ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2012

СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ АМБАРЦУМЯН
(К 90-летию со дня рождения)

Крупному учёному-механику, основателю новых научных направлений в области механики деформируемых сред, одному из создателей научной школы механики в Армении, академику НАН Армении, иностранному члену Российской Академии Наук, члену Национального комитета России по теоретической и прикладной механике С.А.Амбарцумяну исполнилось девяносто лет.

Сергей Александрович родился 17 марта 1922 г. в Александрополе (Гюмри) в семье юриста. В 1942 году окончил Ереванский политехнический институт. В 1946 году стал кандидатом, а в 1952 году – доктором технических наук, с 1953 года – профессор. В 1956 г. он был избран членом-корреспондентом, в 1965 г.– академиком НАН Армении, а 2003 г. – иностранным членом РАН.

Трудовую деятельность С.А. Амбарцумян начал в 1940 г. С 1942 г. по сей день он преподаёт в высших учебных заведениях республики и работает в научно-исследовательских институтах НАН Армении. С.А.Амбарцумян был директором Института математики и механики, Института механики НАН РА. Был избран академиком-секретарем отделения физико-технических наук и механики и вице-президентом НАН Армении. В течение 14 лет он был ректором Ереванского государственного университета, 20 лет – депутатом, Председателем Верховного Совета Армении, депутатом и членом Президиума Верховного Совета СССР. Более сорока лет был членом Президиума НАН Армении. С.А.Амбарцумян – почётный директор Института механики НАН РА, почётный президент Инженерной академии Армении, почётный член и советник Президиума НАН РА.

С.А.Амбарцумяном впервые была построена общая теория анизотропных слоистых оболочек. Всеобщее признание получили труды С.А.Амбарцумяна, в которых разработаны уточнённые теории пластин и оболочек. С.А.Амбарцумян – автор разномодульной теории упругости. Им и его учениками разработаны эффективные методы расчёта стержней, пластин и оболочек, изготовленных из композиционных материалов разносопротивляющихся растяжению и сжатию.

С.А.Амбарцумян и его ученики Г.Е.Багдасарян и М.В.Белубекян по праву считаются основоположниками общей теории электромагнитоупругости тонких тел. Сформулировав и обосновав оригинальную гипотезу магнитоупругости тонких тел, они предложили эффективные методы решения различных, прикладных задач электромагнитноактивных оболочек и пластин. С.А.Амбарцумяном создана оригинальная микрополярная теория оболочек и пластин, в которой сочетается его уточнённая теория оболочек и пластин с классической несимметричной теорией упругости.

Последние годы он со своими учениками занимается проблемами прикладной микрополярной теории тонких тел, динамическими задачами электромагнитоупругости пластин и оболочек, а также теоретическими вопросами механики космических лифтов, в частности, вопросами прочности и колебаний космического кабеля транспортирующего груза и электрического тока.

С.А.Амбарцумяном опубликованы 14 монографий и более 300 статей. Полученные им научные результаты нашли широкое применение при создании объектов современной техники. Его труды известны во всем мире, полученные им результаты являются существенным вкладом в мировую науку. Они переведены и изданы в США, Японии, Китае и в Сингапуре. Имя С.А. Амбарцумяна неразрывно связано и с Российской наукой. Он уже более шестидесяти пяти лет успешно сотрудничает с редколлегиями прославленных журналов Российской академии наук (ПММ, МТТ). Велики его заслуги в деле укрепления дружбы и сотрудничества между учёными России и Армении.

Его многолетняя деятельность и научные труды высоко оценены и отмечены многочисленными государственными и научными наградами и премиями.

Редколлегия и редакция журнала ПММ сердечно поздравляют Сергея Александровича Амбарцумяна с юбилеем, желают ему крепкого здоровья, благополучия и продолжения нашего доброго сотрудничества.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

АЛЕКСАНДР ПАРУЙРОВИЧ СЕЙРАНЯН

(К 65-летию со дня рождения)

А.П.Сейранян родился 15 февраля 1947 г. в Москве. Детство и юность А.П. Сейраняна прошли в Армении. Он учился в Ереванской средней школе № 12 им. Кирова, которую окончил в 1965 году с отличием. В 1964 году он был призёром республиканских олимпиад по физике и математике, а в 1965 году стал победителем республиканской олимпиады по физике и призёром всесоюзной олимпиады по физике. Он получил личное приглашение поступать в Московский физико-технический институт (физтех). В 1965 году А.П.Сейранян поступил в Московский физико-технический институт. После его окончания работал в Центральном Аэрогидродинамическом Институте им. Н.Е. Жуковского (ЦАГИ) инженером-исследователем. В 1973 г. поступил в аспирантуру Института проблем механики АН СССР, его научным руководителем был Ф.Л.Черноусько, ныне академик РАН, директор Института проблем механики РАН. С 1976 по 1991 год работал в Институте проблем механики АН СССР. В 1977 г. защитил кандидатскую диссертацию «Задачи оптимизации конструкций при наличии нескольких ограничений», а в 1988 г. – докторскую диссертацию на тему «Анализ чувствительности и оптимизация в задачах устойчивости и колебаний упругих систем». В 1991-1992 гг. работал в Датском техническом университете в качестве приглашённого профессора. С 1993 г. работает в Институте механики МГУ имени М.В. Ломоносова ведущим научным сотрудником. Является автором 150 научных работ, в том числе пяти монографий. Внес крупный вклад в теорию устойчивости и катастроф, теорию оптимального проектирования конструкций, разработку аналитических и численных методов

математической физики с приложениями к задачам механики. Его научные работы получили широкое международное признание. К ярким достижениям А.П.Сейраняна относятся аналитическое решение задачи Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны, решение задачи Келдыша о флаттере крыла с подкосами, решение классических задач об устойчивости качелей и вращении хула-хупа, разрешение парадокса Николаи и парадокса дестабилизации неконсервативных систем малыми диссипативными силами, новое решение задачи Челомея об устойчивости стержня под действием периодической нагрузки, важный цикл работ по устойчивости периодических систем. Его монография «Multipa-rameter Stability Theory with Mechanical Applications», World Scientific, 2003. 420 p. (с А.А. Майлыбаевым) получила восторженные отзывы в международной научной печати и была высоко оценена российскими академиками В.В. Козловым, В.Ф. Журавлевым, В.В. Румянцевым, В.А. Садовничим, Ф.Л. Черноусько. В 2010 году в издательстве «Физматлит» вышло в свет русское расширенное издание этой монографии.
В 1995 г. А.П.Сейранян был избран действительным членом Нью-Йоркской Академии наук, в 1994 г. был назначен почётным советником Национальной лаборатории Далянского технологического университета (КНР). В 1995 г. стал основателем и членом Международного общества по оптимальному проектированию конструкций (ISSMO). В 1998 г. вошел в состав редколлегии международного журнала «Теоретическая и прикладная механика» (Югославия), в 2004 году стал членом редколлегии международного журнала «Structural and Multidisci-plinary Optimization» (Springer), в 2007 году стал членом редколлегии международного журнала «Mathematical Problems in Engineering» (Hindawi), а в 2009 году – журнала «Изв. НАН Армении. Механика», издаваемого в Армении.

Научные исследования, международные связи и поездки А.П.Сейраняна и его коллег поддерживаются Российским фондом фундаментальных исследований, фондом ИНТАС, а также многими другими международными фондами и зарубежными университетами.

Он читал лекции и выступал с докладами в ведущих университетах США, Канады, Великобритании, Германии и др.

А.П.Сейранян почти каждый год приезжает в Армению, он неоднократно читал лекции и делал доклады в Ереванском университете, Институте механики НАН и на конференциях, проводимых в Армении. Его статья с китайским ученым Ю. Вангом вышла в свет в Докладах Академии наук Армении.

Редакция журнала “Известия НАН Армении. Механика” сердечно поздравляет академика РАЕН, иностранного члена НАН Армении Александра Паруйровича Сейраняна с днем рождения и желает ему здоровья, счастья и новых достижений в науке.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

УДК 539.3

О ВДАВЛИВАНИИ ЖЁСТКОГО ШТАМПА С ВОГНУТЫМ ОСНОВАНИЕМ В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ НАПОЛНИТЕЛЯ В КАВЕРНЕ

Амирджанян А.А., Саакян А.В.

Ключевые слова: контактная задача, сингулярное интегральное уравнение, логарифмическая особенность, дискретные особенности, численный метод
Keywords: contact problem, singular integral equation, logaritmic singularity, discrete singularities, numerical method.

Ամիրջանյան Հ.Ա., Սահակյան Ա.Վ.
Գոգավոր հիմքով կոշտ դրոշմի միրճումը առաձգական կիսահարթություն՝ խոռոչում եղած լցիչի ազդեցության հաշվառումով

Դիտարկված է առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիր գոգավոր հիմքով կոշտ դրոշմի և առաձգական կիսահարթության փոխազդեցության վերաբերյալ: Ենթադրվում է, որ դրոշմի և կիսահարթության եզրի միջև առաջացող խորոչում կա լցիչ՝ կամ օդ, կամ իդեալական անսեղմելի հեղուկ: Խնդիրը լուծվել է դիսկրետ եզակիությունների եղանակով և գտնվել են կոնտակտային լարումների բաշխումը, խոռոչի ներսում առաջացող ճնշումը և կոնտակտային գոտու երկարությունը:

Amirjanyan H.A., Sahakyan A.V.
About the indentation of a rigid punch with concave base into half plane, taking into account the influence of filler in cavity

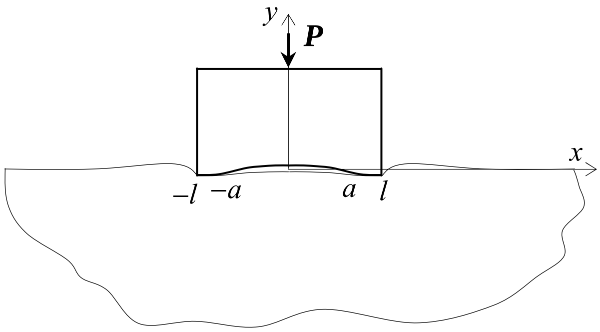
The contact problem of elasticity theory about the indentation of a rigid punch with concave base into elastic half plane is considered. It is supposed that the cavity between punch and boundary of half plane is filled with air or ideal incompressible liquid. The problem was solved by the method of a discrete singularities. The distribution of contact stresses, the pressure inside cavity and the length of contact area were obtained.

Рассмотрена контактная задача теории упругости о вдавливании жёсткого штампа с вогнутым основанием в упругую полуплоскость. Предполагается, что в образуемой, между штампом и границей полуплоскости, каверне имеется наполнитель – воздух или идеальная несжимаемая жидкость. Задача решена методом дискретных особенностей и найдены контактные напряжения, давление внутри каверны и длина зоны контакта.

Рассматривается контактная задача для упругой полуплоскости, в границу которой вдавливается жёсткий штамп с профилем основания в виде гладкой вогнутой кривой так, что с момента соприкасания штампа с границей полуплоскости под ним образуется замкнутая полость – каверна, в которой может быть как воздух, так и идеальная несжимаемая жидкость. Предполагается, что между штампом и полуплоскостью имеет место гладкий контакт, но, несмотря на это, каверна считается герметично закрытой. Вогнутость основания штампа принимается малой, чтобы ещё в рамках линейной теории упругости выявить влияние сжатия воздуха в каверне на распределение контактных напряжений и длину зоны контакта. Относительно наполнителей предполагается, что они подчиняются основному закону гидростатики – закону Паскаля, вследствие чего давление наполнителя в каверне принимается равномерно распределённым по всему объему. Поскольку основной целью поставленной задачи является исследование влияния наполнителя, то, для простоты и наглядности, предположим, что проекция основания штампа имеет постоянную длину, а основание симметрично относительно центра.

Поставленная задача является органическим продолжением классических задач о вдавливании в упругую полуплоскость без трения жёсткого штампа с плоским основанием [1] и с выпуклым основанием [2,3], которые изначально предполагают контакт по всему основанию. Рассматриваемую задачу можно отнести к последним лишь в случае отсутствия наполнителя, притом, для давящей силы, превосходящей определённое значение.

Пусть в правосторонней декартовой системе координат, ось ординат которой совпадает с осью симметрии штампа, а ось абсцисс с границей полуплоскости, основание штампа описывается функцией $f(x)$. Зона контакта будет состоять из двух симметричных отрезков $[-l,-a]$ и $[a,l]$, длины которых подлежат определению из условия непрерывности напряжений в концах $\pm a$ (Фиг. 1).



Фиг. 1

Вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости от контактных напряжений $\sigma(x)$ и давления внутри каверны p_0 определяются формулой, которую с учётом симметрии относительно оси Oy, можно записать в виде

$$\frac{\pi\mu}{1-\nu}\mathrm{v}(x)=\int_a^l \sigma(s)\left(\ln|s-x|+\ln|s+x|\right)ds+$$

$$+p_0\left[(a-x)\ln|a-x|+(a+x)\ln|a+x|-2a\right]+C \qquad (0<x<l) \qquad (1)$$

В зоне контакта имеем равенство

$$\mathrm{v}(x)=f(x)-\Delta \qquad (2)$$

где Δ – мера погружения штампа в полуплоскость.

Подставляя (1) в равенство (2) и дифференцируя его по x, придём к определяющему сингулярному интегральному уравнению

$$\int_a^l\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)\sigma(s)ds=-p_0\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|-\frac{\pi\mu}{1-\nu}f'(x) \qquad (a<x<l) \qquad (3)$$

Перейдём к безразмерным величинам

$$\{x,s\}=\frac{l-a}{2}\{y,\zeta\}+\frac{l+a}{2}=\frac{l}{2}\left[(1-\delta)\{y,\zeta\}+(1+\delta)\right] \quad (-1<\{y,\zeta\}<1)$$

$$q(y)=\frac{1}{\mu}\sigma\left(\frac{l-a}{2}y+\frac{l+a}{2}\right); \qquad p^*=\frac{p_0}{\mu}; \qquad \delta=\frac{a}{l} \qquad (4)$$

и сведём полученное уравнение к интервалу $(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\zeta-y}-\frac{1}{\zeta+y+2\delta^*}\right)q(\zeta)d\zeta=-p^*\ln\frac{1+y}{2\delta^*-1+y}-\lambda g\left(y,\delta\right)\ \left(-1<y<1\right) \quad (5)$$

где

$$\delta^*=\frac{1+\delta}{1-\delta},\quad \lambda=\frac{\pi}{1-\nu},\qquad g\left(y,\delta\right)=f'\left(x\right)\Big|_{x=\frac{l}{2}\left[(1-\delta)y+(1+\delta)\right]} \quad (6)$$

Таким образом, определяющее уравнение (3) окончательно сведено к виду (5), где неизвестными являются обезразмеренное контактное давление $q\left(y\right)$, давление внутри каверны p^* и отношение абсцисс концов зоны контакта $\delta=a/l$.

Имеем также условие равновесия штампа

$$\int_{-l}^{-a}\sigma\left(s\right)ds+2a\,p_0+\int_{a}^{l}\sigma\left(s\right)ds=P\,, \quad (7)$$

которое в переменных (4) принимает вид

$$\int_{-1}^{1}q\left(\zeta\right)d\zeta=\frac{P_*-2\delta p^*}{1-\delta};\qquad P_*=\frac{P}{\mu l} \quad (8)$$

Разыскивая решение уравнения (5) в виде

$$q\left(\zeta\right)=p^*\varphi_p\left(\zeta\right)+\varphi_0\left(\zeta\right) \quad (9)$$

где $\varphi_p\left(\zeta\right)$ и $\varphi_0\left(\zeta\right)$ являются решениями уравнения (5), но с правыми частями

$$-\ln\frac{1+y}{2\delta^*-1+y}\ \text{и}\ -\lambda g\left(y,\delta\right) \quad (10)$$

соответственно, из условия равновесия (8) выразим неизвестное давление p^* через введённые новые неизвестные функции

$$p^*=\left[\frac{P_*}{1-\delta}-\int_{-1}^{1}\varphi_0\left(\zeta\right)d\zeta\right]\Bigg/\left[\frac{2\delta}{1-\delta}+\int_{-1}^{1}\varphi_p\left(\zeta\right)d\zeta\right] \quad (11)$$

Из физической сущности поставленной задачи непосредственно следует, что на внутреннем конце зоны контакта, т.е. в точке $y=-1$, контактное давление, в силу непрерывности, должно быть равно давлению внутри каверны, которое, при наличии наполнителя, отлично от нуля и подлежит определению. Представление (9) очевидным образом указывает на то, что только функция $\varphi_p\left(\zeta\right)$ должна обладать указанным поведением в точке $y=-1$, поскольку именно ею обусловлено влияние внутреннего давления. Функция $\varphi_0\left(\zeta\right)$ на внутреннем конце зоны контакта обращается в ноль. На внешнем конце обе функции имеют интегрируемую особенность.

Известно [4], что интеграл типа Коши от функции $\varphi_p\left(\zeta\right)$, принимающей конечное значение в точке $y=-1$, имеет в этой точке логарифмическую особенность. Такая же особенность имеется и в первой из правых частей, указанных в (10). Воспользовавшись значением интеграла

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\zeta}}{\zeta-y}d\zeta=-\sqrt{1-y}\left[\ln|1+y|-\ln\left(3-y+2\sqrt{2(1-y)}\right)\right]-2\sqrt{2}\qquad (y<1),\quad (12)$$

функцию $\varphi_p(y)$ можно представить в виде

$$\varphi_p(y)=\sqrt{\frac{1-y}{2}}+r(y),\quad (13)$$

где $r(y)$ – непрерывная функция, имеющая традиционное поведение на концах, именно, обращающаяся в ноль на конце $y=-1$ и неограниченная на конце $y=1$.

Подставляя (13) в уравнение (5) с соответствующей правой частью из (10) и учитывая (12), получим уравнение для определения $r(y)$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\zeta-y}-\frac{1}{\zeta+y+2\delta^*}\right)r(\zeta)d\zeta=t(y)-t\left(-y-2\delta^*\right),\quad (14)$$

где

$$t(y)=\left(\sqrt{\frac{1-y}{2}}-1\right)\ln|1+y|-\sqrt{\frac{1-y}{2}}\ln\left[3-y+2\sqrt{2(1-y)}\right].\quad (15)$$

Нетрудно проверить, что правая часть уравнения (14) является непрерывной ограниченной функцией на отрезке $[-1,1]$.

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению основного сингулярного интегрального уравнения первого рода (5) с правой частью, указанной в (10) второй, и уравнения (14), которые отличаются друг от друга лишь правой частью. При этом, решения обоих уравнений должны принадлежать классу функций, обращающихся в ноль на одном конце отрезка интегрирования и в бесконечность на другом. Неизвестная постоянная δ, входящая в полученные уравнения непосредственно либо посредством δ^*, определяется из условия, обусловленного наличием наполнителя.

В случае отсутствия наполнителя будем иметь $p^*=0$ и задача сведётся к решению одного уравнения (5), а постоянная δ определится из условия равновесия штампа.

Исходя из результатов [4] о поведении сингулярного интеграла вблизи концов линии интегрирования и учитывая принадлежность искомого решения к указанному классу функций, неизвестные функции $r(y)$ и $\varphi_0(y)$ представим в виде

$$r(y)=\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y}}\varphi_p^*(y),\qquad \varphi_0(y)=\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y}}\varphi_0^*(y),\quad (16)$$

где функции со звёздочками – новые неизвестные функции, принадлежащие классу Гельдера на отрезке $[-1,1]$ и принимающие на концах конечные значения.

Согласно методу дискретных особенностей [5], неизвестные функции $\varphi_p^*(y)$ и $\varphi_0^*(y)$ заменяются интерполяционными многочленами

$$\varphi^*_{\{p,0\}}(y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi^*_{\{p,0\}}(\xi_i)\ (1+\xi_i)}{(y-\xi_i)\left[(n+1)U_{n-1}(\xi_i)+nU_n(\xi_i)\right]}\sqrt{\frac{2}{1+y}}T_{2n+1}\left(\sqrt{\frac{1+y}{2}}\right),\quad(17)$$

где

$$\xi_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}\quad\left(i=\overline{1,n}\right)$$

и решение сингулярных интегральных уравнений сводится к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений с различными правыми частями:

$$\sum_{i=1}^{n}w_i\varphi^*_{\{p,0\}}(\xi_i)\left[\frac{1}{\xi_i-\zeta_k}+\frac{1}{\xi_i+\zeta_k+2\delta^*}\left(1-\frac{q(-\zeta_k-2\delta^*)}{q(\xi_i)}\right)\right]=$$
$$=\left\{t(\zeta_k)-t(-\zeta_k-2\delta^*),\lambda g(\zeta_k,\delta)\right\}\qquad\left(k=\overline{1,n}\right)\qquad(18)$$

Здесь

$$w_i=\frac{\pi(1+\xi_i)U_{2n}\left(\sqrt{\frac{1+\xi_i}{2}}\right)}{(n+1)U_{n-1}(\xi_i)+nU_n(\xi_i)},\qquad\zeta_k=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\qquad\left(k=\overline{1,n}\right),$$

$$q(\zeta)=\begin{cases}\pi P_n^{(0.5,-0.5)}(\zeta) & -1<\zeta<1\\ \pi\left[P_n^{(0.5,-0.5)}(\zeta)-\sqrt{\dfrac{\zeta+1}{\zeta-1}}P_n^{(-0.5,0.5)}(\zeta)\right] & \zeta\notin[-1,1].\end{cases}$$

Система (18) позволяет при заданном значении δ, а следовательно и $\delta^*=\dfrac{1+\delta}{1-\delta}$, определить значения $\varphi^*_p(\xi_i)$ и $\varphi^*_0(\xi_i)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ и, тем самым, посредством (17), (16) и (13), найти функции $\varphi_p(\zeta)$ и $\varphi_0(\zeta)$.

На основе квадратурных формул для интегралов, входящих в (11), неизвестное давление p^* внутри каверны можно вычислить непосредственно через найденные значения $\varphi^*_p(\xi_i)$ и $\varphi^*_0(\xi_i)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$

$$p^*=\left[\frac{P_*}{1-\delta}-\sum_{i=1}^{n}w_i\varphi^*_0(\xi_i)\right]\bigg/\left[\frac{2\delta}{1-\delta}+\frac{4}{3}+\sum_{i=1}^{n}w_i\varphi^*_p(\xi_i)\right]\qquad(19)$$

Для определения величины δ необходимо иметь условие состояния наполнителя в каверне, которое непосредственно связано с формой основания штампа. Предположим, что функция $f(x)$, описывающая основание штампа, дается формулой $f(x)=Al\left(1-x^2/l^2\right)e^{-B(x/l)^2}$, позволяющей подходящим подбором констант A и B добиться большей наглядности в представлении полученных результатов.

Выведем эти условия для каждого из обоих видов наполнителя: воздуха и идеальной несжимаемой жидкости.

Предварительно вычислим площади каверны до $\left(2S_b\right)$ и после $\left(2S_a\right)$ деформации, которые необходимы при формулировке условия состояния наполнителя под штампом. Приняв за базу отрезок, соединяющий концы основания штампа и опускающийся, вследствие деформации полуплоскости, на величину $\Delta = \mathrm{v}\left(l\right)$, нетрудно заметить, что площадь каверны до деформации определяется формулой:

$$S_b = \int_0^l f\left(x\right)dx = \frac{Al^2e^{-B}}{8B\sqrt{B}}\left[4\sqrt{B} + 2\left(2B-1\right)e^B\sqrt{\pi}\,\Phi\left(\sqrt{B}\right)\right], \tag{20}$$

а после деформации – формулой

$$\begin{aligned} S_a &= S_b - \int_0^l \left(\mathrm{v}\left(s\right) - \mathrm{v}\left(l\right)\right)ds = \\ &= S_b - \frac{1-\nu}{\pi\mu}\left[\int_a^l \sigma\left(s\right)s\ln\frac{l+s}{l-s}ds + \frac{p_0}{2}\left\{2al + \left(l^2 - a^2\right)\ln\frac{l-a}{l+a}\right\} - lP\right] \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ – интеграл вероятностей.

В безразмерных переменных будем иметь:

$$S_b^* = \frac{S_b}{l^2} = \frac{Ae^{-B}}{8B\sqrt{B}}\left[4\sqrt{B} + 2\left(2B-1\right)e^B\sqrt{\pi}\,\Phi\left(\sqrt{B}\right)\right], \tag{22}$$

$$\begin{aligned} S_a^* &= \frac{S_a}{l^2} = S_b^* - \frac{\left(1-\delta\right)^2}{4\lambda}\int_{-1}^1 q\left(\xi\right)\left(\xi+\delta^*\right)\ln\frac{\xi+1+2\delta^*}{1-\xi}d\xi - \\ &\quad - \frac{p^*}{2\lambda}\left\{2\delta - \left(1-\delta^2\right)\ln\delta^*\right\} + \frac{P_*}{\lambda}. \end{aligned} \tag{23}$$

Вертикальное смещение точек границы полуплоскости относительно базового отрезка в тех же переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \mathrm{v}^*\left(y\right) &= \frac{1-\delta}{2\lambda}\left\{\int_{-1}^1 q(\xi)\left(\ln\left|\frac{\xi-y}{\xi-1}\right| + \ln\left|\frac{\xi+y+2\delta^*}{\xi+1+2\delta^*}\right|\right)d\xi - \right. \\ &\left. - p^*\left[\left(1+y\right)\ln\left(1+y\right) - \left(y-1+2\delta^*\right)\ln\left(y-1+2\delta^*\right) - 2\ln 2 + 2\delta^*\ln 2\delta^*\right]\right\} \end{aligned} \tag{24}$$

Перейдём к условиям состояния наполнителя.

Пусть в каверне, образуемой под штампом, находится воздух. Положим, что процесс сжатия воздуха под штампом является изотермическим и описывается законом Бойля-Марриота

$$V_b\,p_b = V_a p_0, \tag{25}$$

где $p_b = 101325\, н/м^2$ – нормальное атмосферное давление, p_0 – давление сжатого воздуха внутри каверны , V_b и V_a – объемы каверны до и после деформации соответственно. Ввиду рассмотрения задачи в условиях плоской деформации, условие (25) уже в безразмерных величинах можно записать в виде

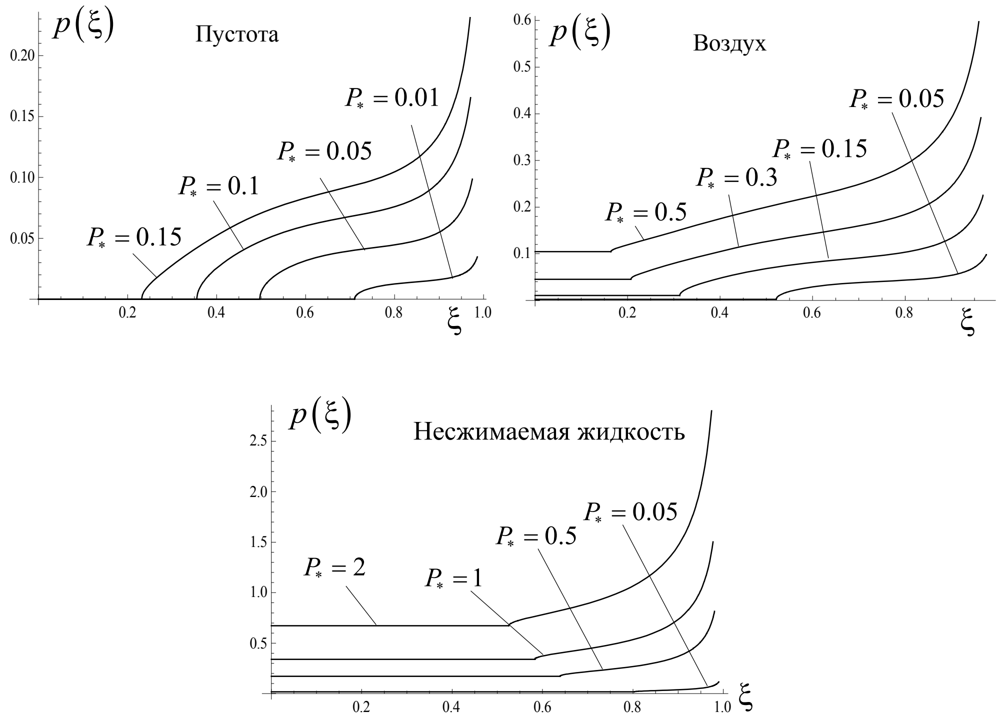
$$S_b^* \frac{p_b}{\mu} = S_a^* p^* . \tag{26}$$

В случае, когда в каверне находится идеальная несжимаемая жидкость, условием состояния наполнителя будет неизменность площади каверны

$$S_b^* = S_a^* . \tag{27}$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (18) при условии (19) и одного из условий (26)-(27).

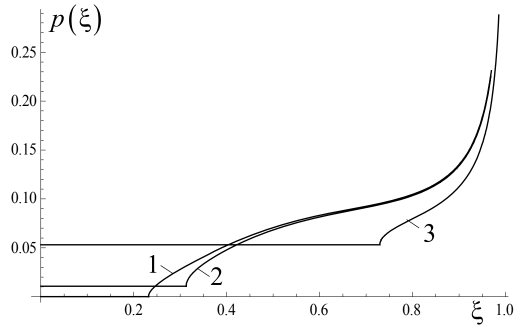
Численный анализ. Для параметров функции, описывающей основание штампа, приняты значения $A = 0.02,\ B = 4$, а для коэффициента Пуассона материала полуплоскости – значение $\nu = 0.25$. Расчёты проводились для трёх видов наполнителя в каверне: а) пустота; б) воздух; в) несжимаемая жидкость. Определены: распределение давления в зоне контакта штампа с полуплоскостью, давление внутри каверны, длина зоны контакта и форма границы полуплоскости под штампом. Зависимость найденных величин от величины вдавливающей силы P представлена в виде графиков.



Фиг.2. Распределение контактного давления под штампом

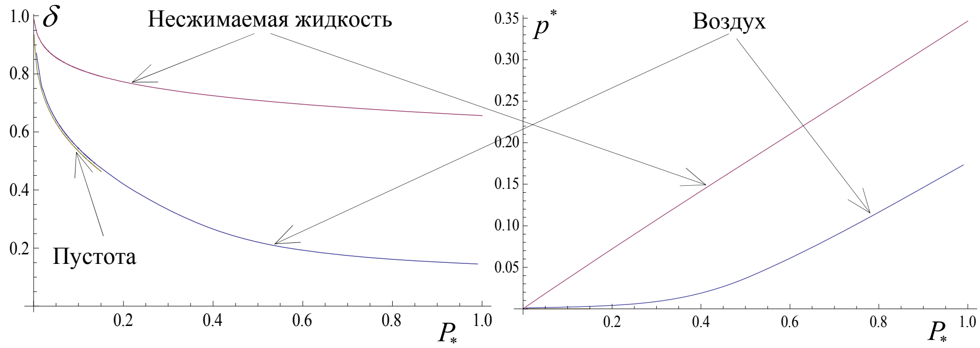
На фиг.2 представлены графики распределения давления под штампом. При этом, для неконтактирующей части, т.е. на интервале $0<\xi<\delta$ имеем $p(\xi)=p^*$, а в зоне контакта $\delta<\xi<1$ – $p(\xi)=\sigma(\xi l)/\mu$. Представленные графики показывают зависимость давления под штампом от величины вдавливающей силы для каждого наполнителя отдельно и, поскольку уровни давления существенно отличаются друг от друга, трудно сделать какое-либо заключение о зависимости от рода наполнителя.

Для получения количественного представления о последней зависимости на фиг. 3 собраны графики давления под штампом при разных наполнителях для одного и того же значения силы $P_* = 0.15$.



Фиг.3. Давление под штампом при разных наполнителях в каверне: 1– пустота, 2 – воздух, 3 – несжимаемая жидкость

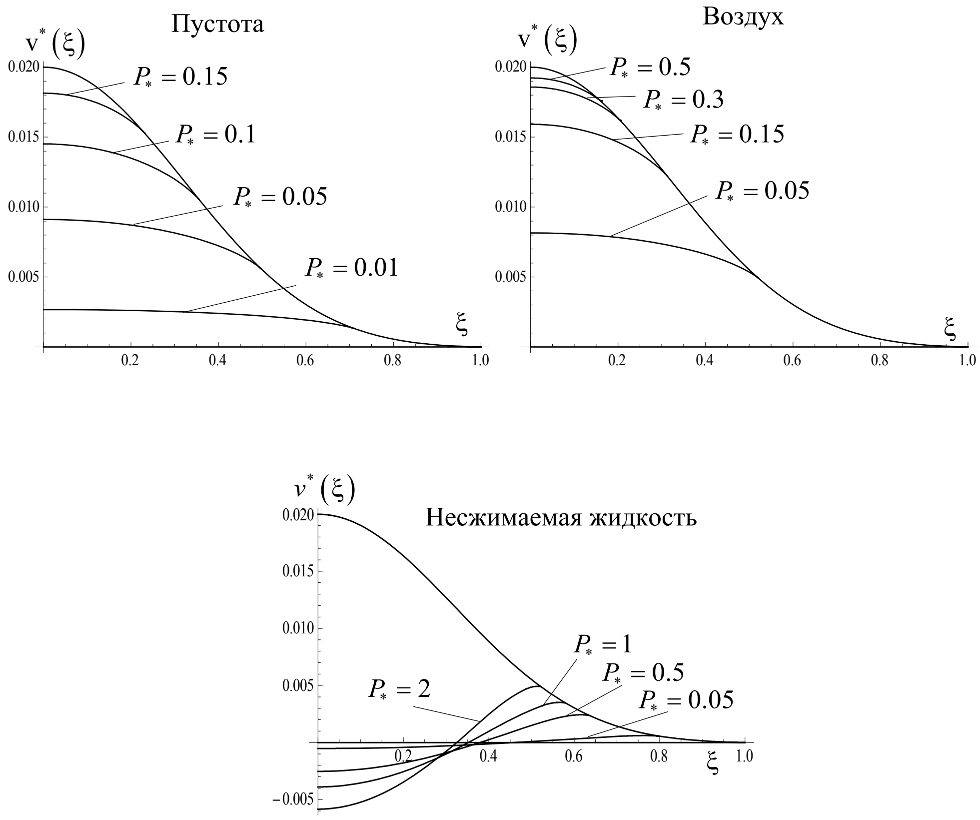
На фиг.4 представлены графики зависимости параметра $\delta = a/l$, посредством которого определяется длина зоны контакта, и давления внутри каверны p^* от величины вдавливающей силы P_*. Естественно, что при малых значениях вдавливающей силы P_* ситуации в случаях пустой каверны и наличия в ней воздуха должны мало отличаться друг от друга и это чётко прослеживается из графиков фиг.4. Судя по



Фиг.4. Зависимость длины зоны контакта (слева) и давления внутри каверны (справа) от величины, приложенной к штампу силы.

этим графикам, действительно, до определённого значения $P_* \approx 0.15$ давление внутри каверны практически равно нулю, а длины зоны контакта очень близки друг к другу.

При этом замечаем, что для пустой каверны кривая δ при определённом значении силы P_* обрывается. Это означает, что каверна скачкообразно захлопывается и при больших значениях силы P_* между штампом и полуплоскостью имеет место полный контакт.



Фиг.5. Форма границы полуплоскости под штампом.

На фиг.5 показаны формы границы полуплоскости после деформирования под действием различных сил P_*. Огибающая рассчитанных кривых представляет собой форму основания штампа, а область между ними является образом каверны.

Для иллюстрации сходимости решения системы (18) при увеличении порядка аппроксимации n введём в рассмотрение среднеквадратичное отклонение друг от друга решений, полученных при разных значениях порядка аппроксимации

$$\Delta(n_i) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \frac{\left(q_{n_i}(x_k) - q_{n_{i+1}}(x_k)\right)^2}{(m-1)m}}, \tag{28}$$

где x_i – корни многочлена Чебышева $T_m(x)$, n_i – порядок аппроксимации.

Значения $\Delta(n_i)$ при $m=20$ и $\{n_i\}=\{4,6,8,10,12,20\}$ приведены в табл.1.

Таблица 1

Наполнитель	$\Delta(n_1)$	$\Delta(n_2)$	$\Delta(n_3)$	$\Delta(n_4)$	$\Delta(n_5)$
Пустота	7.6×10^{-4}	2.6×10^{-5}	1.3×10^{-7}	1.4×10^{-8}	4.0×10^{-10}
Воздух	3.9×10^{-3}	3.8×10^{-4}	1.4×10^{-5}	3.1×10^{-7}	2.2×10^{-9}
Несжимаемая жидкость	5.5×10^{-5}	8.7×10^{-8}	3.8×10^{-8}	4.9×10^{-9}	1.7×10^{-9}

Данные табл.1 очевидно указывают на достаточно быструю сходимость процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sadowski M.L. (Садовский М.Л.). Zweidimensionale Probleme der Elastizitats-theorie.— ZAMM, 1928, 8, Bd 2.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1997. 270с.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 302с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 510 с.
5. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №3.С.12-19.

Сведения об авторах:

Саакян Аветик Вараздатович,
Доктор физ.-мат. наук, зам.директора Института механики НАН РА,
Тел.: (37410) 568188, (37494)579348
E-mail: avsah@mechins.sci.am, avsahakyan@gmail.com

Амирджанян Арутюн Арменович –
Кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (37410) 27-62-23
E-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2011

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ МИКРОПОЛЯРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ (ОРТОТРОПНЫХ) УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК

Маргарян Л. М., Саркисян С. О.

Ключевые слова: динамика, микрополярный, ортотропный, упругий, тонкий, балка, модель.
Key words: dynamics, micropolar, orthotropic, elastic, thin, bar, model.

Մարգարյան Լ.Մ., Սարգսյան Ս.Հ.
Միկրոպոլյար անիզոտրոպ (օրթոտրոպ) առաձգական բարակ ձողերի դինամիկայի մաթեմատիկական մոդելները

Այս աշխատանքում ասիմպտոտիկ հիմնավորվածություն ունեցող վարկածների մեթոդի հիման վրա, կախված ֆիզիկական անչափ պարամետրերի ընդունած արժեքներից, կառուցված են միկրոպոլյար անիզոտրոպ (օրթոտրոպ) առաձգական բարակ ձողերի ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով, «փոքր սահքային կոշտության» դինամիկական մոդելները: Կառուցված մոդելներում լիովին հաշվի են առնված ընդլայնական սահքային դեֆորմացիաները: Կառուցված մոդելների հիման վրա դիտարկված է հոդակապորեն հենված միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ ձողի ազատ տատանումների խնդիրը:

Margaryan L.M., Sargsyan S.H.
Mathematical Models of Dynamics of Micropolar Anisotropic (Orthotropic) Elastic Thin Bars

In the present paper on the basis of asymptotically confirmed hypotheses method, depending on the values of dimensionless physical parameters, dynamic models of micropolar elastic anisotropic (orthotropic) thin bars with free fields of displacements and rotations, with constrained rotation and with "small shift rigidity" are constructed. Transverse shift and related deformations are completely taken into account in the constructed models of micropolar bars. On the basis of these models problem of determination of frequencies of free oscillations of hinged-supported micropolar orthotropic elastic thin bar is studied.

В работе на основе метода гипотез, имеющего асимптотическое обоснование, в зависимости от значений физических безразмерных параметров построены динамические модели микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением и "с малой сдвиговой жесткостью". В построенных моделях микрополярных балок полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации. На основе построенных моделей изучена задача об определении частот свободных колебаний шарнирно-опертой микрополярной ортотропной упругой тонкой балки.

1. Введение. Современные достижения в области микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек изложены в обзорных работах [1], [2]. Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек заключается в приближённом, но адекватном сведении начально-граничной задачи микрополярной теории упругости к прикладной одномерной или двумерной модели. В работах [3],[4] на основе метода гипотез, который имеет асимптотическое подтверждение, построены модели динамики микрополярных изотропных упругих тонких пластин и оболочек, когда полностью учтены поперечные сдвиговые и родственные им деформации. В работе [5] этим же подходом построена прикладная модель статической деформации микрополярных упругих тонких балок. В работе [6] изучено асимптотическое поведение решения плоской начально-граничной задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала в тонкой области прямоугольника, построена внутренняя задача, погранслои по координатам и по времени, рассмотрена задача о сращивании внутренней и погранслойных задач.

В данной работе, имея в виду качественные стороны асимптотического решения начально-краевой задачи плоской микрополярной теории упругости [6], развивается подход работ [3]-[5], формулируются гипотезы, при помощи которых построены прикладные одномерные динамические модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, со стеснённым вращением, “с малой сдвиговой жёсткостью”.

2. Основные уравнения, граничные и начальные условия плоской динамической задачи микрополярной теории упругости для ортотропного прямоугольника.

Рассмотрим микрополярный ортотропный упругий параллелепипед постоянной высоты $2h$, длины a и постоянной толщины, равной 1. Будем считать, что в параллелепипеде по направлению оси x_2 осуществлено плоское напряжённое состояние. Основные уравнения плоской динамической задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала имеют следующий вид [7]:

уравнения движения:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=I\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2};\quad (1)$$

соотношения упругости:

$$\sigma_{11}=A_{11}\varepsilon_{11}+A_{12}\varepsilon_{22},\ \sigma_{22}=A_{12}\varepsilon_{11}+A_{22}\varepsilon_{22},\ \sigma_{12}=A_{77}\varepsilon_{12}+A_{78}\varepsilon_{21},\ ,$$

$$\sigma_{21}=A_{78}\varepsilon_{12}+A_{88}\varepsilon_{21},\ \mu_{13}=B_{66}\chi_{13},\ \mu_{23}=B_{44}\chi_{23},\quad (2)$$

либо в обратной форме

$$\varepsilon_{11}=\frac{A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{11}-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{22},\ \varepsilon_{22}=\frac{A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{22}-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{11},$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sigma_{12}-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sigma_{21},\ \varepsilon_{21}=\frac{A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sigma_{21}-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sigma_{12},\quad (3)$$

$$\chi_{13}=\frac{1}{B_{66}}\mu_{13},\ \chi_{23}=\frac{1}{B_{44}}\mu_{23};$$

геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ \varepsilon_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3,\ \varepsilon_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3,\ \chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1},\ \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}.\quad (4)$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ – силовые напряжения; μ_{13}, μ_{23} – моментные напряжения; u_1, u_2 – перемещения, а ω_3 – независимый поворот точек прямоугольника; $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{77}, A_{78}, A_{88}, B_{66}, B_{44}$ – упругие коэффициенты микрополярного ортотропного материала; ρ – плотность этого материала; I – мера инерции при вращении; $0\le x_1\le a,\ -h\le x_2\le h$.

К определяющим уравнениям (1)-(4) плоской динамической задачи микрополярной теории упругости присоединим соответствующие граничные и начальные условия. На лицевых сторонах прямоугольника $x_2=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия (будем изучать задачу изгиба):

$$\sigma_{21}\big|_{x_2=\pm h}=\frac{1}{2}\left(X^+-X^-\right),\ \sigma_{22}\big|_{x_2=\pm h}=\pm\frac{1}{2}\left(Y^++Y^-\right),\ \mu_{23}\big|_{x_2=\pm h}=\pm\frac{1}{2}\left(M^++M^-\right)\quad (5)$$

На боковой кромке прямоугольника $x_1=0$ (аналогично на $x_1=a$) примем следующие варианты граничных условий несимметричной теории упругости:

1-ая граничная задача**:** $\sigma_{11}\big|_{x_1=0}=\varphi_1(x_2),\ \sigma_{12}\big|_{x_1=0}=\varphi_2(x_2),\ \mu_{13}\big|_{x_1=0}=\varphi_3(x_2)$ (6)

2-ая граничная задача: $u_1\Big|_{x_1=0}=0,\quad u_2\Big|_{x_1=0}=0,\quad \omega_3\Big|_{x_1=0}=0$ (7)

3-я граничная задача: $\sigma_{11}\Big|_{x_1=0}=\varphi_1\left(x_2\right),\quad u_2\Big|_{x_1=0}=0,\quad \mu_{13}\Big|_{x_1=0}=\varphi_3\left(x_2\right)$ (8)

Начальные условия при $t=0$:

$$u_1\big|_{t=0}=f_1(x_1,x_2)\ ,\quad u_2\big|_{t=0}=f_2(x_1,x_2)\ ,\quad \omega_3\big|_{t=0}=\varphi_3(x_1,x_2)\ ,$$
$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=F_1(x_1,x_2),\quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0}=F_2(x_1,x_2),\quad \left.\frac{\partial \omega_3}{\partial t}\right|_{t=0}=\Phi_3(x_1,x_2). \tag{9}$$

Вводим также следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2},\ \frac{A_{11}{}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2},\ \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2},\ \frac{A_{11}\left(A_{88}-A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2},\ \frac{A_{11}\left(A_{77}-A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2},$$
$$\frac{A_{11}\left(A_{88}+A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2},\ \frac{A_{11}\left(A_{77}+A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2},\ \frac{a^2A_{11}}{B_{66}},\ \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}. \tag{10}$$

В дальнейшем вышеуказанные уравнения (1)-(4), граничные условия (5)-(8) и начальные условия (9) плоской динамической задачи микрополярной теории упругости будем рассматривать в тонкой прямоугольной области: $2h<<a,\ h/a=\delta<<1$.

3. Математическая модель динамики микрополярной ортотропной упругой тонкой балки с независимыми полями перемещений и вращений.

Рассмотрим случай, когда безразмерные физические параметры (10) имеют следующие значения:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}{}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}\left(A_{88}-A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sim 1,$$
$$\frac{A_{11}\left(A_{77}-A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}\left(A_{88}+A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}\left(A_{77}+A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sim 1,\ \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\sim 1,\ \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\sim 1. \tag{11}$$

На основе асимптотического анализа [6] начально-граничной задачи (1)-(9) в тонкой прямоугольной области, в основу предлагаемой ниже теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений ставим следующие предположения (гипотезы) [3]-[5]:

а) в процессе деформации первоначально прямолинейный и нормальный к оси симметрии прямоугольника x_2 элемент свободно поворачивается как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной оси.

Принятую гипотезу математически запишем так:

$$u_1=x_2\Psi_1\left(x_1,t\right),\quad u_2=w\left(x_1,t\right),\quad \omega_3=\Omega_3\left(x_1,t\right). \tag{12}$$

Отметим, что с точки зрения перемещений, гипотеза (12), по сути дела, представляет собой кинематическую гипотезу Тимошенко в классической теории упругих балок [8]. Гипотезу (12), в целом, как в работах [3]-[5], назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории балок;

б) при определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силового напряжения σ_{21} примем:

$$\sigma_{21}=\overset{0}{\sigma}_{21}\left(x_1,t\right). \tag{13}$$

После вычисления указанных величин, значение σ_{21} окончательно определим как сумму значения (13) и результата интегрирования первого уравнения движения из

(1), для которого потребуем условие, чтобы усреднённое по высоте прямоугольника величина была равна нулю;

в) в соотношениях упругости (3) можно пренебрегать силовым напряжением σ_{22} относительно силового напряжения σ_{11}.

С целью приведения двумерной динамической задачи (1)-(9) к прикладной одномерной, в теории микрополярных балок вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим эквивалентные им интегральные по высоте прямоугольника характеристики- усилия и моменты:

$$N_{12}=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}dx_2\,,\quad N_{21}=\int_{-h}^{h}\sigma_{21}dx_2\,,\quad L_{13}=\int_{-h}^{h}\mu_{13}dx_2\,,\quad M_{11}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}x_2dx_2\,. \tag{14}$$

Основная система уравнений динамического изгиба микрополярных упругих ортотропных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

уравнения движения:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}-N_{21}=-h\left(X^+-X^-\right)+\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}=-(Y^++Y^-)+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+N_{12}-N_{21}=-(M^++M^-)+2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}. \tag{15}$$

соотношения упругости:

$$M_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}{A_{22}}K_{11},\quad N_{12}=2h\left(A_{77}\Gamma_{12}+A_{78}\Gamma_{21}\right),$$
$$N_{21}=2h\left(A_{78}\Gamma_{12}+A_{88}\Gamma_{21}\right),\quad L_{13}=2hB_{66}k_{13}. \tag{16}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11}=\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1},\quad \Gamma_{12}=\frac{\partial w}{\partial x_1}-\Omega_3\,,\quad \Gamma_{21}=\Psi_1+\Omega_3,\quad k_{13}=\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1}. \tag{17}$$

Граничные условия на торце балки $x_1=0\left(x_1=a\right)$ имеют вид:

$$M_{11}=M_{11}{}^*\ \text{или}\ \Psi_1=\Psi^*{}_1,\quad N_{12}=N_{12}{}^*\ \text{или}\ w=w^*,\quad L_{13}=L_{13}{}^*\ \text{или}\ \Omega_3=\Omega_3{}^*. \tag{18}$$

Начальные условия при $t=0$ необходимо ставить для $w,\dfrac{\partial w}{\partial t},\Omega_3,\dfrac{\partial\Omega_3}{\partial t},\Psi_1,\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial t}$.

В модели (15)-(18) микрополярных балок с независимыми полями перемещений и вращений полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Как показывает асимптотический метод [6] интегрирования начально-краевой задачи (1)-(9), в модели одномерных уравнений (15)-(18) микрополярной балки возможно некоторое упрощение, согласно этому в первом уравнении движения из (15) можем пренебрегать членом, связанным с изгибающим моментом M_{11}, и соответствующим инерционным моментом $\dfrac{2h^3}{3}\rho\dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}$ (отметим, что в поперечных сечениях балки кроме изгибающего момента M_{11} действует также и изгибающий момент L_{13}). Назовём эту модель упрощённой моделью микрополярных балок.

Для получения одномерных уравнений классической теории Тимошенко для ортотропной балки (с незначительным отличием, связанным с нашей гипотезой б)), в уравнениях (15)-(17) следует подставить $B_{66}=0,\ I=0$ (вследствие этого получаются также следующие условия, наложенные для физических параметров: $A_{77}=A_{88}=A_{78}=A$).

Если в модели (15)-(18) микрополярной балки будем пренебрегать поперечными сдвигами, т.е. если будем считать

$$\Psi_1=-\frac{\partial w}{\partial x_1}, \tag{19}$$

то приходим к модели микрополярных балок, когда нормальный элемент поворачивается, оставаясь перпендикулярным к деформированной оси балки. Формула (19) означает, что будем руководствоваться вместо обобщённой кинематической гипотезы а) Тимошенко, обобщённой гипотезой Бернулли для микрополярных балок (т.е. наряду с (19) будем считать справедливым формулы (12)).

Основная система уравнений динамического изгиба микрополярных упругих ортотропных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, когда в основу принимается обобщённая кинематическая гипотеза Бернулли, будет иметь вид:

уравнения движения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}-N_{21}=-h\left(X^+-X^-\right)-\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2},\quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}=-(Y^++Y^-)+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+N_{12}-N_{21}=-(M^++M^-)+2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}.\end{gathered} \tag{20}$$

соотношения упругости:

$$\begin{gathered}M_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}{A_{22}}K_{11},\qquad N_{12}=2h\left(A_{77}\Gamma_{12}+A_{78}\Gamma_{21}\right),\\ N_{21}=2h\left(A_{78}\Gamma_{12}+A_{88}\Gamma_{21}\right),\qquad L_{13}=2hB_{66}k_{13}.\end{gathered} \tag{21}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2},\quad \Gamma_{12}=\frac{\partial w}{\partial x_1}-\Omega_3,\ \Gamma_{21}=-\frac{\partial w}{\partial x_1}+\Omega_3,\quad k_{13}=\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1}. \tag{22}$$

К этой системе уравнений микрополярных балок с независимыми полями перемещений и вращений следует присоединить граничные условия (18) с учетом (19) и соответствующие начальные условия.

Для получения одномерных уравнений классической теории ортотропной балки Бернулли в уравнениях (20)-(22) следует подставить $B_{66}=0,\ I=0$ (одновременно, вследствие этого опять получаются следующие условия для физических параметров: $A_{77}=A_{88}=A_{78}=A$).

4. Математическая модель микрополярной ортотропной упругой тонкой балки со стесненным вращением.

Рассмотрим случай, когда физические безразмерные параметры (10) имеют следующие значения:

$$\begin{gathered}\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sim 1,\quad \frac{A_{11}{}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sim 1,\quad \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sim 1,\quad \frac{A_{11}\left(A_{88}-A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sim 1,\\ \frac{A_{11}\left(A_{77}-A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sim 1,\quad \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\sim 1,\quad \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\sim 1.\end{gathered} \tag{23}$$

Кроме (23), предположим ещё, что следующие выражения от физических констант материала балки

$$\frac{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^{2}}{A_{11}\left(A_{88}+A_{78}\right)},\quad \frac{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^{2}}{A_{11}\left(A_{77}+A_{78}\right)} \tag{24}$$

имеют весьма большие значения (в изотропном случае это условие эквивалентно требованию: $\alpha \gg \mu$ либо $\alpha \to \infty$ [5]).

С учётом качественных результатов асимптотического решения начально-граничной задачи (1)-(9) при наличии условий (23), (24) (отметим, что в этом случае [6] вращения точек прямоугольника связаны с перемещениями как в классической теории упругости), в основу предлагаемой модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стеснённым вращением принимаем следующие гипотезы:

1) это гипотезы а), б), в) раздела 3;

2) Поворот ω_3 выражается через компоненты вектора перемещений u_1, u_2 по известной формуле классической теории упругости:

$$\omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right). \tag{25}$$

Здесь следует обратить внимание на следующее: из третьего и четвёртого равенств из (3) можем получить следующие эквивалентные равенства:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-2\omega_3=\frac{A_{11}\left(A_{88}+A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^{2}}\frac{\sigma_{12}}{A_{11}}-\frac{A_{11}\left(A_{77}+A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^{2}}\frac{\sigma_{21}}{A_{11}},\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=\frac{A_{11}\left(A_{88}-A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^{2}}\frac{\sigma_{12}}{A_{11}}+\frac{A_{11}\left(A_{77}-A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^{2}}\frac{\sigma_{21}}{A_{11}}\end{gathered} \tag{26}$$

(отметим, что σ_{21}/A_{11}– безразмерная величина). Для выполнения условия стесненного вращения (25) необходимо, чтобы правая часть в первом равенстве из (26) стремилась к нулю. Условие, которое мы налагали на выражения (24), строго обеспечивает указанное требование.

Основная система уравнений динамического изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стеснённым вращением будет выражаться так:

уравнения движения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}-N_{21}=-h\left(X^{+}-X^{-}\right)+\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}=-(Y^{+}+Y^{-})+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+N_{12}-N_{21}=-(M^{+}+M^{-})+2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}.\end{gathered} \tag{27}$$

Соотношения упругости:

$$\begin{gathered}M_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^{2}}{A_{22}}K_{11},\\ N_{12}+N_{21}=h\left(A_{77}+A_{88}+2A_{78}\right)\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right),\ L_{13}=2hB_{66}k_{13}.\end{gathered} \tag{28}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11}=\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1},\ \Gamma_{12}+\Gamma_{21}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\Psi_1,\ k_{13}=\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1},\ \Omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}-\Psi_1\right). \tag{29}$$

Граничные условия на торце балки $x_1=0\left(x_1=a\right)$ имеют вид:

$$M_{11}=M_{11}{}^{*}\ \text{или}\ \Psi_1=\Psi^{*}{}_{1},\quad N_{12}=N_{12}{}^{*}\ \text{или}\ w=w^{*},\quad L_{13}=L_{13}{}^{*}\ \text{или}\ \Omega_3=\Omega_3{}^{*} \tag{30}$$

Для величин $w, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \Omega_3, \dfrac{\partial \Omega_3}{\partial t}, \Psi_1, \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial t}$ необходимы начальные условия при $t = 0$.

В модели (27)-(30) микрополярных балок со стеснённым вращением полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Для получения одномерных уравнений классической теории ортотропных балок Тимошенко в уравнениях (27)-(29) следует подставить $B_{66} = 0,\ I = 0$ (необходимо в данном случае ввести также следующее обозначение: $(A_{77} + A_{88} + 2A_{78})/4 = A$).

Основная система уравнений динамического изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стеснённым вращением, когда в основу принимается обобщённая кинематическая гипотеза Бернулли (19), будет иметь вид:

уравнения движения:

$$\frac{\partial\left(M_{11} - L_{13}\right)}{\partial x_1} - N_{12} = -h\left(X^+ - X^-\right) + (M^+ + M^-) - \left(\frac{2h^3}{3}\rho + 2Ih\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2},$$
$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{31}$$

соотношения упругости:

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}K_{11},\ L_{13} = 2hB_{66}k_{13}. \tag{32}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2},\ \ k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1},\ \Omega_3 = \frac{\partial w}{\partial x_1}. \tag{33}$$

К этой системе уравнений микрополярных балок со стеснённым вращением следует присоединить граничные условия (30) с учётом (19) и соответствующие начальные условия.

Для получения одномерных уравнений классической теории Бернулли ортотропных балок в уравнениях (31)-(33) следует подставить $B_{66} = 0,\ I = 0$ (с учётом следующего вышеупомянутого обозначения $(A_{77} + A_{88} + 2A_{78})/4 = A$).

5. Математическая модель микрополярной ортотропной упругой тонкой балки “с малой сдвиговой жесткостью”.

Рассмотрим случай, когда физические параметры (10) имеют следующие значения:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1,\ \ \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1,\ \ \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1,\ \ \frac{A_{11}\left(A_{88} - A_{78}\right)}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \tag{34}$$
$$\frac{A_{11}\left(A_{77} - A_{78}\right)}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1,\ \ \frac{A_{11}\left(A_{88} + A_{78}\right)}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1,\ \ \frac{A_{11}\left(A_{77} + A_{78}\right)}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} << 1,\ \ \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} << 1.$$

С учётом качественных результатов асимптотического решения [6] системы уравнений (1)-(4) с вышеуказанными граничными и начальными условиями, в основу предлагаемой ниже теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок “с малой сдвиговой жёсткостью ” ставим следующие гипотезы:

1) это гипотезы а), б), в) раздела 3;

2) в третьем уравнении движения (1) можем пренебрегать разностью $(\sigma_{12} - \sigma_{21})$.

Главная особенность рассматриваемого случая состоит в том, что “моментная часть” задачи отделяется как самостоятельная начально-граничная задача.

Для “моментной части” задачи имеем:

уравнение движения:

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} = -(M^+ + M^-) + 2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}; \qquad (35)$$

соотношение упругости:

$$L_{13} = 2hB_{66}k_{13}; \qquad (36)$$

геометрическое соотношение**:**

$$k_{13} = \frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1}. \qquad (37)$$

Граничное условие на торце балки $x_1 = 0(x_1 = a)$ имеет вид:

$$L_{13} = L_{13}^* \quad \text{или} \quad \Omega_3 = \Omega_3^*. \qquad (38)$$

Для величин Ω_3, $\frac{\partial\Omega_3}{\partial t}$ необходимы начальные условия при $t = 0$.

Для “силовой части” задачи имеем:

уравнения движения:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} = -h\left(X^+ - X^-\right) + \frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \qquad (39)$$

соотношения упругости:

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}K_{11}, \; N_{12} = 2h(A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}), \; N_{21} = 2h(A_{78}\Gamma_{12} + A_{88}\Gamma_{21}). \qquad (40)$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \Psi_1 + \Omega_3. \qquad (41)$$

Граничные условия на торце балки $x_1 = 0 \;\; (x_1 = a)$ имеют вид:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \Psi_1 = \Psi_1^*, \quad N_{12} = N_{12}^* \text{ или } w = w^*. \qquad (42)$$

Для величин $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Psi_1, \frac{\partial\Psi_1}{\partial t}$ необходимы начальные условия при $t = 0$.

В модели (39)-(42) микрополярных балок “с малой сдвиговой жёсткостью” полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Основная система уравнений динамического изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких балок “с малой сдвиговой жёсткостью ” для “силовой части”, когда принимается обобщённая кинематическая гипотеза Бернулли (19), будет иметь вид:

уравнения движения:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} = -h\left(X^+ - X^-\right) - \frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (43)$$

соотношения упругости:

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}K_{11}, \; N_{12} = 2h\left(A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}\right), \; N_{21} = 2h\left(A_{78}\Gamma_{12} + A_{88}\Gamma_{21}\right) \qquad (44)$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3(x_1, t), \quad \Gamma_{21} = -\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_3(x_1, t). \qquad (45)$$

К этой системе уравнений микрополярных балок “с малой сдвиговой жёсткостью” следует присоединить граничные условия (42) с учётом (19) и соответствующие начальные условия.

6. Свободные колебания шарнирно опёртой микрополярной ортотропной упругой тонкой балки.

Основная система уравнений динамической изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, когда полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации, представляют собой уравнения (15)-(17). Граничные условия шарнирного опирания на торцах балки $x_1 = 0$, $x_1 = a$ выражаются так:

$$w\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}} = 0, \quad L_{13}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}} = 0, \quad M_{11}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}} = 0, \tag{46}$$

Решение поставленной граничной задачи представим в следующем виде (здесь по индексу $m = 1,2,...$ происходит суммирование), при котором полностью удовлетворяются граничные условия (46):

$$\Psi_1 = \left(A_m'' \cos(p_m t) + B_m'' \sin(p_m t)\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right) + \left(A_0'' \cos(p_0 t) + B_0'' \sin(p_0 t)\right),$$

$$\Omega_3 = \left(A_m' \cos(p_m t) + B_m' \sin(p_m t)\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right) + \left(A_0' \cos(p_0 t) + B_0' \sin(p_0 t)\right), \tag{47}$$

$$w = \left(A_m \cos(p_m t) + B_m \sin(p_m t)\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right),$$

где $A_m'', B_m'', A_0'', B_0'', A_m', B_m', A_0', B_0', A_m, B_m$ – постоянные, p_m, p_0 – собственные частоты свободных колебаний балки. Подставив (47) в систему уравнений (15)-(17), в результате, для свободных колебаний микрополярной балки получим однородные алгебраические уравнения относительно $A_m'', B_m'', A_0'', B_0'', A_m', B_m', A_0', B_0', A_m, B_m$. Поскольку нас интересует ненулевое решение, то потребуем, чтобы определители матриц, соответствующих алгебраическим системам уравнений, были равны нулю. Тогда для определения собственных частот p_m, p_0 колебаний микрополярной балки получим определенные алгебраические уравнения. Аналогичным образом поставленная задача о свободных колебаниях шарнирно-опертой микрополярной балки рассмотрим на основе модели без учёта поперечных сдвигов (20)-(22) и на основе упрощённой модели. Результаты численных вычислений для балки, имеющей следующие физические параметры, приведены в табл. 1, 2:

$$A_{77} = 4.6 \cdot 10^6\,Па;\; A_{88} = 4.8 \cdot 10^6\,Па; A_{78} = 0.4 \cdot 10^6\,Па;\; \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5.2 \cdot 10^6\,Па;\; B_{66} = 300H;$$

$$\rho = 1114\,кг/м^3;\; I = 5.31 \cdot 10^{-6}\,кг\,/\,м\,.$$

Таблица 1

Размеры балки ($м$)		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$							
$\frac{h}{a} = \frac{1}{40}$		Упрощенная модель микрополярной балки			Модель микрополярной балки с учетом поперечных сдвигов ((15)-(18))				
		$m = 1$		$m = 0$	$m = 1$			$m = 0$	
a	h	p_1^1	p_1^2	p_0	p_1^1	p_1^2	p_1^3	p_0^1	p_0^2
0.002	0.00005	15957.4	1884903	147595	15957.4	361294	1890194	136381	391659
0.01	0.00025	2979.74	403768	147595	2979.78	68435.1	427593	51133.4	208923
0.07	0.00175	156.329	157058	147595	157.446	7767.69	209652	7530.18	202669
0.5	0.0125	3.55881	147787	147595	4.48061	1058.78	202687	1054.86	202548

Таблица 2

Размеры балки $(м)$		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$						
$\frac{h}{a}=\frac{1}{40}$		Модель микрополярной балки без учета поперечных сдвигов ((20)-(22))			Классическая теория балки типа Тимошенко			Классическая теория балки Бернулли
		$m=1$		$m=0$	$m=1$		$m=0$	$m=1$
a	h	p_1^1	p_1^2	p_0	p_1^1	p_1^2	p_0	p_1
0.002	0.00005	21830.6	1890001	202545	772.075	262004	261179	773.717
0.01	0.00025	3866.36	426933	202545	154.415	52400.7	52235.8	154.743
0.07	0.00175	162.152	209541	202545	22.0593	7485.82	7462.26	22.1062
0.5	0.0125	4.49147	202685	202545	3.08829	1048.01	1044.72	3.09487

На основе проделанных численных экспериментов можем сделать следующие выводы:

1. По микрополярной теории упругих балок с независимыми полями перемещений и вращений получается дополнительный спектр свободных колебаний (это связано с тем, что в микрополярной теории имеется дополнительная степень свободы– свободное вращение).

2. У микрополярной балки имеется частота колебаний, которая не зависит от размеров балки (это свойство хорошо видно в упрощённой модели и в модели без учёта поперечных сдвигов, а в модели с учетом поперечных сдвигов это свойство имеет место, начиная с определенных размеров балки).

3.При данных значениях материальных констант (которые здесь выбраны гипотетически) для довольно малых размеров микрополярной балки низкие частоты довольно высокие по сравнению с соответствующей классической теорией.

4. В модели микрополярной балки без учёта поперечных сдвигов для малых размеров балки низкие частоты колебания резко отличаются от частот, полученных в модели микрополярной балки с учётом поперечных сдвигов и в упрощённой модели (в двух последних моделях эти частоты достаточно близки друг к другу). А для более массивных размеров балки низкие частоты колебания совпадают в моделях микрополярной балки без учёта поперечных сдвигов и с учётом поперечных сдвигов.

Рассмотренная задача о свободных колебаниях шарнирно-опертых микрополярных балок решена и на основе моделей (с учётом и без учёта поперечных сдвигов) стеснённого вращения. Результаты численных вычислений для балки, имеющей следующие физические параметры, приведены в табл. 3, 4:

$$A_{77}=302\cdot10^{6}\,Па;\ \ A_{88}=305\cdot10^{6}\,Па;\ A_{78}=-98\cdot10^{6}\,Па;\ \ \frac{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^{2}}{A_{22}}=5.2\cdot10^{6}\,Па;$$

$$B_{66}=6000H\ ;\ \ \rho=1114\,кг/м^{3};\ \ I=0.01кг/м\ .$$

Таблица 3

Размеры балки $(м)$		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$			
$\delta=\frac{h}{a}=\frac{1}{40}$		Упрощ. модель микроп. балки	Модель микрополярной балки с учетом поперечных сдвигов ((27)-(30))		
		$m=1$	$m=1$		$m=0$
a	h	p_1	p_1^1	p_1^2	p_0
0.2	0.005	91.3640	91.1050	14917.7	14861.9
0.3	0.0075	40.8129	40.7372	10572.9	10549.2
0.4	0.01	23.1045	23.0696	8117.73	8103.65
0.5	0.0125	14.9047	14.8846	6567.64	6557.81

Таблица 4

Размеры балки $(м)$		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$				
$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}$		Модель микроп. балки без учета поперечных сдвигов ((31)-(33))	Классическая теория балки типа Тимошенко			Классическая теория балки Бернулли
		$m=1$	$m=1$	$m=1$	$m=0$	$m=1$
a	h	p_1	p_1^1	p_1^2	p_0	p_1
0.2	0.005	91.2704	7.73677	16762.1	16743.9	7.73717
0.3	0.0075	40.7710	5.15785	11174.7	11162.7	5.15812
0.4	0.01	23.0808	3.86839	8381.03	8371.99	3.86859
0.5	0.0125	14.8894	3.09471	6704.83	6697.59	3.09487

Эта же задача решена также на основе моделей “с малой сдвиговой жёсткостью”. Результаты численных вычислений для балки, имеющей следующие физические параметры, приведены в табл. 5, 6:

$$A_{77} = 5.6 \cdot 10^6\, Па;\ A_{88} = 5.8 \cdot 10^6\, Па; A_{78} = 0.4 \cdot 10^6\, Па;\ \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5.2 \cdot 10^6\, Па;\ B_{66} = 6000 H$$

$$\rho = 590\, кг / м^3;\ I = 5.31 \cdot 10^{-6}\, кг / м .$$

Таблица 5

Размеры балки $(м)$		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$					
$\frac{h}{a} = \frac{1}{40}$		Упрощенная модель микрополярной балки		Модель микрополярной балки с учетом поперечных сдвигов ((35)-(42))			
		$m=1$		$m=1$			$m=0$
a	h	p_1^c	$p_1^м$	p_1^{1c}	p_1^{2c}	$p_1^м$	p_0^c
0.002	0.00005	33249.4	8403658	24296.0	547143	8403658	546637
0.003	0.000075	22166.3	5602439	16197.4	364762	5602439	364424
0.004	0.0001	16624.7	4201829	12148.0	273571	4201829	273318
0.006	0.00015	11083.1	2801219	8098.68	182381	2801219	182212

Таблица 6

Размеры балки $(м)$		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$					
$\frac{h}{a} = \frac{1}{40}$		Модель микроплярной балки без учета поперечных сдвигов ((43)-(45))		Классическая теория балки типа Тимошенко			Классическая теория балки Бернулли
		$m=1$		$m=1$		$m=0$	$m=1$
a	h	p_1^c	$p_1^м$	p_1^1	p_1^2	p_0	p_1
0.002	0.00005	33491.9	8403658	1061.28	394240	393138	1063.16
0.003	0.000075	22327.9	5602439	707.519	262827	262092	708.774
0.004	0.0001	16745.9	4201829	530.639	197120	196569	531.580
0.006	0.00015	11163.9	2801219	353.759	131413	131046	354.367

По приведённым данным табл. 3,4,5,6 можем, во-первых, судить, что при равных внешних условиях и геометрии микрополярный материал с точки зрения динамических характеристик (имеем в виду частоты собственных колебаний) резко отличается от классического упругого материала. Во-вторых, в этих таблицах сравниваются построенные модели (с учётом и без учёта поперечных сдвигов, а также упрощённая) в случае стеснённого вращения и “малой сдвиговой жесткости”.

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках **Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-**

технической деятельности, проведённого Государственным комитетом по науке МОН Республики Армении в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек//Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N2. С.84-95.
2. Altenbach H., Altenbach J., Eremeyev V. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography// Arch. Appl. Mech. Special Issue. 2009. Doi 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
3. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады РАН . 2011. Т.436. N2. С.195-198.
4. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Общая динамическая теория микрополярных тонких пластин со свободным вращением и свойства их свободных колебаний //Акустический журнал. 2011. Т. 57. N4.
5. Саркисян С.О. Математические модели микрополярных упругих тонких балок//Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. N2. С.121-128.
6. Маргарян Л.М. Динамическая задача изгиба микрополярных упругих ортотропных тонких балок //В сб.: "Актуальные проблемы механики сплошной среды". Ереван: Изд.-во НАН Армении, 2010. Т.2. С.13-17.
7. Iesen D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids//Archives of Mechanics. 1973. Vol. 5. N3. pp. 547-561.
8. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.

Сведения об авторах:

Маргарян Лилит Мкртычевна - аспирант Гюмрийского государственного педагогического института имени М. Налбандяна.
Адрес: Армения, г. Гюмри, ул. Мясникяна, дом 190.
E-mail: m.liloo@mail.ru. Тел: (094)054498.

Саркисян Самвел Оганесович - чл.-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат. анализа и дифференц. уравнений Гюмрийского государственного педагогического института имени М. Налбандяна.
Адрес: Армения, г. Гюмри, ул. Саят-Новы, дом 2/11.
E-mail: slusin@yahoo.com. Тел: (091)605715.

Поступила в редакцию 02.09.2011

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

УДК 539.3

THE LOCALIZED INSTABILITY OF THE ELASTIC PLATE-STRIP STREAMLINED BY SUPERSONIC GAS FLOW

Belubekyan M.V. , Martirosyan S.R.

Key words: the localized divergence instability, plate-strip, critical velocity, supersonic gas flow
Ключевые слова: локализованная дивергентная неустойчивость, пластина–полоса, критическая скорость, сверхзвуковой поток газа

The paper is devoted to the analysis of the divergence localized instability of the elastic plate–strip model in a supersonic gas flow. The critical velocity of the gas flow is found, which reduce to the divergence localized instability arising in the vicinity of free edge of a plate–strip.

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Локализованная неустойчивость упругой пластины–полосы, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа
В предлагаемой работе исследуется локализованная дивергентная неустойчивость, возникающая в окрестности свободного края полубесконечной пластины – полосы при обтекании её сверхзвуковым потоком газа.

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Առաձգական սալի տեղայնացված անկայունությունը գազի գերձայնային հոսանքում
Ներկայացված աշխատանքում ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում շրջհոսող առաձգական սալի դիվերգենտ անկայունությունը, որը առաջանում է սալի ազատ եզրի շրջակայքում:

The consideration of the problems of the thin elastic plates stability when of the plate behavior is connected with influence of a supersonic stream of gas flowing around it, has the important applied and theoretical value. The question on elastic stability inevitably arises at a design stage and designing of any flying machine for flight safety. The theoretical researches of these problems allow to reveal various kinds of loss the stability caused by character of deformations. In one cases the static deformations, and in others – the dynamic which result, accordingly, to the static loss of stability – a divergence instability and to the dynamic loss of stability – a flatter instability [1, 2] take place. In [3] the extensive literature devoted to research of the divergence and flatter instability were brought.

In early studies of vibrations and stability of the cantilever plate which is flowed around by a supersonic stream of gas, losses of stability of both kinds have been found out: the divergence and flatter [1, 4]. It has appeared that value of critical velocity of the stream, leading to divergence instability, is essential less values of critical velocity of the stream leading to flatter instability [1, 4].

As it is known [5], the wave possessing properties of the "Rayleigh" type waves can extend along free edge of the thin elastic semi-infinite plate-strip making bending vibrations. By analogy with the localized bending vibrations the effect of the localized instability of a semi-infinite plate-strip in the vicinity of the free edge compressed on semi-infinite to supported edges [6] is investigated. The following analogy – the localized divergence instability arising in the vicinity of free edge of a semi-infinite plate – strips at a flow its supersonic stream of gas which is investigated in offered work. It is shown that at a flow the localized instability arises a supersonic stream of gas along semi-infinite the supported edges of a semi-infinite plate – strips in a vicinity of its free edge. The value of critical velocity of a flowing around stream of gas is found, at which achievement the localized instability is observed. Thus value of critical velocity is less in plates-strips from materials with the large of the Poisson's ratio.

Note that critical velocity of divergence it is essential to a cantilever plate less of a flatter critical velocity [1]. It is supposed, as in case of a flow of a semi-infinite plate – strips a supersonic stream of the gas running along semi-infinite of supported edges, critical velocity of divergence will be less of a flatter critical velocity. Therefore, the problem of stability of a plate – strip, which are flowed around by a supersonic stream of gas, in static statement is of interest.

1. The Statement of the problem. We will consider a thin elastic semi-infinite plate – strip, which is streamlined by supersonic gas flow. Let plate–strip occupies the $0 \le x \prec \infty$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$ area in the Cartesian coordinate system $Oxyz$. The Cartesian coordinate system $Oxyz$ is chosen so that the axis Ox and Oy lie in the plane of the unperturbed plate – strip. The plate–strip on a side is flowed by supersonic gas flow with undisturbed velocity V in the Ox direction.

Let the plate-strip along the edge $x = 0$ is free and the semi–infinite edges $y = 0$ and $y = b$ are supported.

Under the influence of any reasons not indignant equilibrium state of a plate-strip can be broken and the plate-strip will start to make bending vibrations with a $w = w(x, y, t)$ deflection. The deflection $w = w(x, y, t)$ will cause superfluous pressure Δp upon the top streamline surface of a plate-strip of from outside flowing around stream of gas which is considered by the approached formula of "the piston theory" [7]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, ρ_0 – is density of undisturbed gas flow, a_0 – is the sound velocity in undisturbed gaseous medium.

The small bending vibrations of points of a median surface of a thin elastic plate–strip under the assumption of Kirchhoff's hypothesis and "the piston theory" validity satisfy to the equation [1, 4]

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + a_0 \rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

And to corresponding boundary conditions

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \quad x = 0; \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \text{ and } y = b. \tag{1.3}$$

Here ρ is the density of the plate–strip material; *D* is the stiffness of bending; ν is the Poisson's ratio.

The problem of stability of the supported plate–strip, streamlined by supersonic gas flow, is to define such a least value of the flow velocity V_{cr}, so that if $V < V_{cr}$ the perturbed motion will be stable, and if $V > V_{cr}$ – unstable.

With a view of simplification we will suppose that the distributed mass of a plate-strip and the resistance forces are negligible. Then the initial equation (1.1) rewrites in the following form:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+a_0\rho_0 V\frac{\partial w}{\partial x}=0. \tag{1.4}$$

It is required to find the solution of the equation (1.4) satisfying to boundary conditions (1.2), (1.3) and to an attenuation condition on infinity [5,6]

$$\lim_{x\to\infty} w=0 \tag{1.5}$$

The common solution of the equation (1.4) satisfying to boundary conditions (1.2) and (1.3) is represented in a form

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\lambda_n p x)\cdot\sin(\lambda_n y),\ \ \lambda_n=\pi n b^{-1}. \tag{1.6}$$

Substituting expression (1.6) for w in the equation (1.4), the following characteristic equation is obtained form

$$(p^2-1)^2+\alpha_n^3 p=0,\ \alpha_n^3=a_0\rho_0 V D^{-1}\lambda_n^{-3},\ \alpha_n^3>0. \tag{1.7}$$

It is obvious that the characteristic equation (1.7) has two negative real roots $p_1<0$, $p_2<0$, and two complex $p_{3,4}=\alpha\pm i\beta$ roots with a positive real part $\alpha>0$. It means that for a semi-infinite plate-strip with free edge $x=0$ and the supported semi-infinite edges $y=0$ and $y=b$ the solution (1.6), satisfying to a condition (1.5), exists, and it is possible to present it in a form

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}(C_{n1}\exp(\lambda_n p_1 x)+C_{n2}\exp(\lambda_n p_2 x))\cdot\sin(\lambda_n y),\ \ \lambda_n=\pi n b^{-1}. \tag{1.8}$$

C_{n1}, C_{n2} are arbitrary constants: ($C_{n1}^2+C_{n2}^2\neq 0$).

Such approach is similar to a method of the solution of the surface waves, of the localized bending vibrations and of the localized instability [5, 6].

Note that in the absence of a flow $\alpha_n^3=0$ ($V=0$) from a parity (1.7) obviously follows that

$$p_1=p_2=-1,\quad p_3=p_4=1,\ \ \alpha_n^3=0. \tag{1.9}$$

2. The solution in the form of expression (1.8) should satisfy to the boundary conditions (1.2) corresponding to absence at $x=0$ of the bending moment and the generalized crosscutting force.

Substituting expression (1.8) in boundary conditions (1.2), the following homogeneous system of the algebraic equations with respect to the arbitrary constants C_{n1} and C_{n2} ($C_{n1}^2+C_{n2}^2\neq 0$) is obtained:

$$\begin{cases}(p_1^2-\nu)C_{n1}+(p_2^2-\nu)C_{n2}=0\\ p_1(p_1^2-2+\nu)C_{n1}+p_2(p_2^2-2+\nu)C_{n2}=0\end{cases} \tag{2.1}$$

Equating zero a determinant of system of the equations (2.1), we will receive the dispersive equation

$$K(p_1,p_2)=(p_2-p_1)[(p_1p_2+1)^2-\nu(p_1+p_2)^2-(\nu-1)^2]=0. \tag{2.2}$$

Here p_1 and p_2 are the negative real roots ($p_1<0$, $p_2<0$) of the equation (1.7).

According to a condition (1.9), the equation (2.2) at $\alpha_n^3 > 0$ identical to the equation

$$K_1(p_1, p_2) = (p_1 p_2 + 1)^2 - \nu(p_1 + p_2)^2 - (\nu - 1)^2 = 0 . \quad (2.3)$$

It is easy to show that roots of the characteristic equation (1.7) are defined by expressions

$$p_{1,2} = -\frac{A}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2}{16} - q_1 + \frac{\alpha_n^3}{A}} , \; p_1 < 0, \;\; p_2 < 0 ; \quad (2.4)$$

$$p_{3,4} = \frac{A}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2}{16} - q_1 - \frac{\alpha_n^3}{A}} , \qquad p_{3,4} = \alpha \pm i\beta, \; \alpha > 0 .$$

Here

$$A = 2\sqrt{2(1+q_1)} \; , \; q_1 > 1 ; \quad (2.5)$$

q_1 is an unique real root of the cubic equation

$$q^3 + q^2 - q - 1 - \frac{\alpha_n^6}{8} = 0 . \quad (2.6)$$

Really, according to known algorithm of a finding of the solution, offered by Ferrari [8] the characteristic equation (1.7), being the algebraic equation of the fourth degree to equivalently following two quadratics equation:

$$p^2 + 0.5Ap + (q_1 - \alpha_n^3 A^{-1}) = 0 , \quad (2.7)$$

$$p^2 - 0.5Ap + (q_1 + \alpha_n^3 A^{-1}) = 0 , \quad (2.8)$$

Here A it is defined by expression (2.5), and q_1 is the real root of the cubic equation (2.6). The equation (2.6) we will copy in a kind

$$8 \cdot (1+q)^2 (q-1) = \alpha_n^6 . \; (2.9)$$

From expression (2.9) and positively of its discriminate $Q = \alpha_n^6 (\frac{1}{27} + \frac{\alpha_n^6}{256})$ follows that under a condition $(q-1) > 0$ the cubic equation (2.6) has one real root q_1 ($q_1 > 1$) and two complex roots. And under a condition $(q-1) < 0$ the equation (2.6) has no solution. It means that the characteristic equation (1.7) has two negative real roots p_1, p_2 and two complex roots $p_{3,4} = \alpha \pm i\beta$ with the positive real part, satisfying to quadratics (2.7), (2.8) accordingly.

Considering the parity (2.9) from the equation (2.7) it we have

$$p_1 + p_2 = -\sqrt{2(1+q_1)} \;\; p_1 \cdot p_2 = q_1 - \sqrt{q_1^2 - 1} , \; q_1 > 1 . \quad (2.10)$$

Substituting expressions (2.10) in the parity (2.3) we receive the equation

$$L(q_1) = 2(q_1 + 1) \cdot (q_1 - \sqrt{q_1^2 - 1} - \nu) - (1 - \nu)^2 = 0 , \quad (2.11)$$

whence the values q_1 corresponding to various values of the Poisson's ratio ν are found easily. Further, substituting values q_1 in a parity (2.9), for various values of the Poisson's ratio ν, according to a designation (1.7), we receive the corresponding values of critical velocity V_{cr} of a stream. At values $V \geq V_{cr}$ in a vicinity of free edge $x = 0$ of a plate-strip the phenomenon of the localized instability is observed.

In table 1 for several values of the Poisson's ratio $\nu \in [0, 0.5]$ corresponding values of critical velocity V_{cr} of a stream are bringing.

Table 1

ν	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$V_{cr} \cdot (a_0 \rho_0 b^3)(\pi^3 n^3 D)^{-1}$	80.0	10.6	5.6	3.9	2.5

From the data bringing in table 1, it is visible that value of critical velocity V_{cr} of a stream is less in plates-strips from materials with the large of the Poisson's ratio ν.

Note that in stability early studies of the cantilever plate–strip ($0 \le x \le a$, $-\infty \le y \le \infty$) in the assumption of movement in supersonic gas flow in a direction from rigid edge $x = 0$ to the free edge $x = a$, losses of stability of a divergence kind. Here the value of the critical velocity of flow, leading to divergence instability, reaches the minimum value $V_{cr.div.} \approx 6.33 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$ [4]. Later the approached values of critical velocity of divergence and flatter ($V_{cr.div.} \approx 6.33 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, V_{cr.fl.} \approx 122.7 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$) of the console plate-strip streamlined of the supersonic gas flow in a direction from free edge $x = 0$ to rigid fixing edge $x = a$ [1] have been received. Thus, unlike critical velocity of the localized instability, the critical velocity of divergence and flatter do not depend on the Poisson's ratio ν.

3. Let the plate-strip edge $x = 0$ is fasteners by the next ways: rigid fixing, rigid sliding contact and hinge joint. We investigate possibility of occurrence of the phenomenon of the localized instability in the vicinity of the edge $x = 0$ at these ways of its fastening.

It is easy to show that in cases in which the edge $x = 0$ rigidly fixing or has rigid sliding contact, or has hinge joint, in a vicinity of the fastened edge $x = 0$ of a streamline plate-strip the phenomenon of the localized instability is not observed.

Substituting the common solution of the equation (1.4) in the form of expression (1.8) in boundary conditions

$$w = 0 \,, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \,, x = 0 \,; \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \,, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \,, x = 0 \,; w = 0 \,, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \,, x = 0 \,; \qquad (3.1)$$

fastenings corresponding to these ways accordingly, we receive homogeneous systems of the algebraic equations concerning arbitrary constants C_{n1}, C_{n2} ($C_{n1}^2 + C_{n2}^2 \ne 0$). Equating to zero of determinants of these systems, we receive accordingly the dispersive equations described by following parities:

$$p_2 - p_1 = 0 \,, \; p_1 p_2 (p_2^2 - p_1^2) = 0 \,, \; p_2^2 - p_1^2 = 0 \,. \qquad (3.2)$$

According to a condition (1.9) from this it follows that the systems of the equations corresponding to these ways of fastening, have only the trivial solution: $C_{n1} = C_{n2} = 0$. Hence, at the above-stated ways of supporting of an edge $x = 0$ of a plate-strip the phenomenon of the localized instability in its vicinity is not observed.

Thus, at a flow the supersonic stream of gas along of a semi-infinite plate-strip the phenomenon of the localized instability in the vicinity of the free edge $x = 0$ is observed. And in cases in which the edge $x = 0$ is supported in the various ways, this phenomenon is not observed.

It is easy to show that in the case when velocity directed from rigidly fixed edge to the free edge the phenomenon of divergence instability is not observed.

The work was done under the grant “PIRSES–2010–269160”.

REFERENCES

1. Bolotin V.V. Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability.– N.Y. Pergamon Press, 1963. 324 p.
2. Panovko J.G., Gubanova I.I. The Stability and the Vibration of Elastic Systems.– M.: Nauka, 1987. 352 p. (in Russian)
3. Algazin S.D., Kijko I.A. Flatter of Plates and Shells. – M.: Nauka, 2006. 247p. (in Russian)
4. Movchan A.A. About Vibrations of a Moving Plate in Gas // Izv. AN the USSR. PMM. 1956. T.20. Pp. 211-212 (in Russian)
5. Konenkov Y.K. On “Rayleigh” Type the Bending Waves /Akust. zh. 1960. V.6. (1). Pp. 124-126 (in Russian)
6. Belubekyan M.V. The Problems of Plates Localized Instability // Proceedings of International Conference “Optimal Control, Stability and Durability Problems of Mechanical Systems”. Yerevan. 1997. Pp. 95-99 (in Russian)
7. Ilyushin A.A. Law of Flat Sections at the Big Supersonic Velocity // PMM. 1956. V.20. (6). Pp. 733-755 (in Russian)
8. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook. – N.Y. Mc Graw- Hill Book Company. 1968. 832 p.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 30.09.2011

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ИЗГИБЕ

Белубекян Э.В., Погосян А.Г., Аветисян Г.Р.

Ключевые слова: оптимизация, композиционный материал, нагрузка, изгиб, пластинка.
Keywords: optimization, composite material, load, bending, plate.

Բելուբեկյան Է.Վ., Պողոսյան Ա.Գ., Ավետիսյան Հ.Ռ.
Կտոր առ կտոր հաստատուն հաստության ուղղանկյուն սալի լավարկումը ծռման դեպքում

Դիտարկվում են կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված կտոր առ կտոր հաստատուն հաստության ուղղանկյուն սալի ծռումը, որն ազատ հենված է երկու հանդիպակաց կողմերով, իսկ ճակատային կողմերը ազատ են, հոդակապորեն կամ կոշտ ամրացված: Որոշվում են սալի երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի լավարկային արժեքները, որոնք նրա հաստատուն կշռի և ընդհանուր չափերի դեպքում ապահովում են ճկվածքի փոքրագույն արժեքը:

Belubekyan E.V., Poghosyan A.G., Avetisyan H.R.
Optimization of a rectangular plate piecewise constant thickness when bending, prepared from the composite material

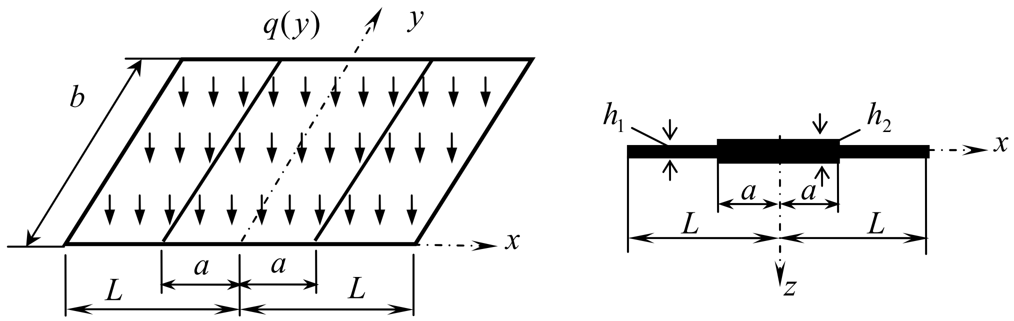
The bending of the rectangular plate of the piecewise constant thickness, prepared from the composite material,rectangular plate, hinge supported on two opposite longitudinal sides and free, hinge or clamped supported on the end edges are examined.

The optimum values of the geometric and physical parameters of the plates ensuring the minimum value of the maximum deflection with the fixed weight, equal to the weight of the plate of constant thickness, and given the overall dimensions are determined.

Рассматривается изгиб прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала, шарнирно опертой по двум противоположным продольным сторонам и свободной, свободно опёртой или заделанной по торцевым краям, под действием поперечной нагрузки.

Определяются оптимальные значения геометрических и физических параметров пластинки, обеспечивающие минимальное значение прогиба при постоянном весе, равном весу пластинки постоянной толщины, и её заданных габаритных размерах.

Рассматривается изгиб прямоугольной пластинки размерами $2L \times b$, шарнирно опёртой по сторонам $y=0$ и $y=b$ и свободной, свободно опёртой или заделанной по краям $x=\pm L$, под действием поперечной нагрузки $q(y)$. Предполагается, что пластинка изготовлена из композиционного материала (КМ) путём поочерёдной укладки его монослоев под углом $\pm\varphi$ к оси x пластинки, причем на участке $-a \le x \le a$ пластинка имеет толщину h_2, а на участках $-L \le x \le -a$ и $a \le x \le L-$ толщину h_1 (фиг.1).



Фиг. 1. Расчётная схема пластинки

Ставится задача определения оптимальных значений параметров a, h_1, h_2, φ, обеспечивающих минимальное значение наибольшого прогиба при её постоянном весе, равном весу пластинки постоянной толщины h_0, и заданных габаритных размерах $\xi = 2L/b$.

Постоянству веса конструкции соответствует условие

$$L(h_0 - h_1) = a(h_2 - h_1) \tag{1}$$

Задача изгиба решается для каждой из областей пластинки $(p = 1,\ 2)$, соответствующих толщинам h_1 и h_2, с удовлетворением условий сопряжения на линии их раздела. При этом, ввиду симметрии, рассматривается половина пластинки ($x \ge 0$).

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать её ортотропной, для которой уравнения изгиба записываются в виде:

$$D_{11}^{(p)} \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} + 2\left(D_{12}^{(p)} + 2D_{66}^{(p)}\right) \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^{(p)} \frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4} = q(y) \quad (p = 1,2), \tag{2}$$

где w_p – прогибы, $D_{ik}^{(p)}$ – жёсткости составляющих участков пластинки $(p = 1,2)$.

$$D_{ik}^{(p)} = \frac{B_{ik} h_p^3}{12}, \qquad (i,k = 1,2,6), \quad p = 1,2,$$

B_{ik} – упругие характеристики КМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через его характеристики в главных физических направлениях B_{ik}^0 по известным формулам поворота [1].

Граничные условия запишутся в виде:

– шарнирного опирания

$$w_p = 0, \qquad \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} = 0 \quad (p = 1,2) \ \text{при} \quad y = 0,\ y = b, \tag{3}$$

– симметрии

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при} \ \ x = 0, \tag{4}$$

– свободного края (в случае, когда край $x = L$ свободен)

$$D_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + D_{12}^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0,$$

$$D_{11}^{(1)}\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}+\left(D_{12}^{(1)}+4D_{66}^{(1)}\right)\frac{\partial^3 w_1}{\partial x\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad x=L, \tag{5}$$

– свободного опирания (в случае когда край $x=L$ свободно оперт)

$$w_1=0, \qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=0 \qquad \text{при} \quad x=L, \tag{6}$$

– жёсткой заделки (в случае жёсткой заделки края $x=L$)

$$w_1=0, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad x=L, \tag{7}$$

– сопряжения

$$w_1=w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x}=\frac{\partial w_2}{\partial x},$$

$$D_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+D_{12}^{(1)}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}=D_{11}^{(2)}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+D_{12}^{(2)}\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}, \tag{8}$$

$$D_{11}^{(1)}\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}+\left(D_{12}^{(1)}+4D_{66}^{(1)}\right)\frac{\partial^3 w_1}{\partial x\partial y^2}=D_{11}^{(2)}\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}+\left(D_{12}^{(2)}+4D_{66}^{(2)}\right)\frac{\partial^3 w_2}{\partial x\partial y^2} \quad \text{при} \quad x=a.$$

Решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3), представляется в виде:

$$w_p\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{\infty} w_k^{(p)}\left(x\right)\sin\lambda_k y, \ \lambda_k=\frac{\pi k}{b}. \tag{9}$$

Разлагая функцию нагрузки в ряд:

$$q\left(y\right)=\sum_{1}^{\infty} q_k\sin\lambda_k y, \ q_k=\frac{2}{b}\int_0^b q\left(y\right)\sin\lambda_k y dy, \tag{10}$$

для функции $w_k^{(p)}$, в зависимости от значения $D^{(p)}=\left(D_3^{(p)}\right)^2-D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}$, где $D_3^{(p)}=D_{12}^{(p)}+2D_{66}^{(p)}$, получаются следующие выражения:

– при $D^{(p)}<0$

$$w_k^{(p)}\left(x\right)=\frac{q_k}{D_k^{(p)}\lambda_k^4}+C_{1k}^{(p)}\mathrm{ch}\alpha_{1k}^{(p)}\lambda_k x\cos\alpha_{2k}^{(p)}\lambda_k x+C_{2k}^{(p)}\mathrm{ch}\alpha_{1k}^{(p)}\lambda_k x\sin\alpha_{2k}^{(p)}\lambda_k x+$$
$$+C_{3k}^{(p)}\mathrm{sh}\alpha_{1k}^{(p)}\lambda_k x\cos\alpha_{2k}^{(p)}\lambda_k x+C_{4k}^{(p)}\mathrm{sh}\alpha_{1k}^{(p)}\lambda_k x\sin\alpha_{2k}^{(p)}\lambda_k x, \tag{11}$$

где

$$\alpha_{1\kappa}^{(p)}=\sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}}+D_3^{(p)}}{2D_{11}^{(p)}}}, \qquad \alpha_{2\kappa}^{(p)}=\sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}}-D_3^{(p)}}{2D_{11}^{(p)}}},.$$

– при $D^{(p)}=0$

$$w_k^{(p)}\left(x\right)=\frac{q_k}{D_k^{(p)}\lambda_k^4}+C_{1k}^{(p)}\mathrm{ch}\alpha_0^{(p)}\lambda_k x+C_{2k}^{(p)}x\mathrm{ch}\alpha_0^{(p)}\lambda_k x+$$
$$+C_{3k}^{(p)}\mathrm{sh}\alpha_0^{(p)}\lambda_k x+C_{4k}^{(p)}x\mathrm{sh}\alpha_0^{(p)}\lambda_k x, \tag{12}$$

где

$$\alpha_0^{(p)} = \sqrt{\frac{D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}},$$

– при $D^{(p)} > 0$

$$w_k^{(p)}(x) = \frac{q_k}{D_k^{(p)}\lambda_k^4} + C_{1k}^{(p)}\mathrm{ch}\mu_{1k}^{(p)}\lambda_m x + C_{2k}^{(p)}\mathrm{ch}\mu_{2m}^{(p)}\lambda_m x + \\ + C_{3k}^{(p)}\mathrm{sh}\mu_{1k}^{(p)}\lambda_k x + C_{4k}^{(p)}\mathrm{sh}\mu_{2k}^{(p)}\lambda_k x, \quad (13)$$

где

$$\mu_{1k}^{(p)} = \sqrt{\frac{D_3^{(p)} + \sqrt{\left(D_3^{(p)}\right)^2 - D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}}}{D_{11}^{(p)}}}, \quad \mu_{2k}^{(p)} = \sqrt{\frac{D_3^{(p)} - \sqrt{\left(D_3^{(p)}\right)^2 - D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}}}{D_{11}^{(p)}}}.$$

Постоянные коэффициенты $C_{im}^{(p)}$ $(i = 1,2,3,4)$ определяются из удовлетворения соответствующим граничным условиям: (4), (5) и (8) – для свободного края пластинки, (4), (6) и (8) – для свободно опертого края и (4), (7) и (8) – для заделанного края.

После определения коэффициентов $C_{im}^{(p)}$ $(i = 1,2,3,4,\ p = 1,2)$ значения прогибов определяются по формуле (9).

Поставленная задача оптимизации приводится к определению параметров a, h_1, h_2, φ, при которых наибольшие прогибы, определяемое формулой (9), при неизменном весе конструкции достигают наименьшего значения.

Определение оптимальных параметров конструкции сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти

$$\min_x \max_p w_p, \quad \bar{x} = \{a, h_1, h_2, \varphi\}, \quad (p = 1,2), \quad (14)$$

при ограничениях:

$$h_2 = \frac{L}{a}(h_0 - h_1) + h_1, \quad (15)$$

$$0.01\delta_1 \le h_1 \le 0.2\delta_1, \quad 0.01\delta_2 \le h_2 \le 0.2\delta_2. \quad (16)$$

Ограничение (15) следует из условия постоянства веса пластинки (1), а ограничения в виде неравенств (16) обусловлены пределами применимости классической теории пластин. Здесь принимается: $\delta_1 = L - a$ при $L - a \le b$, $\delta_1 = b$ при $L - a \ge b$, $\delta_2 = 2a$ при $2a \le b$, $\delta_2 = b$ при $2a \ge b$.

Задача решается методом Недлера-Мида [2] в сочетании с методом прямого поиска.

Числовые расчёты произведены для случаев свободного, шарнирно опертого и заделанного края $x = L$ пластинки, толщиной $\bar{h}_0 = h_0 / b = 0.02$, под действием нагрузки $q(y) = q_0 = \mathrm{const}$ при различных значениях ξ.

В качестве материала принят КМ со следующими характеристиками:

$\overline{B}^0_{11} = 1;$ $\overline{B}^0_{22} = B^0_{22} / B^0_{11} = 0.6164;$ $\overline{B}^0_{12} = B^0_{12} / B^0_{11} = 0.12;$
$\overline{B}^0_{66} = B^0_{66} / B^0_{11} = 0.1572;$ $G_{23} / G_{13} = 1;$ $E_1 / B^0_{11} = 0.9875;$ $G_{23} / B^0_{11} = 0.1572.$

Для случая свободного края $x = L$ ($\overline{x} = x/2L = 1/2$) пластинки вычислены оптимальные значения параметров $\overline{a} = a/2L$, $\overline{h}_1 = h_1/b$, $\overline{h}_2 = h_2/b$, φ, обеспечивающие наименьшее значение наибольшего прогиба $\max\limits_p \overline{w}_p = w_p \dfrac{D_0}{q_k b^4}$, $(p = 1,2)$ пластинки, где $D_0 = \dfrac{B^0_{11} h^3_0}{12}$, и соответствующие наибольшие прогибы на каждом из ее участков $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$, которые получаются в середине ($x = 0$) и на краю пластинки ($x = L$). Полученные результаты приведены в табл.1. Там же, для сравнения, приведены значения приведённых прогибов $\overline{w}_0$, которые получаются при $\varphi = 90^\circ$ в середине и на краях для равной по весу пластинки постоянной толщины h_0.

В табл. 2 приведены оптимальные значения параметров пластинки для случая свободно опертого края $x = L$ пластинки, а также наибольшие значения прогибов $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$ на каждом из участков и соответствующие им координаты $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$. Для сравнения приведены значения прогибов $\overline{w}_0$ и углов укладки φ_0 монослоев для сплошной пластинки, которые получаются в середине пластинки.

Аналогичные расчёты произведены для случая заделанного края. Полученные результаты приведены в табл. 3.

Таблица 1

Оптимальные параметры пластинки для случая свободного края

ξ	$\overline{a}$	$\overline{h}_1$	$\overline{h}_2$	φ	$\overline{w}_2 \cdot 10^2$	$\overline{w}_1 \cdot 10^2$	$\overline{w}^0_{\overline{x}=0} \cdot 10^2$	$\overline{w}^0_{\overline{x}=1/2} \cdot 10^2$
0.5	0.2145	0.0275	0.01002	90°	0.9205	0.8898	1.3078	1.3692
0.75	0.278	0.0325	0.01002	90°	0.9088	0.7302	1.2903	1.3953
1.0	0.328	0.035	0.01236	90°	1.1862	0.7493	1.2794	1.4138
1.5	0.416	0.022	0.01959	90°	1.3177	1.3173	1.2770	1.4289
2.0	0.445	0.022	0.01975	90°	1.3257	1.3175	1.2853	1.4313
2.5	0.448	0.022	0.0198	90°	1.3273	1.3269	1.2933	1.4313
3.0	0.458	0.0215	0.01986	90°	1.3264	1.3266	1.2982	1.4312
5.0	0.457	0.021	0.01991	90°	1.3209	1.3206	1.3022	1.4312

Таблица 2

Оптимальные параметры пластинки для случая свободно опертого края

ξ	$\bar{a}$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	φ	$\bar{x}_2$	$\bar{w}_2 \cdot 10^2$	$\bar{x}_1$	$\bar{w}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w}^0 \cdot 10^2$	φ_0
0.5	0.363	0.013	0.0229	0°	0	0.0632	0.364	0.03190	0.07738	0°
0.75	0.428	0.011	0.0216	45°	0	0.2444	0.339	0.07174	0.26338	45°
1.0	0.123	0.011	0.0491	90°	0.123	0.2478	0.274	0.29940	0.50050	45°
1.5	0.079	0.015	0.0469	90°	0.079	0.3759	0.267	0.53129	0.97337	55°
2.0	0.056	0.017	0.0440	90°	0.056	0.5059	0.265	0.82319	1.23813	90°
2.5	0.039	0.019	0.0379	90°	0.039	0.7321	0.246	1.06270	1.29815	90°
3.0	0.030	0.019	0.0357	90°	0.030	0.8226	0.245	1.20790	1.31217	90°
5.0	0	0.020	0.0200	90°	0	1.30737	0	1.30737	1.30737	90°

Таблица 3

Оптимальные параметры пластинки для случая заделанного края

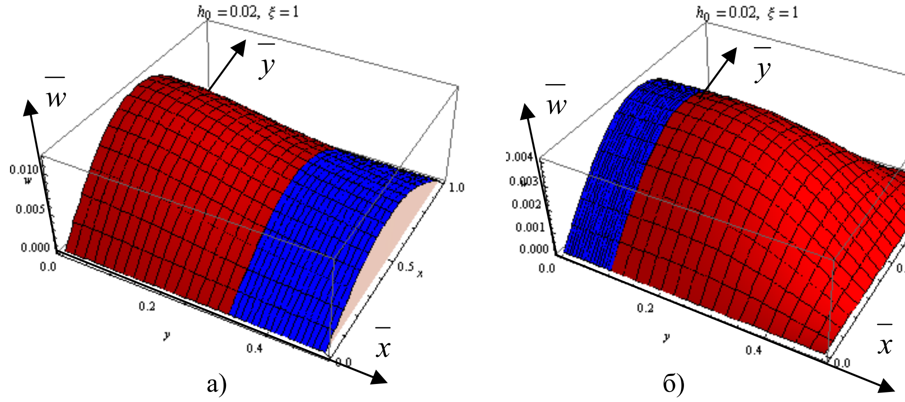
ξ	$\bar{a}$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	φ	$\bar{x}_2$	$\bar{w}_2 \cdot 10^2$	$\bar{x}_1$	$\bar{w}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w}^0 \cdot 10^2$	φ_0
0.5	0.245	0.0255	0.0143	0°	0	0.01433	0.25	0.0068	0.01671	0°
0.75	0.317	0.0275	0.0157	0°	0	0.06702	0.32	0.0157	0.08452	0°
1.0	0.125	0.0100	0.0500	90°	0.13	0.19210	0.220	0.2028	0.24063	0°
1.5	0.084	0.0140	0.0499	90°	0.08	0.26556	0.250	0.3502	0.70729	45°
2.0	0.059	0.0165	0.0464	90°	0.06	0.39689	0.230	0.5964	1.10027	90°
2.5	0.046	0.0175	0.0449	90°	0.05	0.47466	0.230	0.8608	1.24331	90°
3.0	0.034	0.0185	0.0406	90°	0.03	0.63010	0.230	1.0703	1.29517	90°
5.0	0	0.0200	0.0200	90°	0	1.3059	0	1.3059	1.30590	90°

Как следует из табл.1, для случая свободного края оптимальным является проект, где в средней части толщина пластинки меньше, чем по краям ($\bar{h}_2 < \bar{h}_1$). При этом, по сравнению с пластинкой постоянной толщины при $\xi = 0.5$ прогиб уменьшается почти на 34% , а при $\xi = 5$ – на 8%.

В случае свободно опертого края $x = L$ пластинки (табл. 2), в средней части пластинка имеет большую толщину, чем по краям ($\bar{h}_2 > \bar{h}_1$), а наибольшее уменьшение прогибов по сравнению с пластинкой постоянной толщины ($\xi = 1$) составляет 40%, при увеличении длины пластинки значения прогибов приближаются к значениям, полученным для пластинки постоянной толщины, а при $\xi = 5$ они совпадают.

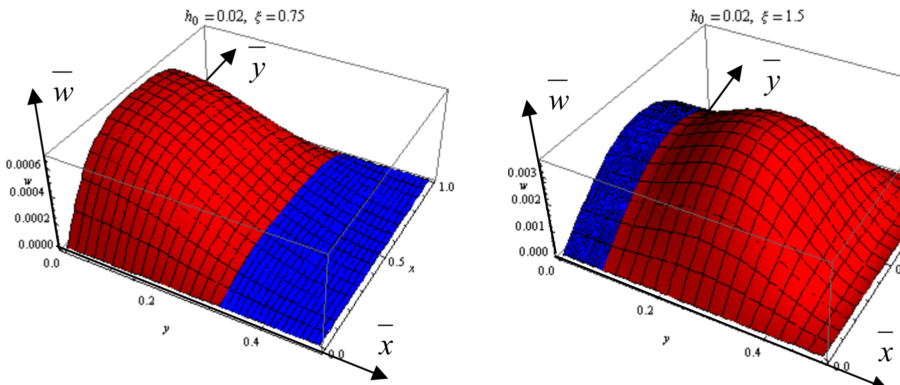
В случае заделанного края $x = L$ пластинки (табл. 3) получается, что при $\xi \geq 1$ в средней части пластинка имеет большую толщину, чем по краям ($\bar{h}_2 > \bar{h}_1$), а при $\xi < 1$, $\bar{h}_2 < \bar{h}_1$. Наибольшее уменьшение прогибов по сравнению с пластинкой постоянной толщины получается при $\xi = 1.5$ и составляет 50%, а при увеличении длины пластинки значения прогибов приближаются к значениям, полученным для пластинки постоянной толщины.

На фиг.1, 2 для некоторых значений параметров $\bar{h}_0$ и ξ пластинки приведены эпюры прогибов для различных случаев закрепления её краев.



а) б)

Фиг.1. Эпюры прогибов пластинки: а – в случае свободного края $x = L$,
б – в случае свободно опёртого края $x = L$



а) б)

Фиг. 2. Эпюры прогибов пластинки в случае заделанного края $x = L$,
а – при $\xi = 0,75$, б – при $\xi = 1,5$

Из приведённых эпюр также видно, что в случае свободного края $x = L$ пластинки, толщина пластинки в средней её части получается меньше, чем по краям (фиг.1,а), а в случае свободно опёртого края (фиг.1,б) толщина пластинки больше в её средней части.

В случае заделанного края $x = L$ пластинки (фиг.2) в зависимости от значения параметра ξ, пластинка может иметь большую толщину как в средней части ($\xi \le 1$), так и по краям ($\xi > 1$).

Следует отметить, что, как видно из приведённых таблиц, при увеличении длины пластинки (параметра ξ) оптимальный проект приближается к случаю пластинки постоянной толщины, а условия закрепления её торцевых краев практически не влияют на жёсткость пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 532с.

Сведения об авторах:

Белубекян Эрнест Вагаршакович – доктор технических наук, зав.кафедрой сопротивления материалов ЕГУАС, тел.: (091) 43 11 94,
e-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Погосян Аревшат Гургенович – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры АЯП ЕГИУА, тел.: (099) 66 23 35,
e-mail: roba@seua.am

Аветисян Грайр Робертович – зав. лабораторией каф. АЯП ЕГИУА, тел.: 34 87 12,
e-mail: roba@seua.am

Поступила в редакцию 18.11.2011

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

УДК 593.3

К ВОПРОСУ ПОЛЗУЧЕСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

Симонян А.М., Саноян Ю.Г.

Ключевые слова: ползучесть, поликристалл, скольжение дислокаций, анизотропия, сложное напряжённое состояние.

Key words: creep, polycrystal, slip of dislocation, anisotropy, complex stress state.

Ա. Մ. Սիմոնյան , Յու. Գ. Սանոյան
Անիզոտրոպ պոլիբյուրեղների սողքի վերաբերյալ

Դիտարկված է անիզոտռոպ պոլիբյուրեղների ռեոլոգիական հատկություններ բարդ լարվածային վիճակի դեպքում դիսլոկացիաների սահքի կոնցեպցիայի հիման վրա. Ընդունված է, որ պոլիբյուրեղների անիզոտրպիան տեղի է ունենում սահքի համակարգերի ուղղությունների անհավասարաչափ բաշխման հետևանքով, որպես միաբյուրեղային հատիկների օրիետացիայի արդյունք:

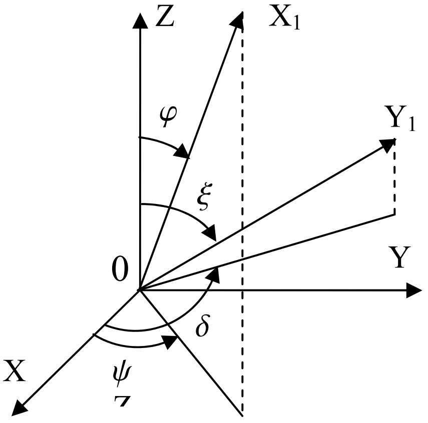
Simonyan A. M., Sanoyan Ju. G.
On the question of creep of anisotropic polycrystals.

On the base of dislocation slip conception the rheological behaviour of anisotropic polycrystals at complex stress state is considered. It is assumed that the anisotropy of polycrystals takes the place as a result of uneven distribution of slip system directions because of uneven distribution of single crystal grain orientations.

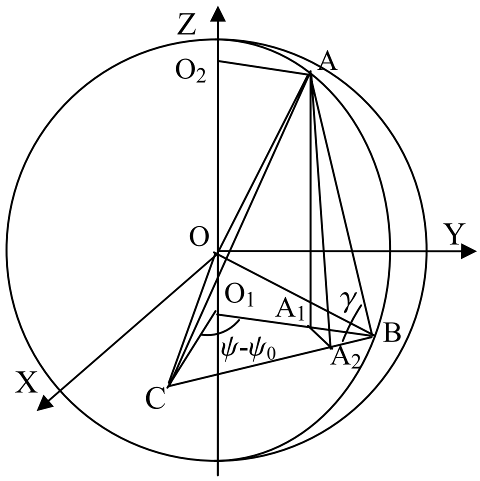
На основе концепции скольжения дислокаций рассматривается реологическое поведение анизотропных поликристаллов при сложном напряжённом состоянии. Принимается, что анизотропия поликристаллов достигается благодаря неравномерному распределению направлений систем скольжения как результат неравномерного распределения ориентаций монокристаллических зёрен.

Как известно, поликристаллы состоят из множества монокристаллических зерен хаотической ориентации, что предопределяет их изотропию. При термомеханической обработке, связанной с большими пластическими деформациями (вытяжка, прокатка и т.д.) обнаруживается неравномерное распределение ориентаций монокристаллических зерен, приводящее к анизотропии поликристаллов [1–3]. В ряде работ поликристаллы представляются в виде агрегатов, состоящих из монокристаллических элементов правильной формы. Например, в работе [4] зерна представляются в виде правильных шестиугольников, в работе [5]–в виде идентичных кубических блоков, каждый из которых состоит из 64 кубических кристаллов различной ориентации, в работе [6]–в виде 27 кубиков с различной ориентацией. Вопросы использования микроструктурных моделей для описания деформационного поведения элементов и их усреднения рассматривались также в работах [7–10]. Введение потенциала ползучести [11] для описания деформаций при сложном напряженном состоянии, как показано в работах [12], зачастую, неприемлемо.

В работе [13] на базе концепции скольжения дислокаций [14,15] рассматривается реологическое поведение изотропных поликристаллов при сложном напряженном состоянии, при этом принимается, что два взаимно перпендикулярных вектора, определяющие направления скольжения, распределены равномерно по направлениям, что предопределяет анизотропию. В настоящей работе рассматриваются возможности моделирования ползучести анизотропных материалов на базе неравномерного распределения направлений скольжения по всему поликристаллу. При этом принимается, что деформации поликристалла являются усредненными от деформаций, имеющих место в монокристаллических элементах. Принимается также основная гипотеза о зависимости деформации сдвига монокристалла при скольжении в некоторой системе скольжения лишь от соответственного касательного напряжения и от его истории изменения.



Фиг.1



Фиг.2

Итак, рассмотрим некоторый монокристаллический элемент. Как известно [16], пластическая деформация его имеет место за счёт скольжения дислокаций в определенных системах скольжения, то есть в определенных плоскостях скольжения и в определенных направлениях скольжения в этих плоскостях. Пусть некоторая ось x_1, имеющая направление нормали к плоскости скольжения, и ортогональная к ней ось y_1, совпадающая с направлением скольжения, в ортогональной системе координат *x, y, z* определяются углами φ, ψ и ξ, как показано на фиг. 1. Если углы φ и ψ однозначно определяют положение оси x_1, то положение оси y_1, ортогональной к оси x_1 и соответственное углу ξ, двузначно и угол δ между осью x и проекцией оси y_1 на плоскость $x0y$ имеет два значения, соответственные выбору знака в нижеследующих формулах:

$$\cos\delta^{\pm} = \frac{1}{\sin\varphi\sin\xi}\left[-\cos\varphi\cos\xi\cos\psi \pm \sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\xi}\sin\psi\right]$$

$$\sin\delta^{\pm} = \frac{1}{\sin\varphi\sin\xi}\left[-\cos\varphi\cos\xi\sin\psi \pm \sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\xi}\cos\psi\right] \qquad (1.1)$$

В случае сложного напряжённого состояния касательное напряжение $\tau_{x_1y_1}$ определяется формулой

$$\tau_{x_1y_1} = \sigma_x \sin\varphi\cos\psi\sin\xi\cos\delta + \sigma_y \sin\varphi\sin\psi\sin\xi\sin\delta + \sigma_x \cos\varphi\cos\xi +$$
$$+\tau_{xy}\left(\sin\varphi\cos\psi\sin\xi\sin\delta + \sin\varphi\sin\psi\sin\xi\cos\delta\right) + \tau_{yz}\left(\sin\varphi\sin\psi\cos\xi +\right.$$
$$\left. +\cos\varphi\sin\xi\sin\delta\right) + \tau_{zx}\left(\sin\varphi\cos\psi\cos\xi + \sin\xi\cos\delta\cos\varphi\right) \qquad (1.2)$$

Согласно основной гипотезе имеем

$$\gamma_{x_1y_1} = \prod_t [\tau_{x_1y_1}], \tag{1.3}$$

где Π_t – некоторый временной оператор, определяющий деформации скольжения в некоторой системе скольжения. Компоненты деформаций, соответствующие деформации скольжения $\gamma_{x_1y_1}$, запишутся так [13]:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x = \gamma_{x_1y_1} \sin\varphi\cos\psi\sin\xi\sin\delta, \varepsilon_y = \gamma_{x_1y_1} \sin\varphi\sin\psi\sin\xi\sin\delta, \\
\varepsilon_z = \gamma_{x_1y_1} \cos\varphi\cos\xi, \\
\gamma_{xy} = \gamma_{x_1y_1} \left(\sin\varphi\cos\psi\sin\xi\sin\delta + \sin\varphi\sin\psi\sin\xi\cos\delta\right), \\
\gamma_{yz} = \gamma_{x_1y_1} \left(\sin\varphi\sin\psi\cos\xi + \cos\varphi\sin\xi\sin\delta\right), \\
\gamma_{zx} = \gamma_{x_1y_1} \left(\sin\varphi\cos\psi\cos\xi + \cos\varphi\sin\xi\cos\delta\right).
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Таким образом, если скольжение имеет место в некоторой системе, соответственной осям x_1, y_1, то при сложном напряженном состоянии компоненты деформаций определяются по формулам (1.4), (1.3) и (1.2). Вследствие того, что поликристалл состоит из множества монокристаллов и у каждого монокристалла имеется конечное количество систем скольжения (у гранецентрированного кубического монокристалла их 12 [16,6,13]), деформации поликристалла рассматриваются как суммирование вышеуказанных деформаций по всевозможным направлениям x_1, y_1. В работе [13] принималось, что направления x_1 и y_1 распределяются равномерно, что предопределяло изотропию поликристалла. Ниже рассмотрим вариант существенно неравномерного распределения направлений систем скольжения. Положим, например, что в некотором направлении ОА, определяемом углами $\varphi = \varphi_0$ и $\psi = \psi_0$, монокристаллические зерна ориентированы так, что соответственные оси x_1 более скучены около этого направления. На наш взгляд, анизотропия реальных поликристаллов может иметь место, если считать, что распределение направлений осей x_1 будет задано по закону $|\cos\alpha|$, где α –угол между осью x_1 и направлением ОА. В этом случае в направлении, перпендикулярном к вектору $\overrightarrow{OA}$, распределение для осей x_1 равно нулю, что, вероятно, можно считать возможным в результате термомеханической обработки поликристаллического материала. На фиг. 2 вектор $\overrightarrow{OC}$ соответствует направлению x_1, определяемому углами φ и ψ. Проведём сферу некоторого радиуса *OA* и сделаем сечение сферы через *OA* и ось z, а также сечение CO_1B с нормалью *z* через точку *C*. Точка A_1 является проекцией точки *A* на плоскость CO_1B. Из точки *A* опустим перпендикуляр AA_2 на *CB* (очевидно $A_1A_2 \perp CB$). Нашей целью является определить $\angle COA \equiv \alpha$. Запишем следующие соотношения:

$$AB = 2R\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2},\ BC = 2R\sin\varphi\sin\frac{\psi-\psi_0}{2},\ A_1B = R\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right),$$

$$A_2B = 2R\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\cos\gamma = R\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right)\sin\frac{\psi-\psi_0}{2},$$

откуда

$$\cos\gamma = \frac{\sin\varphi - \sin\varphi_0}{2\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}}\sin\frac{\psi-\psi_0}{2}.$$

Далее

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\bullet BC\cos\gamma}=2R\sqrt{\sin^2\frac{\varphi-\varphi_0}{2}+\sin\varphi\sin\varphi_0\sin^2\frac{\psi-\psi_0}{2}}$$

Кроме того,

$AC = 2R\sin\alpha/2$,

откуда

$$\cos\alpha = \cos(\varphi-\varphi_0)-\sin\varphi\sin\varphi_0\left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]$$

Аналогично [13], рассмотрим деформационное состояние поликристалла как следствие скольжения по системам скольжения составляющих монокристаллических элементов, путем суммирования по углам φ,ψ,ξ с учётом двузначности δ для каждого ξ и с учётом неравномерности распределения направлений x_1, по закону $|\cos\alpha|$. При этом, если для равномерного распределения направлений скольжения, обеспечивающего изотропию поликристалла, как показано в работе [13], в качестве элемента интегрирования необходимо было принять

$$\frac{\sin\varphi\sin\xi}{\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2\xi}}d\varphi d\psi d\xi$$

при пределах изменения $0<\varphi<\pi/2,\ 0<\psi<2\pi,\ \pi/2-\varphi<\xi<\pi/2+\varphi$ ($\sin^2\varphi - \cos^2\xi > 0$ всегда), то теперь эти элементы умножаются на

$$\left|\cos(\varphi-\varphi_0)-\sin\varphi\sin\varphi_0\left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]\right|.$$

При этом, например, для ε_x (t) будем иметь

$$\varepsilon_x(t)=\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}\left|\cos(\varphi-\varphi_0)-\sin\varphi\sin\varphi_0\left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]\right|\cos\psi d\psi\times$$
$$\times\int_{\pi/2-\varphi}^{\pi/2+\varphi}\left\{\prod\nolimits_t\left[\tau^+_{x_1,y_1}(t)\right]\cos\delta^+ +\prod\nolimits_t\left[\tau^-_{x_1,y_1}(t)\right]\cos\delta^-\right\}\frac{\sin^2\xi}{\sqrt{\sin^2\xi-\cos^2\xi}}d\xi \quad (1.5)$$

где $\tau^+_{x_1,y_1}$ и $\tau^-_{x_1,y_1}$ определяются из (1.2) соответственно δ^+ и δ^-. Осуществим замену переменной ξ на S, согласно $\cos\xi = \sin\varphi\cos S$, при этом, пределы интегрирования S будут (0, π). Подставляя это в (1.5) и аналогично осуществляя суммирование для всех компонентов деформаций, окончательно получим следующие выражения деформаций ползучести поликристалла при сложном напряженном состоянии:

$$\varepsilon_x(t)=\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}\left|\cos(\varphi-\varphi_0)-\sin\varphi\sin\varphi_0\left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]\right|\cos\psi d\psi\times$$
$$\int_0^{\pi}\Big[\Phi^+(\sigma_{x,\dots})(-\cos\varphi\cos\psi\cos S+\sin\psi\sin S)+$$
$$+\Phi^-(\sigma_{x,\dots})(-\cos\varphi\cos\psi\cos S+\sin\psi\sin S)\Big]dS$$

$$\varepsilon_y(t)=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos(\varphi-\varphi_0)-\sin\varphi\sin\varphi_0\left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]\right|\sin\psi d\psi\times$$

$$\int\limits_0^{\pi}\Big[\Phi^+(\sigma_{x,\dots})(-\cos\varphi\sin\psi\cos S-\cos\psi\sin S)+$$

$$+\Phi^-(\sigma_{x,\dots})(-\cos\varphi\sin\psi\cos S+\cos\psi\sin S)\Big]dS$$

$$\varepsilon_z(t)=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos(\varphi-\varphi_0)-\sin\varphi\sin\varphi_0\left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]\right|d\psi\times$$

$$\int\limits_0^{\pi}\left[\Phi^+(\sigma_{x,\dots})+\Phi^-(\sigma_{x,\dots})\right]\cos S dS$$

$$\gamma_{xy}(t)=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos(\varphi-\varphi_0)-\sin\varphi\sin\varphi_0\left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]\right|d\psi\times$$

$$\int\limits_0^{\pi}\Big[\Phi^+(\sigma_{x,\dots})(-\cos\varphi\sin 2\psi\cos S-\cos 2\psi\sin S)+$$

$$+\Phi^-(\sigma_{x,\dots})(-\cos\varphi\sin 2\psi\cos S+\cos 2\psi\sin S)\Big]dS$$

$$\gamma_{yz}(t)=\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos(\varphi-\varphi_0)-\sin\varphi\sin\varphi_0\left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]\right|d\psi\times$$

$$\int\limits_0^{\pi}\Big\{\left[\Phi^+(\sigma_{x,\dots})+\Phi^-(\sigma_{x,\dots})\right]\sin^2\varphi\sin\psi\cos S+\cos(\varphi)\times$$

$$\times\Big[\Phi^+(\sigma_{x,\dots})(-\cos\varphi\sin\psi\cos S-\cos\psi\sin S)+$$

$$+\Phi^-(\sigma_{x,\dots})(-\cos\varphi\sin\psi\cos S+\cos\psi\sin S)\Big]\Big\}dS$$

$$\gamma_{zx}(t)=\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos(\varphi-\varphi_0)-\sin\varphi\sin\varphi_0\left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]\right|d\psi\times \tag{1.6}$$

$$\int\limits_0^{\pi}\Big\{\left[\Phi^+(\sigma_{x,\dots})+\Phi^-(\sigma_{x,\dots})\right]\sin^2\varphi\cos\psi\cos S+\cos(\varphi)\times\Big[\Phi^+(\sigma_{x,\dots})\times$$

$$\times(-\cos\varphi\cos\psi\cos S+\sin\psi\sin S)+\Phi^-(\sigma_{x,\dots})(-\cos\varphi\cos\psi\cos S-\sin\psi\sin S)\Big]\Big\}dS$$

где

$$\Phi^\pm(\sigma_{x,\dots})=\prod\nolimits_t\Big[\sigma_x(t)\sin\varphi\cos\psi(-\cos\varphi\cos\psi\cos S\pm\sin\psi\sin S)+$$

$$\sigma_y(t)\sin\varphi\sin\psi(-\cos\varphi\sin\psi\cos S\mp\cos\psi\sin S)+\sigma_z(t)\cos\varphi\sin\varphi\cos S+$$

$$\tau_{xy}(t)\sin\varphi(-\cos\varphi\sin 2\psi\cos S\mp\cos 2\psi\sin S)+\tau_{yz}(t)\times(-\cos 2\varphi\sin\psi\cos S\mp$$

$$\mp\cos\varphi\cos\psi\sin S)+\tau_{zx}(t)(-\cos 2\varphi\cos\psi\cos S\pm\cos\varphi\sin\psi\sin S)\Big] \tag{1.7}$$

Рассмотрим теперь анизотропию поликристалла, реологические свойства которого определяются соотношениями (1.6) для случая, когда деформации скольжения (1.3) определяются нелинейной теорией наследственности в форме

$$\prod_t \left[u(t)\right] \equiv \int_0^t u(\tau)\left|u(\tau)\right|^{n-1} K(t,\tau)\,d\tau . \tag{1.8}$$

Положим, что на поликристалл действует только напряжение $\sigma_z(t) \equiv a(t)$.Тогда для деформации $\varepsilon_z(t)$, согласно (1.6) и (1.7), будем иметь:

$$\varepsilon_z(t) = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \left|\cos(\varphi-\varphi_0) - \sin\varphi \sin\varphi_0 \left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]\right| \cos^{n+1}\varphi \sin^{n+2}\varphi \times$$

$$\times \left|\cos S\right|^{n+1} dS d\psi d\varphi \int_0^t a(\xi)\left|a(\xi)\right|^{n-1} K(t,\xi)\,d\xi \equiv J_1(\varphi_0,n)\int_0^t a(\xi)\left|a(\xi)\right|^{n-1} K(t,\xi)\,d\xi \tag{1.9}$$

Если на поликристалл действует только напряжение $\sigma_x(t) \equiv a(t)$, то для деформации $\varepsilon_x(t)$ будем иметь

$$\varepsilon_x(t) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \left|\cos(\varphi-\varphi_0) - \sin\varphi \sin\varphi_0 \left[1-\cos(\psi-\psi_0)\right]\right| \sin^{n+2}\varphi \left|\cos\psi\right|^{n+1} \times$$

$$\left\{\left|-\cos\varphi\cos\psi\cos S + \sin\psi\sin S\right|^{n+1} + \left|\cos\varphi\cos\psi\cos S + \sin\psi\sin S\right|^{n+1}\right\} dS d\psi d\varphi \times$$

$$\int_0^t a(\xi)\left|a(\xi)\right|^{n-1} K(t,\xi)\,d\xi \equiv J_2(\varphi_0,\psi_0 n)\int_0^t a(\xi)\left|a(\xi)\right|^{n-1} K(t,\xi)\,d\xi \tag{1.10}$$

В табл. 1 приведены численные значения $J_1(\varphi_0, n)$ для $n=1$ и $n=3$.

Таблица 1

φ_0	0	$\pi/16$	$\pi/8$	$3\pi/16$	$\pi/4$	$5\pi/16$	$3\pi/8$	$7\pi/16$	$\pi/2$
n=1	1.645	1.614	1.533	1.430	1.336	1.273	1.242	1.234	1.234
n=3	0.247	0,242	0.228	0,209	0.191	0.179	0.175	0.173	0.173

В табл. 2 и 3 приведены численные значения $J_2(\varphi_0, \psi_0, n)$ для $n=1$, и $n=3$, соответственно. Из данных табл. 1, 2 и 3 можно заключить, что наибольшее различие между J_1 и J_2 имеет место при $\varphi_0 = \pi/2$ и $\psi_0 = 0$ как для $n=1$, так и для $n=3$. При этом, $\max(J_2/J_1)=1.512$ для $n=1$ и $\max(J_2/J_1)=1.630$ для $n=3$. Отметим, что, как показывают опущенные здесь расчеты, при $n=2$ $\max(J_2/J_1)=1.615$, а при $n=4$ – $\max(J_2/J_1)=1.578$.

Следует отметить, что наибольшая анизотропия незначительно зависит от n и находится в пределах 1.5÷1.6. Опускаемый здесь анализ показывает, что в случае использования иных теорий ползучести (теория старения, теория течения, теория упрочнения) анизотропия реологических свойств поликристаллов при степенной зависимости деформаций от напряжений сводится к сравнению тех же значений J_1 и J_2.

Таблица 2

φ_0 / ψ_0	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
0	1,500	1,498	1,498	1,512	1,558	1,641	1.744	1.832	1.866
$\pi/16$	1,500	1,499	1,498	1,511	1,552	1,628	1,722	1,801	1,832
$\pi/8$	1,500	1,499	1,499	1,509	1,539	1,595	1,665	1,724	1,747
$3\pi/16$	1,500	1,500	1,501	1,507	1,526	1,559	1,601	1,638	1,652
$\pi/4$	1,500	1,501	1,504	1,509	1,519	1,536	1,557	1,576	1,584
$5\pi/16$	1,500	1,502	1,508	1,515	1,523	1,531	1,541	1,551	1,556
$3\pi/8$	1,500	1,503	1,512	1,523	1,533	1,542	1,548	1,552	1,554
$7\pi/8$	1,500	1,504	1,515	1,529	1,544	1,555	1,561	1,562	1,561
$\pi/2$	1,500	1,504	1,516	1.532	1,548	1,561	1,567	1,566	1,564

Таблица3

φ_0 / ψ_0	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0,220	0,220	0,221	0,223	0,230	0,244	0,262	0,277	0,282
$\pi/16$	0,220	0,220	0,221	0,223	0,229	0,241	0,258	0,271	0,277
$\pi/8$	0,220	0,221	0,222	0,224	0,228	0,237	0,248	0,259	0,262
$3\pi/16$	0,220	0,221	0,223	0,225	0,228	0,233	0,240	0,246	0,249
$\pi/4$	0,220	0,221	0,224	0,228	0,231	0,234	0,238	0,242	0,244
$5\pi/16$	0,220	0,222	0,226	0,231	0,235	0,239	0,242	0,246	0,248
$3\pi/8$	0,220	0,222	0,227	0,234	0,241	0,246	0,249	0,251	0,252
$7\pi/8$	0,220	0,222	0,228	0,236	0,245	0,252	0,255	0,255	0,255
$\pi/2$	0,220	0,223	0,229	0,237	0,247	0,254	0,257	0,257	0,256

Таким образом, иногда наблюдаемая у поликристаллов существенная анизотропия свойств ползучести (2-3 раза [3]) не может быть объяснена внутренним скольжением. Это предопределяет дальнейшие поиски модели поликристалла, более точно описывающие реологические процессы, что позволило бы надёжно прогнозировать реологическое поведение поликристаллов при их сложном напряжённом состоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макклинток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. М.: Мир, 1970. 253 с.
2. Ross-Ross P.A., Fidleris V., Fraser D.E. Anisotropic creep behaviour of zirconium alloys in a fast neutron flux.//Can. Met. Quart. 1972. Vol.11. №1. P.101-111.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. Gharemani F. Effect of grain boundary sliding on steady creep of polycrystals.// Int. J. Solids and Struct.// 1980. Vol.16. № 9. P.347-367.
5. Lin T. H., Yu C. L., Weng G. J. Derivation of polycrystal creep properties from the creep data of single crystals.// Trans. ASME. 1977. E 44. № 1. P.73-78.
6. Lin T. H., Yu C. L., Weng G. J. Theoretical stress-strain-time relation of a polycrystal and comparison with commonly used creep theories.// Theor. and Appl. Mech. 14-th IVTAM Cong. Delft. 1976. Abstrs. Amsterdam. e.a.1976.27.
7. Зарубин В.С., Кадашевич Ю.И., Кузьмин М.А. Описание ползучести металлов при помощи структурной модели.//Прикладная механика. 1977. Т.13. №9. С.10-13.
8. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория ползучести микронеоднородных сред.// Исследования по упругости и пластичности. 1978. №12. С.59-71.
9. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория ползучести, учитывающая микропластические деформации. //Изв. АН СССР. МТТ. 1976. №5. С.153-159.
10. Hutchinson J. W. Creep and plasticity of polycrystalline materials from single crystal structure.// Theor. and Appl. Mech. 14-th IUIAM. Congr. Delft. 1976. Abstr. Amsterdam. e.a. 1976. P.82.
11. Малинин Н.И. К теории анизотропной ползучести. // ПМТФ. 1964. №3. С.16-23.
12. Симонян А.М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Гитутюн, 1999. 255с.
13. Симонян А.М. Модель нелинейной ползучести на основе концепции скольжения. //МТТ. 2011. №6. С.131–138.
14. Герцрикен С.Д., Дехтяр И.Я. и др. Физические основы прочности и пластичности металлов. М.: Металлургиздат, 1963. 322с.
15. Коттрелл Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. М.: Металлургиздат, 1968. 267с.
16. Блантер М. Е. Металловедение и термическая обработка. М.: Машгиз, 1963. 416с.
17. Симонян А.М., Симонян Н. М. К вопросу о реологии монокристаллов.// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. №4. С.38-48.
18. Kocks V.F. The relation between polycrystal deformation and single crystal deformation.//Metallurgical Transactions. 1970. V.1. May. P. 1121-1143.

Сведения об авторах:

Симонян Арег Михайлович – док. техн. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Баграмяна, 24^{б}.
E-mail: simonyanareg@mail.ru

Саноян Юрий Геворкович – кандидат физ.-мат.наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Баграмяна, 24^{б}.
E-mail: yusanoyan@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 14.09.2011

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика
УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СЛОЕМ

Григорян Э. Х., Синанян С.С.

Ключевые слова: пьезоэлектрическое пространство, бесконечный металлический слой, полубесконечный слой, поверхностная волна, асимптотические формулы, дальняя зона, цилиндрическая волна.
Key words: Piezoelectric space, infinite metallic layer, semi-infinite layer, surface wave, asymptotic formulae, farther zone, cylindrical wave

Գրիգորյան Է.Խ. , Սինանյան Ս.Ս.
Սահքի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա անվերջ մետաղական շերտով պյեզոէլեկտրական տարածությունում

Աշխատանքում դիտարկվում է սահքի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա անվերջ մետաղական շերտով պյեզոէլեկտրական տարածությունում: Խնդրի լուծումը Ֆուրյեի իրական ձևափոխության օգնությամբ հանգեցվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի խնդրի տիպի խնդրի լուծմանը: Գտնված են տեղափոխության ամպլիտուդի ասիմպտոտիկ բանաձևերը հեռավոր գոտում: Ցույց է տրված, որ կիսաանվերջ մետաղական շերտի առկայությունը բերում է մակերևութային և գլանային ալիքների առաջացման, ինչպես նաև այնպիսի ալիքի առաջացմանը, որը ճառագայթի ուղղությամբ տարածվում են ճառագայթի բացվածքի անկյունից կախված արագությամբ:

Grigoryan E.Kh., Sinanyan S.S.
Diffraction of surface shear electroelastic wave in semi-infinite metal layer in piezoelectric space with infinite metal layer

Diffraction of surface shear electroelastic wave in semi-infinite metal layer in piezoelectric space with infinite metal layer is discussed. Solution of the problem can be brought to solution of Riemann problem in analytic functions theory, using real Fourier transformation. Asymptotic formulae of shift amplitude in further zone are found. It is shown that existence of semi-infinite metal layer leads to appearance of surface and cylindrical waves and a wave which propagates in the direction of the beam, with a speed depending from the angle beam spread.

В работе рассматривается дифракция сдвиговой поверхностной (локализованной) электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. Решение задачи с помощью действительного преобразования Фурье приводится к решению задачи типа Римана в теории аналитических функций. Относительно амплитуд перемещений получены асимптотические формулы в дальней зоне. Показано, что наличие полубесконечного металлического слоя приводит к появлению поверхностных и цилиндрических волн и волны, распространяющейся по направлению луча со скоростью, зависящей от угла раствора луча.

Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса 6mm гексагональной симметрии с главной осью параллельной координатной оси Oz. В пьезоэлектрическом пространстве имеется включение в виде двух параллельных бесконечного и полубесконечного заземленных тонких металлических слоев. Считается, что толщина металлических слоев настолько мала, что их жесткостью можно пренебречь, т.е. слои можно рассматривать как электроды, занимающие плоскость $-\infty < x < \infty,\ y = h,\ -\infty < z < \infty$ и полуплоскость $-\infty < x \le 0,\ y = -h,\ -\infty < z < \infty$.

В пространстве распространяется поверхностная волна сдвига с перемещениями $w_0(x, y, t) = w_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$ и с электрическим потенциалом $\Phi_0(x, y, t) = \Phi_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$ [13], где

$$w_\infty(x,y) = e^{-\sqrt{\sigma_п^2 - k^2}|y-h| - i\sigma_п x}$$

$$\Phi_\infty(x,y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-i\sigma_п x}\left(e^{-\sqrt{\sigma_п^2-k^2}|y-h|} - e^{-\sigma_п|y-h|}\right) \qquad (1)$$

тогда величины, характеризующие электроупругое поле, зависят от времени, пропорционально $e^{-i\omega t}$. В этом случае уравнения относительно амплитуд перемещения $w(x,y)$ и квазистатического электрического потенциала $\Phi(x,y)$ примут вид [1]:

$$\Delta w + k^2 w = 0$$

$$\Delta\Phi + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k^2 w = 0 \qquad (2)$$

ε_{11} – диэлектрическая проницаемость, e_{15} – пьезомодуль, ω – частота колебаний, $k = \omega/c$ – волновое число , $c = \sqrt{c_{44}(1+æ)/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, c_{44} – упругая постоянная , ρ – плотность среды, $æ = e_{15}{}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Решение уравнения (2) должно удовлетворять контактным условиям

$$w(x,\pm h+0) = w(x,\pm h-0),$$

$$\sigma_{yz}(x,\pm h+0) = \sigma_{yz}(x,\pm h-0),\ \Phi(x,h) = 0$$

$$\Phi(x,-h) = \Phi^+(x)\ ,\ D_y(x,-h+0) - D_y(x,-h-0) = -\varepsilon_{11}\Psi^-(x), \qquad (3)$$

где $\sigma_{yz}(x,y) = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ – амплитуда тангенциальных напряжений,

$D_y(x,y) = e_{15}\frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ – амплитуда компоненты вектора электрической индукции, и $\Phi^+(x) = 0$ при $x < 0$, $\Psi^-(x) = 0$ при $x > 0$.

Введём функции

$$u(x,y) = w(x,y) - w_\infty(x,y)\ ,\ \varphi(x,y) = \Phi(x,y) - \Phi_\infty(x,y) \qquad (4)$$

Функции $u(x,y)$, $\varphi(x,y)$ удовлетворяют уравнениям (2), тогда их действительные преобразования Фурье по x будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2\overline{u}(\sigma,y)}{dy^2} - \gamma^2\overline{u}(\sigma,y) = 0$$

$$\frac{d^2\overline{\varphi}(\sigma,y)}{dy^2} - \sigma^2\overline{\varphi}(\sigma,y) + k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{u}(\sigma,y) = 0 \qquad (5)$$

и следующим контактным условиям:

$\overline{u}(\sigma,\pm h+0)=\overline{u}(\sigma,\pm h-0),$

$\overline{\varphi}(\sigma,h)=0,$

$$\overline{\varphi}(\sigma,-h)=\overline{\Phi}^{+}(\sigma)-2\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}(e^{-2h\sqrt{\sigma_{п}{}^{2}-k^{2}}}-e^{-2h\sigma_{п}})\delta(\sigma-\sigma_{п}), \qquad (6)$$

$$c_{44}\left.\frac{d\overline{u}}{dy}\right|_{y=\pm h+0}+e_{15}\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=\pm h+0}=c_{44}\left.\frac{d\overline{u}}{dy}\right|_{y=\pm h-0}+e_{15}\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=\pm h-0}$$

$$\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=-h+0}-\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=-h-0}=-\overline{\Psi}^{-}(\sigma),$$

где $\gamma^{2}=\sigma^{2}-k^{2}$, $\overline{f}(\sigma,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{i\sigma x}dx$, $f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\sigma,y)e^{-i\sigma x}d\sigma$,

$\delta(\sigma)$ – функция Дирака.

Следует отметить, что функции $\overline{u}(\sigma,y)$, $\overline{\varphi}(\sigma,y)$ ещё должны удовлетворять условию уходящей волны.

Решение системы (5), представляющее уходящую волну, имеет вид:

$$\begin{aligned}&\overline{u}(\sigma,y)=A_{0}(\sigma)e^{-\gamma y}\\&\overline{\varphi}(\sigma,y)=B_{0}(\sigma)e^{-|\sigma|y}+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{u}\end{aligned} \qquad \text{при } y>h \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}&\overline{u}(\sigma,y)=A_{1}(\sigma)\text{ch}\gamma y+A_{2}(\sigma)\text{sh}\gamma y\\&\overline{\varphi}(\sigma,y)=B_{1}(\sigma)\text{ch}\left|\sigma\right|y+B_{2}(\sigma)\text{sh}\left|\sigma\right|y+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{u}\end{aligned} \qquad \text{при } \left|y\right|<h \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}&\overline{u}(\sigma,y)=A_{3}(\sigma)e^{\gamma y}\\&\overline{\varphi}(\sigma,y)=B_{3}(\sigma)e^{|\sigma|y}+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{u}\end{aligned} \qquad \text{при } y<-h \qquad (9)$$

Выше имелось в виду, что $\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}=-i\sqrt{k^{2}-\sigma^{2}}$,

$\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}>0$ при $\left|\sigma\right|>k$, т.е действительная ось комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ обходит точку $\sigma=-k$ сверху, а точку $\sigma=k$ – снизу [2].

Удовлетворив условиям (6), приходим к следующей задаче типа Римана на действительной оси [5-14] относительно функций $\overline{\Phi}^{+}(\sigma)$, $\overline{\Psi}^{-}(\sigma)$:

$$M(\sigma)(-\overline{\Phi}^{+}(\sigma)+2\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}(e^{-2h\sqrt{\sigma_{п}{}^{2}-k^{2}}}-e^{-2h\sigma_{п}})\delta(\sigma-\sigma_{п}))=\overline{\Psi}^{-}(\sigma), \qquad (10)$$

где

$$M(\sigma)=2(1+æ)\left|\sigma\right|K(\sigma) \qquad (11)$$

$$K(\sigma)=\frac{K_{0}(\sigma)}{K_{1}(\sigma)K_{2}(\sigma)}$$

$$K_{0}(\sigma)=(1+æ)\gamma-\left|\sigma\right|æ$$

$$K_1(\sigma)=(1+æ)\gamma(1+e^{-2|\sigma|h})-|\sigma|æ(1+e^{-2\gamma h})$$
$$K_2(\sigma)=(1+æ)\gamma(1-e^{-2|\sigma|h})-|\sigma|æ(1-e^{-2\gamma h}) \qquad (12)$$

В выражениях (7), (8), (9) неизвестные функции выражаются при помощи решения функционального уравнения (10)

$$A_0(\sigma)=\frac{e_{15}}{c_{44}}|\sigma|\bar{\Phi}^+(\sigma)\frac{(1+æ)\gamma e^{\gamma h}(e^{-2|\sigma|h}-e^{-2\gamma h})}{K_1(\sigma)K_2(\sigma)}+$$
$$+2\pi æ(1+æ)\sigma_п\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}\,\frac{(e^{-2\sigma_п h}-e^{-2\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}h})^2}{K_1(\sigma_п)K_2(\sigma_п)}e^{\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}h}\delta(\sigma-\sigma_п)$$
$$A_1(\sigma)=-\frac{e_{15}}{c_{44}}|\sigma|\frac{\bar{\Phi}^+(\sigma)}{K_1(\sigma)}e^{-\gamma h}+\frac{2\pi æ\sigma_п e^{-h\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}}(e^{-2h\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}}-e^{-2h\sigma_п})}{K_1(\sigma_п)}\delta(\sigma-\sigma_п)$$
$$A_2(\sigma)=\frac{e_{15}}{c_{44}}|\sigma|\frac{\bar{\Phi}^+(\sigma)}{K_2(\sigma)}e^{-\gamma h}-\frac{2\pi æ\sigma_п e^{-\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}h}(e^{-2h\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}}-e^{-2h\sigma_п})}{K_2(\sigma_п)}\delta(\sigma-\sigma_п)$$
$$A_3(\sigma)=-\frac{e_{15}}{c_{44}}|\sigma|\bar{\Phi}^+(\sigma)e^{\gamma h}\,\frac{(1+æ)\gamma(1-e^{-2h(|\sigma|+\gamma)})-|\sigma|æ(1-e^{-4\gamma h})}{K_1(\sigma)K_2(\sigma)}+A_3^*\delta(\sigma-\sigma_п)$$
$$B_0(\sigma)=-\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A_0e^{(|\sigma|-\gamma)h}$$
$$B_3(\sigma)=-\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A_3(\sigma)e^{|(\sigma|-\gamma)h}+\bar{\Phi}^+(\sigma)e^{|\sigma|h}-2\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}(e^{-2h\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}}-e^{-2h\sigma_п})e^{\sigma_п h}\delta(\sigma-\sigma_п)$$
$$B_1(\sigma)=\frac{\bar{\Phi}^+(\sigma)-2\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A_1(\sigma)\operatorname{ch}\gamma h}{2\operatorname{ch}|\sigma|h}-\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{(e^{-2h\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}}-e^{-2h\sigma_п})\delta(\sigma-\sigma_п)}{\operatorname{ch}\sigma_п h}$$
$$B_2(\sigma)=\frac{-\bar{\Phi}^+(\sigma)-2\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A_2(\sigma)\operatorname{sh}\gamma h}{2\operatorname{sh}|\sigma|h}+\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{(e^{-2h\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}}-e^{-2h\sigma_п})\delta(\sigma-\sigma_п)}{2\operatorname{sh}\sigma_п h},$$

где

$$A_3^*=2\pi æ(e^{-2h\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}}-e^{-2h\sigma_п})\sigma_п e^{h\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}}\times$$
$$\times\frac{((1+æ)\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}(1-e^{-2h(\sigma_п+\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2})})-\sigma_п æ(1-e^{-4\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}h}))}{K_1(\sigma_п)K_2(\sigma_п)}.$$

Перейдя к решению (10), заметим, что $K(\sigma)$ имеет действительные нули только в точках $\pm\sigma_п$, где $K_0(\pm\sigma_п)=0$ и действительные полюсы – только в точках $\pm\sigma_{п1},\pm\sigma_{п2}$, где $K_2(\pm\sigma_{п2})=0$ при $kh>h_a$, h_a – единственное решение уравнения $2h_a æ=(1+æ)(1-e^{-2h_a})$, и $K_1(\pm\sigma_{п1})=0$ при любых значениях

kh ($\sigma = 0$ не является полюсом для $\bar{u}(\sigma, y)$) [8]. Поэтому, чтобы выполнялись условия уходящей волны, действительная ось должна обходить точки $-\sigma_{\text{пj}}$ сверху, а точки $\sigma_{\text{пj}}$ – снизу ($j = 0,1,2$) [2].

Так как $K(\sigma) \to 1$ и $\ln K(\sigma) = O(\sigma^{-2})$ при $|\sigma| \to \infty$, то, как известно, её можно представить в виде [2]

$$K(\sigma) = K^{+}(\sigma) K^{-}(\sigma) \tag{13}$$

$K^{+}(\alpha)$ – регулярная функция и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha > 0$, а $K^{-}(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha < 0$, $(\alpha = \sigma + i\tau)$ и $K^{\pm}(\alpha) \to 1$ при $|\alpha| \to \infty$ – в своих областях регулярности,

$$K^{\pm}(\sigma) = \exp(\bar{R}^{\pm}(\sigma)),$$

где

$$\bar{R}^{+}(\sigma) = \int_0^\infty R(x) e^{i(\sigma + i0)x} dx, \; \bar{R}^{-}(\sigma) = \int_0^\infty R(x) e^{i(\sigma - i0)x} dx,$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[K(\sigma)] e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Так как $\ln[K(\sigma)]$ имеет порядок σ^{-2} при $|\sigma| \to \infty$, то функция $R(x)$ при $x \to 0$ принимает конечное значение. Тогда, в силу известных свойств интегралов Фурье имеем $\bar{R}^{+}(\sigma) = O((\sigma + i0)^{-1})$, $\bar{R}^{-}(\sigma) = O((\sigma - i0)^{-1})$ при $|\sigma| \to \infty$.

Используя формулы

$$2\pi i \delta(\sigma - \sigma_{\text{п}}) = (\sigma - \sigma_{\text{п}} - i0)^{-1} - (\sigma - \sigma_{\text{п}} + i0)^{-1} \tag{14}$$

$$|\sigma| = (\sigma - i0)^{1/2} (\sigma + i0)^{1/2}, (\sigma - i0)^{-1} = \sigma^{-1} + \pi i \delta(\sigma) \tag{15}$$

$M(\sigma)$ представим в виде $M(\sigma) = M^{+}(\sigma) M^{-}(\sigma)$,

где

$$M^{+}(\sigma) = \sqrt{2(1+æ)} (\sigma + i0)^{1/2} K^{+}(\sigma), \; M^{-}(\sigma) = \sqrt{2(1+æ)} (\sigma - i0)^{1/2} K^{-}(\sigma) \tag{16}$$

Имея в виду (13), (15), будем иметь

$$\bar{L}^{+}(\sigma) = \bar{L}^{-}(\sigma),$$

где

$$\bar{L}^{+}(\sigma) = -\bar{\Phi}^{+} M^{+}(\sigma) + i M^{+}(\sigma_{\text{п}}) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-2h\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_{\text{п}}}) \frac{1}{\sigma - \sigma_{\text{п}} + i0}$$

$$\bar{L}^{-}(\sigma) == \frac{\bar{\Psi}^{-}}{M^{-}(\sigma)} + i M^{+}(\sigma_{\text{п}}) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-2h\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_{\text{п}}}) \frac{1}{\sigma - \sigma_{\text{п}} - i0}$$

Применив к равенству обратное действительное интегральное преобразование Фурье, получим

$$L^{+}(x) = L^{-}(x),$$

где

$L^{+}(x) = 0$ при $x < 0$, $L^{-}(x) = 0$ при $x > 0$, следовательно, $L^{+}(x)=L^{-}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{d^k\delta(x)}{dx^k}$ [3,4], где n – любое конечное число. После действительного интегрального преобразования Фурье получим $\bar{L}^{+}(\sigma)=\bar{L}^{-}(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}a_k(-i)^k\sigma^k$, так как $\bar{K}^{+}(\sigma)\to 1$ и $\bar{\Phi}^{+}(\sigma)$ имеет порядок $\mathrm{o}(\sigma+i0)^{-1}$ при $|\sigma|\to\infty$, $\bar{K}^{-}(\sigma)\to 1$ и $\bar{\Psi}^{-}(\sigma)$ имеет порядок $O(\sigma-i0)^{-1/2}$, то $\bar{L}^{\pm}(\sigma)\to 0$ при $|\sigma|\to\infty$, т.е. $a_k=0$, $k=0,\ 1,\ \ldots$, в силу вышесказанного будем иметь следующие выражения для неизвестных функций:

$$\bar{\Phi}^{+}(\sigma)=i\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{\sqrt{\sigma_{\text{п}}}\,(e^{-2h\sqrt{\sigma_{\text{п}}{}^2-k^2}}-e^{-2h\sigma_{\text{п}}})\bar{K}^{+}(\sigma_{\text{п}})}{(\sigma+i0)^{1/2}(\sigma-\sigma_{\text{п}}+i0)\bar{K}^{+}(\sigma)}$$

$$\bar{\Psi}^{-}(\sigma)=-2i\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}(1+æ)\sqrt{\sigma_{\text{п}}}\,(e^{-2h\sqrt{\sigma_{\text{п}}{}^2-k^2}}-e^{-2h\sigma_{\text{п}}})\bar{K}^{+}(\sigma_{\text{п}})\frac{(\sigma-i0)^{1/2}\bar{K}^{-}(\sigma)}{\sigma-\sigma_{\text{п}}-i0}$$

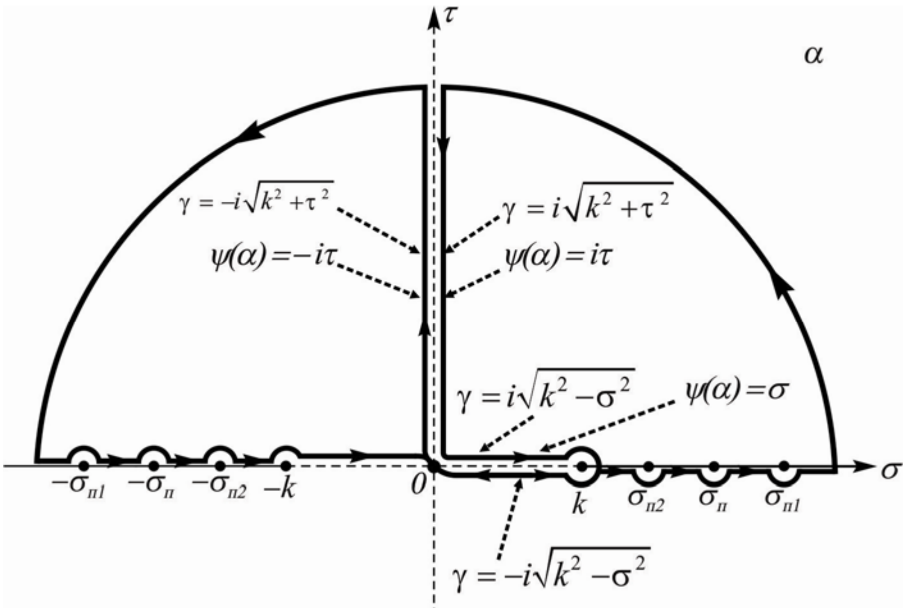
Применив обратное преобразование Фурье к (7), (8), (9), получим решение задачи.

Подробно остановимся на исследовании $w(x,y)$ в случае $x<0$, $y>h$. Имеем:

$$w(x,y)=A_1^{*}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma|\sigma|(e^{-2|\sigma|h}-e^{-2\gamma h})}{K_1(\sigma)K_2(\sigma)(\sigma-\sigma_{\text{п}}+i0)(\sigma+i0)^{1/2}\bar{K}^{+}(\sigma)}e^{-\gamma(y-h)}e^{-i\sigma x}d\sigma, \quad (17)$$

где

$$A^{*}=iæ(1+æ)\frac{\sqrt{\sigma_{\text{п}}}\,(e^{-2h\sqrt{\sigma_{\text{п}}{}^2-k^2}}-e^{-2h\sigma_{\text{п}}})\bar{K}^{+}(\sigma_{\text{п}})}{2\pi}.$$



Фиг. 1.

Вычисляя интеграл (17) при $x<0$ с помощью метода контурного интеграла в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ с разрезами, указанными на фиг.1, получим

$$w(x,y)=w_{11}(x,y)+w_{\text{пез}}(x,y)+w_{\text{пов}}(x,y)$$

$$w_{11}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_{111}(\sigma)}{\bar{K}^{+}(\sigma)(\sigma+i0)^{1/2}(\sigma-\sigma_{\text{п}}+i0)}e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}(y-h)}e^{i\sigma|x|}d\sigma$$

$$w_{\text{пез}}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_{111}(\sigma)-M_{111}(\sigma)}{\bar{K}^{+}(\sigma)(\sigma+i0)^{1/2}(\sigma-\sigma_{\text{п}}+i0)}e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}(y-h)}e^{i\sigma|x|}d\sigma$$

$$w_{\text{пов}}(x,y)=w_{\text{пов}}^{(1)}e^{i\sigma_{\text{п}1}|x|}e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}(y-h)}+w_{\text{пов}}^{(2)}e^{i\sigma_{\text{п}2}|x|}e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}(y-h)}$$

$$w_{\text{пов}}^{(1)}=2\pi i\frac{\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}\sqrt{\sigma_{\text{п}1}}\,(e^{-2\sigma_{\text{п}1}h}-e^{-2i\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}h})}{\bar{K}^{+}(\sigma_{\text{п}1})(\sigma_{\text{п}1}-\sigma_{\text{п}})K_1'(\sigma_{\text{п}1})K_2(\sigma_{\text{п}1})}$$

$$w_{\text{пов}}^{(2)}=\begin{cases}\dfrac{2\pi i\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}\sqrt{\sigma_{\text{п}2}}\,(e^{-2\sigma_{\text{п}2}h}-e^{-2i\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}h})}{\bar{K}^{+}(\sigma_{\text{п}2})(\sigma_{\text{п}2}-\sigma_{\text{п}})K_1(\sigma_{\text{п}2})K_2'(\sigma_{\text{п}2})}, & kh>h_a\\ 0, & kh\le h_a\end{cases}$$

$$w_{\text{пез}}(x,y)=-\int_{0}^{\infty}\frac{N_{15}(\tau)+M_{15}(\tau)}{\bar{K}^{+}(i\tau)(i\tau)^{1/2}(i\tau-\sigma_{\text{п}})}e^{-\tau|x|}e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(y-h)}d\tau$$

$$w_{11}(x,y)=\int_{0}^{\infty}\frac{M_{12}(\tau)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}(y-h)}+M_{15}(\tau)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(y-h)}}{\bar{K}^{+}(i\tau)(i\tau)^{1/2}(i\tau-\sigma_{\text{п}})}e^{-\tau|x|}d\tau-$$

$$-\int_{0}^{k}\frac{M_{13}(\sigma)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y-h)}+M_{14}(\sigma)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y-h)}}{\bar{K}^{+}(\sigma)(\sigma+i0)^{1/2}(\sigma-\sigma_{\text{п}}+i0)}e^{i\sigma|x|}d\sigma$$

Итак, получили представления $w_{11}(x,y), w_{\text{пез}}(x,y)$ в виде регулярных интегралов, которые удобны для вычисления при малых значениях x, y.

$$M_{12}(\tau)=\frac{i\tau\sqrt{\tau^2+k^2}\,(e^{-2i\tau h}-e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}{M_{12}{}^{(1)}(\tau)},\quad M_{15}(\tau)=\frac{i\tau\sqrt{\tau^2+k^2}\,(e^{-2i\tau h}-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}{M_{15}{}^{(1)}(\tau)}$$

$$M_{13}(\sigma)=\frac{i\sigma\sqrt{k^2-\sigma^2}\,(e^{-2\sigma h}-e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h})}{M_{13}{}^{(1)}(\sigma)},\quad M_{14}(\sigma)=\frac{i\sigma\sqrt{k^2-\sigma^2}\,(e^{-2\sigma h}-e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h})}{M_{14}{}^{(1)}(\sigma)},$$

$$N_{15}(\tau)=\frac{i\tau\sqrt{\tau^2+k^2}\,(e^{2i\tau h}-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}{N_{15}{}^{(1)}(\tau)},$$

где

$$M_{12}{}^{(1)}(\tau)=((1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}\,(1+e^{-2i\tau h})-æ\tau(1+e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))\times$$
$$\times((1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}\,(1-e^{-2i\tau h})-æ\tau(1-e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))$$

$$M_{15}{}^{(1)}(\tau)=((1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}\,(1+e^{-2i\tau h})+æ\tau(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))\times$$
$$\times((1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}\,(1-e^{-2i\tau h})+æ\tau(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))$$

$$M_{13}^{(1)}(\sigma)=((1+æ)i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+e^{-2\sigma h})-æ\sigma(1+e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))\times$$
$$\times((1+æ)i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1-e^{-2\sigma h})-æ\sigma(1-e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))$$
$$M_{14}^{(1)}(\sigma)=((1+æ)i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+e^{-2\sigma h})+æ\sigma(1+e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))\times$$
$$\times((1+æ)i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1-e^{-2\sigma h})+æ\sigma(1-e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))$$
$$N_{15}^{(1)}(\tau)=((1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1+e^{2i\tau h})-æ\tau(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))\times$$
$$\times((1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{2i\tau h})-æ\tau(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))$$
$$(\sigma_{п_1}{}^2-k^2)K_1'(\sigma_{п1})=(\sigma_{п_1}{}^2-k^2)\left.\frac{dK_1(\sigma)}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_{п1}}=(1+e^{-2h\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}})k^2æ+$$
$$+2e^{-2h\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}}hæ\sigma_{п1}{}^2\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}-2h(1+æ)e^{-2h\sigma_{п1}}(\sigma_{п1}{}^2-k^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$(\sigma_{п2}{}^2-k^2)K_2'(\sigma_{п2})=(\sigma_{п2}{}^2-k^2)\left.\frac{dK_2(\sigma)}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_{п2}}=(1-e^{-2h\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}})k^2æ-$$
$$-2e^{-2h\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}}hæ\sigma_{п2}{}^2\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}+2h(1+æ)e^{-2h\sigma_{п2}}(\sigma_{п2}{}^2-k^2)^{\frac{3}{2}}$$

При получении представления $w(x,y)$ имелось в виду, что аналитическое продолжение функции $\psi(\sigma)=|\sigma|$ в комплексной плоскости α это $\psi(\alpha)=\alpha$ при $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, и $\psi(\alpha)=-\alpha$ при $\mathrm{Re}(\alpha)<0$. С такими разрезами в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ функции $K_j(\alpha)(j=1,2)$ не могут иметь чисто комплексных нулей. Поскольку, если $\alpha=\alpha_j(j=1,2)$ будут чисто комплексными нулями $K_j(\alpha)(j=1,2)$, находящимися в первой четверти, то, следовательно, $\alpha=\bar{\alpha}_j(j=1,2)$ также будут нулями $K_j(\alpha)(j=1,2)$ ($\overline{\sqrt{\alpha_j{}^2-k^2}}=\sqrt{\bar{\alpha}_j{}^2-k^2}$), а это означает, что $u(x,y)$ будет иметь составляющие в виде приходящей волны из $x\to+\infty$, что противоречит поставленной задаче. Нетрудно увидеть, что $\bar{u}(\alpha,y)$ на мнимой оси не имеет полюсов.

Чтобы выявить влияние полубесконечного электрода на характер волнового поля в пьезоэлектрике с бесконечным электродом, следует определить асимптотические формулы $w(x,y)$ в далёких точках. Для получения асимптотической формулы, когда $y>h$ при $kr\to\infty$, перейдя к полярным координатам $y-h=r\sin\theta,\ x=r\cos\theta$ и сделав замену переменных $\lambda_1(\sigma)=\sigma|\cos\theta|-\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta$, $\lambda_2(\sigma)=\sigma|\cos\theta|+\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta$ [5], [11], [13], получим:

$$w(r,\theta)=A^*w_{пов}(r\cos\theta,r\sin\theta)+A^*D_1^*\frac{e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}}{(kr)^{1/2}}+A^*D_1^*\frac{e^{i(kr+\frac{\pi}{4})}}{(kr)^{3/2}}+$$

$$+A^*D_1^*D_2^*\frac{e^{ikr\sin\theta}}{(kr)^2\cos^2\theta}+O((kr)^{-5/2})\text{ при } kr\to\infty \qquad (18)$$

$$D_1^*=(4h(1+æ)(1+\frac{(1-e^{-2ikh})}{2ikh}\frac{æ}{1+æ}))^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

$$D_2^*=\frac{k(i(1-e^{2ikh})(-2ikh(1+æ)+(1+e^{2ikh})æ)-4kh(1+æ))}{4(1+æ)^2((1-e^{2ikh})æ+2ikh(1+æ))^2}\times$$

$$\times((1-e^{2ikh})æ+2ikh(1+æ))-4ih^2k^2(1-e^{2ikh})(1+æ)^2$$

А при $|y|<h$, $|kx|\to\infty$, в случае $kh\neq h_a$ получим

$$w(x,y)=A^*D_1^*w^{(1)}e^{i\sigma_{п1}|x|}+A^*D_1^*w^{(1)}e^{i\sigma_{п2}|x|}+A^*D_1^*A_4^*\frac{e^{ikx}}{(k|x|)^{3/2}}$$

$$+A^*D_1^*A_5^*\frac{1}{(kx)^2}+O(|kx|^{-5/2})\qquad\text{при } |kx|\to\infty \quad (19)$$

$$A_4^*=\frac{-8k^2h(y-h)æ+4i(1+æ)e^{-ikh}k\sqrt{k}(y\operatorname{ch}kh+h\operatorname{sh}kh)}{\overline{K}^+(k)\sqrt{2}æ(2khæ-(1+æ)(1-e^{-2kh}))(k-\sigma_п)}$$

$$A_5^*=\frac{ie^{ikh}\sin ky}{(-1+e^{2ikh})æ-2ikh(1+æ)}\left(\frac{2kh^2(1+æ)}{(-1+e^{2ikh})æ-2ikh(1+æ)}\right.$$

$$\left.-\frac{(1+e^{2ikh})æ-2ikh(1+æ)}{2k(1+æ)}-\frac{(1+æ)khe^{iky}+e^{ikh}æ\sin k(-h+y)}{k(1+æ)\sin ky}\right)$$

А в случае $kh=h_a$,

$$w(x,y)=A^*D_1^*w^{(1)}e^{i\sigma_{п1}|x|}+A^*D_1^*w^{(1)}e^{i\sigma_{п2}|x|}+A^*D_1^*A_3^*\frac{e^{i(k|x|-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{|kx|}}+$$

$$+A^*D_1^*A_4\frac{e^{i(k|x|-\frac{\pi}{4})}}{(k|x|)^{3/2}}+A^*D_1^*A_5^*\frac{1}{(kx)^2}+O(|kx|^{-5/2})\qquad\text{при } |kx|\to\infty\ (20)$$

$$A_3^*=\frac{-\sqrt{2k}k(y-h)æ+i\sqrt{2k}e^{-kh}(1+æ)\operatorname{sh}kh}{\overline{K}^+(k)4h^2k^2æ^2(k-\sigma_п)}$$

$$w^{(1)}=-\frac{f(\sigma_{п1})}{\overline{K}^+(\sigma_{п1})(\sigma_{п1}-\sigma_п)K_1'(\sigma_{п1})K_2(\sigma_{п1})}$$

$$w^{(2)}=\begin{cases}-\dfrac{f(\sigma_{п2})}{\overline{K}^+(\sigma_{п2})(\sigma_{п2}-\sigma_п)K_1'(\sigma_{п2})K_2'(\sigma_{п2})}, & kh>h_a\\ 0, & kh\leq h_a\end{cases}$$

$$f(\sigma)=2(1+æ)\sqrt{\sigma^2-k^2}e^{-(\sigma+\sqrt{\sigma^2-k^2})h}\mathrm{sh}(\sigma h-\sqrt{\sigma^2-k^2}y)-$$
$$-2æ\sigma e^{-2\sqrt{\sigma^2-k^2}h}\mathrm{sh}(\sqrt{\sigma^2-k^2}(y-h))$$

Из формул (19),(20) следует, что наличие полубесконечного электрода приводит к появлению двух волн с волновыми числами $\sigma_{п1},\sigma_{п2}$ при $kh>h_a$, а при $kh\le h_a$ распространяется волна с волновым числом $\sigma_{п1}$, а также к появлению цилиндрической волны и слагаемого (последний в асимптотиках (19, 20)), имеющего неволновой характер по x при $|kx|\to\infty$,

Из формулы (18) следует, что наличие полубесконечного электрода при $kh>h_a$ приводит к появлению двух поверхностных волн с волновыми числами $\sigma_{п1},\sigma_{п2}$, а при $kh\le h_a$ появляется только поверхностная волна с волновым числом $\sigma_{п1}$, а также приводит к появлению цилиндрической волны, у которой четвёртый член в формуле (18) распространяется по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $c/\sin\theta$ (или распространяется по направлению y со скоростью c).

В заключении приведём асимптотическую формулу электрической индукции около конца полубесконечного электрода при $-\pi\le\theta\le-\pi/2$ и $r=\sqrt{x^2+(y+h)^2}\to 0$ $D_\theta(r,\theta)=D_0\dfrac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}}+O(1)$, а при $\pi/2\le\theta\le\pi$ и $r\to 0$

$$D_\theta(r,\theta)=-iD_0\frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}}+O(1),$$

где $D_0=-e_{15}(1+æ)\sqrt{\sigma_п}(e^{-2h\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}}-e^{-2h\sigma_п})\bar{K}^{+}(\sigma_п)e^{-\frac{i\pi}{4}}/\sqrt{\pi}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Б.Нобл. Метод Виннера-Хопфа. М.: ИИЛ, 1962. 279с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ, второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
4. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544с.
5. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.//Уч. записи ЕГУ. 1979. №3. С.29-34
6. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.
7. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005.Т.58. №1.С.38-50.
8. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краях параллельных полубесконечных металлических слоев. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005.Т.58. №3. С.16-28.
9. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого

волновода в составное упругое пространство.// Изв.НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23 – 37.

10. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №1. С.40–51.
11. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50–69.
12. Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными бесконечными металлическими слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.70-79.
13. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.56-66.
14. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн.// Доклады НАН РА. 2010. Т. 110. №3. С.261-271.

Сведения об авторах:

Григорян Эдуард Хосровович,
Доктор физ.-мат. наук, профессор ЕГУ
Адрес: Ереван, ул. Алека Манукяна 1, ЕГУ, факультет математики и механики
Тел: (+37410)23-03-89

Синанян Самвел Суренович,
Кандидат физ.-мат. наук, ЕГУ
Тел: (+37410)65-21-06
E-mail: ssinanyan@mail.ru

Поступила в редакцию 23.12.2011

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

УДК.539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ ДВИЖУЩИХСЯ НАГРУЗКАХ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: стержень, цилиндрическая оболочка, подвижная нагрузка, потеря устойчивости, критическое время.
Key words: bar, cylindrical shell, moving load, bucling, critical moment.

Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.
Առաձգական համակարգերի կայունությունը շարժական բեռերի դեպքում
Ձողի և գլանային թաղանթի կայունությունն ուսումնասիրվում է շարժական բեռերի դեպքում: Դիտարկված են կենտրոնացված և հաստատուն ինտեսիվության բեռերի դեպքերը, երբ շարժումն իրականացվում է հաստատուն արագությամբ: Նախնական վիճակների հավասարումները լուծվում են ճշգրիտ: Կրիտիկական ժամանակը որոշվում է է այն պայմանից, որ համակարգի շարժումը դադարում է տատանողական լինելուց:

L.A.Movsisyan, G.G.Nersisyan
About stability of elastic systems in moving loads
The stability of roads and cylindrical shells under moving load is investiqated. We consider the cases of concentrated forces and uniformly distributed ones when the motion carrying out constant velocity. Equations of the initial state can be solved exactly. The critical time of bucling is found by condition that motion of systems stops being vibration.

В качестве таковых рассматриваются стержень и цилиндрическая оболочка. Изучается их устойчивость при движущихся нагрузках. Уравнения начальных состояний (динамика) решаются точно. Критическое время потери устойчивости определяется из условия, что движение возмущенного состояния перестает быть колебательным.

Поведению упругих тел под воздействием движущихся нагрузок (неустойчивости) посвящено большое число работ [1,2]. Подобные задачи в линейной и нелинейной постановках для цилиндрических оболочек можно найти в [3].

Устойчивость стержней и цилиндрических оболочек при движущихся нагрузках рассматривалась в кзазистатической постановке без учёта начальных инерционных членов [4, 5].

1. Здесь рассматриваются задачи устойчивости для стержня. Уравнение движения начального состояния при произвольной нагрузке

$$EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+f(x,t). \tag{1.1}$$

Предполагается, что концы стержня неподвижны

$$u=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=l \tag{1.2}$$

и начальные условия нулевые

$$u=\frac{\partial u}{\partial t}=0 \text{ при } t=0 . \tag{1.3}$$

Если искать решение (1.1) при условиях (1.2) и (1.3) в виде

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\mu_n x\,,\ \ \mu_n=\frac{n\pi}{l}, \tag{1.4}$$

то будем иметь

$$u_n = -\frac{a}{EF\mu_n}\int_0^l a_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau, \qquad (1.5)$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\mu_n x dx, \quad a^2 = \frac{F}{\rho}, \quad \omega_n = a\mu_n.$$

При этом, продольная сила определится как

$$P = EF\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}u_n(t)\cos\mu_n x. \qquad (1.6)$$

Будем изучать два случая для внешней нагрузки.

а) Сосредоточенная сила P_0 с постоянной скоростью c движется с конца $x=0$ к $x=l$ и направлена она к начальной точке:

$$f(x,t) = P_0\delta(x-ct).$$

Тогда

$$P = 2P_0\cdot N_1, \quad \alpha = \frac{c}{a}$$

$$N_1 = \frac{1}{\pi(1-\alpha^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha\sin\omega_n t - \sin\alpha\omega_n t)\cos\mu_n x \qquad (1.7)$$

В случае, когда неподвижная сила приложена в срединной точке стержня, её критическое значение равно восьми Эйлеровой силе [6]

$$P_{0\text{кр}} = 8\frac{EJ\pi^2}{l^2}$$

Подобная задача для вязкоупругого разномодульного стержня рассматривалась в [4] в квазистатической постановке: определяется критическое время потери устойчивости без учёта инерционных членов.

б) Сдвигающее постоянное усилие с конца $x=0$ распространяется с постоянной скоростью к другому концу –

$$f(x,t) = p_0\left[H(x) - H(x-ct)\right] \qquad (1.8)$$

Тогда продольная сила будет

$$P = 2p_0\cdot N_2.$$

$$N_2 = \frac{1}{\pi^2(1-\alpha^2)}\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}\left[\alpha^2 + \cos\alpha\omega_n t - 1 - \alpha^2\cos\omega_n t\right]\cos\mu_n x \qquad (1.9)$$

В случае, когда сдвигающие напряжения противоположно направлены по всей длине стержня (случай статики), критическое напряжение определяется формулой [7]

$$S_{\text{кр}} = \frac{E\pi}{l}\sqrt{\frac{J}{F}}$$

Уравнение устойчивости, согласно принятому предположению относительно определения критического момента времени, будет

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \qquad (1.10)$$

При условиях шарнирного опирания на концах балки решение (1.10) с такими P, как (1.7) и (1.9), будем искать в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \sin \mu_m x \,. \tag{1.11}$$

Тогда критическое время потери устойчивости для данной нагрузки (или наоборот) будет определяться из условия разрешимости системы

$$\left(m^2 + b_{2m}\right) m w_m + \sum_{n=1, m \neq n}^{\infty} \left(b_{m+n} + b_{m-n}\right) n w_n = 0 \,, \tag{1.12}$$

где для первой задачи

$$b_n = \lambda \cdot N_1 \;,\; \lambda = \frac{P_0 l^2}{EJ\pi^2} \;, \tag{1.13}$$

а для второй –

$$b_n = \lambda N_2 \;,\; \lambda = \frac{p_0 l^3}{EJ\pi^2} \,. \tag{1.14}$$

В табл. 1 и 2 для различных α приведены значения критической нагрузки λ для заданных моментов времени $\xi = \dfrac{ct}{l}$, соответственно для задач а) и б).

Таблица 1

ξ \ α	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
0.1	5.113	5.112	5.112	5.061
0.2	3.759	3.759	3.758	3.721
0.3	4.070	4.070	4.069	4.029
0.4	5.666	5.666	5.665	5.605
0.5	8.000	8.000	7.999	7.920
0.6	8.938	8.938	8.937	8.849
0.7	9.893	9.893	9.892	9.794
0.8	12.39	12.39	12.38	12.27
0.9	21.16	21.16	21.15	20.96

По этим таблицам можно определить для данного момента времени при какой скорости (или наоборот) достигается критическая нагрузка.

Для второй задачи в каждой клетке помещены два значения λ. Первые соответствуют случаю, когда сдвигающее усилие противоположно направлено к направлению распространения нагрузки, а вторые – наоборот.

Что интересно (и удивительно), даже для больших скоростей движения нагрузки (например, для металлов больше, чем 720 км/час) значения критических нагрузок незначительны, порядка 1%, отличаются от случая $\alpha = 0$, т.е. статический подход дает вполне приемлемый результат для определения критических нагрузок.

Следует отметить также, что поведение критических нагрузок несимметрично относительно сжатой и растянутой частей стержня.

Таблица 2

ξ \ α	0	10^{-3}	10^{-2}	$2\cdot10^{-1}$
0.1	92.42	92.19	92.13	91.94
	406.7	406.7	406.7	405.6
0.2	29.16	29.16	29.16	29.09
	113.6	113.6	113.5	113.3
0.3	16.77	16.77	10.77	16.73
	57.17	57.17	57.16	57.02
0.4	12.45	12.45	12.45	12.42
	36.71	36.71	36.70	36.61
0.5	10.62	10.62	10.62	10.59
	26.64	26.64	26.63	26.57
0.6	9.743	9.243	9.74	9.719
	20.19	20.19	20.18	20.14
0.7	9.209	9.209	9.209	9.186
	15.07	15.06	15.06	15.03
0.8	8.805	8.805	8.804	8.783
	11.28	11.28	11.27	11.25
0.9	8.527	8.527	8.526	8.505
	9.119	9.119	9.118	9.096
1.0	8.425	8.425	8.422	8.404

2. Движение цилиндрической оболочки под нормальным давлением интенсивности $Z(x,t)$ описывается системой

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi^2}+\nu r\frac{\partial w_0}{\partial\xi}=\frac{\partial^2 w_0}{\partial\tau^2}$$

$$\nu r\frac{\partial u_0}{\partial\xi}+r^2 w_0=-\frac{\partial^2 w_0}{\partial\tau^2}+Q\ ,\ \ Q=\frac{\left(1-\nu^2\right)l^2}{Eh}Z(\xi,t) \tag{2.1}$$

где безразмерные координаты

$$x=l\xi,\ \ \tau=\frac{at}{l}\ ,\ \ a^2=\frac{E}{\rho\left(1-\nu^2\right)}\ ,\ \ r=\frac{l}{R}\ .$$

В предположении, что концы оболочки неподвижны, ищем решение (2.1) в виде

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin n\pi\xi\ ,\quad w_0=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\cos n\pi\xi\ ,\ \ Q=\sum_{n=0}^{\infty}q_n\cos n\pi\xi\,. \tag{2.2}$$

Тогда для начальных усилий получим

$$\overline{T}_1^0=\frac{T_1^0}{Eh}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos n\pi\xi\ ,\ \ \overline{T}_2^0=\frac{T_2^0}{Eh}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\pi\xi$$

$$a_0=\frac{r}{l\left(1-\nu^2\right)}f_0\ ,\ \ a_n=\frac{1}{l\left(1-\nu^2\right)}\left(f_n+\nu n\pi\varphi_n\right) \tag{2.3}$$

$$b_0 = \nu a_0\ ,\ b_n = \frac{1}{l\left(1-\nu^2\right)}\left(\nu_n r f_n + n\pi\varphi_n\right)$$

$$f_0 = \frac{1}{r}\int_0^\tau q_0\left(\theta\right)\sin r\left(\tau-\theta\right)d\theta$$

$$f_n = \frac{1}{p_2^2 - p_1^2}\int_0^\tau a_n\left(\theta\right)\left[\frac{\left(n\pi\right)^2 - p_1^2}{p_1}\sin p_1\left(\tau-\theta\right) - \frac{\left(\pi n\right)^2 - p_2^2}{p_2}\sin p_2\left(\tau-\theta\right)\right]d\theta$$

$$\varphi_n = \frac{\nu r n\pi}{p_2^2 - p_1^2}\int_0^\tau a_n\left(\theta\right)\left[\frac{\sin p_2\left(\tau-\theta\right)}{p_2} - \frac{\sin p_1\left(\tau-\theta\right)}{p_1}\right]d\theta$$

$$p_{1,2} = \left\{\frac{1}{2}\left[\left(n\pi\right)^2 + r^2\right] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(n\pi\right)^2 - r^2\right] + \nu^2 r^2\left(n\pi\right)^2}\right\}^{1/2}$$

Уравнением устойчивости с учетом предположений относительно критического времени будет

$$D\Delta^4 w + \frac{Eh}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \Delta^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_1^0\frac{\partial w}{\partial x}\right) + T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0 \tag{2.4}$$

Принимая, что края оболочки свободно оперты, w будем искать в виде

$$w = \cos\frac{ny}{R}\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{2.5}$$

Учитывая (2.3) и (2.5) для определения критических параметров из (2.4), получим

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{h^2}{12r^2R^2}\left[\left(m\pi\right)^2 + r^2n^2\right]^4 + \left(1-\nu^2\right)r^2\left(m\pi\right)^4\right\}w_m + \\ &+\frac{1}{2}\left[\left(m\pi\right)^2 + r^2n^2\right]^2\left\{n^2r^2\left[\sum_{s=1}^{m} a_{m-s}w_s + \sum_{s=m}^{\infty} a_{s-m}w_s - \right.\right. \\ &\left.\left. -\sum_{s=1}^{\infty} a_{m+s}w_s\right] + \nu m\pi^2\left[\sum_{s=1}^{m-1} b_{m-s}sw_s + \sum_{s=m+1}^{\infty} b_{s-m}sw_s + \sum_{s=1}^{\infty} b_{m+s}sw_s\right]\right\} = 0\end{aligned} \tag{2.6}$$

Для произвольной нагрузки коэффициенты a_n и b_n определяются согласно (2.3), а критические параметры – из (2.6).

В качестве примера рассмотрим случай, когда постоянное нормальное давление, начиная с момента времени $t = 0$, с постоянной скоростью c движется в сторону другого конца. Так как нас интересует влияние скорости движения нагрузки на критические параметры, для простоты примем, что коэффициент Пуассона материала - $\nu = 0$. Это почти равносильно пренебрежением продольным инерционным членом по сравнению с поперечным. Вследствие чего, T_1^0. Наличие T_1^0 незначительно уменьшает величину искомых параметров. Коэффициентами a_n в данном случае будут

$$a_0 = Q_0\alpha\left(\frac{1}{r}\sin r\tau - \tau\right), \; Q = \frac{q}{E}\frac{R}{h}$$
$$a_n = \frac{2Q_0}{n\pi}\left(\frac{n\pi}{r}\sin r\tau - \sin n\pi\alpha\tau\right)\frac{r^2}{r^2-\left(n\pi\alpha\right)^2} \qquad (2.7)$$

В табл. 3 приведены критические $\lambda = \frac{q}{E}\beta^3$ для различных геометрических $\left(\beta = \frac{R}{h}, \; \eta = \frac{r}{\pi}\right)$ и физического $\left(\alpha = \frac{c}{a}\right)$ параметров.

Основной вывод относительно влияния скорости движения нагрузки такой же, как и в предыдущем пункте.

Из таблицы видно, что с увеличением β (т.е., как будто с уменьшением толщины оболочки) критическая λ увеличивается. Дело в том, что обычно в качестве искомого параметра (напр.,[5]) принимают $\frac{q}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^2$, в то время, как здесь $\frac{R}{h}$ фигурирует в третьей степени. Так что нет противоречия.

3. В [8] приводится решение задачи устойчивости бесконечно длинной цилиндрической оболочки под кольцевым нормальным давлением. Было интересно рассмотреть такую задачу, когда кольцевое усилие движется с постоянной скоростью, как и в предыдущих пунктах. При предположении, что движение осуществляется в положительном направлении координатной оси, уравнение движения запишется

$$D\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2}w_0 + \rho h\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -P\delta\left(x - ct\right) \qquad (3.1)$$

Начальное условие нулевое.

Таблица 3

β	α	0		10^{-2}		10^{-1}	
	ξ \ η	4	5	4	5	4	5
200	0.25	2.574	2.051	2.574	2.051	2.566	2.047
	0.5	1.362	1.088	1.362	1.088	1.361	1.087
	0.75	1.036	0.8274	1.036	0.8274	1.305	0.8272
	1	0.9728	0.7772	0.9728	0.7772	0.9728	0.7772
400	0.25	3.620	2.889	3.620	2.889	3.601	2.882
	0.5	1.921	1.535	1.921	1.535	1.920	1.534
	0.75	1.462	1.168	1.462	1.168	1.461	1.68
	1	1.373	1.097	1.373	1.097	1.373	1.097
500	0.25	4.043	3.227	4.043	3.227	4.029	3.219
	0.5	2.147	1.715	2.147	1.715	2.144	1.714
	0.75	1.633	1.306	1.633	1.306	1.632	1.305
	1	1.534	1.227	1.534	1.227	1.534	1.227

Таблица 3 (продолжение)

β	α \ η, ξ	0		10^{-2}		10^{-1}	
		2	3	2	3	2	3
200	0.25	5.243	3.453	5.242	3.453	5.171	3.436
	0.5	2.750	1.822	2.749	1.822	2.738	1.819
	0.75	2.086	1.384	2.085	1.1.384	2.082	1.382
	1	1.957	1.299	1.958	1.299	1.958	1.299
400	0.25	7.335	4.849	7.334	4.848	7.296	4.825
	0.5	3.868	2.567	3.868	2.567	3.862	2.562
	0.75	2.938	1.952	2.938	1.952	2.936	1.950
	1	2.759	1.834	2.759	1.834	2.759	1.833
500	0.25	8.179	5.411	8.178	5.411	8.065	5.385
	0.5	4.318	2.868	4.318	2.868	4.300	2.862
	0.75	3.281	2.181	3.281	2.181	3.275	2.179
	1	3.082	2.049	3.082	2.049	3.082	2.049

Переходя к безразмерным координатам,

$$\xi = \frac{x}{R}\ ,\ \ \tau = \frac{at}{R}\ ,\ \ a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\ . \tag{3.2}$$

Вместо (3.1) будем иметь

$$\begin{gathered} A^2\frac{\partial^4 w_0}{\partial\xi^4} + w_0 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial\tau^2} = -P\frac{R}{Eh}\delta\left(\xi - \alpha\tau\right) \\ A^2 = \frac{h^2}{12\left(1-\nu^2\right)R^2}\ ,\ \ \alpha = \frac{c}{a} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Подвергая (3.3) преобразованию Фурье относительно ξ, получим

$$\frac{d^2\overline{w}_0}{d\tau^2} + \omega^2\overline{w}_0 = Qe^{i\alpha æ\tau}, \tag{3.4}$$

где

$$Q = -\frac{PR}{Eh}\ ,\ \ \omega^2 = A^2 æ^4 + 1$$

Прогиб оболочки определится формулой

$$w_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{w}_0 e^{-iæ\xi}dæ \tag{3.5}$$

Для трансформанты $\overline{w}_0$ имеем

$$\overline{w}_0 = Q\left[\frac{e^{i\alpha æ\tau}}{\omega^2 - \alpha^2 æ^2} - \frac{e^{i\alpha\omega\tau}}{\omega\left(\omega - æ\alpha\right)} - \frac{e^{-i\alpha\omega\tau}}{\omega\left(\omega + æ\alpha\right)}\right]. \tag{3.6}$$

Первый член в (3.6) – частное решение (3.4), соответствующее правой части. Сначала получим выражение w_0 для этого члена. Особые точки, соответствующие этому члену, суть

$$æ_1 = -a_1 + ia_2, \quad æ_2 = a_1 + ia_2$$
$$æ_3 = -a_1 - ia_2, \quad æ_4 = a_1 - ia_2 \tag{3.7}$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2A}\left(\alpha^2 + 2A\right)^{1/2}, \quad a_2 = \frac{1}{2A}\left(2A - \alpha^2\right)^{1/2}$$

При вычислении корней уравнения $\omega^2 = \alpha^2 æ^2$ принималось $2A > \alpha^2$. Так как нас интересует порядок скорости движения, при котором инерционным членом в (3.1) можно пренебречь, то получаемая при таком ограничении скорость довольно большая – $\frac{c}{a} \le 0.78\sqrt{\frac{h}{R}}$. В противном случае можно аналогичным образом вычислить интегралы, как и здесь. Но только особые точки тогда будут находиться на действительной оси.

Сумма вычетов, соответствующая первым двум корням (1.7), дает выражение w_0^0 для $\alpha\tau > \xi$ –

$$w_0^0 = Q\sqrt{\frac{A}{4A^2 - \alpha^4}}e^{-a_2(\alpha\tau - \xi)}\sin\left[a_1\left(\alpha\tau - \xi\right) + \varepsilon\right]$$
$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{a_1}{a_2} \tag{3.8}$$

Два следующих корня (3.7) дают выражения w_0^0 для $\alpha\tau < \xi$

$$w_0^0 = Q\sqrt{\frac{A}{4A^2 - \alpha^4}}e^{a_2(\alpha\tau - \xi)}\sin\left[\varepsilon - a_1\left(\alpha\tau - \xi\right)\right] \tag{3.9}$$

В случае квазистатики (пренебрежение инерционным членом) вместо (3.8), (3.9) будем иметь

$$w_0^0 = \frac{Q}{2\sqrt{A}}e^{-\gamma(\alpha\tau - \xi)}\sin\left[\gamma\left(\alpha\tau - \xi\right) + \frac{\pi}{4}\right], \ \gamma = \sqrt{\frac{1}{2A}}, \ \alpha\tau > \xi$$
$$w_0^0 = \frac{Q}{2\sqrt{A}}e^{\gamma(\alpha\tau - \xi)}\sin\left[\frac{\pi}{4} - \gamma\left(\alpha\tau - \xi\right)\right], \quad \alpha\tau < \xi \tag{3.10}$$

При $\alpha = 0$ из (3.10) получим выражение для w в [5].

Максимальный прогиб

$$w_д \simeq w_{ст.}\left(1 + \frac{\alpha^4}{8A^2}\right), \ w_{ст} = \frac{Q}{2\sqrt{2A}} \tag{3.11}$$

Интервалы, вне которого можно считать, что оболочка не деформируется $\left(e^{-3} \approx 0\right)$ соответственно для статики и динамики, будут

$$\mp 3\sqrt{2A} \qquad \text{и} \qquad \mp 3\sqrt{2A}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4A}\right) \tag{3.12}$$

Как видно из приведённых формул, и максимальный прогиб, и интервал, деформированный для динамики больше, чем для статики и с увеличением скорости подвижной нагрузки разница между ними увеличивается, однако следует подчеркнуть, что разница эта уж не очень большая.

Пожалуй, можно довольствоваться только этим решением (без решения однородной части), как часто это и делается по известным соображениям. В части задачи устойчивости мы так и поступаем.

Решение однородной части можно находить вышеприведённым методом. Однако, для краткости и разнообразия приведём его методом стационарной фазы.

Единственная действительная стационарная точка функций

$$K'(æ)=0\ ,\ K(æ)=\omega\pm æ\frac{\xi}{\tau} \tag{3.13}$$

есть

$$æ_1=\pm\sqrt{u+v+\frac{1}{3}\alpha A^2}$$

$$u=\left(-q+\sqrt{p^3+q^2}\right)^{1/3}\ ,v=\left(-q-\sqrt{p^3+q^2}\right)^{1/3}$$

$$p=-\frac{1}{9}\left(\alpha^3A^2\right)^3\ ,\quad q=-\frac{1}{27}\left(\alpha^3A^2\right)^3-\frac{\alpha^2}{4}$$

Тогда решение однородной части запишется

$$w_1=-\frac{Q}{\left(2\pi\tau K''\right)^{1/2}}\frac{\cos\left[\omega(æ_1)-æ_1\frac{\xi}{\tau}+\frac{\pi}{4}\right]}{\omega(æ_1)\left[\omega(æ_1)-æ_1\alpha\right]}$$

$$K''(æ_1)=\frac{2A^2æ_1^2\left(A^2æ_1^3+3\right)}{\left(A^2æ_1^4+1\right)^{3/2}}>0 \tag{3.14}$$

В (3.14) имеется в виду положительное значение $æ_1$.

В [8] для статики получено приближенное значение критического усилия (формула (11.203))

$$P_{\text{кр}}=\frac{\sqrt{12}}{9}\frac{Eh}{\left(1-v^2\right)^{0.75}}\left(\frac{h}{R}\right)^{3/2} \tag{3.15}$$

Судя по результатам предыдущих задач, а также приближенным оценкам сравнительного максимального прогиба (начальное усилие пропорционально прогибу) и интервалом воздействия движущей нагрузки, с достаточной уверенностью можно утверждать, что здесь также влиянием инерционного члена можно пренебречь, иначе говоря, при получении формулы, аналогичной (3.15), для настоящего случая вместо (3.10) должны брать (3.9), то есть выражение $\frac{Q}{2\sqrt{A}}$ должно быть заменено на $Q\sqrt{\frac{A}{4A^2-\alpha^4}}$. В конечном счете, изменение критического усилия будет незначительно, как и в предыдущих примерах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит., 1959. 439 с.
2. Филиппов А.С. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Мовсисян Л.А. Об устойчивости вязкоупругого разномодульного стержня при движущейся нагрузке. //Изв.РАН. МТТ. 1994. №4. С.171-175.
5. Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. Об устойчивости вязкоупругой цилиндрической оболочки при движущейся нагрузке. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №2. С.28–32.
6. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
7. Флеминг, Герман, Муни. Потеря устойчивости конструкций под действием поверхностных усилий сдвига. // Прикладная механика. Тр. амер. общ. инж. механиков. 1965. №1. С.225-227.
8. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматлит, 1963. 879 с.

Сведения об авторах:

Мовсисян Лаврентий Александрович,
Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна 24[б]
Тел.: (+37410). 56821
E-mail: mechins@sci.am

Нерсисян Гриша Геворкович,
К.ф-м.н., доцент, Ар.Г.А.У.
Адрес: г.Ереван, пр.Азатутян 7[б], кв.37.
Тел.: 20-68-79.

Поступила в редакцию 19.09.2011

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПРИ *k* НУЛЕВЫХ И *q* ПАР ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Амбарцумян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, системы нелинейных дифференциальных уравнений, критический случай, функция Ляпунова.

Keywords: stability, non-linear differential equations, critical case, Liapounoff's functions.

Համբարձումյան Ս.Ռ.
Ըստ ազդող ուժի կայունության մասին *k* զրոյական և *q* զույգ կեղծ արմատներով կրիտիկական դեպքում

Ուսումնասիրվում է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրը կրիտիկական դեպքում, երբ համակարգի գծային մոտավորության համապատասխան բնութագրիչ հավասարումն ունի k զրոյական և q զույգ կեղծ արմատներ:

Ստացված են բավարար պայմաններ. որոնց դեպքում դիտարկվող համակարգի զրոյական լուծումը կլինի ասիմպտոտիկ կայուն ըստ ազդող ուժի:

Hambardzumyan S.R.
On the stability by acting force in the critical case at *k* zero and *q* pairs of the imagining roots

The problem of stability of system of non-linear differential equations in the critical case is investigated, when the characteristic equation, corresponding to linear approximation of system, has ***k*** zero and ***q*** pairs imagining roots.

Sufficient conditions have been obtained in case of which the trivial solution of the considered system is either asymptotic stable for acting force.

Исследуется задача устойчивости по действующей силе системы нелинейных дифференциальных уравнений в критическом случае, когда характеристическое уравнение соответствующего линейного приближения системы имеет ***k*** нулевых и ***q*** пар чисто мнимых корней.

Получены достаточные условия, накладываемые на нелинейные члены, при которых тривиальное решение будет асимптотически устойчивым по действующей силе.

1. Рассмотрим задачу устойчивости по действующей силе [1], [2] системы нелинейных дифференциальных уравнений $\boldsymbol{n}$ -го порядка

$$\begin{cases} \dot{u}_p = U_p\left(u_1,...,u_k,x_1,...,x_q,y_1,...,y_q,z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \left(p=1,...,k\right) \\ \dot{x}_j = \alpha_j y_j + X_j\left(u_1,...,u_k,x_1,...,x_q,y_1,...,y_q,z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \left(j=1,...,q\right) \\ \dot{y}_j = -\alpha_j x_j + Y_j\left(u_1,...,u_k,x_1,...,x_q,y_1,...,y_q,z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \\ \dot{z}_s = a_{s1}z_1+...+a_{sn-k-2q}z_{n-k-2q} + Z_s\left(u_1,...,u_k,x_1,...,x_q,y_1,...,y_q,z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \\ & \left(s=1,...,n-k-2q\right) \end{cases} \quad (1.1)$$

характеристическое уравнение соответствующего линейного приближения которой удовлетворяет условиям

$$\lambda_p = 0,\ \lambda_j = i\alpha_j,\ \lambda_m = -i\alpha_m,\ \mathrm{Re}\lambda_S < 0$$

$\left(p=1,\cdots,k;\ j=1,\cdots,q;\ m=1,\cdots,q;\ s=1,\cdots,n-k-2q\right)$,

т.е. имеем $\boldsymbol{k}$ нулевых и $\boldsymbol{q}$ пар чисто мнимых корней $\pm i\alpha_j$ и $\left(n-k-2q\right)$ корней с отрицательными вещественными частями, где $\alpha_j \neq 0$ – действительные числа $\left(j=1,\cdots,q\right)$, U_p, X_j, Y_j, Z_s – аналитические функции в R^n и $U_p(0,\cdots,0)=X_j(0,\cdots,0)=Y_j(0,\cdots,0)=Z_s(0,\cdots,0)=0$ $(p=1,\cdots,k;\ j=1,\cdots,q;\ s=1,\cdots,n-k-2q)$, разложения которых по степеням переменных $u_1,...,u_k, x_1,...,x_q, y_1,...,y_q, z_1,...,z_{n-k-2q}$ начинается с членов не ниже третьего порядка [3] (стр.102).

Известно [4] (стр.74), что в этом случае только линейным приближением системы (1.1) невозможно решить задачу устойчивости системы (1.1), т.е. имеет место критический случай.

В работе [1] приведены необходимые и достаточные условия, при которых устойчивые по Ляпунову системы линейных дифференциальных уравнений неустойчивы по действующей силе.

А в работах [5-10] найдены достаточные условия, при которых системы нелинейных дифференциальных уравнений второго, а также $\boldsymbol{n}$-го порядка при паре чисто мнимых корней будут устойчивыми, асимптотически устойчивыми или неустойчивыми по действующей силе.

Попытаемся определить достаточные условия, накладываемые на нелинейные члены, при которых тривиальное решение системы (1.1) будет устойчивым, неустойчивым или асимптотически устойчивым по действующей силе [1], [2].

2. Рассмотрим систему (1.1) в общем случае.

Обозначим через $r=\left(u_1,...,u_k, x_1,...,x_q, y_1,...,y_q, z_1,...,z_{n-k-2q}\right)^T$ $\boldsymbol{n}$-мерный вектор-столбец.

Пусть для системы (1.1) существует определенно-положительная функция V(·) следующего вида:

$$V=V_1\left(u_1,...,u_k\right)+V_2\left(x_1,...,x_q, y_1,...,y_q\right)+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj}\, z_s z_j\,, \qquad (2.1)$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim\limits_{\|r\|\to\infty} V=\infty$, (2.2)

2) $\sum\limits_{j=1}^{q}\left[\alpha_j y_j \dfrac{\partial V_2}{\partial x_j}-\alpha_j x_j \dfrac{\partial V_2}{\partial y_j}\right]=0$, (2.3)

3) $H=\sum\limits_{p=1}^{k}\dfrac{\partial V_1}{\partial u_p}U_p+\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{\partial V_2}{\partial x_j}X_j+\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{\partial V_2}{\partial y_j}Y_j+\sum\limits_{s=1}^{n-k-2q}\sum\limits_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj}\, z_j Z_s$ (2.4)

является знакопостоянной отрицательной функцией, причем многообразие точек $\dot{V}\Big|_{(1.1)}=0$ не содержит целых полутраекторий системы (1.1) при $0\le t<\infty$, где $\|r\|$ – евклидова норма вектора r.

Так как система

$$\dot{z}_s=a_{s1}z_1+...+a_{sn-k-2q}z_{n-k-2q} \qquad \left(s=1,...,n-k-2q\right) \qquad (2.5)$$

асимптотически устойчива, то при любой определённо-отрицательной квадратичной форме $W\left(z_1,...,z_{n-k-2q}\right)$ коэффициенты b_{sj} можно определить из условия

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_s z_j\right)\Bigg|_{(2.5)} = W\left(z_1,...,z_{n-k-2q}\right) \tag{2.6}$$

единственным образом [11] (стр. 107).

Тогда полная производная по времени функции V в силу системы (1.1) будет

$$\dot{V}\Big|_{(1.1)} = \sum_{p=1}^{k}\frac{\partial V_1}{\partial u_p}U_p + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j y_j\frac{\partial V_2}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{q}\alpha_j x_j\frac{\partial V_2}{\partial y_j} + \sum_{j=1}^{q}\frac{\partial V_2}{\partial x_j}X_j +$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial V_2}{\partial y_j}Y_j + W\left(z_1,...,z_{n-k-2q}\right) + \sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s = H + W\left(z_1,...,z_{n-k-2q}\right)$$

При условиях (2.2), (2.3), (2.4) производная $\dot{V}\Big|_{(1.1)}$ является знакопостоянной отрицательной функцией. Следовательно, для системы (1.1) выполняются все условия теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [4] (стр. 463). Тогда тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво в целом. Следовательно, тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво и по действующей силе [2].

Таким образом, верна следующая теорема:

Теорема 1. Если для системы (1.1) существует определенно-положительная функция V в виде (2.1) такая, что имеют место условия (2.2), (2.3) и (2.4), то тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Отметим, что полученный результат совпадает с результатом теоремы 1, доказанной в [6] при $k = 0$ и $q = 1$.

3. Теперь снова рассмотрим систему (1.1). Пусть функции U_p, X_j, Y_j $\left(p = 1,\cdots,k;\ j = 1,\cdots,q\right)$ имеют следующий вид:

$$U_p = u_p F,\ X_j = x_j F,\ Y_j = y_j F,$$

где $F\left(u_1,...,u_k, x_1,...,x_q, y_1,...,y_q, z_1,...,z_{n-k-2q}\right)$ – определенно-отрицательная, аналитическая функция в R^n и $F(0,\cdots,0) = 0$, разложения которой по степеням переменных $u_1,...,u_k, x_1,...,x_q, y_1,...,y_q, z_1,...,z_{n-k-2q}$ начинаются с членов не ниже второго порядка.

В этом случае система (1.1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_p = u_p F\left(u_1,...,u_k, x_1,...,x_q, y_1,...,y_q, z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \left(p = 1,...,k\right) \\ \dot{x}_j = \alpha_j y_j + x_j F\left(u_1,...,u_k, x_1,...,x_q, y_1,...,y_q, z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \left(j = 1,...,q\right) \\ \dot{y}_j = -\alpha_j x_j + y_j F\left(u_1,...,u_k, x_1,...,x_q, y_1,...,y_q, z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \\ \dot{z}_s = a_{s1} z_1 + ... + a_{sn-k-2q} z_{n-k-2q} + Z_s\left(u_1,...,u_k, x_1,...,x_q, y_1,...,y_q, z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \\ & \left(s = 1,...,n-k-2q\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

Пусть для системы (3.1) существует определенно-положительная функция

$$V = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k} u_p^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} x_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} y_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_s z_j, \tag{3.2}$$

(предполагается, что коэффициенты b_{sj} определяются из условия (2.6)).

Предположим также, что

$$\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s \tag{3.3}$$

является знакопостоянной отрицательной функцией, причем многообразие точек $\dot{V}\big|_{(3.1)}=0$ не содержит целых полутраекторий системы (1.1) при $0 \le t < \infty$.

В этом случае полная производная функции V в силу системы (3.1) будет

$$\dot{V}\Big|_{(3.1)} = \sum_{p=1}^{k} u_p^2 F + \sum_{j=1}^{q} x_j^2 F + \sum_{j=1}^{q} y_j^2 F + W\left(z_1,\dots,z_{n-k-2q}\right) + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j y_j -$$

$$-\sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j y_j + \sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s = \left[\sum_{p=1}^{k} u_p^2 + \sum_{j=1}^{q}\left(x_j^2 + y_j^2\right)\right] F + \tag{3.4}$$

$$+ W\left(z_1,\dots,z_{n-k-2q}\right) + \sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s$$

Первое и третье слагаемые правой части выражения (3.4) являются знакопостоянными функциями отрицательного знака, а второе слагаемое– определенно-отрицательной функцией. Следовательно, производная $\dot{V}\big|_{(3.1)}$ будет знакопостоянной отрицательной функцией, откуда следует, что для системы (3.1) выполняются все условия теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [4] (стр. 463). Тогда тривиальное решение системы (3.1) асимптотически устойчиво в целом. Следовательно, тривиальное решение системы (3.1), а значит и тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво и по действующей силе [2].

Итак, доказана следующая теорема:

<u>Теорема 2</u>. Если система (1.1) имеет вид (3.1), и для нее существует определенно-положительная квадратичная форма V $(\cdot)$ вида (3.2) такая, что $\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s$ – знакопостоянная отрицательная функция, причем многообразие точек $\dot{V}\big|_{(3.1)}=0$ не содержит целых полутраекторий системы (1.1) при $0 \le t < \infty$, то тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво по действующей силе.

4. <u>Пример 1.</u>

В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = -x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) - b x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8;\\
&\dot{x}_2 = -x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + b x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8;\\
&\dot{x}_3 = \alpha_1 x_4 - a x_3^3 - d x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7 x_8;\\
&\dot{x}_4 = -\alpha_1 x_3 + d x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8;\\
&\dot{x}_5 = \alpha_2 x_6 - x_5\left(x_5^2 + x_6^2\right) - g x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2 x_7 x_8;\\
&\dot{x}_6 = -\alpha_2 x_5 - x_6\left(x_5^2 + x_6^2\right) + g x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 x_6 x_7 x_8;
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\dot{x}_7 = -2x_7 + x_8 - \left(x_7 + \frac{1}{3} x_8 \right)^3 - \left(\frac{4}{3} x_7 + \frac{5}{3} x_8 \right)^3 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right) x_4^2;$$

$$\dot{x}_8 = -x_8 - \left(\frac{1}{3} x_7 + \frac{4}{3} x_8 \right)^3 - \left(\frac{4}{3} x_7 + \frac{5}{3} x_8 \right)^3 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right) x_4^2;$$

где $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ – действительные числа, ***a, b, d, g*** – неотрицательные постоянные.

Нетрудно проверить, что если для линейного приближения уравнений системы (4.1) возьмем функцию Ляпунова в виде $V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right) + \frac{1}{2} x_7^2 + \frac{1}{3} x_7 x_8 + \frac{2}{3} x_8^2$, то условие (2.4), приведенное в теореме 1, примет вид:

$$H = -\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - a x_3^4 - \left(x_5^2 + x_6^2\right)^2 - \left(x_7 + \frac{1}{3} x_8 \right)^4 - \left(\frac{1}{3} x_7 + \frac{4}{3} x_8 \right)^4 - \left(\frac{4}{3} x_7 + \frac{5}{3} x_8 \right)^4 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\right) x_4^2,$$

что представляет собой знакопостоянную отрицательную функцию. Очевидно, что для функции V удовлетворяются также условия (2.2), (2.3). Следовательно, в данном примере для системы (4.1) удовлетворяются все условия теоремы 1 об асимптотической устойчивости по действующей силе. Тогда тривиальное решение системы (4.1) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Пример 2.

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -x_1 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);$$

$$\dot{x}_3 = \alpha_1 x_4 - x_3 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);$$

$$\dot{x}_4 = -\alpha_1 x_3 - x_4 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);$$

$$\dot{x}_5 = \alpha_2 x_6 - x_5 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);$$

$$\dot{x}_6 = -\alpha_2 x_5 - x_6 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);$$

$$\dot{x}_7 = -2x_7 + x_8 - \left(x_7 + \frac{1}{3} x_8 \right)^3 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \right); \tag{4.2}$$

$$\dot{x}_8 = -x_8 - \left(\frac{1}{3} x_7 + \frac{4}{3} x_8 \right)^3 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \right):$$

где $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ – действительные числа.

Очевидно, что система (4.2) имеет вид (3.1).

Если для линейного приближения уравнений системы (4.2) в качестве функции Ляпунова возьмем

$$V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right) + \frac{1}{2} x_7^2 + \frac{1}{3} x_7 x_8 + \frac{2}{3} x_8^2,$$

то функция (3.3) (в теореме 2) примет вид:

$$-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2\right)-$$

$$-\left(\frac{4}{3}x_7+\frac{5}{3}x_8\right)^4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2\right);$$

что представляет собой знакопостоянную отрицательную функцию, т.е. в данном примере для системы (4.2) удовлетворяются все условия теоремы 2 об асимптотической устойчивости по действующей силе. Следовательно, тривиальное решение системы (4.2) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Работа выполнена в рамках научной темы под грифом 0114, осуществляемым на кафедре теоретической механики ЕГУ, которая финансируется из государственных централизованных источников РА.

Автор статьи выражает благодарность доктору физ.-мат. наук В.В. Аветисяну за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян М.С., Шагинян С.Г. О неустойчивости систем дифференциальных уравнений при интегрально-малых возмущениях. // Уч. записки ЕГУ. 1989. №1. С.27-32.
2. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости. // Уч. записки ЕГУ. 1986. №2. С.39-45.
3. Каменков Г.В. Избранные труды. Т.1. М.: Наука, 1971. 272с.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530с.
5. Амбарцумян С.Р. Об одной задаче устойчивости по действующей силе в критическом случае при паре чисто мнимых корней для системы второго порядка. Ереван: Депон. в Арм. НИИНТИ, 2002. №1. С.6.
6. Амбарцумян С.Р. Об одной задаче устойчивости в критическом случае при паре чисто мнимых корней. // Механика твердого тела. Донецк: 2002. Вып. 32. С.117-120.
7. Амбарцумян С.Р. О задаче устойчивости по действующей силе при паре чисто мнимых корней. // В сб. научных трудов конференции: "Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем". Ереван: 2002. С.15-18.
8. Амбарцумян С.Р. Об одном способе решения задачи устойчивости по действующей силе при паре чисто мнимых корней для системы второго порядка. // Естественные и технические науки. М.: 2002. №3. С.8-10.
9. Амбарцумян С.Р. Об устойчивости по действующей силе в критическом случае при паре чисто мнимых корней для системы второго порядка. // Уч. записки ЕГУ. 2003. №3. С.50-56.
10. Амбарцумян С.Р. К задаче устойчивости по действующей силе в критическом случае при k нулевых и q пар чисто мнимых корней. // Актуальные проблемы современной науки. М.: 2003. №4. С.115-118.
11. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 471с.

Сведения об авторе:

Амбарцумян Самвел Размикович – канд. физ-мат.наук, доцент каф. высш.матем. и теорет.механики Армянского Государственного Аграрного Университета
Адрес: 0009, Ереван, ул. Теряна, 74; Тел.: (091) 31.40.01
E-mail: samvelham@yahoo.com

Поступила в редакцию 22.09.2005

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

С О Д Е Р Ж А Н И Е

CONTENTS