

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՏԵԿՏՐԱԿԱՆԱԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ԴԻՎԻԶԻՆ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
ЕХАНИКА
MECHANICS

2013

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Шагинян С.С.

Ключевые слова: ортотропная плоскость, задача Римана, разрез, смешанная задача

Key words: orthotropic plane, the Riemann problem, slit, mixed boundary value problem

Հակոբյան Վ.Ն., Դաշտոյան Լ.Լ., Շահինյան Ս.Ս.

Ճեղք պարունակող օրթոտրոպ հարթության համար մի խառը խնդրի մասին

Վնասվածքներ պարունակող առաձգական իզոտրոպ և օրթոտրոպ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակի ուսումնասիրությանը նվիրված են հայրենական և արտասահմանյան հետազոտողների բազմաթիվ աշխատանքներ: Մասնավորապես [1] մենագրության մեջ ուսումնասիրված է օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղություններից մեկի վրա վնասվածքներ պարունակող օրթոտրոպ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը: Այդ արդյունքների հիման վրա այս աշխատանքում կառուցված է օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղություններից մեկի վրա ճեղք պարունակող օրթոտրոպ հարթության համար մի խառը խնդրի փակ լուծումը, երբ ճեղքի ափերի հակադիր տեղամասերում գործում են հարթ հիմքերով բացարձակ կոշտ դրոշմներ:

Hakobyan V., Dashtoyan L., Shahinyan S.S.

One mixed boundary value problem for orthotropic plane with slit

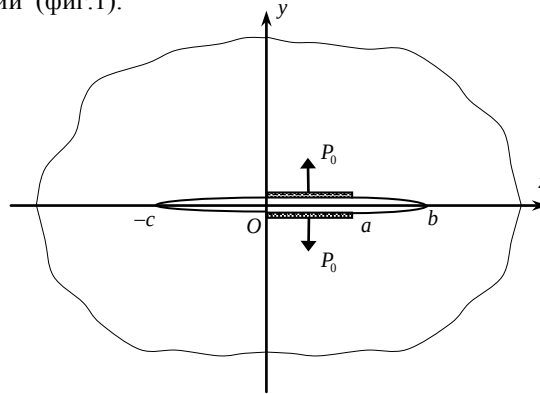
Numerous works are devoted to research of stress state of the elastic isotropic or orthotropic plane with defects on one of principal direction of orthotropy. In present paper the exact solution of one mixed boundary value problem for orthotropic plane with slit on one of principal direction of orthotropy, when the same absolutely rigid stamps with flat base are acting on the opposite edges of slit, is constructed.

Изучению плоско-деформированного состояния упругой изотропной или ортотропной плоскости с дефектами на одном из главных направлений ортотропии посвящено огромное количество работ отечественных и зарубежных исследователей. В частности, в монографии [1] исследовано плоско-деформированное состояние упругой ортотропной плоскости с дефектами на одном из главных направлений ортотропии. На основе этих результатов в настоящей работе построено точное решение одной смешанной задачи для ортотропной плоскости с разрезом на одном из главных направлений ортотропии, на одинаковых участках противоположных берегов которого действуют одинаковые абсолютно жёсткие штампы с плоскими основаниями.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть ортотропная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат Oxy , направления осей которой совпадают с главными направлениями ортотропии материала, на линии $y = 0$ на интервале $(-c, b)$ расслаблена разрезом

и деформируется под воздействием двух одинаковых абсолютно жёстких штампов с плоскими основаниями, сцеплёнными к берегам разреза на участках $(0, a)$ ($a < b$) и сообщаящим точкам берегов разреза постоянные вертикальные смещения $\pm\delta/2$. Полагаем, что участок берегов разреза $L = (-c, 0) \cup (a, b)$ свободен от напряжений (фиг.1).



Фиг.1.

Ставится задача: определить контактные напряжения, действующие под штампами, коэффициент интенсивности напряжений в концевых точках разреза $x = -c$ и $x = b$, а также раскрытие разреза.

Следует отметить, что замкнутое решение аналогичной задачи для изотропной плоскости, в случае, когда она симметрична также относительно оси Oy и под штампами отсутствуют касательные напряжения, построено в работе [2].

Мысленно разделим плоскость на верхнюю и нижнюю полуплоскости и снабдим индексами "+" и "-" компоненты тензора напряжений и смещений соответствующих полуплоскостей. Тогда, сохранив все обозначения работы [1], поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(+)}(x, +0) &= \sigma_y^{(-)}(x, -0) \\ \tau_{xy}^{(+)}(x, +0) &= \tau_{xy}^{(-)}(x, -0) \quad (x \notin (-c, b)) \\ U_+(x, +0) &= U_-(x, -0) \\ V_+(x, +0) &= V_-(x, -0)\end{aligned}\tag{1.1a}$$

$$\begin{aligned}U_{\pm}(x, \pm 0) &= 0; & (0 < x < a) \\ V_{\pm}(x, \pm 0) &= \pm\delta/2; & (0 < x < a) \\ \sigma_y^{(\pm)}(x, \pm 0) &= 0; & (x \in L) \\ \tau_{xy}^{(\pm)}(x, \pm 0) &= 0 & (x \in L)\end{aligned}\tag{1.1b}$$

Введя аналитические функции

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-c}^b \frac{\chi(s) + k_j W'(s)}{s - z} ds; \quad \left(k_j = \frac{2(-1)^{j+1} c_1}{\alpha - 2(-1)^j a_1} \right); \quad (j=1, 2) \quad (1.2)$$

и используя результаты работы [1], поставленную граничную задачу сформулируем в виде следующей однородной задачи Римана для двух функций:

$$\begin{cases} \Omega_1^+(x) = v_1(x) \Omega_2^-(x) \\ \Omega_2^+(x) = v_2(x) \Omega_1^-(x) \end{cases} \quad (-c < x < b) \quad (1.3)$$

где $\Omega_j^\pm(x)$ ($j=1, 2$) – граничные значения аналитических функций $\Omega_j(z)$ соответственно на верхнем и нижнем берегах интервала $(-c, b)$, а функции $v_j(x)$ и постоянные a_1, c_1 и v даются формулами:

$$v_1(x) = \begin{cases} v & x \in L \\ -1 & (0 < x < a) \end{cases}; \quad v_2(x) = \begin{cases} 1/v & x \in L \\ -1 & (0 < x < a) \end{cases};$$

$$a_1 = \frac{(a_{12} - \sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1 + \mu_2)}; \quad c_1 = \frac{\mu_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1 + \mu_2)}; \quad v = \frac{\alpha - 2a_1}{\alpha + 2a_1}.$$

Функции же $W'(x)$ и $\chi(x)$ – комплексные комбинации производных от скачков смещений $U(x)$, $V(x)$ и скачков напряжений $\sigma(x)$, $\tau(x)$, записываются в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} W'(x) &= U'(x) + i\alpha V'(x); \quad \chi(x) = \sigma(x) - i\alpha\tau(x); \\ \sigma_y^{(+)}(x, +0) - \sigma_y^{(-)}(x, -0) &= \sigma(x); \quad \tau_{xy}^{(+)}(x, +0) - \tau_{xy}^{(-)}(x, -0) = \tau(x); \\ U_+(x, +0) - U_-(x, -0) &= U(x); \quad V_+(x, +0) - V_-(x, -0) = V(x); \\ &(-c < x < b); \end{aligned}$$

При этом постоянные a_{ij} связаны с физическими постоянными материала плоскости E_1, E_2, v_{12}, v_{21} и μ_{12} формулами:

$$a_{11} = E_1 \left[\mu_{12} \left(1 - v_{12}^2 E_2 / E_1 \right) \right]^{-1}; \quad a_{22} = a_{11} E_2 / E_1; \quad a_{12} = v_{12} a_{22} = v_{21} a_{11}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению краевой задачи Римана для функций $\Omega_j(x)$ ($j=1, 2$). При этом должны быть удовлетворены

также условия непрерывности смещений в концевых точках разреза и условия самоуравновешанности нагрузок, приложенных к берегам разреза:

$$\int_{-c}^b W'(x) dx = 0; \quad \int_{-c}^b \chi(x) dx = 0 \quad (1.4)$$

Вместе с (1.4) справедливо также условие

$$\int_{-c}^0 W'(x) dx = \delta \quad (1.5)$$

2. Решение системы определяющих уравнений

Перейдём к решению краевой задачи Римана для функций (1.3) при условиях (1.4) и (1.5). Для этого заметим, что в рассматриваемом случае функции $\Omega_j(z)$ при больших значениях аргумента z имеют порядок z^{-2} . Действительно,

$$\Omega_j(z) = \frac{-1}{2\pi iz} \int_{-c}^b [\chi(s) + k_j W'(s)] ds + O(1/z^2) = O(1/z^2) + \dots \quad (j=1, 2).$$

Исходя из этого, по формулам, приведённым в работе [3], запишем общее решение системы (1.3). Получим следующие выражения:

$$\Omega_j(z) = \frac{(-1)^{j+1} C e^{\frac{(-1)^{j+1}}{2} \Gamma(z)}}{\sqrt{z(z+c)(z-a)(z-b)}}; \quad (j=1, 2) \quad (2.1)$$

где

$$\Gamma(z) = \ln v - \frac{\ln v^2 B(z)}{2\pi i} \int_0^a \frac{dt}{B^+(t)(t-z)}; \quad \left(B(z) = \sqrt{(z+c)(z-b)} \right), \quad (2.2)$$

а C – неизвестная постоянная, подлежащая определению.

Для определения постоянной C используем соотношение (1.5). Чтобы удовлетворить этому соотношению, определим комплексные комбинации скачков напряжений и смещений. Учитывая представления функций $\Omega_j(z)$ интегралом типа Коши, формулы Колосова-Мусхелишвили [4] и систему (1.3), найдём

$$W'(x) = \frac{1}{k_1} \begin{cases} \Omega_1^+(x) - \Omega_1^-(x) & (x \in L) \\ 0 & (0 < x < a) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\chi(x) = \begin{cases} \Omega_1^+(x) - \Omega_1^-(x) & (0 < x < a) \\ 0 & (x \in L) \end{cases} \quad (2.4)$$

С другой стороны, так как

$$\Gamma^{\pm}(x) = \ln v - \frac{\ln v^2 B^{\pm}(x)}{2\pi i} \int_0^a \frac{dt}{B^{\pm}(t)(t-z)} = \begin{cases} \ln v \mp 2p_1(x) & (x \in L) \\ \mp 2p_1(x) & (0 < x < a) \end{cases};$$

$$\Omega_1^{\pm}(x) = \begin{cases} \mp \frac{\sqrt{v} \exp(\mp p_1(x))}{i\sqrt{\omega(x)}}; & (-c < x < 0) \\ -\frac{\exp(\mp p_1(x))}{\sqrt{\omega(x)}}; & (0 < x < a) \\ \pm \frac{\exp(\mp p_1(x))}{i\sqrt{v\omega(x)}}; & (a < x < b) \end{cases}$$

где $\sqrt{\quad}$

$$p_1(x) = \frac{\ln v B^+(x)}{2\pi i} \int_0^a \frac{dt}{B^+(t)(t-z)} = \ln r^{i\gamma}(x);$$

$$\omega(x) = \sqrt{|x(x+c)(x-a)(x-b)|};$$

$$r(x) = \frac{\left| x \left[(a-p)(p-x) + k^2 + \sqrt{l(x+c)(b-x)} \right] \right|}{(x-a) \left[px + bc + \sqrt{bc(x+c)(b-x)} \right]};$$

$$k = \frac{b+c}{2}; \quad p = \frac{b-c}{2}; \quad l = (a+c)(b-a); \quad \gamma = \frac{\ln v}{2\pi},$$

то по формулам (2.3) и (2.4) для комплексных комбинаций скачков напряжений и смещений получим выражения:

$$W'(x) = \frac{2iC\sqrt{v}}{k_1} \begin{cases} J(x) & (-c < x < 0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ -J(x) & (a < x < b) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\left(J(x) = \frac{\cos(\gamma \ln r(x))}{\sqrt{\omega(x)}} \right)$$

$$\chi(x) = \frac{2iC\sqrt{\nu} \sin(\gamma \ln r(x))}{\sqrt{\omega(x)}} \quad (0 < x < a) \quad (2.6)$$

Подставляя значение $\sqrt{W'(x)}$ из (2.5) в соотношение (1.5) для искомой постоянной C получим

$$C = \frac{\alpha k_1 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0}; \quad \left(I_0 = \int_{-c}^0 J(x) dx \right).$$

Из формулы (2.6), учитывая симметричность задачи относительно оси Ox , можем записать

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(+)}(x, +0) &= \sigma_y^{(-)}(x, -0) \quad (0 < x < a) \\ \tau_{xy}^{(+)}(x, +0) &= -\tau_{xy}^{(-)}(x, -0) = -\frac{\delta k_1 \sin(\gamma \ln r(x))}{2I_0 \sqrt{\nu \omega(x)}} \quad (0 < x < a) \end{aligned}$$

Далее, для определения нормальных контактных напряжений используем формулу

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, 0) - i\alpha \tau_{xy}^{(\pm)}(x, 0) = \Omega_1^{\pm}(x) = -\frac{\alpha k_1 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0} \frac{r^{\mp i\gamma}(x)}{\sqrt{\omega(x)}} \quad (0 < x < a),$$

которую несложно получить из соотношения (1.1.11) работы [1] при помощи системы (1.3). По этой формуле находим

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, 0) = -\frac{\alpha k_1 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0} J(x); \quad (0 < x < a). \quad (2.7)$$

Теперь определим скачок вертикальных смещений точек берегов разреза. С этой целью интегрируем соотношения (2.5). Тогда, для вертикальных смещений точек берегов разреза получим

$$V_+(x) = -V_-(x) = \frac{W(x)}{i\alpha} = \frac{\delta}{2} \begin{cases} \frac{1}{I_0} \int_{-c}^x J(x) dx & (-c < x < 0) \\ 1 & (0 < x < a) \\ 1 - \frac{1}{I_0} \int_a^x J(x) dx & (a < x < b) \end{cases}$$

Выясним, под какими одинаковыми сосредоточенными нагрузками P_0 штампы получают только вертикальные смещения и определим связь между ними и жёсткими смещениями штампов $\delta/2$. Для этого используем второе уравнение из (1.4). Учитывая симметричность задачи относительно оси Ox и разделяя действительную и мнимую части этого уравнения, получим

$$\int_0^a \tau_y^{(\pm)}(x, 0) dx = 0; \quad \int_0^a \sigma_y^{(\pm)}(x, 0) dx = -P_0.$$

Подставляя значения $\sigma_y^{(\pm)}(x, 0)$, из (2.7) найдём

$$P_0 = \frac{\alpha k_1 I_1 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0}; \quad \left(I_1 = \int_0^a J(x) dx \right).$$

Таким образом, штампы получают только нормальные смещения $\delta/2$ под воздействием одинаковых сосредоточенных нормальных нагрузок P_0 . Нетрудно также определить точки приложения X_0 этих нагрузок, записав уравнение равновесия моментов, действующих на штампы сил:

$$\int_0^a x \sigma_y^{(\pm)}(x, 0) dx = -x_0 P_0.$$

Отсюда для x_0 получим выражение

$$x_0 = \frac{\alpha k_1 I_2 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0 P_0}; \quad \left(I_2 = \int_0^a x J(x) dx \right).$$

Вычислим также коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разреза $x = -c$ и $x = b$. С этой целью определим комплексную комбинацию напряжений на линии $y = 0$ вне разреза. Имеем [1]

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, 0) - i\alpha \tau_{xy}^{(-)}(x, 0) = -\frac{b_1 k_2}{\alpha} [\Omega_1(x) - \nu \Omega_2(x)] \quad (b < x < -c)$$

$$\left(b_1 = \frac{(1 + \sqrt{a_{11} a_{22}})}{2\mu_{12} \sqrt{a_{11} a_{22}} (\mu_1 + \mu_2)} \right)$$

Учитывая, что вне разреза $(-c, b)$

$$\Omega_j(x) = \frac{(-1)^{j+1} C e^{\frac{(-1)^{j+1}}{2} \Gamma(x)}}{\sqrt{\omega(x)}} \quad (j = 1, 2),$$

где

$$\Gamma(x) = \ln v + \frac{\text{sign}(x)}{2\pi} \left\{ \sqrt{\frac{k + (a-p)q(x)}{|kq(x) + a - p|}} - \arcsin \frac{k - pq(x)}{|kq(x) - p|} \right\}; \quad (2.8)$$

$$\left(q(x) = \frac{p-x}{k}; \quad |q(x)| > 1 \right)$$

— действительная величина, можем записать:

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, 0) = -\frac{b_1 k_2 C}{\alpha} \frac{[\exp(\Gamma(x)/2) - v \exp(-\Gamma(x)/2)]}{\sqrt{\omega(x)}} \quad (2.9)$$

$$\tau_{xy}^{(\pm)}(x, 0) = 0 \quad (b \nless x < -c)$$

Тогда, для коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разреза $x = -c$ и $x = b$ получим выражение

$$K_I(-c) = \sqrt{2\pi} \lim_{|x| \rightarrow -c-0} \sqrt{|c+x|} [\sigma_y^{\pm}(x, 0) - i\alpha \tau_{xy}^{\pm}(x, 0)] =$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi} b_1 k_1 k_2 \delta}{I_0 \sqrt{c(a+c)(b+c)}} \quad (2.10)$$

$$K_I(b) = \sqrt{2\pi} \lim_{|x| \rightarrow b+0} \sqrt{x-b} [\sigma_y^{\pm}(x, 0) - i\alpha \tau_{xy}^{\pm}(x, 0)] =$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi} b_1 k_1 k_2 \delta}{I_0 \sqrt{b(b+c)(b-a)}}. \quad (2.11)$$

Отметим, что при выводе формул (2.10) и (2.11) было использовано значение интеграла [5]

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{(t+c)(b-t)(t-x)}} = \frac{\left\{ \arcsin \frac{k + (a-p)q(x)}{|kq(x) + a - p|} - \arcsin \frac{k - pq(x)}{|kq(x) - p|} \right\}}{\sqrt{|(x+c)(b-x)|}},$$

$$(b < x < -c)$$

и соотношения $\Gamma(-c) = \Gamma(b) = \ln v$.

Нетрудно убедиться, что в случае, когда задача симметрична относительно центра включения, т.е. когда $c = b - a$, то коэффициенты интенсивностей разрушающих напряжений в концевых точках разреза $x = -c$ и $x = b$ одинаковые

$$K_{\varphi}(-x) = b_I(x) = -\frac{\sqrt{2\pi}b_1k_1k_2\delta}{I_0\sqrt{b(2b-a)(b-a)}}.$$

Заметим также, что из полученных результатов при помощи предельного перехода легко определить решения аналогичной задачи для ортотропной плоскости с полубесконечным разрезом. Действительно, в полученных выражениях для раскрытия разреза, контактных напряжений и коэффициентов интенсивностей, устремляя b к бесконечности, найдём

$$V_+(x) = -V_-(x) = \frac{\delta}{2} \begin{cases} \int_{-c}^x \frac{\cos(\gamma \ln r_1(x)) dx}{I_0^* \sqrt{|x(x+c)(a-x)|}} & (-c < x < 0) \\ 1 & (0 < x < a) \\ 1 - \int_a^x \frac{\cos(\gamma \ln r_1(x))}{I_0^* \sqrt{|x(x+c)(a-x)|}} & (a < x < \infty) \end{cases};$$

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, 0) = -\frac{\alpha k_1 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0^*} \frac{\cos(\gamma \ln r_1(x))}{\sqrt{|x(x+c)(a-x)|}}; \quad (0 < x < a)$$

$$\tau_{xy}^{(\pm)}(x, 0) = \mp \frac{k_1 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0^*} \frac{\sin(\gamma \ln r_1(x))}{\sqrt{|x(x+c)(a-x)|}} \quad (0 < x < a).$$

$$K_I(-c) = -\frac{\sqrt{2\pi}b_1k_1k_2\delta}{I_0^* \sqrt{c(a+c)}}.$$

Здесь введены обозначения:

$$r_1(x) = \left| \frac{x \left[a + x + 2c + 2\sqrt{(x+c)(a+c)} \right]}{(x-a) \left[x + 2c + 2\sqrt{c(x+c)} \right]} \right|; \quad I_0^* = \int_{-c}^0 \frac{\cos(\gamma \ln r_1(x)) dx}{\sqrt{|x(x+c)(a-x)|}}$$

Проведён численный анализ рассматриваемой задачи в случае изотропной плоскости, т.е. в случае, когда

$$a_{jj} = a_{12} + 2 = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}; \quad \mu_{12} = \frac{E}{2(1+\sigma)}; \quad a_j = -\frac{(1-2\sigma)}{4(1-\sigma)}; \quad b_j = \frac{(1+\sigma)(3-4\sigma)}{4E(1-\sigma)};$$

$$c_j = \frac{E}{4(1-\sigma^2)}; \quad \mu_j = \alpha = 1; \quad k_1 = \frac{E}{(1+\sigma)}; \quad \nu = 3-4\sigma; \quad (j=1,2),$$

где σ и E – соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга для изотропного тела.

Изучены закономерности изменения приведённых контактных напряжений $\sigma_*(x) = -c\sigma_y^+(x)/P_0$; $\tau_*(x) = c\tau_y^+(x)/P_0$, приведённой координаты точки

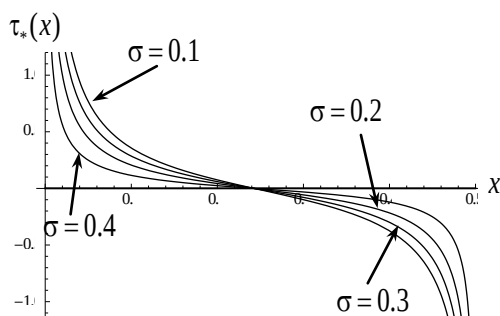
приложения сосредоточенной нагрузки $x_0^* = x_0 / c$ и приведённого максимального раскрытия разреза $\delta^* = \delta / 2c$ в зависимости от изменения коэффициента Пуассона и параметра $\beta = b / c$, когда $\alpha = a / c = 0,5$ и $P_0 / cE = 0,1$.

Результаты вычислений показывают, что распределение нормальных контактных напряжений и приведённая координата точки приложения сосредоточенной нагрузки x_0^* при фиксированном значении параметра β практически не зависят от коэффициента Пуассона. Касательные же контактные напряжения под включениями и приведённое максимальное раскрытие разреза δ^* при увеличении коэффициента Пуассона уменьшаются (табл.1, фиг.2).

Таблица 1

σ	0,1	0,2	0,3	0,4
δ^*	0,18677	0,18438	0,17788	0,16672

В то же время распределение нормальных и касательных контактных напряжений, а также приведённое максимальное раскрытие разреза δ^* при фиксированном значении коэффициента Пуассона также мало зависят от параметра β .



Фиг.2

Изменения приведённых координат точек приложений сосредоточенных нагрузок x_0^* при фиксированном значении коэффициента Пуассона $\sigma = 0,3$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

β	0,8	1,5	3	10	20	100
x_0^*	0,26829	0,25	0,24280	0,23857	0,23773	0,23707

Как видно из этой таблицы, в случае симметрии задачи относительно оси Oy , сосредоточенные нагрузки должны быть приложены к центральным точкам штампов. Когда же симметрия относительно оси Oy отсутствует, сосредоточенные нагрузки должны быть приложены правее центральных точек штампов, если $c > b - a$, и левее центральных точек штампов, если $c < b - a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hakobyan V.N. Stress concentration near defects in homogeneous and compound bodies.-LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany 2011, 148p.
2. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitarian S.M and Mkrtchyan M.S. On a mixed problem for an elastic space with a crack under antiplane and plane deformations. // Collection of papers, dedicated to the memory of Professor P. S. Theocaris. Yerevan, «Gitutyun», NAS RA, 2005, pp. 114-124.
3. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. // ПММ. 1962. Т.26. Вып. 5. С.907-912.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды (специальные функции). М.: Наука, 1983. 750с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – д.ф.-м.н., директор Института механики НАН Армении,

e-mail: yhakobyan@sci.am

Даштоян Лилит Левоновна – к.ф.-м.н., учёный секретарь Института механики НАН РА,

e-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Шагинян Славик С. – к.ф.-м.н., доцент кафедры “Математики и графики” Ванадзорского филиала ГИУА

Поступила в редакцию 28.03.2013

УДК 539.3

**ИЗГИБ И КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ УСЛОВИЯХ
СВОБОДНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ МЕЖДУ СЛОЯМИ**

Белубекян М.В.

Ключевые слова: пластина, слой, скользящий контакт, расслоение.

Key words: plate, layer, smooth contact, lamination.

Բելուբեկյան Մ.Վ.

**Երկշերտ սալի ծռումը և տատանումները շերտերի միմյանց նկատմամբ ազատ սահելու
պայմանների դեպքում**

Ուղղանկյան սալերի երկու շերտերը եզրերով ամրակցված են: Երկու շերտերի միջև տեղի ունեն սահող կոնտակտի պայմանները: Կիրիովի վարկածի հիման վրա ստացված են ծռման և տատանումների հավասարումները: Որոշված են շերտերի մեկը մյուսից չանջատվելու պայմանները:

Belubekyan M.V.

The bending and vibration of two layered plate under the free sliding conditions between the layers

Two layer of the rectangular plate are clumped by the edges. There are smooth contact conditions between the edges. The equations of the bending and vibrations are obtained on the base of Kirchhoff hypotheses. The conditions under which layers do not laminate are determined.

Два слоя прямоугольных пластин закреплены по кромкам. Между слоями имеет место условие скользящего контакта. Получены уравнения изгиба и колебаний на основе гипотезы Кирхгофа. Определены условия, при которых слои пластин не отделяются друг от друга.

1. Большое количество работ посвящено исследованию упругих многослойных пластин при различных силовых воздействиях. Известные работы, в основном, посвящены задачам с условиями жёсткого (полного) контакта между слоями [1,2]. Однако, возможны случаи, когда склеивание слоёв (или сваривание), например, металл–полимер, не эффективно. Такие пластины скрепляются по контуру болтами. Для исследования напряжённо-деформированного состояния таких пластин при статических нагрузках в работах [3,4] используется асимптотический метод интегрирования.

В настоящей работе рассматриваются двуслойные пластинки при условиях скользящего контакта между слоями на основе гипотезы Кирхгофа для каждого слоя в отдельности.

Рассматривается двухслойная пластинка с постоянными толщинами слоёв h_1 и

h_2 . В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) слой с индексом (1)

занимает область $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq y \leq b$, $0 < z \leq h_1$, а слой с индексом (2) –

область $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq y \leq b$, $-h_2 \leq z < 0$.

Уравнения колебания слоёв имеют вид [1]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = \rho_k \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2 \quad (1.1)$$

Обозначения в (11) общеизвестны. Однако, в дальнейшем вместо (x_1, x_2, x_3) будут использованы (x, y, z) .

Предполагается, что внешняя лицевая сторона слоя с индексом (1) находится под нормальной нагрузкой

$$\sigma_{33}^{(1)} = -q(x, y, t), \quad \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{32}^{(1)} = 0 \quad \text{при } z = h_1 \quad (1.2)$$

Внешняя сторона второго слоя свободна

$$\sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)} = \sigma_{32}^{(2)} = 0 \quad \text{при } z = -h_2 \quad (1.3)$$

Принимается, что на стыке слоёв имеют место условия скользящего контакта

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{31}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{32}^{(1)} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (1.4)$$

Допущения гипотезы Кирхгофа относительно компонент упругих перемещений слоёв пластинки принимаются в виде

$$u_1^{(k)} = u_k - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2^{(k)} = v_k - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_3^{(k)} = w \quad (1.5)$$

где u_k, v_k, w являются функциями от x, y, t . Затем, в соответствии с теорией Кирхгофа, уравнения (1.1) осредняются. При этом, уравнения в области слоя с индексом (1) интегрируются в пределах от 0 до h_1 , а уравнения в области с индексом (2) – в пределах от $-h_2$ до 0. В результате получаются следующие уравнения относительно усилий и моментов (с учётом граничных условий (1.2)–(1.4) и представлений (1.5))

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial S^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial y} &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial S^{(2)}}{\partial y} &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial S^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial T_2^{(2)}}{\partial y} &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} - q(x, y) - \sigma_{33}(0) &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial y} - N_1^{(1)} &= \frac{\rho_1 h_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial H^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_2^{(1)}}{\partial y} - N_2^{(1)} &= \frac{\rho_1 h_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \sigma_{33}(0) &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
\frac{\partial M_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial y} - N_1^{(2)} &= -\frac{\rho_2 h_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial H^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial M_2^{(2)}}{\partial y} - N_2^{(2)} &= -\frac{\rho_2 h_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Выражения для усилий и моментов из (1.6) и (1.7) имеют вид:

$$\begin{aligned}
T_1^{(1)} &= \int_0^{h_1} \sigma_{11}^{(1)} dz = C_1 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \\
T_2^{(1)} &= \int_0^{h_1} \sigma_{22}^{(1)} dz = C_1 \left[\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \\
S^{(1)} &= \int_0^{h_1} \sigma_{12}^{(1)} dz = \frac{1-v}{2} C_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\
T_1^{(2)} &= \int_{-h_2}^0 \sigma_{11}^{(2)} dz = C_2 \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \\
T_2^{(2)} &= \int_{-h_2}^0 \sigma_{22}^{(2)} dz = C_2 \left[\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \\
S^{(2)} &= \int_{-h_2}^0 \sigma_{12}^{(2)} dz = \frac{1-v}{2} C_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\
N_1^{(1)} &= \int_0^{h_1} \sigma_{13}^{(1)} dz, \quad N_1^{(2)} = \int_0^{h_1} \sigma_{23}^{(1)} dz, \\
N_1^{(2)} &= \int_{-h_2}^0 \sigma_{13}^{(2)} dz, \quad N_2^{(2)} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{23}^{(2)} dz,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
M_1^{(1)} &= \int_0^{h_1} z \sigma_{11}^{(1)} dz = K_1 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2h_1}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \\
M_2^{(1)} &= \int_0^{h_1} z \sigma_{22}^{(1)} dz = K_1 \left[\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2h_1}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{(1)} &= \int_0^{h_1} z \sigma_{12}^{(1)} dz = \frac{1-v_1}{2} K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{4h_1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\
M_1^{(2)} &= \int_{-h_2}^0 z \sigma_{11}^{(2)} dz = -K_2 \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{2h_2}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \\
M_2^{(2)} &= \int_{-h_2}^0 z \sigma_{22}^{(2)} dz = -K_2 \left[\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{2h_2}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \\
H^{(2)} &= -\frac{1-v_2}{2} K_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{4h_2}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned}$$

В (1.8) приняты обозначения:

$$C_k = \frac{E_k h_k}{1-v_k^2}, \quad K_k = \frac{E_k h_k^2}{2(1-v_k^2)} \quad (1.9)$$

2. Подстановка (1.8) в (1.6) приводит к следующей системе уравнений относительно перемещений:

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 + \theta_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \frac{h_1}{1-v_1} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w &= \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\Delta v_1 + \theta_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \frac{h_1}{1-v_1} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w &= \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
\Delta u_2 + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{h_2}{1-v_2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\Delta v_2 + \theta_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{h_2}{1-v_2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{где } \theta_k = \frac{1+v_k}{1-v_k}, \quad c_{tk}^2 = \frac{E_k}{2(1+v_k)\rho_k} \quad (2.2)$$

Подстановка выражений для $M_1^{(k)}$, $M_2^{(k)}$ и $H^{(k)}$ из (1.8) во второе, третье, пятое и шестое уравнения системы (1.7) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}
&\frac{1-v_1}{2} K_1 \left[\Delta u_1 + \theta_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{2h_1}{3} K_1 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \\
&- N_1^{(1)} = \frac{\rho_1 h_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1-v_1}{2} K_1 \left[\Delta v_1 + \theta_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{2h_1}{3} K_1 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \\
& - N_2^{(1)} = \frac{\rho_1 h_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
& \frac{1-v_2}{2} K_2 \left[\Delta u_2 + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{2h_2}{3} K_2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + \\
& + N_1^{(2)} = \frac{\rho_2 h_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& \frac{1-v_2}{2} K_2 \left[\Delta v_2 + \theta_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{2h_2}{3} K_2 \Delta w + \\
& + N_2^{(2)} = \frac{\rho_2 h_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) определяют перерезывающие усилия $N_1^{(k)}$, $N_2^{(k)}$ посредством перемещений u_k , v_k , w . В классической теории пластин члены в правых частях уравнений (2.3) обычно пренебрегаются (моменты инерции вращения).

Определяя $N_1^{(k)}$, $N_2^{(k)}$, с учётом указанного пренебрежения и подставляя в первое и четвёртое уравнения системы (1.7) получим

$$\begin{aligned}
& \frac{2h_1}{3} K_1 \Delta^2 w - K_1 \Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q(x, y) - \sigma_{33}(0) \\
& \frac{2h_2}{3} K_2 \Delta^2 w + K_2 \Delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sigma_{33}(0)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом, задача привелась к решению системы из шести уравнений (2.1), (2.4) относительно шести искоемых функций u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , w , $\sigma_{33}(0)$ от переменных x, y, t .

Если из уравнений (2.4) исключить $\sigma_{33}(0) = \sigma_{33}(0, x, y, t)$, то придём к уравнению

$$D \Delta^2 w - \Delta \left[K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - K_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q(x, y, t) \tag{2.5}$$

где

$$D = \frac{2}{3} (h_1 K_1 + h_2 K_2), \quad m = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 \tag{2.6}$$

Из уравнений (2.1) и (2.5) следует, что задачи планарных и изгибных колебаний не отделяются.

3. Граничные условия на краях пластины получаются при помощи осреднения условий задачи в трёхмерной постановке [5].

I. Граничные условия закреплённого края в трёхмерной постановке

$$u_1^{(k)} = 0, u_2^{(k)} = 0, u_3^{(k)} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \quad (3.1)$$

с учётом (1.5) и после осреднения приводятся к виду

$$u_1 = 0, v_1 = 0, u_2 = 0, v_2 = 0, w = 0, \partial w / \partial x = 0 \quad (3.2)$$

II. Граничным условиям облегчённой заделки

$$u_1^{(k)} = 0, \sigma_{12}^{(k)} = 0, u_3^{(k)} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \quad (3.3)$$

будут соответствовать условия

$$u_1 = 0, \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, u_2 = 0, \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

III. Осреднение условий стеснённого скользящего контакта

$$u_1^{(k)} = 0, u_2^{(k)} = 0, \sigma_{13}^{(k)} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \quad (3.5)$$

даёт

$$u_1 = 0, v_1 = 0, u_2 = 0, v_2 = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (3.6)$$

IV. Шарнирное закрепление (условия Навье)

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0, u_2^{(k)} = 0, u_3^{(k)} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \quad (3.7)$$

Условиям (3.7) соответствуют осреднённые условия

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, v_1 = 0, \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, v_2 = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.8)$$

V. Скользящий контакт. Условиям трёхмерной задачи

$$u_1^{(k)} = 0, \sigma_{12}^{(k)} = 0, \sigma_{13}^{(k)} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \quad (3.9)$$

соответствуют условия

$$u_1 = 0, \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, u_2 = 0, \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (3.10)$$

VI. Условиям свободного опирания

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0, \sigma_{12}^{(k)} = 0, u_3^{[k]} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \quad (3.11)$$

соответствуют осреднённые условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

VII. В случае граничных условий стеснённого свободного края

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0, u_2^{(k)} = 0, \sigma_{13}^{(k)} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \quad (3.13)$$

число осреднённых условий оказывается больше, чем требуется для корректной постановки задачи. Как и в случае классической теории пластин для граничных условий свободного края, здесь также необходимо использовать сочетание условий.

VIII. Аналогично предыдущему случаю, число осреднённых граничных условий оказывается больше и в случае свободного края

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0, \sigma_{12}^{(k)} = 0, \sigma_{13}^{(k)} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \quad (3.14)$$

4. Для приведённой выше модели исследования задач изгиба и колебаний двухслойной пластинки исключается возможность отделения слоёв друг от друга в процессе деформации. Возможность отделения слоёв (расслоение) проверяется после решения задачи и определения напряжения $\sigma_{33}(0) = \sigma_{33}(x, y, 0, t)$. Условие того, что слои не расслаиваются (или условие корректности модели) есть неравенство

$$\sigma_{33}(0) \leq 0 \quad (4.1)$$

Пусть пластинка изгибается в виде цилиндрической поверхности под действием равномерно распределённой нагрузки

$$q = q_0 = \text{const} > 0 \quad (4.2)$$

С учётом независимости искомых функций от координаты y и времени t , уравнения (2.1) и (2.5) приводятся к виду

$$\begin{aligned} u_1'' - 0.5h_1 w''' &= 0, \quad v_1'' = 0 \\ u_2'' + 0.5h_2 w''' &= 0, \quad v_2'' = 0 \\ D_* w^{IV} &= -q_0, \quad D_* = 0.25D \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из второго уравнения системы (2.4) получаем

$$\sigma_{33}(0) = \frac{2h_2}{3} K_2 w^{IV} + K_2 u_2''' \quad (4.4)$$

Используя в (4.4) выражения для w^{IV} и u_2''' из (4.3), находим

$$\sigma_{33}(0) = -\frac{h_2 K_2}{h_1 K_1 + h_2 K_2} q_0 \quad (4.5)$$

Для данной задачи, независимо от граничных условий на кромках пластины, нормальное напряжение на стыке пластин сжимающее, поэтому расслоение не будет иметь место.

Возникает вопрос: возможно ли отделение слоёв в случае, когда на двухслойную систему действует лишь объёмная сила веса (сила притяжения).

В этом случае из уравнений систем (1.6) и (1.7) изменяются только второе и четвёртое уравнения системы (1.7), которые получаются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} - \rho_1 h_1 g - \sigma_{33}(0) &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} - \rho_2 h_2 g + \sigma_{33}(0) &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для приведённой выше задачи цилиндрического изгиба из второго уравнения (4.6) нетрудно получить

$$\sigma_{33}(0) = \frac{2h_2}{3} K_2 w^{IV} + K_2 u_2''' + \rho_2 h_2 g \quad (4.7)$$

Из системы (4.3) следует, что

$$W^{IV} = -mgD_*^{-1}, \quad u_2''' = -0.5h_2 w^{IV} \quad (4.8)$$

Подстановка (4.8) в (4.7) приводит к выражению

$$\sigma_{33}(0) = \frac{gh_1h_2}{h_1K_1 + h_2K_2} (\rho_2K_1 - \rho_1K_2) \quad (4.9)$$

Условие неотделения слоёв будет

$$\rho_2K_1 - \rho_1K_2 < 0 \quad (4.10)$$

В частности, из (4.10) при $K_1 = K_2$ получается естественное условие $\rho_2 < \rho_1$ отсутствия расслоения. Согласно выражениям для K_k , неравенство (4.10) существенно зависит от толщин слоёв пластинок.

Предлагается наличие условия (4.10) считать критерием живучести, т.к. в этом случае вероятность расслоения элемента конструкции из двухслойной пластины будет существенно меньше при действии нормальной нагрузки сложного вида.

На основе системы (4.3) можно получить решения многочисленных задач. Ниже приводятся несколько частных примеров. Пусть кромки пластины $x = 0$ и $x = a$ закреплены. Граничные условия закреплённого края для одномерной задачи, согласно (3.2), имеют вид:

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad w = 0, \quad \partial w / \partial x = 0 \quad (4.11)$$

Решение системы (4.3) при граничных условиях (4.11) будет:

$$\begin{aligned} u_1 &= -p^2 h_1 x \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \\ u_2 &= -p^2 h_2 x \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \\ w &= -p^2 x^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2, \quad p^2 = \frac{q_0 a^2}{24D_*} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Граничные условия шарнирного закрепления (3.8) следующие:

$$u_1' = 0, \quad v_1 = 0, \quad u_2' = 0, \quad v_2 = 0, \quad w = 0, \quad w'' = 0 \quad (4.13)$$

Решение системы (4.3), удовлетворяющее при $x = 0$ условиям закрепления (4.11), а при $x = a$ условиям (4.13), получается в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{3}{2} p^2 h_1 x \left(1 - \frac{5x}{2a} + \frac{4x^2}{3a^2}\right) \\ u_2 &= \frac{3}{2} p^2 h_2 x \left(1 - \frac{5x}{2a} + \frac{4x^2}{3a^2}\right) \\ w &= -\frac{3}{2} p^2 x^2 \left(1 - \frac{5x}{3a} + \frac{2x^2}{3a^2}\right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

В случае свободного края, в отличие от двумерной задачи, число граничных условий соответствует условию корректности задачи и имеет вид

$$u_1' = 0, \quad v_1' = 0, \quad u_2' = 0, \quad v_2' = 0, \quad w'' = 0, \quad w''' = 0 \quad (4.15)$$

Задача для консольной пластинки, край $x = 0$ закреплён, край $x = a$ свободен, имеет решение

$$\begin{aligned} u_1 &= -6p^2 h_1 x \left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{3a^2} \right) \\ u_2 &= 6p^2 h_2 x \left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{3a^2} \right) \\ w &= -6p^2 x^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{x}{a} + \frac{1}{6} \frac{x^2}{a^2} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

В случае, когда пластинка изгибается под действием только собственного веса, решения (4.12), (4.14), (4.16) остаются в силе при замене в выражении p^2 из (4.12) q_0 на mg , где m определяется формулой из (2.6).

5. Для задач статики двумерные задачи слоистых пластин существенно упрощаются [6]. Если первое уравнение системы (2.1) продифференцировать по x , а второе уравнение по y и сложить, то получится

$$\Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = \frac{h_1}{2} \Delta^2 w \quad (5.1)$$

Аналогичным образом из третьего и четвёртого уравнений системы (2.1) получается

$$\Delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = -\frac{h_2}{2} \Delta^2 w \quad (5.2)$$

Подстановка (5.1), (5.2) в уравнение (2.5) при отсутствии инерционного члена приводит к уравнению

$$0.25 \cdot D \Delta^2 w = -q(x, y) \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что уравнение для определения функции прогиба пластинки отделяется от уравнений, определяющих перемещения обобщённого плоского напряжённого состояния. Граничные условия закреплённого края (3.2) облегчённой заделки (3.4) стеснённого скользящего контакта (3.6), шарнирного закрепления (3.8), скользящего контакта (3.10) и свободного опирания (3.12) показывают, что в этих случаях задача изгиба оказывается полностью автономной. Для задач с приведёнными граничными условиями вначале определяется функция прогиба w , которая затем подставляется в уравнения (2.1), а в случае свободного опирания – и в граничные условия (3.12). После чего, необходимо решать задачу для определения планарных перемещений u_k, v_k .

Используя выражение (5.2) для определения нормального напряжения $\sigma_{33}(0)$ и (2.4), нетрудно получить формулу (4.5). Следовательно, и в двумерных задачах статики рассматриваемой двухслойной пластинки, нормальное напряжение на стыке слоёв не зависит от краевых условий. Нетрудно проверить, что формула (4.9) в задаче изгиба под собственным весом и условие живучести (4.10) также справедливы для двумерной задачи.

6. Для задач собственных колебаний двухслойных пластин удобно использовать преобразование [6]

$$u_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y}, \quad v_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x}, \quad k = 1, 2 \quad (6.1)$$

Подстановка (6.1) в уравнения (2.1) и (2.5), после некоторых преобразований приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_1 - \frac{1}{C_{e1}^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} &= \frac{h_1}{2} \left(\Delta w - \frac{1}{C_{e1}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \\
\Delta\psi_1 - \frac{1}{C_{t1}^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= 0 \\
\Delta\varphi_2 - \frac{1}{C_{e1}^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} &= -\frac{h_2}{2} \left(\Delta w - \frac{1}{C_{e2}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \\
\Delta\psi_2 - \frac{1}{C_{t2}^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} &= 0 \\
\Delta^2 (Dw - K_1\varphi_1 + K_2\varphi_2) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

В (6.2), кроме принятых ранее обозначений из (1.9), (2.2) и (2.6), используется также новое обозначение

$$C_{ek}^2 = \frac{E_k}{(1 - v_k^2) \rho_k} \tag{6.3}$$

Из (6.2) следует, что планарные сдвиговые волны (ψ_k) отделяются. Планарные продольные волны (φ_k) и изгибные взаимосвязаны. Если решения уравнений (6.2) представить в виде гармонических волн

$$\begin{aligned}
\varphi_k &= A_k \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \quad \psi_k = B_k \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \\
w &= C \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

то нетрудно получить выражения для фазовых скоростей. Для чисто сдвиговых волн в каждом слое распространяются волны с фазовыми скоростями

$$\frac{\omega_{kk}^2}{k^2} = C_{tk}^2, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \tag{6.5}$$

Для связанных продольных и изгибных волн будем иметь

$$\frac{\omega_{ek}^2}{k^2} = C_{ek}^2, \quad \frac{\omega_u^2}{k^2} = \frac{D}{4m} k^2 \tag{6.6}$$

Следовательно, в каждом слое распространяется автономная продольная волна, которая приводит к изгибным колебаниям с той же частотой, что и у продольной волны. В свою очередь, изгибные колебания приводят к возбуждению продольных волн в каждом слое.

7. В статье [7] предлагается другой подход к исследованию слоистых пластин в случае свободного скольжения между слоями. Во-первых, принимается, что в общем случае слои могут быть удалены друг от друга и соединены только на кромках. Затем предлагаются уравнения для прогибов каждой пластинки в виде

$$\begin{aligned}
L_1(w_1) &= q_*^{(1)} + \chi_1 \psi \\
L_2(w_2) &= q_*^{(2)} + \chi_2 \psi
\end{aligned} \tag{7.1}$$

где L_1, L_2 – определённые операторы с учётом также нелинейных членов, $q_*^{(k)}$ нагрузки, действующие на каждый слой. В (7.1) ψ – некоторый коэффициент, который равен нулю, если пластинки удалены друг от друга и определяются с использованием модели основания Винклера или Власова, если между пластинками нет зазора.

Работа выполнена в рамках намечаемых совместных исследований Института механики НАН Армении и ОАО “ОАК” РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость колебания. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: theory and analysis. CRC Press. 2004. 825p.
3. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями // В сб.: “Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твёрдого тела” Ереван: 1999. С.23-29.
4. Хачатрян А.М. об уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при нежёстком контакте слоёв.// Докл. НАН Армении.1999. Т.99. № 2. С.159-165.
5. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги.// В сб.: “Проблемы механики тонких деформируемых тел” (Посв. 80-летию С.А. Амбарцумяна) Ереван: Изд. “Титутюн”, 2002. С.67-88.
6. Белубекян М.В. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.31-41.
7. Крысько А.В., Овсяникова О.А. Математическая модель многослойных неспаиваемых задач теории пластин // Межвуз.научн.сб.:Саратов:2004.Вып.2. С.195-204.

Сведения об авторе:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ-мат.наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.
(+374 10) 52-15-03, (+374 10) 58-00-96

E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 26.04.2013

УДК 539.3

**ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В
СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ ИЗ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ
НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭКРАНА**

Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З.

Ключевые слова: электроупругие поверхностные волны Лява, пьезоэлектрическая слоистая структура, электрический экран.

Key words: electro-elastic surface Love waves, piezoelectric layered structure, electrical screen.

Դանոյան Զ.Ն., Աթոյան Լ.Ա., Սահակյան Ս.Լ., Դանոյան Ն.Զ

Լյավի էլեկտրաառաձգական մակերևութային ալիքները պլեզոէլեկտրիկ կիսաանվերջ հիմքից և դիէլեկտրիկ շերտից բաղկացած շերտավոր համակարգում, էլեկտրական էկրանի առկայությամբ

Քվադրատատիկ մոտավորությամբ դիտարկվում են էլեկտրաառաձգական Լյավի մակերևութային ալիքները շերտավոր պլեզոէլեկտրիկ միջավայրում էլեկտրական էկրանի առկայությամբ:

Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Sahakyan S.L., Danoyan N.Z.

Electro-elastic surface Love waves in a layered structure: piezoelectric half space and dielectrical layer, in presence of an electrical screen

The electro-elastic surface Love waves in a layered piezoelectric structure in quasi-static approximation is investigated.

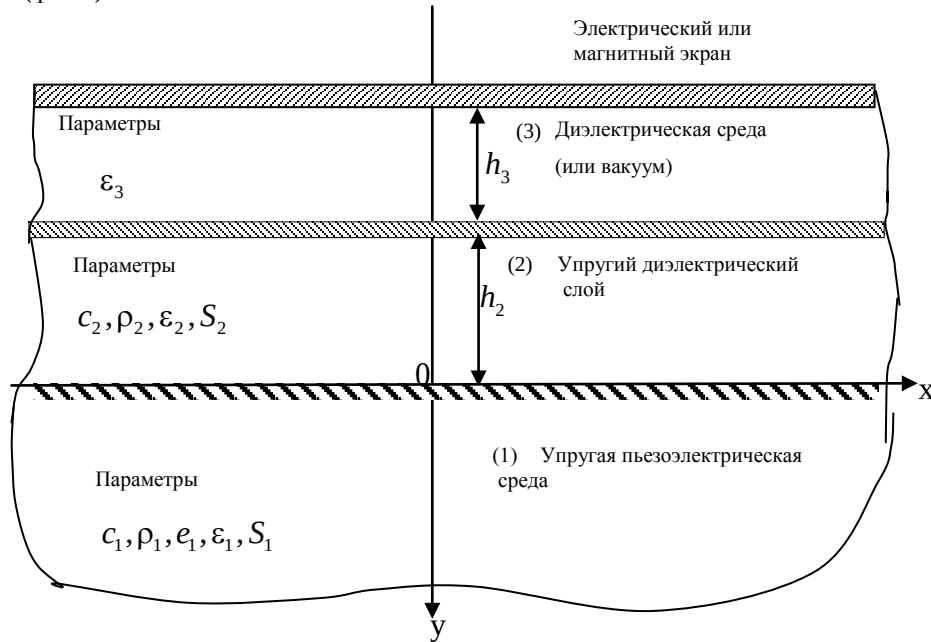
Рассматриваются электроупругие поверхностные волны Лява в слоистой пьезоэлектрической структуре с электрическим экраном в квазистатическом приближении.

1. Введение. В слоистой упругой структуре, состоящей из упругого полубесконечного основания и скреплённого с ним слоя конечной толщины, могут распространяться сдвиговые горизонтально поляризованные поверхностные волны, которые называются поверхностными волнами Лява [1]. Эти волны существуют тогда, когда скорость объёмных волн в слое меньше скорости соответствующих волн в основании. Известны также, так называемые волны Блюстейна-Гуляева – сдвиговые поверхностные электроупругие волны, которые распространяются в пьезоэлектрическом полупространстве [2,3]. В работах [4,6] обсуждались электроупругие поверхностные волны типа Лява в слоистых пьезоэлектрических средах. В работе [7] в квазистатическом приближении исследовались вопросы существования и поведения волн Блюстейна-Гуляева в пьезоэлектрическом упругом полупространстве, когда на некотором расстоянии от его поверхности размещён экран электрического поля. Та же задача в полностью динамической постановке исследовалась в работе [8]. В последние годы особый интерес стали вызывать волновые процессы в различных структурах из функционально-градуированных материалов (FGM) в периодических пьезоэлектрических

структурах (в фотонных и фононных кристаллах), где возникают запрещённые частотные полосы (band gaps), что, в свою очередь, находят широкое применение при конструировании лазеров, усилителей и сенсоров, волноводов с малыми потерями, частотных фильтров и т.д. [9,10].

В данной работе в квазистатическом приближении исследуются электроупругие волны Лява в слоистой структуре, состоящей из пьезоэлектрического полубесконечного основания и диэлектрического слоя конечной толщины, когда на некотором расстоянии от слоя помещён экран электрического поля. Получено основное дисперсионное соотношение, из которого легко получаются дисперсионные уравнения, соответствующие различным важным частным случаям, совпадающие с аналогичными уравнениями, полученными в работах [2,6].

2. Постановка задачи. Пусть задана слоистая структура, состоящая из пьезоэлектрического полупространства кристаллического класса симметрии 6mm или 4mm, с жёстко примыкающим к ней изотропным диэлектрическим слоем конечной толщины h_2 . На расстоянии h_3 от слоя размещён экран электрического поля (фиг.1).



Фиг.1

Пространство между экраном и слоем представляет собой диэлектрик или вакуум. Диэлектрическая среда не имеет акустического контакта со слоем.

На фиг.1 показаны только параметры, относящиеся к антиплоскому деформированному состоянию структуры. C_i — упругие постоянные, ρ_i — плотности масс, S_i — фазовые скорости объёмных волн ($i=1,2$), ϵ_i — диэлектрические постоянные ($i=1,2,3$), e_1 — пьезомодуль подложки. Впредь, также величины, относящиеся к подложке, слою и диэлектрической среде, будут индексироваться цифрами 1,2,3, соответственно.

Обсудим антиплоское деформированное и плоское электрическое состояние слоистой структуры, которое описывается следующими электроупругими параметрами:

$$u_1 = u_2 = 0, u_3 = w(x, y, t), \varphi = \varphi(x, y, t), \quad (2.1)$$

где $\{u_i\}$ – вектор перемещений, φ – потенциал электрического поля.

В диэлектрической среде электрическое поле характеризуется квазистатическим потенциалом:

$$\varphi_3 = \varphi_3(x, y, t). \quad (2.2)$$

В слоистой структуре и диэлектрической среде потенциал определяется соотношением:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (2.3)$$

где $\vec{E}$ – вектор напряжённости электрического поля.

Далее положим, что главная кристаллическая ось пьезоэлектрика (L_6 или L_4) направлена по оси O_z .

При сделанных выше предположениях волновой процесс будет описываться следующими уравнениями:

1) Уравнения электроупругости в пьезоэлектрической подложке ($y > 0$):

$$c_{44}^{(1)} \Delta w_1 + e_{15}^{(1)} \Delta \varphi_1 = \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

$$e_{15}^{(1)} \Delta w_1 - \varepsilon_{11}^{(1)} \Delta \varphi_1 = 0.$$

2) Упругое и электрическое поля определяются в диэлектрическом слое ($-h_2 < y < 0$) уравнениями:

$$c_{44}^{(2)} \Delta w_2 = \rho_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

$$\Delta \varphi_2 = 0.$$

3) Уравнение электростатического поля в диэлектрической среде ($-(h_2 + h_3) < y < -h_2$):

$$\Delta \varphi_3 = 0, \quad (2.6)$$

$c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}$ – здесь и далее упругие постоянные сред, $e_{15}^{(1)}$ – пьезоэлектрическая постоянная основания, $\varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}$ и $\varepsilon_{11}^{(3)}$ – диэлектрические постоянные соответствующих сред, ρ_1 и ρ_2 – массовые плотности основания и слоя, соответственно.

Следуя Блюстейну [2], введём следующее обозначение:

$$\Psi_1 = \varphi_1 - \frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_{11}^{(1)}} w_1, \quad (2.7)$$

а также:

$$\begin{aligned}
c_{44}^{(1)} &= c_1, \quad c_{44}^{(2)} = c_2, \quad e_{15}^{(1)} = e_1, \quad \varepsilon_{11}^{(i)} = \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3), \\
\bar{e}_1 &= \frac{e_1}{\varepsilon_1}, \quad \bar{c} = c_1 + \frac{e_1^2}{\varepsilon_1} = c_1 + e_1 \bar{e}_1, \\
\bar{c} &= c_1 \left(1 + \frac{e_1^2}{\varepsilon_1 c_1} \right) = c_1 (1 + \chi_1^2), \quad \chi_1^2 = \frac{e_1^2}{\varepsilon_1 c_1}, \\
S_1^2 &= \frac{\bar{c}_1}{\rho_1} = \frac{c_1 (\chi_1^2)}{\rho_1} = S_{10}^2 (1 + \chi_1^2), \\
S_{10}^2 &= \frac{c_1}{\rho_1}, \quad S_2 = \frac{c_2}{\rho_2}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

После этих обозначений (2.7) переписывается так:

$$\psi_1 = \varphi_1 - \bar{e}_1 w_1, \quad \varphi_1 = \psi_1 + \bar{e}_1 w_1. \tag{2.9}$$

Учитывая (2.8) и (2.9), уравнения (2.4) - (2.6) примут вид:

1) Уравнения в пьезоэлектрическом полупространстве ($y > 0$):

$$\Delta w_1 = \frac{1}{S_1^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \tag{2.10}$$

$$\Delta \psi_1 = 0.$$

2) Уравнения в диэлектрическом слое ($-h_2 < y < 0$):

$$\Delta w_1 = \frac{1}{S_2^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \tag{2.11}$$

$$\Delta \varphi_2 = 0.$$

3) Уравнения в диэлектрической среде ($-(h_2 + h_3) < y < -h_2$)

$$\Delta \varphi_3 = 0. \tag{2.12}$$

Условия непрерывности и граничные условия:

а) Условия непрерывности на границе жёсткого закрепления при $y = 0$:

$$w_1 = w_2, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)}, \quad \psi_1 + \bar{e}_1 w_1 = \varphi_2; \tag{2.13}$$

где $\sigma_{23}^{(i)}$ — касательные напряжения.

б) Граничные условия на поверхности слоя при $y = -h_2$:

$$\sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad \varphi_2 = \varphi_3, \quad D_2^{(2)} = D_2^{(3)}, \tag{2.14}$$

где $D_2^{(i)}$ — нормальная составляющая электрической индукции.

в) Граничные условия на экране $y = -(h_2 + h_3)$:

$$\varphi_3 = 0. \tag{2.15}$$

Условия затухания на бесконечности при $y \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} w_1 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_1 = 0.$$

3. Решения задачи в виде плоских волн

Выпишем сначала соотношения, определяющие состояние слоистой структуры.

1) В пьезоэлектрическом полупространстве (подложке):

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(1)} &= \bar{c}_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \\ D_2^{(1)} &= e_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

2) В слое:

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(2)} &= c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y}, \\ D_2^{(2)} &= -\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3) В диэлектрической среде:

$$D_2^{(3)} = -\epsilon_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial y}. \quad (3.3)$$

Преобразуя соотношения (3.1) с учётом (2.9), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(1)} &= \bar{c}_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \\ D_2^{(1)} &= -\epsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решения уравнений (2.10) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_1 &= W_{10} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}, \\ \psi_1 &= \Psi_{10} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где q и p – компоненты волнового вектора по оси Oy и Ox , соответственно,

W_{10} и Ψ_{10} – амплитуды, ω – частота.

Далее будем полагать, что выполняются следующие условия:

$$p > 0, \quad \omega > 0, \quad v = \omega/p > 0, \quad (3.6)$$

где v – фазовая скорость волны.

Подставив (3.5) в (2.10) и выписав условие неравенства нулю решений полученной системы ($\det = 0$), мы придём к дисперсионным уравнениям:

$$\frac{\omega^2}{S_1^2} - (p^2 + q^2) = 0, \quad (3.7)$$

$$p^2 + q^2 = 0.$$

Отсюда следует:

$$q = \pm ip\beta_1(v), \quad \beta_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{S_1^2}}; \quad (3.8)$$

$$q = \pm ip.$$

Чтобы подчинить решения (3.5) условиям затухания (2.16), необходимо взять следующие корни:

$$q = ip\beta_1(v), \quad q = ip. \quad (3.9)$$

Таким образом, решения (3.5), соответствующие корням (3.9), примут вид:

$$w_1 = W_{10} e^{-p\beta_1(v)y} e^{i(px-\omega t)}, \quad (3.10)$$

$$\psi_1 = \Psi_{10} e^{-py} e^{i(px-\omega t)}.$$

Решения уравнений (2.11) в слое будем искать в виде:

$$w_2 = W_{20} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}, \quad (3.11)$$

$$\varphi_2 = \Phi_{20} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}.$$

Подставляя (3.11) в уравнения (2.11) и далее пользуясь условием существования ненулевых решений полученной системы, мы опять же придём к дисперсионным соотношениям, выражающим зависимость q от ω и p :

$$-(p^2 + q^2) + \frac{\omega^2}{S_2^2} = 0, \quad (3.12)$$

$$p^2 + q^2 = 0,$$

откуда получаем:

$$q = \pm p\beta_2(v), \quad \beta_2(v) = \sqrt{\frac{v^2}{S_2^2} - 1}, \quad (3.13)$$

$$q = \pm ip.$$

Таким образом, решения в слое вида (3.11) представляются так:

$$w_2 = (W_{20}^- e^{-ip\beta_2 y} + W_{20}^+ e^{ip\beta_2 y}) e^{i(px-\omega t)}, \quad (3.14)$$

$$\varphi_2 = (\Phi_{20}^- e^{-py} + \Phi_{20}^+ e^{py}) e^{i(px-\omega t)}.$$

Решение уравнения (2.12) в диэлектрической среде ищем в виде:

$$\varphi_3 = \Phi_{30} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (2.12) и поступая аналогично предыдущему, мы придём к дисперсионному соотношению:

$$p^2 + q^2 = 0, \quad (3.16)$$

откуда

$$q = \pm ip. \quad (3.17)$$

Итак, решение уравнения (2.12) представляется так:

$$\varphi_3 = \left(\Phi_{30}^- e^{-py} + \Phi_{30}^+ e^{py} \right) e^{i(px - \omega t)}. \quad (3.18)$$

4. Подчинение полученных решений условиям непрерывности и граничным условиям

Решения (3.10), (3.14) и (3.18) подставим в условия (2.13), (2.14) и (2.15). После несложных преобразований получим систему для определения амплитуд W_{20}^- , W_{20}^+ , Φ_{20}^- и Φ_{20}^+ :

$$\begin{aligned} (\bar{c}_1 \beta_1 - i c_2 \beta_2) W_{20}^- + (\bar{c}_1 \beta_1 + i c_2 \beta_2) W_{20}^+ + \varepsilon_2 \bar{e}_1 (\Phi_{20}^- - \Phi_{20}^+) &= 0, \\ \bar{e}_1 W_{20}^- + \bar{e}_1 W_{20}^+ + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \Phi_{20}^- - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 1 \right) \Phi_{20}^+ &= 0, \\ e^{ik_2 \beta_2} W_{20}^- - e^{-ik_2 \beta_2} W_{20}^+ &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \delta_3 \right) e^{2k_2} \Phi_{20}^- + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \delta_3 \right) \Phi_{20}^+ = 0,$$

где $k_2 = ph_2$, $k_3 = ph_3$, $\delta_3 = \text{th } k_3$.

Из условия существования ненулевого решения системы (4.1) следует основное дисперсионное уравнение:

$$\beta_1(V) = \frac{c_2}{\bar{c}_1} \beta_2(V) \text{tg}(k_2 \beta_2) + \frac{\bar{e}_2 R_1^2 (\delta_3 \bar{e}_2 \text{th} k_2 + 1)}{\bar{e}_2 (\delta_3 \bar{e}_2 \text{th} k_2 + 1) + \bar{e}_1 (\delta_3 \bar{e}_2 + \text{th} k_2)}, \quad (4.2)$$

где $\bar{e}_1 = \varepsilon_1 / \varepsilon_3$, $\bar{e}_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_3$, $\beta_1(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{S_1^2}}$, $\beta_2(v) = \sqrt{\frac{v^2}{S_2^2} - 1}$,

$R_1^2 = \frac{e_1^2}{\varepsilon_1 \bar{c}_1} = \frac{\chi_1^2}{1 + \chi_1^2}$ – коэффициент электромеханической связи (без пьезоэффекта $R_1^2 = 0$).

Рассмотрим некоторые важные частные случаи:

1) Экран находится в бесконечности (отсутствует), $\delta_3 = 1$.

Дисперсионное уравнение (4.2) примет вид:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{\bar{c}_1} \beta_2 \text{tg}(k_2 \beta_2) + \frac{\bar{e}_2 R_1^2 (\bar{e}_2 \text{th} k_2 + 1)}{\bar{e}_2 (\bar{e}_3 \text{th} k_2 + 1) + \bar{e}_1 (\bar{e}_2 + \text{th} k_2)}. \quad (4.3)$$

Это совпадает с результатом работы [6].

2) Экран находится на верхней поверхности слоя, $\delta_3 = 0$.

Дисперсионное уравнение для этого случая имеет вид:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{\bar{c}_1} \beta_2 \text{tg}(k_2 \beta_2) + \frac{\bar{e}_2 R_1^2}{\bar{e}_2 + \bar{e}_1 \text{th} k_2}. \quad (4.4)$$

Это также совпадает с результатом работы [6].

3) Слой представляет собой проводник, $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \rightarrow 0$, поэтому имеем:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{c_1} \beta_2 \operatorname{tg}(k_2 \beta_2) + R_1^2. \quad (4.5)$$

Этот результат был уже получен в работах [4,6] при $e_{14} = d_1 = 0$ (d_1 – пьезоэлектрическая постоянная).

4) Подложка – не пьезоэлектрическая среда, $e_1 = d_1 = 0$, $R_1^2 = 0$. Следовательно, получим:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{c_1} \beta_2 \operatorname{tg}(k_2 \beta_2). \quad (4.6)$$

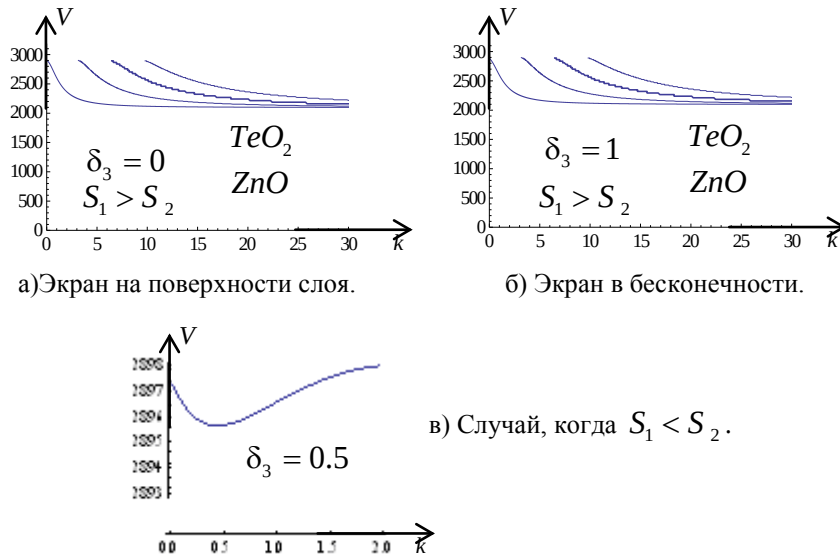
Это есть классическое уравнение Лява [1].

5) Слой отсутствует, получаем:

$$\beta_1 = \frac{R_1^2}{\delta_3 \varepsilon_1 + 1}, \quad (4.7)$$

что совпадает с результатом работы [7].

Приведём результаты некоторых численных расчётов для конкретных материалов и структур. Ниже представлены результаты численного исследования, когда материал слоя представляет собой окись теллура, подложка – окись цинка, а диэлектрическая среда – вакуум.



Фиг.2. Дисперсионные кривые.

Работа выполнена в рамках русско-армянского проекта по фундаментальным исследованиям (шифр 13RF-086).

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 827с.
2. Балакирев М.К., Гишинский И.Л. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 237с.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
4. Curtis R.G., Redwood M. Transvers surface wave on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness. // J. Appl. Phys. 1973. Vol.44. №5. P.2002-2007.
5. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
6. Danoyan Z.N., Piliposyan G.T. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and two isotropic layers. //Int. Journal of solids and structures. 46 (2009), 1345-1353.
7. Аветисян А.С., Карапетян М.Е. Экранирование волны Гуляева-Блюстейна. //В кн.: Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 2002, с. 97-100.
8. Белубекян М.В. Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве гексогональной симметрии. //В кн.: “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван: Институт механики НАН РА, 2008, с.125-130.
9. K.B.Ghazaryan, D.G.Piliposyan. Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structure. //Journal of Sound & Vibration. 330, 2011. P.6456-6466.
10. G.T.Piliposian, A.S.Avetisyan, K.B.Ghazaryan. Shear wave propogation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium. //Journal of Wave Motion. V.49. Iiss1. 2011. P.125-134.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович

Доктор ф.-м.н., зав.отделом Института механики НАН Армении.

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б.

E-mail: zavendanoyan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович

Канд. ф.-м.н., ст.науч.сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б.

E-mail: levous@mail.ru

Саакян Саак Леонович

Канд. ф.-м.н., науч.сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б.

E-mail: mechins@sci.am

Даноян Нерсес Завенович

науч.сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б.

E-mail: zavendanoyan@gmail.com

Поступила в редакцию 12.11.2012

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВЯЗКОУПРУГИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

Мовсисян Л.А.

Keywords: Cylindrical shell, viscoelastic core, external pressure, temperature field, critical parameters.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, вязкоупругий наполнитель, нормальное давление, температурное поле, критические параметры.

Մովսիսյան Լ.Ա.

Առաձգամածուցիկ լցնով գլանային թաղանթի կայունության մասին

Դիտարկվում է առաձգամածուցիկ լցնով գլանային թաղանթի կայունությանը հավասարաչափ ճնշման և ջերմության ազդեցության տակ: Լցնի ազդեցությունը հաշվի է առնվում Վինկլերի վարկածի ճշտությամբ: Ակնթարթային և երկարատև պարամետրերից բացի որոշվում է նույնպես կայունությունը կորցնելու կրիտիկական ժամանակը:

Movsisyan L.A.

On stability cylindrical shell with a viscoelastic core

Stability of cylindrical shell with a viscoelastic core is investigated under action both of external uniform pressure and constant temperature field. Core effect is modeled by means of Winkler formula. Besides of instant and prolonged critical parameters, the instability critical time are defined.

Изучается устойчивость цилиндрической оболочки с вязкоупругим наполнителем, находящейся в постоянном температурном поле и подвергающейся внешнему равномерному давлению. Влияние наполнителя учитывается на основании формулы Винклера. Помимо мгновенного и длительного критических параметров определяется также критическое время потери устойчивости.

Изучается устойчивость цилиндрической оболочки, находящейся в постоянном температурном поле и подвергающейся внешнему равномерному давлению. Влияние наполнителя из вязкоупругого материала стандартного типа моделируется на основании модели Винклера. Определяются мгновенные и длительные критические параметры.

В [1] изучается устойчивость кольца с упругим наполнителем при совместном воздействии внешнего давления и температуры. Работа [2] – одна из первых, посвящённая устойчивости цилиндрических оболочек с упругим наполнителем. В дальнейшем было выполнено большое количество работ и обзор их можно найти в [3].

1. Имеется цилиндрическая оболочка с параметрами h, R, l . Оболочка находится в постоянном температурном поле θ и подвергается внешнему равномерному давлению интенсивности q . Как отмечалось выше, влияние наполнителя на оболочку моделируется приближённо на основании формулы Винклера:

$$Z = \tilde{k}w - k_1\alpha_1\theta = k \left(w - \Gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-i)} w d\tau \right) - k_1\alpha_1\theta. \quad (1.1)$$

Если предположить, что в невозмущённом состоянии края оболочки закреплены, то помимо кольцевого усилия T_2^0 появится также продольное $-T_1^0$. Выражения для них будут:

$$T_2^0 = T - \frac{Eh\alpha\theta}{1-\nu}, \quad T_1^0 = \nu T - \frac{Eh\alpha\theta}{1-\nu}, \quad (1.2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$T = \frac{Q}{1+K} \left[1 + \frac{\Gamma_1}{\gamma - \Gamma_1} (1 - e^{-(\gamma - \Gamma_1)t}) \right], \quad K = \frac{kR^2}{Eh},$$

$$Q = -Rq + \left(Rk_1\alpha_1 - \frac{Eh}{1-\nu} \alpha \right) \theta, \quad \Gamma_1 = \frac{\Gamma}{1+K^{-1}}.$$

Уравнение устойчивости при вышеприведённых факторах будет:

$$D\Delta^4 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \tilde{k}\Delta^2 w + \Delta^2 \left(T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.3)$$

Для оболочки со свободными опёртыми краями решение (1.3) ищется в виде

$$w = f \sin \lambda_m x \cdot \cos \mu_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \mu_n = \frac{n}{R} \quad (1.4)$$

и критические параметры определяются из

$$\left[D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{Eh}{R^2} \frac{\lambda n^4}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \right] f + \tilde{k}f + (T_1^0 \lambda_m^2 + T_2^0 \mu_n^2) = 0. \quad (1.5)$$

Отсюда при (1.2) можно рассмотреть ряд частных случаев. В общем случае, при воздействии обоих факторов (q и θ) нужно, задаваясь значением одного, определить минимальное значение другого, обеспечивающего потерю устойчивости. Отметим ещё, что из (1.5) следует, что помимо мгновенного и длительного критических параметров, возможно ещё промежуточное критическое время. Для него получим выражение для частного случая. Для определения мгновенных критических параметров ($t=0$) в (1.5) $\tilde{k} = k$, $t=0$, а для длительного ($t \rightarrow \infty$), соответственно $\tilde{k} = k_\infty = k \left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma} \right)$, $t \rightarrow \infty$.

Как видно из приведённых формул, вследствие нормального давления преобладающим является кольцевое усилие T_2^0 , а от температуры $-T_1^0$. В табл. 1

приведены критические значения $\frac{10^5 T_2^0}{Eh}$ для различных соотношений

$$T_1^0 = \beta T_2^0, \beta = \frac{1}{3}, 1, 3 \quad 10, \quad \frac{kR}{E} = 0.5, \frac{\pi R}{l} = 0.3 \quad \nu =$$

Параметр χ характеризует наличие наполнителя: при $\chi = 1$ получается мгновенное значение критического усилия, $\chi = 0,5$ – длительное, когда длительный модуль равен половине мгновенного и, наконец, $\chi = 0$ – отсутствие наполнителя. Следует отметить, что для каждого h/R критические значения – мгновенные и длительные – мало отличаются, как для различных β , так и χ . Причём минимумы получаются при $m = 1$, а количество поперечных волн также одинаково. В случае, когда хоть один из краёв оболочки свободен (невозмущённое состояние), то $T_1^0 = 0$ и минимальная комбинация q и θ , при которой произойдёт мгновенная потеря устойчивости, будет

Таблица 1

h/R	$\beta \backslash \chi$	1	0,5	0
1/200	1/3	6.474	5.852	5.230
	1	6.407	5.792	5.176
	3	6.216	5.619	5.022
1/300	1/3	4.173	3.574	2.976
	1	4.145	3.551	2.957
	3	4.065	3.482	2.899

$$\frac{R}{Eh} \left[q + (Rk\alpha - k_1\alpha_1)\theta \right] = (1+K) \left[\frac{n^2}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{\pi^4}{n^6} \left(\frac{R}{l} \right)^4 + K \frac{1}{n^2} \right]. \quad (1.7)$$

При этом, минимум достигается при

$$\frac{n}{R} = \left[x_1 (1 + \sqrt{1 + x_2}) \right]^{1/4}, \quad (1.8)$$

$$X_1 = \frac{6k(1-\nu^2)}{Eh^3}, \quad X_2 = \frac{\pi^4}{1-\nu^2} \left(\frac{E}{kR} \right)^2 \left(\frac{h}{l} \right)^4.$$

Для длительной неустойчивости во всех формулах (1.7) и (1.8) k должен быть заменён k_∞ .

Как видно из (1.7), в зависимости от геометрических размеров и физических свойств материалов, в одном случае, если наличие температуры увеличивает значение критического давления, то в других случаях наоборот, в частности, может быть и без последствий.

2. В задаче для кольца для усилия T_2^0 имеем:

$$T_2^0 = Eh \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \alpha \theta \right), \quad (2.1)$$

которое определится из следующей системы:

$$\frac{\partial T_2^0}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2^0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 M_2^0}{\partial y^2} - RT_2^0 = R^2 \left(-Z + \tilde{k}_0 w_0 - \alpha_1 k_1 \theta \right). \quad (2.2)$$

В предположении, что внешнее давление симметрично расположено относительно линии $\varphi = 0$, перемещения можно представить в виде

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \cos m\varphi, \quad v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} v_n \sin m\varphi. \quad (2.3)$$

Тогда усилие T_2^0 имеет вид

$$T_2^0 = Eh \sum_{m=0}^{\infty} T_m \cos m\varphi. \quad (2.4)$$

Здесь

$$T_0 = -\alpha \theta + \frac{1}{1 + \frac{R^2 \tilde{k}}{Eh}} \left[\left(\alpha + \frac{Rk_1}{Eh} \right) \theta - \frac{Ra_0}{Eh} \right]$$

$$T_m = \frac{h^2}{12R^2} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 w_m, \quad w_m = \frac{R^3 a_m}{Dm^2 (m^2 - 1) + R^4 \tilde{k}}$$

где постоянные a_m есть коэффициенты Фурье от внешнего воздействия. В частности, (такой случай и будем рассматривать), если равномерное давление действует на противоположных участках в интервале $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ (при $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ имеем равномерное давление по всему кругу), то этими коэффициентами будут:

$$a_0 = -q \frac{2\varphi_0}{\pi}, \quad a_m = -\frac{2q}{m\pi} \left[1 + (-1)^m \right] \sin m\varphi_0. \quad (2.5)$$

Решение уравнения устойчивости

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - R^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(T_2^0 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + R^4 \tilde{k} w = 0 \quad (2.6)$$

представим в виде

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \left(w_n^{(1)} \cos n\varphi + w_n^{(2)} \sin n\varphi \right) \quad (2.7)$$

Тогда для определения критических параметров получим систему:

$$\left[Dn^2(n^2 - 1) + R^4 \tilde{k} \right] w_n^{(i)} + \frac{R^2 n}{2} \left[\sum_{m=1}^n m T_{n-m} w_m^{(i)} \mp \sum_{m=1}^{\infty} m T_{m+n} w_m^{(i)} + \sum_{m=n}^{\infty} m T_{m-n} w_m^{(i)} \right] = 0 \quad (2.8)$$

В табл.2 приведены мгновенные критические значения безразмерной величины $\bar{q} = \frac{2 \cdot 10^5 R}{Eh\pi} q$ для некоторых $h/R, \varphi_0$ и k (при отсутствии температуры).

В случае равномерного давления по всему кругу $\left(\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \right)$ мгновенное критическое воздействие определится формулой

$$q + (Rk\alpha - k_1\alpha_1)\theta = \frac{Eh}{R}(1 + K)(2\sqrt{KH} - H) \quad (2.9)$$

при этом, минимизирующий n есть

$$n = \sqrt[4]{\frac{K}{H}}, \quad H = \frac{h^2}{12R^2}. \quad (2.10)$$

Для длительного воздействия надо поменять соответствующие коэффициенты.

Как видно из приведённых таблиц и чего можно было ожидать, влияние наполнителя на критические параметры для кольца более существенно, чем для оболочки.

Таблица 2

h/R	k φ_0	0	$0.5 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}
1/200	$\pi/6$	1.142	4,860	6.517
	$\pi/4$	0.787	3.354	4.581
	$\pi/3$	0.603	2.580	3.569
1/300	$\pi/6$	0.508	3.794	5.193
	$\pi/4$	0.350	2.663	3.639
	$\pi/3$	0.268	2.105	2.898

Теперь вернёмся к вопросу критического времени. В составных системах с различными вязкоупругими свойствами помимо мгновенного и длительного критических параметров $(t = 0, t \rightarrow \infty)$, наверное, можно говорить и о некоторых промежуточных критических временах. Это покажем на простом примере. В рассмотренном выше случае $\left(\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \right)$ интегральное уравнение можно привести к

дифференциальному первого порядка относительно $\frac{dw_n}{dt}$ с переменными коэффициентами. Как известно, для вязкоупругих тел имеется критерий потери устойчивости

$$\frac{dw_n}{dt} = 0. \quad (2.11)$$

Так вот, если воспользоваться этим критерием, критический момент времени определится из

$$T(t) \cdot [q + (R\alpha k_\infty - k_1 \alpha_1) \theta] = \frac{Eh}{R} (1 + K_\infty) (2\sqrt{HK_\infty} - H)$$

$$T(t) = \frac{\gamma}{\gamma - \Gamma_1} \left[1 - \frac{\Gamma_1^2}{\gamma^2} e^{(\gamma - \Gamma_1)t} \right], \quad n = \sqrt[4]{\frac{K_m}{H}}, \quad K_\infty = \frac{\sqrt{k_\infty R^2}}{Eh}, \quad k_\infty = k \left(1 - \frac{\Gamma}{\gamma} \right) \quad (2.12)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. Устойчивость кольца с заполнителем при силовых и температурных воздействиях. // Докл.АН АрмССР. 1976. Т.53. №2. С.77–84.
2. Seide P. The stability under axial compression and lateral pressure of circular-cylindrical shells with a soft elastic core// ARS.J. Vol.29. №7. 1962. P.851–862.
3. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Расчёт оболочек с упругим заполнителем. М.: Наука, 1987. 260с.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович – доктор техн.наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН Армении.

Ереван, Армения, пр.Маршала Баграмяна 24^б.

Поступила в редакцию 26.12.2012

НЕКОНСЕРВАТИВНАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОЙ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Պոգոսյան Դ.Մ.

Ключевые слова: неконсервативная нагрузка, упругая прямоугольная пластинка, дивергентная неустойчивость, флаттер.

Key words: the non-conservative load, an elastic rectangular plate, the divergence instability, flutter.

Պոգոսյան Դ.Մ.

Մեղմված ուղղանկյուն սալի կայունության ոչ կոնսերվատիվ խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու հանդիպակաց կողմերն հողակապորեն ամրացված, ազատ եզրերում «հետևող»(և «ոչ հետևող») ուժերով բեռնավորված ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը: Գտնված և ուսումնասիրված են սալի անկայունության կրիտիկական ուժերի(դիվերգենցիա և ֆլատեր) արժեքները:

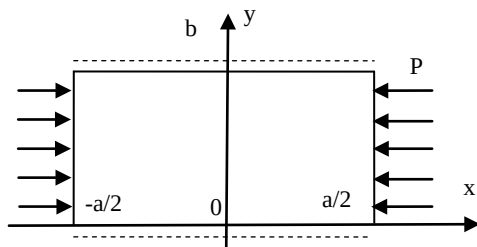
Poghosyan D.M.

The non-conservative problem of stability of compressed rectangular plate

In this paper the problem of stability of the perturbed motion of a plate is investigated. Two opposite edges of the plate are simply supported and the other two free edges loaded by "follower" and/or "dead" forces. The critical values of the loads in which the plate loses stability were found and analyzed.

В работе рассматриваются задачи устойчивости возмущённого движения пластинки, два противоположных края которой шарнирно опёрты, а два других свободных края нагружены «следящей» и/или «мертвой» силой. Найдены критические значения сил, при которых пластинка теряет устойчивость.

Задачи об устойчивости неконсервативных упругих систем впервые рассмотрел Е.Л. Николаи. Эту область в дальнейшем развивали Г.Ю. Джанелидзе, Циглер, В.И. Реут, А.Пфлюгер, Бек, Данкен, Раушер, В.В. Болотин[1] и другие со своими задачами стержневых систем и пластин. Задачи устойчивости неконсервативных упругих систем важны в связи с тем, что многие практические технические проблемы отнесены к категории: задачи устойчивости упругих тел, находящихся в потоке газа или изгибные колебания трубы с потоком жидкости, задачи ракет, подвергающихся реактивной тяге. В статье И. Елишакова [2] даётся критический анализ почти всех известных работ в этой области.



1. Рассмотрим упругую прямоугольную пластинку (фиг.1), два противоположных края которой шарнирно опёрты, а два других свободны. Пусть к свободным краям действуют равномерно распределённые сжимающие «следящие» нагрузки. Пластинка занимает область

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -h \leq z \leq h.$$

Уравнение устойчивости пластинки по теории Кирхгофа имеет вид [3,4]:

$$D\Delta^2 w + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где D – изгибная жёсткость пластинки, ρ – плотность материала, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $w = w(x, y, t)$ – динамический прогиб в каждой точке пластинки.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок имеют вид:

$$\begin{aligned} x = \pm \frac{a}{2}: \quad M_1 = 0, \quad \widetilde{N}_1 = 0 \\ \text{или} \\ x = \pm \frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \\ y = 0, b: \quad w = 0, \quad M_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

или

$$y = 0, b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

Аналогичная задача рассмотрена в [5].

Для простоты, поскольку пластинка симметрична, вместо условий (1.2) можно учитывать условия

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{условия симметрии}) \\ \text{б)} \quad x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{условия антисимметрии}) \end{aligned}$$

$$x = \frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

1.1. Сначала рассмотрим вариант (а).

Граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \\ x = \frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$y = 0, b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

Решение уравнения (1.1) представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi) \sin(n\pi\eta) * e^{i\Omega t} \quad n = 1, 2, \dots \quad \xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (1.6)$$

с тем, чтобы удовлетворить граничным условиям (1.5). Подстановка (1.6) в (1.1) приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$f_n^{IV} + (P' - 2\lambda_n^2) f_n'' + (\lambda_n^4 - \omega^2) f_n = 0 \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad f' = 0, \quad f''' = 0 \\ \xi = \frac{1}{2}: \quad f'' - \nu \lambda_n^2 f = 0, \quad f''' - (2 - \nu) \lambda_n^2 f' = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\lambda_n = \frac{a}{b} \pi n; \quad P' = a^2 \frac{P}{D}; \quad \omega = \Omega \sqrt{2 \frac{\rho h}{D} a^2}.$$

Общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$f_n(\xi) = C_{1n} \operatorname{sh}(r_1 \xi) + C_{2n} \operatorname{ch}(r_1 \xi) + C_{3n} \operatorname{sh}(r_2 \xi) + C_{4n} \operatorname{ch}(r_2 \xi) \quad (1.9)$$

где

$$r_i = \sqrt{\frac{-(P' - 2\lambda_n^2) \pm \sqrt{(P' - 2\lambda_n^2)^2 - 4(\lambda_n^4 - \omega^2)}}{2}} \quad i = 1, 2 \quad (1.10)$$

Подставляя общее решение (1.9) в граничные условия (1.8), получаем следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $C_{in} \neq 0, i = \overline{1, 4}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 r_1 + c_3 r_2 = 0 \\ c_1 r_1^3 + c_3 r_2^3 = 0 \\ c_1 (r_1^2 - v \lambda_n^2) \operatorname{sh} \left(\frac{r_1}{2} \right) + c_2 (r_1^2 - v \lambda_n^2) \operatorname{ch} \left(\frac{r_1}{2} \right) + c_3 (r_2^2 - v \lambda_n^2) \operatorname{sh} \left(\frac{r_2}{2} \right) + \\ + c_4 (r_2^2 - v \lambda_n^2) \operatorname{ch} \left(\frac{r_2}{2} \right) = 0 \\ c_1 r_1 (r_1^2 - k) \operatorname{ch} \left(\frac{r_1}{2} \right) + c_2 r_1 (r_1^2 - k) \operatorname{sh} \left(\frac{r_1}{2} \right) + c_3 r_2 (r_2^2 - k) \operatorname{ch} \left(\frac{r_2}{2} \right) + \\ + c_4 r_2 (r_2^2 - k) \operatorname{sh} \left(\frac{r_2}{2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (1.11)$$

где $k = (2 - v) \lambda_n^2$.

Для получения нетривиального решения приравняем нулю детерминант системы (1.11) и получаем следующее характеристическое уравнение [3]:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega, P') &= r_1 (r_1^2 - k) (r_2^2 - v \lambda_n^2) \operatorname{sh} \left(\frac{r_1}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{r_2}{2} \right) - \\ &- r_2 (r_2^2 - k) (r_1^2 - v \lambda_n^2) \operatorname{ch} \left(\frac{r_1}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{r_2}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

В таблицах 1а и 1б представлены критические значения следящих сил, приводящие к дивергентной неустойчивости, которые были получены из решения трансцендентного уравнения (1.12) с помощью программы «Математика»

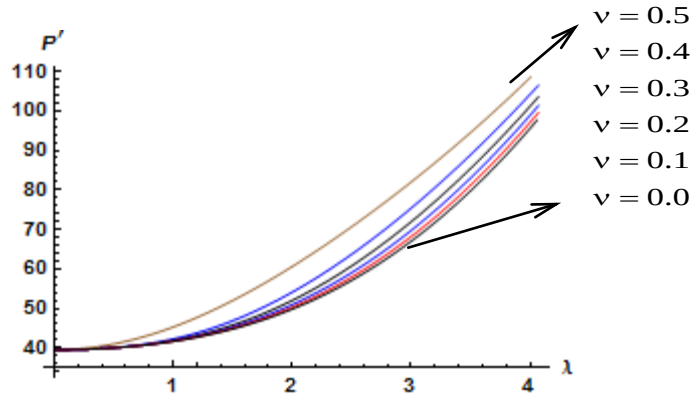
Таблица 1а

$\lambda_{n v=0.3}$	0.01	0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
P'	39.4786	39.49845	39.55892	39.99748	41.7617	45.2499	50.9174	98.868

Таблица 1б

v	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
λ_n	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
P'	45.2631	42.23519	41.8945	41.76171	41.6909	41.6468

На фиг.2 представлены графики зависимости величины силы P' от параметра λ_n при различных значениях ν . Судя по этим графикам, можно сказать, что при увеличении значения параметра λ_n в интервале $\lambda_n \in (0,1)$ критическая сила P' возрастает медленно в сравнении с $\lambda_n > 1.0$.



Фиг. 2.

1.2. Рассмотрим вариант (б).

Граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ x = \frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$y = 0, b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.14)$$

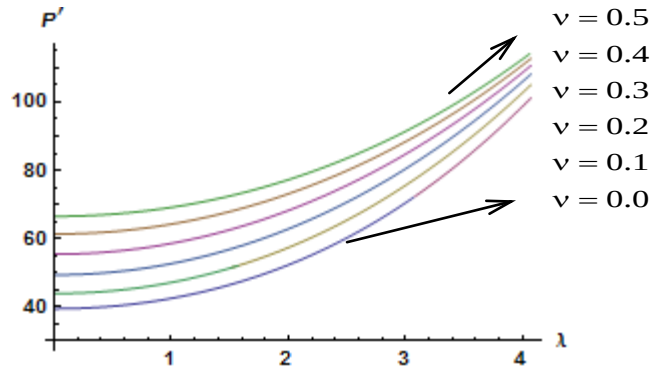
Рассуждая как в первой задаче, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega, P') = r_1 (r_1^2 - k) (r_2^2 - \nu \lambda_n^2) \operatorname{ch} \left(\frac{r_1}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{r_2}{2} \right) - \\ - r_2 (r_2^2 - k) (r_1^2 - \nu \lambda_n^2) \operatorname{sh} \left(\frac{r_1}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{r_2}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

В табл. 2 представлены критические значения следящих сил, приводящие к дивергентной неустойчивости согласно (1.15).

Таблица 2

$\lambda_{n v=0.3}$	0.0001	0.01	0.1	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
P'	55.4386	55.4389	55.4703	58.6145	62.6135	68.2664	84.7647	108.7097



Фиг. 3.

На фиг.3 представлены графики зависимости величины силы P' от параметра λ_n при различных значениях ν .

2. Рассмотрим прямоугольную пластинку, два противоположных края которой шарнирно опёрты, а два других свободны. Пусть на свободных краях действуют равномерно распределённые сжимающие нагрузки, на кромке $x = \frac{a}{2}$ нагрузка

«следящая» (неконсервативная), а на $x = -\frac{a}{2}$ — «мертвая» (консервативная).

Граничные условия записываются следующим образом:

$$x = -\frac{a}{2}: \quad M_1 = 0, \quad \widetilde{N}_1 = P \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$x = \frac{a}{2}: \quad M_1 = 0, \quad \widetilde{N}_1 = 0$$

или

$$x = -\frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + P \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$x = \frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

Рассуждая как в первой задаче, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega, P') = & q_1 q_2 \left(2k^2 + P' q_1^2 + (P' + 2q_1^2) q_2^2 - 2k(P' + q_1^2 + q_2^2) \right) * \\ & * (q_2^2 - v \lambda^2) (1 - \operatorname{ch}(q_1) \operatorname{ch}(q_2)) + \\ & + \left(k(k - P') q_1^4 q_2^2 + q_1^2 (k^2 + 2P' q_1^2 + q_1^4 - k(P' + 4q_1^2)) q_2^4 + q_1^4 q_2^6 - \right. \\ & - 2q_1^2 q_2^2 (2k^2 + q_1^4 + q_2^4 + P'(q_1^2 + q_2^2) - 2k(P' + q_1^2 + q_2^2)) v \lambda^2 + \\ & + (q_1^6 + q_2^6 + k^2 (q_1^2 + q_2^2) + P'(q_1^4 + q_2^4) - \\ & \left. - k(P'(q_1^2 + q_2^2) + 2(q_1^4 + q_2^4))) v^2 \lambda^4 \right) \operatorname{sh}(q_1) \operatorname{sh}(q_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

В табл. 3 представлены критические значения силы P' , приводящие к флаттерной неустойчивости, которые были получены из решения трансцендентного уравнения (2.2) с помощью программы «Математика».

Таблица 3

$\lambda_{n v=0.3}$	0.001	0.01	0.05	0.1	1.0	2.0	4.0
P'	39.4852	39.5415	39.7637	40.012	44.177	51.304	77.113

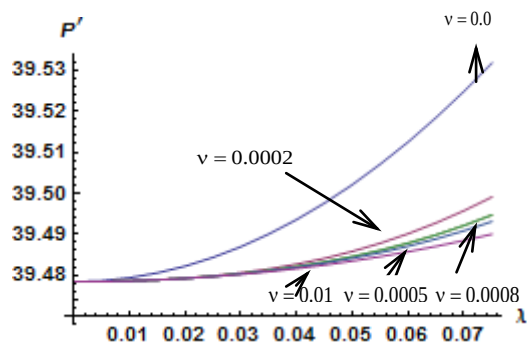
В табл. 4 представлены критические значения силы P' , приводящие к дивергентной неустойчивости

Таблица 4

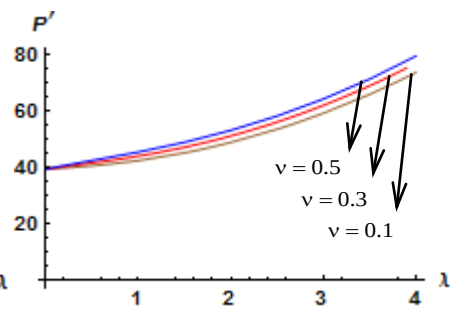
$\lambda_{n v=0.3}$	0.0001	0.001	0.01	0.05	0.06	1.0	2.0	4.0
P'	39.4784175	39.4784195	39.4786	39.48342	39.4856	-	-	-

Судя по этим таблицам, можно сказать, что при $\lambda_n \in (0, 0.067431)$ дивергентная неустойчивость возникает раньше, а при $\lambda_n > 0.067431$ имеем только флаттер.

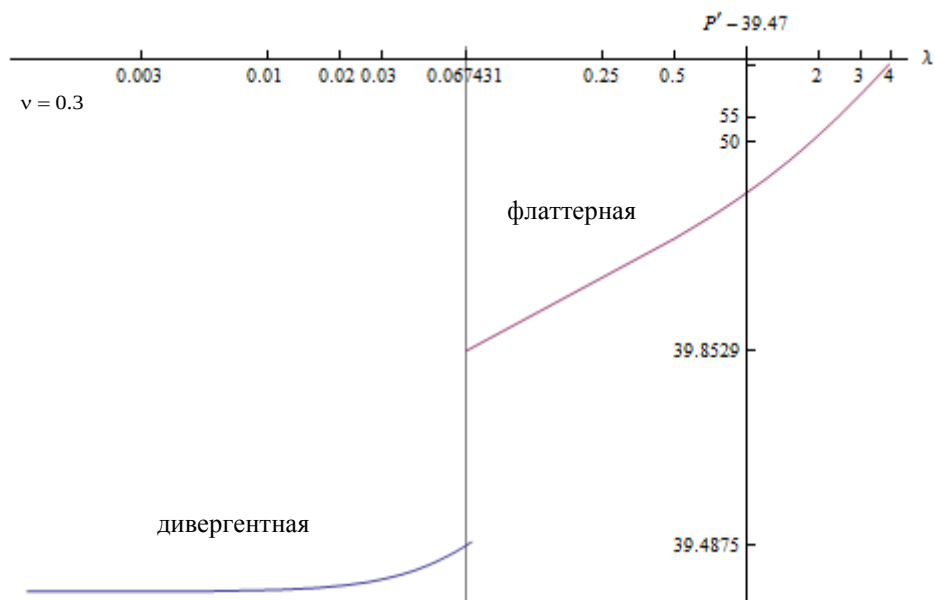
На фиг. 4 и 5 представлены графики зависимости величины соответственно дивергентной и флаттерной критической силы P' от параметра λ_n при различных значениях v . Судя по этим графикам, можно сказать, что при увеличении значения v дивергентная критическая сила P' уменьшается, а флаттерная возрастает.



Фиг.4.



Фиг.5.



Фиг.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Госиздат.физматлит., 1961.
2. Elishakoff, I. «Controversy associated with the so-called «follower forces»: critical overview” // Applied Mechanics Reviews. Vol.58. P.117-14. 2005.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Госизд.физматлит., 1963.
5. Белубекян М.В., Белубекян В.М. Устойчивость прямоугольной пластинки при действии «следящей» нагрузки, приложенной на свободной кромке //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №2. С.23-32.

Сведения об авторе:

Погосян Диана Мнацакановна – Аспирант Института механики НАН Армении

Тел.: (37410) 64-98-31

E-mail: dianpoghosyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 01.03.2013

УДК 539.3

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ УПРУГИХ
ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК***

Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярный, ферромагнитный, упругий, тонкий, оболочка, прикладная общая теория.

Key words: micropolar, ferromagnetic, elastic, thin, shell, applied general theory.

Սարգսյան Ս.Ն.

Միկրոպոլյար ֆերոմագնիսական առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը

Աշխատանքում թաղանթի եռաչափ բարակ տիրույթում դիտարկվում են միկրոպոլյար ֆերոմագնիսական առաձգականության տարածական խնդրի հավասարումներն ու եզրային պայմանները: Ընդունվում են ասիմպտոտիկ ճիշտ վարկածներ, որոնց հիման վրա կառուցվում է միկրոպոլյար ֆերոմագնիսական առաձգական բարակ թաղանթի ընդհանուր կիրառական տեսությունը: Միկրոպոլյար ֆերոմագնիսական առաձգական բարակ սալերի ու ձողերի կիրառական տեսությունները ստացվում են որպես թաղանթների համար կառուցված տեսության մասնավոր դեպքեր:

Sargsyan S.H.

General theory of micropolar ferromagnetic elastic thin shells

In the present paper spatial equations and boundary conditions of micropolar ferromagnetic theory of elasticity are considered in three-dimensional thin domain of the shell. Asymptotically correct hypotheses are accepted and general applied theory of ferromagnetic elastic thin shells is constructed. Applied theories of micropolar ferromagnetic elastic thin plates and bars can be obtained as private cases of the theory of shells.

В работе в тонкой трёхмерной области оболочки рассматриваются пространственные уравнения и граничные условия микрополярной ферромагнитной теории упругости. Принимаются асимптотически точные гипотезы и в результате построена общая прикладная теория микрополярных упругих ферромагнитных тонких оболочек. Прикладные теории микрополярных ферромагнитных упругих тонких пластин и балок будут следовать как частные случаи теории оболочек.

Введение. Известно [1,2], что если диэлектрическое ферромагнитное тело находится в магнитном поле, то происходит её намагничивание и в ней возникают массовые распределённые объёмные силы и объёмные моменты. Из-за наличия объёмных распределённых моментов тензор механических напряжений обязательно будет несимметричным. Это означает, что задача об определении напряжённо-деформированного состояния (НДС) в ферромагнитном теле естественно (обоснованно) изучать на основе несимметричной (микрополярной, моментной) теории упругости [3-10].

Так как магнитоупругие эффекты весьма существенны в тонких телах, следовательно, актуально построение математических моделей микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек, пластин и балок.

К обзору по построению математических моделей микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок без учёта магнитоупругого взаимодействия посвящены работы [11-13]. В работах [14-18], на основе метода гипотез, который имеет асимптотическое обоснование, построены общие прикладные модели микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок. Этим же подходом в

* Работа доложена на 23-ем Конгрессе IUTAM , 19-24 Августа, 2012. Пекин, Китай.

работах [19-21] построены общие прикладные модели микрополярной термоупругости и магнитоупругости (для неферромагнитных материалов) тонких оболочек, пластин и балок.

В данной работе развивается этот подход и построена общая прикладная двумерная модель микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений (теории микрополярных ферромагнитных упругих тонких пластин и балок будут следовать как частные случаи теории оболочек).

Отметим, что в рамках классической теории упругости, к изучению задач о прочности, колебаниях и устойчивости ферромагнитных упругих тел, тонких оболочек, пластин и балок посвящены работы [22-28 и др.]. Особо следует отметить монографию [28], в котором изложены основные положения теории ферромагнитных упругих тонких пластин и оболочек на основе классического подхода.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное микрополярное диэлектрическое ферромагнитное (магнитно-мягкое) упругое тело. Пусть оболочка в недеформированном состоянии помещена в начально-заданном стационарном магнитном поле, для которого имеют место уравнения магнитостатики:

во внутренней области тела-оболочки

$$\operatorname{rot} \vec{H}_* = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B}_* = 0, \quad \vec{B}_* = \mu_0 (\vec{H}_* + \vec{M}_*), \quad \vec{M}_* = \chi \vec{H}_*; \quad (1.1)$$

во внешней от тела-оболочки области (которое из себя представляет всё трёхмерное пространство с исключением области трёхмерной оболочки; электродинамические свойства этой области отождествляются со свойствами вакуума):

$$\operatorname{rot} \vec{H}_*^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B}_*^{(e)} = 0, \quad \vec{B}_*^{(e)} = \mu_0 \vec{H}_*^{(e)}, \quad \vec{M}_*^{(e)} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь, $\vec{H}_*, \vec{H}_*^{(e)}; \vec{B}_*, \vec{B}_*^{(e)}; \vec{M}_*, \vec{M}_*^{(e)}$ – соответственно векторы напряжённости, индукции и намагничённости заданного магнитного поля в теле-оболочке и в окружающем её бесконечном пространстве; μ_0 – магнитная постоянная

$$\left(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{M^2} \right); \quad \chi - \text{магнитная восприимчивость материала тела-оболочки.}$$

На граничных поверхностях тела-оболочки (на лицевых поверхностях и на поверхности края Σ) должны иметь место условия непрерывности нормальной к поверхности компонента вектора индукции и касательных компонент вектора напряжённости магнитного поля. Следует иметь в виду также соответствующие условия на бесконечности для систем уравнений магнитостатики (1.2) во внешней от тела-оболочки области.

В дальнейшем будем считать, что краевая задача для систем уравнений начального магнитного поля (1.1), (1.2) решена и все отмеченные выше величины магнитного поля как внутри области тела-оболочки, так и в окружающем пространстве наперёд известны (несколько слов об этом будут сказаны также в конце 2-го пункта).

Допустим, что в этом состоянии начинают на тело действовать также внешние поверхностные усилия и оно деформируется. Для изучения НДС трёхмерной оболочки будем исходить из основных уравнений и граничных условий пространственной статической задачи линеаризованной микрополярной теории ферромагнитоупругости (для диэлектрического материала) с независимыми полями перемещений и вращений. Это – уравнения и граничные условия механики деформируемого твёрдого тела и магнитостатики для возмущённого магнитного поля вследствие деформации (последние имеют место как внутри области тела-оболочки,

так и во внешней от нее области); условия сопряжения на граничных поверхностях тела-оболочки и условия на бесконечности:

1) Уравнения и граничные условия механики деформируемого микрополярного упругого тела с учётом объёмных сил и объёмных моментов магнитного происхождения [8, 29]:

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\nabla_m \sigma^{mk} + \rho_0 F^k &= 0, \\ \nabla_m \mu^{mk} + \varepsilon^{nmk} \sigma_{nm} + \rho_0 C^k &= 0.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Физические соотношения упругости:

$$\begin{cases} \sigma_{mn} = (\mu + \alpha) \gamma_{mn} + (\mu - \alpha) \gamma_{nm} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{nm} \\ \mu_{mn} = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{mn} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{nm} + \beta \kappa_{kk} \delta_{nm} \end{cases}\quad (1.4)$$

Геометрические соотношения:

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn} \omega^k, \quad \chi_{mn} = \nabla_m \omega_n. \quad (1.5)$$

Здесь индексы m, n, k принимают значения 1,2,3; $\hat{\sigma}, \hat{\mu}$ – тензоры силовых и моментных напряжений; $\hat{\gamma}, \hat{\chi}$ – тензоры деформаций и изгибов-кручений; $\vec{V}, \vec{\omega}$ – векторы перемещения и независимого поворота; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие постоянные микрополярного материала оболочки; ρ_0 – плотность материала оболочки; $\rho_0 \vec{F}, \rho_0 \vec{C}$ – соответственно, интенсивности массовых распределённых сил и моментов магнитного происхождения [23, 27, 28]:

$$\rho_0 F^k = \mu_0 M_*^n \nabla_n H_*^k + \mu_0 M_*^n \nabla_n h^k + \mu_0 m^n \nabla_n H_*^k, \quad (1.6)$$

$$\rho_0 C^k = \varepsilon^{nmk} \mu_0 (M_{*n} H_{*m} + M_{*n} h_m + m_n H_{*m}). \quad (1.7)$$

Отметим, что $\vec{h}, \vec{b}, \vec{m}$ – соответственно, векторы напряжённости, индукции и намагнитченности возбуждённого в трёхмерной оболочке магнитного поля.

В дальнейшем будем использовать криволинейные ортогональные координаты α_k ($k = 1, 2, 3$), принятые в теории оболочек [30], но для физических компонент вектора перемещения, вектора независимого поворота, компонентов силовых и моментных тензоров напряжений оставим уже принятые выше обозначения.

Механические граничные условия на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ будут выражаться так [23, 28]:

$$\sigma_{3i} = \pm q_i^\pm + [\sigma_{3i}^M], \quad \sigma_{33} = \pm q_3^\pm + [\sigma_{33}^M], \quad (1.8)$$

$$\mu_{3i} = \pm m_i^\pm, \quad \mu_{33} = \pm m_3^\pm, \quad i = 1, 2, \quad (1.9)$$

где символ $[A]$ означает скачок величины A на поверхностях $\alpha_3 = \pm h$ оболочки;

$\sigma_{3i}^M, \sigma_{33}^M, \sigma_{3i}^{M,e}, \sigma_{33}^{M,e}$ – компоненты магнитного тензора максвелловских напряжений, соответственно, со стороны тела и со стороны вакуума на указанных поверхностях [1, 23, 28]:

$$\sigma_{mn}^M = \mu_1 H_{*m} H_{*n} - \frac{1}{2} \mu_0 H_{*k} \delta_{mn} + \mu_1 (H_{*m} h_n + h_m H_{*n}) - \mu_0 H_{*n} h_k \delta_{mn}, \quad (1.10)$$

$$\sigma_{mn}^{M,e} = \mu_0 H_{*m}^{(e)} H_{*n}^{(e)} - \frac{1}{2} \mu_0 H_{*k}^{(e)} H_{*k}^{(e)} \delta_{mn} + \mu_0 \left(H_{*m}^{(e)} h_n^{(e)} + h_m^{(e)} H_{*n}^{(e)} \right) - \mu_0 H_{*n}^{(e)} h_k^{(e)} \delta_{mn}. \quad (1.11)$$

На поверхности края оболочки Σ , в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, механические граничные условия записываются либо в силовых и моментных напряжениях (аналогично (1.8), (1.9)), либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде.

2) Уравнения магнитостатики для возмущённого в теле-оболочке магнитного поля [23, 28]:

$$\text{rot} \vec{h} = 0, \quad \text{div} \vec{b} = 0, \quad \vec{b} = \mu_0 (\vec{h} + \vec{m}), \quad \vec{m} = \chi \vec{h}. \quad (1.12)$$

3) Уравнения магнитостатики для возмущённого магнитного поля во внешней от тела-оболочки области (в вакууме) [23, 28]:

$$\text{rot} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div} \vec{b}^{(e)} = 0, \quad \vec{b}^{(e)} = \mu_0 \vec{h}^{(e)}, \quad \vec{m}^{(e)} = 0. \quad (1.13)$$

Здесь $\vec{h}^{(e)}, \vec{b}^{(e)}, \vec{m}^{(e)}$ – соответственно векторы напряжённости, индукции и намагниченности возбуждённого магнитного поля в окружающем оболочку бесконечном пространстве (вакууме).

Граничные условия сопряжения магнитостатической части задачи имеют вид [23, 28]:

$$e_{nmk} \{ n_m^0 [h_k] - n_p^0 V_{p,m} [H_{*k}] \} = 0, \quad (1.14)$$

$$n_m^0 [b_m] - n_p^0 V_{p,m} [B_{*m}] = 0, \quad (1.15)$$

где n_m^0 – компоненты единичного вектора нормали к граничной поверхности ($\alpha_3 = \pm h$ или Σ) тела-оболочки до деформации.

Для задачи магнитостатики в области вне тела-оболочки (уравнения (1.13)) необходимо ставить ещё условия затухания на бесконечности:

$$\vec{h}^{(e)} \rightarrow 0, \quad \text{когда } r \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

2. Основные гипотезы теории магнитоупругости микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек.

Будем считать, что толщина оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае магнитоупругое явление в тонком трёхмерном теле, образующего оболочку, состоит из внутреннего состояния, охватывающего всю оболочку и окружающего её трёхмерное пространство, и пограничных слоев, локализирующего вблизи поверхности края оболочки Σ (с обеих сторон). Построение общей прикладной двумерной модели магнитоупругости микрополярных ферромагнитных тонких оболочек тесно связано с построением внутренней задачи (охватывающая и область тела-оболочки, и окружающее её бесконечное трёхмерное пространство).

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, будем строить теорию микрополярной ферроупругости тонких оболочек на основе метода гипотез.

Со стороны механической части задачи, эти гипотезы идентичны тем гипотезам, которые были приняты в работах [16-18] для построения теории микрополярных упругих тонких оболочек. К этим гипотезам присоединим ещё некоторые, которые будут относиться к магнитостатической части задачи для возмущённого в теле-оболочке и в окружающем её пространстве магнитного поля.

Таким образом, в основу построения теории микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек будем ставить следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

1) В процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически запишем так:

$$\begin{aligned} V_i &= u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \\ \omega_i &= \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2) \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Таким образом, нормально к срединной поверхности перемещение и тангенциальные независимые повороты являются постоянными функциями по толщине оболочки, а тангенциальные перемещения и нормальный независимый поворот меняются по линейному закону.

Отметим, что с точки зрения перемещений, гипотеза (2.1), по сути дела, представляет собой кинематическую гипотезу Тимошенко в классической теории упругих оболочек. Гипотезу (2.1), в целом, назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек;

2) В формулах для деформаций γ_{ii} обобщённого закона Гука (1.4), силовое напряжение σ_{33} можно пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{ii} ; аналогично, в формулах изгибов-кручений χ_{i3} обобщённого закона Гука (1.4) моментное напряжение μ_{3i} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3} ($i = 1, 2$).

3) Пользуясь допущением о тонкостенности оболочки, примем

$$1 + \frac{\alpha_3}{R_i} \approx 1 \quad (i = 1, 2).$$

4) При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(\alpha_1, \alpha_2), \quad (i = 1, 2) \quad \mu_{33} = \mu_{33}^0(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.2)$$

После вычисления указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим прибавлением к соответствующим значениям (2.2) слагаемые, получаемые интегрированием соответствующих уравнений равновесия из (1.3), для которых потребуем условие, чтобы усреднённые по толщине оболочки величины были равны нулю.

5) Будем считать, что в области тонкой оболочки компоненты вектора возбуждённого магнитного поля $\vec{h}$ по толщине тонкой оболочки меняются линейным законом:

$$h_k = h_k^0(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_k h_k^1(\alpha_1, \alpha_2) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.3)$$

6) При определении возбуждённого магнитного поля в бесконечном пространстве, область тонкой оболочки можем заменить её срединной поверхностью [31, 32], по которой в данном случае будет течь поверхностный ток, компоненты

которого имеют выражения $\left(\left[h_1^{(e)}\right], \left[h_2^{(e)}\right], 0\right)$ и на которой распределён поверхностный магнитный заряд $\left[h_3^{(e)}\right]$. Для сопряжения внешней и внутренней задач электродинамической части задачи в случае тонкой оболочки эта гипотеза асимптотическим методом обоснована в работе [32].

Отметим, что соответствующим образом сформулированные гипотезы 5) и 6) можно отнести также к граничной задаче (1.1), (1.2) для начального магнитного поля (в случае тонкой оболочки). Это замечание в дальнейшем будем иметь в виду.

3. Определение компонентов тензоров деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений в области тела-оболочки.

На основании обобщённой кинематической гипотезы Тимошенко (2.1), для компонентов тензоров деформаций, изгибов-кручений, из геометрических соотношений (1.5) получим:

$$\begin{aligned}\gamma_{ii} &= \Gamma_{ii}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 K_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{ij} &= \Gamma_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \gamma_{i3} &= \Gamma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{3i} &= \Gamma_{3i}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{33} &= 0.\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\chi_{ii} &= \kappa_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{ij} &= \kappa_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{i3} &= \kappa_{i3}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 l_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \chi_{33} &= \kappa_{33}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{3i} &= 0,\end{aligned}\quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, & \Gamma_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i - (-1)^j \Omega_3, \\ K_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_j, & K_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_i - (-1)^j \iota,\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\Gamma_{i3} = -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \quad \vartheta_i = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i},$$

$$\kappa_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i,$$

$$\kappa_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, \quad l_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i}.$$

Здесь и далее $i, j = 1, 2; i \neq j$.

Используя выражения (3.1), (3.2) для компонент тензора деформации, статическую гипотезу 2), 4), обобщённый закон Гука (1.4), уравнения равновесия (1.3) и граничные условия (1.8), (1.9) для силовых и моментных напряжений получим следующие определяющие формулы:

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}) + \alpha_3 \frac{E}{1-\nu^2} (K_{ii} + \nu K_{jj}), \\ \sigma_{ij} &= [(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}] + \alpha_3 [(\mu + \alpha) K_{ij} + (\mu - \alpha) K_{ji}], \\ \sigma_{i3} &= (\mu + \alpha) \Gamma_{i3} + (\mu - \alpha) \Gamma_{3i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} &= \overset{0}{\sigma}_{33}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \overset{1}{\sigma}_{33}(\alpha_1, \alpha_2), \\
\overset{0}{\sigma}_{33}(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{q_3^+ - q_3^-}{2} + \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_{33}^{M,e} - \sigma_{33}^M \right)^+ - \left(\sigma_{33}^{M,e} - \sigma_{33}^M \right)^- \right], \\
\overset{1}{\sigma}_{33}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 \sigma_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + \frac{\overset{0}{\sigma}_{11}}{R_1} + \frac{\overset{0}{\sigma}_{22}}{R_2} - f_3^M = \\
&= \frac{1}{2h} \left\{ (q_3^+ + q_3^-) + \left[\left(\sigma_{33}^{M,e} - \sigma_{33}^M \right)^+ + \left(\sigma_{33}^{M,e} - \sigma_{33}^M \right)^- \right] \right\}, \\
\overset{0}{\sigma}_{3i} &= (\mu + \alpha) \Gamma_{3i} + (\mu - \alpha) \Gamma_{i3}, \tag{3.5} \\
\sigma_{3i} &= \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2) + \\
&+ \alpha_3 \left\{ -\frac{1}{A_1 A_j} \left[\frac{\partial \left(A_j \overset{0}{\sigma}_{ii} \right)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \left(A_i \overset{0}{\sigma}_{ji} \right)}{\partial \alpha_j} \right] + \frac{1}{A_1 A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \overset{0}{\sigma}_{jj} - \frac{1}{A_1 A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \overset{0}{\sigma}_{ij} - \frac{\sigma_{i3}}{R_i} - f_i^M \right\} + \\
&+ \left(\frac{\alpha_3^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \left\{ -\frac{1}{A_1 A_j} \left[\frac{\partial \left(A_j \overset{1}{\sigma}_{ii} \right)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \left(A_i \overset{1}{\sigma}_{ji} \right)}{\partial \alpha_j} \right] + \frac{1}{A_1 A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \overset{1}{\sigma}_{jj} - \frac{1}{A_1 A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \overset{1}{\sigma}_{ij} - c_i^M \right\}, \\
\mu_{ii} &= (\beta + 2\gamma) k_{ii} + \beta(k_{jj} + \mathfrak{t}), \quad \overset{0}{\mu}_{33} = (\beta + 2\gamma) \mathfrak{t} + \beta(k_{11} + k_{22}), \\
\mu_{ij} &= (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}, \\
\mu_{3i} &= \overset{0}{\mu}_{3i}(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 \overset{1}{\mu}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \overset{0}{\mu}_{3i} = \frac{m_i^+ - m_i^-}{2}, \\
\overset{1}{\mu}_{3i} &= -\left\{ \frac{1}{A_i} \frac{\partial \mu_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\mu_{ii} - \mu_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \mu_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\mu_{ji} + \mu_{ij}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\overset{0}{\mu}_{i3}}{R_i} + \left(\sigma_{j3} - \overset{0}{\sigma}_{3j} \right) + m_i^M \right\} = \frac{m_i^+ + m_i^-}{2h}, \tag{3.6} \\
\mu_{i3} &= \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3} + \alpha_3 \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3}, \\
\mu_{33} &= \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1, \alpha_2) + \\
&+ \alpha_3 \left\{ -\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial \left(A_2 \overset{0}{\mu}_{13} \right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \left(A_1 \overset{0}{\mu}_{23} \right)}{\partial \alpha_2} \right] + \left(\frac{\mu_{11}}{R_1} + \frac{\mu_{22}}{R_2} \right) - \left(\overset{0}{\sigma}_{12} - \overset{0}{\sigma}_{21} \right) - m_3^M \right\} +
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\alpha_3^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \times \left\{ -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial \left(A_2^1 \mu_{13} \right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \left(A_1^1 \mu_{23} \right)}{\partial \alpha_2} \right) - \left(\overset{1}{\sigma}_{12} - \overset{1}{\sigma}_{21} \right) - \Lambda_3^M \right\}.$$

Здесь $\overset{0}{\sigma}_{ii}, \overset{0}{\sigma}_{ij}, \overset{0}{\mu}_{i3}, \overset{1}{\sigma}_{ii}, \overset{1}{\sigma}_{ij}, \overset{1}{\mu}_{i3}$ представляют собой, соответственно, постоянную и линейную по α_3 части силовых напряжений $\overset{0}{\sigma}_{ii}, \overset{0}{\sigma}_{ij}$ и моментных напряжений $\overset{0}{\mu}_{i3}$, а f_k^M ($k=1,2,3$), c_i^M ($i=1,2$), m_k^M ($k=1,2,3$), Λ_3^M выражаются та

$$f_1^M = \mu_0 \left\langle \left\{ \overset{0}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*1}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^0}{\partial \alpha_2} \overset{0}{H}_{*2} \right) + \overset{0}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*1}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2^0}{\partial \alpha_1} \overset{0}{H}_{*2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\overset{0}{H}_{*1} \overset{0}{M}_{*3} + \overset{0}{H}_{*3} \overset{0}{M}_{*1}}{R_1} + \overset{0}{M}_{*3} \overset{1}{H}_{*1} \right\} + \left\{ \overset{0}{m}_1 \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*1}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^0}{\partial \alpha_2} \overset{0}{H}_{*2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \overset{0}{m}_2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*1}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2^0}{\partial \alpha_1} \overset{0}{H}_{*2} \right) + \frac{\overset{0}{H}_{*1} \overset{0}{m}_3 + \overset{0}{H}_{*3} \overset{0}{m}_1}{R_1} + \overset{0}{m}_3 \overset{1}{H}_{*1} \right\} + \left\{ \overset{0}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{h}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^0}{\partial \alpha_2} \overset{0}{h}_2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \overset{0}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{h}_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2^0}{\partial \alpha_1} \overset{0}{h}_2 \right) + \frac{\overset{0}{h}_1 \overset{0}{M}_{*3} + \overset{0}{h}_3 \overset{0}{M}_{*1}}{R_1} + \overset{0}{M}_{*3} \overset{1}{h}_1 \right\} \right\rangle,$$

$$f_2^M = \mu_0 \left\langle \left\{ \overset{0}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*2}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^0}{\partial \alpha_2} \overset{0}{H}_{*1} \right) + \overset{0}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*2}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2^0}{\partial \alpha_1} \overset{0}{H}_{*1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \overset{0}{M}_{*3} \overset{1}{H}_{*2} + \frac{\overset{0}{H}_{*2} \overset{0}{M}_{*3} + \overset{0}{H}_{*3} \overset{0}{M}_{*2}}{R_2} \right\} + \left\{ \overset{0}{m}_1 \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*2}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^0}{\partial \alpha_2} \overset{0}{H}_{*1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \overset{0}{m}_2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*2}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2^0}{\partial \alpha_1} \overset{0}{H}_{*1} \right) + \overset{0}{m}_3 \overset{1}{H}_{*2} + \frac{\overset{0}{H}_{*2} \overset{0}{m}_3 + \overset{0}{H}_{*3} \overset{0}{m}_2}{R_2} \right\} + \left\{ \overset{0}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{h}_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^0}{\partial \alpha_2} \overset{0}{h}_1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \overset{0}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{h}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2^0}{\partial \alpha_1} \overset{0}{h}_1 \right) + \overset{0}{M}_{*3} \overset{1}{h}_2 + \frac{\overset{0}{h}_2 \overset{0}{M}_{*3} + \overset{0}{h}_3 \overset{0}{M}_{*2}}{R_2} \right\} \right\rangle, \quad (3.7)$$

$$f_3^M = \mu_0 \left\langle \overset{0}{M}_{*1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*3}}{\partial \alpha_1} + \overset{0}{M}_{*2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*3}}{\partial \alpha_2} + \overset{0}{M}_{*1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{h}_3}{\partial \alpha_1} + \overset{0}{M}_{*2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{h}_3}{\partial \alpha_2} + \overset{0}{m}_1 \frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*3}}{\partial \alpha_1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + m_2^0 \frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*3}}{\partial \alpha_2} - \frac{\overset{0}{M}_{*1} \overset{0}{H}_{*1} + \overset{0}{m}_1 \overset{0}{H}_{*1} + \overset{0}{M}_{*1} \overset{0}{h}_1}{R_1} - \frac{\overset{0}{M}_{*2} \overset{0}{H}_{*2} + \overset{0}{m}_2 \overset{0}{H}_{*2} + \overset{0}{M}_{*2} \overset{0}{h}_2}{R_2} \Bigg\}, \\
c_1^M = & \mu_0 \left\langle \left\{ \overset{1}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*1}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{0}{H}_{*2} \right) + \overset{1}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*1}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{0}{H}_{*2} \right) + \right. \right. \\
& + \overset{0}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{1}{H}_{*1}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{H}_{*2} \right) + \overset{0}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{1}{H}_{*1}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{H}_{*2} \right) + \\
& + \overset{1}{M}_{*3} \overset{1}{H}_{*1} + \frac{\overset{1}{H}_{*1} \overset{0}{M}_{*3} + \overset{0}{H}_{*1} \overset{1}{M}_{*3} + \overset{1}{H}_{*3} \overset{0}{M}_{*1} + \overset{0}{H}_{*3} \overset{1}{M}_{*1}}{R_1} \Bigg\} + \left\{ \overset{1}{m}_1 \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*1}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{0}{H}_{*2} \right) + \right. \\
& + \overset{1}{m}_2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*1}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{0}{H}_{*2} \right) + \overset{0}{m}_1 \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{1}{H}_{*1}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{H}_{*2} \right) + \\
& + \overset{0}{m}_2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{1}{H}_{*1}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{H}_{*2} \right) + \overset{1}{m}_3 \overset{1}{H}_{*1} + \frac{\overset{1}{H}_{*1} \overset{0}{m}_3 + \overset{0}{H}_{*1} \overset{1}{m}_3 + \overset{1}{H}_{*3} \overset{0}{m}_1 + \overset{0}{H}_{*3} \overset{1}{m}_1}{R_1} \Bigg\} + \\
& + \left\{ \overset{1}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{h}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{0}{h}_2 \right) + \overset{1}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{h}_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{0}{h}_2 \right) + \right. \\
& + \overset{0}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{1}{h}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{h}_2 \right) + \overset{0}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{1}{h}_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{h}_2 \right) + \\
& + \overset{1}{M}_{*3} \overset{1}{h}_1 + \frac{\overset{1}{h}_1 \overset{0}{M}_{*3} + \overset{0}{h}_1 \overset{1}{M}_{*3} + \overset{1}{h}_3 \overset{0}{M}_{*1} + \overset{0}{h}_3 \overset{1}{M}_{*1}}{R_1} \Bigg\} \Bigg\rangle, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2^M = & \mu_0 \left\langle \left\{ \overset{0}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{1}{H}_{*2}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{H}_{*1} \right) + \overset{0}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{1}{H}_{*2}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{H}_{*1} \right) + \right. \right. \\
& + \overset{1}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*2}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{0}{H}_{*1} \right) + \overset{1}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*2}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{0}{H}_{*1} \right) + \\
& + \left\{ \overset{0}{m}_1 \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{1}{H}_{*2}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{H}_{*1} \right) + \overset{1}{M}_{*3} \overset{1}{H}_{*2} + \frac{\overset{0}{H}_{*2} \overset{1}{M}_{*3} + \overset{1}{H}_{*2} \overset{0}{M}_{*3} + \overset{0}{H}_{*3} \overset{1}{M}_{*2} + \overset{1}{H}_{*3} \overset{0}{M}_{*2}}{R_2} \right\} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_2^0 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{1}{H}_{*2}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{H}_{*1} \right) + m_1^1 \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*2}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{0}{H}_{*1} \right) + \\
& + m_2^1 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{H}_{*2}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \overset{0}{H}_{*1} \right) + m_3^1 \overset{1}{H}_{*2} + \frac{\overset{0}{H}_{*2} m_3 + \overset{1}{H}_{*2} m_3 + \overset{0}{H}_{*3} m_2 + \overset{1}{H}_{*3} m_2}{R_2} \Bigg\} + \\
& + \left\{ \overset{0}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{1}{h}_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{h}_1 \right) + \overset{0}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{1}{h}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{h}_1 \right) + \right. \\
& + \overset{1}{M}_{*1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{h}_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{0}{h}_1 \right) + \overset{1}{M}_{*2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{h}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{0}{h}_1 \right) + \\
& \left. + \overset{1}{M}_{*3} \overset{1}{h}_2 + \frac{\overset{0}{h}_2 \overset{1}{M}_{*3} + \overset{1}{h}_2 \overset{0}{M}_{*3} + \overset{0}{h}_3 \overset{1}{M}_{*2} + \overset{1}{h}_3 \overset{0}{M}_{*2}}{R_2} \right\} \Bigg\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1^M &= \mu_0 \left(\overset{0}{M}_{*2} \overset{0}{H}_{*3} - \overset{0}{M}_{*3} \overset{0}{H}_{*2} + \overset{0}{m}_2 \overset{0}{H}_{*3} - \overset{0}{m}_3 \overset{0}{H}_{*2} + \overset{0}{M}_{*2} \overset{0}{h}_3 - \overset{0}{M}_{*3} \overset{0}{h}_2 \right), \\
m_2^M &= \mu_0 \left(\overset{0}{M}_{*3} \overset{0}{H}_{*1} - \overset{0}{M}_{*1} \overset{0}{H}_{*3} + \overset{0}{m}_3 \overset{0}{H}_{*1} - \overset{0}{m}_1 \overset{0}{H}_{*3} + \overset{0}{M}_{*3} \overset{0}{h}_1 - \overset{0}{M}_{*1} \overset{0}{h}_3 \right), \\
m_3^M &= \mu_0 \left(\overset{0}{M}_{*1} \overset{0}{H}_{*2} - \overset{0}{M}_{*2} \overset{0}{H}_{*1} + \overset{0}{m}_1 \overset{0}{H}_{*2} - \overset{0}{m}_2 \overset{0}{H}_{*1} + \overset{0}{M}_{*1} \overset{0}{h}_2 - \overset{0}{M}_{*2} \overset{0}{h}_1 \right), \\
\Lambda_3^M &= \mu_0 \left(\overset{1}{M}_{*1} \overset{0}{H}_{*2} - \overset{1}{M}_{*2} \overset{0}{H}_{*1} + \overset{0}{M}_{*1} \overset{1}{H}_{*2} - \overset{0}{M}_{*2} \overset{1}{H}_{*1} + \overset{1}{m}_1 \overset{0}{H}_{*2} - \overset{1}{m}_2 \overset{0}{H}_{*1} + \overset{0}{M}_{*1} \overset{1}{h}_2 - \overset{0}{M}_{*2} \overset{1}{h}_1 \right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\sigma_{3i}^{M,e}(\alpha_3 = \pm h) - \sigma_{3i}^M(\alpha_3 = \pm h), \quad \sigma_{33}^{M,e}(\alpha_3 = \pm h) - \sigma_{33}^M(\alpha_3 = \pm h)$$

выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{31}^{M,e}(\alpha_3 = \pm h) - \sigma_{31}^M(\alpha_3 = \pm h) &= \frac{\mu_0 \chi}{\mu_r} \mathfrak{g}_1 \left[H_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \right]^2 + \mu_0 \chi \mathfrak{g}_1 \left[H_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \right]^2 + \\
&+ \mu_0 \chi \mathfrak{g}_2 H_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \cdot H_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) = \\
&= \left\{ \frac{\mu_0 \chi}{\mu_r} \left[H_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \right]^2 + \mu_0 \chi \left[H_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \right]^2 \right\} \mathfrak{g}_1 + \\
&+ \mu_0 \chi H_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \cdot H_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \cdot \mathfrak{g}_2, \\
\sigma_{32}^{M,e}(\alpha_3 = \pm h) - \sigma_{32}^M(\alpha_3 = \pm h) &= \frac{\mu_0 \chi}{\mu_r} \mathfrak{g}_2 \left[H_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \right]^2 + \\
&+ \mu_0 \chi \mathfrak{g}_2 \left[H_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \right]^2 + \mu_0 \chi \mathfrak{g}_1 H_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \cdot H_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) = \\
&= \mu_0 \chi H_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \cdot H_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \mathfrak{g}_1 +
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{\mu_0 \chi}{\mu_r} \left[H_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \right]^2 + \mu_0 \chi \left[H_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \right]^2 \right\} \mathfrak{D}_2, \\
\sigma_{33}^{M,e} - \sigma_{33}^M &= \frac{\mu_0 \chi^2}{\mu_r} H_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \cdot H_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \cdot \mathfrak{D}_1 + \\
& + \frac{\mu_0 \chi^2}{\mu_r} H_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \cdot H_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \cdot \mathfrak{D}_2 + \\
& + \frac{\mu_0 \chi^2}{2\mu_r^2} \left(H_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \right) + \frac{\mu_0 \chi^2}{\mu_r} H_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) \cdot h_3, \\
H_{*k}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h) &= \frac{1}{\mu_0} B_{*k}^{(e)}(\alpha_3 = \pm h), \quad k = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

4. Основные уравнения магнитоупругости (механической части задачи) микрополярных ферромагнитных тонких оболочек.

С целью приведения трёхмерной системы уравнений (1.3)-(1.7) микрополярной теории магнитоупругости к двумерной (для механической части в составе общей задачи магнитоупругости), что уже выполнено для перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, будем вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводить статически эквивалентные им интегральные характеристики [15-17]: усилия $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$, моменты $M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}$ и гипермоменты Λ_{i3} , которые с учётом предположения 3) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} d\alpha_3, \quad S_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} d\alpha_3, \quad N_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} d\alpha_3, \quad N_{3i} = \int_{-h}^h \sigma_{3i} d\alpha_3, \\
M_{ii} &= \int_{-h}^h \alpha_3 \sigma_{ii} d\alpha_3, \quad H_{ij} = \int_{-h}^h \alpha_3 \sigma_{ij} d\alpha_3, \quad L_{ii} = \int_{-h}^h \mu_{ii} d\alpha_3, \quad L_{33} = \int_{-h}^h \mu_{33} d\alpha_3, \quad (4.1) \\
L_{ij} &= \int_{-h}^h \mu_{ij} d\alpha_3, \quad L_{i3} = \int_{-h}^h \mu_{i3} d\alpha_3, \quad \Lambda_{i3} = \int_{-h}^h \alpha_3 \mu_{i3} d\alpha_3.
\end{aligned}$$

Используя выражения (3.5), (3.6) для силовых и моментных напряжений, на основании формул (4.1) получим:

соотношения упругости:

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \quad S_{ij} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}], \\
M_{ii} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \quad H_{ij} = \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha) K_{ij} + (\mu - \alpha) K_{ji}], \quad (4.2) \\
N_{i3} &= 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{i3} + (\mu - \alpha) \Gamma_{3i}], \quad N_{3i} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{3i} + (\mu - \alpha) \Gamma_{i3}], \\
L_{ii} &= 2h [(\beta + 2\gamma) k_{ii} + \beta (k_{jj} + \iota)], \quad L_{ij} = 2h [(\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}], \\
L_{33} &= 2h [(\beta + 2\gamma) \iota + \beta (\kappa_{11} + \kappa_{22})], \quad L_{i3} = 2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3}, \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3}. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Теперь, используя формулы из (3.5), (3.6) для $\sigma_{3i}, \sigma_{33}, \mu_{3i}, \mu_{33}$ и удовлетворяя граничным условиям (1.8), (1.9) на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$, приходим к следующим уравнениям равновесия магнитоупругости для ферромагнитных оболочек:

уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial S_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (S_{21} + S_{12}) + \\
& + \frac{N_{13}}{R_1} + 2hf_1^M = -(q_1^+ + q_1^-) - P_1^M; \\
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (T_{22} - T_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (S_{12} + S_{21}) + \\
& + \frac{N_{23}}{R_2} + 2hf_2^M = -(q_2^+ + q_2^-) - P_2^M, \\
& \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - 2hf_3^M = (q_3^+ + q_3^-) + P_3^M, \\
& N_{31} - \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (H_{21} + H_{12}) + \frac{2h^3}{3} c_1^M \right] = \\
& = h(q_1^+ - q_1^-) + hq_1^M, \\
& N_{32} - \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (M_{22} - M_{11}) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (H_{12} + H_{21}) + \frac{2h^3}{3} c_2^M \right] = \\
& = h(q_2^+ - q_2^-) + hq_2^M,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial L_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (L_{11} - L_{22}) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial L_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (L_{21} + L_{12}) + \\
& + \frac{L_{13}}{R_1} + (N_{23} - N_{32}) + 2hm_1^M = -(m_1^+ + m_1^-), \\
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial L_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (L_{22} - L_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (L_{12} + L_{21}) + \\
& + \frac{L_{23}}{R_2} + (N_{31} - N_{13}) + 2hm_2^M = -(m_2^+ + m_2^-),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (S_{12} - S_{21}) - 2hm_3^M = (m_3^+ + m_3^-), \\
& L_{33} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (H_{12} - H_{21}) - \frac{2h^3}{3} \Lambda_3^M = h(m_3^+ - m_3^-).
\end{aligned}$$

Здесь P_1^M, P_2^M, P_3^M определяются через разности компонент максвеловского тензора напряжений на граничных поверхностях $\alpha_3 = \pm h$:

$$\begin{aligned} P_1^M &= (\sigma_{31}^{M,e} - \sigma_{31}^M)^+ + (\sigma_{31}^{M,e} - \sigma_{31}^M)^-, \quad P_2^M = (\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M)^+ + (\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M)^-, \\ P_3^M &= (\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M)^+ + (\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M)^-, \quad q_1^M = (\sigma_{31}^{M,e} - \sigma_{31}^M)^+ - (\sigma_{31}^{M,e} - \sigma_{31}^M)^-, \\ q_2^M &= (\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M)^+ - (\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M)^-. \end{aligned} \quad (4.6)$$

5. Основные интегро-дифференциальные уравнения магнитоупругости (магнитостатическая часть задачи в целом) микрополярных ферромагнитных тонких оболочек.

Обращаемся сначала к магнитостатической части задачи для возмущённого магнитного поля в области тела-оболочки (уравнения (1.12)). Будем придерживаться гипотезы 5). Чтобы определить выражения для $h_1^1(\alpha_1, \alpha_2)$, $h_2^1(\alpha_1, \alpha_2)$, сначала

для h_3 примем: $h_3 = h_3^0(\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда, используя первые два компонентных уравнения векторного уравнения $\text{rot} \vec{h} = 0$, из системы (1.12) получим

$$h_i^1(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial h_3^0(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_i}. \quad (5.1)$$

Далее, выражения для h_1 и h_2 из (2.3) подставим в скалярное уравнение $\text{div} \vec{b} = 0$ ($\text{div} \vec{h} = 0$) и после интегрирования по α_3 , удерживая только линейные члены, для $h_3^1(\alpha_1, \alpha_2)$ получим:

$$h_3^1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial \left(h_1^0 A_2 \right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \left(h_2^0 A_1 \right)}{\partial \alpha_2} \right]. \quad (5.2)$$

Таким образом, в области тела-оболочки для компонент напряжённости возбуждённого магнитного поля имеем формулы (2.3), где необходимо учитывать выражения (5.1) и (5.2).

Рассмотрим теперь магнитостатическую часть задачи для возбуждённого магнитного поля вне тела-оболочки области (уравнения (1.13)).

Принимая гипотезу 6), для внутренней задачи магнитостатики возмущённого магнитного поля (система уравнений (1.13)) во внешней от тела-оболочки области (которая представляет собой всё трёхмерное пространство с исключением области тонкой оболочки) существенно упрощается геометрия области интегрирования. Теперь эту область можем считать полным пространством с разрезом по срединной поверхности оболочки, по которой будет течь поверхностный ток, кроме того, на этой поверхности будет присутствовать магнитный распределённый заряд.

Допущение 6) даёт возможность, зная тензоры Грина для внешней задачи магнитостатики (1.13) всего бесконечного пространства, взаимосвязанную магнитостатическую задачу (1.12), (1.13) привести к интегродифференциальным уравнениям в области срединной поверхности оболочки Ω (первая задача, когда имеются по разрезу только поверхностный ток-вектор с компонентами $[h_1^e][h_2^e]0$, и

вторая задача, когда на разрезе имеется только магнитный распределённый заряд интенсивности $[h_3^e]$.

Сформулируем задачи о тензоре функций Грина для внешней задачи магнитостатики (система уравнений (1.13)) возмущённого магнитного поля, когда область интегрирования является полным пространством, а в точке $(\alpha_1^0, \alpha_2^0) \in \Omega$ имеем сосредоточенный фактор (либо ток, либо магнитный заряд):

$$\text{I) } \mathbf{rot} \vec{h}^{(e)} = \vec{I}, \quad \mathbf{div} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \vec{I} = \left\{ \delta(\alpha_1^0, \alpha_2^0), \delta(\alpha_1^0, \alpha_2^0), 0 \right\} \quad (5.3)$$

$$\text{II) } \mathbf{rot} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \mathbf{div} \vec{h}^{(e)} = \delta(\alpha_1^0, \alpha_2^0), \quad (5.4)$$

Здесь $\delta(\alpha_1^0, \alpha_2^0)$ – дельта-функция Дирака; $(\alpha_1^0, \alpha_2^0) \in \Omega$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$.

Пусть имеем тензор функций Грина для I) задачи, тогда для нормальной компоненты возбуждённого магнитного поля, когда по срединной поверхности оболочки Ω будет течь поверхностный ток с компонентами $(h_1^{(e)}(\alpha_3 = +h) - h_1^{(e)}(\alpha_3 = -h))$, $(h_2^{(e)}(\alpha_3 = +h) - h_2^{(e)}(\alpha_3 = -h))$, получим:

$$\begin{aligned} h_3^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = & \iint_{\Omega} K_{13}(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0) [h_1^{(e)}(\alpha_3 = +h) - h_1^{(e)}(\alpha_3 = -h)] d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} K_{23}(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0) [h_2^{(e)}(\alpha_3 = +h) - h_2^{(e)}(\alpha_3 = -h)] d\Omega, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3, \quad (\alpha_1^0, \alpha_2^0) \in \Omega.$$

Здесь $K_{13}(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0)$ и $K_{23}(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0)$ – компоненты тензора функций Грина задачи I).

Для определения разности $h_k^{(e)}(\alpha_3 = +h) - h_k^{(e)}(\alpha_3 = -h)$ $k = 1, 2, 3$, используем граничные условия сопряжения (1.14), (1.15). Имея в виду выражения для перемещений V_k ($k = 1, 2, 3$) из формул (2.1), получим:

$$\begin{aligned} h_i - h_i^{(e)} &= \mathfrak{G}_i(H_{*3} - H_{*3}^{(e)}) \quad \text{при } \alpha_3 = \pm h, \quad i = 1, 2, \\ \mu_r h_3 - h_3^{(e)} &= -\mathfrak{G}_1(B_{*1} - B_{*1}^{(e)}) - \mathfrak{G}_2(B_{*2} - B_{*2}^{(e)}) \quad \text{при } \alpha_3 = \pm h, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\mathfrak{G}_i$ имеет вид по соответствующей формуле из (3.4).

Из формул (5.3) для определения разностей $h_k^{(e)}(\alpha_3 = +h) - h_k^{(e)}(\alpha_3 = -h)$ ($k = 1, 2, 3$) будем иметь:

$$\begin{aligned} h_1^{(e)}(\alpha_3 = +h) - h_1^{(e)}(\alpha_3 = -h) &= \\ &= 2h \frac{1}{A_1} \frac{\partial h_3^0(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\chi}{\mu_1} \mathfrak{G}_1 [B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = +h) - B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = -h)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h_2^{(e)}(\alpha_3 = +h) - h_2^{(e)}(\alpha_3 = -h) = \\
& = 2h \frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{h}_3(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\chi}{\mu_1} \mathfrak{G}_2 \left[B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = +h) - B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = -h) \right], \quad (5.7) \\
& h_3^{(e)}(\alpha_3 = +h) - h_3^{(e)}(\alpha_3 = -h) = -2h\mu_r \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial \left(\overset{0}{h}_1 A_2 \right)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial \left(\overset{0}{h}_2 A_1 \right)}{\partial \alpha_2} \right\} + \\
& + \frac{\chi}{\mu_0} \left[B_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = +h) - B_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = -h) \right] \mathfrak{G}_1 + \\
& + \frac{\chi}{\mu_0} \left[B_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = +h) - B_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = -h) \right] \mathfrak{G}_2.
\end{aligned}$$

Теперь, применяя следующую формулу [33]:

$$h_3^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Big|_{\alpha_3=0} = \frac{h_3^{(e)}(z = +h) + h_3^{(e)}(z = -h)}{2}, \quad (5.8)$$

с учётом выражений (5.3) для $h_3^{(e)}$ при $z = \pm h$, где $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$, а также с учётом интегрального выражения (5.7) и формул (5.4) приходим к следующему интегродифференциальному уравнению в области срединной поверхности оболочки $\Omega((\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega)$:

$$\begin{aligned}
& \mu_r \overset{0}{h}_3(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\chi}{\mu_0} \mathfrak{G}_1 \frac{B_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = +h) + B_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = -h)}{2} + \\
& + \frac{\chi}{\mu_0} \mathfrak{G}_2 \frac{B_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = +h) + B_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = -h)}{2} = \\
& = \iint_{\Omega} K_{13}(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0) \left[2h \frac{1}{A_1} \frac{\partial \overset{0}{h}_3(\alpha_1^0, \alpha_2^0)}{\partial \alpha_1} + \frac{\chi}{\mu_1} \mathfrak{G}_1 (B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = +h) - B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = -h)) \right] d\Omega + \\
& + \iint_{\Omega} K_{23}(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0) \left[2h \frac{1}{A_2} \frac{\partial \overset{0}{h}_3(\alpha_1^0, \alpha_2^0)}{\partial \alpha_2} + \frac{\chi}{\mu_1} \mathfrak{G}_2 (B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = +h) - B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = -h)) \right] d\Omega.
\end{aligned} \quad (5.9)$$

Аналогичным образом, если имеем тензор функций Грина для задачи II) (5.4), то для $h_1^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $h_2^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ будем иметь:

$$h_1^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \iint_{\Omega} P_1(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0) [h_3^{(e)}] d\Omega, \quad (5.10)$$

$$h_2^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \iint_{\Omega} P_2(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0) [h_3^{(e)}] d\Omega, \quad (5.11)$$

где $P_1(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0)$, $P_2(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0)$ — компоненты тензора Грина для задачи II). Здесь также $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$, $(\alpha_1^0, \alpha_2^0) \in \Omega$.

Применяя следующие выражения [33]:

$$\begin{aligned} h_1^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Big|_{\alpha_3=0} &= \frac{h_1^{(e)}(\alpha_3 = +h) + h_1^{(e)}(\alpha_3 = -h)}{2}, \\ h_2^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Big|_{\alpha_3=0} &= \frac{h_2^{(e)}(\alpha_3 = +h) + h_2^{(e)}(\alpha_3 = -h)}{2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

с учётом формул (5.3) для $h_1^{(e)}(\alpha_3 = \pm h)$, $h_2^{(e)}(\alpha_3 = \pm h)$, интегральных выражений (5.10), (5.11) и формулы (5.4), приходим к следующей системе интегродифференциальных уравнений в области срединной поверхности оболочки $\Omega((\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega)$:

$$\begin{aligned} {}^0 h_1(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\chi}{\mu_1} \vartheta_1 \frac{B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = +h) + B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = -h)}{2} &= \iint_{\Omega} P_1(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0) \times \\ &\times \left\{ -2\mu_r h \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial \left({}^0 h_1 A_2 \right)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial \left({}^0 h_2 A_1 \right)}{\partial \alpha_2} \right] + \right. \\ &+ \frac{\chi}{\mu_0} \left(B_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = +h) - B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = -h) \right) \vartheta_1 + \frac{\chi}{\mu_0} \left(B_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = +h) - B_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = -h) \right) \vartheta_2 \Big\} d\Omega, \\ {}^0 h_2(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\chi}{\mu_1} \vartheta_2 \frac{B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = +h) + B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = -h)}{2} &= \\ &= \iint_{\Omega} P_2(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2 - \alpha_2^0) \left\{ -2\mu_r h \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial \left({}^0 h_1 A_2 \right)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial \left({}^0 h_2 A_1 \right)}{\partial \alpha_2} \right] + \right. \\ &+ \frac{\chi}{\mu_0} \left(B_{*1}^{(e)}(\alpha_3 = +h) - B_{*3}^{(e)}(\alpha_3 = -h) \right) \vartheta_1 + \frac{\chi}{\mu_0} \left(B_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = +h) - B_{*2}^{(e)}(\alpha_3 = -h) \right) \vartheta_2 \Big\} d\Omega. \end{aligned} \quad (5.13)$$

6. Математическая модель микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек.

Таким образом, построены основные уравнения общей теории магнитоупругости микрополярных ферромагнитных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Это – уравнения равновесия (4.4), (4.5), соотношения упругости (4.2), (4.3), геометрические соотношения (3.3), (3.4), интегродифференциальные уравнения (5.9), (5.13), (5.14).

К этим основным уравнениям следует присоединить соответствующие граничные условия на контуре Γ срединной поверхности оболочки Ω .

Принимая гипотезу б), означает, что для задачи во внешней от тела-оболочки области можно пренебрегать магнитостатическими процессами в узком слое, заключённым между поверхностями $\alpha_3 = \pm h$. Это означает, что для внутренней задачи во внешней от тела-оболочки области имеет значение излучение только через лицевые поверхности $\alpha_3 = \pm h$ оболочки, а излучением через поверхность края оболочки Σ можно пренебрегать. Это, в свою очередь, означает, что усреднённые по толщине оболочки значения компонент напряжённости возмущённого магнитного

поля в точках граничной линии Γ срединной поверхности оболочки Ω должны обращаться в ноль, кроме этого, на том же основании можно пренебрегать усреднённым силовым магнитным взаимодействием (магнитный тензор максвеловских напряжений) на поверхности края оболочки Σ .

На основе вышеизложенного, для компонент возбуждённого в оболочке магнитного поля на контуре Γ срединной поверхности оболочки необходимо ставить следующие нулевые граничные условия:

$$h_k^0(\alpha_1, \alpha_2) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (6.1)$$

а для механической части задачи граничные условия на Γ остаются теми же, каковыми они были без магнитомеханических взаимодействий [15-17]. Если контур Γ совпадает с координатной линией $\alpha_1 = \text{const}$, то эти граничные условия будут выражаться так:

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, S_{12} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*, N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*, \quad (6.2)$$

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, H_{12} = H_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*, L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11} = \kappa_{11}^*,$$

$$L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*. \quad (6.3)$$

Отметим, что в построенной математической модели магнитоупругости микрополярных ферромагнитных тонких оболочек полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Если в уравнениях равновесия на основе принципа Даламбера введём силы,

$$\text{моменты и гипермоменты инерции } 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}, 2Ih \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2},$$

$$2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}, \frac{2h^3}{3} I \frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2}, \text{ кроме этого, зададим начальные условия для величин:}$$

$$u_i, w, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \Omega_i, \Omega_3, \frac{\partial \Omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}, \iota, \frac{\partial \iota}{\partial t} \text{ при } t = 0, \text{ то придём к динамической модели магнитоупругости микрополярных ферромагнитных (диэлектрических) тонких оболочек.}$$

Основные уравнения и граничные условия (начальные условия) общей теории магнитоупругости статической (динамической) деформации микрополярных ферромагнитных упругих тонких пластин и балок можно получить как частные случаи построенной модели оболочек.

Если в модели (4.4), (4.5), (4.2), (4.3), (3.3), (3.4), (5.13), (5.14), (6.1), (6.2), (6.3) магнитоупругости микрополярных ферромагнитных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений формально принять $\alpha = 0$, то получим систему основных уравнений и граничных условий магнитоупругости статической (динамической) деформации ферромагнитных тонких оболочек на основе классической теории упругости (в такой модели полностью будут учтены поперечные сдвиговые деформации); а при $\alpha \rightarrow \infty$ получим систему основных уравнений и граничные условия магнитоупругости ферромагнитных тонких оболочек со стеснённым вращением. Из указанной общей системы уравнений и граничных условий можно получить и другие частные модели микрополярных ферромагнитных тонких оболочек.

На основе построенной общей теории магнитоупругости ферромагнитных микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок будут решены определённые прикладные задачи об определении напряжённо-деформированного состояния, изучении собственных и вынужденных колебаний, статической и динамической устойчивости в указанных тонких телах.

Важно также отметить, что построение общей теории и изучение конкретных задач магнитоупругости ферромагнитных микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок открывают возможности разработке экспериментального метода для определения упругих постоянных ферромагнитного микрополярного тела.

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности, проведённого Государственным комитетом по науке МОН Республики Армения в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616с.
2. Brown W.G. Theory of Magnetoelastic Effect in Ferromagnetism//Journ. of Appl. Phys. 1965. Vol.36.
3. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Изд-во "Мир", 1965. 480с.
4. Kaliski S., Nowacki W. Wave-type Equations of Thermomagneto-microelasticity//Bull. De L'Academie Polonaise des Sciences. 1970. Vol. XVIII. №4. P.155-159.
5. Желнорович В.А. Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренним электромагнитным и механическим моментами. М.: Изд-во Московского университета, 1980. 175с.
6. Tiersten H.F. Coupled Magnetomechanical Equations for Magnetically Saturated Insulators //Jour. of Math. Phys. 1964. Vol.5. №9. P.1298-1318.
7. Maugin G.A. Continuum Mechanics of Electromagnetic solids. North-Holand: ets. 1988.
8. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. Springer. 1998. 325p.
9. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368с.
10. Багдасарян Г.Е., Асаян Д.Д. Основные уравнения и соотношения теории несимметричной магнитоупругости ферромагнитного тела // В сб.: "Проблемы механики тонких деформируемых тел". Ереван: Изд-во НАН Армении, 2002. С.37-47.
11. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек// Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С.84-95.
12. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-Type Theories of Plates and Shells: a Short Review and Bibliography// Arch. Appl. Mech. Special Issue. - Doi 10. - 1007/s 00419-009-0365-3.
13. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates //Z Angew. Math. Mech (ZAMM). 2009. V.89. № 4. P.242-256.
14. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
15. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик//Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. №2. С.148-155.
16. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66.

17. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells// Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. 2011. Vol.15. P. 91-100.
18. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Доклады РАН. 2011. Т.436. №2. С.195-198.
19. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Thermoelasticity of Micropolar Elastic Thin Shells// Proceedings of 9th International Congress on Thermal Stresses 2011. June 5-9, 2011, Budapest. 4 p.
20. Sargsyan S.H., Sargsyan L.S. Magnetoelasticity of Thin Shells and Plates Based on the Asymmetrical Theory of Elasticity // Advances in Mechanics and Mathematics. Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After the Cosserats. Springer. 2010. Vol. 21. P.325-337.
21. Саркисян Л.С., Саркисян С.О. Математические модели магнитоупругости микрополярных электропроводящих (неферромагнитных) тонких оболочек //Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №2. С.34-45.
22. Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Устойчивость ферромагнитной пластинки в потоке газа при наличии магнитного поля //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1972. Т.25. №3. С.18-28.
23. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1988. 488с.
24. Moon F.C. Magneto-solid Mechanics. New York, ets. Wiley. 1984. 436p.
25. Подильчук Ю.Н., Терещенко Л.Н. Концентрация напряжений в магнито-мягком ферромагнетике с эллиптическим включением при действии однородного магнитного поля// Прикладная механика. 2004. Т.40. №1. С.83-93.
26. Shindo Y. The Linear Magnetoelastic problem for a soft Ferromagnetic Elastic Solid with a Finite crack//J. Appl. Mech. (ASME). 1997. Vol. 44. P.47-50.
27. Pao Y.H., Yen C.S. A Linear Theory for Soft Ferromagnetic Elastic Solids //Int. J. Eng. Sci. 1973. Vol.11. №4. P.415-436.
28. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1999. 440с.
29. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon Press. 1986. 383p.
30. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ, 1953. 544с.
31. Багдасарян Г.Е. Уравнения магнитоупругих колебаний тонких идеально проводящих пластин //Прикладная механика. 1983. Т. XIX. №12. С.87-91.
32. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении, 1992. 260с.
33. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736с.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович – Чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.

Тел.: (093) 15 16 98; **E-mail:** slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 03.10.2012

**ОПТИМИЗАЦИЯ ГАРАНТИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ПОИСКОМ
ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА**

Аветисян В.В.

Ключевые слова: гарантированный поиск, оптимальное управление
Keywords: guaranteed search, optimal control

Ավետիսյան Վ.Վ.

Շարժվող օբյեկտի փնտրման երաշխավորող ղեկավարման օպտիմալացումը

Դիտարկվում է հարթության մեջ արագությամբ ղեկավարվող շարժական կետային օբյեկտի օպտիմալ երաշխավորված փնտրման խնդիրը, երբ սկզբնական պահին հայտնի է միայն որոնելի օբյեկտի գտնվելու շրջանային տիրույթը: Որպես փնտրվող է դիտարկվել եռաչափ տարածության մեջ արագությամբ ղեկավարվող կետային օբյեկտը: Հայտնաբերումը որոնելի օբյեկտի ճշգրիտ կոորդինատների որոշումն իրականացվում է շարժական կոնի շրջանաձև ինֆորմացիոն հիմքի միջոցով, որի գագաթը կապված է փնտրող օբյեկտի ընթացիկ կոորդինատների հետ: Պահանջվում է հայտնաբերումն իրականացնել ամենաարագ ձևով: Առաջարկված է ղեկավարման ալգորիթմ, ինչպես նաև ստացված են անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում որոնելի օբյեկտը երաշխավորված հայտնաբերվում է հնարավոր նվազագույն ժամանակում: Ներկա աշխատանքի խնդրի դրվածքի հիմնական տարբերությունը [1-8] խնդիրների դրվածքներից կայանում է նրանում, որ [1-6]-ում փնտրումն իրականացվում է որոնելի անշարժ կամ շարժական օբյեկտի գտնվելու անորոշության տիրույթում, իսկ [7,8]-ում որոնելի օբյեկտի փնտրումը սկսվում է անորոշության տիրույթից դուրս, սակայն [7]-ում հարթությամբ վրա շարժվող փնտրող օբյեկտը հայտնաբերումն իրականացնում է հաստատուն շառավղով շրջանային տիրույթի, իսկ [8]-ում՝ կիսահարթության միջոցով:

Avetisyan V.V.

Optimization of guaranteed control of search for mobile object

A problem of optimal search of moving point object with controllable speed in space is observed, where in the initial stage only the circular domain of the sought object is known. The sought object is a point object with controllable speed. The discovery, i.e. the identification of the precise coordinates of the object, is implemented through the moving information basis of the cone, the apex of which is connected to the current coordinates of the sought object. It is required to locate the object as quickly as possible. A control algorithm is proposed, as well as sufficient conditions identified, for a guaranteed discovery of the sought object in minimal timeframe. The objective of the problem set in the present paper is different from that of the problems [1-8] since in [1-6] the search is implemented in an unknown domain with immovable or moving sought object, whereas in [7,8] the search of the sought object starts outside of the unknown domain, where in [7] the searching body moves over a surface and completes the discovery through circular domain with a fixed radius, and in [8] the sought object is located through a semi-surface.

Рассматривается задача оптимального гарантированного поиска подвижного точечного объекта, совершающего управляемое по скорости движение на плоскости в предположении, что известно положение искомого объекта в начальный момент с точностью до некоторого заданного круга неопределённости. В качестве ищущего принимается точечный объект, управляемый по скорости в трёхмерном пространстве. Обнаружение – определение точных координат искомого объекта осуществляется с помощью информационного круга – основания некоторого конуса, вершина которого связана с текущими координатами ищущего объекта. Необходимо осуществить обнаружение наискорейшим образом. Предложен алгоритм управления, а также получены необходимые и достаточные условия, при которых искомый объект гарантированно обнаруживается за возможно минимальное время. Основное отличие постановки задачи данной работы от постановок задач гарантированного поиска целевого объекта [1-8] состоит в том, что в [1-6] поиск ведётся внутри области неопределённости искомого объекта, а в [7,8] поиск на плоскости начинается вне круга неопределённости, однако в [7] движущийся на плоскости ищущий обнаружение искомого объекта осуществляет с помощью круга постоянного радиуса, а в [8] – с помощью полуплоскости.

1. Пусть имеются два точечных объекта X и Y , из которых X – ищущий, а Y – искомый. Оба объекта, обладая ограниченными линейными скоростями, имеют возможность в каждый момент времени произвольно изменять направления своих движений: X – в пространстве, а Y – на плоскости согласно следующим уравнениям, ограничениям и начальным данным:

$$X: \dot{x} = u, \quad x(t_0) = x^0; \quad |u(t)| \leq U; \quad x, u \in R^3 \quad (1.1)$$

$$Y: \dot{y} = v, \quad y(t_0) = y^0; \quad |v(t)| \leq V; \quad y, v \in R^2 \quad (1.2)$$

В (1.1), (1.2) x, y – радиус-векторы координат объектов; u, v – их управляющие скорости, которые являются кусочно-непрерывными функциями от t , $t \geq t_0$; U, V – максимально возможные скорости объектов X, Y .

Предположим, что в каждый момент времени $t \geq t_0$ объекту X точно известно свои фазовые координаты и максимальная скорость объекта Y . О координатах Y объекту X известно лишь то, что в начальный момент времени $t = t_0$ Y находится в заданном круге неопределённости

$$y^0 \in D_0 = \{y \in R^2 : |y - \tilde{y}^0| \leq r_0\} \quad (1.3)$$

с центром в точке $\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_2^0) \in R^2$ и радиусом r_0 , которые также известны X .

Возможность установления точных координат искомого объекта Y осуществляется с помощью подвижной и изменяющейся во времени информационной области

$$G(x(t), C) = \left\{ \tilde{x} \in R^2 : \begin{aligned} &|\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t)| \leq l(t) = Cx_3(t) \\ &\tilde{x} = (x_1, x_2), \quad C = \operatorname{tg} \alpha > 0 \end{aligned} \right\}, \quad t \geq t_0 \quad (1.4)$$

$$G(x(t_0), C) = G(\tilde{x}(t_0), x_3(t_0), C) = G_0$$

представляющая собой круговое основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим значением вектора положения X .

При пространственном движении ищущего объекта эволюция информационного круга (1.4) на плоскости (x_1, x_2) при $t \geq t_0$ определяется плоским движением его центра $\tilde{x}(t) = (x_1, x_2)$ с помощью вектора управления $\tilde{u} = (u_1, u_2)$ и расширением или сужением области (1.4), путем изменения расстояния x_3 объекта X до плоскости (x_1, x_2) с помощью скалярного управления u_3 , т.е. изменением её радиуса $l = Cx_3$ с помощью управления Cu_3 : $\dot{l} = Cu_3$, $l_0 = l(t_0)$. При $u_3 > 0$ круг G (1.4) расширяется, а при $u_3 < 0$ сужается.

Одной из возможных наглядных интерпретаций описанной поисковой системы является отождествление информационной области $G(x(t))$ со световым пятном [8], которое можно управляемым образом перемещать в тёмном пространстве с целью обнаружения подвижного объекта.

Скажем, что положение искомого объекта Y становится точно известным в момент времени $t^* \geq t_0$, когда впервые выполняется условие обнаружения, т.е. условие его попадания в круг обнаружения

$$y \in G(x(t^*)), \text{ т.е. } |\tilde{x}(t^*) - y(t^*)| \leq l, \tilde{x} = (x_1, x_2), \quad t^* \geq t_0. \quad (1.5)$$

Так как, в силу эволюционного свойства [9], множество достижимости $D(t)$ искомого объекта (1.2) с начальным условием (1.3) непрерывно меняется во времени при $t \geq t_0$, то оно также представляет собой круг, причём $D(t) \supset D_0$. Таким образом, если $D(t^*)$ – область достижимости искомого объекта Y , а $G(x(t^*))$ – круг обнаружения ищущего объекта X в момент времени $t^* \geq t_0$ при некотором допустимом управлении $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t^*$, то из геометрических соображений очевидно, что условие обнаружения (1.5) в момент t^* равносильно условию поглощения [10] области достижимости искомого объекта Y кругом обнаружения ищущего объекта X , т.е. выполнению условия включения

$$D(t^*) \subset G(x(t^*)). \quad (1.6)$$

Пусть параметры $\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_2^0, r_0$ и x_1^0, x_2^0, x_3^0, C кругов неопределённости и обнаружения такие, что в начальный момент времени $t = t_0$ выполняется одно из следующих условий:

$$(a) D_0 \cap G_0 = \emptyset \quad \text{или} \quad (b) G_0 \cap D_0 \neq \emptyset \text{ и } G_0 \not\subset D_0. \quad (1.7)$$

Согласно (1.7) в начальный момент круг обнаружения находится вне круга неопределённости (a) или круг обнаружения имеет неполное пересечение с кругом неопределённости (b). Во втором случае естественно предполагать, что в начальный момент обнаружение искомого объекта не имеет места.

Требуется построить такое управляемое движение объекта X , при котором обнаружение искомого объекта (1.5) или условие поглощения (1.6) происходит за минимально возможное время T .

Для решения этой задачи сначала рассмотрим задачу 1 – задачу гарантированного поиска.

Задача 1. Для заданного начального положения $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$ и заданных начальных кругов обнаружения G_0 и круга неопределённости D_0 , удовлетворяющих условию (1.7), найти число $T > 0$ и допустимое управление $u(t)$ объекта X на интервале $[t_0, T]$, для которых при любом начальном положении y^0 объекта Y в круге неопределённости D_0 и любом допустимом управлении $v(t)$ на интервале $[t_0, T]$ гарантируется условие обнаружения в некоторый момент времени t^* – не позднее времени T : $t^* \leq T$.

Для заданной начальной позиции $\{x^0, G_0, D_0\}$ управление $u(t)$ – решение задачи 1 будем называть гарантирующим, а время T – гарантированным временем

поиска или обнаружения.

Задача 1 всегда имеет решение, и не одно, для любой начальной позиции $\{x^0, G_0, D_0\}$, если

$$CU > V, \quad (1.8)$$

т.е. когда скорость расширения круга обнаружения больше, чем скорость расширения области неопределённости искомого объекта. Действительно, тогда для произвольного начального положения $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$ при любых начальных радиусах l_0 и r_0 кругов обнаружения и неопределённости соответственно, условие (1.5) или (1.6) можно осуществить за конечное время движением X с максимальной скоростью U лишь по вертикали вверх, так как при таком способе движения скорость расширения круга обнаружения, т.е. скорость $\dot{l} = C\dot{x}_3 = CU$ увеличения радиуса круга обнаружения будет больше, чем скорость увеличения радиуса круга неопределённости искомого объекта.

В рассматриваемом случае (1.8) для выделения единственного решения естественно наложить ещё требование оптимальности, например, времени поиска, т.е. рассмотреть задачу 2.

Задача 2. Для заданного начального положения $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$ и заданного круга неопределённости D_0 найти гарантирующее управление $u(t)$, при котором гарантированное время обнаружения искомого объекта T минимально.

Отметим, что в работе [11] был исследован случай $CU \leq V$, т.е. когда скорость расширения круга обнаружения меньше, чем скорость расширения области неопределённости искомого объекта.

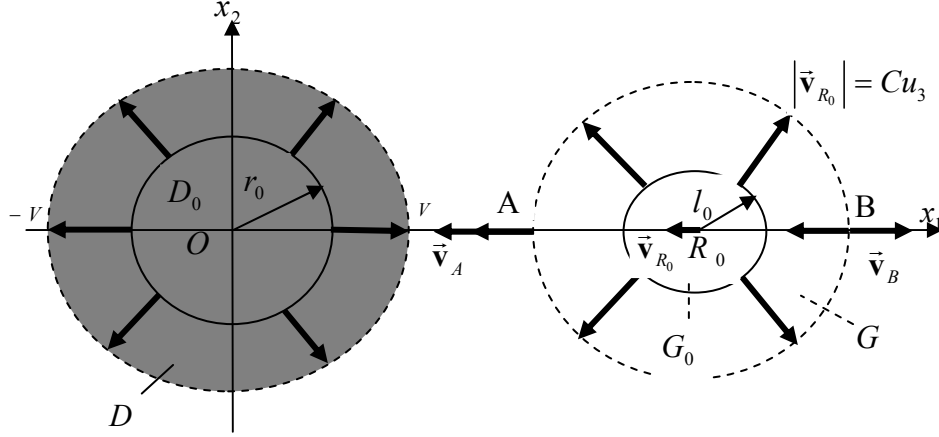
2. Для решения задачи 1 при условии (1.8) предлагается следующий алгоритм, использующий геометрический подход. Не нарушая общности, положим, что центр $\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_2^0) \in R^2$ круга неопределённости $D_0 \subset R^2$ искомого объекта Y совпадает с началом декартовой системы координат Ox_1x_2 , а ищущий объект X в начальный момент времени $t = t_0$, в соответствии с (1.7), находится в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $x_1^0 = R_0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = C^{-1}l_0$, проекция которой на плоскость Ox_1x_2 , т.е. центр круга обнаружения находится в точке $(R_0, 0)$, $R_0 > 0$ оси Ox_1 (фиг. 1). Будем полагать, что выполняются соотношения

$$R_0 + l_0 > r_0, \quad r_0 > l_0, \quad (2.1)$$

которые полностью описывают одну из двух начальных расположений (1.7) кругов D_0 и G_0 .

Рассмотрим такое движение X в вертикальной плоскости Ox_1x_3 , при котором X перемещается вдоль горизонтальной оси Ox_1 по направлению к центру круга неопределённости D_0 с некоторой постоянной составляющей скорости $(-u_1)$, а вдоль вертикальной оси Ox_3 перемещается вверх с постоянной составляющей скорости $u_3 = \sqrt{U^2 - u_1^2}$:

$$u = (-u_1, u_2, u_3), \quad 0 < u_1 < U, \quad u_2 \equiv 0, \quad u_3 = \sqrt{U^2 - u_1^2} \quad (2.2)$$



Фиг. 1

При таком управлении точки A и B , т.е. точки пересечения круга обнаружения с осью Ox_1 , перемещаются вдоль оси Ox_1 со скоростями $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, проекции которых на оси Ox_1 определяются, соответственно, как $(-u_1 - Cu_3)$ и $(-u_1 + Cu_3)$. Очевидно, что модули скоростей $\vec{v}_{R_0}$ всех граничных точек круга обнаружения относительно подвижного центра $\tilde{x} = (R_0, 0)$ равны Cu_3 , а направление вектора $\vec{v}_B$ вдоль оси Ox_1 зависит от знака величины $(-u_1 + Cu_3)$ (фиг. 1). Таким образом, происходит одновременное расширение и перемещение круга обнаружения, как целое, к центру области неопределённости D_0 .

Из геометрических соображений следует, что для заданных параметров U, V, C, R_0, r_0, l_0 (1.8), (2.1) и выбранном способе управления (2.2), необходимым и достаточным условием поглощения (1.6) является выполнение неравенств

$$0 < T^- \leq T^+ \quad (2.3)$$

$$T^- = (R_0 + r_0 - l_0)/(u_1 + Cu_3 - V) \quad (2.4)$$

$$T^+ = (R_0 - r_0 + l_0)/(u_1 - Cu_3 + V),$$

где T^+ – время, в течение которого точка B пока ещё находится вне круга неопределённости, а T^- – момент времени, начиная с которого точка A оказывается левее от левой точки пересечения круга неопределённости с осью Ox_1 . Таким образом, если момент времени T^- наступает не позднее момента T^+ , то происходит поглощение и время T^- будет первым моментом поглощения, т.е. гарантированным временем обнаружения. Неравенство $T^- > 0$, очевидно, означает, что в начальный момент поглощения ещё не наступило.

При заданных R_0, r_0, l_0, U, V, C (1.8), (2.1), соотношения (2.3), с учётом (2.4) и подстановки $u_3 = \sqrt{U^2 - u_1^2}$, выполняются в том и только в том случае, когда относительно параметров R_0 и u_1 имеет решение следующая система неравенств:

$$\begin{aligned} u_1 + C\sqrt{U - u_1^2} - V > 0, \quad u_1 - C\sqrt{U - u_1^2} + V \geq 0 \\ R_0(C\sqrt{U - u_1^2} - V) \geq (r_0 - l_0)u_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Разрешая первые два неравенства (2.5) относительно параметра u_1 , получим соответственно:

$$u_1 \in (u_1^*, u_1^{**}), \quad u_1 \in (-\infty, u_1^-] \cup [u_1^+, +\infty), \quad (2.6)$$

где величины $u_1^*, u_1^{**}, u_1^-, u_1^+$ удовлетворяют соотношениям

$$-U < u_1^- < u_1^* < 0 < u_1^+ < u_1^{**} < U \quad (2.7)$$

и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1^* &= (V - C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2})(1+C^2)^{-1} \\ u_1^{**} &= (V + C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2})(1+C^2)^{-1} \\ u_1^- &= (-V - C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2})(1+C^2)^{-1} \\ u_1^+ &= (-V + C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2})(1+C^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учётом (2.2), (2.7) и (2.8), решениями системы (2.5) являются значения параметров R_0 и u_1 из области, определяемой следующим образом:

$$H(u_1, R_0) = \{(R_0, u_1): R_0 \geq \bar{R}_0(u_1), \quad u_1^+ \leq u_1 < u_1^{**}, \quad r_0 - l_0 < R_0 < \infty\}, \quad (2.9)$$

где

$$\bar{R}_0(u_1) = u_1(r_0 - l_0)(C\sqrt{U^2 - u_1^2} - V)^{-1}. \quad (2.10)$$

Функция $\bar{R}_0(u_1)$, $u_1^+ \leq u_1 < u_1^{**}$ (2.10), описывающая границу области (2.9) – области существования решения задачи 1 на плоскости параметров u_1, R_0 – разрывная функция. На интервалах $[u_1^+, u_1^\infty)$ и (u_1^∞, u_1^{**}) , где $u_1^\infty = \sqrt{C^2 U^2 - V^2} / C$, она монотонно возрастает, причём в точке $u_1^\infty = \sqrt{C^2 U^2 - V^2} / C$ претерпевает разрыв второго рода: $\lim_{u_1 \rightarrow u_1^\infty - 0} \bar{R}_0(u_1) = +\infty$, $\lim_{u_1 \rightarrow u_1^\infty + 0} \bar{R}_0(u_1) = -\infty$.

На интервале $[u_1^+, u_1^\infty)$ функция $\bar{R}_0(u_1)$ принимает только положительные значения: $\bar{R}_0(u_1) > 0$, причём $\bar{R}_0(u_1^+) = r_0 - l_0$, а на интервале (u_1^∞, u_1^{**}) – только отрицательные значения: $\bar{R}_0(u_1) < 0$. Так как рассматривается случай $R_0 > 0$, то исследование проведём только на интервале $u_1^+ \leq u_1 < u_1^\infty$.

При заданных r_0, l_0 (2.1), зафиксируем некоторое значение параметра R_0 , $r_0 - l_0 < R_0 < \infty$. Из вышеуказанных свойств функции $\bar{R}_0(u_1)$ следует, что уравнение

$$R_0 = (r_0 - l_0)u_1(C\sqrt{U^2 - u_1^2} - V)^{-1} \quad (2.11)$$

относительно u_1 на интервале $u_1^+ \leq u_1 < u_1^\infty$ имеет единственное решение:

$$u_1(\alpha) = (C^2 + \alpha^2)^{-1}(-\alpha V + C\sqrt{(C^2 + \alpha^2)U^2 - V^2}), \quad (2.12)$$

где введено обозначение

$$\alpha = (r_0 - l_0) / R_0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.13)$$

Таким образом, для каждого фиксированного значения $\alpha \in (0, 1)$ (и соответствующего значения параметра $R_0 \in (r_0 - l_0, \infty)$) существует множество гарантирующих управлений u_1 из интервала

$$u_1^+ \leq u_1 \leq u_1(\alpha) \quad (2.14)$$

и соответствующие им значения гарантированного времени поиска $T^- = T^-(R_0, u_1)$ (2.4).

3. Далее, в зависимости от параметра $\alpha \in (0, 1)$ ($R_0 \in (r_0 - l_0, \infty)$) в области существования решения задачи 1 (2.14) решается задача 2 – задача оптимального гарантирующего управления, в которой требуется найти управление u_1^{opt} из интервала $[u_1^+, u_1(\alpha)]$, при котором гарантированное время обнаружения (2.4) искомого объекта Y минимально:

$$T^{opt} = \min_{u_1^+ \leq u_1 \leq u_1(\alpha)} T^-(R_0, u_1). \quad (3.1)$$

При фиксированном $\alpha \in (0, 1)$ исследование функции $T^- = T^-(R_0, u_1)$ относительно u_1 на интервале $[u_1^+, u_1^{**})$, содержащий $[u_1^+, u_1(\alpha)]$, показывает, что минимум этой функции достигается в единственной точке

$$u_1^{\min} = U / \sqrt{1 + c^2}, \quad (3.2)$$

причём на интервале $[u_1^+, u_1(\alpha)]$ функция (2.4) монотонно убывает, а на интервале $[u_1(\alpha), u_1^{**})$ монотонно возрастает.

В зависимости от значения $\alpha \in (0, 1)$, точка (3.2) либо принадлежит множеству гарантирующих управлений (2.14): $u_1^{\min} \in [u_1^+, u_1(\alpha)]$, либо находится вне этого отрезка, справа от точки $[u_1^+, u_1(\alpha)]$: $u_1^{\min} \in (u_1(\alpha), u_1^{**})$. В первом случае точка минимума (3.2) является оптимальной в рассматриваемой задаче 2, а во втором случае оптимальной является правая крайняя точка $[u_1^+, u_1(\alpha)]$ (2.12) отрезка (2.14). Совпадение точек (2.12) и (3.2) имеет место при некотором значении $\alpha^* \in (0, 1)$, которое можно найти, разрешая уравнение

$$u_1(\alpha) - u_1^{\min} = 0 \quad (3.3)$$

относительно параметра α , $\alpha \in (0, 1)$. Запишем это уравнение в явном виде:

$$(-\alpha V + C\sqrt{(C^2 + \alpha^2)U^2 - V^2}) / (C^2 + \alpha^2) - U / \sqrt{1 + C^2} = 0 \quad (3.4)$$

$$\alpha \in (0, 1)$$

После несложных преобразований оно приводится к виду

$$(C^2 + \alpha^2)[C^4 U^2 - (\alpha U + \sqrt{1 + C^2} V)^2] = 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (3.5)$$

нахождение решения которого равносильно нахождению решения следующего уравнения:

$$F(\alpha) = C^2 U - \alpha U - V\sqrt{1 + C^2} = 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (3.6)$$

корнем которого без учёта ограничения (3.5) является

$$\alpha^* = C^2 - \sqrt{(1 + C^2)} V / U, \quad (3.7)$$

или, учитывая обозначение (2.13),

$$R_0^* = (r_0 - l_0) / \alpha^* = (r_0 - l_0)(C^2 - V\sqrt{1 + C^2}) / U)^{-1}. \quad (3.8)$$

Вопрос разрешимости или неразрешимости уравнения (3.6) относительно параметра α , $0 < \alpha < 1$ сводится к определению знака функции $F(\alpha)$ (3.6) в зависимости от расположения корня α^* (3.7) относительно отрезка $(0, 1)$ и решается следующим образом:

1. Если $V / U \geq C^2 / \sqrt{1 + C^2}$, то $\alpha^* \leq 0$ и, следовательно, $F(\alpha) < 0$ при всех α , $0 < \alpha < 1$. Поэтому

$$u_1(\alpha) < u_1^{\min}$$

2. Если $C^2 / \sqrt{(1+C^2)} > V/U > (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)}$, то $0 < \alpha^* < 1$ и, следовательно,

$$F(\alpha) > 0 \text{ при } \alpha, 0 < \alpha \leq \alpha^*$$

$$F(\alpha) = 0 \text{ при } \alpha = \alpha^*$$

$$F(\alpha) < 0 \text{ при } \alpha, \alpha^* < \alpha < 1$$

Поэтому, соответственно,

$$u_1(\alpha) > u_1^{\min} \text{ при } \alpha, 0 < \alpha < \alpha^*$$

$$u_1(\alpha) = u_1^{\min} \text{ при } \alpha = \alpha^*$$

$$u_1(\alpha) < u_1^{\min} \text{ при } \alpha, \alpha^* < \alpha < 1$$

3. Если $V/U \leq (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)}$, то $\alpha^* \geq 1$ и, следовательно, $F(\alpha) > 0$ при $\alpha, 0 < \alpha < 1$. Поэтому

$$u_1(\alpha) > u_1^{\min}$$

Подытожив вышеприведённые возможные случаи 1-3 и используя связь между параметрами α и R_0 (2.13), в итоге получаем, что оптимальное гарантирующее управление (2.2) и оптимальное гарантированное время (3.1) определяются следующим образом:

$$u^{opt} = (-u_1^{opt}, u_2^{opt}, u_3^{opt}) \quad (3.9)$$

$$u_1^{opt} = \begin{cases} u_1(R_0), & \text{если } C^2 / \sqrt{(1+C^2)} \leq V/U \text{ и} \\ & r_0 - l_0 < R_0 < \infty \\ u_1^{\min}, & \text{если } (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)} < \\ & < V/U < C^2 / \sqrt{(1+C^2)} \text{ и } R_0^* < R_0 < \infty \\ u_1(R_0^*) = u_1^{\min}, & \text{если } (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)} < \\ & < V/U < C^2 / \sqrt{(1+C^2)} \text{ и } R_0^* = R_0 \\ u_1(R_0), & \text{если } (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)} < \\ & < V/U < C^2 / \sqrt{(1+C^2)} \text{ и } r_0 - l_0 < R_0 < R_0^* \\ u_1^{\min}, & \text{если } V/U \leq (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)} \text{ и} \\ & r_0 - l_0 < R_0 < \infty \end{cases}$$

$$u_2^{opt} = 0, \quad u_3^{opt} = \sqrt{U^2 - (u_1^{opt})^2}$$

$$T^{opt} = \begin{cases} T^-(u_1(R_0), R_0), & \text{если } C^2 / \sqrt{(1+C^2)} \leq V/U \text{ и} \\ & r_0 - l_0 < R_0 < \infty \\ T^-(u_1^{\min}), & \text{если } (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)} < \\ & < V/U < C^2 / \sqrt{(1+C^2)} \text{ и } R_0^* < R_0 < \infty \\ T^-(u_1(R_0^*), R_0^*) = T^-(u_1^{\min}, R_0^*), & \text{если } (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)} < \\ & < V/U < C^2 / \sqrt{(1+C^2)} \text{ и } R_0^* = R_0 \\ T^-(u_1(R_0), R_0), & \text{если } (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)} < \\ & < V/U < C^2 / \sqrt{(1+C^2)} \text{ и } r_0 - l_0 < R_0 < R_0^* \\ T^-(u_1^{\min}, R_0^*), & \text{если } V/U \leq (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)} \text{ и} \\ & r_0 - l_0 < R_0 < \infty \end{cases}$$

где $u_1(R_0)$, $u_1^{\min}$, R_0^* определяются уже известными соотношениями (2.12), (3.2), (3.8) соответственно.

Согласно (3.9), при $V/U \geq C^2 / \sqrt{(1+C^2)}$ оптимальное гарантирующее управление определяется в зависимости от начального расстояния между центрами кругов обнаружения и неопределённости $R_0 \in (r_0 - l_0, \infty)$: с уменьшением R_0 модуль постоянной скорости прямолинейного перемещения центра круга обнаружения $u_1^{opt} = u_1(R_0)$ уменьшается, а постоянная скорость расширения круга обнаружения $u_3^{opt} = \sqrt{U^2 - (u_1(R_0))^2}$, наоборот, увеличивается. В случае $V/U \leq (C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)}$ оптимальные скорости прямолинейного перемещения и расширения круга обнаружения при любом начальном расстоянии $R_0 \in (r_0 - l_0, \infty)$ неизменны: $u_1^{opt} = u_1^{\min}$ и $u_3^{opt} = \sqrt{U^2 - (u_1^{\min})^2}$. При $(C^2 - 1) / \sqrt{(1+C^2)} < V/U < C^2 / \sqrt{(1+C^2)}$ и начальных расстояниях R_0 не меньше контрольного значения R_0^* (3.8), оптимальные скорости прямолинейного перемещения и скорость расширения круга обнаружения также неизменны: $u_1^{opt} = u_1^{\min}$ и $u_3^{opt} = \sqrt{U^2 - (u_1^{\min})^2}$. И только по мере убывания значения R_0 на отрезке $(r_0 - l_0, R_0^*)$, модуль скорости $u_1^{opt} = u_1(R_0)$ уменьшается, а скорость $u_3^{opt} = \sqrt{U^2 - (u_1(R_0))^2}$ увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Вып.1. С.3-12.
2. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Вып. 4. № 1. С.827-862.
3. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. Гарантированное управление поиском подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С.58-66.
4. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С.31-39.
5. Avetisyan V.V. Control of the search for an immobile object aimed at its capture //Journal of Computer and Systems Sciences International. 2006. Vol. 45. No. 6. P. 997–1005.
6. Avetisyan V.V., Martirosyan S.R. Guaranteed Search of a Target Object by an Electromechanical System with Minimal Light Power Inputs // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2009. Vol.48. No.5. P.814-826
7. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: ЛГУ, 1987. 76с.
8. Меликян А.А. Задача оптимального быстрогодействия с поиском целевой точки // ПММ. 1990. Т. 54. Вып.1. С.3-11.
9. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
10. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи поиска и управления. М.: Наука, 1978. 270с.
11. Аветисян В.В. Оптимальное гарантирующее управление поиском движущегося на плоскости целевого объекта // Изв. НАН РА. Механика. 2007. Т.60. № 1. С.3-9.

Сведения об авторе:

Аветисян Ваган Вардгесович - д.ф.-м.н., профессор кафедры теории оптимального управления и приближённых методов факультета математики и механики Ереванского государственного университета;

тел: (+374 94) 44 95 60,

E-mail: vanavet@yahoo.com

Поступила в редакцию 02.05.2013

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Հակոբյան Վ.Ն., Դաշտոյան Լ.Լ., Շահինյան Ս.Ս. Ճեղք պարունակող օրթոտրոպ հարթության համար մի խառը խնդրի մասին.....	3
Բելուբեկյան Մ.Վ. Երկշերտ սալի ծռումը և տատանումները շերտերի միմյանց նկատմամբ ազատ սահելու պայմանների դեպքում.....	14
Դանոյան Զ.Ն., Աթոյան Լ.Հ., Սահակյան Ս.Լ., Դանոյան Ն.Զ. Լյավի էլեկտրաառաձգական մակերևութային ալիքները պլեգոէլեկտրիկ կիսաանվերջ հիմքից և դիէլեկտրիկ շերտից բաղկացած շերտավոր համակարգում, էլեկտրական էկրանի առկայությամբ.....	25
Մովսիսյան Լ.Ա. Առաձգամածուցիկ լցնով գլանային թաղանթի կայունության մասին.....	34
Պողոսյան Դ.Մ. Սեղմված ուղղանկյուն սալի կայունության ոչ կոնսերվատիվ խնդիրը.....	40
Սարգսյան Ս.Հ. Միկրոպոլյար ֆերոմագնիսական առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը.....	49
Ավետիսյան Վ.Վ. Շարժվող օբյեկտի փնտրման երաշխավորող դեկավարման օպտիմալացումը.....	68

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Шагинян С.С. Об одной смешанной задаче для ортотропной плоскости с разрезом	3
Белубекян М.В. Изгиб и колебания двухслойной пластинки при условиях свободного скольжения между слоями.....	14
Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З. Электроупругие поверхностные волны Лява в слоистой структуре из пьезоэлектрического полупространства и диэлектрического слоя при наличии электрического экрана	25
Мовсисян Л.А. К устойчивости цилиндрической оболочки с вязкоупругим наполнителем	34
Погосян Д.М. Неконсервативная задача устойчивости сжатой прямоугольной пластинки.....	40
Саркисян С.О. Общая теория микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек.....	49
Аветисян В.В. Оптимизация гарантирующего управления поиском подвижного объекта	68

CONTENTS

Hakobyan V., Dashtoyan L., Shahinyan S.S. One mixed boundary value problem for orthotropic plane with slit.....	3
Belubekyan M.V. The bending and vibration of two layered plate under the free sliding conditions between the layers	14
Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Sahakyan S.L., Danoyan N.Z. Electro-elastic surface Love waves in a layered structure: piezoelectric half space and dielectrical layer, in presence of an electrical screen.....	25
Movsisyan L.A. On stability cylindrical shell with a viscoelastic core	34
Poghosyan D.M. The non-conservative problem of stability of compressed rectangular plate.....	40
Sargsyan S.H. General theory of micropolar ferromagnetic elastic thin shells.....	49
Avetisyan V.V. Optimization of guaranteed control of search for mobile object..	68

Сдано в производство 25.06.2013г.

Формат 70 x 100 $\frac{1}{16}$. Печ. лист –5

Заказ № 446. Тираж 150.

Цена договорная.

Типография Издательства НАН Армении

Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24