

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻԱԿԱՆ ԳԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2012



КИРАКОСЯН РАЗМИК МАКАРОВИЧ
(к 75-летию со дня рождения)

Доктору технических наук, профессору Размику Макаровичу Киракосяну исполнилось 75 лет.

Р.М. Киракосян родился в 1937г. в Ереване. В 1954г. окончил среднюю школу с золотой медалью. В 1959г. окончил гидростроительный факультет Ереванского политехнического института с отличием. Был сталинским стипендиатом. Окончил аспирантуру мех.-мат. факультета Ереванского госуниверситета. В 1964г. в Институте проблем механики АН СССР (Москва) защитил диссертацию и получил учёную степень кандидата технических наук. В 1986г. в МИСИ (Московский инженерно-строительный институт) защитил диссертацию и получил учёную степень доктора технических наук. В 1990г. получил звание профессора.

С 1962г. по сей день работает в Институте механики Национальной Академии Наук Армении. Автор около 100 научных статей и пяти монографий, посвящённых строительной механике, теориям пластичности, ползучести и общей физике.

Его первые работы, посвящённые вопросам нелинейной ползучести и релаксации тонкостенных конструкций, в частности, оболочек вращения –

конус, цилиндр, сфера получили высокую оценку специалистов. Известны его работы для пластин и балок, находящихся в упруго-пластическом состоянии. Высокую научную ценность имеет монография «Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов», Ереван, 2000, Изд. «Гитутюн» НАН РА.

Эта теория обобщена для ортотропных пластин переменной толщины. Им построена также аналогичная уточнённая теория для ортотропных пластин и оболочек переменной толщины при учёте влияния изменения температуры. В рамках этих теорий им, его учениками и коллегами решён ряд прикладных задач устойчивости, колебаний, оптимизации и др.

Большая часть его результатов была доложена на съездах, конференциях, симпозиумах, посвящённых актуальным вопросам теоретической и прикладной механики.

Велики его заслуги в деле подготовки научных кадров. Об этом свидетельствует, в частности, монография «Современные теории пластичности» Ереван, ЕрПИ, 1999, а также пособия по физике, изданные в Армении и России. Под его научным руководством защищён ряд кандидатских диссертаций. Его ученики успешно работают в различных ВУЗах и научных центрах.

Помимо научной деятельности занимался еще и преподавательской работой. В Ереванском архитектурно-строительном институте долгие годы читал лекции по сопротивлению материалов и строительной механике.

Долгое время являлся учёным секретарём Специализированного Совета по защите диссертаций при Институте механики.

Кроме науки он занимается ещё и поэзией. Опубликовано два сборника его стихов.

Научная общественность Армении и редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» поздравляют Размика Макаровича Киракосяна с юбилеем и желают ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов.

УДК 539.3

**ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ
ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ**

Арутюнян Л.А.

Ключевые слова: составное тело, трещина, биполярные координаты, функции Папковича-Нейбера, преобразование Фурье.

Key words: compound body, crack, bipolar coordinates, Papkovich-Nejber functions, Fourier transformation

Harutjunyan L.A.

Two-dimensional mixed boundary problems of compound plane with cracks

The two-dimensional problem of the theory of elasticity for compound plane consisting of two half-plane is considered with different elastic characteristic and existing between them finite cracks or semi-infinite cracks. Due to Fourier integral in bipolar system of coordinates the problems are solved closed with the help of Papkovich-Nejber function.

Հարությունյան Լ.Ա.

Ճաքեր պարունակող բաղադրյալ հարթության խառը եզրային պայմաններով հարթ խնդիրներ

Դիտարկված է բաղադրյալ հարթության խառը եզրային պայմաններով հարթ խնդիրներ, որոնք կազմված են տարբեր առաձգական հատկություններ ունեցող, բաժանման մակերևույթի վրա ճաք կամ երկու կիսասանվերջ ճաքեր պարունակող կիսահարթություններից:

Օգտվելով Պապկովիչ-Նեյբերի հարմոնիկ ֆունկցիաներից, երկբևեռ կոորդինատային համակարգում, Ֆյուրիեի ինտեգրալների օգնությամբ, դիտարկվող խնդիրների համար ստացված են փակ լուծումներ:

Դիտարկված է երկու մասնավոր դեպքեր, երբ ճաքի վրա կիրառված է հակադիր ուղղություններով երկու հավասար ինտենսիվությամբ կենտրոնացված ուժեր և մյուս դեպքում երբ ճաքի եզրերին կիրառված է հավասար ինտենսիվությամբ բաշխված բեռներ: Նյութերի բաժանման մակերևույթի և ճաքի վրա լարումների և տեղափոխությունների հաշվման համար ստացված են պարզ անալիտիկ արտահայտություններ:

Рассматриваются плоские задачи теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними конечными трещинами или полубесконечными трещинами.

При помощи интегралов Фурье в биполярной системе координат через функции Папковича-Нейбера задачи решаются замкнуто.

Рассмотрены две конкретные задачи: когда внешнее усилие, приложенное к берегам трещин, сводится к двум противоположно направленным сосредоточенным силам, и трещины загружены равномерными сжимающими усилиями одинаковой интенсивности. На линии контакта и на берегах трещины для вычисления напряжений и перемещений получены простые аналитические формулы.

Задачи с трещинами связаны с задачами определения напряжённо-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, представляющих интерес в теоретических и практических вопросах прочности разнообразных конструкций, они стали предметом исследования многих авторов [2-6].

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними конечными трещинами или полубесконечными трещинами.

В прямоугольной декартовой системе координат (x, y) при $y \geq 0$ полуплоскость имеет упругие характеристики G_1 и ν_1 , а при $y \leq 0$ имеет упругие характеристики G_2 и ν_2 (G_1 и G_2 – модули сдвига материалов, ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона).

Для решения задачи удобно использовать биполярные системы координат. Связь прямоугольных координат (x, y) с биполярными координатами (α, β) даётся соотношениями [1]:

$$gx = \operatorname{sh} \alpha, \quad gy = \sin \beta, \quad ag = \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta \quad (1)$$

a – размерный параметр.

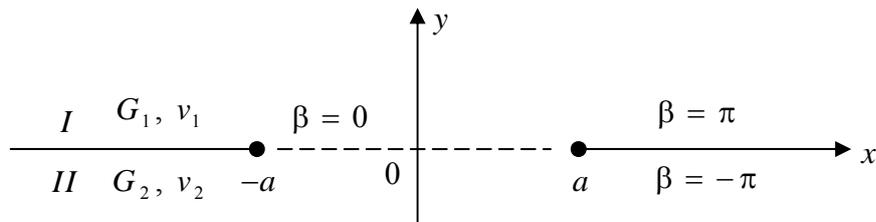
Координата α будет при этом изменяться от $-\infty$ до $+\infty$; в правой полуплоскости $\alpha > 0$; в левой – $\alpha < 0$; ось Oy является координатной линией $\alpha = 0$, точки $x = \pm a$, $y = 0$ соответствуют значениям $\alpha = \pm \infty$. Координата β меняется от $-\pi$ до $+\pi$, в верхней полуплоскости $\beta > 0$, в нижней – $\beta < 0$, отрезок $(-a, a)$ является координатной линией $\beta = 0$. Что касается отрезков оси Ox при $x < -a$ и $x > a$, то здесь координата β терпит разрыв, равный 2π , а именно: на верхнем берегу $\beta = \pi$, на нижнем берегу $\beta = -\pi$.

Задачи решаются при помощи функции Папковича-Нейбера. Общее решение плоской задачи теории упругости, согласно Папковичу-Нейберу, можно представить через три гармонические функции, причём одна из них принимается произвольно. Пользуясь этой произвольностью, принимаем одну из функций, равной тождественно нулю.

Приведём выражения перемещений U и V , напряжений σ_y и τ_{xy} через функции Папковича-Нейбера [1]:

$$\begin{aligned} 2GU(x, y) &= -\frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial x} \\ 2GV(x, y) &= (3-4\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial y} \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2(x, y)}{\partial y^2} \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-2\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

1. Пусть на участках граничной прямой $y = 0$, а именно: на отрезке $|x| < a$ имеем трещину, а на участках $|x| > a$ имеем полный контакт материалов (фиг.1)



Фиг.1

Рассмотрим смешанную краевую задачу, т.е. на берегах трещины заданы нормальные напряжения и касательные перемещения

$$\sigma_y^{(m)}(\alpha, 0) = \sigma_m(\alpha), \quad U_m(\alpha, 0) = 0 \quad (m = 1, 2) \quad (3)$$

Предполагается, что функции $\sigma_m(\alpha)$ ($m = 1, 2$) удовлетворяют условиям разложимости в интеграле Фурье.

На линии контакта имеем полное сцепление материалов, т.е. нормальное и касательное перемещения, так как нормальное и касательное напряжения равны:

$$U_1(\alpha, \pi) = U_2(\alpha, -\pi) \quad ; \quad V_1(\alpha, \pi) = V_2(\alpha, -\pi), \quad (4)$$

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) = \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi) \quad ; \quad \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \pi) = \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, -\pi).$$

Подставляя в граничные условия (3) и (4) выражения (2) перемещений и напряжений через гармонические функции $\Phi_0^{(m)}(\alpha, \beta)$ и $\Phi_2^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$) Папковича-Нейбера, мы приходим к следующей краевой задаче. При этом, следует перейти от производных по x и y к производным по α и β [1]

$$2(1 - \nu_m) \frac{\partial \Phi_2^{(m)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = \frac{a \sigma_m(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} \quad ; \quad \frac{\partial \Phi_3^{(m)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = 0 \quad (m = 1, 2)$$

$$\frac{1}{G_1} \left[(3 - 4\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \pi) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \pi) \right] = \frac{1}{G_2} \left[(3 - 4\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, -\pi) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, -\pi) \right],$$

$$\frac{1}{G_1} \frac{\partial \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=-\pi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1 - \nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1 - \nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1 - 2\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1 - 2\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi}$$

где введены новые граничные функции

$$\Phi_3^{(m)}(x, y) = \frac{\partial \Phi_0^{(m)}(x, y)}{\partial y} \quad (m = 1, 2). \quad (6)$$

Рассматриваемая краевая задача допускает точное решение в биполярных координатах, если представить искомые функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($n = 2, 3; m = 1, 2$) в виде интегралов Фурье

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \beta + B_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \beta \right] \frac{e^{-i\lambda \alpha}}{\lambda} d\lambda \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ ($n = 2, 3; m = 1, 2$), правые части которых будут содержать преобразования Фурье от заданных функций.

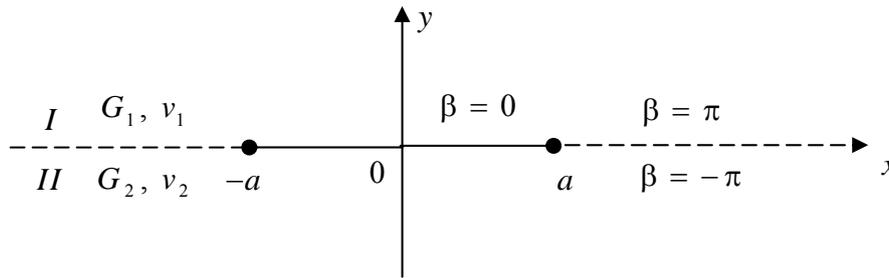
После решения этих систем получаем следующие значения для неизвестных величин интегрирования:

$$\begin{aligned}
 A_2^{(1)}(\lambda) &= \frac{1}{\chi_1 + \mu} [m_1(\lambda) + \mu(m_2(\lambda) - m_3(\lambda))] \\
 A_2^{(2)}(\lambda) &= \frac{1}{\mu\chi_2 + 1} [m_2(\lambda) + m_3(\lambda) - m_1(\lambda)] \\
 2A_3^{(1)}(\lambda) &= \chi_1 A_2^{(1)}(\lambda) + A_2^{(2)}(\lambda) - m_2(\lambda) - m_3(\lambda) \\
 2A_3^{(2)}(\lambda) &= A_2^{(1)}(\lambda) + \chi_2 A_2^{(2)}(\lambda) - m_2(\lambda) + m_3(\lambda) \\
 B_2^{(m)}(\lambda) &= \frac{2\bar{\sigma}_m(\lambda)}{\chi_m + 1}; \quad B_3^{(m)}(\lambda) = 0 \quad m = 1, 2
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_m(\lambda) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_m(\alpha)}{\operatorname{ch}\alpha + 1} e^{i\lambda\alpha} d\alpha, \quad \mu = \frac{G_1}{G_2}, \quad \chi_m = 3 - 4\nu_m \quad (m = 1, 2) \\
 m_1(\lambda) &= -[\chi_1 B_2^{(1)}(\lambda) + \mu\chi_2 B_2^{(2)}(\lambda)] \operatorname{th}\lambda\pi \\
 m_2(\lambda) &= \left[-\frac{\chi_1 + 1}{2} B_2^{(1)}(\lambda) + \frac{\chi_2 + 1}{2} B_2^{(2)}(\lambda) \right] \operatorname{cth}\lambda\pi \\
 m_3(\lambda) &= -\left[\frac{\chi_1 - 1}{2} B_2^{(1)}(\lambda) + \frac{\chi_2 - 1}{2} B_2^{(2)}(\lambda) \right] \operatorname{th}\lambda\pi
 \end{aligned} \tag{9}$$

2. На участках граничной прямой $y = 0$, а именно, на отрезках $|x| > a$, имеем трещину, а на участках $|x| < a$ имеем полный контакт материалов (фиг.2).



Фиг.2

Граничные и контактные условия в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(m)}(\alpha, (-1)^{m+1} \pi) &= \sigma_m(\alpha); U_m(\alpha, (-1)^{m+1} \pi) = 0 \quad (m=1, 2) \\ U_1(\alpha, 0) &= U_2(\alpha, 0); V_1(\alpha, 0) = V_2(\alpha, 0) \\ \sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0); \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, 0) \end{aligned} \quad (10)$$

В этом случае функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($n=2, 3; m=1, 2$) ищем в следующем виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda (\pi + (-1)^m \beta) + \right. \\ &\left. + B_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\pi + (-1)^m \beta) \right] \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (11)$$

После удовлетворения краевым и контактным условиям (10), учитывая формулы (1,2,11) для неизвестных величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ ($n=2, 3; m=1, 2$) получаем опять значения (8 и 9), только в этом случае $\bar{\sigma}_m(\lambda)$ ($m=1, 2$) имеет следующие значения:

$$\bar{\sigma}_m(\lambda) = \frac{(-1)^{m+1} a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_m(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha - 1} e^{i\lambda\alpha} d\alpha \quad (12)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 401с.
2. Попов Г.Я. Конструкция упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
3. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296с.
4. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. //Иzv.НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №4. С.57-65.
5. Даштоян Л.Л. Об одной смешанной задаче для составной плоскости с двумя полубесконечными трещинами. //Материалы XII Республиканской конференции молодых учёных „Механика”, Ереван: 2003. С.78-82.
6. Арутюнян Л.А. Плоская задача составной плоскости с трещинами. //Междунар. Научно-техническая конференция „Архитек. и строит.”, 2008; Ереван: С.34-37.

Сведения об авторе:

Арутюнян Левон Арсенович – к.ф.м.н., с.н.с., Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 17.11.2010

lower part $D_2 = \{0 \leq x \leq l, -h \leq y \leq 0\}$ with shear modulus G_2 , length l and height h . On the bondness line of the two segments in the interval $0 \leq x \leq l$ there are two central cracks located symmetrically at $L = \bigcup_{k=1}^2 [a_k, b_k]$, that have equal lengths

$$(Fig.1) a_1 = \frac{l}{2} - a, \quad b_1 = \frac{l}{2} - b, \quad a_2 = \frac{l}{2} + b, \quad b_2 = \frac{l}{2} + a, \quad (0 < a < l/2; \quad b < a)$$

The boundaries of cracks have not tractions, furthermore the vertical edges of plate $D_j (j = 1, 2)$ at $x = 0$ and $x = l$ are clamped and the upper and lower horizontal edges $y = \pm h$ are loaded by antiplane distributed shear traction $T(x)$, so that we have $\tau_{yz}^{(1)}|_{y=h-0} = \tau_{yz}^{(2)}|_{y=-h+0} = T(x) (0 < x < l)$, in which $\tau_{yz}^{(j)} (j = 1, 2)$ are the antiplane shear stresses on the top and bottom boundaries of segments D_j . According to the above

assumptions, the rectangular plate $D = \bigcup_{k=1}^2 D_k$ undergoes an antiplane strain situation and

the deformations of crack edges occur along the Oz axis on the basis of plane Oxy which means a tearing mode of Fracture. In this problem we seek to determine the displacement of edges around the cracks boundaries L , the stress intensity factors S.I.F, and the plate shear stresses producing fracture at the bondness line $L' = [0, l] \setminus L$ out of cracks. Moreover it is required to investigate the interactive influence of adjacent crack tips a_2 and b_1 .

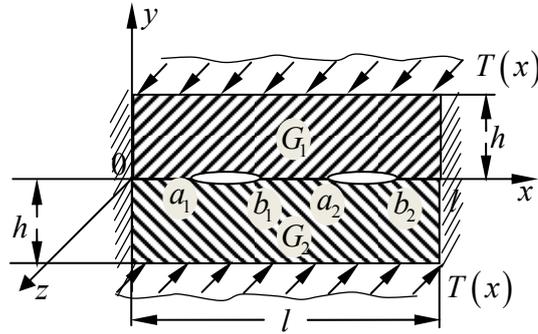


Fig.1

For determination of governing equations of the problem as shown in [10], in which the general form of the problem was discussed, the piecewise homogeneous elastic plate D in interval $0 \leq x \leq l$ of axis Ox is investigated separately in upper rectangle (D_1) and lower rectangle (D_2). By means of function $w_j(x, y) (j = 1, 2)$ we introduce the deformation of cracks boundaries of $D_j (j = 1, 2)$ along the Oz direction and investigate their elastic equilibrium separately. So for rectangle D_1 using the Hooke's law to calculate the displacement $w_1(x, y)$ we reach to the boundary value problem (1.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w_1 = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0; \quad (0 < x < l, 0 < y < h) \\ w_1(x, y)|_{x=0} = w_1(x, y)|_{x=l} = 0; \quad (0 < y < h) \\ \tau_{yz}^{(1)}|_{y=+0} = G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y}|_{y=+0} = \tau_+(x); \quad \tau_{yz}^{(1)}|_{y=h-0} = G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y}|_{y=h-0} = T(x); \quad (0 < x < l) \\ \tau_{yz}^{(1)}|_{y=+0} = \tau_+(x) = \begin{cases} 0 & (x \in L^+) \\ \tau(x) & (x \in L') \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

L^+ is upper edge of the cracks L , and $\tau(x)$ is the antiplane shear stress in non-cracked zone of the plate $L' = [0, l] \setminus L$.

After [11] to solve the boundary value problem (1.1) the Fourier sinusoidal transformation is used, supposing that

$$\bar{w}_1(n, y) = \int_0^l w_1(x, y) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

And Fourier inverse transformation as below

$$w_1(x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_1(n, y) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (1.3)$$

By means of Fourier transformation (1.3) in the boundary value problem (1.1), the ordinary differential equation is obtained:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \bar{w}_1}{dy^2} - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \bar{w}_1 = 0 \quad (0 < y < h) \\ G_1 \frac{d\bar{w}_1}{dy}|_{y=+0} = \bar{\tau}_+(n), \quad G_1 \frac{d\bar{w}_1}{dy}|_{y=h} = \bar{T}(n) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

$$\bar{\tau}_+(n) = \int_0^l \tau_+(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \quad \bar{T}(n) = \int_0^l T(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

Solving the equation (1.4) leads to $(n = 1, 2, \dots) \quad (0 \leq y \leq h)$.

$$\bar{w}_n(n, y) = \frac{l}{\pi n G_1 \sin(\pi n h / l)} \left\{ \bar{T}(n) \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n y}{l}\right) - \bar{\tau}_+(n) \operatorname{ch}[\pi n (y - h) / l] \right\}$$

Finally from which we obtain the deformations on the bondness line upper boundaries

$$\bar{w}_1(n, 0) = \frac{l [\bar{T}(n) - \bar{\tau}_+(n) \operatorname{ch}(\pi n h / l)]}{\pi n G_1 \operatorname{sh}(\pi n h / l)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.6)$$

Completely through a similar approach for the rectangle D_2 , we obtain the deformation on the bondness line

$$\bar{w}_2(n, 0) = \frac{l [\bar{\tau}_-(n) \operatorname{ch}(\pi n h / l) - \bar{T}(n)]}{\pi n G_2 \operatorname{sh}(\pi n h / l)} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.7)$$

it is clear that

$$\{\bar{w}_2(n, y); \bar{\tau}_-(n)\} = \int_0^l \{w_2(x, y); \tau_-(x)\} \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx$$

$$\tau_-(x) = \tau_+(x) = \tau_{yz}^{(1)}|_{y=+\Delta} = \tau_{yz}^{(2)}|_{y=0} = \begin{cases} 0 & (x \in L^-) \\ \tau(x) & (x \in L') \end{cases}$$

In which the zone L^- is the lower boundaries of cracks L .

Now using $w_1(x, 0)$, $w_2(x, 0)$ quantities, we introduce the following functions:

$$\Phi(x) = \frac{w_1(x, 0) - w_2(x, 0)}{2} = w_1(x, 0) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) \quad (0 < x < l)$$

$$\Omega(x) = \frac{\tau_+(x) + \tau_-(x)}{2} = \tau_+(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$$
(1.8)

Functions Φ_n , Ω_n are the Fourier Sinus coefficients that according to relations (1.2), (1.3) and (1.5) presented as below:

$$\Phi_n = \frac{1}{2} [\bar{w}_1(n, 0) - \bar{w}_2(n, 0)] = \bar{w}_1(n, 0); \quad \Omega_n = \frac{1}{2} [\bar{\tau}_+(n) + \bar{\tau}_-(n)] = \bar{\tau}_+(n). \quad (1.9)$$

In those it is clear that due to symmetry of axis Ox

$$w_1(x, y) = -w_2(x, y) \quad (0 \leq x \leq l; -h \leq y \leq h), \quad \tau_+(x) = \tau_-(x).$$

Now regarding to (1.6)–(1.9) and using similar approach in [10] with using nondimensional parameters η , ξ we convert the function $\Omega(x)$ from (1.8) to the following formula.

$$\Omega_0(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_0}^{\pi} \left(\text{ctg} \frac{\xi - \eta}{2} + \text{ctg} \frac{\xi + \eta}{2} \right) \phi_0(\eta) d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{L_0}^{\pi} [K_*(\xi - \eta) + K_*(\xi + \eta)] \phi_0(\eta) d\eta + \quad (0 < \xi < \pi) \quad (1.10)$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [L_*(|\xi - \eta|) - L_*(\xi + \eta)] T_0(\eta) d\eta$$

So that the first term in the first integral for $\eta = \xi$ is the main quantity of Cauchy function, for this reason we use the below functions in (1.10).

$$K_*(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nh_0} \sin(n\xi)}{\text{ch}(nh_0)}; \quad L_*(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\xi)}{\text{ch}(nh_0)} \quad (0 < \xi < \pi) \quad (1.11)$$

Introducing nondimensional parameters converts the interval L to L_0 , so with the aid of function $\Phi(x)$ from (1.8), the cracks boundaries displacement field are derived as below:

$$\xi = \frac{\pi x}{l}, \quad \eta = \frac{\pi s}{l}, \quad h_0 = \frac{\pi h}{l}; \quad \bar{\tau}(\xi) = G_* \tau(l\xi/\pi), \quad T_0(\xi) = G_* T(l\xi/\pi)$$

$$G_* = \frac{G_1 + G_2}{2G_1 G_2}, \quad \alpha_k = \frac{\pi a_k}{l}, \quad \beta_k = \frac{\pi b_k}{l} \quad (k = 1, 2),$$

$$L_0 = \bigcup_{k=1}^2 [\alpha_k, \beta_k], \quad L'_0 = [0, \pi] \setminus L_0, \quad 0 < \xi, \eta < \pi.$$

$$\Phi'(x) = \begin{cases} \varphi'(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \in L'); \end{cases} = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(n\xi), \quad (1.12)$$

$$\varphi_n = \frac{\pi n}{l} \Phi_n = \frac{l}{\pi} \int_{L_0} \varphi_0(\xi) \cos(n\xi) d\xi; \quad \varphi_0(\xi) = \varphi'(l\xi/\pi).$$

The cracks L geometry parameters are $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \beta < \alpha\right)$.

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \beta, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \alpha = \frac{\pi a}{l}, \quad \beta = \frac{\pi b}{l}. \quad (1.13)$$

Investigation of key equation (1.10) in interval L_0 leads us to below new variables

$$t = \cos \xi, \quad u = \cos \eta \quad (-1 < t, u < 1),$$

Regarding to the unknown displacement field $\varphi_0(\xi)$ from equation (1.12), we can derive the singular integral equation governing the problem as follows

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Lambda_0} \frac{\omega_0(u) du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \int_{\Lambda_0} \left[\frac{(u+t)K_0(t,u)}{\sqrt{1-u^2}} - 2K(t,u) \right] \omega_0(u) du = f(t) \quad (t \in \Lambda_0)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 L(t,u) \bar{T}_0(u) du; \quad \bar{T}_0(t) = T_0(\arccost); \quad \Lambda_0 = \bigcup_{k=1}^2 [\delta_k, \gamma_k]; \quad (1.14)$$

$$\omega_0(t) = \varphi_0(\arccost); \quad K_0(t,u) = \left(\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-u^2} \right)^{-1}$$

And according to (1.13) we can write:

$$\delta_1 \cos \beta_2 = -\sin \alpha; \quad \gamma_1 = \cos \alpha_2 = -\sin \beta; \quad (1.15)$$

$$\delta_2 = \cos \beta_1 = \sin \beta; \quad \gamma_2 = \cos \alpha_1 = \sin \alpha.$$

Moreover, based on relations (1.11), we use the below functions:

$$K(t,u) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-u^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nh_0}}{\text{ch}(nh_0)} T_n(u) U_{n-1}(t) \quad (-1 < t, u < 1) \quad (1.16)$$

$$L(t,u) = \sqrt{1-t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{n-1}(u) U_{n-1}(t)}{\text{ch}(nh_0)};$$

That are the known Chebyshev polynomials of the first and the second kind.

The singular integral equation (1.14)–(1.16) may be investigated at the tips of the cracks to find their mutual influences. The continuity condition is:

$$\int_{a_k}^{b_k} \varphi'(s) ds = 0 \quad (k = \overline{1,2})$$

Using the nondimensional parameters, the above condition relation differ to below form:

$$\int_{\delta_k}^{\gamma_k} \frac{\omega_0(u) du}{\sqrt{1-u^2}} = 0 \quad (k = \overline{1,2}) \quad (1.17)$$

Through solution of the singular integral equation (1.14)–(1.16) with the condition (1.17), and after investigation the key equation (1.10) in the zone out of the cracks, $L'_0 = [0, \pi] \setminus L_0$, we derive the nondimensional relation for shear stresses $\bar{\tau}(\xi)$ ($\xi = \arccos t$) as follows

$$\begin{aligned} \tau_0(t) = \bar{\tau}(\arccos t) = & -\frac{1}{\pi} \int_{\Lambda_0} \frac{\omega_0(u) du}{u-t} - \frac{1}{\pi} \int_{\Lambda_0} \left[\frac{u+t}{\sqrt{1-u^2}} K_0(t, u) - \right. \\ & \left. - 2K(t, u) \right] \omega_0(u) du + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 L(t, u) \bar{T}_0(u) du \quad (t \in [-1, 1] \setminus \Lambda_0) \end{aligned} \quad (1.18)$$

In which the functions $K_0(t, u)$, $K(t, u)$, $L(t, u)$ and $\bar{T}_0(t)$ are defined according to formulas (1.14) and (1.16).

2. Reducing the S.I.E to a system of linear algebraic equations

To solve the S.I.E (1.14)–(1.17) we use the numerical solutions and methods prescribed in [7-9] that are based on Gaussian Quadratic formulas for ordinary and singular integrals. To reach this main object, at the end points of each interval $[\delta_k, \gamma_k]$ ($k = 1, 2$) of crack systems Λ_0 , we perform a change of variables according the below formulas

$$t = \frac{\gamma_k - \delta_k}{2} r + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2}; \quad u = \frac{\gamma_k - \delta_k}{2} \rho + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2} \quad (k = 1, 2)$$

which is valid in interval $[-1, 1]$ where $-1 \leq r, \rho \leq 1$. From that and taking advantage relations (1.15) it is obtained

$$\begin{aligned} t = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2} r - \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}; \quad u = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2} \rho - \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \quad (k = 1) \\ t = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2} r + \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}; \quad u = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2} \rho + \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \quad (k = 2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Consequently the S.I.E (1.14)–(1.16) is converted to the form as below

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega_k^{(0)}(\rho) d\rho}{\rho - r} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 L_{kn}(r, \rho) \omega_n^{(0)} d\rho + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^2 \int_{-1}^1 K_{kn}(r, \rho) \omega_n^{(0)}(\rho) d\rho = f_k(r); \\ f_k(r) = f\left(\frac{\gamma_k - \delta_k}{2} r + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2}\right); \quad (k = 1, 2 - 1 < r < 1) \\ L_{kn}(r, \rho) = \left(\rho - \frac{\gamma_k - \delta_k}{\gamma_n - \delta_n} r + \frac{\gamma_n + \delta_n}{\gamma_n - \delta_n} - \frac{\gamma_k + \delta_k}{\gamma_n - \delta_n} \right)^{-1}; \\ K_{kn}(r, \rho) = (\gamma_n - \delta_n) \left\{ \frac{(\gamma_n - \delta_n)\rho + (\gamma_k - \delta_k)r + \gamma_n + \delta_n + \gamma_k + \delta_k}{\sqrt{4 - [(\gamma_n - \delta_n)\rho + \gamma_n + \delta_n]^2}} \times \right. \\ \left. \times K_0\left(\frac{\gamma_k - \delta_k}{2} r + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2}, \frac{\gamma_n - \delta_n}{2} \rho + \frac{\gamma_n + \delta_n}{2}\right) - 2K\left(\frac{\gamma_k - \delta_k}{2} r + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2}, \frac{\gamma_n - \delta_n}{2} \rho + \frac{\gamma_n + \delta_n}{2}\right) \right\}; \quad \omega_k^{(0)}(r) = \omega_0\left(\frac{\gamma_k - \delta_k}{2} r + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2}\right), \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

where the function $f(t)$ and kernel function $K_0(t, u)$ and $K(t, u)$ are introduced according to formulas (1.14) and (1.16), and the end points of crack systems

$\Lambda_0 = \bigcup_{k=1}^2 [\delta_k, \gamma_k]$ defined by (1.15) quantities. On the other hand noting that $k = 1$ and

$k = 2$ the relations (2.1) are valid, and making use of (2.1) the condition equation (1.17) is converted as below:

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega_k^{(0)}(\rho) d\rho}{\sqrt{4 - [(\gamma_k - \delta_k)\rho + (\gamma_k + \delta_k)]^2}} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (2.3)$$

Now through the numerical approach according to [10] we can solve the S.I.E (2.2) considering the above continuity condition (2.3) to obtain a system of linear algebraic equations as follows :

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^M \frac{1}{M} \left[\frac{1}{\rho_p - r_m} + L_{kn}(r_m, \rho_p) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 K_{kn}(r_m, \rho_p) \right] \Psi_n^{(0)}(\rho_p) = \frac{f_k(r_m)}{(m=\overline{1, M-1}, k=1, 2)} \\ \sum_{p=1}^M \frac{\Psi_k^{(0)}(\rho_p)}{M \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_k - \delta_k}{2} \rho_p + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2} \right)^2}} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\omega_k^{(0)} = \frac{\Psi_k^{(0)}(\rho)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (k = 1, 2), \quad (2.5)$$

For this reason in equations (2.2) and (2.3) the below function is valid where $\Psi_k(\rho)$ is a function of Holder-Lipschitz class in the $[-1, 1]$ range, and M is an arbitrary natural numbers, also r_m and ρ_p are the roots of Chebyshev polynomials of the second kind $U_{m-1}(r)$ and the first kind $T_m(\rho)$.

$$r_m = \cos\left(\frac{\pi m}{M}\right) (m = \overline{1, M-1}); \quad \rho_p = \cos\left(\frac{2p-1}{2M} \pi\right) (p = \overline{1, M})$$

3. Special case of antiplane loading

Now we suppose that the upper and lower edges of the plate stressed by antiplane shear forces P so that $T(x) = P\delta(x - l/2)$, in which $\delta(x)$ is the known Dirac Delta function.

By this assumption the function $f(t)$ is calculated as below:

$$f(t) = Q_0 \sqrt{1-t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\text{ch}[(2n-1)h_0]} U_{2n-2}(t) \quad (-1 < t < 1) \quad (3.1)$$

$$Q_0 = P(G_1 + G_2)/G_1 G_2 l.$$

To calculate the shear stress from relations (1.18) making use of the variables shown in (2.1) we reach to a new variable ρ and finally taking into consideration the equation (2.5) the follow formula for shear stress is concluded

$$\begin{aligned}
\tau_0(t) = & -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 (\gamma_k - \delta_k) \int_{-1}^1 \frac{\Psi_k^{(0)}(\rho) d\rho}{\sqrt{1-\rho^2} \left(\frac{\gamma_k - \delta_k}{2} \rho + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2} - t \right)} - \\
& -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 (\gamma_k - \delta_k) \int_{-1}^1 \left[\frac{(\gamma_k - \delta_k) \rho + \gamma_k + \delta_k + 2t}{\sqrt{4 - [(\gamma_k - \delta_k) \rho + \gamma_k + \delta_k]^2}} \times \right. \\
& \times K_0 \left(t, \frac{\gamma_k - \delta_k}{2} \rho + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2} \right) - 2K \left(t, \frac{\gamma_k - \delta_k}{2} \rho + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2} \right) \frac{\Psi_k^{(0)}(\rho) d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + f(t) \\
& \left. (t \in [-1, 1] \setminus \Lambda_0); \quad \Lambda_0 = [-\sin \alpha, -\sin \beta] \cup [\sin \beta, \sin \alpha] \right. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

in which the function $f(t)$ is presented according to (3.1). Consequently we can obtain the nondimensional fracture stresses through solving the linear algebraic system (2.4) that is:

$$\begin{aligned}
\tau_0(t) = & -\frac{1}{2M} \sum_{k=1}^2 (\gamma_k - \delta_k) \sum_{p=1}^M \frac{\Psi_k^{(0)}(\rho_p)}{\frac{\gamma_k - \delta_k}{2} \rho_p + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2} - t} - \\
& -\frac{1}{2M} \sum_{k=1}^2 (\gamma_k - \delta_k) \sum_{p=1}^M \frac{(\gamma_k - \delta_k) \rho_p + \gamma_k + \delta_k + 2t}{\sqrt{4 - [(\gamma_k - \delta_k) \rho_p + \gamma_k + \delta_k]^2}} \times \\
& \times K_0 \left(t, \frac{\gamma_k - \delta_k}{2} \rho_p + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2} \right) - 2K \left(t, \frac{\gamma_k - \delta_k}{2} \rho_p + \frac{\gamma_k + \delta_k}{2} \right) \Psi_k^{(0)}(\rho_p) + \\
& + f(t) \quad (t \in [-1, 1] \setminus \Lambda_0) \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Now we seek for a relation to represent the crack opening displacements $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = 2\Phi(x) = 2 \int_{a_k}^x \varphi'(s) ds = -2 \int_x^{b_k} \varphi'(s) ds. \quad (a_k \leq x \leq b_k; \quad k = 1, 2)$$

From which after some calculations we have ($-1 \leq r \leq 1$; $k = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
\Psi_k^{(0)}(r) = & -\frac{\gamma_{3-k} - \delta_{3-k}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\text{sign}(r - \rho) \Psi_{3-k}^{(0)}(\rho) d\rho}{\sqrt{1-\rho^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_{3-k} - \delta_{3-k}}{2} \rho + \frac{\gamma_{3-k} + \delta_{3-k}}{2} \right)^2}} \\
\Psi_k^{(0)}(r) = & \frac{1}{l} \Psi \left(\frac{1}{\pi} \arccos \frac{\gamma_{3-k} - \delta_{3-k}}{2} r + \frac{\gamma_{3-k} + \delta_{3-k}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Similar through solving the system (2.4), the nondimensional equation (3.4) for crack opening displacements is obtained as below ($-1 \leq r \leq 1$; $k = 1, 2$):

$$\Psi_k^{(0)}(r) = -\frac{\gamma_{3-k} - \delta_{3-k}}{2M} \sum_{p=1}^M \frac{\text{sign}(r - \rho_p) \Psi_{3-k}(\rho_p)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_{3-k} - \delta_{3-k}}{2} \rho_p + \frac{\gamma_{3-k} + \delta_{3-k}}{2} \right)^2}} \quad (3.4)$$

Finally we derive the formulas to determine the Stress Intensity Factors S.I.F . Regarding symmetry of the problem due to axis $x = \frac{l}{2}$ we take into consideration only the right hand crack with end points at $x = a_2$ and $x = b_2$. The stress intensity factors are defined as follows [1,2,5,12]

$$\begin{aligned} K_{III}(a_2) &= \lim_{x \rightarrow a_2-0} \left[\sqrt{2\pi(a_2 - x)} \tau_{yz} \right] = \lim_{x \rightarrow a_2-0} \left[\sqrt{2\pi(a_2 - x)} \tau(x) \right]; \\ K_{III}(b_2) &= \lim_{x \rightarrow b_2+0} \left[\sqrt{2\pi(x - b_2)} \tau_{yz} \right] = \lim_{x \rightarrow b_2+0} \left[\sqrt{2\pi(x - b_2)} \tau(x) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

where $\tau(x)$ are fracture shear stresses that determined according to (2.18) and or (3.2). At first in formula (3.2) by using the first term of relations (2.1) we convert variable t to variable r . Then for calculation the S.I.F investigate the below stress function.

$$I_0(r) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi_1^{(0)}(\rho) d\rho}{(\rho - r) \sqrt{1 - \rho^2}} \quad (|r| > 1).$$

Here according to [12] we suppose that

$$\Psi_1^{(0)}(\rho) = \Psi_1^*(\rho) + A\rho + B; \quad \Psi_1^*(\rho) = \Psi_1^{(0)}(\rho) - A\rho - B$$

and select parameters A and B so that $\Psi_1^*(\pm 1) = 0$, from which it is concluded that

$$A = \frac{1}{2} \left[\Psi_1^{(0)}(1) - \Psi_1^{(0)}(-1) \right]; \quad B = \frac{1}{2} \left[\Psi_1^{(0)}(1) + \Psi_1^{(0)}(-1) \right] \quad (3.6)$$

And consequently

$$I_0(r) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi_1^*(\rho) d\rho}{(\rho - r) \sqrt{1 - \rho^2}} A + \frac{(Ar + B) \text{sign } r}{\sqrt{r^2 - 1}} \quad (|r| > 1). \quad (3.7)$$

With the aid of relations (3.6) and (3.7) using in (3.5) and after some simple transforms on it we have

$$\begin{aligned} K_{III}(a_2) &= \frac{2G_1 G_2 \Psi_1^{(0)}(1)}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{l(\sin \alpha - \sin \beta)}{2 \cos \beta}}; \\ K_{III}(b_2) &= -\frac{2G_1 G_2 \Psi_1^{(0)}(-1)}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{l(\sin \alpha - \sin \beta)}{2 \cos \alpha}}; \end{aligned} \quad (3.8)$$

On the other hand if we consider the dimensionless form of S.I.F in (3.8) obviously it is clear that:

$$\begin{aligned} K_{III}^\pm &= \frac{G_1 + G_2}{2G_1 G_2 \sqrt{l}} \left\{ \begin{array}{l} K_{III}(b_2) \\ K_{III}(a_2) \end{array} \right\}. \\ K_{III}^+ &= -\Psi_1^{(0)}(-1) \sqrt{\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2 \cos \alpha}}; \quad K_{III}^- = \Psi_1^{(0)}(1) \sqrt{\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2 \cos \beta}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Quantities $\Psi_1^{(0)}(\pm 1)$ in above formulas are found through solution of linear system of equations (2.4) taking advantage Lagrange interpolation coefficients.

$$\Psi_1^{(0)}(1) = \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M (-1)^{p+1} \Psi_1^{(0)}(\rho_p) \text{ctg}\left(\frac{2p-1}{4M} \pi\right)$$

$$\Psi_1^{(0)}(-1) = \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M (-1)^{M+p} \Psi_1^{(0)}(\rho_p) \text{tg}\left(\frac{2p-1}{4M} \pi\right)$$
(3.10)

In this manner the calculation formulas to determine the problem main characteristics are (3.3), (3.4), (3.9) and (3.10).

4. Numerical calculations

To solve the system of linear equations (2.4) we use $M = 10, 15, 20, 30, \dots$. In order that quantities of solutions converge and the different between two latest answers reach to the order 10^{-4} . For calculation the parameters of function (2.4), $f_k(r)$, $L_{kn}(r, \rho)$, $K_{kn}(r, \rho)$, δ_k, γ_k formulas (2.2), (1.15), (1.16), (3.1) are used.

The parameter α and β are supposed equal to $\alpha = \frac{\pi}{3}$ and $\beta = \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{32}; \frac{\pi}{64}$ in order to determine the influence of distance between two adjacent cracks on their fracture characteristics. The nondimensional shear stress $\tau_0(t)$ is calculated according to (3.3), in which the function $f(t)$ is obtained from (3.1), supposing the quantity $Q_0 = 0,01$. Using formulas (3.9) and (3.10) the stress intensity factors in the nondimensional form can be easily calculated, as shown in Fig. 2 and table 1, for above parameters. The variation of S.I.F K_{III} based on parameter β and $\mu = 0,3, 0,5, 1,0$ is shown in Fig. 3 to recognize the state of S.I.F under change of the lengths cracks.

5. Conclusions

The numerical schemes that are used to solve the singular integral equation governing the piecewise homogeneous elastic plate problem subject to uniform remote antiplane shear loading are accurate to determine the tearing shear stresses, cracks dislocation densities and the mode III stress intensity factors. For the case of cracks approaching together it has been shown that the stress intensity factors K_{III} grow up based on the two parameters, that are the total distance of their far tips and the closeness of their near tips, for example about 45 percent in the case of $\alpha = \frac{\pi}{3}$ and $\beta = \frac{\pi}{64}$. The technique presented in this paper can be used to solve a class of problems associated with the cracking in baterials interface.

β μ	$\pi/4$	$\pi/8$	$\pi/16$	$\pi/32$	$\pi/64$
0.3	5.36	5.54	5.73	6.17	6.35
0.5	4.88	5.12	5.34	5.87	6.13
1.0	4.21	4.35	4.63	5.41	5.92

Table1. Variation of K_{III} for $\alpha = \pi/3$ nbased o β, μ

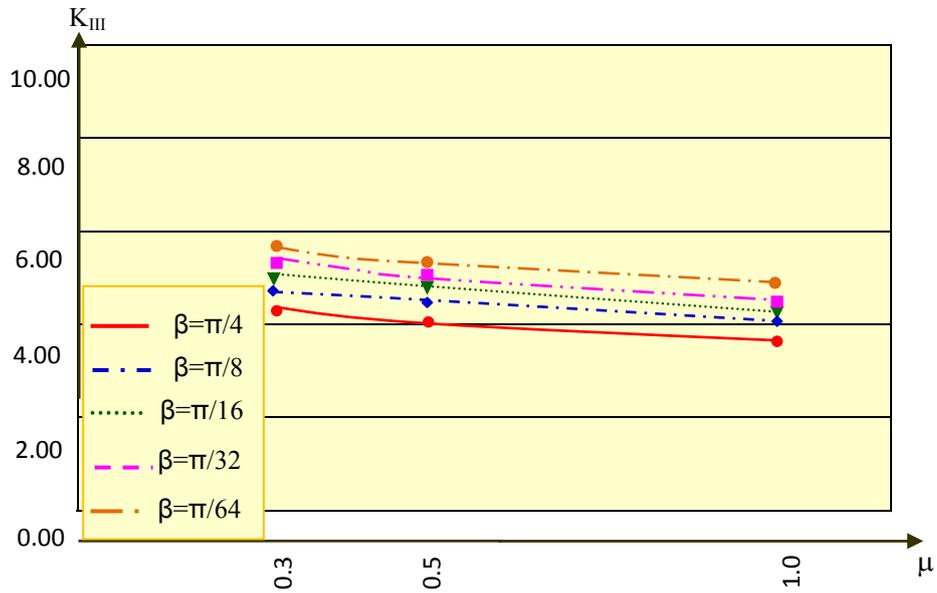


Fig2.Variation of K_{III} for $\alpha = \pi/3$ based on β, μ

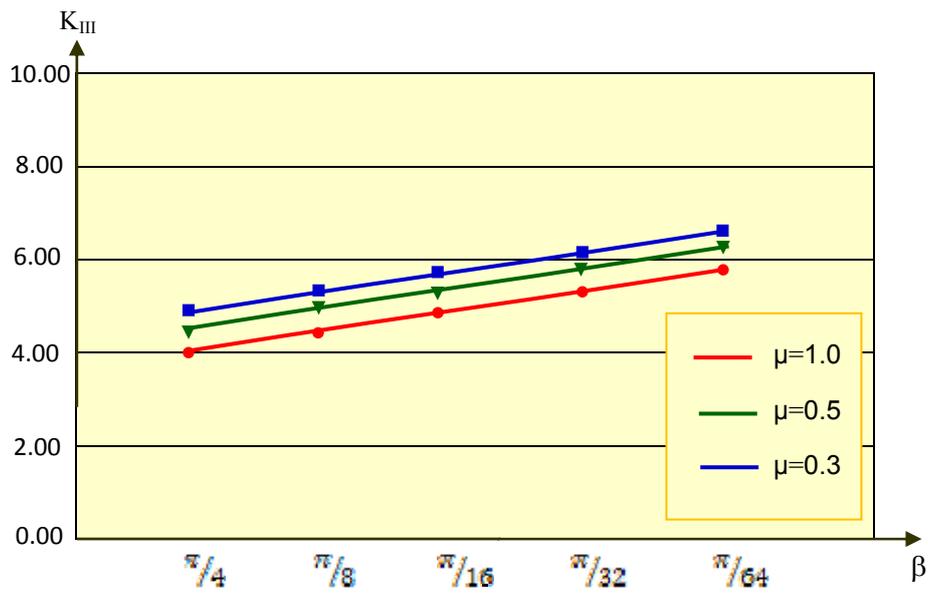


Fig3.Variation of K_{III} based on β for $\alpha = \pi/3$ and $\mu = 1, 0.5, 0.3$

REFERENCES

1. Fracture an advanced treatise. Vol. II. Mathematical Fundamentals. Academic Press–New York and London, 1968.
2. Cherepanov G.P. Fracture Mechanics. M.: Nauka, 1974.640p.
3. Stress intensity factors. Handbook. Editor-in-Chief Y. Murakami. Vol.1. Pergamon 1987.
4. Savruk M.P. The stress intensity factors in cracked bodies. Fracture Mechanics and strength of Materials. Handbook. Editor V.V. Panasyuk, vol.2, Kiev: Naukova Dumka, 1988.619p.
5. Kachanov L.M. The Principles of Fracture Mechanics. M.: Nauka, 1974. 312c.
6. Panasyuk V.V, Anderekiv P.E, Parton V.Z The principles of Fracture Mechanics. Text book, general editor V.V panasyuk, Vol.1, Kiev: Naukova Dumka, 1988. 488c.
7. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyishin A.P. The stress distribution in the neighborhood of cracks of plates and shells. Kiev : Naukova Dumka, 1976. 443p.
8. Theocaris P.S., Iokimidis N.I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. –Quart. Appl. Math., vol. XXXV, N1, 1977, pp.173–185.
9. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems, pp.368–425, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
10. Mkhitarian S.M., Pahlaviani Ali G. The Stress Distribution Field of Piecewise Homogeneous Elastic Rectangular Plate with a System of collinear Cracks Subject to Antiplane Deformations. –2–nd Intern. Scientific and Techn. Conf. “Architecture and Construction– Contemporary Problems” 30Sept. –3Oct. 2010, Yerevan–Jermuk. Conference proceedings, pp.295-303.
11. Sneddon I. Fourier Transforms.- New York–Toronto–London. 1951.
12. Pahlaviani Ali G. Main Characteristics of Fracture Failure of a Piecewise Homogeneous Elastic Plate with Crack Subject to Antiplane Deformations.–2–nd Intern. Scientific and Techn. Conf. “Architecture and Construction– Contemporary Problems” 30Sept. –3Oct. 2010, Yerevan–Jermuk. Conference proceedings, pp.304-310.

Name: Ali G.Pahlaviani

Yerevan state university of architecture and construction

Father's name: Eskandar

Address: No.63, Negar Build, 104, West Sarv Blvd, Saadat abad, Tehran, Iran

Tel: +98 21 22141574-6 , 22351107-8

Fax: +98 21 22060428

E-mail: rahsazehpol@yahoo.com

Поступила в редакцию 24.05.2012

**ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ
УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН
Айрапетян Г.С., Саркисян С.О.**

Ключевые слова: микрополярный, ортотропный, упругий, тонкий, пластинка, теория
Key words: mikropolar, elastic, plate, thin, orthotropic, theory

Հայրապետյան Գ. Ս., Մարգարյան Ս.Ն.

Միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ սալերի տեսությունը

Աշխատանքում ընդունվում են վարկածներ, որոնք ունեն ասիմպտոտիկ հիմնավորում և կառուցվում է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ սալերի ծոման ստատիկական դեֆորմացիայի ընդհանուր տեսությունը: Խնդիրը ուսումնասիրվում է նաև էներգետիկ տեսակետից և կառուցվում՝ միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ սալերի ծոման ստատիկական դեֆորմացիայի ընդհանուր վարիացիոն հավասարումը, որից կարելի է ստանալ նաև մասնավոր բնույթի վարիացիոն հավասարումներ:

Hayrapetyan G.S., Sargsyan S.H.

Theory of micropolar orthotropic elastic thin plates

In present paper asymptotically confirmed hypotheses are formulated and general theory of bending static deformation of micropolar orthotropic elastic thin plates is constructed. The problem is also studied by energetic approach, general variation equation of bending deformation of micropolar orthotropic elastic thin plates is obtained. On the basis of this general equation variation equations of private nature are obtained.

В работе принимаются гипотезы, которые имеют асимптотическое обоснование и построена общая теория статической деформации изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких пластин. Задача изучается также с энергетической точки зрения и построено общее вариационное уравнение статической деформации изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких пластин, из которого можно получить также частные типы вариационных уравнений.

Введение. Микрополярная теория упругости является одной из современных направлений в структурной механике твёрдых деформируемых тел. Обзор исследований о построении прикладных теорий микрополярных упругих тонких пластин и оболочек выполнены в работах [1,2].

Основная проблема в теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек заключается в приближённом, но адекватном сведении трёхмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерным. Для достижения этой цели уместно использование качественных сторон результата асимптотического метода интегрирования трёхмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки или оболочки.

В работах [3-6], используя качественные стороны исходного приближения асимптотического метода интегрирования трёхмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки или оболочки, сформулированы гипотезы, на основе которых построены общие прикладные теории

микрополярных упругих изотропных тонких пластин и оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, со стеснённым вращением.

В данной работе развивается этот подход, используя результат асимптотического метода интегрирования трёхмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки для ортотропного материала [7], утверждаются те же гипотезы, принятые в работе [4] для изотропных материалов и на этой основе строится общая прикладная теория микрополярных ортотропных упругих тонких пластин. Для этой теории построен общий вариационный принцип и получена формула энергетического баланса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости для ортотропного материала с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия [8]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 & \quad \frac{\partial \mu_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{31}}{\partial x_3} + \sigma_{23} - \sigma_{32} = 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0 & \quad \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_3} + \sigma_{31} - \sigma_{13} = 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 & \quad \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{33}}{\partial x_3} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0
 \end{aligned} \quad (1.1)$$

физические соотношения [9]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} = A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22} + A_{13}\varepsilon_{33} & \quad \mu_{11} = B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} + B_{13}\chi_{33} \\
 \sigma_{22} = A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22} + A_{23}\varepsilon_{33} & \quad \mu_{22} = B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} + B_{23}\chi_{33} \\
 \sigma_{33} = A_{13}\varepsilon_{11} + A_{23}\varepsilon_{22} + A_{33}\varepsilon_{33} & \quad \mu_{33} = B_{13}\chi_{11} + B_{23}\chi_{22} + B_{33}\chi_{33} \\
 \sigma_{23} = A_{44}\varepsilon_{23} + A_{45}\varepsilon_{32} & \quad \mu_{23} = B_{44}\chi_{23} + B_{45}\chi_{32} \\
 \sigma_{32} = A_{45}\varepsilon_{23} + A_{55}\varepsilon_{32} & \quad \mu_{32} = B_{45}\chi_{23} + B_{55}\chi_{32} \\
 \sigma_{31} = A_{55}\varepsilon_{31} + A_{56}\varepsilon_{13} & \quad \mu_{31} = B_{55}\chi_{31} + B_{56}\chi_{13} \\
 \sigma_{13} = A_{56}\varepsilon_{31} + A_{66}\varepsilon_{13} & \quad \mu_{13} = B_{56}\chi_{31} + B_{66}\chi_{13} \\
 \sigma_{12} = A_{77}\varepsilon_{12} + A_{78}\varepsilon_{21} & \quad \mu_{12} = B_{77}\chi_{12} + B_{78}\chi_{21} \\
 \sigma_{21} = A_{78}\varepsilon_{12} + A_{88}\varepsilon_{21} & \quad \mu_{21} = B_{78}\chi_{12} + B_{88}\chi_{21}
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

или в обратной форме

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} & \chi_{11} &= b_{11}\mu_{11} + b_{12}\mu_{22} + b_{13}\mu_{33} \\
\gamma_{22} &= a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} & \chi_{22} &= b_{12}\mu_{11} + b_{22}\mu_{22} + b_{23}\mu_{33} \\
\gamma_{33} &= a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} & \chi_{33} &= b_{13}\mu_{11} + b_{23}\mu_{22} + b_{33}\mu_{33} \\
\gamma_{23} &= a_{44}\sigma_{23} + a_{45}\sigma_{32} & \chi_{23} &= b_{44}\mu_{23} + b_{45}\mu_{32} \\
\gamma_{32} &= a_{45}\sigma_{23} + a_{55}\sigma_{32} & \chi_{32} &= b_{45}\mu_{23} + b_{55}\mu_{32} \\
\gamma_{31} &= \tilde{a}_{55}\sigma_{31} + a_{56}\sigma_{13} & \chi_{31} &= \tilde{b}_{55}\mu_{31} + b_{56}\mu_{13} \\
\gamma_{13} &= a_{56}\sigma_{31} + a_{66}\sigma_{13} & \chi_{13} &= b_{56}\mu_{31} + b_{66}\mu_{13} \\
\gamma_{12} &= a_{77}\sigma_{12} + a_{78}\sigma_{21} & \chi_{12} &= b_{77}\mu_{12} + b_{78}\mu_{21} \\
\gamma_{21} &= a_{78}\sigma_{12} + a_{88}\sigma_{21} & \chi_{21} &= b_{78}\mu_{12} + b_{88}\mu_{21}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

геометрические соотношения [8]

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \gamma_{22} &= \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \gamma_{33} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_3} & \chi_{11} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \chi_{22} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} & \chi_{33} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \\
\gamma_{12} &= \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \omega_3 & \gamma_{21} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \omega_3 & & & \chi_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} & \chi_{21} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \\
\gamma_{23} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \omega_1 & \gamma_{32} &= \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \omega_1 & & & \chi_{23} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} & \chi_{32} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} \\
\gamma_{31} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \omega_2 & \gamma_{13} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \omega_2 & & & \chi_{31} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} & \chi_{13} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь $\sigma_{nm}, \mu_{nm}, \gamma_{nm}, \chi_{nm}$ – компоненты несимметричных тензоров силового и моментного напряжений, деформаций и изгибов – кручений; U_n, ω_n – компоненты векторов перемещения и независимого поворота; $-h \leq x_3 \leq h$; \hat{A}, \hat{B} – матрицы жёсткостей, \hat{a}, \hat{b} – матрицы податливостей микрополярного ортотропного упругого тела.

Если рассматривать задачу изгиба микрополярных упругих пластин (т.е. антисимметричную по x_3 задачу), то для граничных условий на лицевых плоскостях пластинки $x_3 = \pm h$ будем считать заданными силовые и моментные напряжения следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{31} &= \frac{p_1^+ - p_1^-}{2} & \sigma_{32} &= \frac{p_2^+ - p_2^-}{2} & \sigma_{33} &= \pm \frac{p_3^+ + p_3^-}{2} \\
\mu_{31} &= \pm \frac{m_1^+ + m_1^-}{2} & \mu_{32} &= \pm \frac{m_2^+ + m_2^-}{2} & \mu_{33} &= \frac{m_3^+ - m_3^-}{2}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Граничные условия на боковой поверхности пластинки Σ , в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Отметим, что в случае

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E} \\
a_{12} &= a_{13} = a_{23} = -\frac{\nu}{E} \\
a_{45} &= a_{56} = a_{78} = -\frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \\
a_{44} &= a_{55} = \tilde{a}_{55} = a_{66} = a_{77} = a_{88} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \\
b_{11} &= b_{22} = b_{33} = \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \\
b_{12} &= b_{13} = b_{23} = -\frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)} \\
b_{45} &= b_{56} = b_{78} = -\frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \\
b_{44} &= b_{55} = \tilde{b}_{55} = b_{66} = b_{77} = b_{88} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

вместо (1.3) получим физические соотношения микрополярного изотропного материала, а при

$$a_{45} = a_{56} = a_{78} = 0, \quad a_{44} = a_{55}, \quad \tilde{a}_{55} = a_{66}, \quad a_{77} = a_{88} \tag{1.7}$$

получим физические соотношения классического ортотропного материала.

Уравнение баланса энергии выражается формулой:

$$\begin{aligned}
&\iint_S \int_{-h}^h W ds dx_3 = \frac{1}{2} \left\{ \iint_{S^+ = S} \left[(p_1^+ U_1 + p_2^+ U_2 + p_3^+ U_3) + (m_1^+ \omega_1 + m_2^+ \omega_2 + m_3^+ \omega_3) \right] ds + \right. \\
&\quad \left. \iint_{S^- = S} \left[(p_1^- U_1 + p_2^- U_2 + p_3^- U_3) + (m_1^- \omega_1 + m_2^- \omega_2 + m_3^- \omega_3) \right] ds + \right. \\
&\quad \left. \int_l \left\{ \int_{-h}^h \left[(p_1^0 U_1 + p_2^0 U_2 + p_3^0 U_3) + (m_1^0 \omega_1 + m_2^0 \omega_2 + m_3^0 \omega_3) \right] dx_3 \right\} dl \right\} \tag{1.8}
\end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \left[A_{11} \gamma_{11}^2 + A_{22} \gamma_{22}^2 + A_{33} \gamma_{33}^2 + 2A_{12} \gamma_{11} \gamma_{22} + 2A_{13} \gamma_{11} \gamma_{33} + 2A_{23} \gamma_{22} \gamma_{33} + A_{44} \gamma_{23}^2 + \right. \\
&\quad + A_{55} \gamma_{32}^2 + 2A_{45} \gamma_{23} \gamma_{32} + A_{55} \gamma_{31}^2 + A_{66} \gamma_{13}^2 + 2A_{56} \gamma_{31} \gamma_{13} + A_{77} \gamma_{12}^2 + A_{88} \gamma_{21}^2 + 2A_{78} \gamma_{12} \gamma_{21} + \\
&\quad + B_{11} \chi_{11}^2 + B_{22} \chi_{22}^2 + B_{33} \chi_{33}^2 + 2B_{12} \chi_{11} \chi_{22} + 2B_{13} \chi_{11} \chi_{33} + 2B_{23} \chi_{22} \chi_{33} + B_{44} \chi_{23}^2 + (1.9) \\
&\quad \left. + B_{55} \chi_{32}^2 + 2B_{45} \chi_{23} \chi_{32} + B_{55} \chi_{31}^2 + B_{66} \chi_{13}^2 + 2B_{56} \chi_{31} \chi_{13} + B_{77} \chi_{12}^2 + B_{88} \chi_{21}^2 + 2B_{78} \chi_{12} \chi_{21} \right]
\end{aligned}$$

представляет собой объёмную плотность потенциальной энергии деформации:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} l + \sigma_{21} m &= p_1^0 & \sigma_{12} l + \sigma_{22} m &= p_2^0 & \sigma_{13} l + \sigma_{23} m &= p_3^0 \\
\mu_{11} l + \mu_{21} m &= m_1^0 & \mu_{12} l + \mu_{22} m &= m_2^0 & \mu_{13} l + \mu_{23} m &= m_3^0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где l, m – компоненты единичной нормали к боковой поверхности пластинки Σ .

Общий вариационный функционал (вариационный функционал типа Рейснера) имеет вид:

$$\begin{aligned}
I = & \iint_S \int_{-h}^h \left\langle W - \left\{ \sigma_{11} \left(\gamma_{11} - \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \left(\gamma_{22} - \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) + \sigma_{33} \left(\gamma_{33} - \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) + \right. \right. \\
& + \sigma_{12} \left[\gamma_{12} - \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \omega_3 \right) \right] + \sigma_{12} \left[\gamma_{12} - \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \omega_3 \right) \right] + \sigma_{21} \left[\gamma_{21} - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \omega_3 \right) \right] + \\
& + \sigma_{13} \left[\gamma_{13} - \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \omega_2 \right) \right] + \sigma_{31} \left[\gamma_{31} - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \omega_2 \right) \right] + \sigma_{23} \left[\gamma_{23} - \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \omega_1 \right) \right] + \\
& + \sigma_{32} \left[\gamma_{32} - \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \omega_1 \right) \right] + \mu_{11} \left(\chi_{11} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right) + \mu_{22} \left(\chi_{22} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right) + \mu_{33} \left(\chi_{33} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \right) + \\
& + \mu_{12} \left(\chi_{12} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + \mu_{21} \left(\chi_{21} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) + \mu_{13} \left(\chi_{13} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \right) + \mu_{23} \left(\chi_{23} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \right) + \\
& + \mu_{23} \left(\chi_{23} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \right) + \mu_{31} \left(\chi_{31} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \right) + \mu_{32} \left(\chi_{32} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} \right) \left. \right\rangle ds dx_3 - \quad (1.11) \\
& - \iint_{S^+=S} \left[\left(p_1^+ U_1 + p_2^+ U_2 + p_3^+ U_3 \right) + \left(m_1^+ \omega_1 + m_2^+ \omega_2 + m_3^+ \omega_3 \right) \right]_{x_3=h} ds - \\
& - \iint_{S^-=S} \left[\left(p_1^- U_1 + p_2^- U_2 + p_3^- U_3 \right) + \left(m_1^- \omega_1 + m_2^- \omega_2 + m_3^- \omega_3 \right) \right]_{x_3=-h} ds - \\
& - \int_l \left\{ \int_{-h}^h \left[\left(p_1^0 U_1 + p_2^0 U_2 + p_3^0 U_3 \right) + \left(m_1^0 \omega_1 + m_2^0 \omega_2 + m_3^0 \omega_3 \right) \right] dx_3 \right\} dl
\end{aligned}$$

Варируя функционал (1.11) по всем функциональным аргументам и интегрируя по частям, получим все основные уравнения и граничные условия трёхмерной теории упругости микрополярного ортотропного тела ((1.1)-(1.4), (1.10)).

2. Теория микрополярных ортотропных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Теперь будем излагать основной принцип сведения трёхмерных уравнений теории микрополярной упругости для ортотропного материала к общим двумерным уравнениям тонких пластин. Этот принцип заключается в следующем. Качественные результаты [7] исходного приближения асимптотического метода интегрирования поставленной трёхмерной краевой задачи (1.1)-(1.4) позволяют в случае тонких пластин сформулировать достаточно общие гипотезы, которые идентичны гипотезам в случае изотропного микрополярного материала [4], при помощи которых осуществляется сведение трёхмерной проблемы к общей прикладной модели микрополярных ортотропных упругих тонких пластин.

Принимаемые ниже гипотезы по содержанию можно рассматривать как кинематические и статические.

Кинематическая гипотеза характеризует изменение компонентов вектора перемещения и вектора независимого поворота по координате x_3 вдоль нормали к срединной плоскости пластинки.

К статическим гипотезам, главным образом, относятся гипотезы, определяющие изменение по толщине пластинки касательных силовых напряжений σ_{3i} , нормального моментного напряжения μ_{33} и моментных напряжений μ_{i3} ($i = 1, 2$).

В соответствии с кинематической формулировкой вводятся предположения о линейном распределении компонентов векторов перемещения и независимого поворота по координате x_3 следующего характера:

$$U_i = x_3 \Psi_i(x_1, x_2) \quad U_3 = w(x_1, x_2) \quad i = (1, 2) \quad (2.1)$$

$$\omega_i = \Omega_i(x_1, x_2) \quad \omega_3 = x_3 \iota(x_1, x_2) \quad i = (1, 2) \quad (2.2)$$

Кинематическая гипотеза (2.1) относительно перемещений представляет собой известные гипотезы Тимошенко в классической теории упругих пластин [10-12]. По этой гипотезе нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости пластинки, остаётся после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной срединной плоскости, свободно вращается под некоторым углом, не изменяя при этом своей длины.

Кинематическая гипотеза (2.1), (2.2), в целом, в работах [10-12] названа обобщённой гипотезой Тимошенко в микрополярной теории пластин.

К статическим относятся следующие гипотезы:

1) силовым напряжением σ_{33} в обобщённом законе Гука (1.3) для γ_{11}, γ_{22} можем пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{11}, σ_{22} ;

2) для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(x_1, x_2) \quad i = (1, 2) \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(x_1, x_2) . \quad (2.3)$$

После определения указанных величин значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим, соответственно, как сумму значения (2.3) и результата интегрирования либо первых двух, либо шестого из (1.1) уравнений равновесия, для которых потребуем условия, чтобы усреднённые по толщине пластинки величины были равны нулю;

3) в обобщённом законе Гука (1.3) для χ_{i3} ($i = 1, 2$), моментным напряжением μ_{3i} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3} ($i=1,2$).

Отметим, что силовая часть перечисленных гипотез (имеем в виду гипотезу 2)) отличается от силовой гипотезы теории Тимошенко в классическом случае [10-12]. Забегая вперёд, отметим, что двумерная теория, построенная на основе представленной выше кинематической гипотезы и силовых гипотез 1)-2) (так и её классический аналог) будет асимптотически точной теорией.

На основе принятой кинематической гипотезы (2.1),(2.2), из формул (1.2), для деформаций, изгибов-кручений получим:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= x_3 K_{11}(x_1, x_2), \quad \gamma_{12} = x_3 K_{12}(x_1, x_2), \quad \gamma_{31} = \Gamma_{31}(x_1, x_2), \quad \gamma_{13} = \Gamma_{13}(x_1, x_2), \\ \gamma_{22} &= x_3 K_{22}(x_1, x_2), \quad \gamma_{21} = x_3 K_{21}(x_1, x_2), \quad \gamma_{32} = \Gamma_{32}(x_1, x_2), \quad \gamma_{23} = \Gamma_{23}(x_1, x_2), \quad (2.4) \\ \gamma_{33} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= k_{11}(x_1, x_2), \quad \chi_{12} = k_{12}(x_1, x_2), \quad \chi_{31} = 0, \quad \chi_{13} = x_3 l_{13}(x_1, x_2), \\ \chi_{22} &= k_{22}(x_1, x_2), \quad \chi_{21} = k_{21}(x_1, x_2), \quad \chi_{32} = 0, \quad \chi_{23} = x_3 l_{23}(x_1, x_2), \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\chi_{33} = k_{33}(x_1, x_2),$$

где приняты следующие обозначения:

$$K_{11} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}, K_{22} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}, K_{12} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \mathfrak{t}, K_{21} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + \mathfrak{t},$$

$$\Gamma_{31} = \Psi_1 - \Omega_2, \Gamma_{32} = \Psi_2 + \Omega_1, \Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1, \quad (2.6)$$

$$k_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, k_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, k_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, k_{33} = \mathfrak{t}, \quad (2.7)$$

$$l_{13} = \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial x_1}, l_{23} = \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial x_2}$$

Далее используя принятые статические гипотезы 1) и 2), подставляя (2.4) и (2.5) в выражения обобщённого закона Гука (1.3), для силовых и моментных напряжений будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 \left(K_{11} - \frac{a_{12}}{a_{22}} K_{22} \right), \quad \sigma_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 \left(K_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} K_{11} \right) \\ \sigma_{12} &= \left(\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{12} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{21} \right) x_3, \\ \sigma_{21} &= \left(\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{21} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{12} \right) x_3 \quad (2.8) \\ \sigma_{13} &= \frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{13} - \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{31}, \\ \sigma_{23} &= \frac{a_{55}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{23} - \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{32} \\ \sigma_{32} &= \frac{a_{44}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{32} - \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{23}, \\ \sigma_{31} &= \frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{31} - \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{13} \\ \sigma_{31} &= \sigma_{31}^0(x_1; x_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{11}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}^1}{\partial x_2} \right), \\ \sigma_{32} &= \sigma_{32}^0(x_1; x_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{22}^1}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}^1}{\partial x_1} \right), \quad \sigma_{33} = -x_3 \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} \right) \\ \mu_{11} &= \frac{\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b} k_{11} - \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b} k_{22} + \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b} k_{33}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b} k_{22} - \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{23} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b} k_{11} - \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{12} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b} k_{33}, \\
\mu_{33}^0 &= \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_b} k_{33} + \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b} k_{11} - \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b} k_{22}, & \Delta_b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} \\
\mu_{12} &= \frac{b_{88}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} k_{12} - \frac{b_{78}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} k_{21}, \\
\mu_{21} &= \frac{b_{77}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} k_{21} - \frac{b_{78}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} k_{12}, \\
\mu_{13} &= x_3 \frac{1}{b_{66}} l_{13}, & \mu_{23} &= x_3 \frac{1}{b_{44}} l_{23}, \\
\mu_{31} &= -x_3 \left(\frac{\partial \mu_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial x_2} + \sigma_{23} - \sigma_{32} \right), & \mu_{32} &= -x_3 \left(\frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{22}}{\partial x_2} + \sigma_{31} - \sigma_{13} \right) \\
\mu_{33} &= \mu_{33}^0(x_1; x_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12}^1 - \sigma_{21}^1 \right)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

С целью приведения трёхмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной, что уже выполнено для перемещений, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в теории микрополярных упругих пластин вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия N_{i3}, N_{3i} , моменты от силовых напряжений M_{ii}, M_{ij} , моменты от моментных напряжений L_{ii}, L_{33}, L_{ij} и гипермоменты от моментных напряжений Λ_{i3} :

$$\begin{aligned}
N_{i3} &= \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, & N_{3i} &= \int_{-h}^h \sigma_{3i} dx_3, & M_{ii} &= \int_{-h}^h x_3 \sigma_{ii} dx_3, & M_{ij} &= \int_{-h}^h x_3 \sigma_{ij} dx_3, \\
L_{ii} &= \int_{-h}^h \mu_{ii} dx_3, & L_{33} &= \int_{-h}^h \mu_{33} dx_3, & L_{ij} &= \int_{-h}^h \mu_{ij} dx_3, & \Lambda_{i3} &= \int_{-h}^h x_3 \mu_{i3} dx_3, \quad i = (1, 2)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Основная система уравнений общей теории статической изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, построенная с помощью перечисленных выше кинематических и статических гипотез, будет выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\text{уравнения равновесия} \\
\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} &= -\tilde{p}_3, & N_{3i} - \left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} \right) &= h\tilde{p}_i
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = -\tilde{m}_i \quad (2.11)$$

$$L_{33} - \left[\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} + (M_{12} - M_{21}) \right] = h\tilde{m}_3$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} N_{13} &= \tilde{C}_{55}\Gamma_{13} + C_{56}\Gamma_{31} & N_{31} &= C_{66}\Gamma_{31} + C_{56}\Gamma_{13} \\ N_{23} &= C_{55}\Gamma_{23} + C_{45}\Gamma_{32} & N_{32} &= C_{44}\Gamma_{32} + C_{45}\Gamma_{23} \\ M_{11} &= D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22} & M_{22} &= D_{22}K_{22} + D_{12}K_{11} \\ M_{12} &= D_{88}K_{12} + D_{78}K_{21} & M_{21} &= D_{77}K_{21} + D_{78}K_{12} \\ L_{11} &= d_{11}k_{11} + d_{12}k_{22} + d_{13}k_{33} & L_{12} &= d_{88}k_{12} + d_{78}k_{21} \\ L_{22} &= d_{22}k_{22} + d_{21}k_{11} + d_{23}k_{33} & L_{21} &= d_{77}k_{21} + d_{78}k_{12} \\ L_{33} &= d_{33}k_{33} + d_{31}k_{11} + d_{32}k_{22} \\ \Lambda_{13} &= \lambda_{66}l_{13} & \Lambda_{23} &= \lambda_{44}l_{23}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

геометрические соотношения имеют вид (2.6), (2.7);
здесь

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{55} &= 2h \frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} & C_{66} &= 2h \frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} & C_{56} &= -2h \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \\ C_{55} &= 2h \frac{a_{55}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} & C_{44} &= 2h \frac{a_{44}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} & C_{45} &= -2h \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \\ D_{11} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} & D_{22} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} & D_{12} &= -\frac{2h^3}{3} \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ D_{88} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{88}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} & D_{77} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{77}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} & D_{78} &= -\frac{2h^3}{3} \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= 2h \frac{\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, & d_{12} &= -2h \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, & d_{13} &= 2h \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b} \\ d_{22} &= 2h \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, & d_{21} &= -2h \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{23} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, & d_{23} &= -2h \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{12} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b} \\ d_{33} &= 2h \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, & d_{31} &= 2h \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, & d_{32} &= -2h \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b} \end{aligned}$$

$$d_{88} = 2h \frac{b_{88}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2}, \quad d_{77} = 2h \frac{b_{77}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2}, \quad d_{78} = -2h \frac{b_{78}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2}$$

$$\lambda_{66} = \frac{2h^3}{3} \frac{1}{b_{66}}, \quad \lambda_{44} = \frac{2h^3}{3} \frac{1}{b_{55}},$$

На основе формул (2.8), (2.9), силовые и моментные напряжения выразятся через усреднённые усилия, моменты и гипермоменты следующим образом:

$$\sigma_{ii} = x_3 \frac{M_{ii}}{2h^3}, \quad \sigma_{i3} = \frac{N_{i3}}{2h}, \quad \sigma_{3i} = \frac{N_{3i}}{2h}, \quad \sigma_{ij} = x_3 \frac{M_{ij}}{2h^3}$$

$$\sigma_{3i} = \frac{N_{3i}}{2h} + \frac{h^2/6 - x_3^2/2}{2h^3/3} \left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} \right),$$

$$\mu_{33} = \frac{L_{33}}{2h} + \frac{h^2 - x_3^2}{2h^3} \left(\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} + (M_{12} - M_{21}) \right)$$

$$\mu_{ii} = \frac{L_{ii}}{2h}, \quad \mu_{ij} = \frac{L_{ij}}{2h}, \quad \mu_{i3} = x_3 \frac{\Lambda_{i3}}{2h^3}, \quad \mu_{33} = \frac{L_{33}}{2h}.$$

К системе уравнений (2.11), (2.12), (2.6), (2.7) микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением присоединим “смягчённые” граничные условия на граничном контуре Γ срединной плоскости пластинки (напр., при $x_1 = \text{const}$):

$$M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad K_{11} = K_{11}^*; \quad M_{12} = M_{12}^* \quad \text{или} \quad K_{12} = K_{12}^*,$$

$$N_{13} = N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^*; \tag{2.13}$$

$L_{11} = L_{11}^* \quad \text{или} \quad k_{11} = k_{11}^*; \quad L_{12} = L_{12}^* \quad \text{или} \quad k_{12} = k_{12}^*; \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \quad \text{или} \quad l_{13} = l_{13}^*$
Система уравнений (2.11), (2.12), (2.6), (2.7) и граничные условия (2.13) будут представлять собой математическую модель микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, при которой полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Это – система дифференциальных уравнений 12-ого порядка с 6-ю граничными условиями на каждом крае срединной плоскости пластинки. Она содержит 35 уравнений относительно 35 неизвестных функций:

$$N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}, M_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, \Lambda_{i3}, L_{33}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, k_{ii}, k_{ij}, l_{i3}, \psi_i, w, \Omega_i, \iota.$$

Уравнение баланса энергии для модели (2.11), (2.12), (2.6), (2.7), (2.13) микрополярных ортотропных упругих тонких пластин будет выражаться так:

$$\iint_{(s)} \tilde{W} ds = \frac{1}{2} \iint_{(s)} \left[(p_1 h \psi_1 + p_2 h \psi_2 + p_3 w) + (m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2 + m_3 h \iota) \right] ds +$$

$$+ \int_l \left[(M_{11}^0 \psi_1 + M_{12}^0 \psi_2 + N_{13}^0 w) + (L_{11}^0 \Omega_1 + L_{12}^0 \Omega_2 + \Lambda_{13}^0 \iota) \right] dl,$$

где плотность потенциальной энергии деформации имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{W} = & \frac{1}{2} \left[D_{11} K_{11}^2 + D_{22} K_{22}^2 + 2D_{12} K_{11} K_{22} + D_{88} K_{21}^2 + 2D_{78} K_{12} K_{21} + D_{77} K_{12}^2 + \right. \\ & + C_{66} \Gamma_{31}^2 + 2C_{56} \Gamma_{31} \Gamma_{13} + \tilde{C}_{55} \Gamma_{13}^2 + C_{44} \Gamma_{32}^2 + 2C_{45} \Gamma_{32} \Gamma_{23} + C_{55} \Gamma_{23}^2 + \\ & + d_{11} k_{11}^2 + d_{22} k_{22}^2 + d_{33} k_{33}^2 + 2d_{12} k_{11} k_{22} + 2d_{13} k_{11} k_{33} + 2d_{23} k_{22} k_{33} + d_{77} k_{21}^2 + \\ & \left. + 2d_{78} k_{12} k_{21} + d_{88} k_{12}^2 + \lambda_{66} l_{13}^2 + \lambda_{44} l_{23}^2 \right], \end{aligned}$$

а общий вариационный функционал можем представить следующим образом:

$$\begin{aligned} I = & \iint_s \left\langle \tilde{W} - \left[M_{11} \left(K_{11} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \right) + M_{22} \left(K_{22} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right) + M_{12} \left[K_{12} - \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \iota \right) \right] + \right. \right. \\ & + M_{21} \left[K_{21} - \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + \iota \right) \right] + N_{13} \left[\Gamma_{13} - \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2 \right) \right] + \\ & + N_{23} \left[\Gamma_{23} - \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1 \right) \right] + L_{11} \left(k_{11} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right) + L_{22} \left(k_{22} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right) + \\ & + L_{33} (k_{33} - \iota) + L_{12} \left(k_{12} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right) + L_{21} \left(k_{21} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right) + \Lambda_{13} \left(l_{13} - \frac{\partial \iota}{\partial x_1} \right) + \Lambda_{23} \left(l_{23} - \frac{\partial \iota}{\partial x_2} \right) \left. \right\rangle ds - \\ & - \iint_s \left[(p_1 h \Psi_1 + p_2 h \Psi_2 + p_3 w) + (m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2 + m_3 h \iota) \right] ds - \\ & - \int_l \left[(M_{11}^0 \Psi_1 + M_{12}^0 \Psi_2 + N_{13}^0 w) + (L_{11}^0 \Omega_1 + L_{12}^0 \Omega_2 + \Lambda_{13}^0 \iota) \right] dl \end{aligned}$$

Отметим, что при (1.6) вместо модели (2.11), (2.12), (2.6), (2.7) и (2.13) получим систему основных уравнений и граничных условий теории микрополярных упругих изотропных пластин с независимыми полями перемещений и вращений [4], а при (1.7), из уравнений (2.11), (2.12), (2.6), (2.7) и граничных условий (2.13) будут отделяться классические уравнения и граничные условия теории упругих пластин на основе гипотез Тимошенко [11,12] (с некоторым отличием, связанным со статической гипотезой 3)).

Заключение. В работе впервые построена общая теория изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких пластин. Построено общее вариационное уравнение этой теории. Построенная теория будет основой для рассмотрения в дальнейшем различных конкретных задач об изгибе микрополярных ортотропных упругих пластин.

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках **Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности**, проведённого Государственным комитетом по науке МОН Республики Армения в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С.84-95.
2. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-type theories of Plates and Shells: A short review and bibliography// Arch.Appl. Mech.Special Issue.Doi10.1007/s 00419-009-0365-3.
3. Саркисян С.О. Математические модели микрополярных упругих тонких балок // Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. №2. С.121-128.
4. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №1. С.58-67.
5. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады АН России. 2011. Т.436. №2. С.195-198.
6. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells//Advanced Structured Materials. Volume 15. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. 2011. P.91–100.
7. Айрапетян Г.С. Построение двумерных уравнений статической задачи изгиба ортотропных микрополярных упругих тонких пластин асимптотическим методом // В сб. научных трудов международной конференции: "Актуальные проблемы механики сплошной среды". Т.1. Ереван: НАН Армении. 2010. С.56-60.
8. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.
9. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders // ZAMM. 1974. V.54. №12. P.773–779.
10. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444с.
11. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наукова думка, 1977. 183с.
12. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: Судостроение, 1987. 316с.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович,

Член-корр. НАН Армении, доктор физ-мат наук, профессор, зав. кафедрой Математического анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского гос.педагогического института им.М.Налбандяна

Айрапетян Гаяне Сократовна,

Аспирант Гюмрийского гос.педагогического института им. М.Налбандяна

Поступила в редакцию 01.02.2012

УДК 539.3

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ОБТЕКАЕМОЙ
СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА, НАБЕГАЮЩИМ НА ЕЁ
СВОБОДНЫЙ КРАЙ**

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость неконсервативных систем, прямоугольная упругая пластинка, дивергентная неустойчивость, сверхзвуковое обтекание

Key words: the stability of non-conservative systems, an elastic rectangular plate, the divergence instability, supersonic gas flow

Բերդբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ր.

Գազի գերձայնային հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդրի մասին, երբ հոսքը սալի ազատ եզրին վրավազք է կատարում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի կոշտ ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հողակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը:

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

On the problem of the stability of a rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction from the free edge to the clamped edge

The linear problem of the static stability of an elastic rectangular plate in a supersonic flow of gas is investigated. The flow is in a direction from the free edge to the clamped edge, and at the two edges parallel to the flow are hinge joint supported. Its solution shows that the divergence is possible.

Рассматривается задача устойчивости упругой прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. Скорость потока направлена от свободного края пластинки к жёстко закреплённому краю параллельно двум остальным шарнирно закреплённым краям. Показана возможность возникновения как дивергенции, так и локализованной дивергенции.

В предлагаемой работе в линейной постановке исследуется задача устойчивости прямоугольной упругой пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. Скорость обтекающего потока направлена от свободного края пластинки к жёстко закреплённому краю. А края пластинки, параллельные направлению скорости потока, шарнирно опёрты. С помощью численно-аналитических методов анализа показана возможность возникновения, как дивергенции, так и локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки.

Найдена критическая скорость потока газа в зависимости от параметров задачи, приводящая к дивергентной неустойчивости. Показана существенная зависимость критической скорости потока от коэффициента Пуассона и от относительной длины и ширины пластинки.

Установлено, что в случае, когда ширина пластинки превосходит её длину более чем в два раза, поведение прямоугольной пластинки в потоке газа аналогично поведению полубесконечной пластины–полосы: наблюдается явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края пластинки. Критическая скорость потока зависит от коэффициента Пуассона: она меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона. А в случае, когда отношение ширины пластинки к её длине порядка одной десятой и меньше, то поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа такое же, как и

поведение обтекаемой удлинённой пластинки. При этом критическая скорость потока не зависит от коэффициента Пуассона.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную тонкую упругую пластинку, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа будем считать плоским и потенциальным. А, также, будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромка $x = 0$ пластинки свободна, кромка $x = a$ жёстко закреплена, а кромки $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривленная форма равновесия (изогнутая пластинка), когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [1] дифференциальное уравнение изгиба пластинки описывается соотношением [2,3]

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y). \quad (1.1)$$

Здесь $w = w(x, y)$ – прогиб точек срединной поверхности пластинки; ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде; D – цилиндрическая жёсткость пластинки на изгиб.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок имеют вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad x = 0; \quad (1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = a; \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \text{ и } y = b; \quad (1.4)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти значения критической скорости потока газа V_{cr} , при превышении которых возникает дивергентная неустойчивость: невозмущённая форма равновесия пластинки перестаёт быть устойчивой, а становится устойчивой изогнутая форма. Иными словами, требуется определить значения параметра V , при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2) – (1.4).

Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости пластинки сведём её к задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\lambda_n px) \cdot \sin(\lambda_n y), \quad \lambda_n = \pi n b^{-1}. \quad (1.5)$$

Подставляя выражение (1.5) в уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение

$$p^4 - 2p^2 + \alpha_n^3 p + 1 = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}, \quad \alpha_n^3 > 0. \quad (1.6)$$

Исследуем поведение корней уравнения (1.6) в зависимости от параметров задачи (1.1) – (1.4).

Перепишем характеристическое уравнение (1.6) в удобном для исследования виде

$$(p^2 - 1)^2 + \alpha_n^3 p = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}, \quad \alpha_n^3 > 0. \quad (1.7)$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (1.7) имеет два отрицательных действительных корня: $p_1 < 0$, $p_2 > 0$ и пару комплексных сопряжённых корня

$$p_{3,4} = \alpha \pm i\beta \text{ с положительной вещественной частью } \alpha > 0.$$

Найдём решение характеристического уравнения (1.6).

Нетрудно показать, что корни характеристического уравнения (1.7) определяются выражениями

$$p_{1,2} = -\frac{A}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2}{16} - q_1 + \frac{\alpha_n^3}{A}}, \quad p_1 < 0, \quad p_2 > 0; \quad (1.8)$$

$$p_{3,4} = \frac{A}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2}{16} - q_1 - \frac{\alpha_n^3}{A}}, \quad p_{3,4} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha > 0. \quad (1.9)$$

Здесь

$$A = 2\sqrt{2(1+q_1)}, \quad q_1 > 1; \quad (10)$$

q_1 – единственный действительный корень кубического уравнения

$$q^3 + q^2 - q - 1 - \frac{\alpha_n^6}{8} = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}. \quad (1.11)$$

В самом деле, характеристическое уравнение (1.7), являясь алгебраическим уравнением четвёртой степени, в соответствии с известным алгоритмом нахождения решения, предложенным Феррари [5], равносильно следующим двум квадратным уравнениям:

$$p^2 + 0.5 Ap + (q_1 - \alpha_n^3 A^{-1}) = 0, \quad (1.12)$$

$$p^2 - 0.5 Ap + (q_1 + \alpha_n^3 A^{-1}) = 0. \quad (1.13)$$

Здесь A определяется выражением (2.5), а q_1 – действительный корень кубического уравнения (1.11).

Из представления уравнения (1.11) в виде

$$8 \cdot (1+q)^2 (q-1) = \alpha_n^6 \quad (1.14)$$

и положительности её дискриминанта $Q = \alpha_n^6 \left(\frac{1}{27} + \frac{\alpha_n^6}{256} \right)$ следует, что кубическое

уравнение (1.11) при условии $\alpha_n^3 > 0$ имеет один действительный корень q_1 и пару комплексных сопряжённых корня. При этом,

$$q_1 > 1. \quad (1.15)$$

А тогда, в соответствии с соотношениями (1.10) и (1.11), выражения (1.8) и (1.9) переписутся в виде:

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{q_1^2-1} - \frac{q_1-1}{2}}, \quad p_1 < 0, \quad p_2 < 0; \quad (1.16)$$

$$p_{3,4} = \frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm i\sqrt{\sqrt{q_1^2-1} + \frac{q_1-1}{2}}, \quad \alpha_n^3 > 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение (1.6) имеет два отрицательных действительных корня p_1 , p_2 и пару комплексных сопряжённых корня $p_{3,4}$ с положительной вещественной частью, удовлетворяющих квадратным уравнениям (1.12), (1.13) соответственно.

Отметим, что при отсутствии обтекания $\alpha_n^3 = 0$ ($V = 0$) из соотношений (1.7) и (1.14), очевидно, следует, что $q_1 = \pm 1$, $p_{1,2} = -1$, $p_{3,4} = 1$.

2. Общее решение (1.5) дифференциального уравнения (1.1), в соответствии с вышеизложенным, можно представить в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{C_{n1} \exp(\lambda_n p_1 x) + C_{n2} \exp(\lambda_n p_2 x) + \exp(\lambda_n \alpha x) \cdot (C_{n3} \cos(\lambda_n \beta x) + C_{n4} \sin(\lambda_n \beta x))\} \cdot \sin(\lambda_n y), \quad \lambda_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

где $p_i, i = \overline{1,4}$ – корни характеристического уравнения (1.7), определяемые

выражениями (1.16); $C_{nk}, k = \overline{1,4}$ – произвольные постоянные: $\sum_{k=1}^4 C_{nk}^2 \neq 0$.

Подставляя выражение (2.1) в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_{nk} . Далее, приравняв нулю определитель полученной системы, получаем следующее дисперсионное уравнение относительно q – единственного действительного корня уравнения (1.14):

$$F(q, \gamma, n, \nu) = \quad (2.2)$$

$$= B_1 B_2 \exp(-2\pi n \gamma \sqrt{2(q+1)}) \left[2(q+1)(q + \sqrt{q^2-1} - \nu) - (1-\nu)^2 \right] +$$

$$+ B_1 B_2 \left[2(q+1)(q - \sqrt{q^2-1} - \nu) - (1-\nu)^2 \right] +$$

$$+ 2B_2 \exp(-\pi n \gamma \sqrt{2(q+1)}) \left[(q+1)\sqrt{2(q^2-1)}(\sqrt{q+1} + \sqrt{q-1}) \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) + \right.$$

$$+ B_1(4q^2 + 2q - 1 + 2q\nu + \nu^2) \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \left. \right] \cos(\pi n \gamma B_2) +$$

$$+ \exp(-\pi n \gamma \sqrt{2(q+1)}) \left[2B_1(q+1)\sqrt{2(q^2-1)}(\sqrt{q+1} - \sqrt{q-1}) \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) + \right.$$

$$+ (2q^2 + 3q - 1 - 2(3q^2 + 3q - 2)\nu + (3q+1)\nu^2) \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) \left. \right] \sin(\pi n \gamma B_2) = 0,$$

где

$$\gamma = ab^{-1}, \quad \gamma \in (0, \infty); \quad (2.3)$$

$$B_1(q) = \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1)}, \quad B_2(q) = \sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1)}, \quad q > 1. \quad (2.4)$$

Заметим, что здесь и далее в тексте в обозначении действительного корня уравнения (1.14) индекс “1” опущен.

Из выражений (2.4) следует, что

$$B_1(q) > 0, \quad B_2(q) > 0 \quad \text{при всех } q > 1. \quad (2.5)$$

Легко показать, что дисперсионное уравнение (2.2) в предельных случаях, для которых $\gamma \rightarrow 0$ ($b \rightarrow \infty$) и $\gamma \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow \infty$), соответственно, приводится к виду

$$\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{3}{2}sa\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sa\right) = 0, \quad \gamma \rightarrow 0; \quad (2.6)$$

$$2(q+1) \cdot (q - \sqrt{q^2 - 1} - \nu) - (1 - \nu)^2 = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty; \quad (2.7)$$

где $s^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1}$ или, в соответствии с обозначениями (1.5), (1.6), (2.3) и соотношением (1.14),

$$sa = \pi n \gamma \sqrt{2q}. \quad (2.8)$$

Следует отметить, что дисперсионное уравнение (2.6) в точности такое же, как и дисперсионное уравнение, полученное при исследовании задачи статической устойчивости удлинённой консольной пластинки ($0 \leq x \leq a$, $-\infty \leq y \leq \infty$) в условии обтекания её сверхзвуковым потоком газа в направлении от свободного края $x = 0$ к закреплённому $x = a$ [2,4]. Точное решение уравнения (2.6)

$$V_{cr.div} \approx 6.33 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.7) в точности совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в работе [6] при изучении явления локализованной дивергентной неустойчивости, возникающей в окрестности свободного края ($x = 0$) консольной упругой полубесконечной пластины–полосы ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа вдоль полубесконечных шарнирно закреплённых краёв в направлении от свободного края ($x = 0$) к закреплённому краю ($x = \infty$). При этом, критическая скорость потока $V_{cr.div}$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν . В табл. 1 приведены для нескольких значений коэффициента Пуассона ν соответствующие значения критической скорости потока $V_{cr.div}$.

Таблица 1

ν	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$V_{cr.div} \cdot (a_0 \rho_0 b^3)^{-1} D^{-1}$	2453.012	537.191	173.371	120.741	77.398

В соответствии с обозначениями (1.5), (1.6) и соотношением (1.14), значение критической скорости потока, приводящее к дивергентной неустойчивости, определяется выражением

$$V_{cr.div} = 2\sqrt{2(q-1)} \cdot (q+1) \cdot \pi^3 n^3 D (a_0 \rho_0 b^3)^{-1}, \quad (2.10)$$

или, учитывая обозначение (2.3),

$$V_{cr.div} = 2\sqrt{2(q-1)} \cdot (q+1) \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \quad (2.11)$$

Отсюда очевидно, что критическая скорость дивергенции существует только в том случае, если $q > 1$, q – действительный корень кубического уравнения (1.14).

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы пластинки в

потенциальном сверхзвуковом потоке сводится к исследованию уравнения (2.2).

3. С помощью численных методов анализа найдены первые корни q^* уравнения (2.2), соответствующие различным значениям коэффициента Пуассона ν и параметра $\gamma \in (0, \infty)$, определяемого выражением (2.3). Подставляя полученные значения $q = q^*$ в соотношения (2.10) или (2.11), получаем соответствующие значения критической скорости потока $V_{cr div}$, приводящие к дивергентной неустойчивости: при значениях скорости потока $V \geq V_{cr div}$ невозмущённая форма равновесия пластинки перестаёт быть устойчивой. Некоторые результаты расчётов – значения $V_{cr div} \cdot D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3)$, соответствующие различным значениям ν и γ , представлены в табл. 2.

Отметим, что для всех ν и γ наименьшее значение скорости потока достигается при значении $n = 1$.

В результате расчёта было установлено, что при значениях $\gamma > 0.01$ критическая скорость $V_{cr div}$ зависит от величины коэффициента Пуассона ν и отношения сторон $\gamma = ab^{-1}$ прямоугольника. Для всех $\gamma > 0.01$ критическая скорость $V_{cr div}$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν , а с возрастанием γ значение критической скорости растёт (табл. 2).

Таблица 2

$\nu \backslash m$	0.125	0.25	0.375	0.5
0.01	6.328	6.328	6.328	6.328
0.10	6.812	6.673	6.577	6.467
0.30	10.260	10.076	9.213	8.286
0.50	20.421	19.058	16.048	14.081
0.80	71.329	58.809	47.869	36.614
1.00	193.487	128.501	95.967	71.519
1.20	469.173	278.718	170.116	128.388
1.50	1035.455	583.041	402.272	254.948
1.80	1854.292	1007.488	695.125	440.546
2.00	2598.091	1382.022	953.537	604.313

В случае достаточно длинных пластинок ($\gamma = ab^{-1} \leq 0.01$) значение $q = q^* \gg 1$ не зависит от коэффициента Пуассона ν . А соответствующее значение критической скорости $V_{cr div}$ не зависит как от коэффициента Пуассона ν , так и от отношения сторон γ . При этом, критическая скорость равна

$$V_{cr div} \approx 6.329 \cdot D \cdot (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \quad \gamma \leq 0.01. \quad (3.1)$$

Из сопоставления значений (2.9) и (3.1) очевидно, что при всех значениях $\gamma \leq 0.01$ критическая скорость потока, при которой прямоугольная пластинка теряет статическую устойчивость, с точностью $\chi = 0.001$ равно значению критической скорости (2.9). Это означает, что при значениях $\gamma \leq 0.01$ поведение обтекаемой в

сверхзвуковом потоке газа прямоугольной пластинки примерно такое же, как и у удлинённой пластинки $\gamma \rightarrow 0$ ($b \rightarrow \infty$): в обоих случаях пластинки теряют статическую устойчивость при скоростях потока, превышающих значение $V_{cr. div} \approx 6.33D(a_0\rho_0a^3)^{-1}$.

Начиная с $\gamma = 2$, значения критических скоростей потока, найденные в данной работе для различных значений коэффициента Пуассона ν (табл.2), пересчитанные по формуле (2.10), примерно равны значениям критических скоростей потока, полученных в работе [6] (табл.1). В соответствии с соотношением (2.7), очевидно, что по мере возрастания γ , значения критических скоростей потока с большей точностью равны предельным значениям, приведённым в табл.1. Тем самым, начиная с $\gamma = 2$, прямоугольная пластинка в потоке газа теряет статическую устойчивость при скоростях потока, равных критическим скоростям дивергенции полубесконечной пластины–полосы (табл.1).

Таким образом, в случае, когда ширина пластинки превосходит её длину более чем в два раза, поведение прямоугольной пластинки в потоке газа аналогично поведению полубесконечной пластины–полосы: критические скорости потока, приводящие к статической потере устойчивости, равны и зависят от коэффициента Пуассона. Критическая скорость потока меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона. В этом случае наблюдается явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края пластинки. А в случае, когда отношение ширины пластинки к её длине порядка одной десятой и меньше, то поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа такое же, как и поведение обтекаемой удлинённой пластинки. При этом, значение критической скорости потока не зависит от коэффициента Пуассона.

Работа выполнена в рамках the European Union Seventh Framework Programme ([FP7/2007-2013] under grant agreement n^0 269160).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733-755.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.
3. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. // Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. С.211-212.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832с.
6. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.29-34.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096, **E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

Мартirosян Стелла Размиковна – кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении,

Ереван, Армения (+374 10) 524890, **E-mail:** mehinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 20.06.2012

УДК 539.374

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ВЯЗКОУПРУГОЙ
ПЛАСТИНКЕ С ВЛОЖЕННОЙ ШАЙБОЙ ПРИ
ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКЕ**

Вермишян Г. Б.

Ключевые слова: комплексный модуль, комплексная податливость, диссипативная сила, линейная и экспоненциальная аппроксимация.

Keyword: complex modules, complex compliant, dissipative forces, linear und exponential approximation.

Վերմիշյան Գ.Բ.

**Ներդիրով մածուցիկ-առաձգակա թիթեղում ջերմության
բաշխումը վիբրացիոն բեռի ազդեցության տակ**

Աշխատանքում դիտարկված է ջերմության բաշխումը մածուցիկ-առաձգական նյութից, կլոր անցքով թիթեղում, որի մեջ ներդրված է ուրիշ մածուցիկ-առաձգական նյութից ներդիր: Կիրառված բեռը իրենից ներկայացնում է հաստատուն ամպլիտուդայով, հարմոնիկ օրենքով փոփոխվող OX - առանցքի ուղղությամբ ազդող, անվերջում կիռատված ձգող ուժ:

Դիտարկված է նաև թիթեղի ձգումը բոլոր ուղղություններով: Ներդիրը լուծված է այն պայմանով, որ երկու մարմինների բաժանման գծի վրա հավասար են ջերմաստիճանը և ջերմային հոսքը, իսկ թիթեղի հարթության վրա տեղի է ունենում ազատ ջերմափոխանակություն շրջապատող միջավայրի հետ: Բերված են հաշվումներ բոլոր ուղղություններով ձգման դեպքում

Vermishyan G.B.

Distribution of temperature in of visco-elastic plate with a washer imbedded under the effect of vibration

The distribution of temperature in an infinite plate of visco-elastic material with a circular hole, into which is embedded visco-elastic circular disc from another visco-elastic material is examined. Applied load is a tensile force acting at infinity in the direction of the OX axis, which varies harmonically with constant amplitude.

The case of omnidirectional tension of the plate is considered as well.

The problem is solved under the condition that the dividing line of two-body temperature and heat flux are equal, and on the lateral surface of the plate and the washer is loose heat to the environment.

Calculation is made for the case of omnidirectional tension.

В работе рассматривается распределение температуры в бесконечной пластинке из вязкоупругого материала круговым отверстием, в которую вложена вязкоупругая круговая шайба из другого вязкоупругого материала.

Прилагаемая нагрузка представляет собой растягивающиеся силы, действующие в бесконечности по направлению оси OX , которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой.

В работе также рассмотрен случай всестороннего растяжения пластинки.

Задача решена при условии, что на линии раздела двух тел равны температура и тепловой поток, а на боковой поверхности пластинки и шайбы происходит свободная теплоотдача в окружающую среду.

Проведены вычисления в случае всестороннего растяжения.

Исследовано нагружение бесконечной пластинки из вязкоупругого материала с круговым отверстием, в которую вложена вязкоупругая круговая шайба из другого вязкоупругого материала. До деформации радиусы шайбы и отверстия были одинаковы. Будем полагать, что трение между шайбой и пластинкой отсутствует. Прилагаемая нагрузка представляет собой растягивающиеся силы, действующие в бесконечности по направлению оси OX , которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой, равной p_0 .

Также рассматривается случай всестороннего растяжения пластинки. Известно

[1], что составляющие комплексной податливости существенно зависят от частоты колебаний и температуры. При этом, за счёт работы диссипативных сил происходит выделение тепла, поэтому при определении температуры получаются нелинейные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие некоторые функции, которые находятся экспериментальным путем. Задача решена при условии, что на линии раздела шайбы и пластинки равны температура и тепловой поток, а на боковой поверхности пластинки и шайбы происходит свободная теплоотдача в окружающую среду по направлению нормали, т.е. по направлению оси OZ . Имеет место соотношение $\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T_0 - T)$, где α – коэффициент теплопередачи. Предполагается, что температура по толщине пластинки и шайбы не меняется.

1. Одностороннее растяжение. Рассмотрим деформацию пластинки из вязкоупругого материала с круговым отверстием с радиусом R , в которую вложена шайба из другого вязкоупругого материала. На пластинку действует растягивающаяся нагрузка, меняющаяся по гармоническому закону $p = p_0 \cos \omega t$ с постоянной амплитудой, равной p_0 . Положим, что составляющая комплексной податливости $J''(T, \omega)$ мала по сравнению с $J'(T, \omega)$. Для определения напряжённого состояния можно воспользоваться решением упругой задачи о растяжении пластинки с вложенной упругой шайбой. Отметим знаком 1 все элементы, относящиеся к шайбе, а к пластинке – знаком 2. Компоненты напряжения в полярной системе координат будут [2]

$$\sigma_{\rho}^{(j)} = \sigma_{0\rho}^{(j)} \cos \omega t, \quad \sigma_{\theta}^{(j)} = \sigma_{0\theta}^{(j)} \cos \omega t, \quad \tau_{\rho\theta}^{(j)} = \tau_{0\rho\theta}^{(j)} \cos \omega t, \quad (\rho = r/R, j = 1, 2) \quad (1.1)$$

где $\sigma_{0\rho}^{(j)}, \sigma_{0\theta}^{(j)}, \tau_{0\rho\theta}^{(j)}$ – компоненты напряжения упругой задачи.

При вложении шайбы в отверстие, радиусы шайбы и отверстия пластинки до деформации были одинаковы. Трение между пластинкой и шайбой отсутствует. Связь между компонентами деформации и напряжения возьмём в виде [3]

$$\varepsilon_{\rho}^{(j)} = \frac{\sigma_{\rho}^{(j)}}{E_j} + \int_{-\infty}^t K(T_j, t - \tau) \sigma_{\rho}^{(j)}(\tau) d\tau - \frac{\nu \sigma_{\theta}^{(j)}}{E_j} - \nu \int_{-\infty}^t K(T_j, t - \tau) \sigma_{\theta}^{(j)}(\tau) d\tau, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{\theta}^{(j)} = \frac{\sigma_{\theta}^{(j)}}{E_j} + \int_{-\infty}^t K(T_j, t - \tau) \sigma_{\theta}^{(j)}(\tau) d\tau - \frac{\nu \sigma_{\rho}^{(j)}}{E_j} - \nu \int_{-\infty}^t K(T_j, t - \tau) \sigma_{\rho}^{(j)}(\tau) d\tau,$$

$$\gamma_{\rho\theta}^{(j)} = \frac{2(1+\nu)}{E_j} \tau_{\rho\theta}^{(j)} + 2(1+\nu) \int_{-\infty}^t K(T_j, t - \tau) \tau_{\rho\theta}^{(j)}(\tau) d\tau, \quad (j = 1, 2).$$

Подставляя значение $\sigma_{\rho}^{(j)}, \sigma_{\theta}^{(j)}, \tau_{\rho\theta}^{(j)}$ из (1.1) в (1.2), введя переменную $\zeta = t - \tau$ и комплексную податливость

$$J^*(T_j, \omega) = \int_0^{\infty} K(T_j, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta = J'_j(T_j, \omega) - iJ''_j(T_j, \omega) = \\ = J(T_j, \omega) \cos \phi_0^{(j)} - iJ(T_j, \omega) \sin \phi_0^{(j)} \quad (j = 1, 2), \quad (1.3)$$

получаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\rho}^{(j)} &= (\sigma_{0\rho}^{(j)} - \nu\sigma_{0g}^{(j)}) \left\{ \left[\frac{1}{E_j} + J'(T_j, \omega) \right] \cos \omega t + J''(T_j, \omega) \sin \omega t \right\}, \\
\varepsilon_g^{(j)} &= (\sigma_{0g}^{(j)} - \nu\sigma_{0\rho}^{(j)}) \left\{ \left[\frac{1}{E_j} + J'(T_j, \omega) \right] \cos \omega t + J''(T_j, \omega) \sin \omega t \right\}, \\
\gamma_{\rho g}^{(j)} &= 2(1+\nu)\tau_{0\rho g}^{(j)} \left\{ \left[\frac{1}{E_j} + J'(T_j, \omega) \right] \cos \omega t + J''(T_j, \omega) \sin \omega t \right\},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Работа, совершаемая при вязкоупругой деформации, равна

$$W_j = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sigma_{\rho}^{(j)} \frac{d\varepsilon_{\rho}^{(j)}}{dt} dt + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sigma_g^{(j)} \frac{d\varepsilon_g^{(j)}}{dt} dt + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \tau_{\rho g}^{(j)} \frac{d\gamma_{\rho g}^{(j)}}{dt} dt \quad (j=1,2) \tag{1.5}$$

подставляя (1.1) и (1.4) в (1.5), получим

$$W_j = \pi J_j''(T_j, \omega) \left[(\sigma_{0\rho}^{(j)})^2 - 2\nu\sigma_{0\rho}^{(j)}\sigma_{0g}^{(j)} + (\sigma_{0g}^{(j)})^2 + 2(1+\nu)(\tau_{0\rho g}^{(j)})^2 \right] (j=1,2). \tag{1.6}$$

Работа, совершаемая за один цикл при деформации, позволяет определить интенсивность выделения тепла

$$q_j = \frac{\lambda\omega k_j^*}{2\pi} W_j \quad (j=1,2), \tag{1.7}$$

где k_i – величина, обратная механическому эквиваленту тепла, λ – коэффициент, равный доле механической работы, переходящий в тепло. С целью установления максимального нагрева будем полагать λ постоянным и $\lambda = 1$. Известно [1], что компоненты комплексной податливости и модуля связаны соотношением

$$\begin{aligned}
J^*(T, \omega) &= \frac{1}{E^*(T, \omega)}, \\
J'(T, \omega) &= \frac{E'(T, \omega)}{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2}, \\
J''(T, \omega) &= \frac{E''(T, \omega)}{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

В случае относительно небольшого температурного интервала для $E'(T_j, \omega)$ и $E''(T_j, \omega)$ можно воспользоваться линейной аппроксимацией, при этом, $E'(T_j, \omega)$ будем считать постоянной

$$E_j'(T_j, \omega) = A_j, E_j''(T_j, \omega) = B_j + C_j T_j \quad (j=1,2). \tag{1.9}$$

Обычно, $E''(T_j, \omega) \ll E'(T_j, \omega)$, тогда $E''(T_j, \omega)$ по сравнению с $E'(T_j, \omega)$ можно пренебречь [1] и

$$J'_j(T_j, \omega) = 1/A_j, \quad J''_j(T_j, \omega) = (B_j + C_j T_j) / A_j^2. \quad (1.10)$$

Для стационарного случая уравнение теплопроводности в каждой области принимает вид

$$L_j(T_j) \equiv \Delta T_j + \mu_0^{(j)} J''_j(T_j, \omega) f_j - \alpha(T_j - T_0) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1.11)$$

$$\mu_0^{(j)} = \frac{\lambda \omega k_j^* p_0^2}{2a_j c_j},$$

где

$$f_j(\rho, \vartheta) = (\sigma_\rho^{0(j)})^2 - 2\nu \sigma_\rho^{0(j)} \sigma_\vartheta^{0(j)} + (\sigma_\vartheta^{0(j)})^2 + 2(1+\nu)(\tau_{\rho\vartheta}^{0(j)})^2 \quad (j = 1, 2) \quad (1.12)$$

при граничном условии

$$T_1 = T_2 = T_*, \quad r = R,$$

$$k_2 \frac{dT_2}{dr} = k_1 \frac{dT_1}{dr}, \quad r = R, \quad (1.13)$$

$$T_2 < \infty, \quad r \rightarrow \infty,$$

на линии раздела пластинки и шайбы температура (T_* – пока неизвестная функция) и тепловой поток равны, а на бесконечности температура ограничена. Учитывая (1.10), (1.12) и введя обозначения

$$r/R = \rho, \quad (B_j + C_j B_j) / A_j = u_j \quad (j = 1, 2), \quad (1.14)$$

в каждой области получаем

$$L_1(u_1) \equiv \Delta u_1(\rho, \vartheta) = -F_1(\rho, \vartheta) u_1(\rho, \vartheta) - \Phi_1(\rho, \vartheta) \quad (0 \leq \rho < 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi), \quad (1.15)$$

$$L_2(u_2) \equiv \Delta u_2(\rho, \vartheta) - \varepsilon^2 u_2(\rho, \vartheta) = -F_2(\rho, \vartheta) u_2(\rho, \vartheta) - \Phi_2(\rho, \vartheta) \quad (1 < \rho < \infty, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi), \quad (1.16)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2},$$

$$\Phi_1(\rho, \vartheta) = \frac{\alpha R^2 (B_1 + C_1 T_0)}{A_1} = \alpha_1^{(1)}, \quad \Phi_2(\rho, \vartheta) = \frac{\alpha R^2 (B_2 + C_2 T_0)}{A_2} = \alpha_1^{(2)}, \quad (1.17)$$

$$\alpha_0^{(2)} = R^2 C_2 \mu_0^{(2)} / A_2^2, \quad \varepsilon^2 = \alpha R^2 - 2(1+\nu) C_2 \mu_0^{(2)} / A_2^2$$

$F_1(\rho, \vartheta)$ и $F_2(\rho, \vartheta)$ – данные регулярные функции, T_0 – температура окружающей среды. После обозначения (1.14) граничные условия (1.13) принимают вид:

$$u_1(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = \frac{B_1 + C_1 T_*}{A_1}, \quad u_2(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = \frac{B_2 + C_2 T_*}{A_2}, \quad (1.18)$$

$$\frac{k_2 A_2}{C_2} \frac{du_2}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = \frac{k_1 A_1}{C_1} \frac{du_1}{d\rho} \Big|_{\rho=1},$$

$$u_2 < \infty, \rho \rightarrow \infty.$$

Ищем решение уравнений (1.15) и (1.16) при граничном условии (1.18) соответственно в виде

$$u_1(\rho_0, \vartheta_0) = u_1^*(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} \int_0^1 G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_1^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta, \quad (1.19)$$

$$(0 \leq \rho_0 < 1, 0 \leq \vartheta_0 \leq 2\pi),$$

$$u_2(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{u_2^*(\vartheta_0)}{\rho_0^2} + \int_0^{2\pi} \int_1^\infty G_2(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_2^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta, \quad (1.20)$$

$$(1 < \rho_0 < \infty, 0 \leq \vartheta_0 \leq 2\pi)$$

где G_1 – функция Грина уравнения Лапласа для круга, а G_2 – функция Грина уравнения Гельмгольца для внешности круга

$$G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1 - 2\rho\rho_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \rho^2 \rho_0^2}{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \rho_0^2}, \quad (1.21)$$

$$G_2(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \left[W_0(\rho_0, \rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\rho_0, \rho) \cos(\vartheta - \vartheta_0) \right],$$

$$W_n(\rho_0, \rho) = \begin{cases} \left[I_n(\varepsilon \rho_0) K_n(\varepsilon) - K_n(\varepsilon \rho_0) I_n(\varepsilon) \right] \frac{K_n(\varepsilon \rho)}{K_n(\varepsilon)}, & 1 \leq \rho_0 < \rho, \\ \left[I_n(\varepsilon \rho) K_n(\varepsilon) - K_n(\varepsilon \rho) I_n(\varepsilon) \right] \frac{K_n(\varepsilon \rho_0)}{K_n(\varepsilon)}, & 1 \leq \rho < \rho_0, \end{cases} \quad (1.22)$$

где $I_n(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента, а $K_n(x)$ – функция Макдональда.

Подставляя значение $u_1(\rho, \vartheta)$ из (1.19) в (1.15), получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu_1^*(\rho_0, \vartheta_0) + \int_0^{2\pi} \int_0^1 K_1^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_1^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = \Phi_1^*(\rho_0, \vartheta_0), \quad (1.23)$$

где

$$K_1^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = F_1(\rho, \vartheta) G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta), \quad (1.24)$$

$$\Phi_1^*(\rho_0, \vartheta_0) = [\rho_0^2 F_1(\rho_0, \vartheta_0) + 4] u_1^*(\vartheta_0) + u_1^{*//}(\vartheta_0) + \alpha_1^{(1)} \quad (1.25)$$

Из (1.20), подставляя значение $u_2(\rho, \vartheta)$ в (1.16), получаем

$$\mu_2^*(\rho_0, \vartheta_0) + \int_0^{2\pi} \int_1^\infty K_2^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_2^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = \Phi_2^*(\rho_0, \vartheta_0), \quad (1.26)$$

где

$$K_2^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = F_2(\rho, \vartheta) G_2(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta), \quad (1.27)$$

$$\Phi_2^*(\rho_0, \vartheta_0) = \left[\frac{\alpha_0^{(2)}}{\rho_0^2} \Psi_2(\rho_0, \vartheta_0) - \left(\frac{4}{\rho_0^4} - \frac{\varepsilon^2}{\rho_0^2} \right) \right] u_2^*(\vartheta_0) + \frac{1}{\rho_0^4} u_2^{*//}(\vartheta_0) + \alpha_1^{(2)}. \quad (1.28)$$

2. Для решения интегрального уравнения (1.23) его ядро заменим вырожденным, разлагая его в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функции

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta) &= \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi}} \rho^k \cos k\vartheta, \\ \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) &= \sqrt{\frac{2(m+1)}{\pi}} \rho_0^m \cos m\vartheta_0 \quad (k, m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$K_1^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} A_{km}^{(1)} \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) \right\} \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta),$$

где

$$\begin{aligned} A_{km}^{(1)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^1 K_1^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) \rho_0 d\rho_0 d\vartheta_0 \right\} \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^1 G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) \rho_0 d\rho_0 d\vartheta_0 \right\} F(\rho, \vartheta) \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя значение G_1 из (1.21) в (2.2), после вычисления получаем

$$A_{km}^{(1)} = \frac{l_0^{(1)}}{2\pi} \sqrt{\frac{m+1}{k+1}} \left\{ \varepsilon_{km}^{(0)} J_{km}^{(1)} + \varepsilon_{km}^{(2)} J_{km}^{(2)} + \varepsilon_{km}^{(4)} J_{km}^{(3)} \right\}, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{km}^{(p)} &= \int_0^{2\pi} \cos px \cos kx \cos mx dx \quad (p = 0, 2, 4), \\ J_{km}^{(p)} &= \int_0^1 b_p(x) (1-x^2) x^{k+m+1} dx \quad (p = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

Значение K_1^* из (2.1), подставляя в (1.23), получаем

$$\mu_1^*(\rho_0, \vartheta_0) + \sum_{k,m=1}^{\infty} A_{km}^{(1)} \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta) \mu_1^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = -\Phi_1^*(\rho_0, \vartheta_0), \quad (2.4)$$

где

$\Phi_1^*(\rho_0, \vartheta_0) = \rho_0^2 F_1(\rho_0, \vartheta_0) u_1^*(\vartheta_0) + u_1^{*//}(\vartheta_0) + 4u_1^*(\vartheta_0) + \alpha_1^{(1)}$ – интегральное уравнение с вырожденным ядром. Как известно, его можно свести к линейным системам алгебраических уравнений

$$X_m^{(1)} + \sum_{k=1}^N A_{km}^{(1)} X_k^{(1)} = \Phi_{1m}^* \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (2.5)$$

где

$$\Phi_{1m}^* = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Phi_1^*(x, y) \varphi_m^{(1)}(x, y) x dx dy \quad (m = 1, 2, \dots, N). \quad (2.6)$$

$A_{km}^{(1)}$ даётся по формуле (2.3), после чего решение интегрального уравнения (2.4) будет

$$\mu_1^*(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi_1^*(\rho_0, \vartheta_0) + \sum_{k=1}^N Y_m^{(1)} \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) \quad (0 \leq \rho_0 < 1), \quad (2.7)$$

$$Y_m^{*(1)} = \sum_{k=1}^N A_{km}^{(1)} X_k^{(1)} \quad (m = 1, 2, \dots, N)$$

$X_k^{(1)}$ определяется из (2.5). По аналогии можно решить интегральное уравнение (1.26), разница лишь в обозначениях и ортонормированных системах функции, в этом случае будет

$$\varphi_m^{(2)}(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{c_m (\rho_0 - 1)}{\rho_0^{m+3}} \cos m \vartheta_0, \quad \varphi_k^{(2)}(\rho, \vartheta) = \frac{c_k (\rho - 1)}{\rho^{k+3}} \cos \vartheta, \quad (2.8)$$

$$c_k = \sqrt{(2k+1)(2k+2)(2k+3)} / \sqrt{2\pi}$$

Решение будет

$$\mu_2^*(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi_2^*(\rho_0, \vartheta_0) + \sum_{k=1}^N Y_m^{(2)} \varphi_m^{(2)}(\rho_0, \vartheta_0) \quad (1 < \rho_0 < \infty), \quad (2.9)$$

$$Y_m^{*(2)} = \sum_{k=1}^N A_{km}^{(2)} X_k^{(2)} \quad (m = 1, 2, \dots, N),$$

$X_k^{(2)}$ определяется из систем уравнений

$$X_m^{(2)} + \sum_{k=1}^N A_{km}^{(2)} X_k^{(2)} = \Phi_{2m}^* \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (2.10)$$

где

$$A_{km}^{(2)} = 2\pi \alpha_0^{(2)} c_k c_m \left\{ H_{km}^{(1)} \varepsilon_{km}^{(0)} + H_{km}^{(2)} \varepsilon_{km}^{(2)} + H_{km}^{(3)} \varepsilon_{km}^{(4)} \right\}, \quad (2.11)$$

$$H_{km}^{(p)} = \int_1^\infty Q_{mm}^{(2)}(x) a_p(x) \frac{x-1}{x^{k+2}} dx \quad (p = 1, 2, 3),$$

$$Q_{mm}^{(2)}(x) = \int_1^\infty W_m(x, y) \frac{y-1}{y^{k+2}} dy, \quad (2.12)$$

$a_p(x)$ даётся по (1.23), $W_m(x, y)$ – по формуле (1.28), $\varepsilon_{km}^{(p)}$ ($p = 0, 2, 4$) – по (2.5)

$$\Phi_{2m}^* = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \Phi_2^*(x, y) \varphi_m^{(2)}(x, y) x dx dy = c_m \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \Phi_2^*(x, y) \cos my \frac{x-1}{x^{m+2}} dx dy. \quad (2.13)$$

3. Используя граничные условия (1.18), получаем уравнение для определения неизвестной функции, входящей в решения (2.7) и (2.9),

$$T_*(\vartheta_0) = \frac{\lambda_2^* A_2}{C_2} \frac{d}{d\rho_0} \left[\int_0^{2\pi\infty} \int_1 G_2(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_2^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \right]_{\rho_0=1} - \quad (3.1)$$

$$- \frac{\lambda_1^* A_1}{C_2} \frac{d}{d\rho_0} \left[\int_0^{2\pi 1} \int_0 G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_1^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \right]_{\rho_0=1} + \beta_0^{(0)}$$

$$\lambda_1^* = \frac{k_1}{2(k_1 + k_2)}, \quad \lambda_2^* = \frac{k_2}{2(k_1 + k_2)}, \quad \beta_0^{(0)} = - \frac{2(\lambda_1^* B_1 C_2 + \lambda_2^* B_2 C_1)}{C_1 C_2}. \quad (3.2)$$

Подставляя значение $\mu_1^*(\rho, \vartheta)$ и $\mu_2^*(\rho, \vartheta)$ из (2.7)-(2.9) в (3.1), получаем сингулярное интегро-дифференциальное уравнение с ядром Гильберта при граничных условиях

$$T_*(0) = T_*(2\pi), T_*'(0) = T_*'(2\pi). \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} T_*'(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\lambda_1^*} \left\{ -T_*(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} H(\vartheta, \vartheta_0) T_*(\vartheta) d\vartheta \right\} + \frac{1}{\lambda_1^*} \Psi_0^{(2)}(\vartheta_0) - 2\pi T_*(0) \cos 2\vartheta_0, \quad (3.4)$$

где

$$H(\vartheta, \vartheta_0) = \lambda_2^* H_0^{(2)}(\vartheta, \vartheta_0) - \lambda_1^* H_0^{(1)}(\vartheta, \vartheta_0) + \lambda_2^* H_0^{(3)}(\vartheta, \vartheta_0) - \lambda_1^* \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \vartheta}, \quad (3.5)$$

$$H_0^{(1)}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{d}{d\rho_0} \left\{ \int_0^1 [\rho^2 (l_0^{(1)} f_1(\rho, \vartheta) - \alpha R^2) + 4] G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \rho d\rho \right\}_{\rho_0=1},$$

$$H_0^{(2)}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{d}{d\rho_0} \left\{ \int_1^\infty \left[\frac{\alpha_0^{(2)}}{\rho^2} \psi_2(\rho, \vartheta) + \frac{4 - (\varepsilon\rho)^2}{\rho^4} \right] G_2(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \rho d\rho \right\}_{\rho_0=1}, \quad (3.6)$$

$$H_0^{(3)}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{d}{d\rho_0} \left\{ \int_1^\infty \frac{\partial^2 G_2}{\partial \vartheta^2} \frac{d\rho}{\rho^3} \right\}_{\rho_0=1},$$

$$\psi_1^{(1)}(\vartheta - \vartheta_0) = [\pi - (\vartheta - \vartheta_0)] \cos 2(\vartheta - \vartheta_0) + \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \sin 2(\vartheta - \vartheta_0) \ln 2 [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)], \quad (3.7)$$

$$\Psi_0^{(2)}(\vartheta_0) = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\lambda_2^* B_2}{C_2} H_0^{(2)}(\vartheta, \vartheta_0) - \frac{\lambda_1^* B_1}{C_1} H_0^{(1)}(\vartheta, \vartheta_0) \right\} d\vartheta + \sum_{m=1}^N \Psi_m \cos m\vartheta_0 + \frac{\lambda_2^* \alpha_1^{(2)} A_2 K_1(\varepsilon)}{\varepsilon C_2} - \frac{\lambda_1^* \alpha_1^{(1)} A_1}{2C_1} + \beta_0^{(0)}. \quad (3.8)$$

Согласно формуле обращения Гильберта [4,5], из (3.4) получаем

$$T_*'(\vartheta_0) = \frac{1}{2\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \left[T_*(\vartheta) - \int_0^{2\pi} H(t, \vartheta) T_*(t) dt - \frac{1}{\lambda_1^*} \Psi_0^{(2)}(\vartheta) \right] d\vartheta + 2\pi T_*(0) \cos 2\vartheta_0 + c_1^* \quad (3.9)$$

Чтобы уравнение (3.4) имело решение, необходимо, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \left[T_*(\vartheta_0) - \int_0^{2\pi} H(t, \vartheta_0) T_*(t) dt - \frac{1}{\lambda_1^*} \Psi_0^{(2)}(\vartheta_0) \right] d\vartheta_0 = 0. \quad (3.10)$$

Интегрируя по ϑ_0 обе части (3.9), получим

$$T_*(\vartheta_0) = \frac{1}{\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln 2 \left| \sin \frac{t - \vartheta_0}{2} \right| - \int_0^{2\pi} H(t, y) \ln 2 \left| \sin \frac{y - \vartheta_0}{2} \right| dy \right\} T_*(t) dt - \frac{1}{\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \Psi_0^{(2)}(y) \ln 2 \left| \sin \frac{y - \vartheta_0}{2} \right| dy + c_1^* \vartheta_0 + c_2^*. \quad (3.11)$$

Удовлетворяя условиям $T_*(0) = T_*(2\pi)$, $T_*'(0) = T_*'(2\pi)$, получаем $c_1^* = 0$, а из (3.10)-(3.11) следует

$$c_2^* = \frac{1}{2\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \Psi_0^{(2)}(t) dt. \quad (3.12)$$

Введя обозначение в (3.11), имеем

$$T_*(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} K^*(t, \vartheta_0) T_*(t) dt = f^*(\vartheta_0), \quad (3.13)$$

где

$$K^*(t, \vartheta_0) = \frac{1}{\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} H(t, y) \ln 2 \left| \sin \frac{y - \vartheta_0}{2} \right| dy - \frac{1}{\pi\lambda_1^*} \ln 2 \left| \sin \frac{t - \vartheta_0}{2} \right|, \quad (3.14)$$

$$f^*(\vartheta_0) = -\frac{1}{\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \Psi_0^{(2)}(y) \ln 2 \left| \sin \frac{y - \vartheta_0}{2} \right| dy + c_2^*,$$

– интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое можно решить, как в пункте 2, решение которого будет

$$T_*(\vartheta_0) = \frac{2\pi\lambda_2^* B_2}{C_2} + f^*(\vartheta_0) + \sum_{n=1}^N Y_n^{(0)} \cos n\vartheta_0, \quad (3.15)$$

$$Y_n^{(0)} = -\sum_{m=1}^N A_{mn}^{(0)} X_m^{(0)} (n = 1, 2, \dots, N),$$

где $X_m^{(0)}$ определяется из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m^{(0)} + \sum_{n=1}^N A_{mn}^{(0)} X_n^{(0)} = F_m^{(0)} (m = 1, 2, \dots, N),$$

$$\begin{aligned}
A_{mn}^{(0)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K^*(t, x) \cos mt \cos nxdtdx = \\
&= \frac{1}{\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} H(t, y) \ln 2 \left| \sin \frac{y-x}{2} \right| dy \right\} \cos mt \cos nxdtdx - \\
&- \frac{1}{\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln 2 \left| \sin \frac{t-x}{2} \right| \cos mt \cos nxdtdx.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$F_m^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x) \cos mx dx.$$

Заметим, что при вычислениях встречаются особые интегралы, которые следует понимать в смысле главного значения.

4. Всестороннее растяжение. Рассмотрим случай, когда на пластинку действует всесторонняя растягивающаяся нагрузка. Принимаем, что шайба в недеформированном состоянии имела радиус, $R + \varepsilon$, где R – радиус отверстия в пластинке до деформации. Считаем ε малой величиной того же порядка, что и допускаемые смещения. Предполагаем, что трение между шайбой и пластинкой отсутствует, так что взаимодействие этих тел сводится к нормальному давлению на обводы шайбы и отверстия. Ввиду полной симметрии давление будет постоянным вдоль контуров. Как известно [2], он равен

$$p_1 = \frac{4\varepsilon E_1 E_2}{2(1+\nu)R[E_1 + 2(1-2\nu)E_2]} = p_0, \tag{4.1}$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{2R(1+\varepsilon)[E_1 + 2(1-2\nu)E_2]}{4E_1 E_2} p_0. \tag{4.2}$$

Имея в виду, что пластинка и шайба более интенсивно нагреваются на линии раздела, принимаем, что интенсивность выделения тепла своё максимальное значение принимает при $r = R(\rho = 1)$. Тогда получим верхнюю оценку температуры.

Принимаем, что интенсивность выделения тепла явно не зависит от радиуса r и равна

$$q_j = \frac{\lambda \omega k_j p_0^2}{2} J_j''(T_j, \omega) \quad (j = 1, 2).$$

При таких предположениях уравнение теплопроводности (1.11) принимает вид

$$\frac{d^2 T_j}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT_j}{d\rho} - \alpha R^2 (T_j - T_0) + 2R^2 \mu_0^{(j)} \frac{B_j + C_j T_j}{A_j^2} = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{4.3}$$

при граничном условии (1.18).

В (4.3) сделаем замену (1.14). Получим

$$\frac{d^2 u_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_1}{d\rho} - \varepsilon_1^2 u_1 = -\alpha_1^{(1)}, \quad 0 \leq \rho < 1, \tag{4.4}$$

$$\frac{d^2 u_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_2}{d\rho} - \varepsilon_2^2 u_2 = -\alpha_1^{(2)}, \quad 1 < \rho < \infty, \tag{4.5}$$

$$\varepsilon_j^2 = R^2 \left(\alpha - \frac{2C_j \mu_0^{(j)}}{A_j^2} \right), \alpha_1^{(j)} = \frac{\alpha R^2 (B_j + C_j T_0)}{A_j} \quad (j=1,2). \quad (4.6)$$

Общее решение однородных уравнений (4.4) и (4.5) будет

$$u_j(\rho) = A_0 I_0(\varepsilon_j \rho) + B_0 K_0(\varepsilon_j \rho) \quad (j=1,2), \quad (4.7)$$

где $I_0(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента, а $K_0(x)$ – функция Макдональда.

A_0 и B_0 – произвольные постоянные, определяющиеся из граничных условий. Т.к. в центре шайбы температура ограничена, то $B_0 = 0$

$$u_1(\rho) = A_0 I_0(\varepsilon_1 \rho), \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (4.8)$$

При $\rho \rightarrow \infty$ температура ограничена, при этом, $A_0 = 0$, тогда

$$u_2(\rho) = B_0 K_0(\varepsilon_2 \rho), \quad 1 < \rho < \infty. \quad (4.9)$$

Легко получаются общие решения неоднородных уравнений (4.4) и (4.5) соответственно

$$u_1(\rho) = A_0 I_0(\varepsilon_1 \rho) + \frac{\alpha_1^{(1)}}{\varepsilon_1^2}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (4.10)$$

$$u_2(\rho) = B_0 K_0(\varepsilon_2 \rho) + \frac{\alpha_1^{(2)}}{\varepsilon_2^2}, \quad 1 < \rho < \infty.$$

После удовлетворения граничным условиям (1.18) определяются A_0, B_0 .

Из (4.10) следует

$$u_1(\rho) = \left(\frac{B_1 + C_1 T_*}{A_1} - \frac{\alpha_1^{(1)}}{\varepsilon_1^2} \right) \frac{I_0(\varepsilon_1 \rho)}{I_0(\varepsilon_1)} + \frac{\alpha_1^{(1)}}{\varepsilon_1^2}, \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (4.11)$$

$$u_2(\rho) = \left(\frac{B_2 + C_2 T_*}{A_2} - \frac{\alpha_1^{(2)}}{\varepsilon_2^2} \right) \frac{K_0(\varepsilon_2 \rho)}{K_0(\varepsilon_2)} + \frac{\alpha_1^{(2)}}{\varepsilon_2^2}, \quad 1 < \rho < \infty. \quad (4.12)$$

Из второго условия (1.18) получаем уравнение для определения неизвестной температуры T_* ,

$$T_* = \frac{k_2 \varepsilon_1 M_0^{(2)} I_0(\varepsilon_1) K_1(\varepsilon_2) + k_1 \varepsilon_2 M_0^{(1)} I_1(\varepsilon_1) K_0(\varepsilon_2)}{\sqrt{\delta_1 \delta_2} [\varepsilon_1 k_1 I_1(\varepsilon_1) K_0(\varepsilon_2) + \varepsilon_2 k_2 I_0(\varepsilon_1) K_1(\varepsilon_2)]}, \quad (4.13)$$

$$M_0^{(j)} = \alpha T_0 + \frac{2\mu_0^{(j)} B_j}{A_j^2}, \quad \delta_j = \alpha - \frac{2\mu_0^{(j)} C_j}{A_j^2}, \quad \varepsilon_j^2 = R^2 \delta_j \quad (j=1,2).$$

Проведены вычисления в случае всестороннего растяжения при разных значениях R и p_0 . Материалом является полиэтилен.

При вычислении использованы следующие данные [1,3,6]:

$$A_1 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad A_2 = 3,4 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad B_1 = B_2 = 3,87 \cdot 10^2 \text{ кг/см}^2$$

$$C_1 = C_2 = 3,87 \text{ кг/см}^2 \cdot \text{град.}, \quad a_1 c_1 = a_2 c_2 = 0,28 \text{ ккал/м.час.град.},$$

$$\omega = 100 \text{ гу}, \quad k_1 = k_2 = 0,00234 \text{ ккал/кгм}, \quad T_0 = 20^0 \text{ C}, \quad \alpha = 0,71 \text{ см}^{-2}.$$

Введём безразмерные координаты

$$V_j^* = T^*/T_0, \quad V_j = T_j/T_0 \quad (j=1,2) \quad p_* = P_0/p_n, \quad p_n = 10^3 \text{ кг/см}^2, \quad \rho = r/R, \quad (4.14)$$

где T_* – температура на линии раздела двух тел, T_0 – температура окружающей среды, p_n – начальная нагрузка.

В табл. 1–3 приведены значения V_j^* , зависящие от различных значений R, p_*

$R=10\text{см}$

Таблица 1

p_*	1	2	3	4	5	6	7
V_1^*	1.248	1.324	1.450	1.628	1.863	2.171	2.592

$R=12\text{ см}$

Таблица 2

p_*	1	2	3	4	5	6	7
V_2^*	1.119	1.189	1.305	1.471	1.694	1.994	2.415

$R=14\text{ см}$

Таблица 3

p_*	1	2	3	4	5	6	7
V_3^*	1.029	1.094	1.204	1.362	1.578	1.875	2.3

Из табл. 1–3 видно, что при увеличении нагрузки увеличивается температура на линии раздела двух тел, а при увеличении радиуса отверстия температура уменьшается.

В табл. 4–5 приведены значения V_j , зависящие от ρ , при $R=10\text{ см}$, $p_*=3$

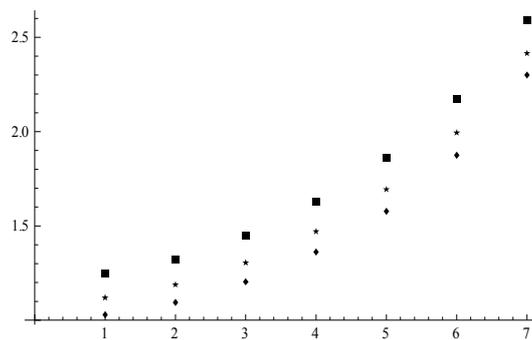
Таблица 4

ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.7	0.9	1
V_1	1.007	1.007	1.011	1.026	1.049	1.11	1.211	1.45

Таблица 5

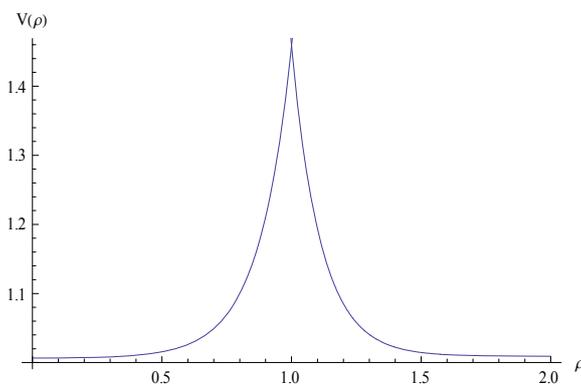
ρ	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4
V_2	1.451	1.085	1.022	1.011	1.01	1.009	1.009	1.009

Из табл. 4–5 видно, что в шайбе при увеличении радиуса с центра до линии раздела температура увеличивается, а в пластинке с удалением от обвода температура сильно уменьшается. Это объясняется тем, что вязкоупругие тела имеют низкую теплопроводность.



Фиг. 1

На фиг. 1 показан график изменения V_j^* в зависимости от R и p_* при R = 10, 12, 14 см.



Фиг. 2.

На фиг. 2. показан график изменения V_j в зависимости от ρ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд. ИЛ, 1963. 535с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Физматгиз, 1966. 201с.
3. Вермишян Г.Б. Действие вибрационной нагрузки на пластинку с круговым отверстием из вязкоупругого материала. //Изв. АН СССР. МТТ.1983. N3. С.86–93.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Второе издание. М.: Наука, 1963. 62с.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 117с.
6. Галин Л.А. О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. //Изв. АН СССР. Механика. 1965. N6.

Сведения об авторе:

Вермишян Гарник Бахшович – канд. физ-мат.наук, доцент каф. высшей математики Ереванского Государственного Университета Архитектуры и Строительства
Тел.: дом (25-06-71), моб.: (095)45 62 65

Поступила в редакцию 13.04.2012

**ВЛИЯНИЕ МАСШТАБНОГО ФАКТОРА НА ВЫЗВАННУЮ ДЕСОРБЦИЕЙ
ВЛАГИ ПОЛЗУЧЕСТЬ СТАРОГО БЕТОНА ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ**

Карапetyan К.А., Клекчян Д.Г., Манукян Е.С.

Ключевые слова: десорбция, напряжение, деформация, ползучесть, масштабный фактор
Key words: desorption, stress, deformation, creep, scale factor.

Կարապետյան Կ.Ա., Կլեկչյան Դ.Զ., Մանուկյան Ե.Ս.

**Մասշտաբային գործոնի ազդեցությունը խոնավության դեսորբցիայով պայմանավորված սողքի վրա
հին բետոնի միառանցք սեղմման դեպքում**

Քննարկվում են 18 տարի հիդրոմեկուսացված վիճակում պահված և բեռնավորման պահին ապամեկուսացված լիթոիդպեմզոբետոնն զլանային տարրերի սողքի հետազոտության արդյունքները հաշվի առնելով մասշտաբային գործոնը:

Ստացված արդյունքների համեմատական վերլուծության հիման վրա բացատրված են փորձնականորեն բացահայտված երևույթները:

Karapetyan K.A., Klekchyan D.H., Manukyan E.S.

The influence of the scale factor on the creep of the aged concrete under one-axial compress caused by the desorption of damp

The results of an experimental investigation of creep of litoid-pumice concrete cylindrical elements, stored after the remoulding during 28 years in hydroisolated condition and released from the isolation at the moment of loading taking into account the scale factor are considered.

On the base of the comparative analysis of the obtained experimental data the explanation of the detected phenomena is given.

Рассматриваются результаты экспериментального исследования ползучести литоидпемзобетонных цилиндрических элементов разных диаметров, хранившихся после расформовки в течение 28 лет в гидроизолированном состоянии и освобождённых от изоляции к моменту нагружения.

На основе сравнительного анализа полученных экспериментальных данных дано объяснение обнаруженных явлений.

Сопоставление результатов многочисленных исследований показывает, что в условиях свободного влагообмена со средой с невысокой влажностью ($W < 75\%$ [1]) на способность деформироваться во времени при одноосном сжатии наряду с другими причинами весьма существенна роль десорбции химически несвязанной влаги из пор и капилляров бетона. Из такого сравнения также следует, что для оптимальной оценки влияния упомянутого процесса на закономерность изменения деформации ползучести бетона в зависимости от масштабного фактора необходимо при экспериментировании по возможности исключить влияние других факторов (вязкость гелевой структурной составляющей цементного камня, микротрещинообразование и т.д.).

В работе приводятся и обсуждаются результаты экспериментального исследования, вызванной десорбцией влаги ползучести весьма старых бетонных элементов с разными размерами поперечного сечения.

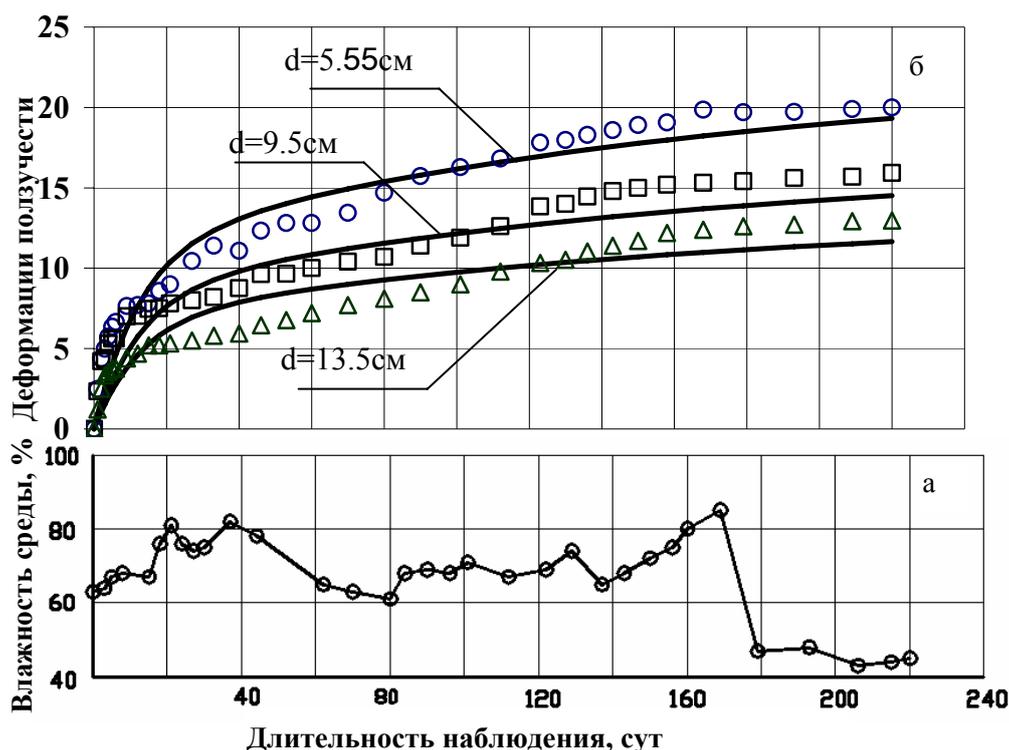
В качестве опытных образцов были использованы цилиндры с диаметрами 5,55см, 9,5см и 13,5см и высотами 22см, 38см и 54см соответственно. Они были получены из исходных литоидпемзобетонных цилиндров с диаметром 14см и высотой 60см, которые сразу после расформовки были гидроизолированы и в течение 28 лет в таком состоянии хранились в лабораторном помещении. Использовался вибрированный бетон состава в массе 1 : 1,539 : 2,400, $W/C = 0,95$, $C = 295 \text{ кг/м}^3$. Для приготовления бетона были применены песок ($\gamma_n = 1090 \text{ кг/м}^3$),

щебень ($\gamma_{щ} = 820 \text{ кг/м}^3$) с фракцией 10-40мм из литоидной пемзы, взятой из карьера Джрабер (Республика Армения) и портландцемент активностью 40МПа. Кубиковая прочность бетона в месячном возрасте составляла 20,4 МПа.

Опытные образцы сразу после изготовления были нагружены постоянным сжимающим напряжением $\sigma = 4 \text{ МПа}$, под воздействием которого они находились в течение 220 сут. Параллельно на ненагруженных образцах-близнецах измеряли усадочные деформации. В течение проведения экспериментов периодически фиксировалась влажность лабораторного помещения.

Результаты исследований в виде точек приведены на фиг.1. Ординаты этих точек на фиг.1.б соответствуют величинам среднего арифметического значения данных, полученных на трёх образцах-близнецах в каждом случае. При этом, максимальный разброс составлял в +4,3% и -4,9%, который наблюдался у отдельных образцов с диаметром 5,55см.

По проведённым измерениям мера влажности w , использованная в исследованиях литоидпемзобетона в возрасте 28 сут., составила 13,3%. Проведённые расчёты на основе метода, изложенного в работе [2], показали, что в случае надёжной гидроизоляции влажность бетона в возрасте 28 лет должна была составить приблизительно 11,4%. Однако, измерения показали, что в указанном возрасте фактическая влажность исходных элементов, а следовательно, и полученных из них опытных образцов, составила около 6,5%, что свидетельствует о ненадёжной гидроизоляции.



Фиг.1. Кривые изменения влажности лабораторного помещения (а) и деформаций ползучести литоидпемзобетонных цилиндрических элементов разных диаметров (б)

Согласно приведённым на фиг.1 экспериментальным данным с началом процесса десорбции влаги из пор и капилляров литоидпемзобетонных образцов имеет место проявление и развитие во времени значительных деформаций ползучести.

Из этой фигуры с очевидностью следует, что бурное развитие с существенной переменной скоростью деформаций ползучести наблюдается в течение первых 40 сут. после загрузки образцов. Указанное явление оказывается тем существеннее, чем меньше диаметр опытных цилиндрических элементов. Отметим также, что в течение вышеуказанного срока наблюдения образцы набирают существенную часть от величины деформаций ползучести, приобретаемой ими через 220 сут. после нахождения под постоянной нагрузкой, т.е. к концу завершения опытов. Указанная доля деформаций для образцов с диаметрами 5,55см; 9,5см и 13,5см составляет, соответственно, более чем 60%; 54% и 46%.

Сравнение данных, представленных на фиг.1, показывает, что в течение промежутка времени, начиная с 40 дней и до конца завершения опытов наблюдается монотонное развитие с умеренно затухающей скоростью деформаций ползучести, конечная величина которой обусловлена размерами поперечного сечения опытных образцов. При этом, изменение величин деформаций ползучести образцов рассматриваемых диаметров в течение указанного промежутка времени происходит одинаково, и разница между значениями этих деформаций, накопленная образцами до этого, практически сохраняется.

Выше отмечалось, что при проведении исследований ползучести на опытных образцах-близнецах параллельно измеряли усадочные деформации.

Согласно результатам этих измерений, максимально возможную величину усадочных деформаций, обусловленную, главным образом, десорбцией исходно содержащейся влаги, литоидпемзобетонные цилиндры приобретают в течение 143 сут., начиная с начала наблюдений. Как показало сравнение опытных данных, дальнейшее существенное убывание или возрастание усадочных деформаций было обусловлено, в основном, соответственно возрастанием или убыванием влажности лабораторного помещения в течение этого промежутка времени. Указанное колебание влажности среды, однако, как следует из фиг.1, практически не повлияло на деформационное поведение образцов, находящихся под нагрузкой.

В работе К.С. Карапетяна [3] приводятся результаты исследований влияния масштабного фактора на ползучесть литоидпемзобетона при его свободном влагообмене со средой с невысокой влажностью в условиях постоянно действующего сжимающего напряжения $\sigma = 1 \text{ МПа}$.

В этих исследованиях в качестве опытных образцов были использованы цилиндрические элементы диаметрами 14см и 25см и высотой 60см, изготовленные из литоидпемзобетона. После освобождения от металлических форм, образцы до начала проведения исследований в возрасте 28 сут. хранились во влажных опилках.

Следует отметить, что некоторое количество из упомянутых выше элементов диаметром 14см и высотой 60см после расформовки сразу были гидроизолированы и в таком состоянии они были оставлены в лабораторном помещении. Из этих элементов в возрасте 28 лет методом механической обработки были получены цилиндрические опытные образцы разных диаметров, с использованием которых нами были проведены рассматриваемые здесь исследования.

Согласно приведенным в работе [3] экспериментальным результатам, деформации ползучести у цилиндрических образцов диаметром 14см оказались существенно больше, чем у образцов диаметром 25см в течение всего времени нахождения их под нагрузкой.

С целью выявления основной причины обнаруженного явления автором работы [3] были исследованы деформации ползучести в течение 550 дней гидроизолированных сразу после расформовки литоидпемзобетонных цилиндрических образцов диаметром 14см, а также аналогичных неизолированных образцов, нагруженных сжимающим напряжением $\sigma = 2 \text{ МПа}$ в возрасте 28 сут.

Сопоставляя результаты упомянутых выше экспериментальных данных и исходя из признанной многочисленными исследователями гипотезы о механизме ползучести

бетона [4], в работе [3] выражается мнение, что обнаруженная существенная разница в величинах деформаций ползучести литоидпемзобетонных цилиндрических элементов с диаметром 14см и 25см, в основном, связана с капиллярными процессами. Одновременно автором этой работы не исключается и влияние других факторов на наблюдаемое явление, среди которых отмечается изменение в течение проведения экспериментов степени вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня.

Возвращаясь к обсуждению представленных на фиг.1.б экспериментальных данных, отметим следующее: появление и развитие во времени значительных деформаций ползучести при сжатии старых литоидпемзобетонных цилиндрических элементов, гидроизолированных сразу после расформовки и освобождённых от изоляции к моменту нагружения в возрасте 28 лет, можно объяснить, главным образом, накоплением со временем деформаций, обусловленных снижением прочности и показателя упругих свойств бетона вследствие десорбции химически несвязанной влаги [5]. Влияние же масштабного фактора на деформации ползучести в этом случае можно объяснить сравнительным ослаблением интенсивности процесса десорбции влаги, обусловленного увеличением размеров поперечного сечения бетонных элементов. Прямым подтверждением сказанного могут служить результаты проведённых измерений. Согласно этим измерениям потеря изначально содержащейся в порах и капиллярах исходной влаги литоидпемзобетонными цилиндрическими элементами с диаметрами 5,55см; 9,5см и 13,5см после нахождения их под сжимающей нагрузкой в течение 220 сут. в условиях невысокой влажности составляла 1,42%; 0,99% и 0,84% соответственно. Величина же объёмной массы этих образцов к началу проведения экспериментов составляла 1558; 1554 и 1552кг/м³ соответственно.

Интересно отметить, что отношение величин деформаций ползучести и количества потерянной влаги у образцов одного и того же диаметра к концу проведения опытов не зависело от размеров поперечного сечения литоидпемзобетонных элементов и составляло примерно $0,96 \times 10^{-5}/\text{кг}$.

С.В. Александровским [6] экспериментально было показано, что большое влияние на происходящие в бетоне раннего возраста ($\tau < 28$ сут.) явления, связанные с процессами усадки и ползучести, может оказать и продолжительность его нахождения под нагрузкой: а именно, этот фактор приводит к изменению во времени размеров пор в “молодом” бетоне, тем самым, влияя на режим его высыхания. В частности, им было установлено, что призматические образцы из тяжелого бетона с поперечным сечением 5х5см, имевшие возраст 4 сут. к моменту нагружения, в течение 11 дней нахождения их под постоянным сжимающим напряжением, теряют около 20% больше влаги, чем ненагруженные образцы-близнецы [6].

Явление, качественно аналогичное вышеуказанному, наблюдалось и при проведении нами исследований влажностной усадки и ползучести старых литоидпемзобетонных цилиндрических элементов с разными диаметрами. При этом было установлено, что среднеарифметическое значение разницы в величинах потери влаги, находящихся под нагрузкой и ненагруженных цилиндрических образцов-близнецов, практически не зависит от масштабного фактора и составляет примерно 16,2%.

Сравнение экспериментальных данных, приведённых в вышеуказанной работе [3] и на фиг.1.б, позволяет составить представление о влиянии возраста бетона на его способность деформироваться во времени в условиях одноосного сжатия.

По проведённым расчётам на основе данных, представленных в работе [3] и на фиг.1, значение меры ползучести через 220 сут. нахождения под нагрузкой у литоидпемзобетонных цилиндров с диаметром 14см, хранившихся до начала проведения исследований в возрасте 28 сут. во влажных опилках, составляет примерно 22×10^{-5} , а у цилиндров с диаметром 13,5см, хранившихся после

расформовки в гидроизолированном состоянии и освобождённых от изоляции к моменту нагружения в возрасте 28 лет, – около $3,3 \times 10^{-5}$.

Учитывая, что опытные образцы до момента начала проведения исследований в одном случае хранились во влажных опилках, а в другом – в гидроизолированном состоянии, разница в величинах площадей их поперечного сечения, составляющая менее 7%, не может служить препятствием для сравнения данных фиг.1 с данными работы [3]. Кроме того, исходя из величины действующего на опытные образцы сжимающего напряжения, можно утверждать, что проявление деформаций ползучести, обусловленных микротрещинообразованием, в указанных обоих случаях испытаний, исключается.

Исходя из вышеизложенного, существенную разницу мер ползучести цилиндрических образцов упомянутых диаметров, зафиксированную в работе [3] и представленную на фиг.1, можно объяснить, в основном, возрастом бетона к началу проведения исследований, поскольку, чем позже производится загрузка образца, тем меньше его способность деформироваться во времени [7], и это, в данном случае, обусловлено, главным образом, капиллярными явлениями, а также вязкостью гелевой структурной составляющей цементного камня [4]. Первый из указанных факторов сильно зависит от степени влажности бетона к моменту испытания, а второй можно характеризовать значением модуля упругости материала к началу проведения экспериментов. Отметим, что влажность и модуль упругости литоидпемзобетона в возрасте 28 сут. составили соответственно 13,3% и 9500МПа, а в возрасте 28 лет – 6,5% и 16000Мпа.

Известно, что аналитическое выражение меры ползучести, предложенное Н.Х. Арутюняном [8] для стареющих материалов, в том числе и бетонов, имеет следующий вид:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) \cdot f(t - \tau) \quad (1)$$

где τ – возраст материала к моменту нагружения,

$t - \tau$ – длительность нахождения материала под нагрузкой,

$\varphi(\tau)$ – функция старения,

$f(t - \tau)$ – функция длительности нахождения материала под нагрузкой.

Формула (1) в раскрытом виде пишется так [8]:

$$C(t, \tau) = \left(C_0 + \frac{A}{\tau} \right) \left[1 - e^{-\gamma(t - \tau)} \right], \quad (2)$$

где C_0 – значение C при $\tau \rightarrow \infty$, A и γ – параметры, определяемые из опытных данных.

Следует отметить, что выражение (2) достаточно успешно используется при проведении исследований ползучести стареющих материалов. Одновременно автор работы [8] высказывает мнение, что для более корректного аналитического описания опытных данных ползучести в некоторых случаях может оказаться необходимым в вышеуказанных выражениях $\varphi(\tau)$ и $f(t - \tau)$ сохранить не два, а больше членов ряда, или для $\varphi(\tau)$ принять другой вид зависимости.

Проведённые К.С. Карапетяном разносторонние исследования [9] показали, что, введя некоторые изменения, выражение (2) можно представить в следующем виде:

$$C(t, \tau) = \left(C_0 + \frac{A}{\tau} \right) \left[1 - 0,5 \left(e^{-\gamma_1(t-\tau)} + e^{-\gamma_2(t-\tau)} \right) \right]. \quad (3)$$

Преимуществом формулы (3) является то, что она становится более гибкой при описании данных ползучести, особенно в начальный период опытов и число содержащихся в ней опытных параметров всего лишь три (A, γ_1, γ_2) , в то время как в выражениях меры ползучести, предложенных другими исследователями, число указанных параметров может достигать семи (напр., см. [10]).

В работе [9] также было показано, что выражение меры ползучести, с учётом влияния масштабного фактора на ползучесть бетона, может быть представлено в виде

$$C(t, \tau, a) = \varphi(\tau, a) \cdot f(t - \tau), \quad (4)$$

где a – наименьший размер поперечного сечения бетонного элемента.

Учитывая вышеизложенное, для аналитического описания представленных на фиг.1.6 экспериментальных данных ползучести литоидпемзобетонных цилиндрических элементов разных диаметров была использована следующая формула:

$$\varepsilon_n(t, \tau, d) = \left(\frac{A}{d} + B \right) \left[1 - 0,5 \left(e^{-\gamma_1(t-\tau)} + e^{-\gamma_2(t-\tau)} \right) \right] \times \sigma \times 10^{-5}, \quad (5)$$

где d – диаметр испытываемого образца в см, σ – действующее на образец напряжение в МПа, а для опытных параметров аппроксимации приняты следующие значения:

$$A = 18 \text{ см}, \quad B = 2, \quad \gamma_1 = 0,006 \text{ 1/сут.}, \quad \gamma_2 = 0,08 \text{ 1/сут.}$$

Кривые ползучести, построенные согласно аппроксимации (5), на фиг.1.6 показаны сплошными линиями.

Как видно из фиг.1.6, применение формулы (5) для описания вызванной десорбцией влаги ползучести старого бетона, с учётом масштабного фактора, в целом, можно считать приемлемым, несмотря на значительное расхождение значений опытных данных от аналитически рассчитанных их величин, наблюдаемое в течение первых 80 сут. после нагружения образцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции. М.: Госстройиздат России. ГУП ЦПП, 2002. 76с.
2. Симонов М.З. Основы технологии лёгких бетонов. М.: Изд-во лит. по строительству, 1973. 584с.
3. Карапетян К.С. Влияние размеров образца на усадку и ползучесть бетона. // Изв. АН Арм. ССР. Серия физ.-мат., естеств. и техн. наук. 1956. Т.9. №1. С.87-100.
4. Карапетян К.С. Ползучесть бетона при высоких напряжениях // Изв. АН Арм. ССР. Серия физ.-мат., естеств. и техн. наук. 1953. Т.6. №2. С.79-89.
5. Карапетян К.С., Карапетян К.А. Исследование изменения прочности, модуля деформации и степени анизотропии весьма старого туфобетона при сжатии вследствие водонасыщения и высыхания // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1981. Т.34. №4. С.29-51.

6. Александровский С.В. О влиянии длительности действия внешней нагрузки на режим высыхания и усадку бетона. /В кн.: Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций. Труды НИИЖБ. Вып. 4. М.: Госстройиздат, 1959. С.154-183.
7. Карапетян К.С. Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести // Изв. АН Арм. ССР. Серия физ.-мат. наук. 1959. Т.12. №4. С.57-88.
8. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: ГИЗ технико-теоретической литературы, 1952. 323с.
9. Карапетян К.С. Влияние масштабного фактора на ползучесть бетона при сжатии и растяжении // Докл. АН Арм.ССР. 1964. Т.38. №3. С.135-142.
10. Яшин А.В. Ползучесть бетона в раннем возрасте. /В кн.: Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций. Труды НИИЖБ. Вып. 4. М.: Госстройиздат, 1959. С.18-73.

Сведения об авторах:

Карапетян Корюн Ашотович, доктор технических наук, зав. лабораторией
Института механики НАН РА.
Тел: (+37410) 52-48-52,
E-mail: koryan@mechins.sci.am

Клекчян Давид Грачикович, кандидат технических наук, председатель
промышленного кооператива «Бетон»
Тел.: (091) 200894,
E-mail: klekchyan@mail.ru

Манукян Егише Самвелович, инженер, Институт механики НАН Армении
Тел.: (099) 500755.

Поступила в редакцию 03.04.2012

УДК 539.374

ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССА РАСКАТКИ КОЛЬЦА БОЛЬШОГО РАДИУСА КРИВИЗНЫ

Петросян Г.Л., Петросян А.Г., Моталлеби С.Р.

Պետրոսյան Գ.Լ., Պետրոսյան Ա.Գ., Մոտալլեբի Ս.Ր.

Մեծ կորության շառավղով օղակի գրտնակման գործընթացի լարվածային վիճակի բաղադրիչների որոշման առանձնահատկությունները

Բացահայտվել են մեծ տրամագծով օղակի գրտնակման գործընթացի ընթացիկ երկրաչափական փոխկապակցված պարամետրերի որոշման առանձնահատկությունները: Դրանց հիման վրա կատարելով օղակի լարվածային վիճակի ուսումնասիրություն՝ ստացվել է համապիտանի հավասարումների համակարգ: Ցույց է տրվել, որ օղակի տրամագծի աստիճանաբար մեծացման դեպքում ընթացիկ երկրաչափական պարամետրերի փոփոխությունը հանգեցնում է հարթ շերտի գլոցման դեպքի հավասարումների ստացմանը:

Petrosyan G.L., Petrosyan H.G., Motallebi S.R.

Particularities for determination stress state components of large radius curvature ring expansion process

The peculiarities for determining the current interconnected geometrical parameters of large diameter ring expansion process are revealed. Based on ring stress state studies the universal system of equations is obtained. It is shown that in case of step-by-step increase of ring diameter the changes of geometrical parameters allow to obtain the equations of plane stripe rolling.

Выявлены особенности определения текущих взаимно связанных геометрических параметров процесса раскатки кольца большого диаметра. При исследовании напряжённого состояния кольца получена система универсальных уравнений. Показано, что в случае постепенного увеличения диаметра кольца изменение текущих геометрических параметров позволяет получить уравнения прокатки плоской полосы.

Полученная при раскатке колец высококачественная продукция имеет широкое применение в различных областях экономики, в производстве машин, автомобилей, поездов, самолётов, ракет и т.д.

Раскатка колец – один из наиболее производительных, точных, энерго- и ресурсосберегающих методов обработки металлов давлением. Данный процесс позволяет с минимальными затратами металла получить кольцевые детали большого диаметра, с точными геометрическими параметрами и высокими механическими свойствами, а также качественной поверхностью разных поперечных сечений.

С целью правильного выбора технических характеристик оборудования в процессе раскатки, а также совершенствования технологического процесса получения кольцевых деталей с указанными эксплуатационными и физико-механическими свойствами возникает необходимость исследования напряжённо-деформированного состояния деформируемого кольца при больших пластических деформациях.

В [1] проведён анализ известных в этой области работ. Показано, что в последнее время при исследовании напряжённо-деформированного состояния процесса раскатки кольца приводятся как уточнённые в какой-то мере аналитическим методом решения, так и данные, полученные на основе метода конечных элементов – одного из самых усовершенствованных численных методов с применением автоматизированного программного пакета.

Аналитическое исследование процесса раскатки кольца – достаточно сложный и малоизученный процесс, что связано с его многопараметричностью. В основном, эти исследования приближённые, а полученные формулы имеют эмпирический вид [1]. Следовательно, аналитические исследования не полностью отражают реальную картину процесса раскатки. Исходя из вышеизложенного, работы, выполненные в этом направлении, представляют особую актуальность.

В [1] аналитическим методом исследовано деформированное состояние процесса раскатки кольца большого диаметра, в результате чего было выявлено, что основные геометрические параметры процесса раскатки взаимосвязаны. Полученные формулы позволили по некоторым начальным параметрам определить другие. Выполнены численные расчёты при постепенном увеличении радиуса кольца. Показано, что в этом случае происходит постепенный переход от схемы процесса раскатки кольца к схеме прокатки плоской полосы.

Целью настоящей работы является выявление особенностей определения текущих взаимосвязанных геометрических параметров процесса раскатки кольца большого диаметра и изучение напряжённого состояния кольца на основе этих данных.

Для решения поставленной задачи рассмотрим схему (фиг.1) раскатки кольца с внешним R_e и внутренним R_i радиусами, которая по сравнению со схемой [1] дополнена некоторыми данными. При этом, внутри углов $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ показаны их текущие значения $(\varphi_{0c}, \varphi_{1c}, \varphi_{2c})$.

При решении задачи были использованы принятые в [1] следующие допущения:

- 1) деформированная зона кольца ограничена двумя контактными дугами окружности и двумя поперечными сечениями кольца: ABB_2A_2 – четырехугольник;
- 2) кольцо подвергается плоской деформации: в направлении ширины деформация отсутствует;
- 3) процесс деформирования кольца происходит поэтапно с малыми степенями деформирования; его начальная толщина h_0 постепенно уменьшается и кольцо удлиняется. При этом, эти изменения на данном этапе деформирования представляют собой достаточно маленькие величины;
- 4) внешний r_c и внутренний r_i радиусы кольца (рис.1) с малой степенью деформирования при выходе из зоны деформирования определяются с учётом уменьшения толщины кольца, т.е. в течение одного этапа центр O кольца остается тем же.

Используя метод тонких сечений [1], составим уравнения равновесия элемента $abde$ кольца (фиг.1) с единицей ширины, проектируя возникаемые нормальные силы в поперечных сечениях, а также нормальные и касательные силы в контактных поверхностях на касательной его dS дуги. Для отстающей части деформированной зоны кольца получим

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_\theta + d\sigma_\theta)(h + dh) - \sigma_\theta h - p_1 R_1 d\varphi_{1c} \sin \varphi_{1c} - p_2 R_2 d\varphi_{2c} \sin \varphi_{2c} + \\
 & + p_1 f R_1 d\varphi_{1c} \cos \varphi_{1c} + p_2 f R_2 d\varphi_{2c} \cos \varphi_{2c} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где σ_θ и $d\sigma_\theta$ – внутреннее окружное напряжение кольца и его приращение; R_1 и R_2 – радиусы ведущих и холостых валков; h – текущая толщина кольца $dh = dh_1 + dh_2$, dh_1 и dh_2 – соответственно уменьшённые значения общей, внешней и внутренней частей его толщины; p_1 и p_2 – нормальные давления на внешней и внутренней поверхностях контактной зоны процесса раскатки кольца; f – коэффициент трения.

Формоизменением уравнения (1) приведём его к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_\theta dh + d\sigma_\theta h - p_1 R_1 d\varphi_{1c} (\sin \varphi_{1c} - f \cos \varphi_{1c}) - \\
 & p_2 R_2 d\varphi_{2c} (\sin \varphi_{2c} - f \cos \varphi_{2c}) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Для получения второго уравнения равновесия элемента $abde$ кольца проектируем силы, действующие на него, на радиус, соединяющий среднюю точку дуги dS с центром кольца O (фиг.1):

$$p_1 R_1 d\varphi_{1c} \cos \varphi_{1c} (1 + f \operatorname{tg} \varphi_{1c}) = p_2 R_2 d\varphi_{2c} \cos \varphi_{2c} (1 + f \operatorname{tg} \varphi_{2c}) = 0. \quad (3)$$

Пренебрегая в полученном уравнении величиной $f \operatorname{tg} \varphi$ относительно единицы, учитывая то обстоятельство, что $R_1 d\varphi_{1c} = dS_{1c}$, $R_2 d\varphi_{2c} = dS_{2c}$ (фиг.1 б, с), путем формоизменения уравнения (3) получим следующую формулу связи между контактными нормальными давлениями p_1 и p_2 :

$$p_2 = p_1 dS_{1c} \cos \varphi_{1c} / (dS_{2c} \cos \varphi_{2c}). \quad (4)$$

Отметим, что в литературе известна формула связи между p_1 и p_2 , которая выражается через длины l_1 и l_2 целой контактной зоны кольца [2].

Подставляя величину p_2 из (4) в (2) и представив его через $d\varphi_{1c}$, получим

$$\sigma_\theta dh + d\sigma_\theta h - p_1 R_1 d\varphi_{1c} (\sin \varphi_{1c} - 2f \cos \varphi_{1c} + \cos \varphi_{1c} \operatorname{tg} \varphi_{2c}) = 0. \quad (5)$$

Для опережающей части деформированной зоны кольца получим уравнение равновесия соответствующего элемента из (5) заменой знака «минус» (-) напротив члена, имеющего коэффициент трения f , знаком «плюс» (+).

Исходя из вышеизложенного, полученные уравнения представим в виде:

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\varphi_{1c}} = -\sigma_\theta \frac{dh}{hd\varphi_{1c}} + \frac{p_1 R_1}{h} (\sin \varphi_{1c} \mp 2f \cos \varphi_{1c} + \cos \varphi_{1c} \operatorname{tg} \varphi_{2c}) \quad (6)$$

Необходимо отметить, что из (6) можно получить уравнения для случая прокатки плоской полосы [3], если принять $\varphi_{1c} = \varphi_{2c}$, т.е. $R_1 = R_2$ или $\varphi_1 = \varphi_2$.

Как видно, для определения величин σ_θ и p_1 , кроме уравнений (6), необходимо иметь ещё одну формулу, которая является следующим условием пластичности Треска – Сен-Венана $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y$, где σ_y – напряжение текучести материала. Учитывая особенности технологического процесса раскатки кольца, оценивая величины и знаки напряжений, действующих на элемент *abde* (фиг.1), представим главные напряжения в следующем виде: $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_2 = \sigma_z$, $\sigma_3 = -p_1$, где σ_z – напряжение в направлении ширины кольца. В случае плоской деформации величина σ_z равняется полусумме остальных двух нормальных напряжений. Тогда условие пластичности Треска – Сен-Венана примет следующий вид:

$$\sigma_\theta + p_1 = \sigma_y. \quad (7)$$

Для решения системы уравнений (6) и (7) необходимо иметь данные о геометрических параметрах деформированной зоны кольца. Подробное описание процесса определения этих данных, кроме h (текущей толщины кольца) и $dh = dh_1 + dh_2$ (уменьшённого его значения), приведено в [1]. При этом, для использования данных [1] необходимо начальные углы $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ и радиусы R_e, R_i кольца выразить через текущие их значения $\varphi_{0c}, \varphi_{1c}, \varphi_{2c}, R_{ec}, R_{ic}$. Например, формулы, связывающие отмеченные текущие параметры, подобно [1], следующие:

$$\sin\varphi_{1c} = (R_{ec} / R_1) \sin\varphi_{0c}, \quad \sin\varphi_{2c} = (R_{ic} / R_2) \sin\varphi_{0c}. \quad (8)$$

Что касается определения текущей толщины h кольца и уменьшённого его значения $dh = dh_1 + dh_2$, то используем элемент ab_1d_1e с формой прямоугольной трапеции (фиг.1а), которая была построена опусканием из точек a, e перпендикуляров ab_1, ed_1 к стороне bd . Среднюю линию dS полученной трапеции ab_1d_1e выразим через величины $ab_1 = dl_1, d_1e = dl_2$ (фиг.1а, в и с): $dl_1 + dl_2 = 2dS$. Представив их через dh_1 и dh_2 , получим

$$dh_1 / \operatorname{tg}\varphi_{1c} + dh_2 / \operatorname{tg}\varphi_{2c} = 2dS. \quad (9)$$

Для определения величин dh_1 и dh_2 необходимо использовать ещё одну формулу. Для этого применяется метод [1], который в конце данного этапа деформирования кольца между внешним $B_1B_2 = \Delta h_1$ и внутренним $A_1A_2 = \Delta h_2$ изменениями его толщины создаёт следующую связь: $\Delta h_1 = \gamma \Delta h_2$ [1]. Допустим, что dh_1 и dh_2 также между собой связаны коэффициентом γ :

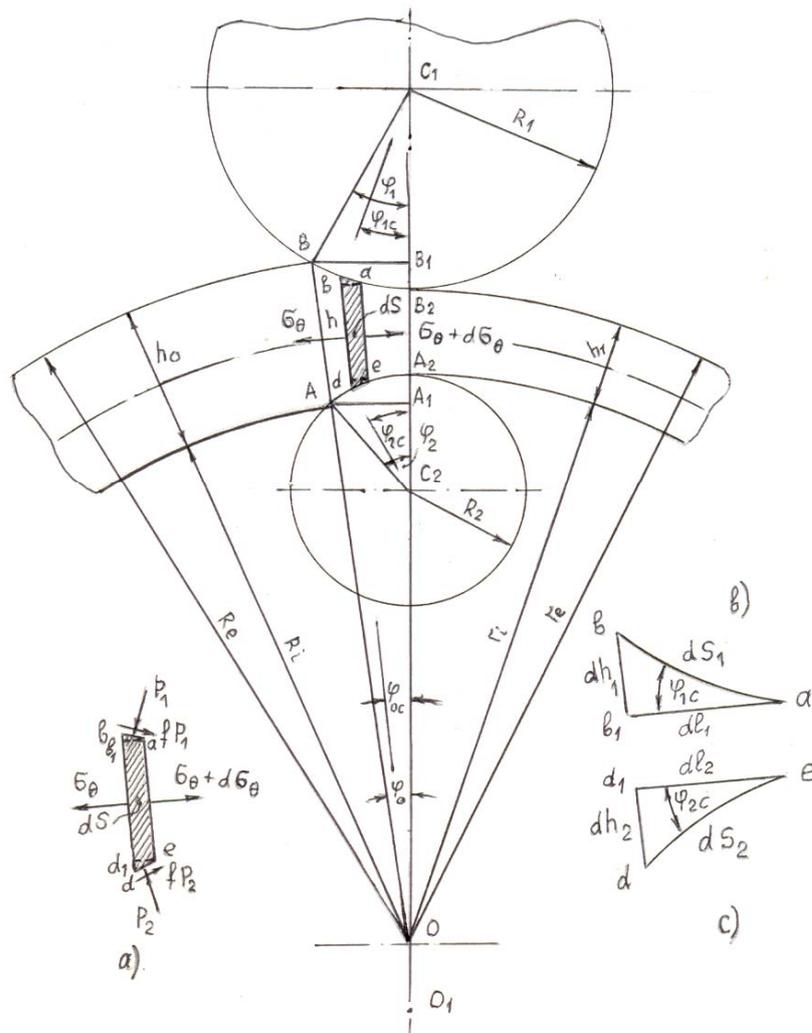
$$dh_1 = \gamma dh_2, \quad (10)$$

где γ в различных степенях деформирования кольца имеет разное значение и определяется по следующей формуле:

$$\gamma = dh_1 / dh_2 = \frac{(R_{ec} + R_1)R_2R_{ic}}{(R_{ic} - R_2)R_1R_{ec}}. \quad (11)$$

Уравнения (9)–(11) позволяют для данного значения dS и текущих значений других параметров $\varphi_{0c}, \varphi_{1c}, \varphi_{2c}, R_{ec}, R_{ic}$ определить величины dh_1, dh_2 и $dh = dh_1 + dh_2$. При этом, с целью упрощения численных расчётов, величина

dS принимается постоянной. Указанное можно получить, если угол φ_0 разделить на многочисленные равномерные части.



Фиг.1. Схема раскатки кольца, где на а), б) и с) показаны: часть, отделённая двумя поперечными сечениями, и элементы соответствующих её концов

Значения величин начальных [1] и вышеотмеченных текущих взаимосвязанных параметров деформированной зоны кольца позволяют, используя систему уравнений (6) и (7), определить компоненты напряжённого состояния. Для этого удобно

использовать метод численных расчётов [5] путем моделирования касательными окружного края плоской полосы при прокатке.

Таким образом, выявлены особенности определения текущих взаимосвязанных геометрических параметров процесса раскатки кольца большого диаметра и на основании этих данных исследовано напряжённое состояние кольца. Получена система уравнений для определения напряжений в деформированной зоне кольца. Показано, что в случае увеличения диаметра кольца на основании изменения текущих геометрических параметров эти уравнения преобразуются в уравнения прокатки плоской полосы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Г.Л., Петросян А.Г., Моталлеби С.Р. Моделирование процесса раскатки кольца с большим радиусом кривизны аналитическим методом. Сообщение 1. Особенности определения геометрических параметров процесса раскатки кольца // Вестник ИАА.- 2011.-Том 8, № 2.- С. 337-341 (на армянском языке).
2. Ковка и штамповка. Справочник. Т.2. Горячая штамповка /Под ред. Е.И. Семенова . М.: Машиностроение, 1986. 592 с.
3. Sheikh M.A., Palavilayil R.R. An assessment of finite element software for application to the roll-forming process // Journal of Materials Processing Technology. 2006. N180. P. 221–232.
4. Yang H., Wang M., Guo L.G., Sun Z.C. 3D coupled thermo-mechanical FE modeling of blank size effects on the uniformity of strain and temperature distributions during hot rolling of titanium alloy large rings//Computational Materials Science. 2008.11p.
5. Петросян Г.Л., Левонян Г.Л., Хачатрян Г.Г. Исследование процесса прокатки плоской полосы путём моделирования касательными деформированного окружного края //Вестник ГИУА (ПОЛИТЕХНИК): Сборник научных и методических статей. 2010. Т. 2. N1. С.70-73 (на армянском языке).

Петросян Геворг Людвигович – д.т.н., проф., ГИУА, проф. кафедры машиноведения, 0009, Ереван, ул. Теряна, 105. Тел. 094-754-103, gevorglp@seua.am

Петросян Асмик Геворговна – к.т.н., научный сотрудник, ГИУА, 091-90-39-38

Моталлеби Сеид Реза – аспирант ЕГУ, Иран, Тегеран, sr_motallebi@yahoo.com

Поступила в редакцию 15.11.2011

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Ռազմիկ Սակարի Կիրակոսյան - Ծննդյան 75-ամյակի առթիվ3

Հարությունյան Լ.Ա. Ճաքեր պարունակող բաղադրյալ հարթության խառը եզրային պայմաններով հարթ խնդիրներ5

Փահլավիանի Ալի Գ. Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ երկու համաչափ ճաքերով կտոր առ կտոր համասեռ ուղղանկյան լարվածային վիճակի մասին ..10

Հայրապետյան Գ. Ս., Սարգսյան Ս.Հ. Միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ սալերի տեսությունը22

Բելուբեկյան Ս.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ. Գազի գերձայնային հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդրի մասին, երբ հոսքը սալի ազատ եզրին վրավազք է կատարում34

Վերմիշյան Գ.Բ. Ներդիրով մածուցիկ-առաձգակա թիթեղում ջերմության բաշխումը վիբրացիոն բեռի ազդեցության տակ41

Կարապետյան Կ.Ա., Կլեկյան Դ.Հ., Մանուկյան Ե.Ս. Մասշտաբային գործոնի ազդեցությունը խոնավության դետորբցիայով պայմանավորված սողքի վրա հին բետոնի միառանցք սեղմման դեպքում.....54

Պետրոսյան Գ.Լ., Պետրոսյան Հ.Գ., Մոթալլեբի Ս.Ռ. Մեծ կորության շառավղով օղակի գրտնակման գործընթացի լարվածային վիճակի բաղադրիչների որոշման առանձնահատկությունները61

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Киракосян Размик Макарович – К 75-летию со дня рождения3

Арутюнян Л.А Плоские задачи со смешанными краевыми условиями для составной плоскости с трещинами5

Пахлавиани Али Г. О напряжённом состоянии кусочно-однородного упругого прямоугольника с двумя симметричными трещинами при антиплоской деформации10

Айрапетян Г.С., Саркисян С.О. Теория микрополярных ортотропных упругих тонких пластин22

Белубекиян М.В., Мартиросян С.Р. Об устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край34

Вермишнян Г. Б. Распределение температуры в вязкоупругой пластинке с вложенной шайбой при вибрационной нагрузке46

Карапетян К.А., Клекчян Д.Г., Манукян Е.С. Влияние масштабного фактора на вызванную десорбцией влаги ползучесть старого бетона при одноосном сжатии.....54

Петросян Г.Л., Петросян А.Г., Моталлеби С.Р. Особенности определения компонентов напряженного состояния процесса раскатки кольца большого радиуса кривизны61

CONTENTS

Razmik M. Kirakosyan – 75-th Anniversary	3
Harutjunyan L.A. Two-dimensional mixed boundary problems of compound plane with cracks	5
Pahlaviani Ali G About the stress state of a piecewise homogeneous elastic rectangle with two symmetric central cracks in antiplane deformations	10
Hayrapetyan G.S., Sargsyan S.H. Theory of micropolar orthotropic elastic thin plates..	22
Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the stability of a rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction from the free edge to the clamped edge	34
Vermishyan G.B. Distribution of temperature in of visco-elastic plate with a washer imbedded under the effect of vibration	41
Karapetyan K.A., Klekchyan D.H., Manukyan E.S. The influence of the scale factor on the creep of the aged concrete under one-axial compress caused by the desorbtion of damp	54
Petrosyan G.L., Petrosyan H.G., Motallebi S.R. Particularities for determination stress state components of large radius curvature ring expansion process.....	61