

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻՍԻՆԵՂԵՂԵՎԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

2011

УДК 539.3

**ВОЛНА РЭЛЕЯ В СЛУЧАЕ УПРУГО-СТЕСНЁННОЙ ГРАНИЦЫ**

**БЕЛУБЕКЯН М.В.**

**Ключевые слова:** упругое полупространство, поверхностная волна, упруго-стеснённая граница.  
**Keywords:** elastic half-space, surface wave, elastically restrained boundary.

**Բեռնիկյան Մ.Վ.**

**Ռելեյի ալիքները առաձգականորեն կաշկանդված եզրի դեպքում**

Ենթադրվում է որ կիսատարածության եզրը կամ նորմալի կամ շոշոփողի ուղղությամբ առաձգականորեն կաշկանդված է: Հաստատված է մակերևութային ալիքների գոյության պայմանները կախված կաշկանդումը բնութագրող գործակցից և ալիքի երկարությունից:

**Belubekyan M.V.**

**The Rayleigh waves in the case of the elastically restrained boundary**

The boundary of the half-space is elastically restrained in the normal or in the tangential directions. The conditions of the surface wave existence in the dependence of restrained coefficient and wave length are established.

Предполагается, что граница полупространства упруго стеснена либо по направлению нормали, либо по касательному направлению. Установлены условия существования поверхностной волны в зависимости от коэффициента, характеризующего стеснение и от длины волны.

В отличие от классической задачи Рэлея, вместо граничных условий свободной поверхности для упругого изотропного полупространства рассматриваются два варианта усложнённых граничных условий. Предполагается, что либо нормальное напряжение стеснено в направлении перпендикулярной к поверхности нормали, а касательное равно нулю, либо нормальное напряжение равно нулю, а касательное стеснено. Устанавливаются условия, при которых поверхностная волна не может существовать.

1. Упругое изотропное полупространство в прямоугольной декартовой системе координат занимает область  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq y < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

Рассматривается задача плоской деформации

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad w = 0, \quad (1.1)$$

где  $u, v, w$  – проекции упругих перемещений по направлению на координатные оси  $x, y, z$  соответственно.

Известно, что при помощи преобразований

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.2)$$

система уравнений задачи плоской деформации приводится к автономным уравнениям [1]:

$$c_e^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad c_t^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

На границе полупространства задаются граничные условия  $\sigma_{22} = \alpha \nu$ ,  $\sigma_{21} = 0$  ( $\alpha > 0$ ) при  $y = 0$ . (1.4)

Условия (1.4) были предложены Миндлином [1,2] для исследования задачи отражения упругой волны от границы полупространства.

В частных случаях  $\alpha = 0$  получаются условия свободной границы,  $\alpha \rightarrow \infty$  – условия скользящего контакта. Необходимо отметить, что для условий скользящего контакта граничные условия для  $\varphi$  и  $\psi$  также отделяются ( $\psi = 0$ ,  $\partial \varphi / \partial y = 0$  при  $y = 0$ ).

С использованием закона Гука и преобразования (1.2) граничные условия (1.4) приводятся к виду:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (1.5)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

Задача заключается в нахождении решений уравнений (1.3), удовлетворяющих граничным условиям (1.5) и условиям затухания

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \psi = 0. \quad (1.6)$$

Решения уравнений (1.3), удовлетворяющие условию затухания, имеют вид [1]:

$$\varphi = A e^{-k \sqrt{1-\theta \eta} y} \exp i(\omega t - kx), \quad (1.7)$$

$$\psi = B e^{-k \sqrt{1-\eta} y} \exp i(\omega t - kx),$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные

$$\theta = \frac{1-2\nu}{2-1-\nu}, \quad \eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_t^2}, \quad 0 < \eta < 1. \quad (1.8)$$

Подстановка (1.7) в граничные условия (1.5) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных

$$(2 - \eta + \gamma \sqrt{1-\theta}) A - 2i(\sqrt{1-\eta} + 0,5\gamma) B = 0, \quad (1.9)$$

$$2iA \sqrt{1-\theta \eta} + (2 - \eta) B = 0.$$

Равенство нулю детерминанта системы (1.9) приводит к следующему уравнению относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости  $\eta$ :

$$R(\eta) \equiv (2 - \eta)^2 - 4\sqrt{1-\theta \eta} \sqrt{1-\eta} - \gamma \eta \sqrt{1-\theta \eta} = 0, \quad \gamma = \alpha / (\mu k), \quad (1.10)$$

уравнение (1.10) при  $\gamma = 0$  совпадает с классическим уравнением Рэлея, при  $\gamma \rightarrow \infty$  приводит к уравнению задачи с граничными условиями скользящего контакта, из которого следует невозможность поверхностной волны.

В отличие от уравнения Рэлея, уравнение (1.10) дисперсионное, т.е. решение уравнения зависит от волнового числа  $k$ .

2. Уравнение (1.10), как и уравнение Рэлея, имеет корень  $\eta = 0$ . Нетрудно проверить, что этому корню соответствует тривиальное решение  $u = v = 0$ . Исключая корень  $\eta = 0$ , как это делается в [3], уравнение (1.10) приводится к виду

$$R_1(\eta) \equiv \eta - \frac{4(1-\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta} + \sqrt{1-\theta\eta}} - \gamma\sqrt{1-\theta\eta} = 0. \quad (2.1)$$

Функция  $R_1(\eta)$  обладает следующими свойствами:

$$R_1(0) = -2(1-\theta) - \gamma < 0 \quad (\gamma > 0), \quad (2.2)$$

$$R_1(1) = 1 - \gamma\sqrt{1-\theta}.$$

Уравнение (2.1) имеет решение в интервале  $0 < \eta < 1$  при выполнении условия  $\gamma < (1-\theta)^{-1/2}$ . (2.3)

При этом, решение будет единственным, т.к. легко проверить, что  $dR_1/d\eta > 0$ , т.е. непрерывная функция  $R_1(\eta)$  – монотонно возрастающая и на концах промежутка принимает значение разных знаков.

В табл.1 приводятся численные результаты, вычисленные по уравнению (2.10) для параметра  $\eta$ , характеризующего квадрат фазовой скорости поверхностной волны в зависимости от параметра  $\gamma$ , характеризующего степень стеснённости поверхности полупространства при  $\theta = 0,33$ .

Таблица 1

$\gamma$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\eta$	0,8464	0,9005	0,9405	0,9686	0,9867	0,9966

3. Другой вариант условий стеснённой границы имеет вид:

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{21} = \beta u \quad \text{при } y = 0 \quad (\beta > 0). \quad (3.1)$$

В этом случае при  $\beta = 0$  опять получаются граничные условия свободного края, а при  $\beta \rightarrow \infty$  – условия Навье.

С учётом закона Гука и преобразования (1.2) граничные условия (3.1) приводятся к виду:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0, \quad (3.2)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\beta}{\mu} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0,$$

подстановка (1.7) в (3.2) дает

$$(2 - \eta)A - 2i\sqrt{1-\eta}B = 0, \quad \delta = \beta / (\mu k), \quad (3.3)$$

$$i(2\sqrt{1-\theta\eta} - \delta)A + (2 - \eta - \delta\sqrt{1-\eta})B = 0.$$

Равенство нулю детерминанта системы (3.3) приводится к виду

$$R(\eta) \equiv (2 - \eta)^2 - 4\sqrt{1-\theta\eta}\sqrt{1-\eta} + \delta\eta\sqrt{1-\eta} = 0, \quad (3.4)$$

уравнение (3.4) при  $\delta = 0$  совпадает с уравнением Рэлея, а при  $\delta \rightarrow \infty$  совпадает с уравнением, которое получается для задачи с граничными условиями Навье.

$$\eta\sqrt{1-\eta} = 0. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что в этом случае поверхностная волна не существует, но существует предельная волна с фазовой скоростью, определяемой из равенства  $\eta = 1$ .

Исключая корень  $\eta = 0$ , уравнение (3.4) приведём к виду

$$R_2(\eta) \equiv \eta - \frac{4(1-\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta} + \sqrt{1-\theta\eta}} + \delta\sqrt{1-\eta} = 0. \quad (3.6)$$

Из следующих свойств функции

$$R_2(0) = -2(1-\theta) + \delta, \quad R_2(1) = 1 \quad (3.7)$$

следует, что уравнение (3.6) имеет корень, удовлетворяющий условию  $0 < \eta < 1$ , если

$$\delta < 2(1-\theta), \quad (3.8)$$

условие (3.8) есть условие существования поверхностной волны в случае стеснённой границы типа (3.1).

Таблица 2

$\delta$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,3
$\eta$	0,8464	0,8132	0,7672	0,7013	0,6032	0,4532	0,2236	0,0697

В табл. 2 приводятся результаты численных расчётов по уравнению (3.6) для фазовой скорости в зависимости от коэффициента стеснения. Сравнение таблиц 1 и 2 показывает, что если стеснение типа (1.4) приводит к уменьшению степени локализации поверхностной волны (приводит к медленному затуханию амплитуды), то стеснение типа (3.1) приводит к увеличению локализации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Miklowitz J. The theory of Elastic waves and Waveguides North-Holland. 1984. 618 p.
2. Mindlin R.D. Waves and Vibrations in Isotropic elastic Plates . In: «Structural Mechanics», J.N. Goodier and N.J. Hoff, eds, Pergamon Press, New York, 1960. P.199-232.
3. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. //В сб.: «Проблемы механики деформируемого твердого тела». Ереван: Институт механики НАН Армении, 1997. С.79-100.

#### Сведения об авторе:

**Белубекян Мелс Вагаршакович** – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении

**Адрес:** 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>Б</sup>

**Тел.:** (+374 10) 52-15-03, (374 93) 58 00 96

**E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 11.03.2011

УДК 529.3.01

**ОБ АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО УПРУГОГО  
КЛИНА, СОДЕРЖАЩЕГО НА ЛИНИИ СПАЯ КОЛЛИНЕАРНУЮ СИСТЕМУ  
ЩЕЛЕЙ И АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ  
МКРТЧЯН М.М., МКРТЧЯН М.С.**

**Ключевые слова:** напряжение, клин, трещина, включения, система сингулярных интегральных уравнений, коэффициенты интенсивностей напряжений, раскрытие трещины  
**Keywords:** stress, wedge, crack, inclusion, system of singular integral equations, coefficients of stress intensity, crack opening displacement

Մկրտչյան Մ.Մ., Մկրտչյան Մ.Ս.

**Միացման գծի վրա ճաքեր և բարակապատ բացարձակ կոշտ ներդրակների համագիծ համակարգ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական սեպի հակահարթ խնորհի մասին**

Աշխատանքում հետազոտվում է առաձգական կտոր առ կտոր համասեռ սեպի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ խնդիրը հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ, երբ սեպի մի եզրի վրա ազդում են բաշխված շոշափող ուժեր, իսկ մյուս եզրը կոշտ ամրակցված է: Տարասեռ սեպերի միացման գծի վրա դասավորված են ճաքերի և բացարձակ կոշտ բարակապատ ներդրակների համագիծ համակարգեր:

Mkrtychyan M.M., Mkrtychyan M.S.

**On anti-plane problem of piecewise homogeneous elastic wedge containing the collinear system of cracks on junction line and absolutely rigid thin inclusions**

In the present paper the problem on determination of the stress-strain state components of a piecewise homogeneous wedge under anti-plane deformations, one of the bounds of which is loaded by distributed tangential forces and the other one of the composite wedge is rigidly fastened, is considered. With this on the junction line of heterogeneous wedges collinear systems of cracks and absolutely rigid inclusions are distributed.

В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния кусочно-однородного клина при антиплоской деформации, одна из граней которого нагружена распределёнными касательными силами, а другая грань составного клина жёстко закреплена. При этом, на линии спаия разнородных клиньев расположены коллинеарные системы трещин и абсолютно жёстких включений.

Задачи о трещинах и включениях тесно связаны с задачами определения напряжённо-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, содержащих концентраторы напряжений. Ввиду их теоретической и практической важности в вопросах горной механики, механики композитов и прочности разнообразных инженерных конструкций они стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на работы [1-3], а также на статью [4]. Аналогичные задачи рассмотрены в [5-7].

1. Пусть, отнесённый к цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, z$  кусочно-однородный упругий клин состоит из двух областей:  $\Omega_{\alpha} = \{-\infty < z < \infty, 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \vartheta \leq \alpha\}$  с модулем сдвига  $G_{+}$  и  $\Omega_{\beta} = \{-\infty < z < \infty, 0 \leq r \leq \infty, -\beta \leq \vartheta \leq 0\}$  с модулем сдвига  $G_{-}$ , и в плоскости  $\vartheta = 0$  содержит систему из произвольного конечного числа сквозных трещин и

тонких абсолютно жёстких включений, причём их следы в плоскости  $r\vartheta$  составляют, соответственно, систему интервалов  $L_1$  и  $L_2$  ( $L = L_1 \cup L_2$ ):

$$L_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1} [a_k, b_k]; \quad 0 < a_k < b_k \quad (k = 1, 2, \dots, N_1); \quad b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_1 - 1})$$

$$L_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2} [c_k, d_k]; \quad 0 < c_k < d_k \quad (k = 1, 2, \dots, N_2); \quad d_k < c_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_2 - 1}).$$

Пусть далее свободная грань клина нагружена распределёнными касательными силами интенсивности  $\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=\alpha} = f_+(r)$  ( $0 < r < \infty$ ), а другая грань составного клина жёстко закреплена. Кроме того, берега трещин также нагружены силами с заданными интенсивностями  $\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=\pm 0} = -\tau_{\pm}^{(1)}(r)$  ( $r \in L_1$ ), а на систему включений  $L_2$  действуют силы с равнодействующими  $P_k$ , направленные вдоль оси  $Oz$  и вызывающие продольный сдвиг упругого клина в направлении оси  $Oz$  с базовой плоскостью  $r\vartheta$ .

Требуется определить плотность дислокаций смещений и скачков смещений на берегах трещин, скачков напряжений на берегах включений, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородный упругий клин вдоль оси  $Or$  разрежем на две части, а затем для действующих на их гранях  $\vartheta = \pm 0$  напряжений введём следующие обозначения ( $L' = R_+ \setminus L; R_+ = (0, \infty)$ ):

$$-\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=+0} = T_+(r) = \begin{cases} \tau_+^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ \tau_+^{(2)}(r) & (r \in L_2); \\ \tau(r) & (r \in L'); \end{cases} \quad (1)$$

$$-\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=-0} = T_-(r) = \begin{cases} \tau_-^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ \tau_-^{(2)}(r) & (r \in L_2); \\ \tau(r) & (r \in L'). \end{cases}$$

На системе включений  $L_2$  смещения постоянны:

$$u_z^+(r, \vartheta)|_{\vartheta=+0} = u_z^-(r, \vartheta)|_{\vartheta=-0} = \delta_k = \text{const}; \quad r \in (c_k, d_k) \quad (k = \overline{1, N_2}). \quad (2)$$

Запишем также граничные условия на  $\vartheta = \alpha$ ,  $\vartheta = -\beta$ :

$$\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=\alpha} = G_+ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^+}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} = f_+(r); \quad u_z^-(r, \vartheta)|_{\vartheta=-\beta} = 0 \quad (0 < r < \infty) \quad (3)$$

где  $u_z^{\pm}(r, \vartheta)$  – смещения точек, соответствующие клиньям  $\Omega_{\alpha}$  и  $\Omega_{\beta}$ , которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа в полярной системе координат:

$$\frac{\partial^2 u_z^{\pm}(r, \vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{\pm}(r, \vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^{\pm}(r, \vartheta)}{\partial \vartheta^2} = 0. \quad (4)$$

Далее введём в рассмотрение следующие величины:

$$\Omega(r) = T_+(r) + T_-(r); \quad h(r) = \frac{du_z^+(r, +0)}{dr} + \frac{du_z^-(r, -0)}{dr};$$

$$\chi(r) = T_+(r) - T_-(r) = \begin{cases} \psi(r) & (r \in L_2); \\ \tau_+^{(1)}(r) - \tau_-^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ 0 & (r \in L'), \end{cases} \quad (5)$$

а также плотность дислокаций смещений на берегах трещин:

$$w(r) = \frac{du_z^+(r, +0)}{dr} - \frac{du_z^-(r, -0)}{dr} = \begin{cases} \varphi(r) & (r \in L_1); \\ 0 & (r \in R_+/L_1). \end{cases} \quad (6)$$

Теперь с помощью математического аппарата интегрального преобразования Меллина [8] по переменной  $r$ , из уравнения (4) и граничных условий (1)-(3) в обозначениях (5)-(6), придём к системе ключевых уравнений задачи относительно плотностей дислокаций на берегах трещин  $w(r)$  и скачков касательных контактных напряжений  $\chi(r)$  на берегах включений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi_{L_1}} \int \frac{w(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{\pi_{L_1}} \int K \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) w(r_0) dr_0 - \frac{G_+ - G_-}{2G_+ G_-} r \chi(r) - \\ & - \frac{1}{\pi_{L_1}} \int M \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 - \frac{1}{\pi_{L_2}} \int M \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 = \\ & = - \frac{G_+ + G_-}{2G_+ G_-} r \Omega(r) - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_+} \int_0^\infty F_1 \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) f_+(r_0) dr_0; \\ & \frac{G_+ - G_-}{2} r w(r) + \frac{G_+ G_-}{\pi} \int_{L_1} M \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) w(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi_{L_1}} \int \frac{\chi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \\ & + \frac{1}{\pi_{L_2}} \int \frac{\chi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{\pi_{L_1}} \int Q \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi_{L_2}} \int Q \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 = \\ & = - \frac{G_+ + G_-}{2} r h(r) + \frac{G_+ + G_-}{\pi} \int_0^\infty F_2 \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) f_+(r_0) dr_0 \quad (r \in R_+); \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где

$$K \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{G_+ \operatorname{th}(\alpha s) [1 - \operatorname{th}(\beta s)] - G_- [1 - \operatorname{th}(\alpha s)]}{G_+ \operatorname{th}(\alpha s) \operatorname{th}(\beta s) + G_-} \sin \left( s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$M \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\alpha s) \operatorname{th}(\beta s) - 1}{G_+ \operatorname{th}(\alpha s) \operatorname{th}(\beta s) + G_-} \cos \left( s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$Q \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{G_+ \operatorname{th}(\beta s) [1 - \operatorname{th}(\alpha s)] - G_- [1 - \operatorname{th}(\beta s)]}{G_+ \operatorname{th}(\alpha s) \operatorname{th}(\beta s) + G_-} \sin \left( s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$F_1 \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha s) [G_+ \operatorname{th}(\alpha s) \operatorname{th}(\beta s) + G_-]} \cos \left( s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$F_2\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) = \int_0^\infty \frac{\text{th}(\beta s)}{\text{ch}(\alpha s)[G_+ \text{th}(\alpha s)\text{th}(\beta s) + G_-]} \sin\left(s \ln \frac{r_0}{r}\right) ds.$$

Рассматривая первое уравнение системы (7) на  $L_1$ , а второе уравнение на  $L_2$ , придём к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \varphi(r_0) dr_0 - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} M\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \psi(r_0) dr_0 = \\ = -r \left[ \frac{\tau_+^{(1)}(r)}{G_+} + \frac{\tau_-^{(1)}(r)}{G_-} \right] + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} M\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) [\tau_+^{(1)}(r_0) - \tau_-^{(1)}(r_0)] dr_0 - \\ - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_+} \int_0^\infty F_1\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) f_+(r_0) dr_0; \quad (r \in L_1) \\ \frac{G_+ G_-}{\pi} \int_{L_1} M\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \varphi(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{\psi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} Q\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \psi(r_0) dr_0 = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{[\tau_+^{(1)}(r_0) - \tau_-^{(1)}(r_0)] dr_0}{\ln r_0 - \ln r} - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} Q\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) [\tau_+^{(1)}(r_0) - \tau_-^{(1)}(r_0)] dr_0 + \\ + \frac{G_+ + G_-}{\pi} \int_0^\infty F_2\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) f_+(r_0) dr_0; \quad (r \in L_2) \end{array} \right. \quad (8)$$

Система (8) должна рассматриваться при условиях

$$\int_{b_k} \varphi(r) dr = 0, \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad (9)$$

$$\int_{c_k} \psi(r) dr = P_k. \quad (k = \overline{1, N_2}) \quad (10)$$

Первое из них эквивалентно условиям непрерывности смещений в концевых точках разреза, а второе представляет собой условие равновесия  $k$ -того включения.

Рассматривая первое уравнение системы (7) вне разрезов и включений, будем иметь

$$\begin{aligned} \tau(r) = & -\frac{G_+ G_-}{\pi r (G_+ + G_-)} \int_{L_1} \frac{\varphi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} - \frac{G_+ G_-}{\pi r (G_+ + G_-)} \times \\ & \times \int_{L_1} K\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \varphi(r_0) dr_0 + \frac{G_+ G_-}{\pi r (G_+ + G_-)} \int_{L_1} M\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \times \\ & \times [\tau_+^{(1)}(r_0) - \tau_-^{(1)}(r_0)] dr_0 + \frac{G_+ G_-}{\pi r (G_+ + G_-)} \int_{L_2} M\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \psi(r_0) dr_0 - \\ & - \frac{G_-}{\pi r} \int_0^\infty F_1\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) f_+(r_0) dr_0; \quad (r \in L') \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, поставленная задача о напряжённом состоянии упругого клина с трещинами и абсолютно жёсткими включениями сводится к решению системы (8) при условиях (9)–(10). После нахождения решения (8)–(10) разрушающее напряжение вне трещин определяется формулой (11).

2. Для нахождения решения, определяющей СИУ (8)–(10), сначала введём следующие безразмерные координаты и величины:

$$\xi = \ln(r/l), \quad \eta = \ln(r_0/l); \quad \alpha_k = \ln(a_k/l); \quad \beta_k = \ln(b_k/l); \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad \gamma_k = \ln(c_k/l);$$

$$\delta_k = \ln(d_k/l); \quad (k = \overline{1, N_2}), \quad \mu = G_+/G_-; \quad L_{01} = \bigcup_{k=1}^{N_1} (\alpha_k; \beta_k); \quad L_{02} = \bigcup_{k=1}^{N_2} (\gamma_k; \delta_k); \quad (12)$$

$$\varphi_0(\eta) = e^\eta \varphi(le^\eta); \quad \psi_0(\eta) = \frac{e^\eta \psi(le^\eta)}{G_+ + G_-}; \quad \tau_\pm^{(0)}(\eta) = \frac{e^\eta \tau_\pm^{(1)}(le^\eta)}{G_+ + G_-}; \quad f_+^{(0)}(\eta) = \frac{e^\eta f_+(le^\eta)}{G_+ + G_-},$$

где  $l$  – характерный параметр длины, после чего (8) преобразуется в следующее СИУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} \frac{\varphi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} K_0(\xi - \eta) \varphi_0(\eta) d\eta - \\ \quad - \frac{\mu + 1}{\pi} \int_{L_{02}} M_0(\xi - \eta) \psi_0(\eta) d\eta = l_1(\xi); \quad (\xi \in L_{01}) \\ \frac{\mu}{\pi(\mu + 1)} \int_{L_{01}} M_0(\xi - \eta) \varphi_0(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{L_{02}} \frac{\psi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \\ \quad - \frac{1}{\pi} \int_{L_{02}} Q_0(\xi - \eta) \psi_0(\eta) d\eta = l_2(\xi), \quad (\xi \in L_{02}) \end{array} \right. \quad (13)$$

где

$$K_0(x) = \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) [1 - \operatorname{th}(\lambda \beta)] - [1 - \operatorname{th}(\lambda \alpha)]}{\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) + 1} \sin(\lambda x) d\lambda;$$

$$M_0(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) - 1}{\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) + 1} \cos(\lambda x) d\lambda;$$

$$Q_0(x) = \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{th}(\lambda \beta) [1 - \operatorname{th}(\lambda \alpha)] - [1 - \operatorname{th}(\lambda \beta)]}{\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) + 1} \sin(\lambda x) d\lambda;$$

$$F_{10}(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda \alpha) [\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) + 1]} \cos(\lambda x) d\lambda;$$

$$F_{20}(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda \beta)}{\operatorname{ch}(\lambda \alpha) [\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) + 1]} \cos(\lambda x) d\lambda;$$

$$l_1(\xi) = \frac{\mu + 1}{\pi} \int_{L_{01}} M_0(\xi - \eta) [\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)] d\eta - \frac{\mu + 1}{\mu} \tau_+^{(0)}(\xi) - (\mu + 1) \tau_-^{(0)}(\xi) -$$

$$- \frac{(\mu + 1)^2}{\pi \mu} \int_0^\infty F_{10}(\xi - \eta) f_+^{(0)}(\eta) d\eta; \quad (\xi \in L_{01})$$

$$l_2(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} \frac{[\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)]d\eta}{\eta - \xi} + \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} Q_0(\xi - \eta)[\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)]d\eta -$$

$$-\frac{\mu+1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{20}(\xi - \eta)f_+^{(0)}(\eta)d\eta; \quad (\xi \in L_{02})$$

Теперь каждый интервал  $(\alpha_k, \beta_k), (\gamma_k, \delta_k)$  системы  $L_{01}$  и  $L_{02}$  преобразуем в интервал  $(-1, 1)$ , полагая

$$\xi = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2}, \quad \eta = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}u + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad (-1 < t, u < 1),$$

$$\xi = \frac{\delta_k - \gamma_k}{2}t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2}, \quad \eta = \frac{\delta_k - \gamma_k}{2}u + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \quad (k = \overline{1, N_2}), \quad (-1 < t, u < 1)$$
(14)

в результате, СИУ (13) преобразуется в систему интегральных уравнений относительно функций

$$\Phi_k(t) = \Phi_0 \left( \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right); \quad (-1 < t < 1; k = \overline{1, N_1})$$

$$\Psi_k(t) = \Psi_0 \left( \frac{\delta_k - \gamma_k}{2}t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \right) \quad (-1 < t < 1; k = \overline{1, N_2})$$

на интервале  $(-1, 1)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_k(u)du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_1} \int_{-1}^1 K_{km}^{(1)}(t, u)\Phi_m(u)du - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_1} \int_{-1}^1 K_{km}(t, u)\Phi_m(u)du - \\ - \frac{\mu+1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_2} \int_{-1}^1 M_{km}^{(2)}(t, u)\Psi_m(u)du = l_{1k}(t); \quad (-1 < t < 1; k = \overline{1, N_1}) \\ \frac{\mu}{\pi(\mu+1)} \sum_{m=1}^{N_1} \int_{-1}^1 M_{km}^{(1)}(t, u)\Phi_m(u)du + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi_k(u)du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_2} \int_{-1}^1 K_{km}^{(2)}(t, u)\Psi_m(u)du - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_2} \int_{-1}^1 Q_{km}(t, u)\Psi_m(u)du = l_{2k}(t), \quad (-1 < t < 1; k = \overline{1, N_2}) \end{array} \right. \quad (15)$$

где

$$K_{km}^{(1)}(t, u) = \left( u - \frac{\beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m}t + \frac{\beta_m + \alpha_m}{\beta_m - \alpha_m} - \frac{\beta_k + \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m} \right)^{-1}; \quad (m, k = \overline{1, N_1})$$

$$K_{km}^{(2)}(t, u) = \left( u - \frac{\delta_k - \gamma_k}{\delta_m - \gamma_m}t + \frac{\delta_m + \gamma_m}{\delta_m - \gamma_m} - \frac{\delta_k + \gamma_k}{\delta_m - \gamma_m} \right)^{-1}; \quad (m, k = \overline{1, N_2})$$

$$K_{km}(t, u) = \lambda_m^{(1)} K_0 \left( \lambda_k^{(1)}t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} - \lambda_m^{(1)}u - \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} \right); \quad (m, k = \overline{1, N_1})$$

$$M_{km}^{(1)}(t, u) = \lambda_m^{(1)} M_0 \left( \lambda_k^{(2)}t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} - \lambda_m^{(1)}u - \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_1}; k = \overline{1, N_2})$$

$$M_{km}^{(2)}(t, u) = \lambda_m^{(2)} M_0 \left( \lambda_k^{(1)}t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} - \lambda_m^{(2)}u - \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_2}; k = \overline{1, N_1})$$

$$Q_{km}(t, u) = \lambda_m^{(2)} Q_0 \left( \lambda_k^{(2)} t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} - \lambda_m^{(2)} u - \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m, k = \overline{1, N_2})$$

$$l_{1k}(t) = l_1 \left( \lambda_k^{(1)} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right); \quad (k = \overline{1, N_1}; t \in (-1, 1))$$

$$l_{2m}(t) = l_2 \left( \lambda_m^{(2)} t + \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_2}; t \in (-1, 1))$$

$$\lambda_m^{(1)} = (\beta_m - \alpha_m)/2, \quad (m = \overline{1, N_1}); \quad \lambda_k^{(2)} = (\delta_k - \gamma_k)/2, \quad (k = \overline{1, N_2}),$$

а условие (9), (10) – в следующие условия:

$$\int_{-1}^1 \varphi_k(u) du = 0; \quad (k = \overline{1, N_1});$$

$$\int_{-1}^1 \psi_k(u) du = \tilde{P}_k; \quad \left( \tilde{P}_k = \frac{2P_k}{l(\delta_k - \gamma_k)(G_+ + G_-)} \right); \quad (k = \overline{1, N_2}). \quad (16)$$

К системе СИУ (15) при условиях (16) применим метод решения СИУ, изложенный в [9–11]. С этой целью полагаем

$$\varphi_k(t) = \frac{x_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (|t| < 1, k = \overline{1, N_1}); \quad \psi_k(t) = \frac{y_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (|t| < 1, k = \overline{1, N_2}), \quad (17)$$

где  $x_k(t)$  и  $y_k(t)$  – функции, принадлежащие гильбертовскому классу функции на отрезке  $[-1, 1]$ , а затем выберем произвольное натуральное число  $M$ . Далее, следуя известной процедуре [9], систему (15) при условиях (16) сведём к следующей системе линейных алгебраических уравнений (ЛАУ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{x_k(u_n)}{u_n - t_r} + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^M K_{km}^{(1)}(t_r, u_n) x_m(u_n) - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^M K_{km}(t_r, u_n) x_m(u_n) - \\ - \frac{\mu + 1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^M M_{km}^{(2)}(t_r, u_n) y_m(u_n) = l_{1k}(t_r); \quad (k = \overline{1, N_1}; r = \overline{1, M-1}) \\ \frac{\mu}{M(\mu + 1)} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^M M_{km}^{(1)}(t_r, u_n) x_m(u_n) + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{y_k(u_n)}{u_n - t_r} + \\ + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^M K_{km}^{(2)}(t_r, u_n) y_m(u_n) - \\ - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^M Q_{km}(t_r, u_n) y_m(u_n) = l_{2k}(t_r); \quad (k = \overline{1, N_2}; r = \overline{1, M-1}) \\ \sum_{n=1}^M x_k(u_n) = 0; \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad \frac{\pi}{M} \sum_{n=1}^M y_k(u_n) = \tilde{P}_k; \quad (k = \overline{1, N_2}), \end{array} \right.$$

откуда определяются неизвестные  $\{x_k(u_n)\} (k = \overline{1, N_1}; n = \overline{1, M})$  и  $\{y_k(u_n)\} (k = \overline{1, N_2}; n = \overline{1, M})$ . Здесь

$$u_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2M}\pi\right); \quad (n = \overline{1, M}), \quad t_r = \cos\left(\frac{\pi r}{M}\right); \quad (r = \overline{1, M-1}) \quad (18)$$

– чебышевские узлы, т.е. корни уравнений  $T_M(u) = 0$ ,  $U_{M-1}(t) = 0$  соответственно, где  $T_M(u)$  и  $U_{M-1}(t)$  – многочлены Чебышева первого и второго родов соответственно.

Определим КИН в концевых точках  $a_k, b_k$  трещин  $(a_k; b_k)$  ( $k = \overline{1, N_1}$ ) в антиплоской задаче теории упругости. Если в известных формулах для КИН однородного тела в случае антиплоской деформации [12] модуль сдвига заменить приведённым модулем сдвига, то для КИН кусочно-однородного тела получим следующие формулы [13]:

$$K_{III}(a_k) = \frac{G_+}{1+\mu} \lim_{r \rightarrow a_k+0} \sqrt{2\pi(r-a_k)} \varphi(r); \quad (19)$$

$$K_{III}(b_k) = -\frac{G_+}{1+\mu} \lim_{r \rightarrow b_k-0} \sqrt{2\pi(b_k-r)} \varphi(r). \quad (\mu = G_+/G_-)$$

После преобразования формулы (17), в соответствии с (12), и после перехода к переменной  $t$  будем иметь

$$K_{III}^0(a_k) = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2a_k}(1+\mu)} \sqrt{\ln\left(\frac{b_k}{a_k}\right)} x_k(-1); \quad (20)$$

$$K_{III}^0(b_k) = -\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2b_k}(1+\mu)} \sqrt{\ln\left(\frac{b_k}{a_k}\right)} x_k(1); \quad (k = \overline{1, N_1}),$$

где введены безразмерные КИН:

$$K_{III}^0(a_k) = \frac{K_{III}(a_k)}{\sqrt{\pi l G_+}}; \quad K_{III}^0(b_k) = \frac{K_{III}(b_k)}{\sqrt{\pi l G_+}}; \quad (k = \overline{1, N_1}).$$

Входящие в (18) значения  $x_k(\pm 1)$  функции  $x_k(t)$  определяются при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа по чебышевским узлам (16) и выражаются формулами [9]:

$$x_k(1) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (-1)^{n+1} x_k(u_n) \operatorname{ctg}\left(\frac{2n-1}{4M}\pi\right); \quad (21)$$

$$x_k(-1) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (-1)^{M+n} x_k(u_n) \operatorname{tg}\left(\frac{2n-1}{4M}\pi\right); \quad (k = \overline{1, N_1}).$$

Далее раскрытие  $k$ -той трещины  $(a_k, b_k)$  определяется по формуле

$$w_k(r) = \int_{a_k}^r \varphi(r_0) dr_0; \quad (a_k \leq r \leq b_k; k = \overline{1, N_1}),$$

которая при помощи (12), (14) и (17) преобразуется к виду

$$w_k^0(t) = \ln \sqrt{\frac{b_k}{a_k} \int_{-1}^t \frac{x_k(u) du}{\sqrt{1-u^2}}} \quad (-1 \leq t \leq 1; k = \overline{1, N_1}), \quad (22)$$

причем,  $w_k^0(\pm 1) = 0$ . Здесь введено безразмерное раскрытие трещины

$$w_k^0(t) = l^{-1} w_k \left[ l \exp \left( \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right) \right] \quad (k = \overline{1, N_1})$$

Используя соответствующую квадратурную формулу, из (22) будем иметь

$$w_k^0(t) = \frac{\pi}{M} \ln \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} \sum_{u_n \leq t} x_k(u_n) \quad (k = \overline{1, N}) \quad (23)$$

отсюда

$$w_k^0(t_r) = \frac{\pi}{M} \ln \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} \sum_{u_n \leq t_r} x_k(u_n) \quad (r = \overline{1, M-1}) \quad (24)$$

Таким образом, безразмерное раскрытие  $k$ -той трещины можно вычислить по (23) или по (24).

Далее рассмотрим частный случай, в котором на линии соединения разнородных клиньев содержится трещина и абсолютно жёсткое тонкое включение,  $L = L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 = (a_1, b_1)$ ,  $L_2 = (c_1, d_1)$ . Предположим, что на свободной грани клина нагрузки отсутствуют  $f_+(r) = 0$ , а на берегах щелей действуют равные между собой напряжения постоянных интенсивностей  $\tau_+^{(1)}(r) = \tau_-^{(1)}(r) = \tau_0 = \text{const}$  ( $r \in L_1$ ).

В рассмотренном частном случае введём для удобства дальнейших расчётов и численного анализа следующие вспомогательные параметры и величины:  $l = b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ ;  $\rho = a_1/l$ ;  $k = c_1/l$ ; ( $l = \text{const}$ ). При этом будем иметь

$$\lambda_1^{(1)} = (\beta_1 - \alpha_1)/2 = \ln \sqrt{(1+\rho)/\rho}; \quad \lambda_1^{(2)} = (\delta_1 - \gamma_1)/2 = \ln \sqrt{(1+k)/k};$$

$$e_1 = (\beta_1 + \alpha_1)/2 = \ln \sqrt{\rho(1+\rho)}; \quad e_2 = (\delta_1 + \gamma_1)/2 = \ln \sqrt{k(1+k)};$$

В этом случае по известной численно-аналитической методике [9], как и в общем случае, из системы (8) и условий на щели  $L_1$  и включения  $L_2$ , из (9) и (10) получаем следующую систему ЛАУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{K}(t_r - u_m) \right] x_1(u_m) - \frac{\mu+1}{M} \times \\ \times \sum_{m=1}^M \tilde{M}_1(t_r, u_m) y_1(u_m) = - \frac{(\mu+1)^2 e^{\lambda_1^{(1)} t_r + e_1}}{\mu} \tilde{\tau}_0; \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ \frac{\mu}{M(\mu+1)} \sum_{m=1}^M \tilde{M}_2(t_r, u_m) x_1(u_m) + \frac{1}{M} \times \\ \times \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{Q}(t_r - u_m) \right] y_1(u_m) = 0; \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ \sum_{m=1}^M x_1(u_m) = 0; \quad \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M y_1(u_m) = \frac{\tilde{P}}{\lambda_1^{(2)}}, \end{array} \right. \quad (25)$$

где

$$\tilde{K}(t-u) = \lambda_1^{(1)} \int_0^\infty \frac{\mu \text{th}(\lambda \alpha) [1 - \text{th}(\lambda \beta)] - [1 - \text{th}(\lambda \alpha)]}{\mu \text{th}(\lambda \alpha) \text{th}(\lambda \beta) + 1} \sin(\lambda \lambda_1^{(1)}(t-u)) d\lambda;$$

$$\tilde{M}_1(t, u) = \lambda_1^{(2)} \int_0^\infty \frac{\text{th}(\lambda\alpha)\text{th}(\lambda\beta) - 1}{\mu\text{th}(\lambda\alpha)\text{th}(\lambda\beta) + 1} \cos[\lambda(\lambda_1^{(1)}t + e_1 - \lambda_1^{(2)}u - e_2)] d\lambda;$$

$$\tilde{M}_2(t, u) = \lambda_1^{(1)} \int_0^\infty \frac{\text{th}(\lambda\alpha)\text{th}(\lambda\beta) - 1}{\mu\text{th}(\lambda\alpha)\text{th}(\lambda\beta) + 1} \cos[\lambda(\lambda_1^{(2)}t + e_2 - \lambda_1^{(1)}u - e_1)] d\lambda;$$

$$\tilde{Q}(t - u) = \lambda_1^{(2)} \int_0^\infty \frac{\mu\text{th}(\lambda\beta)[1 - \text{th}(\lambda\alpha)] - [1 - \text{th}(\lambda\beta)]}{\mu\text{th}(\lambda\alpha)\text{th}(\lambda\beta) + 1} \sin[\lambda\lambda_1^{(2)}(t - u)] d\lambda;$$

$$\tilde{P} = P_1 / [l(G_+ + G_-)]; \quad \tilde{\tau}_0 = \tau_0 / (G_+ + G_-). \quad (-1 < t < 1)$$

Далее, для простоты примем  $\tilde{\tau}_0(t) = 0.01$ ,  $\tilde{P} = 0.01$ . Тогда, решая систему (25) при различных значениях параметров  $\mu, \alpha, \beta, \rho, k$  и учитывая (21), находим соответствующие значения КИН в концевых точках трещины по формулам (20) и соответствующее раскрытие трещины по формуле (24).

Вычисленные значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$  и  $K_{III}^0(b_1)$  в зависимости от изменения параметра  $\alpha \in (0, \pi]$  при фиксированных значениях остальных параметров:  $\mu = 0.5$ ,  $\rho = 4$ ,  $k = 2$ ,  $\beta = \pi/3$  (здесь включение находится на левой стороне трещины) приведены в табл.1. Данные этой таблицы, которые характерны для этих КИН и при других фиксированных значениях параметров  $\mu, \rho, k, \beta$ , показывают, что значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$ ,  $K_{III}^0(b_1)$  с возрастанием параметра  $\alpha$  уменьшаются, притом, значение  $K_{III}^0(a_1)$  всегда больше значения  $K_{III}^0(b_1)$ .

Таблица 1

$\alpha$	$\pi/30$	$\pi/20$	$\pi/15$	$\pi/10$	$\pi/6$	$\pi/4$
$K_{III}^0(a_1)$	0.07664	0.07289	0.07127	0.06986	0.06882	0.06829
$K_{III}^0(b_1)$	0.07540	0.07187	0.07041	0.06925	0.06846	0.06805

$\alpha$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$\pi$
$K_{III}^0(a_1)$	0.06802	0.06777	0.06766	0.06762	0.06760	0.06756
$K_{III}^0(b_1)$	0.06783	0.06762	0.06753	0.06750	0.06747	0.06744

В табл.2 приведены вычисленные по формулам (20) значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$  и  $K_{III}^0(b_1)$  в зависимости от изменения параметра  $k$  (при возрастании этого параметра полагается, что включение находится на левой стороне трещины и приближается к неподвижной трещине, длина которой равна длине включения) при фиксированных значениях параметров  $\mu = 0.5$ ,  $\rho = 10$ ,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\beta = \pi/3$ . Из этой таблицы видно, что с возрастанием  $k$  значение КИН возрастает. При этом, значение КИН  $K_{III}^0(a_1)$  всегда больше значения  $K_{III}^0(b_1)$ .

Таблица 2

$k$	0.1	0.5	1	2	4	6
$K_{III}^0(a_1)$	0.06677	0.06682	0.06688	0.06700	0.06726	0.06747
$K_{III}^0(b_1)$	0.06676	0.06680	0.06686	0.06697	0.06721	0.06741

$k$	7	7.5	8	8.2	8.5	8.8
$K_{III}^0(a_1)$	0.06754	0.06757	0.06759	0.06760	0.06760	0.06761
$K_{III}^0(b_1)$	0.06748	0.06751	0.06753	0.06754	0.06755	0.06756

В табл.3 приведены значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$  и  $K_{III}^0(b_1)$  в зависимости от изменения параметра  $\mu$  при фиксированных значениях остальных параметров:  $\rho = 4$ ,  $k = 2$ ,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\beta = \pi/3$ . При этом, характер изменения значения КИН не зависит от других указанных значений фиксированных параметров.

Таблица 3

$\mu$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
$K_{III}^0(a_1)$	0.07910	0.03145	0.02190	0.01780	0.0155	0.01471
$K_{III}^0(b_1)$	0.07891	0.03132	0.02179	0.01770	0.01542	0.01462

$\mu$	1.5	2	5	8	10	15
$K_{III}^0(a_1)$	0.01230	0.01108	0.00884	0.00825	0.00804	0.00776
$K_{III}^0(b_1)$	0.01221	0.01100	0.00878	0.00820	0.00801	0.00773

Очевидно, что значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$ ,  $K_{III}^0(b_1)$  с возрастанием параметра  $\mu$  уменьшаются. При этом, как и в вышеприведённых случаях, значение КИН  $K_{III}^0(a_1)$  всегда больше  $K_{III}^0(b_1)$ .

В заключение рассмотрим ещё один частный случай задачи, когда на берегах щели в средних точках действуют равные между собой сосредоточенные силы:

$$\tau_+^{(1)}(r) = \tau_-^{(1)}(r) = \tau(r) = P_0 \delta(r - (a_1 + b_1)/2), \quad (r \in (a_1, b_1)) \quad (26)$$

где  $\delta(r)$  – известная дельта-функция Дирака. В этом случае соответствующая система ЛАУ примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{K}(t_r - u_m) \right] x_1(u_m) - \frac{\mu+1}{M} \times \\
\quad \times \sum_{m=1}^M \tilde{M}_1(t_r, u_m) y_1(u_m) = 0; \quad (r = \overline{1, M-1}; r \neq M/2) \\
\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{u_m - t} - \tilde{K}(t - u_m) \right] e^{\lambda_1^{(1)} t + e_1} dt \right\} x_1(u_m) - \frac{\mu+1}{M} \times \\
\quad \times \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{-1}^1 \tilde{M}_1(t, u_m) e^{\lambda_1^{(1)} t + e_1} dt \right\} y_1(u_m) = - \frac{(\mu+1)^2 (2\rho+1)}{2\mu\lambda_1^{(1)}} \tilde{P}_0; \\
\frac{\mu}{M(\mu+1)} \sum_{m=1}^M \tilde{M}_2(t_r, u_m) x_1(u_m) + \frac{1}{M} \times \\
\quad \times \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{Q}(t_r - u_m) \right] y_1(u_m) = 0; \quad (r = \overline{1, M-1}) \\
\sum_{m=1}^M x_1(u_m) = 0; \quad \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M y_1(u_m) = \frac{\tilde{P}}{\lambda_1^{(2)}}, \quad \left( \tilde{P}_0 = \frac{P_0}{G_+ + G_-} \right)
\end{array} \right. \quad (27)$$

Здесь  $M$  – произвольное чётное натуральное число. Отметим, что второе уравнение системы (27) получается из первого уравнения системы (8) с помощью интегрирования на промежутке  $(a_1, b_1)$  в соответствии с (26).

Принимая  $\tilde{P}_0 = 0.1$ ,  $\tilde{P} = 0.1$  и решая систему (27) при различных значениях параметров  $\mu, \alpha, \beta, \rho, k$ , находим соответствующие значения КИН в концевых точках трещины и раскрытие трещины.

В табл.4 приведены значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$  и  $K_{III}^0(b_1)$  в зависимости от изменения параметра  $k$  при фиксированных значениях остальных параметров:  $\mu = 0.5$ ,  $\rho = 10$ ,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\beta = \pi/3$ . Из сопоставления значений табл. 2 и 4 следует, что поведение КИН одинаково в указанных случаях.

Таблица 4

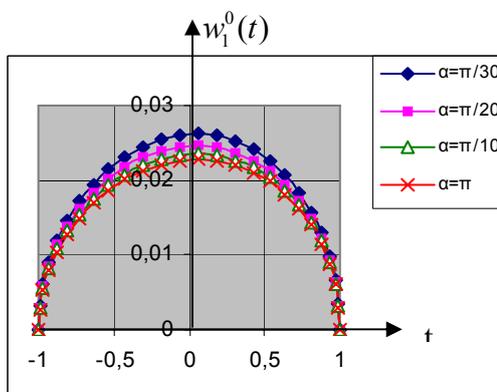
$k$	0.1	0.5	1	2	4	6
$K_{III}^0(a_1)$	0.00147	0.00196	0.00256	0.00382	0.00639	0.00849
$K_{III}^0(b_1)$	0.00138	0.00182	0.00236	0.00351	0.00584	0.00784

$k$	7	7.5	8	8.2	8.5	8.8
$K_{III}^0(a_1)$	0.00921	0.00948	0.00968	0.00975	0.00983	0.00989
$K_{III}^0(b_1)$	0.00857	0.00885	0.00908	0.00916	0.00926	0.00934

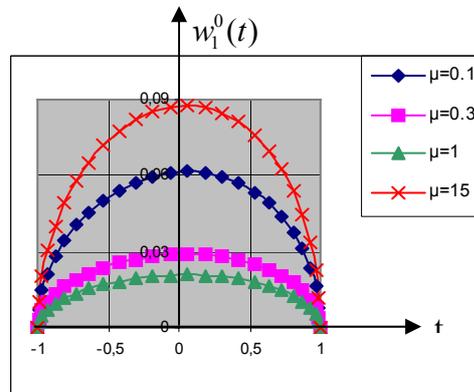
Вычисленные по формуле (24) безразмерные раскрытия трещины  $w_1^0(t)$  для различных значений параметра  $\alpha$  и при фиксированных значениях  $\mu = 0.5$ ,  $\rho = 4$ ,  $k = 2$ ,  $\beta = \pi/3$  графически изображены на фиг.1. По мере возрастания  $\alpha$  эти графики спускаются вниз, приближаясь к предельной кривой при

$\alpha = \pi$ . На фиг.2 изображены безразмерные раскрытия трещины  $w_1^0(t)$  для различных значений параметра  $\mu$  при фиксированных значениях  $\rho = 4, k = 2, \alpha = 6, \beta = \pi/3$ . Из фиг.2 видно, что раскрытие трещины минимальное, когда клин однородный.

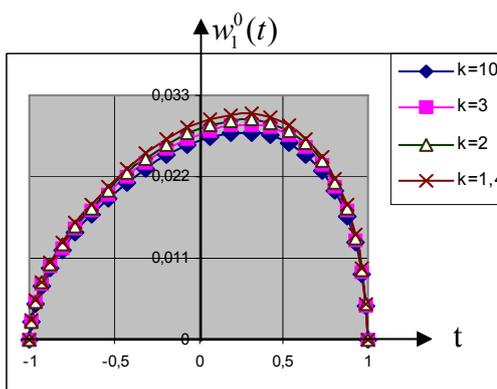
На фиг. 3 и 4 изображены графики безразмерных раскрытий трещины  $w_1^0(t)$  для различных значений параметров  $k$  ( $\alpha = \pi/6, \beta = \pi/3, \rho = 0.3, \mu = 0.5$ ) и  $\rho$  ( $k = 0.3, \mu = 0.5, \alpha = \pi/6, \beta = \pi/3$ ), соответствующие случаям, когда берега трещины нагружены распределениями и сосредоточенными силами соответственно. В обоих случаях раскрытие трещин увеличивается с уменьшением параметров  $k$  и  $\rho$  соответственно. При этом, в первом случае по мере уменьшения параметра  $k$  включение приближается к неподвижной трещине. А во втором случае, по мере уменьшения параметра  $\rho$  трещина приближается к неподвижному включению.



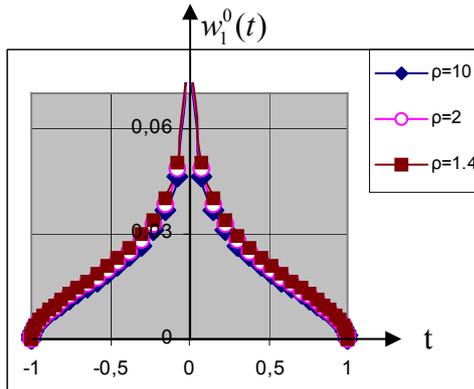
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М: Наука, 1983. 488с.
4. Nakobyan V.N. The mixed problem for anisotropic compound wedge with crack. // In collection of papers «Modern Problems of deformable bodies Mechanics», dedicated to the memory of Prof. P.S. Theocaris, Yerevan, published by «Gitutyun» NAS RA, 2005, pp.114-120.
5. Акопян В.Н. Антиплоское напряжённое состояние составного анизотропного клина, содержащего трещину и абсолютно жёсткое включение. // В сб. «Современные проблемы теории контактных взаимодействий». Ереван: Изд. НАН РА, 1996. С. 45–50.
6. Мкртчян М.М. О напряжённом состоянии упругого кусочно-однородного клина, содержащего на линии срая систему щелей и абсолютно жёстких тонких включений. // В сб.: «Труды международной школы-конференции молодых ученых». Агавнадзор.– Ереван, 2009, с.276–281.
7. Mkhitarayan S.M., Bardzokas D.I., Gevorgyan S.Kh. About a stress deformation condition of a piecewise-uniform wedge with a system of collinear cracks at an antiplane deformation. // Mathematical Problems in Engineering, USA, 2005:2 (2005), pp.245–268.
8. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402 с.
9. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
10. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. // Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ. Leyden. 1973.
11. Theocaris P.S., Iokamidis N.I. Numerical Integration Methods for the solution of singular Integral Equations. // Quart. Appl. Math. 1977. Vol XXXV. №1. Pp.173-185.
12. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами.– Механика разрушения и прочность материалов. /Спр. пособие под общей редакцией В.В. Панасюка. Т.2. Киев: Наукова думка, 1988. 619с.
13. Мкртчян М.С. Напряжённое состояние упругого кусочно-однородного пространства с трещинами или абсолютно жёсткими включениями при антиплоской и плоской деформациях. – Канд. дисс.–Ереван: Институт механики НАН РА. 2001.

### Сведения об авторах:

#### **Мкртчян Мгер Мушегович**

Научный сотрудник Института механики НАН РА,  
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24<sup>б</sup>,  
Институт механики НАН Армении  
Тел: (37410)-43-16-52, E-mail: [mher\\_1982@mail.ru](mailto:mher_1982@mail.ru)

#### **Мкртчян Мушег Серёжаевич**

Канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА.  
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24<sup>б</sup>,  
Институт механики НАН Армении  
Тел: (37410)-43-16-52, 098-80-19-56, E-mail: [muscheg-mkrtchyan@rambler.ru](mailto:muscheg-mkrtchyan@rambler.ru)

Поступила в редакцию 08.07.2011

УДК 539.8

**ОТРАЖЕНИЕ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ОТ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ  
ПОГОСЯН Н.Д.**

**Ключевые слова:** Волна, неоднородный слой, отражение, импеданс  
**Key words:** Wave, inhomogeneous layer, reflection, impedace

**Պոզոսյան Ն.Զ.**

**Մահրի ալիքի անդրադարձումը անհամասեռ շերտից**

Ուսումնասիրվում է առաձգական սահրի ալիքի անդրադարձումը անհամասեռ շերտի և համասեռ կիսատարածության սահմանից: Շերտի արտաքին ազատ եզրի և ամրացված արտաքին եզրի դեպքում որոշված են անդրադարձման գործակիցները: Ուսումնասիրված է անդրադարձման բնույթը կախված անհամասեռության պարամետրերից, հաճախականությունից և շերտի հաստությունից:

**Poghossyan N.D.**

**Refraction of shear wave from non-homogeneous layer**

Refraction problem is studied for shear wave from boundary of homogeneous substrate and non-homogeneous layer.

В работе рассмотрена задача отражения упругой сдвиговой волны от границы раздела неоднородного слоя и однородного полупространства. В случае свободной внешней границы слоя и в случае закреплённой внешней границы слоя определены коэффициенты отражения. Изучен характер отражения в зависимости от параметра неоднородности, частоты волны и толщины слоя.

Рассмотрению волн в неоднородных средах посвящён ряд работ [4-8]. В работе [4] рассматривается распространение поверхностных волн, где неоднородность по глубине задана гиперболическими тригонометрическими функциями от глубины.

Различные типы неоднородности и механизм распространения волн в этих средах рассмотрены в работах [5-8].

Исследования, посвящённые отражению волн от однородного и неоднородного слоя, отражены в ряде работ [1-5]. В работе Бреховских Л.М. [2] (стр. 15-19, 38-44) изучается отражение волн от системы однородных слоёв.

Рассмотрим двухслойную упругую среду. Пусть материал упругого слоя обладает экспоненциальной ( $-h \leq y \leq 0$ ) неоднородностью

$$\rho(y) = \rho(0) \exp(2\alpha y), \quad \mu(y) = \mu(0) \exp(2\alpha y). \quad \text{Этот слой закреплён к}$$

однородному полупространству ( $y \geq 0$ ) с постоянными Ламэ  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho$ . Рассмотрим вопрос отражения упругой сдвиговой волны от границы раздела слоя и полупространства.

Уравнение распространения сдвиговых волн в неоднородной среде имеет вид:

$$\mu(y) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \rho(y) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

а в однородном пространстве –

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.2)$$

Введём обозначения:

$$q = \sqrt{\omega^2 / C_t^2 - k^2}, \quad C_t^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \gamma = \frac{\mu}{\mu(0)}, \quad p = \sqrt{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} - k^2 - \alpha^2}, \quad C_{t1}^2 = \frac{\mu(0)}{\rho(0)}. \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.1) представляется в следующем виде:

$$u_1 = (C_1 \sin py + C_2 \cos py) e^{-\alpha y} \exp i(kx - \omega t). \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.2) запишется в виде:

$$u = [A_0 \exp(-iqy) + B \exp(iqy)] \exp i(kx - \omega t). \quad (1.5)$$

На  $u$  и  $u_1$  налагаются граничные условия:

$$\text{при } y = -h \quad \sigma_{23}^1 = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad (1.6)$$

$$\text{при } y = 0 \quad u = u_1, \quad \mu(0) \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.7)$$

Пусть на границу раздела падает сдвиговая волна  $W_1 = A_0 \exp i(kx - qy - \omega t)$ , тогда отражённая волна имеет вид  $W_2 = B \exp i(kx + qy - \omega t)$ . Заметим, что  $u = W_1 + W_2$ .

Подставляя  $u$  и  $u_1$  в граничные условия (1.6)-(1.7), получим:

$$-\alpha e^{\alpha h} (C_2 \cos ph - C_1 \sin ph) + e^{\alpha h} (C_1 p \cos ph + C_2 p \sin ph) = 0, \\ -A_0 - B + C_2 = 0, \quad (1.8)$$

$$-\alpha C_2 + C_1 p + i(qA_0 - B)\gamma = 0,$$

которая представляет собой систему из трёх уравнений относительно четырех неизвестных:  $A_0$ ,  $B$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ . Из этой системы выразим  $B$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  через  $A_0$ , в частности,

$$B = -\frac{A_0[-ipq\gamma \cosh p + (\alpha^2 + p^2 - i\alpha q\gamma) \sinh p]}{ipq\gamma \cos ph + (\alpha^2 + p^2 + i\alpha q\gamma) \sin ph}. \quad (1.9)$$

Отношение  $B/A_0$  представляет собой коэффициент отражения. Разделяя действительную и мнимую части числа  $B$ , представим его в виде:  $B = B_1 + iB_2$ :

$$B_1 = \frac{A_0[p^2\gamma^2 q^2 \cos^2 h p - ((\alpha^2 + p^2)^2 - \alpha^2 q^2 \gamma^2) \sin^2 h p + \alpha q^2 \gamma^2 p \sin 2hp]}{H}, \\ B_2 = \frac{2A_0(\alpha^2 + p^2)q\gamma \sinh p[p \cosh p + \alpha \sinh p]}{H}, \quad (1.10)$$

где

$$H = p^2 q^2 \gamma^2 \cos^2 hp + ((\alpha^2 + p^2)^2 + \alpha^2 q^2 \gamma^2) \sin^2 hp + \alpha p q^2 \gamma^2 \sin 2hp$$

Из соотношений (1.10) можно заключить, что из  $\sin ph = 0$  следует, что  $B_1 = A_0$ ,

$B_2 = 0$  и в данном случае коэффициент отражения равен 1.

При  $\cos ph = 0$

$$B_1 = A_0 \frac{\alpha^2 q^2 \gamma^2 - (\alpha^2 + p^2)^2}{(\alpha^2 + p^2)^2 + \alpha^2 \gamma^2 q^2},$$

$$B_2 = \frac{2A_0(\alpha^2 + p^2)q\gamma\alpha}{(\alpha^2 + p^2)^2 + \alpha^2 q^2 \gamma^2}. \quad (1.11)$$

Из полученных выражений можно заключить, что если полупространство однородно ( $\alpha = 0$ ), то при  $\cos ph = 0$   $B = -A_0$ .

В случае закреплённой границы условие (1.6) заменяется на

$$u_1(-h) = 0, \quad (1.12)$$

а остальные граничные условия остаются без изменения.

Опять рассмотрим задачу на отражение в прежней постановке.

Подставляя полученные решения  $u$  и  $u_1$  в граничные условия (1.7)-(1.12), получим:

$$\begin{aligned} e^{ah}(C_2 \cos hp - C_1 \sin hp) &= 0, \\ -A_0 - B + C_2 &= 0, \\ -\alpha C_2 + pC_1 + i(A_0 q - iBq)\gamma &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Из полученной системы определяются неизвестные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $B$ , имеем (в частности):

$$B = \frac{A_0(-p \cos ph + (\alpha - iq\gamma) \sin ph)}{p \cos ph - (\alpha + iq\gamma) \sin ph} \mathbb{S}. \quad (1.14)$$

Здесь  $B$  есть комплексное число  $B = B_1 + iB_2$ , отделив действительную и мнимую части числа  $B$ , получим:

$$B_1 = A_0 \left( -1 + \frac{2q^2 \gamma^2 \sin^2 ph}{L} \right), \quad (1.15)$$

$$B_2 = -A_0 \frac{q\gamma(-2\alpha \sin^2 ph + \sin 2ph)}{L}. \quad (1.16)$$

где  $L = p^2 \cos^2 ph + (\alpha^2 + q^2 \gamma^2) \sin^2 ph - \alpha p \sin 2ph$

При  $\sin ph = 0$  имеем:  $B = -A_0$  и коэффициент отражения  $B/A = -1$ .

Если  $\alpha = 0$  и  $\cos ph = 0$ , то  $B$  – действительное число, на самом деле,  $B_1 = A_0$ ,  $B_2 = 0$ . В выражениях для  $B$  (1.9) и (1.14) совершим замену  $q = iq_1$ .

Легко заметить, что если  $q^2 = \frac{\omega^2}{C_t^2} - k^2$ , то

$$q_1 = k^2 - \frac{\omega^2}{C_t^2} = k^2 \left( 1 - \frac{\omega^2}{k^2 C_t^2} \right) = k^2 (1 - \eta). \quad (1.17)$$

После совершения замены получим соотношения:

$$B = - \frac{A_0 [pq_1 \gamma \cos ph + (\alpha^2 + p^2 + \alpha q_1 \gamma) \sin ph]}{-q_1 p \gamma \cos ph + (\alpha^2 + p^2 - \alpha q_1 \gamma) \sin ph}, \quad (1.18)$$

$$B = \frac{A_0 [-p \cos ph + (\alpha + q_1 \gamma) \sin ph]}{p \cos ph + (q_1 \gamma - \alpha) \sin ph}. \quad (1.19)$$

Если приравнять знаменатели выражений (1.18) и (1.19) к нулю и подставляя в них значения  $p$  и  $q_1$  из (1.3) и (1.17), получим:

$$\operatorname{tg} \alpha k h = \frac{\alpha \gamma \sqrt{1-\eta}}{\theta \eta - 1 - \alpha k^{-1} \gamma \sqrt{1-\eta}}, \quad (1.20)$$

$$\operatorname{tg} \sqrt{k^2 \left( \frac{\omega^2}{C_{t1}^2} - 1 \right) - \alpha^2} h = \frac{-\sqrt{k^2 (\theta \eta - 1) - \alpha^2}}{k \gamma \sqrt{1-\eta} - \alpha}. \quad (1.21)$$

Знаменатель и числитель правой части (1.21) умножим на  $h$ , после чего окончательно получим:

$$\operatorname{tg} \alpha k h = \frac{\alpha \gamma \sqrt{1-\eta}}{\theta \eta - 1 - \alpha k^{-1} \gamma \sqrt{1-\eta}},$$

$$\operatorname{tg} \sqrt{\xi^2 (\theta \eta - 1) - \varepsilon^2} = -\frac{\sqrt{\xi^2 (\theta \eta - 1) - \varepsilon^2}}{\xi \gamma \sqrt{1-\eta} - \varepsilon}.$$

В полученных формулах, как и в задаче Лява, имеют место соотношения:

$$\alpha^2 = \theta \eta - 1 - \frac{\alpha^2}{k^2}, \quad \xi = k h, \quad \varepsilon = \alpha h, \quad \theta = \frac{C_t^2}{C_{t1}^2}, \quad \eta = \frac{\omega^2}{k^2 C_t^2}.$$

Следствие соотношения (1.20) представляет собой дисперсионное уравнение для задачи Лява со свободной границей  $y = -h$ , а следствие соотношения (1.21) представляет собой дисперсионное уравнение задачи Лява с закреплённой границей  $y = -h$ .

Исследуем случай, когда  $k = 0$ , учитывая, что в случае свободной границы  $B = B_1 + iB_2$ , где  $B_1, B_2$  определяются по формулам (1.10):

$$B_1 = \frac{p^2 \gamma^2 q^2 \cos^2 hp - ((\alpha^2 + p^2)^2 - \alpha^2 \gamma^2 q^2) \sin^2 hp + \alpha p q^2 \gamma^2 \sin 2hp}{p^2 \gamma^2 q^2 \cos^2 hp + ((\alpha^2 + p^2)^2 + \alpha^2 q^2 \gamma^2) \sin^2 hp + \alpha p q^2 \gamma^2 \sin 2hp} A_0,$$

$$B_2 = \frac{2A_0 (\alpha^2 + p^2) q \gamma \sin hp [p \cos hp + \alpha \sin hp]}{p^2 \gamma^2 q^2 \cos^2 ph + ((\alpha^2 + p^2)^2 + \alpha^2 q^2 \gamma^2) \sin^2 ph + \alpha p q^2 \gamma^2 \sin 2ph}.$$

В случае  $k = 0$  из формул (1.3) получим:

$$q = \frac{\omega}{C_t}, \quad p = \sqrt{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} - \alpha^2}, \quad \gamma = \frac{\mu}{\mu(0)},$$

$$\alpha^2 + p^2 = \frac{\omega^2}{C_{t1}^2}, \quad C_{t1}^2 = \frac{\mu(0)}{\rho(0)}, \quad C_t^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.22)$$

Подставляя значение  $\alpha^2 + p^2$  в формулу (1.10) и сокращая на  $q^2$ , получим:

$$B_1 = \frac{[p^2 \gamma^2 \cos^2 hp - (\frac{\omega^4}{C_{t1}^4 q^2} - \alpha^2 \gamma^2) \sin^2 hp + \alpha \gamma^2 p \sin 2hp]}{p^2 \gamma^2 \cos^2 hp + (\frac{\omega^4}{C_{t1}^4 q^2} + \alpha^2 \gamma^2) \sin^2 ph + \alpha p \gamma^2 \sin 2hp} A_0, \quad (1.23)$$

$$\frac{\omega^4}{C_{t1}^4 q^2} = \frac{\omega^4 C_t^2}{C_{t1}^4 \omega^2} = \frac{\omega^2 C_t^2}{C_{t1}^4}.$$

Если  $\alpha = 0$ , то подставляя значение  $p = \frac{\omega}{C_{t1}}$  в (1.23), для  $B_1$  получим:

$$B_1 = \frac{C_{t1}^2 \gamma^2 \cos^2 hp - C_t^2 \sin^2 hp}{C_{t1}^2 \gamma^2 \cos^2 hp + C_t^2 \sin^2 hp} A_0, \quad (1.24)$$

отсюда следует:  $B_1 = 0$  при

$$C_{t1}^2 \gamma^2 \cos^2 hp - C_t^2 \sin^2 hp = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{\rho \mu}{\rho(0)\mu(0)} = \operatorname{tg}^2 hp. \quad (1.26)$$

Здесь  $\rho \times \mu$  представляет собой импеданс полупространства, а  $\rho(0)\mu(0)$  – импеданс слоя. Если  $hp = \pi/4 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , то импеданс слоя равен импедансу полупространства и коэффициент  $B_1 = 0$  – при отражении. Полученная отражённая сдвиговая волна по сравнению с первоначальной меняет фазу либо на  $-\pi/2$ , либо на  $\pi/2$ . При  $\alpha \neq 0$  условие  $B_1 = 0$  запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \frac{\omega^2}{C_{t1}^2} \cos^2 hp - \frac{\omega^2}{C_{t1}^4} C_t^2 \sin^2 hp - \\ & - \alpha [\alpha \gamma^2 \cos^2 hp - \gamma^2 \sqrt{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} - \alpha^2} \cdot \sin 2hp] = 0 \end{aligned}, \quad (1.27)$$

Выводя из скобок выражение  $\omega^2 / C_{t1}^4$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^2}{C_{t1}^4} [\gamma^2 C_{t1}^2 \cos^2 hp - C_t^2 \sin^2 hp - \\ & - \frac{\alpha \gamma^2}{\omega^2} C_{t1}^4 [\alpha (\cos^2 hp - \sin^2 hp) - \sqrt{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} - \alpha^2} \cdot \sin 2hp] = 0 \end{aligned}$$

При  $ph = \pi/4 + 2\pi k$  имеем:

$$\frac{1}{2} (\gamma^2 C_{t1}^2 - C_t^2) + \frac{\alpha \gamma^2}{\omega^2} C_{t1}^4 \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} - \alpha^2} = 0. \quad (1.28)$$

Решим это уравнение относительно  $\alpha$ :

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{2C_{t1}^2} + \frac{\omega^2 C_t}{2C_{t1}^4} \sqrt{2C_{t1}^2 \gamma^2 - C_t^2}}, \quad (1.29)$$

т.е. при  $ph = \pi/4 + 2\pi k$  и при полученных  $\alpha$  полученная отражённая сдвиговая волна по сравнению с первоначальной меняет фазу либо на  $-\pi/2$ , либо на  $\pi/2$ .

В случае закреплённой границы  $y = -h$  при  $k = 0$  отражённая волна имеет амплитуду  $B = B_1 + iB_2$ , где  $B_1$  и  $B_2$  определяются по формулам (1.15), (1.16):

$$B_1 = A_0 \left( -1 + \frac{2q^2 \gamma^2 \sin^2 ph}{p^2 \cos^2 ph + (\alpha^2 + q^2 \gamma^2) \sin^2 ph - \alpha p \sin 2ph} \right),$$

$$B_2 = -A_0 \frac{q\gamma(-2\alpha \sin^2 ph + p \sin 2ph)}{p^2 \cos^2 ph + (\alpha^2 + q^2\gamma^2) \sin^2 ph - \alpha p \sin 2ph}.$$

При  $\alpha = 0$  имеют место формулы (1.22).

Подставляя значения  $q$  в (1.15), для  $B_1$  получим:

$$B_1 = \frac{-p^2 \cos^2 ph - \alpha^2 \sin^2 ph + \frac{\gamma^2 \omega^2}{C_t^2} \sin^2 ph + \alpha p \sin 2ph}{p^2 \cos^2 ph + (\alpha^2 + \frac{\omega^2}{C_t^2} \gamma^2) \sin^2 ph - \alpha p \sin 2ph} A_0. \quad (1.30)$$

Если  $\alpha = 0$ , то подставляя значение  $p = \frac{\omega}{C_{t1}}$  в выражение для  $B_1$ , получим:

$$B_1 = \frac{-\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} \cos^2 ph + \frac{\gamma^2 \omega^2}{C_t^2} \sin^2 ph}{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} \cos^2 ph + \frac{\omega^2}{C_t^2} \gamma^2 \sin^2 ph} A_0. \quad (1.31)$$

Сократив на  $\omega^2$  и умножив знаменатель и числитель (1.31) на  $C_{t1}^2 \cdot C_t^2$ , получим:

$$B_1 = \frac{-C_t^2 \cos^2 ph + \gamma^2 C_{t1}^2 \sin^2 ph}{C_t^2 \cos^2 ph + \gamma^2 C_{t1}^2 \sin^2 ph},$$

откуда видно, что  $B_1 = 0$  при выполнении условия:

$$\operatorname{tg}^2 ph = \frac{C_t^2}{C_{t1}^2 \gamma^2} = \frac{\mu \cdot \mu^2(0) \cdot \rho(0)}{\rho \cdot \mu^2 \cdot \mu(0)} = \frac{\mu(0) \rho(0)}{\mu \rho},$$

отсюда при  $ph = \pi/4 + \pi k$  опять получаем равенство импедансов двух сред и, так как  $\operatorname{Re} B = 0$ , то полученная отражённая сдвиговая волна по сравнению с первоначальной меняет фазу либо на  $-\frac{\pi}{2}$ , либо на  $\frac{\pi}{2}$ .

В случае  $p^2 h^2 \ll 1$ , полагая  $\cos ph = 1$ ,  $\sin ph = ph$ , для  $B_1$  и  $B_2$  получим:

$$B_1 = \frac{A_0[q^2 \gamma^2 (1 + \alpha h)^2 - (\alpha^2 + p^2) h^2]}{q^2 \gamma^2 (\alpha h + 1)^2 + (\alpha^2 + p^2)^2 h^2}, \quad (1.32)$$

$$B_2 = \frac{2A_0(\alpha^2 + p^2) q \gamma h (1 + \alpha h)}{q^2 \gamma^2 (\alpha h + 1)^2 + (\alpha^2 + p^2)^2 h^2}, \quad (1.33)$$

$B_1 = 0$  при  $q^2 \gamma^2 (\alpha h + 1)^2 = (\alpha^2 + p^2)^2 h^2$  или  $q \gamma (\alpha h + 1) = (\alpha^2 + p^2) h$ , из последнего уравнения:

$$\alpha = \frac{q \gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 \gamma^2}{4} - p^2 + \frac{q \gamma}{h}}.$$

Для полученных значений  $\alpha$  имеем  $\alpha^2 + p^2 = \frac{q \gamma}{h} (\alpha h + 1)$  и для  $B_2$  получим:

$$B_2 = \frac{2A_0 \frac{q\gamma}{h} q\gamma h(1+\alpha h)^2}{q^2\gamma^2(\alpha h+1)^2 + \frac{q^2\gamma^2}{h^2}(\alpha h+1)^2 h^2} = A_0,$$

т.е. для полученных значений  $\alpha$  отражённая волна меняет фазу на  $\pi/2$ .

Из (1.32), (1.33) в случае  $k=0$  с учётом формул (1.22) получим:

$$B_1 = \frac{A_0[q^2\gamma^2(1+\alpha h)^2 - \frac{\omega^4}{C_{t1}^4}h^2]}{q^2\gamma^2(1+\alpha h)^2 + \frac{\omega^4}{C_{t1}^4}h^2},$$

$$B_2 = \frac{2A_0 \frac{\omega^2}{C_{t1}^2} q\gamma h(1+\alpha h)}{q^2\gamma^2(1+\alpha h)^2 + \frac{\omega^4}{C_{t1}^4}h^2}.$$

Отсюда при  $B_1=0$

$$1+\alpha h = \frac{\omega h}{C_t} \cdot \frac{\rho(0)}{\rho}. \quad (1.34)$$

Для  $\alpha$ , удовлетворяющих этому условию, после преобразования  $B_2$  получим

$$B_2 = A_0, \text{ т.е. отражённая волна по сравнению с первоначальной меняет фазу на } \frac{\pi}{2}.$$

При  $p^2 h^2 \ll 1$ ,  $k=0$ ,  $\alpha=0$  для случая свободной верхней границы слоя получим  $B_1=0$  при  $q\gamma = p^2 h$  или с учётом формул (1.22):

$$C_t = \frac{\rho(0)}{\rho} \omega h, \quad (1.35)$$

отсюда можно вывести  $B_2 = A_0$ .

Из (1.35) следует, что при заданном  $\omega$ , если  $h = \frac{C_t}{\omega} \cdot \frac{\rho}{\rho(0)}$ , то фаза отражённой волны меняется на  $\frac{\pi}{2}$ , или при заданном  $h$ , если  $\omega = C_t h^{-1} \cdot \frac{\rho}{\rho(0)}$ , то опять имеет место то же самое явление.

Из (1.34) при заданном  $\alpha$  и  $h$  определяется  $\omega = \frac{(1+\alpha h)C_t}{h} \cdot \frac{\rho}{\rho(0)}$ , при котором фаза отражённой волны по сравнению с первоначальной меняется на  $\pi/2$ .

При заданных  $\alpha$  и  $h$  определяется значение  $\alpha = \frac{1}{h} \left( \frac{\omega h}{C_t} - 1 \right) \cdot \frac{\rho}{\rho(0)}$ , для которой отражённая волна меняет фазу на  $\pi/2$ . Обозначив  $\frac{\rho(0)}{\rho}$  через  $\beta$ , при

заданных  $\omega$  и  $\alpha$  определяется значение  $h$ , при котором имеет место то же явление:

$h = \frac{C_t}{\omega\beta - \alpha C_t}$ , по сравнению с однородным случаем при  $\alpha > 0$   $h$  становится

больше, а при  $\alpha < 0$   $h$  становится меньше. С учётом условия  $p^2 h^2 \ll 1$  получим:

$$\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} \cdot \frac{C_t^2}{(\omega\beta - \alpha C_t)^2} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{\omega^2}{C_{t1}^2} \ll \frac{(\omega\beta - \alpha C_t)^2}{C_t^2}$$

или окончательно:

$$\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} \ll \left( \frac{\omega}{C_t} \cdot \beta - \alpha \right)^2. \quad (1.36)$$

В случае закреплённой верхней границы слоя при  $p^2 h^2 \ll 1$  для  $B_1$  и  $B_2$  получим формулы

$$B_1 = A_0 \left( -1 + \frac{2q^2 \gamma^2 h^2}{1 + (\alpha^2 + q^2 \gamma^2) h^2 - 2\alpha h} \right), \quad (1.37)$$

$$B_2 = -A_0 \frac{q\gamma(-2\alpha p^2 h^2 + 2ph)}{p^2(1 + (\alpha^2 + q^2 \gamma^2) h^2 - 2\alpha h)}. \quad (1.38)$$

При  $\alpha$ , близких к значению  $\frac{1}{ph}$ , отражённая волна лишь меняет амплитуду без изменения фазы. У нас  $B_1 = 0$  при существовании корней уравнения  $\alpha^2 h^2 - 2\alpha h + 3\gamma^2 q^2 h^2 - 1 = 0$ . При существовании таких корней волна для этих значений  $\alpha$  при отражении меняет фазу либо на  $-\frac{\pi}{2}$ , либо на  $\frac{\pi}{2}$ .

Итак, в случае свободной верхней границы слоя при  $\alpha = 0$  (однородный слой), для  $ph = \frac{\pi}{2} + \pi k$  коэффициент отражения равен -1. В случае перпендикулярного падения ( $k = 0$ ) при  $hp = \frac{\pi}{4} + \pi k$  ( $k \in Z$ ), импеданс слоя равен импедансу полупространства и  $\text{Re } B = 0$ , а полученная отражённая сдвиговая волна по сравнению с первоначальной меняет фазу либо на  $-\frac{\pi}{2}$ , либо на  $\frac{\pi}{2}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342 с.
2. Погосян Т.Д. Упругие волны в экспоненциально неоднородном полупространстве и в полубесконечной пластине. //Диссертация на соискание учёной степени кандидата физ.-мат наук. Ереван. 2010 г.

3. Зволинский Н.В. Отражённые и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред. Ч.II // Изв. АН СССР. Сер. Геофизика. 1958. № 1. С.3–6.
4. Саакян С.Г., Варданян И.А. Сдвиговые поверхностные волны в некоторых вертикально-неоднородных упругих средах. //Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. №1. С.40–44.
5. Bhattacharya J. On the Propagation of Waves in an Elastic due to Various Types of Pressures and Velocities Prescribed on the Inner Surface of a Spherical Cavity. //Gertands Beitz. Geophys., 1969. Vol.7. № 3.
6. Chattarjee S.N. Propagation of Rayleigh Waves in a Layer, Lying Over a Heterogeneous Half-Space.//Pure and Applied Geophysics. 1971. Vol.86. №3. P.69-79.
7. Bleustein J.L. A new surface wave in piezoelectric materials. //Appl. Phys. Lett. Vol.13. №12. P.412-413.
8. Maugin G.A. Elastic surface waves with transverse horizontal polarization. //Advances in Applied Mechanics. 1983. Vol.23. P.373-374.

**Сведения об авторе:**

**Погосян Норик Джанибекович** – кандидат физ-мат. наук,  
научный сотрудник Института механики НАН Армении  
Тел.: (093)73-29-72

**E-mail: [poghosyan.norik@mail.ru](mailto:poghosyan.norik@mail.ru)**

Поступила в редакцию 05.10.2011

УДК 539.3

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ВЯЗКОУПРУГИХ  
ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЁСТКОСТЬЮ  
АБДИКАРИМОВ Р.А., ХУДАЯРОВ Б.А.**

**Ключевые слова:** вязкоупругость, пластина, метод Бубнова-Галёркина, интегро-дифференциальные уравнения

**Key words:** viscoelastic, plate, Bubnov-Galerkin method, integro-differential equation

Արդիկարիմով Ռ.Ա. Խուդայարով Բ.Ա.

**Փոփոխական կոշտությամբ առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ սալերի տատանողական պրոցեսների մոդելավորումը**

Ստացված են տատանման խնդրի ճկվածքի նկատմամբ մասնակի ածացվյալներով ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումները: Խնդիրը Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով բերված է սովորական ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի, որը լուծված է թվային մեթոդով:

**Abdikarimov R.A., Khudayarov B.A.**

**Modelling of vibration processes of viscoelastic orthotropic plates with variable rigidity**

In work the problem about vibrations of viscoelastic orthotropic plates with variable rigidity is considered. The equations of vibrations concerning deflections are described by the integro-differential equations (IDE) in partial derivatives. By means of Bubnov-Galerkin method based on polynomial approximation of deflections, the problem is shown to research of system of the ordinary IDE where an independent variable is time. Decisions of IDE are determined by the numerical method based on elimination of a singularity in a kernel. On the basis of this method the algorithm of the numerical decision is described.

В работе рассматривается задача о колебаниях вязкоупругих ортотропных пластин с переменной жёсткостью. Уравнения колебаний относительно прогибов описываются интегро-дифференциальными уравнениями (ИДУ) в частных производных. При помощи метода Бубнова-Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогибов, задача сведена к исследованию системы обыкновенных ИДУ, где независимым переменным является время. Решения ИДУ определяются численным методом, основанным на исключении особенности в ядре. На основе этого метода описан алгоритм численного решения.

**Введение.** Современная техника, строительство и другие области промышленности используют все более сложные конструкции, обеспечение прочности, надёжности и высокой экономичности которых имеет важное значение. Оптимальное проектирование таких конструкций невозможно без создания математических моделей, позволяющих учитывать максимально возможное количество факторов, влияющих на их работоспособность. При этом достигается значительное снижение веса, улучшение геометрических и механических характеристик строительных сооружений и технических конструкций.

Традиционно при математическом моделировании технических конструкций форма конструкции считалась заданной и неизменной. Однако в последние годы всё большее значение стали придавать поиску наилучшей конфигурации, особенно исследованиям колебаний тонкостенных конструкций переменной жёсткости из композиционных материалов. Эти задачи требуют новых методов математического и компьютерного моделирования [1, 2].

Большинство задач теории вязкоупругости приводит к необходимости численного решения краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. При этом, системы интегро-дифференциальных уравнений могут иметь высокий порядок, переменные коэффициенты, содержать малые и большие параметры, что приводит к появлению в

структуре решений таких задач быстро изменяющихся функций, а сами решения приобретают ярко выраженный характер погранслоёв. Кроме того, нелинейность моделируемых процессов приводит к нелинейности краевых задач, описывающих эти процессы. Традиционные методы и алгоритмы численного интегрирования при этом оказываются малоприменимыми. Поэтому, разработка и развитие математических моделей, совершенствование численных методов и алгоритмов решения задач теории вязкоупругости, возникающих при математическом моделировании объектов и явлений, являются важной и актуальной задачей фундаментальной науки.

Актуальным является решение конкретных, практически важных задач, среди которых выделим задачи моделирования и расчёта вязкоупругих тонкостенных конструкций с переменной жёсткостью. Решению этих проблем и посвящена настоящая работа.

### 1. Постановка задачи и методы решения

Рассмотрим задачу о нелинейных колебаниях ортотропных вязкоупругих прямоугольных пластин. Уравнение движения, основанное на гипотезе Кирхгоффа-Лява в геометрически нелинейной постановке, имеет вид:

$$\begin{aligned}
& h \left\{ B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + [B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + 2B (1 - \Gamma^*)] \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2B (1 - \Gamma^*) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\partial h}{\partial y} 2B (1 - \Gamma^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\
& h \left\{ B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + [B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) + 2B (1 - \Gamma^*)] \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2B (1 - \Gamma^*) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} + \frac{\partial h}{\partial x} 2B (1 - \Gamma^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& \quad + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\
& \frac{h^3}{12} \left[ B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (8B (1 - \Gamma^*) + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*)) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
& \quad \left. + B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \frac{1}{4} \left[ 2h \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \left( B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left[ B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + 4B (1 - \Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \times \\
& \quad \times \left[ B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) + 4B (1 - \Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{1}{4} \left[ 2h \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left[ 2h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right] 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
& - \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 2B(1-\Gamma^*)) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\partial h}{\partial y} 2B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \\
& - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - \\
& - \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + B(1-\Gamma^*)) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + B(1-\Gamma^*)) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial h}{\partial x} B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \right. \\
& \quad \left. - (k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) + k_y B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) w \right\} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h \left\{ B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} h B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $\rho$  – плотность материала;  $h$  – толщина пластины;  $\Gamma_{ij}^*$ ,  $\Gamma^*$  – интегральные

операторы:  $\Gamma^* \varphi(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$ ,  $\Gamma_{ij}^* \varphi(t) = \int_0^t \Gamma_{ij}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$ ;

( $i, j=1,2$ );  $\Gamma(t-\tau)$ ,  $\Gamma_{ij}(t-\tau)$  – ядра релаксации.

Упругие постоянные выражены через технические постоянные следующим образом [3]:

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}, \quad B_{12} = \frac{\mu_2 E_1}{1-\mu_1\mu_2} = \frac{\mu_1 E_2}{1-\mu_1\mu_2} = B_{21}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}, \quad 2B = G.$$

Здесь  $E_1, E_2$  – модули упругости,  $G$  – модуль сдвига,  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона.

При изгибе в срединной поверхности возникают усилия:

$$\begin{aligned} N_x &= B_{11}h(1-\Gamma_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}h(1-\Gamma_{12}^*)\varepsilon_y, \\ N_y &= B_{21}h(1-\Gamma_{21}^*)\varepsilon_x + B_{22}h(1-\Gamma_{22}^*)\varepsilon_y, \quad N_{xy} = 2Bh(1-\Gamma^*)\varepsilon_{xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  – компоненты конечной деформации, определяемые формулами [4]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Изгибающие и крутящий моменты определяются через функцию прогиба  $w$  [5]:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{h^3}{12}\left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right], \\ M_y &= -\frac{h^3}{12}\left[B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right], \\ H &= -\frac{Bh^3}{3}(1-\Gamma^*)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введя в уравнение (1) следующие безразмерные величины:

$$\frac{u}{h_0}; \quad \frac{v}{h_0}; \quad \frac{w}{h_0}; \quad \frac{x}{a}; \quad \frac{y}{b}; \quad \omega t; \quad \frac{h}{h_0}; \quad \frac{a}{b}; \quad \frac{b}{h_0}; \quad \frac{q}{E}\left(\frac{b}{h_0}\right)^4; \quad \frac{p_x}{E}; \quad \frac{p_y}{E}$$

и сохраняя прежние обозначения, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &h\left\{\Delta(1-\Gamma_{11}^*)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda\delta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left[\mu_2\Delta(1-\Gamma_{12}^*) + (1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\right] \times \right. \\ &\quad \times \left[\lambda\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\lambda}{\delta}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] + (1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\left(\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{\delta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left. \right\} + \\ &+ \frac{\partial h}{\partial x}\left\{\Delta(1-\Gamma_{11}^*)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\lambda\delta}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + \mu_2\Delta(1-\Gamma_{12}^*)\left[\lambda\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda}{2\delta}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\} + \\ &\quad + \frac{\partial h}{\partial y}(1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\left(\lambda^2\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda}{\delta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ &h\left\{\frac{1}{\Delta}(1-\Gamma_{22}^*)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left[\frac{\mu_1}{\Delta}(1-\Gamma_{21}^*) + (1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\right] \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{1}{\lambda^2\delta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] + (1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda^2\delta}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left. \right\} + \\ &+ \frac{\partial h}{\partial x}(1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\lambda^2\delta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial h}{\partial y}\left\{\frac{1}{\Delta}(1-\Gamma_{22}^*)\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\delta} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \Big] + \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\lambda^2 \delta} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \Big\} - \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (4) \\
& h^3 \left\{ \Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[ 4(1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) + \mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) + \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) \right] \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
& + \frac{\lambda^4}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \Big\} + 3 \left[ 2h \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \left[ \Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda^2 \mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \\
& + 6h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ \Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left[ \mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) + 2(1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \right] \lambda^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} + \\
& + 6h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \lambda^4 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left[ \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) + 2(1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \right] \lambda^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} + \\
& + 3 \left[ 2h \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \left[ \frac{1}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \lambda^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \\
& + 12 \left[ 2h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right] (1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
& - 12 \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[ \Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \left( \lambda \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \right. \\
& + \left. \left[ \mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) + (1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \right] \left( \lambda^2 \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& + \left. (1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \left( \lambda^3 \delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ \Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \left[ \lambda \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& + \mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) \left[ \lambda^2 \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \Big\} + \\
& + \frac{\partial h}{\partial y} (1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \left( \lambda^3 \delta \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 \delta \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big\} - \\
& - 12 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h \left\{ \Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \left[ \lambda \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) \left[ \lambda^2 \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - \\
& - 12 \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[ \frac{1}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \left( \lambda^4 \delta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) + (1 - \mu_1 \mu_2) g (1 - \Gamma^*) \right] \times \\
& \times \left( \lambda^3 \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + (1 - \mu_1 \mu_2) g (1 - \Gamma^*) \left( \lambda^2 \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big\} + \\
& + \frac{\partial h}{\partial x} (1 - \mu_1 \mu_2) g (1 - \Gamma^*) \left( \lambda^3 \delta \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 \delta \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \left[ \lambda^4 \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda^4}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[ \lambda^3 \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \\
& - 12 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h \left\{ \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[ \lambda^3 \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \left[ \lambda^4 \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda^4}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - 24 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} h (1 - \mu_1 \mu_2) g \times \\
& \times (1 - \Gamma^*) \left( \lambda^3 \delta \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 \delta \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{\eta_3} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 12 (1 - \mu_1 \mu_2) \lambda^4 q,
\end{aligned}$$

где  $\lambda = \frac{a}{b}$ ,  $\delta = \frac{b}{h_0}$ ,  $\Delta = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$ ,  $g = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{E_1 E_2} h^2 \eta}{6 \rho (1 - \mu_1 \mu_2)}} \left( \frac{\pi}{b} \right)^4$  – частота основного тона колебаний,  $\eta = 1 + \Delta \mu_2 + 2(1 - \mu_1 \mu_2) g$ .

Считая пластинку шарнирно опертой по краям, приближённое решение системы (4) по методу Бубнова-Галеркина будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y), \quad v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y), \\
w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y),
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $u_{nm} = u_{nm}(t)$ ,  $v_{nm} = v_{nm}(t)$ ,  $w_{nm} = w_{nm}(t)$  – неизвестные функции времени;  $\varphi_{nm}(x, y)$ ,  $\varphi_{nm}(x, y)$ ,  $\psi_{nm}(x, y)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$  – координатные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям задачи.

Подставляя (5) в уравнение (4) и применяя метод Бубнова-Галеркина, для определения неизвестных  $w_{nm} = w_{nm}(t)$ ,  $u_{nm} = u_{nm}(t)$ ,  $v_{nm} = v_{nm}(t)$  получим следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{k \ln m} \ddot{u}_{nm} - \eta_1 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[ (1 - \Gamma_{11}^*) d_{1k \ln m} + (1 - \Gamma^*) d_{2k \ln m} \right] u_{nm} + \right. \\
\left. + \left[ (1 - \Gamma_{12}^*) d_{3k \ln m} + (1 - \Gamma^*) d_{4k \ln m} \right] v_{nm} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left[ (1-\Gamma_{11}^*) d_{7k \ln mij} + (1-\Gamma_{12}^*) d_{8k \ln mij} + (1-\Gamma^*) d_{9k \ln mij} \right] w_{nm} w_{ij} \Big\} = 0, \\
& \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{k \ln m} \ddot{v}_{nm} - \eta_2 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[ (1-\Gamma_{21}^*) e_{1k \ln m} + (1-\Gamma^*) e_{2k \ln m} \right] u_{nm} + \right. \\
& + \left. \left[ (1-\Gamma_{22}^*) e_{3k \ln m} + (1-\Gamma^*) e_{4k \ln m} \right] v_{nm} \right\} + \\
& + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left[ (1-\Gamma_{22}^*) e_{7k \ln mij} + (1-\Gamma_{21}^*) e_{8k \ln mij} + (1-\Gamma^*) e_{9k \ln mij} \right] w_{nm} w_{ij} \Big\} = 0, \\
& \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{k \ln m} \ddot{w}_{nm} + \eta_3 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[ (1-\Gamma_{11}^*) f_{5k \ln m} + (1-\Gamma_{12}^*) f_{6k \ln m} + (1-\Gamma_{22}^*) f_{7k \ln m} + (1-\Gamma_{21}^*) f_{8k \ln m} + \right. \right. \\
& + \left. \left. (1-\Gamma^*) f_{9k \ln m} \right] w_{nm} \right\} - \eta_3 \left\{ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ (1-\Gamma_{11}^*) \xi_{1k \ln mij} + (1-\Gamma_{21}^*) \xi_{2k \ln mij} + \right. \right. \\
& + \left. \left. (1-\Gamma^*) \xi_{3k \ln mij} \right] u_{ij} + \left[ (1-\Gamma_{22}^*) \xi_{4k \ln mij} + (1-\Gamma_{12}^*) \xi_{5k \ln mij} + (1-\Gamma^*) \xi_{6k \ln mij} \right] v_{ij} \right\} + \\
& + \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \left\{ \left[ (1-\Gamma_{11}^*) g_{5k \ln mijrs} + (1-\Gamma_{12}^*) g_{6k \ln mijrs} + (1-\Gamma_{22}^*) g_{7k \ln mijrs} + \right. \right. \\
& + \left. \left. (1-\Gamma_{21}^*) g_{8k \ln mijrs} + (1-\Gamma^*) g_{9k \ln mijrs} \right] w_{ij} w_{rs} \right\} = 0, \\
& u_{nm}(0) = u_{0nm}, \quad \dot{u}_{nm}(0) = \dot{u}_{0nm}, \quad v_{nm}(0) = v_{0nm}, \quad \dot{v}_{nm}(0) = \dot{v}_{0nm}, \\
& w_{nm}(0) = w_{0nm}, \quad \dot{w}_{nm}(0) = \dot{w}_{0nm},
\end{aligned} \tag{6}$$

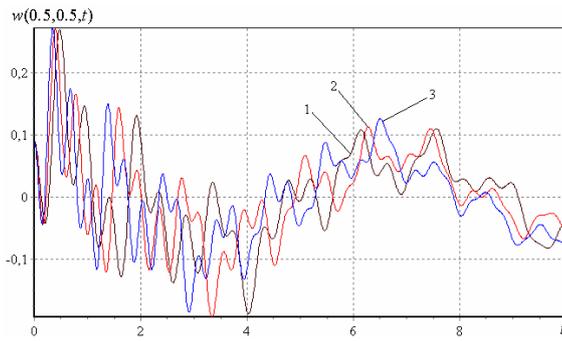
где коэффициенты, применявшиеся в этой системе, связаны с координатными функциями и их производными.

Интегрирование систем (6) выполнялось с помощью численного метода, предложенного в [6–8]. При этом, в качестве ядер релаксации используется слабосингулярное ядро Колтунова-Ржаницына вида

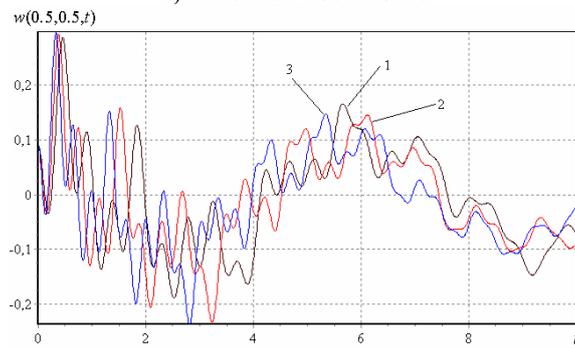
$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1).$$

Результаты вычислений при различных физических и геометрических параметрах вязкоупругой ортотропной пластинки приведены на фиг. 1, 2. Закон изменения толщины выбирается в виде:  $h = 1 - \alpha^* x$ . Здесь, если не оговорены другие данные, в качестве исходных, при вычислениях были приняты следующие:  $A = 0.05$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $\mu = 0.3$ ;  $\delta = 25$ ;  $u_0 = 0$ ;  $v_0 = 0$ ;  $w_0 = 0.09$ ;  $q = 0$ ;  $\lambda = 1$ ;  $\alpha^* = 0.5$ .

Было исследовано влияние неоднородности материала на процесс колебания пластинки. На фиг.1 представлены зависимости прогиба от времени срединной точки пластинки, полученных без учёта (фиг.1а) и с учётом (фиг.1б) геометрической нелинейности при различных значениях параметра  $\Delta$ , определяющего степень неоднородности (анизотропности) материала. Здесь кривая 1 соответствует случаю, когда  $\Delta = 1$ , кривая 2 –  $\Delta = 1.5$  и кривая 3 – случаю, когда  $\Delta = 2$ . Как показывают исследования, увеличение параметра  $\Delta$  приводит к уменьшению амплитуды колебания.

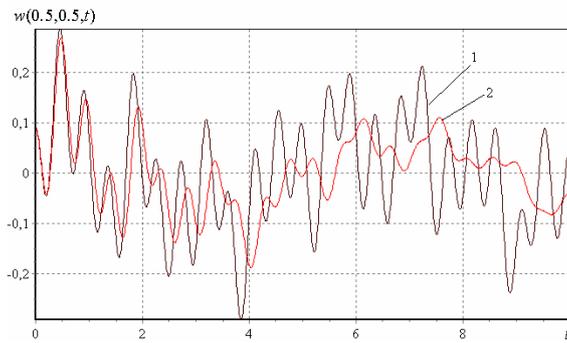


а) линейная постановка

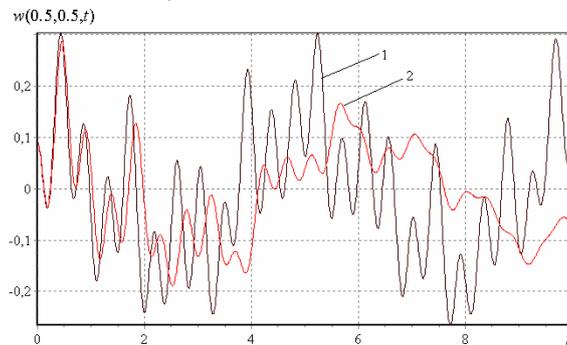


б) нелинейная постановка

Фиг. 1. Зависимость прогиба от времени при  $\Delta=1(1); 1.5(2); 2(3)$



а) линейная постановка



б) нелинейная постановка

Фиг. 2. Зависимость прогиба от времени

На фиг.2 представлены зависимости прогиба от времени срединной точки пластинки, полученных для случаев с различными ядрами релаксации (кривая 1 – экспоненциальное ядро; кривая 2 – слабо-сингулярное ядро Колтунова-Ржаницына).

На фигуре видно, что если в начальные моменты времени результаты, полученные при этих ядрах, почти совпадают, то с течением времени наблюдается их расхождение и в момент времени  $t = 10$  различия в результатах составляют уже 20 процентов. С течением времени различия в результатах продолжают возрастать.

Как показывают исследования, в случае отсутствия внешних нагрузок, результаты расчётов, полученных в линейной и нелинейной постановках, совпадают. Однако, при наличии внешних нагрузок зависимости  $w(t)$  существенно отличаются друг от друга и отличие достигает 35-40%.

Анализ проведённых вычислительных экспериментов показывает, что предложенный метод и алгоритм позволяют учитывать плавное изменение толщины тонкостенных элементов и могут быть применены при их оптимальном проектировании.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Смешанные краевые задачи теории упругости слоистых тонких тел переменной толщины, состоящих из анизотропных неоднородных материалов. // Прикладная математика и механика (ПММ). 2009. Т.73. Вып.5. С.868-876.
2. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. К геометрически нелинейной уточнённой теории ортотропных пластин переменной толщины // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №4. С.43-52.
3. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1967. 352 с.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
5. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
6. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269с.
7. Эшматов Х., Абдикаримов Р.А., Бобоназаров Ш.П. Колебания и устойчивость вязкоупругой трубы с протекающей через неё жидкостью при различных граничных условиях // Узбекский журнал “Проблемы механики”. – Ташкент, 1995. № 1. С.20-24.
8. Верлань А.Ф., Эшматов Х., Худаяров Б., Бобоназаров Ш.П. Численное решение нелинейных задач динамики вязкоупругих систем // Электронное моделирование 2004. Т.26. №3. С.3–14.

#### Сведения об авторах:

**Худаяров Бахтияр Алимович** – доктор техн.наук, профессор каф.высшей математики Ташкентского института ирригации и мелиорации  
E-mail: bakht-pro@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.03.2011

УДК 539.3

**ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ  
МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК  
АЛВАДЖЯН Ш. И., САРКИСЯН С.О.**

**Ключевые слова:** микрополярность, анизотропия, упругость, тонкая балка, прикладная модель, прочность, жесткость.

**Key words:** micropolar, anisotropy, elasticity, thin bars, applied model, the strength, the stiffness.

Ալվաջյան Շ. Ի., Սարգսյան Ս. Ն.

**Անիզոտրոպ միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի ստատիկ դեֆորմացիայի կիրառական մոդելները**

Աշխատանքում ձևակերպվում են ընդունելություններ (վարկածներ), որոնք ունեն ասիմպտոտիկ հիմնավորվածություն և որոնց հիման վրա անիզոտրոպ միջավայրի համար առաձգականության միկրոպոլյար տեսության երկչափ եզրային խնդիրը բարակ ուղղանկյուն տիրույթում բերվում է միաչափ խնդրի: Կախված ֆիզիկական անչափ պարամետրերի արժեքներից, կառուցված են անկախ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով, ««փոքր սահքային կոշտությամբ»» միկրոպոլյար անիզոտրոպ առաձգական բարակ ձողերի կիրառական մոդելները, որոնցում լիովին հաշվի են առնվում ընդլայնական սահքային դեֆորմացիաները:

Alvajyan Sh. I., Sargsyan S. H.

**Applied Models of Static Deformation of Anisotropic Micropolar Elastic Thin Bars**

In this paper, using the method of hypothesis, which has an asymptotic study, two dimension boundary problem of micropolar elasticity theory for an anisotropic surrounding in a thin rectangular area is reduced to the applied one-dimensional problem and, depending on the values of the dimensionless physical parameters used to construct general models of micropolar anisotropic elastic thin bars with free rotation, with constrained rotation, "with small shift rigidity", in which fully takes into account the transverse shearing and related deformation.

В данной работе при помощи метода гипотез, имеющих асимптотическое обоснование, двумерная краевая задача микрополярной теории упругости для анизотропной среды в области тонкого прямоугольника сводится к прикладной одномерной задаче и, в зависимости от значений безразмерных физических параметров, построены общие модели микрополярных анизотропных упругих тонких балок со свободным вращением; со стесненным вращением; «с малой сдвиговой жесткостью», при которых полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

**Введение.** Микрополярная (несимметричная, моментная) теория упругости в настоящее время трактуется как математическая модель упругих тел с внутренней структурой [1-3]. С этой точки зрения весьма актуально построение моделей для микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек. В работах [4-6] на основе метода гипотез, имеющих асимптотическое обоснование, построены общие теории микрополярных упругих изотропных тонких балок, пластин и оболочек.

В работе [7] при помощи асимптотического метода изучено математическое поведение решения плоской задачи микрополярной теории упругости для анизотропного (ортотропного) материала в тонкой прямоугольной области.

В данной работе развивается подход работ [4-6] на основе асимптотических свойств решения плоской задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала [7], формулируются гипотезы и в зависимости от значений физических безразмерных параметров построены модели микрополярных упругих ортотропных тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью».

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим ортотропный микрополярно-упругий параллелепипед постоянной высоты  $2h$ , длины  $a$  и постоянной толщины, равной

$2h_1 = 1$ . Координатную плоскость  $x_1, x_2$  разместим в срединной плоскости параллелепипеда. Ось  $x_2$  будет направлена по высоте, а ось  $x_1$  – по длине параллелепипеда и делит высоту  $2h$  пополам. Будем считать, что в параллелепипеде по направлению оси  $x_3$  осуществлено плоское напряженное состояние.

Основные уравнения плоской задачи микрополярной теории упругости для анизотропного (ортотропного) материала с независимыми полями перемещений и вращений имеют вид [8]:

**Уравнения равновесия –**

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0. \quad (1.1)$$

**Физико-геометрические соотношения –**

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{11} - \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{22}, \\ \gamma_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{11} + \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{22}, \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3 = \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12} - \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21}, \\ \gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3 = -\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12} + \frac{A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21}, \\ \chi_{13} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} = \frac{1}{B_{66}} \mu_{13}, \quad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} = \frac{1}{B_{44}} \mu_{23}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь,  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$  – силовые напряжения;  $\mu_{13}, \mu_{23}$  – моментные напряжения,  $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$  – деформации;  $\chi_{13}, \chi_{23}$  – изгиб-кручение,  $u_1, u_2$  – линейные перемещения,  $\omega_3$  – независимый поворот точек прямоугольника ( $0 \leq x_1 \leq a, -h \leq x_2 \leq h$ ) вокруг оси  $x_3$ , величины  $A$  и  $B$  с соответствующими индексами представляют собой упругие константы микрополярно-ортотропного материала.

На лицевых линиях прямоугольника  $x_2 = \pm h$  считаются заданными силовые и моментные граничные условия (будем рассматривать задачу изгиба):

$$\sigma_{21} = \frac{1}{2}(X^+ - X^-), \quad \sigma_{22} = \pm \frac{1}{2}(Y^+ + Y^-), \quad \mu_{23} = \pm \frac{1}{2}(M^+ + M^-). \quad (1.3)$$

На кромках ( $x_1 = 0, x_1 = a$ ) прямоугольника примем нижеследующие варианты граничных условий плоской задачи микрополярной теории упругости:

$$1) \sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \sigma_{12} = \varphi_2(x_2), \mu_{13} = \varphi_3(x_2), \quad (\text{задача 1}) \quad (1.4)$$

$$2) \sigma_{11} = \varphi_1(x_2), u_2 = 0, \mu_{13} = \varphi_3(x_2), \quad (\text{задача 2}) \quad (1.5)$$

$$3) u_1 = 0, u_2 = 0, \omega_3 = 0. \quad (\text{задача 3}) \quad (1.6)$$

Иногда более удобно вместо формул для  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{21}$  из (1.2) рассматривать их сумму и разность, т.е.

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{A_{88} - A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12} + \frac{A_{77} - A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21}, \quad (1.7)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) - \frac{A_{88} + A_{78}}{2(A_{77}A_{88} - A_{78}^2)} \sigma_{12} + \frac{A_{77} + A_{78}}{2(A_{77}A_{88} - A_{78}^2)} \sigma_{21}. \quad (1.8)$$

Функционал для вариационного принципа (типа принципа Рейсснера) для краевой задачи (1.1)-(1.4) плоской микрополярной теории упругости для ортотропного тела выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} I = & \iint_{(s)} \left( W(\gamma_{ij}, \chi_{i3}) - \sigma_{11} \left( \gamma_{11} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) - \sigma_{22} \left( \gamma_{22} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - \sigma_{12} \left( \gamma_{12} - \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3 \right) \right) - \right. \\ & - \sigma_{21} \left( \gamma_{21} - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3 \right) \right) - \mu_{13} \left( \chi_{13} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \right) - \mu_{23} \left( \chi_{23} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \right) \Big) ds - \int_0^a \left( \frac{1}{2} (X^+ - X^-) u_1 + \right. \\ & + \frac{1}{2} (Y^+ + Y^-) u_2 + \frac{1}{2} (M^+ + M^-) \omega_3 \Big) \Big|_{x_2=+h} dx_1 - \int_0^a \left( -\frac{1}{2} (X^+ - X^-) u_1 + \frac{1}{2} (Y^+ + Y^-) u_2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} (M^+ + M^-) \omega_3 \Big) \Big|_{x_2=-h} dx_1 + \int_{-h}^{+h} (\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 \omega_3) \Big|_{x_1=0} dx_2 - \\ & - \int_{-h}^{+h} (\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 \omega_3) \Big|_{x_1=a} dx_2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$W(\varepsilon_{ij}, \chi_{i3}) = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{2A_{22}} \gamma_{11}^2 + \frac{A_{77}}{2} \gamma_{12}^2 + A_{78} \gamma_{12} \gamma_{21} + \frac{A_{88}}{2} \gamma_{21}^2 + \frac{B_{66}}{2} \chi_{13}^2 + \frac{B_{44}}{2} \chi_{23}^2 \quad (1.10)$$

представляет собой плотность потенциальной энергии деформации.

Предполагается, что высота прямоугольника мала по сравнению с его длиной ( $2h \ll a$ ). Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкого прямоугольника состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю область прямоугольника и погранслоев, локализирующихся вблизи торцов прямоугольника  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ . Построение прикладной одномерной модели микрополярных балок тесно связано с построением внутренней задачи.

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, будем строить модель микрополярных ортотропных балок на основе метода гипотез. Сами гипотезы будем формулировать на основе результатов асимптотического анализа краевой задачи (1.1)-(1.6) в тонкой прямоугольной области [7].

**2. Модель изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений.** Рассмотрим случай, когда следующие безразмерные физические параметры балки имеют значения [7]:

$$\begin{aligned} \frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{88}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \\ \frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{77}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \sim 1, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \sim 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Как показывает асимптотический анализ краевых задач (1.1)-(1.6) в тонкой прямоугольной области [7], при выполнении условий (2.1) в асимптотических приближениях имеет место свободное вращение (т.е. поворот  $\Omega_3$  не зависит от компонент вектора перемещений  $u_1, u_2$ ).

Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования краевых задач (1.1)-(1.6) в тонкой прямоугольной области [7] позволяют распространить подход работы [6] при построении модели микрополярной изотропной балки на случай микрополярной анизотропии и в основу ставить следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

**а)** нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси симметрии прямоугольника  $x_1$ , остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной оси, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений  $u_1, u_2$  и свободного поворота  $\Omega_3$  по толщине прямоугольника:

$$u_2 = w(x_1), \quad u_1 = x_2 \Psi(x_1), \quad \Omega_3 = \Omega_3(x_1), \quad (2.2)$$

где  $w$  – прогиб балки;  $\Omega_3$  – угол свободного поворота, а  $\Psi$  – полный угол поворота нормального элемента.

Как убедимся, в смысле перемещений представленная гипотеза представляет собой известную классическую гипотезу Тимошенко для упругих балок [9], поэтому гипотезу (2.2) полностью назовем, как в работах [4-6], обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в случае микрополярных балок.

Кинематическая гипотеза (2.2) дополняется следующими статическими гипотезами:

**б)** при определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, для силового напряжения  $\sigma_{21}$  сначала примем

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(x_1). \quad (2.3)$$

После определения указанных величин, окончательно, значение  $\sigma_{21}$  определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования первого уравнения равновесия из (1.1), для которого потребуем, чтобы усреднённое по высоте прямоугольника величина была равна нулю.

**в)** силовое напряжение  $\sigma_{22}$  в уравнениях (1.2) пренебрежём относительно  $\sigma_{11}$ .

Отметим, что гипотеза б) отличается от соответствующей гипотезы Тимошенко в классическом случае. На основе гипотез а), б) и в), нижепостроенная теория микрополярных упругих тонких балок, как и соответствующие теории для микрополярных изотропных балок работы [6], будет асимптотически точной теорией.

В соответствии с принятыми законами распределения перемещений и поворота (2.2), а также, предположением б), для деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений из (1.1)-(1.6) получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \gamma_{21} = \Gamma_{21} = \Psi + \Omega_3, \quad \gamma_{12} = \Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \gamma_{11} = x_2 K_{11}, \quad \chi_{13} = \kappa_{13}, \\ \gamma_{22} = 0, \quad \chi_{23} = 0, \quad K_{11} = \frac{d\Psi}{dx_1}, \quad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{11} = x_2 \overset{1}{\sigma}_{11}(x_1), \quad \overset{1}{\sigma}_{11} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, \quad \mu_{23} = x_3 \frac{M^+ + M^-}{2h}, \quad \mu_{13} = B_{66} \kappa_{13}, \quad (2.5)$$

$$\sigma_{12} = A_{77} \Gamma_{12} + A_{78} \Gamma_{21}, \quad \sigma_{22} = x_2 \frac{Y^+ + Y^-}{2h}, \quad \sigma_{21} = \sigma_{21}^0(x_1) + \left( \frac{h^2}{6} \frac{x_2^2}{2} \right) \frac{d \overset{1}{\sigma}_{11}(x_1)}{dx_1}.$$

С целью приведения двумерной задачи (1.1)-(1.6) к прикладной одномерной, что уже выполнено для деформаций, изгиба-кручений, перемещений, поворота, силовых и моментных напряжений (формулы (2.2),(2.4),(2.5)), в теории микрополярных ортотропных балок вместо компонент тензоров силового и моментного напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные по высоте прямоугольника характеристики – усилия  $(N_{12}, N_{21})$  и моменты  $(M_{11}, L_{13})$ :

$$N_{12} = \int_{-h}^h \sigma_{12} dx_2, \quad N_{21} = \int_{-h}^h \sigma_{21} dx_2, \quad M_{11} = \int_{-h}^h x_2 \sigma_{11} dx_2, \quad L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dx_2. \quad (2.6)$$

В итоге, основная система уравнений изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

**Уравнения равновесия –**

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), \quad N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h(X^+ - X^-), \quad \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-). \quad (2.7)$$

**Соотношения упругости –**

$$N_{12} = 2h[A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}], \quad N_{21} = 2h[A_{78}\Gamma_{12} + A_{88}\Gamma_{21}],$$

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, \quad L_{13} = 2B_{66}h\kappa_{13}. \quad (2.8)$$

**Геометрические соотношения –**

$$\Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (2.9)$$

Система уравнений изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких балок (2.7)-(2.9) представляет собой систему уравнений шестого порядка. Это система из 11-ти уравнений относительно 11-ти неизвестных функций:  $w, \psi, \Omega_3, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}, K_{11}, \kappa_{13}, N_{12}, N_{21}, M_{11}, L_{13}$ .

«Смягченные» граничные условия на торцах балки ( $x_1 = 0, x_1 = a$ ) имеют вид [6]:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \psi = \psi^*, \quad N_{12} = N_{12}^* \text{ или } w = w^*, \quad L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \Omega_3 = \Omega_3^*. \quad (2.10)$$

В модели (2.7)-(2.10) микрополярных ортотропных упругих тонких балок полностью учтены поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Следует сказать, что когда между упругими константами имеют место равенство  $A_{77} = A_{88} = A_{78}$ , из системы уравнений и граничных условий (2.7)-(2.10) микрополярных ортотропных упругих тонких балок будут отделяться система уравнений и граничные условия классической теории ортотропных упругих балок типа Тимошенко [9] (с незначительным различием, связанным со статической гипотезой б)).

В случае, когда

$$A_{77} = A_{88} = \mu + \alpha, \quad A_{78} = \mu - \alpha, \quad B_{66} = B_{44} = B, \quad \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = E,$$

система уравнений и граничные условия (2.7)-(2.10) будут определять модель микрополярных изотропных упругих балок с независимыми полями перемещений и вращений [6].

Функционал вариационного принципа для прикладной – одномерной теории (2.7)-(2.10) микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением для ортотропного материала будет выражаться так (который получается на основе уравнения (1.9) и формулы (1.10), используя значения перемещений и поворота, деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений по формулам (2.2), (2.4)-(2.6)):

$$I = \int_0^a \left[ W - M_{11} \left( K_{11} - \frac{d\psi}{dx_1} \right) - N_{12} \left[ \Gamma_{12} - \left( \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3 \right) \right] - N_{21} \left[ \Gamma_{21} - (\psi + \Omega_3) \right] - L_{13} \left( k_{13} - \frac{d\Omega_3}{dx_1} \right) \right] dx_1 - \int_0^a \left( (X^+ - X^-)h\psi + (Y^+ + Y^-)w + (M^+ + M^-)\Omega_3 \right) dx_1 + \int_{-h}^{+h} \left( \varphi_1 x_2 \psi + \varphi_2 w + \varphi_3 \Omega_3 \right) \Big|_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^{+h} \left( \varphi_1 x_2 \psi + \varphi_2 w + \varphi_3 \Omega_3 \right) \Big|_{x_1=a} dx_2, \quad (2.11)$$

где

$$W = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{h^3}{3} K_{11}^2 + A_{77}h\Gamma_{12}^2 + 2A_{78}h\Gamma_{12}\Gamma_{21} + A_{88}h\Gamma_{21}^2 + B_{66}hk_{13}^2 \quad (2.12)$$

– плотность потенциальной энергии деформации одномерной модели.

**3. Модель изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением.** Изучим теперь случай [7], когда для следующих безразмерных физических параметров имеют место значения:

$$\frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{(A_{88} - A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad (3.1)$$

$$\frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \sim 1, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \sim 1, \quad \frac{(A_{77} - A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad \frac{(A_{88} + A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \ll 1, \quad \frac{(A_{77} + A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \ll 1.$$

Основная особенность случая (3.1) заключается в том, что как показывает асимптотический анализ [7] краевой задачи (1.1)-(1.8), поворот  $\omega_3$  в асимптотических приближениях выражается через компоненты вектора перемещений  $u_1$  и  $u_2$  формулой, идентичной соответствующей формуле плоской задачи классической теории упругости:

$$2\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (3.2)$$

Это означает, что в этом случае изучаемый вопрос находится в области микрополярной упругости со стесненным вращением (или иначе – псевдоконтинуума Коссера).

Как видно из соотношения (1.8), модель стесненного вращения будет иметь место, когда  $\frac{A_{88} + A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}$  и  $\frac{A_{77} + A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}$  стремятся к нулю (для изотропного случая:  $A_{77} = A_{88} = \mu + \alpha$ ,  $A_{78} = \mu - \alpha$ , эти условия преобразуются к единому требованию:  $\alpha \rightarrow \infty$ ).

Принимая к виду качественные стороны асимптотического решения граничной задачи (1.1)-(1.8), в случае (3.1) [7], в основу построения прикладной одномерной

модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стесненным вращением, как в работе [6], положим следующие предположения (гипотезы):

- 1) это предположения а), б), в) предыдущего раздела и
- 2) условие стесненного вращения (3.2).

Принимая указанные предположения, для перемещений, поворота, деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений будем иметь формулы:

$$u_2 = w(x_1), \quad u_1 = x_2 \psi(x_1), \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{dw(x_1)}{dx_1} - \psi(x_1) \right), \quad \gamma_{22} = 0, \quad \chi_{23} = 0, \quad (3.3)$$

$$\gamma_{12} + \gamma_{21} = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, \quad \gamma_{11} = x_2 K_{11}, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \chi_{13} = \kappa_{13}, \quad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}.$$

$$\sigma_{11} = x_2 \sigma_{11}^1(x_1), \quad \sigma_{11}^1 = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, \quad \mu_{23} = x_2 \frac{M^+ + M^-}{2h},$$

$$\sigma_{12} + \sigma_{21}^0 = \frac{A_{77} + A_{88} + 2A_{78}}{2} (\Gamma_{12} + \Gamma_{21}), \quad \mu_{13} = B_{66} \kappa_{13}, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{22} = x_2 \frac{Y^+ + Y^-}{2h}, \quad \sigma_{21}^0 = \sigma_{21}^1(x_1) + \left( \frac{h^2}{6} - \frac{x_2^2}{2} \right) \frac{d\sigma_{11}^1(x_1)}{dx_1}.$$

Основная система уравнений прикладной одномерной теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стесненным вращением, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации, выражается следующим образом:

**Уравнения равновесия –**

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), \quad N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h(X^+ - X^-), \quad \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-). \quad (3.5)$$

**Физические соотношения –**

$$N_{12} + N_{21} = h(A_{77} + A_{88} + 2A_{78})(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}), \quad M_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, \quad L_{13} = 2hB_{66}\kappa_{13}. \quad (3.6)$$

**Геометрические соотношения –**

$$\Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx_1} - \psi \right). \quad (3.7)$$

К системе уравнений (3.5)-(3.7) необходимо присоединить граничные условия (2.10) (при  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = a$ ).

Функционал вариационного принципа для прикладной – одномерной теории микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением для ортотропного материала (3.5)-(3.7), (2.10) будет выражаться так:

$$I = \int_0^a \left[ W - M_{11} \left( K_{11} - \frac{d\psi}{dx_1} \right) - \frac{N_{12} + N_{21}}{2} \left[ (\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) - \left( \frac{dw}{dx_1} + \psi \right) \right] - \frac{N_{12} - N_{21}}{2} \left[ 2\Omega_3 - \left( \frac{dw}{dx_1} - \psi \right) \right] - \right. \\ \left. - L_{13} \left( \kappa_{13} - \frac{d\Omega_3}{dx_1} \right) \right] dx_1 - \int_0^a \left( (X^+ - X^-)h\psi + (Y^+ + Y^-)w + (M^+ + M^-)\Omega_3 \right) dx_1 + \\ + \int_{-h}^{+h} \left( \varphi_1 x_2 \psi + \varphi_2 w + \varphi_3 \Omega_3 \right) \Big|_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^{+h} \left( \varphi_1 x_2 \psi + \varphi_2 w + \varphi_3 \Omega_3 \right) \Big|_{x_1=a} dx_2, \quad (3.8)$$

где

$$W = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{h^3}{3} K_{11}^2 + \frac{A_{77} + A_{88} + 2A_{78}}{4} h(\Gamma_{12} + \Gamma_{21})^2 + B_{66} h k_{13}^2 \quad (3.9)$$

– плотность потенциальной энергии деформации одномерной модели.

**4. Модель изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок “с малой сдвиговой жесткостью”.** Рассмотрим случай, когда для следующих физических безразмерных параметров имеют место условия [7]:

$$\begin{aligned} \frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{(A_{88} - A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \\ \frac{(A_{77} - A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad \frac{(A_{77} + A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad \frac{(A_{88} + A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \\ \frac{a^2(A_{77} - A_{78})}{B_{66}} \ll 1, \quad \frac{a^2(A_{88} - A_{78})}{B_{66}} \ll 1, \quad B_{66} \sim B_{44}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования краевой задачи (1.1)-(1.8) в тонкой прямоугольной области [7] позволяют, для случая (4.1), в основу построения соответствующей прикладной одномерной теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок положить следующие предположения (гипотезы) [6]:

- 1) принимаются предположения а), б), в) раздела два и
- 2) в третьем уравнении равновесия (1.1) можем пренебрегать разностью силовых напряжений  $(\sigma_{12} - \sigma_{21})$ .

Главная особенность рассматриваемого случая состоит в том, что моментная часть задачи (с уравнениями и граничными условиями) отделится как самостоятельная граничная задача. Имея в виду условие (4.1), нижепостроенную модель, следуя работе [6], будем называть моделью микрополярных ортотропных упругих тонких балок “с малой сдвиговой жесткостью”.

Основная разрешающая система уравнений и граничные условия модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок “с малой сдвиговой жесткостью” с полным учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций, будет выражаться следующим образом:

**“Моментная часть” задачи:**

$$\frac{dL_{13}}{dx_1} = -(M^+ + M^-), \quad L_{13} = 2hB_{66}\kappa_{13}, \quad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (4.2)$$

Граничные условия (при  $x_1 = 0, x_1 = a$ ):

$$L_{13} = L_{13}^* \quad \text{или} \quad \Omega_3 = \Omega_3^* \quad (4.3)$$

**“Силовая часть” задачи**

$$\begin{aligned} \frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), \quad N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h(X^+ - X^-), \\ N_{12} = 2h[A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}], \quad N_{21} = 2h[A_{88}\Gamma_{21} + A_{78}\Gamma_{12}], \\ M_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, \quad \Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Граничные условия (при  $x_1 = 0, x_1 = a$ ):

$$M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad \psi = \psi^*, \quad N_{12} = N_{12}^* \quad \text{или} \quad w = w^*. \quad (4.5)$$

**5. Изгиб шарнирно-опертой микрополярной ортотропной упругой балки под равномерно распределенной нагрузкой.** Рассмотрим простейшую задачу об изгибе

шарнирно-опертой микрополярной упругой балки под равномерно распределенной силовой нагрузкой интенсивности  $q = q_0 \sin \frac{\pi x_1}{a}$ .

А) Уравнения (2.7)-(2.9) микрополярной ортотропной балки со свободным вращением можем выразить через функции  $w, \psi$  и  $\Omega_3$ :

$$\begin{aligned} A_{78} \frac{d\psi}{dx_1} + A_{77} \frac{d^2 w}{dx_1^2} + (A_{78} - A_{77}) \frac{d\Omega_3}{dx_1} &= -\frac{q}{h}, \\ A_{88} \psi + A_{78} \frac{dw}{dx_1} + (A_{88} - A_{78}) \Omega_3 - \frac{h^2}{3} \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{d^2 \psi}{dx_1^2} &= 0, \\ B_{66} \frac{d^2 \Omega_3}{dx_1^2} + (A_{78} - A_{88}) \psi + (A_{77} - A_{78}) \frac{dw}{dx_1} - (A_{77} + A_{88} - 2A_{78}) \Omega_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для граничных условий шарнирного опирания из (2.10) будем иметь:

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a. \quad (5.2)$$

Представим решение граничной задачи (5.1), (5.2) в виде:

$$w(x_1) = w_0 \sin \frac{\pi x_1}{a}, \quad \psi(x_1) = \psi_0 \cos \frac{\pi x_1}{a}, \quad \Omega_3(x_1) = \Omega_3^{(0)} \cos \frac{\pi x_1}{a}, \quad (5.3)$$

где  $w_0, \psi_0, \Omega_3^{(0)}$  – неизвестные постоянные. Подставив решение (5.3) в систему дифференциальных уравнений (5.1), получим алгебраические уравнения относительно  $w_0, \psi_0, \Omega_3^{(0)}$ , после решения последних уравнений можем найти максимальные значения прогиба  $w$  и силового напряжения  $\sigma_{11}$ :

$$\begin{aligned} w_{\max} = w \left( x_1 = \frac{a}{2} \right) &= w_0 = \frac{q_0}{h} \left( A_{77} A_{88} - A_{78}^2 + B_{66} A_{88} \frac{\pi^2}{a^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{h^2}{3} \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{\pi^2}{a^2} \left( B_{66} \frac{\pi^2}{a^2} + A_{77} + A_{88} + 2A_{78} \right) \right) \frac{1}{K}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\sigma_{11 \max} = \sigma_{11} \left( x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = h \right) = \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{\pi^2}{a^2} q_0 \left( B_{66} A_{78} \frac{\pi^2}{a^2} + A_{77} A_{88} - A_{78}^2 \right) \frac{1}{K},$$

где

$$K = \frac{h^2}{3} \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{\pi^4}{a^4} \left( A_{77} A_{88} - A_{78}^2 + B_{66} A_{77} \frac{\pi^2}{a^2} \right) + B_{66} \left( A_{77} A_{88} - A_{78}^2 \right) \frac{\pi^4}{a^4}.$$

Численные результаты приведены в табл. 1. Эти численные результаты показывают о высоких прочностных и жёсткостных характеристиках микрополярного ортотропного материала балки.

Таблица 1

Физические параметры материала балки: $A_{77} = 0.6$ МПа, $B_{66} = 300H$ , $\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5.2$ МПа, интенсивность нагрузки: $q_0 = 50$ Па							
Относительная толщина балки	N	Размеры балки		Микрополярная ортотропная теория балок с независимыми полями перемещений и вращений (обобщенные гипотезы Тимошенко) $A_{88} = 0.8$ МПа, $A_{78} = 0.4$ МПа		Классическая ортотропная теория балок типа Тимошенко $A_{77} = A_{88} = A_{78} = A = 0.6$ МПа	
		a, м	h, м	$\sigma_{11}^{\max \text{мик.}}$ кПа	$w_{\max}^{\text{мик.}}$ $10^{-4}$ м	$\sigma_{11}^{\max \text{класс.}}$ кПа	$w_{\max}^{\text{класс.}}$ $10^{-4}$ м
$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}$	1.	0.008	0,0002	0.324	0.041	24.317	1.543
	2.	0.02	0,0005	0.353	0.106	24.317	3.858
	3.	0.1	0.0025	1.139	1.150	24.317	19.290
	4.	0.2	0.005	3.295	5.678	24.317	38.580
$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{100}$	1.	0.008	0,00008	0.330	0.102	151.982	23.760
	2.	0.02	0,0002	0.359	0.267	151.982	59.396
	3.	0.1	0.001	1.192	2.959	151.982	297
	4.	0.2	0.002	3.739	15.850	151.982	594

**В)** Уравнения (3.5)-(3.7) микрополярной ортотропной балки со стесненным вращением, выраженные через функции  $w$  и  $\psi$ , будут:

$$\begin{aligned} (A_{77} + A_{88} + 2A_{78}) \left( \frac{d^2 w}{dx_1^2} + \frac{d\psi}{dx_1} \right) - B_{66} \left( \frac{d^4 w}{dx_1^4} - \frac{d^3 \psi}{dx_1^3} \right) &= -\frac{4q}{h}, \\ (A_{77} + A_{88} + 2A_{78}) \left( \frac{dw}{dx_1} + \psi \right) - \frac{4h^2}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{d^2 \psi}{dx_1^2} + B_{66} \left( \frac{d^4 w}{dx_1^4} - \frac{d^3 \psi}{dx_1^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Граничные условия шарнирного опирания имеют вид (5.2).

В этом случае максимальные значения прогиба  $w$  и силового напряжения  $\sigma_{11}$  будут выражаться так:

$$\begin{aligned} w_{\max} &= w \left( x_1 = \frac{a}{2} \right) = \frac{q_0}{h} \left( (A_{77} + A_{88} + 2A_{78}) \frac{a}{\pi} + B_{66} \frac{\pi}{a} + \frac{4h^2}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{\pi}{a} \right) \frac{1}{L}, \\ \sigma_{11 \max} &= \sigma_{11} \left( x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = h \right) = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{\pi}{a} q_0 \left( A_{77} + A_{88} + 2A_{78} - B_{66} \frac{\pi^2}{a^2} \right) \frac{1}{L}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$L = \frac{h^2}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{\pi^3}{a^3} \left( A_{77} + A_{88} + 2A_{78} + B_{66} \frac{\pi^2}{a^2} \right) + B_{66} (A_{77} + A_{88} + 2A_{78}) \frac{\pi^3}{a^3}.$$

Численные результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Физические параметры материала балки: $A_{77} = 0.6$ МПа, $B_{66} = 300H$ , $\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5.2$ МПа, интенсивность нагрузки: $q_0 = 50$ Па							
Относительная толщина балки	N	Размеры балки		Микрополярная ортотропная теория балок со стесненным вращением (обобщенные гипотезы Тимошенко) $A_{88} = 0.8$ МПа, $A_{78} = 0.4$ МПа		Классическая ортотропная теория балок типа Тимошенко $A_{77} = A_{88} = A_{78} = A = 0.6$ МПа	
		a, м	h, м	$\sigma_{11}^{\max \text{мик.}}$ кПа	$W_{\max}^{\text{мик.}}$ $10^{-4}$ м	$\sigma_{11}^{\max \text{класс}}$ кПа	$W_{\max}^{\text{класс.}}$ $10^{-4}$ м
$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}$	1.	0.09	0.00225	0.574	0.572	24.317	17.361
	2.	0.1	0.0025	0.730	0.759	24.317	19.290
	3.	0.15	0.00375	1.710	2.295	24.317	28.936
	4.	0.2	0.005	2.953	5.02	24.317	38.581
$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{100}$	1.	0.09	0.0009	0.589	1.451	151.982	267.281
	2.	0.1	0.001	0.755	1.934	151.982	296.978
	3.	0.15	0.0015	1.832	6.055	151.982	445.468
	4.	0.2	0.002	3.315	13.86	151.982	593.957

Из приведенных данных в табл. 2 вытекает, что по микрополярной теории балок со стесненным вращением имеем довольно высокие прочностные и жесткостные характеристики по сравнению с классической теорией упругих балок.

Расчеты выполнены также по модели микрополярных балок “с малой сдвиговой жесткостью”, где в других количественных отношениях имеют место те же эффекты.

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках **Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности**, проведенного Государственным комитетом по науке МОН Республики Армения в 2010 году.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г.Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев: Изд. Киевского ун-та, 1965. 162с.
2. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд. МГУ, 1999. 328с.
3. Белов П.А., Лурье С.А. Континуальная модель микрогетерогенных сред. // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 5. С.833-848.
4. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №1. С.58-67.

5. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Физическая мезомеханика. 2011. №1. С.55-66.
6. Саркисян С.О. Математические модели микрополярных упругих тонких балок. // Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. №2.
7. Алваджян Ш.И. Построение уравнений и граничных условий статической задачи изгиба ортотропных микрополярных упругих тонких балок асимптотическим методом //В сб.: научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 2010. Т.1. С.71-75.
8. D. Iesan. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids // Archives of Mechanics.1973. Vol.5. № 3. P.547-561.
9. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наукова думка, 1977. 183с.

**Сведения об авторах:**

**Саркисян Самвел Оганесович–**

Доктор физ-мат. наук, профессор, Чл-корр. НАН Армении  
Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

**Алваджян Шушаник Искяндаровна–**

Аспирант Гюмрийского государственного педагогического института им. М.  
Налбандяна

Поступила в редакцию 05.05.2011

УДК 539.3

**ТЕРМОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УДЛИНЁННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ  
ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА  
БАГДАСАРЯН Г.Е., МИКИЛЯН М.А., САГОЯН Р.О.**

**Ключевые слова:** Флаттер, критическая скорость, тепловое поле, устойчивость  
**Keywords:** Flutter, Critical Speed, Thermal Field, Stability

**Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ.**

**Գազի գերձայնային հոսանքով շրջնավող երկար ուղղանկյուն սալի ջերմաառաձգական կայունությունը**

Բազմաթիվ աշխատանքներ կան նվիրված գազի գերձայնային հոսանքով շրջնավող սալերի ու թաղանթների կայունության ուսումնասիրմանը: Այդ աշխատանքների մասին տեղեկություններ կարելի է ստանալ [1,2] մենագրություններում և [3] ակնարկային հոդվածում: Հետազոտված են նաև գազի գերձայնային հոսանքով շրջնավող և ջերմային դաշտում գտնվող դեֆորմացվող բարակ մարմինների կայունության հարցերը [4-7]:

Ներկայացվող աշխատանքում գծային դրվածքով դիտարկված է երկար, ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը ըստ հաստության փոփոխական ջերմային դաշտի և գերձայնային արագությամբ շրջնավող գազի (սալի կարճ եզրերի ուղղությամբ ազդող չգրգռված արագությամբ) ազդեցության տակ: Ըստ հաստության ջերմային դաշտի անհամասառության պատճառով տեղի է ունենում սալի ծռում և այդ վիճակը ընդունվում է որպես չգրգռված: Ստացված են դիտարկվող ջերմաառաձգական համակարգի չգրգռված վիճակի կայունության պայմանները և դրանց հիման վրա կառուցված է կայունության տիրույթը այն փոփոխականների տարածությունում, որոնք բնութագրում են շրջնաձև արագության մեծությունը, սալի միջին հարթության վրա ջերմությունը և ջերմության գրադիենտը նշված հարթության նորմալի ուղղությամբ: Ցույց է տրված, որ ջերմային դաշտի և շրջնաձև անհամասառ ազդեցությամբ կարելի է դեկավարել կայունության պրոցեսը և ջերմային դաշտի օգնությամբ կարելի է էապես փոխել ֆլատերի կրիտիկական արագության մեծությունը:

**Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O.**

**Thermoelastic stability of long rectangular plate in a supersonic gas flow**

There are several works devoted to the investigation of the stability of plates and shells in a supersonic gas flow. Remarks on these works in monographs [1,2] and in the paper [3] can be found. The issues of the influence of constant temperature field on the stability of deformable thin bodies in a supersonic gas flow are investigated also [4-7].

In this paper, in linear formulation we consider the problem of stability of long rectangular plate under the influence of both variable along the thickness temperature field and supersonic gas flow (with the unperturbed speed, which directed along the short edges of the plate). Due to the inhomogeneity of along the thickness temperature field the buckling of the plate is takes place and this state is taken as unperturbed. Conditions of stability of unperturbed state of examined termogasoelastic system are obtained and on its base the stability area is constructed in the space of variables characterizing the value of the flown speed, the temperature at the middle plane of the plate and the temperature gradient along the normal direction of this plane. It is shown that via the

combined action of the temperature field and the flowing stream one can regulate the process of stability and with the help of temperature field one can significantly change the value of the flutter critical speed.

Имеются многочисленные исследования, посвященные устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1,2] и в обзорной статье [3]. Исследованы также вопросы влияния постоянного температурного поля на устойчивость деформируемых тонких тел обтекаемых сверхзвуковым потоком газа [4-7].

В настоящей работе в линейной постановке рассмотрена задача устойчивости удлиненной прямоугольной пластинки под действием переменного по толщине температурного поля и обтекающего сверхзвуковым потоком газа (с невозмущенной скоростью, направленной вдоль коротких сторон пластинки). Вследствие неоднородности по толщине температурного поля происходит выпучивание пластинки и это состояние принимается как невозмущенное. Получены условия устойчивости невозмущенного состояния рассматриваемой термогазоупругой системы и на их основе построена область устойчивости в пространстве переменных, характеризующих величину скорости обтекающего потока, температуру на срединной плоскости пластинки и градиента температуры в нормальном направлении к указанной плоскости. Показано, что совместным действием температурного поля и обтекающего потока можно регулировать процесс устойчивости и при помощи температурного поля существенно изменить величину критической скорости флаттера.

### 1. Основные уравнения

Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины  $h$ , находящуюся в стационарном температурном поле  $T$ . Введем декартовую систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$  так, чтобы срединная плоскость пластинки совпала с координатной плоскостью  $(x_1, x_2)$ . Пусть, пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью  $U$ , направленной вдоль оси  $Ox_1$ . Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы. В основу исследования принимаются следующие известные предположения:

- а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях [8];
- б) деформации как невозмущенного, так и возмущенного состояния настолько малы, что можно воспользоваться линейной теорией аэротермоупругости;
- в) “закон плоских сечений” при определении аэродинамического давления [9,10]:

$$p = p_\infty \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{2} \frac{v_3^2}{a_\infty^2} \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha - 1}}, \quad (1)$$

где  $p$  – давление газа на поверхности пластинки,  $a_\infty$  – скорость звука для невозмущенного газа ( $a_\infty^2 = \alpha p_\infty / \rho_\infty$ ),  $p_\infty$  и  $\rho_\infty$  – давление и плотность газа в

невозмущенном состоянии,  $\kappa$  – показатель политропы,  $V_3$  – нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки;

г) линейный закон изменения температурного поля  $T(x_1, x_2, x_3)$  по толщине пластинки [1]:

$$T = T_0(x_1, x_2) + x_3 \Theta(x_1, x_2); \quad (2)$$

д) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры [11].

На основе принятых предположений и теории термоупругости изотропного тела получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения пластинки [1]:

$$D\Delta^2 w + \alpha(1 + \mu)D\Delta\Theta = q + T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2T_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \alpha \Delta T_0 = 0.$$

Здесь  $w(x_1, x_2, t)$  – прогиб пластинки,  $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ ,  $E$  – модуль

упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,

$T_{ij}$  – внутренние усилия,  $q$  – поперечная нагрузка, которая складывается из сил

инерции, сил демпфирования и аэродинамического давления  $\Delta p$

$$q = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\kappa p_\infty}{a_\infty} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + a_\infty M \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \quad (4)$$

где  $M = U a_\infty^{-1}$  – число Маха для невозмущенного потока,  $\rho$  – плотность материала пластинки,  $\varepsilon$  – коэффициент линейного затухания. Аэродинамическое давление  $\Delta p$  (последний член в (4)) вычислено по формуле (1) в линейном приближении.

Внутренние усилия  $T_{ij}$ , в предположении, что тангенциальными составляющими сил инерции можно пренебречь, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} = 0; \quad (5)$$

и согласно обобщенному закону Гука связаны с компонентами деформаций  $\varepsilon_{ij}$  срединной плоскости пластинки формулами:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} [\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} - \alpha(1+\mu)T_0], \\
T_{22} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} [\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} - \alpha(1+\mu)T_0], \quad T_{12} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \varepsilon_{12}, \\
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2};
\end{aligned} \tag{6}$$

где  $u_1(x_1, x_2, t)$  и  $u_2(x_1, x_2, t)$  – тангенциальные перемещения точек срединной плоскости пластинки.

В дальнейшем, для простоты и наглядности принимается, что пластинка в направлении, перпендикулярном к скорости обтекающего потока, достаточно длинная и однородно закреплена по длинным сторонам. В этом случае срединная поверхность изогнутой пластинки будет близка к цилиндрической. Поэтому, направляя ось  $Ox_2$  вдоль длинной стороны, считаем, что все величины (как возмущённого, так и невозмущённого состояния) не зависят от координаты  $x_2$  и перемещение  $u_2$  вдоль оси  $Ox_2$  равно нулю.

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля ( $\Theta \neq 0$ ) происходит выпучивание пластинки (с прогибом  $w_T(x_1)$ ) и вследствие этого появляется аэроупругое давление, которое, согласно предположению (в), определяется формулой (1). В линейном приближении для указанного давления получается выражение  $\alpha p_\infty M dw_T / dx_1$ .

На основе приведенных уравнений и соответствующих условий на кромках  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$  пластинки (граничные условия приводятся в ходе изложения) исследуется устойчивость указанного выпученного (невозмущённого) состояния, под действием температурного поля и давления обтекающего сверхзвукового потока газа.

## 2. Определение характеристик невозмущённого состояния

Невозмущённое состояние рассматриваемой гидротермоупругой системы характеризуется стационарным температурным полем  $T$ , вектором упругих перемещений  $\vec{u}_0(u_0^{(1)}, 0, u_0^{(3)})$  и тензором напряжений  $\sigma_{ij}^0$ , возникающие вследствие температурного поля и обтекающего потока.

Для определения характеристик невозмущённого состояния кроме предположений уже принятых во втором параграфе, принимается также следующее: из лицевых поверхностей ( $x_3 = \pm h/2$ ) пластинки происходит теплообмен с

окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями  $T^+$  и  $T^-$  соответственно), а боковые поверхности ( $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ ) теплоизолированы.

**2.1. Определение температурного поля.** На основе принятых предположений задача определения стационарного температурного поля в пластинке сводится к решению уравнения теплопроводности:

$$\Delta T = 0 \quad (7)$$

в области, занимаемой пластинкой, при следующих поверхностных условиях:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = k(T - T^\pm) \quad \text{при } x_3 = \pm \frac{h}{2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = a \quad (9)$$

Сформулированная задача теплопроводности (6)–(8), согласно предположению о линейной зависимости температуры по толщине пластинки, имеет следующее решение:

$$T = T_0 + x_3 \Theta, \quad (10)$$

$$T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta = \frac{k(T^+ - T^-)}{2\lambda + kh}.$$

В (7)–(10)  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $k$  – коэффициент теплоотдачи,  $\vec{n}$  – внешняя нормаль поверхности пластинки.

**2.2 Определение термоупругих напряжений и перемещений.** На основе принятых предположений, из основных уравнений, соотношений и граничных условий теории термоупругости тонких пластин имеем:

следующие соотношения:

$$u_0^{(3)} = w_T(x_1), \quad (11)$$

$$u_0^{(1)} = u_T(x_1) - x_3 \frac{dw_T}{dx_1},$$

согласно гипотезам Кирхгоффа;

следующие уравнения, относительно  $u_T$  и  $w_T$ :

$$\frac{d^2 u_T}{dx_1^2} = 0 \quad (12)$$

$$D \frac{d^4 w_T}{dx_1^4} + \alpha p_\infty M \frac{dw_T}{dx_1} = 0 \quad (13)$$

согласно теории тонких пластин;

следующее выражение для напряжения  $\sigma_{11}^0$  невозмущенного состояния

$$\sigma_{11}^0 = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \frac{du_T}{dx_1} - \alpha(1 + \mu)T_0 - x_3 \left( \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} + \alpha(1 + \mu)\Theta \right) \right] \quad (14)$$

согласно обобщенному закону Гука.

В силу (14) для осевого усилия  $T_{11}^0$  и изгибающего момента  $M_{11}^0$  имеем:

$$T_{11}^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}^0 dx_3 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{du_T}{dx_1} - \alpha(1+\mu)T_0 \right], \quad (15)$$

$$M_{11}^0 = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{11}^0 dx_3 = -D \left[ \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} + \alpha(1+\mu)\Theta \right]. \quad (16)$$

В (14)–(16)  $T_0$  и  $\Theta$  определяются согласно формулам (10).

Решения уравнений (12) и (13) должны удовлетворить условиям закрепления краев пластинки  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ . Будут рассмотрены краевые условия следующих двух типов:

- края шарнирно опёрты и свободно перемещаются вдоль оси  $Ox_1$ ;
- края шарнирно опёрты и неподвижны.

Указанные краевые условия согласно (15) и (16) представляются следующим образом:

**края шарнирно опёрты и свободно перемещаются вдоль оси  $Ox_1$**

$$w_T = 0, \quad \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} + \alpha(1+\mu)\Theta = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad (17)$$

$$\frac{du_T}{dx_1} - \alpha(1+\mu)T_0 = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a; \quad (18)$$

**края шарнирно опёрты и неподвижны**

$$w_T = 0, \quad \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} + \alpha(1+\mu)\Theta = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad (19)$$

$$u_T = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a. \quad (20)$$

Итак, краевые задачи для определения  $u_T$  и  $w_T$ , согласно уравнениям (12) и (13) и краевым условиям (17)–(20), разделяются. Для определения  $w_T$  как в случае свободно смещающихся, так и в случае неподвижных краёв получается одна и та же краевая задача (13), (17) или (13), (19). Указанная задача имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} w_T(x_1) = & -\frac{R\Theta}{\Delta} \left\{ e^{2\varphi(a-x_1)} (1 + e^{2\varphi a}) - (1 + e^{4\varphi a}) + \right. \\ & e^{\varphi a} \left[ (1 + e^{2\varphi a} - 2e^{2\varphi(a-x_1)}) \cos \sqrt{3}\varphi a - \sqrt{3} (1 - e^{2\varphi a}) \sin \sqrt{3}\varphi a \right] + \\ & + e^{\varphi x_1} (1 - e^{2\varphi a}) \left[ \cos \sqrt{3}\varphi x_1 + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}\varphi x_1 \right] + \\ & \left. + e^{\varphi(a+x_1)} (1 - e^{2\varphi a}) \left[ \cos \sqrt{3}\varphi(a-x_1) + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}\varphi(a-x_1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\Delta = 4\varphi^2 \left\{ 1 + e^{4\varphi a} - e^{\varphi a} \left[ (1 + e^{2\varphi a}) \cos \sqrt{3}\varphi a + \sqrt{3}(1 - e^{2\varphi a}) \sin \sqrt{3}\varphi a \right] \right\},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi^4}{4a^3} K v}, \quad R = \alpha(1 + \mu), \quad K = \frac{4\alpha p_\infty}{Dh} \left( \frac{a}{\pi} \right)^4, \quad v = M \frac{h}{a}.$$

Решение задачи для определения  $u_T$ , в зависимости от граничных условий, имеет следующий вид:

$$u_T = \alpha(1 + \mu) T_0 \left( x_1 - \frac{a}{2} \right), \quad T_{11}^0 \equiv 0 \quad (22)$$

в случае свободно смещающихся краёв, и

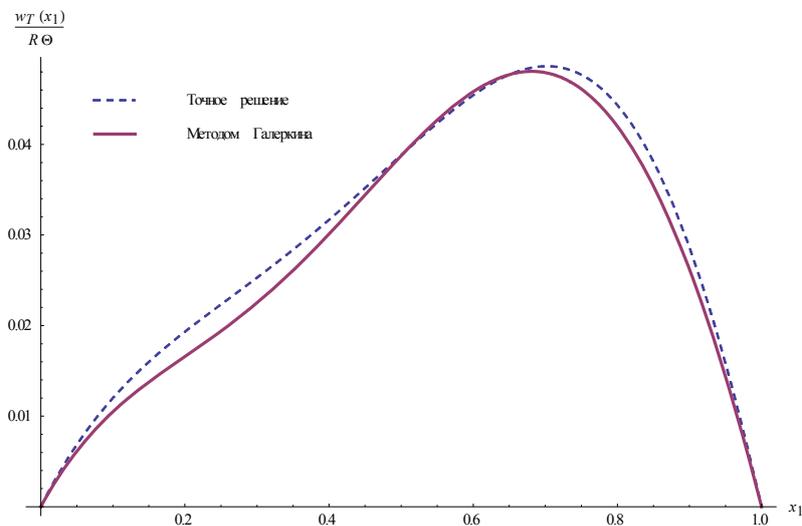
$$u_T \equiv 0, \quad T_{11}^0 = -\frac{Eh\alpha}{1 - \mu} T_0 \quad (23)$$

в случае неподвижных краёв.

С точки зрения дальнейшего применения выражения (21), задача определения  $w_T$  решена также приближённо методом Бубнова-Галеркина и получена следующая формула:

$$w_T(x_1) = -R\Theta \left\{ \frac{1}{2} x_1 (x_1 - a) + \frac{a^2 K v}{36 + K^2 v^2} \left[ \frac{3}{8\pi} K v \sin \frac{\pi x_1}{a} + \frac{9}{16\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right] \right\}. \quad (24)$$

На фиг.1 приведены графики функции  $w_T$ , построенные на основе формул (21) и (24) при  $\alpha=23.8 \cdot 10^{-6}$  град $^{-1}$ ;  $k=1200$  Вт/(м $^2$  град);  $\lambda=210$  Вт/(м град);  $\mu=0.34$ ;  $a=1$ м;  $h/a=1/100$ .



Фиг.1  
Графики функции  $w_T / R\Theta$

Фиг.1 показывает, что значения функции  $w_T$ , определяемые формулами (21) и (24), практически совпадают. Поэтому в дальнейшем, для простоты применений и вычислений используется формула (24).

### 3. Возмущённое состояние

Использованием уравнения движения пластинки (3) и выражения для характеристик невозмущенного состояния, полученные в пункте 2, формулируются краевые задачи, описывающие поведение возмущений (сообщаемые пластинке) под действием рассматриваемого температурного поля и давления потока газа, обтекающего пластинку со сверхзвуковой скоростью. На основе решения сформулированной краевой задачи получены условия устойчивости и исследованы влияния температурного поля на области устойчивости и на критическую скорость флаттера.

#### 3.1 Краевые задачи относительно возмущений невозмущённого состояния.

Здесь будут получены уравнения и соответствующие краевые условия устойчивости рассматриваемой термоупругой системы. С этой целью основные величины, входящие в систему уравнений движения пластинки (3)–(6), представляются в виде суммы двух слагаемых. Первое из этих слагаемых является значением соответствующей величины в невозмущённом состоянии, а второе – возмущением этой величины. Следовательно,

$$\begin{aligned} w &= w_T(x_1) + w(x_1, t), \\ T_{11} &= T_{11}^0 + t_{11}, \\ u_1 &= u_T + u. \end{aligned} \quad (25)$$

Для получения уравнений возмущенного состояния (уравнения относительно возмущений  $u$ ,  $w$  и  $t_{11}$ ) соотношения (25) подставляются в (3)–(6) и учитываются, что:

- а) величины, характеризующие невозмущенное состояние, удовлетворяют уравнениям и соотношениям, полученным в пункте 3;
- б) величины невозмущенного состояния определены на основе линейной теории термоупругости (подлежащие определению величины входили в соответствующие уравнения и краевые условия линейно);
- в) величины, характеризующие как невозмущенное, так и возмущенное состояние, не зависят от координаты  $x_2$ ;
- г) в окончательных уравнениях и соотношениях величины, характеризующие невозмущенное состояние, будут присутствовать только в первых степенях.

В результате, из первого уравнения системы (5) получается (второе уравнение этой системы удовлетворяется тождественно):

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad (26)$$

где возмущение  $t_{11}$ , согласно первому соотношению из (6), формулам (11) и (18), а также представлению (25), определяется следующим образом:

$$t_{11} = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} F(x_1, t) \right], \quad F(x_1, t) = 2 \frac{dw_T}{dx_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (27)$$

Из (26) следует, что если края пластинки свободно смещаются ( $t_{11} = 0$  при  $x_1 = 0, x_1 = a$ ), то

$$t_{11} \equiv 0. \quad (28)$$

В случае же неподвижных краёв ( $u = 0$  при  $x_1 = 0, x_1 = a$ ), из (26) и (27) путем интегрирования получается:

$$u(x_1, t) = \frac{x_1}{2a} \int_0^a F(x_1, t) dx_1 - \int_0^{x_1} F(\xi, t) d\xi. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (27), для возмущений  $t_{11}$  осевого усилия в случае неподвижных краев найдем:

$$t_{11} = \frac{Eh}{2a(1-\mu^2)} \int_0^a F(x_1, t) dx_1. \quad (30)$$

Наконец, из первого уравнения системы (3) с учетом (6), (23), (28) и (30) получается следующее основное дифференциальное уравнение относительно возмущения  $w(x_1, t)$  поперечного перемещения пластинки:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - N_1^T \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left( \rho h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha p_\infty M \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} p_\infty M^2 \frac{dw_T}{dx_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad (31)$$

В (31) введены следующие обозначения:

$$N_1^T = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ -\frac{Eh}{1-\mu} \alpha T_0, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases} \quad (32)$$

Решения уравнения (31) должны удовлетворять следующим условиям:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a \quad (34)$$

которые вытекают из условий шарнирного опирания краев пластинки.

Отметим, что присутствие последнего члена в уравнении (31) обусловлено искривленностью невозмущенного состояния пластинки (вследствие того, что  $\Theta \neq 0$ ). Величина этого члена вычислена при помощи линеаризации выражения  $(\partial w / \partial t)^2$ , входящего в разложение аэродинамической силы (1).

Таким образом, исследование поведения возмущений, сообщаемых находящейся в неоднородном температурном поле и обтекающейся сверхзвуковым потоком газа пластинке, сведена к решению нелинейной однородной краевой задачи (31)–(33).

**3.2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений.** Решение уравнения (31), удовлетворяющее условиям (33), представим в виде

$$w(x_1, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin \lambda_m x_1, \quad \left( \lambda_m = \frac{m\pi}{a} \right), \quad (35)$$

где  $f_m(t)$  – подлежащие определению функции времени  $t$ .

Подставляя (35) в уравнение (31) и используя процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно безразмерных функций  $x_m = f_m / h$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_k}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega_1} \left( \varepsilon + \frac{a_{\infty} \rho_{\infty}}{\rho h} \right) \frac{dx_k}{d\tau} + \frac{\omega_k^2}{\omega_1^2} x_k - \bar{T} k^2 x_k \delta + \frac{Kv}{2} k \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{1 - (-1)^{k+m}}{k^2 - m^2} x_m + \\ + \frac{\varkappa + 1}{4} K v^2 \frac{a}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_{mk} x_m = 0, \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\omega_1 t = \tau, \quad \bar{T} = \frac{12}{\pi^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 RT_0, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} \left( \varepsilon + \frac{a_{\infty} \rho_{\infty}}{\rho h} \right), \quad \omega_k^2 = \frac{D}{\rho h} \lambda_k^4,$$

$$a_{mk} = \int_0^a \frac{dw_T}{dx_1} \sin \lambda_k x_1 \cos \lambda_m x_1 dx_1.$$

В (36)  $\omega_i$  – частоты собственных колебаний,  $\chi$ ,  $v$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{\Theta}$  – параметры, характеризующие соответственно процесс затухания, скорость обтекающего потока и температурного поля,

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ 1, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases}$$

В дальнейшем ограничимся случаем двухчленной аппроксимации [1]:

$$w = f_1(t) \sin \lambda_1 x + f_2(t) \sin \lambda_2 x,$$

принимая ее как первое приближение. Тогда, в силу (24), система (36) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + (1 - \bar{T} \delta) x_1 - \frac{2}{3} K v x_2 + \bar{\Theta} [\delta_{11}^{\ominus} x_1 + \delta_{12}^{\ominus} x_2] = 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + (\gamma^2 - 4\bar{T} \delta) x_2 + \frac{2}{3} K v x_1 + \bar{\Theta} [\delta_{21}^{\ominus} x_1 + \delta_{22}^{\ominus} x_2] = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{\Theta} = R \Theta h \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{36 + K^2 v^2}, \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (38)$$

а также следующие коэффициенты  $\delta_{ij}^{\ominus}$ , учитывающие взаимодействие температуры и обтекающего потока с колеблющейся пластинкой:

$$\begin{aligned}\delta_{11}^{\ominus} &= \frac{9}{4}(\varkappa+1)Kv^2, \quad \delta_{12}^{\ominus} = -\frac{21}{40}(\varkappa+1)K^2v^3, \\ \delta_{21}^{\ominus} &= -\frac{3}{40}(\varkappa+1)K^2v^3, \quad \delta_{22}^{\ominus} = \frac{1}{80}(\varkappa+1)Kv^2(180+K^2v^2).\end{aligned}\tag{39}$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (37) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра  $v$ ) и температуры (от величин  $\bar{T}$ ,  $\bar{\Theta}$ ).

#### 4. Условия и область устойчивости

Отметим, что при отсутствии обтекающего потока ( $v=0$ ), когда  $\delta=1$ , система (37) допускает следующие решения:  $x_1 = \text{const} \neq 0$ ,  $x_2 = 0$  и  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \text{const} \neq 0$ , отходящие от тривиального решения  $x_1 = x_2 = 0$  при

$$\bar{T} = 1 \quad \text{или} \quad T_{0*}^{(1)} = \frac{\pi^2}{12R} \left( \frac{h}{a} \right)^2\tag{40}$$

в случае первого решения ( $x_1 = \text{const} \neq 0$ ,  $x_2 = 0$ ) и при

$$4\bar{T} = \gamma^2 \quad \text{или} \quad T_{0*}^{(2)} = \frac{\pi^2 \gamma^2}{48R} \left( \frac{h}{a} \right)^2\tag{41}$$

в случае второго решения ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \text{const} \neq 0$ ). Первое решение соответствует выпучиванию пластинки по одной полуволне, второе – выпучиванию по двум полуволнам. Формулами (40) и (41) определяются критические значения температуры  $T_0$ , при которых пластинка теряет статическую устойчивость по формам, указанным выше.

Представляя решение системы (37) в виде  $x_1 = y_1 e^{\lambda \tau}$ ,  $x_2 = y_2 e^{\lambda \tau}$ , получим следующее характеристическое уравнение относительно  $\lambda$ :

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0\tag{42}$$

где

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2\chi$$

$$a_2 = 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus}) + \chi^2, \quad a_3 = \left[ 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus}) \right] \chi$$

$$a_4 = (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2v^2 + (\delta_{11}^\ominus\delta_{22}^\ominus - \delta_{12}^\ominus\delta_{21}^\ominus)\bar{\Theta}^2 + \\ + \left( \gamma^2(\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) - \frac{2}{3}Kv(\delta_{12}^\ominus - \delta_{21}^\ominus) - (4\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus)\bar{T}\delta \right)\bar{\Theta}.$$

Невозмущенная форма пластинки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица, записываются в виде:

$$a_i > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 4), \quad \Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2a_0 > 0 \quad (43)$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Третье условие выполняется, если выполняется четвертое условие. Из остальных условий получим следующие неравенства, определяющие область устойчивости рассматриваемой термоупругой системы в пространстве параметров  $v$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{\Theta}$ :

$$1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) > 0 \\ (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2v^2 + (\delta_{11}^\ominus\delta_{22}^\ominus - \delta_{12}^\ominus\delta_{21}^\ominus)\bar{\Theta}^2 + \\ + \left( \gamma^2(\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) - \frac{2}{3}Kv(\delta_{12}^\ominus - \delta_{21}^\ominus) - (4\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus)\bar{T}\delta \right)\bar{\Theta} > 0 \quad (44) \\ (\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}\delta)^2 - \frac{16}{9}K^2v^2 + 2\chi^2(\gamma^2 + 1) - (6(\delta_{22}^\ominus - \delta_{11}^\ominus)\bar{\Theta} + 10\chi^2)\bar{T}\delta + \\ + 2\left( (\gamma^2 - 1)(\delta_{22}^\ominus - \delta_{11}^\ominus) + \frac{4}{3}Kv(\delta_{12}^\ominus - \delta_{21}^\ominus) + (\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus)^2\chi^2 \right)\bar{\Theta} + \\ + (4\delta_{12}^\ominus\delta_{21}^\ominus + (\delta_{22}^\ominus - \delta_{11}^\ominus)^2)\bar{\Theta}^2 > 0.$$

Если влиянием затухания можно пренебречь (формально  $\chi = 0$ ), то вместо (42) получается биквадратное уравнение, и, поэтому, условиями устойчивости будут:

$$a_2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_2^2 - 4a_4 > 0. \quad (45)$$

Исследование области устойчивости рассматривается поэтапно:

1)  $\bar{T} \neq 0$ ,  $\bar{\Theta} = 0$ ; 2)  $\bar{T} = 0$ ,  $\bar{\Theta} \neq 0$ ; 3) общий случай  $\bar{T} \neq 0$ ,  $\bar{\Theta} \neq 0$ .

1) *Случай постоянного температурного поля* ( $\Theta = 0$ ). В этом случае, когда  $\delta = 1$  (т.е. когда края пластинки неподвижны), условия (44) существенно упрощаются и принимают вид:

$$1 - \gamma^2 - 5\bar{T} > 0, \quad (1 - \bar{T})(\gamma^2 - 4\bar{T}) + \frac{4}{9}K^2v^2 > 0, \quad (46)$$

$$(\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}\delta)^2 - \frac{16}{9}K^2v^2 > 0.$$

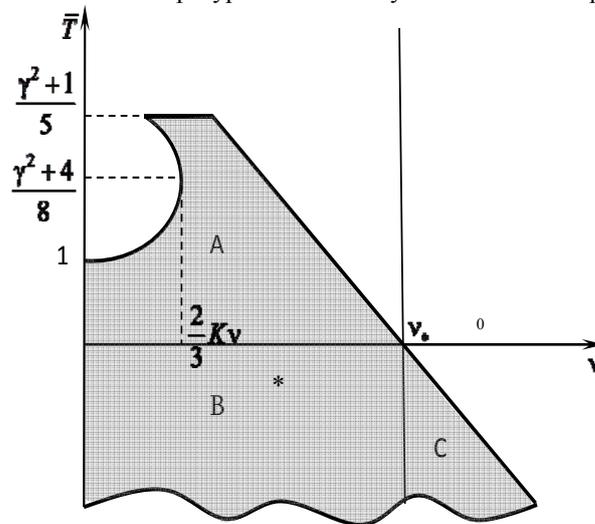
А если  $\delta = 0$  (т.е. когда края пластинки свободно смещаются), то первые два условия из (44) выполняются во всех случаях, а из третьего условия получается следующая формула для определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости пластинки:

$$v_* = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{K} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}}. \quad (47)$$

Формула (47) совпадает с известной формулой, полученной в [1] и показывает, что постоянное температурное поле не влияет на области устойчивости, если края пластинки свободно смещаются.

Неравенства (46) позволяют построить область устойчивости на плоскости  $(v, T_0)$ .

Указанная область приведена на фиг.2, где  $v_*^0$  – критическое значение обтекающего потока, когда влияние температурного поля не учитывается. Из фиг. 2 видно, что:



Фиг.2

Область устойчивости при постоянном температурном поле

- а) если  $T_0 > 0$ , то температурное поле существенно сужает область устойчивости (полулобса  $(0 < v < v_*, T_0 > 0)$  превращается в область  $A$ ),
- б) если  $T_0 < 0$ , то температурное поле существенно увеличивает область

устойчивости (вместо  $B$  областью устойчивости является  $B \cup C$ ).

Для наглядности, в табл.1 приведены значения  $v_*$  в зависимости от  $T_0$  при различных  $h/a$ . Для расчёта здесь и дальнейшем принято:  $\alpha=23.8 \times 10^{-6}$  град $^{-1}$ ;  $k=1200$  Вт/(м $^2$  град);  $\lambda=210$  Вт/(м град);  $\mu=0.34$ ;  $a=1$ м;  $h/a=1/100$ .

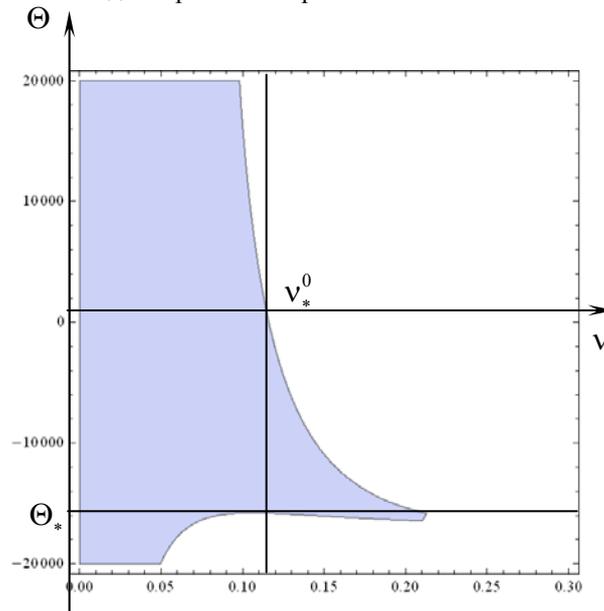
Таблица 1. Влияние постоянного температурного поля на критическую скорость

$\begin{matrix} \theta, T_0 \\ h/a \end{matrix}$	-100	-50	0	5	50
1/50	5.4622	3.6604	1.8586	1.6785	0.05687
1/80	1.6912	0.9874	0.2836	0.06165	Неуст.
1/100	1.01705	0.5667	0.1162	0.0711	Неуст.
1/300	0.1015	0.05148	0.001434	Неуст.	Неуст.

Случай присутствия постоянного температурного поля в той или иной постановке исследован многими авторами, в частности, этому случаю посвящены работы [4-7].

**2) Влияние градиента температуры на область устойчивости ( $\bar{T} = 0, \bar{\Theta} \neq 0$ ).**

В этом случае условиями устойчивости будут (44) при  $T_0 = 0$ , причем указанные условия не зависят от вида закрепления краев пластинки в своей плоскости.



Фиг. 3  
Область устойчивости при  $T_0 = 0$

На основе условий (44) построена область устойчивости на плоскости  $(v, \Theta)$  при тех же исходных данных, что приведены в предыдущем случае.

На фиг.3 приведена часть области устойчивости, соответствующая умеренным температурным полям. Из фиг.3 видно, что: а) если  $\Theta > 0$ , то температурное поле заметно сужает область устойчивости; б) если  $\Theta < 0$ , то до некоторого определённого отрицательного значения  $\Theta_*$  область устойчивости заметно увеличивается, после чего, с увеличением  $|\Theta|$  происходит существенное уменьшение области устойчивости.

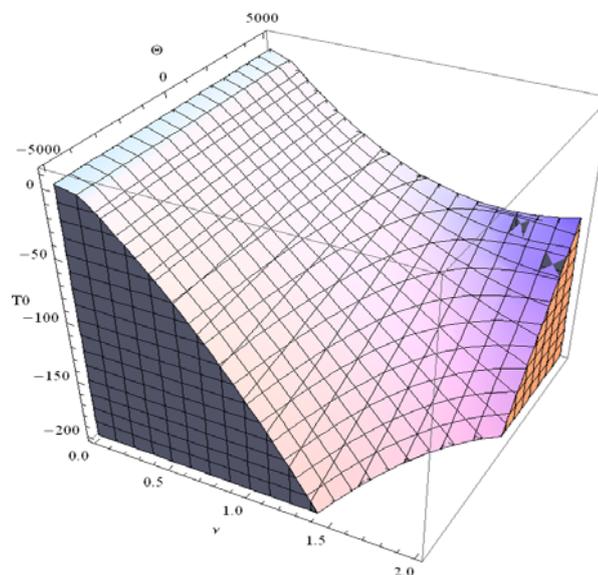
Для наглядности, в табл.2 приведены значения  $v_*$  в зависимости от  $\Theta$  при приведённых выше исходных данных и различных  $h/a$ .

Таблица 2. Влияние градиента температуры на критическую скорость

$\Theta c^0 / m$ h/a	-5000	-2500	0	2500	5000
1/50	2.5164	2.1183	1.8586	1.5702	1.4895
1/80	0.3509	0.3084	0.2836	0.2671	0.2554
1/100	0.1266	0.1208	0.1162	0.1124	0.1093
1/300	0.001437	0.001436	0.001434	0.001432	0.00143

Табл. 2 показывает, что влияние градиента температуры на критическую скорость является существенным в случае сравнительно толстых пластин.

**3) Общий случай ( $T \neq 0, \Theta \neq 0$ ).** В этом случае, при тех же исходных данных произведён численный анализ неравенств (44). Результаты вычислений приведены на фиг. 4 и в табл.3.



Фиг.4  
Область устойчивости в общем случае

**Таблица 3. Общий случай при  $h/a=1/100$**

$\Theta, ^\circ C / m$ $^0 c, T_0$	-5000	-2500	0	2500	5000
-200	1.4152	1.5818	1.9179	Уст.	Уст.
-100	0.8755	0.9286	1.01705	1.1989	Уст.
-50	0.5433	0.5513	0.5667	0.5918	0.6347
0	0.1266	0.1208	0.1162	0.1124	0.1093
5	0.0765	0.0735	0.0711	0.0396	0.0367
7	0.05515	0.05363	0.0531	0.0437	0.04166

Фиг.4 и табл.3 демонстрируют результаты рассмотренных выше частных случаев и показывают, что если обе составляющие температурного поля отличны от нуля, то влияние температурного поля на область устойчивости может оказаться более существенным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.:Наука, 1972. 432 с.
3. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек //Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел. 1978. Т.11. С.67-122.
4. Болотин В.В. Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа. //В сб.: “Расчеты на прочность”. М.: Машгиз. 1060. Вып.6.
5. Hoff N.I. Thermal buckling of supersonic wing panels. Journ. Aeronaut. Sci., v.23, N11, 1956.
6. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Выпучивание и установившийся флаттер термически сжатых панелей, находящихся в сверхзвуковом потоке. //Инж. журнал. 1961. Т.1. N2. С.82-96.
7. L. Librescu, P. Marzocca, W.A. Silva, “Linear/Nonlinear Supersonic Panel Flutter in a High-Temperature Field,” Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 1, July – August 2004, pp. 918-924.
8. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949.
9. Илюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПМ. 1956. Т.XX. Вып.6.
10. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. Journ. Aeronaut. Sci. 23, N6, 1956.
11. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд. АН СССР, 1962.

#### Сведения об авторах:

**Багдасарян Геворг Ервандович** – академик НАН Армении, профессор, ЕГУ, факультет информатики и прикладной математики

Тел.: (010) 552964; E-mail: [gevorgb@rau.am](mailto:gevorgb@rau.am)

**Микилян Марине Александровна** – к.ф.м.н., доцент, РАУ, факультет прикладной математики и информатики

Тел. 010 726957; E-mail: [mikilyan@rau.am](mailto:mikilyan@rau.am)

**Сагоян Рафаэль Оникович** – внештатный работник института Механики НАН Армении, Тел. 093 248226; E-mail: [rafael1984@mail.ru](mailto:rafael1984@mail.ru).

Поступила в редакцию 20.10. 2011

УДК 539.3

**К УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
ПРИ НОРМАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ  
МОВСИСЯН Л.А., НЕРСИСЯН Г.Г.**

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, устойчивость, нормальное давление, окружное и продольное усилия, минимальная нагрузка.

**Keywords:** Cylindrical shell, stability, external pressure, circular and longitudinal strains, minimal pressure.

**Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.**

**Նորմալ ճնշման տակ գլանային թաղանթի կայունության մասին**

Արտաքին նորմալ (համասեռ և անհամասեռ) ճնշման տակ գլանային թաղանթի կայունությունը հետազոտվում է տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Եզրային պայմաններն այնպիսին են, որ նախնական շրջանային ճիգից բացի առաջանում է նաև երկայնական ճիգ:

**Movsisyan L.A., Nersisyan G.G.**

**On stability of cylindrical shell under normal external pressure**

Stability of cylindrical shell under normal external (uniformly and nonuniformly) pressure for different boundary conditions is investigated. By such boundary conditions that except circular strain also longitudinal strain is appeared.

Изучается устойчивость цилиндрической оболочки для различных граничных условий при внешнем нормальном (равномерном и неравномерном) давлении. Граничные условия такие, что помимо начального окружного усилия появляется также продольное усилие.

В работах [1,2] изучались задачи устойчивости цилиндрической оболочки под равномерным нормальным давлением при различных граничных условиях, исходя из уравнений полубезмоментной теории оболочек. Такой подход приближения вполне оправдан, так как известно, что такая оболочка теряет устойчивость по форме «одной полуволны» по длине и несколько – в окружном направлении. В дальнейшем, в [3,4] рассматривались случаи, когда на концах оболочки заданы смешанные граничные условия.

При внешнем нормальном давлении только окружное усилие получается (начальное состояние), если хотя бы на одном конце задано нулевое условие относительно продольного усилия. Однако, если на концах даются нулевые условия относительно продольного перемещения, то помимо окружного появляется также продольное усилие.

В настоящей статье изучаются такие же задачи, как и в [2], в том числе и случаи неравномерного давления с учетом появившегося продольного усилия. Приводятся некоторые же соображения относительно «оптимального» распределения давления по длине – минимальное давление, приводящее к потере устойчивости.

1. Уравнение устойчивости согласно вышеприведённым предположениям есть [2]

$$D \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T_1^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_2^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (1.1)$$

здесь  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жёсткость,  $E$  – коэффициент Юнга,

$h$  – толщина оболочки,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Если интенсивность нормального давления  $q$ , то окружное усилие  $T_2^0 = Rq$ , и т.к. по условию края неподвижны (начальное состояние), то  $T_2^0 = \nu T_2^0 = \nu Rq$ .

Перейдя к безразмерным координатам  $x = l\xi (0 \leq \xi \leq 1)$ ,  $y = R\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ , ищем решение (1.1) в виде

$$w = W(\xi) \cos n\theta. \quad (1.2)$$

Для  $W(\xi)$  получим уравнение

$$W^{IV} + aW'' + bW = 0, \quad (1.3)$$

где введены обозначения:

$$a = \varepsilon \lambda \gamma^2 n^4, \quad b = \frac{\gamma^4 n^8}{12(1-\nu^2)\beta^2} - \lambda \gamma^4 n^6, \quad (1.4)$$

$$\gamma = \frac{l}{R}, \quad \beta = \frac{R}{h}, \quad \lambda = \frac{qR}{Eh}.$$

В выражении  $a$  множитель  $\varepsilon$  фактически есть коэффициент Пуассона  $\nu$  и с его наличием учитывается влияние продольного усилия  $T_1^0$ . В дальнейшем, в числовых расчётах для него будут приняты значения  $\varepsilon = 0$  и  $\varepsilon = 0,3$ , в то время как в выражении принимается  $\nu = 0,3$ .

Решение уравнения (1.3) будет

$$W = c_1 \operatorname{ch} s_1 \xi + c_2 \operatorname{sh} s_1 \xi + c_3 \cos s_2 \xi + c_4 \sin s_2 \xi, \quad (1.5)$$

где

$$s_1 = \gamma n \left( s - \frac{1}{2} \varepsilon \lambda n^2 \right)^{1/2}, \quad s_2 = \gamma n \left( s + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda n^2 \right)^{1/2}, \quad (1.6)$$

$$s = \left( \frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{4} n^4 + \lambda n^2 - 0,09157 \frac{n^4}{\beta^2} \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим несколько случаев.

Здесь будем изучать случаи, когда один конец оболочки ( $\xi = 0$ ) зашпелен –

$$u = v = 0, \quad \text{т.е. } W = W' = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \quad (1.7)$$

1. Край свободен:

$$T_1 = S = 0, \quad \text{т.е. } W'' = W''' = 0 \quad \text{при } \xi = 1 \quad (1.8)$$

2. Край оболочки свободно оперт:

$$T_1 = v = 0, \quad \text{т.е. } W = W'' = 0 \quad \text{при } \xi = 1 \quad (1.9)$$

3. Второй край оболочки также зашпелен:

$$u = v = 0, \quad \text{т.е. } W = W' = 0 \quad \text{при } \xi = 1 \quad (1.10)$$

Трансцендентные уравнения, откуда определяются критические давления

$\left( \lambda_{\text{кр}} = \frac{q_{\text{кр}} R}{Eh} \right)$  соответственно вышеприведенным случаям, следующие:

$$s_1^4 + s_2^4 + 2s_1^2 s_2^2 \operatorname{ch} s_1 \cos s_2 = s_1 s_2 (s_1^2 - s_2^2) \operatorname{sh} s_1 \sin s_2 \quad (1.11)$$

$$s_1 \operatorname{tg} s_2 = s_2 \operatorname{th} s_1 \quad (1.12)$$

$$1 + \frac{s_1^2 - s_2^2}{2s_1 s_2} \operatorname{sh} s_1 \sin s_2 = \operatorname{ch} s_2 \cos s_2 \quad (1.13)$$

Заметим, что при  $T_1^0 = 0$  (1.11)–(1.15) получаются уравнения, откуда определяются частоты свободных колебаний балки, в том числе, уравнения, приведённые в [2].

Для различных геометрических данных  $(\beta, \gamma)$  производились численные расчёты. В табл. 1 приведены значения критического давления  $10^4 \lambda_{\text{кр}}$ . В каждой клетке помещены эти значения в соответствии с (1.11)–(1.13). В каждой строке первые числа получены без учета  $T_1^0$ , а вторые – наоборот. В скобках указано число окружных волн, при которых достигается минимум  $\lambda$ .

Таблица 1

$\beta \backslash \gamma$	100	250	500
0,5	11,13 ; 11,25 ; (10)	2,772 ; 2,793 ; (12)	0,9805 ; 0,9858 ; (14)
	22,17 ; 21,48 ; (14)	5,810 ; 5,544 ; (17)	2,058 ; 1,991 ; (21)
	26,60 ; 25,92 ; (15)	6,992 ; 6,716 ; (10)	2,479 ; 2,406 ; (23)
1	5,538 ; 5,568 ; (7)	1,409 ; 1,415 ; (10)	0,4899 ; 0,4911 ; (10)
	11,53 ; 11,15 ; (10)	2,906 ; 2,838 ; (12)	1,033 ; 1,016 ; (15)
	13,91 ; 13,49 ; (11)	3,513 ; 3,438 ; (13)	1,236 ; 1,218 ; (16)
2	2,783 ; 2,791 ; (5)	0,6931 ; 0,6943 ; (7)	0,2451 ; 0,2455 ; (9)
	5,750 ; 5,650 ; (7)	1,467 ; 1,451 ; (9)	0,5148 ; 0,5104 ; (10)
	7,054 ; 6,953 ; (8)	1,775 ; 1,753 ; (10)	0,6151 ; 0,6151 ; (11)
3	1,838 ; 1,841 ; (4)	0,4639 ; 0,4644 ; (5)	0,1644 ; 0,1646 ; (6)
	3,926 ; 3,884 ; (6)	0,9673 ; 0,9598 ; (7)	0,3462 ; 0,3443 ; (8)
	4,621 ; 4,569 ; (6)	1,738 ; 1,166 ; (8)	0,4129 ; 0,4108 ; (9)

Кроме ожидаемых выводов, связанных с геометрическими, физическими параметрами и граничными условиями, есть факт, который нужно подчеркнуть. Как известно, наличие сжимающего усилия уменьшает значение критического давления (случай свободно опертой оболочки [7.стр.530-531]). Оно имеет место как для задач 2 и 3, так и для нижеприводимых. Однако, для первой задачи учет  $T_1^0$  приводит к обратному эффекту. По-видимому, здесь имеет место аналог устойчивости балки, когда сжимающая сила – следящая. Как известно, в этом случае статический подход не дает никакого ответа, а при динамическом рассмотрении: с увеличением сжимающей силы основная частота увеличивается.

2. Здесь рассмотрим случаи, когда давление меняется по длине  $q = q_0(\xi)$ .

Тогда окружное и продольное усилия будут определяться соответственно:

$$T_2^0 = Rq_0(\xi), \quad T_1^0 = C = \nu R \int_0^1 q_0(\xi) d\xi. \quad (2.1)$$

В случае, когда на концах оболочки заданы условия свободного опирания –  $W = W'' = 0$  при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ , решение (1.1) будем искать как (1.2), а  $W$  – в виде ряда

$$W(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin m\pi\xi. \quad (2.2)$$

Тогда  $T_2^0$  также представляется в виде ряда

$$T_2^0 = Eh \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\pi\xi, \quad T_1^0 = Ehc, \quad (2.3)$$

для коэффициентов  $w_m$  получим однородную систему

$$\left[ (m\pi)^4 + An^8 \right] w_m + \gamma^2 n^4 \left\{ c(m\pi)^2 w_m + \frac{1}{2} \gamma^2 n^2 (2a_0 - a_{2m}) w_m + \sum_{q=1}^{m-1} (a_{m-q} - a_{m+q}) w_q + \sum_{q=m+1}^{\infty} (a_{q-m} - a_{m+q}) w_q \right\} = 0, \quad (2.4)$$

$$A = \frac{\gamma^4}{2(1-\nu^2)\beta^2}.$$

Критическое  $\lambda$  определится из условия разрешимости системы (2.4).

Изучим два случая.

а)  $q = q_0 \sin \pi\xi$ , тогда

$$c = \nu a_0, \quad a_0 = \frac{2\lambda}{\pi}, \quad a_m = \frac{2\lambda}{m^2 - 1} \left[ (-1)^{m+1} - 1 \right], \quad \lambda = \frac{q_0 R}{Eh}; \quad (2.5)$$

в)  $q = q_0 (1 + a\xi)$ , тогда

$$c = \nu a_0, \quad a_0 = \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha \right) \lambda, \quad a_m = \frac{2\alpha\lambda}{m^2 \pi^2} \left[ (-1)^m - 1 \right], \quad \lambda = \frac{q_0 R}{Eh}. \quad (2.6)$$

Для обоих случаев проведены численные расчёты и результаты приведены в табл. 2 (для случая а)) и в табл. 3 – (для случая в)):

Критическое значение давления определяется из условия разрешимости системы (2.4) – равенства нулю определителя. Практически, оно реализуется обычным образом: берётся конечное число уравнений и в дальнейшем, увеличивая их, останавливаются, убедившись, что процесс сходится. В обсуждаемых примерах вначале брался детерминант десятого порядка и через два-три хода уже достигался сходимости.

В таблицах приведены значения  $\delta = 10^3 \lambda$ .

В скобках приводится количество волн в окружном направлении. В каждой клетке первая строка соответствует значению  $\nu = 0,3$ , а вторые –  $\nu = 0,5$ . При этом, первые значения соответствуют случаю  $T_1^0 = 0$ , а вторые – с его учётом.

Как видно из приведённых результатов, учет  $T_1^0$  приводит к уменьшению критического значения  $\lambda_{кр}$  и для второй задачи увеличение  $\alpha$  приводит к уменьшению  $\lambda_{кр}$ . Можно отметить ещё, что в обоих случаях суммарная нагрузка,

приводящая к потере устойчивости, меньше, чем при равномерном нагружении (первые числа табл.3 при  $\alpha = 0$ ).

Таблица 2

$\gamma \backslash \beta$	100	250	500
0	0,703 ; 0,691 ; (9) 0,826 ; 0,797 ; (8)	0,177 ; 0,175 0,206 ; 0,202 ; (11)	0,063 ; 0,062 0,073 ; 0,072 ; (13)
2	0,351 ; 0,348 0,404 ; 0,396 ; (6)	0,089 ; 0,088 0,104 ; 0,103 ; (8)	0,032 ; 0,032 0,037 ; 0,036 ; (9)
3	0,233 ; 0,232 0,271 ; 0,267 ; (5)	0,06 ; 0,06 0,069 ; 0,068 ; (6)	0,022 ; 0,022 0,025 ; 0,025 ; (8)

3. Как видно из предыдущего пункта, величины критической нагрузки (суммарная) различны при различных видах распределения. Факт, вообще-то очевидный. В связи с этим, может возникнуть вопрос: при каком распределении суммарная нагрузка будет минимальной. Здесь можно провести аналог с задачами оптимального управления движением упругих систем (напр., [5]). Рассмотрим случай, когда начальное состояние такое, что  $T_1^0 = 0$  и граничные условия возмущённого состояния такие, как в предыдущем пункте. Тогда, довольствуясь одночленным приближением и учитывая, что главная форма является  $m = 1$ , (2.4) можно представить в виде

$$\int_0^1 q(\xi)(1 - \cos 2\pi\xi) d\xi = M = \min \left( \frac{\pi^4 + An^8}{\gamma^4 n^6} \right) \frac{Eh}{R}. \quad (3.1)$$

Таблица 3

$\gamma \backslash \beta$	$\alpha$	100	250	500
1	0	0,925 ; 0,892 ; (9) 1,083 ; 1,005 ; (8)	0,232 ; 0,227 0,270 ; 0,260 ; (11)	0,087 ; 0,081 0,095 ; 0,093 ; (13)
	1	0,614 ; 0,592 ; (9) 0,720 ; 0,668 ; (8)	0,154 ; 0,151 0,179 ; 0,172 ; (11)	0,058 ; 0,054 0,063 ; 0,061 ; (13)
	10	0,150 ; 0,145 ; (9) 0,178 ; 0,165 ; (9)	0,038 ; 0,037 0,044 ; 0,042 ; (11)	0,013 ; 0,013 0,013 ; 0,013 ; (13)
2	0	0,460 ; 0,451 0,530 ; 0,513 ; (6)	0,117 ; 0,115 0,137 ; 0,135 ; (6)	0,042 ; 0,041 0,047 ; 0,046 ; (9)
	1	0,306 ; 0,299 0,352 ; 0,341 ; (6)	0,079 ; 0,078 0,091 ; 0,089 ; (8)	0,027 ; 0,027 0,032 ; 0,031 ; (9)
	10	0,075 ; 0,074 0,086 ; 0,084 ; (6)	0,019 ; 0,019 0,022 ; 0,022 ; (8)	0,007 ; 0,007 0,008 ; 0,008 ; (9)
3	0	0,306 ; 0,302 0,355 ; 0,347 ; (5)	0,079 ; 0,078 0,090 ; 0,088 ; (6)	0,029 ; 0,028 0,032 ; 0,032 ; (8)
	1	0,203 ; 0,201 0,235 ; 0,230 ; (5)	0,052 ; 0,052 0,060 ; 0,059 ; (6)	0,019 ; 0,019 0,021 ; 0,021 ; (8)
	10	0,050 ; 0,045 0,058 ; 0,056 ; (5)	0,013 ; 0,013 0,015 ; 0,015 ; (6)	0,005 ; 0,005 0,005 ; 0,005 ; (8)

Если в виде критерия качества брать минимум функционала [5]

$$I = \int_0^1 q^2(\xi) d\xi, \quad (3.2)$$

то задача становится изопериметрической, а  $q(\xi)$  сообщает минимум (3.2) и удовлетворяет условию (3.1).

Тогда, составляя

$$Q = q^2 + \mu q(1 - \cos 2\pi\xi), \quad (3.3)$$

для множителя Лагранжа  $\mu$  получаем  $\mu = -\frac{4}{3}M$ , т.е.

$$q = \frac{2}{3}M(1 - \cos 2\pi\xi) = \frac{4}{3}M \sin^2 \pi\xi. \quad (3.4)$$

Легко проверить, что приведённые в п.2 примеры дают интегралу большее значение, чем (3.4) и сверх того, и суммарная нагрузка больше, чем (3.4).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Саченков А.В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольных краевых условиях под действием равномерного поперечного давления //Изв.Казан.филиала АН СССР. Сер. физ.-мат.наук. 1958. №12. С.127-132.
2. Алфутов Н.А. О зависимости верхнего критического давления цилиндрической оболочки от граничных условий для касательных составляющих перемещений. Теория оболочек и пластин. Ереван: Изд.АН Арм.ССР, 1964. С.193-198.
3. Мовсисян Л.А. Об устойчивости цилиндрической оболочки со смешанными граничными условиями //ПМ. 1978. Т.14. №10. С.52-57.
4. Мовсисян Л.А. Две задачи по устойчивости для цилиндрической оболочки со смешанными граничными условиями при внешнем давлении //Изв.НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №1. С.31-37.
5. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: ЖГИФ. МЛ.1963. 879с.
6. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем //Изв.РАН. Механика твердого тела. 1999. №6. С.146-153.

#### Сведения об авторе:

**Мовсисян Лаврентий Александрович,**

Доктор тех.наук, профессор, главный научн.сотрудник Института механики НАН Армении.

**Адрес:** 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>. Тел.: 588201

**E-mail:** mechins@sci.am.

**Нерсисян Г.Г.** – кандидат физ-мат наук, доцент, старший научн.сотр. Института механики НАН Армении

Тел.: 20-68-79

Поступила в редакцию 05.11.2011

1. **Абдикаримов Р.А., Худаяров Б.А.** – Моделирование колебательных процессов вязкоупругих ортотропных пластин с переменной жёсткостью ..... 4–30
2. **Агаловян Л.А., Закарян Т.В.** – Асимптотическое решение первой динамической краевой задачи теории упругости для двухслойной ортотропной пластинки ..... 2–15
3. **Агаловян Л.А., Саргсян М.З.** – О собственных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления ..... 1–26
4. **Акопян В.Н., Симонян А.Р.** – О плоско-деформированном состоянии ортотропной плоскости с разрезами ..... 2–4
5. **Алваджян Ш.И., Саркисян С.О.** – Прикладные модели статической деформации анизотропных микрополярных упругих тонких балок .. 4–39
6. **Амирджанян А.А.** – Равномерное движение периодической системы абсолютно жёстких штампов по внутренней поверхности бесконечного полого цилиндра ..... 1–5
- **Атоян Л.А.** – см. №16
7. **Багдасарян Г.Е., Марухян С.А.** – Динамическое поведение коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненным жидкостью ..... 3–10
8. **Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О.** – Термоупругая устойчивость удлиненной прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа ..... 4–51
9. **Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Степанян А.А.** – Гипотетическое рассогласование для одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах ..... 2–63
10. **Белубекян М.В.** – Волна Релея в случае упруго-стеснённой границы .. 4–3
11. **Белубекян М.В., Геворкян А.В., Казарян К.Б.** – Взаимные трансформации магнитоупругих поверхностных волн разных поляризаций ..... 3–39
12. **Гаспарян А.В.** – К задаче о напряжённом состоянии слоистого композита при антиплоской деформации ..... 3–3
- **Геворкян А.В.** – см. №11
13. **Геворг Ервандович Багдасарян** – К 75-летию со дня рождения ..... 1–3
14. **Григорян Ш.А., Оганян Г.Г., Саакян С.Л.** – Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки, наполненной протекающей смесью жидкости с пузырьками газа ..... 3–22

15. **Гулгазрян Г.Р., Хачанян А.А.** – Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом и тремя жёстко закреплёнными краями ..... 1–37
16. **Даноян З.Н., Атоян Л.А., Даноян Н.З.** – Магнитное состояние ферромагнитного полупространства при внешнем линейном возмущении магнитного потенциала ..... 3–46
- **Даноян Н.З.** – см. №16
  - **Закарян Т.В.** – см. №2
  - **Казарян К.Б.** – см. №11
17. **Манукян В.Ф.** – Распространение трехмерной поверхностной магнитоупругой волны в изотропном, идеально проводящем полупространстве ..... 1–68
- **Марухян С.А.** – см. №7
18. **Мелконян А.В.** – Трехмерная задача распространения волн в упругом слое ..... 1–11
- **Микилян М.А.** – см. №8
19. **Мкртчян М.М., Мкртчян М.С.** – Об антиплоской задаче кусочно-однородного упругого клина, содержащего на линии сая коллинеарную систему щелей и абсолютно жёстких тонких включений ..... 4–7
- **Мкртчян М.С.** – см. №19
20. **Мовсисян Л.А.** – К устойчивости кольца под штампами ..... 2–32
21. **Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.** – К устойчивости цилиндрической оболочки при нормальном давлении ..... 4–67
22. **Мовсисян Л.А.** – Некоторые неклассические задачи устойчивости для цилиндрических оболочек ..... 3–31
23. **Мустафа Баракат** – Свободные колебания бесконечной пластинки, усиленной рёбрами жёсткости ..... 2–26
- **Нерсисян Г.Г.** – см. №21
  - **Оганян Г.Г.** – см. №14
24. **Петросян Г.А., Хачатрян А.М.** – Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости ..... 1–50
25. **Погосян Н.Д.** – Отражение сдвиговой волны от неоднородного слоя. 4–21
- **Петросян Т.Л.** – см. №30
26. **Радик Мартиросович Мартиросян** – К 75-летию со дня рождения .... 2–3
- **Саакян А.В.** – см. №31
  - **Саакян С.Л.** – см. №14
  - **Сагоян Р.О.** – см. №8
  - **Саргсян В.Г.** – см. №31

- **Саргсян М.З. – см. №3**
- 27. **Саркисян С.О.** – Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин ..... 1–58
- 28. **Саркисян А.А.** – Асимптотический анализ начально-граничной динамической задачи несимметричной теории упругости со свободным вращением в области тонкой оболочки ..... 2–40
- 29. **Саркисян С.О.** – Общая прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек ..... 2–52
- **Саркисян С.О. – см. №5**
- 30. **Симонян А.М., Петросян Т.Л.** – Исследование гистерезисных энергетических потерь в зависимости от характеристик периодического нагружения на базе теории наследственности ..... 2–73
- **Симонян А.Р. – см. №4**
- **Симонян Т.А. – см. №9**
- **Степанян А.А. – см. № 9**
- **Хачанян А.А. – см. №15**
- **Хачатрян А.М. – см. №24**
- 31. **Хачикян А.С., Саакян А.В., Саргсян В.Г.** – Об одном подходе к сопряжению численного решения с аналитическим на примере задачи кручения ..... 1–17
- **Худаяров Б.А. – см. №1**
- 32. **Чахмахчян Р.Э.** – Оптимальные прямолинейные перемещения двух динамических объектов, избегающих столкновения на плоскости ..... 3–58
- 33. **Шагинян С.Г.** – Об определении устойчивости при интегрально малых возмущениях ..... 3–53
- 34. **Яздизаде Б.** – Численный анализ изгиба балки под действием различных нагрузок, имеющих трещину и отверстие в центре ..... 1–73

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

**Բելուբեկյան Մ.Վ.** Ռեկեյի ալիքները առաձգականորեն կաշկանդված եզրի դեպքում ..... 3

**Մկրտչյան Մ.Մ., Մկրտչյան Մ.Ս.** Միացման գծի վրա ճաքեր և բարակապատ բացարձակ կոշտ ներդրակների համագիծ համակարգ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական սեպի հակահարթ խնդրի մասին ..... 7

**Պողոսյան Ն.Ջ.** Սահքի ալիքի անդրադարձումը անհամասեռ շերտից .... 21

**Աբդիկարիմով Ռ.Ա. Խուրդյարով Բ.Ա.** Փոփոխական կոշտությամբ առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ սալերի տատանողական պրոցեսների մոդելավորումը ..... 30

**Ալվաջյան Շ. Ի., Մարգարյան Ս. Հ.** Անիզոտրոպ միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի ստատիկ դեֆորմացիայի կիրառական մոդելները ..... 39

**Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ.** Գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող երկար ուղղանկյուն սալի ջերմաառաձգական կայունությունը ..... 51

**Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.** Նորմալ ճնշման տակ գլանային թաղանթի կայունության մասին ..... 67

**Բովանդակություն “ՀՀ ԳԱԱ տեղեկագիր Մեխանիկա” 2011թ.** 64

**հատորի** ..... 73

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Белубекян М.В.</b> Волна Рэлея в случае упруго-стеснённой границы .....	3
<b>Мкртчян М.М., Мкртчян М.С.</b> Об антиплоской задаче кусочно-однородного упругого клина, содержащего на линии спая коллинеарную систему щелей и абсолютно жёстких тонких включений.....	7
<b>Погосян Н.Д.</b> Отражение сдвиговой волны от неоднородного слоя .....	21
<b>Абдикаримов Р.А., Худаяров Б.А.</b> Моделирование колебательных процессов вязкоупругих ортотропных пластин с переменной жёсткостью ..	30
<b>Алваджян Ш. И., Саркисян С.О.</b> Прикладные модели статической деформации анизотропных микрополярных упругих тонких балок .....	39
<b>Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О.</b> Термоупругая устойчивость удлинённой прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа.....	51
<b>Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.</b> К устойчивости цилиндрической оболочки при нормальном давлении .....	67
<b>С о д е р ж а н и е 64 тома 2011 г. “Изв. НАН Армении, Механика” .....</b>	<b>73</b>

## CONTENTS

<b>Belubekyan M.V</b> The Rayleigh waves in the case of the elastically restrained boundary .....	3
<b>Mkrтчyan M.M., Mkrтчyan M.S.</b> On anti-plane problem of piecewise homogeneous elastic wedge containing the collinear system of cracks on junction line and absolutely rigid thin inclusions .....	7
<b>Poghossyan N.D.</b> Refraction of shear wave from non-homogeneous layer.....	21
<b>Abdikarimov R.A., Khudayarov B.A.</b> Modelling of vibration processes of viscoelastic orthotropic plates with variable rigidity .....	30
<b>Alvajyan Sh. I., Sargsyan S. H.</b> Applied Models of Static Deformation of Anisotropic Micropolar Elastic Thin Bars .....	39
<b>Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O.</b> Thermoelastic stability of long rectangular plate in a supersonic gas flow .....	51
<b>Movsisyan L.A., Nersisyan G.G.</b> On stability of cylindrical shell under normal external pressure .....	58
<b>Mechanics 2011 V. 64 .....</b>	<b>73</b>