

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՏԵԿՏՐԱԿԱՆԱԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ԻՆՏԵՐԴԻՍԿԻՆԱՐԿԱՆ ԻՋՏԵՄԻՆԻ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2012



НАГУШ ХАЧАТУРОВИЧ АРУТЮНЯН
К 100-летию со дня рождения

Исполнилось 100 лет со дня рождения одного из основателей армянской научной школы механики, выдающегося учёного, умелого организатора науки и высшего образования, видного государственного деятеля академика НАН Армении Нагуша Хачатуровича Арутюняна. С его именем связаны формирование и дальнейший прогресс ряда научных направлений в механике деформируемого твёрдого тела, воспитание нескольких поколений ученых-механиков как в республике, так и вне её. Н.Х.Арутюнян по праву считается одним из основателей современной теории ползучести.

Н.Х.Арутюнян родился в 1912г. в Ереване. Окончив в 1936 году Московскую военно-инженерную академию им В.В.Куйбышева и получив специальность инженера-гидростроителя, Н.Х.Арутюнян возвращается на родину и поступает на работу в управление Севан-Зангустрой в качестве ведущего инженера, одновременно преподаёт в Ереванском политехническом институте. Через год он поступает в аспирантуру Ленинградского политехнического института. Общение с крупнейшими учеными-механиками Б.Г.Галеркиным, Е.Л.Николаи, А.И.Лурье сыграло решающую роль в его научной судьбе и сформировало его научное кредо.

Защитив в 1941г. кандидатскую диссертацию, он отправляется на фронт, где проявляются и его неординарные боевые качества, отмеченные орденами и медалями.

Вернувшись в Армению в 1945г., Н.Х.Арутюнян возобновляет свою активную научную и научно-педагогическую деятельность. В 1949 г. в Институте механики АН СССР он защищает докторскую диссертацию и ему присуждается учёная степень доктора технических наук, а в 1950-ом присваивается звание профессора. В том же

году он избирается действительным членом Академии наук Армении и членом Президиума.

В 1952-55 гг. он работает академиком-секретарём Отделения технических наук Академии наук. В 1955-ом Н.Х.Арутюнян назначается заведующим новосозданной лабораторией по ползучести и прочности в Институте математики и механики. В 1959 г. он избирается вице-президентом АН.

Параллельно с научной и научно-организационной работой он занимается плодотворной педагогической деятельностью. В 1945-51 гг. он преподаёт в ЕрПИ, а начиная с 1951 г. – в Ереванском государственном университете, где занимает должность профессора кафедры теоретической механики, с 1958 года возглавляет созданную по собственной инициативе кафедру теории упругости и пластичности (ныне кафедра механики сплошной среды) и руководит ею до 1978 года.

В 1961 году Н.Х.Арутюнян назначается ректором ЕрГУ. Благодаря его усилиям, в университете основываются кафедры биофизики, ядерной физики, экономической кибернетики и создается Объединённый вычислительный центр АН и ЕрГУ.

В 1962 году Н.Х.Арутюняну присуждается почётное звание заслуженного деятеля науки Армянской ССР. Долгие годы он был членом Президиума Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике, главным редактором журнала “Известия АН Арм.ССР, Механика” и членом редколлегий журналов “Известия АН СССР, МТТ”.

Научно-исследовательская деятельность Н.Х.Арутюняна развивалась, в основном, в двух направлениях: математической теории упругости и теории ползучести. Первые его работы по теории упругости посвящены кручению и изгибу призматических стержней с полигональным поперечным сечением, где он предложил эффективный метод решения этих задач. В дальнейшем этот метод получил широкое распространение и со временем стал классическим, вошёл в монографии и учебники. Полученные в этом направлении научные результаты подытожены в фундаментальной книге: Н.Х.Арутюнян, Б.Л.Абрамян «Кручение упругих тел», изданной в Москве в 1963 г.

Н.Х.Арутюнян выполнил обширную научно-исследовательскую работу в области контактных и смешанных краевых задач теории упругости и для определённых классов этих задач вместе со своими учениками получил точные решения. Он развил также научное направление контактных задач о передаче нагрузки упругим массивным телам посредством тонкостенных элементов в виде стрингеров.

Н.Х.Арутюнян наибольший научный вклад внёс в одну из важнейших областей механики деформируемого твёрдого тела – теорию ползучести. Обработав и проанализировав результаты многочисленных экспериментов, Н.Х.Арутюнян и Г.Н.Маслов пришли к заключению, что в вопросах прочности и долговечности инженерных сооружений, изготовленных, например, из бетона, помимо обычных физико-механических свойств материалов необходимо также учитывать и такие свойства, обусловленные явлением ползучести, как старение и наследственность. Эта основополагающая идея легла в основу разработанной Н.Х.Арутюняном новой математической теории ползучести стареющих тел, которая, в дальнейшем, вошла в науку как теория ползучести Маслова-Арутюняна. С учётом этой теории внесены изменения в действующие нормативы расчёта прочности и долговечности многочисленных строительных сооружений и их элементов. Первостепенные результаты Н.Х.Арутюняна по теории ползучести обобщены в опубликованной в 1952 г. в Москве фундаментальной монографии: Н.Х.Арутюнян «Некоторые вопросы теории ползучести», которая была одной из первых в этой области. Эта книга в течение десятилетий была и остается настольной книгой для многих поколений научных работников и инженеров-исследователей. Она переведена на разные языки.

В постановке построенных линейной и нелинейной теорий ползучести Н.Х.Арутюняном исследовались многочисленные задачи, которые имеют теоретическое и практическое значение, в нелинейных задачах им сформулирован принцип суперпозиции обобщённых перемещений.

В последние два десятилетия своей научной деятельности Н.Х.Арутюнян существенно обобщил и развил свою первоначальную теорию ползучести, разработав теорию ползучести неоднородно-наследственно стареющих тел и создав новое научное направление – математическую теорию наращиваемых деформируемых тел. Полученные научные результаты обобщены в многочисленных монографиях и научных трудах.

В 1975г. Н.Х.Арутюнян переезжает в Москву и поступает на работу в Институт проблем механики АН СССР в качестве руководителя отдела механики вязкоупругих тел. В годы проживания в Москве ничуть не ослабли его научные и человеческие связи с Арменией. Он одновременно руководил отделом теории вязкоупругости Института механики АН Армении.

Н.Х.Арутюнян, будучи умелым организатором науки и высшего образования, имеет большой вклад в деле подготовки молодых учёных и специалистов. Его блестящие лекции в ЕрПИ и ЕрГУ, насыщенные новейшими достижениями науки в разных областях механики сплошной среды, проложили широкую дорогу для будущих специалистов и учёных. Он руководил работой многочисленных молодых научных работников и аспирантов, создал свою оригинальную научную школу. В годы работы в Москве также имел большое число учеников и последователей из разных республик Советского Союза. По его инициативе и рекомендации многочисленные выпускники ЕрПИ и ЕрГУ продолжили аспирантское обучение в известных научных центрах Советского Союза. Н.Х.Арутюнян был широко известен и имел большой авторитет среди учёных Советского Союза и зарубежных стран.

Н.Х.Арутюнян скончался 18 января 1993 г. в Москве, до конца своей жизни оставаясь преданным науке. Он оставил большое научное наследие – семь фундаментальных монографий, около двухсот оригинальных научных работ, научную школу, многочисленных учеников и последователей в Армении, в странах СНГ и за рубежом. Его научные идеи и результаты несомненно послужат основой для новых замыслов и творческих достижений молодых учёных, широких кругов исследователей.

Труды Н.Х.Арутюняна раз и навсегда вошли в сокровищницу мировой науки по механике. Образ выдающегося и заслуженного учёного, интеллигентного и честного гражданина всегда будет воодушевлять многих представителей научной общественности на новые научные свершения.

**К ВОПРОСУ ПЕРЕДАЧИ НАГРУЗОК ОТ ДЕФОРМИРУЕМЫХ
ВКЛЮЧЕНИЙ К БЕСКОНЕЧНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ
С РАЗРЕЗАМИ***

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: ползучесть, разрез, трещина, включение, смешанная задача, коэффициент интенсивности.

Key words: creep, slit, crack, inclusion, mixed boundary value problem, intensity coefficient.

Վ.Ն.Հակոբյան, Հ.Ա.Ամիրջանյան

**Ճաքերով առաձգամածուցիկ անվերջ սալին դեֆորմացվող ներդրակներից բեռների
փոխանցման մասին**

Դիտարկված է բեռների փոխանցման խնդիրը դեֆորմացվող բարակ ներդրակներից ճաքեր պարունակող ժառանգականորեն ծերացող նյութից պատրաստված առաձգամածուցիկ անվերջ սալին: Համարելով, որ ներդրակները գտնվում են միառանցք լարվածային վիճակում, ստացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները ներդրակների տակ գործող շոշափող լարումների թռիչքների և ճաքերի բացվածքների ֆունկցիաների ածանցյալների նկատմամբ, երկչափ սինգուլյար ինտեգրողիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի տեսքով: Օգտագործելով սեղանների բանաձևը ըստ ժամանակի ինտեգրալների հաշվման համար և համակարգի լուծումների վարքը ներդրակների ու ճաքերի ծայրակետերում, կառուցված է որոշիչ համակարգի լուծումը դիսկրետ եզակիությունների թվային վերլուծական եղանակով: Մի մասնավոր դեպքում կատարվել է խնդրի թվային վերլուծությունը և բացահայտվել են կոնտակտային լարումների, ճաքի բացվածքի և քայքայող լարումների ինտենսիվության գործակցի փոփոխման օրինաչափությունները՝ կախված ժամանակից:

Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A.

Load-Transfer from Deformable Inclusions to Infinite Visco-Elastic Plate with Slits

Many papers [1–5] are devoted to problems of load-transfer from deformed thin-walled elements to massive bodies. There are also the papers on studying the interaction of thin-walled elements and cracks, which are located in massive bodies [6–8].

The problem of load-transfer from deformed thin inclusions to infinite visco-elastic plate with slits, which are made of ageing materials, is considered. Taking into account that the inclusions are in uniaxial stress state, the governing system of equations for stated problem as a system of two-dimensional singular integral-differential equations with respect to jump-function of shear stresses, acting on edges of inclusions, and derivative of function for opening of slit.

Using trapezium method for calculation of time integrals and taking into account the behavior at end-points of inclusions and slits, the solution of governing system is built by the numerical-analytical method of discrete singularities. In special case the numerical analysis of stated problem is fulfilled and the behavior of contact stresses, cracks' openings and intensity coefficients of destructive stresses depending on time characteristics are revealed.

Передаче нагрузок от деформируемых тонкостенных элементов к массивным телам посвящено огромное количество работ [1–5]. Немало также работ, изучающих взаимовлияние тонкостенных элементов и трещин, одновременно находящихся в массивных телах [6–8].

Рассмотрена задача передачи нагрузки от деформируемых тонких включений к бесконечной вязкоупругой пластине с разрезами, изготовленной из наследственно-стареющего материала. Считая, что включения находятся в одноосном напряжённом состоянии, выведена определяющая система уравнений поставленной задачи в виде системы двумерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

*Статья доложена на Международной конференции научных трудов, посвящённой 100-летию академика Нагуша Арутюняна. 08–12 октября 2012, Цахкадзор, Армения

относительно скачков тангенциальных напряжений, действующих на берегах включений и производной от функции раскрытия разрезав. Используя метод трапеций для вычисления временных интегралов и учитывая поведение решений системы определяющих уравнений в концевых точках включений и разрезав, построено решение определяющей системы уравнений численно-аналитическим методом дискретных особенностей. В одном частном случае проведен численный анализ поставленной задачи и выявлены закономерности изменения контактных напряжений, раскрытия трещин и коэффициентов разрушающих напряжений в зависимости от временных характеристик.

1. Постановка задач и вывод определяющих уравнений

Пусть бесконечная вязкоупругая пластина, отнесенная к декартовой системе координат Oxy , на оси абсцисс $y = 0$ по линии L , состоящей из совокупности конечного числа непересекающихся интервалов конечной длины $[a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, N$), усилена конечными тонкими деформируемыми включениями, а по линии $\bar{L}$, также состоящей из конечного числа непересекающихся интервалов конечной длины $[c_k, d_k]$ ($k = 1, 2, \dots, M$), ослаблена разрезами и деформируется под воздействием осевых сосредоточенных нагрузок P_{a_k} и P_{b_k} , приложенных к концевым точкам включений в момент времени τ_0 .

Будем считать, что материалы включений и бесконечной пластины обладают свойством ползучести, которое характеризуется неоднородностью старения [1]. При этом меру ползучести включения обозначим через $C_k(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots, N$), постоянный по длине возраст $-\tau_k$, модуль упруго-мгновенной деформации $E_k = \text{const}$. Соответствующие характеристики для бесконечной пластины обозначим через $C_0(t, \tau)$, τ_0 и $E_0(t) = E_0 = \text{const}$ соответственно. Будем считать также, что для материала пластины коэффициенты поперечного сжатия для упруго-мгновенной деформации $v_1(t)$ и деформации ползучести $v_2(t, \tau)$ одинаковы и постоянны, т.е. $v_2(t, \tau) = v_1(t) = v = \text{const}$. Кроме того, накладки, как обычно, будем трактовать как одномерные континуумы, которые под воздействием приложенных к ним сосредоточенных нагрузок и тангенциальных контактных напряжений находятся в одноосном напряженном состоянии. Однако, как и в [3], изгибным эффектом накладок здесь не будем пренебрегать и будем считать, что вследствие малости толщины накладок их изменение по направлению оси абсцисс незначительно и ими можно пренебречь.

Ставится задача: определить тангенциальные и нормальные контактные напряжения, действующие на берегах включений, раскрытия разрезав и коэффициент интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разрезав.

Вследствие сделанных предположений в зонах контакта включений с бесконечной пластиной и на берегах разрезав выполняются следующие условия:

$$\frac{dv(x, \pm 0, t)}{dx} = 0, \quad \frac{du(x, \pm 0, t)}{dx} = \varepsilon_k(x, t) \quad (1.1)$$

$$(a_k < x < b_k, \quad k = 1, 2, \dots, N)$$

$$\sigma_y(x, \pm 0, t) = 0, \quad \tau_{xy}(x, \pm 0, t) = 0 \quad (1.2)$$

$$(c_k < x < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, M)$$

где $v(x, y, t)$ и $u(x, y, t)$ – соответственно вертикальные и горизонтальные смещения точек бесконечной пластины, $\sigma_y(x, y, t)$ и $\tau_{xy}(x, y, t)$ – соответственно нормальные и касательные напряжения, действующие в пластине, а $\varepsilon_k(x, t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) – осевые деформации включений.

Для решения поставленной задачи, мысленно разделим бесконечную пластину на верхнюю и нижнюю полубесконечные пластины, снабдив индексами "+" и "-" компоненты тензора напряжений и смещений соответствующих полубесконечных пластин и определим нормальные и горизонтальные компоненты смещений точек этих пластин $v^\pm(x, y, t)$ и $u^\pm(x, y, t)$ через нормальные и касательные компоненты напряжений $\sigma_y^{(\pm)}(x, \pm 0, t)$ и $\tau_y^{(\pm)}(x, \pm 0, t)$. Для этого, при помощи преобразования Фурье, сначала определим компоненты смещений соответствующих упруго-мгновенных задач, а затем, используя принцип Вольтерра [9], запишем компоненты смещений точек полубесконечных пластин с учётом ползучести

$$\frac{dv^{(\pm)}(x, y, t)}{dx} = (1 - L_0) \left\{ \mp \frac{1}{\pi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_y^{(\pm)}(s, y, t)}{s - x} ds - \frac{(1 - \nu)}{E_0} \tau_{xy}^{(\pm)}(x, y, t) \right\} \quad (1.3)$$

$$\frac{du^{(\pm)}(x, y, t)}{dx} = (1 - L_0) \left\{ \mp \frac{1}{\pi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{xy}^{(\pm)}(s, y, t)}{s - x} ds + \frac{(1 - \nu)}{E_0} \sigma_y^{(\pm)}(x, y, t) \right\} \quad (1.4)$$

Запишем также осевые деформации точек включений, обладающих свойством ползучести [9]

$$\varepsilon_k(x, t) = \frac{1}{E_k A_k} (1 - L_k) \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, t) ds \right] \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.5)$$

Здесь E_k и A_k – соответственно модуль упругости и площадь поперечного сечения включения, находящегося на интервале $[a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, N$), h_k – эффективная ширина включений, $\tau(x, t)$ – скачок тангенциальных напряжений, действующих на берегах включений, а L_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) – временные операторы, которые действуют на произвольную функцию $\varphi(t)$ следующим образом [9]:

$$(1 - L_k)\varphi(t) = \varphi(t) - \int_{\tau_0}^t K_k(t + \rho_k, \tau + \rho_k) \varphi(\tau) d\tau; \quad (\rho_k = \tau_k - \tau_0; k = 1 - N);$$

$$K_k(t, \tau) = E_k \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau}; \quad C_k(t, \tau) = \varphi_k(\tau) [1 - \exp(-\gamma(t - \tau))].$$

Теперь, используя соотношения (1.3) и (1.4), определим производные от смещений граничных точек полубесконечных пластин и напряжения, действующие в этих точках через разность производных от смещений граничных точек полубесконечных пластин и скачки напряжений, действующих в этих точках

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t) &= \frac{E_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V'_*(s, t)}{s-x} ds + \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} \sigma(x, t), \\
\tau_y^{(\pm)}(x, 0, t) &= \frac{E_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U'_*(s, t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} \tau(x, t), \\
\frac{du^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} &= \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V'_*(s, t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2}{4\pi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} U'_*(x, t), \\
\frac{dv^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} &= -\frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U'_*(s, t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2}{4\pi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} V'_*(x, t),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
\sigma(x, t) &= \sigma_y^{(+)}(x, +0, t) - \sigma_y^{(-)}(x, -0, t), \quad \tau(x, t) = \tau_{xy}^{(+)}(x, +0, t) - \tau_{xy}^{(-)}(x, -0, t), \\
U(x, t) &= u^+(x, +0, t) - u^-(x, -0, t), \quad V(x, t) = v^+(x, +0, t) - v^-(x, -0, t), \\
\{U_*; V_*; u_*^{(\pm)}; v_*^{(\pm)}\} &= \{U; V; u^{(\pm)}; v^{(\pm)}\} + \int_{\tau_0}^t R_0(t, \tau) \{U; V; u^{(\pm)}; v^{(\pm)}\} d\tau \\
\mathfrak{G}_1 &= 1 - \nu; \quad \mathfrak{G}_2 = (1 + \nu)(3 - \nu), \text{ а } R_0(t, \tau) - \text{резольвента ядра } K_0(t, \tau).
\end{aligned}$$

Применяя к первым двум уравнениям (1.6) оператор $(1 - L_0)$ для производных истинных смещений верхнего и нижнего берегов разреза вязкоупругой пластины, окончательно получим выражения:

$$\begin{aligned}
\frac{du^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} &= \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V'_*(s, t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2}{4\pi E_0} (1 - L_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} U'_*(x, t), \\
\frac{dv^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} &= -\frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U'_*(s, t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2}{4\pi E_0} (1 - L_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} V'_*(x, t)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

С другой стороны, так как рассматриваемая задача симметрична относительно оси Ox , то $\sigma(x, t) = U(x, t) \equiv 0$ ($-\infty < x < \infty$). Следовательно, последнее соотношение (1.6) и второе соотношение (1.7) принимают следующие простые виды:

$$\frac{dv^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} = \pm \frac{1}{2} V'_*(x, t), \quad \tau_{xy}^{(\pm)}(x, 0, t) = \pm \frac{1}{2} \tau(x, t) \tag{1.8}$$

Далее, используя соотношения (1.5) – (1.8) и учитывая, что

$$u^{(\pm)}(x, 0, t) = u(x, \pm 0, t), \quad \sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t) = \sigma_y(x, \pm 0, t),$$

удовлетворим условиям (1.1) и (1.2). В итоге, применяя к первому условию (1.2) оператор $(1 - L_0)$, придём к следующей системе определяющих уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_L \frac{V'(s,t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2}{4\pi E_0} (1-L_0) \int_L \frac{\tau(s,t)}{s-x} ds = \frac{(1-L_k)}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s,t) ds \right] \\ \quad (a_k < x < b_k, k=1,2,\dots,N) \\ \frac{E_0}{4\pi} \int_L \frac{V'(s,t)}{s-x} ds + \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} (1-L_0) \int_L \frac{\tau(s,t)}{s-x} ds = 0 \\ \quad (c_k < x < d_k, k=1,2,\dots,M) \end{array} \right. \quad (1.9)$$

При этом

$$\begin{aligned} V'(x,t) &= 0, \quad (a_k < x < b_k, k=1,2,\dots,N) \\ \tau(x,t) &= 0, \quad (c_k < x < d_k, k=1,2,\dots,M) \end{aligned}$$

Систему (1.9) нужно рассматривать при условиях равновесия включений и непрерывности смещений в концевых точках разрезов:

$$h_k \int_{a_k}^{b_k} \tau(s,t) ds = P_{a_k} + P_{b_k} = P_k; \quad (k=1,2,\dots,N) \quad (1.10)$$

$$\int_{c_k}^{d_k} V'(s,t) ds = 0; \quad (k=1,2,\dots,M) \quad (1.11)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы двумерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.9) при условиях (1.10) и (1.11).

Отметим, что в случае, когда разрезы отсутствуют, из (1.9) получаем определяющее уравнение задачи для бесконечной вязкоупругой пластины, усиленной конечным числом различных вязкоупругих включений, находящихся на одной прямой

$$\begin{aligned} (1-L_0) \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tau(s,t)}{s-x} ds &= -\lambda_0^{(k)} (1-L_k) \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s,t) ds \right] \\ \left(\lambda_0^{(k)} &= \frac{4E_0}{A_k E_k (1+\nu)(3-\nu)} \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

которое нужно рассматривать совместно с условием равновесия включений (1.10).

В некоторых случаях удобнее получить систему определяющих уравнений рассматриваемой задачи относительно нормальных и касательных контактных напряжений, действующих под включениями. Рассмотрим один из таких случаев.

Пусть бесконечная вязкоупругая пластина на оси абсцисс $y=0$ на интервале $(0, \infty)$ содержит полубесконечный разрез, берега которого по линии L , состоящей из совокупности конечного числа непересекающихся интервалов $[a_k, b_k] (k=1,2,\dots,N)$, спаяны конечными тонкими включениями. Будем считать, что пластина деформируется под воздействием осевых сосредоточенных нагрузок P_{a_k} и P_{b_k} , приложенных к концевым точкам включений в момент времени τ_0 .

Из первого и третьего уравнений (1.6), обозначив $\sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t) = -q(x, t)$ ($x \in L$), находим

$$\frac{du_*^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} = -\frac{\vartheta_1}{E_0} q(x, t) - \frac{1}{\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \quad (x \in L) \quad (1.13)$$

Теперь выразим производные от вертикальных смещений через контактные напряжения, действующие на берегах включений. Для этого третье уравнение из (1.6) на интервале $(0, \infty)$ запишем в следующей форме:

$$\frac{E_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{V'_*(s, t)}{s-x} ds + \frac{\vartheta_1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds = \begin{cases} -q(x, t) & (x \in L) \\ 0 & (x \in \bar{L}) \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{dv_*^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} = \pm \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\vartheta_1}{E_0} \tau(x, t) + \frac{4}{\pi E_0 \sqrt{x}} \int_L \frac{\sqrt{s} q(s, t)}{s-x} ds \right\} \quad (x \in L) \quad (1.14)$$

Следовательно, применяя к (1.13) и (1.14) оператор $(1 - L_0)$, для смещений точек берегов полубесконечного разреза бесконечной пластины, обладающей свойством ползучести, можем записать:

$$\frac{dv(x, \pm 0, t)}{dx} = \pm \frac{1}{2E_0} (1 - L_0) \left\{ \frac{4}{\pi \sqrt{x}} \int_L \frac{\sqrt{s} q(s, t)}{s-x} ds - \vartheta_1 \tau(x, t) \right\} \quad (1.15)$$

$$\frac{du(x, \pm 0, t)}{dx} = -\frac{1}{E_0} (1 - L_0) \left\{ \vartheta_1 q(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \right\} \quad (x \in L) \quad (1.16)$$

Далее, используя формулы (1.15) и (1.16), удовлетворим условиям контакта включений с бесконечной пластиной (1.1). В итоге придём к следующей ключевой системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{(1-L_0)}{E_0} \left\{ \vartheta_1 q(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \right\} = \frac{1}{E_k A_k} (1-L_k) \left[h \int_{a_k}^x \tau(s, t) ds - P_{a_k} \right] \\ \frac{(1-L_0)}{E_0} \left\{ \frac{4}{\pi \sqrt{x}} \int_L \frac{\sqrt{s} q(s, t)}{s-x} ds - \vartheta_1 \tau(x, t) \right\} = 0 \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (1.17)$$

Полученную систему нужно рассматривать при условиях (1.10) и (1.11). Из условий (1.11), учитывая, что на $\bar{L}$ касательные напряжения отсутствуют, при помощи (1.14) найдём

$$\int_L L n \left| \frac{(\sqrt{a_k} - \sqrt{s})(\sqrt{b_{k-1}} + \sqrt{s})}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{s})(\sqrt{b_{k-1}} - \sqrt{s})} \right| q(s, t) ds = 0 \quad (b_0 = 0; k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.18)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы ключевых уравнений (1.17) относительно нормальных и касательных контактных напряжений, действующих под включениями при условиях (1.9) и (1.18).

После решения определяющих систем интегро-дифференциальных уравнений поставленных задач, несложно найти нормальные контактные напряжения и коэффициент интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разрезов.

2. Решение определяющей системы уравнений

Сначала рассмотрим общий случай поставленной задачи, решение которой свелось к решению систем определяющих уравнений (1.9) при условиях (1.10) и (1.11). Для этого заметим, что изменение напряжённо-деформированного состояния бесконечной вязкоупругой пластины в течение времени является плавным и монотонным процессом. Это обстоятельство позволяет для каждого фиксированного момента времени использовать для вычисления временного оператора формулу трапеций и свести решение системы определяющих уравнений к итерационному процессу решения аналогичных одномерных систем интегро-дифференциальных уравнений, где время будет фигурировать как параметр. Действительно, при $t = \tau_0$ из (1.9) получаем определяющие уравнения упруго-мгновенной задачи, где временной оператор просто отсутствует.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vartheta_1}{4\pi} \int_L \frac{V'(s, \tau_0)}{s-x} ds - \frac{\vartheta_2}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, \tau_0)}{s-x} ds = \frac{1}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, \tau_0) ds \right] \\ \quad (a_k < x < b_k, \quad k = 1, 2, \dots, N) \\ \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{V'(s, \tau_0)}{s-x} ds + \frac{\vartheta_1}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, \tau_0)}{s-x} ds = 0 \\ \quad (c_k < x < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, M) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Далее, пусть время t возрастает с шагом h , т.е. $t_n = \tau_0 + nh$, ($n = 1, 2, \dots$). Тогда, вычисляя временные интегралы, входящие в (1.9) по формулам трапеций, для определения искомых функций в любой момент времени t_n получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vartheta_1}{4\pi} \int_L \frac{V'(s, t_n)}{s-x} ds - \frac{\vartheta_2 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, t_n)}{s-x} ds = \\ = \frac{K_k^*(t_n, t_n)}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, t_n) ds \right] - G_1(x, t_n) \\ \quad (a_k < x < b_k, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad n = 1, 2, \dots) \\ \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{V'(s, t_n)}{s-x} ds + \frac{\vartheta_1 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, t_n)}{s-x} ds = G_2(x, t_n) \\ \quad (c_k < x < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, M; \quad n = 1, 2, \dots) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Здесь

$$G_1(x, t_n) = \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ \frac{K_k(t_n, t_m)}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, t_m) ds \right] + \frac{\vartheta_2 K_0(t_n, t_m)}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, t_m)}{s-x} ds \right\},$$

$$G_2(x, t_n) = \frac{h \vartheta_1}{8\pi E_0} \sum_{m=0}^{n-1} K_0(t_n, t_m) \int_L \frac{\tau(s, t_m)}{s-x} ds,$$

$$K_k^*(t, \tau) = 1 - \frac{hK_k(t, \tau)}{2} \quad (k = 0, 1, \dots, N).$$

Очевидно, что системы (2.1) и (2.2) можно объединить, приняв в (2.2) $n = 0$
 $K_k^*(\tau_0, \tau_0) = 1 \quad (k = 0, 1, \dots, N); \quad G_1(x, \tau_0) = G_2(x, \tau_0) = 0.$

Таким образом, для получения решения определяющей системы (1.9) в любой момент времени $t_n = \tau_0 + n h \quad (n = 0, 1, \dots)$ нужно поочерёдно решать системы уравнений (2.2), начиная с упруго-мгновенной задачи ($n = 0$) и продолжая до нужного момента времени, на каждом шагу, используя результаты предыдущих шагов. Следует отметить, что системы уравнений (2.2) на каждом шагу отличаются от упруго-мгновенной задачи только постоянными коэффициентами и правыми частями. Эти системы уравнений можно решать различными методами. На наш взгляд, более эффективным является метод дискретных особенностей [10], который здесь будет использован. С этой целью запишем систему (2.2) в развёрнутом виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_{c_k}^{b_k} \frac{V'(s, t_n)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi E_0} \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tau(s, t_n)}{s-x} ds = \\ & = \frac{K_k^*(t_n, t_n)}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, t_n) ds \right] - G_1(x, t_n) \\ & \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N; \quad n = 0, 1, 2, \dots) \\ & \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_{c_k}^{b_k} \frac{V'(s, t_n)}{s-x} ds + \frac{\mathfrak{G}_1 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi E_0} \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tau(s, t_n)}{s-x} ds = G_2(x, t_n) \\ & \quad (c_k < x < d_k, k = 1, 2, \dots, M; \quad n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

и при помощи замены переменных $\{s, x\} = v_k \{\xi, \eta\} + p_k$ при $(a_k < s, x < b_k)$ и
 $\{s, x\} = \lambda_k \{\xi, \eta\} + \mu_k$ при $(c_k < s, x < d_k)$, где

$$v_k = (b_k - a_k) / 2; \quad p_k = (b_k + a_k) / 2,$$

$$\lambda_k = (d_k - c_k) / 2; \quad \mu_k = (d_k + c_k) / 2$$

перепишем (2.2) на интервале $(-1, 1)$. После чего, вводя безразмерные функции

$$\varphi_k(\eta, t) = V'(\lambda_k \eta + \mu_k, t), \quad \psi_k(\eta, t) = \tau(v_k \eta + p_k, t) / E_0$$

и обозначения

$$R_{pk}^{(1,1)}(t, \xi) = v_k / (v_k \xi - v_p \eta + p_k - p_p),$$

$$R_{pk}^{(1,2)}(t, \xi) = \lambda_k / (\lambda_k \xi - v_p \eta + \mu_k - p_p),$$

$$R_{pk}^{(2,1)}(t, \xi) = v_k / (v_k \xi - \lambda_p \eta + p_k - \mu_p),$$

$$R_{pk}^{(2,2)}(t, \xi) = \lambda_k / (\lambda_k \xi - \lambda_p \eta + \mu_k - \mu_p),$$

$$Q_p^*(\eta) = Q(\lambda_p \eta + \mu_p) / E_0, \quad l_0^{(p)} = P_{a_p} / A_p E_p, \quad l_1^{(p)} = h_p E_0 v_p / P_{a_p}$$

придём к следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\vartheta_2 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi} \left[\int_{-1}^1 \frac{\psi_p(\xi, t_n)}{\xi - \eta} d\xi + \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 R_{pk}^{(1,1)}(\eta, \xi) \psi_k(\xi, t_n) d\xi \right] - \\ & - \frac{\vartheta_1}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_{-1}^1 R_{pk}^{(1,2)}(\eta, \xi) \varphi_k(\xi, t_n) d\xi = l_0^{(p)} K_p^*(t_n, t_n) \left[l_1^{(p)} \int_{-1}^1 \psi_p(\xi, t) d\xi - 1 \right] \\ & + G_1^{(p)}(\eta, t_n) \quad (-1 < x < 1; p = 1 - N; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.4) \\ & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_p(\xi, t_n)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{\vartheta_1 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 R_{pk}^{(2,1)}(\eta, \xi) \psi_k(\xi, t_n) d\xi + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_{-1}^1 R_{pk}^{(2,2)}(\eta, \xi) \varphi_k(\xi, t_n) d\xi = G_2^{(p)}(\eta, t_n) \\ & (-1 < x < 1; p = 1 - M; n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right.$$

где

$$\begin{aligned} G_1^{(p)}(\eta, t_n) &= \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ -l_0^{(p)} K_p(t_n, t_m) \left[l_1^{(p)} \int_{-1}^1 \psi_p(\xi, t_m) d\xi - 1 \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\vartheta_2 K_0(t_n, t_m)}{4\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 R_{pk}^{(1,1)}(\eta, \xi) \psi_k(\xi, t_m) d\xi \right\}, \\ G_2^{(p)}(\eta, t_n) &= \frac{h \vartheta_1}{8\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^N K_0(t_n, t_m) \int_{-1}^1 R_{pk}^{(2,1)}(\eta, \xi) \psi_k(\xi, t_m) d\xi, \end{aligned}$$

а знак звёздочки над знаками сумм означает отсутствие там члена $k = p$. В этом случае, условия (1.10) и (1.11) примут вид:

$$\int_{-1}^1 \psi_k(\xi, t_n) d\xi = 1 / l_1^{(k)} \quad (k = 1 - N; n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_k(\xi, t_n) d\xi = 0 \quad (k = 1 - M; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

Известно [3,7], что функции $V'(x, t)$ и $\tau(x, t)$ в концевых точках интервалов $[a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, N$) и $[c_k, d_k]$ ($k = 1, 2, \dots, M$), которые не являются общими для L и $\bar{L}$, имеют обычную корневую особенность, а в тех концевых точках, которые общие для L и $\bar{L}$ – особенность типа $(x - c)^{-\gamma}$ ($\gamma = 1/2 \pm i\beta$), где

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{3 - v}{1 + v} \right).$$

Следовательно, функции $\varphi_p(\eta, t)$ ($p = 1, 2, \dots, M$) и $\psi_p(\eta, t)$ ($p = 1, 2, \dots, N$) имеют аналогичное поведение в концевых точках интервала $[-1, 1]$ и их можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varphi_p(\eta, t_n) &= \frac{\Phi_p^*(\eta, t_n)}{(1+\eta)^{1/2-i\beta_*}(1-\eta)^{1/2+i\beta_*}}, \\ \psi_p(\eta, t_n) &= \frac{\Psi_p^*(\eta, t_n)}{(1+\eta)^{1/2-i\beta_*}(1-\eta)^{1/2+i\beta_*}}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Здесь $\beta_* = 0$, если соответствующая точка не является общей для L и $\bar{L}$ и $\beta_* = \beta$, если соответствующая точка является общей для L и $\bar{L}$, а функции $\Phi_p^*(\eta, t_n)$ и $\Psi_p^*(\eta, t_n)$ – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $(-1, 1)$. Далее, подставляя значения функций $\psi_p(t)$ и $\varphi_p(t)$ из (2.7) в (2.4)–(2.5), используя квадратурные формулы [10]

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x-z} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \approx \sum_{i=1}^n w_i \frac{f(\xi_i)}{\xi_i - z} [1 - q_i(z)] \quad (z \neq \pm 1, \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > -1)$$

где ξ_i – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_i) = 0$,

$$w_i = -2^{\alpha+\beta+1} \left(\frac{2}{\xi_i - 1} \right)^{n+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times$$

$$\times \frac{F\left(n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-\xi_i}\right)}{(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)}$$

и приравнявая обе части полученных уравнений в корнях функций второго рода, придём к системе из алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_p^*(\xi_i, t_n)$ и $\psi_k^*(\xi_i, t_n)$ ($p = \overline{1, M}; k = \overline{1, N}; i = \overline{1, l}; n = 0, 1, 2, \dots$).

Таким образом, в общем случае решение поставленной задачи свелось к итерационному процессу решений алгебраических уравнений относительно значений функций $\varphi_p^*(\xi_i, t_n)$ и $\psi_k^*(\xi_i, t_n)$.

Теперь рассмотрим систему (1.17) при условиях (1.10) и (1.18). Умножим второе уравнение (1.17) на $i/2$, где i – мнимая единица, и просуммируем с первым уравнением (1.17). В итоге, введя комплексные функции

$$\chi_m(x, t) = q(x, t) - i\tau(x, t)/2 \quad (a_m < x < b_m, m = 1, 2, \dots, N),$$

придём к уравнению:

$$\begin{aligned}& \frac{(1-L_0)}{E_0} \left\{ \Im_1 \chi_k(x, t) + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{\chi_m(s, t)}{s-x} ds + \frac{i}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{\chi_m(s, t) + \bar{\chi}_m(s, t)}{\sqrt{x}(\sqrt{s} + \sqrt{x})} ds \right\} = \\ & = \frac{(1-L_k)}{E_k A_k} \left[ih_k \int_{a_k}^x [\chi_k(s, t) - \bar{\chi}_k(s, t)] ds - P_k \right] \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N)\end{aligned}\quad (2.8)$$

Далее, при помощи замены переменных $s = v_m \xi + p_m$; $x = v_k \eta + p_k$, где $p_k = (b_k + a_k)/2$, $v_k = (b_k - a_k)/2$, запишем (2.8) на интервале $(-1, 1)$ и введя безразмерные функции

$$\varphi_k(\eta, t) = \frac{A_k E_k}{P_0 E_0} \chi_k(v_k \eta + p_k, t), \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

и обозначения

$$R_{m,k}(\xi, \eta) = \frac{v_m}{2\sqrt{v_k \eta + p_k} [\sqrt{v_k \eta + p_k} + \sqrt{v_m \xi + p_m}]},$$

$$Q_{m,k}(\xi, \eta) = \begin{cases} R_{m,k}(\xi, \eta) + \frac{v_m}{v_m \xi + p_m - v_k \eta - p_k} & (m \neq k) \\ R_{m,k}(\xi, \eta) & (m = k) \end{cases},$$

$$p_{a_k}^{(0)} = p_{a_k} / P_0, \quad P_0 = \sum_{k=1}^n P_k \neq 0, \quad \lambda_k = v_k h_k E_0 / A_k E_k,$$

окончательно придём к следующему двумерному интегро-дифференциальному уравнению:

$$(1 - L_0) \left\{ \vartheta_1 \varphi_k(\eta, t) + \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\xi, t)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 Q_{m,k}(\xi, \eta) \varphi_m(\xi, t) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 R_{m,k}(\xi, \eta) \bar{\varphi}_m(\xi, t) d\xi \right\} = -(1 - L_k) \left[2\lambda_k \int_{-1}^x \text{Im} \varphi_k(\xi, t) d\xi + P_{a_k}^{(0)} \right] \quad (2.9)$$

$$(a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N)$$

При этом, условия (1.10) и (1.18) примут вид

$$\text{Im} \int_{-1}^1 \varphi(\xi, t) d\xi = -\frac{P_k}{2\lambda_k P_0} \quad (k = 1, \dots, N) \quad (2.10)$$

$$\sum_{m=1}^n \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{(\sqrt{a_k} - \sqrt{v_m \xi + p_m})(\sqrt{b_{k-1}} + \sqrt{v_m \xi + p_m})}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{v_m \xi + p_m})(\sqrt{b_{k-1}} - \sqrt{v_m \xi + p_m})} \right| \text{Re} \varphi_m(\xi, t) d\xi = 0 \quad (2.11)$$

Далее, как и выше, для любого момента времени $t_n = \tau_0 + n h$ ($n = 0, 1, \dots$) будем иметь цепочку следующих систем определяющих уравнений:

$$K_0^*(t_n, t_n) \left\{ \vartheta_1 \varphi_k(\eta, t_n) + \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\xi, t_n)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 Q_{m,k}(\xi, \eta) \varphi_m(\xi, t_n) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 R_{m,k}(\xi, \eta) \bar{\varphi}_m(\xi, t_n) d\xi \right\} = -K_k^*(t_n, t_n) \left[2\lambda_k \int_{-1}^x \text{Im} \varphi_k(\xi, t_n) d\xi + P_{a_k}^{(0)} \right] \quad (2.12)$$

$$+ G_k(\eta, t_n) \quad (a_k < x < b_k; k = 1, 2, \dots, N; n = 0, 1, \dots)$$

где

$$G_k(\eta, t_n) = \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ K_k(t_n, t_m) \left[2\lambda_k \int_{-1}^x \operatorname{Im} \varphi_k(\xi, t_m) d\xi + P_{a_k}^{(0)} \right] - \right. \\ \left. -K_0(t_n, t_m) \left[\vartheta_1 \varphi_k(\eta, t_m) + \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\xi, t_m)}{\xi - \eta} d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2i}{\pi} \sum_{q=1}^N \int_{-1}^1 Q_{q,k}(\xi, \eta) \varphi_q(\xi, t_m) d\xi + \frac{2i}{\pi} \sum_{q=1}^N \int_{-1}^1 R_{q,k}(\xi, \eta) \bar{\varphi}_q(\xi, t_m) d\xi \right] \right\}$$

При этом, условия (2.10) и (2.11) записываются в виде

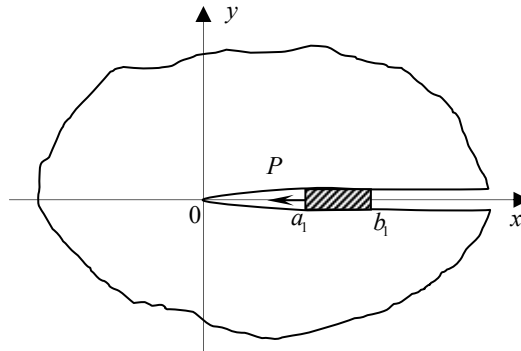
$$\operatorname{Im} \int_{-1}^1 \varphi(\xi, t) d\xi = -\frac{P_k}{2\lambda_k P_0} \quad (k=1, \dots, N) \quad (2.13) \\ (k=1, \dots, N, \quad n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{m=1}^n \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{(\sqrt{a_k} - \sqrt{v_m \xi + p_m})(\sqrt{b_{k-1}} + \sqrt{v_m \xi + p_m})}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{v_m \xi + p_m})(\sqrt{b_{k-1}} - \sqrt{v_m \xi + p_m})} \right| \operatorname{Re} \varphi_m(\xi, t_n) d\xi = 0 \quad (2.14)$$

Легко установить, что искомые функции $\varphi_k(\eta, t_n)$ ($k=1, \dots, N$; $n=0, 1, 2, \dots$) в конечных точках интервала $[-1, 1]$ имеют особенность типа $(\eta \pm 1)^{-1/2 \mp i\beta}$. Учитывая этот факт, в рассматриваемом случае эти функции представим в виде (2.5) и подставляя их в уравнения (2.12)–(2.14), по обычной процедуре [10], опять придём к решению системы алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_k^*(\xi_i, t_n)$ ($k=1, \bar{N}$; $i=1, \bar{l}$; $n=0, 1, 2, \dots$).

3. Численный пример

В качестве примера рассмотрим обобщённое плоско-напряжённое состояние вязкоупругой бесконечной пластины, когда она на интервале $(0, \infty)$ содержит полубесконечный разрез, берега которого на интервале $[a_1, b_1]$ спаяны при помощи конечного тонкого вязкоупругого включения, и деформируется под воздействием осевой сосредоточенной нагрузки P , приложенной к включению в концевой точке $x = a_1$ в момент времени τ_0 (фиг.1).



Фиг.1

В этом частном случае в (2.12)–(2.14) нужно взять $N = 1$.

Добавим также формулы для определения раскрытия конечного разреза, находящегося на интервале $[0, a_1]$ и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке разреза $x = 0$.

Для определения раскрытия конечного разреза интегрируем первое из соотношений (1.14) от нуля до x . Учитывая при этом, что в этом интервале $\tau(x, t) = 0$ и переходя к безразмерным функциям, получим

$$V_1(x, t) = \frac{V(x, t)}{2v_1} = -\frac{2\lambda_0(1-L_0)}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{v_1}\xi + p_1)}{(\sqrt{x} + \sqrt{v_1}\xi + p_1)} \right| \operatorname{Re} \varphi_1(\xi, t) d\xi \quad (3.1)$$

Для определения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке разреза $x = 0$ используем третье из соотношений (1.6). Подставляя в это уравнение значение функции $V'(x, t)$ из (1.14), после некоторых выкладок найдём

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t) = & \frac{2\operatorname{arctg}(\sqrt{a_1/(-x)})}{\pi^2\sqrt{-x}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sqrt{s}q(s, t)}{s-x} ds + \frac{(1-\nu)}{4\pi} \int_a^b \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \\ & - \frac{1}{\pi^2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\ln \left| (\sqrt{a_1} - \sqrt{s}) / (\sqrt{a_1} + \sqrt{s}) \right| q(s, t)}{s-x} ds \quad (x < 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что при выводе формул (3.1) и (3.2) использовано значение интеграла

$$\int_0^{a_1} \frac{ds}{\sqrt{s}(s-x)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left| (\sqrt{a_1} - \sqrt{x}) / (\sqrt{a_1} + \sqrt{x}) \right| & (x > 0) \\ \frac{2}{\sqrt{-x}} \operatorname{arctg}(\sqrt{a_1/(-x)}) & (x < 0) \end{cases}$$

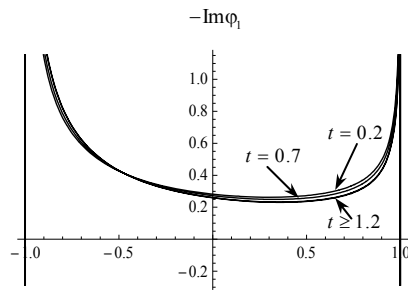
Далее, переходя к безразмерным величинам, для безразмерного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений

$$K_I^*(0, t) = \frac{A_1 E_1}{P_0 E_0} K_I(0, t) = \frac{A_1 E_1}{P_0 E_0} \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow -0} \sqrt{-x/a} \sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t),$$

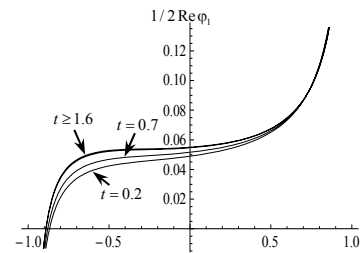
получим выражение

$$K_I^*(0, t) = \sqrt{\frac{v_1}{2\pi a}} \int_{-1}^1 \frac{[\varphi_1(\xi, t) + \bar{\varphi}_1(\xi, t)] d\xi}{\sqrt{\xi + p_1/v_1}}$$

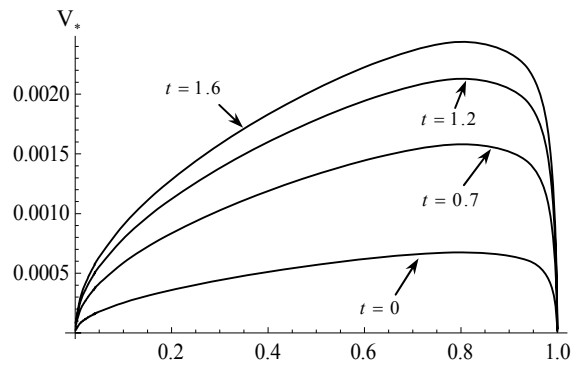
Проведён численный анализ задачи и выяснены закономерности изменения приведённых тангенциальных $-\operatorname{Im}[\varphi_1(\eta, t)]$ и нормальных $\operatorname{Re}[\varphi_1(\eta, t)]$ контактных напряжений, действующих на берегах включения, и приведённого раскрытия разреза $V_*(t) = V(a(t+1)/2)/a$ в зависимости от времени, в случае, когда $\rho_0 = 0$, $\rho_1 = 2$, $\sigma = 0,3$, $\lambda_1 = 0,1$, $\tau_0 = 0,2$. Полученные результаты приведены в виде графиков (фиг.2–4).



Фиг.2



Фиг.3



Фиг.4

Из представленных графиков видно, что распределение как тангенциальных, так и нормальных приведённых контактных напряжений мало зависит от времени. Однако, раскрытие разреза, находящегося на интервале $[0, a_1]$, в течение времени существенно увеличивается.

Выяснены также закономерности изменения приведённого коэффициента интенсивности разрушающих напряжений $K_I(0)$ в концевой точке разреза в зависимости от времени в случае, когда $\rho_0 = 0$, $\sigma = 0,3$, $\lambda_0 = 0,1$, $\tau_0 = 0,2$. Результаты вычислений приведены в виде таблиц 1–2.

Таблица 1. $\rho_1 = 2$

t	0.2	0.3	0.7	1	1.6
K_I	0.07967	0.08171	0.08469	0.08545	0.08612

Таблица 2. $\rho_1 = 0,5$

t	0.2	0.3	0.7	1	1.6
K_I	0.08135	0.08325	0.08568	0.0862	0.08657

Они показывают, что в течение времени коэффициент интенсивности разрушающих напряжений увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a shear. *Quart.J.Mech.and Appl.Math.*, 1955. V.8. №2. P.164 –178.
2. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. *Ingr. Arch.*, 1932. Bd.3. №2. P.123–129.
3. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. К контактной задаче о двух полу-бесконечных пластинах, соединённых полубесконечной упругой накладкой. // В сб.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С.44–51.
4. Григорян Э.Х., Торосян Р.Д. Задача для упругой бесконечной пластины, усиленной крестообразным бесконечным стрингером. // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №1–2. С.3–12.
5. Hakobyan V. Load-transfer from semi-infinite strip to wedge-shaped plate taking into account the non-homogeneous ageing factor. // *Proceedings of XXXVII Summer School “Advanced Problems in Mechanics”*. Saint-Petersburg, Russia. 2009. P. 269–276.
6. Агаян К.Л. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками. // Изв.АН АрмССР. Механика. 1976. Т.29. №4. С.3–15.
7. Акопян В.Н., Амирджанян А.А. О передаче нагрузки от упругих включений к бесконечной упругой пластине с разрезами. // Тезисы докладов межд. конф. “Современные проблемы механики”, посв. 100-летию Л.А.Галина. Москва: 2012. С.9.
8. Мхитарян С.М. О контакте между бесконечным стрингером и упругой полубесконечной пластиной с вертикальной трещиной. // В сборник трудов III межд. конф.: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посв. 100-летию акад. Н.Х.Арутюняна. Ереван: 2012. Т.1. С.74–78.
9. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных сред. М.: Наука, 1983. 336с.
10. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №3. С.12–19.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН Армении, тел.:(37410) 52-48-90,

e-mail: yhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении,

e-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 12.10.2012

**МЕЖФАЗНАЯ ТРЕЩИНА, ЧАСТИЧНО ПОДКРЕПЛЁННАЯ ЖЁСТКОЙ
НАКЛАДКОЙ, В ПОЛЕ ДЕЙСТВИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ***

ВАСИЛЬЕВА Ю.О.

Ключевые слова: трещина, жёсткая накладка, гипергеометрическая функция, сосредоточенная сила, кусочно-однородная упругая плоскость.

Key words: crack, rigid overlay, hypergeometric function, concentrated force, piecewise-homogeneous elastic plane

Վասիլևա Եւ. Օ.

Կոշտ վերադիրով ամրացված միջֆազային ճեղքը կենտրոնացված ուժերի ազդեցության դաշտում

Ուսումնասիրվում է միջֆազային ճեղքի շրջակայքում տրված ուժերից առաջացած հարթ լարվածային վիճակը: Ճեղքի ափերից մեկը մասնակիորեն ուժեղացված է ուղղաձիգ վերադիրով: Գտնված են կոմպլեքս պոտենցիալները, լարումների կոնցենտրացիայի գործակիցները ճեղքի զազաթում, բերված են նրանց գրաֆիկները:

Vasilyeva Yu.O.

An interface crack partially reinforced by a rigid overlay in the concentrated forces' action field

Plane stress state near the tip of an interface crack induced by specified concentrated forces is considered. One of the crack faces is partially reinforced by a rigid straight line overlay. The complex potentials, the stress intensity factors at the crack-tip are found, corresponding plots are presented.

Изучается плоское напряжённое состояние вблизи вершины межфазной трещины, порождённое заданными сосредоточенными силами. Один из берегов трещины частично подкреплён жёсткой прямолинейной накладкой. Находятся комплексные потенциалы, коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины, приводятся их графики.

Пусть в кусочно-однородном упругом изотропном теле, составленном из разных по упругим свойствам верхней и нижней полуплоскостей, на линии раздела сред $y = 0$ расположена полубесконечная открытая трещина $[0, +\infty)$, верхний берег которой на участке $[0, l]$ подкреплён абсолютно жёсткой прямолинейной накладкой, присоединённой к телу без натяга, а остальная часть этого берега и весь нижний берег трещины свободны от напряжений:

$$u^+(x) + i v^+(x) = i \varepsilon x, \quad x \in (0, l);$$

$$\tau_{xy}^+(x) + i \sigma_y^+(x) = 0, \quad x \in (l, +\infty);$$

$$\tau_{xy}^-(x) + i \sigma_y^-(x) = 0, \quad x \in (0, +\infty),$$

где $u + i v$ – вектор смещений, $\tau_{xy} + i \sigma_y$ – вектор напряжений, ε – неизвестный угол поворота накладки, а верхними индексами плюс и минус помечены значения функций на верхнем и нижнем берегах трещины. Вдоль луча $(-\infty, 0]$ полуплоскости жестко соединены друг с другом, а к точкам $z_1 = id$ и $z_2 = -id$ ($d > 0$) составной

* Статья доложена на Международной конференции научных трудов, посвящённой 100-летию академика Нагуша Арутюняна. 08–12 октября 2012, Цахкадзор, Армения

плоскости приложены сосредоточенные силы F_c и $-F_c$ соответственно, где $F_c = X_c + iY_c$, и пары с моментами M_c . На бесконечности напряжения и вращение исчезают. На накладку никакие внешние силы не действуют.

Требуется найти комплексные потенциалы, описывающие плоское напряжённое состояние тела, и исследовать поведение напряжений вблизи вершины трещины.

Воспользуемся формулами Колосова – Мусхелишвили для кусочно-однородной плоскости [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re}\Phi_*(z), \quad z = x + iy, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_*(z) + \Omega_*(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_*(z)}, \\ 2\mu_j(u + iv)'_x &= \kappa_j\Phi_*(z) - \Omega_*(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_*(z)}, \\ \kappa_j &= (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j), \quad j = 1, 2, \\ \Phi_*(z) &= \begin{cases} \Phi(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \alpha_1\Phi(z) + \alpha_2\Omega(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad \Omega_*(z) = \begin{cases} \Omega(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \alpha_3\Omega(z) + \alpha_4\Phi(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \\ \alpha_1 &= (1 + \mu_*\kappa_1)/(1 + \kappa_2), \quad \alpha_2 = (1 - \mu_*)/(1 + \kappa_2), \\ \alpha_3 &= 1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = 1 - \alpha_1, \quad \mu_* = \mu_2/\mu_1,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ – кусочно-голоморфные функции (комплексные потенциалы) с линией разрыва $[0, +\infty)$, а μ_1 , ν_1 и μ_2 , ν_2 – модуль сдвига и коэффициент Пуассона верхней ($j = 1$) и нижней ($j = 2$) полуплоскостей соответственно. В точках $z = 0$ и $z = l \pm i0$ функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ могут иметь интегрируемые особенности, на ∞ они исчезают, а в точках $z_1 = id$, $z_2 = -id$ имеют полюсы порядка не выше второго [2]:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{F_c}{2\pi(1 + \kappa_1)(z - id)} + O(1), \\ \Omega(z) &= \frac{\alpha'F_c}{2\pi\alpha_3(z - id)} + \frac{i(2d\bar{F}_c + (1 + \kappa_2)M_c)}{2\pi\alpha_3(1 + \kappa_2)(z - id)^2} + O(1), \quad z \rightarrow id \\ \Phi(z) &= -\frac{\alpha''F_c}{2\pi\alpha_1(z + id)} + \frac{i\alpha_2(2d\bar{F}_c - (1 + \kappa_1)M_c)}{2\pi\alpha_1(1 + \kappa_1)(z + id)^2} + O(1), \\ \Omega(z) &= \frac{\kappa_1F_c}{2\pi(1 + \kappa_1)(z + id)} - \frac{i(2d\bar{F}_c - (1 + \kappa_1)M_c)}{2\pi(1 + \kappa_1)(z + id)^2} + O(1), \quad z \rightarrow -id \\ \alpha' &= \frac{\alpha_4}{1 + \kappa_1} + \frac{\kappa_2}{1 + \kappa_2}, \quad \alpha'' = \frac{\alpha_2\kappa_1}{1 + \kappa_1} + \frac{1}{1 + \kappa_2}\end{aligned}$$

На луче $(0, +\infty)$ функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ удовлетворяют краевым условиям

$$\begin{aligned}\kappa_1\Phi^+(x) - \Omega^-(x) &= 2i\mu_1\varepsilon, \quad x \in (0, l); \\ \Phi^+(x) + \Omega^-(x) &= 0, \quad x \in (l, +\infty); \\ \alpha_1\Phi^-(x) + \alpha_2\Omega^-(x) + \alpha_3\Omega^+(x) + \alpha_4\Phi^+(x) &= 0, \quad x \in (0, +\infty),\end{aligned}\tag{2}$$

откуда находим [3]:

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= H_1(z/l), \quad \Omega(z) = H_2(z/l), \\
H_j(\zeta) &= \left[\frac{C_{22}}{\zeta - id_0} + \frac{C_{12}}{(\zeta - id_0)^2} + \frac{E_{22}}{\zeta + id_0} + \frac{E_{12}}{(\zeta + id_0)^2} + \varepsilon \mu_1 J_2(\zeta) \right] \chi_{j1}(\zeta) + \\
&+ \left[\frac{C_{21}}{\zeta - id_0} + \frac{C_{11}}{(\zeta - id_0)^2} + \frac{E_{21}}{\zeta + id_0} + \frac{E_{11}}{(\zeta + id_0)^2} + \varepsilon \mu_1 J_1(\zeta) \right] \chi_{j2}(\zeta), \quad d_0 = d/l, \\
C_{1j} &= (-1)^{j+1} \frac{i \chi_{1j} (2d\bar{F}_c + (1 + \kappa_2) M_c)}{2\pi l^2 \alpha_3 (1 + \kappa_2) \det \mathbf{X}^+(id_0)}, \\
C_{2j} &= (-1)^{j+1} \frac{F_c}{2\pi l \cdot \det \mathbf{X}^+(id_0)} \left(\frac{\alpha' \chi_{1j}(id_0)}{\alpha_3} - \frac{\chi_{2j}(id_0)}{1 + \kappa_1} \right), \\
E_{1j} &= (-1)^j \frac{i (2d\bar{F}_c (\alpha_1 \chi_{1j}(-id_0) + \alpha_2 \chi_{2j}(-id_0)) - \alpha_2 (1 + \kappa_1) \chi_{2j}(-id_0) M_c)}{2\pi l^2 \alpha_1 (1 + \kappa_1) \cdot \det \mathbf{X}^+(-id_0)}, \\
E_{2j} &= (-1)^{j+1} \frac{F_c}{2\pi l \cdot \det \mathbf{X}^+(-id_0)} \left(\frac{\kappa_1 \chi_{1j}(-id_0)}{1 + \kappa_1} + \frac{\alpha'' \chi_{2j}(-id_0)}{\alpha_1} \right), \\
J_j(\zeta) &= \frac{(-1)^j}{\kappa_1 \pi} \int_0^1 \frac{\chi_{2j}^+(t) + \alpha_4 \alpha_3^{-1} \chi_{1j}^+(t)}{(t - \zeta) \det \mathbf{X}^+(t)} dt, \quad j = 1, 2, \\
\varepsilon \mu_1 &= - \left(\int_0^1 t \operatorname{Re} \left[\left(\frac{C_{22}}{t - id_0} + \frac{C_{12}}{(t - id_0)^2} + \frac{E_{22}}{t + id_0} + \frac{E_{12}}{(t + id_0)^2} \right) \chi_{11}^+(t) + \right. \right. \\
&+ \left. \left(\frac{C_{21}}{t - id_0} + \frac{C_{11}}{(t - id_0)^2} + \frac{E_{21}}{t + id_0} + \frac{E_{11}}{(t + id_0)^2} \right) \chi_{12}^+(t) \right] dt \times \\
&\times \left. \left(\int_0^1 t \operatorname{Re} [\chi_{11}^+(t) J_2(t) + \chi_{12}^+(t) J_1(t)] dt \right)^{-1} \right),
\end{aligned}$$

где $\chi_{kj}(\zeta)$ – элементы канонической матрицы $\mathbf{X}(\zeta)$ однородной векторной краевой задачи Римана (2) при $l = 1$. Каноническая матрица задачи, т.е. матрица, столбцы которой представляют собой линейно независимые решения соответствующей однородной задачи, строится явно с помощью гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b; c; \zeta)$. Параметры гипергеометрической функции подбираются так, чтобы решение находилось в классе требуемых функций [3].

Асимптотика напряжений вблизи левого конца накладки, являющегося одновременно вершиной трещины, характеризуется двумя степенными функциями $z^{-\gamma_0 + i\delta_2}$, $z^{\gamma_0 - 1 + i\delta_1}$, где $1/2 \leq \gamma_0 < 1$. Исследования показали, что при $\mu_* > 0.124$ показатель $\gamma_0 > 1/2$ для любых параметров κ_1, κ_2 , причём в этом случае $\delta_1 = \delta_2$. Интенсивность напряжений в вершине трещины определяется четырьмя действительными параметрами – коэффициентами интенсивности напряжений (КИН):

$$\begin{aligned}
K_I - iK_{II} &= \sqrt{2\pi}(\xi_1 + m)e^{-i\pi(\gamma_0 - i\delta_2)} \cdot D_2, \\
K_{III} - iK_{IV} &= \sqrt{2\pi}(\xi_2 + m)e^{-i\pi(1 - \gamma_0 - i\delta_1)} \cdot D_1, \\
D_j &= c_j [C_{22}id_0^{-1} - C_{12}d_0^{-2} - E_{22}id_0^{-1} - E_{12}d_0^{-2} + \varepsilon\mu_1 J_2(0) + \\
&+ (1 - \gamma_j + i\delta_j)(C_{21}id_0^{-1} - C_{11}d_0^{-2} - E_{21}id_0^{-1} - E_{11}d_0^{-2} + \varepsilon\mu_1 J_1(0))] \cdot l^{\gamma_j - i\delta_j}, \quad j = 1, 2 \\
\gamma_0 &= \gamma_2, \quad \gamma_j = (2\pi)^{-1} \arg \xi_j, \quad \delta_j = (2\pi)^{-1} \ln |\xi_j| \\
\xi_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4m\kappa_1^{-1}} \right), \quad \alpha = \frac{\alpha_2\kappa_1 + \alpha_4}{\alpha_3\kappa_1}, \quad m = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \\
(0 &< \arg \xi_1 \leq \pi, \quad \pi \leq \arg \xi_2 < 2\pi)
\end{aligned}$$

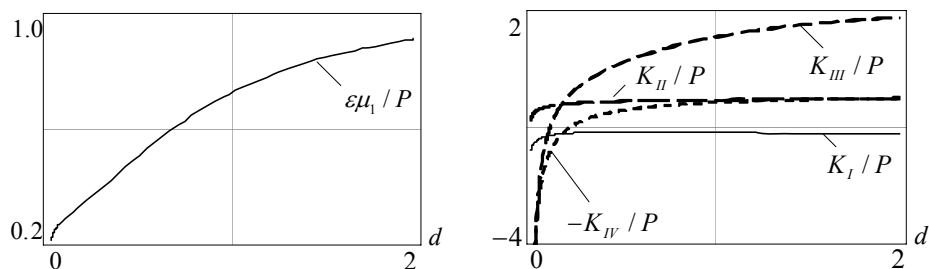
где несобственные интегралы $J_1(0), J_2(0)$ сходятся.

Решение задачи (2) и асимптотика напряжений вблизи вершины трещины построены в предположении, что параметры ξ_1, ξ_2 – различные, комплексно-сопряжённые числа. В случае, когда $\xi_1 = \xi_2$, встречающемся крайне редко при физически приемлемых сочетаниях упругих параметров, у напряжений вблизи точки $z = 0$ имеют место особенности, определяемые функциями видов $z^{-\frac{1}{2} + i\delta_1}$ и $z^{-\frac{1}{2} + i\delta_1} \ln z$. При этом интенсивность напряжений в вершине трещины снова характеризуется четырьмя КИН.

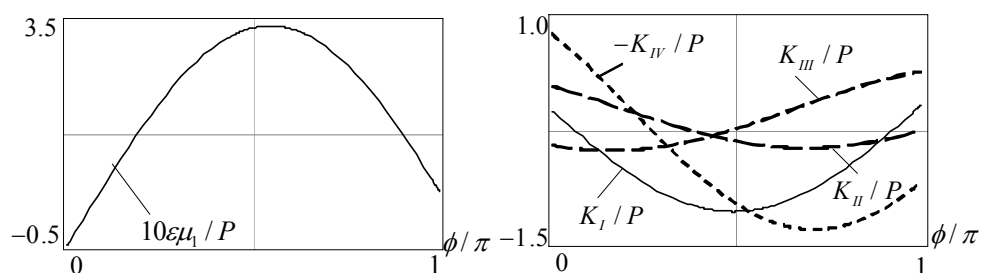
Описанная асимптотика напряжений в окрестности вершины трещины, когда в зависимости от упругих параметров полуплоскостей напряжения могут иметь там как степенно-осциллирующую особенность $z^{-\gamma + i\delta}$ ($\frac{1}{2} \leq \gamma < 1$), так и особенность типа $z^{-\frac{1}{2} + i\delta} \ln z$, была получена ранее в работе [4], в которой решена задача о напряжённом состоянии составной упругой плоскости, ослабленной трещиной, на одном берегу которой заданы компоненты напряжения, а на другом – компоненты перемещения.

В полуокрестности точки $z = l - i0$ напряжения ограничены. Вблизи точки $z = l + i0$ напряжения ведут себя так же, как вблизи вершины штампа, сцеплённого жёстко со средой, т.е. имеют особенность порядка $-\frac{1}{2} + i\beta_1$, $\beta_1 = (2\pi)^{-1} \ln \kappa_1$. При этом интенсивность напряжений вблизи правого конца накладки определяется двумя действительными КИН.

Для значений упругих параметров $\kappa_1 = 1.8$, $\kappa_2 = 2.2$, $\mu_* = 2$, когда показатель степени $\gamma_0 = 0.79373$, графики зависимости угла поворота накладки ε и коэффициентов $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV}$ от расстояния d между точками приложения сосредоточенных сил и вершиной трещины и от направления ϕ сил представлены на фиг. 1-2. В первом случае силы $F_c = iP$ и $-F_c = -iP$ ($P > 0$) постоянны и направлены вдоль мнимой оси, а во втором случае $\pm F_c = \pm P(\cos \phi + i \sin \phi)$ составляют угол ϕ с действительной осью, $d = 0.2l$. В обоих случаях принято $l = 1$.



Фиг.1



Фиг.2

Зависимость напряжённого состояния вблизи вершины трещины, порождённого одной сосредоточенной силой, расположенной на линии раздела сред на продолжении трещины, изучена в работе [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 10-01-00103, 12-01-31387.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296с.
2. Сильвестров В.В. Метод римановых поверхностей в задаче о межфазных трещинах и включениях при наличии сосредоточенных сил. // Изв. ВУЗов. Математика. 2004. № 7. С.78-91.
3. Васильева Ю.О., Сильвестров В.В. Задача о межфазной трещине с жёсткой накладкой на части её берега. // Прикладная математика и механика. 2011. Т.75. Вып.6. С.1017-1037.
4. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. № 4. С.57-65.
5. Васильева Ю.О., Сильвестров В.В. Сосредоточенная сила вблизи вершины межфазной трещины с жёсткой накладкой на её берегу. // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2011. Вып.1. С.191-195.

Сведения об авторах:

Васильева Юлия Олеговна – старший преподаватель Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова» Тел.: +7 903 346 41 82

E-mail: vasilyeva.yu@gmail.com

Почтовый адрес: 429400, Россия, Чувашия, Урмарский район, пос. Урмары, пер. Сеспеля, д.2

Поступила в редакцию 12.10.2012

УДК 539.3

**ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА
БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С
СИСТЕМОЙ ВКЛЮЧЕНИЙ***

Кириллова О. И.

Ключевые слова: цилиндр произвольного сечения, гармонические колебания, коэффициенты интенсивности напряжений, система включений.

Key words: cylinder of arbitrary cross-section, harmonic oscillations, stress intensity factors, the system of inclusions.

Կիրիլովա Օ. Ի.

**Ներդրակների համագումար կամայական կտրվածքով անվերջ զլանի երկայնական սահմաններում
տատանումները**

Լուծված է ներդրակների մոտ լարվածային վիճակի որոշման խնդիրը կամայական կտրվածքով անվերջ զլանի երկայնական սահման տատանումների ժամանակ: Առաջարկված է մոտեցում, որը հնարավորություն է տալիս առանձին բավարարել ներդրակների և զլանի եզրի վրայի պայմանները: Ստացված են լարումների կոնցենտրացիայի հաշվարկի մոտավոր բանաձևեր և նրանց արժեքների վրա տատանումների հաճախության, զլանի երկրաչափության և ներդրակների տեղակայման ազդեցությունները:

Kirillova O.I.

Harmonic oscillation of longitudinal shear in an infinite cylinder of arbitrary cross-section with a system of inclusions

The problem of determining the stress state near the thin rigid inclusions in an infinite cylinder of arbitrary cross-section under oscillations of longitudinal shear. We propose an approach to satisfy the conditions separately on the surface of inclusions and on the boundary of the cylinder. The approximate formulas for calculating stress intensity factors are obtained to investigate the influence of frequency oscillations, geometry of the cylinder and location of the inclusions on their values.

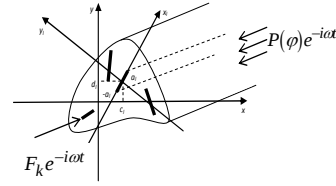
Решена задача по определению напряжённого состояния вблизи тонких жёстких включений в бесконечном цилиндре произвольного сечения при колебаниях продольного сдвига. Предложен подход, позволяющий отдельно удовлетворить условия на включениях и на границе цилиндра. Получены приближенные формулы для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений и исследовано влияние на их значения частоты колебаний, а также геометрии цилиндра и расположения включений.

Проблемы определения динамического напряжённого состояния вблизи тонких дефектов в неограниченных телах можно считать достаточно изученными. Как можно видеть из работ [1], [2], [3], это касается как двумерных, так и пространственных задач теории упругости. Однако, аналогичные задачи для тел конечных размеров исследованы значительно меньше. Это связано с тем, что использование прямых численных методов (разностных и конечных элементов) усложняется необходимостью сгущения дискретизации в окрестности дефекта. Одним из перспективных методов для решения таких задач является метод граничных элементов. Но при его применении исходная краевая задача сводится к системе интегральных уравнений и на поверхности дефекта, и на границе тела, что существенно усложняет численную реализацию. В данной работе рассмотрен подход, позволяющий отдельно удовлетворить условиям на поверхностях включений и на границе тела. Предложенный метод основывается на использовании разрывных решений уравнения Гельмгольца.

*Статья доложена на Международной конференции научных трудов, посвящённой 100-летию академика Нагуша Арутюняна. 08–12 октября 2012, Цахкадзор, Армения

1. Постановка задачи.

Рассмотрим упругий цилиндр с образующими, параллельными оси Oz (фиг. 1), сечение которого плоскостью xOy есть произвольная замкнутая гладкая кривая, которая в полярной системе координат определяется уравнением $r = r_0 \psi(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.



Фиг. 1

В цилиндре содержатся N сквозных тонких жёстких включений в виде пластин малой толщины h , которые занимают отрезки длиной $2a_l$ с центрами в точках (c_l, d_l) , $l = 1, 2, \dots, N$. Цилиндр подвержен колебаниям продольного сдвига. Эти колебания могут происходить либо в результате действия на боковую поверхность сдвигающего гармонического напряжения $P(\varphi)e^{-i\omega t}$, либо в результате действия на включения сдвигающих сил $F_k e^{-i\omega t}$. В последнем случае граница цилиндра является неподвижной. При таких условиях отличной от нуля будет только z -компонента вектора перемещения, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца [7]. В полярной системе координат уравнение имеет вид:

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (1)$$

где $\kappa_2^2 = \omega^2 c_2^{-2}$; $c_2^2 = G \rho_1^{-1}$; G, ρ_1 – модуль сдвига и плотность матрицы, ω – частота колебаний. Множитель $e^{-i\omega t}$ в (1) и всюду далее опущен и рассматриваются только амплитудные значения.

Уравнение (1) рассматривается с двумя типами граничных условий. В случае нагруженной границы

$$\tau_{\bar{n}z}(r_0 \psi(\varphi), \varphi) = GP(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2)$$

Если же граница неподвижна, выполняется условие:

$$w(r_0 \psi(\varphi), \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (3)$$

Для формулировки граничных условий на включениях с каждым из них связывается локальная система координат $x_k O_k y_k$. Пусть $w_k(x_k, y_k)$ – z -компонента вектора перемещения при переходе от полярных координат к декартовым $x_k O_k y_k$. Считается, что между телом и включением осуществлены условия полного сцепления:

$$w_k(x_k, \pm 0) = d_k, \quad |x_k| < a_k. \quad (4)$$

На поверхностях включений разрывны касательные напряжения, скачок которых обозначен

$$\langle \tau_{zy_k}^k \rangle = G(\tau_{zy_k}(x_k, +0) - \tau_{zy_k}(x_k, -0)) = \chi_k(x_k), \quad |x_k| < a_k. \quad (5)$$

В равенстве (4) d – амплитуда продольных колебаний включения, которая определяется из уравнения движения включения как жёсткого тела. При гармонических колебаниях это уравнение имеет вид:

$$-m_k d_k \omega^2 = F_k + \int_{-a_k}^{a_k} \chi_k(\eta) d\eta, \quad m_k = 2a_k h_k \rho_k, \quad (6)$$

где ρ_k –плотность включения. Уравнение (6) записано для случая, когда к включениям приложена сила и выполнено условие (3). В случае загруженной границы цилиндра (2) в уравнении (6) полагается $F_k = 0$.

При сформулированных условиях ставится задача определить коэффициенты интенсивности напряжения (КИН) для каждого из включений.

2. Решение задачи. В локальной системе координат для каждого включения строится разрывное решение [6] уравнения Гельмгольца со скачками, определёнными в (5):

$$w_l^{(d)}(x_l, y_l) = \int_{-a_l}^{a_l} \frac{\chi_l(\eta)}{G} r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta, \quad (7)$$

$$r_2(\eta - x_l, y_l) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right),$$

где $H_0^{(1)}(Z)$ – функция Ханкеля.

Далее в системе $Or\varphi$ перемещение представляется в виде

$$w^{(g)}(r, \varphi) = w_0^{(g)}(r, \varphi) + \sum_{l=1}^N w_l^{(g)}(r, \varphi). \quad (8)$$

В (8) $w_l^{(g)}(r, \varphi)$ – разрывные решения (5) после перехода к полярным координатам, а $w_0^{(g)}(r, \varphi)$ – такое решение уравнения Гельмгольца (1), что для (8) выполняются граничные условия (2) или (3). Эта неизвестная функция представляется в виде линейной комбинации частных решений уравнения (1):

$$w_0^{(g)}(r, \varphi) = r_0 \sum_{s=1}^M A_s g_s(r, \varphi), \quad (9)$$

где $g_{2m-1}(r, \varphi) = J_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\varphi$, $g_{2m}(r, \varphi) = J_m(\kappa_2 r) \sin m\varphi$.

Функции $g_s(r, \varphi)$, $s = 1, \dots, M$ линейно независимы и образуют полную замкнутую систему функций [4].

Для реализации граничных условий на включениях (4) перемещения в локальной системе координат аналогично (8) запишутся в виде:

$$w_k(x_k, y_k) = w_k^0(x_k, y_k) + \sum_{l=1}^N w^{kl}(x_k, y_k). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (4), получим систему интегральных уравнений, которая после введения обозначений

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \kappa_2 r_0, \quad \gamma_k = a_k r_0^{-1}, \quad \eta_k = a_k \tau, \quad x_k = a_k \zeta, \quad c_k^0 = c_k r_0^{-1}, \\ d_k^0 &= d_k r_0^{-1}, \quad G q_l(\tau) = \chi_l(a_l \tau) \end{aligned} \quad (11)$$

и выделения сингулярных составляющих ядер примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_k}{2\pi} \int_{-1}^1 q_k(\tau) \left(\ln|\tau - \zeta| + Q_1^{(k)}(\tau - \zeta) \right) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \int_{-1}^1 q_l(\tau) F^{kl}(\tau, \zeta) d\tau + r_0 \sum_{s=1}^M A_s g_s(a_k \zeta, 0) = d_k^0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $Q_1^{(k)}(z) = O(1)$, $z \rightarrow 0$, а $F^{kl}(\tau, \zeta)$ – бесконечно дифференцируемая функция при $-1 \leq \tau, \zeta < 1$. К (12) необходимо добавить равенство, которое следует из (6) при переходе к новым обозначениям (11):

$$d_k^0 = -\frac{F_k^0}{2\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \varepsilon_k \gamma_k} - \frac{1}{2\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \varepsilon_k \gamma_k} \int_{-1}^1 q_k(\tau) d\tau, \quad (13)$$

где $\bar{\rho}_k = \rho_k \rho_1^{-1}$, $\varepsilon_k = h_k a_k^{-1}$, $F_k^0 = F_k(Ga_k)^{-1}$.

В случае, когда нагрузка приложена к границе, в (13) считается, что $F_k^0 = 0$.

Решение (12) ищем в виде:

$$q_k(\tau) = \sum_{s=1}^M A_s \phi_s^k(\tau) + \phi_0^k(\tau). \quad (14)$$

Тогда каждое слагаемое из (14) должно удовлетворять интегральному уравнению (12):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_s^k(\tau) \left(\gamma_k \ln|\tau - \zeta| + \gamma_k Q_1^{(k)}(\tau - \zeta) + \frac{\pi}{\varepsilon_k \gamma_k \bar{\rho}_k \kappa_0^2} \right) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \int_{-1}^1 \phi_s^l(\tau) F^{kl}(\tau, \zeta) d\tau = -f_{s,k}(\zeta), \end{aligned} \quad (15)$$

где $f_{0,k} = \frac{F_0}{2\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \varepsilon_k \gamma_k}$; $f_{s,k} = g_s(a_k \zeta, 0)$, $s = 0, \dots, M$; $k = 1, \dots, N$.

Для нахождения приближённых решений полученных уравнений неизвестные функции представляются в виде

$$\phi_s^k(\tau) = \frac{\psi_s^k(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Функции $\psi_s^k(\tau)$ приближаются интерполяционным многочленом

$$\psi_s^k(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{sm}^k \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau_m)},$$

где $T_n(\tau)$ – многочлен Чебышева, τ_m – его корни, $\psi_{sm}^k = \psi_s^k(\tau_m)$.

Вследствие применения метода механических квадратур получена система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{sm}^k \left(\gamma_k B_{jm} + \gamma_k Q_1^{(k)}(\tau_m - \zeta_j) + \frac{\pi}{\varepsilon_k \gamma_k \bar{\rho}_k \kappa_0^2} \right) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \sum_{m=1}^n a_m \psi_{sm}^l F_{jm}^{kl} = -f_{s,k}(\zeta), \end{aligned} \quad (16)$$

где $F_{jm}^{kl} = F^{kl}(\tau_m, \zeta_j)$; $s = 0, \dots, M$; $k = 1, \dots, N$.

В (16) для вычисления интеграла с логарифмической особенностью использована квадратурная формула [5], B_{jm} – коэффициенты этой формулы.

Для определения коэффициентов A_k воспользуемся условиями (2) или (3) на границе. В случае удовлетворения граничному условию (2) приходим к равенству:

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \int_{-1}^1 \varphi_s^l(\tau) V_l(\tau, \varphi) d\tau + B_s(\varphi) \right) = P(\varphi), \quad (17)$$

где $V_l(\tau, \varphi) = \frac{i\gamma_l \kappa_0}{4} \left(-\frac{H_1^{(1)}(\kappa_0 R_{0l})}{R_{0l}} ((\gamma_l \tau - x_{0l}) \cos \alpha_l + y_{0l} \sin \alpha_l) \cos(\bar{n}, x) + \right.$
 $\left. + \frac{H_1^{(1)}(\kappa_0 R_{0l})}{R_{0l}} (y_{0l} \cos \alpha_l - (\gamma_l \tau - x_{0l}) \sin \alpha_l) \cos(\bar{n}, y) \right),$
 $B_s(\varphi) = f_s^{(x)} \cos(\bar{n}, x) + f_s^{(y)} \cos(\bar{n}, y); \quad f_s^{(u)} = r_0 \frac{\partial g_s}{\partial u} \Big|_{r=r_0 \psi(\varphi)}.$

В случае неподвижной границы аналогичное равенство имеет вид:

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \gamma_l \int_{-1}^1 \varphi_s^l(\tau) U_l(\tau, \varphi) d\tau + g_s(r_0 \psi(\varphi), \varphi) \right) =$$

$$= - \sum_{l=1}^N \gamma_l \int_{-1}^1 \varphi_0^l(\tau) U_l(\tau, \varphi) d\tau, \quad (18)$$

где $U_l(\tau, \varphi) = -\frac{i}{4} H_0^1 \left(\kappa_0 \sqrt{(\gamma_l \tau - x_{0l})^2 + y_{0l}^2} \right).$

Квадратурные формулы Гаусса-Чебышева и использование коллокационного метода в узлах $\sigma_b = \frac{2\pi b}{M}$, $b = 1, \dots, M$ дают возможность заменить (18) и (17)

системами линейных уравнений с неизвестными A_s , $s = 1, \dots, M$:

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^n a_m \psi_{sm}^l V_l(\tau_m, \sigma_b) + B_s(\sigma_b) \right) = P(\sigma_b), \quad (19)$$

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \gamma_l \sum_{m=1}^n a_m \psi_{sm}^l U_l(\tau_m, \sigma_b) + g_s(r_0 \psi(\sigma_b), \sigma_b) \right) =$$

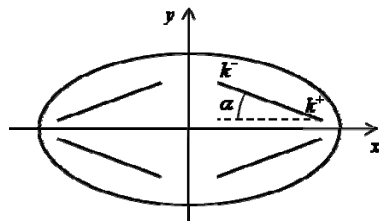
$$= - \sum_{l=1}^N \gamma_l \sum_{m=1}^n a_m \psi_{0m}^l U_l(\tau_m, \sigma_b). \quad (20)$$

Как известно, концентрация напряжения в теле около тонких жёстких включений характеризуются КИН [8]:

$$\begin{bmatrix} \tau_{zy_1} \\ \tau_{zy_1} \end{bmatrix} = -\frac{K^\pm}{\sqrt{r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + O(1), \quad r > 0.$$

После решения систем (19) или (20) и (16), приближённые значения КИН находятся по формулам:

$$k_l^{\pm} = \frac{K_l^{\pm}}{G_1 \sqrt{2a_l}} = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{s=1}^M A_s \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{sm}^l \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\mp 1} \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_m^* \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\mp 1}.$$

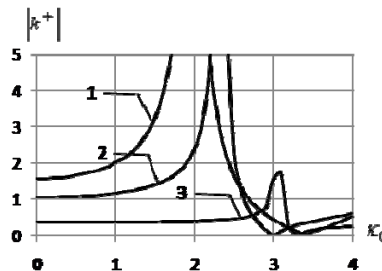


Фиг. 2

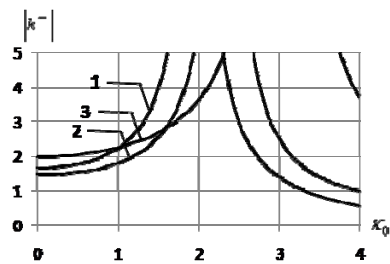
3. Результаты численных исследований. Для численной реализации предложенного метода рассматривался эллиптический цилиндр с четырьмя одинаковыми полосовыми включениями, расположенными, как показано на фиг. 2. Предполагалось, что эксцентриситет $\varepsilon = 0,5$, а наклон включений к большой полуоси характеризует угол α (фиг. 2). Рассчитывались значения коэффициентов интенсивности для включения, расположенного в первой четверти.

При расчётах варьировался параметр $\gamma = a/r_0$ – отношение длин включений к большой оси эллипса. Для данного эллипса при угле $\alpha = 30^\circ$ и $\gamma \approx 0,57$ имеет место выход включения на поверхность цилиндра.

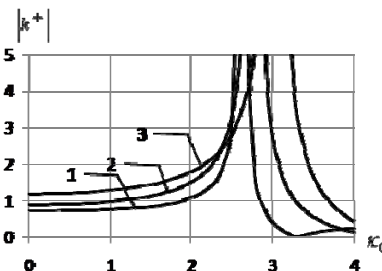
Результаты расчётов приведены в виде графиков зависимости безразмерных КИН от безразмерной частоты $\kappa_0 = \kappa_2 r_0$.



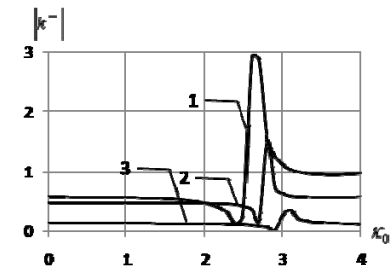
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Графики на фиг. 3-4 соответствуют случаю, когда к боковой поверхности цилиндра приложена самоуравновешивающаяся сила $P(\varphi) = \cos \varphi$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\gamma = 0,2; 0,4; 0,55$. Видно, что значение этого параметра оказывает влияние на частоту достижения первого резонанса. На фиг.3

показаны значения КИН $|k^+|$ для конца включения, который при увеличении γ приближается к границе. В дорезонансной зоне при приближении к границе значения КИН убывают. Для КИН возле противоположного конца включения при частоте $\kappa_0 \leq 1$ имеет место более сложная зависимость и при приближении к границе значение КИН наибольшее.

Фиг. 5-6 соответствуют случаю, когда граница цилиндра неподвижна, а ко всем включениям приложены силы одинаковой величины F . Следует отметить, что в этом случае изменяется частота, в которой достигается резонанс. Параметр γ также влияет на значение частоты резонанса. Для конца включения, приближающегося к границе (фиг.5), имеет место возрастание КИН. Возле конца, находящегося внутри цилиндра, наблюдается противоположное поведение КИН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jain D.L. Kanval R.P. Diffraction of elastic waves by two complanar parallel rigid strips//Int. J. Solids and Struct. 1972. V.10. № 11. P.925-937.
2. Jun Jei, Qingheny Yung, Yue- Sheng Wang and Chuangzeng Thung. An investigation of dynamic interaction between multiple cracks and inclusions by TDBEM //Composites Science and Technology, June 2009. –Vol.69. Issues 7-8. P.1275-1285.
3. V.G. Popov. Diffraction of elastic shear waves on radially distributed rigid inclusions//International applied Mechanics. 1996. V.32. № 8. P.624-630.
4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.
5. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наукова думка, 1989. 256 с.
6. Попов В.Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жёсткое включение //Динамические системы. 1993. Вып.12. С.14-23.
7. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328с.
8. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: 2007. 716 с.

Сведения об авторе:

Кириллова Ольга Ивановна – ассистент кафедры высшей математики Одесской национальной морской академии.

Адрес: Украина, 65028, г. Одесса, ул. Дидрихсона, дом 8.

E-mail: ol007ga@yandex.ru. **Тел.:** (38048)733-23-12

Поступила в редакцию 12.10.2012

УДК 539.3

ФЛАТТЕР ГИБКОЙ ПЛАСТИНКИ В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Григорян Г.С.

Ключевые слова: Флаттер, критическая скорость, тепловое поле, устойчивость

Keywords: Flutter, Critical Speed, Thermal Field, Stability

Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ., Գրիգորյան Հ.Ս.

Ճկուն սալի ֆլատերը անհամասեռ ջերմային դաշտում

Բազմաթիվ աշխատանքներ կան նվիրված գազի գերձայնային հոսանքով շրջնուվող սալերի ու թաղանթների կայունության ուսումնասիրմանը: Այդ աշխատանքների մասին տեղեկություններ կարելի է ստանալ [1,2] մենագրություններում և [3] ակնարկային հոդվածում: Հետազոտված են նաև գազի գերձայնային հոսանքով շրջնուվող և ջերմային դաշտում գտնվող դեֆորմացվող բարակ մարմինների կայունության հարցերը [4-7]:

[8] աշխատանքում գծային դրվածքով դիտարկված է երկար, ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը ըստ հաստության փոփոխական ջերմային դաշտի և գերձայնային արագությամբ շրջնուվող գազի (սալի կարճ եզրերի ուղղությամբ ազդող չգրգռված արագությամբ) ազդեցության տակ: Ըստ հաստության ջերմային դաշտի անհամասեռության պատճառով տեղի է ունենում սալի ծռում և այդ վիճակը ընդունվում է որպես չգրգռված: Ստացված են դիտարկվող ջերմագազաառաձգական համակարգի չգրգռված վիճակի կայունության պայմանները և դրանց հիման վրա կառուցված է կայունության տիրույթը այն փոփոխականների տարածությունում, որոնք բնութագրում են շրջնուվող արագության մեծությունը, սալի միջին հարթության վրա ջերմությունը և ջերմության գրադիենտը նշված հարթության նորմալի ուղղությամբ: Ցույց է տրված, որ ջերմային դաշտի և շրջնուվող համատեղ ազդեցությամբ կարելի է դեկավարել կայունության պրոցեսը և ջերմային դաշտի օգնությամբ կարելի է էապես փոխել ֆլատերի կրիտիկական արագության մեծությունը:

Ներկայացվող աշխատանքում լուծված է [8] աշխատանքում ձևակերպված խնդիրը ոչ գծային դրվածքով: Դիտարկված է ջերմային դաշտի ազդեցությունը «ամպլիտուդա-արագություն» կապի վրա: Ցույց է տրված, որ ա) համեմատաբար հաստ սալերի դեպքում եթե աստիճանաբար մեծացնենք U արագությունը, ապա ֆլատերային տատանումների պատկերը կպահպանվի մինչև $U = U^*$ (U^* – վերին կրիտիկական արագությունն է, որի արժեքը կախված է սալի միջին հարթության T_0 ջերմաստիճանից), որտեղ տատանումներն «անհետանում» են և վերականգնվում է սալի չգրգռված վիճակը: Արագության փոքրացմանը զուգընթաց չգրգռված վիճակը դառնում է կայուն մինչև $U > U_*$ ($U_*(T_0)$ – ստորին

կրիտիկական արագությունն է): $U = U_*$ դեպքում ֆլատերային տատանումների ամպլիտուդան թռիչքով աճում է մինչև որոշակի վերջավոր արժեք: Արագության հետագա նվազման հետ ամպլիտուդան աճում է (նկ.3); բ) համեմատաբար բարակ սալերի դեպքում երբ $T_0 > 0$, ապա ֆլատերային տատանումների գրգռումն ունի “կոշտ” բնույթ (1 և 2 կորերը նկ.4-ի վրա): Երբ $T_0 < 0$, ապա h/a հարաբերական հաստության յուրաքանչյուր արժեքի համար գոյություն ունի բացասական T_0 ջերմաստիճան, որի դեպքում «ամպլիտուդա-արագություն» կապը նման է հաստ սալերի դեպքում ունեցած պատկերին և տեղի է ունենում անցում ֆլատերային տատանումների մի բնույթից մյուսին (կոր 3-ը նկ.4); գ) եթե ըստ սալի միջին հարթության նորմալի ուղղության ջերմության գրադիենտի մեծությունը հավասար չէ զրոյի ($\theta \neq 0$), ապա՝ 1) երբ $\Theta > 0$, ապա ջերմային դաշտը նեղացնում է կայունության տիրույթը; 2) երբ $\Theta < 0$, ապա մինչև որոշակի բացասական Θ_* արժեք կայունության տիրույթը նկատելի լայնանում է, որից հետո $|\Theta|$ -ի մեծացմանը զուգընթաց տեղի է ունենում կայունության տիրույթի էական նեղացում; 3) ջերմության գրադիենտի ազդեցությունը կրիտիկական արագության վրա էական է համեմատաբար հաստ սալերի դեպքում; 4) եթե ջերմային դաշտի երկու բաղադրիչներն էլ տարբեր են զրոյից, ապա կայունության տիրույթի վրա ջերմային դաշտի ազդեցությունը կարող է լինել ավելի էական:

Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O., Grigoryan H.S.

Flutter of flexible plate in an inhomogeneous temperature field

There are several works devoted to the investigation of the stability of plates and shells in a supersonic gas flow. Remarks on these works in monographs [1,2] and in the paper [3] can be found. The issues of the influence of constant temperature field on the stability of deformable thin bodies in a supersonic gas flow are investigated also [4-7].

In the paper [8], in linear formulation we consider the problem of stability of long rectangular plate under the influence of both variable along the thickness temperature field and supersonic gas flow (with the unperturbed speed, which directed along the short edges of the plate). Due to the inhomogeneity of along the thickness temperature field the buckling of the plate is takes place and this state is taken as unperturbed. Conditions of stability of unperturbed state of examined termogasoelastic system are obtained and on its base the stability area is constructed in the space of variables characterizing the value of the flown speed, the temperature at the middle plane of the plate and the temperature gradient along the normal direction of this plane. It is shown that via the combined action of the temperature field and the flowing stream one can regulate the process of stability and with the help of temperature field one can significantly change the value of the flutter critical speed.

In this paper, the problem, posed in [8], considered in nonlinear formulation. The effect of temperature field on the dependence of "amplitude-speed" is studied. It is shown that: a) in the case of relatively thick plates if gradually

increase the speed flowing stream U , the flutter type vibrations persist up to $U = U^*$ (U^* – is the upper

critical speed, the value of which depends on the temperature T_0 of the mid-plane of the plate), where the oscillations "pluck" and restored the undisturbed state of the plate. By reducing the speed the unperturbed state becomes stable up to $U > U_*$ ($U_*(T_0)$ – is the lower critical speed). For $U = U_*$ the amplitude of flutter type vibrations abruptly increases to its final value. With further decreasing speed the amplitude increases, and b) in the case of relatively thin plates for $T_0 > 0$ the flutter type vibrations have "hard" character. If $T_0 < 0$, then, for each value of the relative thickness h/a there is a negative temperature at which the "amplitude-speed" dependence is similar to the case of thick plates and a transition from one mode to another flutter type vibrations takes place, d) if the value of temperature gradient in the normal direction to the median plane of the plate is different from zero ($\Theta \neq 0$), then: 1) If $\Theta > 0$, then the temperature field significantly reduces the stability region, and 2) if $\Theta < 0$, then up to a certain negative value Θ_* the stability region increases significantly, then, with the increasing $|\Theta|$ the stability area is decreases essentially, 3) the effect of temperature gradient on the critical speed is significant in the case of relatively thick plates, 4) if both components of the temperature field are non-zero, then the influence of the temperature field on the stability area may be more essential.

This work was supported within the grant A2-NET-TEAM: Advanced Aircraft Network for Theoretical & Experimental Aeroservoelastic Modeling, under the call FP7-PEOPLE-2010-IRSES.

Имеются многочисленные исследования, посвящённые устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1,2] и в обзорной статье [3]. Исследованы также вопросы влияния постоянного температурного поля на устойчивость деформируемых тонких тел обтекаемых сверхзвуковым потоком газа [4-7].

В работе [8] в линейной постановке рассмотрена задача устойчивости удлинённой прямоугольной пластинки под действием переменного по толщине температурного поля и обтекающего сверхзвукового потока газа. В этой работе учтено, что вследствие неоднородности по толщине температурного поля происходит выпучивание пластинки и это состояние принимается как невозмущённое. На этой основе получены условия устойчивости невозмущённого состояния рассматриваемой термогазоупругой системы и построена область устойчивости в пространстве переменных, характеризующих величину скорости обтекающего потока, температуру на срединной плоскости пластинки и градиента температуры в нормальном направлении к указанной плоскости. Показано, что совместным действием температурного поля и обтекающего потока можно регулировать процесс устойчивости и при помощи температурного поля существенно изменить величину критической скорости флаттера.

В настоящей работе поставленная в [8] задача устойчивости рассмотрена в нелинейной постановке. Исследовано влияние температурного поля на зависимость "амплитуда-скорость". Показано, что: а) в случае сравнительно толстых пластин, если постепенно увеличивать скорость U обтекающего потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до $U = U^*$ (U^* –

верхняя критическая скорость, значение которой зависит от температуры T_0 на срединной плоскости пластинки), где колебания “сорвутся” и восстанавливается невозмущённое состояние пластинки. При снижении скорости невозмущённое состояние становится устойчивой пока $U > U_*$ ($U_*(T_0)$ – нижняя критическая скорость). При $U = U_*$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до конечного значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает (фиг.3); б) в случае сравнительно тонких пластин, если $T_0 > 0$, то возбуждение флаттерных колебаний носит “жёсткий” характер (кривые 1 и 2 на фиг.4). Если же $T_0 < 0$, то для каждого значения относительной толщины h/a существует отрицательная температура T_0 , при котором зависимость “амплитуда-скорость” аналогична случаю толстых пластин и происходит переход из одного режима флаттерных колебаний к другому (кривая 3 на фиг.4); г) если величина градиента температуры в нормальном направлении к срединной плоскости пластинки отлична от нуля ($\Theta \neq 0$), то: 1) при $\Theta > 0$ температурное поле заметно сужает область устойчивости; 2) при $\Theta < 0$ до некоторого определённого отрицательного значения Θ_* область устойчивости заметно увеличивается, после чего, с увеличением $|\Theta|$ происходит существенное уменьшение области устойчивости, 3) влияние градиента температуры на критическую скорость является существенным в случае сравнительно толстых пластин, 4) если обе составляющие температурного поля отличны от нуля, то влияние температурного поля на область устойчивости может оказаться более существенным.

1. Основные уравнения

Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины h , находящуюся в стационарном температурном поле T . Введём декартовую систему координат (x_1, x_2, x_3) так, чтобы срединная плоскость пластинки совпала с координатной плоскостью (x_1, x_2) . Пусть, пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью U , направленной вдоль оси Ox_1 . Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы в нелинейной постановке. В основу исследования принимаются следующие известные предположения:

- а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях [9];
- б) основные предположения теории гибких пластин, считая, что нормальные перемещения сравнимы с толщиной пластинки [2];
- в) “закон плоских сечений” при определении аэродинамического давления [10,11];

$$p = p_{\infty} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v_3^2}{a_{\infty}^2} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (1)$$

где p – давление газа на поверхности пластинки, a_{∞} – скорость звука для невозмущённого газа, p_{∞} и ρ_{∞} – давление и плотность газа в невозмущённом состоянии, κ – показатель политропы, v_3 – нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки;

г) линейный закон изменения температурного поля $T(x_1, x_2, x_3)$ по толщине пластинки [1]:

$$T = T_0(x_1, x_2) + x_3 \Theta(x_1, x_2); \quad (2)$$

д) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры [12].

В дальнейшем, для простоты и наглядности принимается также, что: 1) пластинка в направлении перпендикулярном к скорости обтекающего потока достаточно длинная и однородно закреплена по длинным сторонам. В этом случае срединная поверхность изогнутой пластинки будет близка к цилиндрической.

Поэтому, направляя ось Ox_2 вдоль длинной стороны, считаем, что все величины (как возмущённого, так и невозмущённого состояний) не зависят от координаты x_2 и

перемещение u_2 вдоль оси Ox_2 равно нулю; 2) из лицевых поверхностей

($x_3 = \pm h/2$) пластинки происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями T^+ и T^- соответственно), а боковые поверхности ($x_1 = 0$ и $x_1 = a$) теплоизолированы. Тогда задача теплопроводности имеет следующее решение:

$$T = T_0 + x_3 \Theta_0; \\ T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta_0 = \frac{k(T^+ - T^-)}{2\lambda + kh} \quad (3)$$

где k – коэффициент теплоотдачи, λ – коэффициент теплопроводности.

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля ($\Theta \neq 0$) происходит выпучивание пластинки (с прогибом $w_T(x_1)$) и вследствие этого появляется аэроупругое давление, которое, согласно предположению (в), определяется формулой (1). В линейном приближении для указанного давления

получается выражение $\alpha p_{\infty} M dw_T / dx_1$. Указанное выпученное состояние принимается как невозмущенное [8] и исследуется его устойчивость под действием температурного поля и давления обтекающего потока газа.

На основе принятых предположений и теории термоупругости изотропного тела, аналогично [1,8], получается следующее нелинейное дифференциальное уравнение устойчивости рассматриваемой термогазоупругой системы:

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - \delta \left[N_1^T \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + N_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} \right) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho h \varepsilon + \frac{\alpha p_{\infty}}{a_{\infty}} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \\ + \alpha p_{\infty} M \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{4} p_{\infty} M^2 \left[2 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \frac{\partial w}{\partial x_1} + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)}{12} p_{\infty} M^3 \left[3 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} N_1^T &= - \frac{Eh}{1-\mu} \alpha T_0 \\ N_1 &= \frac{Eh}{2\alpha(1-\mu^2)} \int_0^a \left[2 \frac{dw_T}{dx_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] dx_1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ 1, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases}$$

В (4) и (5) $w(x_1, t)$ – возмущения поперечного перемещения пластинки, $M = U a_{\infty}^{-1}$ – число Маха для невозмущенного потока, $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного теплового расширения, ρ – плотность материала пластинки, ε – коэффициент линейного затухания. Отметим, что при получении (4) аэродинамическое давление вычислено по формуле (1), разлагая её в ряд по степеням $\frac{v_3}{a_{\infty}} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) a_{\infty}^{-1}$.

В разложении, согласно предположениям теории гибких пластин, удержаны лишь первые три члена [1]. Причем, из членов, учитывающие аэродинамическое демпфирование, сохранен лишь наиболее существенный линейный член $\alpha p_{\infty} a_{\infty}^{-1} \partial w / \partial t$.

Считая, что деформации невозмущенного состояния достаточно малы, для определения прогиба пластинки $w_T(x_1)$ выпученного состояния получается следующее линейное уравнение [8]:

$$D \frac{d^4 w_T}{dx_1^4} + \alpha p_{\infty} M \frac{dw_T}{dx_1} = 0, \quad (6)$$

решение которого должен удовлетворить условиям закрепления краёв $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ пластинки. Эти условия, например, в случае шарнирно опёртых краёв, имеют вид

$$w_T = 0, \quad \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} + \alpha(1 + \mu)\Theta_0 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a. \quad (7)$$

Решение задачи (6), (7) получено в [8]. В этой работе получено также следующее приближённое решение указанной задачи:

$$w_T(x_1) = -R\Theta_0 \left\{ \frac{1}{2} x_1 (x_1 - a) + \frac{a^2 K v}{36 + K^2 v^2} \left[\frac{3}{8\pi} K v \sin \frac{\pi x_1}{a} + \frac{9}{16\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right] \right\}, \quad (8)$$

которое практически совпадает с точным решением. В дальнейшем при решении уравнения (4) для $w_T(x_1)$ будем использовать (34), в котором

$$R = \alpha(1 + \mu), \quad K = \frac{4\alpha p_\infty}{Dh} \left(\frac{a}{\pi} \right)^4, \quad v = M \frac{h}{a}.$$

Учитывая, что функция w_T определена из решения линейной задачи, необходимо в (4) сохранить лишь члены линейные относительно w_T .

Таким образом, исследование поведения возмущений, сообщаемых, находящейся в неоднородном температурном поле и обтекающейся сверхзвуковым потоком газа пластинке, сведена к решению уравнения (4) при соответствующих условиях на краях пластинки. В дальнейшем для простоты принимается, что края пластинки шарнирно опёрты. Т.е. решения уравнения (4) должны удовлетворить следующим граничным условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a, \quad (9)$$

которые вытекают из условий шарнирного опирания в возмущённом состоянии.

Полученную нелинейную задачу (4), (9) будем решать приближённо, представляя её решение в виде

$$w(x_1, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i x_1, \quad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a} \right), \quad (10)$$

где $f_i(t)$ – подлежащие определению функции времени t .

Представление (10) удовлетворяет краевым условиям (9). Подставляя (10) в уравнение (4) и применяя метод Бубнова-Галеркина для определения $f_i(t)$, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + (\varepsilon + \varepsilon_a) \frac{d f_i}{dt} + \omega_i^2 f_i + \Psi_i(f_1, f_2, \dots, f_N, M) = 0, \quad (11)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

где ω_i – частоты собственных колебаний, Ψ_i – некоторые нелинейные функции.

В дальнейшем ограничимся случаем двухчленной аппроксимации [1]:

$$w = f_1(t) \sin \lambda_1 x + f_2(t) \sin \lambda_2 x.$$

Тогда система (11) в безразмерных функциях $x_i = f_i(t)/h$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + (1 - \bar{T}\delta) x_1 - \frac{2}{3} K v x_2 + \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_2^2 + x_2 (\beta_{11} x_1^2 + \beta_{12} x_2^2) + \\ + 3x_1 (x_1^2 + 4x_2^2) \delta + \bar{\Theta} [\delta_{11}^\Theta x_1 + \delta_{12}^\Theta x_2 + \alpha_{11}^\Theta x_1^2 + \alpha_{12}^\Theta x_2^2 + \alpha_{13}^\Theta x_1 x_2] = 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + (\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) x_2 + \frac{2}{3} K v x_1 + \alpha_{21} x_1 x_2 + x_1 (\beta_{21} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2) + \\ + 12x_2 (x_1^2 + 4x_2^2) \delta + \bar{\Theta} [\delta_{21}^\Theta x_1 + \delta_{22}^\Theta x_2 + \alpha_{21}^\Theta x_1^2 + \alpha_{22}^\Theta x_2^2 + \alpha_{23}^\Theta x_1 x_2] = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где наряду с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$ введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{T} = R T_0 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{12}{\pi^2} \right), \quad \bar{\Theta} = R \Theta_0 h \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{36 + K^2 v^2}, \quad K = \frac{4 \mathfrak{a} p_\infty}{\rho \omega_1^2 h^2}, \\ v = M \frac{h}{a}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 \quad (i = 1, 2), \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} \left(\varepsilon + \frac{a_\infty \rho_\infty}{\rho h} \right); \end{aligned} \quad (13)$$

а также следующие коэффициенты α_{ik} и β_{ik} , учитывающие аэродинамическую нелинейность:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \frac{\pi}{12} (\mathfrak{a} + 1) K v^2, \quad \alpha_{12} = \frac{7\pi}{15} (\mathfrak{a} + 1) K v^2, \quad \alpha_{21} = \frac{2\pi}{15} (\mathfrak{a} + 1) K v^2, \\ \beta_{11} = \beta_{21} = \frac{\pi^2}{30} (\mathfrak{a} + 1) K v^3, \quad \beta_{22} = \frac{22\pi^2}{105} (\mathfrak{a} + 1) K v^3, \quad \beta_{12} = -\frac{6\pi^2}{35} (\mathfrak{a} + 1) K v^3, \end{aligned} \quad (14)$$

следующие коэффициенты δ_{ij}^Θ , учитывающие линейное взаимодействие температуры и обтекающего потока с колеблющейся пластинкой:

$$\begin{aligned} \delta_{11}^\Theta = \frac{9}{4} (\mathfrak{a} + 1) K v^2, \quad \delta_{12}^\Theta = -\frac{21}{40} (\mathfrak{a} + 1) K^2 v^3, \\ \delta_{21}^\Theta = -\frac{3}{40} (\mathfrak{a} + 1) K^2 v^3, \quad \delta_{22}^\Theta = \frac{1}{80} (\mathfrak{a} + 1) K v^2 (180 + K^2 v^2), \end{aligned} \quad (15)$$

и следующие коэффициенты α_{ij}^Θ , учитывающие нелинейное (квадратное) взаимодействие указанных процессов:

$$\alpha_{11}^\Theta = - \left(\frac{9(1152 + (32 - 3\pi^2) K^2 v^2)}{8\pi^3} \delta - \frac{3\pi}{160} (\mathfrak{a} + 1) K^2 v^4 \right),$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12}^{\Theta} &= - \left(\frac{3(1152 + (32 - 3\pi^2)K^2v^2)}{2\pi^3} \delta + \frac{81\pi}{280}(\varkappa + 1)K^2v^4 \right), \\
\alpha_{13}^{\Theta} &= Kv \left(\frac{27}{2\pi} \delta - \frac{\pi}{160}(\varkappa + 1)(180 + K^2v^2)v^2 \right), \\
\alpha_{21}^{\Theta} &= Kv \left(\frac{27}{4\pi} \delta - \frac{\pi}{640}(\varkappa + 1)(900 + K^2v^2)v^2 \right), \\
\alpha_{22}^{\Theta} &= Kv \left(\frac{81}{\pi} \delta - \frac{\pi}{210}(\varkappa + 1)(630 + K^2v^2)v^2 \right), \\
\alpha_{23}^{\Theta} &= - \left(\frac{3(1152 + (32 - 3\pi^2)K^2v^2)}{\pi^3} \delta - \frac{33\pi}{140}(\varkappa + 1)K^2v^4 \right).
\end{aligned} \tag{16}$$

В (12), (13) ω_i – частоты собственных колебаний, χ , v , $\bar{T}$, $\bar{\Theta}$ – параметры, характеризующие соответственно процесс затухания, скорость обтекающего потока и температурного поля.

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (12) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра v) и температуры (от величин $\bar{T}$, $\bar{\Theta}$).

2. Условия и области устойчивости

Решению нелинейной задачи, как правило, будет предшествовать анализ соответствующей линейной задачи. Это объясняется тем, что: а) на основе линейной задачи можно найти как критическое значение параметра $v = v_*$ (следовательно, и критическое значение скорости обтекающего потока $U_* = ah^{-1}v_*a_{\infty}$ или $M_* = ah^{-1}v_*$), при котором невозмущенное состояние пластинки становится неустойчивым относительно малых возмущений, так и области устойчивости; б) указанное критическое значение U_* (или M_* или v_*), которое назовём “нижней критической скоростью”, будет необходимым и при исследовании задачи устойчивости в нелинейной постановке. Соответствующая линейная задача решена в [8]. Ниже приводятся некоторые основные результаты этой работы, необходимые для дальнейшего.

Итак, соответствующая (12) линейная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + (1 - \bar{T}\delta)x_1 - \frac{2}{3}Kvx_2 + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\Theta x_1 + \delta_{12}^\Theta x_2) &= 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + (\gamma^2 - 4\bar{T}\delta)x_2 + \frac{2}{3}Kvx_1 + \bar{\Theta}(\delta_{21}^\Theta x_1 + \delta_{22}^\Theta x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что в отсутствие обтекающего потока ($v = 0$), когда $\delta = 1$ система

(17) допускает следующие решения: $x_1 = \text{const} \neq 0$, $x_2 = 0$ и

$x_1 = 0$, $x_2 = \text{const} \neq 0$, отвечающие от тривиального решения $x_1 = x_2 = 0$ при

$$\bar{T} = 1 \quad \text{или} \quad T_{0*}^{(1)} = \frac{\pi^2}{12R} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (18)$$

в случае первого решения ($x_1 = \text{const} \neq 0$, $x_2 = 0$) и при

$$4\bar{T} = \gamma^2 \quad \text{или} \quad T_{0*}^{(2)} = \frac{\pi^2 \gamma^2}{48R} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (19)$$

в случае второго решения ($x_1 = 0$, $x_2 = \text{const} \neq 0$). Первое решение соответствует выпучиванию пластинки по одной полуволне, второе – выпучиванию по двум полуволнам. Формулами (18) и (19) определяются критические значения температуры T_0 , при которых пластинка в отсутствие потока теряет устойчивость по формам, указанным выше.

Представляя решение системы (17) в виде

$$x_1 = y_1 e^{\lambda \tau}, \quad x_2 = y_2 e^{\lambda \tau},$$

получим следующее характеристическое уравнение относительно λ :

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1; \quad a_1 = 2\chi; \quad a_2 = 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta) + \chi^2 \\ a_3 &= \left[1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta) \right] \chi \\ a_4 &= (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2 v^2 + (\delta_{11}^\Theta \delta_{22}^\Theta - \delta_{12}^\Theta \delta_{21}^\Theta) \bar{\Theta}^2 + \\ &+ \left(\gamma^2 (\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta) - \frac{2}{3}Kv(\delta_{12}^\Theta - \delta_{21}^\Theta) - (4\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta) \bar{T}\delta \right) \bar{\Theta} \end{aligned}$$

Невозмущенная форма пластинки будет устойчива, если действительные части

корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица, запишутся в виде:

$$a_i > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 4), \quad \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0 \quad (21)$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Третье условие выполняется, если выполняется четвёртое условие. Из остальных условий получим следующие неравенства, определяющие область устойчивости рассматриваемой термоупругой системы в пространстве параметров v , $\bar{T}$, $\bar{\Theta}$:

$$\begin{aligned} 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta) &> 0 \\ (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2v^2 + (\delta_{11}^\Theta\delta_{22}^\Theta - \delta_{12}^\Theta\delta_{21}^\Theta)\bar{\Theta}^2 + \\ &+ \left(\gamma^2(\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta) - \frac{2}{3}Kv(\delta_{12}^\Theta - \delta_{21}^\Theta) - (4\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta)\bar{T}\delta \right) \bar{\Theta} > 0 \\ (\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}\delta)^2 - \frac{16}{9}K^2v^2 + 2\chi^2(\gamma^2 + 1) - (6(\delta_{22}^\Theta - \delta_{11}^\Theta)\bar{\Theta} + 10\chi^2)\bar{T}\delta + \\ + 2\left((\gamma^2 - 1)(\delta_{22}^\Theta - \delta_{11}^\Theta) + \frac{4}{3}Kv(\delta_{12}^\Theta - \delta_{21}^\Theta) + (\delta_{11}^\Theta + \delta_{22}^\Theta)^2\chi^2 \right) \bar{\Theta} + \\ + (4\delta_{12}^\Theta\delta_{21}^\Theta + (\delta_{22}^\Theta - \delta_{11}^\Theta)^2)\bar{\Theta}^2 &> 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Если влиянием затухания можно пренебречь, то вместо (20) получается биквадратное уравнение, и, поэтому, условиями устойчивости будут:

$$a_2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_2^2 - 4a_4 > 0. \quad (23)$$

Исследование области устойчивости рассматривается в следующих случаях:

- 1) $\bar{T} \neq 0, \quad \bar{\Theta} = 0$;
- 2) $\bar{T} = 0, \quad \bar{\Theta} \neq 0$.

1) **Случай постоянного температурного поля** ($\bar{\Theta} = 0$). В этом случае, когда

$\delta = 1$ (т.е. когда края пластинки неподвижны) условия (22) существенно упрощаются и принимают вид:

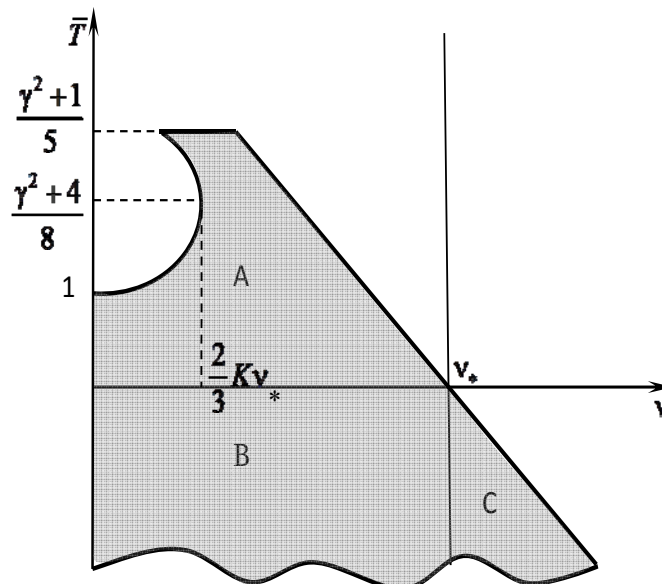
$$\begin{aligned} 1 + \gamma^2 - 5\bar{T} &> 0, \\ (1 - \bar{T})(\gamma^2 - 4\bar{T}) + \frac{4}{9}K^2v^2 &> 0, \\ (\gamma^2 - 1 - 3\bar{T})^2 - \frac{16}{9}K^2v^2 &> 0. \end{aligned} \quad (24)$$

А если $\delta = 0$ (т.е. когда края пластинки свободно смещаются), то первые два условия из (22) выполняются во всех случаях, а из третьего условия получается следующая формула для определения нижней критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости пластинки:

$$v_* = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{K} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}}. \quad (25)$$

Формула (25) совпадает с известной формулой, полученной в [1] и показывает, что постоянное температурное поле не влияет на области устойчивости, если края пластинки свободно смещаются.

Неравенства (24) позволяют построить область устойчивости на плоскости (v, T_0) . Указанная область приведена на фиг.1, где v_*^0 – критическое значение обтекающего потока, когда влияние температурного поля не учитывается.



Фиг.1

Область устойчивости при постоянном температурном поле

Из фиг.1 видно, что:

- а) если $T_0 > 0$, то температурное поле существенно сужает область устойчивости (полуполоса $(0 < v < v_*^0, T_0 > 0)$ превращается в область A),
- б) если $T_0 < 0$, то температурное поле существенно увеличивает область устойчивости (вместо B – областью устойчивости является $B \cup C$).

Для наглядности в табл.1 приведены значения v_* в зависимости от T_0 для различных h/a . Для расчёта здесь и дальнейшем принято $\alpha=23.8 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$; $k=1200$ Вт/(м 2 хград); $\lambda=210$ Вт/(мхград); $\mu=0.34$.

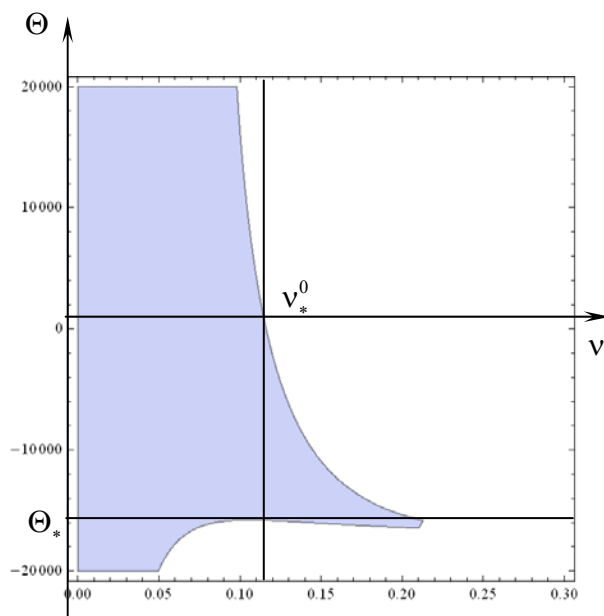
Таблица 1. Влияние постоянного температурного поля на критическую скорость

$T_0, ^\circ C$ h/a	-100	-50	0	5	50
1/50	5.4622	3.6604	1.8586	1.6785	0.05687
1/80	1.6912	0.9874	0.2836	0.06165	Неуст.
1/100	1.01705	0.5667	0.1162	0.0711	Неуст.
1/300	0.1015	0.05148	0.001434	Неуст.	Неуст.

В этой таблице “неустойчивость” означает, что при указанных T_0 пластинка теряет устойчивость в отсутствии потока газа. Рассматриваемый случай исследован многими авторами, в частности, этому случаю посвящены работы [4-8].

2) Влияние градиента температуры на область устойчивости ($\bar{T} = 0$, $\bar{\Theta} \neq 0$). В этом случае условиями устойчивости будут (22) при $T_0 = 0$, причём указанные условия не зависят от вида закрепления краёв пластинки в своей плоскости.

На основе условий (22) построена область устойчивости на плоскости (v, Θ)



Фиг. 2
Область устойчивости при $T_0 = 0$

при тех же исходных данных, что приведены в предыдущем случае.

На фиг.2 приведена часть области устойчивости, соответствующая умеренным температурным полям.

Из фиг.2 видно, что: а) если $\Theta > 0$, то температурное поле заметно сужает область устойчивости; б) если $\Theta < 0$, то до некоторого определённого отрицательного значения Θ_* область устойчивости заметно увеличивается, поле чего, с увеличением $|\Theta|$ происходит существенное уменьшение области устойчивости.

Для наглядности в табл. 2 приведены значения v_* в зависимости от Θ при приведённых вышеисходных данных и различных h/a .

Таблица 2. Влияние градиента температуры на критическую скорость

$\begin{matrix} \theta, ^\circ C/m \\ h/a \end{matrix}$	-5000	-2500	0	2500	5000
1/50	2.5164	2.1183	1.8586	1.5702	1.4895
1/80	0.3509	0.3084	0.2836	0.2671	0.2554
1/100	0.1266	0.1208	0.1162	0.1124	0.1093
1/300	0.001437	0.001436	0.001434	0.001432	0.00143

Табл. 2 показывает, что влияние градиента температуры на критическую скорость является существенным в случае сравнительно толстых пластин.

В работе [8] рассмотрен также общий случай ($\bar{T} \neq 0, \bar{\Theta} \neq 0$) и показан, что если обе составляющие температурного поля отличны от нуля, то влияние температурного поля на область устойчивости может оказаться более существенным. Например, при сравнительно толстых пластинках ($h/a=1/50$), когда Θ изменяется от -5000 до 5000, критическая скорость обтекающего потока из 2.5164 изменяется в 1.4895, т.е. уменьшается в 1.7 раза.

3. Существование и характер флаттерных колебаний

Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой системой (12). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости гибких пластин, нагруженных консервативными силами, наличием членов с квадратичными нелинейностями. Указанные члены, имеющие аэродинамическое и термоаэроупругое происхождение, характеризуют несимметричность нелинейности, присущую задачам устойчивости гибких оболочек. Поэтому, приближённое периодическое решение системы (12) будем искать в виде [13]:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \theta \tau + B_1 \sin \theta \tau + C_1 + \dots, \\ x_2 &= A_2 \cos \theta \tau + C_2 + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь A_i, B_i, C_i и θ ($i=1,2$) – неизвестные постоянные; точками обозначены

члены, содержащие гармоники.

Решение (26) подставляется в систему (12) и приравниваются нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos \theta \tau$ и $\sin \theta \tau$ (члены, содержащие гармоники, пренебрегаются). Полученная при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближённого решения этой системы предполагается [13], что: а) затухание достаточно мало ($\chi |B_1| \ll |A_1|$, $|B_1| \ll |A_1|$) и б)

рассматриваемая аэроупругая система совершает установившееся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния бесконечно мало отличающегося от невозмущённого ($|A_i| \gg |C_j|$; $j = 1, 2$). Тогда, пренебрегая степенями выше первой

и произведения величин B_1 , C_1 и C_2 , указанная нелинейная система представляется следующими подсистемами:

уравнениями, полученными приравнением нулю свободных членов

$$\begin{aligned} C_1 - \frac{2}{3} K v C_2 + \frac{1}{2} (\alpha_{11} A_1^2 + \alpha_{12} A_2^2) + \frac{1}{2} C_2 (\beta_{11} A_1^2 + \beta_{12} A_2^2) + \\ + A_2 (\beta_{11} A_1 C_1 + \beta_{12} A_2 C_2) + \\ + \left(\frac{9}{2} A_1 \left(A_1 C_1 + \frac{4}{3} A_2 C_2 \right) + 6 A_2 (A_1 C_2 + A_2 C_1) \right) \delta - \bar{T} C_1 \delta + \\ + \bar{\Theta} \left(\delta_{11}^{\ominus} C_1 + \delta_{12}^{\ominus} C_2 + \frac{1}{2} (\alpha_{11}^{\ominus} A_1^2 + \alpha_{12}^{\ominus} A_2^2 + \alpha_{13}^{\ominus} A_1 A_2) \right) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 C_2 + \frac{2}{3} K v C_1 + \frac{1}{2} \alpha_{21} A_1 A_2 + \frac{1}{2} C_1 (\beta_{21} A_1^2 + \beta_{22} A_2^2) + \\ + A_1 (\beta_{21} A_1 C_1 + \beta_{22} A_2 C_2) + \\ + 6 (A_2 (A_1 C_1 + 12 A_2 C_2) + A_1 (A_1 C_2 + A_2 C_1)) \delta - 4 C_2 \bar{T} \delta + \\ + \bar{\Theta} \left(\delta_{21}^{\ominus} C_1 + \delta_{22}^{\ominus} C_2 + \frac{1}{2} (\alpha_{21}^{\ominus} A_1^2 + \alpha_{22}^{\ominus} A_2^2 + \alpha_{23}^{\ominus} A_1 A_2) \right) = 0, \end{aligned}$$

уравнениями, полученными приравнением нулю коэффициентов при $\cos \theta \tau$

$$\begin{aligned} (1 - \theta^2) A_1 - \frac{2}{3} K v A_2 + \chi \theta B_1 + 2 (\alpha_{11} A_1 C_1 + \alpha_{12} A_2 C_2) + \\ + \frac{3}{4} A_2 (\beta_{11} A_1^2 + \beta_{12} A_2^2) + \frac{9}{4} A_1 (A_1^2 + 4 A_2^2) \delta - \bar{T} A_1 \delta + \\ + \bar{\Theta} (\delta_{11}^{\ominus} A_1 + \delta_{12}^{\ominus} A_2 + 2 (\alpha_{11}^{\ominus} A_1 C_1 + \alpha_{12}^{\ominus} A_2 C_2) + \alpha_{13}^{\ominus} (A_1 C_2 + A_2 C_1)) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^2 - \theta^2) A_2 + \frac{2}{3} K v A_1 + \alpha_{21} (A_1 C_2 + A_2 C_1) + \\
& + \frac{3}{4} A_1 (\beta_{21} A_1^2 + \beta_{22} A_2^2) + 9 A_2 (A_1^2 + 4 A_2^2) \delta - 4 A_2 \bar{T} \delta + \\
& + \bar{\Theta} (\delta_{21}^\Theta A_1 + \delta_{22}^\Theta A_2 + 2 (\alpha_{21}^\Theta A_1 C_1 + \alpha_{22}^\Theta A_2 C_2) + \alpha_{23}^\Theta (A_1 C_2 + A_2 C_1)) = 0
\end{aligned} \tag{28}$$

уравнениями, полученными приравняв нулю коэффициенты при $\sin \theta \tau$

$$\begin{aligned}
& (1 - \theta^2) B_1 - \chi \theta A_1 + \frac{1}{2} \beta_{11} A_1 A_2 B_1 + 3 \left(\frac{3}{4} A_1^2 + A_2^2 \right) B_1 \delta - \bar{T} \delta B_1 + \delta_{11}^\Theta B_1 \bar{\Theta} = 0, \\
& \frac{2}{3} K v B_1 - \chi \theta A_2 + \frac{1}{2} \beta_{21} A_1^2 B_1 + \frac{1}{4} B_1 (\beta_{21} A_1^2 + \beta_{22} A_2^2) + 6 A_1 A_2 B_1 \delta + \delta_{21}^\Theta B_1 \bar{\Theta} = 0,
\end{aligned} \tag{29}$$

Третья подсистема (29) учитывает эффект демпфирования. Учитывая малость затухания, из уравнений этой подсистемы, путем линеаризации, получим

$$(1 - \theta^2) B_1 - \chi \theta A_1 - \bar{T} \delta B_1 + \delta_{11}^\Theta B_1 \bar{\Theta} = 0, \quad \frac{2}{3} K v B_1 - \chi \theta A_2 + \bar{\Theta} (\delta_{21}^\Theta A_1 + \delta_{22}^\Theta A_2) = 0.$$

Отсюда при $\bar{\Theta} = 0$ имеем:

$$B_1 = \frac{\chi \theta}{1 - \theta^2 - \bar{T} \delta} A_1, \quad A_2 = \frac{2}{3} \frac{K v}{1 - \theta^2 - \bar{T} \delta} A_1. \tag{30}$$

На границе области флаттера (на прямой линии, ограничивающей область устойчивости с правой стороны (фиг.2)) $v = v_*$ и имеет следующее представление:

$$v_* = \frac{3}{4K} (\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}). \tag{31}$$

При $v = v_*$ из линейных уравнений второй подсистемы для частоты колебаний θ_* на границе области флаттера получим

$$\theta_*^2 = \frac{1}{2} (\gamma^2 + 1 - 5\bar{T}). \tag{32}$$

В силу (31) и (32), из (30) имеем $A_2 = -A_1$ при $\chi \ll 1$, $v = v_*$ и $\theta = \theta_*$.

Принимается, что это соотношение приближённо сохраняется ($A_2 \approx -A_1$) и при

$v \neq v_*$, если разность $|v - v_*|$ достаточно мала [1].

Пользуясь соотношением $A_2 \approx -A_1$, уравнениями первой подсистемы и первым уравнением второй подсистемы, определяются C_1 , C_2 и θ , выраженные через A_1 . Используя полученные выражения для C_1 , C_2 и θ , из последнего (неиспользованного) уравнения второй подсистемы (при $\chi \ll 1$) получается характеристическое (разрешающее) уравнение относительно A_1

$$b_0 A_1^6 + b_1 A_1^4 + b_2 A_1^2 + b_3 = 0, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{3}{4}(\beta_0 - 45\delta) \left\{ H_{11} \left(\frac{135}{2} \delta - H_{22} \right) - \frac{1}{4} R_{12} R_{21} \right\}, \\ b_1 &= \frac{3}{4}(\beta_0 - 45\delta) \left\{ P_{11} \left(\frac{135}{2} \delta - H_{22} \right) + H_{11} P_{22} - \frac{1}{2} R_{12} S_{21} - \frac{1}{2} R_{21} S_{12} \right\} + \\ &+ P_0 \left\{ H_{11} \left(\frac{135}{2} \delta - H_{22} \right) - \frac{1}{4} R_{12} R_{21} \right\} + \\ &+ (2M_{11} - M_0) \left\{ -\frac{1}{2} L_{12} \left(\frac{135}{2} \delta - H_{22} \right) + \frac{1}{4} R_{12} (L_{21} - 1) \right\} - \\ &- (2M_{12} - M_0) \left\{ \frac{1}{2} H_{11} (1 - L_{21}) + \frac{1}{4} R_{21} L_{12} \right\}, \\ b_2 &= (2M_{11} - M_0) \left\{ -\frac{1}{2} L_{12} P_{22} + \frac{1}{2} S_{12} (L_{21} - 1) \right\} - \\ &- (2M_{12} - M_0) \left\{ \frac{1}{2} P_{11} (1 - L_{21}) + \frac{1}{2} S_{21} L_{12} \right\} + \\ &+ \frac{3}{4}(\beta_0 - 45\delta) \{ P_{11} P_{22} - S_{12} S_{21} \} + \\ &+ P_0 \left\{ P_{11} \left(\frac{135}{2} \delta - H_{22} \right) + H_{11} P_{22} - \frac{1}{2} R_{12} S_{21} - \frac{1}{2} R_{21} S_{12} \right\}, \\ b_3 &= P_0 \{ P_{11} P_{22} - S_{12} S_{21} \}, \quad R_{ij} = 3\beta_{ij} + \beta_{ii} - 24\delta, \quad P_{ij} = (\gamma^2)^{i-1} - i^2 \bar{T} \delta + \bar{\Theta} \delta_{ij}^{\ominus}, \\ P_0 &= 1 - \gamma^2 + \frac{4}{3} K v + 3 \bar{T} \delta + \bar{\Theta} \delta_0^{\ominus}, \quad S_{ij} = (-1)^i \frac{2}{3} K v + \bar{\Theta} \delta_{ij}^{\ominus}, \end{aligned}$$

$$L_{ij} = (\alpha_{ii})^{j-1} + \alpha_{ij} + \bar{\Theta}(\alpha_{ii}^{\ominus} + \alpha_{ij}^{\ominus} - \alpha_{i3}^{\ominus}), \quad M_{ij} = \alpha_{ij} + \bar{\Theta}(\alpha_{ij}^{\ominus} + \alpha_{i+1j}^{\ominus}),$$

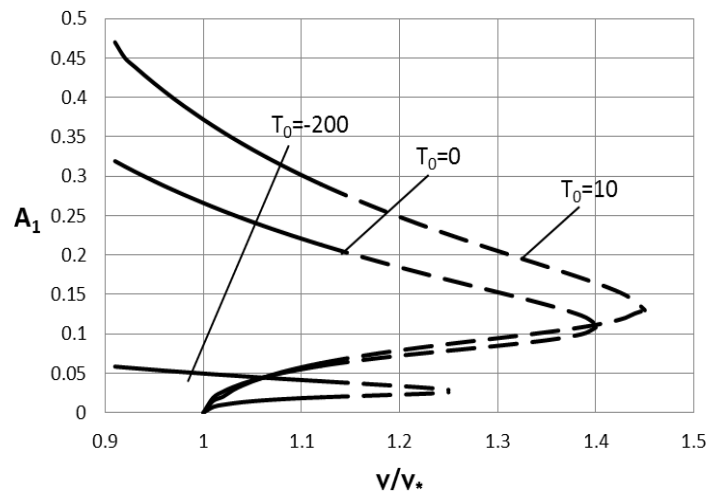
$$M_0 = \alpha_{21} + \bar{\Theta}(\alpha_{13}^{\ominus} + \alpha_{23}^{\ominus}), \quad H_{ij} = \frac{21}{2} \delta - \beta_{ij},$$

$$\beta_0 = \beta_{12} + \beta_{22} - \beta_{11} - \beta_{12}, \quad \delta_0^{\ominus} = \delta_{11}^{\ominus} - \delta_{12}^{\ominus} + \delta_{21}^{\ominus} - \delta_{22}^{\ominus}$$

Уравнение (33) решено численно при следующих исходных данных:
 $E = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\mu = 0.34$; $\rho_0 = 2.79 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ (дюралюминий), $\alpha = 1.4$;
 $\rho_{\infty} = 1.29 \text{ кг/м}^3$ (воздух), $\Theta_0 = 0$ и исследована зависимость амплитуды
установившихся флаттерных колебаний от параметров v и T_0 для различных
значений h/a . Результаты численного решения приведены на фиг. 3,4, в табл. 3 и
показывают, что:

- в случае сравнительно толстых пластин:

О Если постепенно увеличивать скорость обтекающего потока, то можно
наблюдать следующую картину (фиг.3): режим флаттерных колебаний (которые носят
характер “мягкого” возбуждения) сохраняется вплоть до $v = v^*$ (значение v^*
зависит от T_0 и поэтому на фиг.3 эти значения особо выделены), где колебания
“сорвутся” и восстановится невозмущённое состояние пластинки. При снижении



Фиг.3. Зависимость “амплитуда-скорость” для относительно толстых пластин

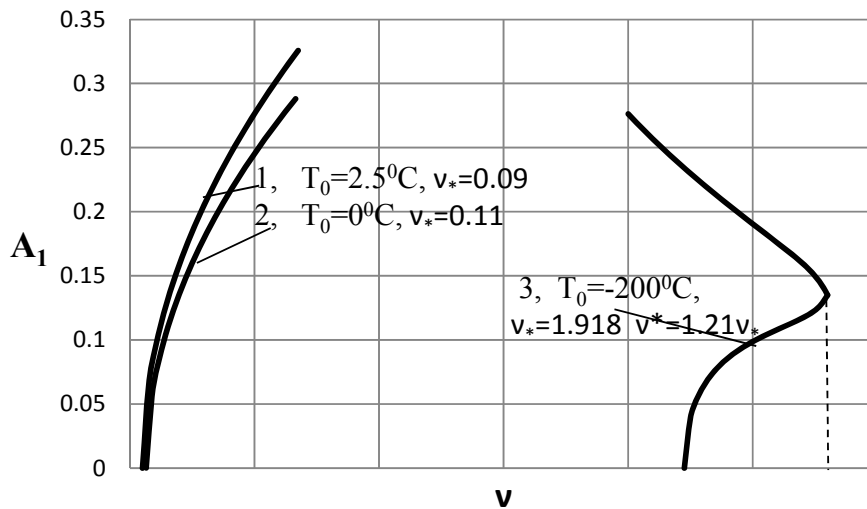
скорости невозмущённое состояние становится устойчивой, пока $v > v_*$. При

$v = v_*$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до конечного значения.

С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает. Последнее указывает о величине амплитуд возмущений, необходимых для того, чтобы вызвать незатухающие колебания пластинки при докритических скоростях (причём, чем меньше скорость потока, тем большая амплитуда требуется).

На фиг.3 пунктирами показаны те части кривых $A_1(v)$, которые, вопреки нашему предположению, соответствуют таким значениям аргумента v , которые не принадлежат к достаточно малой окрестности v_* ;

- в случае сравнительно тонких пластин:



Фиг.4. Зависимость “амплитуда-скорость” для относительно тонких пластин

о Если пластинка достаточно тонкая и $T_0 > 0$, то возбуждение флаттерных

колебаний носит “жёсткий” характер, т.е. при $v < v_*$ действительные значения

A_1 отсутствуют, а при $v \geq v_*$ выполняется неравенство $\partial A_1 / \partial v > 0$ (кривые 1 и

2 на фиг.4). А это значит, что присутствие температурного поля, у которого

$T_0 > 0$, не меняет характер флаттерных колебаний. Отметим, что при $T_0 = 0$

имеет место аналогичная зависимость [4].

о Для каждого значения отношения h/a существует отрицательная температура T_0 , при котором зависимость “амплитуда-скорость” аналогична

случаю толстых пластин и происходит переход из одного режима колебаний к другому (табл.3).

Таблица 3. Значения амплитуды флаттерных колебаний при $\nu = \nu_*$ и $\Theta = 0$

$T_0, ^\circ C$ h/a	-100	-70	-50	-20	0	T_*^0	Значения T_*^0
1/300	6.69 и 0	0	0	0	0	0	0.287
1/200	2.203 и 0	5.034 и 0	0	0	0	0	0.645
1/100	0.452 и 0	0.642 и 0	0.933 и 0	0	0	0	2.579
1/50	0.083 и 0	0.106 и 0	0.126 и 0	0.183 и 0	0.271 и 0	0.372 и 0	10.3157

Табл. 3 отмечает примерный порядок постоянной температуры T_0 , при котором происходит переход из одного режима колебаний к другому. Отметим, что для наглядности в табл. 3 приведены значения A_1 на границе флаттера ($\nu = \nu_*$) при различных T_0 и h/a .

- Если $\Theta_0 \neq 0$ и $T_0 = 0$, то наблюдается следующая картина (см. табл. 4):
 - для сравнительно толстых пластин зависимость $A_1(\Theta_0)$ аналогична случаю зависимости $A_1(T_0)$ при $\Theta_0 = 0$ в случае тонких пластин;
 - для сравнительно тонких пластин имеет место обратная картина и, более того, в случае достаточно тонких пластин появляется возможность возбуждения флаттерных колебаний “в большом”.

Таблица 4. Значения амплитуды флаттерных колебаний при $\nu = 1.1\nu_*$ и $T_0 = 0$

Θ h/a	-5000	0	5000
1/300	0.06787, 0.5633 и 1.9388	0.2108	0.0685, 0.5593 и 1.9502
1/100	0.1521	0.2033	0.2066
1/50	0.1365	0.5525 и 0.2209	0

- Если $\Theta_0 \neq 0$ и $T_0 \neq 0$, то имеют место следующие типы зависимости “амплитуда-скорость” (табл.5):
 О для сравнительно толстых пластин возможен переход из одного типа колебаний к другому;
 О для сравнительно тонких пластин возможен только случай “жёсткого” возбуждения.

Таблица 5. Значения амплитуды флаттерных колебаний при $\nu = 1.1\nu_*$ и $T_0 \neq 0$

$\bar{\Theta}$ h/a	-5000	0	5000	
1/100	0.1905	0.1905	0.1905	$\bar{T} = 2$
1/50	0.1157	0.0572 и 0.2509	Неуст.	$\bar{T} = 5$

Работа выполнена при поддержке гранта A2-NET-TEAM: Advanced Aircraft Network for Theoretical & Experimental Aeroservoelastic Modeling фонда FP7-PEOPLE-2010-IRSES.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.
3. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек //Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твёрдых тел. М.: Наука, 1978. Т.11. С.67–122.
4. Болотин В.В. Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа. // В сб.: “Расчеты на прочность”. М.: Машгиз, 1060. Вып.6.
5. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Выпучивание и установившийся флаттер термически сжатых панелей, находящихся в сверхзвуковом потоке. //Инж. журнал. 1961. Т.1. N2. С.82–96.
6. Hoff N.I. Thermal buckling of supersonic wing panels. Journ. Aeronaut. Sci., v.23, N11, 1956.
7. L. Librescu, P. Marzocca, W.A. Silva, “Linear/Nonlinear Supersonic Panel Flutter in a High-Temperature Field,” Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 1, July – August 2004, pp. 918-924.
8. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Термоупругая устойчивость удлиненной прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. N4. С.51–67.
9. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949.

10. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. //Journ. Aeronaut. Sci. 23, N6, 1956.
11. Илюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.XX. Вып.6.
12. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
13. Багдасарян Г.Е. Устойчивость ортотропных оболочек в сверхзвуковом потоке газа. //Изв. АН СССР. ОТН Механика и машиностроение. 1961. N4. С. 92–98.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН Армении, профессор, ЕГУ, факультет информатики и прикладной математики
Тел.: (010) 552964; E-mail: gevorgb@rau.am

Микилян Марине Александровна – к.ф.м.н., доцент, РАУ, факультет прикладной математики и информатики
Тел. (091) 191129; E-mail: mikilyan@rau.am

Сагоян Рафаэль Оникович – внештатный работник Института механики НАН Армении.
Тел.: (093) 248226; E-mail: rafael1984@mail.ru.

Григорян Грайр – кандидат физико-математических наук

Поступила в редакцию 26. 09. 2012

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С
ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА,
НАБЕГАЮЩИМ НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ**

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость неконсервативных систем, прямоугольная упругая пластинка, дивергентная неустойчивость, сверхзвуковое обтекание.

Key words: the stability of non-conservative systems, an elastic rectangular plate, the divergence instability, supersonic gas flow.

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ր.

Գազի զերձայնային հոսքում երկու ազատ եզրով ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդրի մասին, երբ հոսքը սալի ազատ եզրին վրավազք է կատարում

Դիտարկված է զերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր ազատ եզրը զուգահեռ մյուս երկու հողակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը:

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

On the problem of the stability of a rectangular plate with two free edges, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edges

The linear problem of the static stability of an elastic rectangular plate in a supersonic flow of gas is investigated. The flow is in a direction from the free edge to on the contrary free edge, and at the two edges parallel to the flow are hinge joint supported. Its solution shows that the divergence is possible.

Рассматривается задача устойчивости упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Скорость потока направлена от свободного края пластинки к противоположному свободному краю параллельно остальным двум шарнирно закреплённым краям. Показана возможность возникновения как дивергенции, так и локализованной дивергенции в зависимости от значения параметров задачи. Найдена критическая скорость потока, при которой пластинка теряет статическую устойчивость.

В предлагаемой работе в линейной постановке исследуется задача устойчивости прямоугольной упругой пластинки с двумя свободными краями, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. Скорость обтекающего потока направлена от свободного края пластинки к противоположному свободному краю параллельно двум остальным шарнирно опёртым краям. С помощью численно-аналитических методов анализа показана возможность возникновения, как дивергенции, так и локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки в зависимости от значений параметров задачи.

Найдена критическая скорость потока газа, при которой пластинка теряет статическую устойчивость. Показана существенная зависимость критической скорости потока от коэффициента Пуассона и от относительной длины и ширины пластины.

Установлено, что в случае, в котором ширина пластинки превосходит её длину более чем в пять раз, наблюдается явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края пластинки, которое имеет место при

обтекании полубесконечной пластины–полосы сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. А в случае, в котором отношение ширины пластинки к её длине примерно порядка одной десятитысячной и меньше, то можно полагать, что поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа аналогично поведению обтекаемой удлинённой пластинки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную тонкую упругую пластинку, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа будем считать плоским и потенциальным. А также будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромки $x = 0$ и $x = a$ пластинки свободны, а кромки $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка), когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [1] дифференциальное уравнение изгиба пластинки описывается соотношением [2]

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y). \quad (1.1)$$

Здесь $w = w(x, y)$ – прогиб точек срединной поверхности пластинки; ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа; a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде; D – цилиндрическая жёсткость пластинки на изгиб.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок имеют вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad x = 0 \text{ и } x = a; \quad (1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \text{ и } y = b; \quad (1.3)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти значения критической скорости потока газа V_{cr} , при превышении которых возникает дивергентная неустойчивость. Иными словами, требуется определить значения параметра V , при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), (1.3).

Среди первых публикаций в области устойчивости прямоугольных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, отметим работу А.А. Мовчана [3]. А монография [4] содержит всеобщий обзор, посвящённый данному вопросу.

Для нахождения решения задачи устойчивости пластинки (1.1) - (1.3) свведём её к задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), (1.3), будем искать в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\lambda_n p x) \cdot \sin(\lambda_n y), \quad \lambda_n = \pi n b^{-1}. \quad (1.4)$$

Подставляя выражение (1.4) в уравнение (1.1), получим характеристическое уравнение

$$p^4 - 2p^2 + \alpha_n^3 p + 1 = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}, \quad \alpha_n^3 > 0,$$

которое перепишем в виде

$$(p^2 - 1)^2 + \alpha_n^3 p = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}, \quad \alpha_n^3 > 0. \quad (1.5)$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (1.5) имеет два отрицательных действительных корня $p_1 < 0$, $p_2 < 0$ и пару комплексных сопряженных корней

$p_{3,4} = \alpha \pm i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha > 0$. Корни характеристического уравнения (1.5) определяются выражениями [5]

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{q_1^2-1} - \frac{q_1-1}{2}}, \quad p_1 < 0, \quad p_2 < 0; \quad (1.6)$$

$$p_{3,4} = \frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm i\sqrt{\sqrt{q_1^2-1} + \frac{q_1-1}{2}} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha^3 > 0.$$

Здесь q_1 – единственный действительный корень кубического уравнения [5]

$$q^3 + q^2 - q - 1 - \frac{\alpha_n^6}{8} = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}. \quad (1.7)$$

Из представления уравнения (1.7) в виде

$$8 \cdot (1+q)^2 (q-1) = \alpha_n^6 \quad (1.8)$$

и положительности её дискриминанта $Q = \alpha_n^6 \left(\frac{1}{27} + \frac{\alpha_n^6}{256} \right)$ следует, что кубическое

уравнение (1.7) при условии $\alpha_n^3 > 0$ имеет один действительный корень q_1 и пару комплексных сопряженных корней [5]. При этом

$$q_1 > 1. \quad (1.9)$$

2. Корням (1.6) соответствует следующее решение дифференциального уравнения (1.1) при граничных условиях (1.2), (1.3):

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{n1} \exp((-0.5\sqrt{2(q+1)} - \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1)})\pi n b^{-1} x) + \right. \\ + C_{n2} \exp((-0.5\sqrt{2(q+1)} + \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1)})\pi n b^{-1} x) + \\ + \exp(0.5\sqrt{2(q+1)})\pi n b^{-1} x \cdot \left(C_{n3} \cos \sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1)} \cdot \pi n b^{-1} x + \right. \\ \left. \left. + C_{n4} \sin \sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1)} \cdot \pi n b^{-1} x \right) \right\} \sin(\pi n b^{-1} y), \quad (2.1)$$

где q – единственный действительный корень кубического уравнения (1.7);

C_{nk} , $k = \overline{1, 4}$ – произвольные постоянные.

Подставляя выражение (2.1) в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравняв нулю определитель полученной системы, получаем следующее дисперсионное уравнение относительно параметров q , a , b , n и v задачи (1.1) – (1.3):

$$F(q, \gamma, n, v) = \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} &= 2B_1B_2 \left(\exp(-2\pi n\gamma(\sqrt{2(q+1)} + B_1)) + 1 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \exp(-\pi n\gamma(\sqrt{2(q+1)} + B_1) \cdot \cos(\pi n\gamma B_2)) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left[2(q+1)(q + \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1 - v)^2 \right] \cdot \left[2(q+1)(q - \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1 - v)^2 \right] + \\ &\quad + \left(\exp(-\pi n\gamma(\sqrt{2(q+1)} - B_1)) - \exp(-\pi n\gamma(\sqrt{2(q+1)} + B_1)) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left((k_2k_3 - k_1k_4) \cdot (\exp(-\pi n\gamma(\sqrt{2(q+1)} + B_1)) - \cos(\pi n\gamma B_2)) - \right. \\ &\quad \left. - (k_1k_3 + k_2k_4) \cdot \sin(\pi n\gamma B_2) \right) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\gamma = ab^{-1}, \quad \gamma \in (0, \infty); \quad (2.3)$$

$$B_1(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1} - 0.5(q - 1)}, \quad B_2(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1} + 0.5(q - 1)}, \quad q > 1; \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} k_1 = & -(3q^2 + q - 3)\sqrt{2(q+1)} + (2q^2 - 1)B_1 + 2(2q+1)\sqrt{q^2 - 1}B_1 + \\ & + \left((q+1)\sqrt{2(q+1)} - 2B_1 + 2\sqrt{q^2 - 1} \cdot B_1 \right) v - \left(\sqrt{2(q+1)} - B_1 \right) v^2; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} k_2 = & B_2 \left(1 - 2q^2 + 2(2q+1)\sqrt{q^2 - 1} - 2q\sqrt{2(q+1)} \cdot B_1 + \right. \\ & \left. + 2(1 + \sqrt{q^2 - 1} - \sqrt{2(q+1)} \cdot B_1)v - v^2 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 = & -(3q^2 + q - 3)\sqrt{2(q+1)} - (2q^2 - 1)B_1 - 2(2q+1)\sqrt{q^2 - 1}B_1 + \\ & + \left((q+1)\sqrt{2(q+1)} + 2B_1 - 2\sqrt{q^2 - 1} \cdot B_1 \right) v - \left(\sqrt{2(q+1)} + B_1 \right) v^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 = & B_2 \left(1 - 2q^2 + 2(2q+1)\sqrt{q^2 - 1} + 2q\sqrt{2(q+1)} \cdot B_1 + \right. \\ & \left. + 2(1 + \sqrt{q^2 - 1} + \sqrt{2(q+1)} \cdot B_1)v - v^2 \right). \end{aligned}$$

Заметим, что здесь и далее в тексте в обозначении действительного корня уравнения (1.7) индекс “1” опущен.

Из выражений (2.4) следует, что

$$B_1(q) > 0, \quad B_2(q) > 0 \quad \text{при всех } q > 1. \quad (2.6)$$

Легко показать, что дисперсионное уравнение (2.2) в предельном случае, в котором $\gamma \rightarrow 0$ ($b \rightarrow \infty$), при всех $q > 1$ и v тождественно равно нулю, а в случае, в котором $\gamma \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow \infty$), приводится к виду

$$2(q+1) \cdot (q - \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1 - v)^2 = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что в предельном случае, в котором $\gamma \rightarrow 0$ ($b \rightarrow \infty$), невозмущённая форма равновесия пластинки является статически неустойчивой. Заметим, что невозмущённая форма равновесия удлинённой пластинки ($0 \leq x \leq a$, $-\infty \leq y \leq \infty$) при обтекании её сверхзвуковым потоком газа в направлении от свободного края $x=0$ к противоположному свободному краю $x=a$, также является статически неустойчивой.

Уравнение (2.7) в точности совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в работе [5] при изучении явления локализованной дивергентной неустойчивости, возникающей в окрестности свободного края ($x=0$) упругой полубесконечной пластины-полосы ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа вдоль полубесконечных шарнирно закреплённых краёв в направлении от свободного края $x=0$ к закреплённому краю $x=a$. При этом, критическая скорость потока $V_{cr\,div}$ зависит от коэффициента Пуассона: она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона (табл. 1).

Таблица 1

ν	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$V_{cr\,div} \cdot (a_0 \rho_0 b^3) D^{-1}$	2453.012	537.191	173.371	120.741	77.398

В соответствии с обозначениями (1.4), (1.5) и соотношением (1.9), критическая скорость потока, приводящая к дивергентной неустойчивости, определяется выражением

$$V_{cr\,div} = 2\sqrt{2(q^* - 1)} \cdot (q^* + 1) \cdot \pi^3 n^3 D (a_0 \rho_0 b^3)^{-1}, \quad (2.8)$$

или, учитывая обозначение (2.3),

$$V_{cr\,div} = 2\sqrt{2(q^* - 1)} \cdot (q^* + 1) \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \quad (2.9)$$

Отсюда очевидно следует, что дивергентная форма потери устойчивости возможна только в случае, когда справедливо условие (1.9): $q^* > 1$, q^* – решение дисперсионного уравнения (2.2).

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы пластинки в потенциальном сверхзвуковом потоке сводится к исследованию уравнения (2.2).

3. С помощью численных методов анализа найдены первые корни q^* уравнения (2.2), соответствующие различным значениям коэффициента Пуассона ν и параметра $\gamma \in (0, \infty)$, определяемого выражением (2.3). Подставляя полученные значения $q = q^*$ в соотношения (2.8) или (2.9), получаем соответствующие значения критической скорости потока $V_{cr\,div}$, приводящие к дивергентной неустойчивости: при значениях скорости потока $V \geq V_{cr\,div}$ невозмущённая форма равновесия пластинки перестаёт быть устойчивой. Некоторые результаты расчётов – значения $V_{cr\,div} \cdot D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3)$, соответствующие различным значениям ν и γ , представлены в табл. 2.

В результате расчёта было установлено следующее. Для всех $\nu \in (0, 0.5)$ и $\gamma \in (0, \infty)$ наименьшее значение скорости потока достигается при значении $n = 1$.

При всех $\gamma \in (0, \infty)$ критическая скорость $V_{cr div}$ зависит от величины коэффициента Пуассона ν и отношения сторон $\gamma = ab^{-1}$ прямоугольника: критическая скорость $V_{cr div}$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν , а с возрастанием γ значение критической скорости растёт (табл. 2).

Таблица 2

$\nu \backslash \gamma$	0.125	0.25	0.375	0.5
$1 \cdot 10^{-4}$	$0.838 \cdot 10^{-6}$	$0.611 \cdot 10^{-6}$	$0.461 \cdot 10^{-6}$	$0.352 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$0.838 \cdot 10^{-2}$	$0.611 \cdot 10^{-2}$	$0.461 \cdot 10^{-2}$	$0.352 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-1}$	0.856	0.606	0.460	0.358
$5 \cdot 10^{-1}$	25.43	18.81	13.06	10.02
$8 \cdot 10^{-1}$	112.65	70.93	50.96	37.68
1.0	358.53	162.37	105.77	71.73
1.2	547.31	306.34	196.06	134.38
1.5	992.34	584.62	387.48	269.25
1.8	1715.85	989.03	693.54	440.55
2.0	2598.09	1382.02	953.54	604.31

В случае достаточно длинных пластинок ($\gamma = ab^{-1} \leq 0.0001$) значение критической скорости, примерно, порядка $10^{-7} D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$ (табл.2) и меньше, а с уменьшением γ стремится к нулю. Следовательно, можно считать, что при значениях $\gamma \leq 0.0001$ поведение обтекаемой в сверхзвуковом потоке газа прямоугольной пластинки примерно такое же, как и удлиненной пластинки $\gamma \rightarrow 0$

($b \rightarrow \infty$): в обоих случаях невозмущённая форма равновесия пластинки, являясь изначально до обтекания статически неустойчивой, остается такой же и при обтекании её потоком газа.

Начиная с значения $\gamma = 2$, найденные в данной работе для различных значений коэффициента Пуассона ν , значения $q = q^*$ и соответствующие значения критических скоростей потока, пересчитанные по формуле (2.9), примерно равны (с точностью порядка 10^{-4}) значениям $q = q^*$ и соответствующим значениям критических скоростей потока, полученных в работе [5] при исследовании задачи локализованной дивергенции полубесконечной пластины-полосы (табл.1). Следовательно, начиная с $\gamma = 2$, прямоугольная пластинка в потоке газа теряет статическую устойчивость при скоростях потока, равных критическим скоростям, при которых наблюдается явление локализованной дивергенции в окрестности свободного края полубесконечной пластины-полосы. А так как в этом предельном случае критическая скорость дивергенции определяется по простой формуле (2.9), то можно сказать, что для значений $\gamma \geq 2$ получена удобная для применения формула (2.9), в которой q^* – решение уравнения (2.7), позволяющая легко вычислить критическую скорость дивергенции прямоугольной пластинки.

Итак, в соответствии с уравнением (2.7), формула (2.9) даёт результаты, близкие к точным, по крайней мере, в области $\gamma \geq 5$.

Заметим, что, как оказалось, в рассматриваемой задаче устойчивости (1.1) – (1.3), как и в задачах устойчивости прямоугольных пластинок с одним свободным краем, дивергенция возможна при отсутствии сжимающих усилий, в отличие от панелей, закреплённых по всему контуру [3,5].

Легко показать, что в случае, в котором поток направлен от свободного края $x = a$ к противоположному свободному краю $x = 0$ ($V_x < 0$), критические значения скоростей такие же, как и в рассматриваемом случае, в котором $V_x > 0$.

4. В отличие от пластинок, у которых только один край свободен или все края закреплёны, в явлении дивергенции пластинки с двумя свободными краями оказывается определяющим задиание обоих свободных кромок, связанное с изгибом хорды пластинки. Поэтому, для этого случая представляет несомненный интерес исследование форм изгибных поверхностей пластинок.

Следовательно, основные результаты данной работы, помимо нахождения критической скорости дивергенции, могут быть получены при исследовании функции прогиба срединных точек пластинки, зависящей от параметров задачи (1.1) – (1.3), дополнительно.

Для описания выражения полного прогиба точек срединной поверхности пластинки (2.1) найдём коэффициенты C_{nk} , $k = \overline{1,4}$ при $q = q^*$ ($V = V_{cr div}$).

В силу условия (2.2), очевидно, что при $q = q^*$ ранг матрицы однородной системы алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно коэффициентов C_{nk} , полученной при подстановке решения (2.1) в граничные условия (1.2) и (1.3), равен трем. Легко выделить из указанной системы подсистему линейно независимых уравнений третьего порядка, приводя исходную систему четвёртого порядка к треугольному виду. После, полагая C_{n1} произвольным, последовательно выразим через него все остальные коэффициенты:

$$C_{n2} = R_1^{-1} R_2 C_{n1}, \quad C_{n3} = R_1^{-1} R_3 C_{n1}, \quad C_{n4} = R_1^{-1} R_4 C_{n1}, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= (k_1 k_6 + k_2 k_7) \sin(\pi n \gamma B_2) - k_5 B_2 [2(q+1)(q + \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1-v)^2] \cdot \\ &\cdot (\cos(\pi n \gamma B_2) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} + B_1)); \\ R_2 &= (k_3 k_6 + k_4 k_7) \sin(\pi n \gamma B_2) + (k_3 k_7 - k_4 k_6) \cdot \\ &\cdot (\cos(\pi n \gamma B_2) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} - B_1)); \\ R_3 &= k_6 k_8 \sin(\pi n \gamma B_2) + k_7 k_8 (\cos(\pi n \gamma B_2) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} - B_1)) - \\ &- k_4 k_5 (\exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} + B_1) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} - B_1)); \\ R_4 &= -k_7 k_8 \sin(\pi n \gamma B_2) + k_6 k_8 (\cos(\pi n \gamma B_2) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} - B_1)) - \\ &- k_3 k_5 (\exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} + B_1) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} - B_1)); \\ k_5 &= 1 + \sqrt{q^2 - 1} - \sqrt{2(q+1)} \cdot B_1 - v; \quad k_6 = 1 - \sqrt{q^2 - 1} - v; \\ k_7 &= \sqrt{2(q+1)} \cdot B_1; \quad k_8 = 2 B_1 [2(q+1)(q - \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1-v)^2]; \end{aligned} \quad (4.2)$$

γ, B_1, B_2 и k_1, k_2, k_3, k_4 определены, соответственно, выражениями (2.3), (2.4) и (2.5).

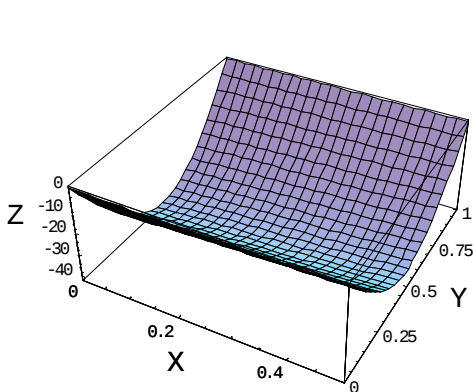
Подставляя коэффициенты (4.1) в разложение (2.1) и полагая $n=1$, в силу условия достижимости минимального значения критической скорости дивергенции при $n=1$ (разд. 3), получаем для описания относительного прогиба следующее выражение:

$$\frac{w(x, y)}{C_{11}} = \left\{ \exp(-0.5\sqrt{2(q+1)} - B_1)\pi b^{-1}x + \right. \\ \left. + R_1^{-1}R_2 \exp((-0.5\sqrt{2(q+1)} + B_1)\pi b^{-1}x) + \exp(0.5\sqrt{2(q+1)}\pi b^{-1}x) \cdot \right. \\ \left. \cdot (R_1^{-1}R_3 \cos(\pi b^{-1}B_2x) + R_1^{-1}R_4 \sin(\pi b^{-1}B_2x)) \right\} \sin(\pi b^{-1}y); \quad (4.3)$$

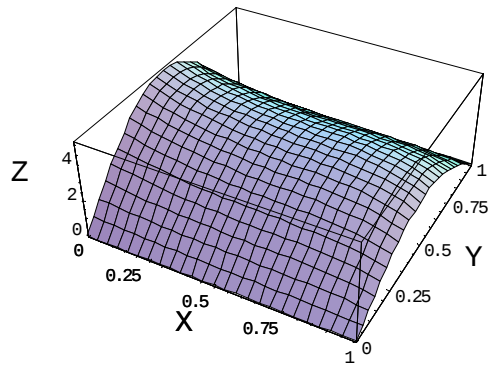
B_1, B_2 и $R_i, i = \overline{1, 4}$ определены выражениями (2.4) и (4.2) соответственно.

На фиг. 1–6 изображены некоторые характерные изогнутые поверхности пластинки.

Численно-аналитические методы исследований показали следующее. При $\gamma \leq 0.5$ по форме изогнутые поверхности одинаковы (фиг.1); прогибы отрицательны, максимальное по абсолютной величине значение достигается на линии $y = 0.5b$; функция $w(x, y)/C_{11}$ симметрична относительно прямой $y = 0.5b$. С возрастанием ν при $\gamma = \text{const}$ прогибы по абсолютной величине уменьшаются более резко, чем с увеличением γ при $\nu = \text{const}$.



Фиг. 1 ($a=0.5, b=1, \nu=0.25$)

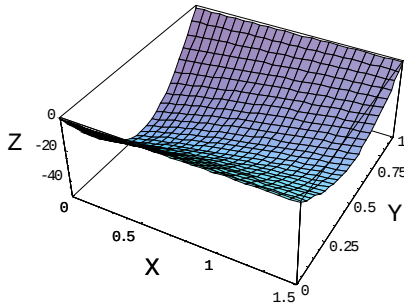


Фиг. 2 ($a=b=1, \nu=0.25$)

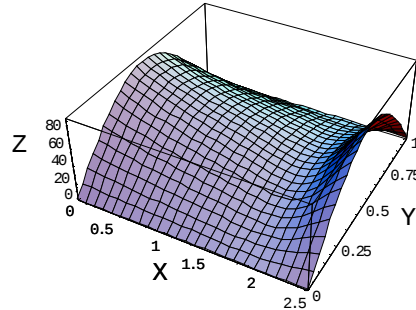
При значениях $\gamma \in (0.5, 2)$ общий вид изогнутых поверхностей пластинки несколько иной. Поверхность пластинки в зависимости от значений параметров γ и ν имеет различную изгибную форму: может быть выпуклой или вогнутой; функция $w(x, y)/C_{11}$, также симметрична относительно линии $y = 0.5b$, однако на краях $x=0$ и $x=a$ принимает различные по величине значения; с увеличением γ и ν появляется вмятина от края $x=0$ к середине пластинки (фиг.2, 3).

При значениях $\gamma \in (2, 5)$ появляются перегибы, а число вмятин увеличивается. Прогибы точек краев $x=0$ и $x=a$ резко отличаются как по форме, так и по знаку. С увеличением γ прогиб вдоль кромки $x=0$ уменьшается по абсолютной

величине, а вдоль кромки $X=a$ резко увеличивается. Вдоль контура $X=a$ образуется складка, а в средней части – глубокая вмятина (фиг. 4–6):

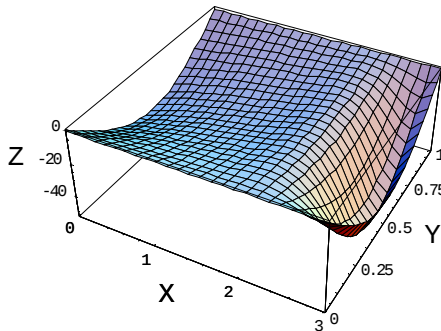


Фиг. 3 ($a=1.5, b=1, v=0.25$)

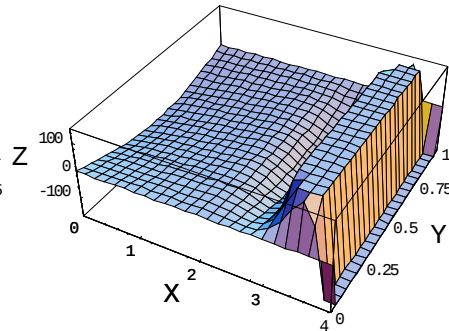


Фиг. 4 ($a=2.5, b=1, v=0.25$)

Дальнейшее увеличение γ ($\gamma \geq 5$) приводит к увеличению числа складок и впадин у кромки $X=a$, а прогиб вдоль кромки $X=0$, постепенно уменьшаясь, исчезает. Можно сказать, что, начиная с $\gamma = 5$ в окрестности свободной кромки $X=a$ имеет место явление локализованной дивергенции: вдоль кромки $X=a$ по направлению к центру пластинки образуется множество складок и впадин, а в средней части глубокая вмятина, обращённая к центру. При этом, изгиб от свободного края $X=0$ к центру пластинки отсутствует – функция прогиба во всех точках кромки $X=0$ до линии $X \approx 0.7a$, примерно, равна нулю. В этом случае проявляются более высокие формы потери устойчивости.



Фиг. 5 ($a=3, b=1, v=0.25$)



Фиг. 6 ($a=4, b=1, v=0.25$)

5. Найдены критические скорости потока, приводящие к потере устойчивости в дивергентной форме. Показано, что относительные значения критических скоростей потока зависят от коэффициента Пуассона ν и от γ – отношения ширины пластинки к ее длине: с увеличением коэффициента Пуассона ν критическая скорость уменьшается, а с увеличением γ – увеличивается.

В случае, в котором ширина прямоугольной пластинки превосходит её длину более чем в пять раз ($\gamma \geq 5$), наблюдается явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края $X=a$ пластинки, в отличие от полубесконечной пластины-полосы, исследованной в [5], у которой явление локализованной дивергентной неустойчивости наблюдается в окрестности

свободного края $x = 0$, в силу того, что край $x = a$ закреплён. Найдена формула, удобная для применения, позволяющая легко вычислить критическую скорость дивергенции прямоугольной пластинки. При этом относительные значения критических скоростей потока зависят только от коэффициента Пуассона: критическая скорость потока меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона.

В случае, в котором отношение ширины пластинки к её длине порядка 10^{-4} и меньше ($\gamma \leq 10^{-4}$), можно считать, что поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа такое же, как и поведение обтекаемой удлиненной пластинки: невозмущённая форма равновесия неустойчива.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733-755.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.
3. Мовчан А.А. Устойчивость лопатки, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т.21. № 5. С.700-706.
4. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с.
5. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65(1). С.29-34.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения
(+374 10) 521503, (+374 10) 580096

E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартirosян Стелла Размиковна – кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.

(+374 10) 524890

E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 07.09.2012

**УЕДИНЁННЫЕ ВОЛНЫ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ
СРЕДЕ КОССЕРА***

Виноградова Ю.В., Ерофеев В.И.

Ключевые слова: среда Коссера, солитоны, периодические волны
Key words: Cosserat medium, solitary waves, periodic waves

Վիճագրադովա Յու. Վ., Երոֆեև Վ. Ի.

Առանձնացված ալիքներ Կոսսերայի երկրաչափորեն ոչ գծային միջավայրում

Հոդվածում քննարկվում է ոչ գծային առանձնացված ալիքների առաջացման հնարավորությունը Կոսսերայի միջավայրում:

Vinogradova Yu.V., Erofeyev V.I.

Solitary waves in the geometrically nonlinear Cosserat medium

In this article we analyze the possibility of formation of nonlinear stationary solitary waves in the Cosserat medium

В статье рассматривается возможность формирования нелинейной уединённой стационарной волны в среде Коссера.

Динамические процессы в среде Коссера, характеризуемой вектором перемещений $\vec{u}$ и вектором поворота $\vec{\phi}$, описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_i = \sigma_{ji,j} + X_i, \\ J \ddot{\phi}_i = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i \end{cases} \quad (1)$$

Здесь u_i – компоненты вектора перемещения; ϕ_i – компоненты вектора поворота; σ_{ij} – тензор напряжений; μ_{ij} – тензор моментов; X_i – компоненты вектора массовых сил; Y_i – компоненты вектора массовых моментов; ρ – плотность; J – мера инерции при вращении; ϵ_{ijk} – тензор Леви-Чивиты, т.е. антисимметричный тензор.

Напряжённое состояние среды Коссера описывается несимметричным тензором напряжений σ_{ji} и тензором моментных напряжений μ_{ji} , вычисляемых по формулам:

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + (\lambda \gamma_{kk} - \nu \theta) \delta_{ij} \\ \mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ij} + (\beta \kappa_{kk} - \chi \theta) \delta_{ij} \end{cases}, \quad (2)$$

где μ, λ – постоянные Ламе, ν, χ – постоянные, зависящие как от механических, так и от тепловых свойств; $\alpha, \gamma, \beta, \varepsilon$ – физические постоянные среды Коссера, характеризующие упругие свойства материала; удовлетворяющие ограничениям: $\alpha \geq 0, (\gamma + \varepsilon) \geq 0, (3\beta + 2\gamma) \geq 0$.

* Статья доложена на Международной конференции научных трудов, посвящённой 100-летию академика Нагуша Арутюняна. 08–12 октября 2012, Цахкадзор, Армения

Деформированное состояние среды Коссера определяется несимметричным тензором деформации γ_{ji} и тензором изгиба-кручения κ_{ji} .

В тензоре деформации и тензоре изгиба-кручения учтём как линейные, так и нелинейные слагаемые в градиентах поворота и перемещения (т.е. учтём геометрическую нелинейность).

$$\begin{cases} \gamma_{ji} = u_{i,j} + u_{i,j} \cdot u_{i,j} - \epsilon_{kji} \Phi_k \\ \kappa_{ji} = \phi_{i,j} + \phi_{i,j} \cdot \phi_{i,j} \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение теплопроводности для несимметричной теории упругости идентично уравнению для симметричной термоупругости [1].

$$\theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} = \eta_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \text{div } \dot{u}, \quad (4)$$

где θ – перепад температуры $\theta = T - T_0$; T_0 – температура естественного состояния; η_0 – коэффициент вязкости $\eta_0 = \frac{\nu T_0}{k}$; κ – константа $\kappa = \frac{k}{c_\epsilon}$, (k –

коэффициент теплопроводности, c_ϵ – теплопроводности при постоянной деформации).

В работе [2] было показано, что при изучении распространения плоских волн, система (1) – (4) может быть разбита на три независимых группы уравнений, одна из которых описывает нелинейную термоупругую продольно-ротационную волну, а две другие – нелинейные волны сдвига и вращения, поляризованные в плоскостях Oy и Oz .

В работе [3] при анализе первой группы уравнений, было показано, что в микрополярной среде может формироваться нелинейная стационарная упругая волна ротационного типа. Такая волна является периодической и движется быстрее, чем волна в линейной среде. Волна имеет пилообразную форму, длина волны увеличивается с ростом её амплитуды.

Далее рассмотрим распространение нелинейной волны сдвига и вращения, поляризованной в плоскости Oz :

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_3 = u_{3,11} (\mu + \alpha) [1 + 2u_{3,1}] + 2\alpha \phi_{2,1} \\ J \ddot{\phi}_2 = \phi_{2,11} (\gamma + \epsilon) [1 + 2\phi_{2,1}] - 2\alpha u_{3,1} - 2\alpha u_{3,1}^2 - 4\alpha \phi_2 \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что на распространение такой волны изменение температуры влияние не оказывает.

Для анализа свойств волны в уравнениях системы (5) перейдём к «бегущей координате», сделав замену $\xi = x - Vt$. Через V обозначена скорость нелинейной стационарной волны. В общем случае эта скорость отлична от скоростей распространения линейных возмущений в микрополярной среде, а именно, от

$c_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\gamma + \epsilon}{J}}$ – скоростей, с которыми распространялись бы волны сдвига

и вращения, если бы они не были связаны между собой, а также скоростей

$$c_3 = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}.$$

Для различных материалов соотношения между характерными скоростями линейных упругих волн могут быть различными.

Система уравнений (5) сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка для упругих деформаций в обыкновенных производных. Будем считать упругие деформации малыми. Проинтегрировав первое уравнение системы

(5) по ξ , введя обозначение $\frac{du_3}{d\xi} = U$, найдём его корни:

$$U_{1,2} = \frac{\rho V^2 - (\mu + \alpha)}{2(\mu + \alpha)} \pm \frac{\rho V^2 - (\mu + \alpha)}{2(\mu + \alpha)} \sqrt{1 - \frac{8\alpha(\mu + \alpha)}{(\rho V^2 - (\mu + \alpha))^2}} \varphi_2$$

Если формулу раскрыть со знаком «плюс», то полученное выражение не удовлетворяет физическому смыслу упругой деформации, поэтому раскроем её со

знаком «минус», предположив, что $\alpha < \mu$. Выражение $\sqrt{1 - \frac{8\alpha(\mu + \alpha)}{(\rho V^2 - (\mu + \alpha))^2}} \varphi_2$

разложим в ряд Тейлора с точностью до $O(x^2)$, что позволит нам прийти к уравнению осциллятора с квадратичной нелинейностью:

$$\frac{d^2 \varphi_2}{d\xi^2} + a\varphi_2 + b\varphi_2^2 = 0 \quad (6)$$

$$\text{где } a = \frac{4\alpha(V^2 - c_t^2)}{(V^2 - c_t^2)J[V^2 - c_t^2]} \text{ и } b = \frac{8\alpha c_3^4}{J[V^2 - c_t^2]^2[V^2 - c_t^2]}$$

Рассмотрим случай формирования солитона без постоянной составляющей. Это возможно, если $a < 0$ $b > 0$ и если $a < 0$ $b < 0$.

Если волна деформации будет иметь постоянную составляющую $\frac{du_3}{d\xi} = \text{const}$,

то перемещение будет равно $u_3 = \text{const} \cdot \xi$. То есть, перемещение будет иметь неограниченный линейный рост, что противоречит физическому смыслу распространения волн, так как с течением времени волна должна затухать, если внутри нет источника (степень свободы, осциллятор), который может усилить волну. Поэтому волны с постоянной составляющей рассматривать не будем.

Проанализируем решения уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью в зависимости от знаков коэффициентов a и b .

1. Случай $a < 0$, $b > 0$.

Этот случай возможен, если скорость нелинейной стационарной волны соотносится с характерными скоростями следующим образом: $v > c_2$, $v < c_t$, $v > c_\tau$.

Согласно работе [4], в этом случае функция потенциальной энергии

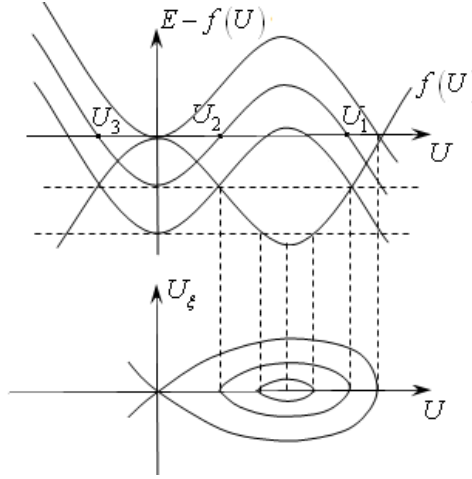
$f(U) = \frac{a}{2}U^2 + \frac{b}{2}U^3$ имеет локальный минимум $f_{\min} = 0$ при $U = 0$ и локальный

максимум $f_{\max} = \frac{a^3}{6b^2}$ при $U = -\frac{a}{b}$. Точка $(0,0)$ на фазовой плоскости (U, U_ξ)

является неустойчивым положением равновесия типа "узел", а точка $\left(-\frac{a}{b}, 0\right)$ – устойчивым положением типа "центр".

На фиг.1а) показана функция потенциальной энергии $f(U)$ и полином

$E - f(U)$ при различных значениях константы интегрирования E . На фиг. 1б) показаны фазовые траектории.



Фиг.1

Решение уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью [5] позволяет сказать, что сепаратрисе соответствует уединённая стационарная волна (солитон), а замкнутым траекториям, окружающим особую точку равновесия типа "центр", соответствует периодическая волна.

Физический смысл имеет солитон, так как у него нет постоянной составляющей.

Решение системы (5) запишется в следующем виде:

$$\varphi(\xi) = -\frac{3(V^2\rho - \mu)(V^2\rho - (\mu + \alpha))}{4\alpha^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\xi\sqrt{\frac{\alpha(V^2\rho - \mu)}{J(V^2\rho - (\mu + \alpha))(V^2\rho - (\gamma + \varepsilon))}}\right)}$$

$$u_3 = -\frac{3(V^2\rho - \mu)}{2\alpha} \operatorname{th}\left(\xi\sqrt{\frac{\alpha(V^2\rho - \mu)}{J(V^2\rho - (\mu + \alpha))(V^2\rho - (\gamma + \varepsilon))}}\right) + \operatorname{const} \quad (7)$$

Последние соотношения показывают, что вращательная составляющая уединённой стационарной волны имеет колоколообразную форму и ведёт себя как солитон положительной полярности, сдвиговая составляющая имеет форму перепада (кинк).

Обозначим через $A_{\text{угла}}$ – амплитуду угла уединённой волны, $A_{\text{деф}}$ – амплитуду деформации уединённой волны, через Δ – её ширину.

В данном случае они примут следующий вид:

$$A_{\text{угла}} = -\frac{3a}{2b} = -\frac{3(v^2 - c_\tau^2)(v^2 - c_t^2)}{4c_3^4}, \quad A_{\text{деф}} = \frac{c_3^4}{(v^2 - c_t^2)} A_{\text{угла}} = -\frac{3(v^2 - c_\tau^2)}{4c_3^2}$$

$$\Delta = \sqrt{-\frac{J(v^2 - c_t^2)(v^2 - c_2^2)}{\alpha(v^2 - c_\tau^2)}}$$

Оценим скорость распространения волны с учётом ограничений, наложенных на амплитуду деформации: $0 < A_{\text{деф}} < 10^{-4}$. В результате получим условия на скорость уединённой волны:

$$c_t^2 < v^2 < c_t^2 + \frac{4}{3}c_3^2 \cdot 10^{-4} \quad (8)$$

Оценим поведение графиков для амплитуды угла и амплитуды деформации, пренебрегая величиной $\frac{c_t^2}{v^2}$ ввиду её малости:

$$A_{\text{угла}} = -\frac{3v^2 \left(1 - \frac{c_t^2}{v^2}\right) v^2 \left(1 - \frac{c_t^2}{v^2}\right)}{4c_3^4} \approx -\frac{3v^2 v^2 \left(-\frac{c_t^2}{v^2}\right)}{4c_3^4} \approx \frac{3v^2 c_t^2}{4c_3^4}$$

$$A_{\text{деф}} = -\frac{3(v^2 - c_t^2)}{4c_3^2} = -\frac{3v^2 \left(1 - \frac{c_t^2}{v^2}\right)}{4c_3^2} \approx -\frac{3v^2}{4c_3^2}$$

Из полученных оценок видим, что амплитуда угла возрастает пропорционально v^2 , а амплитуда деформации убывает пропорционально v^2 .

Ширина уединённой стационарной волны при увеличении скорости (8) убывает.

2. Случай $a < 0$, $b < 0$.

Этот случай не реализуется, так как возникают противоречия между условием на скорости и условием на амплитуду деформации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №12-08-00888, №12-08-90032-Бел)

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
2. Виноградова Ю.В., Ерофеев В.И. Вывод уравнений динамики нелинейной среды Коссера. // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 6 (1). С.159-162
3. Виноградова Ю.В. Распространение нелинейной стационарной волны ротационного типа в среде Коссера. // Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков «Современные методы механики». Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2011. С.31-32
4. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность М.: Физматлит, 2002. 208с.

Сведения об авторах:

Виноградова Юлия Валерьевна – аспирант кафедры теории упругости и пластичности, Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, факультет механико-математический. Тел.: +7-960-185-96-32.

E-mail: yuvinog@gmail.com

Ерофеев Владимир Иванович – доктор физ.-мат. наук, профессор, зам.директора Нижегородского филиала Института машиноведения им. А.А.Благонравова РАН

Тел.: +7(831)-432-05-76. **E-mail:** erf04@sinn.ru

Поступила в редакцию 12.10.2012

ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ СЛОИСТЫХ
ТОНКИХ ПЛАСТИН

Саркисян С.О., Фарманян А.Ж.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, слоистый, пластинка, общая теория
Key words: micropolar, elastic, multilayered, plate, general theory.

Մարգարյան Ս.Հ., Ֆարմանյան Ա.Ժ.

Միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական շերտավոր բարակ սալերի տեսությունը

Աշխատանքում սալի ողջ փաթեթի համար միկրոպոլյար դեպքի համար ընդհանրացված ուղիղ գծի վարկածի հիման վրա կառուցված է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական շերտավոր բարակ սալի ընդհանուր տեսությունը:

Sargsyan S.H., Farmanyan A.J.

Theory of Micropolar Orthotropic Elastic Multilayered Thin Plates

In the present paper general theory of micropolar orthotropic elastic multilayered thin plates is constructed on the basis of generalized for micropolar case kinematic hypothesis of straight line for the whole package of the plate.

В данной работе на основе обобщённой на микрополярный случай кинематической гипотезы прямой линии для всего пакета пластинки построена общая теория микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких пластин.

Введение. Теория анизотропных упругих слоистых тонких пластин и оболочек на основе классической теории упругости построены в работах [1-5 и др.].

В работах [6-11] построены общие математические модели микрополярных изотропных упругих тонких балок, пластин и оболочек. В данной работе, предполагая справедливость обобщённой на микрополярный случай гипотезы прямой линии для всего пакета пластинки в целом, из трёхмерной теории получены основные уравнения и граничные условия теории упругих тонких пластин, собранных из жёстко связанных между собой микрополярных ортотропных слоёв.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим тонкие слоистые пластинки, собранные из n слоев. Материал каждого слоя пластинки подчиняется обобщённому закону Гука для микрополярного ортотропного упругого материала. Предполагается, что все слои пластинки жёстко связаны между собой и работают совместно без скольжения и отрыва.

В качестве исходной плоскости примем срединную плоскость какого-либо k -го слоя или одну из плоскостей контакта между слоями, которую отнесём к криволинейным ортогональным координатам α_1, α_2 . Поперечную координату z будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к исходной плоскости. Введём некоторые обозначения: H_1, H_2 – параметры Ламе, которые зависят только от α_1, α_2 ; z_i – координата верхней границы i -го слоя; z_0, z_n – соответственно, координаты нижней и верхней граничных плоскостей.

Торцевые поверхности пластинки определяются уравнениями $\alpha_1 = \text{const}$ или $\alpha_2 = \text{const}$.

Для каждого слоя пластинки будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости для ортотропного материала с независимыми полями перемещений и вращений [12].

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{11}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{21}^i) + \frac{\partial \sigma_{31}^i}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12}^i - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22}^i &= 0, \\ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{12}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{22}^i) + \frac{\partial \sigma_{32}^i}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{21}^i - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11}^i &= 0, \\ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{13}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{23}^i) + \frac{\partial \sigma_{33}^i}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \mu_{11}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \mu_{21}^i) + \frac{\partial \mu_{31}^i}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \mu_{12}^i - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \mu_{22}^i + (\sigma_{23}^i - \sigma_{32}^i) &= 0, \\ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \mu_{12}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \mu_{22}^i) + \frac{\partial \mu_{32}^i}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \mu_{21}^i - & \\ - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \mu_{11}^i + (\sigma_{31}^i - \sigma_{13}^i) &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \mu_{13}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \mu_{23}^i) + \frac{\partial \mu_{33}^i}{\partial z} + \sigma_{12}^i - \sigma_{21}^i = 0.$$

Обобщённый закон Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^i &= A_{11}^i \gamma_{11}^i + A_{12}^i \gamma_{22}^i + A_{13}^i \gamma_{33}^i, \quad \sigma_{22}^i = A_{12}^i \gamma_{11}^i + A_{22}^i \gamma_{22}^i + A_{23}^i \gamma_{33}^i, \quad \sigma_{33}^i = A_{13}^i \gamma_{11}^i + A_{23}^i \gamma_{22}^i + A_{33}^i \gamma_{33}^i, \\ \sigma_{12}^i &= A_{77}^i \gamma_{12}^i + A_{78}^i \gamma_{21}^i, \quad \sigma_{21}^i = A_{78}^i \gamma_{12}^i + A_{88}^i \gamma_{21}^i, \quad \sigma_{13}^i = A_{56}^i \gamma_{31}^i + A_{66}^i \gamma_{13}^i, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^i &= A_{55}^i \gamma_{31}^i + A_{56}^i \gamma_{13}^i, \quad \sigma_{23}^i = A_{44}^i \gamma_{23}^i + A_{45}^i \gamma_{32}^i, \quad \sigma_{32}^i = A_{45}^i \gamma_{23}^i + A_{55}^i \gamma_{32}^i, \\ \mu_{11}^i &= B_{11}^i \chi_{11}^i + B_{12}^i \chi_{22}^i + B_{13}^i \chi_{33}^i, \quad \mu_{22}^i = B_{12}^i \chi_{11}^i + B_{22}^i \chi_{22}^i + B_{23}^i \chi_{33}^i, \quad \mu_{33}^i = B_{13}^i \chi_{11}^i + B_{23}^i \chi_{22}^i + B_{33}^i \chi_{33}^i, \\ \mu_{12}^i &= B_{77}^i \chi_{12}^i + B_{78}^i \chi_{21}^i, \quad \mu_{21}^i = B_{78}^i \chi_{12}^i + B_{88}^i \chi_{21}^i, \quad \mu_{13}^i = B_{56}^i \chi_{31}^i + B_{66}^i \chi_{13}^i, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\mu_{31}^i = B_{55}^i \chi_{31}^i + B_{56}^i \chi_{13}^i, \quad \mu_{23}^i = B_{44}^i \chi_{23}^i + B_{45}^i \chi_{32}^i, \quad \mu_{32}^i = B_{45}^i \chi_{23}^i + B_{55}^i \chi_{32}^i,$$

либо в обратной форме

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^i &= a_{11}^i \sigma_{11}^i + a_{12}^i \sigma_{22}^i + a_{13}^i \sigma_{33}^i, \quad \gamma_{22}^i = a_{12}^i \sigma_{11}^i + a_{22}^i \sigma_{22}^i + a_{23}^i \sigma_{33}^i, \quad \gamma_{33}^i = a_{13}^i \sigma_{11}^i + a_{23}^i \sigma_{22}^i + a_{33}^i \sigma_{33}^i, \\ \gamma_{12}^i &= a_{77}^i \sigma_{12}^i + a_{78}^i \sigma_{21}^i, \quad \gamma_{21}^i = a_{78}^i \sigma_{12}^i + a_{88}^i \sigma_{21}^i, \quad \gamma_{13}^i = a_{56}^i \sigma_{31}^i + a_{66}^i \sigma_{13}^i, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{31}^i &= \tilde{a}_{55}^i \sigma_{31}^i + a_{56}^i \sigma_{13}^i, \quad \gamma_{23}^i = a_{44}^i \sigma_{23}^i + a_{45}^i \sigma_{32}^i, \quad \gamma_{32}^i = a_{45}^i \sigma_{23}^i + a_{55}^i \sigma_{32}^i, \\ \chi_{11}^i &= b_{11}^i \mu_{11}^i + b_{12}^i \mu_{22}^i + b_{13}^i \mu_{33}^i, \quad \chi_{22}^i = b_{12}^i \mu_{11}^i + b_{22}^i \mu_{22}^i + b_{23}^i \mu_{33}^i, \quad \chi_{33}^i = b_{13}^i \mu_{11}^i + b_{23}^i \mu_{22}^i + b_{33}^i \mu_{33}^i, \\ \chi_{12}^i &= b_{77}^i \mu_{12}^i + b_{78}^i \mu_{21}^i, \quad \chi_{21}^i = b_{78}^i \mu_{12}^i + b_{88}^i \mu_{21}^i, \quad \chi_{13}^i = b_{56}^i \mu_{31}^i + b_{66}^i \mu_{13}^i, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\chi_{31}^i = \tilde{b}_{55}^i \mu_{31}^i + b_{56}^i \mu_{13}^i, \quad \chi_{23}^i = b_{44}^i \mu_{23}^i + b_{45}^i \mu_{32}^i, \quad \chi_{32}^i = b_{45}^i \mu_{23}^i + b_{55}^i \mu_{32}^i.$$

Геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_1^i}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} V_2^i, \quad \gamma_{22}^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_2^i}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} V_1^i, \quad \gamma_{33}^i = \frac{\partial V_3^i}{\partial z}, \\ \gamma_{12}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_2^i}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} V_1^i - \omega_3^i, \quad \gamma_{21}^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_1^i}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} V_2^i + \omega_3^i, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{13}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_3^i}{\partial \alpha_1} + \omega_2^i, \quad \gamma_{31}^i = \frac{\partial V_1^i}{\partial z} - \omega_2^i, \quad \gamma_{23}^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_3^i}{\partial \alpha_2} - \omega_1^i, \quad \gamma_{32}^i = \frac{\partial V_2^i}{\partial z} + \omega_1^i, \\
\chi_{11}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_1^i}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \omega_2^i, \quad \chi_{22}^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_2^i}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \omega_1^i, \\
\chi_{33}^i &= \frac{\partial \omega_3^i}{\partial z}, \quad \chi_{12}^i = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_2^i}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \omega_1^i, \quad \chi_{21}^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_1^i}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \omega_2^i, \\
\chi_{13}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_3^i}{\partial \alpha_1}, \quad \chi_{31}^i = \frac{\partial \omega_1^i}{\partial z}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \chi_{23}^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_3^i}{\partial \alpha_2}, \quad \chi_{32}^i = \frac{\partial \omega_2^i}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь для i -го слоя $\hat{\sigma}^i, \hat{\mu}^i$ – тензоры силовых и моментных напряжений; $\hat{\gamma}^i, \hat{\chi}^i$ – тензоры деформаций и изгиба-кручений; $\vec{V}^i, \vec{\omega}^i$ – векторы перемещений и независимого поворота соответственно; $\hat{A}^i, \hat{B}^i$ или $\hat{a}^i, \hat{b}^i$ – тензоры модулей упругости для микрополярного ортотропного материала.

Условия сопряжения слоёв для перемещений и свободных поворотов записываются в виде:

$$V_1^i = V_1^{i+1}, \quad V_2^i = V_2^{i+1}, \quad V_3^i = V_3^{i+1}, \tag{1.9}$$

$$\omega_1^i = \omega_1^{i+1}, \quad \omega_2^i = \omega_2^{i+1}, \quad \omega_3^i = \omega_3^{i+1} \tag{1.10}$$

при $z = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$),

а условия сопряжения слоёв для силовых и моментных напряжений формулируются так:

$$\sigma_{31}^i = \sigma_{31}^{i+1}, \quad \sigma_{32}^i = \sigma_{32}^{i+1}, \quad \sigma_{33}^i = \sigma_{33}^{i+1}, \tag{1.11}$$

$$\mu_{31}^i = \mu_{31}^{i+1}, \quad \mu_{32}^i = \mu_{32}^{i+1}, \quad \mu_{33}^i = \mu_{33}^{i+1} \tag{1.12}$$

при $z = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

На лицевых плоскостях пластинки ($z = z_n, z = z_0$) выполняются условия первой граничной задачи:

$$\sigma_{31}^{n,0} = \pm q_1^\pm, \quad \sigma_{32}^{n,0} = \pm q_2^\pm, \quad \sigma_{33}^{n,0} = \pm q_3^\pm, \tag{1.13}$$

$$\mu_{31}^{n,0} = \pm m_1^\pm, \quad \mu_{32}^{n,0} = \pm m_2^\pm, \quad \mu_{33}^{n,0} = \pm m_3^\pm. \tag{1.14}$$

Граничные условия на торцевых плоскостях пластинки $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$ могут быть сформулированы в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

2. Основные гипотезы. Будем считать, что слоистая пластинка тонкая, т.е. $2h \ll a$, где $2h$ – общая толщина пластинки, a – характерный размер в плане пластинки. При построении теории многослойных микрополярных ортотропных упругих тонких пластин будем пользоваться гипотезами, суть которых состоит в следующем.

1) Примем, что для всего пакета пластинки в целом, как и для ранее рассмотренного случая однослойных изотропных пластин [7], справедлива обобщённая на микрополярный случай гипотеза прямой линии.

В соответствии с указанной гипотезой имеем линейный закон изменения перемещений и свободных вращений по толщине всего пакета:

$$V_1^i = u_1 + z\psi_1, \quad V_2^i = u_2 + z\psi_2, \quad V_3^i = w, \quad (2.1)$$

$$\omega_1^i = \Omega_1, \quad \omega_2^i = \Omega_2, \quad \omega_3^i = \Omega_3 + z\iota, \quad (2.2)$$

где u_1, u_2, w – перемещения точек координатной плоскости в направлениях осей α_1, α_2, z ; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – свободные повороты этих же точек вокруг осей α_1, α_2, z соответственно; ψ_1, ψ_2 – полные углы поворота первоначально нормального элемента; ι – интенсивность поворота точек нормального элемента вокруг оси z .

Отметим, что указанная кинематическая гипотеза – только для перемещений ((2.1)), это, по сути дела, известная гипотеза Тимошенко в классической теории пластин или оболочек [3,4]. С этой точки зрения гипотеза (2.1), (2.2) в целом в работах [6-11] была названа обобщённой на микрополярный случай кинематической гипотезой Тимошенко.

Кинематическая гипотеза (2.1), (2.2) дополняется следующими статическими гипотезами:

2) о малости для каждого i -го слоя силового напряжения σ_{33}^i по сравнению с другими компонентами тензора силовых напряжений в уравнениях обобщённого закона Гука (1.5);

3) о малости моментных напряжений μ_{31}^i, μ_{32}^i по сравнению с моментными напряжениями μ_{13}^i, μ_{23}^i (в соответствующих уравнениях обобщенного закон Гука (1.6) для каждого i -го слоя μ_{31}^i, μ_{32}^i пренебрегаются относительно μ_{13}^i, μ_{23}^i);

4) при определении в каждом слое деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений сначала для силовых напряжений $\sigma_{31}^i, \sigma_{32}^i$ и моментного напряжения μ_{33}^i примем

$$\sigma_{31}^i = {}^0\sigma_{31}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{32}^i = {}^0\sigma_{32}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{33}^i = {}^0\mu_{33}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.3)$$

После определения указанных величин, окончательные выражения для $\sigma_{31}^i, \sigma_{32}^i, \mu_{33}^i$ определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования соответствующего уравнения равновесия из (1.1), (1.2) с требованием для последнего слагаемого условие: о равенстве нулю усреднённой по толщине пластинки величины.

Кинематическая гипотеза прямой линии, сформулированная для всего пакета пластинки в целом, привела к геометрическим соотношениям (2.1), (2.2), вследствие чего геометрические условия контакта (1.9), (1.10) выполняются автоматически.

3. Законы распределения компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений по толщине i -го слоя.

В соответствии с принятым законом распределения перемещений и свободных поворотов ((2.1), (2.2)), подставляя их в геометрические формулы (1.7), (1.8) и сохраняя в выражениях только линейные члены по z , находим:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^i &= \Gamma_{11}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{11}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{22}^i &= \Gamma_{22}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{22}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{33}^i &= 0, \\ \gamma_{12}^i &= \Gamma_{12}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{12}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{21}^i &= \Gamma_{21}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{21}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \gamma_{13}^i &= \Gamma_{13}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{31}^i &= \Gamma_{31}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{23}^i &= \Gamma_{23}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{32}^i &= \Gamma_{32}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \chi_{11}^i &= k_{11}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{22}^i &= k_{22}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{33}^i &= k_{33}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{12}^i &= k_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\chi_{21}^i &= k_{21}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{13}^i = k_{13}(\alpha_1, \alpha_2) + z l_{13}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{31}^i = 0, \\ \chi_{23}^i &= k_{23}(\alpha_1, \alpha_2) + z l_{23}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{32}^i = 0.\end{aligned}\quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_2, \\ \Gamma_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_1, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_1 - \Omega_3, \\ \Gamma_{21} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_2 + \Omega_3, \quad \Gamma_{13} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \Omega_2, \\ \Gamma_{23} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \Omega_1, \quad \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1.\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}K_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \psi_2, \quad K_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \psi_1, \\ K_{12} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \psi_1 - \mathfrak{t}, \quad K_{21} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \psi_2 + \mathfrak{t}, \\ k_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \Omega_2, \quad k_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \Omega_1, \\ k_{33} &= \mathfrak{t}, \quad k_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \Omega_1, \quad k_{21} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \Omega_2, \\ k_{13} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_1}, \quad l_{13} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial \alpha_1}, \quad k_{23} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_2}, \quad l_{23} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial \alpha_2}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Здесь $\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}$ – компоненты тангенциальной деформации в исходной плоскости; $\Gamma_{13}, \Gamma_{23}, \Gamma_{31}, \Gamma_{32}$ – компоненты сдвиговой деформации; $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}, k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{12}, k_{21}, k_{13}, k_{31}, k_{23}, k_{32}$ – компоненты изгибно-крутильных деформаций исходной плоскости; l_{13}, l_{23} – компоненты гипер-крутильно-сдвиговых деформаций.

4. Законы распределения компонентов тензоров силовых и моментных напряжений по толщине i -го слоя.

На основе обобщённого закона Гука (1.5), (1.6), имея в виду статические гипотезы 2-4, для силовых и моментных напряжений для i -го слоя пластинки получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^i &= \sigma_{11}^{0i}(\alpha_1, \alpha_2) + z \sigma_{11}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{22}^i = \sigma_{22}^{0i}(\alpha_1, \alpha_2) + z \sigma_{22}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \sigma_{12}^i &= \sigma_{12}^{0i}(\alpha_1, \alpha_2) + z \sigma_{12}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{21}^i = \sigma_{21}^{0i}(\alpha_1, \alpha_2) + z \sigma_{21}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \sigma_{13}^i &= \sigma_{13}^{0i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{23}^i = \sigma_{23}^{0i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{11}^i = \mu_{11}^{0i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{22}^i = \mu_{22}^{0i}(\alpha_1, \alpha_2),\end{aligned}\quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{31}^i &= \sigma_{31}^0(\alpha_1, \alpha_2) + \left[z - \frac{z_i + z_{i-1}}{2} \right] \sigma_{31}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2) + \left[z^2 - \frac{z_{i-1}^2 + z_{i-1}z_i + z_i^2}{3} \right] \sigma_{31}^{2i}(\alpha_1, \alpha_2), \\
\sigma_{32}^i &= \sigma_{32}^0(\alpha_1, \alpha_2) + \left[z - \frac{z_i + z_{i-1}}{2} \right] \sigma_{32}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2) + \left[z^2 - \frac{z_{i-1}^2 + z_{i-1}z_i + z_i^2}{3} \right] \sigma_{32}^{2i}(\alpha_1, \alpha_2), \\
\mu_{12}^i &= \mu_{12}^0(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{21}^i = \mu_{21}^0(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{33}^i = \sigma_{33}^0(\alpha_1, \alpha_2) + z \sigma_{33}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2), \\
\mu_{31}^i &= \mu_{31}^0(\alpha_1, \alpha_2) + z \mu_{31}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{32}^i = \mu_{32}^0(\alpha_1, \alpha_2) + z \mu_{32}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2), \\
\mu_{13}^i &= \mu_{13}^0(\alpha_1, \alpha_2) + z \mu_{13}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{23}^i = \mu_{23}^0(\alpha_1, \alpha_2) + z \mu_{23}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (4.2) \\
\mu_{33}^i &= \mu_{33}^0 + \left[z - \frac{z_i + z_{i-1}}{2} \right] \mu_{33}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2) + \left[z^2 - \frac{z_{i-1}^2 + z_{i-1}z_i + z_i^2}{3} \right] \mu_{33}^{2i}(\alpha_1, \alpha_2),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{0i} &= \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \Gamma_{11} - \frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \Gamma_{22}, \quad \sigma_{11}^{1i} = \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} K_{11} - \frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} K_{22}, \\
\sigma_{22}^{0i} &= \frac{a_{11}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \Gamma_{22} - \frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \Gamma_{11}, \quad \sigma_{22}^{1i} = \frac{a_{11}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} K_{22} - \frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} K_{11}, \\
\sigma_{12}^{0i} &= \frac{a_{88}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \Gamma_{12} - \frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \Gamma_{21}, \quad \sigma_{12}^{1i} = \frac{a_{88}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} K_{12} - \frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} K_{21}, \quad (4.3) \\
\sigma_{21}^{0i} &= \frac{a_{77}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \Gamma_{21} - \frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \Gamma_{12}, \quad \sigma_{21}^{1i} = \frac{a_{77}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} K_{21} - \frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} K_{12}, \\
\sigma_{13}^{0i} &= \frac{\tilde{a}_{55}^i}{\tilde{a}_{55}^i a_{66}^i - (a_{56}^i)^2} \Gamma_{13} - \frac{a_{56}^i}{\tilde{a}_{55}^i a_{66}^i - (a_{56}^i)^2} \Gamma_{31}, \quad \sigma_{13}^{0i} = \frac{a_{55}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2} \Gamma_{23} - \frac{a_{45}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2} \Gamma_{32}, \\
\sigma_{31}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(H_2 \sigma_{11}^{0i} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(H_1 \sigma_{21}^{0i} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12}^{0i} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_2} \sigma_{22}^{0i}, \\
\sigma_{31}^{2i}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(H_2 \sigma_{11}^{1i} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(H_1 \sigma_{21}^{1i} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12}^{1i} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22}^{1i} \right\}, \\
\sigma_{32}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(H_2 \sigma_{12}^{0i} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(H_1 \sigma_{22}^{0i} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{21}^{0i} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11}^{0i}, \\
\sigma_{32}^{2i}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(H_2 \sigma_{12}^{1i} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(H_1 \sigma_{22}^{1i} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{21}^{1i} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11}^{1i} \right\}, \\
\sigma_{33}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(H_2 \sigma_{13}^{0i} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(H_1 \sigma_{23}^{0i} \right), \\
\sigma_{31}^{0i} &= \frac{a_{66}^i}{\tilde{a}_{55}^i a_{66}^i - (a_{56}^i)^2} \Gamma_{31} - \frac{a_{56}^i}{\tilde{a}_{55}^i a_{66}^i - (a_{56}^i)^2} \Gamma_{13}, \quad \sigma_{32}^{0i} = \frac{a_{44}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2} \Gamma_{32} - \frac{a_{45}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2} \Gamma_{23}, \\
\mu_{11}^{0i} &= \frac{b_{22}^i b_{33}^i - (b_{23}^i)^2}{\Delta} k_{11} + \frac{b_{13}^i b_{23}^i - b_{12}^i b_{33}^i}{\Delta} k_{22} + \frac{b_{12}^i b_{23}^i - b_{22}^i b_{13}^i}{\Delta} \mathfrak{l},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{22}^{0i} &= \frac{b_{13}^i b_{23}^i - b_{12}^i b_{33}^i}{\Delta} k_{11} + \frac{b_{11}^i b_{33}^i - (b_{13}^i)^2}{\Delta} k_{22} + \frac{b_{12}^i b_{13}^i - b_{11}^i b_{23}^i}{\Delta} l, \\
\mu_{33}^{0i} &= \frac{b_{12}^i b_{23}^i - b_{13}^i b_{22}^i}{\Delta} k_{11} + \frac{b_{12}^i b_{13}^i - b_{11}^i b_{23}^i}{\Delta} k_{22} + \frac{b_{11}^i b_{22}^i - (b_{12}^i)^2}{\Delta} l, \quad \Delta = \begin{vmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{13}^i \\ b_{12}^i & b_{22}^i & b_{23}^i \\ b_{13}^i & b_{23}^i & b_{33}^i \end{vmatrix}, \\
\mu_{12}^{0i} &= \frac{b_{88}^i}{b_{77}^i b_{88}^i - (b_{78}^i)^2} k_{12} - \frac{b_{78}^i}{b_{77}^i b_{88}^i - (b_{78}^i)^2} k_{21}, \\
\mu_{21}^{0i} &= \frac{b_{77}^i}{b_{77}^i b_{88}^i - (b_{78}^i)^2} k_{21} - \frac{b_{78}^i}{b_{77}^i b_{88}^i - (b_{78}^i)^2} k_{12}, \\
\mu_{31}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(H_2 \mu_{11}^{0i} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(H_1 \mu_{21}^{0i} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \mu_{12}^{0i} + \\
&+ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \mu_{22}^{0i} - \left(\sigma_{23}^{0i} - \sigma_{32}^{0i} \right), \\
\mu_{32}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(H_2 \mu_{12}^{0i} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(H_1 \mu_{22}^{0i} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \mu_{21}^{0i} + \\
&+ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \mu_{11}^{0i} - \left(\sigma_{31}^{0i} - \sigma_{13}^{0i} \right), \\
\mu_{33}^{1i}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(H_2 \mu_{13}^{0i} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(H_1 \mu_{23}^{0i} \right) - \left(\sigma_{12}^{0i} - \sigma_{21}^{0i} \right), \\
\mu_{33}^{2i}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(H_2 \mu_{13}^{1i} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(H_1 \mu_{23}^{1i} \right) + \left(\sigma_{12}^{1i} - \sigma_{21}^{1i} \right) \right], \\
\mu_{13}^{0i} &= \frac{1}{b_{66}^i} k_{13}, \quad \mu_{13}^{1i} = \frac{1}{b_{66}^i} l_{13}, \quad \mu_{23}^{0i} = \frac{1}{b_{44}^i} k_{23}, \quad \mu_{23}^{1i} = \frac{1}{b_{44}^i} l_{23}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

5. Внутренние усилия, моменты и гипермоменты.

С целью приведения трёхмерной задачи к двумерной, что уже выполнено для перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в теории микрополярных слоистых пластин вместо компонент тензоров напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные по толщине пакета пластинки характеристики – усилия, моменты и гипермоменты:

$$T_{11} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \sigma_{11}^i dz, \quad T_{22} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \sigma_{22}^i dz, \quad S_{12} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \sigma_{12}^i dz, \quad S_{21} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \sigma_{21}^i dz, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} z \sigma_{11}^i dz, \quad M_{22} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} z \sigma_{22}^i dz, \quad H_{12} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} z \sigma_{12}^i dz, \quad H_{21} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} z \sigma_{21}^i dz, \\
L_{11} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{11}^i dz, \quad L_{22} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{22}^i dz, \quad L_{12} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{12}^i dz, \quad L_{21} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{21}^i dz, \\
L_{33} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{33}^i dz, \quad L_{13} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{13}^i dz, \quad L_{23} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{23}^i dz, \\
\Lambda_{13} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} z \mu_{13}^i dz, \quad \Lambda_{23} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} z \mu_{23}^i dz.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

6. Основная система уравнений микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Двумерная система уравнений равновесия может быть получена из равенств, определяющих силовые и моментные напряжения $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}$, в результате удовлетворения статических условий сопряжения слоёв (1.11), (1.12) и статических граничных условий на лицевых плоскостях пластинки $z = z_0$, $z = z_n$ (1.13), (1.14).

Таким образом, будем иметь следующие

уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{H_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} (T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial S_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} (S_{21} + S_{12}) &= -(q_1^+ + q_1^-), \\
\frac{1}{H_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} (T_{22} - T_{11}) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} (S_{12} + S_{21}) &= -(q_2^+ + q_2^-), \\
\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 N_{13}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 N_{23}) &= -(q_3^+ + q_3^-),
\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$N_{31} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} (M_{11} - M_{22}) - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} (H_{21} + H_{12}) = z_n q_1^+ + z_0 q_1^-,$$

$$N_{32} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} (M_{22} - M_{11}) - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} (H_{12} + H_{21}) = z_n q_2^+ + z_0 q_2^-,$$

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial L_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial L_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} (L_{11} - L_{22}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} (L_{21} + L_{12}) + N_{23} - N_{32} = -(m_1^+ + m_1^-),$$

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial L_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} (L_{22} - L_{11}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} (L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} = -(m_2^+ + m_2^-),$$

$$\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 L_{13}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 L_{23}) + S_{12} - S_{21} = -(m_3^+ + m_3^-), \tag{6.2}$$

$$L_{33} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \Lambda_{13}) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \Lambda_{23}) - (H_{12} - H_{21}) = z_n m_3^+ + z_0 m_3^-.$$

Усилия, моменты и гипермоменты, приложенные к исходной плоскости пакета пластинки определим, используя для силовых и моментных напряжений формулы (4.1)-(4.4) и применяя зависимости (5.1), (5.2). Будем иметь следующие

соотношения упругости:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= C_{11}\Gamma_{11} + C_{12}\Gamma_{22} + R_{11}K_{11} + R_{12}K_{22}, & T_{22} &= C_{12}\Gamma_{11} + C_{22}\Gamma_{22} + R_{12}K_{11} + R_{22}K_{22}, \\
S_{12} &= C_{88}\Gamma_{12} + C_{78}\Gamma_{21} + R_{88}K_{12} + R_{78}K_{21}, & S_{21} &= C_{77}\Gamma_{21} + C_{78}\Gamma_{12} + R_{77}K_{21} + R_{78}K_{12}, \\
N_{13} &= \tilde{C}_{55}\Gamma_{13} + C_{56}\Gamma_{31}, & N_{23} &= C_{55}\Gamma_{23} + C_{45}\Gamma_{32}, & N_{31} &= C_{66}\Gamma_{31} + C_{56}\Gamma_{13}, \\
N_{32} &= C_{44}\Gamma_{32} + C_{45}\Gamma_{23}, & M_{11} &= D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22} + R_{11}\Gamma_{11} + R_{12}\Gamma_{22}, \\
M_{22} &= D_{12}K_{11} + D_{22}K_{22} + R_{12}\Gamma_{11} + R_{22}\Gamma_{22}, & H_{12} &= D_{88}K_{12} + D_{78}K_{21} + R_{88}\Gamma_{12} + R_{78}\Gamma_{21}, \\
H_{21} &= D_{77}K_{21} + D_{78}K_{12} + R_{77}\Gamma_{21} + R_{78}\Gamma_{12},
\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= d_{11}k_{11} + d_{12}k_{22} + d_{13}l, & L_{22} &= d_{12}k_{11} + d_{22}k_{22} + d_{23}l, & L_{33} &= d_{13}k_{11} + d_{23}k_{22} + d_{33}l, \\
L_{12} &= d_{88}k_{12} + d_{78}k_{21}, & L_{21} &= d_{78}k_{12} + d_{77}k_{21}, & L_{13} &= d_{66}k_{13} + \eta_{66}l_{13}, \\
L_{23} &= d_{44}k_{23} + \eta_{44}l_{23}, & \Lambda_{13} &= \lambda_{66}l_{13} + \eta_{66}k_{13}, & \Lambda_{23} &= \lambda_{44}l_{23} + \eta_{44}k_{23},
\end{aligned} \tag{6.4}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), & C_{12} &= -\sum_{i=1}^n \frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), \\
R_{11} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), & R_{12} &= -\sum_{i=1}^n \frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \\
C_{22} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{11}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), & R_{22} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{11}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \\
C_{88} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{88}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), & C_{78} &= -\sum_{i=1}^n \frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), \\
R_{88} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{88}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), & R_{78} &= -\sum_{i=1}^n \frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \\
C_{77} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{77}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), & R_{77} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{77}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \\
\tilde{C}_{55} &= \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{a}_{55}^i}{\tilde{a}_{55}^i a_{66}^i - (a_{56}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), & C_{56} &= -\sum_{i=1}^n \frac{a_{56}^i}{\tilde{a}_{55}^i a_{66}^i - (a_{56}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), \\
C_{55} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{55}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), & C_{45} &= -\sum_{i=1}^n \frac{a_{45}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), \\
C_{44} &= \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \frac{a_{44}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2}, & C_{66} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{66}^i}{\tilde{a}_{55}^i a_{66}^i - (a_{56}^i)^2} (z_i - z_{i-1}),
\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3), & D_{12} &= - \sum_{i=1}^n \frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3), \\
D_{22} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{11}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3), & D_{88} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{88}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3), \\
D_{78} &= - \sum_{i=1}^n \frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3), & D_{77} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{77}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3), \quad (6.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{88} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{88}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), & R_{78} &= - \sum_{i=1}^n \frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \\
d_{11} &= \sum_{i=1}^n \frac{b_{22}^i b_{33}^i - (b_{23}^i)^2}{\Delta} (z_i - z_{i-1}), & d_{12} &= \sum_{i=1}^n \frac{b_{13}^i b_{23}^i - b_{12}^i b_{33}^i}{\Delta} (z_i - z_{i-1}), \\
d_{13} &= \sum_{i=1}^n \frac{b_{12}^i b_{23}^i - b_{22}^i b_{13}^i}{\Delta} (z_i - z_{i-1}), & d_{22} &= \sum_{i=1}^n \frac{b_{11}^i b_{33}^i - (b_{13}^i)^2}{\Delta} (z_i - z_{i-1}), \quad (6.7) \\
d_{23} &= \sum_{i=1}^n \frac{b_{12}^i b_{13}^i - b_{11}^i b_{23}^i}{\Delta} (z_i - z_{i-1}), & d_{33} &= \sum_{i=1}^n \frac{b_{11}^i b_{22}^i - (b_{12}^i)^2}{\Delta} (z_i - z_{i-1}), \\
d_{77} &= \sum_{i=1}^n \frac{b_{77}^i}{b_{77}^i b_{88}^i - (b_{78}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), & d_{78} &= - \sum_{i=1}^n \frac{b_{78}^i}{b_{77}^i b_{88}^i - (b_{78}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), \\
d_{88} &= \sum_{i=1}^n \frac{b_{88}^i}{b_{77}^i b_{88}^i - (b_{78}^i)^2} (z_i - z_{i-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{66} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_{66}^i} (z_i - z_{i-1}), & d_{44} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_{44}^i} (z_i - z_{i-1}), & \eta_{66} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{b_{66}^i} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \\
\eta_{44} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{b_{44}^i} (z_i^2 - z_{i-1}^2), & \lambda_{66} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \frac{1}{b_{66}^i} (z_i^3 - z_{i-1}^3), & \lambda_{44} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \frac{1}{b_{44}^i} (z_i^3 - z_{i-1}^3). \quad (6.8)
\end{aligned}$$

7. Граничные условия. Отметим, что в построенной теории микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких пластин, когда для всего пакета пластинки в целом справедлива обобщённая гипотеза прямой линии, граничные условия (естественные) ничем не будут отличаться от соответствующих граничных условий теории микрополярных изотропных однослойных оболочек [8-11].

Граничные условия (при $\alpha_1 = \text{const}$)

$$\begin{aligned}
T_{11} &= T_{11}^* \quad \text{или} \quad u_1 = u_1^*, & S_{12} &= S_{12}^* \quad \text{или} \quad u_2 = u_2^*, & N_{13} &= N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^*, \\
M_{11} &= M_{11}^* \quad \text{или} \quad K_{11} = K_{11}^*, & H_{12} &= H_{12}^* \quad \text{или} \quad K_{12} = K_{12}^*, \quad (6.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= L_{11}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{11} = \kappa_{11}^*, & L_{12} &= L_{12}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, \\
L_{13} &= L_{13}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, & \Lambda_{13} &= \Lambda_{13}^* \quad \text{или} \quad l_{13} = l_{13}^*. \quad (6.10)
\end{aligned}$$

8. Заключение. Основным результатом работы представляет собой построение общей теории микрополярных упругих ортотропных слоистых тонких пластин (основные уравнения – это уравнения равновесия (6.1), (6.2); соотношения упругости (6.3), (6.4); геометрические соотношения (3.3), (3.4); граничные условия: (6.9), (6.10)).

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности, проведённого Государственным комитетом по науке МОН Республики Армении в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. Киев: Наукова думка, 1981. 544с.
4. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчёт пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288с.
5. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций М.: Машиностроение, 1980. 376с.
6. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micro polar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
7. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №1. С.58-67.
8. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. 2011.Т.14. №1.С.55-66.
9. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады РАН. 2011. Т.436. №2. С.195-198.
10. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells //Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer.2011.Vol.15. P.91-100.
11. Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Математическая модель микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких оболочек //Вестник Пермского национально-исследовательского политехнического университета. Механика. 2011. №3. С.128-145.
12. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович,

Чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.

Тел.: (093) 15 16 98

E-mail: slusin@yahoo.com

Фарманян Анаит Жораявна,

Кандидат физ-мат. наук, доцент, проректор по науке и внешним связям Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.

Тел.: (077) 80 24 25

E-mail: afarmanyanyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 17.04.2012

Содержание 65 тома 2012 г. «Известия НАН Армении. Механика»

- **Аветисян Г.Р. – см. № 13**
- 1. **Азатян Г.Л., Геворкян Р.С., Погосян А.М.** – Асимптотическое решение задачи электроупругости пьезокерамической неоднородной пластины с круговым отверстием и толщиной поляризации 2–14
- 2. **Айрапетян Г.С., Саркисян С.О.** – Теория микрополярных ортотропных упругих тонких пластин 3–22
- 3. **Акопян В.Н., Амирджанян А.А.** – К вопросу передачи нагрузок от деформируемых включений к бесконечной вязкоупругой пластине с разрезами 4–6
- 4. **Александр Паруйрович Сейранян** – К 65-летию со дня рождения 1–5
- 5. **Амбарцумян С.Р.** – Об устойчивости по действующей силе в критическом случае при k нулевых и q пар чисто мнимых корней 1–72
- **Амирджанян А.А. – см. №3**
- 6. **Амирджанян А.А., Саакян А.В.** – О вдавливании жёсткого штампа с вогнутым основанием в упругую полуплоскость с учётом влияния наполнителя в каверне 1–7
- 7. **Арутюнян Л.А.** – Плоские задачи со смешанными краевыми условиями для составной плоскости с трещинами 3–5
- 8. **Арутюнян Н.Х.** – К 100-летию со дня рождения 4–3
- 9. **Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Григорян Г.** – Флаттер гибкой пластинки в неоднородном температурном поле 4–33
- 10. **Белубекян М.В., Мартirosян С.Р.** – Локализованная неустойчивость упругой пластины–полосы, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа 1–29
- 11. **Белубекян М.В., Мартirosян С.Р.** – Об одной задаче устойчивости прямоугольной пластинки с двумя свободными краями в сверхзвуковом потоке газа, набегающим на её свободный край 4–55
- 12. **Белубекян М.В., Мартirosян С.Р.** – Об устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край 3–34
- 13. **Белубекян Э.В., Погосян А.Г., Аветисян Г.Р.** – Оптимизация прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала при изгибе 1–35
- 14. **Валесян С.Ш.** – Исследование диссипативных свойств гетинакса с учётом температурного поля 2–71
- 15. **Васильева Ю.О.** – Межфазная трещина, частично подкреплённая жёсткой накладкой, в поле действия сосредоточенных сил 4–21
- 16. **Вермишян Г. Б.** – Распределение температуры в вязкоупругой пластинке с вложенной шайбой при вибрационной нагрузке 3–41
- 17. **Виноградова Ю.В., Ерофеев В.И.** – Уединённые волны в геометрически нелинейной среде Коссера 4–65
- 18. **Габриелян Миша Саркисович** – К 75-летию со дня рождения 2–3
- **Геворкян Р.С. – см. №1**
- **Григорян Г. – см. № 9**
- 19. **Григорян Э.Х., Синанян С.С.** – Дифракция сдвиговой поверхностной электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем 1–51
- **Ерофеев В.И. – см. № 17**
- 20. **Закарян Т.В.** – К решению первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления 2–5

21. **Карапетян К.А., Клекчян Д.Г., Манукян Е.С.** – Влияние масштабного фактора на вызванную десорбцией влаги ползучесть старого бетона при одноосном сжатии 3–54
22. **Карапетян К.А., Клекчян Д.Г., Манукян Е.С.** – Влияние масштабного фактора на сопротивляемость влажностной усадке старого бетона 2–77
23. **Киракосян Размик Макарович** – К 75-летию со дня рождения 3–3
24. **Кириллова О.И.** – Гармонические колебания продольного сдвига бесконечного цилиндра произвольного сечения с системой включений 4–26
 - **Клекчян Д.Г.** – см. №№ 21, 22
25. **Маргарян Л.М., Саркисян С.О.** – Математические модели динамики микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких балок 1–17
26. **Матвийчук К.С.** – Условия технической устойчивости нестационарных процессов автоматического управления переменной структуры с взаимосвязанными формирующими и фильтрующими подсистемами управляющих сигналов 2–52
 - **Манукян Е.С.** – см. №№ 21, 22
 - **Мартirosян С.Р.** – см. №№ 10, 11, 12
 - **Микилян М.А.** – см. № 9
27. **Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.** – К устойчивости упругих систем при движущихся нагрузках 1–62
 - **Моталлеби С.Р.** – см. № 29
 - **Нерсисян Г.Г.** – см. № 27
28. **Пахлавияни Али Г.** – О напряжённом состоянии кусочно-однородного упругого прямоугольника с двумя симметричными трещинами при антиплоской деформации 3–10
 - **Петросян А.Г.** – см. 29
29. **Петросян Г.Л., Петросян А.Г., Моталлеби С.Р.** – Особенности определения компонентов напряжённого состояния процесса раскатки кольца большого радиуса кривизны 3–61
 - **Погосян А.М.** – см. №1
 - **Погосян А.Г.** – см. № 13
30. **Реза Шарифиан** – Локализованная потеря устойчивости полубесконечной изотропной пластинки в окрестности упруго-опёртого края 2–46
 - **Саакян А.В.** – см. № 6
 - **Сагоян Р.О.** – см. № 9
 - **Саноян Ю.Г.** – см. №№ 34, 35
31. **Саркисян Л.С., Саркисян С.О.** – Математические модели магнитоупругости микрополярных электропроводящих (неферромагнитных) тонких оболочек .. 2–34
32. **Саркисян С.О., Фарманиян А.Ж.** – Теория микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких пластин 4–70
 - **Саркисян С.О.** – см. №№ 2, 25, 31
33. **Сергей Александрович Амбарцумян** – К 90-летию со дня рождения 1–3
34. **Симонян А.М., Саноян Ю.Г.** – К вопросу ползучести анизотропных поликристаллов 1–43
 - **Синаниян С.С.** – см. № 19
 - **Фарманиян А.Ж.** – см. № 32
35. **Шекоян А.В., Саноян Ю.Г.** – Линейные волны в среде Био с учётом температурных эффектов 2–26

Информация

В 2012 году с 8-ого по 12-ое октября на базе Института механики НАН РА была организована и проведена третья международная конференция “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посвященная 100-летию со дня рождения выдающегося учёного, академика Нагуша Хачатуровича Арутюняна. В работе конференции приняли участие 120 ученых-исследователей из России, Грузии, Республики Беларусь, Украины, Германии, Польши, ЮАР и Армении. Были сделаны доклады по механике контактных взаимодействий, растущих тел, разрушения, тонкостенных конструкций, вязкоупругих и пластичных тел, композитов, трибологии, а также по биомеханике, строительной и экспериментальной механике. Оргкомитет конференции принял решение провести четвертую международную конференцию “Актуальные проблемы механики сплошной среды” в 2014 году.

Вышли в свет

Проблемы механики деформируемого твёрдого тела, посвящ. 90-летию со дня рождения Академика НАН Армении **С.А. Амбарцумяна**. Ереван: 2012. 270с.

Сборник научных трудов Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящ. 100-летию со дня рождения академика НАН Армении **Н.Х.Арутюняна**. Ереван: Изд-во ЕГУАС. Т.1. 347с. Т.2. 348с.

Карапетян К.А. Вопросы прочности и реологии бетонов. Ереван: Изд. «Гитутюн» . 2012. 256с.

Саркисян Н.Е. Анизотропия усталости композита. Изд. ЕГУАС 2012.300с.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Նագուշ Խաչատուրի Հարությունյան - Ծննդյան 100-ամյակի առթիվ.....	3
Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա. Ճաքերով առաձգամածուցիկ անվերջ սալին դեֆորմացվող ներդրակներից բեռների փոխանցման մասին	6
Վասիլեվա Յու. Օ. Կոշտ վերադիրով ամրացված միջֆազային ճեղքը կենտրոնացված ուժերի ազդեցության դաշտում	21
Կիրիլովա Օ. Ի. Ներդրակների համարգով կամայական կտրվածքով անվերջ զլանի երկայնական սահքի ներդաշնակ տատանումները	26
Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ., Գրիգորյան Հ.Ս. Ճկուն սալի ֆլատերը անհամասեռ ջերմային դաշտում.....	33
Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ. Գազի գերձայնային հոսքում երկու ազատ եզրով ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդրի մասին, երբ հոսքը սալի ազատ եզրին վրավազք է կատարում.....	55
Վինոգրադովա Յու. Վ., Երոֆեև Վ.Ի. Առանձնացված ալիքներ Կոսերայի երկրաչափորեն ոչ գծային միջավայրում	65
Սարգսյան Ս.Հ., Ֆարմանյան Ա.Ժ. Միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական շերտավոր բարակ սալերի տեսությունը	70
Բովանդակություն “ՀՀ ԳԱԱ տեղեկագիր Մեխանիկա” 2012թ.	65
հատորի	81
Տեղեկատվություն	83

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Арутюнян Нагуш Хачатурович – К 100-летию со дня рождения	3
Акопян В.Н., Амирджанян А.А. К вопросу передачи нагрузок от деформируемых включений к бесконечной вязкоупругой пластине с разрезами	6
Васильева Ю.О. Межфазная трещина, частично подкреплённая жёсткой накладкой, в поле действия сосредоточенных сил	21
Кириллова О. И. Гармонические колебания продольного сдвига бесконечного цилиндра произвольного сечения с системой включений	26
Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Григорян Г.С. Флаттер гибкой пластинки в неоднородном температурном поле	33
Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об одной задаче устойчивости прямоугольной пластинки с двумя свободными краями в сверхзвуковом потоке газа, набегающим на её свободный край	55
Виноградова Ю.В., Ерофеев В.И. Уединённые волны в геометрически нелинейной среде коссера.....	65
Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Теория микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких пластин	70
Содержание 65 тома 2012 г. “Изв. НАН Армении, Механика”	81
Информация	83

CONTENTS

Nagush Kh. Arutyunyan – 100-th Anniversary	3
Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A. Load-Transfer from Deformable Inclusions to Infinite Visco-Elastic Plate with Slits	6
Vasilyeva Yu.O. An interface crack partially reinforced by a rigid overlay in the concentrated forces' action field	21
Kirillova O.I. Harmonic oscillation of longitudinal shear in an infinite cylinder of arbitrary cross-section with a system of inclusions.....	26
Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O., Grigoryan H.S. Flutter of flexible plate in an inhomogeneous temperature field	33
Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the stability of a rectangular plate with two free edges, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edges	55
Vinogradova Yu.V., Erofeyev V.I. Solitary waves in the geometrically nonlinear Cosserat medium	65
Sargsyan S.H., Farmanyany A.J. Theory of Micropolar Orthotropic Elastic Multilayered Thin Plates.....	70
Mechanics 2012 V. 65	81
Information	83