

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԵԼԻՍՏԻԿԱԿԱՆ ԶԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2011

УДК 539.3

**К ЗАДАЧЕ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА
ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ
ГАСПАРЯН А.В.**

Ключевые слова: композит, теория упругости, конечно-разностные уравнения, свёртка функций, формула Шварца, условия Коши-Римана.

Keywords: composite, theory of elasticity, equations of finite differences

Գաապարյան Ա.Վ.

**Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ շերտավոր կոմպոզիտի լարվածային վիճակի վերաբերյալ
խնդրի շուրջ**

Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ երկրաչափական և ֆիզիկական տարբեր բնութագրիչներ ունեցող շերտերից կազմված կոմպոզիտի լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի նկատմամբ զարգացվում է [1] աշխատանքից տարբեր մոտեցում՝ հիմնված շերտում հոլոմորֆ ֆունկցիայի ներկայացման Շվարցի բանաձևի վրա:

Gasparyan A.V.

To the Problem of Stressed State of a Layered Composite under Antiplane Deformation

An approach to the problem of stressed state of a layered composite with different geometrical and physical characteristics under antiplane deformation is developed which is different from that of studied in the paper [1]. The present approach is based on Swartz formula for representation of functions holomorphic in a strip.

Развивается отличный от работы [1] подход к решению задачи о напряжённом состоянии слоистого композита, состоящего из произвольного числа слоёв с различными геометрическими и физическими характеристиками. Этот подход основан на формуле Шварца представления голоморфной в полосе функции.

Рассматривается задача о напряжённом состоянии композита, представляющего собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа слоёв с различными упругими и геометрическими характеристиками, когда на граничных плоскостях действуют касательные силы, вызывающие антиплоскую деформацию.

В работе [1] приведено решение этой задачи при помощи интегрального преобразования Фурье. В настоящей работе к данной задаче применяется другой подход, основанный на формуле Шварца [2] представления голоморфной в полосе функции с сочетанием математического аппарата преобразования Фурье. В результате, решение поставленной задачи опять сводится к решению конечно-разностных уравнений второго порядка [3].

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть композит, отнесённый к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, представляет собой пакет из произвольного конечного числа n упругих слоёв

$$\Omega_k = \{-\infty < x, z < \infty, \quad h_{k-1} \leq y \leq h_k\} \quad (k = \overline{1, n})$$

с модулями сдвига G_k . Пусть далее к нижней и верхней плоскостям $y = h_0$ и $y = h_n$ приложены касательные силы интенсивностей $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$, соответственно, т. е.

$$\tau_{yz}\Big|_{y=h_0} = \tau_0(x), \quad \tau_{yz}\Big|_{y=h_n} = \tau_n(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где τ_{yz} — компонента касательных напряжений. Будем считать, что под действием этих сил композит находится в состоянии антиплоской деформации в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy . Требуется определить компоненты напряжений и смещений в композите, когда функции касательных напряжений на крайних гранях композита $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$ наперёд заданы.

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи обозначим через $w_k = w_k(x, y)$ единственную отличную от нуля компоненту смещений в направлении оси Oz , а неизвестные касательные контактные напряжения на гранях $y = h_{k-1}$ и $y = h_k$ ($k = \overline{1, n}$) слоя Ω_k — через $\tau_{k-1}(x)$ и $\tau_k(x)$, соответственно. Тогда при помощи закона Гука для полосы $\Pi_k = \{-\infty < x < \infty, \quad h_{k-1} \leq y \leq h_k\}$ ($k = \overline{1, n}$) получим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0 & (-\infty < x < \infty, \quad h_{k-1} < y < h_k) \\ G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_{k-1}} = \tau_{k-1}(x), \quad G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_k} = \tau_k(x) & (-\infty < x < \infty, \quad k = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (1.1)$$

Так как $G_k w_k(x, y)$ — гармоническая в полосе Π_k , ($k = \overline{1, n}$) — функция, то можно ввести в рассмотрение сопряжённую с ней функцию v_k , и, следовательно, голоморфную в полосе Π_k функцию

$$f_k(z) = G_k w_k(x, y) + i v_k(x, y) + i C_k, \quad (k = \overline{1, n})$$

где C_k — произвольная вещественная постоянная. Отсюда по условиям Коши–Римана будем иметь:

$$f'_k(z) = G_k \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial x} - i G_k \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial y}.$$

Тогда функция

$$F_k(z) = i f'_k(z) = G_k \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial y} + i G_k \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial x} \quad (1.2)$$

также голоморфна в полосе Π_k . Замечая, что

$$\operatorname{Re} F_k(z) = G_k \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial y},$$

граничную задачу (1.1) можем записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad h_{k-1} < y < h_k) \\ \operatorname{Re} F_k(z) \Big|_{y=h_{k-1}} = G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_{k-1}} = \tau_{k-1}(x), \\ \operatorname{Re} F_k(z) \Big|_{y=h_k} = G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_k} = \tau_k(x) \quad (k = \overline{1, n}). \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Теперь воспользуемся формулой Шварца [2] для полосы. Известно, что голоморфную в полосе $\Pi = \{-\infty < \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta \leq 1\}$ функцию $g(\zeta)$, где $\zeta = \xi + i\eta$, можно представить в виде:

$$g(\zeta) = \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(\tau - \zeta)}{2} q_0(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi(\tau - \zeta)}{2} q_1(\tau) d\tau \right) + iC. \quad (1.4)$$

Здесь $q_0(\tau)$ и $q_1(\tau)$ – граничные значения действительной части $g(\zeta)$, соответственно, на граничных прямых $\zeta = \tau$ и $\zeta = \tau + i$, C – произвольная вещественная постоянная, а первый интеграл при $\tau = \zeta$ понимается в смысле главного значения по Коши.

Сначала преобразуем формулу Шварца для полосы Π_k , для чего полосу Π_k при помощи формул

$$\xi = \frac{x - h_{k-1}}{h_k - h_{k-1}}, \quad \eta = \frac{y - h_{k-1}}{h_k - h_{k-1}},$$

где $z = x + iy$, $(-\infty < x < \infty, \quad h_{k-1} < y < h_k)$,

преобразуем в полосу Π . Тогда

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{z - (h_{k-1} + ih_{k-1})}{h_k - h_{k-1}}, \quad (-\infty < \xi < \infty, \quad 0 < \eta < 1) \quad (1.5)$$

$$\tau = \frac{t - h_{k-1}}{h_k - h_{k-1}}, \quad (-\infty < t, \tau < \infty).$$

Подставляя выражения (1.5) в (1.4), после элементарных преобразований получим формулу Шварца для полосы Π_k :

$$f_k(z) = \frac{1}{2i(h_k - h_{k-1})} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(t - z + ih_{k-1})}{2(h_k - h_{k-1})} u_{k-1}(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi(t - z + ih_{k-1})}{2(h_k - h_{k-1})} u_k(t) dt \right] + iC, \quad f_k(z) = g \left(\frac{z - (h_{k-1} + ih_{k-1})}{h_k - h_{k-1}} \right) \quad (1.6)$$

$(k = \overline{1, n})$,

где $f_k(z)$ – голоморфная в полосе Π_k , а

$$u_k(t) = q_1 \left(\frac{t - h_{k-1}}{h_k - h_{k-1}} \right), \quad u_{k-1}(t) = q_0 \left(\frac{t - h_{k-1}}{h_k - h_{k-1}} \right)$$

– граничные значения действительной части $f_k(z)$, соответственно, на прямых $z = t + ih_{k-1}$ и $z = t + ih_k$ ($k = \overline{1, n}$).

Применяя эту формулу к функции $F_k(z)$ в (1.2) и принимая во внимание её граничные значения из (1.3), получим

$$F_k(z) = \frac{1}{2id_k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k} \tau_{k-1}(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k} \tau_k(t) dt \right] \quad (1.7)$$

где $z = x + iy$, $d_k = h_k - h_{k-1}$, $(-\infty < x < \infty, h_{k-1} \leq y \leq h_k)$ ($k = \overline{1, n}$).

Из (1.2) очевидно, что

$$f'_k(z) = -iF_k(z) = G_k \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial x} - iG_k \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial y}. \quad (1.8)$$

Тогда

$$\operatorname{Re} f'_k(z) = G_k \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial x}. \quad (1.9)$$

Подставляя значение $F_k(z)$ из (1.8) в (1.7), находим

$$f'_k(z) = \frac{1}{2d_k} \left[- \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k} \tau_{k-1}(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k} \tau_{k-1}(t) dt \right],$$

откуда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f'_k(z) = \frac{1}{2d_k} \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\operatorname{cth} \frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k} \right] \tau_{k-1}(t) dt + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\operatorname{th} \frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k} \right] \tau_{k-1}(t) dt \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \operatorname{cth} \frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k} &= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(t-x)}{d_k}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(t-x)}{2d_k} - \sin^2 \frac{\pi(h_{k-1}-y)}{2d_k}} \\ \operatorname{Re} \operatorname{th} \frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k} &= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(t-x)}{d_k}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi(t-x)}{2d_k} + \sin^2 \frac{\pi(h_{k-1}-y)}{2d_k}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подставляя эти выражения в (1.10), будем иметь:

$$\operatorname{Re} f'_k(z) = \frac{1}{4d_k} \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} [\pi(t-x)/d_k]}{\operatorname{sh}^2 [\pi(t-x)/2d_k] - \sin^2 [\pi(h_{k-1}-y)/2d_k]} \tau_{k-1}(t) dt + \right.$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[\pi(t-x)/d_k]}{\operatorname{ch}^2[\pi(t-x)/2d_k] + \sin^2[\pi(h_{k-1}-y)/2d_k]} \tau_k(t) dt \Big\}. \quad (1.12)$$

Далее запишем условия непрерывности смещений на линии контакта $y = h_k$ полос Π_k и Π_{k+1} ,

$$w_k(x, y)|_{y=h_k} = w_{k+1}(x, y)|_{y=h_k} \quad (k = \overline{1, n^{-1}})$$

или

$$\frac{\partial w_k(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=h_k} = \frac{\partial w_{k+1}(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=h_k} \quad (k = \overline{1, n^{-1}}) \quad (1.13)$$

Учитывая (1.9) и (1.12), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=h_k} &= \frac{1}{4G_k d_k} \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\operatorname{sh}[\pi(t-x)/2d_k] \operatorname{ch}[\pi(t-x)/2d_k]}{\operatorname{sh}^2[\pi(t-x)/2d_k] - 1} \tau_{k-1}(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\operatorname{sh}[\pi(t-x)/2d_k] \operatorname{ch}[\pi(t-x)/2d_k]}{\operatorname{ch}^2[\pi(t-x)/2d_k] + 1} \tau_k(t) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{2G_k d_k} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(t-x)}{2d_k} \tau_k(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi(t-x)}{2d_k} \tau_{k-1}(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{k+1}(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=h_k} &= \frac{1}{2G_{k+1} d_{k+1}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi(t-x)}{2d_{k+1}} \tau_{k+1}(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(t-x)}{2d_{k+1}} \tau_k(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Подставляя теперь (1.14) и (1.15) в (1.13) и применяя интегральное преобразование Фурье к (1.10), придём к равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_k d_k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi(t-x)}{2d_k} \tau_{k-1}(t) e^{-i\lambda t} dt d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(t-x)}{2d_k} \tau_k(t) e^{-i\lambda t} dt d\lambda \right] = \\ = \frac{1}{G_{k+1} d_{k+1}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(t-x)}{2d_{k+1}} \tau_k(t) e^{-i\lambda t} dt d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi(t-x)}{2d_{k+1}} \tau_{k+1}(t) e^{-i\lambda t} dt d\lambda \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Далее применим формулу преобразования Фурье для свёртки функций [4]

$F[f_1 * f_2] = F[f_1]F[f_2]$ к (1.16). В результате,

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_k d_k} \left[\bar{\tau}_{k-1}(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi t}{2d_k} e^{-i\lambda t} dt - \bar{\tau}_k(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi t}{2d_k} e^{-i\lambda t} dt \right] = \\ = \frac{1}{G_{k+1} d_{k+1}} \left[\bar{\tau}_k(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi t}{2d_{k+1}} e^{-i\lambda t} dt - \bar{\tau}_{k+1}(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi t}{2d_{k+1}} e^{-i\lambda t} dt \right], \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $\bar{\tau}_k(\lambda) = F[\tau_k(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k(t) e^{-i\lambda t} dt$, $(k = \overline{0, n})$ – преобразование Фурье функции $\tau_k(t)$.

Вычислим интегралы в левой части (1.17). Из нечётности функций $\text{cth } x$ и $\text{th } x$ вытекает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{th} \frac{\pi t}{2d_k} e^{-i\lambda t} dt &= -2i \left[\int_0^{\infty} \left(\text{th} \frac{\pi t}{2d_k} - 1 \right) \sin \lambda t dt + \int_0^{\infty} \sin \lambda t dt \right] \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{cth} \frac{\pi t}{2d_k} e^{-i\lambda t} dt &= -2i \left[\int_0^{\infty} \left(\text{cth} \frac{\pi t}{2d_k} - 1 \right) \sin \lambda t dt + \int_0^{\infty} \sin \lambda t dt \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Учитывая значения интегралов [5]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\text{th} \frac{\pi t}{2d_k} - 1 \right) \sin \lambda t dt &= 1/d_k \text{sh} \lambda d_k - 1/\lambda \\ \int_0^{\infty} \left(\text{cth} \frac{\pi t}{2d_k} - 1 \right) \sin \lambda t dt &= d_k \text{cth} \lambda d_k - 1/\lambda, \end{aligned}$$

а также значение интеграла в смысле теории обобщенных функций [6]

$$\int_0^{\infty} \sin \lambda t dt = 1/\lambda,$$

получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\text{th} \frac{\pi t}{2d_k} - 1 \right) \sin \lambda t dt + \int_0^{\infty} \sin \lambda t dt &= d_k / \text{sh} d_k \lambda, \\ \int_0^{\infty} \left(\text{cth} \frac{\pi t}{2d_k} - 1 \right) \sin \lambda t dt + \int_0^{\infty} \sin \lambda t dt &= d_k \text{cth} d_k \lambda. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Теперь подстановка (1.18) и (1.19) в (1.17) даст конечно-разностные уравнения второго порядка

$$\frac{\bar{\tau}_{k+1}(\lambda)}{G_{k+1} \text{sh} \lambda d_{k+1}} + \frac{\bar{\tau}_{k-1}(\lambda)}{G_k \text{sh} \lambda d_k} = \frac{\bar{\tau}_k(\lambda) \text{cth} \lambda d_{k+1}}{G_{k+1}} + \frac{\bar{\tau}_k(\lambda) \text{cth} \lambda d_k}{G_k}$$

или

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.20)$$

$$a_k = 1/G_k \text{sh}(\lambda d_k), \quad b_k = \text{cth}(\lambda d_k)/G_k, \quad d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Для сведения (1.20) к конечно-разностным уравнениям первого порядка положим

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - b_k \bar{\tau}_k = \omega_k \quad (1.21)$$

$$a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} - b_{k+1} \bar{\tau}_k = \chi_{k+1} \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.22)$$

Тогда система уравнений (1.20) перейдёт в систему

$$\omega_k + \chi_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.23)$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным в работе [1], где решение уравнения (1.23) в конечном итоге сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С.10–20.
2. Бицадзе А.В. Основы теории голоморфных функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 320 с.
3. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375 с.
4. Снеддон. Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955. 667 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщённых функций. М.: Наука, 1977. 282 с.

Сведения об авторе:

Гаспарян Ануш Варазатовна,

Младший научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^Б

Тел. (+37410) 52-48-90, E-mail: anush@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 24.02.2011

**ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК С ЗАЗОРОМ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМ ЖИДКОСТЬЮ**

БАГДАСАРЯН Г.Е., МАРУХЯН С.А.

Ключевые слова: оболочка, жидкость, устойчивость, собственные колебания
Key words: shell, fluid, stability, natural vibration

Բաղդասարյան Գ.Ե., Մարուխյան Ս.Ա.

Համառոտեցք գլանային թաղանթների դինամիկ վարքը, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է հեղուկով

Կան բազմաթիվ հետազոտություններ, նվիրված հեղուկով լցված գլանային թաղանթի տատանումների և կայունության հարցերին: Տեղեկություններ այս հետազոտությունների վերաբերյալ կարելի է գտնել [1-4] մենագրություններում և [5] ակնարկային հոդվածում: Փոփոխական խորությամբ հեղուկով լցված գլանային թաղանթի տատանումների խնդիրը դիտարկված է [6] աշխատանքում: Մասնակիորեն հեղուկով լցված գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը արտաքին դինամիկ ճնշման ազդեցությամբ դիտարկված է [7] աշխատանքում: Համառոտեցք գլանային թաղանթների տատանման խնդիրներ, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է հեղուկով, դիտարկված են [8-11] աշխատանքներում, ընդ որում բացի [8,11], մյուսներում դիտարկված են ամբողջովին հեղուկով լցված թաղանթի տատանումները [9,10]: Ստատիկ կայունության կորստի հնարավոր հարցեր դիտարկված է [11]:

Աշխատանքում գծային դրվածքով դիտարկված է համառոտեցք, վերջավոր երկարությամբ, իզոտրոպ գլանային թաղանթների տատանումների և կայունության հարցերը, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է անսեղմելի իդեալական հեղուկով: Ուսումնասիրված է լցված հեղուկի շերտի խորության և լայնության ազդեցությունները դիտարկվող հիդրոառձգական համակարգի սեփական տատանումների հաճախականությունների վրա: Ցույց է տրված քնարկվող համակարգի ստատիկ կայունության կորստի հնարավորությունը հիդրոստատիկ ճնշման ազդեցության տակ:

Baghdasaryan G.Ye, Marukhyan S.A.

Dynamic behavior of a coaxial cylindrical shells, with a gap partially filled with fluid

There are numerous studies on the vibrations and dynamic stability of a cylindrical shell filled with fluid. Information about these studies can be found in monographs [1-4] and in a review article [5]. The problem of vibrations of coaxial cylindrical shells, filled with fluid of variable-depth, is considered in [6]. The problem of stability of cylindrical shells partially filled with fluid, with an external dynamic pressure is discussed in [7]. The problems of vibration of coaxial cylindrical shells are considered in [8-11], and besides [8, 11], in the remaining papers which deal with the same case, the vibrations of shells completely filled with fluid are researched in [9, 10]. The question of possible loss of stability is considered in [11].

In this paper, the problem of vibrations and stability of isotropic coaxial circular cylindrical shells of finite length in linear statement is considered, when the region between the shells (the gap) is partially filled with an incompressible fluid. The dependence of the vibration frequency on the depth of the filling and the thickness of the gap of the considered hydro-elastic system is studied. The possibility of loss of static stability of hydro-elastic system under the influence of hydrostatic pressure is shown.

Имеются многочисленные исследования, посвященные колебаниям и динамической устойчивости цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1-4] и в обзорной статье [5]. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины, рассмотрены в [6]. В работе [7] исследована устойчивость цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, при внешнем динамическом давлении. Вопросы колебаний коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью,

рассмотрены в работах [8-11], причем кроме [8,11], в остальных работах рассмотрен случай, когда область между оболочками полностью заполнена жидкостью [9,10]. Вопрос о возможности потери статической устойчивости рассмотрен в [11].

В настоящей работе в линейной постановке рассмотрена задача колебаний и устойчивости изотропных коаксиальных круговых цилиндрических оболочек конечной длины, когда область между оболочками (зазор) частично заполнена несжимаемой жидкостью. Исследована зависимость частоты колебаний рассматриваемой гидроупругой системы от глубины заполнения и толщины зазора. Показана возможность потери статической устойчивости гидроупругой системы под действием гидростатического давления.

1. Основные уравнения. Рассмотрим колебания и устойчивость коаксиальной системы двух цилиндрических оболочек конечных длин l , когда область между оболочками (зазор) частично заполнена несжимаемой жидкостью глубины b ($b \leq l$). Будем пользоваться цилиндрическими координатами (α, r, θ) , совместив полярную ось α с осью оболочек. Предполагается, что та часть поверхности указанной области, которая находится на плоскости $\alpha = 0$, является неподвижной (жёсткое днище).

За основу принимаются следующие предположения:

- а) гипотеза Кирхгофа – Лява о недеформируемых нормалях;
- б) общеизвестные упрощения теории оболочек с большим показателем изменчивости;
- в) жидкость между оболочками совершает потенциальное движение;
- г) волновое движение на свободной поверхности жидкости слабо влияет на колебание оболочек.

На основе принятых предположений система уравнений колебания оболочек имеет вид [12]:

$$D_i \Delta^2 w_i - \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \alpha^2} + \rho_i h_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \rho_i h_i \varepsilon_i \frac{\partial w_i}{\partial t} = Z_i, \quad i = (1, 2),$$

$$\frac{1}{E_i h_i} \Delta^2 \Phi_i + \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \alpha^2} = 0, \quad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)}, \quad (1.1)$$

причем индекс $i = 1$ относится к внутренней оболочке, а $i = 2$ – к внешней.

В системе (1.1) w_i – прогиб, Φ_i – функция напряжений, R_i – радиус, h_i – толщина, E_i – модуль упругости, ν_i – коэффициент Пуассона, ε_i – коэффициент линейного затухания, ρ_i – плотность материала i -той оболочки, Z_i – нормально приложенная внешняя нагрузка, Δ – двумерный оператор Лапласа.

В случае рассматриваемой задачи для Z_i имеем [6-8, 13]:

$$Z_i = \begin{cases} (-1)^i \left[Z_0^{(i)} + \rho_0 g(b - \alpha) \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \right] & \text{при } 0 < \alpha < b \\ 0 & \text{при } b < \alpha < l. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь Z_0 – возмущённое давление жидкости, g – ускорение силы тяжести, ρ_0 – плотность жидкости.

Из интеграла Коши–Лагранжа имеем

$$Z_0^{(i)} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{r=R_i}, \quad (1.3)$$

где Φ – потенциальная функция возмущённого движения жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (1.4)$$

в области, занятой жидкостью, и следующим краевым условиям на границе этой области:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial w_i}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_i, \quad (i = 1, 2), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \quad (1.6)$$

и согласно последнему предположению, следующему условию на свободной поверхности жидкости [5-8, 13]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = b. \quad (1.7)$$

Для определения функции Φ , как это следует из (1.5), необходимо определить радиальные скорости стенок оболочек. Поэтому, прежде всего обсудим вопрос о формах смещений поверхностей оболочек.

Предположим, что оболочки шарнирно опёрты по торцам. Тогда решение системы (1.1), удовлетворяющее известным условиям шарнирного опирания, запишем в форме

$$w_i = \cos n\theta \sum_{s=0}^{\infty} W_s^{(i)}(t) \sin \lambda_s \alpha, \quad (1.8)$$

$$\Phi_i = \cos n\theta \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s^{(i)}(t) \sin \lambda_s \alpha,$$

где $\lambda_s = (m + s)\pi / l$, m – число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей, n – число волн в окружном направлении, $W_s^{(i)}(t)$ и $\Phi_s^{(i)}(t)$ – искомые функции.

Исходя из (1.8), гармоническую функцию Φ представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi = \cos n\theta \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} [A_s(t) I_n(\lambda_s r) + B_s(t) K_n(\lambda_s r)] \sin \lambda_s \alpha + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{\infty} [C_j(t) \operatorname{sh} \alpha_{nj} \alpha + D_j(t) \operatorname{ch} \alpha_{nj} \alpha] \Psi_n(\alpha_{nj} r) \right\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где I_n , K_n – функции Бесселя чисто мнимого аргумента первого и второго рода,

$$\Psi_n(\alpha_{nj} r) = \frac{J_n(\alpha_{nj} r)}{J_n'(\alpha_{nj} R_1)} - \frac{Y_n(\alpha_{nj} r)}{Y_n'(\alpha_{nj} R_1)}, \quad (1.10)$$

J_n , Y_n – функции Бесселя действительного аргумента первого и второго рода порядка n ; A_s , B_s , C_j , D_j – некоторые величины, которые определяются из поверхностных условий (1.5)–(1.7); α_{nj} – корни следующего трансцендентного уравнения:

$$J_n'(\alpha_{nj} R_2) Y_n'(\alpha_{nj} R_1) - J_n'(\alpha_{nj} R_1) Y_n'(\alpha_{nj} R_2) = 0. \quad (1.11)$$

В (1.10), (1.11) и в дальнейшем

$$f'(\beta R) = \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=\beta R}.$$

Подставляя (1.8) и (1.9) в граничные условия (1.5) – (1.7) и учитывая (1.11), путем ортогонализации получим следующие выражения для неизвестных A_s, B_s, C_j, D_j :

$$\begin{aligned} A_s(t) &= \frac{K_n'(\lambda_s R_2) \frac{\partial W_s^{(1)}}{\partial t} - K_n'(\lambda_s R_1) \frac{\partial W_s^{(2)}}{\partial t}}{\lambda_s \left[I_n'(\lambda_s R_1) K_n'(\lambda_s R_2) - I_n'(\lambda_s R_2) K_n'(\lambda_s R_1) \right]}, \\ B_s(t) &= \frac{I_n'(\lambda_s R_1) \frac{\partial W_s^{(2)}}{\partial t} - I_n'(\lambda_s R_2) \frac{\partial W_s^{(1)}}{\partial t}}{\lambda_s \left[I_n'(\lambda_s R_1) K_n'(\lambda_s R_2) - I_n'(\lambda_s R_2) K_n'(\lambda_s R_1) \right]}, \\ C_j(t) &= \sum_{s=0}^N \frac{\lambda_s}{\Delta(s, j)} \left(R_1 \Psi_n(\alpha_{nj} R_1) \frac{\partial W_s^{(1)}}{\partial t} - R_2 \Psi_n(\alpha_{nj} R_2) \frac{\partial W_s^{(2)}}{\partial t} \right), \\ D_j(t) &= \sum_{s=0}^N \frac{(\lambda_s \operatorname{sh} \alpha_{nj} b - \alpha_{nj} \sin \lambda_s b)}{\Delta(s, j) \operatorname{ch} \alpha_{nj} b} \left(R_1 \Psi_n(\alpha_{nj} R_1) \frac{\partial W_s^{(1)}}{\partial t} - R_2 \Psi_n(\alpha_{nj} R_2) \frac{\partial W_s^{(2)}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(s, j) &= \alpha_{nj} (\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2)^2 \left[\frac{R_2^2}{2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_2^2} \right) \Psi_n^2(\alpha_{nj} R_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_1^2} \right) \Psi_n^2(\alpha_{nj} R_1) \right]. \end{aligned}$$

В силу (1.12) и представления (1.9), из (1.3) находим следующие выражения для возмущённого давления жидкости на стенках оболочек:

$$\begin{aligned} Z_0^{(i)} &= -\rho_0 \cos n\theta \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[A_1^{(i)}(s) \sin \lambda_s \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left(B_1^{(i)}(s, j) \operatorname{sh} \alpha_{nj} \alpha + C_1^{(i)}(s, j) \operatorname{ch} \alpha_{nj} \alpha \right) \right] \frac{d^2 W_s^{(1)}}{dt^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[A_2^{(i)}(s) \sin \lambda_s \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \left(B_2^{(i)}(s, j) \operatorname{sh} \alpha_{nj} \alpha + C_2^{(i)}(s, j) \operatorname{ch} \alpha_{nj} \alpha \right) \right] \frac{d^2 W_s^{(2)}}{dt^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_p^{(i)}(s) &= (-1)^{p+1} \frac{K_n'(\lambda_s R_{r(p)}) I_n(\lambda_s R_i) - I_n'(\lambda_s R_{r(p)}) K_n(\lambda_s R_i)}{\lambda_s \left[I_n'(\lambda_s R_1) K_n'(\lambda_s R_2) - I_n'(\lambda_s R_2) K_n'(\lambda_s R_1) \right]}, \\ B_p^{(i)}(s, j) &= (-1)^{p+1} \frac{\lambda_s R_p \Psi_n(\alpha_{nj} R_p) \Psi_n(\alpha_{nj} R_i)}{\Delta(s, j)}, \end{aligned}$$

$$C_p^{(i)}(s, j) = (-1)^{p+1} \frac{(\lambda_s \operatorname{sh} \alpha_{nj} b - \alpha_{nj} \sin \lambda_s b) R_p \Psi_n(\alpha_{nj} R_p) \Psi_n(\alpha_{nj} R_i)}{\Delta(s, j) \operatorname{ch} \alpha_{nj} b},$$

($p = 1, 2$; $r^{(p)} = 1 + \delta_{1p}$, δ_{ij} – символ Кронекера).

Подставляя (1.8) во второе уравнение системы (1.1), для искомой функции $\Phi_s^{(i)}(t)$ будем иметь

$$\Phi_s^{(i)}(t) = \frac{E_i h_i}{R_i} \frac{\lambda_s^2}{(\lambda_s^2 + n^2 / R_i^2)^2} W_s^{(i)}(t). \quad (1.14)$$

Таким образом, все искомые величины выражаются через функции $W_s^{(1)}(t)$ и $W_s^{(2)}(t)$.

На основе вариационного метода Бубнова–Галеркина, с учетом (1.2), (1.8), (1.13) и (1.14), из первого уравнения системы (1.1), для определения $W_s^{(1)}(t)$ и $W_s^{(2)}(t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_\kappa^{(1)}}{dt^2} + \varepsilon_1 \frac{dW_\kappa^{(1)}}{dt} + \Omega_1^2(k, n) W_\kappa^{(1)} + \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \left(b_{ks}^{(1)} W_s^{(1)} + \frac{d^2}{dt^2} \left[m_1^{(1)}(k, s) W_s^{(1)} + m_2^{(1)}(k, s) W_s^{(2)} \right] \right) = 0, \\ \frac{d^2 W_\kappa^{(2)}}{dt^2} + \varepsilon_2 \frac{dW_\kappa^{(2)}}{dt} + \Omega_2^2(k, n) W_\kappa^{(2)} + \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \left(b_{ks}^{(2)} W_s^{(2)} + \frac{d^2}{dt^2} \left[m_1^{(2)}(k, s) W_s^{(1)} + m_2^{(2)}(k, s) W_s^{(2)} \right] \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

($k = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_i^2(k, n) &= \frac{D_i}{h_i \rho_i} \left[\left(\lambda_k^2 + \frac{n^2}{R_i^2} \right)^2 + \frac{12(1 - \nu_i^2)}{R_i^2 h_i^2} \frac{\lambda_k^4}{(\lambda_k^2 + n^2 / R_i^2)^2} \right], \\ b_{ks}^{(i)} &= (-1)^i \frac{\rho_0 g n^2}{l R_i h_i \rho_i} \left[\frac{1 - \cos(\lambda_s - \lambda_k) b}{(\lambda_s - \lambda_k)^2} - \frac{1 - \cos(\lambda_s + \lambda_k) b}{(\lambda_s + \lambda_k)^2} \right], \\ m_p^{(i)}(k, s) &= (-1)^i \frac{2 \rho_0}{l h_i \rho_i} \left\{ A_p^{(i)}(s) \left[\frac{\sin(\lambda_s - \lambda_k) b}{2(\lambda_s - \lambda_k)} - \frac{\sin(\lambda_s + \lambda_k) b}{2(\lambda_s + \lambda_k)} \right] + \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[B_p^{(i)}(s, j) \frac{\alpha_{nj} \operatorname{ch} \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{sh} \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} + \right. \\ &\quad \left. \left. + C_p^{(i)}(s, j) \frac{\lambda_k + \alpha_{nj} \operatorname{sh} \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{ch} \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $\Omega_1(k, n)$ и $\Omega_2(k, n)$ – частоты собственных поперечных колебаний внутренней и внешней оболочек соответственно, $b_{ks}^{(i)}$ – коэффициенты гидростатического давления жидкости, $m_p^{(i)}(k, s)$ – коэффициенты присоединённых масс.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая одночленной аппроксимации ($s = 0$). Заметим, что λ_s при $s = 0$ зависит от m и равняется $m\pi/l$. Поэтому основные неизвестные $W_s^{(i)}$, а также величины $b_{ks}^{(i)}$, $m_p^{(i)}(k, s)$ и $\Omega_i(k, n)$ при $s = 0$ будут зависеть от m и n . Тогда из уравнений (1.15) имеем:

$$\begin{aligned} & \left[1 + M_1^{(1)}(m, n)\right] \frac{d^2 W_{mn}^{(1)}}{dt^2} + \varepsilon_1 \frac{dW_{mn}^{(1)}}{dt} + \\ & + \Omega_1^2(m, n) W_{mn}^{(1)} + M_2^{(1)}(m, n) \frac{d^2 W_{mn}^{(2)}}{dt^2} + B_{mn}^{(1)} W_{mn}^{(1)} = 0, \\ & \left[1 + M_2^{(2)}(m, n)\right] \frac{d^2 W_{mn}^{(2)}}{dt^2} + \varepsilon_2 \frac{dW_{mn}^{(2)}}{dt} + \\ & + \Omega_2^2(m, n) W_{mn}^{(2)} + M_1^{(2)}(m, n) \frac{d^2 W_{mn}^{(1)}}{dt^2} + B_{mn}^{(2)} W_{mn}^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} W_{mn}^{(i)} &= W_0^{(i)}(m, n), \quad M_q^{(i)}(m, n) = m_q^{(i)}(0, 0), \quad (q = 1, 2) \\ B_{mn}^{(i)} &= b_{00}^{(i)}(m, n) = (-1)^i \frac{\rho_0 g n^2 b^2}{2l R_i h_i \rho_i} \left[1 - \left(\frac{\sin \mu_m b}{\mu_m b} \right)^2 \right], \quad \mu_m = \lambda_0 = m\pi/l. \end{aligned} \quad (1.18)$$

На основе (1.17) будем исследовать динамическое поведение возмущений (сообщаемых рассматриваемой гидроупругой системе) в зависимости от наличия жидкости в области, ограниченной оболочками и жёстким дном. Отдельно рассматриваются возможность потери статической устойчивости под действием гидростатического давления и собственные колебания гидроупругой системы в докритической стадии.

2. Возможность потери статической устойчивости. Решение системы (1.17) представим в виде

$$W_{mn}^{(1)}(t) = c_{mn}^{(1)} e^{\nu t}, \quad W_{mn}^{(2)}(t) = c_{mn}^{(2)} e^{\nu t}. \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в (1.17) приводит к следующей системе однородных линейных уравнений относительно $c_{mn}^{(1)}$, $c_{mn}^{(2)}$:

$$\left[\left(1 + M_1^{(1)}(m, n)\right) \nu^2 + \varepsilon_1 \nu + \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}\right) \right] c_{mn}^{(1)} + M_2^{(1)}(m, n) \nu^2 c_{mn}^{(2)} = 0, \quad (2.2)$$

$$M_1^{(2)}(m, n) \nu^2 c_{mn}^{(1)} + \left[\left(1 + M_2^{(2)}(m, n)\right) \nu^2 + \varepsilon_2 \nu + \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}\right) \right] c_{mn}^{(2)} = 0.$$

Из условия существования нетривиального решения системы (2.2) получим следующее уравнение частот:

$$a_0 \nu^4 + a_1 \nu^3 + a_2 \nu^2 + a_3 \nu + a_4 = 0, \quad (2.3)$$

где

$$a_0 = \left(1 + M_1^{(1)}(m, n)\right) \left(1 + M_2^{(2)}(m, n)\right) - M_1^{(2)}(m, n) M_2^{(1)}(m, n),$$

$$a_1 = \varepsilon_1 \left(1 + M_2^{(2)}(m, n) \right) + \varepsilon_2 \left(1 + M_1^{(1)}(m, n) \right), \quad (2.4)$$

$$a_2 = \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} \right) \left(1 + M_2^{(2)}(m, n) \right) + \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} \right) \left(1 + M_1^{(1)}(m, n) \right) + \varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

$$a_3 = \varepsilon_2 \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} \right) + \varepsilon_1 \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} \right),$$

$$a_4 = \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} \right) \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} \right).$$

На основе теоремы Гурвица, для того, чтобы все корни уравнения (2.3) при $a_0 > 0$ имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были положительными, то есть, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$a_i > 0 \quad (i = \overline{0, 4}), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[\left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} \right) \left(1 + M_2^{(2)}(m, n) \right) - \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} \right) \left(1 + M_1^{(1)}(m, n) \right) \right]^2 + \\ & + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[\varepsilon_2 \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} \right) \left(1 + M_1^{(1)}(m, n) \right) + \varepsilon_1 \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} \right) \left(1 + M_2^{(2)}(m, n) \right) \right] + \\ & + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left[\left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} \right) \left(1 + M_2^{(2)}(m, n) \right) + \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} \right) \left(1 + M_1^{(1)}(m, n) \right) \right] + \\ & + M_1^{(2)}(m, n) M_2^{(1)}(m, n) \left[\varepsilon_2 \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} \right) + \varepsilon_1 \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} \right) \right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Первое и второе ($i = 0, i = 1$) условия из (2.5) выполняются во всех случаях, поскольку [5] $M_i^{(i)}(m, n) > 0$, а численный анализ показывает, что

$$\begin{aligned} M_1^{(1)}(m, n) &> |M_1^{(2)}(m, n)| \\ M_2^{(2)}(m, n) &> |M_2^{(1)}(m, n)| \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из (1.18) следует, что $B_{mn}^{(2)} > 0$, а $B_{mn}^{(1)} < 0$, следовательно, с учетом (1.16), $\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} > 0$, а $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}$ может быть и отрицательной. Если $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} > 0$, то, как видно из (2.4) и (2.5), все остальные условия теоремы Гурвица (неравенства (2.5)) выполняются, и рассматриваемая гидроупругая система устойчива относительно малых возмущений. Если же $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} < 0$, то $a_4 < 0$, следовательно, нарушаются условия теоремы Гурвица и система теряет устойчивость. Переход от устойчивости к неустойчивости происходит при условии $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} = 0$. (2.7)

Из условия (2.7), в частности, когда $b = l$, для определения критической длины оболочки, при котором происходит потеря устойчивости, получим уравнение

$$gl = \frac{T}{n^2} \left\{ \left[n^2 + \left(\frac{m\pi R_1}{l} \right)^2 \right]^2 + \beta \left(\frac{m\pi R_1}{l} \right)^4 \left[n^2 + \left(\frac{m\pi R_1}{l} \right)^2 \right]^2 \right\}, \quad (2.8)$$

где

$$T = \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{c_t^2}{3(1 - \nu_1)} \left(\frac{h_1}{R_1} \right)^3, \quad \beta = 12(1 - \nu_1^2) \left(\frac{R_1}{h_1} \right)^2, \quad c_t^2 = \frac{E_1}{2\rho_1(1 + \nu_1)}.$$

c_t – скорость распространения сдвиговых волн в данной упругой среде.

Наибольший интерес представляют те значения аргументов m и n , вблизи которых правая часть (2.8) принимает минимальное значение. Легко заметить, что указанная часть является монотонно возрастающей функцией по m и поэтому примем $m=1$. Тогда, минимизируя функцию, лежащую в правой части (2.8) по n , для определения критического числа волн n_* по окружности получим

$$n^4 - a_0^4 - \beta a_0^4 \frac{3n^2 + a_0^2}{(n^2 + a_0^2)^2} = 0, \quad a_0 = \pi R_1 / l. \quad (2.9)$$

Таблица 1

$\frac{R_1 m}{h_1 \times 10^3 \text{ м}}$	0.5	1	2
2	2.6 5	1.6 10	0.95 22
3	4.3 3	2.6 7	1.56 15
5	8.1 2	4.9 5	2.93 10
7	12.4 2	7.4 4	4.44 8
10	19.3 1	11.5 3	6.09 5

Уравнения (2.8) и (2.9) составляют систему для определения n_* и критической длины l_* . Результаты численного решения указанных уравнений (значения l_*), в случае гидроупругой системы «дюралюминиевая оболочка – вода» ($c_t=5100\text{м/сек}$, $\rho_1/\rho_0=2.7$, $\nu_1=0.3$) при различных значениях h_1 и R_1 , приведены в табл.1, где в каждой нижней части клетки приведены

критические значения волнового числа n_* .

Таким образом, установлена возможность потери устойчивости под действием гидростатического давления и показано, что критическая длина l_* является монотонной функцией от геометрических параметров задачи, причем – возрастающая от толщины и убывающая от радиуса оболочки (табл.1).

3. Собственные колебания. Рассмотрим уравнение (2.3), когда $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} > 0$ (докритическое состояние) и затухание достаточно мало ($\varepsilon_i \ll \Omega_j$, ($i, j = 1, 2$)). В этом случае уравнение (2.3) упрощается и принимает следующий вид ($\nu = i\omega$, ω – частота собственных колебаний гидроупругой системы):

$$\begin{aligned} & \left[(1 + M_1^{(1)}(m, n))(1 + M_2^{(2)}(m, n)) - M_1^{(2)}(m, n)M_2^{(1)}(m, n) \right] \omega^4 - \\ & - \left[(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)})(1 + M_2^{(2)}(m, n)) + (\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)})(1 + M_1^{(1)}(m, n)) \right] \omega^2 + \\ & + (\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)})(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если одна из оболочек является абсолютно жёсткой, то из (3.1) для частот колебаний, соответственно, получим

$$\omega_{mn}^2 = \begin{cases} \frac{\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}}{1 + M_2^{(2)}(m, n)} & \text{при } D_1 = \infty, \\ \frac{\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}}{1 + M_1^{(1)}(m, n)} & \text{при } D_2 = \infty. \end{cases} \quad (3.2)$$

В общем случае уравнение (3.1) при $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} > 0$ имеет два действительных корня, следовательно, система колеблется двумя разными частотами, которые определяются следующими выражениями:

$$\omega_i^2 = \left(A + (-1)^i \sqrt{B} \right) / C, \quad (i = 1, 2), \quad (3.3)$$

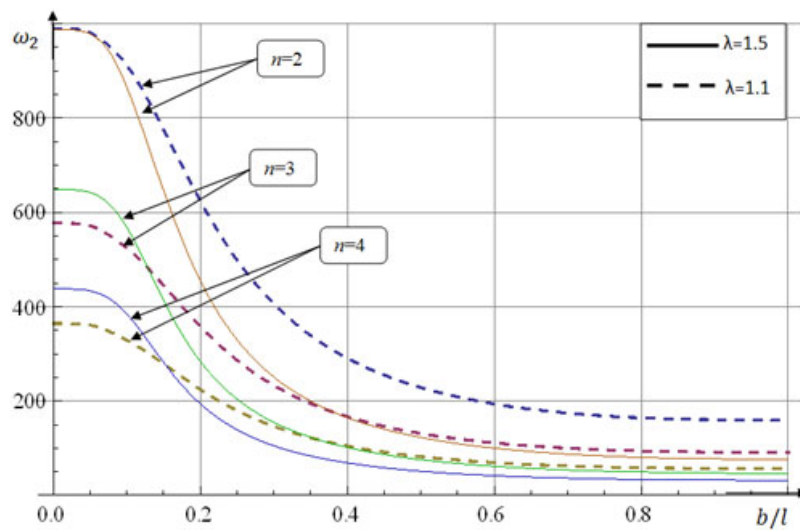
где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}}{1 + M_1^{(1)}(m, n)} + \frac{\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}}{1 + M_2^{(2)}(m, n)}, \\ C &= 2 \left(1 - \frac{M_1^{(2)}(m, n) M_2^{(1)}(m, n)}{(1 + M_1^{(1)}(m, n))(1 + M_2^{(2)}(m, n))} \right), \\ B &= \left(\frac{\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}}{1 + M_1^{(1)}(m, n)} - \frac{\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}}{1 + M_2^{(2)}(m, n)} \right)^2 + \\ &+ \frac{4M_1^{(2)}(m, n) M_2^{(1)}(m, n)}{\left((1 + M_1^{(1)}(m, n))(1 + M_2^{(2)}(m, n)) \right)^2} \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} \right) \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (1.16) и (2.6) следует, что $C > 0$ и $B > 0$. Более того, формулы (3.3) и (3.4) показывают, что $\omega_1 < \omega_2$.

С учетом $\varepsilon_i \ll \Omega_j$, ($i, j = 1, 2$), из первого уравнения (2.2) следует, что если $\omega = \omega_1$, то $c_{mn}^{(1)} c_{mn}^{(2)} < 0$, а это значит, что частота ω_1 соответствует несимметричным колебаниям системы (оболочки колеблются в различных фазах), если же $\omega = \omega_2$, то $c_{mn}^{(1)} c_{mn}^{(2)} > 0$, и частота ω_2 соответствует симметричным колебаниям (оболочки колеблются в одной фазе). Рассмотрим в отдельности эти колебания.

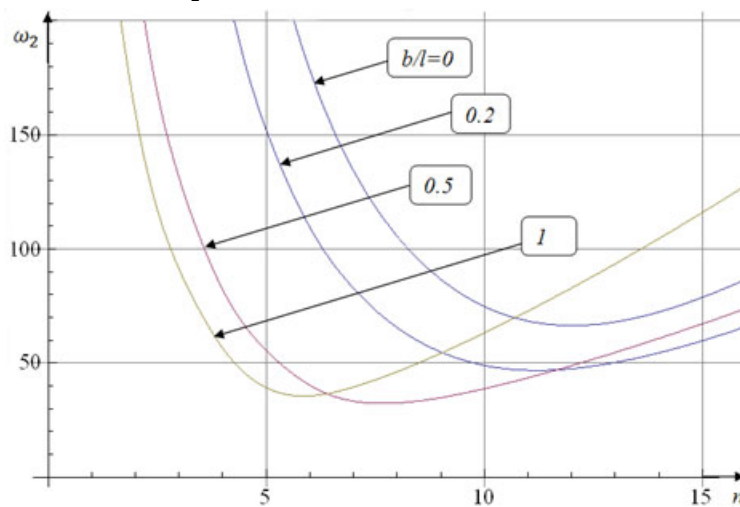
3.1. Симметричные колебания. На основе (3.1) с учетом (1.16) и (1.18) произведено вычисление значений частот колебаний (ω_2) гидроупругой системы, в случае «дюралюминиевая оболочка – вода» – $c_t^{(i)} = 5100 \text{ м/сек}$, $\rho_i / \rho_0 = 2.7$, $\nu_i = 0.3$, $i = 1, 2$. Значения ω_2 в зависимости от b/l приведены на фиг.1 при $m = 1$, $R_1 = 2 \text{ м}$, $l = 2R_1$, $h_i = 10^{-3} \text{ м}$ и различных n и λ $\left(\lambda = R_2 / R_1 \right)$.



Фиг. 1

Из фиг.1 видно, что при сравнительно малых значениях b/l частота симметричных колебаний увеличивается с увеличением λ . Дальнейшее увеличение b/l приводит к обратному влиянию. Независимо от λ с увеличением b/l частоты симметричных колебаний (являющиеся монотонно убывающими функциями от b/l) существенно уменьшаются.

При тех же физико-геометрических параметрах, как в первом примере, на фиг.2 приведена зависимость ω_2 от n при $\lambda=1.1$ и различных значениях b/l .

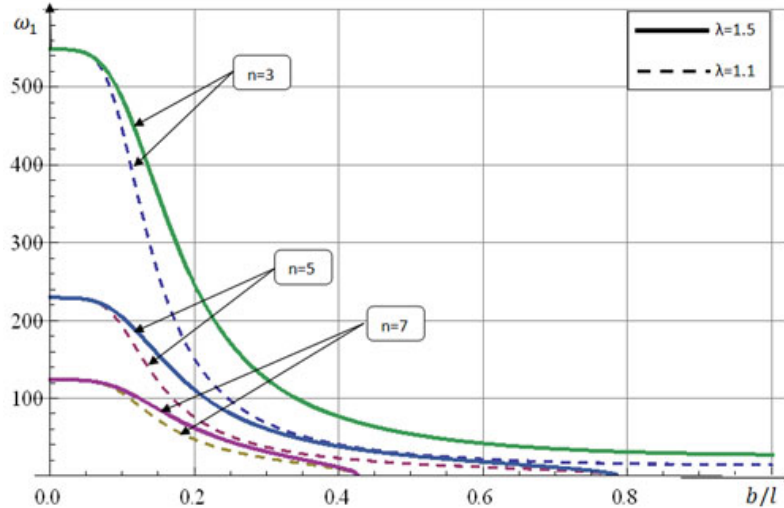


Фиг.2

Фиг.2 показывает, что частота симметричных колебаний имеет минимум от n , аналогично случаю отсутствия жидкости. С увеличением b/l , как число волн по окружности, при котором ω_2 принимает минимальное значение, так и минимальные значения ω_2 уменьшаются. Отметим, что на фиг.1 рассмотрены те интервалы изменения n , на котором частота монотонно убывает.

3.2. Несимметричные колебания. В этом случае оболочки колеблются в различных фазах и частота колебаний рассматриваемой гидроупругой системы

является ω_1 . На основе (3.1) – (3.4) при $i = 1$ произведено вычисление ω_1 при тех же физико-геометрических параметрах, рассмотренных выше. Результаты вычисления приведены на фиг. 3.



Фиг.3

Из фиг.3 видно, что:

- а) с увеличением λ частота несимметричных колебаний увеличивается;
 - б) присутствие жидкости, как и в случае симметричных колебаний, приводит к существенному уменьшению частоты колебаний;
 - в) как и следовало ожидать, частота ω_1 при определённых значениях b/l обращается в нуль, означающее потерю устойчивости гидроупругой системы.
- Отметим, что здесь в отличие от фиг.1 при $b = 0$, кривые начинаются с одной и той же точки, демонстрируя тот факт, что $\omega_1 = \Omega_1$, а радиус R_1 внутренней оболочки в обоих ($\lambda=1.1$, $\lambda=1.5$) случаях – один и тот же.

При тех же физико-геометрических параметрах, в табл.2 приведена зависимость ω_1 от n при $\lambda=1.1$ и различных значениях b/l .

Таблица 2

$n \backslash b/l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2549	1814	972.6	548.5	340.7	229.2	164.2	123.8	98.05
0.1	383.5	1381	772.1	445.8	281.6	192.4	139.6	106.4	85.03
0.2	141.2	411.5	242.5	151.1	103.2	75.85	58.71	47.21	39.13
0.4	56.34	86.91	58.38	40.58	29.92	22.99	17.41	8.986	-
0.5	44.11	55.05	39.28	28.24	21.16	15.99	9.084	-	-
0.6	37.45	39.26	29.55	21.81	16.46	11.54	-	-	-
0.7	33.81	30.51	24.08	18.16	13.69	7.519	-	-	-
0.8	31.98	25.33	20.88	16.05	11.95	-	-	-	-
1	31.19	20.29	18.04	14.31	9.884	-	-	-	-

Из табл.2 видно, что частота несимметричных колебаний в зависимости от числа волн по окружности, в основном, имеет следующее поведение:

- а) при сравнительно малых значениях b/l ($b/l < b_0/l$) частота колебаний имеет максимум в окрестности $n=1$ (значение b_0 зависит от физико-геометрических параметров задачи);
- б) если $b/l > b_0/l$, то функция $\omega_1(n)$ является монотонно убывающей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буйвол В.Н. Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев: Наукова думка, 1975. 192с.
2. Мнев Е.Н., Перцев А.К. Гидроупругость оболочек: Л.: "Судостроение", 1970. 356с.
3. Гузь А.Н., Кубенко Б.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек: Методы расчета оболочек. Т.5. Киев: Наукова Думка, 1982. 400с.
4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320с.
5. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. Нелинейные задачи динамики упругих оболочек, частично заполненных жидкостью. //Прикладная механика. 2000. Т.36. № 4.
6. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. // Докл. АН АрмССР. 1965. Т.XI. № 4.
7. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Устойчивость цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью при внешнем динамическом давлении. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 1. С.25–32.
8. Багдасарян Г.Е. Колебания коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненным жидкостью. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. Т.XXI. № 4. С.40–47.
9. Краснопольская Т.С., Подчасов Н.П. Вынужденные колебания жидкости между двумя цилиндрами, возбуждаемые вибрациями внутренней оболочки. //Прикладная механика. 1992. 28. № 4. С.42–48.
10. Myung Jo Jung, Yong Beum Kim, Kyeong Hoon Jeong, Suhn Choi Modal Analysis of Coaxial Shells with fluid-Filled Annulus. J. Of the Korean Nuclear Society. V.32, n.4, pp.328-341,2000.
11. Багдасарян Г.Е., Марухян С.А. Колебания и устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненным жидкостью. // В сб. научн. тр. меж. конф. "Актуальные проблемы механики сплошных сред". 2010. Т.1. С.113–118.
12. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике. М.: Гостехиздат, 1949.
13. Mixon John S., Herr Robert W. An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. Techn. Rept. NASA, Nr. R – 145, 1962.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН РА, профессор, ЕГУ, факультет информатики и прикладной математики, Тел.: (374 10) 55 29 64

E-mail: Gevorgb@rau.am

Марухян Сатик Арамовна – лаборант Института механики НАН Армении

Тел.: (374 93) 37 25 04

E-mail: satineh.marukhyan@gmail.com

Поступила в редакцию 31.05.2011

УДК 532.529.5: 532.591

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ, НАПОЛНЕННОЙ ПРОТЕКАЮЩЕЙ СМЕСЬЮ
ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА
ГРИГОРЯН Ш.А., ОГАНЯН Г.Г., СААКЯН С.Л.**

Ключевые слова: осесимметричные колебания, оболочка, жидкость, газ, пузырёк.
Keywords: axial symmetric vibrations, shell, fluid, gas, bubble.

Գրիգորյան Շ.Հ., Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ.

**Գազի պղպջակներ պարունակող հոսող հեղուկով լցված գլանային թաղանթի
առանցքախմբի տատանումները**

Ուսումնասիրված են անվերջ երկար գլանային թաղանթի առանցքախմբի տեփական տատանումները, որը լցված է հոսող խոշոր և մանր չափի պղպջակներ պարունակող գազահեղուկ խառնուրդով: Տարբերակվում են խառնուրդի միջ և գերձայնային շարժման ռեժիմներ: Թվային վերլուծությունից հետևում է, որ խոշոր պղպջակներով խառնուրդ-թաղանթ համակարգի հաճախականությունները իրենց մեծությամբ միշտ գերազանցում են փոքր պղպջակներով նույն համակարգի հաճախականությունները: Թաղանթի հաստության մեծացումով հաճախությունները նույնպես մեծանում են, ինչպես թաղանթ-մաքուր հեղուկ համակարգի դեպքում: Հոսանքի արագությունը նվազեցնելով միջձայնային ռեժիմում տատանումների հաճախականությունը մեծանում է, մինչդեռ թաղանթ-մաքուր ջուր համակարգի դեպքում նա նվազում է:

Grigoryan Sh.H., Ohanyan G.G., Sahakyan S.L.

**The axial symmetric vibrations of cylindrical shell, filled by the
flowing Gas-Liquid mixture**

The problem of axial symmetric self-vibrations of the infinite long shell, filled by flowing gas bubbles of large and small sizes in fluid mixture is considered. The subsonic and supersonic regimes of the mixture flow are discussed. For vibration frequencies of the system under consideration are shown that shell frequencies with big bubbles-liquids mixture exceed the frequencies of system of with small gas bubbles-liquid mixture. In subsonic regime increasing of shell thickness brings to increasing of shell frequencies, as in case of shell with pure fluid. In subsonic regime the frequencies are increasing with decreasing of the flowing velocity, on the contrary, brings to decreasing of frequencies, similar to the case of shell with the pure fluid.

Рассмотрена задача определения осесимметричных собственных колебаний бесконечно длинной упругой оболочки, наполненной протекающей газожидкостной смесью с крупными и мелкими пузырьками. Исследуется дозвуковой режим протекания смеси, для которой частоты колебаний системы оболочка-смесь с крупными пузырьками всегда превышают частоты оболочки с мелкими пузырьками. С увеличением толщины оболочки частота возрастает, как в случае оболочки с чистой жидкостью. С уменьшением скорости протекания в дозвуковом режиме частота возрастает, в то время, как в случае оболочки с чистой жидкостью она, наоборот, убывает.

При исследовании динамического взаимодействия деформируемой оболочки со слабосжимаемой жидкостью установлено [1-4], что система оболочка-жидкость обладает свойствами, не присущими отдельным её компонентам. В линейной постановке авторами разработаны методы расчёта собственных, вынужденных и параметрических колебаний системы. Взаимодействие оболочки с газожидкостной смесью при вибрационных воздействиях изучено в [5], где двухфазная среда моделируется как двухскоростная смесь, состоящая из слоев несущей жидкости с включениями в виде газовых пузырьков. Методика расчета нестационарных колебаний цилиндрических оболочек, взаимодействующих с протекающей жидкостью, где нестационарность обусловлена действием внешних квазипериодических сил, частоты которых являются медленно меняющимися во времени, изложена в [6].

Пусть бесконечно длинная деформируемая цилиндрическая оболочка кругового сечения радиуса R полностью заполнена газожидкостной смесью, жидкой фазой которой является идеальная жидкость, а дисперсной – подчиняющиеся уравнению состояния адиабаты газовые пузырьки одинакового размера. Процессами дробления,

коагуляции и образования новых пузырьков, а также эффектами поверхностного натяжения и межфазного теплообмена пренебрегаются. Принимается односкоростная модель течения смеси.

Уравнения движения рассматриваемой смеси в цилиндрической системе координат x, r, θ имеют вид (начало координат размещено в сечении $x = 0$) [7]

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla V^2 - \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \nabla \rho + \rho \text{div} \vec{V} = 0, \quad (1.2)$$

$$\rho = (1 - \beta) \rho_1 + \beta \rho_2, \quad \frac{\beta \rho_2}{(1 - \beta) \rho_1} = \text{const}, \quad \rho_2 a^3 = \text{const}. \quad (1.3)$$

$$P_2 - P = \rho_1 a \frac{d^2 a}{dt^2}, \quad \frac{P_2}{P_0} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^\gamma, \quad \gamma = \frac{c_{p2}}{c_{v2}}, \quad \rho_1 = \text{const}. \quad (1.4)$$

Здесь t – время; V_x, V_r, V_θ – составляющие вектора скорости $\vec{V}$ по осям координат с ортами $\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$; ρ и P – плотность и давление, γ – показатель адиабаты газа; c_p и c_v – его удельные теплоёмкости, β – объёмное газосодержание, a – радиус пузырька. Индексы 1, 2 и 0 отнесены к параметрам жидкой и газовой фаз и, соответственно, их значениям в стационарном состоянии равновесия. Параметры, характеризующие смесь в целом, индексов не имеют. В соотношениях (1.3) первое из них определяет плотность смеси, второе – понятие односкоростного течения, третье формулирует закон сохранения массы газа в пузырьке.

Исследуется безвихревое течение смеси внутри оболочки, когда $\text{rot} \vec{V} = 0$, что позволяет ввести в рассмотрение потенциал скоростей $\nabla \phi(x, r, \theta) = \vec{V}$. Уравнение Эйлера (1.1) преобразуется в интеграл Коши–Лагранжа

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \int \frac{dP}{\rho} = f(t) \quad (1.5)$$

Пусть в любой момент времени и в каждой точке пространства значения параметров смеси мало отклоняются от своих значений в состоянии покоя (равновесия)

$$P = P_0 + P', \quad P_2 = P_0 + P'_2, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho_2 = \rho_{20} + \rho'_2, \quad \beta = \beta_0 + \beta', \quad (1.6)$$

$$a = a_0 + a', \quad V_x = V'_x, \quad V_r = V'_r, \quad V_\theta = V'_\theta, \quad \phi = \phi',$$

где штрихи отнесены к малым возмущениям. Подстановка разложений (1.6) в соотношения (1.3) и в уравнение состояния газа из (1.4) позволяет получить линейные связи

$$\frac{\rho'_2}{\rho_{20}} = \frac{P'_2}{\gamma P_0}, \quad \frac{\beta'}{\beta_0} = -(1 - \beta_0) \frac{\rho'_2}{\rho_{20}}, \quad \rho' = \beta_0 \rho'_2 + (\rho_{20} - \rho_1) \beta', \quad a' = -\frac{a_0}{3} \frac{\rho'_2}{\rho_{20}},$$

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} P'_2, \quad c_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_0 \rho_0}, \quad a' = -\frac{a_0}{3} \frac{P'_2}{\gamma P_0}. \quad (1.7)$$

Здесь c_0 – невозмущённая скорость звука в смеси. Из уравнения Рэлея–Лэмба (1.4) в приближении, когда учитывается наличие пузырьков в жидкости, будем иметь

$$P' = P_2' + \frac{1}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^2 P_2'}{\partial t^2}, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_1 a_0^2}, \quad (1.8)$$

где ω_{ar} – собственная адиабатическая частота пульсирующего пузырька. Подставляя (1.6) в уравнение (1.5) и учитывая связи (1.7), подинтегральное выражение разложим в биномиальный ряд. Удерживая линейные слагаемые, определим константу интегрирования из условия, что в невозмущённом состоянии $\varphi' = 0$, $P_2' = 0$. Тогда избыточное гидродинамическое давление в пузырьке P_2' выразится через φ'

$$P_2' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Рассмотрим случай, когда внутри оболочки вдоль её образующей (осью x) протекает однородный поток газожидкостной смеси со скоростью U . Введём в рассмотрение связанную с оболочкой систему координат (x', r', θ')

$$x = x' - Ut, \quad r = r', \quad \theta = \theta', \quad t = t'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + U \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta'}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r'}. \quad (1.10)$$

Тогда в неподвижной относительно оболочки системе координат (1.10) возмущение давления в пузырьке P_2' и избыточное давление P' в смеси, в силу (1.8) и (1.9), запишутся в виде

$$P_2' = -\rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad P = -\rho_0 \left[1 + \frac{1}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi \quad (1.11)$$

Здесь штрихи над параметрами течения и координатами опущены. Ввод системы координат (1.10) обусловлен необходимостью последующего рассмотрения уравнений изгиба тонкостенной цилиндрической оболочки, записываемых в системе координат (x', r', θ') .

Подставляя разложения (1.6) в уравнения (1.1) и (1.2), ограничимся удержанием лишь линейных слагаемых. Их комбинирование друг с другом и с пятой связью из (1.7) приводит к уравнению

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P_2'}{\partial t^2} - \Delta P' = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

которое, в силу (1.11), переписется в неподвижной системе координат (1.10) в виде

$$\frac{1}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi - c_0^2 \Delta \varphi = 0 \quad (1.12)$$

Ниже исследованию подлежит осесимметричная задача, для которой $\partial/\partial\theta = 0$. Поэтому решение уравнения (1.12) будем искать в виде

$$\varphi(x, r, t) = f(r) e^{i(\omega t + \alpha x)}, \quad (1.13)$$

где ω – циклическая частота, $\alpha = \pi/L$, L – длина полуволн вдоль образующей цилиндра. Искомая функция $f(r)$ удовлетворяет уравнению

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \left[\frac{(\omega + \alpha U)^4}{\omega_{ar}^2} \frac{1}{c_0^2} - \frac{(\omega + \alpha U)^2}{c_0^2} + \alpha^2 \right] f = 0, \quad (1.14)$$

$$\beta_1^2 = \frac{(\omega + \alpha U)^4}{\omega_{ar}^2} \frac{1}{c_0^2} - \frac{(\omega + \alpha U)^2}{c_0^2} + \alpha^2 = \frac{\alpha^4 c_0^2}{\omega_{ar}^2} M_1^4 + \alpha^2 (1 - M_1^2),$$

$$M_1 = \frac{1}{c_0} \left(\frac{\omega}{\alpha} + U \right).$$

Отсюда следуют решения, которые в зависимости от значения ω или M_1 запишутся в разных формах. В случае реализации значений $M_1 < 1$ имеем $\beta_1^2 > 0$, откуда определятся интервалы изменения допустимых значений M_1 и ω

$$M_1^2 < 1 < m_2^2, \quad (\omega + \alpha U)^2 < \alpha^2 c_0^2 < \alpha^2 c_0^2 m_2^2, \quad (1.15)$$

$$m_{1,2}^2 = \frac{3}{2} \frac{\gamma P_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{1}{\alpha^2 a_0^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3} \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma P_0} \alpha^2 a_0^2} \right).$$

Возмущённый потенциал скоростей (1.13), согласно (1.14), выразится через модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого порядка

$$\varphi(x, r, t) = b_1 I_0(\beta_1 r) e^{i(\omega t + \alpha x)}, \quad b_1 = \text{const}. \quad (1.16)$$

При одновременном выполнении требований $M_1 > 1$ и $\beta_1^2 = -\beta_2^2 < 0$ будем иметь

$$1 < m_2^2 < M_1^2 < m_1^2, \quad \alpha^2 c_0^2 < \frac{\alpha^2}{c_0^2} m_2^2 < (\omega + \alpha U)^2 < \frac{\alpha^2}{c_0^2} m_1^2.$$

Тогда функция φ , согласно (1.13) и (1.14), запишется через функцию Бесселя первого рода нулевого порядка

$$\varphi(x, r, t) = b_2 J_0(\beta_2 r) e^{i(\omega t + \alpha x)}, \quad b_2 = \text{const}. \quad (1.17)$$

При выводе решений (1.16), (1.17) использовано требование ограниченности скорости течения смеси на оси симметрии $r = 0$, при этом, b_1, b_2 – постоянные интегрирования, определяющие в начальный момент времени $t = 0$ амплитуды волн в центре сечения $x = 0, r = 0$.

2. Уравнения движения оболочки. Линейные уравнения изгиба тонкостенных оболочек имеют вид [1,4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+v}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1-v^2}{Eh} \rho_* h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1+v}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{1-v^2}{E} \rho_* h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R^2} - \frac{h^2}{12R^2} \left(R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) &= \\ = \frac{1-v^2}{Eh} \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-v^2}{Eh} q. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь u, v, w – смещения точек срединной поверхности соответственно в осевом направлении, вдоль дуги кругового сечения и по нормали к поверхности, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, R и h – радиус оболочки и толщина её стенки, ρ_* – плотность материала, q – нормальное к поверхности внешнее давление. Прогиб w считается положительным вдоль нормали к центру кривизны. В дальнейшем будет исследоваться задача осесимметричных колебаний оболочки, где необходимо полагать $\partial/\partial\theta = 0$. Формулируя граничные условия, учтём, что координаты x, r, t в уравнениях (1.12) и (1.14) и их решениях (1.16), (1.17) следует отождествлять с координатами системы (2.1). Избыточное давление, действующее на стенки оболочки со стороны протекающей газожидкостной смеси, в силу (1.11), равно

$$P|_{r=R} = -\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 \right] \Phi \Big|_{r=R}.$$

Условие непроницаемости деформируемой стенки (плавности обтекания) имеет вид [1,3,4]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) w.$$

Удовлетворяя решения (1.16) и (1.17) граничным условиям, формулы для избыточного давления и потенциала скоростей можно представить в формах записи:

$$P = \rho_0 R \Phi_{\alpha 0}^* \left[1 + \frac{1}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w, \quad \Phi_{\alpha 0}^* = \Phi_{\alpha 0} \Big|_{r=R} \quad (2.2)$$

$$\Phi(x, r, t) = -R \Phi_{\alpha 0} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (2.3)$$

$$\Phi_{\alpha 0} = \begin{cases} \frac{I_0(\beta_1 r)}{\beta_1 R J'_0(\beta_1 R)} & M_1^2 < 1 < m_2^2, \quad \alpha^2 < \frac{3}{4} \frac{\gamma P_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{1}{a_0^2}, \\ \frac{J_0(\beta_2 r)}{\beta_2 R J'_0(\beta_2 R)} & 1 < m_2^2 < M_1^2 < m_1^2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь штрихи отнесены к производным функций I_0 и J_0 , выражения для β_1 , M_1 и $m_{1,2}$ приведены в (1.14), (1.15).

В качестве внешней нагрузки q системы (2.1) следует брать воздействие избыточного давления на внутреннюю поверхность оболочки, т.е. полагать $q = -P$, где P определяется через формулы (2.2)–(2.5). В соответствии с представлениями (1.16), (1.17) решения системы (2.1) будут искажаться в виде

$$(u, v, w) = (u_*, v_*, w_*) e^{i(\omega t + \alpha x)},$$

что позволяет свести её к однородным уравнениям относительно амплитуд u_*, v_*, w_* :

$$(\alpha_*^2 - \omega_*^2) u_* + i \nu \alpha_* w_* = 0, \quad \left(\frac{1-\nu}{2} \alpha_*^2 - w_*^2 \right) v_* = 0,$$

$$i\nu\alpha_*u_* - \left\{ 1 + \frac{l^2}{12}\alpha_*^4 - \omega_*^2 - (\omega_* + \alpha_*U_*)^2 \right\} \left[1 - \frac{\rho_0 c_*^2}{3\gamma P_0} \delta^2 (\omega_* + \alpha_*U_*)^2 \right] \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{1}{l} \Phi_{\alpha 0}^* \Bigg\} \times \\ \times w_* = 0.$$

Здесь в рассмотрение введены безразмерные параметры

$$\omega_* = \frac{\omega R}{c_*}, \quad \alpha_* = \alpha R, \quad U_* = \frac{U}{c_*}, \quad l = \frac{h}{R}, \quad \delta = \frac{a_0}{R}, \\ c_*^2 = \frac{E}{(1-\nu)\rho_*}, \quad \alpha_*^2 < \frac{3}{4} \frac{\gamma P_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{1}{\delta^2}, \quad (2.5)$$

где c_* – скорость звука (распространения продольных волн) в материале оболочки. Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений системы является равенство нулю её определителя, откуда следует трансцендентное уравнение

$$\left(\omega_*^2 - \alpha_*^2 \right) \left(1 + \frac{l}{12} \alpha_*^4 - \omega_*^2 \right) + \nu^2 \alpha_*^2 - \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{(\omega_*^2 - \alpha_*^2)}{l} (\omega_* + \alpha_* U_*)^2 \times \\ \times \left[1 - \delta^2 \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} (\omega_* + \alpha_* U_*)^2 \right] \Phi_{\alpha 0}^* = 0. \quad (2.6)$$

Неравенство из (2.5) указывает, что волновое число α_* не может принимать произвольные значения. Очевидно, что при колебаниях оболочки с наполнителем для каждого из параметров α_*, U_*, l, δ существует своя безразмерная частота ω_* , что в соответствии с (2.3), (2.4), вынуждает каждый из случаев исследовать отдельно.

Для иллюстрации изложенной теории проведён численный анализ уравнений, следуемых из (2.6), на примере стальной оболочки ($E = 2 \cdot 10^8$ МПа, $\rho_* = 7800$ кг/м³, $\nu = 0.3$) разных толщин ($l = 0.002$ и 0.04), наполненной с протекающей со скоростями $U_* = 0, 0.005$ или 0.01 водовоздушной смесью ($\beta_0 = 0.01$, $P_0 = 0.1$ МПа, $\rho_0 = 988$ кг/м³, $\gamma = 1.4$) с крупными $\delta = 1/50$ и мелкими $\delta = 1/1500$ пузырьками. По необходимости переход к размерным величинам проводится посредством связей (2.5).

Дозвуковое течение $M_1 < 1$. Значения реализуемых частот, в силу (1.15) лежат в интервале

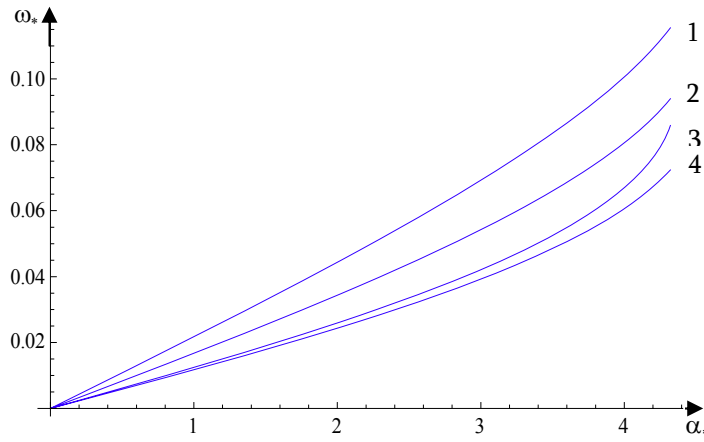
$$(\omega_* + \alpha_* U_*)^2 < \frac{c_0^2}{c_*^2} \alpha_*^2 < \frac{3}{2} \frac{\gamma P_0}{\rho_0 c_*^2} \frac{1}{\delta^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3} \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma P_0} \alpha_*^2 \delta^2} \right).$$

Дисперсионное уравнение (2.6) переписывается, согласно (2.3), в форме записи

$$\begin{aligned}
& \left(\omega_*^2 - \alpha_*^2 \right)^2 \left\{ 1 + \frac{l^2}{12} \alpha_*^4 - \omega_*^2 - \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{(\omega_* + \alpha_* U_*)^2}{l} \times \right. \\
& \left. \times \left[1 - \delta^2 \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} (\omega_* + \alpha_* U_*)^2 \right] \frac{I_0(\beta_1 R)}{I_1(\beta_1 R)} \frac{1}{\beta_1 R} \right\} + v^2 \alpha_*^2 = 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

в которой использовано соотношение $I'_0(z) = I_1(z)$, где I_1 – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка единицы.

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов, выполненных по уравнению (2.7).



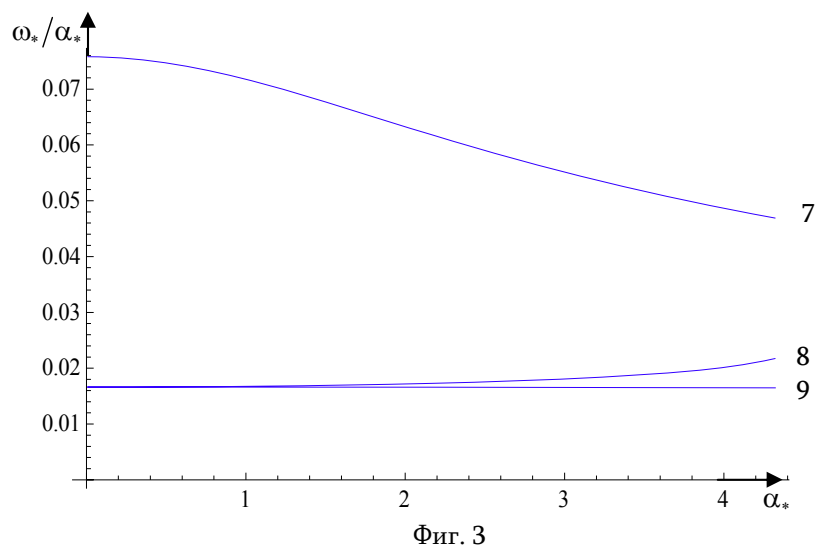
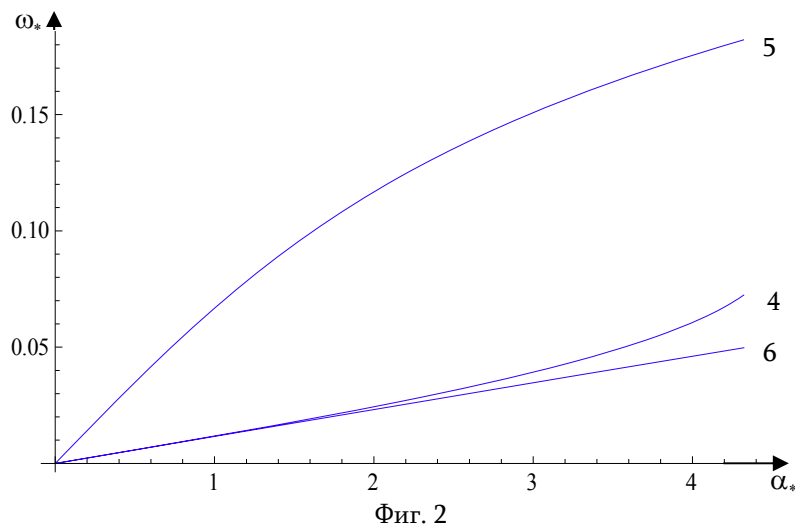
Фиг. 1

На фиг. 1 представлены кривые частот собственных колебаний бесконечно длинной оболочки со смесью воды с крупными воздушными пузырьками $\delta = 1/50$ в зависимости от безразмерного волнового числа α_* . Кривые отнесены к системам оболочка–наполнитель с параметрами: 1 – $l = 0.002$, $U_* = 0$; 2 – $l = 0.002$, $U_* = 0.005$; 3 – $l = 0.04$, $U_* = 0.01$; 4 – $l = 0.002$, $U_* = 0.01$. С ростом толщины оболочки (переход от кривой 4 к 3) и уменьшением скорости протекания (переход от 4 к кривым 2 и 1) значение частоты увеличивается. Такая же картина колебаний наблюдается в случае наличия мелких пузырьков.

На фиг. 2 приведены кривые частот колебаний оболочки, наполненной чистой водой – кривая 5 и водовоздушными смесями с крупными $\delta = 1/50$ и мелкими $\delta = 1/1500$ пузырьками – кривые 4 и 6. Выбраны параметры $l = 0.002$, $U_* = 0.01$. Для достаточно больших α_* с заменой смеси с мелкими пузырьками на смесь с крупными (переход 6 → 4) частота возрастает, при этом их значения в разы (например, для $\alpha_* = 4$ в 2.9 и 3.6 раза) уступают частотам той же оболочки, наполненной, однако, чистой водой (переход от кривых 4 и 6 к 5).

На фиг. 3 показаны кривые зависимости безразмерной фазовой скорости $c_{ph}/c_* = \omega_*/\alpha_*$ от волнового числа α_* , при этом взяты параметры $l = 0.002$, $U_* = 0.005$. С увеличением α_* фазовая скорость волны в оболочке с водой (кривая 7) уменьшается, а в случае смеси с крупными пузырьками (кривая 8) она, наоборот,

возрастает, в то время как для смеси с мелкими пузырьками фазовая скорость волны является постоянной величиной (кривая 9). Величина скорости распространения волны в воде и смесях, ограниченными оболочкой, всегда меньше скорости звука в их безграничных объемах.



Необходимо отметить, что действительно, всегда выполняется критерий $M_1 < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости М.: Наука, 1979. 320с.
2. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Параметрические колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. // Прикл. механика. 1966. Т.2. №3. С.21-26.
3. Мнев Е.Н., Перцев А.К. Гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1970. 365с.

4. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184с.
5. Кубенко В.Д., Лакиза В.Д. и др. Динамика упругогазожидкостных систем при вибрационных воздействиях. Киев: Наукова думка, 1988. 256с.
6. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Анализ нестационарных процессов в цилиндрических оболочках при взаимодействии с протекающей жидкостью. // Прикл. механика. 2010. Т.46. №10. С.36-52.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.

Сведения об авторах

Григорян Шушаник Акоповна, доцент кафедры математики и математического моделирования Российско–Армянского (Славянского) университета.

E-mail: grig-shushanik@rambler.ru

Оганян Гагик Гришаевич, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24^б, тел. (+37493) 946-947,

E-mail: oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Левонович, ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики Ереванского госуниверситета.

Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, тел.: (+37410) 575-140,

E-mail: ssahakyan@ysu.am

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 25.03.2011

УДК 539.3

**НЕКОТОРЫЕ НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
МОВСИСЯН Л.А.**

Ключевые слова: сдвигающее напряжение, изгибающий момент, устойчивость, критическое значение, параметрические колебания.

Keywords: tangential stress, bending moment, stability, critical rate, parametrical vibrations.

Մովսիսյան Լ.Ա.

Գլանային թաղանթի համար մի քանի ոչ դասական խնդիրներ

Գլանային թաղանթի համար դիտարկվում են կայունության մի քանի միաչափ խնդիրներ, երբ նախնական վիճակը բնութագրվում է միայն շոշափող լարումներով կամ ծռող մոմենտով: Գտնված են նրանց համար կրիտիկական արժեքները կամ էլ պարամետրական տատանումների պայմանները:

Movsisyan L.A.

One some non-classical problems stability of cylindrical shells.

The problems of stability for cylindrical shells, when initial states described by tangential stresses or bending moments are investigated. For them the critical values of parametrs and conditions of beginning of parametrical vibrations are obtained.

Для цилиндрической оболочки рассмотрены некоторые одномерные задачи, когда начальные состояния характеризуются сдвигающими напряжениями или изгибающими моментами. Для них получены критические значения и условия возникновения параметрических колебаний.

Классические уравнения устойчивости для оболочек выведены в предположении, что начальное напряженное состояние безмоментное и в уравнениях удерживаются только члены нелинейного происхождения от углов поворота. При рассмотрении конкретных задач даже с начально моментным состоянием обычно брались только начальные тангенциальные усилия ([1], стр.561-565).

В работе [2] выведены уравнения устойчивости цилиндрических оболочек уже с удержанием всех нелинейных, опять только связанные с углом поворота. Оказалось, что помимо традиционно тангенциальных усилий, появляются также новые члены от начальных перерезывающих усилий. При рассмотрении конкретных примеров существенное влияние начального перерезывающего усилия наблюдалось только в одном случае [2,3].

В работе [4] получены уравнения устойчивости пластин, следуя [5], удерживая нелинейные члены как от углов поворота, так и от удлинений и сдвигов. Такие уравнения позволяют рассмотреть задачи, начальные напряжённые состояния которых характеризуются только перерезывающими усилиями или моментами, как например, [6].

Ниже приводится ряд задач, для которых начальные напряжённые состояния характеризуются только перерезывающими усилиями или изгибающим моментом. В этом и заключается название настоящей статьи. Эти задачи в некотором смысле имеют эталонный характер. Для каждого примера приводятся соответствующие уравнения. Общие уравнения (двумерные приводятся в конце статьи), заметим только, что они не позволяют метода разделения переменных. Как в [4], так и здесь, автор не претендует на создателя новой теории устойчивости тонких деформируемых систем.

В [7] получены общие уравнения устойчивости оболочек, однако, рассмотренные здесь задачи из полученных там уравнений не поддаются исследованию.

1. Имеется бесконечно длинная цилиндрическая оболочка (или круговое кольцо), на внешней и внутренней поверхностях которой действуют круговые сдвигающие напряжения интенсивности S в противоположных направлениях. Единственным начальным кинетическим воздействием будет перерезывающее усилие $N_2^0 = Sh$.

Уравнения устойчивости в этом случае будут^{*)}

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta}(T_2 - N_2^0 \omega_1) + \frac{1}{R} \left(\frac{dM_2}{d\beta} - N_2^0 \varepsilon_2 \right) &= 0, \\ \frac{d}{d\beta} \left(\frac{dM_2}{d\beta} - N_2^0 \varepsilon_2 \right) - \frac{1}{R} (T_2 - N_2^0 \omega_1) &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \varepsilon_2, \quad M_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 w}{d\beta^2}, \\ \omega_1 &= \frac{dw}{d\beta}, \quad \varepsilon_2 = \frac{d\nu}{d\beta} + \frac{\nu}{R}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1), решение полученной системы относительно перемещений будем искать в виде

$$\begin{aligned} w &= f_n^{(1)} \cos \frac{n\beta}{R} + f_n^{(2)} \sin \frac{n\beta}{R}, \\ \nu &= \varphi_n^{(1)} \cos \frac{n\beta}{R} + \varphi_n^{(2)} \sin \frac{n\beta}{R}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда минимальное значение S , при котором происходит потеря устойчивости, получается при $n = 1$, и это значение есть

^{*)} Обозначения общепринятые. Если принимать, что на внешней и внутренней поверхностях цилиндра действуют соответственно усилия S_2 и S_1 , то условие равновесия (хотя это необязательно) будет $S_2(1 + h/R) = S_1(1 - h/R)$ или $S_2 \approx S_1(1 - h/2R)$. Как известно, точность классической теории оболочек такова: $1 \pm h/R \approx 1$. Таким образом, принимая $S_1 = S_2 = S$, находимся в пределах точности этой теории.

$$|S_{\text{кр}}| = \frac{Eh}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)R}. \quad (1.4)$$

Следует отметить, что формула (1.4) очень похожа на формулу для критического значения цилиндра при осевом сжатии $P_{\text{кр}} = \frac{Eh}{\sqrt{3}(1-\nu^2)R}$.

В этой и последующих задачах для критических параметров выражение получается в квадратах. Это естественно, так как при изменении направления внешних воздействий получится то же значение, но с обратным знаком.

2. Имеется цилиндрическая оболочка конечной длины l . Сдвигающие напряжения интенсивностью S действуют в противоположных направлениях на внешней и внутренней поверхностях оболочки вдоль образующих цилиндра. Единственная начальная кинетическая величина – перерезывающее усилие

$$N_1^0 = Sh.$$

Уравнения устойчивости в перемещениях будут

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \nu \frac{w}{R} \right) - S \frac{d^2 w}{dx^2} &= 0, \\ D \frac{d^4 w}{dx^4} + Sh \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{R} \left(\nu \frac{du}{dx} + \frac{w}{R} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Система (2.1) при условии, что на концах отсутствуют продольные усилия, сводится к

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{S^2 h (1-\nu^2)}{E} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} w = 0. \quad (2.2)$$

По виду, уравнение (2.2) похоже на случай с осевым сжатием.

Изучим два случая:

1) на концах заданы условия –

$$w = w'' = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad x = l.$$

Если искать решение (2.2) в виде

$$w = f \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (2.3)$$

то для критического значения S получим:

$$|S_{\text{кр}}^0| = E \sqrt[4]{\frac{h^2}{3R^2(1-\nu^2)^3}}, \quad (2.4)$$

при этом, количество полуволн будет

$$n = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}. \quad (2.5)$$

критическое напряжение для стержня есть

$$|S_{\text{кр}}^0| = E \frac{\pi h}{2l} \sqrt{\frac{1}{3}}. \quad (2.6)$$

Интересен ещё случай, когда помимо сдвигающих усилий действует ещё осевое сжатие с интенсивностью p . Тогда комбинация общих воздействий, при которой происходит потеря устойчивости, определится формулой

$$S^2 h + \frac{pE}{1-\nu^2} = E \frac{h^3}{R^2} \sqrt{\frac{1}{3(1-\nu^2)}}. \quad (2.7)$$

2) Если края оболочки заделаны:

$$w = w' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l, \quad (2.8)$$

решение уравнения (2.2)

$$w = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x + C_3 \cos k_2 x + C_4 \sin k_2 x,$$

удовлетворяя условиям (2.6), для определения критического значения S получаем

$$\delta^2 \sin k_1 l \sin k_2 l + \cos k_1 l \cos k_2 l = 1. \quad (2.9)$$

Здесь

$$k_1 = A^{1/2} \delta \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^4}} \right)^{1/2}, \quad k_2 = A^{1/2} \delta \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^4}} \right)^{1/2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{hR}, \quad \delta = \frac{S}{S_{кр}^0} > 1, \quad (2.10)$$

т.е. $\delta_{кр}$ есть отношение критического значения для S данной задачи к $S_{кр}^0$ из (2.4).

В табл.1 приведены критические значения $\delta_{кр}$ в зависимости от величины

$$\alpha = 1.285 \frac{l}{R} \sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (2.11)$$

Таблица 1

$\delta_{кр}$	1.005	1.01	1.02	1.05	1.06	1.1	1.2	1.5	1.7
α	139.9	31.29	21.94	13.12	12.42	9.335	6.204	3.268	2.749

3. Задачи устойчивости, когда начальные напряжённые состояния обусловлены поверхностными сдвигами, можно рассматривать как в случае, когда они не зависят от времени, так и в обратном случае, в частности, если они периодические функции от времени. В задаче с начально-моментным случаем статический вариант неприемлем. Поэтому такие задачи следует рассматривать только при периодических воздействиях. Для сравнения двух типов задач рассмотрим две задачи динамической устойчивости стержня, когда поверхностный сдвиг или изгибающий момент – периодическая функция времени.

В первом случае, если $S = S_0 + S_1 \cos \theta t$, уравнения движения возмущённого состояния будут

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (S_0 + S_1 \cos \theta t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + F (S_0 + S_1 \cos \theta t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3.1)$$

Статическая устойчивость ($S_1 = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$) имеется в [6].

Система (3.1) допускает разделение переменных при условиях

$$u = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = l, \quad (3.2)$$

поэтому её решение ищем в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_n(t) \sin \lambda_m x, \quad u = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l}. \quad (3.3)$$

Полученная при этом система относительно f_n и φ_n (в дальнейшем индексы можно опускать) выглядит как

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \omega^2 \varphi - \frac{\lambda^2}{\rho} (S_0 + S_1 \cos \theta t) f &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \Omega^2 f - \frac{\lambda^2}{\rho} (S_0 + S_1 \cos \theta t) \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Здесь $\omega_m^2 = a^2 \lambda_m^2$, $\Omega_m^2 = a^2 \frac{J}{F} \lambda_m^4$, $a^2 = \frac{E}{\rho}$ – соответственно собственные частоты для продольных и изгибных колебаний стержня.

Для определения главных областей устойчивости (здесь две области в отличие от задачи при продольной периодической силе) поступим обычным образом [9]

$$f_1 = C_1 \cos \frac{\theta t}{2} + C_2 \sin \frac{\theta t}{2}, \quad \varphi_1 = D_1 \cos \frac{\theta t}{2} + D_2 \sin \frac{\theta t}{2}. \quad (3.5)$$

В окончательном виде для них получим

$$\theta^2 = 2 \left[\omega_1^2 + \Omega_1^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \Omega_1^2)^2 + \frac{4\lambda_1^2}{\rho} \left(S_0 \pm \frac{S_1}{2} \right)^2} \right]. \quad (3.6)$$

Как и следовало ожидать, имеются две области неустойчивости: одна соответствует изгибным колебаниям (знак плюс перед радикалом, а другая – продольным движениям).

Вторая задача для стержня такая – устойчивость стержня, подвергающаяся чистому изгибу, при этом, моменты, действующие на концах, – периодические функции времени – $M^0 = P \cos \theta t$.

Уравнения устойчивости в этом случае будут:

$$\begin{aligned} EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - M^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - M^0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= -\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Система допускает разделение переменных, когда для продольного составляющего условия такие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l. \quad (3.8)$$

Тогда перемещения ищутся в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_n(t) \sin \lambda_m x, \quad u = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_n(t) \cos \lambda_m x. \quad (3.9)$$

Система, аналогичная (3.4), будет такого же вида, только вместо $\frac{\lambda^2 S_i}{\rho}$ будут $\frac{P\lambda^3}{\rho F}$ и

$S_0 = 0$. Следовательно, ветви главных параметрических резонансов определяются по (3.6) только с учётом вышеприведённых разниц в параметрах.

Следующая задача аналогична предыдущей, только она для кривого стержня – круговой арки. Уравнения устойчивости в данном случае такие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(T_2 - M^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) + \frac{1}{R} N_2 &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_2}{\partial \beta} - \frac{1}{R} T_2 &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (M_2 + M^0 \varepsilon_2) &= N_2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Считается, что краевые условия – типа свободного опирания. Если в (3.10) перейти к перемещениям и искать решение в виде (3.9) (вместо u брать v), то система относительно t будет

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{a^2 dt^2} &= a_{11} \varphi + a_{12} f, \\ \frac{d^2 f}{a^2 dt^2} &= a_{21} \varphi + a_{22} f. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= - \left(1 + \frac{M^0}{RC} \right) \lambda^2, \quad a_{12} = \lambda \left[\frac{1}{R} + \frac{M^0}{C} \left(\frac{1}{R^2} + \lambda^2 \right) \right], \\ a_{21} &= \lambda \left(\frac{1}{R} + \frac{M^0}{C} \lambda^2 \right), \quad a_{22} = - \left[\frac{1}{R^2} + \frac{h^2}{12} \lambda^4 - \frac{M^0}{RC} \lambda^2 \right], \\ C &= Eh, \quad M^0 = P \cos \theta t, \quad \lambda = \frac{n\pi}{\beta_0}. \end{aligned}$$

Границы главных областей неустойчивости находятся обычным образом [9] и они определяются

$$\begin{aligned} \left(\frac{\theta}{2a} \right)^2 &= Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 - Q_2}, \quad Q_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R^2} + \lambda^2 + \frac{h^2}{12} \lambda^4 \pm \frac{P}{2RC} \lambda^2 \right), \\ Q_2 &= \lambda^4 \left[\frac{h^2}{12} \lambda^2 \mp \frac{P}{2RC} \pm \left(\frac{P}{2RC} \right)^2 (2 + R^2 \lambda^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Нужно заметить, что две области имеются, начиная от частот свободных колебаний ($P = 0$), преимущественно «окружных» и «изгибных».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приводятся общие уравнения устойчивости для цилиндрических оболочек (без учёта начального состояния). Они получены из общих уравнений нелинейной теории упругости по [5] (стр.60-81; 88-90). В основу положена классическая теория оболочек. При линеаризации уравнений возмущённого состояния, как принято, оставлены члены силового происхождения от начального состояния. Обозначения общепринятые:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \chi} [T_1 + T_1^0 \varepsilon_1 + T_{12}^0 \omega + N_1^0 \omega_2 + M_1^0 \chi_1 + M_{12}^0 \tau] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \beta} [T_{21} + T_{21}^0 \varepsilon_1 + T_2^0 \omega + N_2^0 \omega_2 + M_{12}^0 \chi_1 + M_2^0 \tau] = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} [T_{12} + T_{12}^0 \varepsilon_2 + T_1^0 \omega - N_1^0 \omega_1 + M_{12}^0 \chi_2 + M_1^0 \tau] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \beta} [T_2 + T_2^0 \varepsilon_2 + T_{12}^0 \omega - N_2^0 \omega_1 + M_2^0 \chi_2 + M_{12}^0 \tau] + \\
 & + \frac{1}{R} (N_2 - T_{12}^0 \omega_2 + T_2^0 \omega_1) = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} [N_1 + T_{12}^0 \omega_1 - T_1^0 \omega_2] + \frac{\partial}{\partial \beta} [N_2 - T_{12}^0 \omega_2 + T_2^0 \omega_1] - \\
 & - \frac{1}{R} [T_2 + T_2^0 \varepsilon_2 + T_{12}^0 \omega - N_2^0 \omega_1] = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} [M_1 + M_1^0 \varepsilon_1 + M_{12}^0 \omega] + \frac{\partial}{\partial \beta} [M_{12} + M_{12}^0 \varepsilon_1 + M_2^0 \omega] - \\
 & - N_1 - N_1^0 \varepsilon_1 - N_2^0 \omega = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} [M_1^0 \omega + M_{12} + M_{12}^0 \varepsilon_2] + \frac{\partial}{\partial \beta} [M_2 + M_2^0 \varepsilon_2^0 + M_{12}^0 \omega] - \\
 & - N_1^0 \omega - N_2 - N_2^0 \varepsilon_2 = 0, \\
 & \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R}, \quad \omega = \frac{1}{2} \left(3 \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \\
 & \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \\
 & \omega_1 = \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{2} \frac{v}{R}, \quad \omega_2 = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}.
 \end{aligned}$$

В [10] получены общие уравнения устойчивости оболочек, в частности, и для цилиндрической оболочки (формулы (2.1)–(2.7), стр.72-73). Однако есть некоторые отличия между вышеприведёнными и [10]. Например, в предлагаемом варианте в первом уравнении в первой скобке T_1^0 фигурирует в виде $T_1^0 \varepsilon_1$, в то время как в [10] – $T_1^0 \varepsilon_2$. Надо заметить, что и в [5] (как отмечалось, приведённые здесь уравнения получены, именно следуя [5]) аналогичный член для пластинки имеет вид,

как и здесь – $\sigma_{xx}^0 e'_{xx}$ (с.155, формула (V-13)). Из выражения $\overline{\alpha_1 \alpha_2} = (1 + e_{11}) \sigma_{11}^* + \dots$ (с.90, формула (II-58)) получится $T_1 + T_1^0 \varepsilon_1 + \dots$. Члены от перерезывающих усилий фигурируют одинаковым образом. В то же время, в [10] отсутствуют члены от начальных моментов. Ведь в последних двух рассмотренных задачах начальное состояние характеризуется именно только изгибающим моментом. Как отмечено в начале статьи, полученные здесь уравнения послужили лишь одной цели – рассмотрение приведённых конкретных задач и не для противопоставления к существующим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: ГИФМА, 1963. 879с.
2. Мовсисян Л.А. Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. // Докл.АН Арм.ССР. 1971. Т.52. №2. С.70-75.
3. Мовсисян Л.А. К устойчивости цилиндрической круговой панели. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1984. Т.37. №1. С.16–22.
4. Мовсисян Л.А., Пештмалджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1973. Т.26. №6. С.18-28.
5. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.–М.: ОГИЗ, 1948. 218 с.
6. Флеминг, Герман, Муни. Потеря устойчивости конструктивных элементов под действием поверхностных усилий сдвига. //Прикладная механика. (пер: с английского. Тр.Американского общества инженеров-механиков).1965. №1. С.225-229.
7. Даревский В.М. Нелинейные уравнения теории оболочек и их линеаризация в задачах устойчивости. //Тр.VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966. С.355-369.
8. Мовсисян Л.А. К динамической устойчивости пластин с начальным моментным состоянием. //Проблемы механики тонких деформируемых тел. (посв.80-летию академика НАН Армении С.А.Амбарцумяна). Ереван: 2002. С.224-233.
9. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
10. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б

Поступила в редакцию 11.03.2010

УДК 539.3

**ВЗАИМНЫЕ ТРАНСФОРМАЦИИ МАГНИТОУПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ
ВОЛН РАЗНЫХ ПОЛЯРИЗАЦИЙ
БЕЛУБЕКЯН М.В., ГЕВОРКЯН А.В., КАЗАРЯН К.Б.**

Ключевые слова: трансформация, «вакуумный слой», поляризация, волны.
Key words: transformation, «vacuum layer», polarization, waves.

Բելուբեկյան Մ.Վ., Գևորգյան Ա.Վ., Հազարյան Կ.Բ.

Տարաբևեռացած մագնիսաառաձգական մակերևութային ալիքների փոխադարձ փոխակերպումները

Հետազոտված է մագնիսաառաձգական մակերևութային հորիզոնական և ուղղահայաց բևեռացված ալիքների տարածման հարցը «վակուումային շերտով» զատած վերջավոր հաղորդիչ կիսատարածություններում՝ բաժանման եզրին զուգահեռ արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությամբ:

Ցույց է տրված, որ կիսատարածություններից մեկում հորիզոնական բևեռացված մագնիսաառաձգական մակերևութային ալիքների տարածումը «վակուումային շերտի» միջոցով մյուս կիսատարածությունում կարող է ի հայտ բերել մագնիսաառաձգական մակերևութային ուղղահայաց բևեռացված ալիքների տարածում և ընդհակառակը:

Belubekyan M.V., Gevorgyan A.V., Ghazaryan K.B.

Mutual transformations of magnetoelastic surface waves of different polarizations

The problem of the magnetoelastic surface horizontal and vertically polarized waves in a finitely conducting half-spaces separated by a «vacuum layer» with the presence of a constant external magnetic field parallel to the interface has been studied.

The implementation of mutual transformations of magnetoelastic surface waves of different polarization by a «vacuum layer» has been shown.

Исследуется вопрос распространения магнитоупругих поверхностных сдвиговых и вертикально поляризованных волн в конечнопроводящих полупространствах, отделенных «вакуумным слоем», при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе раздела.

Показано, что посредством «вакуумного слоя» осуществляются взаимные трансформации магнитоупругих поверхностных волн разных поляризаций.

Исследуется вопрос распространения магнитоупругих поверхностных сдвиговых и вертикально поляризованных волн в конечнопроводящих полупространствах, отделенных «вакуумным слоем», при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе раздела.

Пусть упругие конечнопроводящие полупространства отнесены к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$: ось x_1 направлена вдоль границы, ось x_2 – вглубь одного из полупространств. Начальное магнитное поле $\vec{H}_0(H_0, 0, 0)$ направлено по оси x_1 .

Исходя из характера поставленной задачи, не нарушая общности, можно считать, что материалы полупространств являются одинаковыми.

Магнитная проницаемость материала полупространства принимается равной единице.

Учитывая, что в антиплоской деформации поле смещений и характеристики индуцированного электромагнитного поля в области $x_2 > 0$ имеют вид

$\vec{u} \equiv [0, 0, u_3(x_1, x_2, t)]$, $\vec{h} \equiv [0, 0, h_3(x_1, x_2, t)]$, $\vec{e} \equiv [e_1(x_1, x_2, t), e_2(x_1, x_2, t), 0]$,
из системы линеаризованных уравнений магнитоупругости, описывающей поведение электромагнитного поля и движение упругой проводящей среды, при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости, получим следующую систему уравнений [1-3]

$$\begin{aligned} c_2^2 \nabla^2 u_3 + \frac{H_0}{4\pi\rho} \partial_1 h_3 &= \partial_t^2 u_3 \\ \nabla^2 h_3 - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \partial_t h_3 &= -\frac{4\pi\sigma}{c^2} H_0 \partial_1 \partial_t u_3, \quad x_2 > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где $c_2^2 = G/\rho$ – квадрат скорости поперечных волн среды, G – модуль сдвига, ρ – плотность материала полупространства, σ – удельная электропроводимость, c – электродинамическая постоянная.

Для «вакуумного слоя» в области $-h < x_2 < 0$ имеем уравнения Максвелла и вытекающее из них волновое уравнение

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{h}^* &= c^{-1} \partial_t \vec{e}^*, \text{rot} \vec{e}^* = c^{-1} \partial_t \vec{h}^*, \text{div} \vec{h}^* = 0, \nabla^2 \vec{h}^* = c^{-2} \partial_t^2 \vec{h}^*, \\ \vec{h}^* &\equiv [h_1^*(x_1, x_2, t), h_2^*(x_1, x_2, t), h_3^*(x_1, x_2, t)] \\ \vec{e}^* &\equiv [e_1^*(x_1, x_2, t), e_2^*(x_1, x_2, t), e_3^*(x_1, x_2, t)] \end{aligned} \quad (2)$$

В области $x_2 < -h$ в случае плоской деформации поле смещений и характеристики индуцированного электромагнитного поля имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{u} &\equiv [u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0], \quad \vec{h} \equiv [h_1(x_1, x_2, t), h_2(x_1, x_2, t), 0], \\ \vec{e} &\equiv [0, 0, e_3(x_1, x_2, t)] \end{aligned}$$

Из системы линеаризованных уравнений магнитоупругости, при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} c_1^2 \partial_1^2 u_1 + c_2^2 \partial_2^2 u_1 + (c_1^2 - c_2^2) \partial_1 \partial_2 u_2 &= \partial_t^2 u_1 \\ c_2^2 \partial_1^2 u_2 + c_1^2 \partial_2^2 u_2 + (c_1^2 - c_2^2) \partial_1 \partial_2 u_1 + \frac{H_0}{4\pi\rho} \partial_1 h_2 - \frac{H_0}{4\pi\rho} \partial_2 h_1 &= \partial_t^2 u_2 \\ Dh_1 &= 4\pi\sigma c^{-2} H_0 \partial_2 \partial_t u_2 \\ Dh_2 &= -4\pi\sigma c^{-2} H_0 \partial_1 \partial_t u_2 \\ D &\equiv \nabla^2 - 4\pi\sigma c^{-2} \partial_t, \quad \partial_m \equiv \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad x_2 < -h \quad (3)$$

$\nabla^2 \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2$, $c_1^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}$ – квадрат скорости продольных волн среды.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\partial_2 u_3 = 0, \quad h_3 = h_3^*, \quad e_1 = e_1^*, \quad x_2 = 0 \quad (4)$$

$$\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 = 0, \quad \partial_2 u_2 + (1 - 2\theta_*) \partial_1 u_1 = 0, \quad \theta_* = c_2^2 \cdot c_1^{-2} < 1$$

$$h_1 = h_1^*, \quad h_2 = h_2^*, \quad e_3 = e_3^*, \quad x_2 = -h. \quad (5)$$

Теперь решения уравнения (2) для «вакуумного слоя» построим так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

$$h_1^* = h_2^* = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{и} \quad h_3^* = 0, \quad x_2 = -h. \quad (6)$$

Решения уравнения (2) запишем в виде

$$h_r^* = (A_r^* e^{kv_* x_2} + B_r^* e^{-kv_* x_2}) e^{i(kx_1 - \omega t)},$$

$$v_* = \sqrt{1 + c_2^2 \cdot c^{-2} z^2} \approx 1, \quad z = \frac{i\omega}{kc_2}, \quad r = 1, 2, 3.$$

Удовлетворяя условиям (6), получим

$$h_1^* = A^* \cdot \text{sh}(kv_* x_2) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (7)$$

$$h_2^* = B^* \cdot \text{sh}(kv_* x_2) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad -h < x_2 < 0 \quad (8)$$

$$h_3^* = C^* \cdot \text{sh}(kv_*(x_2 + h)) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (9)$$

В работе [4] показано, что в конечнотупроводящем полупространстве могут распространяться магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны, а в случае внешнего постоянного магнитного поля, перпендикулярного к границе конечнотупроводящего полупространства, такие волны отсутствуют [5].

В [4] решения системы (1) записаны в виде

$$u_3 = (B_+ \cdot e^{-k\lambda_+ x_2} + B_- \cdot e^{-k\lambda_- x_2}) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (10)$$

$$h_3 = \left(\frac{ik\alpha z H_0}{\lambda_+^2 + \alpha z - 1} B_+ e^{-k\lambda_+ x_2} + \frac{ik\alpha z H_0}{\lambda_-^2 + \alpha z - 1} B_- e^{-k\lambda_- x_2} \right) e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (11)$$

$$\lambda_{\pm} = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \alpha \cdot z + \frac{1}{2} z^2 \pm \left[\frac{1}{4} z^2 (z + \alpha)^2 + \alpha s z \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$\text{Re} \lambda_{\pm} > 0, \quad z = \frac{i\omega}{kc_2}, \quad \alpha = \frac{4\pi\sigma c_2}{kc^2}, \quad v_2^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}, \quad s = \frac{v_2^2}{c_2^2}.$$

Подставляя выражения (9)-(11) в граничные условия (4), получим систему алгебраических однородных линейных уравнений для произвольных постоянных и из условия совместности этой системы получим дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- \left[1 - v_*^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot z \cdot \text{th}(kv_* h) (\lambda_+ + \lambda_-) c_2^2 \cdot c^{-2} \right] + z^2 + 1 = 0. \quad (12)$$

Принимая во внимание, что

$$\left| 1 - v_*^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot z \cdot \text{th}(kv_* h) (\lambda_+ + \lambda_-) c_2^2 \cdot c^{-2} \right| \approx 1, \quad v_* \approx 1, \quad \text{th}(kh) < 1,$$

уравнение (12) переходит в уравнение

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- = -1 - z^2, \quad (13)$$

которое, в свою очередь, сводится к кубическому уравнению [4]

$$z^3 + \alpha \cdot z^2 + z + \alpha(1 + s) = 0 \quad (14)$$

Алгебраическое уравнение (14) имеет одно действительное отрицательное решение, не соответствующее условиям задачи, и комплексно сопряженное решение с положительной действительной частью.

$$z_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\sqrt{Q} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{Q} - \frac{q}{2}} \right) - \frac{\alpha}{3} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{\sqrt{Q} + \frac{q}{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{Q} - \frac{q}{2}} \right), \quad (15)$$

$$Q = \frac{q^2}{4} + \frac{P^3}{27} = \frac{1+s}{27} \alpha^4 + \left(\frac{s^2}{4} + \frac{s}{3} + \frac{2}{27} \right) \alpha^2 + \frac{1}{27} > 0,$$

$$p = 1 - \frac{\alpha^2}{3}, \quad q = \frac{2}{27} \alpha^3 + \left(\frac{2}{3} + s \right) \alpha > 0.$$

Предположим, что искомая волна распространяется по положительному направлению оси x_1 , то есть в формуле (15) берется знак плюс. Тогда выражение смещения (10) запишется в виде:

$$u_3 = B_+ e^{-k \operatorname{Re} \lambda_+ x_2} \cdot e^{ik(x_1 - \operatorname{Im} \lambda_+ x_2 - \operatorname{Im} z_0 c_2 t)} \cdot e^{-kc_2 \operatorname{Re} z_0 t} + \\ + B_- e^{-k \operatorname{Re} \lambda_- x_2} \cdot e^{ik(x_1 - \operatorname{Im} \lambda_- x_2 - \operatorname{Im} z_0 c_2 t)} \cdot e^{-kc_2 \operatorname{Re} z_0 t} \quad (16)$$

Таким образом, в области $x_2 > 0$ в конечнотупроводящем полупространстве распространяются затухающие магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны с волновыми векторами $\vec{k}_\pm(k, -k \operatorname{Im} \lambda_\pm, 0)$ с соответствующими фазовыми скоростями

$$v_\pm = \frac{\operatorname{Im} z_0}{\sqrt{1 + (\operatorname{Im} \lambda_\pm)^2}} \cdot c_2, \quad (17)$$

а вдоль границы распространяется поверхностная затухающая волна с фазовой скоростью

$$v_p = \operatorname{Im} z_0 \cdot c_2. \quad (18)$$

В области $x_2 < -h$ решения системы будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \cdot e^{k\lambda x_2} \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (3), приходим в конечном итоге к характеристическому уравнению в следующем виде:

$$\eta^3 + a\eta^2 + b\eta + c_0 = 0, \quad \lambda^2 = \eta, \quad (20)$$

$$a = -\left[(1 + \theta_*) z^2 - \alpha (1 - \theta_* s) z + 3 \right],$$

$$b = (z^2 + 1)(\theta_* z^2 + 1) + (1 - \alpha z)((1 + \theta_*) z^2 + 2) + \alpha s(1 + \theta_* + \theta_*^{-1}) z,$$

$$c_0 = (\theta_* z^2 + 1)((\alpha z - 1)(z^2 + 1) - \alpha s z).$$

Корни уравнения (20) будут

$$\begin{aligned}\lambda_3^2 &= \eta_3 = I_1 + I_2 - \frac{a}{3}, \\ \lambda_{1,2}^2 &= \eta_{1,2} = -\frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{a}{3} \pm \frac{I_1 - I_2}{2} \cdot i\sqrt{3}, \\ I_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad I_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad p = b - \frac{a^2}{3}, \\ q &= 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c_0, \quad Q = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.\end{aligned}$$

Так как рассматриваются поверхностные волны, то из корней уравнения (20) выберем только те, которым соответствует уменьшение амплитуд волны с глубиной. Тогда решения системы (3) запишутся в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r \cdot e^{k\lambda_r x_r} \\ B_r \cdot e^{k\lambda_r x_r} \\ C_r \cdot e^{k\lambda_r x_r} \\ D_r \cdot e^{k\lambda_r x_r} \end{pmatrix} \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad r = 1, 2, 3 \quad (21)$$

(суммировать по r)

$$\operatorname{Re}(\lambda_r) > 0$$

$$\begin{aligned}B_m &= -\frac{\lambda_m^2 - z^2 - \theta_*^{-1}}{i(\theta_*^{-1} - 1)\lambda_m} A_m, \quad D_m = \frac{-k\alpha z_0 H_0}{\theta_*^{-1} - 1} \cdot \frac{\lambda_m^2 - z^2 - \theta_*^{-1}}{\lambda_m(\lambda_m^2 + \alpha z - 1)} A_m \\ C_m &= i\lambda_m \cdot D_m = \frac{-ik\alpha z H_0}{\theta_*^{-1} - 1} \cdot \frac{\lambda_m^2 - z^2 - \theta_*^{-1}}{\lambda_m^2 + \alpha z - 1} A_m, \quad m = 1, 2, 3\end{aligned}$$

Подставляя выражения (21) в граничные условия (5), получим систему алгебраических однородных линейных уравнений для произвольных постоянных и из условия совместности этой системы получим дисперсионное уравнение в виде:

$$\begin{aligned}&(\operatorname{th}(kh) + \lambda_1)g_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + (\operatorname{th}(kh) + \lambda_2)g_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \\ &+ (\operatorname{th}(kh) + \lambda_3)g_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0,\end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}\beta_m &= \frac{(\theta_*^{-1} - 2)\lambda_m^2 + z^2 + \theta_*^{-1}}{\lambda_m}, \quad g_m = \frac{\lambda_m^2 - z^2 - \theta_*^{-1}}{\lambda_m(\lambda_m^2 + \alpha z - 1)}, \\ \gamma_m &= \lambda_m^2 - z^2 - 3 + 2\theta_*\end{aligned} \quad (23)$$

При $kh \rightarrow 0$ из (12) получим дисперсионное уравнение задачи распространения магнитоупругих поверхностных сдвиговых волн в конечнопроводящем полупространстве с граничными условиями

$$\sigma_{23} = 0, \quad h_3 = 0, \quad x_2 = 0 \quad (24)$$

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- = -1 - z^2, \quad (25)$$

а из (22) будем иметь дисперсионное уравнение задачи распространения магнитоупругих поверхностных вертикально поляризованных волн в конечнопроводящем полупространстве с граничными условиями

$$\sigma_{21} = \sigma_{22} = 0, \quad h_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad (26)$$

$$\lambda_1 g_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \lambda_2 g_2 (\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) + \lambda_3 g_3 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) = 0. \quad (27)$$

При больших $kh \gg 1$ из (12) имеем дисперсионное уравнение, полученное в [4], а соотношение (22) сводится к дисперсионному уравнению задачи распространения магнитоупругих поверхностных вертикально поляризованных волн в конечнопроводящем полупространстве

$$(1 + \lambda_1) g_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + (1 + \lambda_2) g_2 (\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) + (1 + \lambda_3) g_3 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) = 0. \quad (28)$$

При отсутствии внешнего магнитного поля, то есть $s = 0$, тогда $\eta_1 = \lambda_1^2 = 1 + z^2$, $\eta_2 = \lambda_2^2 = 1 + \theta_* z^2$, $\eta_3 = \lambda_3^2 = 1 - \alpha z$ являются корнями уравнения (20). В этом случае дисперсионное уравнение (22) переходит в уравнение

$$\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2 = 0 \quad (29)$$

$$\beta_1 = \theta_*^{-1} (1 - \theta_*) \lambda_1^{-1} (z^2 + 2), \quad \beta_2 = 2\theta_*^{-1} (1 - \theta_*) \lambda_2^{-1} (1 + \theta_* z^2),$$

$$\gamma_1 = -2(1 - \theta_*), \quad \gamma_2 = -(1 - \theta_*) (z^2 + 2).$$

После простых преобразований приходим к известному дисперсионному уравнению Рэлея

$$(2 - \eta_R)^2 = 4 \cdot \sqrt{1 - \eta_R} \cdot \sqrt{1 - \theta_* \eta_R}, \quad \eta_R = v_R^2 \cdot c_2^{-2} < 1. \quad (30)$$

Таким образом, результаты решения рассматриваемой задачи показывают: магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны посредством «вакуумного слоя» могут порождать распространение магнитоупругих поверхностных вертикально поляризованных волн в конечнопроводящем полупространстве $x_2 < -h$ и наоборот, т.е. фактически посредством «вакуумного слоя» осуществляются взаимные трансформации магнитоупругих поверхностных волн разных поляризаций.

Электромагнитные возмущения (7) – (9) в области $-h < x_2 < 0$ выявляют одновременное распространение магнитоупругих поверхностных волн разных поляризаций в конечнопроводящих полупространствах, отделенных «вакуумным слоем».

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В.В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 864 с.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1983. 521 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 616 с.
4. Геворкян А.В. Магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны в конечнопроводящем полупространстве. // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. № 1-2. С.44-52.
5. Белубекян М.В., Геворкян А.В. Магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны в конечнопроводящей среде. // Докл. НАН Армении. 1995. Т. 95. № 2. С.86-88.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – Профессор, кандидат физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б
Тел.: (+37410)52-15-03; E-mail: mbelubekyan@sci.am

Геворкян Артак Варазатович – Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (+37477)02-88-89, E-mail: AGevorgyanV@gmail.com

Казарян Карен Багратович – Доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (+37455)22-73-95, E-mail: ghkarren@gmail.com

Поступила в редакцию 11.03.2011

УДК 539.3

**МАГНИТНОЕ СОСТОЯНИЕ ФЕРРОМАГНИТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА
ПРИ ВНЕШНЕМ ЛИНЕЙНОМ ВОЗМУЩЕНИИ МАГНИТНОГО
ПОТЕНЦИАЛА**

ДАНОЯН Յ.Ն., АТОЯН Л.Ա., ДАНОЯН Н.З.

Ключевые слова: ферромагнетик, вектор намагничивания, магнитостатический потенциал, спиновые (магнитные) волны.

Key words: ferromagnetic, vector of magnetization, magnetostatic potential, spin (magnetic) waves.

Դանոյան Յ.Ն., Աթոյան Լ.Ա., Դանոյան Ն.Զ.

**Ֆերոմագնիսական կիսատարածության մագնիսական վիճակը մագնիսական պոտենցիալի
արտաքին զծային խտորման դեպքում**

Դիտարկվում է ֆերոմագնիսական կիսատարածության-վակուում կառուցվածքի մագնիսական վիճակը բնութագրող ֆունկցիաների որոշման խնդիրը, երբ կատարվում է մագնիսոստատիկ դաշտի պոտենցիալի զծային խտորում:

Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Danoyan N.Z.

**Magnetic constituency of ferromagnetic half-space under external linear perturbation of magneto-
static potential**

Magnetoelastic constitutive functions definition is considered for a structure ferromagnetic half-space-vacuum under linear surface perturbation of magnetic potential.

Рассматривается задача определения функций, характеризующих магнитное состояние структуры-ферромагнитное полупространство-вакуум, при линейном поверхностном возмущении магнитного потенциала поля.

Исследование спиновых (магнитных) и упруго-спиновых волн в ферромагнитных средах [1,2,3,4,5] привлекает всё большее внимание в связи с возрастающим интересом к спинотронике, которая в настоящее время является основой для создания нового поколения запоминающих устройств, магнитных сенсоров, сейсмических устройств и пр. Магнитное состояние ферромагнитной среды обычно исследуется в условиях длительного воздействия внешних электромагнитных полей. В предлагаемой работе исследуется магнитное состояние ферромагнитного полупространства при импульсном внешнем линейном воздействии на поверхность полупространства.

Пусть ферромагнитное полупространство в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $y > 0$. Вне среды ($y < 0$) предполагается вакуум. Как известно, ферромагнитные тела проявляют свойство анизотропии, намагниченность стремится ориентироваться вдоль определенных кристаллических осей, которые называются направлением легкого намагничивания [1]. Ось Oz направлена по оси легкого намагничивания кристалла ферромагнетика. Возмущения в среде характеризуются вектором намагничивания $\vec{\mu}(\mu, \nu, t)$, где μ и ν – составляющие $\vec{\mu}$ по оси Ox и Oy , соответственно. Кроме того, будем полагать, что они не зависят от z , т.е. μ и ν – функции только переменных x, y и t (t – время). Возмущения в среде характеризуются также напряжённостью магнитного поля $\vec{h} = -\text{grad } \varphi(x, y, t)$, где $\varphi(x, y, t)$ – магнитостатический потенциал поля в

среде. Возмущения в вакууме описываются вектором $\vec{h}_e = -\text{grad}\varphi_e(x, y, t)$, где $\varphi_e(x, y, t)$ – магнитостатический потенциал магнитного поля в вакууме. Далее будем полагать, что по поверхности кристалла ферромагнитного полупространства в начальный момент времени $t = 0$ по оси Oz производится мгновенное возмущение потенциала магнитостатического поля. После этого, наша задача будет заключаться в том, чтобы определить дальнейшее магнитное состояние рассматриваемой структуры: ферромагнитное полупространство – вакуум для времени $t > 0$.

При вышеописанных допущениях волновое поле в среде и в вакууме согласно феноменологической теории [1,2] будет представляться следующими соотношениями:

1. Уравнения в ферромагнитном полупространстве (в области $y > 0$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial t} &= \Omega_M \left(\rho_o^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{b}v - \lambda \Delta v \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \Omega_M \left(-\rho_o^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \hat{b}\mu + \lambda \Delta \mu \right), \\ \Delta \varphi &= \rho_0 \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),\end{aligned}\tag{1}$$

где λ – обменная постоянная, ρ_0 – плотность ферромагнетика, $\Omega_M = \gamma_0 \rho_0 \mu_0$, μ_0 – абсолютное значение намагниченности в расчете на единицу массы среды, γ_0 – гирромагнитное отношение, $\gamma_0 = 1,76 \cdot 10^7$ (Э · С)⁻¹, $\hat{b}$ – постоянная магнитной анизотропии.

2. Уравнение в вакууме (в области $y < 0$):

$$\Delta \varphi_e = 0, \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.\tag{2}$$

3. Мгновенное начальное поверхностное возмущение магнитостатического потенциала по оси Oz задаётся следующим соотношением:

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_0 \delta(x) \delta(t),\tag{3}$$

где $\varphi_0 = \text{const}$, $\delta(x)$ и $\delta(t)$ – дельта-функции Дирака.

Далее предполагаем, что нам заданы две функции $\tilde{\mu}(x, y)$ и $\tilde{v}(x, y)$, которые описывают первоначальное магнитное состояние ферромагнитной среды до возмущения. Таким образом, начальное состояние среды определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\mu(x, y, 0) &= \tilde{\mu}(x, y), \\ v(x, y, 0) &= \tilde{v}(x, y).\end{aligned}\tag{4}$$

Для корректности постановки задачи нам осталось потребовать непрерывность магнитного потенциала на поверхности среды (при $y = 0$), а также наложить на искомые величины условия затухания на бесконечности (т.е. при $y \rightarrow \pm\infty$) [6]. Эти условия представляются соотношениями:

$$\varphi(0, x, t) = \varphi_e(0, x, t), \quad (5)$$

$$\mu, v, \varphi \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow +\infty \text{ и } \varphi_e \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow -\infty. \quad (6)$$

Окончательно задачу можно сформулировать так: решить систему (1) совместно с уравнением в вакууме (2) при соблюдении граничных, начальных условий (3), (4), а также условия непрерывности (5) и условий затухания (6).

Поставленную задачу в данной работе мы будем решать, пренебрегая обменным эффектом, т.е. полагая $\lambda = 0$. Это вполне допустимо в нашей задаче, поскольку при температуре, намного меньшей температуры Кюри, магны, возбуждаемые в ферромагнетике, в основном, длинноволновые, а феноменологическая теория применима только для этой ситуации [1].

Прежде чем решать поставленную задачу, сделаем некоторые преобразования системы (1). Продифференцировав первое уравнение системы по y , а второе по x и далее используя третье уравнение, мы приходим к соотношению:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\Omega_M} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \hat{b} \Omega_M \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]. \quad (7)$$

Введем обозначения:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = v. \quad (8)$$

Уравнение (7) в этих обозначениях примет вид:

$$u = \frac{1}{\Omega_M} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \hat{b} \Omega_M u \right),$$

отсюда:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Omega_M (1 + \hat{b}) u. \quad (9)$$

Теперь исключим из первого и второго уравнений системы (1) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. С этой

целью продифференцируем первое уравнение (1) по x , а второе уравнение по y , сложив их, мы придём к уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \hat{b} \Omega_M \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right),$$

с учетом обозначений (8), оно примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\hat{b} \Omega_M v, \quad (10)$$

присоединяя к (10) уравнение (9), мы получим систему уравнений относительно новых переменных u и v :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\hat{b} \Omega_M v, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Omega_M (1 + \hat{b}) u.$$

Из (11) следует уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 u = 0, \quad (12)$$

где $a^2 = \Omega_M^2 \Omega_{sv}^2$, $\Omega_{sv}^2 = \hat{b}(1 + \hat{b})$ – частота Блоха, т.е. частота спиновых волн,

распространяющихся под прямым углом к фоновому магнитному полю.

Общее решение (12) представляется так:

$$u(x, y, t) = A(x, y) \cos at + B(x, y) \sin at, \quad (13)$$

где A и B – произвольные функции x и y . Если к найденному решению (13) добавить значение v , которое находим из первого уравнения (11), то общее решение системы (11) запишется в виде:

$$u(x, y) = A(x, y) \cos at + B(x, y) \sin at, \quad (14)$$

$$v(x, y) = \sqrt{\frac{1 + \hat{b}}{\hat{b}}} (A(x, y) \sin at - B(x, y) \cos at).$$

Вернувшись к первоначальным μ и v , получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A(x, y) \cos at + B(x, y) \sin at, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{\frac{1 + \hat{b}}{\hat{b}}} (A(x, y) \sin at - B(x, y) \cos at).$$

Таким образом, исходная система (1) свелась к более простой системе (15), где уже нет производных по времени, т.е. фактически мы проинтегрировали систему (1) по t .

Неизвестные функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ найдём, воспользовавшись начальным условием (4). Для этого запишем систему (15) для начального момента времени $t = 0$, откуда и найдём неизвестные функции A и B :

$$A(x, y) = \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, \quad (16)$$

$$B(x, y) = -\sqrt{\frac{\hat{b}}{1 + \hat{b}}} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right).$$

Перейдем теперь к решению системы (15). С этой целью сделаем преобразование Фурье по x (параметр α) системы (15) и граничного условия (3). Для этого

умножим (15) и (3) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x}$ ($\text{Im } \alpha = 0$) и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$, получим:

$$-i\alpha \bar{\mu}(y, \alpha, t) + \frac{\partial \bar{v}(y, \alpha, t)}{\partial y} = \bar{A}(y, \alpha) \cos at + \bar{B}(y, \alpha) \sin at, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}(y, \alpha, t)}{\partial y} + i\alpha \bar{v}(y, \alpha, t) = \sqrt{\frac{1 + \hat{b}}{\hat{b}}} (\bar{A}(y, \alpha) \sin at - \bar{B}(y, \alpha) \cos at).$$

Условие (3) примет вид:

$$\bar{\varphi}(0, \alpha, t) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{2\pi}} \delta(t). \quad (18)$$

В (17) и (18) введены следующие обозначения:

$\bar{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) e^{i\alpha x} dx$, где f может принимать значения функций:

$\mu, \nu, \varphi, \varphi_e, A$ и B .

Перейдем к решению краевой задачи (17), (18). Продифференцируем первое уравнение (17) по y , откуда $\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y}$ подставим во второе уравнение (17), получим

следующее уравнение относительно $\bar{\nu}$:

$$\frac{\partial^2 \bar{\nu}}{\partial y^2} - \alpha^2 \bar{\nu} = F_3(y, \alpha, t), \quad (19)$$

где $F_3 = F_1 \cos at + F_2 \sin at$, $F_1 = \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} - i\alpha \sqrt{\frac{1+\hat{b}}{\hat{b}}} \bar{B}$, $F_2 = \frac{\partial \bar{B}}{\partial y} + i\alpha \sqrt{\frac{1+\hat{b}}{\hat{b}}} \bar{A}$.

(19) представляет собой неоднородное линейное уравнение второго порядка, общее решение которого представляется соотношением:

$$\bar{\nu}(y, \alpha, t) = \left[c_1(\alpha, t) + \int_0^y \left(\int_0^y F_3 \cdot e^{|\alpha|y} dy \right) e^{-2|\alpha|y} dy \right] e^{-|\alpha|y}, \quad (20)$$

где $c_1(\alpha, t)$ – произвольная функция. Далее из первого уравнения (17) находим $\bar{\mu}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mu} = & i e^{-|\alpha|y} \left[c_1(\alpha, t) + \int_0^y \left(\int_0^y e^{|\alpha|y} \cdot F_3 dy \right) e^{-2|\alpha|y} dy - \right. \\ & \left. - \frac{e^{-2|\alpha|y}}{|\alpha|} \left(\int_0^y F_3 e^{|\alpha|y} dy \right) + \frac{e^{|\alpha|y}}{|\alpha|} \tilde{A} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где $\tilde{A} = \bar{A} \cos at + \bar{B} \sin at$.

Теперь, с целью определения $\bar{\varphi}$ сделаем преобразование Фурье по x (параметр α) второго уравнения системы (1), получим:

$$\bar{\varphi} = \frac{\rho_0}{i|\alpha|\Omega_M} \left(\frac{\partial \bar{\nu}}{\partial t} + \hat{b}\Omega_M \bar{\mu} \right), \quad (22)$$

где $\bar{\nu}$ и $\bar{\mu}$ задаются выражениями (20) и (21).

Итак, Фурье – изображения искомых нами величин найдены: (20), (21) и (22). В эти соотношения входит неизвестная пока функция $c_1(\alpha, t)$, для её определения мы воспользуемся граничным условием (18), которое приведёт нас к простому линейному уравнению:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + i\hat{b}\Omega_M c_1 = -\frac{i\hat{b}\Omega_M}{|\alpha|} \tilde{A} + \frac{i|\alpha|\Omega_M \varphi_0}{\rho_0 \sqrt{2\pi}} \delta(t). \quad (23)$$

Таким образом, изображения Фурье искомых величин в ферромагнитной среде мы выразили через заданные функции $\tilde{\mu}(x, y)$ и $\tilde{\nu}(x, y)$, определяющие исходное магнитное состояние среды. Для окончательного решения задачи в среде остаётся задать конкретные значения функций магнитного состояния среды $-\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ и далее,

сделав обращение изображений (20) - (22), получить искомое решение задачи в среде.

Остается найти поле в вакууме, т.е. решить задачу (2) с учетом условий (5) и (6). Сделав преобразование Фурье по x соотношений (2), (5), получим:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_e(y, \alpha, t)}{\partial y^2} - \alpha^2 \bar{\varphi}_e(y, \alpha, t) = 0, \quad (24)$$

$$\bar{\varphi}_e(0, \alpha, t) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{2\pi}} \delta(t), \quad (25)$$

$$\bar{\varphi}_e \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow -\infty. \quad (26)$$

Последнее соотношение следует из того, что, поскольку возмущения возникают в ограниченной области, то изображение $\bar{\varphi}_e$ должно убывать при $y \rightarrow -\infty$ [6].

Общее решение уравнения (24) имеет вид:

$$\bar{\varphi}_e = D_1(\alpha, t) e^{|\alpha|y} + D_2(\alpha, t) e^{-|\alpha|y}, \quad (27)$$

где D_1 и D_2 – произвольные функции α и t .

Из условия затухания (26) следует, что в (27) необходимо положить $D_2(\alpha, t) \equiv 0$, тогда:

$$\bar{\varphi}_e(y, \alpha, t) = D_1(\alpha, t) e^{|\alpha|y}. \quad (28)$$

Из условия (25) следует, что $D_1 = \frac{\Phi_0}{\sqrt{2\pi}} \delta(t)$, откуда:

$$\bar{\varphi}_e = \frac{\Phi_0}{\sqrt{2\pi}} e^{|\alpha|y} \delta(t). \quad (29)$$

Сделав обращение, приходим к искомому оригиналу:

$$\varphi_e(x, y, t) = \frac{\Phi_0}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2} \delta(t). \quad (30)$$

Предполагается дальнейшее исследование рассмотренной в статье задачи для различных конкретных функций $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$, характеризующих первоначальное состояние среды.

Перенос авторами конкретной вычислительной стороны рассматриваемой задачи в следующую работу обусловлено двумя факторами: первое – это чрезвычайная трудоёмкость и громоздкость вычислений и второе, что она представляет собой самостоятельный вычислительный интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Наука, 1991. 560с.
2. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368с.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Асанян Д.Д., Саакян С.Л. Распространение поверхностных волн в однородной ферромагнитной среде. /В сб.: “Проблемы механики деформируемого твердого тела”. Ереван, 2007. С.67-74.
4. Даноян З.Н., Атоян Л.А. Отражение спиновых волн от границы ферромагнитной среды при обобщенных граничных условиях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.34–39.

5. Danoyan Z., Piliposian G., Hasanyan D. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half-spaces. Waves Random Complex Media 19(4), 567-584 (2009).
6. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович

Д.ф.-м.н., Зав.отделом Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24^Б.
E-mail: mechins@sci.am

Атоян Левон Арутюнович

К.ф.-м.н., ст.науч.сотрудник Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24^Б
E-mail: mechins@sci.am

Даноян Нерсес Завенович

Научный сотрудник Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24^Б
E-mail: mechins@sci.am

Поступила в редакцию 30.05.2011

УДК 531.36

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНО
МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ
ШАГИНЯН С.Г.**

Ключевые слова: устойчивость движения, динамические системы, возмущения.
Key words: motion stability, dynamical systems, perturbation.

Շահինյան Ս.Գ.

Կայունության սահմանման մասին ինտեգրալով փոքր զրգռումների դեպքում

Ավելի քան քսան տարի ԵՊՀ մեխանիկայի ամբիոնում կատարվել է դինամիկ համակարգերի կայունության խնդիրների ուսումնասիրություն այն ենթադրությամբ, որ համակարգի վրա ժամանակի վերջավոր միջակայքում ազդում են ինտեգրալով փոքր զրգռող ուժեր: Տրվել է կայունության նոր սահմանում. «կայունություն ըստ ազդող ուժի»: Ստացվել են տեսական և կիրառական նշանակություն ունեցող արդյունքներ, որոնք տպագրվել են Հայաստանի և նախկին Խորհրդային Միության տարբեր գիտական հանդեսներում: Վերջին տարիների հետազոտությունների ու քննարկումների ընթացքում ցույց է տրվել, որ անհրաժեշտություն կա պարզաբանում մտցնելու տրված սահմանման մեջ:

Ներկայացվող աշխատանքը նվիրված է ըստ ազդող ուժի կայունության, սկզբում տրված և հեղինակի վերջին շրջանի աշխատանքներում բերվող սահմանումների պարզաբանմանը:

Shahinyan S.G.

About stability definition at integrally small indignations

The presented work is devoted to the clarification of definitions of stability in the current strength in the early works of the author and his works during the last period.

Задача устойчивости динамических систем при разных возмущающих факторах была рассмотрена многими авторами. Одним из первых, кто придал большое теоретическое и прикладное значение теории устойчивости при возмущающих факторах, был Н.Г.Четаев [1]. Затем появились работы И.Г.Малкина [2], Н.Н.Красовского [3], Х.Л.Массера [4] и др. В работе [1] рассмотрено влияние малых возмущающих сил на устойчивость движения динамической системы. В [2] доказана теорема об устойчивости при постоянно действующих малых возмущениях. В [3] определены достаточные условия, при которых решается задача устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем. В работах [5-7] изучается влияние структуры сил на устойчивость движения. Задача устойчивости при импульсных воздействиях рассматривается в работах [8-15].

За последние двадцать лет на кафедре теоретической механики ЕГУ начинается исследование задачи устойчивости движения динамических систем, когда на систему в конечном интервале времени действуют интегрально малые возмущающие силы. Предполагается, что возмущающие силы выбраны из довольно широкого класса функций, из класса обобщённых функций (они могут быть импульсными функциями).

Основой таких исследований является постановка задачи устойчивости динамических систем при интегрально малых возмущениях, поставленной доктором физ.-мат. наук, профессором М.С.Габриеляном. Дано новое определение устойчивости – «устойчивость по действующей силе». Во время выполнения исследований в этом направлении возникла необходимость изменить формулировку определения устойчивости по действующей силе.

Представляемая работа посвящена пояснению определений устойчивости по действующей силе в начальных работах автора и в его работах за последний период.

Необходимость в такого рода исследованиях диктуется практикой, когда приходится учитывать непрерывные возмущения, либо импульсные воздействия, способные качественно изменить поведение объекта. Особенность исследований

заключается в том, что мы не станем следовать «букве» классического понятия устойчивости, а предложим видоизменение этого понятия, учитывающее специфику прикладных задач. Так мы допускаем возможность сильных возмущений объекта на конечном интервале времени. Если по истечении указанного промежутка времени возмущения в движении объекта окажутся малыми и сохранят свою малость в последующем, то указанные движения назовём устойчивыми при интегрально малых возмущениях. Очевидно, такое понятие устойчивости отличается от устойчивости по Ляпунову, так как допускает «флюктуационную» неустойчивость на некотором интервале. Однако эта неустойчивость не имеет фатального характера для работы объекта, так как на смену ей приходит устойчивый режим движения.

В первых работах [16,17], опубликованных в этом направлении, задача была поставлена следующим образом:

рассматривается система стационарных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где $F_i(x_1, \dots, x_n)$ – непрерывные в R^n функции, удовлетворяющие условию Липшица в некоторой ограниченной области $G \subset R^n$ и $F_i(0, \dots, 0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Предполагается, что на систему (1) действуют возмущающие силы $\varphi_i(t)$:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n) + \varphi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

причём,

$$\left\| \int_{t_0}^T \varphi(t) dt \right\|_n = \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_0}^T \varphi_i(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} < \infty \quad (3)$$

и $\varphi_i(t) \equiv 0$ при $t > T, i = 1, \dots, n$.

Здесь t_0 – начальный момент времени, а $T > t_0$ – заданная величина.

Определение устойчивости по действующей силе сформулировано следующим образом:

О п р е д е л е н и е 1. Скажем, что решение $x \equiv 0$ системы (1) устойчиво по действующей силе, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ системы (2) $\|x(t)\|_n < \varepsilon$ при $t \geq T$, если $\|x(t_0)\|_n < \delta$ и

$$\left\| \int_{t_0}^T \varphi(t) dt \right\|_n < \delta.$$

В противном случае решение $x = 0$ назовём неустойчивым по действующей силе.

Дальнейшие исследования и обсуждения полученных результатов показали, что в некоторых системах условие $\|x(t)\|_n < \varepsilon$ выполняется, начиная с момента T , а в других системах – начиная с некоторого момента $t_* > T$. Например, при изучении задачи устойчивости по действующей силе системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax \quad (4)$$

получается следующий результат:

1. Когда все корни характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (5)$$

равны нулю и этому корню соответствуют простые элементарные делители, неравенство $\|x(t)\|_n < \varepsilon$ выполняется при $t \geq T$.

Действительно, если все корни уравнения (5) равны нулю ($\lambda = 0$ с кратностью n) и этому корню соответствуют простые элементарные делители, то при помощи неособого линейного преобразования $Z = Bx$ ($\det B \neq 0$) систему $\dot{x} = Ax + \varphi(t)$ можно привести к виду

$$\dot{Z} = \psi(t), \quad (6)$$

где $Z \in R^n$, $\psi(t) = B\varphi(t)$.

Интегрируя систему (6), получим

$$Z(t) = \begin{cases} Z(t_0) + \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau & \text{при } t < T \\ Z(t_0) + \int_{t_0}^T \psi(t) dt & \text{при } t \geq T \end{cases}.$$

Следовательно, при $t \geq T$ имеем

$$\|Z(t)\| = \left\| Z(t_0) + \int_{t_0}^T \psi(t) dt \right\| \leq \|Z(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^T \psi(t) dt \right\| < \delta + \delta = 2\delta.$$

Теперь, если для любого числа $\varepsilon > 0$ выбираем $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, получим $\|Z(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq T$.

2. Когда корни уравнения (5) удовлетворяют условиям:

а) $\lambda_1 = 0$ (с кратностью r_1), причем этому корню соответствуют простые элементарные делители;

б) $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ при $i = 2, \dots, l$, тогда неравенство $\|x(t)\|_n < \varepsilon$ выполняется при $t \geq t_* > T$ [16, 17], причём момент времени t_* выбирается в зависимости от ε и от класса возмущений $\varphi(t)$.

В последних работах [19, 20] задача была поставлена следующим образом: рассматривается система нестационарных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

где $F_i(t, x_1, \dots, x_n): R^{n+1} \rightarrow R^1$ – непрерывные функции, удовлетворяющие всем условиям существования и единственности решения системы (7) в области

$$x_i \in R^1; \quad t \in [t_0; +\infty) \quad (8)$$

и $F_i(t, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0; \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть на систему (7) действуют возмущающие силы $\varphi_i(t)$, удовлетворяющие соотношениям (3).

Дифференциальные уравнения системы (7) при наличии возмущающих сил $\varphi_i(t)$ примут вид

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_1, \dots, x_n) + \varphi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Предполагаем, что возмущения $\varphi_i(t)$ такие, что решения системы (9) также существуют при всех $t \geq t_0$.

Определение устойчивости по действующей силе дано для системы вида (7).

Но, исходя из сделанных выше рассуждений, необходимо сделать некоторые объяснения и обобщения.

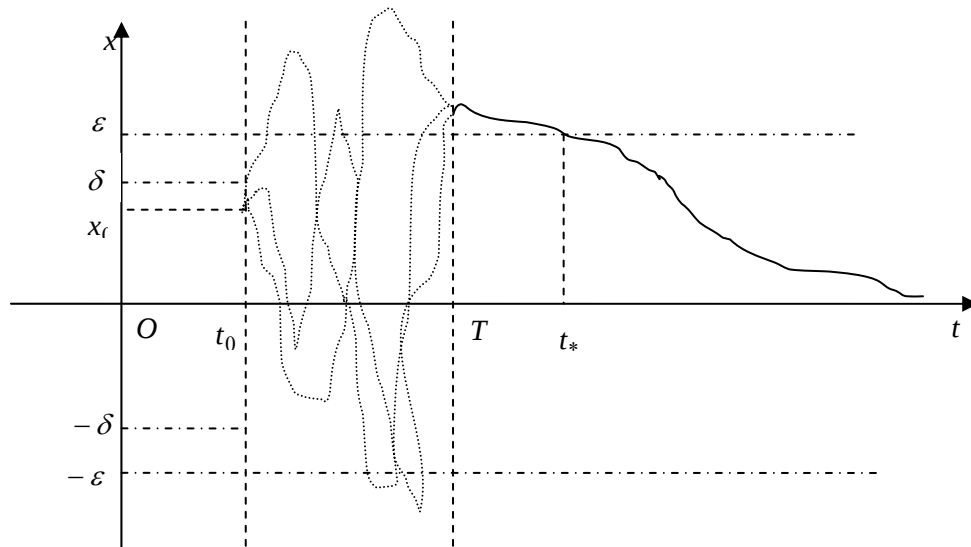
Обозначим через Φ некоторый класс возмущений $\varphi(t)$, удовлетворяющих соотношениям (3).

Назовём устойчивость в этом случае «устойчивостью при интегрально малых возмущениях» и сформулируем определение устойчивости следующим образом:

О п р е д е л е н и е 2. Решение $x = 0$ системы (7) называется устойчивым при интегрально малых возмущениях, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta > 0$ и момент времени $t_* \geq T$ такие, что для любого решения $x(t)$ системы (9)

$$\|x(t)\| < \varepsilon \text{ при всех } t \geq t_*, \text{ если } \|x(t_0)\| < \delta \text{ и } \left\| \int_{t_0}^T \varphi(t) dt \right\| < \delta,$$

где $\varphi(t)$ — любое возмущение из заданного класса Φ (фиг.1).



Фиг. 1.

Так как нас интересует поведение системы после действия на неё $\varphi(t)$ возмущений, то момент t_* (зависимо от исследуемой системы) может быть или больше T [18-20], или равно T .

Отметим, что доказанные в [16-20] теоремы и полученные нами результаты остаются верными и в такой формулировке определения устойчивости при интегрально малых возмущениях.

Отметим ещё, что идея следования, начиная с некоторого момента времени t_* , поведению решения системы, не нова в теории устойчивости. Об этом говорилось ещё в работах Левинсона Н. и Йосидзавы Т. (см. [21], стр. 289).

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176с.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530с.
3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211с.
4. Massera J.L. On Lyapounoff's condition of stability, Ann. Of Math. 1949, vol.50, №3, p.705-721.
5. Матросов В.М. К вопросу устойчивости гироскопических систем с диссипацией // Тр. Казанского авиационного института. 1959. Вып. 45. С.63-76.
6. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 309с.
7. Байков А.Е., Красильников П.С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе. // ПММ. 2010. Т.74. Вып. 1. С.74-88.
8. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224с.
9. Барбашин Е.А., Тавуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 299с.
10. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309с.
11. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 287с.
12. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петербурга, 1993. 266с.
13. Гургула С.И., Гургула С.И. Исследование устойчивости решений импульсных систем вторым методом Ляпунова. //Укр. мат. журнал. 1982. 34. №1. С.100-103.
14. Bainov D.D., Simeonov P.S. Systems with impulse effect. Stability, Theory and Applications, Chichester: Ellis horwood limited, 1989, 259 p.
15. Гладилина Р.И., Игнатьев А.О. Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием. //Мат.заметки. 2004. Т.76. №1. С.44-51.
16. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости. //Ученые записки ЕГУ. 1986. №2. С.39-46.
17. Габриелян М.С., Шагинян С.Г. О построении функции Ляпунова.// Ученые записки ЕГУ. 1987. №1. С.39-45.
18. Шагинян С.Г. Об устойчивости по действующей силе нелинейных нестационарных систем. //В сб. научных трудов международной конференции «Устойчивость и процессы управления». Санкт-Петербург: 2005. С.486-592.
19. Шагинян С.Г. Об устойчивости систем нелинейных нестационарных уравнений при интегрально малых возмущениях. //Труды ИПММ НАН Украины, Донецк. 2006. Вып.12. С.194-199.
20. Шагинян С.Г. Вопросы стабилизации не вполне управляемых систем при интегрально малых возмущениях. Проблемы нелинейного анализа в технических системах. Казань: 2008. Вып. 2(30). Т.14. С.53-69.
21. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472с.

Сведения об авторе:

Шагинян Смбат Григорьевич – кандидат физ-мат наук, доцент,
Ереванский Государственный Университет, факультет математики и механики.
shahinyan@ysu.am, тел. (010) 66-37-41, (091) 21-55-82

Поступила в редакцию 10.03.2009

**ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДВУХ
ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ИЗБЕГАЮЩИХ СТОЛКНОВЕНИЯ НА
ПЛОСКОСТИ**

ՉԱԽՄԱԽՉԻԱՆ Ր.Յ.

Ключевые слова: оптимальное управление, избегание столкновения

Keywords: optimal control, avoid collision

Չախմախչյան Ռ.Է.

**Բախումից խուսափող երկու դինամիկ օբյեկտների օպտիմալ ուղղագիծ տեղափոխումները
հարթության վրա**

Դիտարկվում է մի խնդիր, որտեղ պահանջվում է որոշել երկու դինամիկ օբյեկտների կառավարման օրենքներն այնպես, որ ապահովվեն հարթության մեջ օբյեկտների տեղափոխումը ցանկացած իրարից տարբեր սկզբնական հանգստի վիճակներից տրված իրարից տարբեր վերջնական հանգստի վիճակներ նվազագույն ժամանակում և բացառվի դրանց բախումը համատեղ շարժման ընթացքում: Տրված է խնդրի լուծումը մեկ փոխանցման կետով կտոր առ կտոր հաստատուն և նվազագույն թվով ազատ պարամետրերով կառավարող այն ֆունկցիաների դասում, որոնց դեպքում օբյեկտները շարժվում են ուղիղ գծերով: Աշխատանքն հանդիսանում է [1-3]-ի շարունակությունը:

Chakhmakhchyan R.E.

Optimal plane rectilinear movements two dynamic objects avoiding collision

In this problem is considered the system from two dynamic objects, which realize flat motion and is required define limited operating forces providing transition of objects from any arbitrary initial difference states of rest in given final difference states of rest for minimum time and guaranteeing absence of collision of objects in process of the joint motion. The proof of resolvability of a problem in a class of piecewise constant managements with one switching and the minimum number of free parameters at which movements of objects occur on straight lines is given. Article develops researches [1-3].

Рассматривается задача определения законов ограниченных управляющих сил, обеспечивающих плоские перемещения двух динамических объектов из произвольных различных начальных состояний покоя в заданные не совпадающие состояния покоя за минимальное время и гарантирующих отсутствие столкновения объектов в процессе движения. Дано полное доказательство решимости задачи в классе кусочно-постоянных управлений с одним переключением и минимальным числом свободных параметров, при которых движения объектов происходят по прямым. Статья развивает исследования [1-3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему из двух точечных объектов X и Y , совершающих движения на плоскости. Уравнения движения объектов зададим в виде

$$X: m_X \ddot{x} = F_X, \quad Y: m_Y \ddot{y} = F_Y. \quad (1.1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ – векторы координат объектов, $F_X = (F_{X1}, F_{X2})$, $F_Y = (F_{Y1}, F_{Y2})$ – векторы управляющих сил объектов, а m_X, m_Y – соответственно массы объектов X и Y .

Требуется определить управляющие вектор-функции $F_X(t)$ и $F_Y(t)$ с ограниченными компонентами

$$|F_{Xi}(t)| \leq F_{Xi}^0, \quad |F_{Yi}(t)| \leq F_{Yi}^0, \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

так, чтобы объекты (1.1) перешли из начальных состояний покоя в момент $t = 0$

$$x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad x^0 \neq y^0, \quad (1.3)$$

заданные конечные состояния покоя

$$x(T) = x^1, \dot{x}(T) = 0, y(T) = y^1, \dot{y}(T) = 0, x^1 \neq y^1 \quad (1.4)$$

за минимальное время $t = T$ и при их совместном движении не имело место столкновения, т.е. выполнялось условие

$$|x(t) - y(t)| \neq 0, t \in (0, T). \quad (1.5)$$

Если ввести безразмерные переменные по следующим формулам (с дальнейшим опусканием штрихов)

$$t' = t / \gamma, T' = T / \gamma, \gamma = (m_X |x_1^0 - y_1^0| / F_{X1}^0)^{1/2} \quad (1.6)$$

$$x'_1 = x_1 / \xi_1, x'^{0,1}_1 = x^{0,1}_1 / \xi_1, \dot{x}'^{0,1}_1 = \dot{x}^{0,1}_1 / \xi_1, \xi_1 = |x_1^0 - y_1^0|$$

$$x'_2 = x_2 / \xi_2, x'^{0,1}_2 = x^{0,1}_2 / \xi_2, \dot{x}'^{0,1}_2 = \dot{x}^{0,1}_2 / \xi_2, \xi_2 = (m_X |x_1^0 - y_1^0| / F_{X2}^0)^{-1/2}$$

$$y'_i = y_i / \mu_i, y'^{0,1}_i = y^{0,1}_i / \mu_i, \dot{y}'^{0,1}_i = \dot{y}^{0,1}_i / \mu_i, \mu_i = (m_Y |x_1^0 - y_1^0| / F_{Yi}^0)^{-1/2}$$

$$F'_{Xi} = F_{Xi} / F_{Xi}^0, F'_{Yi} = F_{Yi} / F_{Yi}^0, i = 1, 2,$$

то соотношения (1.1), (1.2) упростятся и получим

$$m_X = m_Y = 1, F_{Xi}^0 = F_{Yi}^0 = 1, i = 1, 2. \quad (1.7)$$

Введём обозначения

$$x_{i1} = x_i, x_{i2} = \dot{x}_i, y_{i1} = y_i, y_{i2} = \dot{y}_i, i = 1, 2 \quad (1.8)$$

и представим уравнения (1.1), (1.7) в виде

$$X: \begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2} \\ \dot{x}_{i2} = u_i \end{cases}, i = 1, 2; Y: \begin{cases} \dot{y}_{i1} = y_{i2} \\ \dot{y}_{i2} = v_i \end{cases}, i = 1, 2. \quad (1.9)$$

В обозначениях (1.8) начальные и конечные условия (1.3), (1.4), ограничения на управления (1.2), а также условие отсутствия столкновения (1.5) запишутся так:

$$x_{ij}(0) = x_{ij}^0, y_{ij}(0) = y_{ij}^0, x_{i2}^0 = y_{i2}^0 = 0, \sum_{i=1}^2 (x_{i1}^0 - y_{i1}^0)^2 \neq 0, i, j = 1, 2, \quad (1.10)$$

$$x_{ij}(T) = x_{ij}^1, y_{ij}(T) = y_{ij}^1, x_{i2}^1 = y_{i2}^1 = 0, \sum_{i=1}^2 (x_{i1}^1 - y_{i1}^1)^2 \neq 0, i, j = 1, 2, \quad (1.11)$$

$$|u_i(t)| \leq u_i^0, |v_i(t)| \leq v_i^0, u_i^0 = v_i^0 = 1, i = 1, 2, \quad (1.12)$$

$$|x^{(1)}(t) - y^{(1)}(t)| \neq 0, t \in (0, T), \quad (1.13)$$

$$x^{(1)}(t) - y^{(1)}(t) = (x_{11}(t) - y_{11}(t), x_{21}(t) - y_{21}(t))^T.$$

Определим управления $u_i^*(t)$, $v_i^*(t)$ так, чтобы система (1.9) перешла из начального состояния (1.10) в заданное конечное состояние (1.11) и при этом удовлетворялись условия (1.12), (1.13).

2. Построения оптимальных управлений без учета фазовых ограничений.

Решение задачи об оптимальном по быстродействию управлении для каждой из систем (1.9) известно [4] и имеет вид

$$u_i^* = u_i^0 \text{sign}[(\tau_{xi} - t)\Delta x_{i1}], \tau_{xi} = T_{xi} / 2, T_{xi} = 2(|\Delta x_{i1}| / u_i^0)^{1/2} \quad (2.1)$$

$$v_i^* = v_i^0 \text{sign}[(\tau_{Yi} - t)\Delta y_{i1}], \tau_{Yi} = T_{Yi} / 2, T_{Yi} = 2(|\Delta y_{i1}| / v_i^0)^{1/2}$$

$$\Delta x_{i1} = x_{i1}^1 - x_{i1}^0, \Delta y_{i1} = y_{i1}^1 - y_{i1}^0, i = 1, 2$$

Пользуясь соотношениями (2.1), построим оптимальные по быстродействию управления для системы (1.9), (1.12) при граничных условиях (1.10), (1.11) без учета

ограничения (1.13). Сначала вычислим $T_{xi}, T_{yi}, i=1,2$ согласно (2.1) и заметим, что искомое время быстрогодействия равно $T = \max\{T_{x1}, T_{x2}, T_{y1}, T_{y2}\}$. Не нарушая общности, положим, что $\Delta x_{i1}, \Delta y_{i1} > 0, i=1,2$ и

$$T = T_{x1}, \Delta x_{11} > \max\{\Delta x_{21}, \Delta y_{i1}\}, i=1,2. \quad (2.2)$$

Тогда управление $u_1(t)$ определяется однозначно: $u_1(t) = u_1^*(t)$ (2.1). В выборе управлений $u_2(t), v_1(t), v_2(t)$ имеется произвол, связанный с возможностью более раннего приведения координат x_{21}, y_{11}, y_{21} в требуемые состояния (по сравнению с координатой x_{11}). В этом случае зададим управления $u_2(t), v_1(t), v_2(t)$ соответственно с двумя свободными параметрами $\tau_{x2}, u_2', \tau_{y1}, v_1', \tau_{y2}, v_2'$ в следующих формах:

$$\begin{aligned} u_2^*(t) &= u_2' \text{sign}(\tau_{x2} - t), \quad 0 \leq u_2' \leq u_2^0, \quad t \in [0, T] \\ v_i^*(t) &= v_i' \text{sign}(\tau_{yi} - t), \quad 0 \leq v_i' \leq v_i^0, \quad i=1,2, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Параметры $u_2', v_i', i=1,2$ из (2.3) выберем из условия приведения координат x_{21}, y_{11}, y_{21} в заданные терминальные положения в момент T . Тогда интегрируя уравнения (1.9) при управлениях $u_1^*(t)$ (2.1), $u_2^*(t), v_i^*(t), i=1,2$ (2.3) с краевыми условиями (1.10), (1.11) на интервале времени $[0, T]$, получим законы движения объектов X и Y

$$x_{11}(t) = \begin{cases} u_1^0 t^2 / 2 + x_{11}^0, & t \in [0, \tau_{x1}) \\ -u_1^0 (T-t)^2 / 2 + x_{11}^1, & t \in [\tau_{x1}, T] \end{cases} \quad (2.4)$$

$$x_{21}(t) = \begin{cases} u_2' t^2 / 2 + x_{21}^0, & t \in [0, \tau_{x2}) \\ -u_2' (T-t)^2 / 2 + x_{21}^1, & t \in [\tau_{x2}, T] \end{cases}$$

$$u_2' = 4\Delta x_{21} / T_{x1}^2,$$

$$y_{i1}(t) = \begin{cases} v_i' t^2 / 2 + y_{i1}^0, & t \in [0, \tau_{yi}) \\ -v_i' (T-t)^2 / 2 + y_{i1}^1, & t \in [\tau_{yi}, T] \end{cases} \quad (2.5)$$

$$v_i' = 4\Delta y_{i1} / T^2, \quad i=1,2,$$

где

$$\tau_{xi} = \tau_{yi} = \tau = T/2, \quad \tau = (\Delta x_{11} / u_1^0)^{1/2}. \quad (2.6)$$

Траектории движений объектов X и Y , соответствующие законам (2.4), (2.5), на плоскости (z_1, z_2) представляют собой прямолинейные отрезки:

$$\begin{aligned} &\bar{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1)) : \\ z_2(z_1) &= \begin{cases} u_2' (u_1^0)^{-1} (z_1 - x_{11}^0) + x_{21}^0, & x_{11}^0 \leq z_1 \leq (x_{11}^0 + x_{11}^1) / 2 \\ u_2' (u_1^0)^{-1} (z_1 - x_{11}^1) + x_{21}^1, & (x_{11}^0 + x_{11}^1) / 2 \leq z_1 \leq x_{11}^1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

и

$$\bar{Y}((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1)):$$

$$z_2(z_1) = \begin{cases} v_2' v_1'^{-1}(z_1 - y_{11}^0) + y_{21}^0, & y_{11}^0 \leq z_1 \leq (y_{11}^0 + y_{11}^1)/2 \\ v_2' v_1'^{-1}(z_1 - y_{11}^1) + y_{21}^1, & (y_{11}^0 + y_{11}^1)/2 \leq z_1 \leq y_{11}^1 \end{cases} \quad (2.8)$$

с начальными, конечными положениями $((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ соответственно.

Движение объектов X и Y по отрезкам (2.7) и (2.8) при управлениях $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ и $v^*(t) = (v_1^*(t), v_2^*(t))$ происходит, соответственно, в направлении от начальных точек (x_{11}^0, x_{21}^0) и (y_{11}^0, y_{21}^0) к конечным (x_{11}^1, x_{21}^1) и (y_{11}^1, y_{21}^1) ускоренно на промежутке времени $0 < t \leq \tau$, а на промежутке $\tau < t \leq T$ – замедленно. При этом, как следует из (2.1)-(2.7), $t = \tau$ – время прохождения через точки

$$M_{\bar{X}} = (z_1^X, z_2^X) \quad (2.9)$$

$$z_1^X = (x_{11}^0 + x_{11}^1)/2, \quad z_2^X = (x_{21}^0 + x_{21}^1)/2$$

$$M_{\bar{Y}} = (z_1^Y, z_2^Y) \quad (2.10)$$

$$z_1^Y = (y_{11}^0 + y_{11}^1)/2, \quad z_2^Y = (y_{21}^0 + y_{21}^1)/2$$

середины отрезков (2.7), (2.8) – есть момент переключения управлений $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ и $v^*(t) = (v_1^*(t), v_2^*(t))$.

Для заданных начальных (1.10) и конечных (1.11) значений решения $x_{11}(t), x_{21}(t), y_{11}(t), y_{21}(t)$ системы (1.9) при управлениях $u_i^*(t)$ (2.1), $u_2^*(t), v_i^*(t)$, $i = 1, 2$ (2.3) не обязательно удовлетворяют наложенным ограничениям (1.13).

Получим условия на начальные и конечные координаты, обеспечивающие выполнение ограничения (1.13), т.е. отсутствия столкновения.

3. Построения оптимальных управлений с учётом фазовых ограничений.

Уравнения прямых, проходящих через заданные точки $(x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1)$ и $(y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1)$, имеют вид

$$L_X(z_1, z_2; x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1) = (z_1 - x_{11}^0)(x_{21}^1 - x_{21}^0) - (z_2 - x_{21}^0)(x_{11}^1 - x_{11}^0) = 0 \quad (3.1)$$

$$L_Y(z_1, z_2; y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) = (z_1 - y_{11}^0)(y_{21}^1 - y_{21}^0) - (z_2 - y_{21}^0)(y_{11}^1 - y_{11}^0) = 0$$

Отрезки $\bar{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $\bar{Y}((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ пересекаются в том и только в том случае, когда точки (y_{11}^0, y_{21}^0) и (y_{11}^1, y_{21}^1) находятся в разных сторонах от прямой L_X , а точки (x_{11}^0, x_{21}^0) и (x_{11}^1, x_{21}^1) – от прямой L_Y , т.е. удовлетворяются соответственно следующие неравенства:

$$Z_X(z^{0,1}) = L_X(y_{11}^0, y_{21}^0; x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1) L_X(y_{11}^1, y_{21}^1; x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1) < 0 \quad (3.2)$$

$$Z_Y(z^{0,1}) = L_Y(x_{11}^0, x_{21}^0; y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) L_Y(x_{11}^1, x_{21}^1; y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) < 0$$

где

$$z^{0,1} = (x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1, y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) \in R^8. \quad (3.3)$$

Неравенства (3.2) задают область

$$Z^+ = \{z^{0,1} \in R^8 : Z_X(z^{0,1}) < 0, Z_Y(z^{0,1}) < 0\} \quad (3.4)$$

в пространстве начальных и конечных точек (3.3), для которых соответствующие отрезки $\bar{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $\bar{Y}((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ пересекаются. Через $M_{\bar{X}\bar{Y}} = (z_1^p, z_2^p)$ обозначим точку их пересечения.

Для выполнения условия нестолкновения (1.13) объектов X и Y при управлениях (2.1), (2.3) необходимо и достаточно, чтобы не выполнялись равенства $z_i(t, x_{i1}^0, x_{i1}^1, y_{i1}^0, y_{i1}^1) = (x_{i1}(t, x_{i1}^0, x_{i1}^1) - y_{i1}(t, y_{i1}^0, y_{i1}^1)) = 0, t \in (0, T), i = 1, 2, \quad (3.5)$ где $x_{i1}(t, x_{i1}^0, x_{i1}^1)$ и $y_{i1}(t, y_{i1}^0, y_{i1}^1)$ определяются по формулам (2.4), (2.5).

Если $z^{0,1} \in Z^- = R^8 \setminus Z^+$, то отрезки $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ не пересекаются, следовательно, система (3.5) заведомо несовместима.

Пусть $z^{0,1} \in Z^+$, тогда для заданных начальных и конечных значений $z_i^{0,1} = (x_{i1}^0, x_{i1}^1, y_{i1}^0, y_{i1}^1), i = 1, 2, (1.10), (1.11)$ введём обозначение

$$M^{(i)}(t, z_i^{0,1}) = \left\{ t \in (t_0, T) : z_i(t, z_i^{0,1}) = 0 \right\}, i = 1, 2. \quad (3.6)$$

Тогда система (3.5) будет разрешимой на интервале $(0, T)$, если

$$z^{0,1} \in Z_0^+ \quad Z_0^+ = \left\{ z^{0,1} \in Z^+ : \bigcap_{i=1}^2 M^{(i)}(t, z_i^{0,1}) \neq \emptyset, t \in (0, T) \right\} \quad (3.7)(a)$$

и будет неразрешимой, если

$$z^{0,1} \in Z^+ \setminus Z_0^+, \quad Z^+ \setminus Z_0^+ = \left\{ z^{0,1} \in Z^+ : \bigcap_{i=1}^2 M^{(i)}(t, z_i^{0,1}) = \emptyset, t \in (0, T) \right\} \quad (3.7)(b)$$

Определение. При условиях (3.2) отрезки $\bar{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $\bar{Y}'((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ назовём центрально-симметричными, если в точке пересечения эти отрезки делятся пополам

$$M_{\bar{X}\bar{Y}} = M_{\bar{X}} = M_{\bar{Y}}. \quad (3.8)$$

Из (3.8), (2.9) и (2.10) следует, что отрезки $\bar{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $\bar{Y}'((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ являются центрально-симметричными друг к другу в том и только в том случае, если координаты краевых точек удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x_{11}^0 + x_{21}^0 = y_{11}^0 + y_{21}^0, \quad x_{11}^1 + x_{21}^1 = y_{11}^1 + y_{21}^1. \quad (3.9)$$

Утверждение. Система (3.5) при управлениях (2.1), (2.3) разрешима, если отрезки (2.7) и (2.8) центрально-симметричны, т.е. выполняются условия (3.9).

Действительно, двигаясь при управлениях (2.1), (2.3) по центрально-симметричным отрезкам (2.7) и (2.8), для которых выполняются условия (3.9), объекты X, Y достигают точки пересечения $M_{\bar{X}\bar{Y}}$, являющейся также точкой середины каждой из отрезков (2.7) и (2.8) одновременно, в момент времени (2.6), т.е. система (3.5) совместима.

Пусть $\bar{Y}$ не является центрально-симметричным по отношению $\bar{X}$, т.е. пересекается с $\bar{X}$ в некоторой точке, не являющейся центром симметрии крайних точек обоих отрезков. Сделаем параллельный перенос отрезка $\bar{Y}$ так, чтобы точка $M_{\bar{Y}} = ((y_{11}^0 + y_{21}^0)/2, (y_{11}^1 + y_{21}^1)/2)$ – середина отрезка $\bar{Y}$ – перешла в точку

$M_{\bar{X}} = ((x_{11}^0 + x_{21}^0) / 2, (x_{11}^1 + x_{21}^1) / 2)$ – середины отрезка $\bar{X}$. Это можно осуществить с помощью следующих формул:

$$y'_{11} = y_{11} + \alpha, \quad y'_{21} = y_{21} + \beta, \quad (3.10)$$

где

$\alpha = ((x_{11}^0 + x_{11}^1) / 2 - (y_{11}^0 + y_{11}^1) / 2)$, $\beta = ((x_{21}^0 + x_{21}^1) / 2 - (y_{21}^0 + y_{21}^1) / 2)$. При таком переносе $\bar{Y}$ перейдет к центрально-симметричному по отношению к $\bar{X}$ отрезку $\bar{Y}'$ со следующими начальными и конечными точками:

$$y'^0 = (y'_{11}, y'_{21}) = (y_{11}^0 + \alpha, y_{21}^0 + \beta) \quad (3.11)$$

$$y'^1 = (y'_{11}, y'_{21}) = (y_{11}^1 + \alpha, y_{21}^1 + \beta).$$

Теорема. Для того, чтобы система (3.5) при условиях (3.7)(а) и управлениях (2.1), (2.3) была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее соотношение:

$$(x_{11}^0 - y_{11}^0)(x_{21}^1 - y_{21}^1) = (x_{11}^1 - y_{11}^1)(x_{21}^0 - y_{21}^0). \quad (3.12)$$

Необходимость. Пусть в некоторый момент времени $t \in (0, T / 2)$ система (3.5) разрешима. Тогда, пользуясь формулами (2.4)-(2.6), из (3.5) получим

$$\begin{cases} (u_1^0 - v_1')t^2 / 2 + x_{11}^0 - y_{11}^0 = 0 \\ (u_2' - v_2')t^2 / 2 + x_{21}^0 - y_{21}^0 = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Так как $u_1^0 \neq v_1'$ и $u_2' \neq v_2'$, то исключив время t из (3.13), найдём

$$(x_{11}^0 - y_{11}^0)(u_1^0 - v_1')^{-1} = (x_{21}^0 - y_{21}^0)(u_2' - v_2')^{-1}$$

Отсюда, учитывая (2.4)-(2.6), после некоторых упрощений получим (3.12).

Достаточность. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при условии (3.12) начальная точка отрезка $\bar{Y}$ находится на отрезке, соединяющего начальные точки отрезка $\bar{X}$ и центрально-симметричному к отрезку $\bar{Y}'$ с концами (3.11). Действительно, уравнение отрезка, соединяющий начальные точки отрезков $\bar{X}$ и $\bar{Y}'$, следующее:

$$(z_1 - x_{11}^0)[(y_{11}^0 - x_{11}^0) + (x_{11}^1 - y_{11}^1)]^{-1} = (z_2 - x_{21}^0)[(y_{21}^0 - x_{21}^0) + (x_{21}^1 - y_{21}^1)]^{-1}$$

которое после подстановки $z_1 = y_{11}^0$, $z_2 = y_{21}^0$ и некоторых упрощений принимает вид (3.12).

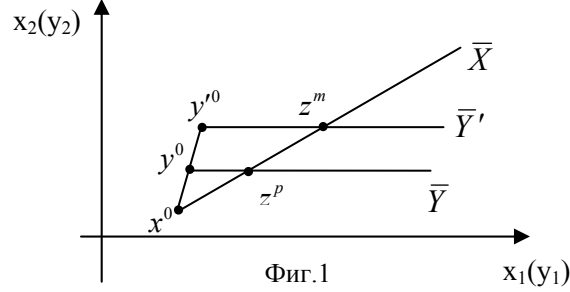
Покажем, что время движения объектов X и Y до точки пересечения $M_{\bar{X}\bar{Y}}$ совпадают. Для удобства введём следующие обозначения: $x^0 = (x_{11}^0, x_{21}^0)$, $y^0 = (y_{11}^0, y_{21}^0)$ – начальные точки объектов X и Y , $y'^0 = (y'_{11}, y'_{21})$ – начальная точка отрезка $\bar{Y}'$ (3.11), $z^p = M_{\bar{X}\bar{Y}} = (z_1^p, z_2^p)$ – точка пересечения отрезков $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, а $z^m = M_{\bar{X}} = (z_1^m, z_2^m)$ – точка середины отрезка $\bar{X}$, где $z_1^m = (x_{11}^0 + x_{21}^0) / 2$, $z_2^m = (x_{11}^1 + x_{21}^1) / 2$ (2.9).

Тогда при условии (3.12) на плоскости образуются подобные треугольники $\Delta x^0 y^0 z^p$ и $\Delta x^0 y'^0 z^p$ (фиг.1), для которых

$$|x^0 z^p| / |x^0 z^m| = |y^0 z^p| / |y'^0 z^m|$$

или, с учетом (3.10), (3.11),

$$\frac{((z_1^p - x_1^0)^2 + (z_2^p - x_2^0)^2)^{1/2}}{((z_1^m - x_1^0)^2 + (z_2^m - x_2^0)^2)^{1/2}} = \frac{((z_1^p - y_1^0)^2 + (z_2^p - y_2^0)^2)^{1/2}}{((z_1^m - y_1^0 - \alpha)^2 + (z_2^m - y_2^0 - \beta)^2)^{1/2}} \quad (3.14)$$



Фиг.1

Полагая, что время движения объекта X до точки $z^p = M_{\bar{X}\bar{Y}}$ равно T_X , а для объекта $Y - T_Y$, и учитывая (2.4)-(2.6), а также, что время перемещения объектов X и Y из начальных точек $x^0 = (x_{11}^0, x_{21}^0)$ и $y^0 = (y_{11}^0, y_{21}^0)$, соответственно, до точки пересечения $z^p = M_{\bar{X}\bar{Y}} = (z_1^p, z_2^p)$ одинаково (согласно утверждению), из (3.14) получим

$$\frac{T_X^2((u_1^0)^2 + (u_2^0)^2)^{1/2}}{T^2((u_1^0)^2 + (u_2^0)^2)^{1/2}} = \frac{T_Y^2((v_1^0)^2 + (v_2^0)^2)^{1/2}}{T^2((v_1^0)^2 + (v_2^0)^2)^{1/2}}.$$

Отсюда следует равенство $T_X = T_Y$.

Аналогичным образом, если рассматривать (3.5) на интервале $(T/2, T)$, то после некоторых упрощений получим условие (3.12).

Если множество начальных и конечных точек (3.3), удовлетворяющих (3.12), (3.9), обозначить, соответственно, через

$$\begin{aligned} Z_0^+ &= \{z^{0,1} \in Z^+ : (x_{11}^0 - y_{11}^0)(x_{21}^1 - y_{21}^1) = (x_{11}^1 - y_{11}^1)(x_{21}^0 - y_{21}^0)\}, \\ Z_1^+ &= \{z^{0,1} \in Z_0^+ : x_{11}^i + x_{21}^i = y_{11}^i + y_{21}^i, i = 0, 1\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

то получим следующие включения:

$$Z_1^+ \subset Z_0^+ \subset Z^+ \subset R^8. \quad (3.16)$$

Следствие. Система (3.5) в области (3.4) и управлениях (2.1), (2.3) неразрешима, если точка пересечения $M_{\bar{X}\bar{Y}}$ является серединой только для одного из отрезков $\bar{X}$ или $\bar{Y} - M_{\bar{X}\bar{Y}} = M_{\bar{X}} \neq M_{\bar{Y}}$, или $M_{\bar{X}\bar{Y}} \neq M_{\bar{X}} = M_{\bar{Y}}$, т.е.

$$z^{0,1} \in Z^+ \quad (3.17)$$

Таким образом, в классе управлений с одним переключением (2.1), (2.3) объекты X и Y могут избегать от столкновения в случае, когда отрезки (2.7) и (2.8) не пересекаются – $z^{0,1} \in Z^-$ или в случае, когда отрезки (2.7), (2.8) пересекаются, однако выполняется условие $z^{0,1} \in Z^+ \setminus Z_0^+$ (3.7) (b).

В случае $z^{0,1} \in Z_0^+$, чтобы избежать столкновения, необходимо изменить способы управления. Покажем, что в этом случае в качестве управления объектом $\bar{Y}$, обеспечивающее прямолинейное перемещение, можно, в частности, использовать

управления в совокупности с четырьмя свободными параметрами $\tau_1, v_1'', v_2', v_2''$, $0 \leq v_1'', v_2', v_2'' \leq v_i^0$ следующих структур:

$$v_1(t) = \begin{cases} v_1^0, & t \in [0, \tau_1) \\ -v_1'', & t \in [\tau_1, T] \end{cases}, \quad v_2(t) = \begin{cases} v_2', & t \in [0, \tau_1) \\ -v_2'', & t \in [\tau_1, T] \end{cases}, \quad (3.18)$$

где

$$\tau_1 = \frac{v_1''}{v_1'' + v_1^0} T, \quad v_1'' = \frac{2v_1^0(y_{11}^1 - y_{11}^0)}{T^2 v_1^0 - 2(y_{11}^1 - y_{11}^0)}, \quad v_2' = \frac{v_1^0(y_{21}^1 - y_{21}^0)}{y_{11}^1 - y_{11}^0}, \quad (3.19)$$

$$v_2'' = \frac{2v_1^0(y_{21}^1 - y_{21}^0)}{T^2 v_1^0 - 2(y_{11}^1 - y_{11}^0)}.$$

Не нарушая общности, положим, что $y_1^1 - y_1^0 \geq y_2^1 - y_2^0$. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что управления (3.18) удовлетворяют наложенным ограничениям (1.12), т.е.

$$v_1'' < v_1^0, \quad v_2', v_2'' \leq v_2^0.$$

Тогда интегрируя уравнения движения объекта Y (1.9) с краевыми условиями (1.10), (1.11) при управлениях (3.18), (3.19), получим

$$y_{11}(t) = \begin{cases} v_1^0 t^2 / 2 + y_{11}^0, & t \in [0, \tau_1) \\ -v_1''(T-t)^2 / 2 + y_{11}^1, & t \in [\tau_1, T] \end{cases}, \quad (3.20)$$

$$y_{21}(t) = \begin{cases} v_2' t^2 / 2 + y_{21}^0, & t \in [0, \tau_1) \\ -v_2''(T-t)^2 / 2 + y_{21}^1, & t \in [\tau_1, T] \end{cases}.$$

На плоскости (z_1, z_2) траектория движения объекта Y (3.20), соответствующая управлениям (3.18), (3.19), также представляет собой прямую линию. Пусть T_X – время перемещения до точки $z^p = M_{\bar{X}\bar{Y}} = (z_1^p, z_2^p)$ объекта X , а T_Y – объекта Y . X проходит через середину отрезка $\bar{X}$ в момент $t = \tau_{x1} = T/2$, а Y – через середину отрезка $\bar{Y}$ в момент T' , которое определяется из условия $y_{i1}(T') = \frac{y_{i1}^0 + y_{i1}^1}{2}, i = 1, 2$. С учетом (3.20), после некоторых упрощений получим

$$T' = T - \sqrt{\frac{\Delta y_{i1}}{v_i''}} = T - \sqrt{(T^2 - 2\Delta y_{i1})/2}. \text{ Из (2.1) и (2.2) имеем } 2\Delta y_{i1} < T^2/2 \text{ и}$$

следовательно, $T' < T/2$. А это значит, что если $z^{0,1} \in Z_1^+$, т.е. отрезки $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ центрально-симметричны, то столкновение не происходит. Теперь рассмотрим $z^{0,1} \in Z_0^+ \setminus Z_1^+$. Покажем, что в этом случае тоже объекты избегают столкновения. Так как $\tau_1 < T/2$, то возможны следующие два случая: 1) $T_Y < \tau_1$ и 2) $\tau_1 < T_Y < T/2$.

В случае 1) используя подобие треугольников $\Delta x^0 y^0 z^p$ и $\Delta x^0 y'^0 z^p$ (фиг.1), из (3.14) получим

$$\frac{T_X^2 \sqrt{(u_1^0)^2 + (u_2'')^2} / 2}{T^2 \sqrt{(u_1^0)^2 + (u_2'')^2} / 8} = \frac{T_Y^2 \sqrt{(v_1^0)^2 + (v_2')^2} / 2}{\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2} / 2}$$

или

$$\frac{T_X^2}{T^2 / 4} = \frac{T_Y^2 \sqrt{(v_1^0)^2 + (v_2')^2}}{\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2}},$$

откуда следует, что равенство $T_X = T_Y$ имеет место, когда

$$\frac{1}{T^2 / 4} = \frac{\sqrt{(v_1^0)^2 + (v_2')^2}}{\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (\Delta y_2 / \Delta y_1)^2}}{\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2}} = \frac{1}{\Delta y_1},$$

которое невозможно, поскольку $\Delta y_1 < \Delta x_1 = \frac{T^2}{4}$.

В случае 2) из (3.14) получим

$$\frac{T_X^2 \sqrt{(u_1^0)^2 + (u_2'')^2} / 2}{T^2 \sqrt{(u_1^0)^2 + (u_2'')^2} / 8} = \frac{\sqrt{(\Delta y_1 - v_1''(T - T_Y)^2 / 2)^2 + (\Delta y_2 - v_2''(T - T_Y)^2 / 2)^2}}{\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2} / 2}$$

или

$$\frac{T_X^2}{T^2 / 2} = 1 - \frac{(T - T_Y)^2}{T^2 - 2\Delta y_1}.$$

Полагая здесь $T_X = T_Y$, разрешив последнее относительно Δy_1 и подставив найденное в неравенство $T^2 - 2\Delta y_1 > T^2 / 2$, получим неравенство $(T - 2T_Y)^2 < 0$,

которое не имеет места ни при каком T_Y .

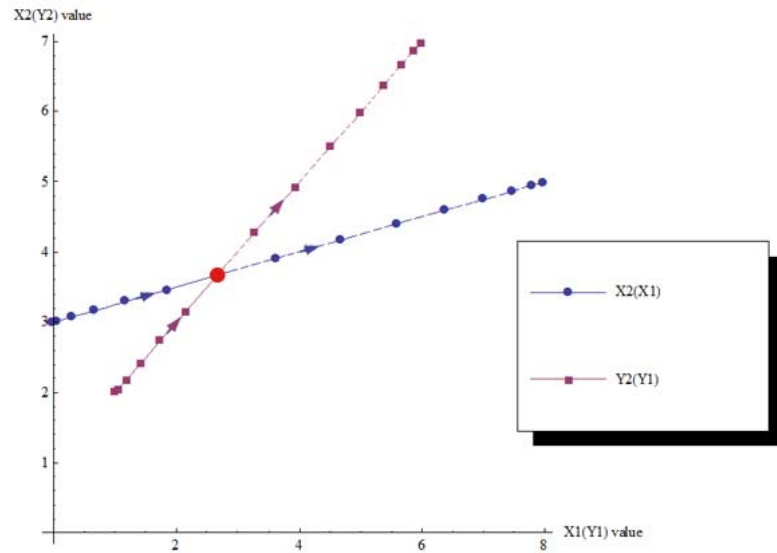
Таким образом, в классе управлений с одним переключением объекты X и Y избегают от столкновения при любом $z^{0,1} \in R^8$. В случае, когда отрезки (2.7) и (2.8) не пересекаются – $z^{0,1} \in Z^-$ или в случае, когда отрезки (2.7), (2.8) пересекаются, однако выполняется условие $z^{0,1} \in Z^+ \setminus Z_0^+$ (3.7) (b), то используются управления (2.1), (2.3), а в случае, когда $z^{0,1} \in Z_0^+$ – (2.1), (2.3), (3.18), (3.19).

4. Расчётные результаты. В качестве иллюстрации приведём пример численной реализации описанного алгоритма управления объектами (1.9) при ограничениях (1.10)-(1.13). Начальные и конечные безразмерные данные задавались следующими:

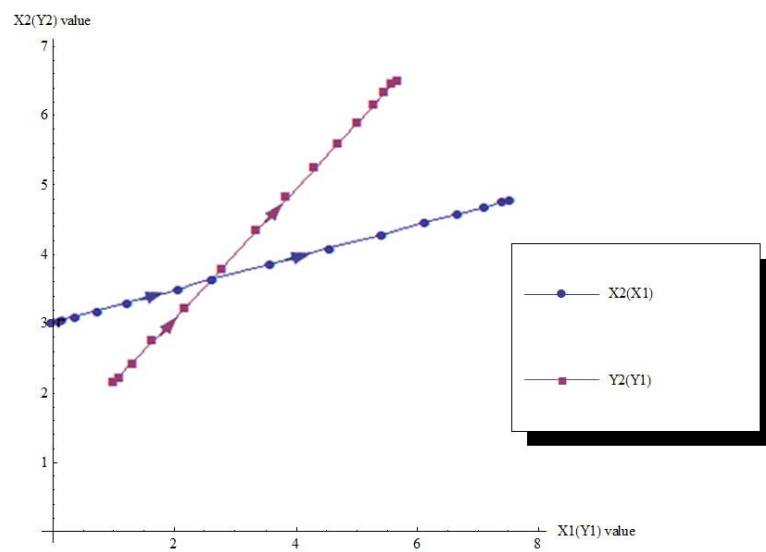
$$\begin{aligned} x^0 &= (0 \ 3), \dot{x}^0 = (0 \ 0), y^0 = (1 \ 2), \dot{y}^0 = (0 \ 0) \\ x^1 &= (8 \ 5), \dot{x}^1 = (0 \ 0), y^1 = (6 \ 7), \dot{y}^1 = (0 \ 0). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Координатам (4.1) соответствует случай $z^{0,1} \in Z_0^+$ (3.15). Следовательно, при управлениях (2.1), (2.3) с параметрами $u_1' = u_1^0 = 1$, $u_2' = 1/4$, $v_1' = v_2' = 5/8$, $T = 2\tau = 4\sqrt{2}$ объекты сталкиваются (фиг.2). На фиг.2,3 сплошными линиями представлены траектории движения объектов на плоскости. Стрелками показаны направления движений точечных объектов X и Y . Значками (●) и (■) обозначены

последовательные положения объектов X и Y в одинаковые моменты времени соответственно.



Фиг. 2



Фиг. 3

Во избежание столкновения, при тех же начальных и конечных положениях (4.1) объекты могут использовать управления (2.1), (2.3), (3.18), (3.19) с параметрами $u'_1 = u^0_1 = 1$, $u'_2 = 1/4$, $\tau = 2\sqrt{2}$, $v'_1 = v^0_1 = 1$, $v''_1 = 5/11$, $v'_2 = 1$, $v''_2 = 5/11$, $\tau_1 = 5/2\sqrt{2}$, $T = 4\sqrt{2}$ (фиг. 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чахмахчян Р.Э. Управления движениями динамических объектов, уклоняющихся от столкновения //В сб. трудов международной школы – конференции молодых ученых "Механика": Агавнадзор, Армения, 24-28 сентября, 2009 г., с.337-342.
2. Аветисян В.В., Чахмахчян Р.Э. Ограниченные управления пространственными движениями двух динамических объектов, избегающих столкновения // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 4. С.59-70.
3. Аветисян В.В., Чахмахчян Р.Э. Оптимизация режимов управления двух динамических объектов, избегающих столкновения на плоскости //В сб.. научных трудов международной конференции: "Актуальные проблемы механики сплошной среды". Дилижан, 4-8 октября 2010г., с. 10-14.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392с.

Сведения об авторе:

Чахмахчян Рафаел Эдвардович, аспирант кафедры теории оптимального управления и приближённых методов, факультета математики и механики Ереванского государственного университета, (374 93) 28 52 24.

E-mail: rafayel.ch@gmail.com

Поступила в редакцию 25.03.2011

Բ Ո Վ Ա Ն Ն Դ Ա Կ ՈՒԹ Յ ՈՒՆ

Գասպարյան Ա.Վ. Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ շերտավոր կոմպոզիտի լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի շուրջ	3
Բաղդասարյան Գ.Ե., Մարուխյան Ս.Ա. Համառոտեցք գլանային թաղանթների դինամիկ վարքը, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է հեղուկով.....	10
Գրիգորյան Շ.Հ., Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ. Գազի պղպջակներ պարունակող հոսող հեղուկով լցված գլանային թաղանթի առանցքասիմետրիկ տատանումները.....	22
Մովսիսյան Լ.Ա. Գլանային թաղանթի համար մի քանի ոչ դասական խնդիրներ	31
Բելուբեկյան Ս.Վ., Գևորգյան Ա.Վ., Ղազարյան Կ.Բ. Տարաբևեռացած մագնիսաառաձգական մակերևութային ալիքների փոխադարձ փոխակերպումները.....	39
Դանոյան Զ.Ն., Աթոյան Լ.Հ., Դանոյան Ն.Զ. Ֆերոմագնիսական կիսատարածության մագնիսական վիճակը մագնիսական պոտենցիալի արտաքին զծային խոտորման դեպքում.....	46
Շահինյան Ս.Գ. Կայունության սահմանման մասին ինտեգրալով փոքր գրգռումների դեպքում	53
Չախմախչյան Ռ.Է. Բախումից խուսափող երկու դինամիկ օբյեկտների օպտիմալ ուղղագիծ տեղափոխումները հարթության վրա	58

СОДЕРЖАНИЕ

Гаспарян А.В. К задаче о напряжённом состоянии слоистого композита при антиплоской деформации.....	3
Багдасарян Г.Е., Марухян С.А. Динамическое поведение коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненным жидкостью	10
Григорян Ш.А., Оганян Г.Г., Саакян С.Л. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки, наполненной протекающей смесью жидкости с пузырьками газа	22
Мовсисян Л.А. – Некоторые неклассические задачи устойчивости для цилиндрических оболочек.....	31
Белубекян М.В., Геворгян А.В., Казарян К.Б. Взаимные трансформации магнитоупругих поверхностных волн разных поляризаций	39
Даноян З.Н., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Магнитное состояние ферромагнитного полупространства при внешнем линейном возмущении магнитного потенциала.....	46
Шагинян С.Г. Об определении устойчивости при интегрально малых возмущениях	53
Чахмакчян Р.Э. – Оптимальные прямолинейные перемещения двух динамических объектов, избегающих столкновения на плоскости.....	58

CONTENTS

Gasparyan A.V. To the Problem of Stressed State of a Layered Composite under Antiplane Deformation.....	3
Baghdasaryan G.Ye, Marukhyan S.A. Dynamic behavior of a coaxial cylindrical shells, with a gap partially filled with fluid.....	10
Grigoryan Sh.H., Ohanyan G.G., Sahakyan S.L. The axial symmetric vibrations of cylindrical shell, filled by the flowing Gas-Liquid mixture	22
Movsisyan L.A. The stability of cylindrical ring under punches	32
Belubekyan M.V., Gevorgyan A.V., Ghazaryan K.B. Mutual transformations of magnetoelastic surface waves of different polarizations.....	39
Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Danoyan N.Z. Magnetic constituency of ferromagnetic half-space under external linear perturbation of magneto-static potential.....	46
Shahinyan S.G. About stability definition at integrally small indignations	53
Chakhmakhchyan R.E. Optimal plane rectilinear movements two dynamic objects avoiding collision	58