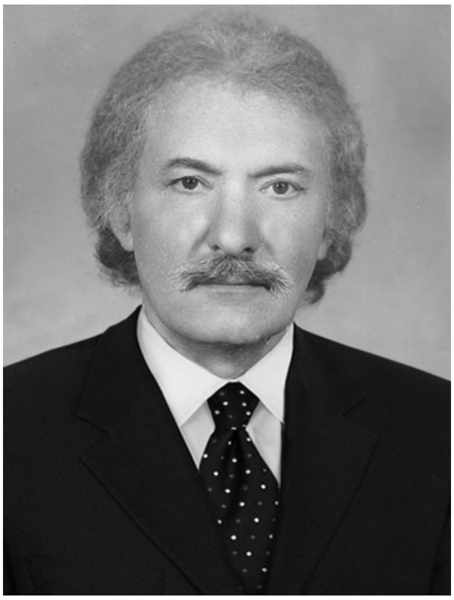
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Механика



ГРИГОРЯН ЭДУАРД ХОСРОВОВИЧ

(К 75-летию со дня рождения)

Исполнилось 75 лет со дня рождения одного из видных учёных в области математической теории упругости, члена редакционной коллегии журнала «Известия НАН Армении. Механика», доктора физико-математических наук, профессора Эдуарда Хосрововича Григоряна.

Э.Х. Григорян родился 21 января 1938г. в Ереване. Окончив в 1967г. отделение механики механико-математического факультета Ереванского государственного университета, стал ассистентом кафедры механики. В 1969-72 гг. учился в аспирантуре инженерно-строительного института (г. Одесса) под руководством известного математика и механика М.Г. Крейна. По окончании учебы до 1978 г. он работал в Институте механики АН Армении. С 1978г. Э.Х. Григорян доцент, а затем и до настоящего времени – профессор кафедры механики сплошной среды ЕГУ (с 2007г. кафедра механики). В 1990-96гг. Э.Х. Григорян был деканом факультета механики, а в

2001-2003 гг.– заведующим кафедрой механики сплошной среды. Профессор Э.Х. Григорян с 2011г. ведущий, а с 2013г.– главный научный сотрудник Института механики НАН Армении. Э.Х. Григорян в 1977г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 1994г. – докторскую диссертацию. Он автор более 100 научных статей, опубликованных в научных журналах и сборниках трудов международных конференций как в Армении, так и за рубежом.

Профессор Э.Х. Григорян – крупный специалист в области контактных и смешанных задач теории упругости, в области задач распространения и дифракции волн в упругих и электроупругих средах. Рассматриваемые им задачи актуальны, а полученные результаты важны с точки зрения механики сплошной среды и математической физики. Научное исследование Э.Х. Григорян проводит обстоятельно, применяя фундаментальные и прикладные методы и подходы механики и математики. В научных кругах широко известны результаты профессора Э.Х. Григоряна в области выявления степени взаимодействия и взаимосвязи физических полей в задачах колебаний и распространения волн в средах, в области определения влияний конструктивных и физико-механических неоднородностей в контактных, смешанных и динамических задачах теории упругости, в области разработки и развития новых методов и способов для решения трудных, с математической точки зрения, задач теории упругости. Его безграничный интерес к исследованию контактных и смешанных задач и к изучению распространения волн разной природы, стремление обобщить полученные важные результаты привели к тому, что он создал эффективные математические методы для решения рассмотренных задач.

Профессор Э.Х. Григорян внёс существенный вклад в развитие армянской школы механики и велика его заслуга в развитии механики деформируемого твёрдого тела. Под научным руководством Э.Х. Григоряна кандидатские диссертации защитили 14 молодых специалистов. В течение последних 10 лет, несмотря на тяжелую болезнь, Э.Х. Григорян продолжает плодотворную научную деятельность. Яркое тому свидетельство то, что он подготовил за это время 6 кандидатов наук и вместе с ними и коллегами по науке опубликовал много статей на высоком научном уровне, принимая участие в международных научных конференциях.

Редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» сердечно поздравляет профессора Э.Х. Григоряна с днём рождения и желает ему крепкого здоровья, благополучия и новых достижений в науке.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРАМИ

Саркисян К.С., Оганисян Г.В., Мелтонян Б.А.

Ключевые слова: бесконечная пластина, контакт, стрингер, обобщенные функции, функциональное уравнение, факторизация, асимптотика.
Keywords: infinite plate, contact, stringer, generalized functions, functional equation, factorization, asymptotic.

Սարգսյան Կ.Ս., Հովհաննիսյան Հ.Վ., Մելտոնյան Բ.Ա.

Կոնտակտային խնդիր՝ անվերջ և կիսաանվերջ երկու զուգահեռ վերադիրներով ուժեղացված անվերջ առաձգական սալի համար

Աշխատանքում դիտարկված է իզոտրոպ համասեռ անվերջ առաձգական սալի համար կոնտակտային խնդիր, որն ուժեղացված է անվերջ և կիսաանվերջ երկու զուգահեռ առաձգական վերադիրներով: Սալ-վերադիր կոնտակտային զույգը դեֆորմացվում է կիսաանվերջ առաձգական վերադիրի ծայրում կիրառված կենտրոնացված ուժի շնորհիվ: Ֆուրիեի իրական ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ ուսումնասիրվող կոնտակտային խնդրի լուծումը հանգում է իրական առանցքի վրա ֆունկցիոնալ հավասարման լուծմանը՝ անհայտ ֆունկցիաների Ֆուրիեի տրանսֆորմանտների նկատմամբ: Կառուցված է դիտարկվող կոնտակտային խնդրի փակ լուծումը: Որոշված են շոշափող կոնտակտային ուժերի բաշխման ինտենսիվությունները և վերադիրներում առաջացող առանցքային (նորմալ) լարումները: Կիսաանվերջ առաձգական վերադիրի շոշափող կոնտակտային ուժերի բաշխման ինտենսիվությունների և նրանում առաջացող առանցքային (նորմալ) լարումների համար ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են լարումների վարքը ինչպես ուժի կիրառման կետի շրջակայքում, այնպես էլ դրանից հեռու կետերում:

Sargsyan K.S., Hovhannisyan H.V., Meltonyan B.A.

A Contact Problem for an Infinite Elastic Plate, Strengthened by Two Parallel Infinite and Semi-Infinite Stringers

In this paper a contact problem for an isotropic homogeneous infinite elastic plate, strengthened by two parallel infinite and semi-infinite elastic stringers, is considered. The plate-stringer contacting pair is deformed by concentrated force, applied on the end of the semi-infinite elastic stringer. The solution of considered contact problem by means of Fourier generalized real integral transform is reduced to solution of a functional equation on the real axis with respect to unknown functions Fourier transforms. The closed-form solution of the contact problem is constructed. The intensities of tangential contact forces and axial (normal) stresses arising in stringers are determined. Asymptotic formulas for intensities of tangential contact forces and axial (normal) stresses arising in semi-infinite stringer describing their behavior as near, as well far from the force application point are obtained.

В работе рассматривается контактная задача для изотропной однородной упругой бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными бесконечным и полубесконечным упругими стрингерами. Контактная пара (пластина-стрингер) деформируется сосредоточенной силой, приложенной на конце полубесконечного упругого стрингера. При помощи действительного обобщённого интегрального преобразования Фурье решение рассматриваемой контактной задачи сводится к решению некоторого функционального уравнения на действительной оси относительно трансформантов Фурье неизвестных функций. Построено замкнутое решение поставленной контактной задачи. Определены распределения интенсивностей тангенциальных контактных усилий и осевые (нормальные) напряжения, возникающие в стрингерах. Получены асимптотические формулы для распределения интенсивностей тангенциальных контактных усилий и осевых (нормальных) напряжений, возникающих в упругом полубесконечном стрингере, описывающие поведение напряжений как вблизи, так и вдали от точки приложения силы.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной бесконечной пластины малой постоянной толщины h на линиях $y=-a$ и $y=a$

$(a > 0)$ своей верхней поверхности усилен двумя параллельными бесконечным и полубесконечным упругими стрингерами с одинаковыми достаточно малыми постоянными прямоугольными поперечными сечениями и модулями упругости.

Требуется определить законы распределения интенсивностей тангенциальных контактных усилий вдоль линии крепления бесконечного и полубесконечного упругих стрингеров с бесконечной упругой пластиной и осевых (нормальных) напряжений, возникающих в стрингерах, когда контактирующая пара (пластина-стрингер) деформируется сосредоточенной силой $R\delta(x)\delta(y-a)$, приложенной на конце полубесконечного упругого стрингера.

В исследуемой контактной задаче относительно стрингеров принимается во внимание модель контакта по линии, то есть предполагается, что распределение интенсивностей тангенциальных контактных усилий сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для изотропной однородной бесконечной упругой пластины считается справедливой модель обобщённого плоского напряжённого состояния [1-9], благодаря чему она деформируется как плоскость.

Обращаясь теперь к получению разрешающих уравнений рассматриваемой контактной задачи заметим, что стрингеры растягиваются или сжимаются в горизонтальном направлении, находясь в одноосном напряжённом состоянии. Тогда, на основе вышесказанного, дифференциальное уравнение равновесия элемента бесконечного упругого стрингера на линии $y = -a$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 u_S(x;-a)}{dx^2} - \frac{p(x;-a)}{E_S F_S} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{1.1}$$

где $p(x;-a)$ и $u_S(x;-a)$ – соответственно интенсивность распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий и горизонтальные перемещения точек упругого бесконечного стрингера на линии $y = -a$.

Далее, имея в виду вышесказанное, дифференциальное уравнение равновесия элемента полубесконечного упругого стрингера на линии $y = a$ запишем в виде:

$$\frac{d^2 u_S(x;a)}{dx^2} - \frac{p(x;a)}{E_S F_S} = 0 \qquad (-\infty < x < 0), \tag{1.2}$$

при этом граничное условие имеет следующий вид:

$$\left.\frac{du_S(x;a)}{dx}\right|_{x=-0} = \frac{R}{E_S F_S}, \tag{1.3}$$

здесь $p(x;a)$ и $u_S(x;a)$ – соответственно интенсивность распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий и горизонтальные перемещения точек упругого полубесконечного стрингера на линии $y = a$. Отметим, что в формулах (1.1) − (1.3) $(E_S; F_S)$ – модуль упругости и площадь поперечного сечения упругих стрингеров; R – интенсивность сосредоточенной силы, приложенной на конце полубесконечного упругого стрингера в точке $(0;a)$.

Теперь, чтобы написать дифференциальное уравнение (1.2) с граничным условием (1.3) одним уравнением для всех x $(-\infty < x < \infty)$, введём функцию:

$$u_S^-(x) = \theta(-x) u_S(x;a) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{1.4}$$

где $\theta(t)$ – единичная ступенчатая функция Хэвисайда.

Применив к (1.4) операцию дифференцирования в смысле теории обобщённых функций, при этом учитывая дифференциальное уравнение (1.2) и граничное условие (1.3), относительно функции $u_S^-(x)$ получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2u_S^-(x)}{dx^2}=\frac{p^-(x)}{E_SF_S}-\frac{R\delta(x)}{E_SF_S}-u_S(0;a)\delta'(x) \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{1.5}$$

где $p^-(x)=\theta(-x)p(x;a)$, а $\delta'(x)$ – производная дельта-функции Дирака $\delta(x)$.

Если теперь применить к уравнениям (1.1) и (1.5) действительное обобщённое интегральное преобразование Фурье в смысле теории обобщённых функций, то соответственно получим:

$$-\sigma^2\overline{u}_S(\sigma;-a)=\frac{\overline{p}(\sigma;-a)}{E_SF_S} \qquad (-\infty<\sigma<\infty), \tag{1.6}$$

$$-\sigma^2\overline{u}_S^-(\sigma)=\frac{\overline{p}^-(\sigma)}{E_SF_S}-\frac{R}{E_SF_S}+i\sigma u_S(0;a) \qquad (-\infty<\sigma<\infty), \tag{1.7}$$

где

$$\overline{A}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}A(x)e^{i\sigma x}dx;\ A(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{A}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma, \tag{1.8}$$

а $\sigma\ (-\infty<\sigma<\infty)$ – спектральный параметр преобразования Фурье.

С другой стороны, на основе вышесказанного, для трансформанты Фурье функции горизонтальных перемещений точек изотропной однородной бесконечной упругой пластины, когда на линиях $y=a$ и $y=-a$ действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностями $p(x,a)\ (-\infty<x<0)$ и $p(x,-a)\ (-\infty<x<\infty)$, соответственно имеем [6-8]:

$$\overline{u}(\sigma;a)=\overline{u}^-(\sigma)+\overline{u}^+(\sigma)=\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)|\sigma|}\frac{\overline{p}^-(\sigma)}{h}+$$
$$+\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)|\sigma|}-\frac{\lambda^*+\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)}a\right]e^{-2a|\sigma|}\frac{\overline{p}(\sigma;-a)}{h} \qquad (-\infty<\sigma<\infty), \tag{1.9}$$

$$\overline{u}(\sigma;-a)=\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)|\sigma|}-\frac{\lambda^*+\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)}a\right]e^{-2a|\sigma|}\frac{\overline{p}^-(\sigma)}{h}+$$
$$+\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)|\sigma|}\frac{\overline{p}(\sigma;-a)}{h} \qquad (-\infty<\sigma<\infty), \tag{1.10}$$

здесь $\overline{u}^+(\sigma)=F\left[u^+(x;a)\right]$ и $\overline{u}^-(\sigma)=F\left[u^-(x;a)\right]$ – трансформанты Фурье функций $u^+(x;a)=\theta(x)u(x;a)$ и $u^-(x;a)=\theta(-x)u(x;a)$, соответственно; $F[\bullet]$ – оператор Фурье; $u(x;-a)$ и $u(x;a)$ – горизонтальные перемещения точек бесконечной упругой пластины на линиях $y=-a$ и $y=a$, соответственно; $\lambda^*=2\lambda\mu(\lambda+\mu)^{-1}$, где λ и μ – упругие характеристики изотропной однородной бесконечной пластины.

Если теперь иметь в виду, что на линиях крепления $y=-a$ и $y=a$ упругих бесконечного и полубесконечного стрингеров с упругой бесконечной пластиной имеют место следующие контактные условия:

$$\overline{u}_S(\sigma;-a)=\overline{u}(\sigma;-a);\quad \overline{u}_S^-(\sigma)=\overline{u}^-(\sigma) \qquad (-\infty<\sigma<\infty), \tag{1.11}$$

то на основе (1.6), (1.7), (1.9) и (1.10) относительно трансформантов Фурье функций интенсивностей распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий $\overline{p}(\sigma;-a)$ и $\overline{p}^-(\sigma)\ (-\infty<\sigma<\infty)$, которые являются основными неизвестными функциями рассматриваемой контактной задачи, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sigma^2\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)|\sigma|}-\frac{\lambda^*+\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)}a\right]e^{-2a|\sigma|}\,\overline{p}^-(\sigma)+$$

$$+\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}|\sigma|+\frac{h}{E_SF_S}\right]\overline{p}(\sigma;-a)=0\qquad(-\infty<\sigma<\infty),\tag{1.12}$$

$$\sigma^2\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)|\sigma|}-\frac{\lambda^*+3\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)}a\right]e^{-2a|\sigma|}\,\overline{p}(\sigma;-a)+\qquad(-\infty<\sigma<\infty),$$

$$+\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}|\sigma|+\frac{h}{E_SF_S}\right]\overline{p}^-(\sigma)=\frac{Rh}{E_SF_S}-i\sigma hu_S(0;a)+\sigma^2h\overline{u}^+(\sigma).\tag{1.13}$$

Решая систему уравнений (1.12) и (1.13) относительно $\overline{p}^-(\sigma)$ и $\overline{p}(\sigma;-a)$, получим:

$$\overline{K}(\sigma)\,\overline{p}^-(\sigma)=TR-TE_SF_Su_S(0;a)i\sigma+TE_SF_S\overline{u}^+(\sigma)\sigma^2\qquad(-\infty<\sigma<\infty),\tag{1.14}$$

$$\overline{p}(\sigma;-a)=\frac{RT}{T+|\sigma|}-\left[\frac{\overline{K}_1(\sigma)}{T+|\sigma|}-1\right]\overline{p}^-(\sigma)\qquad(-\infty<\sigma<\infty).\tag{1.15}$$

где введены следующие обозначения:

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{\overline{K}_1(\sigma)\overline{K}_2(\sigma)}{T+|\sigma|};\quad \overline{K}_1(\sigma)=T+2|\sigma|\operatorname{ch}(a|\sigma|)e^{-a|\sigma|}-ak\sigma^2e^{-2a|\sigma|},\tag{1.16}$$

$$\overline{K}_2(\sigma)=T+2|\sigma|\operatorname{sh}(a|\sigma|)e^{-a|\sigma|}+ak\sigma^2e^{-2a|\sigma|};T=\frac{4\mu(\lambda^*+2\mu)}{\lambda^*+3\mu}\frac{h}{E_SF_S};\quad k=\frac{2(\lambda^*+\mu)}{\lambda^*+3\mu}.$$

Здесь особенно нужно подчеркнуть, что при $a\to\infty$ функциональное уравнение (1.14) совпадает с соответсвующим уравнением работы [3], а (1.15)– работы [1].

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи при принятых выше предположениях свелось к решению функционального уравнения (1.14) на действительной оси относительно неизвестных функций $\overline{p}^-(\sigma)$ и $\overline{u}^+(\sigma)$. Здесь надо отметить, что так как функции $\overline{p}^-(\sigma)$ и $\overline{u}^+(\sigma)$ являются граничными значениями аналитических функций $\overline{p}^-(\alpha)$ и $\overline{u}^+(\alpha)$ $(\alpha=\sigma+i\tau)$, регулярных соответственно в нижней и верхней полуплоскостях, то функциональное уравнение (1.14) можно рассмотреть как краевую задачу Римана в теории аналитических функций. Поступая аналогичным [3,9] образом, факторизуем ядро $\overline{K}(\sigma)$ функционального уравнения (1.14), представив его в следующей форме:

$$\overline{K}(\sigma)=\overline{K}^+(\sigma)\overline{K}^-(\sigma)\qquad(-\infty<\sigma<\infty),\tag{1.17}$$

где $\overline{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$, а $\overline{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha<0$ $(\alpha=\sigma+i\tau)$, и соответственно имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\overline{K}^+(\sigma)&=(\sigma+i0)^{\frac{1}{2}}\,\overline{m}^+(\sigma)\overline{M}_1^+(\sigma)\overline{M}_2^+(\sigma),\\ \overline{K}^-(\sigma)&=(\sigma-i0)^{\frac{1}{2}}\,\overline{m}^-(\sigma)\overline{M}_1^-(\sigma)\overline{M}_2^-(\sigma);\end{aligned}\tag{1.18}$$

здесь имеется в виду, что

$$\left\{\overline{m}^\pm(\sigma);\overline{M}_1^\pm(\sigma);\overline{M}_2^\pm(\sigma)\right\}=\exp\left\{\overline{f}^\pm(\sigma);\overline{F}_1^\pm(\sigma);\overline{F}_2^\pm(\sigma)\right\};\tag{1.19}$$

$$\left\{\overline{f}^{\,+}(\sigma);\overline{F}_1^{+}(\sigma);\overline{F}_2^{+}(\sigma)\right\}=\int_0^{\infty}\left\{f(x);F_1(x);F_2(x)\right\}e^{i(\sigma+i0)x}dx,$$
$$\left\{\overline{f}^{\,-}(\sigma);\overline{F}_1^{-}(\sigma);\overline{F}_2^{-}(\sigma)\right\}=\int_{-\infty}^{0}\left\{f(x);F_1(x);F_2(x)\right\}e^{i(\sigma-i0)x}dx, \tag{1.20}$$

$(\sigma+i0)^{\beta}=\sigma_+^{\beta}+e^{i\beta\pi}\sigma_-^{\beta};\ (\sigma-i0)^{\beta}=\sigma_+^{\beta}+e^{-i\beta\pi}\sigma_-^{\beta};\ \sigma_+^{\beta}=\theta(\sigma)|\sigma|^{\beta};\ \sigma_-^{\beta}=\theta(-\sigma)|\sigma|^{\beta}$,

а функции $f(x)$, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно имеют следующий вид:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1+\frac{T}{|\sigma|}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma;\ F_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1+\frac{|\sigma|-ak\sigma^2}{T+|\sigma|}e^{-2a|\sigma|}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma,$$

$$F_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1-\frac{|\sigma|-ak\sigma^2}{T+|\sigma|}e^{-2a|\sigma|}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma \qquad (-\infty<x<\infty). \tag{1.21}$$

Легко видеть, что функции $\overline{m}^{\pm}(\sigma)$, $\overline{M}_1^{\pm}(\sigma)$ и $\overline{M}_2^{\pm}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ стремятся к единице в своих областях регулярности. После представления ядра $\overline{K}(\sigma)$ в виде (1.17), функциональное уравнение (1.14) можно привести к следующему виду:

$$\overline{L}_1^{-}(\sigma)\overset{def}{=}\overline{K}^{-}(\sigma)\overline{p}^{\,-}(\sigma)=\frac{TR}{\overline{K}^{+}(\sigma)}-\frac{TE_SF_Su_S(0;a)i\sigma-TE_SF_S\overline{u}^{\,+}(\sigma)\sigma^2}{\overline{K}^{+}(\sigma)}\overset{def}{=}\overline{L}_2^{+}(\sigma). \tag{1.22}$$
$$(-\infty<\sigma<\infty).$$

Дальнейший ход рассуждений проводится аналогично как в работе [3]. Если теперь применить к (1.22) обратное интегральное преобразование Фурье, получим:

$$L_1^{-}(x)=L_2^{+}(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \tag{1.23}$$

В таком случае будем иметь [3,10,11]:

$$L_1^{-}(x)=L_2^{+}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta^{(k)}(x) \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{1.24}$$

где $\delta^{(0)}(x)=\delta(x)$, $\delta^{(n)}(x)-$ n-я производная дельта-функции Дирака $\delta(x)$.

Если теперь применить к (1.24) преобразование Фурье, будем иметь:

$$\overline{L}_1^{-}(\sigma)=\overline{L}_2^{+}(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}a_k(-i\sigma)^k \qquad (-\infty<\sigma<\infty). \tag{1.25}$$

Далее, как известно [6,7], $\overline{L}_1^{-}(\sigma)=\overline{L}_2^{+}(\sigma)=O(1)$ при $|\sigma|\to\infty$, следовательно из (1.25) вытекает, что $a_k=0$ $\left(k=\overline{1;n}\right)$. Таким образом, для неизвестной функции $\overline{p}^{\,-}(\sigma)$ из равенства (1.22) получим:

$$\overline{p}^{\,-}(\sigma)=\frac{a_0}{\overline{K}^{-}(\sigma)} \qquad (-\infty<\sigma<\infty), \tag{1.26}$$

где a_0-неизвестная постоянная, подлежащая определению из условия равновесия полубесконечного упругого стрингера $\overline{p}^{\,-}(0)=R$.

Таким образом, построено замкнутое решение рассматриваемой контактной задачи, а искомые величины соответственно имеют вид (1.15) и (1.26).

2. Теперь приступим к получению асимптотических формул для функции распределения интенсивности неизвестных тангенциальных контактных усилий

$p^-(x)$ и осевых (нормальных) напряжений $q^-(x)$, которые возникают в упругом полубесконечном стрингере, характеризующее их поведение при $|x| \to 0$ и $|x| \to \infty$.

Сначала получим асимптотические формулы для функций $p^-(x)$ и $q^-(x)$ при $x \to -\infty$. Для этой цели нужно получить разложение функции $\bar{p}^-(\sigma)$ при $|\sigma| \to 0$. Как известно, при $|\sigma| \to 0$ поведение функции $\bar{f}^-(\sigma)$ можно описать следующим асимптотическим представлением [6]:

$$\bar{f}^-(\sigma) = -\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma - i0}{T} - \frac{i\pi}{4} + \bar{f}_0^-(\sigma), \tag{2.1}$$

где

$$\bar{f}_0^-(\sigma) = \frac{\sigma}{i\pi T}\left(\ln\frac{\sigma - i0}{T} - 1\right) + \frac{\sigma^3}{3i\pi T^3}\left(\ln\frac{\sigma - i0}{T} - \frac{1}{3}\right) + \frac{\sigma}{2T} - \frac{\sigma^2}{4T^2} + \frac{\sigma^3}{6T^3} + \mathrm{O}\left(\sigma^4\right), \tag{2.2}$$

то для функции $\bar{p}^-(\sigma)$ при $|\sigma| \to 0$ получим следующую асимптотическую формулу:

$$\bar{p}^-(\sigma) = \frac{a_0 e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{T}} \exp\left\{-\bar{f}_0^-(\sigma) - \bar{F}_1^-(\sigma) - \bar{F}_2^-(\sigma)\right\}. \tag{2.3}$$

С другой стороны известно, что при $|\sigma| \to 0$ для функций $\bar{F}_1^-(\sigma)$ и $\bar{F}_2^-(\sigma)$ имеем [6]

$$\begin{aligned} \bar{F}_1^-(\sigma) &= \frac{\sigma}{i\pi T}\left[\ln 2a(\sigma - i0) - \psi(1) + \frac{i\pi}{2} + A_1\right] + \mathrm{O}\left(\sigma^3 \ln 2a(\sigma - i0)\right), \\ \bar{F}_2^-(\sigma) &= -\frac{\sigma}{i\pi T}\left[\ln 2a(\sigma - i0) + \psi(1) - \frac{i\pi}{2} - A_2\right] + \mathrm{O}\left(\sigma^3 \ln 2a(\sigma - i0)\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где приняты следующие обозначения:

$$A_1 = \int\limits_0^\infty \left[se^{-2T^*s} - \ln\left(1 + \frac{s - kT^*s^2}{1+s}e^{-2T^*s}\right)\right]\frac{ds}{s^2};\ A_2 = \int\limits_0^\infty \left[se^{-2T^*s} + \ln\left(1 - \frac{s - kT^*s^2}{1+s}e^{-2T^*s}\right)\right]\frac{ds}{s^2}, \tag{2.5}$$

$T^* = aT$, а $\psi(x)$ – известная пси-функция.

Теперь имея в виду, что при $|\sigma| \to 0$ имеет место асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\bar{f}_0^-(\sigma) - \bar{F}_1^-(\sigma) - \bar{F}_2^-(\sigma)\right\} = 1 - \left[\bar{f}_0^-(\sigma) + \bar{F}_1^-(\sigma) + \bar{F}_2^-(\sigma)\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\bar{f}_0^-(\sigma) + \bar{F}_1^-(\sigma) + \bar{F}_2^-(\sigma)\right]^2 - \cdots, \end{aligned} \tag{2.6}$$

для $\bar{p}^-(\sigma)$ при $|\sigma| \to 0$ будем иметь следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \bar{p}^-(\sigma) = \frac{a_0 e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{T}}\Bigg[1 + \frac{B_1}{\pi T}i\sigma - \frac{B_1^2}{2\pi^2 T^2}\sigma^2 + \frac{2}{\pi T}i\sigma \ln 2a(\sigma - i0) - \frac{2B_1}{\pi^2 T^2}\sigma^2 \ln 2a(\sigma - i0) - \\ - \frac{2}{\pi^2 T^2}\sigma^2 \ln^2 2a(\sigma - i0)\Bigg] + \mathrm{O}\left(\sigma^3 \ln 2a(\sigma - i0)\right), \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$B_1 = i\pi + A_1 - 1 - \psi(1) - \ln(2aT). \tag{2.8}$$

После чего, при $|\sigma| \to 0$ из (2.7) на основе условия $\bar{p}^-(0) = R$ получим значение неизвестной постоянной a_0:

$$a_0 = e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{T}R. \tag{2.9}$$

Подставляя значение постоянной a_0 из (2.9) в (2.7), для функции $\bar{p}^-(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$ окончательно получим следующую асимптотическую формулу:

$$\bar{p}^-(\sigma)=R\left[1+\frac{B_1}{\pi T}i\sigma-\frac{B_1^2}{2\pi^2T^2}\sigma^2+\frac{2}{\pi T}i\sigma\ln 2a(\sigma-i0)-\frac{2B_1}{\pi^2T^2}\sigma^2\ln 2a(\sigma-i0)-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\pi^2T^2}\sigma^2\ln^2 2a(\sigma-i0)\right]+\mathrm{O}\left(\sigma^3\ln 2a(\sigma-i0)\right). \quad (2.10)$$

Теперь применив к (2.10) обратное обобщённое интегральное преобразование Фурье, имея в виду свойства интеграла Фурье, для функции $p^-(x)$ при $|x|\to\infty$ получим:

$$p^-(x)=R\left[\frac{2}{\pi T}\frac{1}{x^2}+\frac{4}{\pi^2T^2}\left(1+\psi(1)+\ln(2aT)-A_1-\Gamma'(3)+2\ln\frac{|x|}{2a}\right)\frac{1}{|x|^3}\right]+\mathrm{O}\left(\frac{1}{x^4}\right). \quad (2.11)$$

Здесь были использованы следующие формулы [6,11]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma-i0)^{\beta}e^{-i\sigma x}d\sigma=-\frac{e^{-\frac{i\pi\beta}{2}}\sin(\pi\beta)}{\pi x_-^{1+\beta}}\Gamma(1+\beta),$$
$$\frac{d}{d\beta}(\sigma-i0)^{\beta}=(\sigma-i0)^{\beta}\ln(\sigma-i0);\quad x_-=\begin{cases}0; & x>0\\ |x|; & x\le 0,\end{cases} \quad (2.12)$$

причём $\Gamma(x)$ – известная гамма-функция Эйлера. Если теперь использовать формулу

$$q^-(x)=\frac{1}{F_S}\int_{-\infty}^{x}p^-(s)\,ds, \quad (2.13)$$

то на основе (2.11) получим поведение нормальных (осевых) напряжений $q^-(x)$, возникающих в упругом полубесконечном стрингере при $x\to-\infty$:

$$q^-(x)=\frac{R}{F_S}\left[-\frac{2}{\pi}\frac{1}{Tx}+\frac{2}{\pi^2}\left(\psi(1)+2-A_1-\Gamma'(3)+\ln(T|x|)+\ln\frac{|x|}{2a}\right)\frac{1}{(Tx)^2}\right]+\mathrm{O}\left(\frac{1}{(Tx)^3}\right). \quad (2.14)$$

Теперь приступим к получению асимптотической формулы для функций $p^-(x)$ и $q^-(x)$ при $x\to-0$. Для этой цели после громоздких и трудоёмких алгебраических преобразований представим функцию $\frac{1}{\bar{K}^-(\sigma)}$ при $|\sigma|\to\infty$ в следующей форме:

$$\frac{1}{\bar{K}^-(\sigma)}=\bar{m}_1^-(\sigma)+\bar{m}_2^-(\sigma)+\mathrm{O}\left((\sigma-i0)^{-\frac{7}{2}}\ln^2 2a(\sigma-i0)\right), \quad (2.15)$$

причём для функций $\bar{m}_1^-(\sigma)$ и $\bar{m}_2^-(\sigma)$ введены следующие обозначения:

$$\bar{m}_1^-(\sigma)=(\sigma-i0)^{-\frac{1}{2}}+\frac{T}{i\pi}(\sigma-i0)^{-\frac{3}{2}}\left(\ln 2a(\sigma-i0)+c\right)+\frac{T^2}{4}(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}-$$
$$-\frac{T^2}{2\pi^2}(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}\left(\ln^2 2a(\sigma-i0)+2c\ln 2a(\sigma-i0)+c^2\right), \quad (2.16)$$
$$\bar{m}_2^-(\sigma)=i(D_1+D_2)(\sigma-i0)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(D_1+D_2)^2(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}-$$
$$-\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}\left(\ln 2a(\sigma-i0)+c\right),$$

где

$$c=1-\ln\left(2T^*\right)+\frac{i\pi}{2};\quad D_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{\sigma-ak\sigma^2}{T+\sigma}e^{-2a\sigma}\right)d\sigma,$$

$$D_2=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left(1-\frac{\sigma-ak\sigma^2}{T+\sigma}e^{-2a\sigma}\right)d\sigma. \tag{2.17}$$

Подставляя (2.9) и (2.16) в (1.26), для функции $\overline{p}^{\,-}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ окончательно получим следующее асимптотическое представление:

$$\overline{p}^{\,-}(\sigma)=R\sqrt{T}e^{-\frac{i\pi}{4}}\left[(\sigma-i0)^{-\frac{1}{2}}+\frac{T}{i\pi}(\sigma-i0)^{-\frac{3}{2}}\left(\ln 2a(\sigma-i0)+c-\frac{\pi}{T}(D_1+D_2)\right)+\right.$$
$$+\left(\frac{T^2}{4}-\frac{1}{2}(D_1+D_2)^2\right)(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}-(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{T^2}{2\pi^2}\ln^2 2a(\sigma-i0)+\frac{T^2c^2}{2\pi^2}+\right. \tag{2.18}$$
$$\left.\left.+\left(\frac{T^2c}{\pi^2}+\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)\right)\ln 2a(\sigma-i0)+\frac{Tc}{\pi}(D_1+D_2)\right)\right]+\mathrm{O}\left((\sigma-i0)^{-\frac{7}{2}}\ln^2\left(2a(\sigma-i0)\right)\right).$$

Если теперь применить к (2.18) обратное обобщённое интегральное преобразование Фурье, а также учитывать свойства интеграла Фурье, окончательно для функции $p^-(x)$ при $x\to-0$ получим следующее асимптотическое представление:

$$p^-(x)=R\sqrt{T}\left[\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|x|^{-\frac{1}{2}}-\frac{T}{\pi^2}\left\{\left(1-\frac{\pi}{T}(D_1+D_2)-\ln(T|x|)\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}|x|^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$+\left\{\left[-\frac{7}{8}T^2+\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)\left(1-\ln(T|x|)\right)+\frac{T^2}{2\pi^2}\left(1+\frac{\pi^2}{4}-2\ln(T|x|)+\ln^2(T|x|)\right)\right]\frac{1}{\pi}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(D_1+D_2)^2}{2}-\left[\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)+\frac{T^2}{\pi^2}\left(1-\ln(T|x|)\right)\right]\frac{1}{\pi}\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{T^2}{2\pi^3}\Gamma''\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}|x|^{\frac{3}{2}}\right]+\mathrm{O}\left(|x|^{\frac{5}{2}}\right). \tag{2.19}$$

Теперь пользуясь формулой

$$q^-(x)=\frac{1}{F_S}\int_0^x p^-(s)\,ds+\frac{R}{F_S}, \tag{2.20}$$

с учётом разложения (2.19), для нормальных (осевых) напряжений $q^-(x)$, которые возникают в упругом полубесконечном стрингере при $x\to-0$, получим следующее асимптотическое представление:

$$q^-(x)=\frac{R\sqrt{T}}{F_s}\left[-\frac{2}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|x|^{\frac{1}{2}}+\frac{2T}{3\pi^2}\left\{\left(\frac{5}{3}-\frac{\pi}{T}(D_1+D_2)\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}|x|^{\frac{3}{2}}-\right.$$
$$-\frac{2}{5}\left\{\left(-\frac{3}{4}T^2+\left(\frac{D_1+D_2}{2}\right)^2+\frac{7T}{5\pi}(D_1+D_2)+\frac{53T^2}{50\pi^2}\right)\frac{1}{\pi}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{2T^2}{\pi^2}+\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)\right)\frac{1}{\pi}\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{T^2}{2\pi^3}\Gamma''\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}|x|^{\frac{5}{2}}+$$
$$+\left\{-\frac{2T}{3\pi^2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{5}\left(\left(\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)+\frac{7T^2}{5\pi^2}\right)\frac{1}{\pi}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{T^2}{\pi^3}\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\right\}|x|^{\frac{5}{2}}\ln(T|x|)-$$

$$-\frac{T^2}{5\pi^3}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)|x|^{\frac{5}{2}}\ln^2\left(T|x|\right)\Bigg]+\frac{R}{F_S}+\mathrm{O}\left(|x|^{\frac{7}{2}}\right). \qquad (2.21)$$

Следует отметить, что первые слагаемые асимптотических разложений (2.11) и (2.21) совпадают с первыми членами соответствующих разложений из [1,2].

Таким образом, построено замкнутое решение рассматриваемой контактной задачи и получены асимптотические формулы для распределения интенсивности тангенциальных контактных усилий $p^-(x)$ и осевых (нормальных) напряжений $q^-(x)$, возникающих в упругом полубесконечном стрингере, которые характеризуют их поведение как вблизи, так и вдали от точки приложения сосредоточенной силы R.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theoric gesehweisster Verbindungen. // Ingenieur Archiv, Bd. 3. Heft 2. 1932. S.123-129.
2. Koiter W.T. On the Diffusion of Load from a Stiffener into a Sheet. // The Quart. J. Mech. and Appl. Math. V.8. № 2. 1955. P.164-178.
3. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1979. № 3.С.29-34.
4. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т.32. № 4. С.632-646.
5. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд.-во ЕГУ, 1983. 260с.
6. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя параллельными полубесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. № 2. С.16-27.
7. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. № 2. С.3-10.
8. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. № 3. С.29-43.
9. Гахов Д.Ф. Краевые задачи. М.: Госиздат, 1963. 639с.
10. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 327с.
11. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544с.

Сведения об авторах

Саркисян Карен Самсонович – кандидат физ.-мат. наук, доцент. Декан факультета механики и машиноведения Армянского Государственного Инженерного Университета (Политехник).
Тел: (+374 91) 49-54-55.
E-mail: sarkarmm@seua.am

Оганисян Гамлет Вараздатович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, преподаватель кафедры механики факультета математики и механики Ереванского Государственного Университета. Ереван, Алека Манукяна, 1.
Тел: (+374 93) 27-26-26.
E-mail: HovhannisyanHamlet@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.10.2012

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Механика
УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЕСОМОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Торосян В.С.

Ключевые слова: однородный упругий цилиндр, собственный вес, осесимметричная деформация, совокуность бесконечных систем, численный эксперимент.
Key words: homogenous elastic cylinder, own weight, axissymmetric deformation, set of infinite systems, numerical experiment.

Թորոսյան Վ. Ս.

Վերջավոր երկարությամբ կշիռ ունեցող հոծ առաձգական գլանի կոնտակտային խնդրի թվային-անալիտիկ լուծումը

Դիտարկված է սեփական կշռի ազդեցության տակ վերջավոր երկարությամբ հոծ առաձգական գլանի առանցքասիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդիրը: Անալիտիկ լուծումը կառուցվել է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Դինիի երկու շարքերի գումարի տեսքով: Այնուհետև, բավարարելով եզրային պայմանները , խնդրի լուծումը բերվել է գծային հանրաշվական անվերջ հավասարումների համախմբի: Կատարվել է թվային հաշվարկ: Ստացված թվային արդյունքնեռի հիման վրա կատարվել է թվային վերլուծություն:

Torosyan V.S.

Numerical and analytical solution of the contact problem for an elastic heavy cylinder of finite length

Axis-symmetric problem for a solid elastic cylinder of finite length is considered. The cylinder is deformed under its own weight. There are no displacements on the lower edge of the cylinder and no stresses on the upper edge and the lateral surface of the cylinder.

В предлагаемой работе рассматривается осесимметричная задача для сплошного упругого цилиндра конечной длины, деформирующегося под действием собственного веса, когда на нижнем торце цилиндра отсутствуют перемещения, а на другом торце и на боковой поверхности отсутствуют напряжения.

Решение задачи приведено к совокуносты бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Приведён численный анализ.

Осесимметричная задача для сплошного упругого цилиндра конечной длины, находяшегося под действием собственного веса, когда цилиндр закреплён своей боковой поверхностью, а основания цилиндра свободны от напряжений, решена в [1]. Аналогичная задача для конечного цилиндра, когда граничные условия заданы напряжениями, рассматривалась в работе [2]. Другие осесимметричные задачи для конечных цилиндров, когда на одном или двух торцах заданы перемещения, а на остальных поверхностях – напряжения или, когда перемещения заданы на боковой поверхности, а на торцах – напряжения при отсутствии гравитационного поля, рассматривались в [3-7].

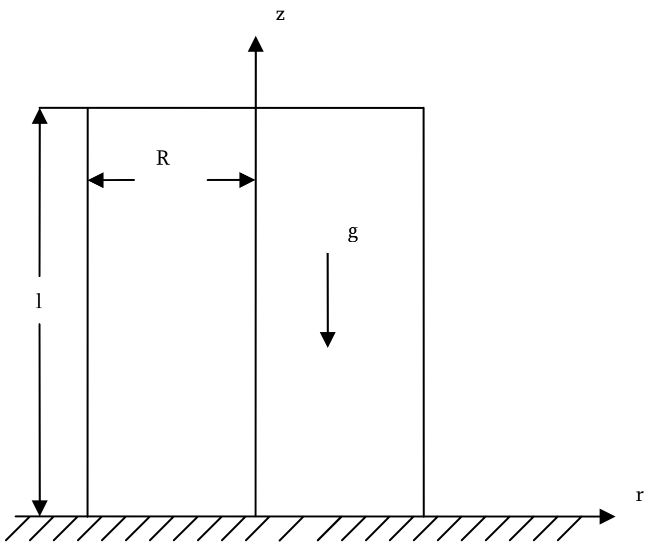
1.Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат для случая осевой симметрии при наличии объемных сил в перемещениях имеют вид:

$$\nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\Delta}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\rho R}{G} = 0 \quad (1.1) \qquad \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\Delta}{\partial z} + \frac{\rho Z}{G} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь u_r и u_z – компоненты перемещения, ρ – плотность материала цилиндра, G – модуль сдвига, R и Z – компоненты объемных сил.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Если ось z направить в обратную сторону действия силы тяжести для компонентов объемных сил (фиг.1), будем иметь: $R = 0,\ Z = -g$.



Фиг. 1

Для построения общего решения уравнений (1.1)-(1.2), при отсутствии объёмных сил бигармоническую функцию А. Лява примем в виде [1]

$$\phi(r,z) = A_0 r^2 z^2 + B_0 z^4 + C_0 r^4 + F_0 z^2 + E_0 z^3 +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \cos\lambda_k z\left[\varepsilon_k I_0\left(\lambda_k r\right) + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r)\right] + \qquad (1.3)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k r)\left[A_k \mathrm{sh}\mu_k r + B_k \mathrm{ch}\mu_k z + C_k \mu_k z\mathrm{sh}\mu_k z + D_k \mu_k z\mathrm{ch}\mu_k z\right]$$

где введены обозначения

$$C_0=-\frac{1-2\nu}{16(1-\nu)}A_0,\qquad B_0=-\frac{3-2\nu}{6(1-\nu)}A_0$$

$J_n\left(x\right)-$ функция Бесселя n -го порядка первого рода от действительного аргумента, $I_n\left(t\right)-$ функция Бесселя n-го порядка первого рода от мнимого аргумента, $\lambda_k=k\pi/l$, μ_k – корни уравнения $J_1\left(\mu_k R\right)=0$

Используя формулы А. Лява, представляющие перемещения и напряжения через функкцию $\phi\left(r,z\right)$, а также частное решение уравнений равновесия с наличием массовых членов [1], для перемещений и напряжений будем иметь выражения:

$$2GU_r\left(r,z\right)=\left(\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\rho g-4A_0\right)rz+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\sin\lambda_k z\left[\varepsilon_k I_1\left(\lambda_k r\right)+G_k\lambda_k rI_0\left(\lambda_k r\right)\right]+$$

$$+\sum_{k-1}^{\infty}\mu_k^2 J_1\left(\mu_k r\right)\left[\left(A_k+D_k\right)\text{ch}\mu_k z+\left(B_k+C_k\right)\text{sh}\mu_k z+\right.$$

$$\left.+C_k\mu_k z\text{ch}\mu_k z+D_k\mu_k\text{sh}\mu_k z\right]$$

$$2GU_z\left(r,z\right)=\left(\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\rho g+\frac{2A_0}{1-2\nu_0}\right)z^2+$$

$$+6\left(1-2\nu\right)\text{E}_0 z+2\left(1-2\nu\right)F_0+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\cos\lambda_k z\left[G_k\lambda_k r_k I_1\left(\lambda_k r\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\text{E}_k+4\left(1-2\nu\right)G_k\right)I_0\left(\lambda_k r\right)\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2 J_0\left(\mu_k r\right)\left[\left(2\left(1-2\nu\right)D_k-A_k\right)\text{sh}\mu_k z+\right.$$

$$\left.-2\left(1-2\nu\right)C_k\text{ch}\mu_k z+B_k\text{ch}\mu_k z-C_k\mu_k z\text{sh}\mu_k z-D_k\mu_k z\text{ch}\mu_k z\right]$$

$$2G\sigma_z\left(r,z\right)=2\left(\frac{\rho g}{3-2\nu}+2A_0\right)z+6\left(1-\nu\right)\text{E}_0-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3\sin\lambda_k z\left\{G_k\lambda_k rI_1\left(\lambda_k r\right)+\left[\text{E}_k+2\left(2-\nu\right)G_k\right]I_0\left(\lambda_k r\right)\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^3 J_0\left(\mu_k r\right)\left\{\left[D_k\left(1-2\nu\right)-A_k\right]\text{ch}\mu_k z+\left[C_k\left(1-2\nu\right)-B_k\right]\text{sh}\mu_k z-\right.$$

$$\left.-C_k\mu_k z\text{ch}\mu_k z-D_k\mu_k z\text{sh}\mu_k z\right\}$$

$$2G\sigma_r\left(r,z\right)=\left(\frac{1+2\nu}{3-2\nu}\rho g-\frac{4A_0}{1-2\nu}\right)z+6\nu\text{E}_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3\sin\lambda_k z\left\{G_k\lambda_k rI_1\left(\lambda_k r\right)-E_k\frac{I_1\left(\lambda_k r\right)}{\lambda_k r}+\right.$$

$$\left.+\left[B_k+\left(1+2\nu\right)C_k\right]\text{sh}\mu_k z++C_k\mu_k z\text{ch}\mu_k z+D_k\mu_k z\,\text{sh}\mu_k z\right\}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2 J_1(\mu_k r)}{r}\{(A_k+D_k)\text{sh}\mu_k z+C_k\mu_k z\text{ch}\mu_k z+$$
$$+(B_k+C_k)\text{sh}\mu_k z+D_k\mu_k z\text{sh}\mu_k z\}$$
$$\tau_{rz}(r,z)=\left(\frac{1-2\nu}{2(3-2\nu)}\rho g-2A_0\right)r+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3\cos\lambda_k z\left\{G_k\lambda_k r I_0(\lambda_k r)+\left[\text{E}_k+2(1-\nu)G_k\right]I_1(\lambda_k r)\right\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^3 J_1(\mu_k r)\{(A_k+2\nu D_k)\text{sh}\mu_k z+C_k\mu_k z\text{sh}\mu_k+$$
$$+(B_k+2\nu C_k)\text{ch}\mu_k z+D_k\mu_k z\text{ch}\mu_k z\}$$

Граничные условия для этой задачи можно представить равенствами (отсутствие перемещений на нижнем торце и напряжений на других поверхностях цилиндра).

$$U_r(r,0)=U_z(r,0)=0\qquad(0\le r\le R)$$
$$\sigma_z(r,l)=\tau_{rz}(r,l)=0\qquad(0\le r\le R)\tag{1.4}$$
$$\sigma_r(R,z)=\tau_{rz}(R,z)=0\qquad(0<z<l)$$

Полагая $\lambda_k=\dfrac{k\pi}{l}$, $J_1(\mu_k R)=0$ и удовлетворяя условиям (1.4), найдём

$$A_0=\frac{1-2\nu}{4(3-2\nu)}\rho g,\qquad E_0=\frac{\rho g l}{6(1-\nu)}$$
$$F_0=\frac{2\nu}{1-2\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k G_k I_1(\lambda_k R),\ A_k=-D_k\tag{15)}$$
$$E_k=-G_k\left[2(1-\nu)+\frac{\lambda_k R I_0(\lambda_k R)}{I_0(\lambda_k R)}\right]$$
$$B_k=C_k\left[1-2\nu-\mu_k l\text{cth}\mu_k l\right]+D_k\left[2(1-\nu)\text{cth}\mu_k l-\mu_k l\right]\tag{1.6}$$

Введём обозначения

$$X_k=\mu_k^3 J_0(\mu_k R)\text{sh}\mu_k l\left[D_k\text{cth}\frac{\mu_k l}{2}+C_k\right]$$
$$Y_k=\mu_k^3 J_0(\mu_k R)\text{sh}\mu_k l\left[D_k\text{th}\frac{\mu_k l}{2}+C_k\right]\tag{1.7}$$
$$Z_k=\frac{lG_m\lambda_m^3 I_1(\lambda_m R)}{R}$$

Тогда, после несложных преобразований, для определения коэффициентов $C_k, D_k,\ G_k$ получаем совокупность из трёх бесконечных систем линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$Z_m = \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} Y_k + M_m \quad m = 1,2,... \tag{1.8}$$

$$X_m = \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} Z_k \quad m = 1,2,... \tag{1.9}$$

$$Y_m = \sum_{k=1}^{\infty} D_{km} Z_k \quad m = 1,2,...\ , \tag{1.10}$$

где введены следующие обозначения:

$$A_{km} = \begin{cases} A_{km}^{(1)}, & m = 1,3,... \\ A_{km}^{(2)}, & m = 2,4,... \end{cases},\quad B_{km} = \begin{cases} B_{km}^{(1)}, & m = 1,3,... \\ B_{km}^{(2)}, & m = 2,4,... \end{cases}$$

$$C_{km} = \begin{cases} C_{km}^{(1)}, & m = 1,3,... \\ C_{km}^{(2)}, & m = 2,4,... \end{cases},\quad D_{km} = \begin{cases} D_{km}^{(1)}, & m = 1,3,... \\ D_{km}^{(2)}, & m = 2,4,... \end{cases}$$

$$A_{km}^{(1)} = -B_{km}^{(2)} = \frac{2}{\Delta_m R^2} \frac{(1+\nu)\lambda_m^2 - (1-\nu)\mu_k^2}{\left(\mu_k^2 + \lambda_m^2\right)^2},\ B_{km}^{(1)} = -A_{km}^{(2)} = \frac{2(1-\nu)}{R^2} \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_m^2}$$

$$M_m = -\frac{2\rho g l \nu}{K_0 \Delta_m \lambda_m^2 R^2 (1-\nu)},\ \Delta_m = \frac{I_0^2(\lambda_m r)}{I_1^2(\lambda_m r)} - 1 - \frac{2(1-\nu)}{\lambda_m^2 R^2}$$

$$C_{km}^{(1)} = \frac{4\mu_m}{l\omega_m} \left\{ \frac{(1-\nu)^2 \operatorname{sh}2\mu_m l \left[(1-2\nu)\operatorname{sh}\mu_m l + \mu_m l\right]}{\lambda_k^2 + \mu_m^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\operatorname{ch}\mu_m l + 1)\left[(1-2\nu)\operatorname{sh}\mu_m l + \mu_m l\right]}{\left(\lambda_k^2 + \mu_m^2\right)^2} \left[(1+\nu)\lambda_k^2 - (1-\nu)\mu_m^2\right] \right\}$$

$$C_{km}^{(2)} = \frac{4(1-\nu)\mu_m}{l\omega_m} \left\{ \frac{\operatorname{sh}2\mu_m l}{\left(\lambda_k^2 + \mu_m^2\right)^2} \left[(1-\nu)\mu_m^2 - \left(1+\lambda_k^2\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{(\operatorname{ch}\mu_m l + 1)\left[(1-2\nu)\operatorname{sh}\mu_m l + \mu_m l\right]}{\lambda_k^2 + \mu_m^2} \right\}$$

$$D_{km}^{(1)}=\frac{4(1-\nu)\mu_m}{l\omega_m}\left\{\frac{(\mathrm{ch}\mu_m l-1)\left[(1-2\nu)\mathrm{sh}\mu_m l-\mu_m l\right]}{\lambda_k^2+\mu_m^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{sh}2\mu_m l}{\left(\lambda_k^2+\mu_m^2\right)^2}\left[(1+\nu)\lambda_k^2-(1-\nu)\mu_m^2\right]\right\}$$

$$D_{km}^{(2)}=\frac{4\mu_m}{l\omega_m}\left\{\frac{(\mathrm{ch}\mu_m l-1)\left[(1-2\nu)\mathrm{sh}\mu_m l-\mu_m l\right]}{\left(\lambda_k^2+\mu_m^2\right)^2}\left[(1-\nu)\mu_m^2-(1+\nu)\lambda_k^2\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{(1-\nu)^2\,\mathrm{sh}2\mu_m l}{\lambda_k^2+\mu_m^2}\right\}$$

$$\omega_m=(3-4\nu)\mathrm{ch}^2\mu_m l+(1-2\nu)^2+\mu_m^2 l^2$$

Легко убедиться в том, что условие равновесия выполнено. Действительно, из формулы для определения нормальных напряжений σ_z при $z=0$ будем иметь

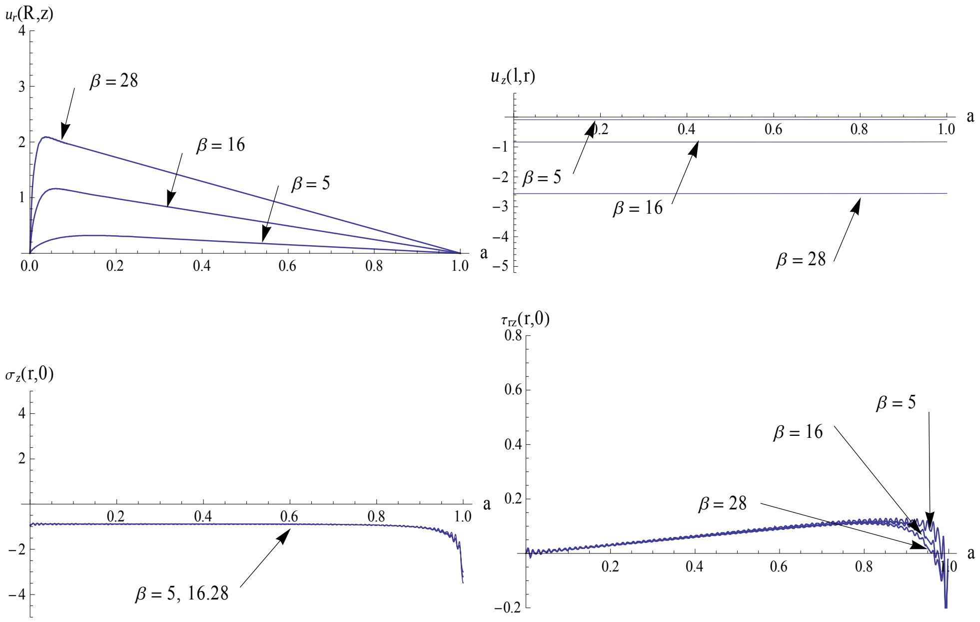
$$\sigma_z(r,0)=-\rho gl+2(1-\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^3 D_k J_0(\mu_k r)\ , \tag{1.11}$$

откуда получим

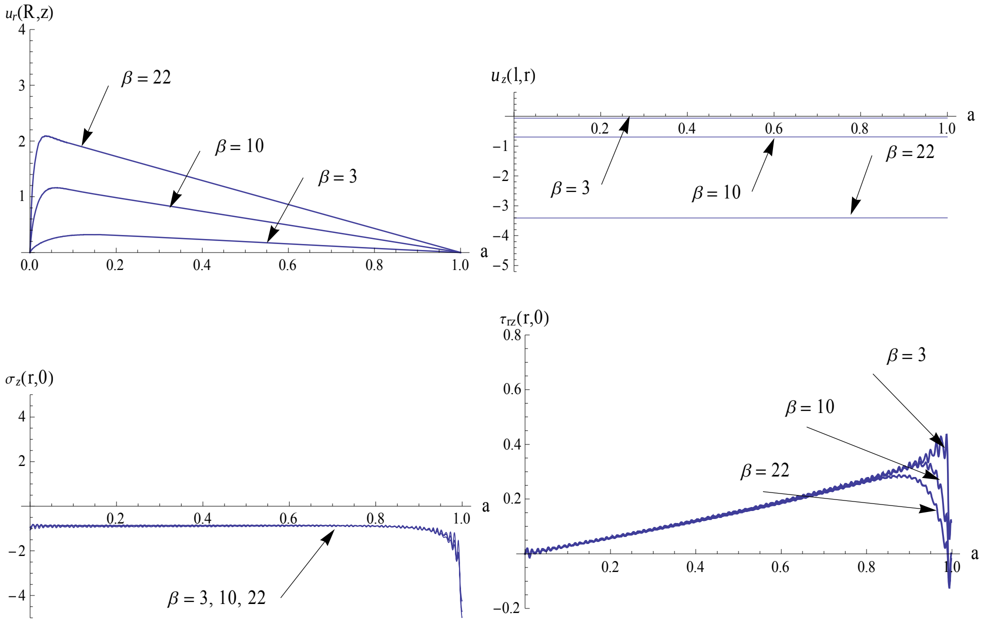
$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\sigma_z(r,0)rdr=2\pi\int_0^R\sigma_z(r,0)rdr=-\frac{2\pi\rho glR^2}{2}+$$

$$+2\pi(1-\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^3 D_k\int_0^R rJ_0(\mu_k r)dr=-\pi\rho glR^2=-mg \tag{1.12}$$

2. В численном примере решаются укороченные бесконечные системы из ≈ 750 уравнений для двух значений коэффициентов Пуассона $(\nu=0.3$ и $\nu=0.42)$ и для различных значений $\beta=\dfrac{l}{R}$. Используя значения найденных неизвестных коэффициентных систем (1.8)-(1.10), построены графики для контактного давления $\sigma_z(r,0)/\rho gl$, касательного напряжения $\tau_{rz}(r,0)/\rho gl$ и компонентов перемещений $2Gu_r(R,z)/\rho gl^2$, $2Gu_z(r,l)/\rho gl^2$. Эти графики показаны на фиг.2. А в таблице представлены максимальные значения $2Gu_r(R,z)/\rho gl^2$ в зависимости от коэффициентов Пуассона ν и отношения $\beta=\dfrac{l}{R}$.



Фиг.2. $\nu = 0.3$



Фиг. 3. $\nu = 0.42$

Таблица

υ / β	0.05	0.3	0.42	0.45
2	0.0197 a=0.2779	0.1018 a=0.2537	0.1341 a=0.2438	0.1416 a=0.2435
5	0.0644 a=0.1681	0.3204 a=0.1452	0.4159 a=0.1351	0.4379 a=0.1348
8	0.1111 a=01172	0.5472 a=0.1051	0.7070 a=0.1033	0.74331 a=0.1033
10	0.1426 a=0.0977	06997 a=0.0909	0.9039 a=0.0842	0.9502 a=0.0842
15	0.2215 a=0.0764	1.0840 a=0.0666	1.3965 a=0.0635	1.4679 a=0.0558
18	0.2696 a=0.0614	1.3159 a=0.0560	1.6936 a=0.0547	1.7791 a=0.0544
20	0.3014 a=0.0574	1.4711 a=0.0516	1.8938 a=0.0447	1.9902 a=0.0447
24	0.3649 a=0.0438	1.7816 a=0.0437	2.2903 a=0.0438	2.4050 a=0.0438
30	0.46154 a=0.0381	2.2479 a=0.0359	2.8900 a=0.0354	3.0349 a=0.0353

Легко установить, что на нижнем закреплённом торце цилиндра имеет место равенство

$$\sigma_r\left(r,0\right)=\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z\left(r,0\right)\qquad\left(0\le r\le R\right)\tag{2.1}$$

3. Полученные численные результаты позволяют сделать следующие выводы :

а) В средней части контактной зоны $\left(r<0.9R\right)$ нормальное напряжение отрицателъно и распределяется практически равномерно, а при приближении к границе оно возрастает и стремится к бесконечности. Высота цилиндра существенно не влияет на характер нормалъных напряжений.

б) В той же части контактной зоны касательные наряжения, будучи положительными, распределяются почти по линейному закону, а вблизи границы бесконечное число раз меняют знак, т.е. имеет место осцилляция. На оси цилиндра касательные напряжения равны нулю.

в) Боковая поверхностъ цилиндра претерпевает максимальное радиальное перемещение на некотором неболъшом расстоянии от основания. При этом, это расстояние практически не зависит от значения коэффициента Пуассона и уменьшается с увеличением высоты цилиндра.

г) Верхний торец цилиндра вследствие деформации опускается, практически сохраняя форму и тем больше, чем больше коэффициент Пуассона и высота цилиндра. При этом, эта зависимость является нелинейной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б.Л. Об одной осесимметричной задаче для сплошного весомого цилиндра конечной длины.// Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №1. С.55-62.
2. Абрамян Б.Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра.//Докл. Арм. ССР. 1954. Т.19. №1. С.3-12.
3. Валов Г.М. Осесимметричная задача о сжатии упругого цилиндра, покоящегося на гладком жёстком основании.//Изв. АН СССР. Механика и машиностроние. 1961. №6. С.151-154.
4. Валов Г.М. Об осесимметричной деформации сплошного круглого цилиндра конечной длины. //ПММ. 1962. Т.26. Вып. 4. С.650-667.
5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для круглой жёстко защемлённой плиты. //Изв. Арм. ССР. Сер. физ.-мат.н. 1963. Т.16. №1. С.13-32.
6. Баблоян А.А., Тоноян В.С. Изгиб двухслойной толстой плиты осесимметричной нагрузкой. // Изв.Арм. ССР.Сер. физ.-мат. н. Т.16. №1. С.13-32.
7. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264с.
8. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Т. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.: Гостехиздат, 1950 .

Сведения об авторе:

Торосян Вардан Стёпаевич – научный сотрудник Института механики НАН Армении

E-mail: mechins@sci.am

Поступила в редакцию 07.11.2012

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Механика
УДК 539.3

IN-PLANE INVERSE PROBLEM ON CRACK IDENTIFICATION IN THE ELASTIC HALF-SPACE

Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M.A.

Ключевые слова: упругое полупространство, трещина, обратная задача, идентификация, интегральные уравнения, функционал невязки.
Key words: elastic half-space, crack, inverse problem, identification, integral equations, discrepancy functional.

Չարլետտա Մ., Իովանե Ջ., Սումբատյան Մ.Ա.
Առաձգական կիսատարածությունում ճաքի նույնականացման հարթ հակադարձ խնդիրը
Աշխատանքում դիտարկվում է հարթ խնդիր համասեռ և իզոտրոպ առաձգական կիսատարածության համար: Աշխատանքի նպատակն է կիսատարածության ներսում ճաքի վերականգնման հետ կապված հակադարձ խնդրի լուծման համար արդյունավետ մաթեմատիկական ապարատի մշակումը: Մասնավորապես, որոշվում է եզրային մակերևույթին զուգահեռ տեղակայված ուղղագիծ ճաքի դիրքը և չափերը: Դիտարկվող հակադարձ խնդրի ձևակերպումը հիմնված է առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի վրա:

Чарлетта М., Иоване Дж., Сумбатян М.А.
Плоская обратная задача идентификации трещины в упругом полупространстве
В работе рассматривается плоская задача для упругого однородного и изотропного полупространства. Целью работы является разработка эффективного математического аппарата для решения обратной задачи, которая связана с реконструкцией трещины внутри полупространства. В частности, определяется положение и размер прямолинейной трещины, параллельной её граничной поверхности. Формулировка рассматриваемой обратной задачи основана на системе интегральных уравнений первого рода.

In this work we study a homogeneous and isotropic elastic half-space in the context of in-plane deformation. The aim of the paper is to propose a powerful mathematical tool to solve the inverse problem, which is connected to crack reconstruction inside the half-space. In particular, position and sizes of the linear crack, parallel to its boundary surface, are determined. The formulation of the considered inverse problem is based on a system of integral equations of the first kind.

1. Introduction

The theory of inverse problems is an intensively developing branch of applied mathematics and engineering science. The current state of the art and further references can be found, for example, in [1-3].

The recovery of a linear crack by boundary measurements is an extensively studied problem. It is known that in geomechanics and strength analysis one needs to reconstruct geometry (i.e. position, shape, and characteristic size) of linear cracks from results of the measurements of some physical fields over boundary surface of the considered elastic solid. This problem seems to be a typical inverse problem.

Various methods were applied to study the inverse problem on reconstruction of crack's geometry. The concept of duality based on the reciprocity gap principle gives an efficient instrument to study such a type of problems in some cases. Among other important works published in this field we can mention here [4], where the authors establish uniqueness of the problem under some overdetermined boundary measurements, that is to know on the (total) boundary surface or line, in 2-d case, both the value of the basic potential function and the value of its normal derivative. These results were advanced in [5,6] where it is shown that to find the normal to the plane of the crack is a more easy task than to determine its true configuration. We would only stress that these results require the input data measured over full boundary surface. Some interesting ideas for the case of incomplete data were proposed in [7].

In the problem under investigation it is quite natural to operate with the settlement of the boundary surface, which typically can be measured with a high precision. For this purpose, we may apply some outer loads to the boundary surface. Then its settlement depends on geometry and position of a system of discontinuities, located inside the medium. Hence, we can pose the inverse problem on reconstruction of these geometric parameters from the input data taken from results of the measurements.

In the present paper we consider a homogeneous and isotropic elastic half-space in the context of in-plane deformation, whose formulation is more complex when compared with the case of scalar model. We study the problem connected with the reconstruction of the position and the size of a linear crack inside an elastic half-space and parallel to its boundary surface. This study, which defines a typical inverse problem, can be reduced to a system of integral equations of the first kind. It is known that such equations belong to a class of the so-called ‘‘ill-posed’’ problems [2]. This means that application of ordinary numerical approaches to such problems makes calculations unstable. In order to overcome this difficulty, one should apply some refined methods like Tikhonov's smoothing functional, regularizing operators, or similar. In the context of mathematical formulation of the problem we notice that it is simultaneously ill-posed and non linear problem, like many other inverse problems (see [2]).

Another relevant aspect of the inverse problem concerned is a continuity of the solution upon the input data, as well as the smoothness and the stability of the proposed algorithms. A good survey on this subject is given in [8], where the reader can find also some results concerning Lipschitz stability.

A motivation why it is important to reconstruct cracks parallel to the free surface of the elastic half-space can be justified as follows. First of all, before to study a general case of the crack location, it is quite natural to study the simpler case of parallel crack. In fact, with the use of the Fourier transform in this problem all kernels of respective integral equations are expressed in terms of elementary functions, as well as their right-hand sides. Besides, this geometry is very important for applications in the testing of some composite materials on epoxy basis. Really, in the layered composites produced sequentially from layers of reinforcing strings and layers of epoxy, the layerwise process, there may appear exfoliations between contacting layers, which are obviously parallel to the free surface.

Similar problems in the less complex anti-plane case, both for horizontal and inclined cracks, have been studied by the authors in [9,10].

2. Mathematical Formulation and Reducing to Integral Equations

Let us consider the in-plane problem concerning a linear horizontal crack located in the homogeneous and isotropic elastic half-plane parallel to its boundary surface (see Fig.1).

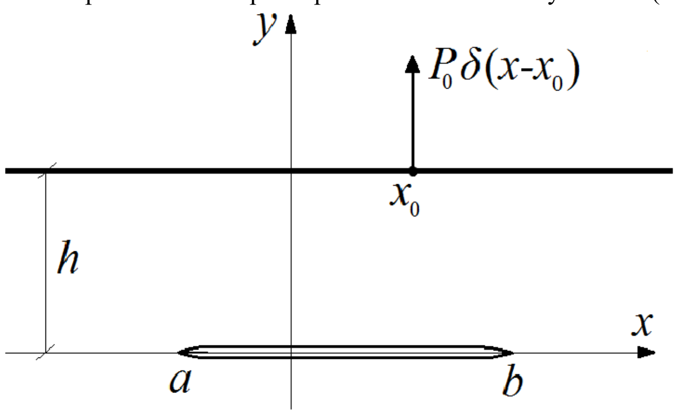


Fig. 1

In the considered two-dimensional (2D) case of plane strain the formulation of the problem implies the components of the displacement vector $\overline{u}$ to be of the following form

$$\overline{u}(x,y,z) = \{u_x(x,y), u_y(x,y), 0\} \tag{2.1}$$

where u_x and u_y – components of the displacement vector in the direction of x and y axes, respectively. In the studied 2D problem these two functions satisfy the following equations of equilibrium:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + (1-c^2)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \left(c^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} < 1 \right) \\ &\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + (1-c^2)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

where λ and μ are elastic moduli.

If functions u_x and u_y are determined from Eq.(2.2) then the components of the stress tensor can be found from the constitutive equations

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma_{xx}}{\lambda + 2\mu} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + (1-2c^2)\frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad \frac{\sigma_{xy}}{\mu} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ &\frac{\sigma_{yy}}{\lambda + 2\mu} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + (1-2c^2)\frac{\partial u_x}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Let us assume that the crack is linear, horizontal, and h designates the distance between the crack's line $y = 0$ and the boundary surface $y = h$. Let us also assume that the left and the right tips of the crack have the Cartesian coordinates $(a,0)$ and $(b,0)$, respectively (see Fig.1).

Let a (known) normal point load $P_0(x)\delta(x - x_0)$ be applied to the boundary surface of the half-space at point x_0, which is assumed to be known. Then the full mathematical formulation of the direct problem is to solve equations (2.2) with the following boundary conditions

$$y = h: \quad \sigma_{xy}(x,h) = 0, \quad \sigma_{yy}(x,h) = P_0\delta(x - x_0), \quad (|x| < \infty) \tag{2.4a}$$

$y = 0$:

$$\begin{cases} u_x(x,+0) = u_x(x,-0), \quad u_y(x,+0) = u_y(x,-0), & (x < a) \cup (x > b) \\ \sigma_{xy}(x,+0) = \sigma_{xy}(x,-0), \quad \sigma_{yy}(x,+0) = \sigma_{yy}(x,-0), & (x < a) \cup (x > b) \end{cases} \tag{2.4b}$$

$$\sigma_{xy}(x,+0) = \sigma_{xy}(x,-0) = \sigma_{yy}(x,+0) = \sigma_{yy}(x,-0) = 0, \quad (a < x < b) \tag{2.4c}$$

In order to give a solution to the boundary value problem (2.2) – (2.4), we consider separately the upper layer $(|x| < \infty, 0 < y < h)$, where all physical quantities are marked by the subscript "+", and the lower half-space $(|x| < \infty, y < 0)$, where all quantities are marked by "–".

To the considered boundary problem, we construct the solution by applying the Fourier transform with respect to variable x, which for any given function $f(x,y)$ is defined by the pair of (direct and inverse) relations:

$$F(s,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{isx}dx, \qquad f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,y)e^{-isx}ds \tag{2.5}$$

Note that all Fourier transforms are designated by corresponding capital letters. It is evident that the first-order derivative $\partial/\partial x$ of any function in the Fourier variables will be replaced by factor $(-is)$, and the second-order derivative $\partial^2/\partial x^2$ – by factor $(-s^2)$. Then in Fourier images, system (2.2) becomes a system of ordinary differential equations, with a certain parameter s:

$$\begin{cases} c^2U_x'' - s^2U_x + (1-c^2)(-is)U_y' = 0 \\ (1-c^2)(-is)U_x' + U_y'' - c^2s^2U_y = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

where all ordinary derivatives are applied with respect to variable y.

Let us note that the Fourier images of the components of the stress tensor are expressed in terms of the Fourier transforms of functions u_x and u_y as follows:

$$\frac{\Sigma_{xx}}{\lambda+2\mu} = (-is)U_x + (1-2c^2)U_y', \qquad \frac{\Sigma_{xy}}{\mu} = U_x' + (-is)U_y,$$
$$\frac{\Sigma_{yy}}{\lambda+2\mu} = U_y' + (1-2c^2)(-is)U_x \tag{2.7}$$

The solution to system (2.6) can be constructed by using the method of characteristic polynomial that results in the following representations in the lower half-plane and in the upper strip, respectively:

$$\begin{cases} U_x^- = Ai\,\mathrm{sign}(s)e^{|s|y} - B\left[\dfrac{1+c^2}{(1-c^2)(-is)} + iy\,\mathrm{sign}(s)\right]e^{|s|y} \\ U_y^- = -Ae^{|s|y} + By\,e^{|s|y}, \qquad (y \le 0) \end{cases} \tag{2.8}$$

and

$$\begin{cases} U_x^+ = C\,i\,\mathrm{ch}(sy) - D\left[\dfrac{1+c^2}{(1-c^2)(-is)}\mathrm{ch}(sy) + iy\,\mathrm{sh}(sy)\right] + \\ + Ei\,\mathrm{sh}(sy) - F\left[\dfrac{1+c^2}{(1-c^2)(-is)}\mathrm{sh}(sy) + iy\,\mathrm{ch}(sy)\right] \\ U_y^+ = -C\,\mathrm{sh}(sy) + Dy\,\mathrm{ch}(sy) - E\,\mathrm{ch}(sy) + Fy\,\mathrm{sh}(sy), \qquad (0 \le y \le h) \end{cases} \tag{2.9}$$

where the six unknown constants A, B, C, D, E, F should be determined from boundary conditions (2.4).

On the basis of Eqs. (2.7) – (2.9) one can easily write out all physical quantities present in boundary conditions (2.4).

If we introduce the two new unknown functions $g_x(x), g_y(x)$, $a \le x \le b$, as follows

$$u_x^+(x,0)-u_x^-(x,0)=\begin{cases} g_x(x), & a<x<b \\ 0, & (x<a)\cup(x>b) \end{cases};$$
$$u_y^+(x,0)-u_y^-(x,0)=\begin{cases} g_y(x), & a<x<b \\ 0, & (x<a)\cup(x>b) \end{cases} \tag{2.10}$$

Then

$$U_x^+(s,0)-U_x^-(s,0)=G_x(s)=\int_a^b g_x(\xi)e^{is\xi}d\xi;$$
$$U_y^+(s,0)-U_y^-(s,0)=G_y(s)=\int_a^b g_y(\xi)e^{is\xi}d\xi \tag{2.11}$$

Obviously, the physical meaning of functions $g_x(x)$ and $g_y(x)$ is the relative displacement of the upper and the lower faces of the crack, in horizontal and vertical direction respectively.

Now, by using representations (2.10), (2.11), one can satisfy boundary conditions (2.4a), (2.4b) that results in a 6×6 linear algebraic system regarding coefficients A,B,C,D,E,F whose solution can easily be constructed in the following form:

$$\begin{aligned} A(s)=&-iG_x e^{-2|s|h}\left\{\operatorname{sign}(s)[c^2\operatorname{sh}^2(\mathrm{sh})+(1-c^2)s^2h^2]+(c^2/2)[\operatorname{sh}(2\mathrm{sh})+2\mathrm{sh}]\right\}+\\ &+G_y e^{-2|s|h}\left\{[\operatorname{sh}^2(\mathrm{sh})-(1-c^2)s^2h^2]+[\operatorname{sign}(s)/2][\operatorname{sh}(2\mathrm{sh})-2\mathrm{sh}]\right\}-\frac{P_0\,e^{isx_0}}{2\mu\,s(1-c^2)}e^{-2|s|h}\times\\ &\times\left\{\operatorname{sign}(s)[\operatorname{ch}(\mathrm{sh})+(1-c^2)\mathrm{sh}\ \operatorname{sh}(\mathrm{sh})]+[\operatorname{sh}(\mathrm{sh})+(1-c^2)\mathrm{sh}\ \operatorname{ch}(\mathrm{sh})]\right\} \end{aligned} \tag{2.12a}$$

$$\begin{aligned} B(s)=&-is(1-c^2)G_x e^{-2|s|h}\left\{\operatorname{sh}^2(\mathrm{sh})+[\operatorname{sign}(s)/2][\operatorname{sh}(2\mathrm{sh})+2\mathrm{sh}]\right\}+\\ &+s(1-c^2)G_y e^{-2|s|h}\left\{\operatorname{sign}(s)\operatorname{sh}^2(\mathrm{sh})+(1/2)[\operatorname{sh}(2\mathrm{sh})-2\mathrm{sh}]\right\}-\\ &-\frac{P_0\,e^{isx_0}}{2\mu}e^{-2|s|h}[\operatorname{ch}(\mathrm{sh})+\operatorname{sign}(s)\operatorname{sh}(\mathrm{sh})] \end{aligned} \tag{2.12b}$$

$$\begin{aligned} &C(s)=A(s)+i\operatorname{sign}(s)c^2G_x, \qquad D(s)=B(s)+(1-c^2)isG_x,\\ &E(s)=A(s)-G_y, \qquad F(s)=B(s)\operatorname{sign}(s)-(1-c^2)sG_y \end{aligned} \tag{2.12c}$$

Now, the only remaining boundary condition is (2.4c). By applying the inverse Fourier transform, with the use of the convolution theorem, this allows us to mathematically reduce the problem to the system of integral equations with respect to unknown functions $g_x(x)$ and $g_y(x)$, which is valid over the crack length:

$$\begin{cases} \int_a^b K_{11}(x-\xi)g_x(\xi)d\xi+\int_a^b K_{12}(x-\xi)g_y(\xi)d\xi=f_1(x) \\ \int_a^b K_{21}(x-\xi)g_x(\xi)d\xi+\int_a^b K_{22}(x-\xi)g_y(\xi)d\xi=f_2(x) \end{cases}, \qquad a\le x\le b \tag{2.13}$$

where

$$K_{11}(x) = 2\int_0^\infty \left\{\left[s^3h^2 - s^2h + \frac{s}{2}\right]e^{-2sh} - \frac{s}{2}\right\}\cos(xs)\,ds = \frac{1}{x^2} +$$
$$+\frac{12h^2(16h^4 - 24h^2x^2 + x^4)}{(16h^4 + 8h^2x^2 + x^4)(4h^2 + x^2)^2} - 8h^2\frac{4h^2 - 3x^2}{(4h^2 + x^2)^3} + \frac{4h^2 - x^2}{(4h^2 + x^2)^2} \tag{2.14a}$$

$$K_{12}(x) = -2h^2\int_0^\infty s^3e^{-2\mathrm{sh}}\sin(xs)\,ds = -\frac{96h^3x(4h^2 - x^2)}{(16h^4 + 8h^2x^2 + x^4)(4h^2 + x^2)^2}, \tag{2.14b}$$
$$K_{21}(x) = -K_{12}(x)$$

$$K_{22}(x) = 2\int_0^\infty \left\{\left[s^3h^2 + s^2h + \frac{s}{2}\right]e^{-2sh} - \frac{s}{2}\right\}\cos(xs)\,ds = \frac{1}{x^2} +$$
$$+\frac{12h^2(16h^4 - 24h^2x^2 + x^4)}{(16h^4 + 8h^2x^2 + x^4)(4h^2 + x^2)^2} + 8h^2\frac{4h^2 - 3x^2}{(4h^2 + x^2)^3} + \frac{4h^2 - x^2}{(4h^2 + x^2)^2} \tag{2.14c}$$

$$f_1(x) = \frac{h P_0}{\mu(1-c^2)}\int_0^\infty se^{-sh}\sin[(x - x_0)s]\,ds = \frac{2h^2(x - x_0)P_0}{\mu(1-c^2)[h^2 + (x - x_0)^2]^2} \tag{2.15a}$$

$$f_2(x) = -\frac{P_0}{\mu(1-c^2)}\int_0^\infty (sh+1)e^{-sh}\cos[(x - x_0)s]\,ds =$$
$$= -\frac{2h^3P_0}{\mu(1-c^2)[h^2 + (x - x_0)^2]^2} \tag{2.15b}$$

3. General Properties of the Direct and the Inverse Problems

The direct problem can be formulated as follows. If we know completely the geometry of the crack, i.e. quantities h, a, b, and the applied force, i.e. quantities P_0 and x_0, then we can solve the system of integral equations (2.13) and determine all physical characteristics of the problem. The most physically important one is the settlement of the upper boundary surface, i.e. function $u_y^+(x,h)$. This can be directly extracted from Eq.(2.9) which in terms of functions $g_x(x)$ and $g_y(x)$ is

$$f_0(x) = u_y^+(x,h) - u_y^{0+}(x,h) = \frac{h}{\pi}\int_a^b g_x(\xi)\,d\xi\int_0^\infty se^{-sh}\sin[(x-\xi)s]ds +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_a^b g_y(\xi)\,d\xi\int_0^\infty (1+sh)e^{-sh}\cos[(x-\xi)s]ds = \tag{3.1}$$
$$= \frac{2h^2}{\pi}\int_a^b \frac{g_x(\xi)(x-\xi)\,d\xi}{[h^2 + (x-\xi)^2]^2} + \frac{2h^3}{\pi}\int_a^b \frac{g_y(\xi)\,d\xi}{[h^2 + (x-\xi)^2]^2}$$

where we have written the final result for the function, which is the difference between the settlement in the problem under consideration and the one in the problem free of crack. Therefore, the represented function (3.1) corresponds to contribution of the crack to the value of the settlement.

Now, some words about qualitative properties of system (2.13). It can easily be seen that the diagonal kernels, functions $K_{11}(x)$ and $K_{22}(x)$ have hyper-singular behavior at the origin. A stable method to solve hyper-singular integral equations was proposed in the work [11]. Let us rewrite system (2.13) as

$$\begin{cases} \int_a^b \left[\dfrac{1}{(x-\xi)^2} + K_{11}^0(x-\xi) \right] g_x(\xi)d\xi + \int_a^b K_{12}(x-\xi) g_y(\xi)d\xi = f_1(x) \\ \int_a^b K_{21}(x-\xi) g_x(\xi)d\xi + \int_a^b \left[\dfrac{1}{(x-\xi)^2} + K_{22}^0(x-\xi) \right] g_y(\xi)d\xi = f_2(x) \end{cases}, \quad a \le x \le b \tag{3.2}$$

in the form where we have explicitly extracted the characteristic hyper-singular part of the diagonal kernels, and the superscripts designate some regular functions. Then briefly speaking our numerical algorithm can be described as follows.

First of all, we subdivide full interval (a,b) to a set of n small elementary subintervals of the same length $\varepsilon = (b-a)/n$, by nodes $a = \xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}, \xi_n = b,\ \xi_j = a + j\varepsilon,\ (j = 0,1,...,n)$. The central point of each sub-interval (ξ_{i-1}, ξ_i) is designated as x_i, hence $x_i = a + (i - 1/2)\varepsilon,\ (i = 1,...,n)$. It can be proved (see [11]) that a correct approximation to a bounded solution of system (3.2) can be constructed as a solution to the following linear algebraic system $(i = 1,...,n)$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \left[\dfrac{1}{x_i - \xi_j} - \dfrac{1}{x_i - \xi_{j-1}} + \varepsilon K_{11}^0(x_i - \xi_j) \right] g_x(\xi_j) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} K_{12}(x_i - \xi_j) g_y(\xi_j) = f_1(x_i) \\ \varepsilon \sum_{j=1}^{n} K_{21}(x_i - \xi_j) g_x(\xi_j) + \sum_{j=1}^{n} \left[\dfrac{1}{x_i - \xi_j} - \dfrac{1}{x_i - \xi_{j-1}} + \varepsilon K_{22}^0(x_i - \xi_j) \right] g_y(\xi_j) = f_2(x_i) \end{cases} \tag{3.3}$$

The inverse problem can be formulated as follows. Let a known outer force $P_0(x)\delta(x - x_0)$ be applied to the boundary surface of the elastic half-space (2D problem). This implies that quantities $P_0(x)$ and x_0 are known. Let us assume that there is a horizontal crack in the half-space (see Fig.1), but its position and geometry are unknown. Let the shape of the boundary surface, function $f_0(x)$ in Eq.(3.1), be known over some finite-length set Γ of the boundary line $y = h$ as a certain input data, which is obtained for example, from the results of the experimental measurement. Then our goal is to reconstruct crack's geometry. In frames of such an approach, in Eqs. (2.13) – (2.15) and (3.1) quantities $P_0, x_0, \mu, c^2, \Gamma, f_0(x), (x \in \Gamma)$ are known, and quantities $h, a, b, g_x(x), g_y(x), (a \le x \le b)$ are unknown.

Speaking about a stable algorithm, in order to solve numerically the posed inverse problem, let us note that the input data, function $f_0(x)$, may be given only approximately, with a certain error. Hence, the algorithm to solve this inverse problem should be stable with respect to small perturbations of function $f_0(x)$.

The algorithm, which is presented in this work, is based on the discrete analogue (3.3) of the basic system of hyper-singular integral equations (3.2). Let us write linear algebraic system (3.3) in the matrix form:

$$Ag = f,\quad A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad A_{11}=\left(a_{11}^{ij}\right),\quad A_{12}=\left(a_{12}^{ij}\right),\quad A_{21}=\left(a_{21}^{ij}\right),\quad A_{22}=\left(a_{22}^{ij}\right),$$

$$g=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},\ g_1=\left(g_1^j\right),\ g_2=\left(g_2^j\right);\quad f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},\ f_1=\left(f_1^i\right),\ f_2=\left(f_2^i\right),\quad i,j=1,\dots,n. \tag{3.4}$$

where the matrices and the right-hand sides are

$$a_{11}^{ij}=\frac{1}{x_i-\xi_j}-\frac{1}{x_i-\xi_{j-1}}+\varepsilon K_{11}^0(x_i-\xi_j),\quad a_{12}^{ij}=\varepsilon K_{12}(x_i-\xi_j),\quad a_{21}^{ij}=-a_{12}^{ij},$$

$$a_{22}^{ij}=\frac{1}{x_i-\xi_j}-\frac{1}{x_i-\xi_{j-1}}+\varepsilon K_{22}^0(x_i-\xi_j),\quad f_1^i=f_1(x_i),\quad f_2^i=f_2(x_i) \tag{3.5}$$

Obviously, matrix A and right-hand side f both depend on parameters h,a,b: $A=A(h,a,b)$, $f=f(h,a,b)$.

If function $f_0(x)$ is known as the input data on the set Γ then one can choose a finite discrete array of nodes on this set: $x_k\in\Gamma,\ (k=1,\dots,m)$, to treat relation (3.1) expressing results of the measurements on a discrete grid. By replacing the integral there by an integral sum, one can approximate this relation by the system of algebraic equalities, which can be written in the symbolic form as follows

$$Bg=d,\ B=\left(B_1\quad B_2\right),\ B_1=\left(b_1^{kj}\right),\ B_2=\left(b_2^{kj}\right),\ d=\left(d_k\right),\ (k=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$$

$$b_1^{kj}=\frac{2h^2\varepsilon(x_k-\xi_j)}{\pi[h^2+(x_k-\xi_j)^2]^2},\quad b_2^{kj}=\frac{2h^3\varepsilon}{\pi[h^2+(x_k-\xi_j)^2]^2},\quad d_k=f_0(x_k) \tag{3.6}$$

The inversion of matrix equation (3.4): $g=(A^{-1}f)(h,a,b)$, where we explicitly indicate that the inversion operator depends on geometrical parameters h,a,b, and the substitution of the obtained relation to Eq.(3.6) reduces this inverse problem in its discrete form to the algebraic relation

$$(BA^{-1}f)(h,a,b)=d \tag{3.7}$$

It should be noted that dimension of matrix A is $2n\times 2n$, hence dimension of matrix BA^{-1} is $m\times 2n$. Therefore, Eq.(3.7) is written correctly since both its sides are vectors of dimension m. Our approach to construct a stable solution to operator equation (3.7) is founded on the minimization of the discrepancy functional

$$\min\Omega(h,a,b),\quad \Omega=\left\|(BA^{-1}f)(h,a,b)-d\right\|_{l_2}^2=\sum_{k=1}^{m}\left[(BA^{-1}f)_k(h,a,b)-d_k\right]^2 \tag{3.8}$$

which is again a functional of three parameters h,a,b.

4. Numerical Treatment and Examples of the Reconstruction

The minimization of functional (3.8) can be attained by any classical method of optimization (see, for example, [12]). The main restriction of regular iterative schemes is that they give only a local minimum of respective functionals. Another difficulty is connected with a non-uniqueness of the solution. It is not evident that a local minimum is its global minimum, which in the case of exact input data is zero.

We tested application of the algorithm proposed in [13] to our inverse problem. We aimed at a search of global minimum by a global random search. This algorithm is developed to seek maxima, but it can be applied to minima too. Efficiency of the algorithm is explained by the two following specific features: 1) random sampling of values in the neighborhood of the points, for which the values of the functional are small, happens more frequently than that in the neighborhood of the points, where the values of the functional are large, and 2) domains, in which random values of variables are chosen, are gradually contracted to small neighborhoods of the points with small values of the functional. This technique demonstrates remarkable convergence for all considered examples.

For all examples the input data is taken from the solution of respective direct problem. It should be noted that, in order to generate approximate (i.e. inexact) input data, we numerically solved the direct problem, and then perturbed the so obtained results by random quantities, in accordance with the assigned "error" of the input data. For all examples demonstrated below we used $m = 100$ points of measurements, to form the array of the input data, so that $x_k = -5 + 0.1(k - 1/2), k = 1,...,m$, $x_k \in (-5,5)$. It is clear that with such a choice of the trial points they form a uniform set around the applied force $P_0(x)\delta(x)$, $(x_0 = 0)$.

We have performed numerous calculations and a thorough numerical investigation for many examples. Some results on crack's identification are presented in Table 1. For all examples below $\ell = b - a$ and $c^2 = \mu / (\lambda + 2\mu) = 0.3$.

Table 1

input data error	h	a	ℓ	type of result
	1.000	-0.500	1.000	exact
0%	1.005	-0.490	0.997	restored
	2.000	1.500	1.000	exact
0%	1.997	1.504	0.997	restored
	0.500	3.500	1.500	exact
0%	0.490	3.495	1.509	restored
	3.000	4.000	0.500	exact
0%	2.988	4.003	0.500	restored

The physical conclusions from Table 1 are quite evident. Then we studied the stability of the proposed algorithm if the input data is given with a certain error.

Table 2

input data error	h	a	ℓ	type of result
	1.500	-0.500	1.000	exact
5%	1.496	-0.500	1.000	restored
	2.500	1.000	1.500	exact
5%	2.502	0.982	1.495	restored
	4.000	-3.000	4.500	exact
5%	4.014	-3.009	4.501	restored
	0.200	2.000	0.100	exact
5%	0.208	2.003	0.096	restored

Some examples with more significant error in the input data are presented below.

Table 3

input data error	h	a	ℓ	type of result
	8.000	-0.500	1.000	exact
15%	8.031	-0.532	1.001	restored
	6.000	2.500	4.000	exact
15%	6.220	2.620	4.116	restored
	4.000	-3.500	8.000	exact
15%	4.032	-3.521	7.996	restored
	2.000	4.500	0.200	exact
15%	1.938	4.497	0.198	restored

Table 4

input data error	h	a	ℓ	type of result
	1.000	-1.000	2.000	exact
25%	0.927	-1.013	2.037	restored
	7.000	-4.500	9.000	exact
25%	7.129	-4.596	9.076	restored
	0.300	1.500	0.100	exact
25%	0.316	1.492	0.103	restored
	1.500	3.000	0.500	exact
25%	1.516	3.038	0.474	restored

It is very interesting to analyze the influence of the input data error for a chosen single crack. In Table 5 below we demonstrate such dependence for the last crack taken from Table 4.

Table 5

input data error	h	a	ℓ	type of result
	1.500	3.000	0.500	exact
0%	1.515	3.004	0.498	restored
5%	1.513	2.981	0.497	restored
15%	1.490	2.983	0.514	restored
25%	1.516	3.038	0.474	Restored

The following evident conclusions follow from the presented numerical results:

1. The proposed algorithm demonstrates a wonderful efficiency. Even with very rough precision of the input data the reconstruction is very good. Moreover, for approximate input data precision of the reconstruction is higher than that of the input data. This clearly confirms the stability of the algorithm.

2. Concerning the comparison between various examples presented, taking into account that all of them are of high precision, we can however analyze the cases when the reconstruction is highly precise or less precise. Regardless precision of the input data, long cracks are reconstructed more accurately than small ones.

3. We have also tried to vary the length of the intervals where the input data is collected. Under such numerical experiments we could conclude that precision of the reconstruction improves when the measure of the set Γ increases, that is quite natural from the physical point of view.

4. A numerous number of numerical experiments performed by the authors indicate that in the cases when the object under reconstruction is situated closer to the boundary interval Γ, the precision of the reconstruction is higher.

5. The present consideration is restricted by cracks parallel to the free boundary surface of the half-space only. The convenience of the present treatment consists of the fact that this is based on the classical Fourier transform. A different approach may be applied for arbitrary crack orientation in the half-space; this will be the subject of the authors' next work.

REFERENCES

1. Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Springer-Verlag: Berlin, 1996.
2. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solutions of Ill-Posed Problems. Winston: Washington, 1977.
3. Colton D., Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory. John Wiley: New York, 1983.
4. Friedman A., Vogelius M. Determining cracks by boundary measurements. // Indiana Univ. Math. J. 1989. V. 38. P. 527-556.
5. Andrieux S., Abda A.B. Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae. // Inverse Probl. 1996. V. 12. P. 553-563.
6. Bannour T., Abda A.B., Jaoua M. A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks. // Inverse Probl. 1997. V. 13. P. 899-917.
7. Abda A.B. et al. Line segment crack recovery from incomplete boundary data. // Inverse Probl. 2002. V. 18. P. 1057-1077.
8. Alessandrini G., Beretta E., Vessella S. Determining linear cracks by boundary measurements: Lipschitz stability. // SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. P. 361-375.
9. Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M.A. Inverse problem on crack reconstruction in the elastic half-space: anti-plane case. // Inverse Probl. Sci. Eng. 2006. V. 14. P. 725-745.
10. Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M.A. Anti-plane inverse problem for inclined cracks in the elastic half-space. // Mech. Research Comm. 2009. V. 36. P. 452-460.
11. Iovane G., Lifanov I.K., Sumbatyan M.A. On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics. // Acta Mechanica. 2003. V. 162. P. 99-110.
12. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. Practical Optimization. Academic Press: London, 1981.
13. Zhigljavsky A., Zilinskas A. Stochastic Global Optimization. Springer: New York, 1985.

Information about authors

Ciarletta Michele – full professor, University of Salerno, Faculty of Engineering
E-mail: ciarlett@diima.unisa.it

Iovane Gerardo – associate professor, University of Salerno, Faculty of Engineering
E-mail: iovane@diima.unisa.it

Sumbatyan Mezhlum – full professor, head of chair, Southern Federal University, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Science
E-mail: sumbat@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 29.01.2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Механика

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Асланян Н.С., Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярный, ортотропный, термоупругость, тонкий, пластинка, математическая модель.
Key words: micropolar, orthotropic, thermoelasticity, thin, plate, mathematical model.

Ասլանյան Ն.Ս., Սարգսյան Ս.Հ.
Միկրոպոլյար օրթոտրոպ բարակ սալերի ջերմաառաձգականության մաթեմատիկական մոդելը

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ ճիշտ վարկածների հիման վրա կառուցվում են միկրոպոլյար օրթոտրոպ բարակ սալերի ծռման և ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի ջերմաառաձգականության մաթեմատիկական մոդելները:

Aslanyan N.S., Sargsyan S.H.

Mathematical model of thermoelasticity of micropolar orthotropic elastic thin plates

In the present paper on the basis of asymptotically confirmed hypotheses method mathematical models of thermoelasticity of bending and plane stress state of micropolar orthotropic elastic thin plates are constructed.

В работе на основе гипотез, имеющих асимптотическое подтверждение, построены математические модели термоупругости задачи изгиба и обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярных ортотропных тонких пластин.

Введение. Обзор исследований по общей теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек осуществлён в работах [1,2]. В работах [3-6] на основе качественных результатов асимптотического метода интегрирования трёхмерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонких областях сформулированы адекватные гипотезы и построены общие математические модели микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек. В работе [7,8] асимптотическим методом изучена трёхмерная краевая задача микрополярной термоупругости. В данной работе развивается подход работ [3-6] на основе качественных сторон результата асимптотического метода [7,8], сформулированы соответствующие гипотезы и построена модель микрополярной термоупругости ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Отметим, что в работах [8,9] построена математическая модель термоупругости микрополярных упругих изотропных оболочек.

1. Постановка задачи. Рассмотрим микрополярную ортотропную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, как тонкое трёхмерное тело. Оси α_1, α_2 криволинейной ортогональной системы координат отнесём к срединной плоскости пластинки, ось z будет перпендикулярна к срединной плоскости пластинки.

Будем исходить из основных уравнений трёхмерной несимметричной (микрополярной, моментной) теории статической термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия [10]

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{11}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{21}\right)+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}-\\
&\qquad-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{22}=0,\\
&\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{12}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{22}\right)+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{21}-\\
&\qquad-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{11}=0,\\
&\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{13}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{23}\right)+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}=0,\\
&\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{11}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{21}\right)+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\mu_{12}-\\
&\qquad-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\mu_{22}+\left(\sigma_{23}-\sigma_{32}\right)=0,\\
&\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{12}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{22}\right)+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\mu_{21}-\\
&\qquad-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\mu_{11}+\left(\sigma_{31}-\sigma_{13}\right)=0,\\
&\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{13}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{23}\right)+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial z}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Физические соотношения термоупругости [11]

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{11}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}+\alpha_{1\Theta}\Theta, && \chi_{11}=b_{11}\mu_{11}+b_{12}\mu_{22}+b_{13}\mu_{33},\\
&\gamma_{22}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33}+\alpha_{2\Theta}\Theta, && \chi_{22}=b_{12}\mu_{11}+b_{22}\mu_{22}+b_{23}\mu_{33},\\
&\gamma_{33}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}+\alpha_{3\Theta}\Theta, && \chi_{33}=b_{13}\mu_{11}+b_{23}\mu_{22}+b_{33}\mu_{33},\\
&\gamma_{23}=a_{44}\sigma_{23}+a_{45}\sigma_{32}, && \chi_{23}=b_{44}\mu_{23}+b_{45}\mu_{32},\\
&\gamma_{32}=a_{45}\sigma_{23}+a_{55}\sigma_{32}, && \chi_{32}=b_{45}\mu_{23}+b_{55}\mu_{32},\\
&\gamma_{31}=\tilde{a}_{55}\sigma_{31}+a_{56}\sigma_{13}, && \chi_{31}=\tilde{b}_{55}\mu_{31}+b_{56}\mu_{13},\\
&\gamma_{13}=a_{56}\sigma_{31}+a_{66}\sigma_{13}, && \chi_{13}=b_{56}\mu_{31}+b_{66}\mu_{13},\\
&\gamma_{12}=a_{77}\sigma_{12}+a_{78}\sigma_{21}, && \chi_{12}=b_{77}\mu_{12}+b_{78}\mu_{21},\\
&\gamma_{21}=a_{78}\sigma_{12}+a_{88}\sigma_{21}, && \chi_{21}=b_{78}\mu_{12}+b_{88}\mu_{21}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Геометрические соотношения [10]

$$\gamma_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_2,\quad \gamma_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}V_1,$$

$$\gamma_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_1-\omega_3,\ \gamma_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}V_2+\omega_3,$$

$$\gamma_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_1}+\omega_2,\quad \gamma_{31}=\frac{\partial V_1}{\partial z}-\omega_2,\quad \gamma_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_2}-\omega_1,$$

$$\gamma_{32}=\frac{\partial V_2}{\partial z}+\omega_1,\qquad \gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial z},\tag{1.3}$$

$$\chi_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\omega_2,\quad \chi_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\omega_1$$

$$\chi_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\omega_1,\quad \chi_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\omega_2,$$

$$\chi_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_1},\qquad \chi_{31}=\frac{\partial\omega_1}{\partial z},\qquad \chi_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_2},$$

$$\chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial z},\qquad \chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial z}.$$

Уравнение стационарной теплопроводности [10,12]

$$\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_2}\right)\right]+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0\tag{1.4}$$

(для простоты здесь не учитывается термоупругое рассеивание энергии).

Здесь, $\hat{\sigma},\hat{\mu}$ – тензоры силовых и моментных напряжений ; $\hat{\gamma},\hat{\chi}$ – тензоры деформаций и изгибов-кручений. $\vec{V},\vec{\omega}$ – соответственно векторы перемещения и независимого поворота; Θ – функция температуры, $\hat{a},\hat{b}$ – матрицы упругих постоянных, а $\alpha_{k\Theta}$ (k =1,2,3) – линейные коэффициенты температурного расширения микрополярного ортотропного материала пластинки; $\mathrm{H}_1=A_1$, $\mathrm{H}_2=A_2$ – коэффициенты Ламе криволинейной ортогональной системы координат α_1,α_2, расположенной в срединной плоскости пластинки.

К основным уравнениям микрополярной теории термоупругости (1.1)-(1.4) присоединим соответствующие граничные условия.

На лицевых плоскостях пластинки $z=\pm h$ примем граничные условия первой граничной задачи микрополярной теории упругости:

$$\sigma_{3i}=\pm p_i^{\pm},\ \sigma_{33}=\pm p_3^{\pm},\ \mu_{3i}=\pm m_i^{\pm},\ \mu_{33}=\pm m_3^{\pm}\tag{1.5}$$

На поверхности края пластинки $\sum$ в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, граничные условия записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Для температурного поля пластинки как на лицевых плоскостях $z = \pm h$, так и на поверхности края $\sum$, для определённости будем считать заданными значения температурной функции.
Отметим, что в случае

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}, \qquad a_{45} = a_{56} = a_{78} = -\frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = -\frac{\nu}{E}, \qquad a_{44} = a_{55} = \tilde{a}_{55} = a_{66} = a_{77} = a_{88} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)}, \quad b_{45} = b_{56} = b_{78} = -\frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon}, \tag{1.6}$$

$$b_{12} = b_{13} = b_{23} = -\frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)}, \; b_{44} = b_{55} = \tilde{b}_{55} = b_{66} = b_{77} = b_{88} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon},$$

$$\alpha_{k\Theta} = \alpha_{\Theta} \quad (k = 1,2,3),$$

вместо (1.2) получим физические соотношения термоупругости микрополярного изотропного материала [10], а при

$$a_{45} = a_{56} = a_{78} = 0, \qquad \tilde{a}_{55} = a_{66}, \qquad a_{44} = a_{55}, \qquad a_{77} = a_{88},$$

$$\begin{gathered} b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{12} = b_{13} = b_{23} = b_{44} = b_{45} = b_{55} = \\ = \tilde{b}_{55} = b_{56} = b_{66} = b_{77} = b_{78} = b_{88} = 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

получим физические соотношения термоупругости классического ортотропного материала [13].

Педположим, что толщина пластинки мала по сравнению с другими размерами пластинки в плане. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее термоупругое состояние тонкого трёхмерного тела, образующее пластинку, состоит из внутреннего состояния, охватывающего всю пластинку и пограничные слои, локализирующиеся вблизи поверхности края пластинки $\sum$. Построение общей прикладной –двумерной модели термоупругости микрополярных упругих тонких пластин тесно связано с построением внутренней задачи.

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, будем строить модель термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин на основе метода гипотез. Сами гипотезы будем формулировать на основе результата асимптотического анализа поставленной пространственной граничной задачи микрополярной теории термоупругости в тонкой трёхмерной области пластинки [7,8].

2. Исходные гипотезы. С учётом качественных результатов [7,8] асимптотического решения систем уравнений (1.1)-(1.7) с указанными выше граничными условиями и самого процесса асимптотического интегрирования этой граничной задачи, в основу предлагаемой ниже модели микрополярной термоупругости ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений можем принять следующие достаточно общие гипотезы [3-6]:

1) В качестве кинематической вводится предположение о линейном распределении компонентов векторов перемещения и независимого поворота по координате z следующего характера:

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + z\psi_i(\alpha_1, \alpha_2), \qquad V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2) \qquad (i = 1, 2), \tag{2.1}$$

$$\omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + z\, \iota(\alpha_1, \alpha_2) \qquad (i = 1, 2), \tag{2.2}$$

где u_i, w –перемещения точек срединной плоскости по направлениям α_i и z; ψ_i – полные углы поворота нормального к срединной плоскости элемента вокруг оси α_i; Ω_i – свободные повороты точек трёхмерной пластинки вокруг осей α_i; Ω_3 – поворот точек срединной плоскости вокруг оси z, а ι – интенсивность поворота точек трёхмерной пластинки вокруг оси z.

Кинематическая гипотеза (2.1), (2.2) в работах [3–6] названа обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в теории микрополярных балок, пластин и оболочек.

К статическим относятся следующие гипотезы:

2) Силовое напряжение σ_{33} в обобщённом законе Гука (1.2) в формулах для γ_{ii} можно пренебрегать относительно силовых нормальных напряжений σ_{ii}; в обобщённом законе Гука (1.2) – в формулах для χ_{i3} $(i = 1,2)$, моментное напряжение μ_{3i} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3} $(i = 1, 2)$.

3) Для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем:

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2) \ \ (i = 1, 2), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1, \alpha_2) \tag{2.3}$$

После определения указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} определим, соответственно, как сумму значения (2.3) и результата интегрирования первых двух и шестого из (1.1) уравнений равновесия, для которых потребуем условия, чтобы усреднённые по толщине пластинки величины были равны нулю.

4) Для температурной функции Θ примем закон линейного изменения по толщине пластинки [7,8,12]:

$$\Theta = \Theta_0(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{z}{2h}\Theta_1(\alpha_1, \alpha_2), \tag{2.4}$$

где $\Theta_0 = \dfrac{\Theta^+ + \Theta^-}{2}, \quad \Theta_1 = \Delta\Theta = \Theta^+ - \Theta^-$.

Принятые кинематические, статические гипотезы и гипотеза о распределении температурной функции по толщине пластинки позволяют задачу об определении пространственного напряжённо-деформированного состояния (НДС) микрополярной пластинки свести к двумерной задаче.

3.Определение компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений. Используя кинематическую гипотезу (2.1), (2.2) для компонентов тензора деформации $\hat{\gamma}$ и тензора изгибов-кручений $\hat{\chi}$, из (1.3) получим:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11} = \Gamma_{11}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{11}(\alpha_1, \alpha_2), && \gamma_{12} = \Gamma_{12}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \\
&\gamma_{22} = \Gamma_{22}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{22}(\alpha_1, \alpha_2), && \gamma_{21} = \Gamma_{21}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{21}(\alpha_1, \alpha_2), \\
&\gamma_{13} = \Gamma_{13}(\alpha_1, \alpha_2), && \gamma_{31} = \Gamma_{31}(\alpha_1, \alpha_2),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\gamma_{32}=\Gamma_{32}(\alpha_1,\alpha_2)\,,\qquad \gamma_{23}=\Gamma_{23}(\alpha_1,\alpha_2)\,,\qquad \gamma_{33}=0\,,$$
$$\chi_{11}=k_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\,,\qquad \chi_{12}=k_{12}(\alpha_1,\alpha_2)\,,\qquad \chi_{31}=0\,,$$
$$\chi_{22}=k_{22}(\alpha_1,\alpha_2)\,,\qquad \chi_{21}=k_{21}(\alpha_1,\alpha_2)\,,\qquad \chi_{32}=0\,, \tag{3.2}$$
$$\chi_{33}=k_{33}(\alpha_1,\alpha_2)\,,$$
$$\chi_{13}=k_{13}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+zl_{13}(\alpha_1,\alpha_2)\,,\quad \chi_{23}=k_{23}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+zl_{23}(\alpha_1,\alpha_2)\,, \tag{3.3}$$

где введены следующие обозначения:

$$\Gamma_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_2\,,\qquad \Gamma_{22}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_1\,,$$
$$\Gamma_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_1-\Omega_3\,,\quad \Gamma_{21}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_2+\Omega_3\,, \tag{3.4}$$

$$\Gamma_{13}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\Omega_2\,,\qquad \Gamma_{23}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\Omega_1\,,$$
$$\Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2\,,\qquad \Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1. \tag{3.5}$$

$$K_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_2\,,\qquad K_{22}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_1\,,$$
$$K_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_1-\iota,\quad K_{21}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_2+\iota, \tag{3.6}$$

$$k_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2\,,\qquad k_{22}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_1\,,\ k_{33}=\iota,$$
$$\tag{3.7}$$
$$k_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1\,,\qquad k_{21}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_2\,,$$

$$k_{13}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_1}\,,\qquad k_{23}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_2}\,, \tag{3.8}$$

$$l_{13}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_1}\,,\qquad l_{23}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_2} \tag{3.9}$$

4. Определение компонентов тензоров силовых и моментных напряжений. Если иметь в виду физические соотношения (1.2), то на основе формул для деформаций, изгибов–кручений (3.1)-(3.3), имея в виду те же статические гипотезы 2)-4), для силовых и моментных напряжений получим:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \left(\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{11} - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{22} + \frac{a_{12}\alpha_{2\Theta}-a_{22}\alpha_{1\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Theta_0 \right) + \\
&\quad + z\left(\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\mathrm{K}_{11} - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\mathrm{K}_{22} + \frac{a_{12}\alpha_{2\Theta}-a_{22}\alpha_{1\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\frac{\Theta_1}{2h} \right), \\
\sigma_{22} &= \left(\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{11} + \frac{a_{12}\alpha_{1\Theta}-a_{11}\alpha_{2\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Theta_0 \right) + \\
&\quad + z\left(\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\mathrm{K}_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\mathrm{K}_{11} + \frac{a_{12}\alpha_{1\Theta}-a_{11}\alpha_{2\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\frac{\Theta_1}{2h} \right),
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \left(\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{12} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{21} \right) + z\left(\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\mathrm{K}_{12} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\mathrm{K}_{21} \right) \\
\sigma_{21} &= \left(\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{21} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{12} \right) + z\left(\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\mathrm{K}_{21} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\mathrm{K}_{12} \right), \\
\sigma_{13} &= \frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{13} - \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{31}, \\
\sigma_{23} &= \frac{a_{55}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{23} - \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{32}, \\
\overset{0}{\sigma}_{31} &= \frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{31} - \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{13}, \\
\overset{0}{\sigma}_{32} &= \frac{a_{44}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{32} - \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{23},
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{31} &= \overset{0}{\sigma}_{31}(\alpha_1,\alpha_2) + \left(\frac{h^2}{6}-\frac{z^2}{2}\right)\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{1}{\sigma}_{11}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{1}{\sigma}_{21}\right) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{\sigma}_{12} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{\sigma}_{22} \right] - z\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{0}{\sigma}_{11}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{0}{\sigma}_{21}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{\sigma}_{12} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{\sigma}_{22} \right], \\
\sigma_{32} &= \overset{0}{\sigma}_{32}(\alpha_1,\alpha_2) + \left(\frac{h^2}{6}-\frac{z^2}{2}\right)\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{1}{\sigma}_{12}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{1}{\sigma}_{22}\right) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{\sigma}_{21} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{\sigma}_{11} \right] - z\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{0}{\sigma}_{12}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{0}{\sigma}_{22}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{\sigma}_{21} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{\sigma}_{11} \right],
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$\sigma_{33} = -z\left(\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\sigma_{13}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\sigma_{23}\right)\right) + \overset{0}{\sigma}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) =$$

$$= z\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} + \frac{p_3^+ - p_3^-}{2}$$

$$\mu_{11} = \frac{\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{11} - \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{22} + \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{33},$$

$$\mu_{22} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{22} - \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{23} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{11} - \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{12} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{33}, \tag{4.4}$$

$$\overset{0}{\mu}_{33} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{33} + \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{11} - \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{22}, \Delta_b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$\mu_{12} = \frac{b_{88}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2}k_{12} - \frac{b_{78}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2}k_{21},$$

$$\mu_{21} = \frac{b_{77}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2}k_{21} - \frac{b_{78}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2}k_{12}, \tag{4.5}$$

$$\mu_{13} = \frac{1}{b_{66}}k_{13} + z\frac{1}{b_{66}}l_{13}, \qquad \mu_{23} = \frac{1}{b_{44}}k_{23} + z\frac{1}{b_{44}}l_{23},$$

$$\mu_{31} = -z\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\mu_{11}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\mu_{21}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\mu_{12} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\mu_{22} + \left(\sigma_{23} - \overset{0}{\sigma}_{32}\right)\right] + \overset{0}{\mu}_{31}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = z\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h} + \frac{m_1^+ - m_1^-}{2} \tag{4.6}$$

$$\mu_{32} = -z\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\mu_{12}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\mu_{22}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\mu_{21} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\mu_{11} + \left(\overset{0}{\sigma}_{31} - \sigma_{13}\right)\right] + \overset{0}{\mu}_{32}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = z\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h} + \frac{m_2^+ - m_2^-}{2}$$

$$\mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{z^2}{2}\right)\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{1}{\mu}_{13}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{1}{\mu}_{23}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\overset{1}{\sigma}_{12} - \overset{1}{\sigma}_{21}\right)\right] - z\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{0}{\mu}_{13}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{0}{\mu}_{23}\right) + \left(\overset{0}{\sigma}_{12} - \overset{0}{\sigma}_{21}\right)\right] \tag{4.7}$$

Здесь $\overset{0}{\sigma}_{11},\overset{0}{\sigma}_{22},\overset{0}{\sigma}_{12},\overset{0}{\sigma}_{21},\overset{0}{\mu}_{13},\overset{0}{\mu}_{23}$ – постоянная часть, а $\overset{1}{\sigma}_{11},\overset{1}{\sigma}_{22},\overset{1}{\sigma}_{12},\overset{1}{\sigma}_{21},\overset{1}{\mu}_{13},\overset{1}{\mu}_{23}$ – линейная часть от поперечной координаты z в соотношениях (4.1) и (4.5) соответственно.

5.Усреднённые усилия, моменты и гипермоменты. С целью приведения трёхмерной задачи микрополярной термоупругости для тонкой пластинки к двумерной, что уже выполнено для деформаций, изгибов–кручений, силовых и моментных напряжений, вводим статически эквивалентные им интегральные по толщине пластинки характеристики – усилия, моменты и гипермоменты [4-6]:

$$T_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11}dz, \quad T_{22} = \int_{-h}^{h} \sigma_{22}dz, \quad S_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12}dz, \quad S_{21} = \int_{-h}^{h} \sigma_{21}dz \tag{5.1}$$

$$N_{13} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12}dz, \quad N_{23} = \int_{-h}^{h} \sigma_{23}dz, \quad N_{31} = \int_{-h}^{h} \sigma_{31}dz, \quad N_{32} = \int_{-h}^{h} \sigma_{32}dz \tag{5.2}$$

$$M_{11} = \int_{-h}^{h} z\sigma_{11}dz, \quad M_{22} = \int_{-h}^{h} z\sigma_{22}dz, \quad M_{12} = \int_{-h}^{h} z\sigma_{12}dz, \quad M_{21} = \int_{-h}^{h} z\sigma_{21}dz \tag{5.3}$$

$$L_{11} = \int_{-h}^{h} \mu_{11}dz, \quad L_{22} = \int_{-h}^{h} \mu_{22}dz, \quad L_{12} = \int_{-h}^{h} \mu_{12}dz, \quad L_{21} = \int_{-h}^{h} \mu_{21}dz \tag{5.4}$$

$$L_{33} = \int_{-h}^{h} \mu_{33}dz, \quad L_{13} = \int_{-h}^{h} \mu_{13}dz, \quad L_{23} = \int_{-h}^{h} \mu_{23}dz \tag{5.5}$$

$$\Lambda_{13} = \int_{-h}^{h} z\mu_{13}dz, \quad \Lambda_{23} = \int_{-h}^{h} z\mu_{23}dz. \tag{5.6}$$

6. Основные уравнения и граничные условия прикладных теорий изгиба и обобщённого плоского напряжённого состояния термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Уравнения равновесия в двумерном случае получим из равенств, определяющих силовые напряжения $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ и моментные напряжения $\mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}$, в результате удовлетворения статическим граничным условиям (1.5) на лицевых плоскостях пластинки $z = \pm h$. Отметим, что система двумерных уравнений равновесия распадается на две отдельные системы – для задачи изгиба и обобщённого плоского напряжённого состояния.

Физические соотношения термоупругости получим на основании формул (5.1)-(5.6) для усреднённых усилий, моментов и гипермоментов с использованием соответствующих формул (4.1)-(4.7) для силовых и моментных напряжений.

Основная система уравнений задачи термоупругого изгиба микрополярных ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2N_{13}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1N_{23}\right) = -\left(p_3^+ + p_3^-\right)$$

$$N_{31}-\left(\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2M_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1M_{21}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_{12}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{22}\right)=$$
$$=h\left(p_1^+-p_1^-\right)$$

$$N_{32}-\left(\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2M_{12}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1M_{22}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{21}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_{11}\right)=$$
$$=h\left(p_2^+-p_2^-\right)$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2L_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1L_{21}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}L_{12}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}L_{22}+ \qquad (6.1)$$
$$+\left(N_{23}-N_{32}\right)=-\left(m_1^++m_1^-\right)$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2L_{12}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1L_{22}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}L_{21}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}L_{11}+$$
$$+\left(N_{31}-N_{13}\right)=-\left(m_2^++m_2^-\right)$$

$$L_{33}-\left(\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\Lambda_{13}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\Lambda_{23}\right)+(M_{12}-M_{21})\right)=h\left(m_3^+-m_3^-\right).$$

Физические соотношения термоупругости

$$N_{13}=\tilde{C}_{55}\Gamma_{13}+C_{56}\Gamma_{31}, \qquad N_{31}=C_{66}\Gamma_{31}+C_{56}\Gamma_{13},$$
$$N_{23}=C_{55}\Gamma_{23}+C_{45}\Gamma_{32}, \qquad N_{32}=C_{44}\Gamma_{32}+C_{45}\Gamma_{23},$$
$$M_{11}=D_{11}K_{11}+D_{12}K_{22}+M_{1\Theta}, \qquad M_{1\Theta}=D_{1\Theta}\frac{\Delta\Theta}{2h},$$
$$M_{22}=D_{22}K_{22}+D_{12}K_{11}+M_{2\Theta}, \qquad M_{2\Theta}=D_{2\Theta}\frac{\Delta\Theta}{2h}, \qquad (6.2)$$
$$M_{12}=D_{88}K_{12}+D_{78}K_{21}, \qquad M_{21}=D_{77}K_{21}+D_{78}K_{12},$$
$$L_{11}=d_{11}k_{11}+d_{12}k_{22}+d_{13}k_{33}, \qquad L_{12}=d_{88}k_{12}+d_{78}k_{21},$$
$$L_{22}=d_{22}k_{22}+d_{21}k_{11}+d_{23}k_{33}, \qquad L_{21}=d_{77}k_{21}+d_{78}k_{12},$$
$$L_{33}=d_{33}k_{33}+d_{31}k_{11}+d_{32}k_{22}, \qquad \Lambda_{13}=\lambda_{66}l_{13}, \quad \Lambda_{23}=\lambda_{44}l_{23}.$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\Omega_2, \qquad \Gamma_{23}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\Omega_1,$$
$$\Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2, \qquad \Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1,$$
$$K_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_2, \qquad K_{22}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_1,$$

$$K_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_1-\iota,\qquad K_{21}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_2+\iota,\qquad(6.3)$$

$$k_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2,\qquad k_{22}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_1,\quad k_{33}=\iota,$$

$$k_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1,\qquad k_{21}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_2,$$

$$l_{13}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_1},\qquad l_{23}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_2},$$

здесь

$$\tilde{C}_{55}=2h\frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},\quad C_{66}=2h\frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},\quad C_{56}=-2h\frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},$$

$$C_{55}=2h\frac{a_{55}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\quad C_{44}=2h\frac{a_{44}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\quad C_{45}=-2h\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}$$

$$D_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\quad D_{22}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\quad D_{12}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$$

$$D_{77}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\quad D_{88}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ D_{78}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},$$

$$D_{1\Theta}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{12}\alpha_{2\Theta}-a_{22}\alpha_{1\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\ D_{2\Theta}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{12}\alpha_{1\Theta}-a_{11}\alpha_{2\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},$$

$$d_{11}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{22}&b_{23}\\b_{23}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{12}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{13}\\b_{23}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{13}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{13}\\b_{22}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}\qquad(6.4)$$

$$d_{22}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}\\b_{13}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{21}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{23}\\b_{13}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{23}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}\\b_{12}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}$$

$$d_{33}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{12}&b_{22}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\ d_{31}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{22}\\b_{13}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta},\ d_{32}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{13}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}$$

$$d_{88}=2h\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\ d_{77}=2h\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\ d_{78}=-2h\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}$$

$$\lambda_{66}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{66}},\quad \lambda_{44}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{44}}.$$

К системе уравнений (6.1)-(6.3) присоединим граничные условия (при $\alpha_1=\text{const}$) [5,6]:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^* \;;\; M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*,$$
$$N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*; \qquad (6.5)$$
$$L_{12} = L_{12}^* \text{ или } k_{12} = k_{12}^* \;;\; \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.$$

Система уравнений (6.1)-(6.4) и граничные условия (6.5) представляют собой математическую модель термоупругой изгибной деформации микрополярных ортотропных тонких пластин.

Отметим, что в случае (1.6) вместо (6.2), (6.4) получим физические соотношения термоупругости изгибной деформации пластинки для микрополярного изотропного материала, в случае (1.7) получим физические соотношения термоупругости изгиба пластин в классическом случае [13-15] для ортотропного материала, когда учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Основная система уравнений обобщённого плоского напряжённого состояния термоупругости микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2T_{11}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1S_{21}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}S_{12} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_{22} = -\left(p_1^+ + p_1^-\right),$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2S_{12}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1T_{22}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}S_{21} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}T_{11} = -\left(p_2^+ + p_2^-\right), \qquad (6.6)$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2L_{13}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1L_{23}\right) + S_{12} - S_{21} = -\left(m_3^+ + m_3^-\right).$$

Физические соотношения термоупругости

$$T_{11} = C_{11}\Gamma_{11} + C_{12}\Gamma_{22} + T_{1\Theta},\ \mathrm{T}_{1\Theta} = C_{1\Theta}\Theta_0,\quad T_{22} = C_{22}\Gamma_{22} + C_{12}\Gamma_{11} + T_{2\Theta},\ \mathrm{T}_{2\Theta} = C_{2\Theta}\Theta_0$$
$$S_{12} = C_{88}\Gamma_{12} + C_{78}\Gamma_{21},\qquad S_{21} = C_{77}\Gamma_{21} + C_{78}\Gamma_{12}, \qquad (6.7)$$
$$L_{12} = d_{66}k_{13}\qquad L_{23} = d_{44}k_{23}.$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_2,\qquad \Gamma_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_1,$$
$$\Gamma_{12} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_1 - \Omega_3,\qquad \Gamma_{21} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_2 + \Omega_3, \qquad (6.8)$$
$$k_{13} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_1},\qquad k_{23} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_2},$$

здесь

$$C_{11} = 2h\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},\qquad C_{22} = 2h\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},\quad C_{12} = -2h\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$

$$C_{77}=2h\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\;,\qquad C_{78}=-2h\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\;,\;C_{88}=2h\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\;,$$

$$C_{1\Theta}=2h\frac{a_{12}\alpha_{2\Theta}-a_{22}\alpha_{1\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\;,\;C_{2\Theta}=2h\frac{a_{12}\alpha_{1\Theta}-a_{11}\alpha_{2\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\;,\tag{6.9}$$

$$d_{66}=2h\frac{1}{b_{66}}\;,\quad d_{44}=2h\frac{1}{b_{44}}\;,$$

К системе уравнений (6.5)-(6.7) присоединим следующие усреднённые граничные условия $(\alpha_1=\mathrm{const})$ [5,6]:

$$T_{11}=T_{11}^*\ \text{ или }\ u_1=u_1^*\ ;\ S_{12}=S_{12}^*\ \text{ или }\ u_2=u_2^*;\ L_{13}=L_{13}^*\ \text{ или }\ k_{13}=k_{13}^*\,.\tag{6.10}$$

Система уравнений (6.6)-(6.9) и граничные условия (6.10) представляют собой математическую модель обобщённого плоского напряжённого состояния термоупругости микрополярных тонких пластин.

Отметим, что в случае (1.6) вместо (6.7), (6.9) получим физические соотношения термоупругости обобщённого плоского напряжённого состояния для изотропного материала, а в случае (1.7) – физические соотношения термоупругости классического случая для ортотропного материала [16].

Заключение. Основные результаты работы: 1) построена математическая модель изгибной термоупругой деформации микрополярных ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений; 2) построена математическая модель термоупругости обобщёного плоского напряжённого состояния микрополярных ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

В дальнейшем на основе построенных прикладных моделей будут изучаться некоторые конкретные задачи термоупругого деформирования микрополярных пластин.

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности, проведённого Государственным комитетом по науке МОН Республики Армения в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С.84-95.
2. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A. 2009. "On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography". // Arch. Mech. (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
3. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars // Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
4. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик //Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып.2. С.148-156.
5. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells// Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. 2011.Vol.15. P.91-100.
6. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66.

7. Варданян С.А., Саркисян С.О. Асимптотический анализ уравнений и граничных условий термоупругости микрополярных тонких пластин. // Изв.НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 3. С.64-77.
8. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Thermoelasticiti of Micropolar Elastic Thin Shells // 9 th International Congress on Thermal Stresses 2011, June 5-9, Budapest. Budapest University of Technology and Economics and Hungarian Academy of Sciences.
9. Саркисян С.О. Термоупругость микрополярных тонких оболочек //В сб. научных трудов международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посв. 100-летию со дня рождения академика Нагуша Арутюняна. 08-12 октября 2012, Цахкадзор, Армения. Т.2. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2012. С.184-188.
10. Nowacki W. Couple-Stresses in the Theory of Thermoelasticity // Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids// IUTAM Symposia.Vienna, 1966. Editors H.Parkus, L.I.Sedov.Springer-Verlag.Wien;New York.1966.P.259-278.
11. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders // ZAMM. 1974.V.54. №12. P.773-779.
12. Боли Б., Уэйнер Дм. Теория температурных напряжений. М.: Изд-во «Мир», 1964. 518с.
13. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально- изотропных пластин. Киев: «Наукова думка», 1977. 183с.
14. Швец П.Н., Лунь Е.И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учётом инерции вращения и поперечного сдвига //Прикладная механика. 1971. Т.7. №10. С.121-125.
15. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. Киев: «Наукова думка», 1981. 544с.
16. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364с.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович,
Член-коор. НАН Армении, доктор физ-мат наук, профессор, зав. кафедрой мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М.Налбандяна.
Тел.: (093)151698
E-mail: slusin@yahoo.com

Асланян Наира Самвеловна – аспирант кафедры мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М.Налбандяна.
Тел.: (055)73-57-24
E-mail: asnaira73@mail.ru

Поступилп в редакцию 19.10.2012

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Механика

УДК 539.3:534.1

СВОБОДНЫЕ ИНТЕРФЕЙСНЫЕ И КРАЕВЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ СОСТАВНОЙ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ

Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Миклашевич И.А.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, интерфейсные колебания, краевые колебания.
Key words: cylindrical shell, interfacial vibrations, edge vibrations.

Ղուլղազարյան Գ.Ռ., Ղուլղազարյան Լ.Գ., Միկլաշեվիչ Ի.Ա.

Փոփոխական կորության բարձակային բաղադրյալ անմոմենտ գլանային թաղանթի սեփական ինտերֆեյս և եզրային տատանումներ

Հետազոտվում է փոփոխական կորության փակ գլանային թաղանթի սեփական ինտերֆեյս և եզրային տատանումները, որը բաղկացած է երկու վերջավոր օրթոտրոպ տարբեր առաձգականության գործակիցներ ունեցող անմոմենտ գլանային թաղանթներից: Ենթադրվում է, որ թաղանթի մի ծայրն ազատ է, իսկ մյուսը կոշտ ամրակցված:

Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G., Miklashevich I.A.

Free interfacial and edge vibrations of a contilever composed momentless cylindrical shell with variable curvature

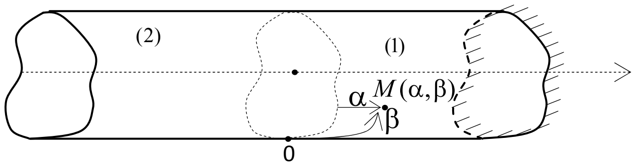
Free interfacial and edge vibrations of closed cylindrical shell composed of finite orthotropic momentless cylindrical shells with variable curvature and different elastic coefficients are studied. It is assumed that one end is free and the other is rigid-clamped.

Исследуются свободные интерфейсные и краевые колебания замкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны, составленной из конечных ортотропных безмоментных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Предполагается, что один торец оболочки свободный, а другой жёстко защемлён.

Введение. Исследования свободных колебаний составных оболочек занимают важное место в динамике деформируемого твёрдого тела. Это обусловлено как потребностями самой теории, так и практическими вопросами различных отраслей машиностроения, строительства, приборостроения, сейсморазведки и т.д. [1]. Во многих случаях объекты исследования представляют собой конечные тонкостенные составные цилиндрические оболочки с переменными кривизнами. Для таких оболочек большое значение приобретает изучение собственных колебаний, локализованных у свободных торцов оболочки – краевые колебания, и локализованных у границы раздела свойств материала – интерфейсные колебания. Начало исследования упругих поверхностных волн связано с работой Рэлея [2], в которой установлено существование упругих волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства, с амплитудой, быстро убывающей с глубиной. Такие волны, возникающие в упругих телах различной геометрии, обычно называются поверхностными волнами типа Рэлея [3],[4],[5]. Вопрос существования собственных колебаний, затухающих от свободного торца безмоментной цилиндрической оболочки вдоль направления её образующих, изучены в [6,7-10].

Начало исследования собственных интерфейсных колебаний связаны с работами [11-12], в которых исследуются аналоги волн Стоунли [13]. В работе [11] изучаются поперечные колебания, бегущие по линии контакта двух полубесконечных пластин, и сосредоточенных вблизи неё. В работе [12] численно исследованы плоские интерфейсные колебания у границы раздела двух состыкованных полуполос с различными упругими свойствами. В работах [14,15], используя специальный асимптотический метод, изучены собственные интерфейсные колебания составных круговых цилиндрических оболочек [14] и оболочек вращения [15]. В настоящей работе изучаются собственные интерфейсные и краевые колебания безмоментной замкнутой цилиндрической оболочки, составленной из конечных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Предполагается, что один торец оболочки свободный, а другой жёстко защемлён. Получены дисперсионные уравнения для определения собственных частот интерфейсных и краевых колебаний замкнутой составной безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для составных пластин-полос. Установлена также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задач на интерфейсные колебания для полубесконечных цилиндрических оболочек с жёстко защемлённым торцом, для полубесконечных цилиндрических оболочек со свободным торцом и бесконечных составных цилиндрических оболочек. Полученные дисперсионные уравнения и асимптотические формулы этих дисперсионных уравнений могут служить механизмом для управления спектрами частот поставленных задач [16].

1. Постановка задачи и некоторые математические особенности. Рассматриваются собственные интерфейсные и краевые колебания составной замкнутой цилиндрической оболочки, составленной из конечных безмоментных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Выбор системы координат и форма оболочки показаны на фиг. 1.



Фиг.1

Здесь α – текущая ориентированная длина образующей $-l^{(2)} < \alpha < l^{(1)}$, а $\alpha = 0$ соответствует границе раздела свойств материала. β – текущая длина дуги направляющей кривой $0 \le \beta \le s$, s – полная длина направляющей кривой. Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой составной цилиндрической оболочки можно представить в виде следующего ряда Фурье:

$$R^{-2} = k^2\left(\frac{r_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta\right) \quad 0 \le \beta \le s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} | r_m | < +\infty \tag{1.1}$$

Здесь $k = 2\pi / s$, где s – полная длина направляющей кривой.

Замечание. В зависимости от кривизны направляющей кривой значения k относительно приведённой могут быть кратными.

При $\alpha = 0$ ставятся условия полного контакта. Все величины, относящиеся к правой оболочке ($0 \le \alpha \le l^{(1)}$), отмечаются верхним индексом (1), а к левой оболочке ($-l^{(2)} \le \alpha \le 0$) – индексом (2). В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, соответствующие безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек [17]:

$$
\begin{aligned}
&-B_{11}^{(r)}\frac{\partial^2 u_1^r}{\partial\alpha^2}-B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\beta^2}-(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})\frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial\alpha\partial\beta}+B_{12}^{(r)}\frac{\partial w^{(r)}}{\partial\alpha}=\lambda^{(r)}u_1^{(r)}\\
&-(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\alpha\partial\beta}-B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\alpha^2}-B_{22}^{(r)}\frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial\beta^2}+B_{22}^{(r)}\frac{\partial w^{(r)}}{\partial\alpha}=\lambda^{(r)}u_2^{(r)}\\
&-\frac{B_{12}^{(r)}}{R^2}\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\alpha}-\frac{B_{22}^{(r)}}{R^2}\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\beta}+\frac{B_{22}^{(r)}}{R^2}w^{(r)}=\lambda^{(r)}w^{(r)},\ w^{(r)}=\frac{u_3^{(r)}}{R}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Здесь $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}\ (r=1,2)$ – проекции вектора перемещения соответственно в направлениях α,β и нормали к поверхности оболочки: $R^{-1}=R^{-1}(\beta)$ – радиус кривизны направляющей кривой; $\lambda^{(r)}=\rho^{(r)}\omega^2$, где ω – угловая частота собственных колебаний, а $\rho^{(r)}(r=1,2)$ – плотности материалов; $B_{ij}^{(r)}(r=1,2)$ – коэффициенты упругости составляющих оболочек. Граничные условия имеют вид:

$$T_1^{(1)}|_{\alpha=0}=T_1^{(2)}|_{\alpha=0},\quad S_{12}^{(1)}|_{\alpha=0}=S_{12}^{(2)}|_{\alpha=0},\quad u_1^{(1)}|_{\alpha=0}=u_1^{(2)}|_{\alpha=0},\quad u_2^{(1)}|_{\alpha=0}=u_2^{(2)}|_{\alpha=0} \tag{1.3}$$

$$u_1^{(1)}|_{\alpha=l^{(1)}}=0,\quad u_2^{(1)}|_{\alpha=l^{(1)}}=0 \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}\left(\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial\beta}-\frac{u_3^{(2)}}{R}\right)\right|_{\alpha=-l^{(2)}}=0,\quad \left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial\beta}+\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=-l^{(2)}}=0 \tag{1.5}$$

$$u_i^{(r)}(\alpha,\beta)=u_i^{(r)}(\alpha,\beta+s),\quad i=1,2,3,\quad r=1,2 \tag{1.6}$$

где $T_1^{(r)}, S_{12}^{(r)}, r=1,2$ – тангенциальные силы:

$$T_1^{(r)}=hB_{11}^{(r)}\left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\left(\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\beta}-\frac{u_3^{(r)}}{R}\right)\right),\quad S_{12}^{(r)}=hB_{66}^{(r)}\left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\beta}+\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\alpha}\right) \tag{1.7}$$

Соотношения (1.3) выражают условия полного контакта при $\alpha=0$, (1.4) – условия жёсткого защемления при $\alpha=l^{(1)}$, (1.5) – условия свободного края при $\alpha=-l^{(2)}$, (1.6) – условия периодичности колебаний (фиг. 1).

Заметим, что любые граничные задачи, порождённые системой уравнений (1.2) (с фиксированным индексом (r)) имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $0\le\lambda^{(r)}\le\lambda_0^{(r)}$ – множеством значений функции [10]

$$\Omega^{(r)}(\beta,\theta^{(r)})=$$

$$=\frac{B_{66}^{(r)}(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta)\sin^4\theta^{(r)}}{B_{66}^{(r)}(B_{11}^{(r)}\sin^4\theta^{(r)}+B_{22}^{(r)}\cos^4\theta^{(r)})+(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2-2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)})\cos^2\theta^{(r)}\sin^2\theta^{(r)}} \tag{1.8}$$

$$0\le\beta\le s,\quad 0\le\theta^{(r)}\le 2\pi,\quad r=1,2$$

Отметим, что появление этих участков непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (1.2) по Дуглису-Ниренбергу и не связано с граничными условиями ([18], стр. 97).

Как известно, эллиптичности системы не достаточно для того, чтобы задача Дирихле была корректно поставлена даже в случае однородных систем [19-23]. Для существования нетривиальных решений задачи (1.2)-(1.6) следует дополнительно потребовать выполнение вдоль границы оболочки и линии раздела материала некоторое условие алгебраического характера. Это условие называется условием дополнительности (условием Шапиро-Лопатинского) [10,20-23].

Аналогичным образом, как в [21], доказывается, что условием Шапиро-Лопатинского на линии раздела свойств материала является условие:

$$\Omega(\beta,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})=\frac{1}{S^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})S^{(2)}(\beta,\lambda^{(2)})}\times$$
$$\times\left\{\frac{B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)}-(B_{12}^{(1)})^2}{B_{66}^{(2)}}\lambda^{(1)}Q^{(2)}(\beta,\lambda^{(2)})+\frac{B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^2}{B_{66}^{(1)}}\lambda^{(2)}Q^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})\right\}+$$
$$(\gamma_1^{(1)}+\gamma_2^{(1)})(\gamma_1^{(2)}+\gamma_2^{(2)})(\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}+\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)})-2\left(\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}-\frac{\lambda^{(1)}B_{12}^{(1)}}{S^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})}\right)\left(\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}-\frac{\lambda^{(2)}B_{12}^{(2)}}{S^{(2)}(\beta,\lambda^{(2)})}\right)\neq 0 \qquad (1.9)$$
$$Q^{(r)}(\beta,\lambda^{(r)})=B_{66}^{(r)}(\lambda^{(r)}-B_{22}^{(r)}R^{-2}(\beta))+\sqrt{B_{22}^{(r)}\lambda^{(r)}(B_{11}^{(r)}\lambda^{(r)}-(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta))}$$
$$S^{(r)}(\beta,\lambda^{(r)})=B_{11}^{(r)}\lambda^{(r)}-(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta).$$

Заметим, что для граничных условий (1.4) условие Шапиро-Лопатинского вне отрезка $[0,\lambda_0^{(1)}/\rho^{(1)}]\cup[0,\lambda_0^{(2)}/\rho^{(2)}]$ имеет вид

$$Q^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})=B_{66}^{(1)}(\lambda^{(1)}-B_{22}^{(1)}R^{-2}(\beta))+\sqrt{B_{22}^{(1)}\lambda^{(1)}(B_{11}^{(1)}\lambda^{(1)}-(B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)}-(B_{12}^{(1)})^2)R^{-2}(\beta))}\neq 0 \qquad (1.10)$$
$$0\le\beta\le s$$

а для граничных условий (1.5),(1.6) оно выполнено. Этот факт доказывается аналогично, как в [10], [23]. Следовательно, условие Шапиро-Лопатинского для задач (1.2)-(1.6) , вне отрезка $[0,\lambda_0^{(1)}/\rho^{(1)}]\cup[0,\lambda_0^{(2)}/\rho^{(2)}]$, имеет вид

$$\left[\Omega(\beta,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})\neq 0,\ Q^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})\neq 0\quad 0\le\beta\le s\right. \qquad (1.11)$$

Множество значений ω^2, при которых $\Omega(\beta,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})=0$ или $Q^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})=0$, обозначим через Ω, $Q^{(1)}$ соответственно.

Справедливо следующее утверждение: *вне множества* $\bigcup_{r=1}^{2}\Omega\cup Q^{(1)}\cup[0,\lambda_0^{(r)}/\rho^{(r)}]$ *спектр частот задачи (1.2)–(1.6) состоит из изолированных собственных частот конечной кратности* [18], [23].

2. Вывод и анализ дисперсионных уравнений. Решение системы (1.2) ищем в виде

$$u_1^{(r)}=\exp((-1)^r\chi^{(r)}k\alpha)(\sum_{m=1}^{\infty}u_m^{(r)}\sin km\beta),\ u_2^{(r)}=\exp((-1)^r\chi^{(r)}k\alpha)(\sum_{m=1}^{\infty}v_m^{(r)}\cos km\beta)$$
$$w^{(r)}=k\exp((-1)^r\chi^{(r)}k\alpha)(\sum_{m=1}^{\infty}w_m^{(r)}\sin km\beta),\ r=1,2 \qquad (2.1)$$

При этом, условия (1.6) выполняются автоматически. Подставим выражения (2.1) в систему (1.2). Из первых двух уравнений (1.2), приравнивая соответствующие коэффициенты полученных тригонометрических рядов, получим

$$C_m^{(r)}u_m^{(r)}=(-1)^r\chi^{(r)}a_m^{(r)}w_m^{(r)},\quad C_m^{(r)}v_m^{(r)}=mb_m^{(r)}w_m^{(r)},\ r=1,2$$
$$a_m^{(r)}=\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\chi^{(r)})^2+\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}m^2+\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2,\ (\eta^{(r)})^2=\frac{\lambda^{(r)}}{k^2B_{66}^{(r)}}$$
$$b_m^{(r)}=\frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2-B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}(\chi^{(r)})^2-\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(m^2-(\eta^{(r)})^2) \qquad (2.2)$$

$$C_m^{(r)} = (\chi^{(r)})^4 - \frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}} m^2(\chi^{(r)})^2 + \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2(\chi^{(r)})^2 +$$

$$+ (m^2 - (\eta^{(r)})^2)\left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2\right), \quad m = \overline{1,+\infty}$$

Из третьего уравнения системы (1.2), учитывая соотношения (2.2) и правило умножения тригонометрических рядов ([24], стр. 592), придём к бесконечной системе уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty}(r_{n-m} - r_{n+m})A_n^{(r)}w_n^{(r)} - 2\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2 w_m^{(r)} = 0,\ m = \overline{1,+\infty},\ r = 1,2 \tag{2.3}$$

$$A_n^{(r)} = P_n^{(r)} / C_n^{(r)},\ P_n^{(r)} = C_n^{(r)} + n^2 b_n^{(r)} - B_{12}^{(r)} / B_{22}^{(r)}(\chi^{(r)})^2 a_n^{(r)},\ n = \overline{1,+\infty} \tag{2.4}$$

Исходя из правила умножения тригонометрических рядов, условимся, что если $h > 0$, то $r_{-h} = r_h$. Так как в области определения $A_n^{(r)}$ имеем $A_n^{(r)} = O(1/n^2)$, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}|A_n^{(r)}| < +\infty$. Учитывая также представление (1.1), получим

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}|A_n^{(r)}|(|r_{n+m}| + |r_{n-m}|) \le 3(|r_0|/2 + \sum_{m=1}^{\infty}|r_m|)(\sum_{n=1}^{\infty}|A_n^{(r)}|) < +\infty \tag{2.5}$$

Следовательно, бесконечный определитель системы (2.3) при $\lambda^{(r)} \notin [0, \lambda_0^{(r)}]$, $r = 1,2$ и в области определения коэффициентов (2.4) относится к известному классу сходящихся определителей – к нормальным определителям [25]. Чтобы системы (2.3) имели нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы их определители равнялись нулю

$$D^{(r)}((\chi^{(r)})^2, (\eta^{(r)})^2, B_{11}^{(r)}, B_{22}^{(r)}, B_{12}^{(r)}, B_{66}^{(r)}, r_0, r_1, \ldots, r_m, \ldots) = 0, \quad r = 1,2 \tag{2.6}$$

Предположим, что $\chi_1^{(r)}, \chi_2^{(r)}$ $(r = 1,2)$ – различные корни уравнения (2.6) с положительными действительными частями, тогда $\chi_3^{(1)} = -\chi_1^{(1)}, \chi_4^{(1)} = -\chi_2^{(1)}$ также являются различными корнями уравнения (2.6). Решения задачи (1.2)- (1.6) ищем в виде

$$u_1^{(r)} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{m=1}^{\infty}\exp((-1)^r\chi_j^{(r)}k\alpha)u_{mj}^{(r)}\sin km\beta, u_2^{(r)} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{m=1}^{\infty}\exp((-1)^r\chi_j^{(r)}k\alpha)v_{mj}^{(r)}\cos km\beta \tag{2.7}$$

$$w^{(r)} = k\sum_{j=1}^{4}\sum_{m=1}^{\infty}\exp((-1)^r\chi_j^{(r)}k\alpha)w_{mj}^{(r)}\sin km\beta,\ r = 1,2$$

Здесь $u_{mj}^{(r)}, v_{mj}^{(r)}$ – значения $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}$, а $(w_{1j}^{(r)}, w_{2j}^{(r)}, \ldots, w_{mj}^{(r)}, \ldots)$ $j = 1,2$ – решения системы (2.3) при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ $j = \overline{1,4},\ r = 1,2$ соответственно. Учитывая граничные условия (1.3)-(1.5) и соотношения (2.2), придём к совокупности систем уравнений

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{R_{1j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}}w_{mj}^{(1)} - \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\sum_{j=1}^{4}\frac{R_{1j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}}w_{mj}^{(2)} = 0,\quad \sum_{j=1}^{4}\frac{R_{2j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}}w_{mj}^{(1)} + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\sum_{j=1}^{4}\frac{R_{2j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}}w_{mj}^{(2)} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{R_{3j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}}w_{mj}^{(1)} + \sum_{j=1}^{4}\frac{R_{3j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}}w_{mj}^{(2)} = 0,\quad \sum_{j=1}^{4}\frac{R_{4j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}}w_{mj}^{(1)} - \sum_{j=1}^{4}\frac{R_{4j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}}w_{mj}^{(2)} = 0 \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{R_{3j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}}\exp(z_j^{(!)})w_{mj}^{(1)} = 0,\quad \sum_{j=1}^{4}\frac{R_{4j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}}\exp(z_j^{(1)})w_{mj}^{(1)} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{R_{1j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}}\exp(z_j^{(2)})w_{mj}^{(2)}=0,\qquad \sum_{j=1}^{4}\frac{R_{2j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}}\exp(z_j^{(2)})w_{mj}^{(2)}=0,\ m=\overline{1,+\infty}$$

$$R_{1j}^{(r)}=(\chi_j^{(r)})^2a_{mj}^{(r)}-\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}m^2b_{mj}^{(r)}-\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}c_{mj}^{(r)} \tag{2.9}$$

$$R_{2j}^{(r)}=\chi_j^{(r)}(a_{mj}^{(r)}+b_{mj}^{(r)}),\quad R_{3j}^{(r)}=\chi_j^{(r)}a_{mj}^{(r)},\quad R_{4j}^{(r)}=b_{mj}^{(r)}$$

а $a_{mj}^{(r)},b_{mj}^{(r)},c_{mj}^{(r)}$ – значения $a_m^{(r)},b_m^{(r)},c_m^{(r)}$ из (2.2) при $\chi^{(r)}=\chi_j^{(r)}$ соответственно. Чтобы совокупность систем уравнений (2.8) имела решение, достаточно чтобы совокупность уравнений

$$\Delta_m=\exp(-z_1^{(1)}-z_2^{(1)}-z_1^{(2)}-z_2^{(2)})d_m=0,\ m=\overline{1,+\infty} \tag{2.10}$$

$$d_m=\left\|\begin{matrix} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(1)} & R_{11}^{(1)}e^{z_1^{(1)}} & R_{12}^{(1)}e^{z_2^{(1)}} & -cR_{11}^{(2)} & -cR_{12}^{(2)} & cR_{11}^{(2)}e^{z_1^{(2)}} & cR_{12}^{(2)}e^{z_2^{(2)}}\\ R_{21}^{(1)} & R_{22}^{(1)} & -R_{21}^{(1)}e^{z_1^{(1)}} & -R_{22}^{(1)}e^{z_2^{(1)}} & dR_{21}^{(2)} & dR_{22}^{(2)} & dR_{21}^{(2)}e^{z_1^{(2)}} & dR_{22}^{(2)}e^{z_2^{(2)}}\\ R_{31}^{(1)} & R_{32}^{(1)} & -R_{31}^{(1)}e^{z_1^{(1)}} & -R_{32}^{(1)}e^{z_2^{(1)}} & R_{31}^{(2)} & R_{32}^{(2)} & R_{31}^{(2)}e^{z_1^{(2)}} & R_{32}^{(2)}e^{z_2^{(2)}}\\ R_{41}^{(1)} & R_{42}^{(1)} & R_{41}^{(1)}e^{z_1^{(1)}} & R_{42}^{(1)}e^{z_2^{(1)}} & -R_{41}^{(2)} & -R_{42}^{(2)} & R_{41}^{(2)}e^{z_1^{(2)}} & R_{42}^{(2)}e^{z_2^{(2)}}\\ -R_{31}^{(1)}e^{z_1^{(1)}} & -R_{32}^{(1)}e^{z_2^{(1)}} & R_{31}^{(1)} & R_{32}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0\\ R_{41}^{(1)}e^{z_1^{(1)}} & R_{42}^{(1)}e^{z_2^{(1)}} & R_{41}^{(1)} & R_{42}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & cR_{11}^{(2)}e^{z_1^{(2)}} & cR_{12}^{(2)}e^{z_2^{(2)}} & -cR_{11}^{(2)} & -cR_{12}^{(2)}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & dR_{21}^{(2)}e^{z_1^{(2)}} & dR_{22}^{(2)}e^{z_2^{(2)}} & dR_{21}^{(2)} & dR_{22}^{(2)} \end{matrix}\right\| \tag{2.11}$$

где $c=B_{11}^{(2)}/B_{11}^{(1)}$, $d=B_{66}^{(2)}/B_{66}^{(1)}$ вне множества $\bigcup_{r=1}^{2}\Omega\cup Q^{(1)}\cup[0,\lambda_0^{(r)}/\rho^{(r)}]$ имела ω^2 – решение. Численный анализ показывает, что определитель (2.11) становится малым, когда любые два корня уравнения (2.6) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений уравнений (2.10). Оказывается, множитель в (2.11), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить.

Выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.11), получим

$$\Delta_m=m^{26}(x_2^{(1)}-x_1^{(1)})^2(x_2^{(2)}-x_1^{(2)})^2\exp(-z_1^{(1)}-z_2^{(1)}-z_1^{(2)}-z_2^{(2)})\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} \tag{2.12}$$

$$m_{11}=R_{11}^{(1)},\ m_{12}=\left(\frac{B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)}-(B_{12}^{(1)})^2}{(B_{11}^{(1)})^2}-\frac{B_{12}^{(1)}B_{66}^{(1)}}{(B_{11}^{(1)})^2}(\eta_m^{(1)})^2\right)(x_1^{(1)}+x_2^{(1)}),\ m_{13}=m_{11}\exp\left(z_1^{(1)}\right)$$

$$m_{14}=m_{12}\exp\left(z_2^{(1)}\right)+m_{11}[z_1^{(1)}z_2^{(1)}],\ m_{15}=-B_{11}^{(2)}/B_{11}^{(1)}R_{11}^{(2)},\ z_j^{(r)}=-kmx_j^{(r)}l^{(r)},\ j=1{,}2;r=1{,}2$$

$$m_{16}=-\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\left(\frac{B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^2}{(B_{11}^{(2)})^2}-\frac{B_{12}^{(2)}B_{66}^{(2)}}{(B_{11}^{(2)})^2}(\eta_m^{(2)})^2\right)(x_1^{(2)}+x_2^{(2)})$$

$$m_{17}=-m_{15}\exp(z_1^{(2)}),\ m_{18}=-m_{16}\exp(z_2^{(2)})-m_{15}[z_1^{(2)}z_2^{(2)}];$$

$$m_{21}=R_{21}^{(1)},\ m_{22}=\frac{B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)}-(B_{12}^{(1)})^2}{B_{11}^{(1)}B_{66}^{(1)}}((x_1^{(1)})^2+(x_2^{(1)})^2+x_1^{(1)}x_2^{(1)})+\frac{B_{12}^{(1)}+B_{22}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}(\eta_m^{(1)})^2$$

$$m_{23}=-m_{21}\exp(z_1^{(1)}),\ m_{24}=-m_{22}\exp(z_2^{(1)})-m_{21}[z_1^{(1)}z_2^{(1)}],\ m_{25}=B_{66}^{(2)}/B_{66}^{(1)}R_{21}^{(2)}$$

$$m_{26}=\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\left(\frac{B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^2}{B_{11}^{(2)}B_{66}^{(2)}}((x_1^{(2)})^2+(x_2^{(2)})^2+x_1^{(2)}x_2^{(2)})+\frac{B_{12}^{(2)}+B_{22}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}(\eta_m^{(2)})^2\right) \tag{2.13}$$

$$m_{27}=m_{25}\exp(z_1^{(2)}),\ m_{28}=m_{26}\exp(z_2^{(2)})+m_{25}[z_1^{(2)}z_2^{(2)}];$$

$$m_{31}=R_{31}^{(1)},\ m_{32}=\frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}((x_1^{(1)})^2+(x_2^{(1)})^2+x_1^{(1)}x_2^{(1)})+\frac{B_{22}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}+\frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}(\eta_m^{(1)})^2$$

$$m_{33}=-m_{31}\exp(z_1^{(1)}),\ m_{34}=-m_{32}\exp(z_2^{(1)})-m_{31}[z_1^{(1)}z_2^{(1)}],\ m_{35}=R_{31}^{(2)}$$

$$m_{36}=\frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}((x_1^{(2)})^2+(x_2^{(2)})^2+x_1^{(2)}x_2^{(2)})+\frac{B_{22}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}+\frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}(\eta_m^{(2)})^2$$

$$m_{37}=m_{35}\exp(z_1^{(2)}),\ m_{38}=m_{36}\exp(z_2^{(2)})+m_{35}[z_1^{(2)}z_2^{(2)}];$$

$$m_{41}=R_{41}^{(1)},\ m_{42}=\frac{B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)}-(B_{12}^{(1)})^2-B_{12}^{(1)}B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}B_{66}^{(1)}}(x_1^{(1)}+x_2^{(1)})$$

$$m_{43}=m_{41}\exp(z_1^{(1)}),\ m_{44}=m_{42}\exp(z_2^{(1)})+m_{41}[z_1^{(1)}z_2^{(1)}],\ m_{45}=-R_{41}^{(2)}$$

$$m_{46}=-\frac{B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^2-B_{12}^{(2)}B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}B_{66}^{(2)}}(x_1^{(2)}+x_2^{(2)})$$

$$m_{47}=-m_{45}\exp(z_1^{(2)}),\ m_{48}=-m_{46}\exp(z_2^{(2)})-m_{45}[z_1^{(2)}z_2^{(2)}];$$

$$m_{51}=m_{33},\quad m_{52}=m_{34},\quad m_{53}=m_{31},\quad m_{54}=m_{32},\quad m_{5j}=0,\ j=5,6,7,8;$$

$$m_{61}=m_{43},\quad m_{62}=m_{44},\quad m_{63}=m_{41},\quad m_{64}=m_{42},\quad m_{6j}=0,\ j=5,6,7,8;$$

$$m_{7j}=0,\ j=1,2,3,4\ ,\ m_{75}=m_{17},\quad m_{76}=m_{18},\quad m_{77}=m_{15},\quad m_{78}=m_{16};$$

$$m_{8j}=0,\ j=1,2,3,4\ ,\ m_{85}=m_{27},\quad m_{86}=m_{28},\quad m_{87}=m_{25},\quad m_{88}=m_{26};$$

$$[z_1^{(r)}z_2^{(r)}]=-kml^{(r)}(\exp(z_1^{(r)})-\exp(z_2^{(r)}))/(z_1^{(r)}-z_2^{(r)});\ \eta_m^{(r)}=\eta^{(r)}/m;$$

$$x_i^{(r)}=\chi_i^{(r)}/m;\ i,r=1,2;$$

Уравнения (2.10) эквивалентны уравнениям

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8}=0,\quad m=\overline{1,+\infty} \tag{2.14}$$

При $l^{(2)}\to\infty$ уравнения (2.14) принимают вид

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8}=\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{ij=1}^{6}\ \mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=7,8}^{j=7,8}+\sum_{j=1}^{2}O(\exp(z_j^{(2)}))=0,\quad m=\overline{1,+\infty} \tag{2.15}$$

Следовательно, при $l^{(2)}\to\infty$ уравнения (2.14) распадаются на уравнения

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{ij=1}^{6}=0,\quad m=\overline{1,+\infty} \tag{2.16}$$

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=7,8}^{j=7,8}=cdK_2^{(2)}(\eta_m^{(2)},x_1^{(2)},x_2^{(2)})=cd\ [\delta_1^{(2)}(x_1^{(2)})^2(x_2^{(2)})^2+$$
$$+\delta_2^{(2)}x_1^{(2)}x_2^{(2)}+\delta_3^{(2)}((x_1^{(2)})^2+(x_2^{(2)})^2)+\delta_4^{(2)}]=0,\ m=\overline{1,+\infty} \tag{2.17}$$

$$\delta_1^{(2)}=\frac{B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2}\left(\frac{B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^2}{B_{11}^{(2)}B_{66}^{(2)}}-\frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}(\eta_m^{(2)})^2\right) \tag{2.18}$$

$$\delta_2^{(2)}=-(\eta_m^{(2)})^2\left(\frac{B_{22}^{(2)}(B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^2)}{(B_{11}^{(2)})^3}+\frac{B_{12}^{(2)}(B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^2-B_{12}^{(2)}B_{66}^{(2)}-B_{22}^{(2)}B_{66}^{(2)})}{(B_{11}^{(2)})^3}(\eta_m^{(2)})^2\right)$$

$$\delta_3^{(2)}=\frac{B_{12}^{(2)}(B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^2)}{(B_{11}^{(2)})^3}(\eta_m^{(2)})^2\left(1-(\eta_m^{(2)})^2\right),\ \delta_4^{(2)}=\frac{B_{12}^{(2)}B_{66}^{(2)}(B_{12}^{(2)}+B_{66}^{(2)})}{(B_{11}^{(2)})^3}(\eta_m^{(2)})^4\left(1-(\eta_m^{(2)})^2\right).$$

Уравнения (2.16) являются дисперсионными уравнениями интерфейсных коле-

баний замкнутой полубесконечной составной консольной цилиндрической оболочки с жёстко защемлённым торцом $\alpha = l^{(1)}$. Уравнения (2.17) являются обобщёнными дисперсионными уравнениями Рэлея для полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочки из материала (2) со свободным краем при $\alpha = -l^{(2)}$ (ср. [8-10]).
При $l^{(1)} \to \infty$ уравнения (2.16) принимают вид

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{6} = \mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=5,6}^{j=3,4} . \mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.19}$$

Следовательно, при $l^{(1)} \to \infty$ уравнения (2.16) распадаются на уравнения

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.20}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=5,6}^{j=3,4} = Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = \\ \gamma_1^{(1)}(x_1^{(1)})^2(x_2^{(1)})^2 + \gamma_2^{(1)} x_1^{(1)} x_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)}((x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(1)})^2) + \gamma_4^{(1)} = 0, \ m = \overline{1,+\infty}\end{gathered} \tag{2.21}$$

$$\gamma_1^{(1)} = \frac{B_{12}^{(1)}(B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2 - B_{12}^{(1)}B_{66}^{(1)})}{(B_{11}^{(1)})^2 B_{66}^{(1)}}$$

$$\gamma_2^{(1)} = -(\eta_m^{(1)})^2\left(\frac{B_{22}^{(1)}(B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2)}{(B_{11}^{(1)})^2 B_{66}^{(1)}} + \frac{B_{12}^{(1)}(B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2 - B_{12}^{(1)}B_{66}^{(1)} - B_{22}^{(1)}B_{66}^{(1)})}{(B_{11}^{(1)})^2 B_{66}^{(1)}}(\eta_m^{(1)})^2\right)$$

$$\gamma_3^{(1)} = -\frac{B_{12}^{(1)}B_{22}^{(1)}}{(B_{11}^{(1)})^2}\left(1 - (\eta_m^{(1)})^2\right), \quad \gamma_4^{(1)} = -\frac{B_{22}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}\left(1 - (\eta_m^{(1)})^2\right)\left(\frac{B_{22}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}(\eta_m^{(1)})^2\right) \tag{2.22}$$

Уравнения (2.20) являются дисперсионными уравнениями интерфейсных колебаний замкнутой бесконечной составной цилиндрической оболочки. Уравнения (2.21) появляются из-за того, что оболочка защемлена на торце $\alpha = l^{(1)}$.
Учитывая (2.15), (2.17),(2.19) и (2.21), уравнения (2.14) можно написать в виде

$$\begin{gathered}\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)})K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)})\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} + \\ \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(1)})) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(2)})), \quad m = \overline{1,+\infty}\end{gathered} \tag{2.23}$$

Из (2.23) следует, что при больших $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ уравнения (2.14) распадаются на уравнения

$$Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0, \ K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0, \ \mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.24}$$

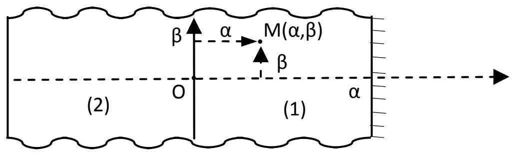
Таким образом, при больших $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ колебательное движение конечной составной цилиндрической оболочки, когда один торец свободен, а другой жёстко защемлён, может разделиться на краевые колебания рэлеевского типа у торца $\alpha = -l^{(2)}$ оболочки и интерфейсные колебания у линии раздела $\alpha = 0$ материала оболочки. Отметим, что при больших m ω^2 – корни первого уравнения из (2.24), по-видимому, принадлежат зоне непрерывного спектра $Q^{(1)}$ [10].

В общем случае решение уравнения (2.6) представляет собой сложную задачу. Поэтому, для установления асимптотических формул для дисперсионных уравнений (2.14) рассмотрим следующие частные случаи.

3. Частные случаи. ***Случай а):*** $R^{-2}(\beta) \equiv 0$ $(r_m = 0, \ m = \overline{0,+\infty})$. В выражениях (1.2)-(1.6) всюду формально положим $R^{-1}(\beta) \equiv 0$, в итоге, получим систему уравнений малых планарных колебаний ортотропных пластин [26]

$$-B_{11}^{(r)}\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\alpha^2}-B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\beta^2}-(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})\frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial\alpha\partial\beta}=\lambda^{(r)}u_1^{(r)}$$
$$-(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\alpha\partial\beta}-B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial\alpha^2}-B_{22}^{(r)}\frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial\beta^2}=\lambda^{(r)}u_2^{(r)} \qquad (3.1)$$

Все величины, относящиеся к правой пластинке ($0\le\alpha<l^{(1)}$), отмечаются верхним индексом (1), к левой пластинке ($-l^{(2)}<\alpha\le 0$) – индексом (2). Предполагается, что $\alpha(-l^{(2)}<\alpha<l^{(1)})$ и $\beta(-\infty<\beta<\infty)$ являются прямолинейными ортогональными координатами точки срединной плоскости пластины-полосы (фиг. 2).



Фиг. 2

Аналогом граничных условий (1.3)-(1.6) и (1.7) являются

$$T_1^{(1)}|_{\alpha=0}=T_1^{(2)}|_{\alpha=0},\ S_{12}^{(1)}|_{\alpha=0}=S_{12}^{(2)}|_{\alpha=0},\ u_1^{(1)}|_{\alpha=0}=u_1^{(2)}|_{\alpha=0},\ u_2^{(1)}|_{\alpha=0}=u_2^{(2)}|_{\alpha=0} \qquad (3.2)$$

$$u_1^{(1)}|_{\alpha=l^{(1)}}=0,\ u_2^{(1)}|_{\alpha=l^{(1)}}=0 \qquad (3.3)$$

$$\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial\beta}\right|_{\alpha=-l^{(2)}}=0,\quad \left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial\beta}+\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=-l^{(2)}}=0 \qquad (3.4)$$

$$u_j^{(r)}(\alpha,\beta)=u_j^{(r)}(\alpha,\beta+s),r=1,2 \qquad (3.5)$$

$$T_1^{(r)}=hB_{11}^{(r)}\left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\beta}\right),\ S_{12}^{(r)}=hB_{66}^{(r)}\left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\beta}+\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\alpha}\right) \qquad (3.6)$$

Решение системы (3.1) при фиксированном числе волн m ищем в виде:

$$u_1^{(r)}=u_m^{(r)}\sin km\beta\exp((-1)^r y^{(r)}km\alpha),\ u_2^{(r)}=v_m^{(r)}\cos km\beta\exp((-1)^r y^{(r)}km\alpha),r=1,2 \qquad (3.7)$$

при $k=n_0 2\pi/s,\ n_0\in N$, где s – любое положительное число. При этом, условия (3.5) выполняются автоматически. Подставляя выражения (3.7) в систему (3.1), получим систему уравнений:

$$\left(B_{11}^{(r)}(y^{(r)})^2-B_{66}^{(r)}+\frac{\lambda^{(r)}}{m^2k^2}\right)u_m^{(r)}-(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})(-1)^r y^{(r)}v_m^{(r)}=0$$
$$(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})(-1)^r y^{(r)}u_m^{(r)}+\left(B_{66}^{(r)}(y^{(r)})^2-B_{22}^{(r)}+\frac{\lambda^{(r)}}{m^2k^2}\right)v_m^{(r)}=0 \qquad (3.8)$$

Приравнивая определитель системы (3.8) к нулю, получим характеристические уравнения

$$c_m^{(r)}=(y^{(r)})^4-\frac{B_{12}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2-2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}(y^{(r)})^2+\frac{B_{11}^{(r)}+B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta_m^{(r)})^2(y^{(r)})^2+$$
$$+(1-(\eta_m^{(r)})^2)\left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}-\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta_m^{(r)})^2\right)=0,\ m=\overline{1,+\infty} \qquad (3.9)$$

$$(\eta^{(r)})^2=\frac{\lambda^{(r)}}{k^2B_{66}^{(r)}},\quad \eta_m^{(r)}=\frac{\eta^{(r)}}{m},\quad m=\overline{1,+\infty} \tag{3.10}$$

Пусть $y_j^{(r)},\ j=1,2$ – различные корни уравнения (3.9) с положительными действительными частями, тогда $y_3^{(r)}=-y_1^{(r)},\ y_4^{(r)}=-y_2^{(r)},\ r=1,2$ – различные корни уравнения (3.9). В качестве решения системы уравнений (3.8) можно принять

$$u_{mj}^{(r)}=(-1)^r y_j^{(r)}\frac{B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}},\quad v_{mj}^{(r)}=(y_j^{(r)})^2-\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(1-(\eta_m^{(r)})^2),\ j=\overline{1,4} \tag{3.11}$$

Решение задачи (3.1)-(3.5) ищем в виде

$$u_1^{(r)}=\sum_{j=1}^{4}u_{mj}^{(r)}w_j^{(r)}\exp((-1)^r y_j^{(r)}km\alpha)\sin km\beta \tag{3.12}$$

$$u_2^{(r)}=\sum_{j=1}^{4}v_{mj}^{(r)}w_j^{(r)}\exp((-1)^r y_j^{(r)}km\alpha)\cos km\beta,\ r=1,2$$

Учитывая граничные условия (3.2)-(3.4), получим систему уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{4}P_{1j}^{(1)}w_j^{(1)}-\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\sum_{j=1}^{4}P_{1j}^{(2)}w_j^{(2)}=0,\quad \sum_{j=1}^{4}P_{2j}^{(1)}w_j^{(1)}+\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\sum_{j=1}^{4}P_{2j}^{(2)}w_j^{(2)}=0\\ \sum_{j=1}^{4}P_{3j}^{(1)}w_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{4}P_{3j}^{(2)}w_j^{(2)}=0,\quad \sum_{j=1}^{4}P_{4j}^{(1)}w_j^{(1)}-\sum_{j=1}^{4}P_{4j}^{(2)}w_j^{(2)}=0\\ \sum_{j=1}^{4}P_{3j}^{(1)}\exp(z_j^{(1)})w_j^{(1)}=0,\quad \sum_{j=1}^{4}P_{4j}^{(1)}\exp(z_j^{(1)})w_j^{(1)}=0\\ -\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\sum_{j=1}^{4}P_{1j}^{(2)}\exp(z_j^{(2)})w_j^{(2)}=0,\quad \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\sum_{j=1}^{4}P_{2j}^{(2)}\exp(z_j^{(2)})w_j^{(2)}=0\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}P_{1j}^{(r)}=\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}((y_j^{(r)})^2+\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(1-(\eta_m^{(r)})^2)),\quad P_{2j}^{(r)}=y_j^{(r)}((y_j^{(r)})^2+\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}+\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta_m^{(r)})^2)\\ P_{3j}^{(r)}=y_j^{(r)}\frac{B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}},\quad P_{4j}^{(r)}=(y_j^{(r)})^2-\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(1-(\eta_m^{(r)})^2)\end{gathered} \tag{3.14}$$

Производя элементарные действия над столбцами определителя системы (3.13) и приравнивая к нулю, получим дисперсионные уравнения:

$$\Delta_m^*=(y_2^{(1)}-y_1^{(1)})^2(y_2^{(2)}-y_1^{(2)})^2\exp(-z_1^{(1)}-z_2^{(1)}-z_1^{(2)}-z_2^{(2)})\mathrm{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{ij=1}^{8}=0,\ m=\overline{1,+\infty} \tag{3.15}$$

$$m_{11}^*=P_{11}^{(1)},\ m_{12}^*=\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}\left(y_1^{(1)}+y_2^{(1)}\right),\ m_{13}^*=m_{11}^*\exp(z_1^{(1)})$$

$$m_{14}^*=m_{12}^*\exp(z_2^{(1)})+m_{11}^*[z_1^{(1)}z_2^{(1)}],m_{15}^*=-\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}P_{11}^{(2)},\ m_{16}^*=-\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\left(y_1^{(2)}+y_2^{(2)}\right)$$

$$m_{17}^*=m_{15}^*\exp(z_1^{(2)}),\ m_{18}^*=m_{16}^*\exp(z_2^{(2)})+m_{15}^*[z_1^{(2)}z_2^{(2)}]$$

$$m_{21}^{*}=P_{21}^{(1)},\; m_{22}^{*}=\frac{B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)}-(B_{12}^{(1)})^{2}-B_{12}^{(1)}B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}B_{66}^{(1)}}-(\eta_{m}^{(1)})^{2}+y_{1}^{(1)}y_{2}^{(1)},$$

$$m_{23}^{*}=-m_{21}^{*}\exp(z_{1}^{(1)}), m_{24}^{*}=-m_{22}^{*}\exp(z_{2}^{(1)})-m_{21}^{*}[z_{1}^{(1)}z_{2}^{(1)}],\; m_{25}^{*}=\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}P_{21}^{(2)}$$

$$m_{26}^{*}=\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\left(\frac{B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^{2}-B_{12}^{(2)}B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}B_{66}^{(2)}}-(\eta_{m}^{(2)})^{2}+y_{1}^{(2)}y_{2}^{(2)}\right)$$

$$m_{27}^{*}=-m_{25}^{*}\exp(z_{1}^{(2)}),\; m_{28}^{*}=-m_{26}^{*}\exp(z_{2}^{(2)})-m_{25}^{*}[z_{1}^{(2)}z_{2}^{(2)}]$$

$$m_{31}^{*}=P_{31}^{(1)},\; m_{32}^{*}=\frac{B_{12}^{(1)}+B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}},\; m_{33}^{*}=-m_{31}^{*}\exp(z_{1}^{(1)})$$

$$m_{34}^{*}=-m_{32}^{*}\exp(z_{2}^{(1)})-m_{31}^{*}[z_{1}^{(1)}z_{2}^{(1)}],\; m_{35}^{*}=P_{31}^{(2)},\; m_{36}^{*}=\frac{B_{12}^{(2)}+B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \tag{3.16}$$

$$m_{37}^{*}=-m_{35}^{*}\exp(z_{1}^{(2)}),\; m_{38}^{*}=-m_{36}^{*}\exp(z_{2}^{(2)})-m_{35}^{*}[z_{1}^{(2)}z_{2}^{(2)}]$$

$$m_{41}^{*}=P_{41}^{(1)},\; m_{42}^{*}=\left(y_{1}^{(1)}+y_{2}^{(1)}\right), m_{43}^{*}=m_{41}^{*}\exp(z_{1}^{(1)})$$

$$m_{44}^{*}=m_{42}^{*}\exp(z_{2}^{(1)})+m_{41}^{*}[z_{1}^{(1)}z_{2}^{(1)}],\; m_{45}^{*}=-P_{41}^{(2)},\; m_{46}^{*}=-\left(y_{1}^{(2)}+y_{2}^{(2)}\right)$$

$$m_{47}^{*}=m_{45}^{*}\exp(z_{1}^{(2)}),\; m_{48}^{*}=m_{46}^{*}\exp(z_{2}^{(2)})+m_{45}^{*}[z_{1}^{(2)}z_{2}^{(2)}]$$

$$m_{51}^{*}=m_{33}^{*},\; m_{52}^{*}=m_{34}^{*},\; m_{53}^{*}=m_{31}^{*},\; m_{54}^{*}=m_{32}^{*},\; m_{5j}^{*}=0,\; j=5,6,7,8$$

$$m_{61}^{*}=m_{43}^{*},\; m_{62}^{*}=m_{44}^{*},\; m_{63}^{*}=m_{41}^{*},\; m_{64}^{*}=m_{42}^{*},\; m_{6j}^{*}=0,\; j=5,6,7,8$$

$$m_{7j}^{*}=0,\; j=1,2,3,4,\; m_{75}^{*}=m_{17}^{*},\; m_{76}^{*}=m_{18}^{*},\; m_{77}^{*}=m_{15}^{*},\; m_{78}^{*}=m_{16}^{*}$$

$$m_{8j}^{*}=0,\; j=1,2,3,4,\; m_{85}^{*}=m_{27}^{*},\; m_{86}^{*}=m_{28}^{*},\; m_{87}^{*}=m_{25}^{*},\; m_{88}^{*}=m_{26}^{*}$$

$$[z_{1}^{(r)}z_{2}^{(r)}]=-kml^{(r)}(\exp(z_{1}^{(r)})-\exp(z_{2}^{(r)}))/(z_{1}^{(r)}-z_{2}^{(r)})$$

$$z_{j}^{(r)}=-y_{j}^{(r)}mkl^{(r)},\; j=1,2; r=1,2$$

Следовательно, дисперсионные уравнения (3.15) эквивалентны уравнениям

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^{*}\right\|_{ij=1}^{8}=0,\; m=\overline{1,+\infty} \tag{3.17}$$

Уравнения (3.17) являются дисперсионными уравнениями для составных пластин-полос со свободным и жёстко защемлёнными краями. При $l^{(2)}\to\infty$ имеем асимптотическую формулу

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^{*}\right\|_{ij=1}^{8}=\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^{*}\right\|_{i=7,8}^{j=7,8}.\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^{*}\right\|_{ij=1}^{6}+\sum_{j=1}^{2}O(\exp z_{j}^{(2)}),\qquad m=\overline{1,+\infty} \tag{3.18}$$

Следовательно, при $l^{(2)}\to\infty$ уравнения (3.17) распадаются на совокупность уравнений

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^{*}\right\|_{i=7,8}^{j=7,8}=0,\quad m=\overline{1,+\infty};\; \operatorname{Det}\left\|m_{ij}^{*}\right\|_{ij=1}^{6}=0,\; m=\overline{1,+\infty} \tag{3.19}$$

Первая совокупность уравнений из (3.19) является уравнениями Рэлея для полубесконечной пластины из материала (2) со свободным краем $\alpha=-l^{(2)}$. Вторая совокупность уравнений из (3.19) является дисперсионными уравнениями для полубесконечной составной пластины с жёстко защемлённым краем $\alpha = l^{(1)}$.

При $l^{(1)} \to \infty$ имеются асимптотические представления

$$\operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{ij=1}^{6} = \operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{i=5,6}^{j=3,4} . \operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} + \sum_{j=1}^{2} O(\exp z_j^{(1)}), \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{3.20}$$

Следовательно, при $l^{(2)} \to \infty$ и $l^{(1)} \to \infty$ уравнения (3.18) имеют асимптотические представления

$$\operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{ij=1}^{8} = \operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{i=5,6}^{j=3,4} . \operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{i=7,8}^{j=7,8} . \operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} + \tag{3.21}$$

$$+\sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(1)})) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, \qquad m = \overline{1,+\infty}$$

$$\operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} = -\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)})$$

$$\operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{i=5,6}^{j=3,4} = -\frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}), \quad \operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{i=7,8}^{j=7,8} = -dc \frac{\left(B_{66}^{(2)}\right)^2}{B_{11}^{(1)} B_{66}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)})$$

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) +$$

$$+\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \left[2\left(y_1^{(1)} y_2^{(1)} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (1 - (\eta_m^{(1)})^2) \right)\left(y_1^{(2)} y_2^{(2)} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (1 - (\eta_m^{(2)})^2) \right) + \right. \tag{3.22}$$

$$\left. + (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)})((1 - (\eta_m^{(2)})^2) y_1^{(1)} y_2^{(1)} + (1 - (\eta_m^{(1)})^2) y_1^{(2)} y_2^{(2)}) \right]$$

$$Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = y_1^{(r)} y_2^{(r)} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2), \; r = 1,2$$

$$K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2 \right) - (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)}, \; r = 1,2$$

Учитывая (3.18), (3.20)-(3.22), для дисперсионных уравнений (3.17) получим асимптотические представления:

$$\operatorname{Det}\left\| m^*_{ij} \right\|_{ij=1}^{8} = -\left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2 \left(\frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right)^2 Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) + \tag{3.23}$$

$$\sum_{j=1}^{2} O(\exp z_j^{(1)}) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp z_j^{(2)}) = 0, \; m = \overline{1,+\infty}$$

Следовательно, при $l^{(1)} \to \infty$ и $l^{(2)} \to \infty$ дисперсионные уравнения задачи (3.1)-(3.5) распадаются на совокупность уравнений

$$Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \; m = \overline{1,+\infty}; \; K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1,+\infty}; \; L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \; m = \overline{1,+\infty} \tag{3.24}$$

Первая совокупность уравнений из (3.24) появляется из-за того, что край $\alpha = l^{(1)}$ пластинки жёстко защемлён. Вторая совокупность уравнений является уравнениями Рэлея для полубесконечных ортотропных пластин из материала (2) со свободным краем $\alpha = -l^{(2)}$ [8-10]. Третья совокупность уравнений из (3.24) является аналогом дисперсионных уравнений Стоунли для составных ортотропных бесконечных пластин [3], [4], [13], [21].

Таким образом, планарные колебательные движения составной пластины-полосы, когда один край свободен, а другой жёстко защемлён, могут разделяться на краевые колебания рэлеевского типа и интерфейсные колебания типа Стоунли.

Заметим, что в дисперсионных уравнениях $L(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)})=0,\ m=\overline{1,+\infty}$ коэффициенты упругости левой и правой пластин, и соответствующие корни характеристических уравнений (3.9) входят симметричным образом. Поэтому, например, если левая пластина (с верхним индексом (2)) более мягкая (т.е. $\rho^{(2)}/\rho^{(1)}<<1,\ B_{ij}^{(2)}/B_{ij}^{(1)}<<1,\ i,j=1,2,6$) чем правая, то можно написать

$$L(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)})=Q^{(2)}(\eta_m^{(2)})\{K_2(\eta_m^{(1)})+O(B_{66}^{(2)}/B_{66}^{(1)})+O(\rho^{(2)}/\rho^{(1)})\}=0 \qquad (3.25)$$

Следовательно, существование интерфейсных колебаний составной пластины зависит от существования краевого колебания правой полубесконечной пластины со свободным краем [9-10]: т.е. заведомо существуют интерфейсные колебания.

Если $B_{ij}^{(2)}/B_{ij}^{(1)}\approx 1,\ ij=1,2,6;\ \rho^{(2)}/\rho^{(1)}\approx 1$, то мало шанса для существования интерфейсных колебаний.

Случай б): $R^{-2}=k^2r_0/2\ (r_m=0, m=\overline{1,+\infty})$, т.е. имеем безмоментную упругую круговую замкнутую составную цилиндрическую оболочку. В этом случае система (2.3) примет вид

$$\left(r_0A_m^{(r)}-2\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2\right)w_m^{(r)}=0,\ m=\overline{1,+\infty},\ r=1,2 \qquad (3.26)$$

Следовательно, уравнения (2.6) распадаются на две совокупности уравнений

$$r_{mm}^{(r)}=r_0P_m^{(r)}-2\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}}C_m^{(r)}(\eta^{(r)})^2=0,\ m=\overline{1,+\infty},\ \ r=1,2 \qquad (3.27)$$

или уравнений

$$\begin{aligned}&\left((\eta^{(r)})^2-\frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}\frac{r_0}{2}\right)(\chi^{(r)})^4-(\eta^{(r)})^2\left(\frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2-2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}m^2-\right.\\&\left.-\frac{B_{11}^{(r)}+B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2+\frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2+B_{22}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}\frac{r_0}{2}\right)(\chi^{(r)})^2+\\&+(\eta^{(r)})^2(m^2-(\eta^{(r)})^2)\left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}m^2-\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2+\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\frac{r_0}{2}\right)=0,\ \ m=\overline{1,+\infty},\ \ r=1,2\end{aligned} \qquad (3.28)$$

В этом случае, для нахождения безразмерных характеристик собственных частот $\eta^{(r)}\ (r=1,2)$ в дисперсионных уравнениях (2.14) используются $x_1^{(r)}=\chi_1^{(r)}/m, x_2^{(r)}=\chi_2^{(r)}/m$ выражения, где $\chi_1^{(r)}$ и $\chi_2^{(r)}$ – корни уравнения (3.28) с положительными действительными частями. При $r_0\to 0$ уравнения (3.28) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}&(\chi^{(r)})^4-\left(\frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2-2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}m^2-\frac{B_{11}^{(r)}+B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2\right)(\chi^{(r)})^2+\\&+(m^2-(\eta^{(r)})^2)\left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}m^2-\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2\right)=0,\ m=\overline{1,+\infty},\ r=1,2\end{aligned} \qquad (3.29)$$

Эти уравнения являются характеристическими уравнениями систем, моделирующих планарные колебания составной пластины-полосы ($k = n_0 2\pi / s$, $n_0 \in N$, где s – произвольное положительное число). Корни $\chi^{(r)} / m$ уравнения (3.29) с положительными действительными частями обозначим через $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$. Тогда, в этом случае для дисперсионных уравнений (2.14) справедливы следующие асимптотические представления:

$$\operatorname{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = \left(\frac{B_{11}^{(1)}}{B_{66}^{(1)}} \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{66}^{(2)}} \frac{B_{11}^{(1)}}{(B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)})} \frac{B_{11}^{(2)}}{(B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})} \right)^2 \times \tag{3.30}$$

$$\times \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) . N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 \operatorname{Det}\left\| m_{ij}^{*} \right\|_{ij=1}^{8} + O(r_0 / (2m^2)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

$$N^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = \frac{B_{22}^{(r)}(B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(2)})^2)}{(B_{11}^{(r)})^3} + \frac{B_{12}^{(r)}(B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{66}^{(r)} B_{12}^{(r)} - B_{66}^{(r)} B_{22}^{(r)})}{(B_{11}^{(r)})^3} (\eta_m^{(r)})^2 \tag{3.31}$$

Из уравнения (3.30) следует, что при $r_0 / m^2 \to 0$ уравнения (2.14) преобразуются в уравнения (3.17). Таким образом, уравнения (3.30) устанавливают асимптотическую связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для составной пластины-полосы.

При $l^{(1)} \to \infty$ и $l^{(2)} \to \infty$, учитывая (3.18)-(3.20),(3.30), дисперсионные уравнения (2.14), в этом случае, можно написать в виде

$$\operatorname{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = \frac{\left(B_{11}^{(2)} \right)^2}{B_{11}^{(1)} B_{66}^{(1)}} \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) . N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) + \tag{3.32}$$

$$+ O\left(\frac{r_0}{2m^2} \right) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(1)})) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, \; m = \overline{1, +\infty}$$

Из (3.32) следует, что при $r_0 / m^2 \to 0$, $l^{(1)} \to \infty$ и $l^{(2)} \to \infty$ дисперсионные уравнения (3.32) распадаются на уравнения (3.24). Следовательно, при малых r_0 / m^2 и больших $l^{(1)}, l^{(2)}$ приближёнными значениями корней уравнения (3.32) являются корни уравнения (3.24) (табл. 1-2).

Случай в): $R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$, $r_m = 0$, $m = \overline{2, +\infty}$, т.е. имеем некруговую составную замкнутую цилиндрическую оболочку ($k = 2\pi / s$, где s – полная длина направляющей кривой). В этом случае системы уравнений (2.3) принимают вид:

$$r_1 P_{m-1}^{(r)} \omega_{m-1}^{(r)} + r_{mm}^{(r)} \omega_m^{(r)} + r_1 P_{m+1}^{(r)} \omega_{m+1}^{(r)} = 0, \; m = \overline{1, +\infty}, \; r = 1, 2 \tag{3.33}$$

$$\omega_m = w_m^{(r)} / c_m^{(r)}, \; r_{mm}^{(r)} = r_0 P_m^{(r)} - 2 B_{66}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 C_m^{(r)} / B_{22}^{(r)} \tag{3.34}$$

Так как определители систем (3.33) относятся к нормальному типу, то для нахождения ненулевого решения приравняем их к нулю

$$D^{(r)}((\chi^{(r)})^2, (\eta^{(r)})^2, B_{11}^{(r)}, B_{22}^{(r)}, B_{12}^{(r)}, B_{66}^{(r)}, r_0, r_1) = 0, \; r = 1, 2 \tag{3.35}$$

Решения $(\chi^{(r)})^2$ уравнения (3.35) находятся аналогичным образом как в [6-9], [21].

Справедливо следующее утверждение: при фиксированном $m \ge 2$ и при $\lambda^{(r)} \notin [0, \lambda_0^{(r)}]$ уравнения (3.35) имеют формальные решения вида

$$(\chi_j^{(r)})^2 = (\chi_{mj}^{(r)})^2 + \alpha_{mj}^{(r)} r_1^2 + \beta_{mj}^{(r)} r_1^4 + \ldots, \; j = 1, 2, 3, 4; \; r = 1, 2 \tag{3.36}$$

где $\chi_{mj}^{(r)}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ – корни уравнения $r_{mm}^{(r)} = 0$ (т.е. уравнения (3.28)) и

$$\alpha_{mj}^{(r)} = \left. \frac{P_m^{(r)}(P_{m-1}^{(r)} r_{m+1\,m+1}^{(r)} + P_{m+1}^{(r)} r_{m-1\,m-1}^{(r)})}{r_{m-1\,m-1}^{(r)} r_{m+1\,m+1}^{(r)} r_{mm}^{(r)\prime}} \right|_{\chi^{(r)}=\chi_{mj}^{(r)}} \qquad j = 1,2,3,4 \;\; r = 1,2 \tag{3.37}$$

где $r_{mm}^{(r)\prime}$ – производная по $(\chi^{(r)})^2$.

Таким образом, в этом случае для нахождения коэффициентов затухания $k\chi_j^{(r)} / m$ $(j = 1,2)$ можно использовать приближённые формулы

$$\chi_j^{(r)} / m = ((\chi_{mj}^{(r)} / m)^2 + \alpha_{mj}^{(r)} r_1^2 / m^2)^{1/2}, \; (j = 1,2) \tag{3.38}$$

а для нахождения соответствующих характеристик собственных частот $\eta^{(r)} / m$ – уравнения (2.14).

4. Численные исследования. В табл. 1-2, используя дисперсионные уравнения (2.14), (3.17), приведены безразмерные характеристики собственных значений $\eta^{(1)} / m$ и характеристики коэффициентов затухания $\chi^{(r)} / m$ соответствующих форм в зависимости от m, a, b для замкнутых цилиндрических оболочек с направляющими

$$x = a\cos t, \; y = b\sin t, \; a = 2, b = 1.5; \; a = 2, b = 1. \tag{4.1}$$

В табл. 1,2 представлены результаты для вариантов 1,2,3 соответственно при $R^{-2} = k^2(r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$; $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$; $R^{-2} = 0$, применённые к замкнутым составным цилиндрическим оболочкам с направляющими (4.1), изготовленными из боропластика и бумаги с механическими параметрами [17], [27]:

Боропластик:

$$\rho^{(1)} = 2\cdot 10^3 кг/м^3, E_1^{(1)} = 2.646\cdot 10^{11} Н/м^2, E_2^{(1)} = 1.323\cdot 10^{10} Н/м^2,$$

$$G^{(1)} = 9.604\cdot 10^9 Н/м^2, \; \nu_1^{(1)} = 0.2, \nu_2^{(1)} = 0.01, \tag{4.2}$$

Бумага:

$$\rho^{(2)} = 0.16 кг/м^3, E_1^{(2)} = 2.95281\cdot 10^9 Н/м^2, E_2^{(2)} = 2.2106\cdot 10^9 Н/м^2,$$

$$G^{(2)} = 9.77076\cdot 10^8 Н/м^2, \; \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} E_1^{(2)} / E_2^{(2)}, \nu_2^{(2)} = 0.23, \tag{4.3}$$

и геометрическими параметрами: в табл.1: $a = 2, b = 1.5, s = 5.52587$ (длина половины эллипса), $k = 4\pi / s$, $r_0 = 0.273895$, $r_1 = 0.033796$, $l^{(1)} = 5$, $l^{(2)} = 1.5$; $l^{(1)} = 1.5$, $l^{(2)} = 5$; в табл.2: $a = 2, b = 1, s = 4.84422$ (длина половины эллипса),

$k = 4\pi / s$, $r_0 = 0.407139$, $r_1 = 0.229356$, $l^{(1)} = 5, l^{(2)} = 1.5; l^{(1)} = 1.5, l^{(2)} = 5$.

В качестве коэффициентов затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0^{(1)} / m = \min\{k\,\mathrm{Re}\chi_1^{(1)} / m, k\,\mathrm{Re}\chi_2^{(1)} / m\}, \; k\chi_0^{(2)} / m = \pm\min\{k\,\mathrm{Re}\chi_1^{(2)} / m, k\,\mathrm{Re}\chi_2^{(2)} / m\} \tag{4.4}$$

В равенствах (4.4) знак плюс соответствует интерфейсным колебаниям у линии раздела материала оболочки: $\alpha = 0$, а знак минус – колебаниям рэлеевского типа у торца оболочки $\alpha = -l^{(2)}$. Отметим, что связь между $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ имеет вид

$$\eta^{(2)} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \cdot \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{66}^{(2)}} \eta^{(1)} \tag{4.5}$$

Таблица 1

$\ell^{(1)}/\ell^{(2)}$	m	Вариант 1			Вариант 2		
		$k\chi_0^{(1)}\ /\ m$	$k\chi_0^{(2)}\ /\ m$	$\eta^{(1)}\ /\ m$	$k\chi_0^{(1)}\ /\ m$	$k\chi_0^{(2)}\ /\ m$	$\eta^{(1)}\ /\ m$
5/1.5	21	0.0554 iq	1.4818 -0.8460	0.99301in 32.6557e(2)	-0.0554 iq	1.4818 -0.8585	0.99301 in 32.5583 e(2)
	22	0.0664 iq	1.4960 -0.8463	0.98993 in 32.6542 e(2)	0.0677 iq	1.4944 -0.8463	0.98949 in 32.6542 e(2)
	23	0.0708 iq	1.5097 -0.8465	0.98852 in 32.6529 e(2)	0.0713 iq	1.5083 -0.8465	0.98835 in 32.6529 e(2)
	25	0.0750 iq	1.5351 -0.8526	0.98707 in 32.6063 e(2)	0.0752 iq	1.5538 -0.8526	0.98707 in 32.6063 e(2)
	30	0.0792 iq	1.5872 -0.8536	0.98559 in 32.5998 e(2)	0.0792 iq	1.5861 -0.8536	0.98559 in 32.5998 e(2)
	50	0.0838 iq	1.7021 -0.8596	0.98380 in 32.5594 e(2)	0.0827 iq	1.7016 -0.8590	0.98423 in 32.5594 e(2)
	100	0.0838 iq	1.7854 -0.8598	0.98380 in 32.5560 e(2)	0.0838 iq	1.7853 -0.8596	0.98380 in 32.5560 e(2)
	250	0.0841 iq	1.8187 -0.8598	0.98369 in 32.5548 e(2)	0.0841 iq	1.8187 -0.8598	0.98369 in 32.5548 e(2)
	m	Вариант 3	$k\chi_0^{(1)}\ /\ m$ =0.1163 $k\chi_0^{(1)}\ /\ m$ =iq		$k\chi_0^{(2)}\ /\ m$ =2.5225 $k\chi_0^{(2)}\ /\ m$ =-1.1877		$\eta^{(1)}\ /\ m$ =0.98367 in $\eta^{(1)}\ /\ m$ =32.5548 e(2)
1.5/5	21	0.0517 iq	1.4821 0.8383	0.99392 32.7147	0.0581 iq	1.4802 -0.8440	0.99232 in 32.6711 e(2)
	22	0.0646 iq	1.4961 -0.8411	0.99046 in 32.6940 e(2)	0.0661 iq	1.4946 -0.8465	0.99000 in 32.6522 e(2)
	23	0.0697 iq	1.6098 -0.8436	0.98888 in 32.6749 e(2)	0.0702 iq	1.5004 -0.8488	0.98870 in 32.6348 e(2)
	25	0.0745 iq	1.5351 -0.8481	0.98726 in 32.6413 e(2)	0.0746 iq	1.5339 -0.8529	0.98722 in 32.6045 e(2)
	30	0.0790 iq	1.5872 -0.8487	0.98563 in 32.6382 e(2)	0.0790 iq	1.5862 -0.8566	0.98563 in 32.5769 e(2)
	50	0.0827 iq	1.7021 -0.8587	0.98423 in 32.5769 e(2)	0.0827 iq	1.7016 -0.8596	0.98423 in 32.5553 e(2)
	100	0.0838 iq	1.7854 -0.8588	0.98380 in 32.5631 e(2)	0.0838 iq	1.7853 -0.8597	0.98380 in 32.5549 e(2)
	250	0.0841 iq	1.8187 -0.8598	0.98369 in 32.5548 e(2)	0.0841 iq	1.8187 -0.8598	0.98369 in 32.5548 e(2)

Вариант 3

m	$k\chi_0^{(1)}\ /\ m$	$k\chi_0^{(2)}\ /\ m$	$\eta^{(1)}\ /\ m$	m	$k\chi_0^{(1)}\ /\ m$	$k\chi_0^{(2)}\ /\ m$	$\eta^{(1)}\ /\ m$
21	0.1161 iq	2.5225 -1.1877	0.98371 in 32.5548 e(2)	25	0.1163 iq	2.5225 -1.1877	0.98368 in 32.5548 e(2)
22	0.1162 iq	2.5225 -1.1877	0.98370 in 32.5548 e(2)	250	0.1163 iq	2.5225 -1.1877	0.98367 in 32.5548 e(2)

В таблицах 1-2 после характеристик собственных частот указан тип поверхностных волн: $e(r), r = 1,2$ – волны Рэлея у торца составляющей цилиндра индексом (r), in – интерфейсные колебания, через iq отмечены те коэффициенты затухания, которые чисто мнимые. Данные для вариантов 3 приведены для тех волновых чисел, которые отмечены в таблицах. Для малых волновых чисел они могут отличаться от приведённых. Здесь $s = 4$.

Таблица 2

$\ell^{(1)}/\ell^{(2)}$	m	Вариант 1 $k\chi_0^{(1)}/m$	Вариант 1 $k\chi_0^{(2)}/m$	Вариант 1 $\eta^{(1)}/m$	Вариант 2 $k\chi_0^{(1)}/m$	Вариант 2 $k\chi_0^{(2)}/m$	Вариант 2 $\eta^{(1)}/m$
$5/1.5$	25	0.0211 iq	1.7161 -0.9563	0.99923 in 32.7139 e(2)	0.0613 iq	1.6799 -0.9563	0.99342 in 32.7139 e(2)
	26	0.0480 iq	1.7288 -0.9606	0.99600 in 32.6861 e(2)	0.0728 iq	1.6936 -0.9606	0.99070 in 32.6861 e(2)
	27	0.0639 iq	1.7408 -0.9658	0.99285 in 32.6515 e(2)	0.0780 iq	1.7071 -0.9658	0.98929 in 32.6515 e(2)
	28	0.0731 iq	1.7524 -0.8584	0.99061 in 32.5615 e(2)	0.0812 iq	1.7200 -0.9783	0.98838 in 32.5601 e(2)
	30	0.0823 iq	1.7744 -0.9756	0.98807 in 32.5856 e(2)	0.0851 iq	1.7442 -0.9756	0.98723 in 32.9856 e(2)
	50	0.0936 iq	1.9132 -0.9764	0.98448 in 32.5806 e(2)	0.0934 iq	1.8965 -0.9767	0.98455 in 32.5806 e(2)
	100	0.0959 iq	2.0216 -0.9774	0.98385 in 32.5770 e(2)	0.0955 iq	2.0175 -0.9774	0.98386 in 32.5770 e(2)
	250	0.0959 iq	2.0709 -0.9804	0.98370 in 32.5574 e(2)	0.0959 iq	2.0707 -0.9804	0.98370 in 32.5574 e(2)
$1.5/5$	25	- iq	- -0.9652	- 32.6540 e(2)	0.0601 iq	1.67997 -0.9652	0.99368 in 32.6540 e(2)
	26	0.0455 iq	1.7289 -0.9672	0.99639 in 32.6412 e(2)	0.0723 iq	1.6937 -0.9672	0.99083 in 32.6412 e(2)
	27	0.0632 iq	1.7408 -0.9691	0.99301 in 32.6291 e(2)	0.0777 iq	1.7071 -0.9691	0.98937 in 32.6291 e(2)
	28	0.0728 iq	1.7524 -0.9796	0.99069 in 32.5574 e(2)	0.0811 iq	1.7201 -0.9796	0.98843 in 32.5574 e(2)
	30	0.0822 iq	1.7744 -0.9778	0.98810 in 32.5706 e(2)	0.0850 iq	1.7442 -0.9778	0.98726 in 32.5706 e(2)
	50	0.0936 iq	1.9132 -0.9780	0.98448 in 32.5652 e(2)	0.0934 iq	1.8965 -0.9790	0.98455 in 32.5652 e(2)
	100	0.0955 iq	2.0216 -0.9807	0.98385 in 32.5549 e(2)	0.0955 iq	2.0175 -0.9807	0.98386 in 32.5549 e(2)
	250	0.0959 iq	2.0709 -0.9807	0.98370 in 32.5548 e(2)	0.0959 iq	2.0707 -0.9807	0.98370 in 32.5548 e(2)

Заключение: В статье показано, что у линии раздела материалов составной безмоментной конечной цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей могут существовать колебания, затухающие от линии раздела материалов вдоль её образующих. Показано, что у свободного торца цилиндрической оболочки могут появляться волны типа Рэлея. Частоты собственных интерфейсных и краевых колебаний составной цилиндрической оболочки, составленной из конечных ортотропных безмоментных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами, определяются совокупностью уравнений (2.14). Для круговой цилиндрической оболочки коэффициенты затухания χ определяются совокупностью уравнений (3.28), а для пластины – уравнений (3.29). Частоты собственных интерфейсных колебаний для составной пластины-полосы определяются из совокупности уравнений (3.17). Существование интерфейсных и краевых колебаний зависит от кривизны направляющей кривой, коэффициентов упругости, плотностей материалов и длины конечных составляющих оболочек. При больших m или при малой кривизне направляющей кривой все характеристики собственных интерфейсных и краевых колебаний безмоментной замкнутой цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам планарных интерфейсных и краевых колебаний пластины-полосы. Численный анализ показывает, что с увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки первые частоты интерфейсных и краевых колебаний появляются при более больших m с увеличением соответствующих частот, а процесс затухания зависит от свойств материалов и геометрических параметров.

Работа выполнена при поддержке гранта “БРФФИ–ГКН Арм. 2011” №Ф11АРМ-010 / 11РБ-007.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pietraszkiewicz W., Szymczak Cz. (Eds.) Shell Structures, Theory and Applications //Proceedings of the 8th International conference on shell structures (SSTA 2005).
2. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plate surface of an elastic solids // Proc. London Math. Soc. 1885. 17. Pp.4-11.
3. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.М.: Наука. 1981. 288с.
4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284с.
5. Piliposian G.T., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Lokalized bending waves in a transversely isotropic plate.// J. of Sound and Vibration 329 (2010) Pp.3596-3605.
6. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке//Волновые задачи механики. Нижний Новгород. 1992. С.118-124.
7. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Колебания, локализованные у свободного края полубесконечной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки //Акуст. Вiсник АН Украины. 1999. Т.2. № 4. С.42-48.
8. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Волны типа Рэлея в полубесконечной гофрированной цилиндрической оболочке // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 3. С.151-158.
9. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G. Vibrations of a corrugated orthotropic cylindrical shells with free edges // Int. Appl. Mechanics. 2006. 42 (12). PP. 1398-1413.
10. Гулгазарян Г.Р. Колебания безмоментной консольной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 1. С.84-99.
11. Зильбергейт А.С., Суслова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинках // Акуст. журнал. 1985. Т.29. № 2. С.186-191.
12. Гертман И.П., Лисицкий О.Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // Прикл. математика и механика. 1988. Т.52. № 6. С.1044-1048.
13. Stoneley R. The elastic waves at the interface of tho solids // Proc. Roy Soc. London A. 1924. V.106. Pp. 416-429.
14. Kaplunov J.D., Wilde M.V. free interfacial vibrations in cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Am. June 2002. V.111 (6). Pp. 2692-2704.
15. Kaplunov J.D. and Wilde M.V. Edge and interfacial vibrations in elastic shells of revolution // ZAMP. 2000. Vol. 51. Pp. 530-549.
16. Ермоленко В.М. Влияние параметров ортотропии на спектр в задачах колебаний оболочек // ПМТФ. 1980. № 1. С.163-170.
17. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Гос.изд.физ.мат.лит, 1961. 384с.
18. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383с.
19. Лионс Ж.Л., Мodженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371с.
20. Солонников В.А. Об общих краевых задач для систем, эллиптических в смысле А.

Дуглиса-Л. Ниренберга// Изв. АН СССР. Математика. 1964. Т.28. №3. С.665-706.
21. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Миклашевич И.А., Плетежов А.А., Хачанян А.А. Свободные интерфейсные колебания бесконечной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной направляющей// Вестник фонда фундаментальных исследований. 2012. № 1. С.59-80.
22. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегралыным уравнениям // Укр. мат. ж. 1953. Т.5. № 2. С.123-151.
23. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И. Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания // Сиб. мат. ж. 1973. Т.4. № 5. С. 978-986.
24. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: Физматгиз, 1966. 656с.
25. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 695с.
26. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин М.: Наука, 1967. 266с.
27. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С.171-174.

Сведения об авторах:

Гулгазарян Гурген Рубенович, профессор, доктор физ.-мат. наук
Армянский государственный педагогический университет имени Х. Абовяна.
Профессор кафедры мат. анализа и теории функций. Ул. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения.
Тел.: (+37410) 64-91-21, (+37491) 706700, **e-mail:** ghulgr@yahoo.com

Гулгазарян Лусине Гургеновна, доцент, кандидат физ.-мат. наук
Институт механики НАН Армении, старший научный сотрудник. Армянский государственный педагогический университет
имени Х. Абовяна. Доцент кафедры мат. анализа и теории функций.
Ул. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения.
Тел.: (+37410) 61-81-55, (+37491) 302554, **e-mail:** lusina@mail.ru

Миклашевич Игорь Александрович, доцент, доктор физ.-мат. наук
Беларусский национальный техический университет
220013 г. Минск, пр. Независимости, 65, Беларусь.
Заведущий лабораторией динамики систем и механики материалов
Тел.: (017) 247-24-30, 8(029)400-24-30, **e-mail:** miklashevich@rambler.ru

Поступила в редакцию 20.11.2012

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Меха ника

МЕСЧЯН СТЕПАН РУБЕНОВИЧ

17-го декабря 2012 г. ушёл из жизни известный учёный, доктор технических наук, профессор, один из основоположников экспериментальной реологии грунтов Степан Рубенович Месчян.

С.Р.Месчян родился 19 октября 1922 г. в г.Ахалцихе. В 1939 г. он окончил Тбилисскую 72-ю армянскую школу, в 1944 г.– строительный факультет Тбилисского института инженеров ж/д транспорта. В 1956 г. в Ленинградском политехническом институте защитил диссертацию и ему была присуждена степень кандидата технических наук, а в 1965 г. в Московском инженерно-строительном институте защитил докторскую диссертацию и ему была присуждена степень доктора технических наук. В 1968 г. ему присвоено звание профессора.

В 1944-1946 гг. С.Р.Месчян работал в Ереванской дистанции пути ЗКВ ж/д, а в 1946-1953 гг.– на строительстве Гюмушской ГЭС.

Большой опыт строительства грунтовых сооружений, глубокие знания в области механики грунтов, знакомство с реологией (ползучестью, релаксацией напряжений и длительной прочностью материалов) – наукой о течении вещества – по книгам М.Рейнера, Н.Х.Арутюняна и др. позволили С.Р.Месчяну рассмотреть глинистый грунт как реологическое тело. Его первая опубликованная работа (1954) – первая в бывшем СССР работа по ползучести грунтов – стала программной для его научной деятельности. В ней впервые была использована наследственная теория стареющих материалов Маслова-Арутюняна, получившая в дальнейшем широкое применение в механике и реологии грунтов.

С.Р.Месчяном выполнены обширные и весьма длительные исследования в области одномерной и сдвиговой ползучести глинистых грунтов. Им был разработан метод выделения ползучести скелета этих грунтов из общего процесса длительного деформирования, он раскрыл природу этих деформаций. Разработал методы и осуществил исследования закономерностей изменения мгновенных и ползучих деформаций водонасыщенных и неводонасыщенных глинистых грунтов при постоянных и переменных напряжениях, установил границы применимости к этим грунтам нелинейных теорий наследственной ползучести, упрочнения и старения с учётом изменяемости их состояния и многих важнейших факторов.

Эти работы позволили С.Р.Месчяну сформулировать обобщённый закон сдвиговой ползучести, связывающий между собой нелинейную деформацию сдвига, касательное напряжение, время, нормальное напряжение и параметры прочности. Решены задачи течения грунтового слоя по наклонной поверхности при статических и сейсмических воздействиях.

Осуществлена очень большая работа по прочности глинистых грунтов. Фундаментальные исследования С.Р.Месчяна (1959-1965гг.) позволили дать исчерпывающий ответ на многие спорные вопросы, по которым шла тогда большая дискуссия.

С.Р.Месчян совместно со своими учениками провёл фундаментальные исследования релаксаций напряжений в глинистых грунтах, термо-виброреологии, реологии набухающих и просадочных грунтов, созданию противофильтрационных элементов гидросооружений из грунтовых смесей. Им создан Государственный стандарт Армении АСТ 178-99 по определению прочности грунтов, свободный от многих недостатков межгосударственного стандарта ГОСТ 12248-96.

Результаты работ С.Р.Месчяна и его учеников опубликованы в более чем 170 работах, в том числе, в девяти монографиях. Его монографии «Ползучесть глинистых грунтов» (1967г.), «Экспериментальная реология глинистых грунтов» (Москва: Недра, 1985г.) и её второе издание на английском языке (Голландия: Балкема, 1985г.) давно получили международное признание.

С.Р.Месчяном выполнена большая научно-организационная работа. Им организованы крупные лаборатории по реологии грунтов в Институте механики НАН Армении и в Ереванском государственном университете. С.Р.Месчян плодотворно занимался подготовкой научных и инженерных кадров. Под его руководством защищены пять кандидатских диссертаций, он более сорока лет преподавал курс «Механика грунтов, основания и фундаменты» в ВУЗах Еревана. Его учебные пособия, написанные на армянском языке, являются настольными книгами как для студентов вузов, так и работников геотехнических лабораторий Армении.

Редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» глубоко скорбит по случаю его смерти.

Память замечательного гражданина и известного учёного навсегда сохранится в сердцах его друзей, коллег, учеников и всех знавших его.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Механика

ВЛАДИМИР САРКИСОВИЧ САРКИСЯН

3-го января 2013г. после продолжительной болезни скончался академик НАН РА, заслуженный деятель науки РА, доктор физико-математических наук, профессор Владимир Саркисович Саркисян.

Владимир Саркисович Саркисян родился 25-ого июня 1935 года в городе Джульфа Нахичевана, в семье железнодорожника, которая в 1938 году переехала в Ереван. В 1957 году он успешно окончил отделение механики физико-математического факультета Ереванского государственного университета и был назначен ассистентом кафедры механики. В 1959 году он поступил в аспирантуру ЕГУ и в 1962 году в Москве защитил кандидатскую, а в 1972 году в Казани – докторскую диссертацию. В 1961-1978гг. В.С. Саркисян работал старшим преподавателем, доцентом, профессором. С 1978г. В.С. Саркисян – заведующий кафедрой механики сплошной среды ЕГУ. В 1986 году был избран членом-корреспондентом НАН РА, а в 1996 году – академиком НАН РА.

Профессор В.С. Саркисян – известный специалист в области механики сплошной среды. Научные исследования В.С. Саркисяна относятся к ряду современных проблем механики анизотропных и неоднородных тел: прочности конструкций из композиционных материалов, оптимальному проектированию формы и материала конструкций (стержни, пластинки, оболочки), динамическим проблемам анизотропных неоднородных сред, контактным задачам упругих тел с упругими накладками, граничным задачам теории упругости с различными криволинейными анизотропиями. Для решения многих задач теории упругости анизотропных, неоднородных тел существенную роль имеют предложенные, развитые и обобщённые им методы физических и геометрических малых параметров, эффективный приближённый метод, построенный на основе интегро-дифференциальных уравнений и функционального анализа, новая модификация метода разделения переменных, полученная для решения нестационарных задач математической физики, и другие методы. Профессор В.С. Саркисян создал научную школу теории упругости неоднородных анизотропных тел. Под его непосредственным руководством защитили свыше 50 кандидатских и докторских диссертаций учёные из нашей страны и зарубежья.

Основные результаты В.С. Саркисяна в области механики неоднородных, анизотропных тел опубликованы в 7 монографиях, свыше 300 научных статьях и 12 учебных пособиях.

Профессор В.С. Саркисян – опытный организатор науки и высшего образования. Он долгие годы руководил кафедрой механики сплошной среды Ереванского государственного университета, читал лекции в университетах Братиславы, Праги, Будапешта, Варшавы, Берлина, Ростока и т.д.

В.С.Саркисян был одним из организаторов многих как Всесоюзных, так и Международных конференций по механике деформируемого твёрдого тела и прикладной математике, был председателем, сопредседателем, членом Организационных Комитетов этих конференций.

В 1981 году ему было присуждено звание заслуженного деятеля науки, в 1999 году был награждён медалью имени Ананиа Ширакаци, золотой медалью имени Яна Каменского Братиславского университета и медалью университета Мансури Египта. В 2005 г. награждён грамотой «Վաստակագիր» (Вастакагир) Президиума НАН Армении, в 2009 г. – золотой медалью премьер-министра РА, в 2005, 2010 гг. – золотой медалью ЕГУ. Около 30 лет В.С. Саркисян руководил Специализированным Советом по присуждению учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «механика деформируемого твёрдого тела». Он являлся редактором межвузовского журнала «Механика», членом редколлегии журналов «Научные труды ЕГУ», «Изв.НАН Армении. Механика».

В 1988г. профессор В.С.Саркисян стал основоположником и первым деканом факультета механики, 1990-1992 гг.– проректором ЕГУ по научным вопросам, 1993-1994 гг. – и.о. академика-секретаря отделения информатики и технических наук и членом Президиума НАН РА, а в 1994 году – заместителем председателя Проблемного Совета математики и механики НАН РА, в 1996–2007 гг. – декан факультета механики ЕГУ, с 2007г. – почётный зав.кафедрой механики ЕГУ.

Научная деятельность В.С.Саркисяна получила международное признание. Он являлся почётным членом товарищества механиков Академии Наук Словакии, членом Национальных Комитетов теоретической и прикладной механики России и Армении, членом Международного товарищества сотрудничества математики и механики и т.д.

Память замечательного товарища, гражданина и известного учёного навсегда сохранится в сердцах его друзей, коллег, учеников.

Редколлегия журнала «Известия НАН Армении. Механика» глубоко скорбит по случаю его смерти.

АЛЕКСАНДР ГЕОРГИЕВИЧ БАГДОЕВ

2-го марта 2013г. ушёл из жизни известный учёный, член-корреспондент НАН Армении, доктор физико-математических наук, профессор Багдоев Александр Георгиевич.

Багдоев Александр Георгиевич родился 9 июля 1933 г. в г.Тбилиси в семье служащих. После переезда в Ереван в 1950 г. с золотой медалью окончил школу им. В.Чкалова. В том же году поступил в МГУ на механико-математический факультет, где за отличную учёбу был удостоен Сталинской стипендии. Сразу после окончания МГУ поступил в аспирантуру на кафедре «Волновой и газовой динамики» и там же в 1959г. под руководством профессора А.Я.Сагомоняна защитил кандидатскую диссертацию. Затем был принят на работу в Институт математики и механики АН Армянкой ССР – ныне Институт механики НАН Армении, где проработал до конца своих дней. В 1972 году в МГУ Александр Георгиевич защитил докторскую диссертацию, которая была посвящена вопросам определения особенностей фронтов линейных и нелинейных волн. В 1993г. был удостоен звания профессора, а в 2000г. был избран членом-корреспондентом НАН Армении.

Сфера научных интересов А.Г.Багдоева достаточно широка и касается самых разных вопросов механики деформируемого твёрдого тела. Он является автором трёх монографий и более чем 350 статей.

Большое внимание уделялось изучению нелинейных квазимонохроматических волн модуляций в различных механических и оптических средах. Из полученных нелинейных эволюционных уравнений, учитывающих эффекты диссипации, были выведены нелинейные уравнения Шредингера, описывающие поведение амплитуды первой гармоники с комплексными коэффициентами, для которых аналитически были решены задачи об узких пучках. При изучении нелинейных волн модуляций в магнитоупругих пластинах им был предложен и развит пространственный подход к определению частот линейных колебаний. Были исследованы модуляционная устойчивость и устойчивость солитонных решений эволюционных уравнений. Был решён ряд линейных нестационарных задач газодинамики и динамической теории упругости, в том числе краевых, а также нелинейная задача вблизи каустики.

Одним из основных достижений А.Г.Багдоева в развитии механики можно считать обобщение метода Пуанкаре–Лайтхилла–Го на двумерные волновые задачи дифракции и каустики.

В последние годы А.Г.Багдоев еще более расширил круг своих научных интересов, стараясь применить накопленный опыт теоретических исследований к детерминированным и стохастическим процессам в экономике, физике, социологии, биологии, сейсмологии, и, тем самым, сблизить разные области естественных и гуманитарных наук.

Результаты исследований Александра Георгиевича в области практической философии и этики были опубликованы в популярной и научной литературе.

А.Г.Багдоев отличался и достаточно активной научно-организационной и педагогической деятельностью. Особо следует отметить своеобразную научную школу, созданную им в городе Горисе, которая стала базой для организации международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», руководителем которой поистине являлся Александр Георгиевич.

А.Г.Багдоев являлся руководителем 14 кандидатских и научным консультантом 3 докторских диссертаций.

Своей работой в Институте механики НАН Армении А.Г. Багдоев заслужил любовь и уважение коллектива, всегда выделялся доброжелательностью, заботливым вниманием к молодым, готовностью быть полезным в нужный момент.

Редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» глубоко скорбит по поводу его смерти.

Память замечательного товарища, гражданина и известного учёного навсегда сохранится в сердцах его друзей, коллег, учеников.