ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика

ЛАВРЕНТИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ МОВСИСЯН
(К 80-летию со дня рождения)

Мовсисян Лаврентий Александрович родился 24 октября 1933г. в с.Арачадзор НКР в семье учителей. Духовные ценности и высокие моральные принципы, присущие жизнедеятельности сельской интеллигенции, оказали определяющее влияние на формирование мировоззрения юбиляра. После окончания школы в 1951г. поступил на физико-математический факультет Ереванского Государственного Университета. По завершению учёбы в 1956г. направлен на работу в Институт математики и механики АН Арм.ССР, где началась его научная деятельность в области механики деформируемых сред. В 1959г. продолжил учёбу в аспирантуре Института машиноведения АН Украинской ССР (г.Харьков), которую закончил представлением к защите кандидатской диссертации в 1962г. С 1963г.– кандидат технических наук, с 1975г. – доктор технических наук. В 1985г. присуждено звание профессора. Под его научным руководством подготовлены и защищены 5 кандидатских диссертаций. Долгие годы занимается преподавательской работой по подготовке молодых специалистов-механиков на факультете математики и механики ЕГУ. Является автором более 150 научных публикаций в различных академических журналах и научных сборниках как в Армении, так и за рубежом.

Круг научных интересов Л.А.Мовсисяна широк и разнообразен. Его исследования посвящены, в основном, развитию теории пластин и оболочек. Им был поставлен и решён вопрос рационального использования возможностей материала (анизотропии) цилиндрической оболочки, а именно, определение тех ориентаций главных направлений упругости, при которых получаются наименьший прогиб или наибольшая критическая сила, а также наибольшие собственные частоты. Предложенный подход в дальнейшем был применён к практическим задачам проектирования оболочек из композитов. Исследованы нестационарные вынужденные колебания ортотропной цилиндрической оболочки, когда демпфирование происходит согласно законам Фохта и Сорокина, а также задачи устойчивости стержней и цилиндрических изотропных и ортотропных оболочек при ударных нагружениях с различными граничными условиями.

Совместно с А.Г.Багдоевым рассматривались задачи устойчивости распространения ударных волн и волн модуляций в нелинейно-упругих и геометрически нелинейных пластинах и оболочках. При этом нелинейная упругость взята степенной по Каудереру, а геометрическая нелинейность – по теории Кармана. В геометрически нелинейной пластине пренебрежение продольным инерционным членом приводит к устойчивости волнового пакета, в то время как при его учёте волновой пакет всегда неустойчив. В различных постановках исследовалась плоская задача о распространении полубесконечной трещины в изотропной вязкоупругой среде, когда на её берегах заданы постоянные нормальные напряжения.

Последние публикации посвящены, в частности, исследованию задач оптимального управления колебаниями упругих, термоупругих и вязкоупругих систем. В этих задачах управление осуществляется через внешние распределённые воздействия или через граничные условия при условии минимума квадратичного функционала, заданного для произвольного интервала времени.

Научная общественность Армении и редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» поздравляют Лаврентия Александровича Мовсисяна со славным юбилеем и желают ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ КОЛОНН

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: вязкоупругий стержень, медленное и ударное нагружения, потеря устойчивости, критические моменты.
Keywords: viscoelastic beam, slow and impact loading, instability, critical moment.

Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.
Առաձգամածուցիկ սյունի կայունության մասին

Դիտարկվում է առաձգամածուցիկ (տիպիկ նյութ) ձողի կայունությունը դանդաղ բեռնավորման և հարվածի դեպքերում: Առաջին դեպքում կառուցված է ճկվածքների փոփոխության կորերը, իսկ երկրորդ դեպքում՝ որոշվում են կայունությունը կորցնելու ակնթարթային և երկարատև ժամանակները:

Movsisyan L.A. , Nersisyan G.G.
About stability of viscoelastic columns

The problem of stability beems as slow and impact loading is studed. In the first case the curves increase deflection and the second case instants nd long moments of instability are difined.

В настоящей статье изучается задача устойчивости вязкоупругого (типичный материал) стержня как при медленном, так и быстром (ударном) нагружении.

В первом случае построены кривые возрастания прогибов, во втором определяются мгновенные и длительные моменты потери устойчивости.

Работа [1] является основополагающей в области динамической устойчивости упругих стержней. В дальнейшем в этом же духе рассматривались многочисленные задачи как для стержней, так и для цилиндрических оболочек [2,3 и др.]. В [1] нагружение предполагается медленным, в связи с чем сжимающая сила принимается однородной относительно пространственной координаты. Однако при быстрых нагружениях или при ударе процесс распространения продольных волн должен быть учтён, как в [4,5].

В качестве заглавия настоящей статьи взято перефразированное из [1].

1. Уравнение продольного движения

$$\tilde{E}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Уравнение возмущённого движения (устойчивости)

$$\tilde{E}J\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=EJ\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \tag{1.2}$$

Все обозначения обычные, только заметим, что w – полный прогиб, а w_0 – начальная неправильность.

Осевая сила при этом определяется как

$$P=\tilde{E}F\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.3}$$

Как уже было отмечено, материал стержня – вязкоупругий

$$\tilde{E}u = E\left(1-\Gamma^*\right)u = E\left(u-\gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}udt\right). \tag{1.4}$$

Для возмущённого движения на концах балки принимаются условия свободного опирания:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=l. \tag{1.5}$$

При нулевых начальных условиях рассмотрим два случая продольного нагружения, когда оно совершается медленно и быстро в виде удара.

2. При медленном нагружении инерционным членом в (1.1) можно пренебречь [1]. Условия на концах такие:

$$u=0 \quad \text{при} \quad x=0; \quad u=-ct \quad \text{при} \quad x=l, \tag{2.1}$$

что соответствует тому, что один конец стержня неподвижен, а второй конец движется в сторону первого с постоянной скоростью. Кстати, эта задача адекватна случаю, когда на конце стержня производится удар с бесконечной массой со скоростью c [5].

Тогда продольная сила из (1.1), (1.3) и (2.1) будет

$$P = -\tilde{E}F\frac{ct}{l}, \tag{2.2}$$

которая на основании (1.4) –

$$P(t) = -EF\frac{c}{l}\left[t-\frac{\gamma}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha t}+\alpha t-1\right)\right] \tag{2.3}$$

Для прогибов, в соответствии с (1.5), взяв

$$w = f_m^{(t)}\sin\lambda_m x,\ w_0 = f_m^{(0)}\sin\lambda_m x,\ \lambda_m\frac{m\pi}{l}, \tag{2.4}$$

будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{d^2 f_m}{dt^2}+\omega_m^2\left(1-\frac{P(t)}{P_m}\right)f-\omega_m^2\gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}f_m(\tau)d\tau = \\ =\omega_m^2 f_m^{(0)}\left[1-\frac{\gamma}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)\right]\end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь

$$\omega_m^2 = \frac{EJ}{\rho F}\lambda_m^4,\ P_m = EJ\lambda_m^2.$$

Если принять новые обозначения:

$$At=\xi,\ A=\frac{clF}{J\pi^2},\ \beta=\frac{\alpha}{A},\ \Omega^2\frac{\omega^2}{A^2},\ \frac{\gamma}{\alpha}=\chi, \tag{2.6}$$

то систему (2.5) можно записать в виде (индексы опущены):

$$\begin{gathered}\frac{d^2 f}{d\xi^2}+\Omega^2(1-\xi)f-\Omega^2\beta\chi\int_0^\xi e^{-\beta(\xi-\eta)}fd\eta + \\ +\Omega^2\chi\frac{1}{\beta}\left(\beta\xi-1+e^{-\beta\xi}\right)f = \Omega^2 f^0\left[1-\chi\left(1-e^{-\beta\xi}\right)\right]\end{gathered} \tag{2.7}$$

Для упругого случая решение выражается через функции Бесселя [1]. Здесь только возможно численное решение. Так как для стержня минимальная критическая сила получается при одной полуволне $(m=1)$, то численные данные также проводятся для этого случая с начальными условиями:

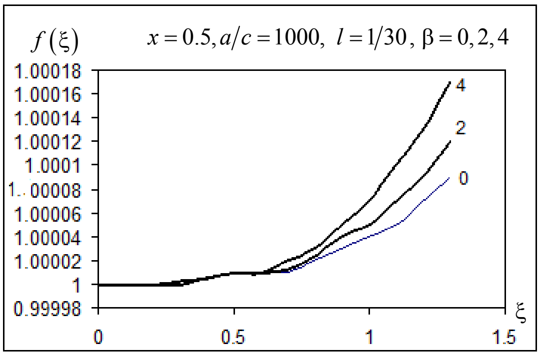
$$f_1(0)=f_1^{(0)}\ ,\ f_1^t(0)=0 \tag{2.8}$$

Расчёты проводились методом Рунге-Кута для $a/c=10^4$, для стержня с поперечным сечением в виде прямоугольника – при различных соотношениях h/l. Коэффициент χ характеризует отношение длительного модуля упругости к мгновенному, т.е.

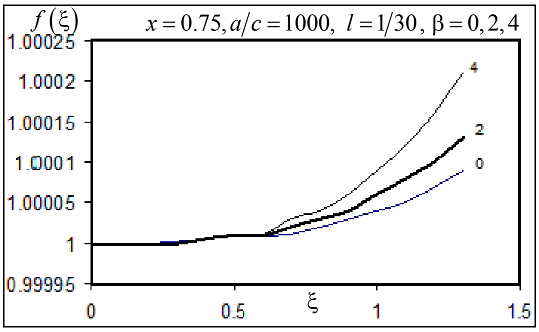
при $\chi=0.5\to E_\infty=0.5E$ $\quad a-\chi=0.75\to E_\infty=0,25E$.

Коэффициент β характеризует „скорость" наступления E_∞ ($\beta=\alpha t_{np}$, где $t_{np}=\dfrac{J\pi^2}{lF}$ – время, когда сжимающая упругая сила достигает Эйлерова значения – $EJ\pi^2/l^2$). Значение $\beta=0$ соответствует упругому значению, а $\beta=2$, когда Эйлерова сила достигается раньше, чем предельное вязкоупругое состояние (E_∞), а $\beta=4$ –наоборот.

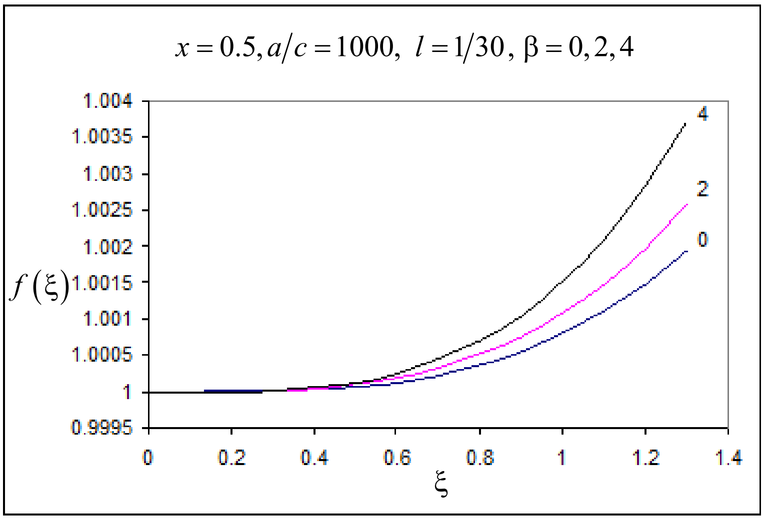
Соответствующие кривые возрастания амплитуд приведены на фиг.1–4.



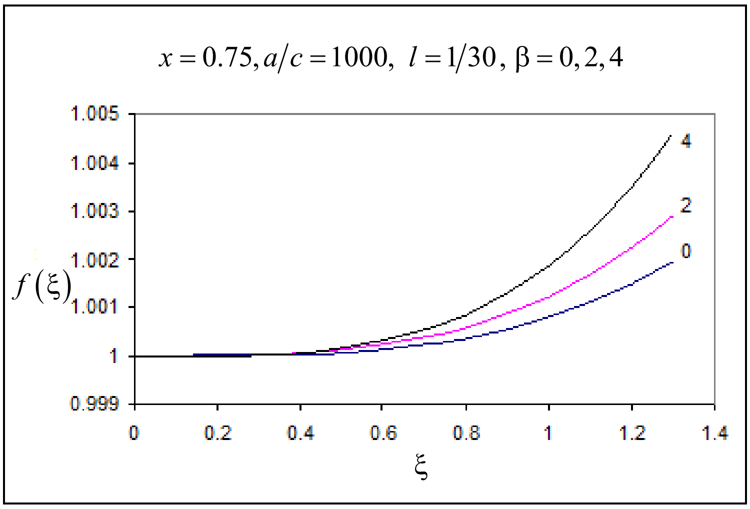
Фиг.1.



Фиг.2.



Фиг.3.



Фиг.4.

По оси абсцисс отложена безразмерная ξ (при $\xi=1$ сжимающая сила достигает Эйлерова значения).

В общем, ничего неожиданного нет. При $\xi=1$, во-первых, амплитуды – конечные величины и чем меньше длительный модуль упругости, тем больше они по сравнению с упругим случаем. Нужно отметить также следующее: при сравнительно длинном стержне $(l=50h)$ возрастание амплитуд сопровождается заметным колебательным процессом.

3. При быстрых нагружениях (при ударе) решение уравнения (1.1) должно быть точным. Если применять преобразование Лапласа, то для изображения $\overline{u}$ будем иметь

$$\overline{u} = c_1 e^{-p_1 x} + c_2 e^{-p_1 x} \ , \ p_1 = \frac{p}{a}\sqrt{1+\frac{\gamma}{p+\alpha-\gamma}} \ . \tag{3.1}$$

Удовлетворяя преобразованным условиям (2.1), для силы P при первом прохождении волны (для малых моментов времени) приближённо будем иметь (до момента времени, когда сжимающая волна достигнет другого конца.):

$$P = -EF\frac{c}{a}e^{-\frac{\gamma}{2a}x} \ , \ 0 \le x \le at \tag{3.2}$$

В частном случае, для упругого случая $(\gamma = 0)$ получим [4,5].

Изучая задачи устойчивости для определения критического момента времени, будем исходить из однородной части уравнения (1.2), отбрасывая также инерционный член, так как по определению критическое время – это время, когда движение системы перестаёт быть колебательным [5]. Нужно отметить, что помимо вязкоупругого случая должно быть добавлено ещё дополнительное условие. Ведь и при статике для вязкоупругого случая существуют мгновенная и длительная критические силы.

Итак, решение уравнения

$$\tilde{E}J\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{3.3}$$

будем искать, как и в (2.4), в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t)\sin\lambda_m x \tag{3.4}$$

при этом, $P(x,t)$ представим как

$$P = -EF\frac{c}{a}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\cos\lambda_n x$$

$$a_0 = \frac{1}{r}\left(1-e^{-ry}\right), \ r = \frac{\gamma l}{2a}, \ y = \frac{at}{l} \tag{3.5}$$

$$a_m = \frac{2}{r^2+m^2\pi^2}\left[e^{-ry}\left(m\pi\sin m\pi y - r\cos m\pi y\right) + r\right]$$

С учётом (3.4) и (3.5) для неизвестных f_m получим систему

$$2n^3\left(1-\Gamma^*\right)f_n = \lambda\left[\left(2a_0 - a_{2n}\right)nf_n + \sum_{\substack{q=1 \\ q\neq n}}^{\infty} q\left(a_{n-q} - a_{n+q}\right)f_q\right] \tag{3.6}$$

Здесь

$$\lambda = \frac{EF\frac{c}{a}}{P_э} \ , \ P_э = \frac{EJ\pi^2}{l^2}$$

Интегральную систему можно привести к дифференциальной. Если (3.6) дифференцировать по t, а затем из обоих систем исключить интегральные члены, то получится система дифференциальных уравнений первой степени относительно f_n.

Теперь проведём аналог с обычной задачей устойчивости стержня (напр., [6]). Там равенство нулю коэффициента перед f_n^i даёт мгновенную критическую силу, а перед f_n – длительную. Такую же идеологию будем проводить относительно полученной системы. Итак, мгновенная критическая сила определится из условия

$$\det\left\|d_{mn}^0\right\| = 0$$

$$d_{mn}^0 = \frac{2m^3}{\lambda} - \left(2a_0 - a_{2m}\right)m, \; m = n \tag{3.7}$$

$$\left(a_{m+n} - a_{m-n}\right)n \;, \; m \neq n$$

И соответственно для длительной силы будем иметь условие

$$\det\left\|d_{mn}^{(t)}\right\| = 0 \tag{3.8}$$

$$d_{mn}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{2em^3}{\lambda} - \left(2a_0 - a_{2m}\right)m - \dfrac{1}{2r}\left(1-e\right)\left(2b_0 - b_{2m}\right)m, \; m = n \\ \left(a_{m+n} - a_{m-n}\right)n + \dfrac{1}{2r}\left(1-e\right)\left(b_{m+n} - b_{m-n}\right)n, \;\; m \neq n \end{cases} \tag{3.9}$$

Здесь

$$b_0 = e^{-ry}, \; b_m = 2e^{-ry}\cos m\pi y, \; e = E_\infty / E$$

В таблице приведены значения λ в зависимости от y и e, т.е. какова должна быть сила, чтобы потеря устойчивости произошла в такой длине y (то же самое в такой момент времени).

Таблица

y \ e	1	0,5	0,25
0.2	7.455	4.107	2.748
0.3	3.664	2.052	1.368
0.4	2.303	1.317	0.874
0.5	1.668	0.980	0.646
0.6	1.330	0.811	0.529
0.7	1.144	0.731	0.470
0.8	1.046	0.719	0.445
0.9	1.006	0.716	0.436
1	1	0.709	0.424

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоф Н. Динамика устойчивости упругих колонн. //Механика (сб.пер.): ИИЛ. 1952. №3. С.117-129.
2. Мовсисян Л.А. Об одной динамической задаче цилиндрической оболочки. //Докл.АН Арм.ССР. 1961. Т.32. №5. С.225-230.
3. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: ГИФМА, 1963. 879с.
4. Коппа А. О механизме выпучивания круговой цилиндрической оболочки при продольном ударе.//Механика. (сб.пер.) 1961. №6. С.145-164.

5. Мовсисян Л.А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе. //Докл.АН Арм.ССР. 1969. Т.49. №3. С.124-130.
6. Потапов В.А. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1986. 312с.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович – доктор техн.наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН Армении.
0019, Ереван, Армения, пр.Маршала Баграмяна 24[б].

Нерсисян Гриша Геворкович – кандидат физ-мат наук, доцент, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Тел.: 20-68-79.

Поступила в редакцию 12.06.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ В АНТИПЛОСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Погосян Н. Д., Саноян Ю. Г. , Терзян С. А.

Ключевые слова: волна, однородный слой, неоднородный слой, свободная граница.
Key words: shear wave, homogeneous layer, nonhomogeneous layer, free boundary.

Պողոսյան Ն. Ջ., Սանոյան ՅՈՒ. Գ., Թերզյան Ս. Հ.
Սահքի ալիքների տարածումը երկշերտ միջավայրում

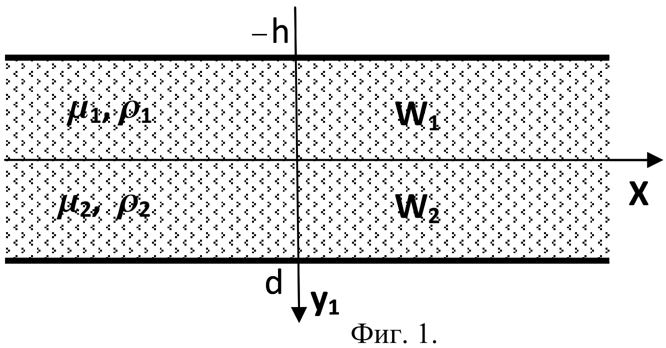
Դիտարկվում է հակահարթ ալիքների տարածումը երկշերտ միջավայրում երբ մի շերտն համասեռ է, իսկ մյուս շերտն ունի էքսպոնենցիալ անհամասեռություն: Ուսումնասիրվել է ստացված դիսպերսիոն հավասարումը արագությունը բնութագրող պարամետրի նկատմամբ:

Poghosyan N. D., Sanoyan Ju. G., Terzyan S. A.
Shear Waves Propagation in Two-Layer Media

The propagation of shear waves in a two-layer medium when one layer is homogeneous and other heterogeneous with exponentially heterogeneity is considered. The obtined dispersion equation for velocity is studied.

Рассматривается распространение сдвиговых волн в двухслойной среде, когда один слой однородный, а другой неоднородный с экспоненциональной неоднородностью. Изучено полученное дисперсионное уравнение относительно параметра, характеризующего скорость.

Задаче распространения упругих волн в двухслойной среде посвящены работы Jones J.P. [1], Бреховского Л.М. [2] и др. В данной работе изучается двухслойная среда (фиг.1), где первый слой $\{x\in R,\ y\in[-h,0]\}$ имеет экспоненциальную неоднородность, а второй слой $\{x\in R,\ y\in[0,d]\}$ – однородный с постоянным модулем сдвига μ_{20} и плотностью ρ_{20}.



Фиг. 1.

Предполагается, что модуль сдвига и плотность слоя 1 меняются по толщине по закону

$$\mu_1(x,y)=\mu_{10}e^{2\alpha y},\quad \rho_2(x,y)=\rho_{20}e^{2\alpha y},\quad y\in[-h,0] \tag{1}$$

На границах $y=-h,\ y=d$ заданы условия свободной границы

$$\left.\frac{\partial W_1}{\partial y}\right|_{y=-h} = 0\,, \left.\frac{\partial W_2}{\partial y}\right|_{y=d} = 0 \ . \qquad (2)$$

На границе контакта слоёв 1 и 2 принимаются условия непрерывности перемещений и касательных напряжений

$W_1(x,0) = W_2(x,0)$, $\sigma_{1,\mathrm{yz}}(\mathrm{x},0) = \sigma_{2,\mathrm{yz}}(\mathrm{x},0)$

или с учётом закона Гука

$$W_1(x,0) = W_2(x,0)\,,\ \mu_{10}\left.\frac{\partial W_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu_{20}\left.\frac{\partial W_2}{\partial y}\right|_{y=0} . \qquad (3)$$

Уравнение распространения чисто сдвиговых волн сдвига в слое 1 имеет вид

$$c_{t1}^2\left(\Delta W_1 + 2\alpha\frac{\partial W_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}\,, \ \text{ где } c_{t1}^2 = \frac{\mu_{10}}{\rho_{10}} . \qquad (4)$$

Уравнение распространения волн сдвига в слое 2 с постоянным модулем сдвига μ_{20} и плотностью ρ_{20} будет

$$c_{t2}^2\Delta W_2 = \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}\,, \quad \text{где } c_{t2}^2 = \frac{\mu_{20}}{\rho_{20}} . \qquad (5)$$

Рассматривается антиплоская задача, т.е. вектор перемещения представляется в виде

$$\vec{u} = \left[0,0,W\left(x,y,t\right)\right]. \qquad (6)$$

Требуется найти решение уравнений (4) и (5), удовлетворяющие граничным условиям (2) и (3). Решение уравнения (4) представим в виде гармонической волны, распространяющейся в направлении оси X

$$W_1 = \left(A_1 e^{kp_1 y} + B_1 e^{kp_2 y}\right)\exp i(kx - \omega t)\,, \qquad (7)$$

где

$$p_{1,2} = -\frac{\alpha}{k} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{k^2} - \frac{\omega^2}{k^2 c_{t1}^2} + 1} = -\frac{\alpha}{k} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{k^2} - \theta\eta + 1}\,, \eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_{t2}^2}\,, \theta = \frac{c_{t2}^2}{c_{t1}^2} .$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$W_2 = \left(A_2 \sin k\sqrt{\eta - 1}\,y + B_2 \cos k\sqrt{\eta - 1}\,y\right)\exp i(kx - \omega t) . \qquad (8)$$

Подставляя эти решения в граничные условия (2) и (3), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &A_1 p_1 e^{-kp_1 h} + B_1 p_2 e^{-kp_2 h} = 0\,, \\ &A_2 \cos k\sqrt{\eta-1}\,d + B_2 \sin k\sqrt{\eta-1}\,d = 0\,, \qquad (9) \\ &A_1 + B_1 - B_2 = 0\,, \\ &A_1 \kappa p_1 + B_1 \kappa p_2 - A_2 k\gamma\sqrt{\eta - 1} = 0\,, \end{aligned}$$

где $\gamma = \mu_{20} / \mu_{10}$.

Равенство нулю детерминанта системы приводит к уравнению, определяющему фазовую скорость волны

$$\begin{vmatrix} p_1 e^{-kp_1 h} & p_2 e^{-kp_2 h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\sqrt{\eta-1}\,d & -\sin k\sqrt{\eta-1}\,d \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ kp_1 & kp_2 & -k\gamma\sqrt{\eta-1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

После преобразований получим

$$\mathrm{tg}\chi kh=-\frac{\kappa\gamma\sqrt{\eta-1}\chi\,\mathrm{tg}kd\sqrt{\eta-1}}{k\left(\theta\eta-1\right)+\gamma\alpha\sqrt{\eta-1}\,\mathrm{tg}kd\sqrt{\eta-1}},\qquad(10)$$

где $\chi=\sqrt{\theta\eta-1-\alpha^2/k^2}$.

При α=0, $\chi=\sqrt{\theta\eta-1}$ получим

$$\sqrt{\theta\eta-1}\mathrm{tg}kh\sqrt{\theta\eta-1}+\gamma\sqrt{\eta-1}\,\mathrm{tg}kd\sqrt{\eta-1}=0,\qquad(11)$$

Случай $\alpha=0$ соответствует тому, когда оба слоя однородны. Формулу (10) после введения обозначений $d/h=r,\ kh=\xi,\ \alpha h=\varepsilon$ можно записать в виде

$$\mathrm{tg}\sqrt{\left(\theta\eta-1\right)\xi^2-\varepsilon^2}=-\frac{\gamma\sqrt{\eta-1}\sqrt{\left(\theta\eta-1\right)\xi^2-\varepsilon^2}\,\mathrm{tg}\,r\xi\sqrt{\eta-1}}{\xi\left(\theta\eta-1\right)+\gamma\varepsilon\sqrt{\eta-1}\mathrm{tg}\,r\xi\sqrt{\eta-1}}.\qquad(12)$$

При $kd\to\infty$ получим $\eta-1<0$ и тогда

$$\mathrm{tg}\,\chi kh=\frac{\gamma\chi\sqrt{1-\eta}}{\theta\eta-1-\gamma\alpha\sqrt{1-\eta}/k},\qquad(13)$$

которое представляет дисперсионное уравнение задачи Лява [4] с неоднородным слоем, внешняя граница которой свободна от нагрузок. При $\eta=1$ из (12) получим

$$\mathrm{tg}\sqrt{\theta-1-\frac{\alpha^2}{\kappa^2}}\kappa h=0,\quad \sqrt{\theta-1-\frac{\alpha^2}{\kappa^2}}\xi=\pi n$$

или $\xi=-\dfrac{\pi n}{\sqrt{\theta-1-\alpha^2/\kappa^2}}$, $n\in Z$.

Уравнение (11) имеет бесконечно много решений, помимо этого, надо учесть решения системы уравнений

$$\begin{cases}\mathrm{tg}kd\sqrt{\eta-1}=0,\\ \mathrm{tg}kh\sqrt{\eta\theta-1}=0,\end{cases}\quad \begin{cases}kd\sqrt{\eta-1}=\pi n.\\ kh\sqrt{\eta\theta-1}=\pi m.\end{cases}\quad m,n\in N.\qquad(14)$$

Отсюда получается зависимость между d и h

$$d=\frac{\pi nh\sqrt{\theta}}{\sqrt{(1-\theta)k^2h^2+\pi^2m^2}}.\qquad(15)$$

В частности, при $n=1,\ m=1$ получим

$$d=\frac{\pi h\sqrt{\theta}}{\sqrt{(1-\theta)k^2h^2+\pi^2}}.$$

Аналогично для неоднородной среды получим:

$$\begin{cases}\mathrm{tg}\sqrt{\theta\eta-1-\alpha^2/k^2}\times kh=0,\\ \mathrm{tg}kh\sqrt{\eta-1}=0,\end{cases}\begin{cases}kh\sqrt{\theta\eta-1-\alpha^2/k^2}=\pi n,\\ kd\sqrt{\eta-1}=\pi m.\end{cases}\quad m,n\in N$$

отсюда получим

$$d=\frac{\pi nh\sqrt{\theta}}{\sqrt{k^2h^2(1-\theta)+\pi^2m^2+\alpha^2n^2}}$$

В частности, при $n=1,\ m=1$ получим зависимость

$$d = \frac{\pi h\sqrt{\theta}}{\sqrt{k^2h^2(1-\theta)+\pi^2+\alpha^2}}.$$

При $\theta = 1$ и $\gamma = 1$ из уравнения (11) получим

$$\sqrt{\eta-1}(\mathrm{tg}kd\sqrt{\eta-1}+\sqrt{\eta-1}\,\mathrm{tg}kh\sqrt{\eta-1}) = 0$$

или $\sin k(h+d)\sqrt{\eta-1} = 0$, что представляет собой решение задачи об однородном слое толщиной $h+d$. В уравнении (11) при $kd \to \infty$ величина η должна удовлетворять условию $\eta < 1$

$$\sqrt{\eta-1}\mathrm{tg}kh\sqrt{\theta\eta-1}+\gamma i\sqrt{\eta-1}\,\mathrm{tg}ikd\sqrt{\eta-1} = 0.$$

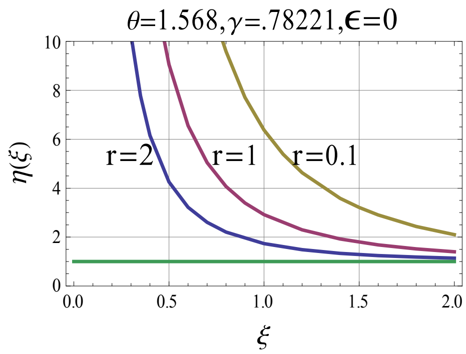
Учитывая, что

$$\lim_{kd\to\infty} \mathrm{th}\, kd\sqrt{1-\eta} = 1,$$

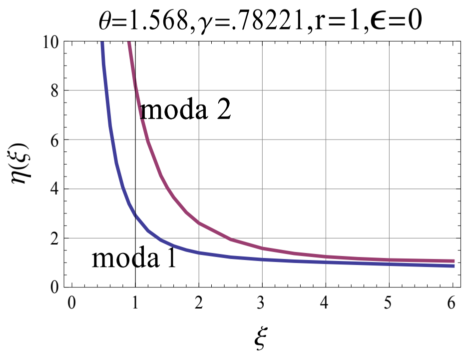
получим

$$\mathrm{tgkh}\sqrt{\theta\eta-1} = \frac{\gamma\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{\theta\eta-1}}.$$

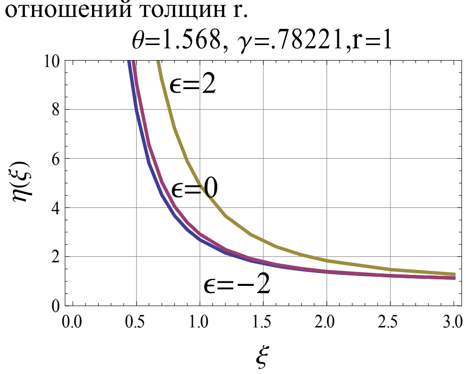
Ниже приведены результаты численных расчётов.



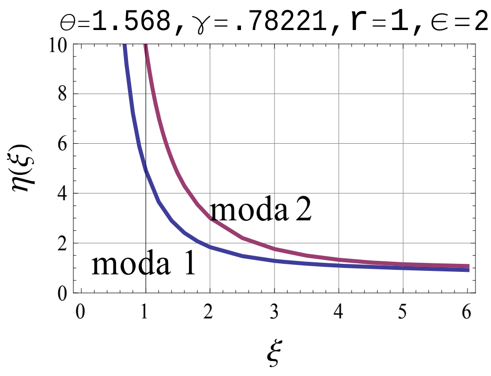
Фиг.2. Зависимость $\eta(\xi)$ для однородных слоёв при разных значениях отношений толщин r.



Фиг. 3. Моды $\eta(\xi)$ для однородных слоёв



Фиг.4. Зависимости $\eta(\xi)$, когда один слой неоднородный для разных ε.



Фиг.5. Моды зависимостей $\eta = \eta(\xi)$ в неоднородном случае

Значения $\eta(\xi)$ на фиг. 2 при увеличении ξ уменьшаются и становятся меньше единицы.

Таким образом, распространение волн в двухслойных средах, когда первый слой неоднородный, а второй однородный, имеет следующие особенности:

1) число волн бесконечно, если скорость распространения сдвиговой волны больше скорости объёмной волны первого слоя, умноженной на $\sqrt{1+\alpha^2/k^2}$, и больше скорости объёмной волны второго слоя;

2) существует конечное число волн, если скорость распространения сдвиговой волны больше скорости объёмной волны первого слоя, умноженной на $\sqrt{1+\alpha^2/k^2}$, и меньше скорости распространения объёмной волны второго слоя;

3) не существует сдвиговых волн, распространяющихся со скоростью меньшей минимума скорости объёмной волны первого слоя, умноженной на $\sqrt{1+\alpha^2/k^2}$, и меньше скорости объёмной волны второго слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones J.P. Wave Propagationin a Two-Layered Medium.//Journal of Applied Mechanics. 1964. June. Pp.213-222.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342с.
3. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява для двух слоёв на пьезоэлектрической подложке.// Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. № 4. С.22-25.
4. Мхитарян А.М., Погосян Н.Д., Терзян С.А. Поверхностная волна типа Лява для слоя с эспоненциальной неоднородностью по толщине.// Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. № 4. С.39-43.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир,1975. 872с.

Сведения об авторах:

Погосян Норик Джанибекович – науч. сотр. Института механики НАН Армении.
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}.
Тел.: (37410) 233598. **E-mail:** poghosian.norik@mail.ru

Саноян Юрий Геворкович – ст. науч. сотр. Института механики НАН Армении.
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}.
Тел.: (37410) 541319. **E-mail:** yuriisanoyan@mail.ru

Терзян Саркис Арутюнович –науч. сотр. Института механики НАН Армении.
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}.
Тел.: 340432. **E-mail:** sat_and_@yahoo.com

Поступила в редакцию 27.08. 2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР В УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ ПРИ СОВМЕСТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ И ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Элоян А.В.

Ключевые слова: пластинка, упругий, оптимальное расположение, температурное поле.
Key words: plate, elastic, optimal location, temperature field.

Էլոյան Ա.Վ.
Հենարանների տեղադրման օպտիմալ ընտրությունը առաձգական իզոտրոպ ուղղանկյուն սալում լայնական ուժի և ջերմային դաշտի համատեղ ազդեցության դեպքում

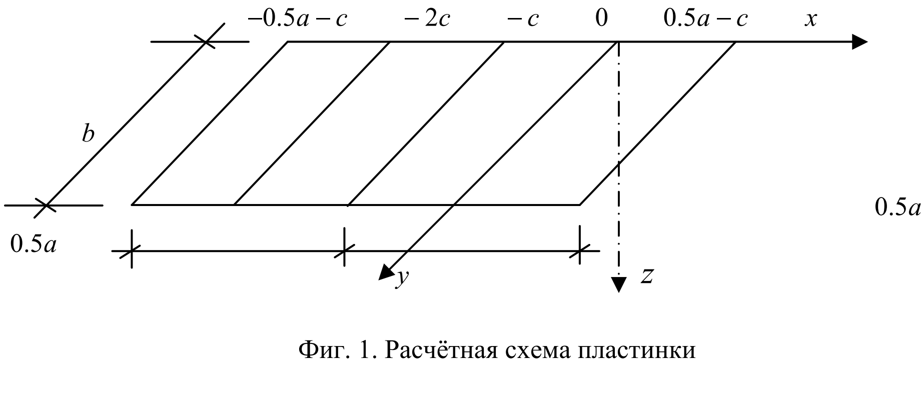
Աշխատանքում դիտարկվում է առաձգական ուղղանկյուն սալի հենարանների տեղադրման օպտիմալ ընտրությունը, երբ միաժամանակ ազդում են լայնական ուժը և ջերմային դաշտը:

Eloyan A. V.
The optimal choice of location of supports in case of thermal and transverse loading of isotropic elastic rectangular plate

The problem of determining the optimal location of the supports along the length of the elastic, isotropic rectangular plate in the case of simultaneous action of transverse load and temperature field.

Рассматривается задача определения оптимального расположения опор по длине упругой, изотропной прямоугольной пластинки в случае одновременного действия на пластинку поперечной нагрузки и температурного поля.

Рассматривается прямоугольная пластинка размерами a, b, h, свободно опёртая по продольным краям $y = 0, y = b$ и имеющая поперечные опоры, расположенные на расстоянии $\pm c$ от середины пластинки (фиг.1)



Фиг. 1. Расчётная схема пластинки

Предполагается, что пластинка находится под воздействием поперечной нагрузки $q = q(y)$ и температурного поля $T = (x, y, z)$.

Ставится задача оптимального выбора параметра c, обеспечивающего наименьшее значение наибольшего прогиба пластинки.

Вопросы оптимального расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки рассматривались в работах $\left[2\right]$.

Ввиду симметрии пластинки относительно линии $x = -c$ рассматривается её правая половина $-c \le x \le 0.5a - c$. При этом, решается задача изгиба каждого из участков $-c \le x \le 0$ и $0 \le x \le 0.5a - c$ с удовлетворением условий сопряжения на линии $x = 0$.

Прогибы пластинки $w_1(x,y)$ и $w_2(x,y)$ на соответствующих участках должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, учитывающим наличие стационарнарного температурного поля $[1]$:

$$D\left(\Delta^2 w_i(x,y) + \Delta R_e(x,y)\right) = q \qquad i = 1,2 \tag{1}$$

где $w_i(x,y)$ $(i=1,2)$ – прогиб, $D = Eh^3/12(1-\upsilon^2)$ – цилиндрическая жёсткость пластинки, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона,

$$R_e = \frac{3(1+\upsilon)}{2h^3}\alpha_t \int_{-h/2}^{h/2} zT(x,y,z)dz$$

α_t – коэффициент температурного линейного расширения.

Граничные условия задачи запишутся в виде:

– шарнирного опирания на продольных краях

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = 0 \qquad (i=1,2) \text{ при } y=0, \quad y=b \tag{2}$$

– сопряжения на поперечной опоре

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \quad \text{при } x = 0 \tag{3}$$

– свободного края

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \upsilon\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2-\upsilon)\frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0.5a - c \tag{4}$$

– симметрии

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = -c \tag{5}$$

Допустим, что изменение температуры по толщине пластинки следует линейному закону и что в плоскостях, параллельных поверхностям пластинки, температура остаётся постоянной.

В этом случае, $T(x,y,z) = \dfrac{2zT_0}{h}$ и $R_e(x,y) = \dfrac{\alpha_t T_0(1+\upsilon)}{4h}$.

Прогиб пластинки $w_i(x,y)$ $(i=1,2)$ представляются в виде:

$$w_i(x,y) = \overline{w_i}(x,y) + w_t(x,y)$$

где $\overline{w_i}(x,y)$ – прогибы на каждом из участков пластинки от нагрузки $q(y)$, а $w_t(x,y)$ – функция прогиба от действия температуры, которая предполагается изменяющейся по параболическому закону

$$w_t(x,y) = 0.5y(b-y)R_t.$$

Разлагая эту функцию в ряд Фурье, получим:

$$q(y)=\sum_{n=1}^{n} g_n \sin(\mu_n y), \qquad y(b-y)=\sum_{n=1}^{n} g_n \sin(\mu_n y),$$

где $q_n=\dfrac{2}{b}\int_0^b q(y)\sin(\mu_n y)\,dy,\quad g_n=\dfrac{2}{b}\int_0^b y(b-y)\sin(\mu_n y)\,dy,\quad \mu_n=\dfrac{\pi n}{b}$

и получаем

$$\overline{w}_i(x,y)=\sum\left[\frac{q_n}{D\mu_n^4}+a_{in}\mathrm{ch}(\mu_n x)+xb_{in}\mathrm{ch}(\mu_n x)+c_{in}\sin(\mu_n x)+\right.$$

$$\left.+xd_{in}\sin(\mu_n x)\right]\sin(\mu_n y) \qquad (i=1,2)$$

$$w_t=-0.5R_t\sum g_n\sin(\mu_n y)$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), принимается в виде:

$$w_i(x,y)=\sum\left[\frac{q_n}{D\mu_n^4}+a_{in}\mathrm{ch}(\mu_n x)+xb_{in}\mathrm{ch}(\mu_n x)+c_{in}\sin(\mu_n x)+\right.$$

$$\left.+xd_{in}\sin(\mu_n x)-0.5g_n\sin(\mu_n y)\right]\sin(\mu_n y)$$

Постоянные коэффициенты $a_{in}, b_{in}, c_{in}, d_{in}$ определяются из граничных условий (3) – (5), откуда

$$a_{1n}=-1-0.5R_t\sum g_n\sin(\mu_n y), \qquad b_{1n}=-1-0.5R_t y(b-y), \qquad a_{4n}=b_{4n},$$

$$a_{2n}=a_{4n}\mathrm{th}(\mu_n y),\ a_{3n}=a_{4n}\left[\frac{\mu_n c+\mu_n \mathrm{cth}^2(\mu_n c)}{\mu_n}\right]+a_{1n}\mathrm{th}(\mu_n c),\ b_{2n}=-Qb_{4n}+Bb_{1n},$$

$$Q=\frac{2M\mathrm{ch}^2(\mu_n x)-N\mathrm{sh}^2(\mu_n x)+Mx\mu_n\left[\gamma\mathrm{sh}(\mu_n x)\mathrm{ch}(\mu_n x)-\mathrm{sh}(\mu_n x)\mathrm{ch}(\mu_n x)\right]}{Mx\mu_n\left[\gamma\mathrm{ch}^2(\mu_n x)-\mathrm{sh}^2(\mu_n x)\right]+(2M+N)\mathrm{sh}(\mu_n x)\mathrm{ch}(\mu_n x)},$$

$$\gamma=1-\upsilon$$

$$B=\frac{M\mu_n\left[\gamma\mathrm{ch}^2(\mu_n x)-\mathrm{ch}^2(\mu_n x)\right]}{Mx\mu_n\left[\gamma\mathrm{ch}^2(\mu_n x)-\mathrm{sh}^2(\mu_n x)\right]+(2M+N)\mathrm{sh}(\mu_n x)\mathrm{ch}(\mu_n x)}$$

$$M=2\mu_n^2+2-\upsilon,\ N=4\mu_n^2+2-\upsilon,$$

$$D=\left[\left[2M\mathrm{ch}^2(\mu_n x)-N\mathrm{sh}^2(\mu_n x)+Mx\mu_n\left[\gamma\mathrm{sh}(\mu_n x)\mathrm{ch}(\mu_n x)-\mathrm{sh}(\mu_n x)\mathrm{ch}(\mu_n x)\right]\right]\times\right.$$

$$\times\left[x\mu_n\gamma\mathrm{ch}(\mu_n x)+2\mathrm{sh}(\mu_n x)\right]\times$$

$$\times\left[x\mu_n\gamma\mathrm{sh}(\mu_n x)+2\mathrm{ch}(\mu_n x)\right]\left[x\mu_n\gamma\mathrm{ch}^2(\mu_n x)-\mathrm{sh}^2(\mu_n x)\right]\Big]\times$$

$$\left.\times\left[x\mu_n\gamma\mathrm{ch}^2(\mu_n x)-\mathrm{sh}^2(\mu_n x)\right]+(2M+N)\mathrm{sh}(\mu_n x)\mathrm{ch}(\mu_n x)\right]/$$

$$/\left\{Mx\mu_n\left[\gamma\mathrm{ch}^2(\mu_n x)-\mathrm{sh}^2(\mu_n x)\right]+(2M+N)\mathrm{sh}(\mu_n x)\mathrm{ch}(\mu_n x)\right\}$$

Имея значения $w_t(x, y)$, можно рассматривать следующую оптимизационную задачу:

найт $\min\limits_{c} \max\limits_{x} w_i\left(x, y\right) \left(i = 1, 2\right) \qquad x \in \left[-c; 0.5a - c\right],\ 0 \le c \le 0.5a$ (6)

при заданных значениях T и h.

Введём безразмерное значение для прогиба пластинки:

$\overline{\overline{w_i}}\left(\overline{x, \alpha}\right) = w_i\left(x, c\right) D / q_0$, где $\overline{x} = x / a$, $\alpha = c / a$.

Таблица 1.

λ/T	1/3	1/2	1	2
-30	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
-25	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
-20	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
-15	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
-10	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
-5	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
0	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
5	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
10	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$ 1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
15	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
20	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
25	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.004	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.102	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.787
30	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=0.367	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=0.615	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=1.599	α=0,265 $\overline{\overline{w}}$=2.011

Отметим, что при $\alpha = 0$ $\left(c = 0\right)$ получаются две пластинки длиной $0.5a$, два края которых $y = 0, b$ свободно опёрты, края $x = 0$ жёстко заделаны, а край

$x = 0.5a$ $(x = -0.5a)$ свободен. В случае же $\alpha = 0.5a$ получается пластинка длиной α, все четыре края которой $x = 0; -a$ $y = 0; b$ свободно опёрты.

Результаты решения оптимизационной задачи (6) для различных отношений сторон $\lambda = a/b$ пластинки и при заданных значениях от -30^{0}C до 30^{0}C температур приведены в табл.1

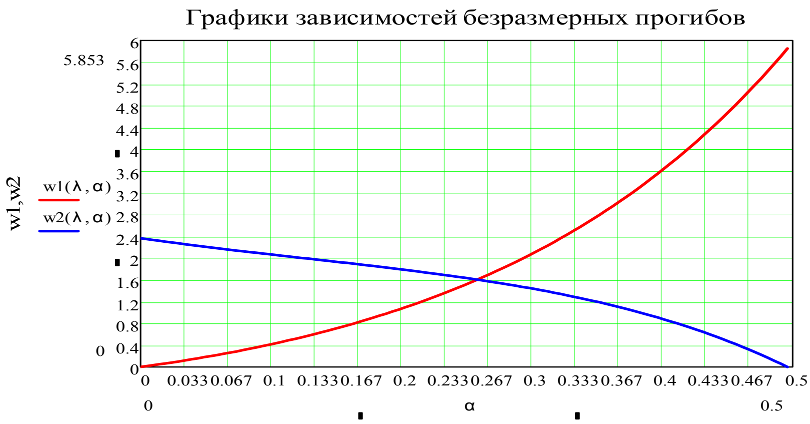
Как следует из таблицы, расположение опор не зависит от температуры и для всех λ наилучшим значением параметра по длине пластинки является

$$\alpha_* = 0.265 \qquad (c = 0.265a).$$

Таким образом, величина $\alpha_* = 0.265$ является характеристикой для упругой изотропной прямоугольной пластинки, нагружённой температурным полем и поперечной нагрузкой $q = q(y)$, свободно опёртых по краям $y = 0, b$.

На фиг.2 приведены графики зависимостей безразмерных прогибов под воздействием температурного поля и поперечной нагрузки при $\lambda = a/b = 1$, $h = 5$ мм и $T = 25^0$.

Здесь на оси $O\alpha_*$ точка $\alpha_* = 0.265$ $(c = 0.265a)$ соответствует оптимальному расположению опор, обеспечивающему наименьшее значение наибольшего по координатам x, y прогиба пластинки $\overline{\overline{w}}_i(\overline{x}, \alpha) = 1.599$.



Фиг.2

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Саргсян М.Г., Саноян Ю.Г. Управление перемещениями в пьезопластинках с помощью электрического поля. //Вестник инженерной академии Армении. 2009. Т.6. №2. С.255-261.
2. Гнуни В.Ц., Элоян А.В**.** Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. №3. С.14-17.
3. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Физматгиз, 1975. 704с.

Сведения об авторе: Элоян Асатур Ваноевич – доцент кафедры «Промышленное и гражданское строительство», Гюмрийский филиал ГИУА, канд. техн. наук, доцент.
Тел.: (094) 583167;
E-mail: aeloyan@ yandex. ru.

Поступила в редакцию 11.06.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика

УДК 539.3

К ВОПРОСУ О НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ ТРЁХСЛОЙНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЁТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ СРЕДНЕГО СЛОЯ

Безоян Э.К.

Ключевые слова: трёхслойная пологая оболочка, ползучесть

Key words: threelayer shellow shell, creep

Բեզոյան Է.Կ.

Եռաշերտ ցածրանիստ թաղանթների լարվածային վիճակի վերաբերյալ հարցերը միջին շերտի սողքի հաշվառմամբ

Դիտարկվում է եռաշերտ թաղանթի լարվածային վիճակը, երբ արտաքին և ներքին շերտերը առաձգական են և սիմետրիկ են դասավորված երկրաչափական առանցքի նկատմամբ, իսկ միջին շերտը օժտված Ն. Հարությունյանի կողմից առաջարկված առաձգամածուցիկ ոչ գծային հատկություններով: Ընդունվում է, որ լարումները միջին շերտում ըստ բարձրության փոխվում են ոչ գծային: Լուծող հավասարումները ստանալու համար մտցված են եռաշերտությունը, ինչպես նաև ծռող մոմենտները բնութագրող ֆունկցիաներ: Ստացված է թաղանթների լարվածա–դեֆորմացիոն վիճակը ուսումնասիրելու համար չորս անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ ինտեգրո–դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ:
Բերված է թվային օրինակ:

Bezoyan E.K.

On problem of stress state of three layer gentle shell taking into account of creep of middle layer

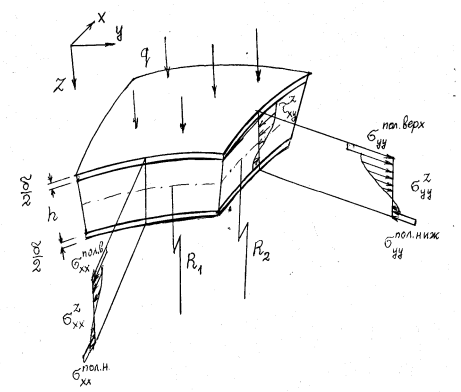
The stress state of three layer shell is considered in the condition when the external layers are elastic ones and symmetrically settled according to geometrical axis, and the middle layer has property according to non-linear viscoelasticity proposed by N.Ch. Arutyunyan. It is assumed that the stresses of middle layer are changed by non-linear relation along its thickness. For the obtaining of decisive equations it is used functions which define bending moments. For the investigation of stress–strain state, the system from four integral–differential equations for unknown functions is obtained. The numerical example is presented.

Рассматривается напряжённое состояние трёхслойной оболочки в условиях, когда наружные слои упругие и симметричные относительно геометрической оси, а средний слой деформируется согласно нелинейной теории вязкоупругости. Принимается, что напряжения в среднем слое изменяются по толщине по нелинейному закону. Для исследования напряжённо-деформированного состояния получена система интегро-дифференциальных уравнений. Приведён численный пример.

Использование трёхслойных конструкций обусловлено тем обстоятельством, что нахождение несущих слоёв на расстоянии друг от друга обеспечивает высокую сопротивляемость изгибу. Основная роль среднего слоя заключается именно в фиксации дистанции между крайними слоями в случае чистого изгиба. В условиях действия поперечных сил основная нагрузка по восприятию сдвигающих напряжений ложится уже на средний слой.

Зачастую, железобетонные оболочки рассматриваются как трёхслойные, где слои с располагающимися арматурными сетками расцениваются как несущие слои, между которыми располагается бетонный слой (фиг.1).

В настоящей работе рассматривается напряжённое состояние трёхслойных оболочек в условиях, когда наружные слои могут приниматься линейно-упругими, а средний слой обладает реологическими свойствами, согласно нелинейной теории наследственности с учётом изменения свойств материала во времени.



Фиг. 1

Итак, положим, что в трёхслойной оболочке толщины наружных слоёв $\frac{\delta}{2}$ весьма малы по отношению к толщине среднего слоя h, причём у наружных слоёв эффективный модуль упругости и коэффициент Пуассона – соответственно E_1 и μ_1 (фиг.1). Материал же среднего слоя деформируется согласно соотношениям [1]

$$\varepsilon_{ij}(t) = (2-\delta_{ij})\left\{\frac{(1+\mu)\sigma_{ij}(t)-\mu\delta_{ij}\rho(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^{t}\left[(1+\mu)\sigma_{ij}(\tau)-\mu\delta_{ij}\rho(\tau)\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau - \right.$$
$$\left. - \int_{t_0}^{t}\left[(1+\mu)\sigma_{ij}(\tau)-\mu\delta_{ij}\rho(\tau)\right]F\left[\sigma_0(\tau)\right]\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)\,d\tau\right\} \qquad (i,j=x,y,z) \tag{1}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, σ_0 – интенсивность напряжений, ρ – первый инвариант напряжений, $C(t,\tau)$ – мера ползучести,

$$F\left[\sigma_0(t)\right] = 1+\beta\sigma_0^{m-1}(t)$$

где β и m –параметры, определяемые из эксперимента.

Принимая гипотезу прямых нормалей Кирхгофа–Лява и пренебрегая изменением напряжений по толщине наружных слоёв, получим

$$\varepsilon_{ij}^{\text{нар}} = \varepsilon_{ij} \pm (\delta_{ij}-2)\frac{h}{2}\chi_{ij}$$
$$\sigma_{ij}^{\text{нар}} = \frac{T_{ij}-T_{ij}^*}{\delta} \pm \frac{6}{h^2}\left(M_{ij}-M_{ij}^*\right), \qquad (i,j=x,y) \tag{2}$$

где T_{ij}^*, M_{ij}^* – усилия и моменты, воспринимаемые средним слоем, откуда получим

$$M_{ij}^{*}=M_{ij}-D_1\left[\left(1-\mu_1\right)\chi_{ij}+\mu_1\delta_{ij}\chi\right]$$

$$T_{ij}^{*}=T_{ij}-D_2\left[\left(1-\mu_1\right)\varepsilon_{ij}+\mu_1\delta_{ij}\varepsilon\right], \tag{3}$$

$$\chi=\chi_{xx}+\chi_{yy},\quad \varepsilon=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy},\quad D_1=\frac{E_1\delta h^2}{4\left(1-\mu_1^2\right)},\quad D_2=\frac{E_1\delta}{1-\mu_1^2}$$

Уравнение совместности деформаций для пологих оболочек запишется так [2]:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{4}$$

а для изменений кривизн χ_{ij} запишем следующие выражения через прогибы [3]:

$$\chi_{xx}=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \chi_{yy}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \chi_{xy}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{5}$$

Представим напряжения в точках оболочки, расположенных на расстоянии z от срединной поверхности в виде

$$\sigma_{ij}^{z}=\sigma_{ij}+\sigma_{ij0}\left(\frac{2z}{h}\right)^{\frac{1}{2n+1}},$$

где n –целое число, σ_{ij} –мембранное напряжение, σ_{ij0} –максимальное напряжение изгиба.

Уравнение равновесия элемента оболочки запишется так:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}^{*}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xx}^{*}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{yy}^{*}}{\partial y^2}=D_1\nabla^4 w-L\left(w,\phi\right)-\nabla_k^2\phi-q, \tag{6}$$

где

$$\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4},\qquad L\left(w,\phi\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y},$$

$$\nabla_k^2\phi=k_x\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+k_y\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}.$$

ϕ – так называемая функция напряжений, определяемая соотношениями [3]

$$T_{xx}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\quad T_{yy}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\quad T_{xy}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}.$$

Для усилий, воспринимаемых средним слоем, получим

$$T_{xx}^{*}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-D_2\left(\varepsilon_{xx}+\mu_1\varepsilon_{yy}\right)$$

$$T_{yy}^{*}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-D_2\left(\varepsilon_{yy}+\mu_1\varepsilon_{xx}\right) \tag{7}$$

$$T_{xy}^{*}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-D_2\left(1-\mu_1\right)\varepsilon_{xy}$$

Вводя для T_{ij}^{*} функцию $\psi\left(x,y,t\right)$ подстановкой

$$T^*_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad T^*_{yy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad T^*_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y},$$

после ряда выкладок получим следующую разрешающую систему уравнений при кубической нелинейности $(m=3)$ $F(\sigma_0) = 1 + \beta\sigma_0^2$ и вводя функцию $\varphi(x, y, t)$ подстановкой

$$M^*_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad M^*_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad M^*_{xy} = (1-\mu)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

получим

$$\begin{gathered}
\nabla^4 \varphi = D_1 \nabla^4 w - L(w, \phi) - \nabla_k^2 \phi - q \\
\nabla^4(\phi - \psi) = -E_1 \delta\left[\frac{1}{2}L(w,w) + \nabla_k^2 w\right] \\
\nabla^4 \psi - E(t)\int_{t_0}^{t} \nabla^4 \psi \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] d\tau - E(t)\int_{t_0}^{t}\left[\nabla^4 \psi + L_1(\psi, \varphi)\right] K(t,\tau)\, d\tau = \\
= -E(t)h\left[\frac{1}{2}L(w,w) + \nabla_k^2 w\right] \\
\nabla^4 \varphi - E(t)\int_{t_0}^{t} \nabla^4 \varphi \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] d\tau - E(t)\int_{t_0}^{t}\left[\nabla^4 \varphi + L_2(\psi, \varphi)\right] K(t,\tau)\, d\tau = \\
= -D\nabla^4 w,
\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$L_1(\psi, \varphi) = \nabla^2\left[\left(\beta_1 N_0^2 + \beta_2 M_0^2\right)\nabla^2 \psi\right] + \beta_2\left(1-\mu^2\right)L\left(\varphi, z_0^2\right) -$$

$$-(1+\mu)L\left[\psi, \left(\beta_1 N_0^2 + \beta_2 M_0^2\right)\right]$$

$$L_2(\psi, \varphi) = \nabla^2\left[\left(\beta_1 N_0^2 + \beta_3 M_0^2\right)\nabla^2 \varphi\right] + \beta_1 L\left(\psi, z_0^2\right) -$$

$$-(1-\mu)L[\varphi,]\left(\beta_1 N_0^2 + \beta_3 M_0^2\right);$$

$$N_0^2 = \left(\nabla^2 \psi\right)^2 - \frac{3}{2}L(\psi, \psi);$$

$$M_0^2 = \left(1-\mu+\mu^2\right)\left(\nabla^2 \varphi\right)^2 - \frac{3}{2}(1-\mu)L(\varphi, \varphi);$$

$$Z_0^2 = (1-2\mu)\nabla^2 \psi \nabla^2 \varphi + 3(1-\mu)L(\varphi, \varphi);$$

$$\beta_1 = \frac{\beta}{h^2}, \quad \beta_2 = \frac{4(4n+3)^2}{(2n+3)(2n+1)}\frac{\beta}{h^4}, \quad \beta_3 = \frac{4(4n+3)^3}{(4n+5)(2n+1)^2}\frac{\beta}{h^4}$$

Система (8) решается с применением метода Бубнова–Галёркина [3].

Опуская соответствующие выкладки, ниже приведём численную иллюстрацию рассчитанных прогибов для трёхслойной квадратной (*axa*) в плане сферической оболочки при действии равномерно-распределённой поперечной нагрузки q. Расчёты проведены при кривизнах $k_x = k_y = \frac{24h}{a^2}$. Мера ползучести принята в следующем виде:

$$C(t,\tau) = \left(C_0 + \frac{A}{\tau}\right)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right],$$

где $\gamma = 0,78\frac{1}{\text{мес.}}, \quad C_0E = 1,8, \quad A = \frac{9,84}{E}$ мес.

Кроме того, приняты следующие данные: $E = 2\cdot 10^4$ МПа, $E_1 = 2\cdot 10^5$ МПа, $\beta = 12,5\cdot 10^{-5}$ (МПа)$^{-2}$, $\mu_1 = 0,3;$ $\mu = 0,2;$ $q = \frac{80Eh^4}{a^4}$, $\frac{\delta}{h} = 0,01$, $n = (0;1)$.

В нижеприведённой таблице приведены результаты расчётов прогибов оболочки.

Анализируя полученные данные, приходим к выводу, что ползучесть существенно отражается на прогибах оболочки. Показано, что для рассмотренного примера в линейном варианте у оболочки со средним слоем из стареющего бетона прогиб превосходит прогиб аналогичной оболочки со старым бетоном с теми же свойствами на 15,5%, в нелинейном варианте тот же рост составляет 19,2%.

Таблица прогибов оболочки w/h

$t - t_0$ (месяцы)	0	2	4	∞
Теория наследственности с учётом старения линейный вариант $(m=1)$	0,204	0,627	0,707	0,725
Теория наследственности с учётом старения нелинейный вариант $(m=3)$	0,204 0,204	0,703 0,712	0,797 0,812	0,819 0,834
Теория наследственности для старого бетона $(A=0)$ линейный вариант	0,204	0,477	0,529	0,540
Теория наследственности для старого бетона нелинейный вариант	0,204 0,204	0,504 0,506	0,559 0,561	0,570 0,572

В вышеприведённой таблице верхние значения соответствуют $n = 0$, нижние – $n = 1$.

Таким образом, нагружая железобетонную оболочку после установления реологических свойств бетона, можно добиться уменьшения прогиба оболочки, а следовательно, и уменьшения опасности трещинообразования в оболочке, приводящего к коррозии арматуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М–Л.: Гостехтеориздат, 1952. 323с.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 262с.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. М–Л.: Гостехиздат, 1949. 784с.

Сведения об авторе:

Безоян Эдуард Коломбосович – канд.техн.наук, доцент,
генеральный директор 000 «Чанапар»
Ереван. Тел.: (010)627240
(093)19-00-99; (091)40-24-96
E-mail: lfroad@rambler.ru

Поступила в редакцию 09.07.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика
УДК 539.3

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ ТИПА БЛОХА – ФЛОКЕ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ ИЗ ФЕРРОМАГНИТНЫХ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЛОЁВ

Даноян З.Н., Казарян К.Б., Атоян Л.А., Даноян Н.З.

Ключевые слова: спиновые волны, периодическая ферромагнитная слоистая структура, квазипериодические волны типа Блоха-Флоке.
Key words: spin waves, layered ferromagnetic periodic structure, Bloch-Floquet quasy-periodic waves.

Դանոյան Զ.Ն., Ղազարյան Կ.Բ., Աթոյան Լ.Հ., Դանոյան Ն.Զ.
Բլոխի-Ֆլոքեի տիպի քվազիպարբերական ալիքները ֆերոմագնիսական և դիէլեկտրիկական շերտերից կազմված պարբերական կառուցվածքում

Հետազոտվում են Բլոխի-Ֆլոքեի տիպի քվազիպարբերական ալիքների գոյությունը և տարածումը ֆերոմագնիսական և դիէլեկտրիկական շերտերից կազմված պարբերական կառուցվածքում: Գտնվել են խնդրի դիսպերսիոն առնչությունները և հաճախությունների արգելափակված գոտիները (band gaps):

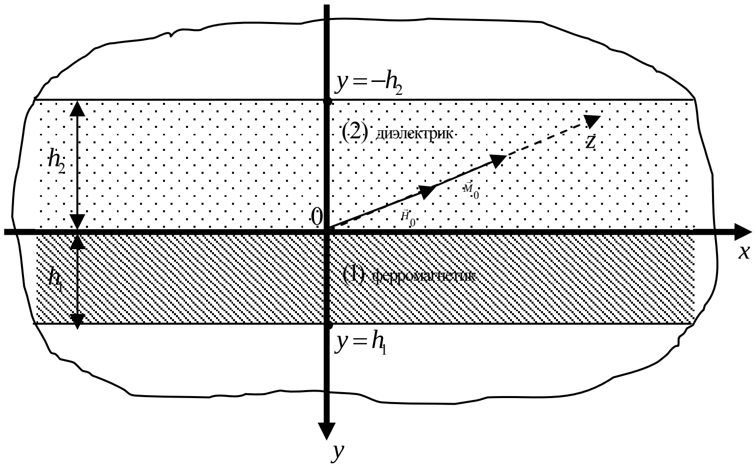
Danoyan Z., Ghazaryan K., Atoyan L., Danoyan N.
Bloch-Floquet spin waves in periodic ferromagnetic and dielectric layered structure

The problems of existence and propagation of spin quasi-periodic Bloch-Floquet waves in a layered periodic structure consisting of ferromagnetic and dielectric layers are investigated. The dispersion relations and frequencies band gaps are derived.

В работе исследуются вопросы существования и распространения спиновых квазипериодических волн типа Блоха-Флоке в слоистой периодической структуре из ферромагнитного и диэлектрического слоёв. Найдены дисперсионные соотношения, а также установлены запрещённые зоны частот (band gaps).

1.Введение. Как известно, в магнитоупорядоченных средах, в ферромагнетиках, антиферромагнетиках и ферритах могут распространяться волны особой природы, называемые спиновыми волнами, а при учёте упругой деформации среды – упругоспиновыми волнами [1, 2, 5]. Много исследований посвящены как объёмным, так и поверхностным спиновым и упругоспиновым волнам [1-13, 17, 18, 22-26, 33]. Поверхностные спиновые и упругоспиновые волны исследованы также в периодических слоистых структурах [22, 24, 25, 27, 32]. В последние годы большое внимание исследователей привлекают вопросы распространения квазипериодических упругих, электроупругих, электромагнитных и другого типа волн в слоистых периодических структурах. При этом, вместе с вопросами существования и распространения этих волн особое внимание уделяется исследованию условий, при которых волновой процесс невозможен, т.е. существуют запретные полосы в частотном спектре исследуемых волн (band gaps) [20-27, 29-32]. Квазипериодические волны с запретными полосами частот в настоящее время находят широкое практическое применение во многих областях современной техники, таких как спинтроника, акустоэлектроника, нанотехнологии и т.д [1-3, 5, 23, 24, 27, 30, 32].

2. **Постановка задачи**. Пусть задана периодическая слоистая структура, состоящая из бесконечно чередующихся ферромагнитных слоёв толщины h_1 и закреплённых с ними диэлектрическими слоями толщины h_2 (в частности, ферромагнитные слои могут быть разделены вакуумом). Структура отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, как показано на фиг.1. Предполагается, что оси анизотропии лёгкого намагничивания ферромагнитных слоёв параллельны друг другу и совпадают с направлением оси Oz.



Фиг.1. Ячейка периодичности ферромагнитной конструкции.

Предположим, что рассматриваемая структура находится во внешнем отклоняющем постоянном магнитном поле $\overrightarrow{H}_0$ и во всех ферромагнитных слоях объёмная плотность намагниченности $\overrightarrow{M}_0 = \rho_1\vec{\mu}_0$ ($\vec{\mu}_0$ – плотность намагниченности на единицу массы, ρ_1 – массовая плотность ферромагнетика) одинакова и параллельна магнитному полю $\overrightarrow{H}_0$ и оба вектора направлены по оси лёгкого намагничивания, т.е. по оси Oz. Рассмотрим случай, когда возмущения в структуре не зависят от координаты z и характеризуются векторами упругого перемещения, магнитного момента $\vec{u}_1 = \{0,\ 0,\ w_1(x,y,t)\}$, $\vec{\mu} = \{\mu_1(x,y,t), \nu_1(x,y,t), 0\}$ и магнитостатическим потенциалом $\varphi_1(x,y,t)$ в ферромагнитном слое, вектором упругого перемещения $\vec{u}_2 = \{0,\ 0,\ w_2(x,y,t)\}$ и магнитостатическим потенциалом $\varphi_2(x,y,t)$ в диэлектрическом слое, причём

$$\overrightarrow{H_1} = -\mathrm{grad}\varphi_1,\ \overrightarrow{H_2} = -\mathrm{grad}\varphi_2, \tag{2.1}$$

где $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ – возмущения напряжённости магнитного поля в ферромагните и диэлектрике, соответственно.

В настоящей работе на основе линеаризованных уравнений и соотношений, описывающих спиновой волновой процесс в непроводящих ферромагнитных средах [1, 2, 5], исследуются условия существования и распространения в описанной выше структуре квазипериодических упругоспиновых волн типа Блоха-Флоке [22, 25, 30, 32] при соответствующих контактных условиях и при граничных условиях Блоха-

Флоке [20, 21, 27-31] на границах ячейки периодичности структуры. Далее исследуется вопрос существования так называемых запретных полос в спектре частот (band gaps), т.е. частотных зон умолчания, при которых волновой процесс типа Блоха-Флоке отсутствует. Волновой процесс исследуется в ячейке (из диэлектрика и ферромагнетика) периодичности структуры, занимающей область: $\{-h_2 \le y \le 0\} \bigcup \{0 \le y \le h_1\}$.

3. Уравнения, контактные условия и граничные условия Блоха-Флоке. Согласно [1, 2, 5], при сделанных выше допущениях волновое поле в ферромагнитном и диэлектрическом слоях рассматриваемой ячейки периодичности, с учётом деформации среды и обменных эффектов, описывается уравнениями :

a) **уравнения магнитоупругости в области** $0 \le y \le h_1$:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \tilde{c}_2 \nabla^2 w_1 + \rho_1 M_0 f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mu}\right), \ \nabla^2 \varphi_1 - \rho_1 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mu}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial t} = \gamma_0 \mu_0 \vec{i}_3 \times \left[-\vec{\nabla}\varphi_1 - \rho_1 \hat{b}\vec{\mu} - \bar{b} M_0 \vec{\nabla} w_1 + \lambda \rho_1 \nabla^2 \vec{\mu} \right], \tag{3.1}$$

где

$$\tilde{c}_2 = c_2^{(1)} + \bar{c}_4, \bar{c}_4 = \tilde{\alpha}_2 + (b+f)M_0^2, \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + fM_0^2,$$
$$\hat{b} = b + \chi_0^{-1}, \ \bar{b} = b + f, \chi_0 = M_0 / H_0, \tag{3.2}$$

μ_1, ν_1 – компоненты вектора намагниченности $\vec{\mu}$, w_1 – компонента упругого перемещения по оси Oz ферромагнетика, $\gamma_0 = 7\pi \cdot 10^4$ м/а·сек – гирромагнитное отношение, $\pi \approx 3.14$, b – постоянная магнитной анизотропии, α_2, f – пьезомагнитные коэффициенты, χ_0 – коэффициент магнитной восприимчивости, λ – обменная постоянная, $c_2^{(1)}$ – упругий модуль сдвига ферромагнетика, φ_1 – магнитостатический потенциал магнитного поля в ферромагнетике, $\vec{i}_k$ – единичные векторы координатных осей.

b) **Уравнения упругости и магнитостатики в области** $-h_2 \le y \le 0$:

$$\rho_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = c_2^{(2)} \nabla^2 w_2, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0, \tag{3.3}$$

где w_2 – компонента упругого перемещения по оси Oz диэлектрика, $c_2^{(2)}$ – упругий модуль сдвига диэлектрика, φ_2, ρ_2 – магнитостатический потенциал магнитного поля и плотность материала диэлектрика.

c) Контактные условия между слоями ячейки при $y = 0 \ \left(-\infty < x < +\infty \right)$:

$$\tilde{c}_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} - \rho_1 M_0 \bar{b} \nu_1 = c_2^{(2)} \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad w_1 = w_2,$$
$$\frac{\partial \mu_1}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial \nu_1}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \rho_1 \nu_1 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \ \ \varphi_1 = \varphi_2. \tag{3.4}$$

d) Граничные условия Блоха-Флоке на границах ячейки периодичности $y = h_1,\ y = -h_2$:

$$\tilde{c}_2 \frac{\partial w_1(h_1)}{\partial y} - \rho_1 M_0 \bar{b} \nu_1(h_1) = \ell c_2^{(2)} \frac{\partial w_2(-h_2)}{\partial y},\ \ w_1(h_1) = \ell w_2(-h_2),$$
$$\frac{\partial \varphi_1(h_1)}{\partial y} - \rho_1 \nu_1(h_1) = \ell \frac{\partial \varphi_2(-h_2)}{\partial y}, \quad \varphi_1(h_1) = \ell \varphi_2(-h_2), \tag{3.5}$$

где ℓ –параметр Флоке:

$$\ell = e^{iqa},\ a = h_1 + h_2, \tag{3.6}$$

a –длина ячейки (период конструкции), q – компонента волнового вектора, перпендикулярного к поверхностям слоёв конструкции, называемая волновым числом Блоха-Флоке [29, 31].

Случай чисто спиновых волн. Рассмотрим случай чисто спиновых волн, т.е. примем $w_1 = w_2 = 0,$ это означает, что деформация конструкции не учитывается. Кроме того, пренебрегаем обменным эффектом, полагая $\lambda = 0$. Из (3.1) и (3.4) следуют уравнения, описывающие волновое поле в ферромагнитном слое:

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \Omega_M (\rho_1^{-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \hat{b} \nu_1),$$
$$\frac{\partial \nu_1}{\partial t} = \Omega_M (-\rho_1^{-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \hat{b} \mu_1),\ \Delta \varphi_1 = \rho_1 \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \frac{\partial \nu_1}{\partial y} \right),\ \ \Omega_M = \gamma_0 M_0. \tag{3.7}$$

В диэлектрическом слое, т.е. в области $-h_2 \le y \le 0$ волновое поле описывается магнитостатическим уравнени

$$\Delta \varphi_2 = 0, \tag{3.8}$$

где φ_2 – магнитостатический потенциал в диэлектрике. Контактные условия (при $y = 0$) и условия Блоха-Флоке (при $y = h_1$ и $y = -h_2$) представляются следующими соотношениями:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0),\ \ \frac{\partial \varphi_1(0)}{\partial y} - \rho_1 \nu_1(0) = \frac{\partial \varphi_2(0)}{\partial y},$$
$$\varphi_1(h_1) = \ell \varphi_2(-h_2),\ \ \frac{\partial \varphi_1(h_1)}{\partial y} - \rho_1 \nu_1(h_1) = \ell \frac{\partial \varphi_2(-h_2)}{\partial y}. \tag{3.9}$$

Первое условие (3.9) представляет собой требование непрерывности магнитостатического потенциала, второе условие вытекает из непрерывности возмущения напряжённости магнитного поля на границе y = 0, последние два соотношения – это условия Блоха-Флоке на границах ячейки периодичности конструкции.

Для нахождения решений задач (3.7), (3.8) на всей оси 0y достаточно ограничиться рассмотрением решений только на промежутке периодичности нашей структуры ($-h_2 \le y \le h_1$) с контактными и граничными условиями (3.9), как следует из теории Флоке [21, 28, 29].

4. Решение задачи в виде плоских волн. Решение системы уравнений (3.7) в ферромагните будем искать в виде плоских волн:

$$(\mu_1, \nu_1, \varphi_1,)=(M, N, \Phi_{01})e^{ry}e^{\iota(px-\omega t)}, \tag{4.1}$$

M, N, Φ_{01}, r – постоянные, p и ω заданы и положительны.

Подставив (4.1) в (3.7) и выписав условия существования ненулевых решений полученной однородной алгебраической системы, мы получим дисперсионное соотношение в ферромагнитной полосе:

$$\left(r^2 - p^2\right)(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2) = 0, \tag{4.2}$$

где $\Omega = \omega / \Omega_M$, $\Omega_{SV}^2 = \hat{b}(\hat{b}+1)$ – частота Блоха, характеризующая объёмную спиновую волну, распространяющуюся перпендикулярно к фоновому магнитному полю $\vec{H}_0$, когда обменные эффекты не учитываются.

Поскольку частота искомых волн должна отличаться от частоты объёмной волны [2], т.е. второй сомножитель в (4.2) не равен нулю, то равенство (4.2) выполняется при $r^2 = p^2$, т.е. $r = \pm p$.

Найдём теперь решение уравнения (3.8) в диэлектрике. Решение будем искать опять же в виде $\varphi_2 = \Phi_{02}e^{sy}e^{\iota(px-\omega t)}$, Φ_{02} и s – постоянные. Характеристическое уравнение представляется так:

$$s^2 = p^2, \tag{4.3}$$

т.е. $s = \pm p$. Как видим, характеристические числа s и r совпадают. Учитывая сказанное, общее решение системы (3.7) и уравнения (3.8) представляются в виде неоднородных волн:

$$\begin{gathered}\mu_1 = (M_1 e^{-py} + \overline{M}_1 e^{py})e^{\iota(px-\omega t)},\ \nu_1 = (N_1 e^{-py} + \overline{N}_1 e^{py})e^{\iota(px-\omega t)},\\ \varphi_1 = (\Phi_1 e^{-py} + \overline{\Phi}_1 e^{py})e^{\iota(px-\omega t)},\ \varphi_2 = (\Phi_2 e^{-py} + \overline{\Phi}_2 e^{py})e^{\iota(px-\omega t)},\end{gathered} \tag{4.4}$$

$M_1, \overline{M_1}, N_1, \overline{N_1}, \Phi_i, \overline{\Phi_i}$ – постоянные ($\iota = 1, 2$), связанные между собой соотношениями:

$$\begin{gathered}M_1 = -\frac{\ell p\Phi_1}{\rho_1(\Omega+\hat{b})},\ N_1 = \frac{p\Phi_1}{\rho_1(\Omega+\hat{b})},\\ \overline{M_1} = \frac{\ell p\overline{\Phi}_1}{\rho_1(\Omega-\hat{b})},\ \overline{N_1} = \frac{p\overline{\Phi}_1}{\rho_1(\Omega-\hat{b})}.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Подставляя решения (4.4) в граничные условия (3.9), с учётом соотношений (4.5), мы приходим к системе однородных линейных уравнений для определения неизвестных постоянных $\Phi_1, \overline{\Phi}_1, \Phi_2, \overline{\Phi}_2$:

$$\begin{gathered}-\left(1+\frac{1}{\Omega+\hat{b}}\right)\Phi_1 + \left(1-\frac{1}{\Omega-\hat{b}}\right)\overline{\Phi}_1 + \Phi_2 - \overline{\Phi_2} = 0,\\ \Phi_1 e^{-ph_1} + \overline{\Phi}_1 e^{ph_1} = l(\Phi_2 e^{ph_2} + \overline{\Phi}_2 e^{-ph_2}),\ \Phi_1 + \overline{\Phi}_1 - \Phi_2 - \overline{\Phi_2} = 0,\\ -\left(1+\frac{1}{\Omega+\hat{b}}\right)e^{-ph_1}\Phi_1 + \left(1-\frac{1}{\Omega-\hat{b}}\right)e^{ph_1}\overline{\Phi}_1 + le^{ph_2}\Phi_2 - le^{-ph_2}\overline{\Phi_2} = 0.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Из условия существования ненулевого решения системы (4.6), т.е. равенства нулю её детерминанта, следует дисперсионное соотношение:

$$\ell^2 - 2f\ell + 1 = 0, \tag{4.7}$$

где

$$f = \mathrm{ch}p(h_1 + h_2) - \frac{\mathrm{sh}ph_1 \times \mathrm{sh}ph_2}{2(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2)}. \tag{4.8}$$

Далее, подставляя параметр $\ell = e^{\imath qa}$ в (4.7), получаем дисперсионное уравнение волн Блоха-Флоке:

$$\cos qa = f. \tag{4.9}$$

Если характеристики задачи таковы, что имеет место неравенство

$$|f| > 1, \tag{4.10}$$

то нет волнового процесса Блоха-Флоке. Полоса частот в спектре, где нет волнового процесса, является запретной полосой или полосой непропускания. Отметим, что уравнение (4.9) при $|f| \le 1$ представляет собой зависимость частот волн Блоха-Флоке от их волнового числа q в данной полосе пропускания, которая изображена на фиг.2. Указанная зависимость является следствием периодичности среды, поскольку в случаях бесконечной или полубесконечной сред такой зависимости нет. Из (4.10) следует, что полоса пропускания волн Блоха-Флоке рассматриваемой структуры относительно приведённой частоты Ω представляется соотношениями:

$$R_1 \le \Omega \le R_2, \tag{4.11}$$

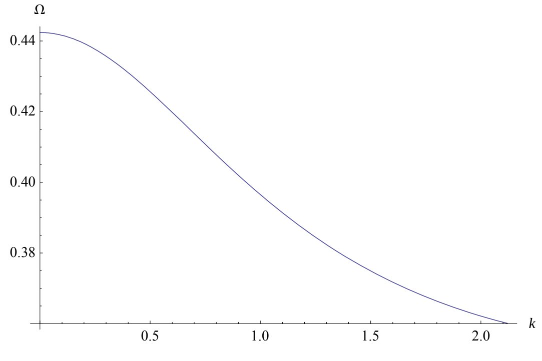
где введены обозначения:

$$R_1 = \sqrt{\Omega_{sv}^2 + \frac{\mathrm{sh}ph_1 \times \mathrm{sh}ph_2}{2(\mathrm{ch}p(h_1+h_2)+1)}}, \quad R_2 = \sqrt{\Omega_{sv}^2 + \frac{\mathrm{sh}ph_1 \times \mathrm{sh}ph_2}{2(\mathrm{ch}p(h_1+h_2)-1)}}. \tag{4.12}$$

Запретная полоса частот, или зона непропускания волн представляет собой объединение двух промежутков, разделённых замкнутым отрезком полосы пропускания $[R_1, R_2]$:

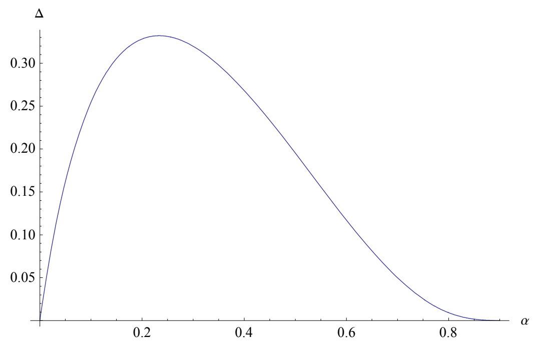
$$(0, R_1) \cup (R_2, +\infty). \tag{4.13}$$

Приведём некоторые результаты численных экспериментов.



Фиг.2

На фиг. 2 изображена дисперсионная кривая, выражающая зависимость приведённой частоты $\Omega = \omega / \Omega_M$ от приведённого волнового числа Блоха-Флоке $k = q(h_1 + h_2)$, $(\alpha = \dfrac{h_1}{h_1 + h_2} = 0.1, ph_2 = 1,\quad \Omega_{SV}^2 = 0.1)$. Частота убывает с возрастанием волнового числа Блоха-Флоке.



Фиг.3.

На фиг.3 представлена кривая зависимости относительной ширины частот пропускания $\Delta = \dfrac{R_2 - R_1}{R_1}$ от $\alpha = \dfrac{h_1}{h_1 + h_2}$ – величины, характеризующей соотношение толщин слоёв. Как видно из графика, ширина частотной полосы пропускания максимальна при соотношении толщин слоёв ферромагнит–диэлектрик приблизительно, как 1:2.

Заключение

Получено дисперсионное соотношение задачи, описывающее квазипериодический процесс Блоха-Флоке в периодической структуре ферромагнит-диэлектрик. Показано, что зоной пропускания является конечный интервал частот, вне которого указанные волны не существуют, это означает, что они представляют собой искомые запретные полосы. Исследована зависимость длины зоны пропускания от соотношения толщин слоёв. Установлено, что зона пропускания наибольшая, когда соотношение толщин слоёв ферромагнит-диэлектрик приблизительно равно 1:2.

Данная работа является первой ступенью к решению более сложной и более общей упругоспиновой задачи. На основе результатов, полученных в этой работе, будет учтена взаимосвязь упругих и спиновых волн. Рассмотренные в этой работе вопросы, по существу, относятся к современным областям механики сплошных сред и физики твёрдого тела, которые в последние годы вызывают пристальный интерес исследователей ввиду их большого прикладного значения, в частности, полученные в работе результаты могут быть использованы в акустоэлектронике при конструировании частотных фильтров.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 13-2C097.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
4. Даноян З.Н., Атоян Л.А. Отражение спиновых волн от границы ферромагнитной среды при обобщённых граничных условиях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.34-39.
5. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. М.: Наука,1973.
6. Danoyan Z. N., Piliposian G. T., Hasanyan D. J. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half space. Waves in Random and Complex Media.-Vol.19, No.4, November 2009, p.567-584;
7. Даноян З.Н., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Магнитное состояние ферромагнитного полупространства при внешнем линейном возмущении магнитного потенциала. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №3. С.46-52.
8. Даноян З.Н., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Задача типа Лэмба для спинового ферромагнитного полупространства. //Труды 7-ой межд.конф.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Горис-Степанакерт: 2011. С.60-65.
9. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А., Атоян Л.А. Отражение спиновых (магнитных) волн от границы ферромагнитного полупространства. //Тр. VI межд.конф. Сентябрь, 2008. Горис-Степанакерт: С.115-125.
10. Damon R.W., Eshbach J.R., Magnetoelastic modes of a ferromagnetic slab. //J. Phys. Chem. Solids, 19,(1961), P.308-320.
11. Maugin G. A., Hakmi A. Magnetoelastic surface waves in elastic ferromagnets. //J. Acoust. Soc. Amer., 1985. 77, P.1010-1026.
12. Hasanyan D.J., Bagdasaryan G.E., Danoyan Z.N., Sahakyan S.L. The vibration of the piecewise-homogeneous ferromagnetic space with a crack.– Proceedings of ISTC of International Seminar, Yerevan: 2000. P.89-92;
13. Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A. Magnonic crystals and spin waves in periodic structures. //Doklady Physics. Vol.46. No.10. 2001. Pp.469-471.
14. Danoyan Z.N., Chazaryan K.B., Piliposyan G.T. Surface gap wave propagation in layered electro-magneto-elastic structures.-Waves in Random and Complex Media., Vol.19, No.3, August 2009, p. 521-534.
15. Danoyan Z.N., Piliposian G.T. Surface Electro-Elastic Love Waves in a Layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric Layer. //International journal of solids and structures. 44 (2007), pp.5829-5847.
16. Piliposyan G.T., Danoyan Z.N. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and two isotropic layers. //Int. Journal of solids and structures. 46 (2009), pp.1345-1353.
17. Danoyan Z.N., Piliposian G.T., Hasanyan D. J. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half-space. Waves in Random and Complex Media. -Vol. 19, No. 4, November 2009, pp.567–584.
18. Багдасарян Г.Е. Существование и характер распространения пространственных спиновых поверхностных волн в ферромагнетиках. //Изв.НАН Армении. Физика. 2009. №6. С.405-416.
19. Danoyan Z.N, Atoyan L.H., Danoyan N.Z. Shear horizontal electro-magneto-elastic surface waves in a layered piezoelectric structure in the presence of an electric or magnetic screen. „Topical Problems of Continuum Mechanics''. The proceedings of international Conference, 4-8 October 2010, Dilijan, Armenia, pp. 266-271.

20. Piliposian G.T., Avetisyan A.S., Ghazaryan K.B. Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium, International Journal Wave Motion, Elsevier publisher, v.49 , iss.1, January, 2012 pp. 125–134.
21. Ani P. Velo, George A. Gazonas et al, Recursive Dispersion Relations in one-dimensional Periodic Elastic Media, J. Appl. Math. v.69, №3, pp. 670-689.
22. S. A. Nikitov, Ph. Tailhades, C.S. Tsai. Spin waves in Periodic Magnetic Structures – Magnonic cristals. //J.Magnet.Mater., v.23,3, pp.320-331, 2001.
23. S.M.Rezende et al. Magnon exitation by spin-polarized direct currents in magnetic nanostructures, Phys. Rev. B73, 094402, 2006.
24. K. Sekiguchi et al. Attenuation of propagating spin wave induced by layered nanostructures.//Appl.Phys.Lett. V.100, iss.13, 2012.
25. P.Landeros,D.Mills. Spin waves in periodically perturbed filmes. //Phys. Rev. B85, 054424, 2012.
26. S. Tacchi, G. Duerr et al. Forbidden Band Gaps in the Spin wave Spectrum, Phys. Rev.Lett., 109, 137202. 2012.
27. C.S. Lin et al, Band Gaps parameters of 1D bicomposit nanostructured Magnonic Cristal. //Appl. Phys. Lett. V.98, 022504, 2011.
28. Дж.Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т.1. М.: 1953.
29. E.H. Lee, H. Yang. On waves in composite materials with periodic structure. //J. Appl. Math. Vol.25. №3, Nov. 1973.
30. I.S. Jones, A.B. Movchan. Bloch-Floquet waves and controlled stop bands in periodic thermo-elastic structures. Waves in Random and Complex Media. Vol. 17, №4, Nov. 2007, 429-438.
31. K.B. Ghazaryan, D.G. Piliposyan. Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structure. J. of Sound &Vibr. 330 (2011) 6456-6466.
32. Bader S. D., Parkin S. S. (2010) “Spintronics”: Annual Review of Condensed Matter Physics, 1:71.
33. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1999. 440с.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович – доктор физ.-мат. наук, зав отделом Института механики НАН Армении.
Адрес: РА, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24^{б},
E-mail: zavendanoyan@gmail.com.

Казарян Карен Багратович – доктор физ.-мат. наук, главный науч. сотрудник Института механики НАН Армении.
Адрес: РА, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24^{б},
E-mail: ghazaryankaren@gmail.com.

Атоян Левон Арутюнович – канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник Института механики НАН Армении.
Адрес: РА, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б},
E-mail: levous@mail.ru.

Даноян Нерсес Завенович – мл. науч. сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: РА, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24^{б},
E-mail: mechins@sci.am.

Поступила в редакцию 28.08.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика
УДК 539.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ И ПОВЕДЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НЕОДНОРОДНОСТИ

Камалян А.А.

Ключевые слова: электроупругие волны, неоднороный пьезоэлектрический слой, распределение напряжений по толщине слоя, изменение фазовой скорости

Key Words: electroelastic waves, inhomogeneous piezoelectric medium, tension distribution over the thickness of the layer, variation of the phase speed

Քամալյան Ա.Ա.

Էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածումը և վարքը կախված պիեզոէլեկտրիկի անհամասեռությունից

Դիտարկված է 6mm դասի անհամասեռ պիեզոէլեկտրիկ շերտում էլեկտրաառաձգական մոնոխրոմատիկ ալիքի տարածումը: Ներմուծված է անհամասեռության ֆունկցիա, որը նկարագրում է ազատ և էկրանավորված եզրերով շերտի էլեկտրաստատիկ և մեխանիկական հատկությունների ֆունկցիոնալ կախվածությունը: Կատարված է ալիքի դիսպերսիայի վերաբերյալ հետազոտություն` կախված անհամասեռության ֆունկցիայի ազդեցությունից: Բերված են միևնույն եզրային պայմանների դեպքում թվային համեմատություններ համասեռ և անհամասեռ շերտերում գոյացած ալիքների արագությունների միջև:

Kamalyan A.A.
On propogation and characteritics of electroelastic wave in functionally graded piezoelectric layer.

In this paper the propogation of electroelastic monochromatic waves in functionally graded layer made of 6mm piezoelectric is investigated. Electroelastic and mechanical constants of the layer (with metalized and tension free surfaces) are variations of the same function, wich is responsible for inhomogenity and derived here. The influence of inhomogenity function upon the dispersion of shear wave is analized and the numerical comparison between wave speeds of homogeneous and inhomogeneous layers is given with the same boundary conitions is made.

В работе исследовано распространение электроупругих монохроматических волн в пьезоэлектрическом неоднородном слое класса 6mm.

Физико-механические свойства слоя определяются посредством одной функции, зависящей от толщины слоя. Исследовано влияние функции неоднородности на дисперсию сдвиговой волны. Проведён сравнительный анализ для скоростей волны неоднородного и однородного слоёв.

Введение

Внедрение новых технологий во многих областях неразрывно связано с созданием новых композитных материалов. В связи с этим, весьма актуальны исследования волновых процессов, сопряжённых электромагнитных и механических полей в неоднородных и механических полях в неоднородных средах.

Этой тематике посвящены работы [1-10], где исследуется влияние некоторых типов неоднородностей на волновые явления. В частности, в [1], где за основу выдвинута модель слоя пьезоэлектрика класса 6mm с линейной неоднородностью по толщине и исследуется вопрос распространения монохроматической волны в данной неоднородной среде. В работах [2]-[7] исследуется влияние нескольких типов неоднородностей на характеристики волн в слоях и полупространствах электромагнитоупругих сред при учёте разных краевых задач.

В данной работе рассмотрено распространение электроупругой монохроматической волны в неоднородном слое пьезоэлектрика класса 6mm. Внедрена функция, которая отвечает за функциональную неоднородность физико-механических свойств материала в зависимости от толщины слоя. Проведён анализ влияния этой функции на дисперсию волны и приведены численные сравнения величин скоростей волн в неоднородном случае с однородным при одинаковых краевых условиях.

1. Рассмотрим распространение монохроматических волн в неоднородной пьезоэлектрической среде гексагональной симметрии (класса 6mm). Пусть координатная ось OZ параллельна оси симметрии пьезокристалла, а плоскость XOY есть плоскость изотропии. В этой плоскости плоское деформированное состояние не электроактивно. Исходя из этого, здесь будем исследовать антиплоскую задачу распространения горизонтально поляризованных (SH) электроупругих монохроматических волн.

Уравнения антиплоского электроупругого состояния записываются в виде :

$$\begin{gathered} \mathrm{div}\vec{\sigma} = \rho \ddot{W} \\ \vec{\sigma} = \left\{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}\right\} \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь используем квазистатическое приближение для электрического поля. Электрическое поле E_i выражается через скалярный потенциал φ.

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi \tag{1.3}$$

Исследуем монохроматические решения, распространяющиеся по оси Ox в слое, имеющем неоднородность по толщине. Пусть пьезоэлектрический слой в прямоугольной системе координат $(x; y; z)$ занимает область $-\infty < x < \infty; 0 \le y \le 2h; -\infty < z < \infty$.

На поверхностях слоя $y = 2h;\ y = 0$ имеют место граничные условия

$$\sigma_{yz} = 0;\ \ \varphi = 0 \tag{1.4}$$

Условие электрически закрытой границы $\varphi = 0$ изолирует неоднородную среду слоя от внешней среды.

Допустим также, что неоднородность пьезоэлектрика по толщине характеризуется функцией $a(y)$ и физико-механические характеристики материала, в частности, C_{44} – модуль сдвига, e_{15} – пьезоэлектрический модуль, ε_{11} – диэлектрическая проницаемость и ρ – плотность материала также будут зависеть от толщины следующим образом:

$$\begin{gathered} e_{15}(y) = e_{15}^0 a(y), \qquad \varepsilon_{11}(y) = \varepsilon_{11}^0 a(y) \\ C_{44}(y) = C_{44}^0 a(y), \qquad \rho(y) = \rho_0 a(y) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь C_{44}^0, e_{15}^0, ε_{11}^0, ρ_0 являются постоянными.

Для пьезоэлектрического слоя класса 6mm с вышеупомянутым типом неоднородности касательные напряжения σ_{xz},σ_{yz} и нормальные компоненты электрического поля D_x, D_y принимают вид:

$$\sigma_{xz} = C_{44}^0 a(y)\frac{\partial W}{\partial x} + e_{15}^0 a(y)\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \sigma_{yz} = C_{44}^0 a(y)\frac{\partial W}{\partial y} + e_{15}^0 a(y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{1.6}$$

$$D_x = e_{15}^0 a(y)\frac{\partial W}{\partial x} - \varepsilon_{11}^0 a(y)\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ D_y = e_{15}^0 a(y)\frac{\partial W}{\partial y} - \varepsilon_{11}^0 a(y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{1.7}$$

Подставим теперь (1.6) и (1.7) в уравнения движения (1.1) и уравнения электростатики (1.2).

Запишем уравнение электростатики в раскрытом виде:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \nabla^2\varphi + \frac{a'}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0}\left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a}\frac{\partial W}{\partial y}\right] \tag{1.8}$$

Полученное соотношение (1.8) яляется функциональной связью между потенциалом электрического поля φ и компонентом вектора перемещения W.

Теперь раскроем уравнение движения:

$$C_{44}^0\left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a}\frac{\partial W}{\partial y}\right] + e_{15}^0\left[\nabla^2\varphi + \frac{a'}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = \rho_0 \ddot{W} \tag{1.9}$$

Подставив функциональную связь (1.8), получим уравнение движения, выраженное только компонентом вектора перемещения W и функцией неоднородности $a(y)$

$$C_{44}^0\left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a}\frac{\partial W}{\partial y}\right] + \frac{e_{15}^{0\,2}}{\varepsilon_{11}^0}\left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a}\frac{\partial W}{\partial y}\right] = \rho_0 \ddot{W}$$

$$C_{44}^0(1+\chi_0)\left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a}\frac{\partial W}{\partial y}\right] = \rho_0 \ddot{W} \tag{1.10}$$

$$\nabla^2 W + \frac{a'}{a}\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\rho_0}{C_{44}^0(1+\chi_0)}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

где $\chi_0 = \dfrac{e_{15}^{0\,2}}{C_{44}^0\varepsilon_{11}^0}$ – коэффициент электромеханической связи калибровочного слоя.

2. Решение дифференциального уравнения (1.11) будем искать следующим образом:

$$W = W_0(y)a^{-1/2}(y)\exp i(kx - \omega t) \tag{2.1}$$

После простейших преобразований получим

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2\left[1 - \frac{1}{k^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{a''}{a} + \frac{1}{4}\frac{(a')^2}{a^2}\right) - \frac{V^2}{C_t^2}\right]W_0 = 0 \tag{2.2}$$

где $C_t^2=\dfrac{C_{44}^0(1+\chi_0)}{\rho_0}$ – скорость сдвиговой волны в среде, а $V^2=\left(\dfrac{\omega}{k}\right)^2$ – фазовая скорость.

Очевидно, что если пренебречь неоднородностью на любом этапе расчётов, взяв $a(y)=1$ при всей толщине $0\le y\le 2h$, то получим классическую постановку задачи для однородного пьезоэлектрического слоя класса 6mm, в частности, (2.2) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}-k^2\tilde{\alpha}^2 W_0=0$$

$$W=W_0\exp i(kx-\omega t)$$

$$\tilde{\alpha}^2=1-\frac{\omega^2}{k^2C_t^2}=1-\frac{V_0^2}{C_t^2}$$

$$\tilde{\alpha}>0 \qquad (*)$$

Здесь неравенство $(*)$ можно переписать в виде:

$0<\dfrac{V_0^2}{C_t^2}<1$, что является условием затухания или условием существования поверхностной волны.

Также напишем дисперсионное уравнение для однородного случая:

$$\begin{aligned}T_0(\tilde{\alpha},\chi_0,\tilde{k})=(\chi_0{}^2+\tilde{\alpha}^2(1+\chi_0)^2)\sinh[2\tilde{\alpha}\tilde{k}]\sinh[2\tilde{k}]-\\-2\tilde{\alpha}\chi_0(1+\chi_0)(\cosh[2\tilde{\alpha}\tilde{k}]\cosh[2\tilde{k}]-1)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь введены обозначения для $C_t^2,\ \chi_0, \tilde{k}=hk,$ идентичные вышеперечисленным.

$$V_0^2=C_t^2(1-\tilde{\alpha}^2) \tag{2.4}$$

В случае отсутствия пьезоэффекта ($\chi_0=0$) (2.3) примет следующий вид:

$$T_0(\tilde{\alpha},0,\tilde{k})=\tilde{\alpha}^2\sinh[2\tilde{\alpha}\tilde{k}]\sinh[2\tilde{k}] \tag{2.5}$$

и решением будет $\tilde{\alpha}=0,\ V_0^2=C_t^2$ (объёмная волна), что означает отсутствие в слое поверхностных волн, если нет пьезоэффекта в исследуемой среде.

В длинноволновом приближении ($\tilde{k}\to 0$), когда толщина слоя $2h$ намного меньше, чем длина поверхностной акустической волны $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$, дисперсионное уравнение (2.3) запишется как $T_0(\tilde{\alpha},\chi_0,\tilde{k}\to 0)=-\tilde{\alpha}\chi_0+\tilde{\alpha}^3(1+\chi_0)$ и нетривиальным решением будет:

$$\tilde{\alpha}^2=\frac{\chi_0}{1+\chi_0}\ ,\ \frac{V_0^2}{C_t^2}=\frac{1}{1+\chi_0}<1 \tag{2.6}$$

Величину безразмерной скорости $\frac{V_0^2}{C_t^2}$ находим из ненулевых решений уравнения $T_0(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k}) = 0$ при значениях $\tilde{k}$ (в спектре от 0.01 до 5) и определённых χ_0. Они приведены в табл.1.

Таблица 1

$\gamma = 0$	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
$\tilde{k} << 1$	0.9708	0.9009	0.7042	0.6451	0.5076
$\tilde{k} = 0.01$	0.9708	0.9009	0.7042	0.6451	0.5076
$\tilde{k} = 0.1$	0.9709	0.9011	0.7049	0.6459	0.5084
$\tilde{k} = 0.5$	0.9730	0.9077	0.7202	0.6628	0.5271
$\tilde{k} = 1$	0.9776	0.9225	0.7567	0.7035	0.5730
$\tilde{k} = 2$	0.9856	0.9490	0.8257	0.7818	0.6650 0.9837
$\tilde{k} = 5$	0.9938	0.9764	0.8971 0.9367	0.8613 0.8914	0.7509 0.7650

В табл. 2 приведены физико-механические характеристики и общепринятые маркировки для нескольких пьезокерамических материалов, а также приведены величины скоростей сдвиговых волн для вышеупомянутых материалов.

Таблица 2

	CdS(χ_1)	ZnO(χ_2)	PZT-7(χ_3)	PZT-5H(χ_4)	PZT-4(χ_5)
$C_{44} \cdot 10^{10}\ Н/м^2$	1.49	4.25	2.5	2.3	2.56
$\rho \cdot 10^3\ кг/м^3$	4.82	5.68	7.8	7.5	7.5
$e_{15} \cdot Кл/м^2$	-0.21	-0.59	13.5	-17.0	12.7
$\varepsilon_{11} \cdot 10^{-11}\ Ф/м$	7.99	7.38	1710	22.71	6.45
χ	0.03	0.11	0.42	0.55	0.97
$C_t \cdot м/с$	1784	2881	2133	2180	2593

Исследуя существование решений уравнения (2.3), можно сказать, что при значениях $\tilde{k} > 2,\ \chi_0 > 0.4$ возникает второе ненулевое решение меньше значения объёмной волны, удовлетворяющее условию затухания, что свидетельствует о существовании поверхностных волн.

В случае, когда неоднородность в слое имеет место быть, в уравнении (2.2) обратим внимание на член $-\frac{1}{2}\frac{a''}{a} + \frac{1}{4}\frac{(a')^2}{a^2} = \ell$, которым и характеризуется влияние неоднородности на решение уравнения движения и величину фазовой скорости. Для простоты допустим, что $\ell = \mathrm{const}$, и общий вид для функции неоднородности $a(y)$ зависит от значения ℓ.

- $\ell < 0$

  $a(y) = C_2 \cosh^2\left[\sqrt{-\ell}\left(y - 2C_1\right)\right]$

  $C_1, C_2 = \text{const}$

- $\ell > 0$

  $a(y) = C_2 \cos^2\left[\sqrt{\ell}\left(y - 2C_1\right)\right]$

  $C_1, C_2 = \text{const}$

- $\ell = 0$

  $a(y) = C_2\left(y - 2C_1\right)^2$

  $C_1, C_2 = \text{const}$

Обозначим также

$$\alpha^2 = 1 - \frac{V^2}{C_t^2} - \frac{\ell}{k^2} \tag{2.7}$$

$\alpha > 0 \quad (**)$

Здесь неравенсо $(**)$ можно переписать в виде:

$0 < \dfrac{V_0^2}{C_t^2} < 1 + \gamma^2$, что является условием существования поверхностной волны.

Таким образом, уравнение (2.2) примет окончательный вид:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2\alpha^2 W_0 = 0 \tag{2.8}$$

и общее решение будет

$$W_0 = A_1 \sinh\left[k\alpha y\right] + A_2 \cosh\left[k\alpha y\right]$$

$$A_1, A_2 = \text{const}. \tag{2.9}$$

Имея решение для (2.3) и (2.1), получим решение для (1.9), подставив в него (2.4) и принимая потенциал φ в виде

$$\varphi = \varphi_0(y) a^{-1/2}(y) \exp i(kx - \omega t). \tag{2.10}$$

Применив некоторые простые преобразования, получим уравнения:

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2} - k^2\left[1 - \frac{\ell}{k^2}\right]\varphi_0 = \frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0}\left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2\left[1 - \frac{\ell}{k^2}\right]W_0\right],\ 1 - \frac{\ell}{k^2} = \beta$$

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2} - k^2\beta^2\varphi_0 = \frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0}\left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2\beta^2 W_0\right] \tag{2.11}$$

$$\varphi_0 = \frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0}\left[A_1 \sinh\left[k\alpha y\right] + A_2 \cosh\left[k\alpha y\right]\right] + A_3 \sinh\left[k\beta y\right] +$$

$$+ A_4 \cosh\left[k\beta y\right].$$

3. Итак , в частном случае, когда

$\ell < 0$

$a(y) = C_2 \cosh^2\left[\sqrt{-\ell}\left(y - 2C_1\right)\right]$

$C_1, C_2 = \text{const}$

и принимая краевые условия $a(0)=1,\ a'(0)=0$,
получим $C_1=0,\ C_2=1 \qquad a(y)=\cosh^2(\sqrt{-\ell}\,y)$,

а функции $W(x,y,t)$ и $\varphi\left(x,y,t\right)$ примут окончательный вид:

$$W=\frac{(A_1\sinh\left[k\alpha y\right]+A_2\cosh\left[k\alpha y\right])}{\cosh(\sqrt{-\ell}\,y)}\exp i(kx-\omega t)$$

$$\begin{gathered}\varphi=\frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0}\frac{\left(A_1\sinh\left[k\alpha y\right]+A_2\cosh\left[k\alpha y\right]\right)}{\cosh(\sqrt{-\ell}\,y)}\exp i(kx-\omega t)+\\+\frac{\left(A_3\sinh\left[k\beta y\right]+A_4\cosh\left[k\beta y\right]\right)}{\cosh(\sqrt{-\ell}\,y)}\exp i(kx-\omega t)\end{gathered}\tag{3.1}$$

Из формулы (1.7) запишем также окончательный вид для касательного напряжения σ_{yz}

$$\begin{gathered}\sigma_{yz}=C_{44}^0a(y)\frac{\partial W}{\partial y}+e_{15}^0a(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\\sigma_{yz}=A_1C_{44}^0(1+\chi_0)\Omega_1+A_2C_{44}^0(1+\chi_0)\Omega_2+A_3e_{15}^0\Omega_3+A_4e_{15}^0\Omega_4\end{gathered}\tag{3.2}$$

Для упрощения вида последующих выражений и их дальнейшего анализа сделаем следуюшие обозначния:

$$\Omega_1=k\alpha\cosh[k\alpha y]\cosh(\sqrt{-\ell}\,y)-\sqrt{-\ell}\sinh(\sqrt{-\ell}\,y)\sinh[k\alpha y]$$
$$\Omega_2=k\alpha\sinh[k\alpha y]\cosh(\sqrt{-\ell}\,y)-\sqrt{-\ell}\sinh(\sqrt{-\ell}\,y)\cosh[k\alpha y]$$
$$\Omega_3=k\beta\cosh(\sqrt{-\ell}\,y)\cosh[k\beta y]-\sqrt{-\ell}\sinh(\sqrt{-\ell}\,y)\sinh[k\beta y]$$
$$\Omega_4=k\beta\cosh(\sqrt{-\ell}\,y)\sinh[k\beta y]-\sqrt{-\ell}\sinh(\sqrt{-\ell}\,y)\cosh[k\beta y]$$

$$\gamma=\frac{\sqrt{-\ell}}{k},\ \gamma^2=-\frac{\ell}{k^2}.$$

Следовательно, α и β будут записаны с учётом вышеупомянутого обозначения

$$\alpha=\sqrt{1-\frac{V^2}{C_t^2}+\gamma^2},\qquad\beta=\sqrt{1+\gamma^2}$$

Здесь γ представляет с величину, отвечающую за численное присутствие неоднородности при расчёте скорости волны и значение $\gamma=0$ нулевой неоднородности, то есть однородному случаю.

В этом случае фазовая скорость V^2 будет определяться следующим образом:

$$V^2 = C_t^2(1-\alpha^2+\gamma^2) \tag{3.3}$$

Учитывая граничные условия (1.4) и условия существования ненулевых решений $\det|A_i|=0, \quad i=1,...,4$, получим следуюшее трансцендентное дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} T(\alpha,\chi_0,\tilde{k},\gamma) = {} & 2\alpha\sqrt{1+\gamma^2}\chi_0(1+\chi_0)(\cosh[2\alpha\tilde{k}]\cosh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}]-1)- \\ & -((1+\gamma^2)\chi_0{}^2+\alpha^2(1+\chi_0)^2)\sinh[2\alpha\tilde{k}]\sinh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}]+ \\ & +\gamma\tanh[2\gamma\tilde{k}]\alpha(\chi_0+1)\sinh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}]\cosh[2\alpha\tilde{k}]- \\ & -\gamma\tanh[2\gamma\tilde{k}]\sqrt{1+\gamma^2}\chi_0\cosh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}]\sinh[2\alpha\tilde{k}] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Заметим что, если взять нулевой коэффициент неоднороности $\gamma=0$ в (3.4), то совпадение (3.4) с (2.3) будет очевидным.

В случае отсутствия пьезоэффекта ($\chi_0=0$) (3.4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} T(\alpha,0,\tilde{k},\gamma) = {} & -\alpha^2\sinh[2\alpha\tilde{k}]\sinh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}]+ \\ & +\alpha\gamma\tanh[2\gamma\tilde{k}]\sinh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}]\cosh[2\alpha\tilde{k}]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В уравнении $T(\alpha,0,\tilde{k},\gamma)=0$ в отличие от (2.5) кроме решения $\alpha=0,\ V^2=C_t^2(1+\gamma^2)$ будем также иметь решение возникшего трансцендентного уравнения $\alpha\tanh[2\alpha\tilde{k}]=\gamma\tanh[2\gamma\tilde{k}],$ решением которого будет $\alpha=\gamma,\ V^2=C_t^2$.

Если будем рассматривать предельный случай длинных волн ($\tilde{k}\to 0$), когда толщина слоя меньше длины волны, то решение для (3.4) примет вид:

$$\alpha^2=\frac{\chi_0}{1+\chi_0}+\gamma^2,\ \frac{V_0^2}{C_t^2}=\frac{1}{1+\chi_0}<1. \tag{3.6}$$

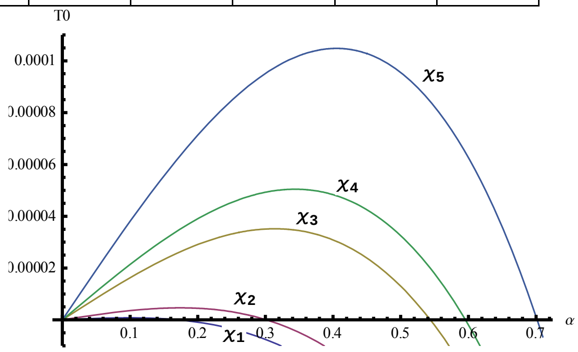
Сравнивая значения (3.6) и (2.6), можно сказать, что в краевом случае неоднородность не влияет на скорость волны.

Величину безразмерной скорости $\frac{V_0^2}{C_t^2}$ находим из ненулевых решений уравнения $T(\tilde{\alpha},\chi_0,\tilde{k},\gamma)=0$ при значениях $\tilde{k}$ (в спектре от 0.01 до 5) , определённых χ_0 (из табл.2) и неоднородности γ. Эти величины приведены в табл.3 .

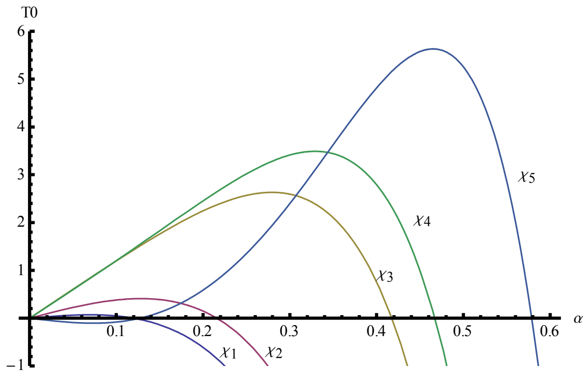
На фиг.1 и 2 приведены графики зависимости $\left\{\tilde{\alpha};T_0(\tilde{\alpha},\chi_0,\tilde{k})\right\}$ для фиксированных $\tilde{k}=0.01$ *и* $\tilde{k}=2$ и разных χ_0. На них – кривые, отображающие поведение дисперсионной функции $T_0(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k})$. Точки их пересечения с осью $\tilde{\alpha}$ дают корни в интересующем нас промежутке условия существования.

Таблица 3

$\gamma = 0.5$	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
$\tilde{k} = 1$	0.9769	0.9201	0.7506	0.6966	0.5650
$\tilde{k} = 2$	0.9812	0.9339	0.7834	0.7327 1.2297	0.6045 1.0306
$\tilde{k} = 5$	0.9816	0.9350	0.7838 1.1424	0.7326 1.0934	0.6031 0.9470
$\gamma = 0.7$	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
$\tilde{k} = 1$	0.9762	0.9179	0.7450	0.6903	0.5570
$\tilde{k} = 2$	0.9785	0.9250	0.7610 1.4785	0.7077 1.3972	0.5762 1.1822
$\tilde{k} = 5$	0.9785	0.9251 1.4880	0.7606 1.3606	0.7072 1.3027	0.5753 1.1288



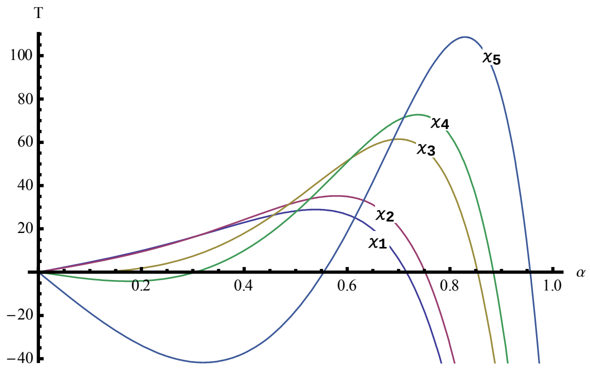
Фиг.1. Однородный случай при фиксированном $\tilde{k} = 0.01$



Фиг.2. Однородный случай при фиксированном $\tilde{k} = 2$

На фиг.2 отчётливо видно возникновение второго решения при $\tilde{k} = 2$ и χ_5.

На фиг.3 приведён график зависимости кривых $\left\{\alpha; T(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k}, \gamma)\right\}$ для фиксированных $\tilde{k} = 2$ и разных χ_0 с учётом неоднородности $\gamma = 0.7$, отображающий поведение дисперсионной функции $T(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k}, \gamma)$ и точки их пересечения с осью α дают корни в интересующем нас промежутке условия существования. Здесь отчётливо видно возникновение вторых решений для нескольких кривых $\chi_3, \chi_4, \chi_5, \tilde{k} = 2, \gamma = 0.7$.



Фиг.3. Неоднородный случай при фиксированном $\tilde{k} = 2$ и $\gamma = 0.7$

Заключение.

В данной работе получено дисперсионное уравнение для одного случая неоднородности пьезоактивного слоя. Исследованы возможные решения в разных диапазонах. Сделаны сравнения с однородным пьезоактивным слоем при одинаковых физико-механических характеристиках сред для нескольких материалов, приведённых в табл.2. Величины фазовых скоростей волн для интересующего материала при интересующих значениях параметров можно рассчитать, если умножить скорость C_t^2 для данного материала из табл. 2 на безразмерную величину скоростей, приведённых в табл.1 и 3.

При сравнении фазовых скоростей в средах в пределах $\tilde{k} \leq 1$ и средних значениях пьезоэффекта неоднородность не играет значительной роли, поскольку разницы между численными величинами скоростей или нет, или она не превышает 4. По этой причине использованы безразмерные скорости, значения которых для неоднородного случая при $\tilde{k} \leq 1$ не приведены в табл. 3. Но в диапазоне $\tilde{k} \geq 2$ и средних значениях пьезоэффекта разница между величинами безмерных скоростей неоднородного слоя уменьшается по сравнению с безразмерными скоростями в однородном слое на 10% и больше. К тому же, присутствие неоднородности в среде усиливает эффект возникновения вторых решений, которые, как и в однородном случае, удовлетворяют условию затухания. Падение скоростей волн и выявление вторых решений становится более очевидным с возрастанием неоднородности γ в среде, что свидетельствует о воздействии неоднородности на усиление эффекта локализации поверхностных волн.

Данная модель неоднородного слоя и подход к задаче даёт возможность исследования сред с другими вариантами неоднородности и краевыми условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. О распространении электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике.// Изв. АН Армянской ССР. Механика. 1988. Т.41. №5. С.34-40.
2. Аветисян А.С., Маргарян Дж.М. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств.//Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №3-4. С.31-36.
3. Bernard Collet, Michel Destrade, Gerard A. Maugin Bleustein-Gulyaev waves in some functionally graded materials.// European Journal of Mechanics A/Solids 25 (2006) 695-706.
4. D.J. Hasanyan, G.T. Piliposian , A.H. Kamalyan ,M.I. Karakhanyan. Some dynamic problems for elastic materials with functional inhomogeneties: anti-plane deformations. Continuum Mech. Thermodyn. (2003) 15: 519-527.
5. Мухсихачоян А.Р. К задаче сдвиговой поверхностной волны в неоднородной среде. // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №1. С.12-16.
6. Xiaoshan Cao, Junping Shi, Feng Jin Lamb wave propagation in the functionally graded piezoelectric-piezomagnetic material plate. //Acta Mech 223, 1081-1091 (2012).
7. Liming Gao, Ji Wang, Zheng Zhong, Jianke Du. An analysis of surface acoustic wave propagation in functionally graded plates with homotopy analysis method //Acta Mech. 208, 249-258 (2009).
8. Heinonen, E., Juuti, J., and Leppavuori, S. (2005) Characterization and modelling of 3D piezoelectric ceramic structures with ATILA software. Journal of European Ceramic Society, 25, 2467–2470.
9. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, Физматлит, 1991. 416с.
10. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.
11. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. Editorial УРСС, 2003. 336с.

Сведения об авторе:

Камалян Андраник Арменович – Аспирант факультета математики и механики, ЕГУ

Тел.: (094)90-96-92, (060)44-73-72

E-mail: kamalyan.andranik@yahoo.com

Поступила в редакцию 13.11.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика
УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Жамакочян К. А.

Ключевые слова: степенные ряды, метод, построение, модель, микрополярный, пластинка.
Key words: power series, method, construction, model, micropolar, plate.

Ժամակոչյան Ք. Ա.
Աստիճանային շարքերի մեթոդի կիրառումը միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի կիրառական մոդելի կառուցման համար

Դիտարկվում են տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար առաձգականության տեսության տարածական լարվածային վիճակի դինամիկայի հավասարումները, եզրային և նախնական պայմանները բարակ սալի տիրույթում: Կիրառելով ըստ հաստության աստիճանային շարքերի վերլուծման մեթոդը՝ կառուցվում են միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի ծռման դեֆորմացիայի և ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի դինամիկայի կիրառական-երկչափ մաթեմատիկական մոդելները: Ցույց է տրվում, որ կառուցված մոդելները լիովին համընկնում են միկրոպոլյար սալերի անալոգ մոդելների հետ, որոնք կառուցվել են ասիմպտոտիկ հիմնավորմամբ վարկածների մեթոդի հիման վրա:

Zhamakochyan K. A.
Application of the Method of Power Series for Construction of Applied Model of Micropolar Elastic Thin Plates

Dynamic equations, boundary and initial conditions of spatial stress state of the micropolar theory of elasticity with independent fields of displacements and rotations are considered in thin plate. Using the method of expansion to power series along the thickness of plate, applied two dimensional models of dynamic bending and plane stress state of micropolar elastic thin plates are constructed. It is shown that the constructed models coincide with the analogical models of micropolar plates, constructed on the basis of the asymptotically justified hypotheses method.

Рассматриваются уравнения, граничные и начальные условия динамики пространственного напряжённого состояния микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонкой области пластинки. Применяя метод разложений по толщине в степенные ряды, построены прикладные-двухмерные модели динамического изгиба и плоского напряжённого состояния микрополярных упругих тонких пластин. Показывается, что построенные модели полностью совпадают с аналогичными моделями микрополярных пластин, построенных на основе асимптотически обоснованного метода гипотез.

Введение. Решение проблемы сведения трёхмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек осуществляется тремя основными методами: (а) методом гипотез [1-3]; (в) методом разложений по толщине в степенные ряды [4-7] или по полиномам Лежандра [8]; (с) асимптотическим методом [9-17].

Проблема о сведении трёхмерных уравнений микрополярной теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек на основе метода гипотез впервые поставлена в монографии [18].

В работах [19-22] построено асимптотическое решение трёхмерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонких областях, а в работах [23-26] на основе качественных сторон асимптотического решения сформулированы адекватные гипотезы и построены прикладные теории динамики микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.

В данной работе развивается метод разложений по толщине в степенные ряды для построения прикладной-двухмерной динамической модели микрополярных упругих пластин и даётся сравнение (обоснование) с аналогичной моделью пластин, построенной в работе [25] на основе метода гипотез, имеющего асимптотическое подтверждение.

1.Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной динамической задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [27]:

уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x_3}+(\sigma_{23}-\sigma_{32})=J\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}+(\sigma_{31}-\sigma_{13})=J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial x_3}+(\sigma_{12}-\sigma_{21})=J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2};$$

физические соотношения упругости

$$\sigma_{11}=\lambda\theta+2\mu\gamma_{11},\ \sigma_{22}=\lambda\theta+2\mu\gamma_{22},\ \sigma_{33}=\lambda\theta+2\mu\gamma_{33},\ \theta=\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}$$

$$\sigma_{12}=(\mu+\alpha)\gamma_{12}+(\mu-\alpha)\gamma_{21},\quad \sigma_{21}=(\mu-\alpha)\gamma_{12}+(\mu+\alpha)\gamma_{21},$$

$$\sigma_{13}=(\mu+\alpha)\gamma_{13}+(\mu-\alpha)\gamma_{31},\quad \sigma_{31}=(\mu-\alpha)\gamma_{13}+(\mu+\alpha)\gamma_{31},$$

$$\sigma_{23}=(\mu+\alpha)\gamma_{23}+(\mu-\alpha)\gamma_{32},\quad \sigma_{32}=(\mu-\alpha)\gamma_{23}+(\mu+\alpha)\gamma_{32},$$

$$\mu_{11}=\beta\overline{\theta}+2\gamma\chi_{11},\quad \mu_{22}=\beta\overline{\theta}+2\gamma\chi_{22},$$

$$\mu_{33}=\beta\overline{\theta}+2\gamma\chi_{33},\quad \overline{\theta}=\chi_{11}+\chi_{22}+\chi_{33}, \tag{1.2}$$

$$\mu_{12}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{12}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{21},\quad \mu_{21}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{21}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{12},$$

$$\mu_{13}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{13}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{31},\quad \mu_{31}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{31}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{13},$$

$$\mu_{23}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{23}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{32},\quad \mu_{32}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{32}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{23};$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\ \gamma_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial x_2},\ \gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3},\ \gamma_{12}=\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\omega_3,\ \gamma_{21}=\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+\omega_3,$$

$$\gamma_{13}=\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+\omega_2,\ \ \gamma_{31}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3}-\omega_2,\ \ \gamma_{23}=\frac{\partial V_3}{\partial x_2}-\omega_1,\ \ \gamma_{32}=\frac{\partial V_2}{\partial x_3}+\omega_1,$$

$$\chi_{11}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1},\ \ \chi_{22}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2},\chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3},\chi_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1},\ \ \chi_{21}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\ , \tag{1.3}$$

$$\chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1},\chi_{31}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3},\chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2},\chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}.$$

Здесь σ_{11}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{21}, σ_{22}, σ_{23}, σ_{31}, σ_{32}, σ_{33} – силовые напряжения; μ_{11}, μ_{12}, μ_{13}, μ_{21}, μ_{22}, μ_{23}, μ_{31}, μ_{32}, μ_{33} – моментные напряжения; γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, γ_{12}, γ_{21}, γ_{13}, γ_{31}, γ_{23}, γ_{32} – деформации; χ_{11}, χ_{22}, χ_{33}, χ_{12}, χ_{21}, χ_{13}, χ_{31}, χ_{23}, χ_{32} – изгибы-кручения; V_1, V_2, V_3 – перемещения, ω_1, ω_2, ω_3 – независимые повороты; $-h\le x_3\le h$; $\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ –постоянные упругости микрополярного тела.

На лицевых плоскостях пластинки $x_3=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные напряжения

$$\sigma_{31}=\pm p_1^{\pm},\ \sigma_{32}=\pm p_2^{\pm},\ \sigma_{33}=\pm p_3^{\pm},\ \mu_{31}=\pm m_1^{\pm},\ \mu_{32}=\pm m_2^{\pm},\mu_{33}=\pm m_3^{\pm}$$

при $x_3=\pm h$. (1.4)

Граничные условия на боковой поверхности пластинки, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

К граничным условиям следует присоединить начальные условия при $t=0$ для величин V_1, V_2, V_3, ω_1, ω_2, ω_3, $\dfrac{\partial V_1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V_2}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V_3}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\omega_1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\omega_2}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\omega_3}{\partial t}$.

2.Метод степенных рядов. Если выражения (1.3) подставим в формулы (1.2), то получим, что силовые и моментные напряжения выражаются через перемещения V_1,V_2,V_3 и повороты $\omega_1,\omega_2,\omega_3$. Для построения двумерной модели пластинки применяем метод приведения [7]. Аппроксимируем V_1,V_2,V_3 и $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ степенными полиномами относительно x_3:

$$V_1=\sum_{n=0}^{N}V_{1,n}x_3^n,\quad V_2=\sum_{n=0}^{N}V_{2,n}x_3^n,\quad V_3=\sum_{n=0}^{N}V_{3,n}x_3^n,$$

$$\omega_1=\sum_{n=0}^{N}\omega_{1,n}x_3^n,\quad \omega_2=\sum_{n=0}^{N}\omega_{2,n}x_3^n,\quad \omega_3=\sum_{n=0}^{N}\omega_{3,n}x_3^n, \tag{2.1}$$

где $V_{1,n}$, $V_{2,n}$, $V_{3,n}$, $\omega_{1,n}$, $\omega_{2,n}$, $\omega_{3,n}$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от координат x_1,x_2 и времени t.

Подставляя ряды (2.1) в основные уравнения (1.1)-(1.3) и граничные условия (1.4) пространственной задачи микрополярной теории упругости для тонкого параллелепипеда, получаем рекуррентные соотношения и условия, связывающие коэффициенты полиномов (2.1), причём число соотношений равно числу неизвестных коэффициентов.

На самом деле, на основании формул (1.2), (1.3), с учётом (2.1), для силовых напряжений $\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33}$ и моментных напряжений $\mu_{31},\mu_{32},\mu_{33}$ получим:

$$\sigma_{31}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(n+1)V_{1,n+1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,n}\right]x_3^n, \tag{2.2}$$

$$\sigma_{32}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(n+1)V_{2,n+1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_2}+2\alpha\omega_{1,n}\right]x_3^n, \tag{2.3}$$

$$\sigma_{33}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\lambda\left(\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_2}\right)+(\lambda+2\mu)(n+1)V_{3,n+1}\right]x_3^n, \tag{2.4}$$

$$\mu_{31}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(n+1)\omega_{1,n+1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,n}}{\partial x_1}\right]x_3^n, \tag{2.5}$$

$$\mu_{32}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(n+1)\omega_{2,n+1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,n}}{\partial x_2}\right]x_3^n, \tag{2.6}$$

$$\mu_{33}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,n}}{\partial x_2}\right)+(\beta+2\gamma)(n+1)\omega_{3,n+1}\right]x_3^n, \tag{2.7}$$

Используя формулы (2.2)-(2.7) и имея в виду граничные условия (1.4) на лицевых плоскостях пластинки $x_3=\pm h$, после некоторых преобразований приходим к следующим равенствам:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(2k+1)V_{1,2k+1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,2k}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,2k}\right]h^{2k}=\frac{p_1^+-p_1^-}{2}, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(2k+2)V_{1,2k+2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,2k+1}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,2k+1}\right]h^{2k+1}=\frac{p_1^++p_1^-}{2}, \tag{2.9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(2k+1)V_{2,2k+1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,2k}}{\partial x_2}+2\alpha\omega_{1,2k}\right]h^{2k}=\frac{p_2^+-p_2^-}{2}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(2k+2)V_{2,2k+2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,2k+1}}{\partial x_2}+2\alpha\omega_{1,2k+1}\right]h^{2k+1}=\frac{p_2^++p_2^-}{2}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\lambda\left(\frac{\partial V_{1,2k}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,2k}}{\partial x_2}\right)+(\lambda+2\mu)(2k+1)V_{3,2k+1}\right]h^{2k}=\frac{p_3^+-p_3^-}{2}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\lambda\left(\frac{\partial V_{1,2k+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,2k+1}}{\partial x_2}\right)+(\lambda+2\mu)(2k+2)V_{3,2k+2}\right]h^{2k+1}=\frac{p_3^++p_3^-}{2}, \tag{2.13}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(2k+1)\omega_{1,2k+1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,2k}}{\partial x_1}\right]h^{2k}=\frac{m_1^+-m_1^-}{2}, \tag{2.14}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(2k+2)\omega_{1,2k+2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,2k+1}}{\partial x_1}\right]h^{2k+1}=\frac{m_1^++m_1^-}{2}, \tag{2.15}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(2k+1)\omega_{2,2k+1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,2k}}{\partial x_2}\right]h^{2k}=\frac{m_2^+-m_2^-}{2}, \tag{2.16}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(2k+2)\omega_{2,2k+2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,2k+1}}{\partial x_2}\right]h^{2k+1}=\frac{m_2^++m_2^-}{2}, \tag{2.17}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,2k}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,2k}}{\partial x_2}\right)+(\beta+2\gamma)(2k+1)\omega_{3,2k+1}\right]h^{2k}=\frac{m_3^+-m_3^-}{2}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,2k+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,2k+1}}{\partial x_2}\right)+(\beta+2\gamma)(2k+2)\omega_{3,2k+2}\right]h^{2k+1}=\frac{m_3^++m_3^-}{2}. \tag{2.19}$$

Далее, подставляя выражения (1.3) в формулы обобщённого закона Гука (1.2), силовые напряжения и моментные напряжения выражаются через перемещения V_1, V_2, V_3 и свободные повороты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Учитывая разложения (2.1), полученные таким образом формулы для силовых напряжений и моментных напряжений, подставляя их в уравнения движения (1.1), приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения (2.1):

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_2}+(n+1)V_{3,n+1}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2 V_{1,n}+(n+2)(n+1)V_{1,n+2}\right]+$$
$$+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{3,n}}{\partial x_2}-(n+1)\omega_{2,n+1}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{1,n}}{\partial t^2}, \tag{2.20}$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_2}+(n+1)V_{3,n+1}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2 V_{2,n}+(n+2)(n+1)V_{2,n+2}\right]+$$
$$+2\alpha\left[(n+1)\omega_{1,n+1}-\frac{\partial\omega_{3,n}}{\partial x_1}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{2,n}}{\partial t^2}, \tag{2.21}$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\left[(n+1)\frac{\partial V_{1,n+1}}{\partial x_1}+(n+1)\frac{\partial V_{2,n+1}}{\partial x_2}+(n+2)(n+1)V_{3,n+2}\right]+$$
$$(\mu+\alpha)\left[\Delta^2 V_{3,n}+(n+2)(n+1)V_{3,n+2}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{2,n}}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_{1,n}}{\partial x_2}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{3,n}}{\partial t^2}, \tag{2.22}$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\omega_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,n}}{\partial x_2}+(n+1)\omega_{3,n+1}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{1,n}+(n+2)(n+1)\omega_{1,n+2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_2}-(n+1)V_{2,n+1}-2\omega_{1,n}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{1,n}}{\partial t^2}, \tag{2.23}$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\omega_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,n}}{\partial x_2}+(n+1)\omega_{3,n+1}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{2,n}+(n+2)(n+1)\omega_{2,n+2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[(n+1)V_{1,n+1}-\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_1}-2\omega_{2,n}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{2,n}}{\partial t^2}, \tag{2.24}$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\left[(n+1)\frac{\partial\omega_{1,n+1}}{\partial x_1}+(n+1)\frac{\partial\omega_{2,n+1}}{\partial x_2}+(n+2)(n+1)\omega_{3,n+2}\right]+$$

$$+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{3,n}+(n+2)(n+1)\omega_{3,n+2}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_2}-2\omega_{3,n}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{3,n}}{\partial t^2}, \tag{2.25}$$

Отметим, что уравнения (2.20)-(2.25) и условия (2.8)-(2.19) распадаются на две части: симметричную относительно x_3 (соответствующую продольным колебаниям) и обратно-симметричную (соответствующую поперечным колебаниям).

3.Математическая модель динамики обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярных тонких пластин.

Продольные колебания микрополярной тонкой пластинки на основании перечисленных выше уравнений и условий, в исходном приближении метода степенных рядов описываются следующей системой уравнений:

$$2(\mu+\alpha)V_{1,2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,1}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,1}=\frac{p_1^+ + p_1^-}{2h},$$

$$2(\mu+\alpha)V_{2,2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,1}}{\partial x_2}+2\alpha\omega_{1,1}=\frac{p_2^+ + p_2^-}{2h},$$

$$\lambda\left(\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_2}\right)+(\lambda+2\mu)V_{3,1}=\frac{p_3^+ - p_3^-}{2},$$

$$(\gamma+\varepsilon)\omega_{1,1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_1}=\frac{m_1^+ - m_1^-}{2},$$

$$(\gamma+\varepsilon)\omega_{2,1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_2}=\frac{m_2^+ - m_2^-}{2},$$

$$\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,1}}{\partial x_2}\right)+2(\beta+2\gamma)\omega_{3,2}=\frac{m_3^+ + m_3^-}{2h}, \tag{3.1}$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_2}+V_{3,1}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2 V_{1,0}+2V_{1,2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_2}-\omega_{2,1}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_2}+V_{3,1}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2 V_{2,0}+2V_{2,2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\omega_{1,1}-\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_1}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial t^2},$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\left[\frac{\partial\omega_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,1}}{\partial x_2}+2\omega_{3,2}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{3,0}+2\omega_{3,2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_2}-2\omega_{3,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{3,0}}{\partial t^2}.$$

Подставляя $\omega_{1,1}, \omega_{3,2}, \omega_{2,1}, V_{1,2}, V_{2,2}$ и $V_{3,1}$ соответственно из первого, второго, третьего, четвёртого, пятого и шестого уравнений системы (3.1) в седьмое, восьмое и девятое уравнения, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно основных функций задачи: $V_{1,0}$, $V_{2,0}$, $\omega_{3,0}$:

$$(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial x_2^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_2}+\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_2}\right)+$$

$$+\underline{\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p_3^+-p_3^-}{2}\right)}=\rho\frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial t^2}-\frac{p_1^++p_1^-}{2h},$$

$$(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial x_1^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_1}+\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_1}\right)+$$

$$+\underline{\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p_3^+-p_3^-}{2}\right)}=\rho\frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial t^2}-\frac{p_2^++p_2^-}{2h}, \tag{3.2}$$

$$\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\Delta^2\omega_{3,0}+2\alpha\left[\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_2}-2\omega_3\right]+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{m_1^+-m_1^-}{2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{m_2^+-m_2^-}{2}\right]=$$

$$=J\frac{\partial^2\omega_{3,0}}{\partial t^2}-\frac{m_3^++m_3^-}{2h}.$$

Система уравнений (3.2) представляет собой основные уравнения динамики обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярных упругих пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Эта система записана посредством перемещений $(V_{1,0}, V_{2,0})$ и независимого поворота $(\omega_{3,0})$. К этой системе следует присоединить граничные условия на контуре срединной плоскости пластинки и начальные условия для $V_{1,0}$, $V_{2,0}$, $\omega_{3,0}$, $\dfrac{\partial V_{1,0}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V_{2,0}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\omega_{3,0}}{\partial t}$.

Теперь, будем сравнивать полученную модель плоского обобщённого напряжённого состояния динамики микрополярной упругой тонкой пластинки с аналогичной моделью [25], построенной на основе метода гипотез, имеющего асимптотическое подтверждение:

уравнения движения

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{21}}{\partial x_2}=2\rho h\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}-(p_1^+ + p_1^-),\;\; \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}=2\rho h\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}-(p_2^+ + p_2^-),$$
$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2}+(S_{12}-S_{21})=2Jh\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}-(m_3^+ + m_3^-); \qquad (3.3)$$

соотношения упругости

$$S_{12}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{12}+(\mu-\alpha)\Gamma_{21}],\;\; S_{21}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{21}+(\mu-\alpha)\Gamma_{12}],$$
$$L_{13}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{13}+(\gamma-\varepsilon)k_{31}],\;\; L_{23}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{23}+(\gamma-\varepsilon)k_{32}],$$
$$T_{11}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(\Gamma_{11}+\nu\Gamma_{22}),\;\; T_{22}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(\Gamma_{22}+\nu\Gamma_{11}), \qquad (3.4)$$
$$L_{31}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{31}+(\gamma-\varepsilon)k_{13}],\;\; L_{32}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{32}+(\gamma-\varepsilon)k_{23}],$$
$$L_{31}=h(m_1^+ - m_1^-),\; L_{32}=h(m_2^+ - m_2^-);$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\; \Gamma_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial x_2},\; \Gamma_{12}=\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\Omega_3,\; \Gamma_{21}=\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+\Omega_3,$$
$$k_{13}=\frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1},\; k_{23}=\frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2}. \qquad (3.5)$$

Если (3.5) подставить в соотношения упругости (3.4) и последние в уравнения движения (3.3), получим основные уравнения в перемещениях и поворотах модели динамики плоского напряжённого состояния микрополярных упругих пластин работы [25]. Сравнивая уравнения этой системы с полученными уравнениями (3.2) на основе метода степенных рядов ($V_{1,0}=V_1,\; V_{2,0}=V_2,\; \omega_{3,0}=\Omega_3$), легко убедиться, что разница только в подчёркнутых членах в (3.2). Но эти величины – результат того, что в физическом уравнении для γ_{ii} $(i=1,2)$ было удержано силовое напряжение σ_{33}, которое, как известно, в теории пластин принято пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{11},σ_{22}. Таким образом, модель динамики обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярных упругих тонких пластин, которая построена в работе [25] на основе метода гипотез и которая асимптотически точная модель [22], можем утверждать, что эта модель обосновывается также методом степенного разложения.

4.Математическая модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Поперечные колебания микрополярной тонкой пластинки на основании перечисленных выше уравнений и условий описываются следующей системой уравнений:

$$(\mu+\alpha)V_{1,1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,0}+3(\mu+\alpha)h^2V_{1,3}+(\mu-\alpha)h^2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}-2\alpha h^2\omega_{2,2}=\frac{p_1^+-p_1^-}{2},$$

$$(\mu+\alpha)V_{2,1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}+2\alpha\omega_{1,0}+3(\mu+\alpha)h^2V_{2,3}+(\mu-\alpha)h^2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_2}+2\alpha h^2\omega_{1,2}=\frac{p_2^+-p_2^-}{2},$$

$$\lambda\left(\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}\right)+2(\lambda+2\mu)V_{3,2}=\frac{p_3^++p_3^-}{2h},$$

$$2(\gamma+\varepsilon)\omega_{1,2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}=\frac{m_1^++m_1^-}{2h},$$

$$2(\gamma+\varepsilon)\omega_{2,2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_2}=\frac{m_2^++m_2^-}{2h}, \tag{4.1}$$

$$\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}\right)+(\beta+2\gamma)\omega_{3,1}+\beta h^2\left(\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,2}}{\partial x_2}\right)+3h^2(\beta+2\gamma)\omega_{3,3}=\frac{m_3^+-m_3^-}{2},$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}+2V_{3,2}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2V_{1,1}+6V_{1,3}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_2}-2\omega_{2,2}\right]=\rho\frac{\partial^2V_{1,1}}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}+2V_{3,2}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2V_{2,1}+6V_{2,3}\right]+2\alpha\left[2\omega_{1,2}-\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}\right]=\rho\frac{\partial^2V_{2,1}}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}+2V_{3,2}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2V_{3,0}+2V_{3,2}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_2}\right]=\rho\frac{\partial^2V_{3,0}}{\partial t^2},$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}+\omega_{3,1}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{1,0}+2\omega_{1,2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}-V_{2,1}-2\omega_{1,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial t^2},$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}+\omega_{3,1}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{2,0}+2\omega_{2,2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[V_{1,1}-\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-2\omega_{2,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial t^2},$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\left[2\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1}+2\frac{\partial\omega_{2,2}}{\partial x_2}+6\omega_{3,3}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{3,1}+6\omega_{3,3}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\omega_{3,1}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{3,1}}{\partial t^2}.$$

Подставляя $V_{3,2}$, $\omega_{1,2}$ и $\omega_{2,2}$ соответственно из третьего, четвёртого и пятого уравнений системы (4.1) в девятое, десятое и одиннадцатое уравнения, получим:

$$(\mu+\alpha)\Delta^2 V_{3,0}+(\mu-\alpha)\left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial \omega_{2,0}}{\partial x_1}-\frac{\partial \omega_{1,0}}{\partial x_2}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2}-\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}&(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2 \omega_{1,0}}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 \omega_{1,0}}{\partial x_2^2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial x_1 \partial x_2}+\beta\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_1}+\\&+2\alpha\left[\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}-V_{2,1}-2\omega_{1,0}\right]=J\frac{\partial^2 \omega_{1,0}}{\partial t^2}-\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h}\end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}&(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial x_2^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 \omega_{2,0}}{\partial x_1^2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 \omega_{1,0}}{\partial x_1 \partial x_2}+\beta\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_1}+\\&+2\alpha\left[V_{1,1}-\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-2\omega_{2,0}\right]=J\frac{\partial^2 \omega_{1,0}}{\partial t^2}-\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}\end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставив (2.1) в (1.2), для σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22}, μ_{13}, μ_{23} получим:

$$\begin{aligned}&\sigma_{11}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}+\lambda\left(\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_2}+V_{3,n+1}(n+1)\right)\right]x_3^n,\\&\sigma_{12}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_2}-2\alpha\omega_{3,n}\right]x_3^n,\\&\sigma_{21}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_1}+2\alpha\omega_{3,n}\right]x_3^n,\\&\sigma_{22}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_2}+\lambda\left(\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}+V_{3,n+1}(n+1)\right)\right]x_3^n,\\&\mu_{13}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial \omega_{3,n}}{\partial x_1}+(\gamma-\varepsilon)(n+1)\omega_{1,n+1}\right]x_3^n,\\&\mu_{23}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial \omega_{3,n}}{\partial x_2}+(\gamma-\varepsilon)(n+1)\omega_{2,n+1}\right]x_3^n,\end{aligned} \quad (4.5)$$

откуда для случая изгиба в исходном приближении будем иметь:

$$\sigma_{11}=\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\lambda\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}+2V_{3,2}\right)\right]x_3,$$

$$\sigma_{12}=\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\alpha\omega_{3,1}\right]x_3,$$

$$\sigma_{21}=\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}+2\alpha\omega_{3,1}\right]x_3,$$

$$\sigma_{22}=\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}+\lambda\left(\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+2V_{3,2}\right)\right]x_3, \tag{4.6}$$

$$\mu_{13}=\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+2(\gamma-\varepsilon)\omega_{1,2}\right]x_3,$$

$$\mu_{23}=\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_2}+2(\gamma-\varepsilon)\omega_{2,2}\right]x_3,$$

Для силовых напряжений σ_{31}, σ_{32} и моментного напряжения μ_{33} сначала имеем

$$\overset{0}{\sigma}_{31}=(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}+(\mu+\alpha)V_{1,1}-2\alpha\omega_{2,0}, \tag{4.7}$$

$$\overset{0}{\sigma}_{32}=(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}+(\mu+\alpha)V_{2,1}+2\alpha\omega_{1,0}, \tag{4.8}$$

$$\overset{0}{\mu}_{33}=(2\gamma+\beta)\omega_{3,1}+\beta\left[\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}\right]. \tag{4.9}$$

Подставив выражения σ_{11}, σ_{21}, σ_{12}, σ_{22}, μ_{13}, μ_{23} из (4.6) в первое, второе и шестое уравнения движения (1.1), проинтегрировав по x_3, получим:

$$\tilde{\sigma}_{31}=\frac{x_3^2}{2}\left[\rho\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2}-(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2}-\lambda\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}\right)-\right.$$
$$\left.-(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2}-(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_2}\right]+\bar{\sigma}_{31}(x_1,x_2,t),$$

$$\tilde{\sigma}_{32}=\frac{x_3^2}{2}\left[\rho\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2}-(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2}-\lambda\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_2}\right)-\right.$$
$$\left.-(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2}-(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}\right]+\bar{\sigma}_{32}(x_1,x_2,t), \tag{4.10}$$

$$\tilde{\mu}_{33}=\frac{x_3^2}{2}\left[J\frac{\partial^2\omega_{3,1}}{\partial t^2}-(\gamma+\varepsilon)\Delta^2\omega_{3,1}-2(\gamma-\varepsilon)\left(\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,2}}{\partial x_2}\right)-\right.$$
$$\left.-2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\omega_{3,1}\right)\right]+\bar{\mu}_{33}(x_1,x_2,t),$$

где $\overline{\sigma}_{31}(x_1,x_2,t)$, $\overline{\sigma}_{32}(x_1,x_2,t)$, $\overline{\mu}_{33}(x_1,x_2,t)$ – постоянные интегрирования. Для определения этих величин потребуем, чтобы усреднённые по высоте пластинки величины $\tilde{\sigma}_{31}$, $\tilde{\sigma}_{32}$, $\tilde{\mu}_{33}$ были равны нулю:

$$\int_{-h}^{h}\tilde{\sigma}_{31}dx_3=0,\ \int_{-h}^{h}\tilde{\sigma}_{32}dx_3=0,\ \int_{-h}^{h}\tilde{\mu}_{33}dx_3=0. \tag{4.11}$$

Подставив выражение (4.10) в (4.11), получим:

$$\overline{\sigma}_{31}(x_1,x_2,t)=-\frac{h^2}{6}\left[\rho\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2}-(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2}-\lambda\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}\right)-\right.$$
$$\left.-(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2}-(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_2}\right],$$
$$\overline{\sigma}_{32}(x_1,x_2,t)=-\frac{h^2}{6}\left[\rho\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2}-(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2}-\lambda\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_2}\right)-\right.$$
$$\left.-(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2}-(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}\right], \tag{4.12}$$
$$\overline{\mu}_{33}(x_1,x_2,t)=-\frac{h^2}{6}\left[J\frac{\partial^2\omega_{3,1}}{\partial t^2}-(\gamma+\varepsilon)\Delta^2\omega_{3,1}-2(\gamma-\varepsilon)\left(\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,2}}{\partial x_2}\right)-\right.$$
$$\left.-2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\omega_{3,1}\right)\right].$$

Подставив (4.12) в (4.10), для $\tilde{\sigma}_{31}$, $\tilde{\sigma}_{32}$, $\tilde{\mu}_{33}$ получим следующие выражения:

$$\tilde{\sigma}_{31}=\left(\frac{x_3^2}{2}-\frac{h^2}{6}\right)\left[\rho\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2}-(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2}-\lambda\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}\right)-\right.$$
$$\left.-(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2}-(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_2}\right],$$
$$\tilde{\sigma}_{32}=\left(\frac{x_3^2}{2}-\frac{h^2}{6}\right)\left[\rho\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2}-(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2}-\lambda\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_2}\right)-\right.$$
$$\left.-(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2}-(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}\right], \tag{4.13}$$
$$\tilde{\mu}_{33}=\left(\frac{x_3^2}{2}-\frac{h^2}{6}\right)\left[J\frac{\partial^2\omega_{3,1}}{\partial t^2}-(\gamma+\varepsilon)\Delta^2\omega_{3,1}-2(\gamma-\varepsilon)\left(\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,2}}{\partial x_2}\right)-\right.$$
$$\left.-2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\omega_{3,1}\right)\right].$$

Таким образом, для силовых напряжений σ_{31}, σ_{32} и моментного напряжения μ_{33} будем иметь:

$$\sigma_{31} = \overset{0}{\sigma}_{31} + \tilde{\sigma}_{31}, \quad \sigma_{32} = \overset{0}{\sigma}_{32} + \tilde{\sigma}_{32}, \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33} + \tilde{\mu}_{33}. \tag{4.14}$$

Подставив (4.7)-(4.9) и (4.13) в (4.14), получим окончательные формулы для σ_{31}, σ_{32}, μ_{33}:

$$\sigma_{31} = (\mu - \alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (\mu + \alpha)V_{1,1} - 2\alpha\omega_{2,0} + \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left[\rho\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - (2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - \right.$$

$$\left. -\lambda\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}\right) - (\mu + \alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2} - (\mu - \alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_2}\right],$$

$$\sigma_{32} = (\mu - \alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2} + (\mu + \alpha)V_{2,1} + 2\alpha\omega_{1,0} + \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left[\rho\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2} - (2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2} - \right. \tag{4.15}$$

$$\left. -\lambda\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_2}\right) - (\mu + \alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2} - (\mu - \alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_1}\right],$$

$$\mu_{33} = (2\gamma + \beta)\omega_{3,1} + \beta\left[\frac{\partial \omega_{1,0}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{2,0}}{\partial x_2}\right] + \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left[J\frac{\partial^2 \omega_{3,1}}{\partial t^2} - (\gamma + \varepsilon)\Delta^2\omega_{3,1} - \right.$$

$$\left. -2(\gamma - \varepsilon)\left(\frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{2,2}}{\partial x_2}\right) - 2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2} - 2\omega_{3,1}\right)\right],$$

где $V_{3,2}$, $\omega_{1,2}$, $\omega_{2,2}$ выражаются с помощью $V_{1,1}$, $V_{2,1}$, $\omega_{3,1}$:

$$V_{3,2} = \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} - \frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}\right),$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2(\gamma + \varepsilon)}\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h} - \frac{\gamma - \varepsilon}{2(\gamma + \varepsilon)}\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_1}, \tag{4.16}$$

$$\omega_{2,2} = \frac{1}{2(\gamma + \varepsilon)}\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h} - \frac{\gamma - \varepsilon}{2(\gamma + \varepsilon)}\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_2}.$$

При помощи формул (4.15) удовлетворяя соответствующим граничным условиям из (1.4), имея в виду (4.16), получим следующие уравнения:

$$(\mu + \alpha)V_{1,1} + (\mu - \alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} - 2\alpha\omega_{2,0} - \frac{Eh^2}{3(1 - \nu^2)}\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2}\right) -$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu + \alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2} + (\mu - \alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_2} + \frac{\nu}{1 - \nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}\right] = \tag{4.17}$$

$$= \frac{p_1^+ - p_1^-}{2} - \rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2},$$

$$(\mu+\alpha)V_{2,1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}-2\alpha\omega_{1,0}-\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}\right)-$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}\right]= \tag{4.18}$$

$$=\frac{p_2^+ - p_2^-}{2}-\rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2},$$

$$(\beta+2\gamma)\omega_{3,1}+\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}\right)-\frac{h^2}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\Delta^2\omega_{3,1}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}\right)+\right.$$

$$\left.+2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\omega_{3,1}\right)\right]=\frac{m_3^+ - m_3^-}{2}-J\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\omega_{3,1}}{\partial t^2}, \tag{4.19}$$

Объединив (4.2), (4.3), (4.4), (4.17), (4.18) и (4.19), окончательным образом приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно $V_{1,1}$, $V_{2,1}$, $V_{3,0}$, $\omega_{1,0}$, $\omega_{2,0}$, $\omega_{3,1}$:

$$(\mu+\alpha)\Delta^2 V_{3,0}+(\mu-\alpha)\left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_2}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2}-\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h},$$

$$(\mu+\alpha)V_{1,1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,0}-\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1\partial x_2}\right)-$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_2}+\underline{\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}}\right]=$$

$$=\frac{p_1^+ - p_1^-}{2}-\rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2},$$

$$(\mu+\alpha)V_{2,1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}-2\alpha\omega_{1,0}-\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}\right)-$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+\underline{\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}}\right]=$$

$$=\frac{p_2^+ - p_2^-}{2}-\rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2}, \tag{4.20}$$

$$(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial x_2^2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}-V_{2,1}-2\omega_{1,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial t^2}-\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h}$$

$$(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial x_2^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial x_1^2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+$$

$$+2\alpha\left[V_{1,1}-\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-2\omega_{2,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial t^2}-\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}$$

$$(\beta+2\gamma)\omega_{3,1}+\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}\right)-\frac{h^2}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\Delta^2\omega_{3,1}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}\right)+\right.$$

$$\left.+2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\omega_{3,1}\right)\right]=\frac{m_3^+ - m_3^-}{2}-J\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\omega_{3,1}}{\partial t^2},$$

Система уравнений (4.20) представляет собой математическую модель динамики микрополярных упругих тонких пластин при изгибной деформации. К системе (4.20) следует присоединить граничные условия на боковой поверхности пластинки [25] и начальные условия для $V_{1,1}$, $V_{2,1}$, $V_{3,0}$, $\omega_{1,0}$, $\omega_{2,0}$, $\omega_{3,1}$, $\frac{\partial V_{3,0}}{\partial t}$, $\frac{\partial V_{1,1}}{\partial t}$, $\frac{\partial V_{2,1}}{\partial t}$, $\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial t}$, $\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial t}$, $\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial t}$.

Теперь, сравним полученную модель динамики микрополярной упругой тонкой пластинки с аналогичной моделью [25], построенной на основе метода гипотез, имеющего асимптотическое подтверждение:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\tilde{p}_3,\quad N_{31}-\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}=-\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}+2h\tilde{p}_1,$$

$$N_{32}-\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}=-\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}+2h\tilde{p}_2 \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}+N_{23}-N_{32}=2Jh\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2}-2\tilde{m}_1,\quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+N_{31}-N_{13}=2Jh\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}-2\tilde{m}_2,$$

$$L_{33}-\left[\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}+M_{12}-M_{21}\right]=-\frac{2Jh^3}{3}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}+2\tilde{m}_3;$$

соотношения упругости

$$N_{13}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31}],\quad N_{23}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{23}+(\mu-\alpha)\Gamma_{32}],$$

$$N_{31}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma_{13}],\quad N_{32}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{32}+(\mu-\alpha)\Gamma_{23}],$$

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11}+\nu K_{22}),\quad M_{22}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{22}+\nu K_{11}),$$

$$M_{12}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{12}+(\mu-\alpha)K_{21}\right],\ M_{21}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{21}+(\mu-\alpha)K_{12}\right],\quad(4.22)$$

$$L_{11}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{11}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{22}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{22}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{22}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{11}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{12}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}],\ L_{21}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}],$$

$$\Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\tilde{m}_1}{2h}\right],\ \Lambda_{23}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\tilde{m}_2}{2h}\right],$$

$$L_{33}=2h(\beta+2\gamma)\iota+2h\beta(k_{11}+k_{22});$$

геометрические соотношения

$$K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\ K_{22}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\ K_{12}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\iota,\ K_{21}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\iota,$$

$$\Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\Omega_2,\ \Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2,\ \Gamma_{23}=\frac{\partial w}{\partial x_2}-\Omega_1,\ \Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1,\quad(4.23)$$

$$k_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1},\ k_{22}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2},\ k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1},\ k_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2},\ l_{13}=\frac{\partial\iota}{\partial x_1},\ l_{23}=\frac{\partial\iota}{\partial x_2}.$$

Если (4.23) подставить в соотношения упругости (4.22) и последние в уравнения движения (4.21), получим основные уравнения в перемещениях и поворотах модели микрополярных упругих пластин работы [25]. Сравнивая уравнения этой системы с уравнениями (2.48), полученными на основе метода степенных рядов $(V_{3,0}=w,\ V_{1,1}=\psi_1,\ V_{2,1}=\psi_2,\ \omega_{1,0}=\Omega_1,\omega_{2,0}=\Omega_2,\omega_{3,1}=\iota)$, легко убедиться, что разница только в подчеркнутых членах в (4.20). Но это – результат того, что в физическом уравнении для γ_{ii} $(i=1,2)$ было удержано силовое напряжение σ_{33}, которое, как известно, в теории пластин принято пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{11},σ_{22}. Таким образом, модель динамики микрополярных упругих тонких пластин, которая построена в работе [25] на основе метода гипотез, является асимптотически точной моделью [22], она обосновывается также и методом степенного разложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266с.
2. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys. 1944. Vol.23. P.184-191.

3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М: Изд. Наука, 1967. 444с.
4. Cauchy A.L. Sur lequilibre et le movement dune lame solide //Exercices Math. 1828. V.3. P.245-326.
5. Poisson S.D. Memoire sur lequilibre et le movement des corps elastiques //Mem. Acad. Roy. Sci. 1829. V.8. P.357-570.
6. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Киев: Изд-во АН Укр. ССР, 1963. 353с.
7. Селезов І.Т. Дослідження поперечних коливань пластини//Прикладна механіка. 1960. Т. VI. Вып. 5. С.319-327.
8. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286с.
9. Friedrichs K. O. and Dressler R. F. A. Boundary Layer Theory for Elastic Plates // Comm. Pure and Apll. Math. 1961. Vol. №1. P.1-33.
10. Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol. 266. №1325.
11. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: Материалы I Всесоюзн. школы по теории и численным методам расчёта оболочек и пластин. Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. С.51-149.
12. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
13. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера// Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1990. №6. С.124-138.
14. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука, 1997. 414 с.
15. Рогачева Н.Н. Пьезокерамические оболочки, поляризованные вдоль одного семейства координатных линий срединной поверхности// Препринт №204. Институт Проблем Механики АН СССР. М.: 1982. 60с.
16. Устинов Ю.А., Шленев М.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода плит и оболочек// Межвузовский сборник "Расчет оболочек и пластин". Ростов-на-Дону. Изд-во Ростовского Инженерно-строительного ин-та. 1978. С.3-27.
17. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении, 1992. 260с.
18. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. 214с.
19. Саркисян С.О. Краевые задачи несимметричной теории упругости для тонких пластин // Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147.

20. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек //Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. Вып. 2. С.325-343.
21. Саркисян С.О. Построение математической модели микрополярных упругих тонких стержней асимптотическим методом //Изв. высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. №5. С.31-37.
22. Саркисян С.О. Асимптотический метод построения математических моделей микрополярных упругих тонких пластин //«Ученые записки». Гюмрийский государственный педагогический институт им. М.Налбандяна. 2013. Серия А. №1. С.7-37.
23. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Докл. АН России. 2011. Т.436. № 2. С.195-198.
24. Саркисян А.А. Математическая модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких стержней// Докл. НАН Армении. 2011. Т.11. №4. С.342-351.
25. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний // Акустический журнал. 2011. Т.57. №4. С.461-469.
26. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Модель колебания микрополярных упругих тонких оболочек // Акустический журнал. 2013. Т.59. № 2. С.170-181.
27. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.

Сведение об авторе:

Жамакочян Кнарик Араратовна – аспирант кафедры мат.анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.

Тел: (093)873294.

E-mail: knarikzhamakochyan@mail.ru.

Поступила в редакцию 31.05.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика

Содержание 66 тома 2013 г. «Известия НАН Армении. Механика»

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

С О Д Е Р Ж А Н И Е

CONTENTS

Заказ № 486.
Тираж 150.
Сдано в производство 12.12.2013г.
Формат 70 х 100 $^1/_{16}$. 4.5 печ. л.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН Армении
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24