_j/\alpha) < \infty$) эта система квазивполне регулярна.

Далее, определяя X_m, Y_m ($m=1, 2, \dots$), значения $\psi'(1)$, $\psi'(-1)$ и $\varphi'(\delta_1)$, $\varphi'(\delta_2)$ будут определяться из (1.12) или соответственно из (1.12*), подстановками в них $x = \pm 1$ и $x = \delta_1$, $x = \delta_2$ соответственно. Заметим, что при отсутствии материала прослойки в концевых точках накладки касательные контактные напряжения имеют корневую особенность [9-11].

В заключение отметим, что поставленные задачи в предположении, что приложенная в точке накладки $x = a$ сила P – неизвестная (внутренняя), а в точке накладки $x = b$ приложена идентичная, но противоположная P и определяемая из условия $\int_b^c \tau_2(s) ds = Q - P$, можно трактовать как контактные задачи с кусочно-однородной конечной накладкой (в этом случае в частях соединения различных кусков кусочно-однородной накладки и в точках приложения сил неизвестные касательные контактные напряжения имеют конечные значения [12]), которая по каким-то причинам оторвана от деформируемого основания на участке $x \in [a, b]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полуплоскости с двумя конечными накладками при наличии сдвиговых прослоек. Современные проблемы механики деформируемого твёрдого тела, дифференциальных и интегральных уравнений. //Тезиси докладов Межд. научн. Конференции (посвящается светлой памяти Г.Я. Попова), 23-26-августа 2013, Одесса, 2013. С.68-69.
2. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С. Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №2. С.14-23.
3. Саркисян В.С., Керопян А.В. К решению двух контактных задач для упругих тел с двумя разнородными конечными стрингерами. //Математические методы и физико-механические поля НАН Украины. Львов, 2003. Т.46. №2. С.114-121.
4. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О решении контактной задачи для полуплоскости с упругим креплением. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №1. С.5-14.
5. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet.// Quart J. of Mech. and Applied Math. Vol. XXIII. 1970. P.521.

6. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 415с.
7. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832с.
8. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса: «Вища школа», 1982. 167с.
9. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. // ПММ. 1972. Т.36. №5. С.825-831.
10. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487с.
11. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 259с.
12. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полуплоскости или бесконечной пластины с кусочно-однородным стрингером при наличии сдвига. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VII межд. конф., Институт механики НАН Армении, Ереван: 2011.С.207-214.

Сведения об авторе:

Керопян Агаси Вачаганович – канд.физ-мат.наук, доцент кафедры механики ЕГУ;
Адрес: ул. А.Манукяна, 1.
Тел.: 551 148 (раб.); 461 941(дом).
E-mail: agas50@ysu.am

Поступила в редакцию 14.11.2013

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА
НЕКЛАССИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ
ДЛЯ ПАКЕТА ИЗ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ
ТОЛЩИНЫ**

Агаловян М.Л., Геворкян Р.С.

Ключевые слова: Асимптотический метод, литосферная плита, землетрясение.

Key words: Asymptotic method, lithospheric plate, earthquake.

Աղալովյան Մ.Լ., Գևորգյան Ռ.Ս.

**Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի փաթեթի համար ջերմաառաձգականության ոչ-
դասական եզրային խնդիրների մի դասի ասիմպտոտիկական լուծումը**

Լուծված է ոչ-դասական եզրային խնդիր օրթոտրոպ սալերի փաթեթի համար, երբ նրա մի դիմային մակերևույթի վրա լարումների թենզորի համապատասխան բաղադրիչները հավասար են զերոյի և տրված են տեղափոխման վեկտորի արժեքները: Խնդիրը, մասնավորապես, մոդելավորում է սեյսմակայանների, GPS և ուրիշ չափման միջոցների կողմից գրանցած Երկրի լիտոսֆերային սալերի, կամ երկրակեղևի տեկտոնիկ շարժման ենթակա ռեգիոնի վարքը:

Ելնելով ջերմաառաձգականության եռաչափ խնդրի հավասարումներից փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի փաթեթի համար ասիմպտոտիկ եղանակով արտածված են վճռորոշ ռեկուրենտ հավասարումներ: Արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար:

Aghalovyan M.L., Gevorgyan R.S.

**Asymptotic solution of a class thermoelasticity nonclassical boundary value problems for the package of an
orthotropic plate of variable thickness**

We solve the non-classical boundary value problem for an orthotropic packet when on one of its front surface the corresponding components of the stress tensor are equal to zero and sets the value of the displacement vector. The task, in particular, is modeling the behavior of the lithospheric plates of the Earth, or a specific region of the earth's crust subject to tectonic movements of the fixed seismic stations, GPS and other measuring instruments.

On the basis of three-dimensional equations of thermo-elasticity asymptotic method derived recurrence equations allow for a package of orthotropic layers of varying thickness. We derive recursive formulas for determining the components of the stress tensor and the displacement vector.

Решена неклассическая краевая задача для ортотропного пакета, когда на одной его лицевой поверхности соответствующие компоненты тензора напряжений равны нулю и заданы значения вектора перемещения. Задача, в частности, моделирует поведение литосферных плит Земли или определённого региона земной коры, подверженных тектоническим движениям, зафиксированными сейсмостанциями, GPS и другими средствами измерений.

На основе трёхмерных уравнений термоупругости асимптотическим методом выведены рекуррентные разрешающие уравнения для пакета из ортотропных слоёв переменной толщины. Выведены рекуррентные формулы для определения компонент тензора напряжений и вектора перемещения.

Введение. Современная наука истинную причину возникновения сильных землетрясений связывает с тектоникой литосферных плит Земли ($\approx 95\%$ землетрясений) [1,2], что обуславливает важность определения напряжённо-деформированных состояний литосферных плит Земли достаточно широких регионов земной коры и осуществления мониторинга его изменения во времени.

Наличие густой сети сейсмостанций, спутниковых GPS систем, наклономеров, которые, в частности, имеют возможность для измерения значений перемещений точек поверхности соответствующего слоистого пакета и проследить за их изменением во времени, создают возможность для успешного решения этой проблемы. Однако соответствующая трёхмерная задача теории упругости оказалась неклассической, ибо условия (их шесть) заданы только на лицевой поверхности пластины или слоистого пакета из пластин – соответствующие три компонента тензора напряжений равны нулю (поверхность свободна), но известны значения перемещений точек этой поверхности как данные сейсмостанций, GPS систем, наклономеров и других измерительных приборов.

Различают два типа тектонических движений: медленные (могут длиться десятки лет) и быстрые (скачкообразные). Медленные движения являются квазистатическими (время t входит как параметр), быстрые же движения являются динамическими (форшок, землетрясение, автершок). Квазистатическая неклассическая задача для ортотропной пластинки асимптотическим методом решена в [3]. Там же показано, что всегда существует классическая краевая задача, т.е. на обеих лицевых поверхностях пластины поставлены по три условия краевых задач теории упругости, решения которых совпадают с решением неклассической задачи. В [4] найдено общее асимптотическое решение квазистатической неклассической задачи для пакета, состоящего из двух ортотропных пластин постоянной толщины, а в [5] – для пакета из " n " постоянной толщины слоёв. Асимптотическое решение динамической неклассической задачи для " n "-слоистого пакета найдено в [6].

Учитывая, что слоистая структура литосферных плит или сейсмоопасной местности, как правило, такова, что слои имеют переменные толщины, определение напряжённо-деформированных состояний таких структур становится необходимостью. В работе получено общее асимптотическое решение внутренней задачи, позволяющее удовлетворять неклассическим условиям на лицевой поверхности пакета и условиям полного контакта между слоями переменной толщины. В качестве приложения получено решение для двухслойного пакета.

1. Постановка краевых задач. Рассмотрим пакет слоёв (фиг.1), в котором слои ограничены гладкими непересекающимися поверхностями и относительно выбранной прямоугольной системы координат Охуз удовлетворяют условиям

$$\varphi^+(x, y) = \varphi_0(x, y) > \varphi_1(x, y) > \dots > \varphi_{n-1}(x, y) > \varphi_n(x, y) = \varphi^-(x, y) \quad (1.1)$$

$$h = \text{Sup}|\varphi_{i-1} - \varphi_i| \ll l, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

где l – продольный характерный размер тонкого тела.

Пусть на лицевой поверхности $z = \varphi_0(x, y)$ слоистого пакета заданы неклассические граничные условия:

$$\Phi_{\vartheta_j}^{*+} = \sigma_{jx}(x, y, \varphi_0, t) \cos(\vartheta_0, x) + \sigma_{jy}(x, y, \varphi_0, t) \cos(\vartheta_0, y) + \sigma_{jz}(x, y, \varphi_0, t) \cos(\vartheta_0, z) = 0, \quad u_j(x, y, \varphi_0, t) = u_j^+(x, y, t), \quad j = x, y, z \quad (1.2)$$

Такая задача считается неклассической, поскольку шесть граничных условий поставлены лишь на одной лицевой поверхности.

На слои действуют также объёмные силы $P_x^{(i)}, P_y^{(i)}, P_z^{(i)}$ и, определяемое по закону Дюгамеля – Неймана, температурное поле с заданной температурной функцией $\theta^{(i)} = T^{(i)} - T_0^{(i)}$.

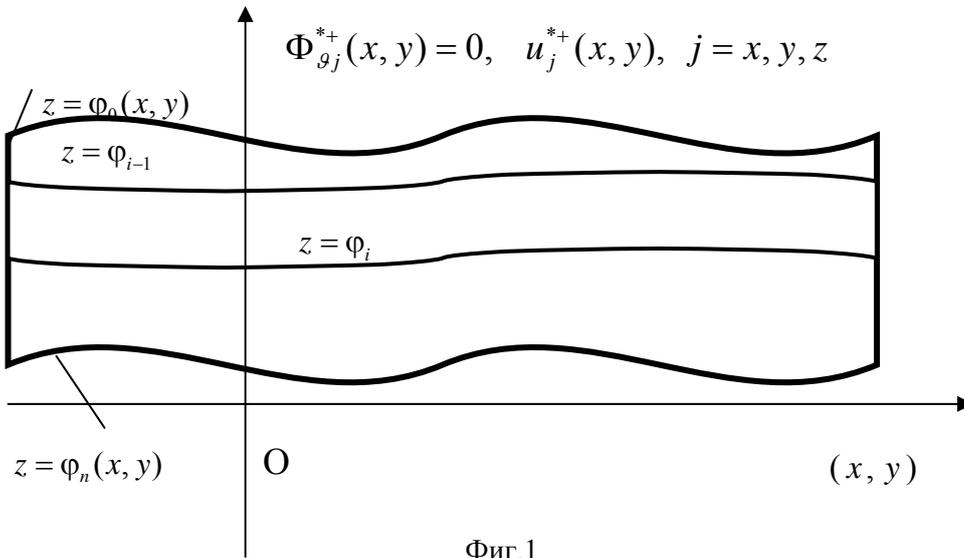
Пусть между слоями выполняются условия полного контакта теории упругости

$$z = \varphi_i : \left(\sigma_{jx}^{(i)} - \sigma_{jx}^{(i+1)} \right) \cos(\vartheta_i, x) + \left(\sigma_{jy}^{(i)} - \sigma_{jy}^{(i+1)} \right) \cos(\vartheta_i, y) +$$

$$\left(\sigma_{jz}^{(i)} - \sigma_{jz}^{(i+1)} \right) \cos(\vartheta_i, z) = 0, \quad u_j^{(i)} = u_j^{(i+1)}, \quad j = x, y, z; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.3)$$

$$\cos(\vartheta_{i-1}, x) = -\frac{1}{\Lambda_{i-1}} \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x} \quad (x, y), \quad \cos(\vartheta_{i-1}, z) = \frac{1}{\Lambda_{i-1}}$$

$$\Lambda_{i-1} = \sqrt{1 + (\partial \varphi_{i-1} / \partial x)^2 + (\partial \varphi_{i-1} / \partial y)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$



Фиг.1

Требуется определить компоненты тензора напряжений и вектора перемещения в слоях и на поверхности $z = \varphi^-(x, y)$. Считается, что заданные в (1.2) перемещения по времени t меняются медленно (для литосферных плит, в среднем, 1–3 см в год), потому и решается квазистатическая задача (считается, что время t входит в граничные условия как параметр).

Решение поставленной задачи подразумевает нахождение решения уравнений равновесия и соотношений упругости

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + P_x = 0 \quad (x, y, z)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = e_1 + \alpha_{11} \theta \quad (x, y, z; 1, 2, 3), \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = a_{44} \sigma_{yz} \quad (y, z, x; 4, 5, 6) \quad (1.4)$$

$$e_m = a_{1m} \sigma_{xx} + a_{2m} \sigma_{yy} + a_{3m} \sigma_{zz}, \quad m = 1, 2, 3$$

для каждого слоя, удовлетворяющего классическим условиям полного контакта слоёв (1.3) и неклассическим условиям краевой задачи теории упругости (1.2).

В (1.4) и в дальнейшем в уравнениях и соотношениях время t не будет фигурировать, поскольку оно входит лишь в граничные условия как параметр.

В уравнениях и соотношениях (1.4) перейдём к безразмерным [7,8] координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h} = \varepsilon^{-1} \frac{z}{l}, \quad u = \frac{u_x}{l}, \quad v = \frac{u_y}{l}, \quad w = \frac{u_z}{l}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l} \quad (1.5)$$

где l – характерный тангенциальный размер слоёв (пластин).

Подставив (1.5) в (1.4), получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \zeta} + P_x &= 0 \quad (x, y; \xi, \eta) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \zeta} + P_z &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = e_1 + \alpha_{11} \theta, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = e_2 + \alpha_{22} \theta, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = e_3 + \alpha_{33} \theta \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = a_{44} \sigma_{yz} \quad (y, x; 4, 5), \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = a_{66} \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Система уравнений и соотношений (1.6) сингулярно возмущена геометрическим малым параметром ε . Её асимптотическое решение складывается из двух решений [7-9]. Первое из них, называемое внутренним решением, удовлетворяет граничным условиям, заданным на лицевых поверхностях (пластины) слоя. Второе решение, называемое решением задачи пограничного слоя, на лицевых поверхностях пластины удовлетворяет соответствующим нулевым условиям и в сумме с внутренним решением должно удовлетворять граничным условиям, заданным на торцах слоистого пакета.

Поскольку ортотропные слоистые пакеты рассматриваются с большой продольной протяжённостью, решается только внутренняя задача.

Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического разложения

$$Q(x, y, z) = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{\chi_Q} Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (1.7)$$

где Q – любая из неизвестных компонент вектора перемещения u_x, u_y, u_z , тензора напряжений σ_{ij} каждого слоя, χ_Q – асимптотический порядок соответствующей величины, который для всех перемещений $\chi_u = 0$, а для всех напряжений $\chi_\sigma = -1$ [7-9].

Такие асимптотические порядки впервые установлены в [9] в смешанных краевых задачах для полос. Они оказались справедливыми и для пластин и оболочек [7,8].

Считаем, что объёмные силы и температурное поле с самого начала должны присутствовать в итерационном процессе, т.е. их вклады соизмеримы с вкладом поверхностных воздействий, если они допускают следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} P_j(x, y, z) &= \sum_{s=0}^S \varepsilon^{-2+s} l^{-1} P_j^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z \\ \theta(x, y, z) &= \sum_{s=0}^S \varepsilon^{-1+s} \theta^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad Q^{(0)} = Q, \quad Q^{(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad Q = \{P_j, \theta\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Подставив (1.7), (1.8) в систему сингулярных уравнений и соотношений (1.6) и приравняв коэффициенты при ε^s ($s = 0, 1, 2, \dots, S$) в левых и правых частях

равенств, получим непротиворечивую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (1.7), что свидетельствует о правильности выбранной асимптотики. Новая система допускает интегрирование по поперечной координате ζ . В результате, для компонент тензора напряжений и вектора перемещения получаются следующие рекуррентные формулы, которые для произвольного i -го слоя пакета имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{jz}^{(i,s)} &= \sigma_{jz0}^{(i,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z \\ \sigma_{xx}^{(i,s)} &= A_{13}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{xx*}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ \sigma_{xx*}^{(i,s)} &= A_{13}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) + B_{11}^{(i)} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(i)} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \gamma_{11}^{(i)} \theta^{(i,s)}\end{aligned}\quad (1.9)$$

$(x, y; \xi, \eta; u, v; 1, 2)$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(i,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(i)}} \left(\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \Delta^{(i)} = a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{12}^{(i)2} \\ u_0^{(i,s)} &= u_0^{(i,s)}(\xi, \eta) + \zeta A_{55}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} + u_*^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (x, y, z; u, v, w; 5, 4, 3)\end{aligned}$$

Здесь обозначены:

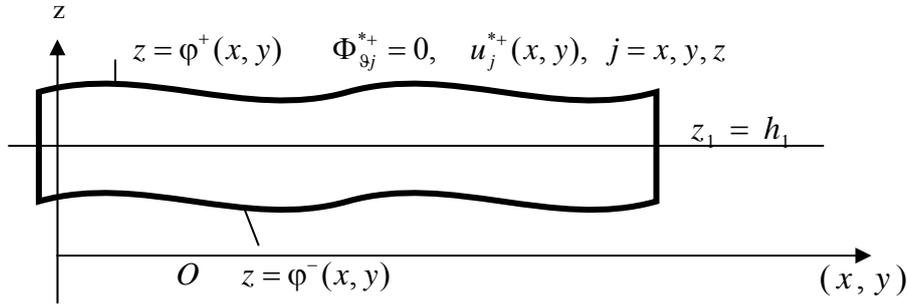
$$\begin{aligned}\sigma_{jz*}^{(i,s)} &= - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{jx}^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + P_j^{(i,s)} \right) d\zeta, \quad j = x, y, z \\ \sigma_{xx*}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) &= A_{13}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} + B_{11}^{(i)} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(i)} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \gamma_{11}^{(i)} \theta^{(i,s)} \\ &\quad (x, y; \xi, \eta; u, v; 1, 2) \\ u_*^{(i,s)} &= \int_0^\zeta \left(a_{55}^{(i)} \sigma_{xz*}^{(i,s)} - \frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta \quad (\xi, \eta; u, v; 5, 4) \\ w_*^{(i,s)} &= \int_0^\zeta \left(A_{33}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} - A_{13}^{(i)} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} - A_{23}^{(i)} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \gamma_{33}^{(i)} \theta^{(i,s)} \right) d\zeta \\ A_{33}^{(i)} &= a_{13}^{(i)} A_{13}^{(i)} + a_{23}^{(i)} A_{23}^{(i)} + a_{33}^{(i)}, \quad A_{kk}^{(i)} = a_{kk}^{(i)}, \quad k = 4, 5, 6 \\ A_{j3}^{(i)} &= -a_{13}^{(i)} B_{j1}^{(i)} - a_{23}^{(i)} B_{j2}^{(i)}, \quad j = 1, 2; \quad B_{11}^{(i)} = \frac{a_{22}^{(i)}}{\Delta^{(i)}}, \quad B_{12}^{(i)} = -\frac{a_{12}^{(i)}}{\Delta^{(i)}} \quad (1, 2)\end{aligned}\quad (1.10)$$

Полученный общий интеграл (1.7), (1.9), (1.10) системы уравнений (1.4) содержит $6n$ функций интегрирования $\sigma_{xz0}^{(i,s)}, \sigma_{yz0}^{(i,s)}, \sigma_{zz0}^{(i,s)}, u_0^{(i,s)}, v_0^{(i,s)}, w_0^{(i,s)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые однозначно определяются из шести неклассических граничных условий (1.2) и $6(n-1)$ условий (1.3) полного контакта слоёв.

Формулы (1.7), (1.9), (1.10) позволяют определить и проследить изменение напряжённо-деформированных состояний литосферных плит определённого региона земной коры, вызванное тектоническими перемещениями за определённый промежуток времени.

2. **Моделирование напряжённо-деформированного состояния пакета, состоящего из двух ортотропных слоёв.** Пусть пакет состоит из двух ортотропных слоёв: $z = \varphi^+(x, y)$, $z = \varphi^-(x, y)$, разделённых плоскостью $z = h_1$ (фиг.2) и пусть за определённое время (напр., за год) свободные от нагрузки точки земной поверхности с координатами $(x, y, \varphi^+(x, y))$ получили перемещения u_x^+, u_y^+, u_z^+ . Используя формулы (1.7), (1.9), (1.10), удовлетворив граничным условиям (1.2) и условиям полного контакта слоёв (1.3), вычислим значения всех двенадцати функций интегрирования первого и второго слоёв пакета.

Они для произвольного приближения "S" имеют вид:



Фиг. 2

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz0}^{(1,s)}(\xi, \eta) &= F_x^{(s)} + \frac{A_{13}}{\Delta^+} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} \left(F_x^{(s)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} + F_y^{(s)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \eta} + F_z^{(s)} \right) (x, y; \xi, \eta) \\
 \sigma_{zz0}^{(1,s)}(\xi, \eta) &= \left(F_x^{(s)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} + F_y^{(s)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \eta} + F_z^{(s)} \right) / \Delta^+ \\
 F_x^{(s)} &= \sigma_{xx^*}^{(1,s)} \left(\zeta = \frac{\varphi^+}{l} \right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} + \sigma_{xy}^{(1,s)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \eta} - \sigma_{xz^*}^{(1,s)} \left(\zeta = \frac{\varphi^+}{l} \right) (x, y; \xi, \eta) \\
 F_z^{(s)} &= \sigma_{xz^*}^{(1,s)} \left(\zeta = \frac{\varphi^+}{l} \right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} + \sigma_{yz^*}^{(1,s)} \left(\zeta = \frac{\varphi^+}{l} \right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial \eta} - \sigma_{zz^*}^{(1,s)} \left(\zeta = \frac{\varphi^+}{l} \right) \quad (2.1) \\
 \Delta^+ &= 1 - A_{13}^{(1)} \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} \right)^2 - A_{23}^{(1)} \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial \eta} \right)^2 \\
 u_0^{(1,s)}(\xi, \eta) &= u^{+(1,s)} - \varphi^+ / h A_{55}^{(1)} \sigma_{xz0}^{(1,s)} + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta = \varphi^+ / h) \quad (x, y; u, v; 5, 4) \\
 w_0^{(1,s)}(\xi, \eta) &= w^{+(1,s)} - \varphi^+ / h A_{55}^{(1)} \sigma_{zz0}^{(1,s)} + w_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta = \varphi^+ / h) \\
 u^{+(1,0)} &= u_x^+ / l, \quad u^{+(1,s)} = 0, \quad s = 0 \quad (x, y, z; u, v, w) \\
 \sigma_{jz0}^{(2,s)} &= \sigma_{jz0}^{(1,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz^*}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta = h_1 / h) - \sigma_{jz^*}^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta = h_1 / h), \quad j = x, y, z \\
 u_0^{(2,s)} &= u_0^{(1,s)} + h_1 / h \left(A_{55}^{(1)} \sigma_{xz0}^{(1,s)} - A_{55}^{(2)} \sigma_{xz0}^{(2,s)} \right) + u_*^{(1,s)}(\zeta = h_1 / h) - u_*^{(2,s)}(\zeta = h_1 / h) \\
 &\quad (x, y, z; u, v, w; 5, 4, 3)
 \end{aligned}$$

По рекуррентным формулам (1.9), (1.10), (2.1) вычислим значения компонент тензоров напряжений и векторов перемещений первого и второго слоёв пакета, ограничившись первыми тремя шагами итерации ($S = 2$), достаточных для практических приложений:

для первого слоя $h_1 \leq z \leq \varphi^+(x, y)$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(1)} &= \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + (\varphi^+ - z)T_z^{(1)}, & \sigma_{xz}^{(1)} &= \tau_x^{(1)} + \tau_x^{(2)} + (\varphi^+ - z)T_x^{(1)} \\ \sigma_{xx}^{(1)} &= A_{13}^{(1)} \left(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + (\varphi^+ - z)T_z^{(1)} \right) + B_{11}^{(1)} \frac{\partial u_x^+}{\partial x} + B_{12}^{(1)} \frac{\partial u_y^+}{\partial y} + \\ &+ B_{11}^{(1)} \left((z - \varphi^+) \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} - U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right) + B_{12}^{(1)} \left((z - \varphi^+) \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial x} - U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right) \\ \sigma_{xy}^{(1)} &= \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_x^+}{\partial y} + \frac{\partial u_y^+}{\partial x} \right) + \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left[(z - \varphi^+) \left(\frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} - U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right]\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(1)} &= \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_x^+}{\partial y} + \frac{\partial u_y^+}{\partial x} \right) + \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left[(z - \varphi^+) \left(\frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} - U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right] \\ u_x^{(1)} &= u_x^+ + (z - \varphi^+) \left(a_{55}^{(1)} \tau_x^{(2)} + U_{55}^{(1)} + W^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right) - \frac{(z - \varphi^+)^2}{2} \left(a_{55}^{(1)} T_x^{(1)} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} \right) \\ u_z^{(1)} &= u_z^+ + (z - \varphi^+) \left(A_{33}^{(1)} \sigma^{(2)} + W^{(1)} \right) + (z - \varphi^+) \left(A_{13}^{(1)} U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + A_{23}^{(1)} U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right) \\ &- \frac{(z - \varphi^+)^2}{2} \left(A_{33}^{(1)} T_z^{(1)} + A_{13}^{(1)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + A_{23}^{(1)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) (x, y; A_{13}, A_{23}; B_{11}, B_{22}; a_{55}, a_{44})\end{aligned}$$

Для второго слоя $\varphi^-(x, y) \leq z \leq h_1$:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(2)} &= \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + (\varphi^+ - h_1)T_z^{(1)} + (h_1 - z)T_z^{(2)} \\ \sigma_{xz}^{(2)} &= \tau_x^{(1)} + \tau_x^{(2)} + (\varphi^+ - h_1)T_x^{(1)} + (h_1 - z)T_x^{(2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(2)} &= A_{13}^{(2)} \left[\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + (\varphi^+ - h_1) T_z^{(1)} + (h_1 - z) T_z^{(2)} \right] + \\
&+ B_{11}^{(2)} \left(\frac{\partial u_x^+}{\partial x} - U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right) + B_{12}^{(2)} \left(\frac{\partial u_y^+}{\partial y} - U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right) + \\
&+ (h_1 - \varphi^+) \left(B_{11}^{(2)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) + (z - h_1) \left(B_{11}^{(2)} \frac{\partial U_{55}^{(2)}}{\partial x} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial U_{44}^{(2)}}{\partial y} \right) \\
\sigma_{xy}^{(2)} &= \frac{1}{a_{66}^{(2)}} \left[\frac{\partial u_x^+}{\partial y} + \frac{\partial u_y^+}{\partial x} - U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} - U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + \right. \\
&\left. + (h_1 - \varphi^+) \left(\frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial x} \right) + (z - h_1) \left(\frac{\partial U_{55}^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial U_{44}^{(2)}}{\partial x} \right) \right] \\
u_x^{(2)} &= u_x^+ + (h_1 - \varphi^+) \left(a_{55}^{(1)} \tau_x^{(2)} + U_{55}^{(1)} + W^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right) - \\
&- \frac{(h_1 - \varphi^+)^2}{2} \left(a_{55}^{(1)} T_x^{(1)} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} \right) - \frac{(z - h_1)^2}{2} \left(a_{55}^{(2)} T_x^{(2)} + \frac{\partial W^{(2)}}{\partial x} \right) + \\
&+ (z - h_1) \left[a_{55}^{(2)} \tau_x^{(2)} + U_{55}^{(2)} + W^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + (\varphi^+ - h_1) \left(a_{55}^{(2)} T_x^{(1)} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} \right) \right] \\
u_z^{(2)} &= u_z^+ + (h_1 - \varphi^+) \left(A_{33}^{(1)} \sigma^{(2)} + W^{(1)} + A_{13}^{(1)} U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + A_{23}^{(1)} U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right) - \\
&- \frac{(h_1 - \varphi^+)^2}{2} \left(A_{33}^{(1)} T_z^{(1)} + A_{13}^{(1)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + A_{23}^{(1)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) - \\
&- \frac{(h_1 - \varphi^+)^2}{2} \left(A_{33}^{(1)} T_z^{(1)} + A_{13}^{(1)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + A_{23}^{(1)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) + \\
&+ (z - h_1) \left[A_{33}^{(2)} \sigma^{(2)} + W^{(2)} + A_{13}^{(2)} U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + A_{23}^{(2)} U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} + \right. \\
&\left. + (\varphi^+ - h_1) \left(A_{33}^{(2)} T_z^{(1)} + A_{13}^{(2)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + A_{23}^{(2)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) \right] - \\
&- \frac{(z - h_1)^2}{2} \left(A_{33}^{(2)} T_z^{(2)} + A_{13}^{(2)} \frac{\partial U_{55}^{(2)}}{\partial x} + A_{23}^{(2)} \frac{\partial U_{44}^{(2)}}{\partial y} \right) \\
&\quad (x, y; A_{13}, A_{23}; B_{11}, B_{22}; a_{55}, a_{44})
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В формулах (2.2), (2.3) обозначены:

$$\sigma^{(i)} = \left(F_x^{(i)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + F_y^{(i)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right) / \Delta^+, \quad \tau_x^{(i)} = F_x^{(i)} + A_{13}^{(1)} \sigma^{(i)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x}, \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned}
\Delta^+ &= 1 - A_{13}^{(1)} \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right)^2 - A_{23}^{(1)} \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right)^2, \quad T_z^{(i)} = \frac{\partial \tau_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y^{(i)}}{\partial y}, \quad i = 1, 2 \\
T_x^{(i)} &= A_{13}^{(i)} \frac{\partial \sigma^{(i)}}{\partial x} + B_{11}^{(i)} \frac{\partial^2 u_x^+}{\partial x^2} + B_{12}^{(i)} \frac{\partial^2 u_y^+}{\partial x \partial y} + \frac{1}{a_{66}^{(i)}} \left(\frac{\partial^2 u_x^+}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y^+}{\partial x \partial y} \right), \quad i = 1, 2 \\
F_x^{(1)} &= \left(B_{11}^{(1)} \frac{\partial u_x^+}{\partial x} + B_{12}^{(1)} \frac{\partial u_y^+}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_y^+}{\partial x} + \frac{\partial u_x^+}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \\
F_x^{(2)} &= -\frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \left(B_{12}^{(1)} + \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \right) U_{44}^{(1)} - \left[B_{11}^{(1)} \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right)^2 \right] U_{55}^{(1)} \\
W^{(i)} &= A_{33}^{(i)} \sigma^{(1)} - A_{13}^{(i)} \frac{\partial u_x^+}{\partial x} - A_{23}^{(i)} \frac{\partial u_y^+}{\partial y}, \quad U_{55}^{(i)} = a_{55}^{(i)} \tau_x^{(1)} - \frac{\partial u_z^+}{\partial x}, \quad i = 1, 2 \\
&\quad (x, y; A_{13}, A_{23}; B_{11}, B_{22}; a_{55}, a_{44})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

На поверхности контакта слоёв для первого и второго слоёв $z = h_1$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(1)}(z = h_1) &= \sigma_{zz}^{(2)}(z = h_1) = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + (\varphi^+ - h_1) T_z^{(1)} \\
\sigma_{xz}^{(1)}(z = h_1) &= \sigma_{xz}^{(2)}(z = h_1) = \tau_x^{(1)} + \tau_x^{(2)} + (\varphi^+ - h_1) T_x^{(1)} \\
u_x^{(1)}(z = h_1) &= u_x^{(2)}(z = h_1) = u_x^+ + (h_1 - \varphi^+) \left(a_{55}^{(1)} \tau_x^{(2)} + U_{55}^{(1)} + \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} W^{(1)} \right) - \\
&\quad - \frac{(h_1 - \varphi^+)^2}{2} \left(a_{55}^{(1)} T_x^{(1)} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} \right) \quad (x, y; A_{13}, A_{23}; B_{11}, B_{22}; a_{55}, a_{44}) \\
u_z^{(1)}(z = h_1) &= u_z^{(2)}(z = h_1) = u_z^+ - \frac{(h_1 - \varphi^+)^2}{2} \left(A_{33}^{(1)} T_z^{(1)} + A_{13}^{(1)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. + A_{23}^{(1)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) + (h_1 - \varphi^+) \left(A_{33}^{(1)} \sigma^{(2)} + W^{(1)} + A_{13}^{(1)} U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + A_{23}^{(1)} U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Формулы (2.2)-(2.5) моделируют изменение напряжённно-деформированного состояния в литосферной плите или в заданном участке земной коры для заданного времени "t" проведённого измерения сейсмостанциями, GPS и другими системами измерения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13–2C009SCS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pichon X. Le., Francheteau J. Vonnin J. Plate tectonics. Elsevier. 1973. (К.Л. Пишон, Ж. Франшто, Ж. Боннин. Тектоника плит. М.: Мир, 1977. 288с.)
2. Kasahara K. Eartquake Mechanics. Cambridge University Press, 1981. Касахара К. Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 264 с.

3. Aghalovyan L.A. On one class of three-dimensional problems of elasticity theory for plates //Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011. Vol.155, pp 3-10.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Гулгазарян Л.Г. К определению напряжённо-деформированных состояний литосферных плит Земли на основе данных GPS систем //Докл. НАН Армении. 2012. Т.112. №3. С.264-270.
5. Aghalovyan L.A. The Research of Lithospheric Plates Tectonics of the Earth on the Base of Data of Seismostations, GPS Systems, the Solutions of problems of Elasticity Theory and the Earthquakes Prediction. //Proceedings of the 15 th World Conference on Earthquake Engineering (Lisbon, Portugal. 24-28 September, 2012). 15 WCEE – title index.WCEE 2012-3008.pdf.
6. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. О динамическом поведении литосферных плит Земли на основе данных сейсмостанций и GPS систем.// Тр. Международной конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды” (08-12 сентября 2012. Цахкадзор, Армения). Ереван: 2012. Т.1. С.42-46.
7. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука-физматлит., 1997. 414с.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн, 2005. 468с.
9. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела// Межвуз. сборник научн. трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1982. С.7-12.

Сведения об авторах:

Агаловян Мгер Ленсерович – доктор физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: пр. Маршала Баграмяна, 24^б, 0019, Ереван, Армения.

E-mail: mheraghalovyan@rambler.ru

Дом. адрес: ул. Давида Маляна 4, кв. 63. 0096, Ереван, Армения.

Геворкян Рубен Степанович – профессор, доктор физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Тел.: (+37410) 270828, (+37493) 536883

E-mail: gevorgyanrs@mail.ru

Дом. адрес: ул. Киевяна, 12, кв. 6. 0028, Ереван, Армения.

Поступила в редакцию 26. 11. 2013

УДК 532.529.5: 532.591

**СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ НЕВЯЗКОЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ
СМЕСЬЮ**

Оганян Г.Г., Саакян С.Л.

Ключевые слова: несимметричные колебания, оболочка, жидкость, газ, пузырек.

Keywords: nonsymmetrical vibrations, shell, liquid, gas, bubble.

Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ.

**Հոսող ոչ մածուցիկ զազաղեղուկ խառնուրդ պարունակող շրջանաձև զլանային
թաղանթի սեփական տատանումները**

Դիտարկված է Կիրիսֆ-Լյավի տեսությամբ համապատասխանող անվերջ զլանային թաղանթի ոչ սիմետրիկ տատանումների որոշման խնդիրը: Թաղանթը լցված է հոսող խոշոր և մանր չափի պղպջակներ պարունակող հեղուկի խառնուրդով: Թվային վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ տատանումների բոլոր նույն ձևերի համար մանր պղպջակներով խառնուրդ-թաղանթ համակարգի հաճախականությունները իրենց մեծությամբ գերազանցում են խոշոր պղպջակներ ունեցող համակարգի հաճախականություններին: Թաղանթի հաստությունը մեծացնելով և դիտարկվող ձևերի ու խառնուրդի հոսանքի արագությունը փոքրացնելով համակարգի տատանումների հաճախությունները մեծանում են, ինչպես մաքուր հեղուկ-թաղանթ համակարգի դեպքում:

Ohanyan G.G., Sahakyan S.L.

The self-vibrations of cylindrical shell, filled by the flowing non viscous Gas-Liquid mixture

The problem of nonsymmetrical self-vibrations of the infinite long shell, filled by the flowing non viscous Liquid with large or small sizes of bubbles is considered. The subsonic regime of the shell-mixture system with small bubbles which vibration frequencies exceed the frequencies values of those with the large bubbles is considered. The frequency values of the system is increased, when shell thickness and flow speed are increased as when vibration modes are decreased analogous to the case of shell with the pure liquids.

Исследована задача определения несимметричных собственных колебаний бесконечно длинной упругой оболочки, наполненной протекающей односкоростной смесью жидкости с крупными и мелкими пузырьками газа. Рассмотрен дозвуковой режим протекания смеси, при котором частоты колебаний системы оболочка-смесь с мелкими пузырьками превышают значения частот оболочки с крупными пузырьками. С увеличением толщины оболочки и с уменьшением значения моды колебаний, а также скорости протекания значения частот возрастают, как в случае оболочки с чистой жидкостью.

Взаимодействия оболочек с газожидкостной смесью при вибрационных воздействиях изучены в [1], где двухфазная среда моделируется как двускоростная смесь, состоящая из слоёв несущей жидкости с включениями в виде газовых пузырьков. Поведение замкнутой цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, при динамическом воздействии равномерно распределённого давления исследовано в [2]. Методика расчёта нестационарных колебаний оболочек с протекающей жидкостью, где нестационарность обусловлена действием внешних квазипериодических сил, частоты которых являются медленно меняющимися во времени, изложена в [3]. Исследования [1-4] динамического взаимодействия оболочки с жидкостью выявили, что гидроупругая система оболочка-жидкость обладает свойствами, не присущими отдельным её компонентам.

1. Уравнения гидродинамики. Пусть бесконечно длинная деформируемая цилиндрическая оболочка наполнена смесью несжимаемой жидкости с одинаковыми по размеру пузырьками калорически совершенного газа. Полагается, что относительного перемещения фаз нет, т.е. движения фаз происходят с одинаковыми по величине и направлению скоростями (односкоростная модель). Эффектами дробления, слипания и образования новых пузырьков, а также межфазного теплообмена и поверхностного натяжения пренебрегаются. Уравнения движения монодисперсной смеси пузырьковой структуры имеют вид [5]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$P = (1-\beta)P_1 + \beta P_2, \quad \rho = (1-\beta)\rho_1 + \beta\rho_2, \quad \rho_2 a^3 = \text{const}, \quad \rho_1 = \text{const} \quad (1.1)$$

$$P_2 - P_1 = \rho_1 a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{da}{dt} \right)^2, \quad \frac{\beta \rho_2}{(1-\beta)\rho_1} = \text{const}, \quad \frac{P_2}{P_0} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^\gamma$$

Здесь начало цилиндрической системы координат r, θ, x с ортами $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x$ размещено в сечении $x=0$, t – время, \vec{v} – вектор скорости смеси, P и ρ – давление и плотность, β – объёмное газосодержание, a – радиус пузырька, γ – показатель адиабаты газа, ∇ – оператор Гамильтона. Индексы 1 и 2 отнесены к параметрам жидкой и газовой фаз соответственно, а индекс 0 – к состоянию равновесия (покоя). Параметры, характеризующие смесь в целом, индексов не имеют.

Для дальнейшего анализа удобно несколько видоизменить уравнение Рэлея–Лэмба, описывающего динамику совместного деформирования фаз. Используя определение давления всей смеси, заменим перепад давлений в фазах на перепад давлений в пузырьке и самой смеси в целом. В результате придём к уравнению

$$P_2 - P = (1-\beta) \left[\rho_1 a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right] \quad (1.2)$$

Исследуем возмущённое течение смеси при малых отклонениях её параметров от значений в состоянии покоя. Малость возмущений позволяет линеаризовать систему (1.1), (1.2) и записать уравнения в форме

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P', \quad \operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \quad P'_2 - P' = (1-\beta_0) \rho_1 a_0 \frac{\partial^2 a'}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

$$\rho' = (\rho_{20} - \rho_1) \beta' + \beta_0 \rho'_2, \quad \frac{\rho'_2}{\rho_{20}} = -\frac{1}{1-\beta_0} \frac{\beta'}{\beta_0}, \quad a' = -\frac{a_0}{3} \frac{\rho'_2}{\rho_{20}}, \quad P'_2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_{20}} \rho'_2, \quad (1.4)$$

где штрихи отнесены к возмущённым характеристикам смеси. Исключив в (1.4) функции ρ'_2 и β' , приходим к формулам

$$\rho' = \frac{\beta_0 \rho_0}{\rho_{20}} \rho'_2, \quad P'_2 = c_0^2 \rho'_2, \quad a' = -\frac{a_0}{3} \frac{1}{\beta_0 \rho_0} \rho'_2, \quad c_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_0 \rho_0}.$$

Здесь c_0 – невозмущённая скорость звука в смеси. Комбинирование полученных формул с уравнением Рэлея–Лэмба из (1.3) позволяет получить связь

$$P' = c_0^2 \rho' + (1-\beta_0) \frac{c_0^2}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_1 a_0^2} \quad (1.5)$$

которую можно рассматривать как неголономное уравнение состояния среды, где давление зависит не только от плотности смеси, но и от её второй производной по времени вследствие радиальной инерции жидкости. Здесь ω_{ar} – адиабатическая частота Миннаерта. Рассмотрим потенциальное течение смеси, когда $\vec{v} = \nabla \phi$, где ϕ – скалярный потенциал. Тогда из уравнений движения и неразрывности смеси (1.3) следуют уравнения

$$P' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial P'}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \varphi, \quad \operatorname{div}(\nabla \varphi) = \Delta \varphi. \quad (1.6)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат. Комбинируя выражения (1.5) и (1.6), получим уравнение для определения потенциала $\varphi(r, \theta, x, t)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \left[1 + \frac{1 - \beta_0}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Delta \varphi = 0 \quad (1.7)$$

Пусть внутри оболочки однородный поток рассматриваемой смеси перемещается вдоль положительного направления оси x с постоянной скоростью V . Вводя в рассмотрение систему координат (r', θ', x') , жёстко связанную с оболочкой, будем иметь

$$x = x' - Ut, \quad r = r', \quad \theta = \theta', \quad t = t' \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + U \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta'}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r'}$$

При малых значениях газосодержания $\beta_0 \ll 1$ уравнение (1.7) в системе координат (1.8) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi - c_0^2 \left[1 + \frac{1}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi = 0 \quad (1.9)$$

Здесь штрихи над координатами опущены, что будет выполняться и впредь. Решение уравнения (1.9) будем искать в форме

$$\varphi(r, \theta, x, t) = f(r) e^{i(\omega t + \alpha x)} \cos n\theta,$$

где ω – циклическая частота, $\alpha = \pi/L$ – волновое число, L – длина полуволн вдоль образующей цилиндра, n – число окружных волн. Искомая функция $f(r)$ удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \left(\lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0, \quad \lambda^2 = \alpha^2 - \frac{(\omega + \alpha U)^2}{c_0^2} \left[1 - \frac{(\omega + \alpha U)^2}{\omega_{ar}^2} \right]^{-1}, \quad (1.10)$$

общим решением которого является линейная комбинация модифицированных функций Бесселя первого I_n и второго K_n родов порядка n

$$f(r) = b_0 I_n(\lambda r) + b_1 K_n(\lambda r), \quad b_0, b_1 = \text{const.}$$

Поскольку при $r \rightarrow 0$ функция K_n неограниченно возрастает, постольку, в силу ограниченности функции f , следует полагать $b_1 \equiv 0$. Тогда скалярный потенциал предстанет в виде

$$\varphi(r, \theta, x, t) = b_0 I_n(\lambda r) e^{i(\omega t + \alpha x)} \cos n\theta. \quad (1.11)$$

В принятой модели газожидкостной смеси пренебрегается поверхностным натяжением в пузырьках и пульсационным напряжением в жидкости. Компоненты

тензора напряжений всей смеси определяются через компоненты тензоров несжимаемой жидкости и газовой фазы посредством формул [5]

$$\sigma_{rr} = (1 - \beta_0) \sigma_{rr}^{(1)} + \beta_0 \sigma_{rr}^{(2)} = -[(1 - \beta_0) P_1' + \beta_0 P_2'] = -P', \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{rx}^{(1)} = 0 \quad (1.12)$$

Здесь верхние индексы указывают на принадлежность тензоров к соответствующим фазам, при этом $\sigma^{(2)} = -P_2 \delta_{mn}$ является шаровым (δ_{mn} – символ Кронекера). Подставляя первое уравнение из (1.6) в (1.12), в координатах (1.8) получим формулы

$$\sigma_{rr} = \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rx} = 0. \quad (1.13)$$

С получением последних соотношений гидродинамическая часть исследования поставленной задачи гидроупругости завершается. Перейдём к рассмотрению её упругой составляющей.

2. Уравнения движения цилиндрической оболочки кругового сечения.

Модель Кирхгофа–Лява. Полагая оболочку тонкостенной и считая прогибы малыми в сравнении с толщиной, воспользуемся линейной теорией оболочек, для которых уравнения движения имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1 + \nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1 - \nu^2}{Eh} q_x + \rho_* \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1 + \nu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= -\frac{1 - \nu^2}{Eh} q_\theta + \rho_* \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R^2} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} q_r + \rho_* \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь u, v, w – смещения точек срединной поверхности соответственно в осевом направлении, вдоль дуги кругового сечения и по нормали к поверхности оболочки (радиальном направлении). Прогиб w считается положительным вдоль направления к центру кривизны; q_x, q_θ, q_r – составляющие внешней нагрузки по соответствующим координатным осям, ρ_* и h – плотность материала и толщина оболочки, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга. В силу тонкостенности, условия на поверхности оболочки будут в дальнейшем удовлетворяться на её срединной поверхности.

В точках примыкания смеси к стенкам трубы скорость частиц смеси в радиальном направлении r по величине должна совпадать со скоростью смещения w примыкающих к смеси точек. Такое требование приводит к формулировке граничного кинематического условия непроницаемости или плавности обтекания у стенки оболочки

$$v_r \Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (2.2)$$

В рассматриваемой смеси касательные напряжения, согласно (1.13), отсутствуют. Воздействие нормального напряжения смеси σ_{rr} на внутреннюю поверхность оболочки должно уравниваться радиальной компонентой q_r внешней силы, что позволяет сформулировать динамическое граничное условие

$$q_r = -\sigma_{rr}|_{r=R} = -\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(R, \theta, x, t). \quad (2.3)$$

Преобразуем условие (2.2). Вычисляя производную согласно решению (1.11), имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\lambda I'_n(\lambda R)}{I_n(\lambda R)} \varphi = - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varphi = - \frac{I_n(\lambda r)}{\lambda I'_n(\lambda R)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) w \quad (2.4)$$

Тогда представление (2.3) компоненты q_r , согласно (2.4), переписывается в форме

$$q_r = \rho_0 \frac{I_n(\lambda r)}{\lambda I'_n(\lambda R)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w. \quad (2.5)$$

В выражениях (2.4) и (2.5) штрих над функцией Бесселя означает дифференцирование по аргументу. Решение системы уравнений (2.1) в соответствии с представлением (1.11) будем искать в виде

$$(u, w) = (u_*, w_*) e^{i(\omega t + \alpha x)} \cos n\theta, \quad v = v_* e^{i(\omega t + \alpha x)} \sin n\theta, \quad (2.6)$$

где u_* , v_* , w_* – амплитуды волн в соответствующих направлениях. Учитывая (2.5) и полагая, в соответствии с (1.13), $q_x = 0$, $q_\theta = 0$, из (2.1) получим однородную систему алгебраических уравнений относительно функций u_* , v_* , w_* , в которой совершим переход к безразмерным параметрам

$$\omega_* = \frac{\omega R}{c_*}, \quad U_* = \frac{U}{c_*}, \quad \alpha_* = \alpha R, \quad \delta = \frac{a_0}{R}, \quad l = \frac{h}{R}, \quad c_*^2 = \frac{E}{\rho_*(1-v^2)}, \quad \lambda_* = \lambda R$$

Здесь c_* – скорость звука (распространения продольных волн) в материале оболочки, δ и l – приведённые радиус пузырька и толщина оболочки. В результате выкладок приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} & \left(\omega_*^2 - \alpha_*^2 - \frac{1-v}{2} n^2 \right) u_* + i \frac{1+v}{2} \alpha_* n v_* - i v \alpha_* w_* = 0 \\ & -i \frac{1+v}{2} \alpha_* n u_* + \left(\omega_*^2 - \frac{1-v}{2} \alpha_*^2 - n^2 \right) v_* + n w_* = 0 \\ & i v \alpha_* u_* + n v_* + \left[\omega_*^2 - 1 - \frac{l^2}{12} (\alpha_*^2 + n^2)^2 + \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{I_n(\lambda_*)}{\lambda_* I'_n(\lambda_*)} \frac{(\omega_* + \alpha_* U_*)^2}{l} \right] w_* = 0 \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений полученной линейной однородной системы является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при u_* , v_* и w_* . Отсюда следует дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
& \left[\omega_*^2 - 1 - \frac{l^2}{12} (\alpha_*^2 + n^2)^2 + \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{I_n(\lambda_*)}{\lambda_* I_n'(\lambda_*)} \frac{(\omega_* + \alpha_* U_*)^2}{l} \right] \times \\
& \times \left[\left(\omega_*^2 - \alpha_*^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \left(\omega_*^2 - \frac{1-\nu}{2} \alpha_*^2 - n^2 \right) - \left(\frac{1+\nu}{2} \alpha_* n \right)^2 \right] - \\
& - n^2 \left[\omega_*^2 - (1-\nu) \alpha_*^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right] - \nu^2 \alpha_*^2 \left(\omega_*^2 - \frac{1-\nu}{2} \alpha_*^2 \right) = 0 \\
\lambda_*^2 &= \alpha_*^2 - \frac{c_*^2}{c_0^2} (\omega_* + \alpha_* U_*)^2 \left[1 - \frac{\rho_0 c_*^2}{3\gamma P_0} \delta^2 (\omega_* + \alpha_* U_*)^2 \right]^{-1}. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Если ввести в рассмотрение число Маха

$$M_1 = \frac{c_*}{c_0} \frac{\omega_* + \alpha_* U_*}{\alpha_*}, \quad \lambda_*^2 = \alpha_*^2 \left[1 - M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} \delta^2 \alpha_*^2 M_1^2 \right)^{-1} \right],$$

то из требования $\lambda_*^2 > 0$ следует условие

$$\frac{1}{M_1^2} > 1 + \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} \delta^2 \alpha_*^2,$$

соответствующее дозвуковому ($M_1 < 1$) режиму течения смеси.

Вернёмся к (1.10), которое можно переписать в виде уравнения Бесселя

$$f'' + \frac{1}{r} f' + \left(\lambda_2^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0, \quad \lambda_2^2 = -\alpha^2 + \frac{(\omega_* + \alpha_* U)^2}{c_0^2} \left[1 - \frac{(\omega_* + \alpha U)^2}{\omega_{ar}^2} \right]^{-1} \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что в данном случае приемлемым решением для потенциала $\varphi(r, \theta, x, t)$ будет функция

$$\varphi(r, \theta, x, t) = b_2 I_n(\lambda_2 r) e^{i(\omega t + \alpha x)}, \quad b_2 = \text{const},$$

где $I_n(\lambda_2 r)$ – функция Бесселя первого рода порядка n . Для компоненты q_r внешней силы получим формулу

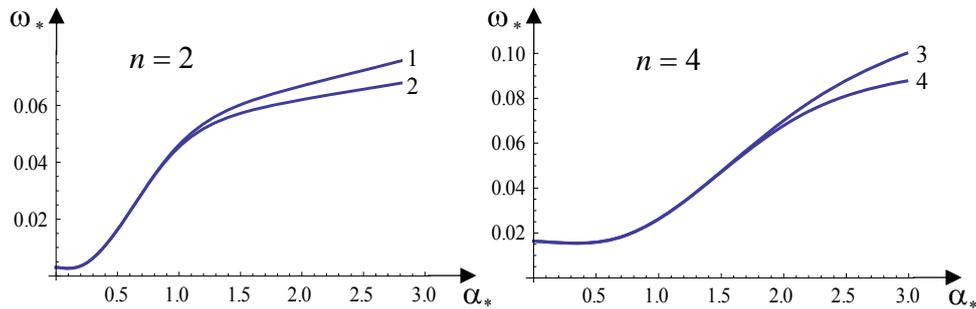
$$q_r = \rho_0 \frac{I_n(\lambda_{2*})}{\lambda_{2*} I_n'(\lambda_{2*})} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w, \quad \lambda_{2*} = \lambda_2 R$$

Выкладки, аналогичные вышеприведённым, приводят к модификации дисперсионного уравнения (2.7), в котором вместо функций $I_n(\lambda_*)$ и $I_n'(\lambda_*)$ будут фигурировать функция $I_n(\lambda_{2*})$ и её производная $I_n'(\lambda_{2*})$, а вместо λ_* – параметр λ_{2*} .

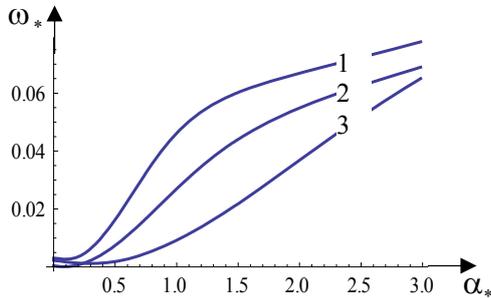
Если выразить λ_{2*} из (2.8) через число Маха, то из требования $\lambda_{2*}^2 > 0$ получим условие, определяющее сверхзвуковой ($M_1 > 1$) режим течения смеси в трубе

$$\left[1 + \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} \delta^2 \alpha_*^2 \right] < M_1^2 < \frac{3\gamma P_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\alpha_*^2}.$$

Для иллюстрации приведённой теории в качестве примера рассмотрена стальная оболочка с физическими параметрами $\nu = 0.3$, $\rho_* = 7800 \text{ кг/м}^3$, $c_* = 5308.2 \text{ м/с}$, наполненная протекающей газожидкостной смесью пузырьковой структуры, несущей фазой которой является вода, а дисперсной – монодисперсные пузырьки воздуха. Параметры смеси таковы: $P_0 = 0.1 \text{ МПа}$, $\rho_0 = 988 \text{ кг/м}^3$, $\beta_0 = 0.01$, $\gamma = 1.4$, $c_0 = 119 \text{ м/с}$. Вычисления проведены в случае дозвукового течения смеси по уравнению (2.7).



Фиг.1. Частоты собственных колебаний оболочки в зависимости от размера пузырьков при параметрах системы: $l = 0.008$, $U_* = 0.005$.



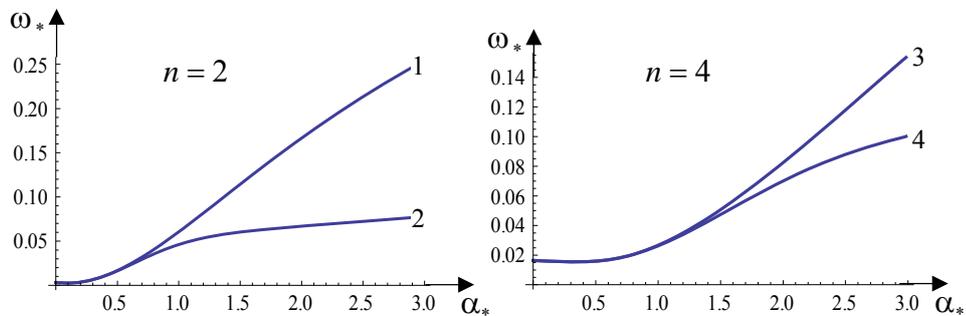
Фиг.2. Графики $\omega_*(\alpha_*)$ в случае разных толщин оболочки l и мод колебаний n : $U_* = 0.005$, $\delta = 0.5 \cdot 10^{-3}$.

Кривая 1 – $l = 0.008$, $n = 2$; 2 – $l = 0.002$, $n = 2$; 3 – $l = 0.002$, $n = 4$.

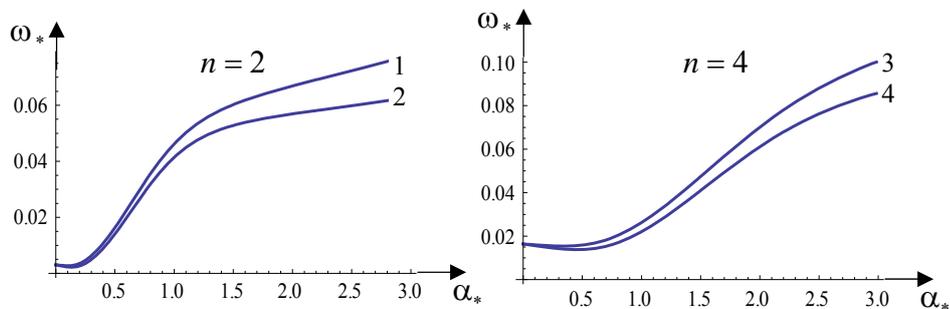
На фиг.1 приведены частоты колебаний оболочки в зависимости от размера пузырьков. Кривые 1 и 2 отнесены к моде $n = 2$ при наличии в смеси соответственно мелких ($\delta_* = 0.5 \cdot 10^{-3}$) и крупных ($\delta_* = 0.2 \cdot 10^{-1}$) пузырьков в случае значений толщины трубы $l = 0.008$ и скорости протекания $U_* = 0.005$. Кривые 3 и 4 отнесены к моде $n = 4$ с теми же параметрами системы. Видно, что для всех значений безразмерного волнового числа α_* при одинаковых модах n частоты колебаний оболочки со смесью с мелкими пузырьками превосходят по

величине частоты той же оболочки, наполненной, однако, смесью с крупными пузырьками. С увеличением α_* это различие усиливается.

На фиг. 2 для смеси с мелкими ($\delta_* = 0.5 \cdot 10^{-3}$) пузырьками и при значении $U_* = 0.005$ представлены зависимости частот от толщины l и моды колебаний n . С увеличением l от 0.002 (кривая 2) до 0.008 (кривая 1) частота возрастает, а с увеличением n от 2 (кривая 2) до 4 (кривая 3) значения частот уменьшаются. Аналогичная картина поведения кривых имеет место и в случае смеси с крупными пузырьками. Обобщая расчёты при других параметрах системы, можно утверждать, что при конечных значениях α_* (сравнительно короткие волны) для заданных одинаковых параметров гидроупругой системы с увеличением l частота колебаний возрастает, а с увеличением моды n – убывает. При значительных длинах волн ($\lambda_* \ll 1$) с повышением моды колебаний n частота, наоборот, возрастает.



Фиг.3. Кривые $\omega_*(\alpha_*)$ для разных наполнителей при $U_* = 0.005$, $l = 0.008$.



Фиг.4. Зависимость $\omega_*(\alpha_*)$ от скорости протекания водовоздушной смеси: $l = 0.008$, $\delta = 0.5 \cdot 10^{-3}$.

На фиг. 3 показаны кривые $\omega_*(\alpha_*)$ при разных наполнителях. Кривые 1 и 3 отнесены к случаю воды с модами $n = 2$ и $n = 4$ соответственно, а 2 ($n = 2$) и 4 ($n = 4$) – к случаю газожидкостной смеси с мелкими пузырьками ($\delta_* = 0.5 \cdot 10^{-3}$). Для обоих случаев $l = 0.008$, $U_* = 0.005$. Видно, что кривая 1 расположена выше кривой 2, а кривая 3 – выше кривой 4, т.е. в случае воды частоты

колебаний оболочки по величине превосходят частоты при наличии смеси с пузырьками воздуха.

Фиг.4 иллюстрирует влияние скорости протекания U_* на параметр частоты $\omega_*(\alpha_*)$. Здесь $l = 0.008$, $\delta_* = 5 \cdot 10^{-4}$, кривые 1,3 отнесены к случаю $U_* = 0.005$, а кривые 2 и 4 – к $U_* = 0.01$. Как видим, кривые 2 ($n = 2$) и 4 ($n = 4$) расположены ниже кривых 1 $n = 2$ и 3 $n = 4$, т.е. для одинаковых мод и фиксированных прочих параметров системы с увеличением скорости протекания частоты собственных колебаний бесконечно длинной оболочки уменьшаются. Такая же картина наблюдается в случае смеси с крупными ($\delta_* = 2 \cdot 10^{-2}$) пузырьками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко В.Д., Лакиза В.Д. и др. Динамика упругогазожидкостных систем при вибрационных воздействиях. Киев: Наукова Думка, 1988. 256с.
2. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Устойчивость цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью при внешнем динамическом давлении. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №1. С.25-32.
3. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов А.Н. Анализ нестационарных процессов в цилиндрических оболочках при взаимодействии с протекающей жидкостью. // Прикладная механика. 2010. Т.46. №10. С.36-52.
4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320с.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.

Сведения об авторах:

Оганян Гагик Гришаевич – ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24^б, тел. (+37493) 946-947, E-mail: oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Левонович – ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики Ереванского госуниверситета.

Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, тел.: (+37410) 575-140, (+37477) 002-408 (моб.) E-mail: ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 23.10.2013

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБОСНОВАННЫЙ МЕТОД ГИПОТЕЗ
ПОСТРОЕНИЯ МИКРОПОЛЯРНОЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК**

Саркисян С.О.

Ключевые слова: Асимптотический метод, гипотезы, построение, теория, микрополярная, классическая, упругая, тонкая, оболочка

Key words: asymptotic method, hypotheses, construction, theory, micropolar, classical, elastic, thin, shell.

Սարգսյան Ս.Ն.

**Առաձգական բարակ թաղանթների միկրոպոլյար և դասական տեսությունների կառուցման
ասիմպտոտիկ հիմնավորվածությամբ վարկածների մեթոդ**

Աշխատանքում, միկրոպոլյար առաձգականության եռաչափ տեսության հավասարումների համակարգը գրված բարակ թաղանթի համար, որպես երկրաչափական փոքր պարամետրով սինգուլյար գրգռված հավասարումների համակարգ, ենթարկվում է ասիմպտոտիկ անալիզի. Կառուցվում է ներքին ասիմպտոտիկ վերլուծությունը ու սահմանային շերտը, ուսումնասիրվում նրանց փոխազդեցության խնդիրը, կառուցվում նրանցից յուրաքանչյուրին վերաբերվող եզրային պայմանները: Այնուհետև ասիմպտոտիկ լուծման վարքի դրսևորման կարևոր յուրահատկությունները ընդունվել են որպես վարկածներ և կառուցվում է միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր կիրառական տեսությունը և ցույց տրվում, որ այդ կիրառական տեսությունը ասիմպտոտիկ ճիշտ է:

Բարակ թաղանթի միկրոպոլյար տեսությունից անցում կատարելով դեպի դասական տեսություն, ցույց է տրվում, որ բարակ թաղանթների դասական կիրառական այս տեսությունը, որում հաշվի են առնված ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաները, համեմատած բարակ թաղանթի ճշգրտված այլ տեսությունների հետ, ասիմպտոտիկ ճիշտ է:

Sargsyan S.H.

Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells

In the present paper, the system of equations of three-dimensional micropolar theory of elasticity, written down for thin shell as singularly perturbed with small geometric parameter system, is analyzed asymptotically: the internal iteration process and boundary layers are constructed, their interaction is studied, boundary conditions are obtained for each of them. Then, the main specific properties of the asymptotic solution accepting as hypotheses, general applied theory of micropolar elastic thin shells is constructed and it is shown that the constructed theory is asymptotically correct. Passing from the micropolar theory of thin shells to the classical theory, it is shown, that this applied classical theory of thin shells, when transverse shifts are taken into account, is asymptotically correct theory in relation to the other corrected theories of thin shells.

В работе система уравнений трёхмерной микрополярной теории упругости для тонкой оболочки как сингулярно-возмущённая с малым геометрическим параметром система уравнений подвергается асимптотическому анализу: построен внутренний итерационный процесс и погранслои, изучается их взаимодействие, построены для каждой из них граничные условия. Далее, принимая за гипотезы важные специфические свойства асимптотического решения, построена общая прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек и показывается, что эта прикладная теория – асимптотически точная теория. Переходя от микрополярной теории тонких оболочек к классической теории, показывается, что эта прикладная классическая теория тонких оболочек, при которой учитываются поперечные сдвиговые деформации, по сравнению с другими уточнёнными теориями тонких оболочек, – асимптотически точная теория.

Введение. Существующие методы сведения трёхмерной задачи теории упругости к двумерной задаче теории пластин и оболочек принято разделить на три основные группы: а) метод гипотез, б) метод разложений по толщине и в) асимптотические методы [1-9]. Подробный обзор исследований в построении теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек выполнены в работах [10,11].

Основная проблема общей теории микрополярных или классических упругих тонких пластин и оболочек заключается в приближённом, но адекватном сведении трёхмерной задачи микрополярной или классической теории упругости к двумерной краевой задаче. На наш взгляд, для этой цели уместен [12-14] при построении прикладной теории тонких пластин и оболочек использование в качестве гипотез основные особенности поведения асимптотического решения краевой или начально-краевой задачи трёхмерной микрополярной или классической теории упругости в соответствующих тонких областях [15-18]. Построенные на таком подходе, как микрополярная, так и классическая теории упругих тонких пластин и оболочек будут асимптотически точными теориями. С этой позиции вопрос также существенен в классической теории упругости при построении математических моделей тонких пластин и оболочек с учётом деформаций поперечного сдвига. Имеем в виду работу [19], в которой показано, что одна из основных теорий пластин и оболочек, в которой учитываются поперечные сдвиговые деформации, а именно, теория типа Тимошенко, не совсем асимптотически последовательна.

1. Постановка задачи.

Будем рассматривать оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое тело. Уравнения статической задачи несимметричной (микрополярной, моментной) теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений имеют вид [20, 21]:

$$\begin{aligned} & \text{уравнения равновесия} \\ \nabla_m \sigma^{mn} = 0, \quad \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk} \sigma_{mk} = 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{соотношения упругости} \\ \sigma_{mn} = (\mu + \alpha) \gamma_{mn} + (\mu - \alpha) \gamma_{nm} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{nm}, \\ \mu_{mn} = (\gamma + \varepsilon) \chi_{mn} + (\gamma - \varepsilon) \chi_{nm} + \beta \chi_{kk} \delta_{nm} \end{aligned} \quad ; \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \text{геометрические соотношения} \\ \gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn} \omega^k, \quad \chi_{mn} = \nabla_m \omega_n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь σ^{nm}, μ^{nm} – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn}, χ_{mn} – компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручений; V^n – компоненты вектора перемещения, ω^n – компоненты вектора независимого поворота; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические константы микрополярного материала оболочки; индексы m, n, k принимают значения 1,2,3.

Отметим, что при $\alpha = 0$ из уравнений (1.1)-(1.3) будут отделяться основные уравнения классической теории упругости.

Отнесём оболочку к триортогональной системе координат α_n ($H_i = A_i (1 + \alpha_3/R_i)$, $H_3 = 1$, $i = 1, 2$), принятой в теории оболочек [4].

Для граничных условий на лицевых поверхностях оболочки примем граничные условия первой граничной задачи, которые можем записать в виде:

$$\sigma_{3n} = p_n^\pm, \quad \mu_{3n} = m_n^\pm \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm h. \quad (1.4)$$

Граничные условия на поверхности края оболочки $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, в общем случае, представляют граничные условия смешанной граничной задачи:

$$\sigma_{mn} n_m = p_n^*, \quad \mu_{mn} n_m = m_n^* \quad \text{на } \Sigma_1, \quad V_n = V_n^*, \quad \omega_n = \omega_n^* \quad \text{на } \Sigma_2, \quad (1.5)$$

где p_n^*, m_n^* – компоненты заданных внешних усилий и моментов на Σ_1 ; V_n^*, ω_n^* – заданные компоненты векторов перемещений и независимого поворота на Σ_2 .

2. Асимптотическое решение (построение решения внутренней задачи) граничной задачи (1.1)-(1.5) трёхмерной микрополярной теории упругости в тонкой области оболочки.

Предположим, что толщина оболочки $2h$ весьма мала по сравнению с характерным радиусом кривизны срединной поверхности ($2h \ll R$). Будем исходить из той основной концепции [4], что в статическом случае общее напряжённо-деформированное состояние (НДС) тонкой оболочки состоит из внутреннего НДС (охватывающего всю область трёхмерной оболочки) и пограничных слоёв (локализирующихся вблизи боковой поверхности Σ и затухающие вдали от боковой поверхности). При таком подходе, на результатах исходного приближения внутренней задачи будет возможно построение общей двумерной (асимптотической) модели микрополярных тонких оболочек (а при $\alpha = 0$ – и модель упругой оболочки по классической теории упругости).

Рассмотрим задачу сведения трёхмерной статической задачи несимметричной теории упругости для тонкой оболочки к двумерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем [14], включая вопрос об удовлетворении граничным условиям на поверхности края оболочки Σ .

Сначала рассмотрим построение внутреннего итерационного процесса. Для этой цели в трёхмерных уравнениях несимметричной теории упругости (1.1)-(1.3) перейдём к безразмерным координатам

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta. \quad (2.1)$$

Здесь величина p/l характеризует изменчивость НДС по координатам; p, l – целые числа, $l > p \geq 0$; R – характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки; λ – большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$. Введём также безразмерные величины:

$$\frac{V_i}{R} = \bar{V}_i, \quad \frac{\sigma_{ij}}{\mu} = \bar{\sigma}_{ij}, \quad \frac{\mu_{ij}}{R\mu} = \bar{\mu}_{ij}, \quad \frac{p_n^\pm}{\mu} = \bar{p}_n^\pm, \quad \frac{m_n^\pm}{R\mu} = \bar{m}_n^\pm, \quad \frac{R_i}{R} = \bar{R}_i \quad (2.2)$$

и следующие безразмерные физические параметры:

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu}, \quad \bar{E} = \frac{E}{\mu}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\mu}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{R^2\mu}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{R^2\mu}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{R^2\mu}. \quad (2.3)$$

В результате преобразований (2.1)-(2.3), вместо системы уравнений (1.1)-(1.3) будем иметь следующую систему безразмерных уравнений:

уравнения равновесия

$$\lambda^{p-l}\bar{L}_i + \lambda^{-l}\frac{\bar{\sigma}_{3i} + \bar{\sigma}_{i3}}{\bar{R}_i} + a_i\frac{\partial\bar{\sigma}_{3i}}{\partial\zeta} = 0, \quad -\lambda^{-l}\bar{L} + \lambda^{p-l}\bar{F} + \frac{\partial\bar{\sigma}_{33}}{\partial\zeta} = 0,$$

$$\lambda^{p-l} \bar{K}_i + \lambda^{-l} \frac{\bar{v}_{3i} + \bar{v}_{i3}}{R_i} + a_i \frac{\partial \bar{v}_{3i}}{\partial \zeta} + (-1)^j \lambda^{-l} a_j (\bar{\sigma}_{j3} - \bar{\sigma}_{3j}) = 0, \quad (2.4)$$

$$-\lambda^{-l} \bar{K} + \lambda^{p-l} \bar{\Phi} + \frac{\partial \bar{v}_{33}}{\partial \zeta} + \lambda^{-l} (a_1 \bar{\sigma}_{12} - a_2 \bar{\sigma}_{21}) = 0;$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned} a_j \left[\lambda^p \frac{1}{A_i} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \xi_i} + \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \bar{V}_j + \frac{\bar{V}_3}{R_i} \right] &= \frac{1}{E} [a_i \bar{\sigma}_{ii} - \nu a_j \bar{\sigma}_{jj} - \nu \bar{\sigma}_{33}], \\ a_1 a_2 \lambda^l \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial \zeta} &= \frac{1}{E} [\bar{\sigma}_{33} - \nu a_1 \bar{\sigma}_{11} - \nu a_2 \bar{\sigma}_{22}], \\ a_j \lambda^l \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \zeta} - (-1)^j a_j \omega_j &= \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \bar{\sigma}_{3i} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \bar{\sigma}_{i3}, \\ a_j \left(\lambda^p \frac{1}{A_i} \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial \xi_i} - \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \bar{V}_i \right) - (-1)^j a_i a_j \omega_3 &= \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} a_i \bar{\sigma}_{ij} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} a_j \bar{\sigma}_{ji}, \\ a_j \left(\lambda^p \frac{1}{A_i} \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial \xi_i} - \frac{\bar{V}_i}{R_i} \right) + (-1)^j a_i a_j \omega_j &= \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} a_i \bar{\sigma}_{i3} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} a_i \bar{\sigma}_{3i}, \\ a_j \left[\lambda^p \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_i} + \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \omega_j + \frac{\omega_3}{R_i} \right] &= \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} \left[a_i \bar{v}_{ii} - \frac{\bar{\beta}}{2(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} (a_j \bar{v}_{jj} + \bar{v}_{33}) \right], \\ \lambda^l a_1 a_2 \frac{\partial \omega_3}{\partial \zeta} &= \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} \left[\bar{v}_{33} - \frac{\bar{\beta}}{2(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} (a_1 \bar{v}_{11} + a_2 \bar{v}_{22}) \right], \\ a_j \left(\lambda^p \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_i} - \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \omega_i \right) &= \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} a_i \bar{v}_{ij} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} a_j \bar{v}_{ji}, \\ a_j \left(\lambda^p \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi_i} - \frac{\omega_i}{R_i} \right) &= \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} a_i \bar{v}_{i3} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} a_i \bar{v}_{3i}, \\ a_j \lambda^l \frac{\partial \omega_i}{\partial \zeta} &= \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} \bar{v}_{3i} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} \bar{v}_{i3}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

здесь

$$\begin{aligned} \bar{L}_i &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \bar{\tau}_{ii}}{\partial \xi_i} + \frac{R \lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\bar{\sigma}_{ii} - \bar{\sigma}_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \bar{\tau}_{ji}}{\partial \xi_j} + \frac{R \lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\bar{\sigma}_{ji} + \bar{\sigma}_{ij}), \\ \bar{L} &= \frac{\bar{\sigma}_{11}}{R_1} + \frac{\bar{\sigma}_{22}}{R_2}, \quad \bar{F} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{R \lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \bar{\sigma}_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \bar{\sigma}_{23}}{\partial \xi_2} + \frac{R \lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \bar{\sigma}_{23}, \\ \bar{K}_i &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \bar{v}_{ii}}{\partial \xi_i} + \frac{R \lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\bar{v}_{ii} - \bar{v}_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \bar{v}_{ji}}{\partial \xi_j} + \frac{R \lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\bar{v}_{ji} + \bar{v}_{ij}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\bar{K} = \frac{\bar{v}_{11}}{\bar{R}_1} + \frac{\bar{v}_{22}}{\bar{R}_2}, \quad \bar{\Phi} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \bar{v}_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \bar{v}_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \bar{v}_{23}}{\partial \xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \bar{v}_{23},$$

$$a_i = 1 + \frac{\lambda^{-l} \zeta}{\bar{R}_i}.$$

Предположим, что безразмерные физические параметры (2.3) имеют порядки:

$$\frac{\alpha}{\mu} \sim 1, \quad \frac{\beta}{R^2 \mu} \sim 1, \quad \frac{\gamma}{R^2 \mu} \sim 1, \quad \frac{\varepsilon}{R^2 \mu} \sim 1. \quad (2.7)$$

Сделаем следующие замены искомым величин:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{ii} &= \lambda^l \tau_{ii}^*, \quad \bar{\tau}_{ij} = \lambda^l \tau_{ij}^*, \quad \bar{\tau}_{3i} = \lambda^{l+p-c} \tau_{3i}^*, \quad \bar{\tau}_{i3} = \lambda^{l+p-c} \tau_{i3}^*, \quad \bar{\tau}_{33} = \lambda^{2p-c} \tau_{33}^*, \\ \bar{v}_{ii} &= \lambda^{l-c} v_{ii}^*, \quad \bar{v}_{ij} = \lambda^{l-c} v_{ij}^*, \quad \bar{v}_{3i} = \lambda^{l-p} v_{3i}^*, \quad \bar{v}_{i3} = \lambda^{l-p} v_{i3}^*, \quad \bar{v}_{33} = \lambda^{2p-2c} v_{33}^*, \\ \bar{V}_i &= \lambda^{l-p} V_i^*, \quad \bar{V}_3 = \lambda^{l-c} V_3^*, \quad \bar{\omega}_i = \lambda^{l-p-c} \omega_i^*, \quad \bar{\omega}_3 = \lambda^{l-2p} \omega_3^*, \\ c &= 0 \text{ при } 2p \leq l, \quad c = 2p - l \text{ при } 2p \geq l. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В результате указанных преобразований приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{3i}^*}{\partial \zeta} &= -\lambda^{-l+c} \frac{1}{a_i} L_i^* - \lambda^{-l} \frac{1}{a_i} \frac{\tau_{i3}^* + \tau_{3i}^*}{\bar{R}_i}, \\ \frac{\partial v_{3i}^*}{\partial \zeta} &= -\lambda^{-l+2p-c} \frac{1}{a_i} K_i^* - \lambda^{-l} \frac{1}{a_i} \frac{v_{i3}^* + v_{3i}^*}{\bar{R}_i} + (-1)^j \lambda^{-l+2p-c} \frac{a_j}{a_i} (\tau_{3j}^* - \tau_{j3}^*), \\ \frac{\partial \tau_{33}^*}{\partial \zeta} &= \lambda^{-2p+c} L^* - F^*, \quad \frac{\partial v_{33}^*}{\partial \zeta} = \lambda^{-2p+c} K^* - \lambda^{-2p+2c} \Phi^* - \lambda^{-2p+2c} a_1 \tau_{12}^* + \lambda^{-2p+2c} a_2 \tau_{21}^*, \\ \tau_{ii}^* &= \frac{a_j}{a_i} \frac{4\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}{\lambda + 2\bar{\mu}} e_i^* + \frac{2\bar{\mu}\bar{\lambda}}{\lambda + 2\bar{\mu}} e_j^* + \lambda^{-l+2p-c} \frac{1}{a_i} \frac{\bar{\lambda}}{\lambda + 2\bar{\mu}} \tau_{33}^*, \\ \tau_{ij}^* &= \frac{a_j}{a_i} (\bar{\mu} + \bar{\alpha}) t_j^* + (\bar{\mu} - \bar{\alpha}) t_i^* - 2(-1)^j \lambda^{-2p} a_j \bar{\alpha} \omega_3^*, \\ \frac{\partial V_3^*}{\partial \zeta} &= \lambda^{-2l+2p} \frac{1}{a_1 a_2} \frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{\bar{\mu}(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} \tau_{33}^* - \lambda^{-l+c} \frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\mu}(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} \left(\frac{1}{a_2} \tau_{11}^* + \frac{1}{a_1} \tau_{22}^* \right), \\ \frac{\partial V_i^*}{\partial \zeta} &= (-1)^j \lambda^{-l-c} \omega_j^* + \lambda^{-l+2p-c} \frac{1}{a_j} \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \tau_{3i}^* - \lambda^{-l+2p-c} \frac{1}{a_j} \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \tau_{i3}^* = \\ &= -\frac{1}{a_i} \lambda^{-l+2p-c} g_i^* + \lambda^{-l+2p-c} \frac{1}{2a_j} (\tau_{3i}^* + \tau_{i3}^*), \\ \tau_{i3}^* &= \frac{a_j}{a_i} \frac{4\bar{\mu}\bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} g_i^* + (-1)^j \lambda^{-2p} a_j \frac{4\bar{\mu}\bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} \omega_j^* + \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} \tau_{3i}^*, \\ v_{ii}^* &= \frac{a_j}{a_i} \frac{4\bar{\gamma}(\bar{\beta} + \bar{\gamma})}{\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}} \kappa_i^* + \frac{2\bar{\gamma}\bar{\beta}}{\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}} \kappa_j^* + \lambda^{-l+2p-c} \frac{1}{a_i} \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}} v_{33}^*, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$v_{ij}^* = \frac{a_j}{a_i} (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) n_j^* + (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}) n_i^*,$$

$$\frac{\partial \omega_3^*}{\partial \zeta} = \lambda^{-2l+4p-2c} \frac{1}{a_1 a_2} \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} v_{33}^* - \lambda^{-l+2p-c} \frac{\bar{\beta}}{2\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} \left(\frac{1}{a_2} v_{11}^* + \frac{1}{a_1} v_{22}^* \right),$$

$$\frac{\partial \omega_i^*}{\partial \zeta} = \lambda^{-l+c} \frac{1}{a_j} \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} v_{3i}^* - \lambda^{-l+c} \frac{1}{a_j} \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} v_{i3}^*, \quad v_{i3}^* = \frac{a_j}{a_i} \frac{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \theta_i^* + \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} v_{3i}^*,$$

где

$$L_i^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \tau_{ii}^*}{\partial \xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\tau_{ii}^* - \tau_{jj}^*) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \tau_{ji}^*}{\partial \xi_j} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\tau_{ji}^* + \tau_{ij}^*),$$

$$L = \frac{\tau_{11}^*}{R_1} + \frac{\tau_{22}^*}{R_2}, \quad F^* = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_{13}^*}{\partial \xi_1} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \tau_{13}^* + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tau_{23}^*}{\partial \xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \tau_{23}^*,$$

$$K_i^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{ii}^*}{\partial \xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (v_{ii}^* - v_{jj}^*) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_{ji}^*}{\partial \xi_j} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (v_{ji}^* + v_{ij}^*), \quad (2.10)$$

$$K^* = \frac{v_{11}^*}{R_1} + \frac{v_{22}^*}{R_2}, \quad \Phi^* = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_{13}^*}{\partial \xi_1} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v_{13}^* + \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_{23}^*}{\partial \xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v_{23}^*,$$

$$e_i^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial V_i^*}{\partial \xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} V_j^* + \lambda^{-c} \frac{V_3^*}{R_i}, \quad t_i^* = \frac{1}{A_j} \frac{\partial V_i^*}{\partial \xi_j} - \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} V_j^*,$$

$$g_i^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial V_3^*}{\partial \xi_i} - \lambda^{-2p+c} \frac{V_i^*}{R_i},$$

$$\kappa_i^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_i^*}{\partial \xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \omega_j^* + \lambda^{-2p+c} \frac{\omega_3^*}{R_i}, \quad n_i^* = \frac{1}{A_j} \frac{\partial \omega_i^*}{\partial \xi_j} - \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \omega_j^*,$$

$$\theta_i^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_3^*}{\partial \xi_i} - \lambda^{-c} \frac{\omega_i^*}{R_i}.$$

Следуя асимптотическому методу, при построении внутренней задачи трёхмерные уравнения (2.9) с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ приближённо сведём к двумерным с независимыми переменными ξ_1, ξ_2 .

Для перемещений и поворотов, силовых и моментных напряжений на основе системы (2.9) с асимптотической точностью $O(\lambda^{p-l})$ получим:

$$\begin{aligned} \omega_i^* &= \omega_i^0, & \omega_3^* &= \omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \omega_3^1, \\ V_i^* &= V_i^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta V_i^1, & V_3^* &= V_3^0, \\ \tau_{ii}^* &= \tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{ii}^1, & \tau_{ij}^* &= \tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{ij}^1, \\ \tau_{3i}^* &= \tau_{3i}^0, & \tau_{i3}^* &= \tau_{i3}^0, \\ v_{ii}^* &= v_{ii}^0, & v_{ij}^* &= v_{ij}^0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} v_{3i}^* &= v_{3i}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{3i}^1, & v_{i3}^* &= v_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{i3}^1, \\ \tau_{33}^* &= \tau_{33}^0 + \zeta \tau_{33}^1, & v_{33}^* &= v_{33}^0 + \lambda^{-2p+2c} \zeta v_{33}^1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= \lambda^{-l+2p-c} \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} v_{33}^0 - \frac{\bar{\beta}}{2\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} (v_{11}^0 + v_{22}^0), \\ V_i^1 &= \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \tau_{3i}^0 - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \tau_{i3}^0 + (-1)^j \lambda^{-2p} \omega_j^0 = -g_i^0 + \frac{1}{2} (\tau_{3i}^0 + \tau_{i3}^0), \\ \tau_{ii}^0 &= \frac{4\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} e_i^0 + \frac{2\bar{\mu}\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} e_j^0 + \lambda^{-l+2p-c} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \tau_{33}^0, \\ \tau_{ij}^0 &= (\bar{\mu} + \bar{\alpha}) t_j^0 + (\bar{\mu} - \bar{\alpha}) t_i^0 - 2(-1)^j \lambda^{-2p} \bar{\alpha} \omega_3^0, \\ \tau_{ii}^1 &= \frac{4\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} e_i^1 + \frac{2\bar{\mu}\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} e_j^1 + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \tau_{33}^1, \\ \tau_{ij}^1 &= (\bar{\mu} + \bar{\alpha}) t_j^1 + (\bar{\mu} - \bar{\alpha}) t_i^1 - 2(-1)^j \lambda^{-2c} \omega_3^1, \\ v_{ii}^0 &= \frac{4\bar{\gamma}(\bar{\beta} + \bar{\gamma})}{\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}} k_i^0 + \frac{2\bar{\gamma}\bar{\beta}}{\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}} k_j^0 + \frac{\lambda^{-l+2p-c}}{\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}} \frac{m_3^+ + m_3^-}{2}, \\ v_{ij}^0 &= (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) n_j^0 + (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}) n_i^0, \\ e_i^k &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial V_i^k}{\partial \xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} V_j^k + \delta_{k0} \lambda^{-c} \frac{V_3^k}{R_i}, \\ \kappa_i^k &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_i^k}{\partial \xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \omega_j^k + \delta_{k0} \lambda^{-2p+c} \frac{\omega_3^k}{R_i}, \\ t_i^k &= \frac{1}{A_j} \frac{\partial V_i^k}{\partial \xi_j} - \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} V_j^k, & n_i^k &= \frac{1}{A_j} \frac{\partial \omega_i^k}{\partial \xi_j} - \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \omega_j^k, \\ g_i^k &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial V_3^k}{\partial \xi_i} - \delta_{k0} \lambda^{-2p+c} \frac{V_i^k}{R_i}, & \theta_i^k &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_3^k}{\partial \xi_i} - \delta_{k0} \lambda^{-c} \frac{\omega_i^k}{R_i}, \\ L_i^k &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \tau_{ii}^k}{\partial \xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\tau_{ii}^k - \tau_{jj}^k) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \tau_{ji}^k}{\partial \xi_j} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\tau_{ji}^k + \tau_{ij}^k), \\ \tau_{i3}^0 &= \frac{4\bar{\mu}\bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} (g_i^0 + (-1)^j \lambda^{-2p} \omega_j^0) + \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} \tau_{3i}^0, \\ v_{3i}^1 &= -K_i^0 + (-1)^j (\tau_{3j}^0 - \tau_{j3}^0) + \bar{J} \frac{\partial^2 \omega_i^0}{\partial \tau^2}, \\ K_i^k &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{ii}^k}{\partial \xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (v_{ii}^k - v_{jj}^k) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_{ji}^k}{\partial \xi_j} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (v_{ji}^k + v_{ij}^k), \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
v_{i3}^0 &= \frac{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \theta_i^0 + \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} v_{3i}^0, & v_{i3}^1 &= \frac{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} \theta_i^1 + \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} v_{3i}^1 \\
\tau_{33}^1 &= \lambda^{-2p+c} L^0 - F^0 + \frac{\partial^2 V_3^0}{\partial \tau^2}, & v_{33}^1 &= \lambda^{-c} K^0 - \Phi^0 - \tau_{12}^0 + \tau_{21}^0, \\
L^k &= \frac{\tau_{11}^k}{R_1} + \frac{\tau_{22}^k}{R_2}, & F^k &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_{13}^k}{\partial \xi_1} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \tau_{13}^k + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tau_{23}^k}{\partial \xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \tau_{23}^k, \\
K^k &= \frac{v_{11}^k}{R_1} + \frac{v_{22}^k}{R_2}, & \Phi^k &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_{13}^k}{\partial \xi_1} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v_{13}^k + \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_{23}^k}{\partial \xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v_{23}^k, \quad k=1,2.
\end{aligned}$$

Наша основная цель – построить асимптотически строго итерационный процесс для усреднённых по толщине оболочки определяющих величин поставленной задачи (т.е. зависящих только от величин ξ_1, ξ_2). С этой точки зрения есть возможность

уточнять значения для силовых напряжений τ_{3i}^* и моментного напряжения μ_{33}^* (оставаясь в рамках величин, участвующих в выражениях (2.11), т.е. в кругу величин исходного приближения). Сущность подхода заключается в следующем. На уровне исходного приближения асимптотического метода для величин τ_{3i}^* и v_{33}^* имеем:

$$\tau_{3i}^* = \tau_{3i}^0(\xi_1, \xi_2), \quad v_{33}^* = v_{33}^0(\xi_1, \xi_2) + \lambda^{-2p+2c} v_{33}^1(\xi_1, \xi_2). \quad (2.13)$$

Теперь в указанных уравнениях равновесия будем удерживать величины до порядка λ^{2p-2l} , после чего, интегрируя эти уравнения по ζ , получим

$$\hat{\tau}_{3i}^* = \tilde{\tau}_{3i}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \tau_{3i}^1 + \lambda^{-2l+2p} \frac{1}{2} \zeta^2 L_i^1, \quad (2.14)$$

$$\hat{v}_{33}^* = \tilde{v}_{33}^0 + \lambda^{-2p+2c} \zeta v_{33}^1 - \lambda^{-l+c} \frac{1}{2} \zeta^2 [\Phi^1 - (\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1)], \quad (2.15)$$

где $\tilde{\tau}_{3i}^0$ и \tilde{v}_{33}^0 – функции интегрирования;

$$\tau_{3i}^1 = -L_i^0 - \lambda^{-c} \frac{\tau_{i3}^0}{R_i}, \quad v_{33}^1 = \lambda^{-c} K^0 - \Phi^0 - \tau_{12}^0 + \tau_{21}^0. \quad (2.16)$$

Потребуем от величин $\hat{\tau}_{3i}^*$ и \hat{v}_{33}^* , чтобы их значения, усреднённые по толщине оболочки ($-1 \leq \zeta \leq 1$), были равны нулю:

$$\int_{-1}^1 \hat{\tau}_{3i}^* d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \hat{v}_{33}^* d\zeta = 0. \quad (2.17)$$

Подчиняя (2.14) и (2.15) условиям (2.17), для $\tilde{\tau}_{3i}^0$ и \tilde{v}_{33}^0 получим:

$$\tilde{\tau}_{3i}^0 = \frac{1}{6} \lambda^{-2l+2p} \cdot L_i^1, \quad \tilde{v}_{33}^0 = \lambda^{-l+c} \cdot \frac{1}{6} \cdot [\Phi^1 + (\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1)].$$

Таким образом, для $\hat{\tau}_{3i}^*$ и \hat{v}_{33}^* будем иметь:

$$\hat{\tau}_{3i}^* = \lambda^{-l+c} \cdot \zeta \cdot \tau_{3i}^1 + \lambda^{-2l+2p} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2} \right) L_i^1, \quad (2.18)$$

$$\tilde{v}_{33}^* = \lambda^{-2p+2c} \cdot \zeta \cdot v_{33}^1 + \lambda^{-l+c} \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2} \right) [\Phi^1 + (\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1)]. \quad (2.19)$$

Окончательно, для значений τ_{3i}^* и v_{33}^* примем соответственно суммы (2.13), (2.18), (2.19) и получим

$$\tau_{3i}^* = \tau_{3i}^0 + \lambda^{-l+c} \cdot \zeta \cdot \tau_{3i}^1 + \lambda^{-2l+2p} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2} \right) L_i^1, \quad (2.20)$$

$$v_{33}^* = v_{33}^0 + \lambda^{-2p+2c} \cdot \zeta \cdot v_{33}^1 + \lambda^{-l+c} \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2} \right) [\Phi^1 + (\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1)]. \quad (2.21)$$

Легко убедиться, что усреднённые значения τ_{3i}^* и v_{33}^* по толщине оболочки ($-1 \leq \zeta \leq 1$) как на уровне (2.13), так и на уровне (2.20), (2.21), равны между собой.

Итак, заменяя в выражениях (2.11) значения τ_{3i}^* и v_{33}^* через значения (2.20), (2.21), для перемещений, поворотов, силовых и моментных напряжений вместо (2.11) будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega_i^* &= \omega_i^0, & \omega_3^* &= \omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \omega_3^1, \\ V_i^* &= V_i^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta V_i^1, & V_3^* &= V_3^0, \\ \tau_{ii}^* &= \tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{ii}^1, & \tau_{ij}^* &= \tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{ij}^1, \\ \tau_{i3}^* &= \tau_{i3}^0, & v_{ii}^* &= v_{ii}^0, \\ v_{ij}^* &= v_{ij}^0, & v_{i3}^* &= v_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{i3}^1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\tau_{33}^* = \tau_{33}^0 + \zeta \tau_{33}^1, \quad \tau_{3i}^* = \tau_{3i}^0 + \lambda^{-l+c} \cdot \zeta \cdot \tau_{3i}^1 + \lambda^{-2l+2p} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2} \right) L_i^1,$$

$$v_{3i}^* = v_{3i}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{3i}^1,$$

$$v_{33}^* = v_{33}^0 + \lambda^{-2p+2c} \cdot \zeta \cdot v_{33}^1 + \lambda^{-l+c} \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2} \right) [\Phi^1 + (\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1)]$$

Построенная асимптотика (2.22) для внутреннего итерационного процесса поставленной задачи даёт возможность от трёхмерной проблемы перейти к двумерным (что уже выполнено для перемещений, поворотов, силовых и моментных напряжений). Для этого, как в классическом случае, в теории микрополярных оболочек вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$, моменты $M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}$ и гипермоменты Λ_{i3} , которые с принятой точностью выражаются так:

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} dz, & S_{ij} &= \int_{-h}^h \sigma_{ij} dz, & N_{i3} &= \int_{-h}^h \sigma_{i3} dz, & N_{3i} &= \int_{-h}^h \sigma_{3i} dz, \\ N_{3i} &= \int_{-h}^h \sigma_{3i} dz, & M_{ii} &= \int_{-h}^h z \sigma_{ii} dz, & H_{ij} &= \int_{-h}^h z \sigma_{ij} dz, & L_{ii} &= \int_{-h}^h \mu_{ii} dz, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$L_{ij} = \int_{-h}^h \mu_{ij} dz, \quad L_{33} = \int_{-h}^h \mu_{33} dz, \quad L_{i3} = \int_{-h}^h \mu_{i3} dz, \quad \Lambda_{i3} = \int_{-h}^h z \mu_{i3} dz,$$

Вводим перемещения и повороты точек срединной поверхности оболочки:

$$u_i = V_i|_{\zeta=0}, \quad w = V_3|_{\zeta=0}, \quad \Omega_i = \omega_i|_{\zeta=0}, \quad \Omega_3 = \omega_3|_{\zeta=0}, \quad \iota = \frac{\partial \omega_3}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.4) на лицевых поверхностях оболочки $z = \pm h$, и имея в виду также выражения (2.22), (2.12), приходим к следующей системе определяющих уравнений двумерной задачи микрополярной теории оболочек с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\ & + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) + \frac{N_{i3}}{R_i} = -(p_i^+ + p_i^-), \\ & \frac{1}{A_i} \frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\ & + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (H_{ji} + H_{ij}) - N_{3i} = -h(p_i^+ - p_i^-), \\ & -\frac{T_{11}}{R_1} - \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] = -(p_3^+ + p_3^-), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \frac{L_{i3}}{R_i} + \\ & + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = -(m_i^+ + m_i^-), \\ & -\frac{L_{11}}{R_1} - \frac{L_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (S_{12} - S_{21}) = -(m_3^+ + m_3^-), \\ & L_{33} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (H_{12} - H_{21}) = h(m_3^+ - m_3^-); \end{aligned}$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} & N_{i3} = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{3i}, \quad N_{3i} = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{i3}, \\ & T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}] + \frac{\nu}{1-\nu} h(p_3^+ + p_3^-), \quad S_{ij} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}], \\ & M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}] + \frac{h^2}{3} \frac{\nu}{1-\nu} (p_3^+ - p_3^-), \\ & H_{ij} = \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}], \quad L_{ii} = 2h[(\beta + 2\gamma)k_{ii} + \beta(k_{jj} + \iota)], \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$L_{ij} = 2h \left[(\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji} \right], \quad L_{33} = 2h \left[(\beta + 2\gamma) \iota + \beta (\kappa_{11} + \kappa_{22}) \right],$$

$$L_{i3} = 2h \left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ - m_i^-}{2} \right], \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ + m_i^-}{2h} \right];$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i - (-1)^j \Omega_3,$$

$$K_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_j, \quad K_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_i - (-1)^j \iota,$$

$$\Gamma_{i3} = -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \quad \vartheta_i = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, \quad (2.26)$$

$$l_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i}, \quad \kappa_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i},$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \quad \kappa_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}.$$

При $\alpha = 0$ из системы уравнений (2.24)-(2.26) отделится система уравнений тонких оболочек на основе классической теории упругости (т.е. система уравнений упругих тонких оболочек типа Тимошенко [22-25], разумеется, с некоторым отличием).

3. Построение и изучение погранслошной задачи.

Обратимся к изучению краевых микрополярных упругих явлений. Будем снова исходить из уравнений трёхмерной микрополярной теории упругости (1.1)-(1.3), а также считать, что поверхность края оболочки Σ , вблизи которого необходимо исследовать напряжённое состояние, задаётся уравнением $\alpha_1 = \alpha_{10}$. Введём замену независимых переменных по формулам:

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = R\lambda^{-l} \xi_1, \quad \alpha_2 = R\lambda^{-p} \xi_2, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l} \zeta, \quad (3.1)$$

где величины R, λ, l, p имеют тот же смысл, что и при изучении внутренней задачи.

Решение таким образом полученной из системы уравнений (1.1)-(1.3) пограничной задачи должно удовлетворять однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$:

$$\sigma_{3n} = 0, \quad \mu_{3n} = 0. \quad (3.2)$$

Перейдём к безразмерным величинам (2.2),(2.3) и введём новые обозначения:

$$\bar{\sigma}_{mn} = P_{mn}, \quad \bar{\mu}_{mn} = Q_{mn}, \quad \bar{V}_n = \lambda^{-l} U_n, \quad \bar{\omega}_n = \lambda^{-l} \varpi_n. \quad (3.3)$$

В результате, из уравнений (1.1)-(1.3) (с учётом (2.2), (2.3)) получим трёхмерные уравнения микрополярной теории упругости в безразмерном виде.

На уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ погранслошная задача расщепляется на четыре независимые системы уравнений:

силовая плоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial P_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial P_{31}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial P_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial P_{33}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} = \frac{1}{E} [P_{11} - \nu P_{22} - \nu P_{33}], \\ P_{22} - \nu(P_{11} + P_{33}) = 0, \quad \frac{\partial U_3}{\partial \zeta} = \frac{1}{E} [P_{33} - \nu P_{11} - \nu P_{22}], \\ \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial U_3}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{13} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{31} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{31} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{13}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

силовая антиплоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial P_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial P_{32}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial U_2}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{12} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{21}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{32} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{23} = 0, \\ (\bar{\mu} + \bar{\alpha}) P_{21} - (\bar{\mu} - \bar{\alpha}) P_{12} = 0, \quad (\bar{\mu} + \bar{\alpha}) P_{23} - (\bar{\mu} - \bar{\alpha}) P_{32} = 0.7; \end{aligned} \quad (3.5)$$

Моментная плоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial Q_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_{32}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \varpi_2}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{12} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{21}, \\ \frac{\partial \varpi_2}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{32} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{23}, \\ (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) Q_{21} - (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}) Q_{12} = 0, \quad (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) Q_{23} - (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}) Q_{32} = 0; \end{aligned} \quad (3.6)$$

моментная антиплоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial Q_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_{31}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial Q_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_{33}}{\partial \zeta} = 0, \quad 2(\bar{\beta} + \bar{\gamma}) Q_{22} - \bar{\beta}(Q_{11} + Q_{33}) = 0, \\ \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \varpi_1}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} \left[Q_{11} - \frac{\bar{\beta}}{2(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} (Q_{22} + Q_{33}) \right], \\ \frac{\partial \varpi_1}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{31} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{13}, \\ \frac{\partial \varpi_3}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} \left[Q_{33} - \frac{\bar{\beta}}{2(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} (Q_{11} + Q_{22}) \right], \\ \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \varpi_3}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{13} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{31}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

здесь $A_{10} = A_1 \Big|_{\xi_1=0}$.

Полученные уравнения погранслоя в декартовых координатах ξ'_1, ζ ($\xi'_1 = A_{10}\xi_1$) с асимптотической точностью $O(\lambda^{p-l})$ описывают НДС плоской и антиплоской силовой и моментной не взаимосвязанных задач микрополярной теории упругости, имеющих место в полуполосе: $\{0 \leq \xi'_1 < \infty, -1 \leq \zeta \leq 1\}$.

Потребовав, чтобы решения погранслоевых задач (3.4)-(3.7) имели затухающий характер при $\xi_1 \rightarrow +\infty$, получим решения, обладающие следующими важными свойствами:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 P_{1n} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 Q_{1n} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 U_2 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \varpi_2 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\
& \int_{-1}^1 U_1 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = \frac{\bar{\lambda}}{4\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})} \int_{-1}^1 \zeta P_{13} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta, \\
& \int_{-1}^1 \varpi_1 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = \frac{\bar{\beta}}{4\bar{\gamma}(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} \int_{-1}^1 \zeta Q_{13} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta, \\
& \int_{-1}^1 U_3 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta + \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \int_{-1}^1 \zeta P_{11} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\
& \int_{-1}^1 \varpi_3 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta + \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} \int_{-1}^1 \zeta Q_{11} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\
& \int_{-1}^1 \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \int_{-1}^1 P_{31} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\
& \int_{-1}^1 \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{1}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} \int_{-1}^1 P_{32} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\
& \int_{-1}^1 \frac{\partial \varpi_3}{\partial \zeta} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}}{4\bar{\gamma}(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} \int_{-1}^1 Q_{33} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Из приведённых соотношений (специально для микрополярной теории упругости) можем сделать следующий важный вывод: когда силовые и моментные напряжения в пограничной зоне самоуравновешены, этим свойством будут обладать также перемещения и независимые повороты.

4. Сращивание асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя. Рассматривая вопрос о сращивании внутреннего НДС с пограничным, приведём символическую запись для полного НДС оболочки:

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + \lambda^r \cdot (\text{НДС})_{\text{кр}}^a + \lambda^\theta \cdot (\text{НДС})_{\text{кр}}^g \tag{4.1}$$

Величины r, θ назовём показателями интенсивностей плоской и антиплоской погранслоев. Они должны быть подобраны таким образом, чтобы стало возможным удовлетворение трёхмерным граничным условиям на поверхности края оболочки Σ .

Сначала рассмотрим первый вариант трёхмерных граничных условий микрополярной теории упругости, когда поверхность края оболочки нагружена усилиями и моментами ($\Sigma_1 \equiv \Sigma$, $\Sigma_2 \equiv 0$). Удовлетворяя граничным условиям, выберем в (4.1) для величин r и θ следующие значения: $r = \theta = l - p - c$.

В рамках точности $O(\lambda^{p-l})$, граничные условия при $\xi_1 = 0$ примут вид:

$$\begin{aligned}
\tau_{11}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{11}^1 + \lambda^{-p-c} P_{11}^{n(0)} &= \lambda^{-p-c} \tilde{p}_1^*, & v_{11}^0 + \lambda^{-p} Q_{11}^{a(0)} &= \lambda^{-p} \tilde{m}_1^*, \\
\tau_{12}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{12}^1 + \lambda^{-p-c} P_{12}^{a(0)} &= \lambda^{-p-c} \tilde{p}_2^*, & v_{12}^0 + \lambda^{-p} Q_{12}^{n(0)} &= \lambda^{-p} \tilde{m}_2^*,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\tau_{13}^0 + \lambda^{-2p} P_{13}^{n(0)} = \lambda^{-2p} \tilde{p}_3^*, \quad v_{13}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{13}^1 + \lambda^{-c} Q_{13}^{a(0)} = \lambda^{-c} \tilde{m}_3^*,$$

где $p_n^* = \mu \lambda^{l-p-c} \tilde{p}_n^*$, $m_n^* = R \mu \lambda^{l-p-c} \tilde{m}_n^*$.

Используя соответствующие условия затухания из (3.8), на основе (4.2) получим граничные условия для систем двумерных уравнений (2.24)-(2.26):

$$\begin{aligned} T_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \int_{-h}^h p_1^* d\alpha_3, \quad S_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_2^* d\alpha_3, \quad N_{13} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_3^* d\alpha_3, \quad M_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_1^* \alpha_3 d\alpha_3, \\ H_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \int_{-h}^h p_2^* \alpha_3 d\alpha_3, \quad L_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h m_1^* d\alpha_3, \quad L_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h m_2^* d\alpha_3, \quad (4.3) \\ L_{13} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \int_{-h}^h m_3^* d\alpha_3, \quad \Lambda_{13} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h m_3^* \alpha_3 d\alpha_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим второй вариант трёхмерных граничных условий микрополярной теории упругости, когда на поверхности края оболочки заданы перемещения и повороты ($\Sigma_2 \equiv \Sigma, \Sigma_1 \equiv 0$). Удовлетворяя граничным условиям, выберем в (4.1) для величин r и θ следующие значения: $r = \theta = 2l - 2p - c$.

В рамках точности $O(\lambda^{p-l})$, граничные условия при $\xi_1 = 0$ примут вид:

$$\begin{aligned} V_1^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta V_1^1 + \lambda^{-p-c} U_1^{n(0)} &= \lambda^{-p-c} \tilde{V}_1^*, \quad \omega_1^0 + \lambda^{-p} \varpi_1^{a(0)} = \lambda^{-p} \tilde{\omega}_1^*, \\ V_2^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta V_2^1 + \lambda^{-p-c} U_2^{a(0)} &= \lambda^{-p-c} \tilde{V}_2^*, \quad \omega_2^0 + \lambda^{-p} \varpi_2^{n(0)} = \lambda^{-p} \tilde{\omega}_2^*, \quad (4.4) \\ V_3^0 + \lambda^{-2p} U_3^{n(0)} &= \lambda^{-2p} \tilde{V}_3^*, \quad \omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \omega_3^1 + \lambda^{-c} \varpi_3^{a(0)} = \lambda^{-c} \tilde{\omega}_3^*, \end{aligned}$$

где $V_n^* = R \lambda^{l-2p-c} \tilde{V}_n^*$, $\omega_n^* = \lambda^{l-2p-c} \tilde{\omega}_n^*$.

С помощью условий затухания из (3.8), получим граничные условия для двумерной модели:

$$\begin{aligned} u_i \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_i^* d\alpha_3, \quad w \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_3^* d\alpha_3, \quad \Omega_n \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \omega_n^* d\alpha_3, \\ \Psi_i \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \frac{1}{2h} [V_i^* \Big|_{\alpha_3=h} - V_i^* \Big|_{\alpha_3=-h}], \quad \mathfrak{v} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \frac{1}{2h} [\omega_i^* \Big|_{\alpha_3=h} - \omega_i^* \Big|_{\alpha_3=-h}]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Рассмотрим смешанные трёхмерные граничные условия, когда будет иметь место шарнирное опирание. В (4.1) для величин r и θ примем следующие значения: $r = l - p - c$, $\theta = 2l - 2p + c$.

В рамках точности $O(\lambda^{p-l})$, граничные условия при $\xi_1 = 0$ примут вид:

$$\begin{aligned} \lambda^{-l+2p-c} \tau_{11}^0 + \lambda^{-2l+4p-2c} \zeta \tau_{11}^1 + P_{11}^{n(0)} &= \lambda^{-l+2p-c} \tilde{p}_1^*, \quad v_{11}^0 + \lambda^{-p} Q_{11}^{a(0)} = \lambda^{-p} \tilde{m}_1^*, \\ \tau_{12}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{12}^1 + \lambda^{-p-c} P_{12}^{a(0)} &= \lambda^{-p-c} \tilde{p}_2^*, \quad \lambda^{-c} v_{12}^0 + Q_{12}^{n(0)} = \tilde{m}_2^*, \quad (4.6) \\ \lambda^{-2p+c} V_3^0 + \lambda^{-p-c} U_3^{n(0)} &= \lambda^{-p-c} \tilde{V}_3^*, \quad v_{13}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{13}^1 + \lambda^{-c} Q_{13}^{a(0)} = \lambda^{-c} \tilde{m}_3^*, \end{aligned}$$

где $V_3^* = R \lambda^l \tilde{V}_3^*$, $p_1^* = \mu \lambda^l \tilde{p}_1^*$, $p_2^* = \mu \lambda^{l-p-c} \tilde{p}_2^*$, $m_1^* = R \mu \lambda^{l-p-c} \tilde{m}_1^*$, $m_2^* = R \mu \lambda^l \tilde{m}_2^*$, $m_3^* = R \mu \lambda^{l-p-c} \tilde{m}_3^*$.

В этом случае, используя условия затухания из (3.8), получим следующие граничные условия шарнирного опирания для двумерной модели:

$$\begin{aligned} w \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_3^* d\alpha_3, \quad T_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_1^* d\alpha_3, \quad S_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_2^* d\alpha_3, \\ M_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \int_{-h}^h p_1^* \alpha_3 d\alpha_3, \quad H_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_2^* \alpha_3 d\alpha_3, \quad L_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h m_1^* d\alpha_3, \\ L_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \int_{-h}^h m_2^* d\alpha_3, \quad L_{13} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h m_3^* d\alpha_3, \quad \Lambda_{13} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h m_3^* \alpha_3 d\alpha_3. \end{aligned} \quad (4.7)$$

5. Асимптотическая модель микрополярных упругих тонких оболочек.

Таким образом, на уровне исходного приближения асимптотического метода из трёхмерной теории построена двумерная теория микрополярных оболочек. Система уравнений (2.24)-(2.26) вместе с одной из групп граничных условий – (4.3), (4.5) или (4.7) – представляют собой асимптотическую модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

6. Прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек и её обоснование. Метод гипотез построения классической теории упругих тонких оболочек (имеем в виду гипотезы Кирхгофа-Лява или уточнённые гипотезы) с точки зрения инженерной практики имеет преимущество перед асимптотическим методом потому, что в основу теории были положены упрощения, имеющие вполне определённый физический смысл, с учётом также большой их наглядности и ясности. Основная проблема построения прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек заключается в разработке таких гипотез, которые позволили сведение трёхмерной задачи микрополярной теории упругости к вполне адекватной двумерной краевой задаче.

Для достижения этой цели, при формулировании гипотез, на наш взгляд, уместно использование качественных сторон асимптотического решения трёхмерной краевой задачи (1.1)-(1.5) микрополярной теории упругости в тонкой области оболочки.

В работах [12-14] осуществлена эта идея, сформулированы адекватные (соответствующие качественным сторонам асимптотического решения) гипотезы и построены как статические, так и динамические прикладные теории микрополярных упругих тонких оболочек и пластин. Принятые гипотезы формулируются так:

1. В процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярными к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически можем записать так: тангенциальные перемещения и нормальный поворот распределены по толщине оболочки по линейному закону:

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2), \quad (6.1)$$

а нормальное перемещение и тангенциальные повороты не зависят от поперечной координаты α_3 , т.е.

$$V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2). \quad (6.2)$$

Отметим, что с точки зрения перемещений принятая гипотеза, по сути дела, совпадает с кинематической гипотезой Тимошенко в классической теории упругих оболочек [22-25]. Гипотеза (6.1),(6.2), в целом, как в работах [12-14], назовём

обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек.

2. Силовым напряжением σ_{33} в обобщённом законе Гука (1.2) для γ_{ii} можно пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{ii} , аналогично, моментным напряжением μ_{3i} в обобщённом законе Гука для χ_{i3} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3} .

3. При определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем:

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (6.3)$$

После вычисления указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим прибавлением к соответствующим значениям (6.3) слагаемые, получаемые интегрированием первых двух и шестого уравнений равновесия из (1.1), для которых потребуем условия, чтобы усреднённые по толщине оболочки величины были равны нулю.

4. Величинами $\frac{\alpha_3}{R_i}$, по сравнению с единицей, можно пренебрегать.

Отметим, что принятая статическая гипотеза 3) в случае классической теории есть основное отличие от работ [22-25].

Сравним основные уравнения прикладной статической теории микрополярных упругих тонких оболочек работы [12], построенные на основе перечисленных выше гипотез, с аналогичными уравнениями (2.24)-(2.26) асимптотической модели. Легко заметить, что уравнения равновесия (2.24) и геометрические соотношения (2.26) полностью совпадают. Физические соотношения работы [12] отличаются от физических соотношений (2.25) лишь подчёркнутыми членами в выражениях $T_{ii}, M_{ii}, L_{i3}, \Lambda_{i3}$.

Отметим, что подчёркнутые члены в выражениях T_{ii} и M_{ii} , это результат того, что по асимптотической теории в выражениях для γ_{ii} , по указанной точности, не пренебрегается σ_{33} относительно σ_{ii} . Но, как известно, в теориях тонких оболочек это пренебрежение оправдано и принята как гипотеза в работе [12]. Аналогичное содержание имеет также пренебрежение (которое и принято в работе [12], как гипотеза) подчёркнутыми членами в выражениях L_{i3} и Λ_{i3} .

Таким образом, можно заключить, что построенная в работе [12] общая прикладная статическая теория микрополярных упругих тонких оболочек – асимптотически последовательная теория.

Что касается динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек, то следует сказать, что её асимптотическая модель построена в работе [26], а прикладная модель на основе перечисленных выше гипотез – в работе [13]. При сравнении этих моделей легко убедиться, что уравнения движения (это уравнения равновесия (2.24) с учётом инерционных сил и моментов) и геометрические соотношения (которые и в динамической теории имеют вид (2.26)) полностью совпадают. Что касается физических соотношений, то разность – опять в подчёркнутых слагаемых в выражениях (2.25) для $T_{ii}, M_{ii}, L_{i3}, \Lambda_{i3}$.

Так как при $\alpha = 0$, как от асимптотической модели (основные уравнения (2.24)-(2.26)), так и от прикладной модели работы [12], будет отделяться классическая модель упругих тонких оболочек типа Тимошенко (т.е. уточнённая теория с учётом поперечных сдвиговых деформаций), то можем констатировать, что именно эта полученная классическая прикладная уточнённая модель тонких оболочек будет асимптотически последовательной моделью (аналогичное высказывание имеет место и для динамического случая).

Отметим, что в работах [17,18] аналогичным образом (асимптотическим методом) обосновываются прикладные теории микрополярных упругих тонких пластин и балок, построенные в работах [14,27] на основе сформированных выше аналогичных гипотез.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2C154.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K.O. and Dressler R.F. A. Boundary Layer Theory for Elastic Plates // *Comm. Pure and Appl. Math.* 1961. №1. P. 1–33.
2. Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells // *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* 1962. Vol. 266. №1325.
3. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // *Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Вып.3.* Москва: Наука, 1966. С.116-136. (на русском языке).
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с. (на русском языке).
5. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. Academic Press. 1998. 225p.
6. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с. (на русском языке).
7. Rogacheva N.N. The Theory of Piezoelectric Plates and Shells. London: Boca Ration. SRS Press. 1994. 260p.
8. Устинов Ю.А., Шленев М.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода плит и оболочек// *Межвузовский сборник «Расчёт оболочек и пластин».* Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского Инженерно-строительного ин-та, 1978. С.3-27.
9. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении, 1992. 232с. (на русском языке).
10. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates// *Z Angew. Math. Mech (ZAMM).* 2009. V.89. № 4. P.242-256.
11. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. 2009. «On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography». // *Arch. Mech (Special Issue)* DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
12. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells// *Journal of Physical Mesomechanics.* 2012. V.15. №1-2. P.69-79.
13. Sargsyan S.H. The General Dynamic Theory of Micropolar Elastic Thin Shells. // *Doklady Physics.* 2011. Vol. 56. №1. P.39-42.
14. Sargsyan S.H. Mathematical Model of Micropolar Elastic Thin Plates and their Strength and Stiffness Characteristics// *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2012. Vol.53. №2. P.275-282.
15. Sargsyan S.H. Boundary-Value Problems of Asymmetric Theory of Elasticity for Thin Plates // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2008. Vol.72. №1. P.77-86.

16. Sargsyan S.H. The Theory of Micropolar Thin Elastic Shells //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. №2. P.235–249.
17. Саркисян С.О. Построение математической модели микрополярных упругих тонких балок асимптотическим методом //Изв. ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. Т.5. С.31-37. (на русском языке).
18. Саркисян С.О. Асимптотический метод построения математических моделей микрополярных упругих тонких пластин //Учёные записки. Гюмрийский государственный педагогический институт. 2013. Серия А. №1. С.7-37. (на русском языке).
19. Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V. On Timoshenko-Reissner Type Theories of Plates and Shells//Int. J. Solids Structures. 1993. Vol. 30. №5. P.675-694.
20. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости //Прикладная математика и механика. 1964. Т.28. Вып.6. С.1117-1120. (на русском языке).
21. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. P.383.
22. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсальных изотропных пластин. Киев: Наукова думка, 1977. 183с. (на русском языке).
23. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчёт пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288с. (на русском языке).
24. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. Киев: Наукова думка, 1981. 544с. (на русском языке).
25. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: Судостроение. 1987. 316с. (на русском языке).
26. Саркисян А.А. Асимптотический анализ начально-граничной динамической задачи несимметричной теории упругости со свободным вращением в тонкой области оболочки //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №2. С.39-50. (на русском языке).
27. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol. 2. №1. Pp.98-108.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович – Чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. Высшей математики Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.

Тел.: (093) 15 16 98

E-mail: s_sargsyan@yahoo.com; slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 27.11.2013

УДК 539.3

**О ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В
ПЬЕЗОСЛОЕ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПО
ТОЛЩИНЕ**

Камалян А.А.

Ключевые слова: электроупругие волны, неоднородный пьезоэлектрический слой, распределение напряжений по толщине слоя

Key Words: electroelastic waves, inhomogeneous piezoelectric medium, tension distribution over the thickness of the layer

Քամալյան Ա.Ա.

**Էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածումը ըստ հաստության եռանկյունաչափական
անհամասեռությամբ օժտված շերտում պիեզոէլեկտրական**

Տվյալ աշխատանքը հանդիսանում է [4]-ի շարունակությունը: Ուսումնասիրված է եռանկյունաչափական անհամասեռությամբ օժտված շերտում էլեկտրաառաձգական մոնոխրոմատիկ ալիքի տարածումը: Կատարվել է ալիքի տարածումը բնութագրող դիսպերսիոն հավասարման հետազոտություն, բերված են ալիքի վարքը բնութագրող թվային տվյալներ և որոշ համեմատություններ:

Kamalyan A.A.

On problem of electroelastic wave propagation in trigonometrically graded piezoelectric layer

This paper is a continuation of paper [4]. Here the propagation of electroelastic waves in trigonometrically graded layer (over thickness) made of 6mm piezoceramics is investigated. Electroelastic and mechanical characteristics of the layer (metalized and tension free surface) are variations of the trigonometric function, which is derived here. The dispersion of shear wave is analyzed and the numerical data is added.

Данная работа является продолжением статьи [4], где рассматривались задачи распространения волны при классической постановке и при некотором типе неоднородности пьезоэлектрического слоя по толщине. Здесь исследована аналогичная модель распространения поверхностной электроупругой волны в пьезослое класса 6mm с другой вариацией физико-механических параметров по толщине. Приведены численные результаты характеристик распространения волн в среде и проведены сравнения с аналогичными данными, полученными в работе [4].

1. Исследуется возможность распространения поверхностной электроупругой монохроматической волны вдоль оси Ox в пьезоэлектрической среде гексагональной симметрии (класса 6mm), которая занимает в прямоугольной системе координат $(x; y; z)$ область $-\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq 2h; -\infty < z < \infty$ и имеющей неоднородность по толщине. Координатная ось Oz параллельна оси симметрии пьезокристалла, плоскость xOy есть плоскость изотропии, а поверхности слоя $y = 0; y = 2h$ свободны от нагрузок и заземлены.

$$\sigma_{yz} = 0; \varphi = 0. \quad (1.1)$$

Другие варианты граничных условий для рассматриваемого слоя представлены в статье [5].

В данной работе исследуется антиплоская задача распространения упругой волны с учётом потенциального квазистатического электрического поля.

Запишем систему уравнений, описывающую вышеупомянутую задачу:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Неоднородность характеристик пьезоэлектрика по толщине характеризуется единой безразмерной функцией $a(y)$, удовлетворяющей условию $a(0) = 1$, $a(0) > 0$ [6]. Физико-механические характеристики материала (а именно: C_{44} –модуль сдвига,

e_{15} –пьезоэлектрический модуль, ϵ_{11} – диэлектрическая проницаемость и ρ – плотность материала) будут зависеть от толщины следующим образом:

$$e_{15}(y) = e_{15}^0 a(y), \quad \epsilon_{11}(y) = \epsilon_{11}^0 a(y) \quad (1.4)$$

$$C_{44}(y) = C_{44}^0 a(y), \quad \rho(y) = \rho_0 a(y)$$

Здесь C_{44}^0 , e_{15}^0 , ϵ_{11}^0 , ρ_0 являются постоянными. Поверхность $y = 0$ с характеристиками C_{44}^0 , e_{15}^0 , ϵ_{11}^0 , ρ_0 назовём калибровочной поверхностью.

Для пьезоэлектрического слоя класса бтм с неоднородностью (1.4) касательные напряжения σ_{xz} , σ_{yz} и нормальные компоненты электрического поля D_x , D_y принимают вид:

$$\sigma_{xz} = C_{44}^0 a(y) \frac{\partial W}{\partial x} + e_{15}^0 a(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = C_{44}^0 a(y) \frac{\partial W}{\partial y} + e_{15}^0 a(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.5)$$

$$D_x = e_{15}^0 a(y) \frac{\partial W}{\partial x} - \epsilon_{11}^0 a(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad D_y = e_{15}^0 a(y) \frac{\partial W}{\partial y} - \epsilon_{11}^0 a(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.6)$$

Подставив (1.5), (1.6) в уравнения (1.2),(1.3), с помощью элементарных преобразований получим систему уравнений, описывающую поведение среды с принятым типом неоднородности.

$$\nabla^2 W + \frac{a'}{a} \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\rho_0}{C_{44}^0 (1 + \chi_0)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{a'}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{e_{15}^0}{\epsilon_{11}^0} \left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a} \frac{\partial W}{\partial y} \right] \quad (1.8)$$

Здесь $\chi_0 = \frac{e_{15}^0{}^2}{C_{44}^0 \epsilon_{11}^0}$ – коэффициент электромеханической связи для калибровочной поверхности.

В дальнейшем величина коэффициента электромеханической связи будет нужна при выявлении существования волн и расчёте их скоростей. В табл.1 приведены физико-механические характеристики и величины коэффициентов электромеханической связи некоторых пьезокерамических материалов класса бтм.

Таблица 1

| | CdS (χ_1) [3] | ZnO (χ_2) [1] | PZT-7 (χ_3) [9] | PZT-5H (χ_4) [10] | PZT-4 (χ_5) [1] |
|--|-------------------------|-------------------------|---------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| $C_{44} \cdot 10^{10} \text{ H/м}^2$ | 1.49 | 4.25 | 2.5 | 2.3 | 2.56 |
| $\rho \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ | 4.82 | 5.68 | 7.8 | 7.5 | 7.5 |
| $e_{15} \cdot \text{ Кл/м}^2$ | -0.21 | -0.59 | 13.5 | -17.0 | 12.7 |
| $\epsilon_{11} \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}$ | 7.99 | 7.38 | 1710 | 22.71 | 6.45 |
| χ_0 | 0.03 | 0.11 | 0.42 | 0.55 | 0.97 |
| $C_i \cdot \text{ м/с}$ | 1784 | 2881 | 2133 | 2180 | 2593 |

Монохроматические решения для системы уравнений (1.7)-(1.8) будем искать в следующем виде:

$$W = W_0(y) a^{-1/2}(y) \exp i(kx - \omega t) \quad (1.9)$$

$$\varphi = \varphi_0(y) a^{-1/2}(y) \exp i(kx - \omega t) \quad (1.10)$$

Подставляя (1.9) в (1.7), получим:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2 \left[1 - \frac{\ell}{k^2} - \eta \right] W_0 = 0 \quad (1.11)$$

$$\eta = V^2 C_i^{-2}, \quad (1.12)$$

где $C_i^2 = \frac{C_{44}^0 (1 + \chi_0)}{\rho_0}$ – квадрат скорости сдвиговой волны в среде, $V^2 = \left(\frac{\omega}{k} \right)^2$ –

квадрат фазовой скорости и $\ell = -\frac{1}{2} \frac{a''}{a} + \frac{1}{4} \frac{(a')^2}{a^2}$.

Выберем функцию $a(y)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\ell = -\frac{1}{2} \frac{a''}{a} + \frac{1}{4} \frac{(a')^2}{a^2} > 0, \quad (1.13)$$

Введём обозначение $\gamma^2 = \frac{\ell}{k^2}$, где γ – безразмерная величина, отвечающая за численное присутствие неоднородности при расчёте скорости волны, значение $\gamma = 0$ соответствует классическому случаю, рассмотренному в работе [4].

Тогда дифференциальное уравнение (1.11) примет вид:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2 \alpha^2 W_0 = 0 \quad (1.14)$$

и общее решение будет

$$W_0 = A_1 \sinh[k\alpha y] + A_2 \cosh[k\alpha y],$$

где A_1, A_2 – постоянные и $\alpha = (1 - \eta - \gamma^2)^{1/2}$.

Из условия $0 < \alpha < 1$, которое является условием затухания или условием существования поверхностной волны, найдём:

$$0 < \eta < 1 - \gamma^2 \quad 0 \leq \gamma^2 < 1. \quad (1.15)$$

Имея аналитический вид решения (1.9), запишем также вид решения для (1.8):

$$\varphi_0 = \frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0} [A_1 \sinh[k\alpha y] + A_2 \cosh[k\alpha y]] + A_3 \sinh[k\beta y] + A_4 \cosh[k\beta y]$$

Здесь $\beta = \sqrt{1 - \gamma^2}$.

2. Функция неоднородности $a(y)$, удовлетворяющая условию (1.13), имеет следующий вид:

$$a(y) = C_2 \cos^2[\sqrt{\ell}(y - 2C_1)],$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Из условий $a(0) = 1$, $a'(0) = 0$ найдём $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, тогда $a(y) = \cos^2(\sqrt{\ell}y)$.

Учитывая, что $\gamma = \sqrt{\ell}/k$ будет вещественным, функцию, характеризующую неоднородность слоя по толщине, запишем в виде

$$a(y) = \cos^2(k\gamma y) \quad (2.1)$$

и, следовательно, функции $W(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, t)$ – в виде:

$$W = \frac{(A_1 \sinh[k\alpha y] + A_2 \cosh[k\alpha y])}{\cos(k\gamma y)} \exp i(kx - \omega t) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0} \frac{(A_1 \sinh[k\alpha y] + A_2 \cosh[k\alpha y])}{\cos(k\gamma y)} \exp i(kx - \omega t) + \\ & + \frac{(A_3 \sinh[k\beta y] + A_4 \cosh[k\beta y])}{\cos(k\gamma y)} \exp i(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.1), (2.2) и (2.3) в (1.5), получим:

$$\sigma_{yz} = C_{44}^0 a(y) \frac{\partial W}{\partial y} + e_{15}^0 a(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (2.4)$$

$$\sigma_{yz} = A_1 C_{44}^0 (1 + \chi_0) \Omega_1 + A_2 C_{44}^0 (1 + \chi_0) \Omega_2 + A_3 e_{15}^0 \Omega_3 + A_4 e_{15}^0 \Omega_4,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= k (\alpha \cosh[k\alpha y] \cos(k\gamma y) + \gamma \sin(k\gamma y) \sinh[k\alpha y]) \\ \Omega_2 &= k (\alpha \sinh[k\alpha y] \cos(k\gamma y) + \gamma \sin(k\gamma y) \cosh[k\alpha y]) \\ \Omega_3 &= k (\beta \cosh[k\beta y] \cos(k\gamma y) + \gamma \sin(k\gamma y) \sinh[k\beta y]) \\ \Omega_4 &= k (\beta \sinh[k\beta y] \cos(k\gamma y) + \gamma \sin(k\gamma y) \cosh[k\beta y]) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Учитывая граничные условия (1.1) и вводя обозначения $\tilde{k} = kh$, из условия существования ненулевых решений $\det|A_i| = 0$, $i = 1, \dots, 4$ получим следующее трансцендентное дисперсионное уравнение:

$$T(\alpha, \chi_0, \tilde{k}, \gamma) = 2\alpha\sqrt{1-\gamma^2}\chi_0(1+\chi_0)(\cosh[2\alpha\tilde{k}]\cosh[2\sqrt{1-\gamma^2}\tilde{k}]-1) - \\ - ((1-\gamma^2)\chi_0^2 + \alpha^2(1+\chi_0)^2)\sinh[2\alpha\tilde{k}]\sinh[2\sqrt{1-\gamma^2}\tilde{k}] - \\ - \gamma \tan[2\gamma\tilde{k}]\alpha(\chi_0+1)\sinh[2\sqrt{1-\gamma^2}\tilde{k}]\cosh[2\alpha\tilde{k}] + \\ + \gamma \tan[2\gamma\tilde{k}]\chi_0\sqrt{1-\gamma^2}\cosh[2\sqrt{1-\gamma^2}\tilde{k}]\sinh[2\alpha\tilde{k}] = 0 \quad (2.6)$$

Подстановка $\gamma = 0$ приведёт к дисперсионному уравнению для классического случая [4]. Задача сводится к определению безразмерного параметра η , который характеризует фазовую скорость.

В предельном случае длинных волн ($\tilde{k} \rightarrow 0$), когда толщина слоя намного меньше длины волны, решение уравнения (2.6) примет вид:

$$\eta = (1-\gamma^2)(1-\chi_0/(1+\chi_0)) < 1-\gamma^2. \quad (2.7)$$

В коротковолновом приближении ($\tilde{k} \rightarrow \infty$), когда толщина слоя намного больше длины волны,

$$\eta = (1-\gamma^2)(1-\chi_0^2/(1+\chi_0)^2) < 1-\gamma^2. \quad (2.8)$$

Полученное дисперсионное уравнение (2.6) имеет громоздкий вид, что затрудняет его дальнейшее исследование аналитическими методами. При определённых значениях χ_0 , γ и \tilde{k} численно находим нетривиальные решения уравнения (2.6).

Во избежание обращения в ноль знаменателей в (2.2) и (2.3), примем, что $0 < k\gamma y < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Подставляя максимальное значение $y = 2h$ для параметров γ и $\tilde{k} = kh$, получим условие:

$$0 \leq \tilde{k}\gamma < \frac{\pi}{4} - \varepsilon \quad (\varepsilon - \text{достаточно малое положительное число}). \quad (2.9)$$

В табл.2 приведены численные примеры условия (2.9) для некоторых фиксированных γ .

Таблица 2

| | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\gamma = 0.15$ | $\gamma = 0.3$ | $\gamma = 0.5$ | $\gamma = 0.7$ |
| $\tilde{k} < 5.23$ | $\tilde{k} < 2.67$ | $\tilde{k} < 1.57$ | $\tilde{k} < 1.21$ |

К примеру, для поиска возможных решений при $\gamma = 0.3$ параметр \tilde{k} следует варьировать в спектре (0,2.67).

В табл.3 приведены численные расчёты для безразмерной скорости η при некоторых χ_0 (табл.1) и γ (с соответствующей вариацией параметра \tilde{k} (табл. 2). Там же символом “-“ обозначим отсутствие распространения волны с интересующими нас характеристиками. Они также отсутствуют при $\gamma \geq 0,7$.

Таблица 3

| | | | | | |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\gamma = 0.15$ | χ_1 | χ_2 | χ_3 | χ_4 | χ_5 |
| $\tilde{k} = 0.1$ | 0.9709 | 0.9011 | 0.7049 | 0.6459 | 0.5084 |
| $\tilde{k} = 0.5$ | 0.9730 | 0.9077 | 0.7203 | 0.6629 | 0.5271 |
| $\tilde{k} = 1$ | - | 0.9227 | 0.7572 | 0.7041 | 0.6353 |
| $\tilde{k} = 2$ | - | 0.9502 | 0.8291 | 0.7858 | 0.6699 |
| $\tilde{k} = 5$ | - | 0.9765 | 0.8925 | 0.8546 | 0.7124 |
| | | | | | |
| $\gamma = 0.3$ | | | | | |
| $\tilde{k} = 0.1$ | - | 0.9011 | 0.7049 | 0.6459 | 0.5084 |
| $\tilde{k} = 0.5$ | - | 0.9077 | 0.7204 | 0.6630 | 0.5273 |
| $\tilde{k} = 1$ | - | - | 0.7588 | 0.7058 | 0.5757 |
| $\tilde{k} = 2$ | - | - | 0.8338 | 0.7910 | 0.6753 |
| | | | | | |
| $\gamma = 0.5$ | | | | | |
| $\tilde{k} = 0.1$ | - | - | 0.7049 | 0.6459 | 0.5084 |
| $\tilde{k} = 0.5$ | - | - | 0.7207 | 0.6634 | 0.5277 |
| $\tilde{k} = 1$ | - | - | - | 0.7092 | 0.5797 |
| $\tilde{k} = 1.5$ | - | - | - | - | 0.6314 |

Заключение.

В данной работе получено дисперсионное уравнение для одного случая неоднородности пьезоактивного слоя. Исследованы возможные решения в разных диапазонах и величинах параметра неоднородности. Величины фазовых скоростей волн для интересующего материала при интересующих значениях параметров можно рассчитать, если умножить скорость C_t^2 для данного материала из табл.1 на безразмерную величину скоростей, приведённых в табл.3.

Сравнивая полученные в данной работе результаты с результатами работы [4], можно утверждать, что исследуемая здесь тригонометрическая неоднородность, отличается неким эффектом рассеивания волновой энергии в слое, которая может мешать волне локализоваться вдоль поверхностей слоя. Этот эффект также заметен и при исследовании амплитуд физико-механических характеристик волны ((2.2) и (2.3)).

Амплитуды $W_0 a^{-1/2}$ и $\varphi_0 a^{-1/2}$ не проявляют явных признаков локализации волн, т.е. не стремятся к нулю по мере роста аргумента $[k\gamma]$. Кроме того, при данном типе неоднородности и условиях (1.15) и (2.8) отсутствуют вторые решения дисперсионного уравнения, которые возникали в слое при изученных в [4] обстоятельствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. О распространении электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике.// Изв. АН Армянской ССР. Механика. 1988. Т.41. №5. С.34-40.
2. Аветисян А.С., Маргарян Дж.М. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств.//Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №3-4. С.31-36.
3. Аветисян А.С. Поверхностные электроупругие волны Лява в случае неоднородного пьезоэлектрического слоя.//Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1987. Т.40. №1. С.24-29.
4. Камалян А.А. О распространении и поведении электроупругой волны в пьезоэлектрике в зависимости от неоднородности.// Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №4. С.38-48.
5. Belubekyan M.V., Belubekyan V.M. Surface waves in piezoactive elastic system of a layer on a semi-space. Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 2013, Mechanics, № 3, p. 45–48.
6. Collet Bernard, Destrade Michel, Maugin Gerard A. Bleustein-Gulyaev waves in some functionally graded materials.// European Journal of Mechanics A/Solids 25 (2006) 695-706.
7. Hasanyan D.J., Piliposian G.T., Kamalyan A.H., Karakhanyan M.I. Some dynamic problems for elastic materials with functional inhomogeneties: anti-plane deformations. Continuum Mech. Thermodyn. (2003) 15: 519-527.
8. Мухсичачоян А.Р. К задаче сдвиговой поверхностной волны в неоднородной среде. // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №1. С.12-16.
9. Li Peng, Feng Jin. Bleustein-Gulyaev waves in a transversely isotropic piezoelectric layered structure with an imperfectly bonded interface//Smart Mater. Struct 21 (2012) 045009 (9pp).
10. CAO Xiaoshan, Jin Feng, WANG ZiKun & Lu TianJian Bleustein-Gulyaev waves in a functionally graded piezoelectric material layered structure//Sci China Ser G-Phys Mech Astron, Apr. 2009, vol.52, no. 4,613-625.
11. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, Физматлит, 1991. 416с.
12. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.
13. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. Editorial УРСС, 2003. 336с.

Сведения об авторе:

Камалян Андраник Арменович – Аспирант факультета математики и механики, ЕГУ

Тел.: (094)90-96-92, (060)44-71-70

E-mail: kamalyan.andranik@yahoo.com

Поступила в редакцию 20.01.2014

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Արթուր Հակոբի Սագունյան Ծննդյան 100-ամյակի առթիվ 3

Ամիրբեկյան Ա.Ն., Մկրտչյան Մ.Ս., Մխիթարյան Ս.Մ., Շեկյան Լ.Ա.
Առանցքային ուժերի հաշվառմամբ առաձգական կիսահարթության վրա
վերջավոր երկարության հեծանի ծոման մասին 6

Քերոբյան Ա.Վ. Երկու վերջավոր առաձգական վերադիրներով
կոնտակտային խնդիրներ առաձգական շերտի և անվերջ սալի համար,
սահքի միջնաշերտերի առկայությամբ 22

Աղալովյան Մ.Լ., Գևորգյան Ռ.Ս. Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ
սալերի փաթեթի համար ջերմաառաձգականության ոչ-դասական
եզրային խնդիրների մի դասի ասիմպտոտիկական լուծումը 35

Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ. Հոսող ոչ մածուցիկ գազահեղուկ
խառնուրդ պարունակող շրջանաձև գլանային թաղանթի սեփական
տատանումները 45

Սարգսյան Ս.Հ. Առաձգական բարակ թաղանթների միկրոպոլյար և
դասական տեսությունների կառուցման ասիմպտոտիկ
հիմնավորվածությամբ վարկածների մեթոդ 54

Քամալյան Ա.Ա. Էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածումը ըստ
հաստության եռանկյունաչափական անհամասեռությամբ օժտված
պիեզոշերտում 72

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----------|
| Сагомонян Артур Яковлевич – К 100-летию со дня рождения..... | 3 |
| Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шемян Л.А. О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учётом сил в её срединной линии | 6 |
| Керопян А. В. Контактные задачи для упругой полосы и бесконечной пластины с двумя конечными упругими накладками при наличии сдвиговых прослоек..... | 22 |
| Агаловян М.Л., Геворгян Р.С. Асимптотическое решение одного класса неклассических краевых задач термоупругости для пакета из ортотропных пластин переменной толщины..... | 35 |
| Оганян Г.Г., Саакян С.Л. Собственные колебания круговой цилиндри- ческой оболочки с протекающей невязкой газожидкостной смесью | 45 |
| Саркисян С.О. Асимптотически обоснованный метод гипотез построения микрополярной и классической теории упругих тонких оболочек | 54 |
| Камалян А.А. О задаче распространения электроупругой волны в пьезослое с тригонометрической неоднородностью по толщине..... | 72 |

CONTENTS

| | |
|---|-----------|
| Artur Ya. Sagomonyan 100-th Aniversary | 3 |
| Amirbekyan A.N., Mkrтчyan M.S., Mkhitaryan S.M., Shekyan L.A. About contact problem of bending of a beam of finite length on an elastic half-plane in view of forces in its mid-line | 6 |
| Kerobyan A.V. Contact Problems for an Elastic Layer and the Infinite Plate with Two Finite Elastic Overlays in the Presence of Shear Interlayers | 22 |
| Aghalovyan M.L. , Gevorgyan R.S. Asymptotic solution of a class thermoelasticity nonclassical boundary value problems for the package of an orthotropic plate of variable thickness..... | 35 |
| Ohanyan G.G., Sahakyan S.L. The self-vibrations of cylindrical shell, filled by the flowing non viscous Gas-Liquid mixture..... | 45 |
| Sargsyan S.H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells | 54 |
| Kamalyan A.A. On problem of electroelastic wave propagation in trigonometrically graded piezoelectric layer..... | 72 |

Заказ № 497.
Тираж 150.
Сдано в производство 18.03.2014г.
Формат 70 x 100^{1/16} . 5 печ. л.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН Армении
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24