

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻՍԻՆԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

2011



**Редколлегия журнала «Известия НАН Армении. Механика», сердечно поздравляет Президента Национальной Академии Наук Армении, академика Радика Мартиросовича Мартиросяна с 75-летним юбилеем и желает ему доброго здоровья, плодотворной научной деятельности и дальнейших творческих успехов во благо развития науки в Армении.**

УДК 539.3

**О ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ОРТОТРОПНОЙ  
ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ  
АКОПЯН В.Н., СИМОНЯН А.Р.**

**Ключевые слова:** разрез, трещина, включение, смешанная задача, задача Римана

**Key words:** cut, crack, inclusion, mixed problem, Riemann problem

Հակոբյան Վ.Ն., Միմոնյան Ա.Ր.

Ճեղքեր պարունակող օրթոտրոպ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակի մասին

Աշխատանքում օրթոտրոպ հարթության համար առաձգականության տեսության հավասարումների խզվող լուծումների հիման վրա առաջարկվում են նոր կոմպլեքս ֆունկցիաներ, որոնք թույլ են տալիս օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղություններից մեկի վրա դեֆեկտներ պարունակող օրթոտրոպ հարթության հարթ խնդիրը բերել Ռիմանի խնդրի մեկ կամ երկու ֆունկցիաների համար: Որպես օրինակ բերված է օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղություններից մեկի վրա իրար անմիջապես շարունակող վերջավոր ճաք և բացարձակ կոշտ ներդրակ պարունակող հարթության վերաբերյալ խնդրի փակ լուծումը:

Hakobyan V.N., Simonyan A.R.

On Plane-Deformed State of Orthotropic Plane with Slits

In present paper, on the base of discontinuous solutions of the theory of elasticity for orthotropic plane the new complex potential functions are purposed. Using these functions two-dimensional problem for orthotropic plane with defects on one of the principal direction is reduced to the Riemann problem for one or two functions as in isotropic case. For an example the closed solution of plane-deformed state of orthotropic plane, containing the crack with finite length and the absolutely rigid thin inclusion, continuing each other on one line of orthotropy, is considered.

В настоящей работе, на основе разрывных решений уравнений теории упругости для ортотропной плоскости предлагаются новые комплексные функции, позволяющие, как и в изотропном случае, плоскую задачу для ортотропной плоскости с дефектами на одном из главных направлений ортотропии свести к задаче Римана для одной или двух функций. В качестве примера приведено замкнутое решение задачи о плоско-деформированном состоянии ортотропной плоскости, содержащей на одной из линий ортотропии конечную трещину и абсолютно жесткое тонкое включение непосредственно продолжающие друг друга.

**1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений**

Пусть ортотропная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат  $Oxy$ , направления осей которой совпадают с главными направлениями ортотропии материала, на линии  $y=0$  по линии  $L$ , состоящей из совокупности конечного числа непересекающихся интервалов, содержит разрез. Будем считать, что на интервалах  $L^{(+)}$  и  $L^{(-)}$  соответственно верхнего и нижнего берегов разреза заданы нормальные  $P_0^{(\pm)}(x)$  и касательные напряжения  $\tau_0^{(\pm)}(x)$ , а на интервалах  $S^{(+)}$  и  $S^{(-)}$  соответственно верхнего и нижнего берегов разреза заданы вертикальные  $v_{\pm}(x)$  и горизонтальные  $u_{\pm}(x)$  смещения и равнодействующие действующих там напряжений  $P_j^{(\pm)}$ .

Ставится задача: построить замкнутое решение.

Мысленно разделим плоскость на верхнюю и нижнюю полуплоскости и снабдим индексами «+» и «-» компоненты тензора напряжений и смещений соответствующих полуплоскостей. Тогда поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(+)}(x, +0) &= \sigma_y^{(-)}(x, -0), \quad \tau_{xy}^{(+)}(x, +0) = \tau_{xy}^{(-)}(x, -0) \\ U_+(x, +0) &= U_-(x, -0), \quad V_+(x, +0) = V_-(x, -0) \end{aligned} \quad (x \notin L) \quad (1.1a)$$

$$\begin{aligned} U_{\pm}(x, \pm 0) &= u_{\pm}(x); \quad V_{\pm}(x, \pm 0) = v_{\pm}(x); \quad (x \in S_{\pm}) \\ \sigma_y^{(\pm)}(x, \pm 0) &= -P_0^{(\pm)}(x); \quad \tau_{xy}^{(\pm)}(x, \pm 0) = \tau_0^{(\pm)}(x) \quad (x \in L_{\pm}) \end{aligned} \quad (1.1b)$$

Здесь  $U_{\pm}(x, y)$  и  $V_{\pm}(x, y)$  – горизонтальные и нормальные компоненты смещений точек соответствующих полуплоскостей, каждая в своей области определения удовлетворяющая уравнениям [4,5]:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial y^2} + (1 + a_{12}) \frac{\partial^2 V_{\pm}}{\partial x \partial y} &= 0; \\ \frac{\partial^2 V_{\pm}}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 V_{\pm}}{\partial y^2} + (1 + a_{12}) \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial x \partial y} &= 0; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$\sigma_y^{(\pm)}(x, y)$ ,  $\tau_{xy}^{(\pm)}(x, y)$  – компоненты тензора напряжений этих полуплоскостей – связаны с компонентами напряжений по формулам

$$\sigma_y^{(\pm)} = \mu_{12} \left( a_{12} \frac{\partial U_{\pm}}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial V_{\pm}}{\partial y} \right); \quad \tau_{xy}^{(\pm)} = \mu_{12} \left( \frac{\partial U_{\pm}}{\partial y} + \frac{\partial V_{\pm}}{\partial x} \right). \quad (1.3)$$

Кроме того,  $u_{\pm}(x)$ ,  $v_{\pm}(x)$ ,  $P_0^{(\pm)}(x)$  и  $\tau_0^{(\pm)}(x)$  – гладкие в указанных областях функции, а  $a_{ij} = c_{ij} / c_{33}$ ;  $\mu_{12} = c_{33}$ ,  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – компоненты тензора Коши. Постоянные  $a_{ij}$  связаны с физическими постоянными материала плоскости формулами:

$$a_{11} = E_1 \left[ \mu_{12} \left( 1 - \nu_{12}^2 E_2 / E_1 \right) \right]^{-1}; \quad a_{22} = a_{11} E_2 / E_1; \quad a_{12} = \nu_{12} a_{22} = \nu_{21} a_{11}.$$

Для решения поставленной задачи введём функции скачков смещений и напряжений  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $\tau(x)$  и условия (1.1a) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(+)}(x, +0) - \sigma_y^{(-)}(x, -0) &= \sigma(x) \\ \tau_{xy}^{(+)}(x, +0) - \tau_{xy}^{(-)}(x, -0) &= \tau(x) \\ U_+(x, +0) - U_-(x, -0) &= U(x) \\ V_+(x, +0) - V_-(x, -0) &= V(x) \end{aligned} \quad (-\infty < x < \infty); \quad (1.4)$$

где

$$U(x) = V(x) = \sigma(x) = \tau(x) = 0. \quad (x \notin L)$$

Используя результаты работы [8], комплексные комбинации смещений и напряжений запишем при помощи введённых функций скачков:

$$\frac{dU_{\pm}(x, -0)}{dx} + i\alpha \frac{dV_{\pm}(x, -0)}{dx} = -\frac{a_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{W'(s)}{s-x} ds + \frac{b_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{\chi(s)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} W'(x); \quad (1.5)$$

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, +0) - i\alpha\tau^{(\pm)}(x, +0) = \frac{c_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{W'(s)}{s-x} ds + \frac{a_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{\chi(s)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} \chi(x). \quad (1.6)$$

$(-\infty < x < \infty).$

Здесь

$$\mu_j = \sqrt{\frac{b_0 + (-1)^{j+1} \sqrt{b_0^2 - 4a_{11}a_{22}}}{2a_{22}}}; \quad b_0 = a_{11}a_{22} - 2a_{12} - a_{12}^2 \quad (j=1, 2);$$

$$a_1 = \frac{(a_{12} - \sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1 + \mu_2)}; \quad a_2 = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} a_1; \quad b_1 = \frac{(1 + \sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\mu_{12}\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1 + \mu_2)};$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} b_1; \quad c_1 = \frac{\mu_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1 + \mu_2)}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} c_1.$$

$$W'(x) = U'(x) + i\alpha V'(x); \quad \chi(x) = \sigma(x) - i\alpha\tau(x); \quad (\alpha = \sqrt[4]{a_{22}/a_{11}}).$$

Теперь, используя полученные формулы, удовлетворим условиям (1.1b), первоначально записав их в виде:

$$\frac{dU_{\pm}(x, -0)}{dx} + i\alpha \frac{dV_{\pm}(x, -0)}{dx} = u_{\pm}(x) + i\alpha v_{\pm}(x) = w_{\pm}(x);$$

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, +0) - i\alpha\tau_0^{(\pm)}(x, +0) = -P_0^{(\pm)}(x) - i\alpha\tau_0^{(\pm)}(x) = \chi_0^{(\pm)}(x).$$

В результате придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \pm \frac{1}{2} W'(s) - \frac{a_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{W'(s)}{s-x} ds + \frac{b_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{\chi(s)}{s-x} ds = w_{\pm}(x); & (x \in S^{(\pm)}) \\ \pm \frac{1}{2} \chi(s) + \frac{c_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{W'(s)}{s-x} ds + \frac{a_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{\chi(s)}{s-x} ds = \chi_0^{\pm}(x); & (x \in L^{(\pm)}) \end{cases} \quad (1.7)$$

которую нужно рассматривать совместно с условиями типа

$$\int_{L_j} \chi(x) dx = P_0^{(j)}; \quad W(a_k) = W(b_k) = 0, \quad (1.8)$$

обеспечивающими равновесие на участках, где заданы смещения, а также непрерывность смещений в конечных точках интервалов, составляющих разрез  $L$ .

## 2. Решение системы определяющих уравнений

Перейдем к решению определяющей системы сингулярных интегральных уравнений (1.7). Для этого рассмотрим аналитичные во всей комплексной плоскости кроме, быть может, линии  $L$ , функции [6]

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\chi(s) + k_j W'(s)}{s-z} ds; \quad \left( k_j = \frac{2(-1)^{j+1} c_1}{\alpha - 2(-1)^j a_1} \right); \quad (j=1,2). \quad (2.1)$$

Используя формулы Племеля–Сохоцкого

$$\Omega_j^\pm(x) = \pm \frac{\chi(s) + k_j W'(s)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\chi(s) + k_j W'(s)}{s-x} ds \quad (j=1,2), \quad (2.2)$$

нетрудно убедиться, что система интегральных уравнений (1.7) при помощи функций  $\Omega_j(z)$  ( $j=1,2$ ) запишется в виде следующей задачи Римана для двух функций:

$$\begin{cases} \Omega_1^+(x) = v_1(x) \Omega_2^-(x) + f_1(x) \\ \Omega_2^+(x) = v_2(x) \Omega_1^-(x) + f_2(x) \end{cases} \quad (x \in L). \quad (2.3)$$

Здесь  $\Omega_j^\pm(x)$  – значения аналитической функции  $\Omega_j(z)$  соответственно на верхнем и нижнем берегах линии  $L$ , а функции  $v_j(x)$  и  $f_j(x)$  ( $j=1,2$ ) даются формулами:

$$v_1(x) = \begin{cases} v & x \in L^{(+)} \\ -1 & x \in S^{(+)} \end{cases}; \quad v_2(x) = \begin{cases} 1/v & x \in L^{(-)} \\ -1 & x \in S^{(-)} \end{cases}; \quad v = \frac{\alpha - 2a_1}{\alpha + 2a_1};$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\chi_1(x)}{1+v} & x \in L^{(+)} \\ \frac{b_1}{\alpha} W_1'(x) & x \in S^{(+)} \end{cases}; \quad f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1+v}{v} \chi_2(x) & x \in L^{(-)} \\ \frac{\alpha}{b_1} W_2'(x) & x \in S^{(-)} \end{cases}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению задачи Римана для двух функций (2.3). По результатам работы [1] решение этой задачи всегда можно построить в замкнутом виде, сводя систему уравнений к совместному решению одной линейной и одной нелинейной задач Римана. При этом, когда разрез  $L$  состоит из одного интервала  $(a, b)$ , функции  $\Omega_j(z)$  даются формулами:

$$\Omega_j(z) = X_j(z) \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_L \left[ \frac{f_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} + \frac{f_2(\tau)}{X_2^+(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau-z} - \right. \\ \left. - (-1)^j \frac{B_1(z)}{4\pi i} \int_L \left[ \frac{f_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} - \frac{f_2(\tau)}{X_2^+(\tau)} \right] \frac{d\tau}{B_1^+(\tau)(\tau-z)} + C_0^j \right\}; \quad (2.4)$$

$$X_j(z) = (z-b)^{-\alpha} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ \Gamma_0(z) - (-1)^j \Gamma(z) \right] \right\}; \quad (2.5)$$

$$\Gamma_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln[\alpha(\tau)] \frac{d\tau}{\tau-z}; \quad \Gamma(z) = \frac{B_1(z)}{2\pi i} \int_L \ln[\beta(x)] \frac{d\tau}{B_1^+(\tau)(\tau-z)} \quad (2.6)$$

$$B_1(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}; \quad \alpha(\tau) = v_1(\tau)v_2(\tau); \quad \beta(\tau) = v_1(\tau)/v_2(\tau); \quad (j=1,2)$$

Однако, оказывается, что если на берегах линии  $L$  коэффициенты  $v_j(x)$  ( $j=1,2$ ) – отличные от нуля постоянные, то решение задачи можно свести к

совместному решению двух линейных задач Римана. Действительно, в этом случае, умножая второе уравнение (1.7) на  $\lambda_j = (-1)^{j+1} \sqrt{v_1/v_2}$ , суммируя с первым и вводя новые функции по формулам

$$\Phi_j(z) = \Omega_1(z) + \lambda_j \Omega_2(z),$$

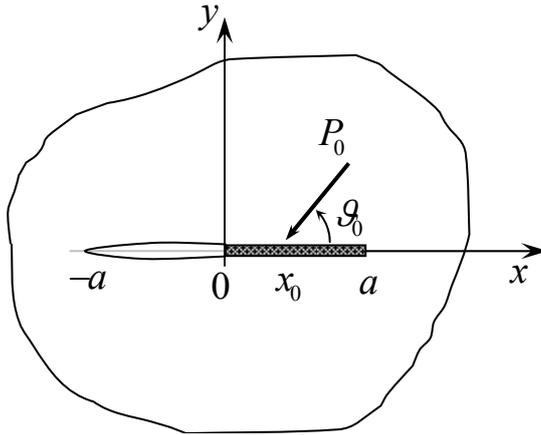
придём к двум обычным линейным уравнениям Римана:

$$\Phi_j^+(x) = G_j \Phi_j^-(x) + Q_j(x) \quad (x \in L); \quad (2.7)$$

$$Q_j(x) = F_1(x) + \lambda_j F_2(x); \quad G_j = (-1)^{j+1} \sqrt{v_1 v_2}; \quad j = 1, 2.$$

### 3. Плоско-деформированное состояние ортотропной плоскости с конечным разрезом и абсолютно жёстким включением, непосредственно продолжающее разрез

В качестве примера рассмотрим задачу для ортотропной плоскости, содержащей разрез на интервале  $(-a, 0)$  и абсолютно жёсткое тонкое включение на интервале  $(0, a)$  одного из главных направлений ортотропии  $y = 0$ . Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием сосредоточенной нагрузки  $P_0$ ,



Фиг. 1

приложенной к включению в точке  $x = x_0$  и составляющей угол  $\vartheta_0$  с осью  $ox$  (фиг.1). Отметим, что аналогичная задача для изотропной плоскости рассмотрена в работе [9].

Требуется определить контактные напряжения, действующие под включением, коэффициент интенсивности напряжений в концевой точке трещины  $x = -a$ , а также расстояние точки приложения нагрузки  $x_0$  от начала координат, при котором угол поворота включения равен нулю.

В рассматриваемом случае

$$v_1(x) = \begin{cases} v & -a < x < 0 \\ -1 & 0 < x < a \end{cases}; \quad v_2(x) = \begin{cases} 1/v & -a < x < 0 \\ -1 & 0 < x < a \end{cases}; \quad f_1(x) = f_2(x) = 0$$

и система (2.3) принимает вид:

$$\begin{cases} \Omega_1^+(x) = v \Omega_2^-(x) \\ \Omega_2^+(x) = \frac{1}{v} \Omega_1^-(x) \end{cases} \quad (-a < x < 0); \quad \begin{cases} \Omega_1^+(x) = -\Omega_2^-(x) \\ \Omega_2^+(x) = -\Omega_1^-(x) \end{cases} \quad (0 < x < a) \quad (3.1)$$

Тогда, записав функции  $v_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) в виде

$$v_1(\tau) = \begin{cases} v e^{2\pi i m} & -a < \tau < 0 \\ e^{2\pi i k + \pi i} & 0 < \tau < a \end{cases}; \quad v_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{v} e^{2\pi i n} & -a < \tau < 0 \\ e^{2\pi i l + \pi i} & 0 < \tau < a \end{cases};$$

где  $m, n, k$  и  $l$  – целые числа, получим

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} e^{2\pi i(m+n)} & (-a < \tau < 0) \\ e^{2\pi i(k+l+1)} & (0 < \tau < a) \end{cases}; \quad \beta(\tau) = \begin{cases} v^2 e^{2\pi i(m-n)} & (-a < \tau < 0) \\ e^{2\pi i(k-l)} & (0 < \tau < a) \end{cases}.$$

Очевидно, что искомые функции  $\Omega_j(z)$  в точках  $x = -a, 0, a$  могут иметь интегрируемые особенности. Это возможно только в двух случаях, когда  $m = 1, n = k = l = 0$  или  $n = 1, m = k = l = 0$ . Для этих двух случаев по формулам (2.5) и (2.6) найдём

$$\Gamma_0^{(1)}(z) = \Gamma_0^{(2)}(z) = \ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right); \quad \Gamma^{(j)}(z) = \frac{C_j^{(0)}}{2} \left\{ 1 - \frac{B_1(z)}{\pi i} \int_0^a \frac{d\tau}{B_1^+(\tau)(\tau-z)} \right\}; \quad (3.2)$$

$$C_j^{(0)} = 2 \ln v - (-1)^j 2\pi i.$$

При этом,

$$\Gamma^{(j)\pm}(x) = \frac{C_j^{(0)}}{2} \left\{ 1 \mp \frac{1}{\pi i} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| \right\} \quad (-a < x < 0), \quad (3.3)$$

$$\Gamma^{(j)\pm}(x) = \mp \frac{C_j^{(0)}}{2\pi i} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| \quad (0 < x < a).$$

Приняв в формуле (2.4)  $\alpha = 1$ , получим

$$X_j^{(k)}(z) = \frac{\exp\left\{-(-1)^j \Gamma^{(k)}(z)/2\right\}}{\sqrt{z^2 - a^2}}; \quad (j, k = 1, 2).$$

Далее, учитывая линейность системы (3.1), её общее решение запишем в виде линейной комбинации полученных решений, т.е.

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[ C_1 \exp\left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \Gamma^{(1)}(z)\right) + C_2 \exp\left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \Gamma^{(2)}(z)\right) \right],$$

где  $C_j$  – неизвестные постоянные, подлежащие определению. Для определения постоянных  $C_j$  ( $j = 1, 2$ ) и  $x_0$  используем уравнение равновесия включения и равенства нулю скачков смещений в концевых точках трещины, которые запишем в следующей форме:

$$\int_0^a \chi(x) dx = P_0^*; \quad \operatorname{Re} \left\{ \int_0^a x \chi(x) dx \right\} = P_0 x_0 \sin \vartheta_0; \quad (3.4)$$

$$\int_{-a}^0 W'(x) dx = 0; \quad (P_0^* = P_0 (\sin \vartheta_0 - i\alpha \cos \vartheta_0)).$$

Используя формулы (2.3), легко установить, что

$$\chi(x) = \Omega_1^+(x) - \Omega_1^-(x) \quad (0 < x < a); \quad (3.5)$$

$$W'(x) = (\Omega_1^+(x) - \Omega_1^-(x)) / k_1 \quad (-a < x < 0);$$

или

$$\chi(x) = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - x^2}} \left\{ C_1 \left[ \omega^{1/2 - i\gamma}(x) + \omega^{-1/2 + i\gamma}(x) \right] + C_2 \left[ \omega^{1/2 + i\gamma}(x) + \omega^{-1/2 - i\gamma}(x) \right] \right\}; \quad (0 < x < a) \quad (3.6)$$

$$W'(x) = \frac{\sqrt{\nu}}{k_1 \sqrt{a^2 - x^2}} \left\{ C_1 \left[ \omega^{-1/2 + i\gamma}(x) + \omega^{1/2 - i\gamma}(x) \right] - C_2 \left[ \omega^{1/2 + i\gamma}(x) + \omega^{-1/2 - i\gamma}(x) \right] \right\}; \quad (-a < x < 0) \quad (3.7)$$

$$\left( \omega(x) = \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|; \quad \gamma = \ln \nu / 2\pi \right).$$

Подставим значения функций  $\chi(x)$  и  $W'(x)$  в условия (3.4) и учтём значение интегралов [7]

$$\int_{-a}^0 \frac{\omega^p(x) + \omega^{-p}(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{\pi}{2 \cos(\pi p / 2)}; \quad (-1 < \operatorname{Re} p < 1)$$

$$\int_0^a \frac{x \left[ \omega^p(x) + \omega^{-p}(x) \right]}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{\pi a}{\sin(\pi p / 2)};$$

которые можно получить при помощи замены переменной  $\omega(x) = \exp(u)$ . В итоге, из первого и последнего условий (3.4) для коэффициентов  $C_j$  ( $j = 1, 2$ ) получим значения:

$$C_1 = \frac{iP_0^*}{2\pi} \cos(\pi / 4 - i\pi\gamma / 2); \quad C_2 = \frac{iP_0^*}{2\pi} \cos(\pi / 4 + i\pi\gamma / 2).$$

Из второго условия (3.4) найдем

$$x_0 = \frac{1 + 2\gamma \operatorname{sh}(\pi\gamma)}{2 \operatorname{ch}(\pi\gamma)} a = \frac{\sqrt{\nu} + \gamma(\nu - 1)}{\nu + 1} a. \quad (3.8)$$

Используя полученные значения для постоянных  $C_j$  ( $j = 1, 2$ ), формулы (3.6) и (3.7) запишем в виде:

$$\chi(x) = \frac{\sqrt{2}P_0^* Q_0(x)}{2\pi\sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}; \quad W'(x) = -\frac{\sqrt{2\nu}P_0^* Q_1(x)}{2\pi k_1 \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}, \quad (3.9)$$

где

$$Q_0(x) = \left\{ [1 + \omega(x)] \operatorname{ch}(\pi\gamma / 2) \cos(\gamma \ln \omega(x)) - [1 - \omega(x)] \operatorname{sh}(\pi\gamma / 2) \sin(\gamma \ln \omega(x)) \right\};$$

$$Q_1(x) = \left\{ [1 + \omega(x)] \operatorname{sh}(\pi\gamma / 2) \cos(\gamma \ln \omega(x)) + [1 - \omega(x)] \operatorname{ch}(\pi\gamma / 2) \sin(\gamma \ln \omega(x)) \right\}.$$

Следовательно, для скачков напряжений и производных разности смещений берегов разреза получим выражения:

$$\sigma(x) = \frac{\sqrt{2}P_0 \sin \vartheta_0 Q_0(x)}{2\pi\sqrt{\omega(x)(a^2-x^2)}}, \quad \tau(x) = \frac{\sqrt{2}P_0 \cos \vartheta_0 Q_0(x)}{2\pi\sqrt{\omega(x)(a^2-x^2)}},$$

$$V'(x) = \frac{\sqrt{2\nu}P_0 \cos \vartheta_0 Q_1(x)}{2\pi k_1 \sqrt{\omega(x)(a^2-x^2)}}, \quad U'(x) = -\frac{\sqrt{2\nu}P_0 \sin \vartheta_0 Q_1(x)}{2\pi k_1 \sqrt{\omega(x)(a^2-x^2)}}.$$

Как и следовало ожидать, в случае  $\vartheta_0 = 0$ , из-за симметрии рассмотренной задачи относительно оси  $Ox$ , скачок нормальных контактных напряжений, действующих на включение, и производная разности горизонтальных смещений берегов разреза равны нулю. В случае же  $\vartheta_0 = \pi/2$  равны нулю скачок касательных контактных напряжений и производная разности вертикальных смещений берегов разреза.

Теперь определим коэффициент интенсивности напряжений в концевой точке трещины  $x = -a$ . С этой целью вычислим напряжения на линии  $y = 0$  вне интервала  $(-a, a)$ . По формуле (1.6), обозначив

$$f(x) = 1 - \operatorname{sign}(x) \arccos(-a/x) / \pi, \text{ найдем}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(\pm)}(x, 0) - i\alpha\tau^{(\pm)}(x, 0) &= -\frac{b_1 k_2}{\alpha} [\Omega_1(x) - \nu\Omega_2(x)] = \\ &= -\frac{\sqrt{2} b_1 k_2 i P_0^*}{2\pi\alpha\sqrt{x^2-a^2}} \left\{ \left( v^{f(x)/2} - v^{1-f(x)/2} \right) \operatorname{ch}(\pi\gamma/2) \cos(\pi f(x)/2) - \right. \\ &\quad \left. - \left( v^{f(x)/2} + v^{1-f(x)/2} \right) \operatorname{sh}(\pi\gamma/2) \sin(\pi f(x)/2) \right\}; \quad (|x| > a). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тогда для коэффициента интенсивности напряжений в концевой точке трещины  $x = -a$  имеем

$$\begin{aligned} K_I(-a) - i\alpha K_{II}(-a) &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow -a-0} \sqrt{-x-a} [\sigma_y(x, 0) - i\alpha\tau_{xy}(x, 0)] = \\ &= \frac{2\sqrt{\nu} k_2 b_1 i P_0^*}{\alpha\sqrt{2\pi a}} \operatorname{sh}(\pi\gamma/2), \end{aligned}$$

или

$$K_I(-a) = \frac{2\sqrt{\nu} k_2 b_1 P_0}{\sqrt{2\pi a}} \cos \vartheta_0 \operatorname{sh}(\pi\gamma/2);$$

$$K_{II}(-a) = -\frac{2\sqrt{\nu} k_2 b_1 P_0}{\alpha^2 \sqrt{2\pi a}} \sin \vartheta_0 \operatorname{sh}(\pi\gamma/2).$$

Таким же путем для коэффициента концентрации напряжений в концевой точке включения  $x = a$  найдём

$$K_I(a) - i\alpha K_{II}(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow a+0} \sqrt{x-a} [\sigma_y(x,0) - i\alpha \tau_{xy}(x,0)] = \\ = \frac{b_1 k_2 (\nu - 1) i P_0^*}{\alpha \sqrt{2\pi a}} \operatorname{ch}(\pi\gamma/2),$$

или

$$K_I(a) = \frac{k_2 b_1 (\nu - 1) P_0}{\sqrt{2\pi a}} \cos \vartheta_0 \operatorname{ch}(\pi\gamma/2);$$

$$K_{II}(a) = -\frac{k_2 b_1 (\nu - 1) P_0}{\alpha^2 \sqrt{2\pi a}} \sin \vartheta_0 \operatorname{ch}(\pi\gamma/2).$$

Напишем также формулы для определения контактных напряжений под включением. Для этого опять используем формулу (1.6). При этом учтём, что при  $x \in (0, a)$  справедливы соотношения:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{W'(s)}{s-x} ds = \frac{2}{k_1 - k_2} [\Omega_1^+(x) + \Omega_1^-(x)];$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\chi(s)}{s-x} ds = -\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} [\Omega_1^+(x) + \Omega_1^-(x)].$$

$$\Omega_1^+(x) = \frac{C_1 \omega^{-1/2+i\gamma}(x) + C_2 \omega^{1/2+i\gamma}(x)}{i\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \Omega_1^-(x) = -\frac{C_1 \omega^{1/2-i\gamma}(x) + C_2 \omega^{-1/2-i\gamma}(x)}{i\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

В итоге, после некоторых элементарных выкладок получим

$$\sigma_y^{(\pm)}(x,0) - i\alpha \tau^{(\pm)}(x,0) = \pm \frac{\chi(x)}{2} + \frac{i\sqrt{2} A_* P_0^* Q_2(x)}{2\pi \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}} = \\ = \frac{\sqrt{2} P_0^* [2i A_* Q_2(x) \pm Q_0(x)]}{4\pi \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}. \quad (3.11)$$

Здесь

$$Q_2(x) = \left\{ [1 - \omega(x)] \operatorname{sh}(\pi\gamma/2) \cos(\gamma \ln \omega(x)) + \right. \\ \left. = [1 + \omega(x)] \operatorname{ch}(\pi\gamma/2) \sin(\gamma \ln \omega(x)) \right\};$$

$$A_* = 2(b_1 c_1 + a_1^2) / \alpha^2.$$

Отделив в (3.11) действительную и мнимую части, для нормальных и касательных контактных напряжений под включением получим выражения:

$$\sigma_y^{(\pm)}(x,0) = \frac{\sqrt{2} P_0^* [2\alpha A_* Q_2(x) \cos \vartheta_0 \pm Q_0(x) \sin \vartheta_0]}{4\pi \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}},$$

$$\tau_{xy}^{(\pm)}(x,0) = -\frac{\sqrt{2} P_0^* [2A_* Q_2(x) \sin \vartheta_0 \pm \alpha Q_0(x) \cos \vartheta_0]}{4\pi \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}.$$

Аналогичным образом для производных смещений берегов разреза найдем:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\pm}(x, -0)}{dx} + i\alpha \frac{dV_{\pm}(x, -0)}{dx} &= \pm \frac{1}{2} W'(x) + B_* [\Omega_1^+(x) + \Omega_1^-(x)] = \\ &= \frac{\sqrt{2iP_0^*} [2k_1 B_* Q_3(x) \pm iQ_1(x)]}{4\pi k_1 \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}, \quad (-a < x < 0) \end{aligned}$$

$$Q_3(x) = \{ [1 - \omega(x)] \operatorname{ch}(\pi\gamma/2) \cos(\gamma \ln \omega(x)) - [1 + \omega(x)] \operatorname{sh}(\pi\gamma/2) \sin(\gamma \ln \omega(x)) \}$$

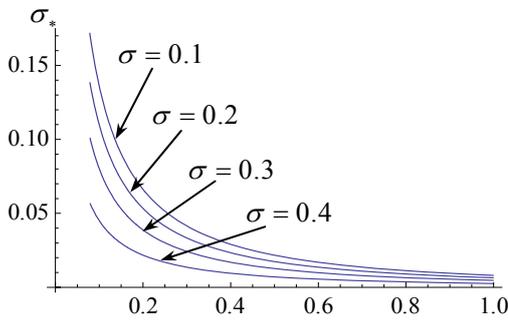
$$B_* = \frac{4b_1(b_1c_1 + a_1^2)}{\nu\alpha^2(\alpha + 2a_1)}.$$

Отметим, что во всех полученных формулах приняв

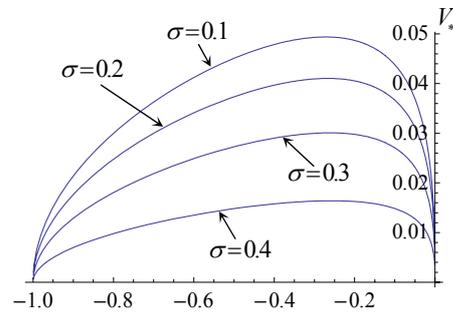
$$\begin{aligned} a_{jj} = a_{12} + 2 &= \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}; \quad \mu_{12} = \frac{E}{2(1+\sigma)}; \quad a_j = -\frac{(1-2\sigma)}{4(1-\sigma)}; \quad b_j = \frac{(1+\sigma)(3-4\sigma)}{4E(1-\sigma)}; \\ c_j &= \frac{E}{4(1-\sigma^2)}; \quad \mu_j = \alpha = 1; \quad A_* = 1/2; \quad B_* = 1/2k_1; \quad (j=1,2) \end{aligned}$$

где  $\sigma$  и  $E$  – соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга для изотропного тела, получим соответствующие формулы для изотропной плоскости.

Проведён численный анализ рассматриваемой задачи в случае изотропной плоскости. Изучены закономерности изменения приведённых контактных напряжений  $\sigma_* = a\sigma_y^+ / P_0$ ;  $\tau_* = a\tau_y^+ / P_0$ , приведённого расстояния точки приложения нагрузки от начала координат  $x_0^* = x_0 / a$  и приведённого раскрытия разреза  $V_*(x) = V(x) / a$  в зависимости от изменения коэффициента Пуассона, когда  $\vartheta_0 = 0$  и  $P_0 / aE = 0,1$ . Результаты вычислений показывают, что касательные контактные напряжения практически не зависят от коэффициента Пуассона. В то же время, при увеличении коэффициента Пуассона нормальные контактные напряжения и максимальное раскрытие разреза уменьшаются (фиг.2-3), а точка приложения нагрузки, исключая поворот включения, приближается к центру включения (табл. 1).



Фиг.2



Фиг.3

Таблица 1

$\sigma$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$x_0^*$	0,5204	0,5155	0,5106	0,5059	0,5019	0,5

Нельзя не отметить также, что нормальные контактные напряжения в концевой точке включения  $x = a$  оказываются ограниченными (фиг.2), в чём легко убедиться аналитически. Действительно, нетрудно проверить, что

$$\lim_{x \rightarrow a} a \sigma_y^{\pm}(x, 0) / P_0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a \sqrt{2} Q_2(x)}{4\pi \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} (2\gamma \operatorname{ch}(\pi\gamma/2) - \operatorname{sh}(\pi\gamma/2)). \quad (3.12)$$

Следовательно, в случае горизонтальной нагрузки нормальные контактные напряжения в концевой точке включения  $x = a$  ограничены.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и её приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. // ПММ. 1962. Т.26. Вып. 5. С.907-912.
2. Морарь Г.А. Метод разрывных решений в механике деформируемых тел. Кишинев: Штиинца, 1990. 130с.
3. Попов Г.Я. Избранные труды. Изд. типография «ВМВ», 2007. Т.1. 440с.
4. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 351с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415с.
6. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю. А., Маричев О.И. Интегралы и ряды (элементарные функции). М.: Наука, 1981. 800с.
8. Акопян В.Н., Симонян А.Р. Смешанная задача для ортотропной плоскости с трещиной //В сб. трудов II-ой Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2010. Т.1. С.66-70.
9. Бережницкий Л.Т., Стащук Н.Г. Коэффициенты интенсивности напряжений возле трещины на продолжении линейного жёсткого включения //Докл. УССР. 1981. № 11. Сер.А. С.49-53.

#### Сведения об авторах:

##### **Акопян Ваграм Наслетникович,**

Доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН Армении  
 Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>,  
 Тел: (+374 10) 52-48-90, E-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

##### **Симонян Артур Рафикович,**

соискатель Института механики НАН Армении  
 Тел.: (093) 195-193; E-mail: [sim-ar@yandex.ru](mailto:sim-ar@yandex.ru)

Поступила в редакцию 20.04.2011

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ  
ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ  
ПЛАСТИНКИ**

**АГАЛОВЯН Л.А., ЗАКАРЯН Т.В.**

**Ключевые слова:** пластинка, колебания, анизотропия, сингулярное возмущение, резонанс.

**Key words:** plate, vibration, anisotropic, singularly perturbed, resonance.

**Աղաղվյան Լ.Ա., Չաքարյան Տ.Վ.**

**Օրթոտրոպ երկշերտ սալի համար առաձգականության տեսության առաջին դինամիկական եզրային  
խնդրի ասիմպտոտիկական լուծումը**

Դիտարկված է օրթոտրոպ երկշերտ սալի առաջին դինամիկական եզրային խնդիրը, երբ շերտերի միջև կոնտակտը լրիվ է: Խնդրի լուծումը ներկայացված է երկու տիպի ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով, որոնցից մեկը ֆունկցիա է սարածական կոորդինատներից, իսկ մյուսը ժամանակից էքսպոնենցիալ ֆունկցիա է: Ներմուծելով չափողականություն չունեցող կոորդինատներ և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչներ ստացված է սինգուլյար գրգռված հավասարումների համակարգ, որը լուծված է ասիմպտոտիկ մեթոդով: Ստացված է ներքին խնդրի ընդհանուր լուծումը, որը միարժեքորեն որոշվում է երկշերտ սալի դիմային մակերևույթների վրա տրված պայմաններից: Ցույց է տրված, որ երբ դիմային մակերևույթների վրա տրված ֆունկցիաները բազմանդամներ են, խտեռացիոն պրոցեսն ընդհատվում է և ստացվում է ներքին խնդրի համար մաթեմատիկորեն ճշգրիտ լուծում: Բերված են ճշգրիտ լուծումներ արտաքին բեռնավորման մասնավոր դեպքերի համար:

**Aghalovyan L.A., Zakaryan T.V.**

**The asymptotic solution of the first dynamic boundary value problem of the theory of elasticity for  
two-layered orthotropic plate**

The first dynamic boundary problem of the theory of elasticity for two-layered orthotropic plate is considered. The solution of the problem is presented in the form of product of two types of functions. The first of them depends on three-dimensional coordinates and the second is the exponential function of the frequency of external influence and the time. By transition to dimensionless coordinates and displacements the singularly perturbed system of differential equations is obtained. This system is solved by the asymptotic method. The general asymptotic solution of the internal problem is found, which is completely defined as a result of satisfying of boundary conditions on the face of the plate. If the function which is present in the boundary conditions is a polynomial, the iterated process breaks and the mathematically exact solution of internal problem is obtained. The exact solutions for special cases of loadings are given.

Рассмотрена первая динамическая краевая задача теории упругости для двухслойной ортотропной пластинки. Решение задачи представлено в виде произведения двух типов функций. Первая из них зависит от пространственных координат, а вторая есть экспоненциальная функция от частоты внешнего воздействия и времени. Путем перехода к безразмерным координатам и перемещениям получена сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений, которая решена асимптотическим методом. Найдено общее асимптотическое решение внутренней задачи, которое полностью определяется в результате удовлетворения граничным условиям на лицевых поверхностях пластинки. Если функции, входящие в граничные условия, являются полиномами, итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение внутренней задачи. Приведены точные решения для частных случаев нагружения.

**Введение.** Для решения плоских и пространственных задач статики и динамики тонких тел (балки, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных уравнений. Рассмотрены как классические краевые задачи (на лицевых поверхностях тонкого тела заданы условия первой краевой задачи теории упругости, т.е. значения соответствующих компонент тензора напряжений), так и неклассические краевые

задачи – на лицевых поверхностях тонкого тела заданы значения вектора перемещения или смешанные условия. Результаты, полученные в статических краевых задачах, обобщены в монографиях [1,2]. Метод оказался эффективным и для решения динамических задач, при этом рассмотрены как неклассические краевые задачи [3-8], так и классические краевые задачи [9-12]. Асимптотический метод использован для решения связанных задач термоупругости для пластин [13]. Метод использован С.О. Саркисяном для построения теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек [14,15]. Для решения неклассических задач пластин о собственных колебаниях использован также метод Левинсона [16].

В работе асимптотический метод используется для решения первой динамической задачи для двухслойной ортотропной пластинки.

**1. Постановка задачи, основные соотношения, структура асимптотического решения.** Требуется найти решение уравнений трехмерной динамической задачи для двухслойной ортотропной пластинки, занимающей область  $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1, h \ll l, h = \max(h_1, h_2), l = \min(a, b)\}$ .

Считается, что на лицевых поверхностях  $z = h_1, -h_2$  заданы условия

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, h_1, t) &= X^+(x, y) \exp(i\Omega t), \\ \sigma_{yz}(x, y, h_1, t) &= Y^+(x, y) \exp(i\Omega t), \quad \text{при } z = h_1, \\ \sigma_{zz}(x, y, h_1, t) &= Z^+(x, y) \exp(i\Omega t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, -h_2, t) &= -X^-(x, y) \exp(i\Omega t), \\ \sigma_{yz}(x, y, -h_2, t) &= -Y^-(x, y) \exp(i\Omega t), \quad \text{при } z = -h_2, \\ \sigma_{zz}(x, y, -h_2, t) &= -Z^-(x, y) \exp(i\Omega t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

а между слоями должны выполняться условия полного контакта

$$\begin{aligned} u^I(x, y, z=0) &= u^{II}(x, y, z=0), \quad (u, v, w), \quad \sigma_{xz}^I(x, y, z=0) = \sigma_{xz}^{II}(x, y, z=0), \\ \sigma_{yz}^I(x, y, z=0) &= \sigma_{yz}^{II}(x, y, z=0), \quad \sigma_{zz}^I(x, y, z=0) = \sigma_{zz}^{II}(x, y, z=0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Условия на боковой поверхности пластинки пока не конкретизируются, ими обусловлено возникновение пограничных слоев.

Чтобы найти решение сформулированной задачи в уравнениях движения трехмерной задачи и соотношениях упругости для ортотропного тела, переходим к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения  $\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h, \quad U = u_x/l, \quad V = u_y/l, \quad W = u_z/l.$  (1.4)

Решение вновь полученной системы отыскиваем в виде

$$(\sigma_{xx}^k(\xi, \eta, \zeta, t), \sigma_{xy}^k, \sigma_{xz}^k, \sigma_{yy}^k, \sigma_{yz}^k, \sigma_{zz}^k) = (\sigma_{11}^k(\xi, \eta, \zeta), \sigma_{12}^k, \sigma_{13}^k, \sigma_{22}^k, \sigma_{23}^k, \sigma_{33}^k) \exp(i\Omega t) \quad (1.5)$$

В результате получим следующую сингулярно возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/l$  систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^k \Omega_*^2 U^k &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^k \Omega_*^2 V^k = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}^k}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^k \Omega_*^2 W^k &= 0, \quad \frac{\partial U^k}{\partial \xi} = a_{11}^k \sigma_{11}^k + a_{12}^k \sigma_{22}^k + a_{13}^k \sigma_{33}^k, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^k}{\partial \eta} &= a_{12}^k \sigma_{11}^k + a_{22}^k \sigma_{22}^k + a_{23}^k \sigma_{33}^k, & \varepsilon^{-1} \frac{\partial W^k}{\partial \zeta} &= a_{13}^k \sigma_{11}^k + a_{23}^k \sigma_{22}^k + a_{33}^k \sigma_{33}^k, \\
\frac{\partial V^k}{\partial \xi} + \frac{\partial U^k}{\partial \eta} &= a_{66}^k \sigma_{12}^k, & \frac{\partial W^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^k}{\partial \zeta} &= a_{55}^k \sigma_{13}^k, \\
\frac{\partial W^k}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^k}{\partial \zeta} &= a_{44}^k \sigma_{23}^k, & \Omega_* &= h\Omega, \quad k = I, II.
\end{aligned}$$

Решение этой системы складывается из решений внутренней задачи ( $I^{\text{int}}$ ) и пограничного слоя ( $I_b$ )

$$I = I^{\text{int}} + I_b \quad (1.7)$$

**2. Решение внутренней задачи.** Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{jm}^{k \text{int}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jm}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j, m = 1, 2, 3, \quad s = \overline{0, N}, \quad k = I, II, \\
(U^{k \text{int}}, V^{k \text{int}}, W^{k \text{int}}) &= \varepsilon^s (U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}).
\end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставив (2.1) в (1.6), для определения неизвестных коэффициентов  $\sigma_{jm}^{k(s)}, U^{k(s)}, V^{k(s)}, W^{k(s)}$  получим систему:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial \zeta} + \rho^k \Omega_*^2 U^{k(s)} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial \zeta} + \rho^k \Omega_*^2 V^{k(s)} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{k(s-1)}}{\partial \zeta} + \rho^k \Omega_*^2 W^{k(s)} &= 0, \quad \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} = a_{11}^k \sigma_{11}^{k(s)} + a_{12}^k \sigma_{22}^{k(s)} + a_{13}^k \sigma_{33}^{k(s)}, \\
\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} = a_{12}^k \sigma_{11}^{k(s)} + a_{22}^k \sigma_{22}^{k(s)} + a_{23}^k \sigma_{33}^{k(s)}, & \quad \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} = a_{13}^k \sigma_{11}^{k(s)} + a_{23}^k \sigma_{22}^{k(s)} + a_{33}^k \sigma_{33}^{k(s)}, \quad (2.2) \\
\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \eta} = a_{66}^k \sigma_{12}^{k(s)}, & \quad \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} = a_{55}^k \sigma_{13}^{k(s)}, \\
\frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} = a_{44}^k \sigma_{23}^{k(s)} &
\end{aligned}$$

Из этой системы все напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{k(s)} &= \frac{1}{a_{55}^k} \left( \frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{23}^{k(s)} = \frac{1}{a_{44}^k} \left( \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\
\sigma_{12}^{k(s)} &= \frac{1}{a_{66}^k} \left( \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{11}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta^k} \left( -A_{23}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right),
\end{aligned}$$

$$\sigma_{22}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta^k} \left( -A_{13}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad (2.3)$$

$$\sigma_{33}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta^k} \left( A_{11}^k \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right),$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^k &= a_{11}^k a_{22}^k - (a_{12}^k)^2, & A_{12}^k &= a_{12}^k a_{33}^k - a_{23}^k a_{13}^k, & A_{13}^k &= a_{11}^k a_{23}^k - a_{13}^k a_{12}^k, \\ A_{22}^k &= a_{22}^k a_{33}^k - (a_{23}^k)^2, & A_{23}^k &= a_{13}^k a_{22}^k - a_{12}^k a_{23}^k, & A_{33}^k &= a_{11}^k a_{33}^k - (a_{13}^k)^2, \\ \Delta^k &= a_{11}^k A_{22}^k - a_{12}^k A_{12}^k - a_{13}^k A_{23}^k. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставив значение  $\sigma_{13}^{k(s)}$  в первое уравнение системы (2.2), для определения  $U^{k(s)}$  получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^k \rho^k \Omega_*^2 U^{k(s)} = R_U^{k(s)}, \quad R_U^{k(s)} = -a_{55}^k \left( \frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \quad (2.5)$$

Подставив значения  $\sigma_{23}^{k(s)}, \sigma_{33}^{k(s)}$  в систему (2.2), для определения  $V^{k(s)}, W^{k(s)}$  получим уравнения

$$\frac{\partial^2 V^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^k \rho^k \Omega_*^2 V^{k(s)} = R_V^{k(s)}, \quad (2.6)$$

$$A_{11}^k \frac{\partial^2 W^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta^k \rho^k \Omega_*^2 W^{k(s)} = R_W^{k(s)}, \quad (2.7)$$

где

$$R_V^{k(s)} = -a_{44}^k \left( \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}, \quad (2.8)$$

$$R_W^{k(s)} = -\Delta^k \left( \frac{\partial \sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right) + A_{23}^k \frac{\partial^2 U^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^k \frac{\partial^2 V^{k(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}.$$

Решениями уравнений (2.5) - (2.7) являются

$$U^{k(s)} = U_0^{k(s)} + U_\tau^{k(s)}, \quad (U, V, W), \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} U_0^{k(s)} &= C_1^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1^k \zeta + C_2^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1^k \zeta, & \gamma_1^k &= \Omega_* \sqrt{\rho^k a_{55}^k}, \\ V_0^{k(s)} &= C_3^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2^k \zeta + C_4^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2^k \zeta, & \gamma_2^k &= \Omega_* \sqrt{\rho^k a_{44}^k}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$W_0^{k(s)} = C_5^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_3^k \zeta + C_6^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_3^k \zeta, \quad \gamma_3^k = \Omega_* \sqrt{\rho^k \Delta^k / A_{11}^k},$$

$U_\tau^{k(s)}, V_\tau^{k(s)}, W_\tau^{k(s)}$  – частные решения уравнений (2.5) – (2.7)

Используя формулы (2.3), для напряжений  $\sigma_{13}^{k(s)}, \sigma_{23}^{k(s)}, \sigma_{33}^{k(s)}$  будем иметь:

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{k(s)} &= \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k}{a_{55}^k}} \left( C_1^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1^k \zeta - C_2^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1^k \zeta \right) + f_{13}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{23}^{k(s)} &= \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k}{a_{44}^k}} \left( C_3^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2^k \zeta - C_4^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2^k \zeta \right) + f_{23}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (2.11) \\
\sigma_{33}^{k(s)} &= \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k A_{11}^k}{\Delta^k}} \left( C_5^{k(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_3^k \zeta - C_6^{k(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_3^k \zeta \right) + f_{33}^{k(s)}(\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f_{13}^{k(s)} &= \frac{1}{a_{55}^k} \left( \frac{\partial U_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \\
f_{23}^{k(s)} &= \frac{1}{a_{44}^k} \frac{\partial V_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{a_{55}^k} \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \eta}, \quad (2.12) \\
f_{33}^{k(s)} &= \frac{A_{11}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W_\tau^{k(s)}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\Delta^k} \left( A_{23}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} + A_{13}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta} \right).
\end{aligned}$$

Используя решения (2.9) – (2.11) и удовлетворив условиям (1.1) – (1.3), однозначно определяются значения функций  $C_j^{k(s)}$

$$\begin{aligned}
C_1^{I(s)} &= b_{10}^{(s)} + \sqrt{\frac{\rho^I a_{55}^I}{\rho^I a_{55}^{II}}} \frac{d_1^{(s)}}{\delta_1}, \quad C_1^{II(s)} = \frac{d_1^{(s)}}{\delta_1}, \quad C_2^{I(s)} = b_7^{(s)} + \frac{d_2^{(s)}}{\delta_1}, \quad C_2^{II(s)} = \frac{d_2^{(s)}}{\delta_1}, \\
d_1^{(s)} &= b_5^{(s)} \sin \gamma_1^I \zeta_1 + (b_2^{(s)} - b_{10}^{(s)} \cos \gamma_1^I \zeta_1 + b_7^{(s)} \sin \gamma_1^I \zeta_1) \sin \gamma_1^{II} \zeta_2, \\
d_2^{(s)} &= b_5^{(s)} \sqrt{\frac{\rho^I a_{55}^I}{\rho^I a_{55}^{II}}} \cos \gamma_1^I \zeta_1 - (b_2^{(s)} - b_{10}^{(s)} \cos \gamma_1^I \zeta_1 + b_7^{(s)} \sin \gamma_1^I \zeta_1) \cos \gamma_1^{II} \zeta_2, \quad (2.13) \\
\delta_1 &= \cos \gamma_1^{II} \zeta_2 \sin \gamma_1^I \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^I a_{55}^I}{\rho^I a_{55}^{II}}} \cos \gamma_1^I \zeta_1 \sin \gamma_1^{II} \zeta_2, \\
b_2^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^I}{\rho^I}} \left( X^{+(s)} - f_{13}^{I(s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \right), \\
b_5^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^{II}}{\rho^{II}}} \left( -X^{-(s)} - f_{13}^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) \right), \\
b_7^{(s)} &= U_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - U_\tau^{I(s)}(\xi, \eta, 0), \\
b_{10}^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^I}{\rho^I}} \left( f_{13}^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - f_{13}^{I(s)}(\xi, \eta, 0) \right),
\end{aligned}$$

$$C_3^{I(s)} = b_{11}^{(s)} + \sqrt{\frac{\rho^{II} a_{44}^I}{\rho^I a_{44}^{II}}} \frac{d_3^{(s)}}{\delta_2}, \quad C_3^{II(s)} = \frac{d_3^{(s)}}{\delta_2}, \quad C_4^{I(s)} = b_8^{(s)} + \frac{d_4^{(s)}}{\delta_2}, \quad C_4^{II(s)} = \frac{d_4^{(s)}}{\delta_2},$$

$$d_3^{(s)} = b_6^{(s)} \sin \gamma_2^I \zeta_1 + (b_3^{(s)} - b_{11}^{(s)} \cos \gamma_2^I \zeta_1 + b_8^{(s)} \sin \gamma_2^I \zeta_1) \sin \gamma_2^{II} \zeta_2,$$

$$d_4^{(s)} = b_6^{(s)} \sqrt{\frac{\rho^{II} a_{44}^I}{\rho^I a_{44}^{II}}} \cos \gamma_2^I \zeta_1 - (b_3^{(s)} - b_{11}^{(s)} \cos \gamma_2^I \zeta_1 + b_8^{(s)} \sin \gamma_2^I \zeta_1) \cos \gamma_2^{II} \zeta_2, \quad (2.14)$$

$$\delta_2 = \cos \gamma_2^{II} \zeta_2 \sin \gamma_2^I \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^{II} a_{44}^I}{\rho^I a_{44}^{II}}} \cos \gamma_2^I \zeta_1 \sin \gamma_2^{II} \zeta_2,$$

$$b_3^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{44}^I}{\rho^I}} (Y^{+(s)} - f_{23}^{I(s)}(\xi, \eta, \zeta_1)),$$

$$b_6^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{44}^{II}}{\rho^{II}}} (-Y^{-(s)} - f_{23}^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2)),$$

$$b_8^{(s)} = V_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - V_\tau^{I(s)}(\xi, \eta, 0),$$

$$b_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{44}^I}{\rho^I}} (f_{23}^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - f_{23}^{I(s)}(\xi, \eta, 0)),$$

$$C_5^{I(s)} = b_{12}^{(s)} + \sqrt{\frac{\rho^{II} A_{11}^{II} \Delta^I}{\rho^I A_{11}^I \Delta^{II}}} \frac{d_5^{(s)}}{\delta_3}, \quad C_5^{II(s)} = \frac{d_5^{(s)}}{\delta_3}, \quad C_6^{I(s)} = b_9^{(s)} + \frac{d_6^{(s)}}{\delta_3}, \quad C_6^{II(s)} = \frac{d_6^{(s)}}{\delta_3},$$

$$d_5^{(s)} = b_4^{(s)} \sin \gamma_3^I \zeta_1 + (b_1^{(s)} - b_{12}^{(s)} \cos \gamma_3^I \zeta_1 + b_9^{(s)} \sin \gamma_3^I \zeta_1) \sin \gamma_3^{II} \zeta_2,$$

$$d_6^{(s)} = b_4^{(s)} \sqrt{\frac{\rho^{II} A_{11}^{II} \Delta^I}{\rho^I A_{11}^I \Delta^{II}}} \cos \gamma_3^I \zeta_1 - (b_1^{(s)} - b_{12}^{(s)} \cos \gamma_3^I \zeta_1 + b_9^{(s)} \sin \gamma_3^I \zeta_1) \cos \gamma_3^{II} \zeta_2, \quad (2.15)$$

$$\delta_3 = \cos \gamma_3^{II} \zeta_2 \sin \gamma_3^I \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^{II} A_{11}^{II} \Delta^I}{\rho^I A_{11}^I \Delta^{II}}} \cos \gamma_3^I \zeta_1 \sin \gamma_3^{II} \zeta_2,$$

$$b_1^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I \rho^I}} (Z^{+(s)} - f_{33}^{I(s)}(\xi, \eta, \zeta_1)),$$

$$b_4^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^{II}}{A_{11}^{II} \rho^{II}}} (-Z^{-(s)} - f_{33}^{II(s)}(\xi, \eta, -\zeta_2)),$$

$$b_9^{(s)} = W_\tau^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - W_\tau^{I(s)}(\xi, \eta, 0),$$

$$b_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}} (f_{33}^{II(s)}(\xi, \eta, 0) - f_{33}^{I(s)}(\xi, \eta, 0)).$$

Имея значения функций  $C_j^{k(s)}$ , по формулам (2.1), (2.3), (2.10) определяются все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения. Это решение будет

конечным, если  $\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0, \delta_3 \neq 0$ . При значениях  $\Omega$ , когда какое либо  $\delta_i = 0$ , будет возникать резонанс. Эти значения  $\Omega$  совпадают с главными значениями частот собственных колебаний двухслойной пластинки [11,12]. Таким образом, решение внутренней задачи полностью определяется после удовлетворения граничным условиям (1.1), (1.2) на лицевых поверхностях двухслойного пакета.

**3. Решения частных задач.** Если функции, заданные на лицевых поверхностях, являются многочленами от тангенциальных координат, итерационный процесс во внутренней задаче обрывается на определенном приближении, в результате получается математически точное решение. Рассмотрим следующие случаи:

$$a) Z^+ = -p_1 = \text{const}, \quad Z^- = p_2 = \text{const}, \quad X^\pm = Y^\pm = 0. \quad (3.1)$$

Для этого случая в формулах (2.12) - (2.15) будем иметь:

$$\begin{aligned} f_{13}^{(0)} &= f_{23}^{(0)} = f_{33}^{(0)} = 0, \quad b_{2,3,5-12}^{(0)} = 0, \quad d_{1-4}^{(0)} = 0, \quad C_{1-4}^{k(0)} = 0, \\ b_1^{(0)} &= -\frac{\varepsilon p_1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}}, \quad b_4^{(0)} = -\frac{\varepsilon p_2}{\Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^{II}}{\rho^{II} A_{11}^{II}}}, \\ d_5^{(0)} &= -\frac{\varepsilon}{\Omega_*} \left( p_2 \sqrt{\frac{\Delta^{II}}{\rho^{II} A_{11}^{II}}} \sin \gamma_3^I \zeta_1 + p_1 \sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}} \sin \gamma_3^{II} \zeta_2 \right), \\ d_6^{(0)} &= -\frac{\varepsilon}{\Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}} (p_2 \cos \gamma_3^I \zeta_1 - p_1 \cos \gamma_3^{II} \zeta_2), \\ C_5^{I(0)} &= -\frac{\varepsilon}{\delta_3 \Omega_*} \left( p_2 \sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}} \sin \gamma_3^I \zeta_1 + p_1 \frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I} \sqrt{\frac{\rho^{II} A_{11}^{II}}{\Delta^{II}}} \sin \gamma_3^{II} \zeta_2 \right), \\ C_5^{II(0)} &= -\frac{\varepsilon}{\delta_3 \Omega_*} \left( p_2 \sqrt{\frac{\Delta^{II}}{\rho^{II} A_{11}^{II}}} \sin \gamma_3^I \zeta_1 + p_1 \sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}} \sin \gamma_3^{II} \zeta_2 \right), \\ C_6^{k(0)} &= -\frac{\varepsilon}{\delta_3 \Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}} (p_2 \cos \gamma_3^I \zeta_1 - p_1 \cos \gamma_3^{II} \zeta_2), \\ U^{k(0)} &= 0, \quad V^{k(0)} = 0, \quad \sigma_{13}^{k(0)} = \sigma_{23}^{k(0)} = \sigma_{12}^{k(0)} = 0, \quad W^{k(0)} = C_5^{k(0)} \sin \gamma_3^k \zeta + C_6^{k(0)} \cos \gamma_3^k \zeta, \\ \sigma_{33}^{I(0)} &= -\frac{\varepsilon}{\delta_3} \left( \left( p_2 \sin \gamma_3^I \zeta_1 + p_1 \sqrt{\frac{\rho^{II} \Delta^I A_{11}^{II}}{\rho^I \Delta^{II} A_{11}^I}} \sin \gamma_3^{II} \zeta_2 \right) \cos \gamma_3^I \zeta - (p_2 \cos \gamma_3^I \zeta_1 - p_1 \cos \gamma_3^{II} \zeta_2) \sin \gamma_3^I \zeta \right), \\ \sigma_{33}^{II(0)} &= -\frac{\varepsilon}{\delta_3} \left( \left( p_2 \sin \gamma_3^I \zeta_1 + p_1 \sqrt{\frac{\rho^{II} \Delta^I A_{11}^{II}}{\rho^I \Delta^{II} A_{11}^I}} \sin \gamma_3^{II} \zeta_2 \right) \cos \gamma_3^{II} \zeta - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\rho^{II} \Delta^I A_{11}^{II}}{\rho^I \Delta^{II} A_{11}^I}} (p_2 \cos \gamma_3^I \zeta_1 - p_1 \cos \gamma_3^{II} \zeta_2) \sin \gamma_3^{II} \zeta \right), \\ \sigma_{11}^{k(0)} &= -\frac{A_{23}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W^{k(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{22}^{k(0)} = -\frac{A_{13}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W^{k(0)}}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При  $s \geq 1$  все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения равны нулю. Следовательно, будем иметь следующее окончательное решение:

$$u^k = 0, \quad v^k = 0, \quad \sigma_{xy}^k = \sigma_{xz}^k = \sigma_{yz}^k = 0, \quad w^k = lW^{k(0)} \exp(i\Omega t), \quad k = I, II \quad (3.3)$$

$$\sigma_{xx}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{11}^{k(0)} \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{yy}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{22}^{k(0)} \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{zz}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{33}^{k(0)} \exp(i\Omega t),$$

$$\text{б) } Z^+ = -(p + q_1 \xi + q_2 \eta), \quad Z^- = 0, \quad X^\pm = Y^\pm = 0. \quad (3.4)$$

Для этого случая отличными от нуля являются приближения  $s = 0, 1$ . Имеем

$$C_{1-4}^{k(0)} = 0, \quad C_5^{I(0)} = -\frac{\varepsilon \Delta^I}{\delta_3 \Omega_* \rho^I A_{11}^I} \sqrt{\frac{\rho^{II} A_{11}^{II}}{\Delta^{II}}} (p + q_1 \xi + q_2 \eta) \sin \gamma_3^{II} \zeta_2, \\ C_5^{II(0)} = -\frac{\varepsilon}{\delta_3 \Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}} (p + q_1 \xi + q_2 \eta) \sin \gamma_3^{II} \zeta_2, \quad (3.5)$$

$$C_6^{k(0)} = \frac{\varepsilon}{\delta_3 \Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}} (p + q_1 \xi + q_2 \eta) \cos \gamma_3^{II} \zeta_2,$$

В результате, при  $s = 0$  имеем решение

$$U^{k(0)} = 0, \quad V^{k(0)} = 0, \quad \sigma_{13}^{k(0)} = \sigma_{23}^{k(0)} = \sigma_{12}^{k(0)} = 0, \quad W^{k(0)} = C_5^{k(0)} \sin \gamma_3^k \zeta + C_6^{k(0)} \cos \gamma_3^k \zeta, \\ \sigma_{33}^{I(0)} = -\frac{\varepsilon}{\delta_3} (p + q_1 \xi + q_2 \eta) \left( \sqrt{\frac{\rho^{II} \Delta^I A_{11}^{II}}{\rho^I \Delta^{II} A_{11}^I}} \sin \gamma_3^{II} \zeta_2 \cos \gamma_3^I \zeta + \cos \gamma_3^{II} \zeta_2 \sin \gamma_3^I \zeta \right), \quad (3.6)$$

$$\sigma_{33}^{II(0)} = -\frac{\varepsilon}{\delta_3} (p + q_1 \xi + q_2 \eta) \sqrt{\frac{\rho^{II} \Delta^I A_{11}^{II}}{\rho^I \Delta^{II} A_{11}^I}} (\sin \gamma_3^{II} \zeta_2 \cos \gamma_3^{II} \zeta + \cos \gamma_3^{II} \zeta_2 \sin \gamma_3^{II} \zeta),$$

$$\sigma_{11}^{k(0)} = -\frac{A_{23}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W^{k(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{22}^{k(0)} = -\frac{A_{13}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W^{k(0)}}{\partial \zeta}.$$

При  $s = 1$  имеем

$$C_1^{I(1)} = b_{10}^{(1)} + \sqrt{\frac{\rho^{II} a_{55}^I}{\rho^I a_{55}^{II}}} \frac{d_1^{(1)}}{\delta_1}, \quad C_1^{II(1)} = \frac{d_1^{(1)}}{\delta_1}, \quad C_2^{I(1)} = b_7^{(1)} + \frac{d_2^{(1)}}{\delta_1}, \quad C_2^{II(1)} = \frac{d_2^{(1)}}{\delta_1},$$

$$C_3^{I(1)} = b_{11}^{(1)} + \sqrt{\frac{\rho^{II} a_{44}^I}{\rho^I a_{44}^{II}}} \frac{d_3^{(1)}}{\delta_2}, \quad C_3^{II(1)} = \frac{d_3^{(1)}}{\delta_2}, \quad C_4^{I(1)} = b_8^{(1)} + \frac{d_4^{(1)}}{\delta_2}, \quad C_4^{II(1)} = \frac{d_4^{(1)}}{\delta_2},$$

$$C_5^{I(1)} = \sqrt{\frac{\rho^{II} A_{11}^{II} \Delta^I}{\rho^I A_{11}^I \Delta^{II}}} \frac{d_5^{(1)}}{\delta_3}, \quad C_5^{II(1)} = \frac{d_5^{(1)}}{\delta_3}, \quad C_6^{I(1)} = C_6^{II(1)} = \frac{d_6^{(1)}}{\delta_3},$$

$$b_4^{(1)} = b_9^{(1)} = b_{12}^{(1)} = 0, \quad b_1^{(1)} = \frac{\varepsilon}{\Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}} (p + q_1 \xi + q_2 \eta), \quad b_2^{(1)} = -\frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^I}{\rho^I}} f_{13}^{I(1)}(\xi, \eta, \zeta_1),$$

$$b_3^{(1)} = -\frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{44}^I}{\rho^I}} f_{23}^{I(1)}(\xi, \eta, \zeta_1), \quad b_5^{(1)} = -\frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^{II}}{\rho^{II}}} f_{13}^{II(1)}(\xi, \eta, -\zeta_2),$$

$$b_6^{(1)} = -\frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{44}^{II}}{\rho^{II}}} f_{23}^{II(1)}(\xi, \eta, -\zeta_2), \quad b_7^{(1)} = B_2^{II} - B_2^I, \quad b_8^{(1)} = B_4^{II} - B_4^I,$$

$$\begin{aligned}
b_{10}^{(1)} &= \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^I}{\rho^I}} \left( \frac{1}{a_{55}^I} \left( B_1^{\prime\prime} \gamma_3^{\prime\prime} + \frac{\partial C_6^{\prime\prime(o)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{a_{55}^I} \left( B_1^I \gamma_3^I + \frac{\partial C_6^{I(o)}}{\partial \xi} \right) \right), \\
b_{11}^{(1)} &= \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{44}^I}{\rho^I}} \left( \frac{B_3^{\prime\prime} \gamma_3^{\prime\prime}}{a_{44}^{\prime\prime}} + \frac{1}{a_{55}^{\prime\prime}} \frac{\partial C_6^{\prime\prime(o)}}{\partial \eta} - \frac{B_3^I \gamma_3^I}{a_{44}^I} - \frac{1}{a_{55}^I} \frac{\partial C_6^{I(o)}}{\partial \eta} \right), \\
d_1^{(1)} &= b_5^{(1)} \sin \gamma_1^I \zeta_1 + (b_2^{(1)} - b_{10}^{(1)} \cos \gamma_1^I \zeta_1 + b_7^{(1)} \sin \gamma_1^I \zeta_1) \sin \gamma_1^{\prime\prime} \zeta_2, \\
d_2^{(1)} &= b_5^{(1)} \sqrt{\frac{\rho^{\prime\prime} a_{55}^I}{\rho^I a_{55}^{\prime\prime}}} \cos \gamma_1^I \zeta_1 - (b_2^{(1)} - b_{10}^{(1)} \cos \gamma_1^I \zeta_1 + b_7^{(1)} \sin \gamma_1^I \zeta_1) \cos \gamma_1^{\prime\prime} \zeta_2, \\
d_3^{(1)} &= b_6^{(1)} \sin \gamma_2^I \zeta_1 + (b_3^{(1)} - b_{11}^{(1)} \cos \gamma_2^I \zeta_1 + b_8^{(1)} \sin \gamma_2^I \zeta_1) \sin \gamma_2^{\prime\prime} \zeta_2, \\
d_4^{(1)} &= b_6^{(1)} \sqrt{\frac{\rho^{\prime\prime} a_{44}^I}{\rho^I a_{44}^{\prime\prime}}} \cos \gamma_2^I \zeta_1 - (b_3^{(1)} - b_{11}^{(1)} \cos \gamma_2^I \zeta_1 + b_8^{(1)} \sin \gamma_2^I \zeta_1) \cos \gamma_2^{\prime\prime} \zeta_2, \\
d_5^{(1)} &= b_1^{(1)} \sin \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \quad d_6^{(1)} = -b_1^{(1)} \cos \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \\
\delta_1 &= \cos \gamma_1^{\prime\prime} \zeta_2 \sin \gamma_1^I \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^{\prime\prime} a_{55}^I}{\rho^I a_{55}^{\prime\prime}}} \cos \gamma_1^I \zeta_1 \sin \gamma_1^{\prime\prime} \zeta_2, \\
\delta_2 &= \cos \gamma_2^{\prime\prime} \zeta_2 \sin \gamma_2^I \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^{\prime\prime} a_{44}^I}{\rho^I a_{44}^{\prime\prime}}} \cos \gamma_2^I \zeta_1 \sin \gamma_2^{\prime\prime} \zeta_2, \\
\delta_3 &= \cos \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2 \sin \gamma_3^I \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^{\prime\prime} A_{11}^{\prime\prime} \Delta^I}{\rho^I A_{11}^I \Delta^{\prime\prime}}} \cos \gamma_3^I \zeta_1 \sin \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \\
B_1^I &= m_1 \cos \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \quad B_1^{\prime\prime} = m_2 \cos \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \quad B_2^I = \sqrt{\frac{\rho^{\prime\prime} A_{11}^{\prime\prime} \Delta^I}{\rho^I A_{11}^I \Delta^{\prime\prime}}} m_1 \sin \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \quad B_2^{\prime\prime} = m_2 \sin \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \\
B_3^I &= m_3 \cos \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \quad B_3^{\prime\prime} = m_4 \cos \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \quad B_4^I = \sqrt{\frac{\rho^{\prime\prime} A_{11}^{\prime\prime} \Delta^I}{\rho^I A_{11}^I \Delta^{\prime\prime}}} m_3 \sin \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \quad B_4^{\prime\prime} = m_4 \sin \gamma_3^{\prime\prime} \zeta_2, \\
m_1 &= -\frac{(a_{55}^I A_{23}^I - \Delta^I) \gamma_3^I q_1 \varepsilon}{(a_{55}^I \rho^I \Omega_*^2 - (\gamma_3^I)^2) \delta_3 \Omega_* \sqrt{A_{11}^I \Delta^I \rho^I}}, \quad m_2 = -\frac{(a_{55}^{\prime\prime} A_{23}^{\prime\prime} - \Delta^{\prime\prime}) \gamma_3^{\prime\prime} q_1 \varepsilon}{(a_{55}^{\prime\prime} \rho^{\prime\prime} \Omega_*^2 - (\gamma_3^{\prime\prime})^2) \delta_3 \Omega_* \Delta^{\prime\prime}} \sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I \rho^I}}, \\
m_3 &= -\frac{(a_{44}^I A_{13}^I - \Delta^I) \gamma_3^I q_2 \varepsilon}{(a_{44}^I \rho^I \Omega_*^2 - (\gamma_3^I)^2) \delta_3 \Omega_* \sqrt{A_{11}^I \Delta^I \rho^I}}, \quad m_4 = -\frac{(a_{44}^{\prime\prime} A_{13}^{\prime\prime} - \Delta^{\prime\prime}) \gamma_3^{\prime\prime} q_2 \varepsilon}{(a_{44}^{\prime\prime} \rho^{\prime\prime} \Omega_*^2 - (\gamma_3^{\prime\prime})^2) \delta_3 \Omega_* \Delta^{\prime\prime}} \sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I \rho^I}}, \\
f_{13}^{k(1)} &= \frac{1}{a_{55}^k} \left( B_1^k \gamma_3^k + \frac{\partial C_6^{k(o)}}{\partial \xi} \right) \cos \gamma_3^k \zeta + \left( \frac{\partial C_5^{k(o)}}{\partial \xi} - B_2^k \gamma_3^k \right) \sin \gamma_3^k \zeta, \\
f_{23}^{k(1)} &= \left( \frac{1}{a_{55}^k} \frac{\partial C_5^{k(o)}}{\partial \eta} - \frac{B_4^k \gamma_3^k}{a_{44}^k} \right) \sin \gamma_3^k \zeta + \left( \frac{1}{a_{55}^k} \frac{\partial C_6^{k(o)}}{\partial \eta} + \frac{B_3^k \gamma_3^k}{a_{44}^k} \right) \cos \gamma_3^k \zeta, \\
f_{33}^{k(1)} &= 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$U_{\tau}^{k(1)} = B_1^k \sin \gamma_3^k \zeta + B_2^k \cos \gamma_3^k \zeta, \quad V_{\tau}^{k(1)} = B_3^k \sin \gamma_3^k \zeta + B_4^k \cos \gamma_3^k \zeta, \quad W_{\tau}^{k(1)} = 0.$$

В результате получим

$$U^{k(1)} = C_1^{k(1)} \sin \gamma_1^k \zeta + C_2^{k(1)} \cos \gamma_1^k \zeta + U_{\tau}^{k(1)}, \quad V^{k(1)} = C_3^{k(1)} \sin \gamma_2^k \zeta + C_4^{k(1)} \cos \gamma_2^k \zeta + V_{\tau}^{k(1)}$$

$$W^{k(1)} = C_5^{k(1)} \sin \gamma_3^k \zeta + C_6^{k(1)} \cos \gamma_3^k \zeta + W_{\tau}^{k(1)},$$

$$\sigma_{13}^{k(1)} = \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k}{a_{55}^k}} \left( C_1^{k(1)} \cos \gamma_1^k \zeta - C_2^{k(1)} \sin \gamma_1^k \zeta \right) + f_{13}^{k(1)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\sigma_{23}^{k(1)} = \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k}{a_{44}^k}} \left( C_3^{k(1)} \cos \gamma_2^k \zeta - C_4^{k(1)} \sin \gamma_2^k \zeta \right) + f_{23}^{k(1)}(\xi, \eta, \zeta),$$

(3.8)

$$\sigma_{33}^{k(1)} = \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k A_{11}^k}{\Delta^k}} \left( C_5^{k(1)} \cos \gamma_3^k \zeta - C_6^{k(1)} \sin \gamma_3^k \zeta \right) + f_{33}^{k(1)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\sigma_{11}^{k(1)} = -\frac{A_{23}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W^{k(1)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{22}^{k(1)} = -\frac{A_{13}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W^{k(1)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{12}^{k(1)} = 0.$$

Окончательным решением будет

$$u^k = h U^{k(1)} \exp(i\Omega t), \quad v^k = h V^{k(1)} \exp(i\Omega t), \quad w^k = l \left( W^{k(0)} + \varepsilon W^{k(1)} \right) \exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{xx}^k = (\varepsilon^{-1} \sigma_{11}^{k(0)} + \sigma_{11}^{k(1)}) \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{yy}^k = (\varepsilon^{-1} \sigma_{22}^{k(0)} + \sigma_{22}^{k(1)}) \exp(i\Omega t),$$

(3.9)

$$\sigma_{zz}^k = (\varepsilon^{-1} \sigma_{33}^{k(0)} + \sigma_{33}^{k(1)}) \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{xz}^k = \sigma_{13}^{k(1)} \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{yz}^k = \sigma_{23}^{k(1)} \exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{xy}^k = 0, \quad k = I, II.$$

Найденное выше решение внутренней задачи, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пластинки. Для удовлетворения этим условиям необходимо построить решения для пограничного слоя. Это решение строится и сопрягается с решением внутренней задачи, описанным в [1,17] способом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.
3. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. ВУЗов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.
4. Агаловян Л.А., Халатян Л.М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях. // Докл. НАН Армении. 1999. Т.99 №4. С. 315-321.
5. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. Неклассические краевые задачи о собственных и вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // В сб.: "Механика оболочек и пластин" (Тр. XIX Международной конф. по теории оболочек и пластин). Изд-во. Нижегородского университета. Нижний Новгород. 1999. С. 16-20.
6. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. // ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.

7. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. О характере вынужденных колебаний трехслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче. // Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.186-192.
8. Агаловян Л.А., Погосян А.М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С.36-47.
9. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы. // Прикл. мат. и мех. (ПММ). 2008. Т.72. Вып.4. С.633-634; Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 72 (2008), pp 452-460. Elsevier 2008.
10. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Асимптотическое решение динамической первой краевой задачи теории упругости для ортотропной полосы. // В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2007. С. 21-27.
11. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О частотах и формах собственных колебаний ортотропной полосы со свободными продольными краями. // В сб.: “ Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван: 2008. С.36-42.
12. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки.// Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. №4. С.304-309.
13. Геворкян Р.С. Асимптотические решения установившихся динамических (связанных) задач термоупругости для изотропных пластин. // ПММ. 2008. Т.72. Вып.1. С.148-156.
14. Саркисян С.О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек. // Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. Вып.2. С.154-166.
15. Атоян А.А., Саркисян С.О. Задача динамики тонкой пластинки на основе несимметричной теории упругости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.1-17.
16. Варганов А.Г. Решение задачи собственных колебаний конечной плиты с закреплённым основанием и метод Левинсона. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №4. С.23-30.
17. Закарян Т.В. О пограничном слое в трёхмерной задаче о вынужденных колебаниях ортотропных пластин. // В сб. Механика 2009: Труды межд. школы – конференции молодых учёных. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2009. С. 214-218.

**Сведения об авторах:**

**Агаловян Ленсер Абгарович**, академик НАН Армении,  
 зав. отделом Института механики НАН Армении  
 Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>,  
 Тел: (+37410) 52-58-35, E-mail: [aghal@mechins.sci.am](mailto:aghal@mechins.sci.am)

**Закарян Татевик Владиковна**, научн. сотр. Института механики НАН Армении  
 Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>  
 Тел: (+37410) 63-88-82, E-mail: [zaqaryantatevik83@rambler.ru](mailto:zaqaryantatevik83@rambler.ru)

Поступила в редакцию 08. 04. 2011

УДК 539.3

FREE VIBRATIONS OF THE INFINITE PLATE STRENGTHENED BY THE STIFFENING RIBS  
 MUSTAFA BARACAT

**Key words:** vibrations, frequency, stiffening rib, plate, optimal design.

**Ключевые слова:** колебания, частота, ребро жёсткости, пластинка, оптимальный проект.

Мустафа Баракат

Свободные колебания бесконечной пластинки, усиленной рёбрами жёсткости

Исследуются свободные колебания бесконечной прямоугольной пластинки, усиленной периодически расположенными поперечными одинаковыми рёбрами жёсткости, изготовленными из другого более прочного материала. Определяются оптимальные геометрические параметры конструкции, обеспечивающие при её постоянном весе наибольшее значение низшей частоты свободных колебаний. Для сравнения исследуются также случаи, когда рёбра заменяются равными с ними по весу дополнительными нижним слоем, или одинаковыми наружными слоями пластинки. Показывается, что наибольшего значения низшей частоты свободных колебаний можно достичь в случае усиления пластинки рёбрами жёсткости.

Մուստաֆա Բարակատ

Կոշտության կողերով ուժեղացված անվերջ սալի ազատ տատանումները

Հետազոտվում են անվերջ երկար ուղղանկյուն սալի ազատ տատանումները, երբ սալն ուժեղացված է ավելի ամուր նյութից պատրաստված պարբերաբար դասավորված միատեսակ կոշտության կողերով: Որոշվում են կառուցվածքի օպտիմալ երկրաչափական պարամետրերը, որոնք հաստատուն կշռի դեպքում ապահովում են նրա ազատ տատանումների ստորին հաճախության մեծագույն արժեքը: Համեմատության համար հետզոտվում են նաև այն դեպքերը, երբ կողերը փոխարինվում են միևնույն կշռի սալի լրացուցիչ ստորին շերտով, կամ միատեսակ արտաքին շերտերով: Ցույց է տրվում, որ ստորին հաճախության մեծագույն արժեքին կարելի է հասնել սալը կողերով ուժեղացման դեպքում:

The natural vibrations of the infinite rectangular plate, strengthened by the periodically located transverse identical stiffening ribs, prepared of another more durable material are investigated. The optimum geometric parameters of construction are determined, which ensure the greatest value of the lowest frequency of the natural vibrations, with its fixed weight. For the comparison also the cases are investigated, when ribs are substituted by equal with them by the weight lower layer, or identical outer layers of plate. It shows that the greatest value of the lowest frequency of the natural vibrations is possible to reach in the case of strengthening the plate by stiffening ribs.

The natural vibrations of the infinitely long plate with a width  $b$ , by the thickness  $h_1$ , hinge-supported on two opposite sides  $y=0$  and  $y=b$ , strengthened by transverse periodically located at a distance  $a$  from each other identical stiffening ribs with the dimensions of the cross section  $\alpha h_r \times h_r$ , are examined (Fig.1).

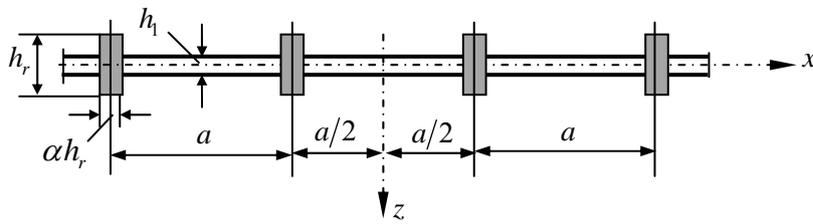


Fig.1

The problem of determining the optimum dimensions of the cross section of ribs and distance between them, which with the retention of the total weight of ribs ensure the greatest value of lowest frequency of the natural vibrations, is posed.

The optimum design on vibrations of the rectangular plates, strengthened by stiffening ribs, is investigated in the works [2] - [4].

In view of the symmetry of construction, the problem of the natural vibrations of the plate of the thickness  $h_1$  in the section  $0 \leq x \leq a/2$ , elastic supported on by right the end  $x = a/2$  to the stiffening rib is examined.

The equation of the natural vibrations of plate takes the form:

$$D_1 \Delta^4 w + \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

where  $D_1 = E_1 h_1^3 / 12(1 - \nu_1^2)$  – the flexural stiffness of plate,  $\rho_1$ ,  $E_1$ ,  $\nu_1$  – density, the modulus of elasticity and Poisson ratio of the material of plate.

Solution of equation (1), satisfactory to the conditions for hinged support on the long sides of the plate

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{with } y = 0, \quad y = b, \quad (2)$$

is assumed in the form:

$$w = (C_{1m} \text{ch} \mu_1 \lambda_m x + C_{2m} \text{sh} \mu_1 \lambda_m x + C_{3m} \cos \mu_2 \lambda_m x + C_{4m} \sin \mu_2 \lambda_m x) \sin \omega_m t \sin \lambda_m y, \quad (3)$$

where:

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \mu_1 = \sqrt{k_m + 1}, \quad \mu_2 = \sqrt{k_m - 1}, \quad k_m^2 = \omega_m^2 \frac{\rho_1 h_1}{D_1 \lambda_m^4}, \quad (4)$$

$C_{im}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – the coefficients, determined from the boundary conditions on the lines  $x = 0$ ,  $x = a/2$ ,  $\omega_m$  – the natural vibration frequency of plate.

The boundary conditions of the plate in question will depend on the mode of the natural vibrations of construction. The symmetrical and anti-symmetrical modes of the natural vibrations are examined.

#### a) Symmetrical mode of vibrations.

The cases the local (when ribs are not deformed) and general symmetrical modes of natural vibrations are possible.

##### –The local mode of vibrations.

In the case of the local symmetrical mode of the natural vibrations of plate boundary conditions on the lines  $x = 0$  and  $x = a/2$  will be:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{with } x = 0, \quad (5)$$

$$w = 0, \quad 2D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad \text{with } x = a/2. \quad (6)$$

Here  $C_0$  – the torsion stiffness of rib, determined from the formula:

$$C_0 = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)} \alpha h_r^4 \beta, \quad \text{where } \beta = \alpha^2 \left[ \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \alpha \sum_{1,3,\dots} \frac{1}{n^5} \text{th} \frac{\pi n}{2\alpha} \right],$$

where  $E_2$  and  $\nu_2$  – the modulus of elasticity and Poisson ratio of the material of rib.

The satisfaction of conditions (5) and (6) leads to the uniform system of equations relative to coefficients  $C_{im}$ , from the condition for existence of nontrivial solution of which the transcendental equation relative to the coefficient  $k_m$  is obtained:

$$\begin{aligned}
H_1(k_m) = & \mu_1 \left( \mu_1 \operatorname{ch}(\mu_1 \lambda_m a/2) + \frac{C_0}{2D_1} \lambda_m \operatorname{sh}(\mu_1 \lambda_m a/2) \right) \cos(\mu_2 \lambda_m a/2) + \\
& + \mu_2 \left( \mu_2 \cos(\mu_2 \lambda_m a/2) + \frac{C_0}{2D_1} \lambda_m \sin(\mu_2 \lambda_m a/2) \right) \operatorname{ch}(\mu_1 \lambda_m a/2) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

– **General symmetrical mode of natural vibrations.**

Boundary conditions of the plate on the line  $x=0$  will be written down in the form (5), and on the line  $x=a/2$  – in the form:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad B_r \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho_2 A_r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad \text{with } x = a/2, \tag{8}$$

where:  $B_r = E_2 \alpha h_r^4 / 12$  – the flexural stiffness of the rib,  $A_r = \alpha h_r^2$  – the cross-sectional area of the rib,  $\rho_2$  – material density of rib.

The satisfaction of conditions (5) and (8) leads to the uniform system of equations relative to coefficients  $C_{im}$ , from where transcendental equation relative to the coefficient  $k_m$  is obtained:

$$\begin{aligned}
H_2(k_m) = & \mu_2 \sin(\mu_2 \lambda_m a/2) \left[ (B_r \lambda_m^2 - \rho_2 A_r) \operatorname{ch}(\mu_1 \lambda_m a/2) - 2D_1 \lambda_m \mu_1^3 \operatorname{sh}(\mu_1 \lambda_m a/2) \right] + \\
& + \mu_1 \operatorname{sh}(\mu_1 \lambda_m a/2) \left[ (B_r \lambda_m^2 - \rho_2 A_r) \cos(\mu_2 \lambda_m a/2) - 2D_1 \lambda_m \mu_2^3 \sin(\mu_2 \lambda_m a/2) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

**b) The anti-symmetrical mode of vibrations.**

In this case the boundary conditions of plate will be written down in the form:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{with } x = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad B_r \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho_2 A_r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad \text{with } x = a/2. \tag{11}$$

The satisfaction of conditions (10) and (11) leads to the uniform system of equations relative to coefficients  $C_{im}$ , and the value of the coefficient  $k_m$  will be determined from the transcendental equation:

$$\begin{aligned}
H_3(k_m) = & \mu_2 \cos(\mu_2 \lambda_m a/2) \left[ (B_r \lambda_m^2 - \rho_2 A_r) \operatorname{sh}(\mu_1 \lambda_m a/2) - 2D_1 \lambda_m \mu_1^3 \operatorname{ch}(\mu_1 \lambda_m a/2) \right] - \\
& - \mu_1 \operatorname{ch}(\mu_1 \lambda_m a/2) \left[ (B_r \lambda_m^2 - \rho_2 A_r) \sin(\mu_2 \lambda_m a/2) + 2D_1 \lambda_m \mu_2^3 \cos(\mu_2 \lambda_m a/2) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Thus of the value of the coefficient  $k_m$  for the assigned geometric and physic mechanical parameters of construction will be determined from the equations (7), (9) and (12). Moreover from the first values of the coefficients  $k_m$  obtained from these equations should be selected smallest, to which will correspond the form of the natural vibrations of construction.

The value of the natural vibration frequency of plate will be determined from the expression (4), from where

$$\omega_m^2 = k_m^2 \frac{D_1 \lambda_m^4}{\rho_1 h_1}. \tag{13}$$

By control of the parameters  $h_r$ ,  $\alpha$  and  $a$ , it is possible to determine their optimum values, which ensure, with constant weight of stiffening ribs, the greatest value of the lowest natural vibration frequency.

The condition of the weight constancy of ribs will be determined from the condition of the equality of the weight of ribs to the weight of the continuous additional layer of plate by thickness  $h_2$ , from where

$$h_r = \sqrt{\frac{h_2 a}{\alpha}}. \quad (14)$$

The determination of the optimum geometric parameters of construction is reduced to the following problem of nonlinear programming:

To find:

$$\max_{\bar{x}} \min_m \omega_m, \quad \bar{x} = \{\alpha, h_r, a\}, \quad (15)$$

with the limitations:

$$H_i(k_m) = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad h_r = \sqrt{\frac{h_2 a}{\alpha}} \quad (16)$$

$$h_1 \leq h_r \leq 0.2b, \quad 0.2 < \alpha < 5, \quad (17)$$

The limitations in the form of equalities (16) correspond to equations (7), (9), (12) and to condition (14), while the limitations in the form of inequalities (17) are caused by the limits of applicability for of the stiffening ribs of the classical theory of beams.

Problem (15) - (17) is solved by the method of the deformed polyhedron in combination with the method of straight search [5], from where the greatest value of the lowest natural vibration frequency  $\omega$  and the corresponding values of the parameters  $h_r$ ,  $\alpha$  and  $a$  are determined.

Obtained value of the lowest natural vibration frequency of the plate, strengthened by stiffening ribs is compared with values, obtained for the cases, when the ribs of plate are substituted equal to them by the weight by additional lower layer with thickness  $h_2$ , or two outer layers with thickness  $h_2/2$ , symmetrically located relative to the middle plane of plate (Fig.2).

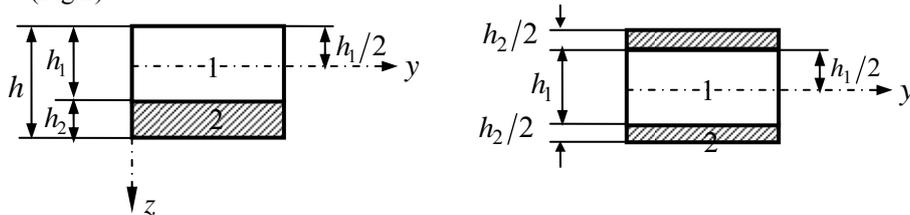


Fig.2

In the case of two-layered plate for determining the natural vibration frequencies the expression is obtained

$$\omega_m = \frac{\pi^2 m^2}{b^2} \sqrt{\frac{D^*}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}}, \quad (18)$$

where:

$$D^* = D - \frac{K^2}{C}, \quad (19)$$

$D$ ,  $C$  and  $K$  – correspondingly the flexion stiffness, tension stiffness and mutual influence of flexion and tension stiffness of two-layered plate.

Assuming, that the coordinate plane  $xOy$  coincides with the middle plane of upper layer, the expressions for the stiffness of the plate in question, accordingly [1], are obtained:

$$C = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} h_1 + \frac{E_2}{1-\nu_2^2} h_2, \quad K = \frac{1}{2} \frac{E_2}{1-\nu_2^2} h_2 (h_1 + h_2),$$

$$D = \frac{1}{12} \left[ \frac{E_1}{1-\nu_1^2} h_1^3 + \frac{E_2}{1-\nu_2^2} h_2 (4h_2^2 + 3h_1^2 + 6h_2 h_1) \right],$$

In the case of three-layered plate the natural vibration frequencies will be determined according to the formula:

$$\omega_m = \frac{\pi^2 m^2}{b^2} \sqrt{\frac{D_0}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}}, \quad (20)$$

where

$$D_0 = \frac{2}{3} \left[ \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left( \frac{h_1}{2} \right)^3 + \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \left( \left( \frac{h_1}{2} + h_2 \right)^3 - \left( \frac{h_1}{2} \right)^3 \right) \right].$$

Thus, from the solution of problem (15) - (17) and by the formulas (18), (20) the values of the lowest natural vibration frequency are determined for the appropriate cases of strengthening the plate. Comparative analysis of the numerical results of calculation with the given values  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, \rho_1, \rho_2, h_1, h_2$  will make it possible to reveal the project, with which the great value of the lowest natural vibration frequency of construction is obtained.

The plate with the parameters  $E_2 = 7E_1, \nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.25, \rho_2 = 3.2\rho_1, h_2 = 0.2h_1$  is examined as a numerical example.

For the different values of the reduced thickness  $\bar{h}_1 = h_1/b$  the values of the reduced lowest natural vibration frequency  $\bar{\omega} = \omega \sqrt{b^2 \rho_1 / E_1}$  are determined for the cases of strengthening by stiffening ribs  $\bar{\omega}_I$ , by the additional lower layer  $\bar{\omega}_{II}$  and by outer layers  $\bar{\omega}_{III}$ . The results of calculation are given in the table. Also are there given the corresponding optimum values of the parameters of ribbed plate  $\bar{h}_r = h_r/b, \alpha, \bar{a} = a/b$ .

Table. Values of the lowest natural vibration frequencies for the different variants of strengthening the plate

$\bar{h}_1$	$\bar{\omega}_I$	$\bar{\omega}_{II}$	$\bar{\omega}_{III}$	$\bar{h}_r$	$\alpha$	$\bar{a}$
0.008	0.063	0.035	0.045	0.057	0.2	0.4
0.010	0.075	0.044	0.056	0.063	0.2	0.4
0.015	0.104	0.066	0.084	0.087	0.2	0.5
0.020	0.131	0.087	0.113	0.100	0.2	0.5

As the results of calculation show, the greatest values of the lowest natural vibration frequency are obtained during the optimum strengthening of plate by stiffening ribs. In this case an increase in the lowest natural vibration frequency in comparison with the plate, strengthened by outer layers, is substantial for comparatively thin plates. So with  $\bar{h}_1 = 0.008$  it composes 40%, and with  $\bar{h}_1 = 0.02$  – 13%.

It should be noted that strengthening plate by the symmetrically located outer layers in comparison with the case of two-layered plate is more effective, since it leads to an increase in the lowest natural vibration frequency to 30%.

In Fig.3 on the line  $\bar{y} = y/b = 0.5$  and along the entire surface of plate in the section  $-0.5 \leq \bar{x} = x/a \leq 0.5$  for  $\bar{h}_1 = 0.01$  the diagrams of the reduced deflections  $\bar{w} = w/h_1$  of the ribbed plate are shown, which correspond to its optimum project (Fig.3).

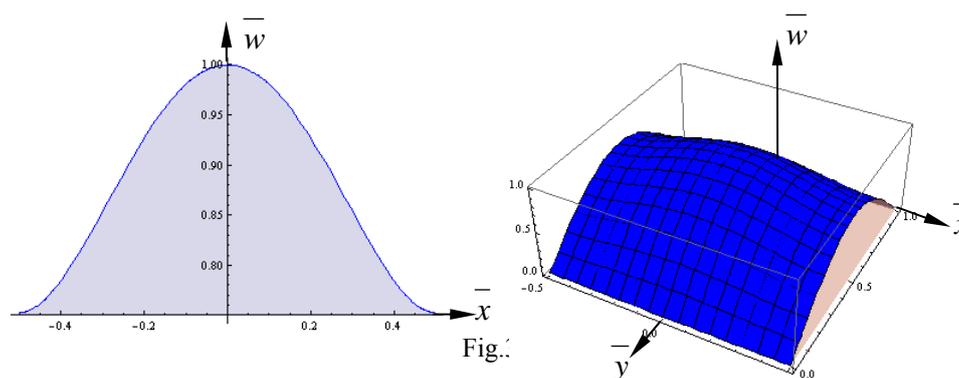


Fig.3

As can be seen from the graphs the optimum design of construction corresponds to the symmetrical general mode of vibrations.

#### Referencys:

1. Ambartsumyan S.A. The theory of anisotropic plates. M.: Nauka, 1987. 360p.
2. Asatryan V.M., Barakat M.S. Natural vibrations of laminar or strengthened by the oblique located stiffening ribs of the rectangular plate. Bulletin Yerevan state university of architecture and construction (Proceedings of 2-nd Int. Conf. "Architecture and construction – contemporary problems"), 2010, v. 2, № (15/2), pp. 213-218.
3. Belubekyan E.V., Poghosyan A.G. Design of ribbed plate from the composite material of the greatest lowest natural vibration frequency. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1994. V.47. №5-6. PP.24-29.
4. Belubekyan E.V., Poghosyan A.G. Optimization of the rectangular plate of composite material, reinforced with transverse rigid ribs by the criterion of maximum of the first characteristic oscillation frequency. NAS of Armenia. Institute of Mechanics Problems of mechanics of deformable solid body. Yerevan, 2007, pp. 86-91.
5. Pogosyan A.G. The application of a method of the deformed polyhedron to the solution of the problem of the optimum design of the rectangular compressed plate, strengthened on the edges by stiffening ribs, with the given value of the first natural vibration frequency.// Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1998. V.51. №3. PP.28-33.

**Barakat Mustafa** – post graduate student, Yerevan State University of Architecture and Construction, chair of strength of materials, Syria, Aleppo. Tel.: 06-5741911.

Поступила в редакцию 12.01.2011

УДК 539.3

## К УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦА ПОД ШТАМПАМИ

МОВСИСЯН Л.А.

**Ключевые слова:** устойчивость кольца, штамп, интервал контакта, вязкость, критическая сила.

**Keywords:** stability of ring, punch, interval of contacts, viscosity, critical forces.

Մովսիսյան Լ.Ա.

### Դրոշմերի տակ օղակի կայունության մասին

Շրջանային օղակի կայունությունը դիտարկվում է այն դեպքում, երբ ուժերը նրան փոխանցվում են դրոշմերի միջոցով: Կրիտիկական ուժերի արժեքները ստացվել են վերջիններիս չափերից և դիրքից կախված: Ուսումնասիրվել է նույնպես կոնտակտի ինտերվալի կախվածությունը, երբ օղակի նյութը առաձգամածուցիկ է

Movsisyan L.A.

### The stability of cylindrical ring under punches

The stability of circular ring, when concentrated forces act under symmetrically situated cylindrical of form punches is considered. The values of critical forces dependent from sizes and convexity or concavity of punches are obtained. Also the question of influence of viscosity material of ring on contacts interval is investigated.

Рассматривается устойчивость круглого кольца, когда сосредоточенные силы действуют через симметрично расположенные штампы. Получены значения критических сил в зависимости от размеров и положений штампов. Изучается также вопрос влияния вязкости материала кольца на интервал контакта.

Контактные задачи для кольца (для цилиндрической оболочки бесконечной длины – одномерная задача) рассматривались в [1,2]. В [3,4] изучались подобные задачи при общей анизотропии материала кольца и при наличии наполнителя. В [5] в общих чертах рассматривались задачи устойчивости, не доводя её до числовых результатов. Насколько нам известно, задача устойчивости упругой системы, когда сила передаётся на объект через штампы, рассматривалась только в [6].

В настоящей работе изучается контактная задача для кольца под штампами и, что самое главное, проблема устойчивости. Изучается также вопрос, как влияет вязкость материала на интервал контакта.

1. Круговое кольцо из вязкоупругого материала радиуса  $R$  и площадью поперечного сечения  $F$  находится под действием  $2n$  одинаковых (симметрично расположенных) жёстких и гладких штампов. Они имеют ось симметрии. Сосредоточенные силы  $P$  действуют по этой оси и направлены к центру круга кольца. Радиус кривизны штампа принимается постоянным  $R_1$ . Принимается, что

трение между кольцом и штампами отсутствует, т.е. штампы вызывают только нормальное давление. Тогда интегрирование уравнений статики для усилий и изгибающего момента дают

$$\begin{aligned} T &= C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + R \int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \\ N &= C_1 \sin \theta - C_2 \cos \theta - R \int_0^{\theta} q \cos(\theta - \varphi) d\varphi \\ M &= -R \left[ C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + R \int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \right] + C_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь «постоянные»  $C_i$  и нормальное давление  $q(\theta, t)$  подлежат определению.

Перемещения и угол поворота  $\varphi$  (по известной причине учитывается поперечный сдвиг) через кинетические величины определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= EF(1 - \Gamma^*) \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad M = EJ(1 - \Gamma^*) \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ N &= k^2 GF(1 - \Gamma^*) \left( \psi + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\Gamma^*$  – наследственно-упругий оператор,  $F$  и  $J$  – соответственно, площадь и момент инерции поперечного сечения.

Интегрируя систему (1.2) при (1.1) и удовлетворяя условиям симметрии [5]

$$v = N = \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta = \theta_1 = \frac{\pi}{n}, \quad (1.3)$$

получим

$$\begin{aligned} C_2 = C_4 &= 0 \\ C_1 &= \frac{R}{\sin \theta_1} \int_0^{\theta_1} q \cos(\theta_1 - \varphi) d\varphi, \quad C_3 = \frac{R^2}{\theta_1} \int_0^{\theta_1} q d\varphi \end{aligned} \quad (1.4)$$

«Постоянная»  $C_4$  появляется при определении  $v$ .

Используя условие для изменения кривизны под штампом [1, 2]

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \quad (1.5)$$

для определения  $q$  получим следующее уравнение:

$$\frac{Rq}{k^2GF} + \frac{R}{EJ} \left\{ C_3 - R \left[ C_1 \cos \theta + R \int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \right] \right\} =$$

$$= (1 - \Gamma^*)(1 - \lambda) \quad , \quad \lambda = \frac{R}{R_1} \quad (1.6)$$

Решением уравнения (1.6) является

$$\bar{q} = \beta^2 \left[ \bar{C}_1 - \bar{C}_3 + (1 - \Gamma^*)(1 - \lambda) \right] \cos \beta \theta + \bar{C}_3 - (1 - \Gamma^*)(1 - \lambda). \quad (1.7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\bar{q} = \frac{qR^2}{EJ} \quad , \quad \bar{C}_i = C_i \frac{R}{EJ} \quad , \quad (i=1,3), \quad \beta^2 = \frac{k^2 R^2 GF}{EJ}. \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) в (1.4) и учитывая, что  $\beta^2 \gg 1$ , для определения  $\bar{C}_i$  имеем:

$$\bar{C}_1 \sin \theta_1 = C \left[ \beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 \cos(\theta_0 - \theta_1) + (\theta_0 - \theta_1) \operatorname{ch} \beta \theta_0 + \sin \theta_1 \right] +$$

$$+ D \left[ \sin \theta_1 + \sin(\theta_0 - \theta_1) \right],$$

$$\bar{C}_3 \theta_1 = C \beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 + D \theta_0, \quad C = \bar{C}_1 - D \quad , \quad D = \bar{C}_3 - (1 - \Gamma^*)(1 - \lambda). \quad (1.9)$$

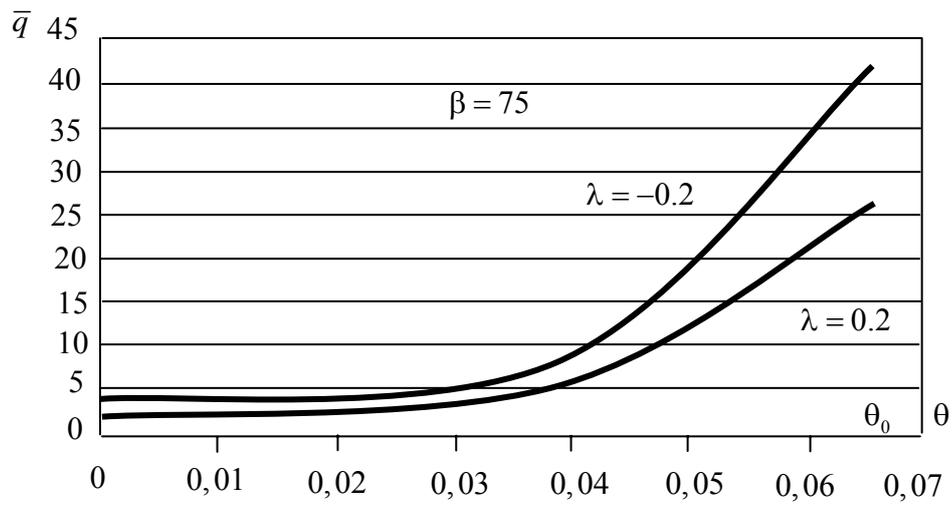
Неизвестный интервал контакта  $[0, \theta_0]$  определяется из условия

$$\bar{P} = P \frac{R^2}{EJ} = -2 \int_0^{\theta_0} \bar{q} \cos \varphi d\varphi = -2 \left[ C (\beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 \cos \theta_0 + \right.$$

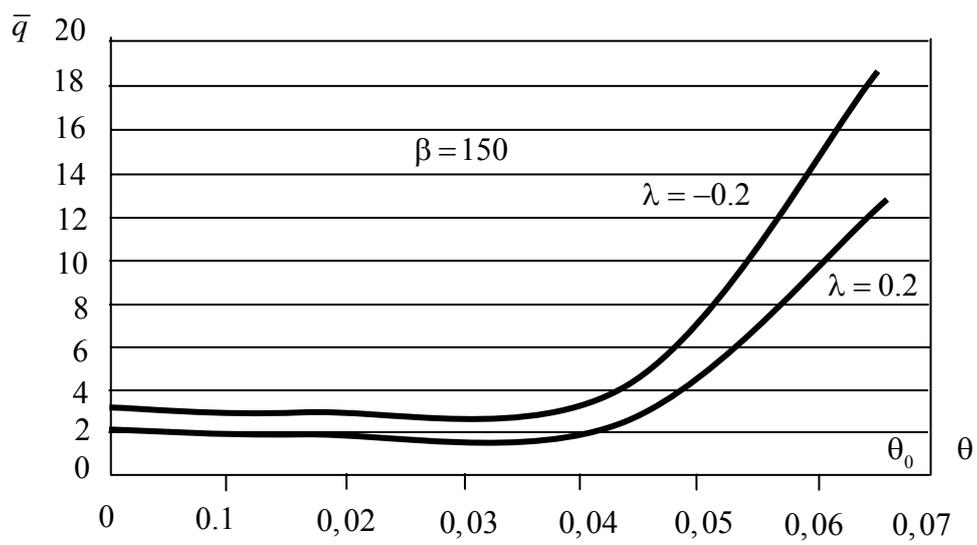
$$\left. + \operatorname{ch} \beta \theta_0 \sin \theta_0) + D \sin \theta_0 \right]. \quad (1.10)$$

В качестве конкретного примера взят случай  $n = 4$ , т.е.  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ . Для упругого случая ( $\Gamma^* = 0$ ) произведены вычисления при различных  $\beta$  и  $\lambda$ . Некоторые из этих результатов размещены на фигурах.

На фиг. 1 и 2 приведены кривые  $\bar{q}$  в зависимости от  $\theta$  (в радианах). Отрицательное значение  $\lambda$  соответствует случаю, когда центр штампа находится в противоположной от центра кольца стороне. Как и следовало ожидать, при одной и той же силе интервал контакта штампа с кольцом при положительном  $\lambda$  больше, чем при отрицательном. В то же время значение  $\bar{q}$  в точке  $\theta = 0$  для отрицательных  $\lambda$  больше, чем при положительных.

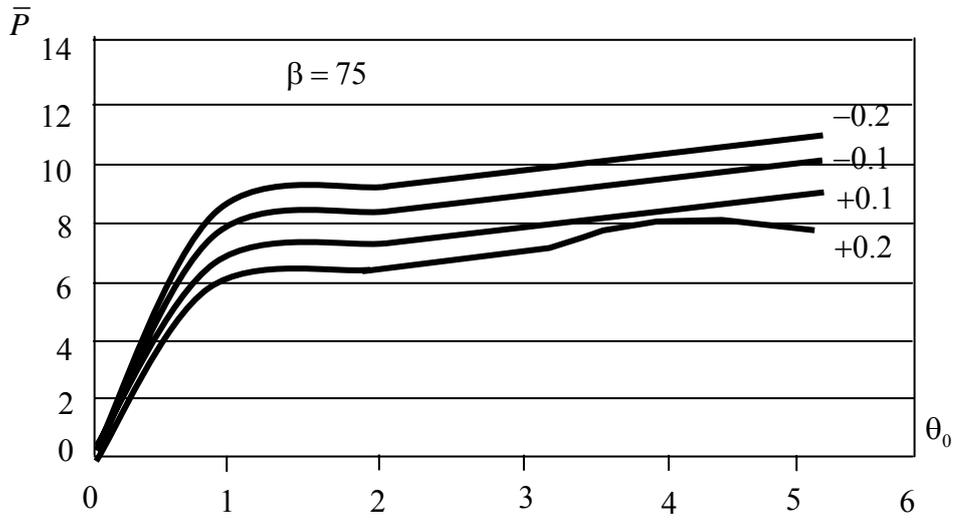


Фиг.1

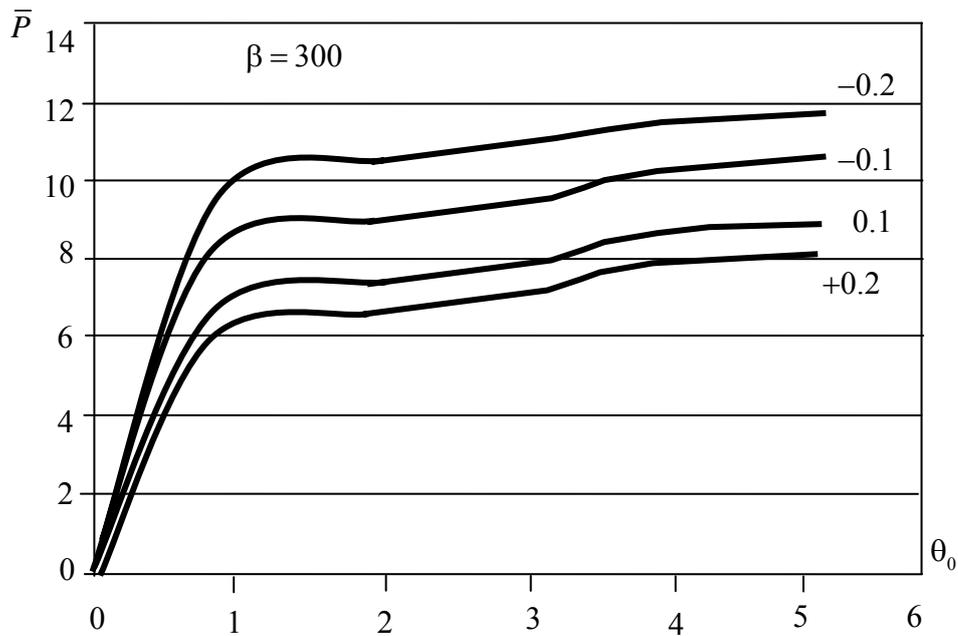


Фиг. 2

На фиг.3 и 4 приведены некоторые кривые для  $\bar{P}$  в зависимости от  $\theta$  (в градусах).



Фиг. 3



Фиг.4

Как приведённые кривые, так и другие результаты, показывают, что в довольно широком интервале зависимость между  $\bar{P}$  и  $\theta$  линейная. Для одного и того же интервала контакта для положительных  $\lambda$  потребуется меньше  $\bar{P}$ , чем для отрицательных. Естественно, одинаковые  $\theta_0$  для различных  $\lambda$  получаются при различных  $\bar{P}$ .

2. Теперь обратимся к вопросу вязкости. Как изменяется зависимость  $\bar{P}$  от  $\theta$  при наличии вязкости. В качестве вязкоупругой модели возьмём типичное тело. Тогда в уравнениях (1.6)–(1.9) выражение  $(1 - \Gamma^*)(1 - \lambda)$  следует заменить на

$$\left[1 - H(1 - e^{-\gamma t})\right](1 - \lambda). \quad (2.1)$$

Если мгновенный модуль упругости –  $E$ , то длительный модуль –  $E(1 - H)$ .

Некоторые результаты численных данных относительно зависимости  $\bar{P}$  и  $\theta$  для различных моментов времени помещены в нижеприведённых таблицах при

$$H = 0,5; \quad \delta(t) = 1 - e^{-\gamma t} = 1; \quad 0,75, \quad 0,5, \quad (2.2)$$

т.е. принимается, что длительный модуль равен половине упругого.

Таблица 1.  $\beta = 75$

$\lambda$	0,1			-0,1		
$\delta$ $\theta$	1	0,75	0,5	1	0,75	0,5
1	6,643	4,982	3,321	8,089	6,089	4,059
2	7,139	4,982	3,321	8,089	6,089	4,059
3	7,635	5,726	3,817	9,332	6,999	4,665
4	8,176	6,132	4,088	9,993	7,495	4,996
5	8,771	6,572	4,385	10,72	8,045	5,364

Таблица 2.  $\beta = 300$

$\lambda$	0,2			-0,2		
$\delta$ $\theta$	1	0,75	0,5	1	0,75	0,5
1	6,169	4,627	3,084	9,250	6,945	4,627
2	6,590	4,945	3,295	9,885	7,414	4,942
3	7,052	5,284	3,525	10,58	7,935	5,288
4	7,872	5,663	3,779	11,34	8,501	5,668
5	8,003	5,867	3,936	11,77	8,792	5,884

Как видно из таблиц и имеющихся у нас данных, имеет место принцип соответствия.

3. Для изучения задачи устойчивости сначала найдем выражение для кольцевого усилия  $T$ .

Согласно уравнениям статики, оно определяется из

$$\frac{d^2\bar{T}}{d\theta^2} + \bar{T} = \bar{q}, \quad \bar{T} = T \frac{R^2}{EJ}, \quad (3.1)$$

где для  $\bar{q}$  уже имеем выражение (1.7). Рассмотрим только упругий случай. Если  $\bar{q}$  и  $\bar{T}$  представить в виде рядов

$$\bar{q} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta, \quad T = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta, \quad (3.2)$$

то согласно (1.7) и (3.1) будем иметь:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} [\beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 + (\bar{C}_3 - 1 + \lambda)]$$

$$a_m = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\beta^2}{\beta^2 + m^2} [\beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 \cos m\theta_0 + m \operatorname{ch} \beta \theta_0 \sin m\theta_0] + (\bar{C}_3 - 1 + \lambda) \frac{\sin m\theta_0}{m} \right\}$$

$$c_m = \frac{a_m}{1 - m^2}, \quad m = 4k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Если искать решение уравнения устойчивости

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{T} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.4)$$

в виде  $\bar{w} = \sum_{n=1}^m f_n \cos n\theta$ , то для определения критических сил будем иметь систему

$$f_n n(n^2 - 1) - \frac{1}{2} \left[ (2c_0 - c_{2n}) n f_n + \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} m f_m (c_{n-m} - c_{n+m}) \right] = 0. \quad (3.5)$$

Условие разрешимости системы дает значения критических сил  $\bar{P}_{\text{кр.}} = \frac{P_{\text{кр.}} R^2}{EJ}$

(равенство нулю детерминанта).

В табл. 3 приведены значения  $\bar{P}_{\text{кр.}}$  для различных  $\beta$  и  $\lambda$ .

Таблица 3

$\lambda$ $\beta$	0,1	-0,1	0,2	-0,2	-1
75	3,037	3,711	2,669	4,049	6,749
150	3,256	3,980	2,895	4,342	7,236
300	3,329	4,068	2,959	4,438	7,397

Имеющиеся данные позволяют сделать следующие выводы:

1. Критическая сила для положительных  $\lambda$  меньше, чем для отрицательных.
2. Если для положительных  $\lambda$  с увеличением его критическая сила уменьшается, то для отрицательных  $\lambda$  – наоборот.

Интересно ещё, решение рассмотренной задачи сравнить со случаем, когда сосредоточенные силы непосредственно действуют на кольцо. В последнем случае  $\bar{P}_{кр.} = 4,417$ , т.е. при наличии штампов в зависимости от их радиуса кривизны возможны как уменьшение, так и увеличение по сравнению с задачей, когда сосредоточенная сила непосредственно приложена к кольцу в зависимости от величины  $\lambda$ .

Основная часть числовых данных получена Г.Г. Нерсисяном, за что выражаю благодарность.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.М., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М: Машиностроение, 1980. 415 с.
2. Пелех Б.А., Сукорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 214 с.
3. Мовсисян Л.А. Об одной контактной задаче для анизотропной цилиндрической оболочки. Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела (сборн.научных трудов, посвященный 85-летию Н.Х.Арутюняна). Ереван: 1999. С.105-108.
4. Мовсисян Л.А. Об одной контактной задаче для кольца с заполнителем. Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем (сборн.научных трудов). Ереван: ЕГУ, 2002. С.181-185.
5. Мовсисян Л.А. Упругая и вязкоупругая устойчивость кругового кольца под штампами. //Механика.(межвуз.сборн.научных трудов) Ереван, 1986. Вып.4. С.36-43.
6. Мовсисян Л.А. К устойчивости круговой арки под штампом. //Изв.НАН Армении. Механика.1993. Т.46. №1-2. С.14-18.

#### Сведения об авторе:

**Мовсисян Лаврентий Александрович** – д.т.н., профессор, главн. научн. сотрудник Института механики НАН Армении.

**Адрес:** 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>

Поступила в редакцию 08.06.2009

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ  
ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
СО СВОБОДНЫМ ВРАЩЕНИЕМ В ОБЛАСТИ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ  
САРКИСЯН А. А.**

**Ключевые слова:** тонкая оболочка, несимметричная упругость, начально-краевая задача, асимптотический анализ

**Key words:** thin shell, asymmetrical elasticity, initial-boundary problem, asymptotical analysis.

**Մարգարյան Ա. Հ.**

**Թաղանթի բարակ տիրույթում ազատ պտույտներով առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության  
նախնական-եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ անալիզը**

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ անալիզի օգնությամբ թաղանթի բարակ տիրույթում կառուցվում է միկրոպոլյար առաձգական թաղանթի դինամիկայի ներքին խնդիրը (որը բնույթով երկչափ է) և սահմանային շերտը, ուսումնասիրվում է նրանց համակցման հարցը: Ներքին խնդրի մակարդակում հիմնավորվում է հիպոթեզաների մեթոդի հիման վրա կառուցված ազատ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական թաղանթի դինամիկայի կիրառական տեսությունը:

**Sargsyan A. H.**

**Asymptotical Analysis of Initial-Boundary problem of Elasticity Asymmetrical Theory with Free  
Rotation in Thin Area of the Shell**

In present work on the basis of asymptotical method in thin area of shell internal problem (which by the nature is two-dimensional) and boundary layer for dynamics of micropolar elastic shells are constructed, and the question of their merging is studied. At level of internal problem the applied dynamic theory of micropolar elastic shells with free rotation constructed on the basis of the hypotheses method are proved.

В работе при помощи асимптотического метода в области тонкой оболочки строятся внутренняя задача (по своей природе двумерная) и погранслои для динамики микрополярных упругих оболочек, изучается вопрос об их сращивании. На уровне внутренней задачи обосновывается прикладная динамическая теория микрополярных упругих оболочек со свободным вращением, построенная на основе метода гипотез.

**Введение.** Микрополярная (несимметричная, моментная) теория упругости является одной из основных моделей сред с внутренней структурой [1,2]. Эффекты микрополярности материала особенно существенны в тонких телах (балки, пластинки, оболочки). Современные достижения в области теории микрополярных тонких балок, пластин и оболочек освещены в обзорных статьях [3,4]. Отметим, что проблема построения моделей микрополярных тонких балок, пластин и оболочек поставлена С.А. Амбарцумяном [5].

В работах С.О. Саркисяна [6-8] развит метод гипотез построения моделей микрополярно-упругих тонких балок, пластин и оболочек, который базируется на математических свойствах решений микрополярной теории упругости, полученных при помощи асимптотического метода интегрирования соответствующих краевых задач в тонких областях. В построенных микрополярных теориях балок, пластин и оболочек работ [6-8] полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

В данной работе развивается асимптотический подход [9,10], строятся внутренняя задача и погранслои начально-краевой задачи несимметричной теории упругости в тонкой области оболочки. В результате изучения асимптотических свойств решения указанной начально-краевой задачи обосновывается метод гипотез

построения в работе [8] динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек со свободным вращением.

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины  $2h$  как трехмерное упругое тело. Тензорные уравнения динамической задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ) имеют вид [11]:

$$\begin{aligned} & \text{уравнения движения} \\ \nabla_m \sigma^{mn} = \rho \frac{\partial^2 V^n}{\partial t^2}, \quad \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk} \sigma_{mk} = J \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{соотношения упругости} \\ \sigma_{mn} = (\mu + \alpha) \gamma_{mn} + (\mu - \alpha) \gamma_{nm} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{nm}, \quad \mu_{mn} = (\gamma + \varepsilon) \chi_{mn} + (\gamma - \varepsilon) \chi_{nm} + \beta \chi_{kk} \delta_{nm} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \text{геометрические соотношения} \\ \gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn} \omega^k, \quad \chi_{mn} = \nabla_m \omega_n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\sigma^{nm}, \mu^{nm}$  – контравариантные компоненты силового и моментного тензоров напряжений;  $\gamma_{mn}, \chi_{mn}$  – ковариантные компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения;  $V^n$  – контравариантные компоненты вектора перемещения,  $\omega^n$  – контравариантные компоненты вектора независимого поворота;  $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  – физические константы микрополярного материала оболочки,  $\rho$  – плотность материала,  $J$  – мера инерции при вращении. Индексы  $m, n, k$  здесь и в дальнейшем принимают значения 1, 2, 3.

Отнесём оболочку к триортогональной системе координат  $\alpha_n$  ( $H_i = A_i (1 + \alpha_3/R_i)$ ,  $H_3 = 1$ ,  $i = 1, 2$ ), принятой в теории оболочек [12, 13], и перейдём к физическим компонентам для указанных тензоров и векторов, но их обозначения оставим прежними.

Для граничных условий на лицевых поверхностях оболочки примем граничные условия первой граничной задачи НТУ с НППВ, которые можем записать в виде:

$$\sigma_{3n} = p_n^\pm, \quad \mu_{3n} = m_n^\pm \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm h. \quad (1.4)$$

Граничные условия на поверхности края оболочки  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  в общем случае представляют граничные условия смешанной граничной задачи НТУ с НППВ:

$$\sigma_{mn} n_m = p_n^*, \quad \mu_{mn} n_m = m_n^* \quad \text{на} \quad \Sigma_1, \quad V_n = V_n^\bullet, \quad \omega_n = \omega_n^\bullet \quad \text{на} \quad \Sigma_2, \quad (1.5)$$

где  $p_n^*, m_n^*$  – компоненты заданных внешних усилий и моментов на  $\Sigma_1$ ;  $V_n^\bullet, \omega_n^\bullet$  – заданные компоненты векторов перемещений и независимого поворота на  $\Sigma_2$ .

При помощи начальных условий при  $t=0$  задаются значения компонентов вектора перемещения, вектора независимого поворота, компоненты линейной и вращательной скоростей точек тела.

$$\begin{aligned} V_n &= f_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \omega_n = \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \frac{\partial V_n}{\partial t} &= F_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \frac{\partial \omega_n}{\partial t} = \Phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $f_n, F_n, \varphi_n, \Phi_n$  – заданные функции в области трёхмерной оболочки.

## 2. Асимптотический анализ начально-краевой задачи (1.1)-(1.6) трехмерной микрополярной теории упругости в области тонкой оболочки.

Предположим, что толщина оболочки  $2h$  мала по сравнению с характерным радиусом кривизны срединной поверхности, т.е.  $2h \ll R$ . Будем исходить из той основной концепции [13-17], что в динамическом случае общее напряженно-деформированное состояние тонкой оболочки состоит из внутреннего напряженно-деформированного состояния (охватывающего всю область трёхмерной оболочки), пограничных слоев (локализирующихся вблизи боковой поверхности  $\Sigma$  и затухающие вдали от боковой поверхности) и пограничного слоя по времени (которое осциллируется по времени). При таком подходе, на результатах исходного приближения внутренней задачи, будет возможно построение общей двумерной модели микрополярных тонких оболочек.

Удобно вводить несимметричный тензор силовых напряжений:  $\tau_{mn}$  [13] и аналогичный тензор для моментных напряжений  $\nu_{mn}$  [9,10].

Тогда, определяющая система уравнений (1.1)-(1.3) динамической несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений принимает определённый вид [10].

Рассмотрим задачу сведения трехмерной динамической задачи несимметричной теории упругости для тонкой оболочки к двумерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем [13-17], включая вопрос об удовлетворении граничным и начальным условиям. Указанная проблема тесно связана с построением внутреннего итерационного процесса, которая будет представлять двумерную задачу. Для этой цели в трехмерных динамических уравнениях несимметричной теории упругости (1.1)-(1.3) перейдем к безразмерным координатам и безразмерному времени [13-17]:

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta, \quad t = \lambda^0\tau h/c_0. \quad (2.1)$$

Здесь величина  $\omega$  характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния (НДС) во времени, величина  $p/l$  характеризует изменяемость НДС по координатам;  $p, l$  – целые числа,  $l > p \geq 0$ ;  $\lambda$  – большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определяемый формулой  $h = R\lambda^{-1}$ . Введем безразмерные величины:

$$\frac{V_i}{R} = \bar{V}_i, \quad \frac{\tau_{ij}}{\rho c_0^2} = \bar{\tau}_{ij}, \quad \frac{\nu_{ij}}{R\rho c_0^2} = \bar{\nu}_{ij}, \quad \frac{p_n^\pm}{\rho c_0^2} = \bar{p}_n^\pm, \quad \frac{m_n^\pm}{R\rho c_0^2} = \bar{m}_n^\pm, \quad \frac{R_i}{R} = \bar{R}_i, \quad (2.2)$$

а также следующие безразмерные физические параметры [10]:

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\rho c_0^2}, \quad \bar{E} = \frac{E}{\rho c_0^2}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\rho c_0^2}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{R^2\rho c_0^2}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{R^2\rho c_0^2}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{R^2\rho c_0^2}, \quad \frac{J}{\rho h^2} = \lambda^k \bar{J}. \quad (2.3)$$

В результате преобразований (2.1)-(2.3), вместо системы уравнений (1.1)-(1.3) будем иметь соответствующие уравнения, но в безразмерном виде [10].

Следуя асимптотическому методу при построении внутренней задачи [13-15], наша цель будет заключаться в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными  $\xi_1, \xi_2, \zeta$  и времени  $\tau$ ) уравнения (1.1)-(1.3) (с учетом (2.1)-(2.3)) к двумерным уравнениям (с независимыми переменными  $\xi_1, \xi_2$  и времени  $\tau$ ).

Предположим, что безразмерные физические параметры (2.3) имеют значения:

$$\frac{\mu}{\rho c_0^2} \sim 1, \quad \frac{\alpha}{\rho c_0^2} \sim 1, \quad \frac{\beta}{R^2\rho c_0^2} \sim 1, \quad \frac{\gamma}{R^2\rho c_0^2} \sim 1, \quad \frac{\varepsilon}{R^2\rho c_0^2} \sim 1.$$

Числа  $\omega$  и  $k$  выбираем таким образом, чтобы в асимптотических приближениях получились непротиворечивые уравнения и чтоб инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения, т.е.  $\omega = l - p$ ,  $k = 2l$ . Таким образом, с асимптотической точностью  $O(\lambda^{p-l})$  получим:

$$\begin{aligned}
V_i &= R\lambda^{l-p} (V_i^0 + \lambda^{-l+c} \zeta V_i^1), \quad V_3 = R\lambda^{l-2p+c} (V_3^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta V_3^1), \\
\tau_{ii} &= \rho c_0^2 \lambda^l (\tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \tau_{ii}^1), \\
\tau_{ij} &= \rho c_0^2 \lambda^l (\tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \tau_{ij}^1), \quad \tau_{3i} = \rho c_0^2 \lambda^{l-p+c} (\tau_{3i}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{3i}^1 + \lambda^{-2l+2p} \tilde{\tau}_{3i}^2), \\
\tau_{i3} &= \rho c_0^2 \lambda^{l-p+c} (\tau_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{i3}^1), \quad \tau_{33} = \rho c_0^2 \lambda^c (\tau_{33}^0 + \zeta \tau_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^2 \tau_{33}^2), \\
\omega_i &= \lambda^{l-p-c} (\omega_i^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \omega_i^1), \quad \omega_3 = \lambda^{l-2p} (\omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \omega_3^1), \\
v_{ii} &= R\rho c_0^2 \lambda^{l-c} (v_{ii}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_{ii}^1), \\
v_{ij} &= R\rho c_0^2 \lambda^{l-c} (v_{ij}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_{ij}^1), \quad v_{3i} = R\rho c_0^2 \lambda^{l-p} (v_{3i}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{3i}^1), \\
v_{i3} &= R\rho c_0^2 \lambda^{l-p} (v_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{i3}^1), \quad v_{33} = R\rho c_0^2 \lambda^0 (v_{33}^0 + \zeta v_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^2 \tilde{v}_{33}^2),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где число  $c$  задается следующим образом:

$$c=2p-l \text{ при } l \leq 2p, \quad c=l-2p \text{ при } 2p \leq l \leq 4p, \quad c=2p \text{ при } l \geq 4p. \tag{2.5}$$

Качественной стороной асимптотического представления (2.4) является то, что повороты точек срединной поверхности оболочки независимы от перемещения этих же точек (поэтому построенную на основе внутренней задачи модель будем называть моделью микрополяных упругих оболочек с НППВ).

В описании НДС внутренней задачи остается выяснить роль переменных  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , задающих положение точки на срединной поверхности оболочки.

С этой точки зрения вводим вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные усилия, моменты и гипермоменты [9,10].

Вводим перемещения и независимые повороты точек срединной поверхности оболочки:

$$u_i = V_i|_{\zeta=0}, \quad w = V_3|_{\zeta=0}, \quad \Omega_i = \omega_i|_{\zeta=0}, \quad \Omega_3 = \omega_3|_{\zeta=0}. \tag{2.6}$$

Основная система уравнений динамической модели изгибной деформации микрополяных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

$$\begin{aligned}
& \text{уравнения движения} \\
& \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) + \frac{N_{i3}}{R_i} = 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - (p_i^+ + p_i^-), \\
& \frac{1}{A_i} \frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (H_{ji} + H_{ij}) - \\
& \quad - N_{3i} = \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - h(p_i^+ - p_i^-), \\
& -\frac{T_{11}}{R_1} - \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (p_3^+ + p_3^-), \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \frac{L_{i3}}{R_i} + \\ & + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} - (m_i^+ + m_i^-), \\ & -\frac{L_{11}}{R_1} - \frac{L_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + (S_{12} - S_{21}) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} - (m_3^+ + m_3^-), \\ & L_{33} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (H_{12} - H_{21}) + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = h(m_3^+ - m_3^-); \end{aligned}$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} N_{i3} &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{3i}, N_{3i} = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{i3}, \\ T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}], S_{ij} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}], M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \\ H_{ij} &= \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}], \\ L_{ii} &= 2h \left[ \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \kappa_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta + 2\gamma} \kappa_{jj} \right] + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} L_{33} \quad (2.8) \\ L_{ij} &= 2h [(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}], L_{33} = 2h [(\beta + 2\gamma)\iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})], \\ L_{i3} &= 2h \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ - m_i^-}{2} \right], \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ + m_i^-}{2h} \right]; \end{aligned}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i - (-1)^j \Omega_3, \\ K_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_j, K_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_i - (-1)^j \iota, \\ \Gamma_{i3} &= -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j, \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \vartheta_i = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, l_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i}, \quad (2.9) \\ \kappa_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i}, \kappa_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \kappa_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}. \end{aligned}$$

Отметим, что система уравнений (2.7)-(2.9) полностью совпадает с соответствующей системой уравнений теории микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, построенной С.О. Саркисяном в работе [8].

Обратимся к изучению краевых микрополярных упругих явлений. Будем снова исходить из уравнений трехмерной динамической теории НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) и считать, что поверхность края оболочки  $\Sigma$ , вблизи которого необходимо

исследовать напряженное состояние, задается уравнением  $\alpha_1 = \alpha_{10}$ . Введем замену независимых переменных (координат и времени) по формулам [10,13]:

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = R\lambda^{-l}\xi_1, \quad \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta, \quad t = \lambda^\omega \tau h/c_0, \quad (2.10)$$

где величины  $R, \lambda, l, p, \omega$  имеют тот же смысл, что и при изучении внутренней задачи.

Решение, таким образом полученное из системы уравнений (1.1)-(1.3) пограничной задачи, должно удовлетворять однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки  $\alpha_3 = \pm h$ :

$$\sigma_{3n} = 0, \quad \mu_{3n} = 0. \quad (2.11)$$

В краевой зоне необходимо искать такое упругое микрополярное состояние, изменяемость которого во времени совпадает с изменяемостью во времени для внутренней задачи.

Перейдём к безразмерным величинам (2.2), (2.3) и введём новые обозначения:

$$\bar{\tau}_{mn} = P_{mn}, \quad \bar{v}_{mn} = Q_{mn}, \quad \bar{V}_n = \lambda^{-l}U_n, \quad \bar{\omega}_n = \lambda^{-l}\varpi_n. \quad (2.12)$$

В результате, из уравнений (1.1)-(1.3) (с учетом (2.10)-(2.12),(2.2),(2.3)) получим трёхмерные уравнения микрополярной теории упругости в безразмерном виде.

На уровне асимптотической точности  $O(\lambda^{p-l})$  погранслоная задача расщепляется на четыре независимые системы уравнений:

силовая плоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial P_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial P_{31}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial P_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial P_{33}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} = \frac{1}{E} [P_{11} - \nu P_{22} - \nu P_{33}], \\ P_{22} - \nu(P_{11} + P_{33}) = 0, \quad \frac{\partial U_3}{\partial \zeta} = \frac{1}{E} [P_{33} - \nu P_{11} - \nu P_{22}], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial U_3}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{13} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{31} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{31} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{13};$$

силовая антиплоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial P_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial P_{32}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{12} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{21}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{32} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} P_{23} = 0 \\ (\bar{\mu} + \bar{\alpha}) P_{21} - (\bar{\mu} - \bar{\alpha}) P_{12} = 0, \quad (\bar{\mu} + \bar{\alpha}) P_{23} - (\bar{\mu} - \bar{\alpha}) P_{32} = 0; \end{aligned} \quad (2.14)$$

моментная плоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial Q_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_{32}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \varpi_2}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{12} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{21}, \quad \frac{\partial \varpi_2}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{32} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{23} \\ (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) Q_{21} - (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}) Q_{12} = 0, \quad (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) Q_{23} - (\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}) Q_{32} = 0; \end{aligned} \quad (2.15)$$

моментная антиплоская задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial Q_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_{31}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial Q_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_{33}}{\partial \zeta} = 0, \quad 2(\bar{\beta} + \bar{\gamma}) Q_{22} - \bar{\beta}(Q_{11} + Q_{33}) = 0, \\ \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \varpi_1}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} \left[ Q_{11} - \frac{\bar{\beta}}{2(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} (Q_{22} + Q_{33}) \right], \quad \frac{\partial \varpi_1}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{31} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{13}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}_3}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}(3\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})} \left[ Q_{33} - \frac{\bar{\beta}}{2(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} (Q_{11} + Q_{22}) \right], \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \bar{\omega}_3}{\partial \xi_1} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{13} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} Q_{31},$$

здесь  $A_{10} = A_1 \Big|_{\xi_1=0}$ .

Полученные уравнения ПС (который имеет квазистатический характер) в декартовых координатах  $(\xi'_1, \zeta)$  ( $\xi'_1 = A_{10}\xi_1$ ) с асимптотической точностью  $O(\lambda^{p-l})$  описывают НДС плоской и антиплоской силовой и моментной не взаимосвязанных задач микрополярной теории упругости, имеющих место в полуполосе:  $\{0 \leq \xi'_1 < \infty, -1 \leq \zeta \leq 1\}$ .

Потребовав, чтобы решения погранслоевых задач (2.13)-(2.16) имели затухающий характер при  $\xi_1 \rightarrow +\infty$ , получим, что такие решения обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_{1n} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 Q_{1n} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 U_2 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \bar{\omega}_2 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\ \int_{-1}^1 U_1 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = \frac{\bar{\lambda}}{4\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \bar{\mu})} \int_{-1}^1 \zeta P_{13} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta, \quad \int_{-1}^1 \bar{\omega}_1 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = \frac{\bar{\beta}}{4\bar{\gamma}(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} \int_{-1}^1 \zeta Q_{13} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta, \\ \int_{-1}^1 U_3 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta + \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \int_{-1}^1 \zeta P_{11} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \bar{\omega}_3 \Big|_{\xi_1=0} d\zeta + \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} \int_{-1}^1 \zeta Q_{11} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad (2.17) \\ \int_{-1}^1 \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \int_{-1}^1 P_{31} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{1}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} \int_{-1}^1 P_{32} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\ \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{\omega}_3}{\partial \zeta} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}}{4\bar{\gamma}(\bar{\beta} + \bar{\gamma})} \int_{-1}^1 Q_{33} \Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Из приведённых соотношений можем сделать следующий вывод в микрополярной теории упругости: когда силовые и моментные напряжения в пограничной зоне самоуравновешены, этим свойством будут обладать также перемещения и независимые повороты.

Рассматривая вопрос о сращивании внутреннего НДС с пограничным, получим:

$$(НДС) = (НДС)_{\text{вн}} + \lambda^r \cdot (НДС)_{\text{кр}}^a + \lambda^\theta \cdot (НДС)_{\text{кр}}^n \quad (2.18)$$

Числа  $r, \theta$  назовем показателями интенсивностей микрополярных погранслоев.

Числа  $r$  и  $\theta$  должны быть подобраны таким образом, чтобы стало возможным удовлетворение трехмерных граничных условий на поверхности края оболочки  $\Sigma$ .

Рассмотрим первый вариант трехмерных граничных условий микрополярной теории упругости со свободным вращением, когда поверхность края оболочки загружена усилиями и моментами ( $\Sigma_1 \equiv \Sigma, \Sigma_2 \equiv 0$ ). Удовлетворяя граничным условиям, выберем в (2.18) для величин  $r$  и  $\theta$  следующие значения:  $r = \theta = l - p - c$ .

В рамках точности  $O(\lambda^{p-l})$  граничные условия при  $\xi_1 = 0$  примут вид:

$$\tau_{11}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \tau_{11}^1 + \lambda^{-p-c} P_{11}^{n(0)} = \lambda^{-p-c} \tilde{p}_1^*, \quad v_{11}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_{11}^1 + \lambda^{-p} Q_{11}^{a(0)} = \lambda^{-p} \tilde{m}_1^*,$$

$$\tau_{12}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \tau_{12}^1 + \lambda^{-p-c} P_{12}^{a(0)} = \lambda^{-p-c} \tilde{p}_2^*, \quad v_{12}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_{12}^1 + \lambda^{-p} Q_{12}^{n(0)} = \lambda^{-p} \tilde{m}_2^*, \quad (2.19)$$

$$\tau_{13}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{13}^1 + \lambda^{-2c} P_{13}^{a(0)} = \lambda^{-2c} \tilde{p}_3^*, \quad v_{13}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{13}^1 + \lambda^{-c} Q_{13}^{a(0)} = \lambda^{-c} \tilde{m}_3^*,$$

где  $p_n^* = \mu \lambda^{l-p-c} \tilde{p}_n^*$ ,  $m_n^* = R \mu \lambda^{l-p-c} \tilde{m}_n^*$ .

Интегрируя полученные условия по  $\zeta$  и используя соответствующие условия затухания, получим граничные условия для систем двумерных уравнений (2.7)-(2.9):

$$\begin{aligned} T_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \int_{-h}^h p_1^* d\alpha_3, \quad S_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_2^* d\alpha_3, \quad N_{13} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_3^* d\alpha_3, \quad L_{1n} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h m_n^* d\alpha_3, \\ M_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \int_{-h}^h p_1^* \alpha_3 d\alpha_3, \quad H_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_2^* \alpha_3 d\alpha_3, \quad \Lambda_{13} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h m_3^* \alpha_3 d\alpha_3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Рассмотрим второй вариант трехмерных граничных условий микрополярной теории упругости со свободным вращением, когда на поверхности края оболочки заданы перемещения и повороты ( $\Sigma_2 \equiv \Sigma$ ,  $\Sigma_1 \equiv 0$ ). Удовлетворяя граничным условиям, выберем в (2.18) для величин  $r$  и  $\theta$  следующие значения:  $r = \theta = 2l - 2p - c$ .

В рамках точности  $O(\lambda^{p-l})$  граничные условия при  $\xi_1 = 0$  примут вид:

$$\begin{aligned} V_1^0 + \lambda^{-l+c} \zeta V_1^1 + \lambda^{-p-c} U_1^{n(0)} &= \lambda^{-p-c} \tilde{V}_1^*, \quad \omega_1^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \omega_1^1 + \lambda^{-p} \omega_1^{a(0)} = \lambda^{-p} \tilde{\omega}_1^*, \\ V_2^0 + \lambda^{-l+c} \zeta V_2^1 + \lambda^{-p-c} U_2^{a(0)} &= \lambda^{-p-c} \tilde{V}_2^*, \quad \omega_2^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \omega_2^1 + \lambda^{-p} \omega_2^{n(0)} = \lambda^{-p} \tilde{\omega}_2^*, \\ V_3^0 + \lambda^{-l+c} \zeta V_3^1 + \lambda^{-2c} U_3^{n(0)} &= \lambda^{-2c} \tilde{V}_3^*, \quad \omega_3^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \omega_3^1 + \lambda^{-c} \omega_3^{a(0)} = \lambda^{-c} \tilde{\omega}_3^*, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $V_n^* = R \lambda^{l-2p-c} \tilde{V}_n^*$ ,  $\omega_n^* = \lambda^{l-2p-c} \tilde{\omega}_n^*$ .

С помощью условий затухания легко получим граничные условия для двумерной модели:

$$\begin{aligned} u_i \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_i^* d\alpha_3, \quad w \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_3^* d\alpha_3, \quad \Omega_n \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \omega_n^* d\alpha_3 \\ \Psi_i \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \frac{1}{2h} \left[ V_i^* \Big|_{\alpha_3=h} - V_i^* \Big|_{\alpha_3=-h} \right], \quad \iota \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \frac{1}{2h} \left[ \omega_i^* \Big|_{\alpha_3=h} - \omega_i^* \Big|_{\alpha_3=-h} \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Рассмотрим смешанные трехмерные граничные условия микрополярной теории упругости со свободным вращением, когда имеет место шарнирное опирание. Выберем в (2.18) для величин  $r$  и  $\theta$  следующие значения:  $r = l - p - c$ ,  $\theta = l$ .

В рамках точности  $O(\lambda^{p-l})$  граничные условия при  $\xi_1 = 0$  примут вид:

$$\begin{aligned} \tau_{11}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \tau_{11}^1 + P_{11}^{n(0)} &= \tilde{p}_1^*, \quad v_{11}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_{11}^1 + \lambda^{-p} Q_{11}^{a(0)} = \lambda^{-p} \tilde{m}_1^*, \\ \tau_{12}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \tau_{12}^1 + \lambda^{-p-c} P_{12}^{a(0)} &= \lambda^{-p-c} \tilde{p}_2^*, \quad \lambda^{-c} v_{12}^0 + Q_{12}^{n(0)} = \tilde{m}_2^*, \\ V_3^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta V_3^1 + \lambda^{-l+2p-c} U_3^{n(0)} &= \lambda^{-l+2p-c} \tilde{V}_3^*, \quad v_{13}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{13}^1 + \lambda^{-c} Q_{13}^{a(0)} = \lambda^{-c} \tilde{m}_3^*, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $V_3^* = R \tilde{V}_3^*$ ,  $p_1^* = \mu \lambda^l \tilde{p}_1^*$ ,  $p_2^* = \mu \lambda^{l-p-c} \tilde{p}_2^*$ ,  
 $m_1^* = R \mu \lambda^{l-p-c} \tilde{m}_1^*$ ,  $m_2^* = R \mu \lambda^l \tilde{m}_2^*$ ,  $m_3^* = R \mu \lambda^{l-p-c} \tilde{m}_3^*$ .

В этом случае, используя условия затухания, получим следующие граничные условия для двумерной модели:

$$\begin{aligned}
W \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_3^* d\alpha_3, \quad T_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_1^* d\alpha_3, \quad S_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_2^* d\alpha_3, \quad L_{1n} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h m_n^* d\alpha_3 \\
M_{11} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} &= \int_{-h}^h p_1^* \alpha_3 d\alpha_3, \quad H_{12} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h p_2^* \alpha_3 d\alpha_3, \quad \Lambda_{13} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^h m_3^* \alpha_3 d\alpha_3 \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Для того, чтобы возможно было получить начальные условия для двумерной модели микрополярных оболочек со свободным вращением (2.7)-(2.9), нам следует в четырехмерном пространстве  $\alpha_n, t$  плоскость  $t = 0$  считать своего рода границей и ввести понятие погранслояного явления около этой границы [10,15-17]. В результате, выясним вопрос о том, какие начальные условия необходимо сформулировать для прикладной-двумерной модели (2.7)-(2.9) микрополярных оболочек со свободным вращением. Итак, рассмотрим соответствующий временной погранслою около границы  $t = 0$ . Для этого дополнительного напряженно-деформированного состояния [10,15-17] изменяемость по координатам будет такой же, как для внутренней задачи, одновременно имеющее большую изменяемость во времени, т.е.  $\omega = 0$ . Зададим следующую асимптотику [10]:

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_{ii} &= \lambda^l \tau_{ii}^*, \quad \bar{\tau}_{ij} = \lambda^p \tau_{ij}^*, \quad \bar{\tau}_{3i} = \lambda^l \tau_{3i}^*, \quad \bar{\tau}_{i3} = \lambda^l \tau_{i3}^*, \quad \bar{\tau}_{33} = \lambda^l \tau_{33}^*, \\
\bar{v}_{ii} &= \lambda^l v_{ii}^*, \quad \bar{v}_{ij} = \lambda^p v_{ij}^*, \quad \bar{v}_{3i} = \lambda^l v_{3i}^*, \quad \bar{v}_{i3} = \lambda^l v_{i3}^*, \quad \bar{v}_{33} = \lambda^l v_{33}^*, \quad (2.25) \\
\bar{V}_i &= \lambda^0 V_i^*, \quad \bar{V}_3 = \lambda^0 V_3^*, \quad \omega_i = \lambda^0 \omega_i^*, \quad \omega_3 = \lambda^0 \omega_3^*, \quad \omega = 0, \quad k = 2l.
\end{aligned}$$

Таким образом, из системы уравнений (1.1)-(1.3) для определения компонентов векторов перемещения и независимого поворота на уровне асимптотической точности  $O(\lambda^{p-l})$  получим уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\tilde{a}_n^2} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial \tau^2} &= 0, \quad \tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = \sqrt{\tilde{\mu} + \tilde{\alpha}}, \quad \tilde{a}_3 = \sqrt{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \\
\frac{\partial^2 \omega_n^*}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\tilde{b}_n^2} \frac{\partial^2 \omega_n^*}{\partial \tau^2} &= 0, \quad \tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma} + \tilde{\varepsilon}}{\tilde{J}}}, \quad \tilde{b}_3 = \sqrt{\frac{\tilde{\beta} + 2\tilde{\gamma}}{\tilde{J}}}. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Для рассматриваемого случая, определяя силовые напряжения  $\tau_{3m}^*, \tau_{33}^*$ , моментные напряжения  $\mu_{3m}^*, \mu_{33}^*$ , для условий отсутствия этих же напряжений при  $\zeta = \pm 1$  на уровне асимптотической точности  $O(\lambda^{p-l})$  получим граничные условия:

$$\frac{\partial V_m^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial \omega_m^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0 \quad (2.27)$$

Таким образом, построение указанного дополнительного НДС (временного погранслоя) на уровне асимптотической точности  $O(\lambda^{p-l})$  сводится к решению волновых уравнений (2.26) с учетом граничных условий (2.27) и начальных условий (которые пока будем считать произвольно заданными).

Общее решение начально-граничной задачи (2.25)-(2.27) (на основе метода разделения переменных) можем представить в следующем виде [16,17] (где  $u$  – представитель вместо  $V_n$  или  $\omega_n$ ):

$$u = u^0 + u^1 \tau + u', \quad (2.28)$$

где  $u^0$  и  $u^1$  – постоянные, а  $u'$  можем представить так:

$$u' = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ u_{1k} \cos\left(\frac{2k-1}{2} \pi \tilde{a} \tau\right) + u_{2k} \sin\left(\frac{2k-1}{2} \pi \tilde{a} \tau\right) \right] \sin \frac{2k-1}{2} \pi \zeta + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ u_{3k} \cos(k \pi \tilde{a} \tau) + u_{4k} \sin(k \pi \tilde{a} \tau) \right] \cos k \pi \zeta \quad (2.29)$$

Если на основе (2.28) удовлетворить начальным условиям:  $u|_{\tau=0} = f^*(\zeta)$ ,

$\frac{\partial u}{\partial \tau}|_{\tau=0} = F^*(\zeta)$ , постоянные во времени  $u^0, u^1, u_{1k}, u_{2k}, u_{3k}, u_{4k}$  будут определяться при помощи следующих выражений:

$$u_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^*(\zeta) d\zeta, u_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F^*(\zeta) d\zeta, u_{1k} = \int_{-1}^1 f^*(\zeta) \sin \frac{2k-1}{2} \pi \zeta d\zeta, u_{3k} = \int_{-1}^1 f^*(\zeta) \cos k \pi \zeta d\zeta \\ u_{2k} = \frac{2}{(2k-1) \pi \tilde{a}} \int_{-1}^1 F^*(\zeta) \sin \frac{2k-1}{2} \pi \zeta d\zeta, u_{4k} = \frac{1}{k \pi \tilde{a}} \int_{-1}^1 F^*(\zeta) \cos k \pi \zeta d\zeta. \quad (2.30)$$

Если учесть структуру решения (2.28), то получим, что первое слагаемое дает постоянную во времени часть решения, второе – линейно-зависящую от времени, третье – чисто осциллирующую во времени часть решения.

Для того, чтобы решение  $u(\zeta, \tau)$  являлось чисто осциллирующей во времени функцией, необходимо и достаточно, чтобы:  $u^0, u^1$  (т. е. средние значения начальных данных) обращались в нуль:

$$\int_{-1}^1 f^*(\zeta) d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 F^*(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2.31)$$

Условия (2.31) принято называть условиями осцилляции.

Далее заметим, что, используя граничные условия (2.27), получим:

$$\frac{\partial f^*(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial F^*(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0. \quad (2.32)$$

Теперь будем сращивать решение внутренней задачи (прикладной-двумерной модели (2.7)-(2.9)) с решением временного погранслоя для удовлетворения заданным трехмерным начальным условиям (1.6).

Итак, удовлетворяя указанным начальным условиям, получим

$$V_n \Big|_{t=0} + \lambda^r V_n \Big|_{t=0} = f_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \frac{\partial V_n}{\partial t} \Big|_{t=0} + \lambda^r \frac{\partial V_n}{\partial t} \Big|_{t=0} = F_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \omega_n \Big|_{t=0} + \lambda^r \omega_n \Big|_{t=0} = \Phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \frac{\partial \omega_n}{\partial t} \Big|_{t=0} + \lambda^r \frac{\partial \omega_n}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (2.33)$$

где  $r$  – интенсивность временного погранслоя.

Имея в виду асимптотические представления величин  $V_n$  и  $\omega_n$  для внутренней задачи из (2.4) и для временного погранслоя из (2.25), для интенсивности  $r$  временного погранслоя получим:  $r = l$ . В результате сращивания получим (при  $t = 0$  на уровне асимптотической точности  $O(\lambda^{p-l})$ )

$$\begin{aligned}
V_i^{(0)} + \lambda^{-l+c} \zeta V_i^{(1)} + \lambda^{-p} \bar{f}_i^* &= \bar{f}_i, \quad \lambda^{-2p+c} V_3^{(0)} + \bar{f}_3^* = \bar{f}_3, \quad \lambda^{-c} \omega_i^{(0)} + \bar{\Phi}_i^* = \bar{\Phi}_i, \\
\frac{\partial V_i^0}{\partial \tau} + \lambda^{-l+c} \zeta \frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \tau} + \bar{F}_i^* &= \bar{F}_i, \quad \lambda^{-l+c} \frac{\partial V_3^0}{\partial \tau} + \bar{F}_3^* = \bar{F}_3, \quad \lambda^{-l+2p-c} \frac{\partial \omega_i^0}{\partial \tau} + \bar{\Phi}_i^* = \bar{\Phi}_i, \quad (2.34) \\
\omega_3^{(0)} + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \omega_3^{(1)} + \bar{\Phi}_3^* &= \bar{\Phi}_3, \quad \frac{\partial \omega_3^0}{\partial \tau} + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \frac{\partial \omega_3^{(1)}}{\partial \tau} + \bar{\Phi}_3^* = \bar{\Phi}_3,
\end{aligned}$$

где дополнительно приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\bar{f}_i^* &= \lambda^0 f_i^*, \quad \bar{f}_3^* = \lambda^{-2p} f_3^*, \quad \bar{F}_i^* = \lambda^{-l+2p} F_i^*, \quad \bar{F}_3^* = \lambda^{-p} F_3^*, \quad \bar{\Phi}_i^* = \lambda^{-p} \Phi_i^*, \quad \bar{\Phi}_3^* = \lambda^0 \Phi_3^*, \quad \bar{\Phi}_i^* = \lambda^0 \Phi_i^*, \\
\bar{\Phi}_3^* &= \lambda^l \Phi_3^*, \quad \bar{f}_i = \lambda^{-l+p} \frac{1}{R} f_i, \quad \bar{f}_3 = \lambda^{-l} \frac{1}{R} f_3, \quad \bar{F}_i = \lambda^0 \frac{h}{Rc_0} F_i, \quad \bar{F}_3 = \lambda^{-l+p} \frac{h}{Rc_0} F_3 \quad (2.35) \\
\bar{\Phi}_i &= \lambda^{-l+p} \Phi_i, \quad \bar{\Phi}_3 = \lambda^{-l+2p} \Phi_3, \quad \bar{\Phi}_i = \lambda^{-l+2p} \frac{h}{c_0} \Phi_i, \quad \bar{\Phi}_3 = \lambda^p \frac{h}{c_0} \Phi_3.
\end{aligned}$$

Используя условия осцилляции (2.31) и условия (2.32), в итоге получим начальные условия для двумерной динамической модели микрополярных оболочек с независимыми полями перемещений и вращений (2.7)-(2.9):

$$\begin{aligned}
u_i \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_i d\alpha_3, \quad w \Big|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_3 d\alpha_3, \quad \Omega_n \Big|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \phi_n d\alpha_3, \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h F_i d\alpha_3, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h F_3 d\alpha_3, \quad \frac{\partial \Omega_n}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \Phi_n d\alpha_3, \quad (2.36) \\
\Psi_i \Big|_{t=0} &= \frac{h}{2} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_3} \Big|_{\alpha_3=h} + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_3} \Big|_{\alpha_3=-h} \right), \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{h}{2} \left( \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_3} \Big|_{\alpha_3=h} + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_3} \Big|_{\alpha_3=-h} \right), \\
\Upsilon \Big|_{t=0} &= \frac{h}{2} \left( \frac{\partial \phi_3}{\partial \alpha_3} \Big|_{\alpha_3=h} + \frac{\partial \phi_3}{\partial \alpha_3} \Big|_{\alpha_3=-h} \right), \quad \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{h}{2} \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha_3} \Big|_{\alpha_3=h} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha_3} \Big|_{\alpha_3=-h} \right).
\end{aligned}$$

Система уравнений (2.7)-(2.9), граничные условия либо (2.20), либо (2.22), либо (2.24), и начальные условия (2.36) представляют собой математическую модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Отметим, что построенная асимптотическим подходом модель микрополярных упругих тонких оболочек (2.7)-(2.9),(2.20) (либо (2.22),(2.24)),(2.36) идентична модели, построенной на основе метода гипотез в работе С. О. Саркисяна [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Миндлин Р.Д. Микроструктура в линейной упругости // Механика. Сб. перев. иностр. статей. 1964. № 4 (86). С. 129-160.
2. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд. МГУ, 1999. 328с.
3. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. № 2. С.84-95.

4. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. 2009. "On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography". // Arch. Mech (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
5. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАН Армении, 1999. 214 с.
6. Саркисян С.О. Прикладные теории микрополярных упругих тонких балок. // Докл. НАН РА. 2011. Т. 111. № 2.
7. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин. // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. № 1. С.58-67.
8. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Докл. РАН. 2011. Т.436. № 2. С.195-198.
9. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. № 4. С.309-319.
10. Саркисян С.О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек // Докл. НАН Армении. 2009. Т. 109. № 2. С. 54-66.
11. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.
12. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
13. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
14. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
15. Гольденвейзер А.Л. Асимптотический метод в теории оболочек // Успехи механики. 1982. Т.5. Вып. 1/2. С.137-182.
16. Гусейн-Заде М.И. Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки // ПММ. 1974. Т.38. Вып. 6. С.1072-1078.
17. Гусейн-Заде М.И. Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластин // ПММ. 1978. Т.42. Вып.5. С.899-907.

**Сведения об авторе:**

**Саркисян Арменуи Акоповна** – аспирант Гюмрийского государственного педагогического института им. М.Налбандяна.

Тел.: (374 94) 42 21 03

**E-mail:** armenuhis@mail.ru

Поступила в редакцию 11.02.2011

УДК 539.3

**ОБЩАЯ ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ  
ОБОЛОЧЕК<sup>\*)</sup>**

**ՏԱՐԿԻՅԱՆ Ս. Օ.**

**Ключевые слова:** микрополярный, упругий, тонкий, оболочка, общая теория, свободное вращение, стесненное вращение.

**Key words:** Micropolar, elasticity, thin, shell, general theory, independent rotation, constraint rotation.

**Սարգսյան Ս. Հ.**

**Միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր կիրառական տեսությունը**

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ հիմնավորում ունեցող հիպոթեզների մեթոդի հիման վրա ֆիզիկական անչափ պարամետրերի արժեքներից կախված կառուցված են միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով, «փոքր սահքային կոշտության» ընդհանուր կիրառական-երկչափ տեսությունները: Միկրոպոլյար առաձգական թաղանթների կառուցված տեսություններում լրիվությամբ հաշվի են առնված ընդլայնական սահքային և ծագումային իմաստով մոտ մյուս դեֆորմացիաները:

**Sargsyan S.H.**

**General Applied Theory of Micropolar thin Elastic Shells**

In the present paper on the basis of asymptotically confirmed hypotheses method, depending on the values of physical sizeless parameters, there are constructed general applied two-dimensional theories of micropolar shells with independent rotation, constraint rotation, and with “small shift rigidity”. Transverse shift and related deformation are completely taken into account in constructing the mentioned theories.

В работе на основе метода гипотез, имеющих асимптотическое подтверждение в зависимости от значений физических безразмерных параметров, построены общие прикладные-двумерные теории микрополярных оболочек со свободным вращением, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью». В построенных теориях микрополярных упругих оболочек полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

**Введение.** Одной из актуальных задач микрополярной (несимметричной, моментной) теории упругости является проблема построения прикладных теорий балок, пластин и оболочек. Современный обзор в этом направлении осуществлён в работах [1,2].

Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной или двумерной задачи микрополярной теории упругости к прикладным-двумерным или одномерным задачам. Для достижения этой цели уместно использование качественных сторон результата асимптотического анализа граничной задачи микрополярной теории упругости в тонких областях [3-6]. В данной работе с учетом свойств решения краевой задачи трехмерной микрополярной теории упругости в тонкой области оболочки формулируются достаточно общие

<sup>\*)</sup>\*) Работа доложена на 16-th US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics. June 27-July 2, 2010, State College, Pennsylvania, USA.

предположения (гипотезы), на основе которых, в зависимости от значений физических безразмерных параметров, построены модели микрополярных упругих тонких оболочек со свободным вращением, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью», при которых полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

**Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины  $2h$  как трехмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [7]:

$$\nabla_m \sigma^{mn} = 0, \quad \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk} \sigma_{mk} = 0 \quad (1)$$

уравнения равновесия

$$\begin{cases} \sigma_{mn} = (\mu + \alpha) \gamma_{mn} + (\mu - \alpha) \gamma_{nm} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{nm} \\ \mu_{mn} = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{mn} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{nm} + \beta \kappa_{kk} \delta_{nm} \end{cases} \quad (2)$$

соотношения упругости

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn} \omega^k, \quad \kappa_{mn} = \nabla_m \omega_n \quad (3)$$

геометрические соотношения

Здесь  $\hat{\sigma}, \hat{\mu}$  – тензоры силовых и моментных напряжений;  $\hat{\gamma}, \hat{\kappa}$  – тензоры деформации и изгиба-кручения;  $\vec{V}, \vec{\omega}$  – векторы перемещения и независимого поворота,  $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  – упругие константы микрополярного материала оболочки. Индексы  $m, n, k$  принимают значения 1, 2, 3.

Отметим, что при некоторых частных значениях параметра  $\alpha$  [7-9] из системы (1)-(3) могут быть получены и классические уравнения теории упругости (при  $\alpha = 0$ ), и уравнения микрополярной теории упругости со стесненным вращением ( $\alpha \rightarrow \infty$ ).

В дальнейшем будем использовать ортогональные криволинейные координаты  $\alpha_k$ , принятые в теории оболочек [3].

К определяющим уравнениям (1)-(3) трехмерной микрополярной теории упругости присоединим соответствующие граничные условия.

На лицевых поверхностях оболочки  $\alpha_3 = \pm h$  будем считать заданными силовые и моментные напряжения:

$$\sigma_{3i} = \pm q_i^{\pm}, \quad \sigma_{33} = \pm q_3^{\pm}, \quad \mu_{3i} = \pm m_i^{\pm}, \quad \mu_{33} = \pm m_3^{\pm} \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

На поверхности края оболочки  $\Sigma$ , в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, условия записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Предполагается, что толщина оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности оболочки и, следовательно, будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкого трехмерного тела, образующего оболочку, состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю оболочку, и погранслоев, локализирующихся вблизи поверхности края оболочки  $\Sigma$ . Построение общей прикладной-двумерной теории микрополярных упругих тонких оболочек тесно связано с построением внутренней задачи.

При определении как внутреннего, так и краевого НДС оболочки [3-6], большую роль играют значения физических констант материала оболочки, с этой точки зрения вводим следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{\mu}{\alpha}, \quad \frac{R^2\mu}{\beta}, \quad \frac{R^2\mu}{\gamma}, \quad \frac{R^2\mu}{\varepsilon} \quad (5)$$

где  $R$  – масштабный фактор, представляет собой характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки.

### Модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений

Рассмотрим случай, когда безразмерные физические параметры (5) имеют значения

$$\frac{\mu}{\alpha} \sim 1, \quad \frac{R^2\mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{R^2\mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{R^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \quad (6)$$

С учетом качественных результатов асимптотического решения системы уравнений (1)-(3) с вышеуказанными граничными условиями, для случая (6) [3], в основу нижепредлагаемой теории микрополярных упругих тонких оболочек со свободным вращением примем следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

а) в процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически запишем так:

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \quad (7)$$

$$\omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2) \quad (i = 1, 2)$$

Таким образом, нормальное к срединной поверхности перемещение и тангенциальные независимые повороты являются постоянными функциями по толщине оболочки, а тангенциальные перемещения и нормальный независимый поворот меняются по линейному закону.

Отметим, что с точки зрения перемещений, гипотеза (7), по сути дела, представляет собой кинематическую гипотезу Тимошенко в классической теории упругих оболочек [10,11]. Гипотезу (7), в целом, назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек;

б) силовым напряжением  $\sigma_{33}$  можно пренебрегать относительно силовых напряжений  $\sigma_{ii}$  ( $i = 1, 2$ ) в обобщенном законе Гука (2);

в) пользуясь допущением о тонкостенности оболочки, примем

$$1 + \frac{\alpha_3}{R_i} \approx 1 \quad (i = 1, 2);$$

г) при определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений сначала для силовых напряжений  $\sigma_{3i}$  и моментного напряжения  $\mu_{33}$  примем

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{33} = \mu_{33}^0(\alpha_1, \alpha_2). \quad (8)$$

После вычисления указанных величин, значения  $\sigma_{3i}$  и  $\mu_{33}$  окончательно определим прибавлением к соответствующим значениям (8) слагаемые, полученные интегрированием первых двух или шестого уравнений равновесия из (1), для

которых потребуем условие, чтобы усреднённые по толщине оболочки величины были равны нулю.

Основная система уравнений и граничные условия общей теории микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, построенных с помощью перечисленных гипотез а)-г), будут выражаться так:

$$\begin{aligned}
 & \text{уравнения равновесия} \\
 & \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) + \frac{N_{i3}}{R_i} = -(q_i^+ + q_i^-), \\
 & \frac{1}{A_i} \frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\
 & \quad + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (H_{ji} + H_{ij}) - N_{3i} = -h(q_i^+ - q_i^-), \\
 & \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] = q_3^+ + q_3^-,
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \\
 & \quad + \frac{L_{i3}}{R_i} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = -(m_i^+ + m_i^-), \\
 & \frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (S_{12} - S_{21}) = (m_3^+ + m_3^-),
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$L_{33} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (H_{12} - H_{21}) = h(m_3^+ - m_3^-)$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned}
 T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \quad S_{ij} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}], \\
 M_{ii} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \quad H_{ij} = \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha) K_{ij} + (\mu - \alpha) K_{ji}],
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$N_{i3} = 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{i3} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{3i}, \quad N_{3i} = 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{3i} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{i3},$$

$$\begin{aligned}
 L_{ii} &= 2h \left[ \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \kappa_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta + 2\gamma} \kappa_{jj} \right] + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} L_{33}, \\
 L_{ij} &= 2h [(\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}], \quad L_{33} = 2h [(\beta + 2\gamma) \iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})], \\
 L_{i3} &= 2h \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ - m_i^-}{2} \right], \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ + m_i^-}{2h} \right],
 \end{aligned} \tag{12}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, & \Gamma_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i - (-1)^j \Omega_3, \\
 K_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Psi_j, & K_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Psi_i - (-1)^j \nu, \\
 \Gamma_{3i} &= \Psi_i - (-1)^j \Omega_j, & \Gamma_{i3} &= -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j, & \vartheta_i &= -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, \\
 \kappa_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_i}, & \kappa_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \\
 \kappa_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, & l_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \nu}{\partial \alpha_i}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

граничные условия (при  $\alpha_1 = \text{const}$ )

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, & S_{12} &= S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*, & N_{13} &= N_{13}^* \text{ или } w = w^*, \\
 M_{11} &= M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, & H_{12} &= H_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*,
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11} = \kappa_{11}^*, & L_{12} &= L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, \\
 L_{13} &= L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, & \Lambda_{13} &= \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.
 \end{aligned} \tag{16}$$

В модели (9)-(16) микрополярных упругих оболочек полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Это – система из 52 уравнений относительно 52 неизвестных функций:  $u_i, w, \Psi_i, \Omega_i, \Omega_3, \nu, \vartheta_i, T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{33}, L_{i3}, \Lambda_{i3}, \Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, \kappa_{ii}, \kappa_{ij}, \kappa_{i3}, l_{i3}$  ( $i, j = 1, 2, i \neq j$ ). Система дифференциальных уравнений (9)-(14) имеет 18-ый порядок с 9-ю граничными условиями (15), (16) на каждом из контуров срединной поверхности оболочки  $\Gamma$ .

Параметры Ламе  $A_i$ , выбирая соответствующим образом, из общих уравнений (9)-(14) теории микрополярных оболочек получим основные соотношения статики микрополярных цилиндрических оболочек и оболочек вращения.

Из систем уравнений (9)-(14) и граничных условий (15), (16) микрополярных оболочек при  $\alpha = 0$  будет отделяться краевая задача классической теории оболочек на основе гипотез Тимошенко [10,11] (с некоторым отличием, связанным с статической гипотезой  $\gamma$ ), классический аналог которой отличается от принятой в классической теории оболочек типа Тимошенко [10,11]).

Если в модели (9)-(16) пренебречь поперечными сдвигами, т.е. считать

$$\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i} = 0 \text{ или } \Psi_i = \vartheta_i, \tag{17}$$

получим модель микрополярных упругих тонких оболочек со свободным вращением, когда вместо обобщённой кинематической гипотезы Тимошенко примем обобщённые на микрополярный случай кинематическую гипотезу Кирхгоффа-Лява (т.е. примем формулы (7) в целом, с учетом (17)). Система уравнений этой модели микрополярных оболочек представляет собой: уравнения равновесия (9), (10)

физические соотношения

$$\begin{aligned}
 T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], & S_{ij} &= 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}], \\
 M_{ii} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], & H_{ij} &= \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha) K_{ij} + (\mu - \alpha) K_{ji}], \\
 N_{i3} - N_{3i} &= 4\alpha h (\Gamma_{i3} - \Gamma_{3i}),
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 L_{ii} &= 2h \left[ \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \kappa_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta + 2\gamma} \kappa_{jj} \right] + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} L_{33}, \\
 L_{ij} &= 2h [(\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}], \\
 L_{33} &= 2h [(\beta + 2\gamma) \iota + \beta (\kappa_{11} + \kappa_{22})], \\
 L_{i3} &= 2h \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ - m_i^-}{2} \right], & \Lambda_{i3} &= \frac{2h^3}{3} \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ + m_i^-}{2h} \right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, & \Gamma_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i - (-1)^j \Omega_3, \\
 K_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \vartheta_j, & K_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \vartheta_i - (-1)^j \iota, \\
 \vartheta_i &= -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, & \Gamma_{i3} - \Gamma_{3i} &= 2 \left[ -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j \right]
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_i}, & \kappa_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \\
 \kappa_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, & l_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

граничные условия

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, & S_{12} + \frac{H_{12}}{R_2} &= S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*, \\
 N_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_2} &= N_{13}^* \text{ или } w = w^*, & M_{11} &= M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*,
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11} = \kappa_{11}^*, & L_{12} &= L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, \\
 L_{13} &= L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, & \Lambda_{13} &= \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.
 \end{aligned} \tag{23}$$

При  $\alpha = 0$  из системы ((9), (10),(18)-(21)) и граничных условий (22),(23) отделяются общие уравнения и граничные условия классической теории упругих оболочек на основе гипотез Кирхгофа-Лява.

### Модель микрополярных упругих тонких оболочек со стеснённым вращением

Для физических безразмерных параметров (5) рассмотрим случай, когда они принимают значения:

$$\alpha \gg \mu, \quad \frac{R^2 \mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{R^2 \mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{R^2 \mu}{\varepsilon} \sim 1. \quad (24)$$

Асимптотический анализ [3] поставленной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3), в случае (24), показывает, что асимптотические приближения вектора поворота  $\vec{\omega}$  связаны с приближениями вектора перемещения  $\vec{V}$ , как в классической теории упругости:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V}. \quad (25)$$

Это означает, что построенная прикладная-двумерная теория микрополярных оболочек в данном случае находится в сфере микрополярной теории со стеснённым вращением (или иначе, псевдоконтинуума Коссера [8,9]).

Отметим, что общая трехмерная микрополярная теория упругости со стеснённым вращением имеет некоторые особенности [9], например: а) в этой модели упругое тело характеризуется четырьмя упругими константами:  $\lambda, \mu$  (или  $E, \nu$ ) и  $\gamma, \varepsilon$  (или  $l, \eta$  [9]); б) (имеем в виду для данного случая) из шести граничных условий (4) остаются пять [9], для моментного напряжения  $\mu_{33}$  невозможно ставить произвольные граничные условия.

Основываясь на результатах асимптотического метода интегрирования поставленной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3), когда безразмерные физические параметры (5) имеют значения (24) [3], для построения общей прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек со стеснённым вращением можем применять следующие предположения (гипотезы): 1) это – те же предположения а)-г) предыдущего раздела (в данном случае предположение г) необходимо отнести только к силовым напряжениям  $\sigma_{3i}$ ), и 2) условие стеснённого вращения (25).

Основная система уравнений прикладной-двумерной общей теории микрополярных упругих тонких оболочек со стеснённым вращением, с учётом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций, построенных при помощи принятых гипотез, выражается так:

$$\begin{aligned} & \text{уравнения равновесия} \\ & \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) + \frac{N_{i3}}{R_i} = -(q_i^+ + q_i^-), \\ & \frac{1}{A_i} \frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (H_{ji} + H_{ij}) - N_{3i} = -h(q_i^+ - q_i^-), \\ & \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] = q_3^+ + q_3^-, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \frac{L_{i3}}{R_i} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = -(m_i^+ + m_i^-),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (S_{12} - S_{21}) = (m_3^+ + m_3^-),$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + (H_{12} - H_{21}) = 0;$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], & S_{12} + S_{21} &= 4\mu h (\Gamma_{12} + \Gamma_{21}), \\ M_{ii} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], & N_{i3} + N_{3i} &= 4\mu h (\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i}), \end{aligned} \quad (27)$$

$$H_{12} + H_{21} = \frac{2h^3}{3} 2\mu (K_{12} + K_{21}), \quad L_{ii} = 4\gamma h \kappa_{ii}, \quad L_{ij} = 2h [(\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}],$$

$$L_{i3} = 2h \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ - m_i^-}{2} \right], \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ + m_i^-}{2h} \right];$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Gamma_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i, \\ K_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_j, & K_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_i, \\ \Gamma_{i3} &= -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j, & \Gamma_{3i} &= \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \\ \kappa_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_i}, & \kappa_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \\ \kappa_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, & l_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i}, \\ \Omega_i &= -(-1)^i (\psi_j + \vartheta_j), & \Omega_3 &= \frac{1}{2} (\Gamma_{12} - \Gamma_{21}), \\ \iota &= \frac{1}{2} (K_{12} - K_{21}), & \vartheta_i &= -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}. \end{aligned} \quad (28)$$

К системе уравнений микрополярных упругих оболочек со стеснённым вращением следует присоединить граничные условия (15), (16). Система уравнений (26)-(28) теории микрополярных оболочек со стеснённым вращением имеет 18-ый

порядок с девятью граничными условиями (15), (16) на каждом краю срединной поверхности  $\Gamma$ . Эта система содержит 51 уравнение с 51 неизвестными функциями:

$$(T_{ii}, M_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, \Lambda_{i3}, \Gamma_{ii}, K_{ii}, \Gamma_{ij}, K_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, \kappa_{ii}, \kappa_{ij}, \kappa_{i3}, l_{i3}, u_i, w, \Psi_i, \vartheta_i, \Omega_i, \Omega_3, \iota).$$

Если в системе уравнений (26)-(28) пренебречь поперечными сдвигами, т.е. принять за основу формулы (17), получим модель микрополярных упругих оболочек со стеснённым вращением, когда вместо обобщённых кинематических гипотез Тимошенко принята обобщённая кинематическая гипотеза Кирхгоффа-Лява.

Основные уравнения и граничные условия этой модели микрополярных оболочек со стеснённым вращением будут представлять собой уравнения равновесия (26), из которых необходимо исключить усилия  $N_{3i}$ :

физические соотношения

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}], & M_{ii} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \\ S_{12} + S_{21} &= 4\mu h(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}), & H_{12} + H_{21} &= \frac{2h^3}{3} 2\mu(K_{12} + K_{21}), \\ L_{ii} &= 4\gamma h \kappa_{ii}, & L_{ij} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}], \\ L_{i3} &= 2h \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ - m_i^-}{2} \right], & \Lambda_{i3} &= \frac{2h^3}{3} \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{m_i^+ + m_i^-}{2h} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, & \Gamma_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i, \\ K_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \vartheta_j, & K_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \vartheta_i, \\ \vartheta_i &= -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, & \kappa_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_i}, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, & \kappa_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, & l_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i}, \\ \iota &= \frac{1}{2}(K_{12} - K_{21}), & \Omega_i &= -(-1)^i \vartheta_j, & \Omega_3 &= \frac{1}{2}(\Gamma_{12} - \Gamma_{21}). \end{aligned} \quad (30)$$

граничные условия (при  $\alpha_1 = \text{const}$ )

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, & S_{12} + \frac{H_{12} - L_{11}}{R_2} &= S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*, \\ M_{11} + L_{12} &= M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, & N_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial (H_{12} - L_{11})}{\partial \alpha_2} &= N_{13}^* \text{ или } w = w^*, \\ L_{13} &= L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, & \Lambda_{13} &= \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*. \end{aligned} \quad (31)$$

### Модель микрополярных оболочек “с малой сдвиговой жёсткостью”

Для физических безразмерных параметров (5) рассмотрим случай

$$\alpha \sim \mu, \quad \frac{R^2 \alpha}{\beta} \ll 1, \quad \frac{R^2 \alpha}{\gamma} \ll 1, \quad \frac{R^2 \alpha}{\varepsilon} \ll 1. \quad (32)$$

На основе асимптотического анализа [3] поставленной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3) в тонкой трехмерной области оболочки, в случае (32), можем сформулировать асимптотически обоснованные следующие предположения (гипотезы):

- 1) это предположения а)-г) раздела два;
- 2) в моментных уравнениях равновесия (1) можем пренебречь разностями силовых напряжений  $\sigma_{ij} - \sigma_{ji}, \sigma_{i3} - \sigma_{3i}$ , но имея в виду значения физических безразмерных параметров (32) (при данном  $R$  величина  $\alpha$  – малая величина), эти разности сохраним в физических соотношениях (2).

Отметим, что в полученной на основе принятых в этом пункте гипотез модели микрополярных упругих оболочек (которую назовём модулем “с малой сдвиговой жёсткостью”, имея в виду, что физическая постоянная  $\alpha$  – это тоже своего рода модуль сдвига, как и классический модуль сдвига  $\mu$ ), “моментная часть” задачи отделяется как самостоятельная граничная задача.

Основная система уравнений и граничные условия теории микрополярных упругих тонких оболочек “с малой сдвиговой жесткостью”, с полным учетом поперечных сдвиговых деформаций, выразятся следующим образом:

для “моментной части” задачи – это уравнения равновесия (10) без учёта разностей  $(S_{12} - S_{21}), (N_{i3} - N_{3i}), (H_{12} - H_{21})$ , к которым следует присоединить физические соотношения (12), геометрические соотношения (14) и граничные условия (16); для “силовой части” задачи будем иметь уравнения равновесия (9), соотношения упругости (11), геометрические условия (13), граничные условия (15).

Основная система уравнений теории микрополярных оболочек “с малой сдвиговой жёсткостью”, без учета поперечных сдвигов, выразится так: для “моментной части” задачи – это уравнения равновесия (10), физические соотношения (12) (то же самое (19)), геометрические соотношения (21) (то же самое (14)), граничные условия (23) (то же самое (16)); “силовая часть” задачи – это уравнения равновесия (9), физические соотношения (18), геометрические соотношения (20), граничные условия (22).

В модели микрополярных оболочек “с малой сдвиговой жёсткостью” как с учётом, так и без учёта поперечных сдвигов, существенно следующее: когда “моментная часть” задачи имеет нулевое решение (т.е., когда вышеуказанные соответствующие уравнения и граничные условия однородны), “силовая часть” задачи не будет совпадать с классическими моделями упругих оболочек, ввиду того, что в физических соотношениях ((11) либо (18)) в итоге будут присутствовать члены с физической постоянной  $\alpha$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С.84-95.
2. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-type theories of Plates and Shells: a short review and bibliography// Arch. Appl. Mech. Special Issue. Doi 10. 1007/s 00419-009-0365-3.
3. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С.309-319.
4. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // ПММ. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147.
5. Sargsyan S. H. Thermoelasticity of Thin Shells on the Basis of Asymmetrical Theory of Elasticity// Journal of Thermal Stresses. 2009. V.32. №8. P.791-818.
6. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Доклады РАН. 2010. Т.435. №3.
7. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т.28. Вып.6. С.1117-1120.
8. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256с.
9. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Периодич. сб. перев. иностр. статей. 1965. № 3. С.89-112.
10. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наукова думка, 1973. 246 с.
11. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: Судостроение, 1987. 316 с.

### **Сведения об авторе:**

**Саркисян Самвел Оганесович** – чл.-корр НАН Армении, д.ф.-м.н., профессор, зав.каф. мат.анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского Государственного пединститута им. М.Налбандяна. Тел.: (091)60 57 15  
E-mail:slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 02.11. 2010

УДК 62.50

**ГИПОТЕТИЧЕСКОЕ РАССОГЛАСОВАНИЕ ДЛЯ ОДНОЙ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ ПРИ МНОГИХ  
ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ  
БАРСЕГЯН В.Р., СИМОНЯН Т.А., СТЕПАНЯН А.А.**

**Ключевые слова:** дифференциальная игра нескольких лиц, многие целевые множества, гипотетическое рассогласование.

**Key words:** several person differential game, many aim sets, hypothetical mismatch.

**Մի քանի խաղացողների շատ նպատակային բազմություններով մի դիֆերենցիալ խաղի համար  
հիպոթետիկ անհամապատասխանությունը  
Բարսեղյան Վ.Ռ., Միմոնյան Թ.Ա., Ստեփանյան Ա.Ա.**

Աշխատանքում շատ նպատակային բազմությունների դեպքում մի քանի խաղացողներով մի դիֆերենցիալ խաղի համար կառուցված է հիպոթետիկ անհամապատասխանությունը: Ձևակերպված են հիմնական հատկությունները, ապացուցելով, որ ռեգուլյար դեպքում հիպոթետիկ անհամապատասխանության ֆունկցիան անընդհատ է կախված ժամանակից և ֆազային դիրքից, ինչպես նաև ունի անընդհատ ածանցյալներ ըստ այդ փոփոխականների:

**The Hypothetical Mismatch in One Several Person Differential Game at Many Aim Sets  
Barseghyan V.R., Simonyan T.A., Stepanyan A.A.**

The hypothetical mismatch for one differential game of several person in case of many aim sets is constructed. The basic characteristics are stated, and it is proved that the function of hypothetical mismatch in regular case continuously depends on time and phase condition and it has continuous derivatives of that variables.

В работе для одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах построено гипотетическое рассогласование. Сформулированы основные свойства, доказывая, что в регулярном случае функция гипотетического рассогласования непрерывно зависит от времени и фазового состояния, а также имеет непрерывные частные производные по этим переменным.

**Введение.** Исследование антагонистических дифференциальных игр методом экстремальной конструкции [1] основывается на построении функции гипотетического рассогласования  $(\varepsilon(t, x))$  и использовании её свойств.

В работах [1,2] построена функция  $\varepsilon(t, x)$  для игры сближения-уклонения двух игроков при одном целевом множестве, а случаи многих целевых множеств рассмотрены в [3]. Для дифференциальной игры многих игроков при одном целевом множестве построение функции  $\varepsilon(t, x)$  приведено в [4].

Статья посвящена построению и исследованию свойств гипотетического рассогласования для одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах и примыкает к работам [1– 4].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим конфликтно-управляемую систему, динамика которой описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^k B_i(t)u_i \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  –  $n$ -мерный фазовый вектор,  $u_i$  – управляющее воздействие  $i$ -го игрока, которое стеснено условием  $u_i \in P_i \in R^{n_i}$  ( $i = 1, \dots, k$ ),  $P_i$  – компактное множество в пространстве  $R^{n_i}$ ,  $A(t)$  –  $(n \times n)$ -мерная,  $B_i(t)$  –  $(n \times n_i)$ -мерные ( $i = 1, \dots, k$ ) непрерывные матрицы функции при  $t_0 \leq t \leq \theta$  ( $t_0$  и  $\theta$  – заданные моменты времени).

Введём следующие обозначения:

$$P = P_1 \times \dots \times P_k, \quad P^{(i)} = P_1 \times \dots \times P_{i-1} \times P_{i+1} \times \dots \times P_k$$

$$u = (u_1, \dots, u_k), \quad u^{(i)} = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k)$$

$$K = \{1, 2, \dots, k\}, \quad K(i) = \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, k\}$$

Пусть заданы промежуточные моменты времени  $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_m = \theta$  и компактные множества  $M_1^{(j)}, \dots, M_k^{(j)}$  ( $M_i^{(j)} \in R^n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ), которые удовлетворяют следующим условиям:

$$M_i^{(j)} \cap G(\vartheta_j, t_0, x_0) \neq \emptyset \quad (i = 1, 2, \dots, k; j = 1, \dots, m),$$

где через  $G(\vartheta_j, t_0, x_0)$  обозначена область достижимости системы (1.1) из состояния  $\{t_0, x_0\}$  в момент времени  $\vartheta_j$ . Множество  $M_i^{(j)}$  является целевым множеством для  $i$ -го игрока в момент времени  $\vartheta_j$ .

Отметим, что области достижимости  $G(\vartheta_j, t_0, x_0)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) являются замкнутыми, ограниченными и выпуклыми множествами [4] и с изменением  $t$  и  $x$  деформируются непрерывно [5].

Предполагая, что  $i$ -ая управляющая сторона ( $i$ -ый игрок) стремится уменьшить суммарное расстояние движения (1.1) от своих целевых множеств  $M_i^{(j)}$  в моменты времени  $\vartheta_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) при сопротивлении остальных игроков, будем иметь дифференциальную игру нескольких лиц при многих целевых множествах.

При решении дифференциальных игр методом экстремальной конструкции [2], которая сопоставляется в каждый момент времени  $t$  реализующейся позиции  $\{t, x[t]\}$ , гипотетическое рассогласование имеет важное значение. Функция гипотетического рассогласования для игрока для каждой позиции  $\{t, x[t]\}$  оценивает снизу результат игры при самом упорном сопротивлении остальных игроков. На основе этой функции и выбирается минимаксная стратегия игрока, исходя из принципа неухудшения позиции.

Поэтому для линейной дифференциальной игры нескольких лиц, в которой  $i$ -ый игрок (для любого  $i \in K$ ) при помощи управляющего воздействия  $u_i$  стремится сблизить движение  $x(t)$  системы (1.1) к множествам  $M_i^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) к моментам времени  $\vartheta_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) при самом упорном сопротивлении остальных игроков, рассмотрим следующую задачу.

Требуется построить гипотетическое рассогласование  $i$ -го игрока и исследовать ее свойства.

**2. Построение функции гипотетического рассогласования.** Пусть при реализации некоторых управлений игроками, игра достигла некоторой позиции  $\{t_*, x_*\}$ , причем  $\vartheta_{r-1} \leq t_* < \vartheta_r$  ( $r \in \{1, \dots, m\}$ ). Рассмотрим движение  $x(\tau)$  ( $t_* \leq \tau \leq \vartheta_m$ ), описываемое уравнением (1.1) и удовлетворяющее начальному условию  $x(t_*) = x_*$ . Пусть игроки выбрали свои стратегии  $U_\alpha \div u_\alpha(t, x)$  ( $\alpha \in K$ ). Тогда система к моменту  $\vartheta_j$  придёт в состояние  $x(\vartheta_j)$  ( $j = r, \dots, m$ ), которое вычислится по формуле Коши

$$x(\vartheta_j) = X[\vartheta_j, t_*]x_* + \int_{t_*}^{\vartheta_j} X[\vartheta_j, \tau] B_i(\tau) u_i d\tau + \int_{t_*}^{\vartheta_j} X[\vartheta_j, \tau] \sum_{\alpha \in K(i)} B_\alpha(\tau) u_\alpha d\tau \quad (2.1)$$

Для  $i$ -го игрока оценим эвклидовое расстояние  $\rho[x(\vartheta_j), M_i^{(j)}]$  от точки  $x(\vartheta_j)$  до множества  $M_i^{(j)}$  ( $j = r, \dots, m$ ). Следуя [1], расстояние  $x(\vartheta_j)$  от любой точки  $q \in R^n$  вычислится следующим образом:

$$\rho(x(\vartheta_j), q) = \max_{\|l_i^{(j)}\|=1} \langle l_i^{(j)}, x(\vartheta_j) - q \rangle.$$

Следовательно, расстояние  $x(\vartheta_j)$  от множества  $M_i^{(j)}$  будет

$$\rho[x(\vartheta_j), M_i^{(j)}] = \min_{q \in M_i^{(j)}} \left( \max_{\|l_i^{(j)}\|=1} \langle l_i^{(j)}, x(\vartheta_j) - q \rangle \right)$$

или

$$\rho(x(\vartheta_j), M_i^{(j)}) = \max_{\|l_i^{(j)}\|=1} \left( \langle l_i^{(j)}, x(\vartheta_j) \rangle + \min_{-q \in M_i^{(j)}} \langle l_i^{(j)}, q \rangle \right) \quad (2.2)$$

если правая часть (2.2) больше нуля, а в противном случае равно нулю. Учитывая соотношения (2.1) и предполагая, что в моменты времени  $\vartheta_j$  система находилась в некоторых состояниях  $x^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, r-1$ ), обозначив через  $\varepsilon_i(t_*, x_*, u_\alpha)$  ( $\alpha \in K$ ) сумму расстояний (2.2) для всех  $j = 1, \dots, m$ , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t_*, x_*, u_\alpha) &= \max_{\|l_i^{(s)}\|=1, (s=1, \dots, r-1)} \sum_{j=1}^{r-1} \left( \langle l_i^{(j)}, x^{(j)} \rangle + \min_{-q \in M_i^{(j)}} \langle l_i^{(j)}, q \rangle \right) + \\ &+ \max_{\|l_i^{(s)}\|=1, (s=r, \dots, m)} \sum_{j=r}^m \left\{ \langle l_i^{(j)}, X[\vartheta_j, t_*]x_* \rangle + \min_{-q \in M_i^{(j)}} \langle l_i^{(j)}, q \rangle + \right. \\ &\left. + \int_{t_*}^{\vartheta_j} \langle l_i^{(j)}, X[\vartheta_j, \tau] B_i(\tau) u_i \rangle d\tau + \int_{t_*}^{\vartheta_j} \langle l_i^{(j)}, X[\vartheta_j, \tau] \sum_{\alpha \in K(i)} B_\alpha(\tau) u_\alpha \rangle d\tau \right\} \end{aligned}$$

Величины  $x^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, r-1$ ) считаются постоянными.

Следовательно, гипотетическое рассогласование для  $i$ -го игрока при самом упорном сопротивлении остальных  $\alpha \in K(i)$  игроков будет

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i^o(t_*, x_*) &= \min_{u_i \in P_i} \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \varepsilon_i(t_*, x_*, u_\alpha (\alpha \in K)) = \\
&= \max_{\|l_i^{(s)}\|=1 (s=1, \dots, r-1)} \sum_{j=1}^{r-1} \left( \langle l_i^{(j)}, x^{(j)} \rangle + \min_{-q \in M_i^{(j)}} \langle l_i^{(j)}, q \rangle \right) + \\
&+ \min_{u_i \in P_i} \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \max_{\|l_i^{(s)}\|=1 (s=r, \dots, m)} \sum_{j=r}^m \left\{ \langle l_i^{(j)}, X[\vartheta_j, t_*] x_* \rangle + \min_{-q \in M_i^{(j)}} \langle l_i^{(j)}, q \rangle + \right. \\
&\left. + \int_{t_*}^{\vartheta_j} \langle l_i^{(j)}, X[\vartheta_j, \tau] B_i(\tau) u_i \rangle d\tau + \int_{t_*}^{\vartheta_j} \langle l_i^{(j)}, X[\vartheta_j, \tau] \sum_{\alpha \in K(i)} B_\alpha(\tau) u_\alpha \rangle d\tau \right\}
\end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим, что выражение (2.3) характеризует для  $i$ -го игрока суммарное расстояние своих целевых множеств  $M_i^{(j)}$  от области достижимости в моменты времени  $\vartheta_j$  ( $j=1, \dots, m$ ).

Введем обозначение

$$\bar{X}[\vartheta_j, \tau] = \begin{cases} X[\vartheta_j, \tau] & \tau \leq \vartheta_j \\ 0 & \tau > \vartheta_j \end{cases}$$

Формула (2.3) запишется в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i^o(t_*, x_*) &= \max_{\|l_i^{(s)}\|=1 (s=1, \dots, r-1)} \sum_{j=1}^{r-1} \left( \langle l_i^{(j)}, x^{(j)} \rangle + \min_{-q \in M_i^{(j)}} \langle l_i^{(j)}, q \rangle \right) + \\
&+ \max_{\|l_i^{(s)}\|=1 (s=r, \dots, m)} \left\{ \sum_{j=r}^m \left( \langle l_i^{(j)}, X[\vartheta_j, t_*] x_* \rangle + \min_{-q \in M_i^{(j)}} \langle l_i^{(j)}, q \rangle \right) + \right. \\
&+ \min_{u_i \in P_i} \int_{t_*}^{\vartheta_m} \sum_{j=r}^m \langle l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j, \tau] B_i(\tau) u_i \rangle d\tau + \\
&\left. + \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \int_{t_*}^{\vartheta_m} \sum_{j=r}^m \langle l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j, \tau] \sum_{\alpha \in K(i)} B_\alpha(\tau) u_\alpha \rangle d\tau \right\}
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\rho_1(t_*, l_i^{(r)}, \dots, l_i^{(m)}) &= \min_{u_i \in P_i} \int_{t_*}^{\vartheta_m} \sum_{j=r}^m \langle l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j, \tau] B_i(\tau) u_i \rangle d\tau \\
\rho_2(t_*, l_i^{(r)}, \dots, l_i^{(m)}) &= \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \int_{t_*}^{\vartheta_m} \sum_{j=r}^m \langle l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j, \tau] \sum_{\alpha \in K(i)} B_\alpha(\tau) u_\alpha \rangle d\tau \\
x^{(0)}(t_*, x_*, l_i^{(r)}, \dots, l_i^{(m)}) &= \sum_{j=r}^m \left( \langle l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j, t_*] x_* \rangle + \min_{-q \in M_i^{(j)}} \langle l_i^{(j)}, q \rangle \right)
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Формула  $\varepsilon_i^o(t_*, x_*)$  (2.4) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^o(t_*, x_*) &= \rho \left[ x^{(j)}, M_i^{(j)} \right] + \\ &+ \max_{\|l_i^{(s)}\|=1(s=r, \dots, m)} \left\{ \rho_1(t_*, l_i^{(r)}, \dots, l_i^{(m)}) + \rho_2(t_*, l_i^{(r)}, \dots, l_i^{(m)}) + x^{(0)}(t_*, x_*, l_i^{(r)}, \dots, l_i^{(m)}) \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отметим, что из построенного выражения гипотетического рассогласования (2.4) (или (2.6)) в частности, получается гипотетическое рассогласование в следующих случаях:

а) при  $m=1$  выражение (2.4) (или (2.6)) является гипотетическим рассогласованием в дифференциальной игре нескольких лиц, когда целевые множества заданы для одного момента времени [4];

б) при  $k=2$  (2.4) (или (2.6)) является гипотетическим рассогласованием для дифференциальной игры двух лиц при многих целевых множествах [3];

в) при  $m=1$ ,  $k=2$  и одном множестве  $M$  (2.4) (или (2.6)) является гипотетическим рассогласованием дифференциальной игры двух лиц при одном целевом множестве [2].

**3. О свойствах функции  $\varepsilon_i^o(t, x)$ .** Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} E_i^{(1)} &= \left\{ \{t, x\} \mid t \in [t_0, \vartheta_1], x \in R^n, \varepsilon_i^o(t, x) > 0 \right\}, \\ E_i^{(2)} &= \left\{ \{t, x\} \mid t \in [\vartheta_1, \vartheta_2], x \in R^n, \varepsilon_i^o(t, x) > 0, \{\vartheta_1, x^{(1)}\} \in E_i^{(1)} \right\} \\ E_i^{(m)} &= \left\{ \{t, x\} \mid t \in [\vartheta_{m-1}, \vartheta_m], x \in R^n, \varepsilon_i^o(t, x) > 0, \right. \\ &\quad \left. \{\vartheta_1, x^{(1)}\} \in E_i^{(1)}, \dots, \{\vartheta_{m-1}, x^{(m-1)}\} \in E_i^{(m-1)} \right\} \end{aligned}$$

$$E_i = E_i^{(1)} \cup E_i^{(2)} \cup \dots \cup E_i^{(m)}$$

$L_i^o(t, x)$  – множество наборов максимизирующих единичных векторов  $\{l_i^{(1)^\circ}(t, x), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t, x)\}$  в (2.6).

**Определение.** Скажем, что имеет место регулярный случай, если для каждой позиции из  $E_i$  максимум в (2.6) достигается на единственном наборе

$\{l_i^{(j)^\circ}; j=1, \dots, m\}$  ( $L_i^o(t, x)$  при каждом  $t$  и  $x$  состоит из одного элемента).

**Лемма 1.** В регулярном случае в каждой позиции  $\{t, x\}$  из  $E_i$  функция  $\varepsilon_i^o(t, x)$  непрерывна по  $t$  и  $x$ .

**Доказательство.** Функция  $\varepsilon_i^o(t, x)$  является непрерывной по  $t$  и  $x$ , так как максимумы по  $\{l_i^{(j)}; j=1, \dots, m\}$  выбираются из непрерывных функций и векторы  $l_i^{(j)^\circ}$  ( $j=1, \dots, m$ ) выбираются из единичных сфер [4,6].

**Лемма 2.** В регулярном случае в области  $E_i$  векторы  $\{l_i^{(1)^\circ}(t, x), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t, x)\}$ , максимизирующие (2.6), зависят от  $t$  и  $x$  непрерывно.

**Доказательство.** Предположением от противного следует, что существует позиция  $\{t_*, x_*\}$  ( $\vartheta_{r-1} \leq t_* < \vartheta_r$  ( $r \in \{1, \dots, m\}$ )), где хотя бы один из векторов  $\{l_i^{(r)^\circ}(t, x), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t, x)\}$  не является непрерывным. Пусть это – вектор

$l_i^{(v)^\circ}(t, x)$  ( $v \in \{r, \dots, m\}$ ). Так как функция  $\varepsilon_i^\circ(t, x)$  непрерывна, то область  $\varepsilon_i^\circ(t, x) > 0$ ,  $t \in \mathfrak{D}_m$  является открытой. Следовательно, точку  $\{t_*, x_*\}$  можно окружить достаточно малой окрестностью

$$|t - t_*| < \delta \quad |x - x_*| < \delta,$$

где тоже имеет место  $\varepsilon_i^\circ(t, x) > 0$ . В каждой точке этой окрестности  $l_i^\circ(t, x)$  определяется единственным образом. При сделанном предположении можно выбрать последовательность позиций  $\{t^{(\beta)}, x^{(\beta)}\}$  такой, что

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} t^{(\beta)} = t_*, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} x^{(\beta)} = x_*,$$

$$\text{но } \left| l_i^{(v)^\circ}(t^{(\beta)}, x^{(\beta)}) - l_i^{(v)^\circ}(t_*, x_*) \right| > \varphi > 0 \quad \text{при всех значениях } \beta. \quad (3.1)$$

Из последовательности  $l^{(\beta)} = l_i^{(v)^\circ}(t^{(\beta)}, x^{(\beta)})$  можно выбрать подпоследовательность  $\{l^{(\beta_\lambda)}\}$  ( $\lambda = 1, 2, \dots$ ), сходящуюся к некоторому единичному вектору  $l_*$ . Докажем, что  $l_* = l_i^{(v)^\circ}(t_*, x_*)$ . Предположим, что это не так, т.е.  $l_* \neq l_i^{(v)^\circ}(t_*, x_*)$ . Тогда, так как набор  $\{l_i^{(r)^\circ}(t, x), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t, x)\}$  является максимизирующим в (2.6) для позиции  $(t_*, x_*)$ , то для максимизируемого выражения из (2.6) будем иметь:

$$\begin{aligned} & \rho_1 \left( t_*, l_i^{(r)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(v-1)^\circ}(t_*, x_*), l_*, l_i^{(v+1)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t_*, x_*) \right) + \\ & + \rho_2 \left( t_*, l_i^{(r)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(v-1)^\circ}(t_*, x_*), l_*, l_i^{(v+1)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t_*, x_*) \right) + \\ & + \chi^{(0)} \left( t_*, x_*, l_i^{(r)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(v-1)^\circ}(t_*, x_*), l_*, l_i^{(v+1)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t_*, x_*) \right) < \\ & < \rho_1 \left( t_*, l_i^{(r)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(v-1)^\circ}(t_*, x_*), l_i^{(v)^\circ}(t_*, x_*), l_i^{(v+1)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t_*, x_*) \right) + \\ & + \rho_2 \left( t_*, l_i^{(r)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(v-1)^\circ}(t_*, x_*), l_i^{(v)^\circ}(t_*, x_*), l_i^{(v+1)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t_*, x_*) \right) + \\ & + \chi^{(0)} \left( t_*, x_*, l_i^{(r)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(v-1)^\circ}(t_*, x_*), l_i^{(v)^\circ}(t_*, x_*), l_i^{(v+1)^\circ}(t_*, x_*), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t_*, x_*) \right) \end{aligned}$$

Но из сходимости подпоследовательностей  $t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}, l^{(\beta_\lambda)}$  к  $t_*, x_*, l_*$  соответственно, вытекает, что при достаточно больших значениях  $\lambda$  имеет место

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \left( t^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, l_i^{(v-1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), l_i^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(v+1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, \right. \\
& \left. l_i^{(m)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right) \right) + \rho_2 \left( t^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, l_i^{(v-1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), l_i^{(\beta_\lambda)}, \right. \\
& \left. l_i^{(v+1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, l_i^{(m)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right) \right) + x^{(0)} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, \right. \\
& \left. l_i^{(v-1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), l_i^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(v+1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, l_i^{(m)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right) \right) < \\
& < \rho_1 \left( t^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, l_i^{(v-1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), l_i^{(v)^\circ} \left( t_*, x_* \right), l_i^{(v+1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, \right. \\
& \left. l_i^{(m)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right) \right) + \rho_2 \left( t^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, l_i^{(v-1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), l_i^{(v)^\circ} \left( t_*, x_* \right), \right. \\
& \left. l_i^{(v+1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, l_i^{(m)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right) \right) + x^{(0)} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, \right. \\
& \left. l_i^{(v-1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), l_i^{(v)^\circ} \left( t_*, x_* \right), l_i^{(v+1)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, l_i^{(m)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right) \right)
\end{aligned}$$

что противоречит выбору векторов  $\left\{ l_i^{(r)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right), \dots, l_i^{(m)^\circ} \left( t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right) \right\}$ , так как этот набор – максимизирующий в (2.6) для позиции  $\left\{ t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)} \right\}$ . Из этого и из условия регулярности вытекает, что  $l_* = l_i^{(v)^\circ} \left( t_*, x_* \right)$ , что противоречит (3.1).

Последнее означает, что предположение о разрывности вектора  $l_i^{(v)^\circ} \left( t_*, x_* \right)$  неверно. Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** В регулярном случае в каждой позиции  $\{t, x\}$  из  $E_i$  функция  $\varepsilon_i^\circ(t, x)$  имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial \varepsilon_i^\circ(t, x)}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \varepsilon_i^\circ(t, x)}{\partial t}$ , которые вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_i^\circ(t, x)}{\partial x} &= \sum_{j=1}^m \bar{X}'[\vartheta_j, \tau] l_i^{(j)^\circ} \\
\frac{\partial \varepsilon_i^\circ(t, x)}{\partial t} &= - \min_{u_i \in P_i} \max_{\substack{u_\alpha \in P_\alpha \\ (\alpha \in K(i))}} \sum_{j=1}^m \left( \left\langle \bar{X}'[\vartheta_j, \tau] l_i^{(j)^\circ}, A(t)x \right\rangle + \right. \\
& \quad \left. + \left\langle \bar{X}'[\vartheta_j, \tau] l_i^{(j)^\circ}, B_i(t)u_i \right\rangle + \sum_{\alpha \in K(i)} \left\langle \bar{X}'[\vartheta_j, \tau] l_i^{(j)^\circ}, B_\alpha(\tau)u_\alpha \right\rangle \right)
\end{aligned}$$

**Доказательство.** Сначала вычислим производную функции  $\varepsilon_i^\circ(t, x)$  по  $t$ . Пусть система (1.1) находится в позиции  $\{t, x\}$ , причем  $\vartheta_{r-1} \leq t < \vartheta_r$  ( $r \in \{1, \dots, m\}$ ).

Обозначим через  $\bar{L}_i^{(r)}(t, x)$  набор максимизирующих векторов  $\{l_i^{(r)^\circ}(t, x), \dots, l_i^{(m)^\circ}(t, x)\}$ .

Составим приращение функции  $\varepsilon_i^\circ(t, x)$ , которая согласно выражению (2.6) будет

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_i^\circ(t, x) &= \rho_1(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) + \rho_2(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) + \\ &+ x^{(0)}(t + \Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) - \\ &- \rho_1(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - \rho_2(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - x^{(0)}(t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) = \\ &= \left[ \rho_1(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) + \rho_2(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) + x^{(0)}(t + \Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - \right. \\ &\quad \left. - \rho_1(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - \rho_2(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - x^{(0)}(t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) \right] + \\ &+ \left[ \rho_1(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) + \rho_2(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) + \right. \\ &\quad \left. + x^{(0)}(t + \Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) - \rho_1(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - \right. \\ &\quad \left. - \rho_2(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - x^{(0)}(t + \Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) \right] \end{aligned}$$

Содержимое вторых квадратных скобок в последнем соотношении не меньше нуля, так как  $\bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)$  – максимизирующий набор (2.6) для позиции  $\{t + \Delta t, x\}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_i^\circ(t, x) &\geq \rho_1(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) + \rho_2(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) + x^{(0)}(t + \Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - \\ &- \rho_1(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - \rho_2(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - x^{(0)}(t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

а также

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_i^\circ(t, x) &= \\ &= \left[ \rho_1(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) + \rho_2(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) + \right. \\ &\quad \left. + x^{(0)}(t + \Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) - \right. \\ &\quad \left. - \rho_1(t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) - \rho_2(t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) - x^{(0)}(t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) \right] + \\ &+ \left[ \rho_1(t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) + \rho_2(t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) + x^{(0)}(t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) - \right. \\ &\quad \left. - \rho_1(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - \rho_2(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - x^{(0)}(t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) \right]. \end{aligned}$$

Содержимое вторых квадратных скобок в последнем соотношении не больше нуля, так как  $\bar{L}_i^{(r)}(t, x)$  – максимизирующий набор (2.6) для позиции  $\{t, x\}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_i^o(t, x) \leq & \rho_1(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) + \rho_2(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) + \\
& + x^{(0)}(t + \Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) - \rho_1(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - \\
& - \rho_2(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - x^{(0)}(t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Разделив обе части неравенств (3.2) и (3.3) на  $\Delta t$ , получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_1(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - \rho_1(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x))}{\Delta t} + \frac{\rho_2(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - \rho_2(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x))}{\Delta t} + \\
& + \frac{x^{(0)}(t + \Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x)) - x^{(0)}(t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x))}{\Delta t} \leq \\
& \leq \frac{\Delta \varepsilon_i^o(t, x)}{\Delta t} \leq \frac{\rho_1(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) - \rho_1(t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x))}{\Delta t} + \\
& + \frac{\rho_2(t + \Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) - \rho_2(t, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x))}{\Delta t} + \\
& + \frac{x^{(0)}(t + \Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x)) - x^{(0)}(t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t + \Delta t, x))}{\Delta t}.
\end{aligned}$$

Так как набор векторов  $\bar{L}_i^{(r)}(t, x)$  непрерывно зависит от  $t$ , следовательно, у обоих неравенств предел при  $\Delta t \rightarrow 0$  получается одинаковым, и имеем

$$\frac{\partial \varepsilon_i^o(t, x)}{\partial t} = \left[ \frac{\partial \rho_1(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x))}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2(t, \bar{L}_i^{(r)}(t, x))}{\partial t} + \frac{\partial x^{(0)}(t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t, x))}{\partial t} \right]_{\bar{L}_i^{(r)} = \text{const}}$$

причем, при вычислении производных зависимость  $\bar{L}_i^{(r)}(t, x)$  от  $t$  не учитывается.

Следовательно, учитывая (2.5), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_i^o(t, x)}{\partial t} = & - \min_{u_i \in P_i} \sum_{j=r}^m \left( \langle l_i^{(j)^\circ}, \bar{X}[\vartheta_j, \tau] B_i(\tau) u_i \rangle - \right. \\
& \left. - \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \sum_{j=r}^m \langle l_i^{(j)^\circ}, \sum_{\alpha \in K(i)} \bar{X}[\vartheta_j, \tau] B_\alpha(\tau) u_\alpha \rangle - \langle l_i^{(j)^\circ}, \bar{X}[\vartheta_j, t] A(t) x \rangle \right)
\end{aligned}$$

или, преобразовав последнее, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_i^o(t, x)}{\partial t} = & - \min_{u_i \in P_i} \max_{\substack{u_\alpha \in P_\alpha \\ (\alpha \in K(i))}} \sum_{j=r}^m \left( \langle \bar{X}'[\vartheta_j, \tau] l_i^{(j)^\circ}, A(t) x \rangle + \right. \\
& \left. + \langle \bar{X}'[\vartheta_j, \tau] l_i^{(j)^\circ}, B_i(t) u_i \rangle + \sum_{\alpha \in K(i)} \langle \bar{X}'[\vartheta_j, \tau] l_i^{(j)^\circ}, B_\alpha(\tau) u_\alpha \rangle \right) \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Выражение (3.4) можно было бы получить, формально дифференцируя (2.4) по  $t$  и игнорируя зависимость  $\bar{L}_i^{(r)}(t, x)$  от  $t$ . Аналогичным образом, вычисляя производную по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial \varepsilon_i^o(t, x)}{\partial x} = \sum_{j=1}^m \bar{X}'[\vartheta_j, \tau] l_i^{(j)o} \quad (3.5)$$

Из выражения правых частей формул (3.4) и (3.5) видно также, что  $\frac{\partial \varepsilon_i^o(t, x)}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \varepsilon_i^o(t, x)}{\partial x}$  являются непрерывными функциями от аргументов  $t$  и  $x$ . Лемма 3 доказана.

В качестве иллюстрации формулы (2.4) может служить численный пример, рассмотренный в [7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Габриелян М.С. Минимаксное прицеливание в собственно линейной системе при  $m$  целевых множествах. // Уч. записки ЕГУ. 1984. №1.
4. Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации. Москва–Ижевск: 2001.
5. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
6. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
7. Степанян А.А. Об одной задаче дифференциальных игр нескольких лиц при многих целевых множествах. // Механика 2009: Труды международной школы-конференции молодых ученых. М550.-Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2009. С.316 – 319.

#### Сведения об авторах:

**Барсегян Вая Рафаелович** – Доктор физ-мат. наук, профессор,  
Ереванский Государственный Университет, факультет математики и механики  
[barsegh@ysu.am](mailto:barsegh@ysu.am), [barseghyan@sci.am](mailto:barseghyan@sci.am)

**Симонян Тамара Александровна** – Кандидат физ-мат. наук,  
Ереванский Государственный Университет, факультет математики и механики  
[Simtom09@gmail.com](mailto:Simtom09@gmail.com)

**Степанян Арег Ашотович** – Аспирант Ереванского Государственного  
Университета, факультет математики и механики  
[Mexanikus2006@yahoo.com](mailto:Mexanikus2006@yahoo.com)

Поступила в редакцию 03.03.2011

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В  
ЗАВИСИМОСТИ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРИОДИЧЕСКОГО  
НАГРУЖЕНИЯ НА БАЗЕ ТЕОРИИ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ  
СИМОНЯН А.М., ПЕТРОСЯН Т.Л.**

**Ключевые слова:** ползучесть, гистерезис, малоцикловое нагружение  
**Key words:** creep, hysteresis, scarcely cycle loading

Միմոնյան Ա.Մ., Պետրոսյան Տ.Լ.

**Ժառանգականության տեսության հիման վրա հիստերեզիսային էներգետիկ կորուստների  
ուսումնասիրությունը կախված պարբերական բեռնավորման բնութագրիչներից**

Ուսումնասիրվում է հիստերեզիսային մարման գործակցի կախվածությունը պարբերական բեռնավորման պարամետրերից և ցիկլի համարից ժառանգականության գծային տեսության հիման վրա:

Simonyan A.M., Petrosjan T.L.

**Investigation of hysteresis energy dissipation in dependence of characteristics of periodical loading on base  
of theory of heredity**

The dependence of coefficient of energy dissipation on parameters of scarcely cycle loading is investigated on the base of the theory of heredity.

Исследуется зависимость коэффициента поглощения энергии от параметров малоциклового нагружения и от номера цикла согласно линейной теории наследственности.

Для проектирования конструкций, зачастую, целесообразно знание о демпфирующих свойствах материалов.

Во многих работах ([1-6] и др.) при рассмотрении рассеяния механической энергии и затухания собственных колебаний делается попытка найти связь между рассеянием энергии и параметрами структуры материала. В работе [7] показано, что явление рассеяния энергии протекает быстро и, следовательно, параметры нагружения существенно влияют на величину коэффициента поглощения. В работе [8] на основе данных о ползучести материала при использовании теории старения и теории наследственности построены петли гистерезиса в сравнении с экспериментальными данными при малоциклового ползучести, и на примере грунтов показано, что теория наследственности, в общем, может быть рекомендована для описания деформаций и поглощения энергии.

В настоящей работе дан анализ зависимости коэффициента поглощения от периода циклических нагружений, степени асимметрии цикла и от номера цикла для материала, деформирующегося согласно линейной теории наследственности.

Для описания деформаций при переменных напряжениях  $\sigma(t)$ , согласно теории наследственности [9,10], было использовано соотношение

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \sigma(\tau) [Cae^{-a(t-\tau)} + \nu] d\tau, \quad (1)$$

которое в условиях постоянного напряжения  $\sigma(t) = a$  вырождается в аппроксимирующую формулу

$$\varepsilon(t) = a \left[ \frac{1}{E} + C(1 - e^{-at}) + vt \right]. \quad (2)$$

Положим, что изменение  $\sigma(t)$  имеет место по следующему закону:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left[ \sin(\omega t + \varphi_0) + \lambda \right], \quad (3)$$

где  $\omega$  – циклическая частота,  $\lambda$  – постоянная, определяющая степень асимметрии циклического нагружения.

Для определения площади петли гистерезиса  $\Delta W(t_n)$  используется формула [8]

$$\Delta W(t_n) = \int_{t_n}^{t_n+T} \sigma(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} dt, \quad (4)$$

где  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  – период цикла,  $t_n = Tn$  – номер цикла.

Для определения полной механической энергии  $W(t_n)$ , затраченной за один цикл деформирования, используем формулу [8]

$$W(t_n) = \int_{t_n}^{t_n+\frac{T}{2}} \sigma(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} dt. \quad (5)$$

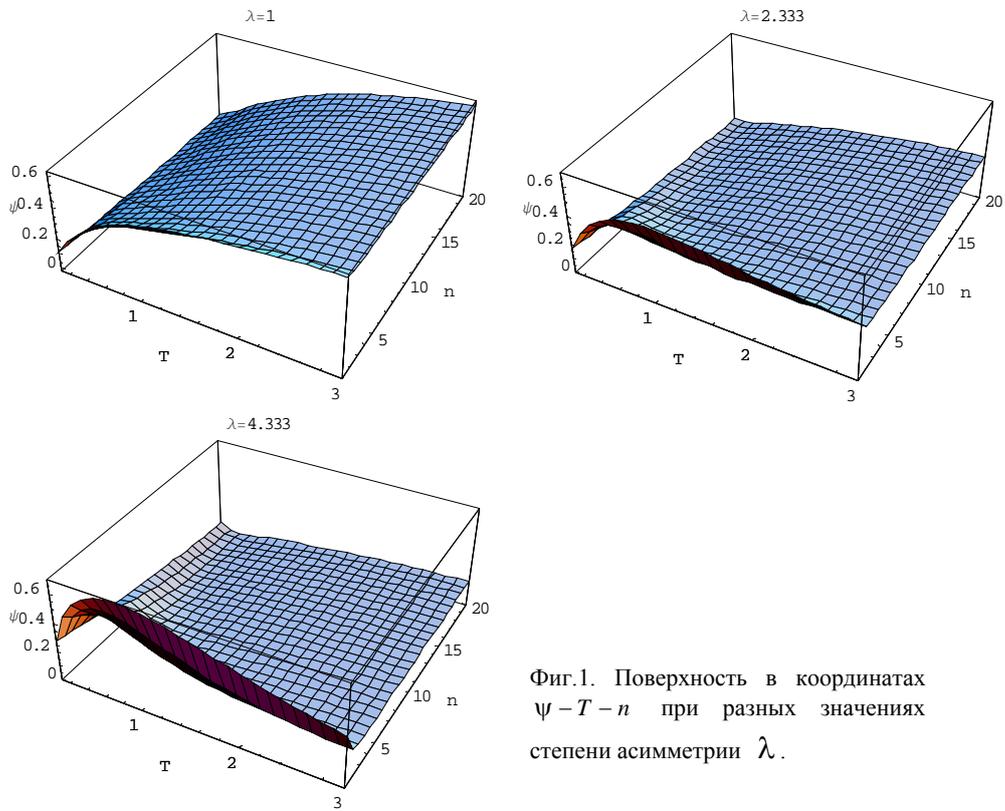
Коэффициент поглощения  $\psi(n)$  определяется так [5]:

$$\psi(n) = \frac{\Delta W(t_n)}{W(t_n)}. \quad (6)$$

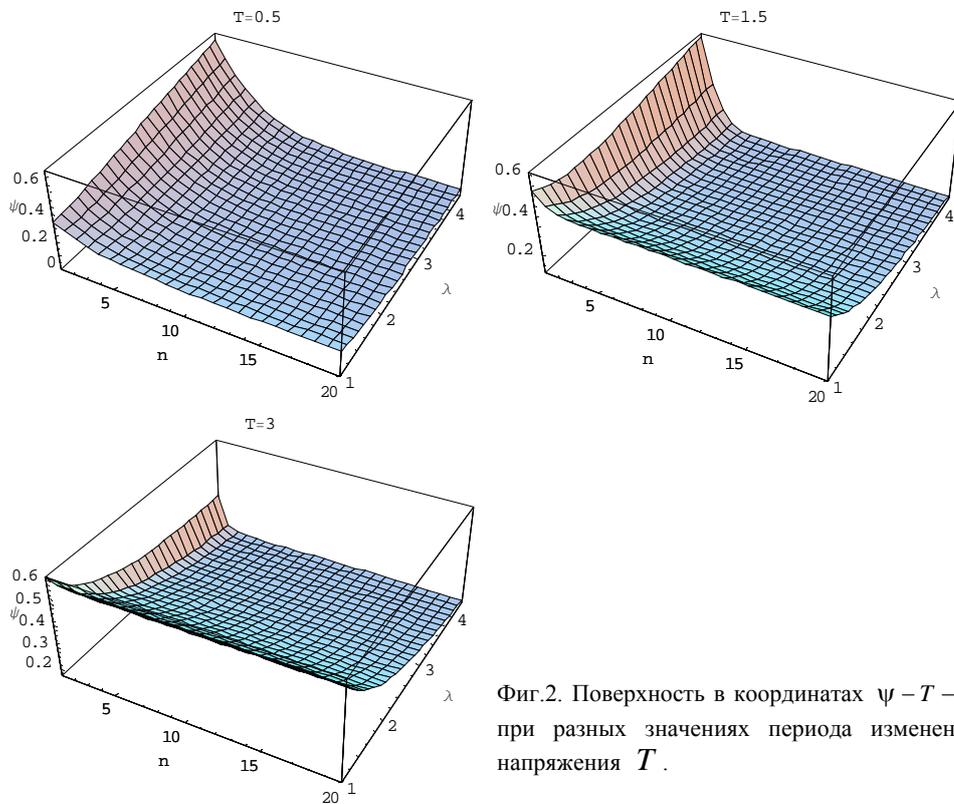
При использовании (1), (3) и (6) после ряда выкладок получим следующее выражение для  $\psi(n)$  в условиях, когда  $\varphi_0 = -\pi/2$ ,  $v=0$  согласно теории наследственности [8]:

$$\begin{aligned} \psi(n) = & \left\{ (1 - e^{-aT}) e^{-anT} \left( \frac{a^4}{(a^2 + \omega^2)^2} - \frac{2\lambda a^2}{a^2 + \omega^2} + \lambda^2 \right) + \frac{\omega \pi a}{a^2 + \omega^2} \right\} \times \\ & \times \left\{ \lambda (1 - e^{-aT/2}) e^{-anT} \left( \lambda - 1 + \frac{\omega^2}{a^2 + \omega^2} \right) + (1 + e^{-aT/2}) \times \right. \\ & \left. \times e^{-anT} \frac{1}{a^2 + \omega^2} \left( \frac{a^4}{a^2 + \omega^2} - \lambda a^2 \right) + \frac{2\lambda a^2}{a^2 + \omega^2} + \frac{a\omega\pi}{2(a^2 + \omega^2)} + \frac{2\lambda}{CE} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

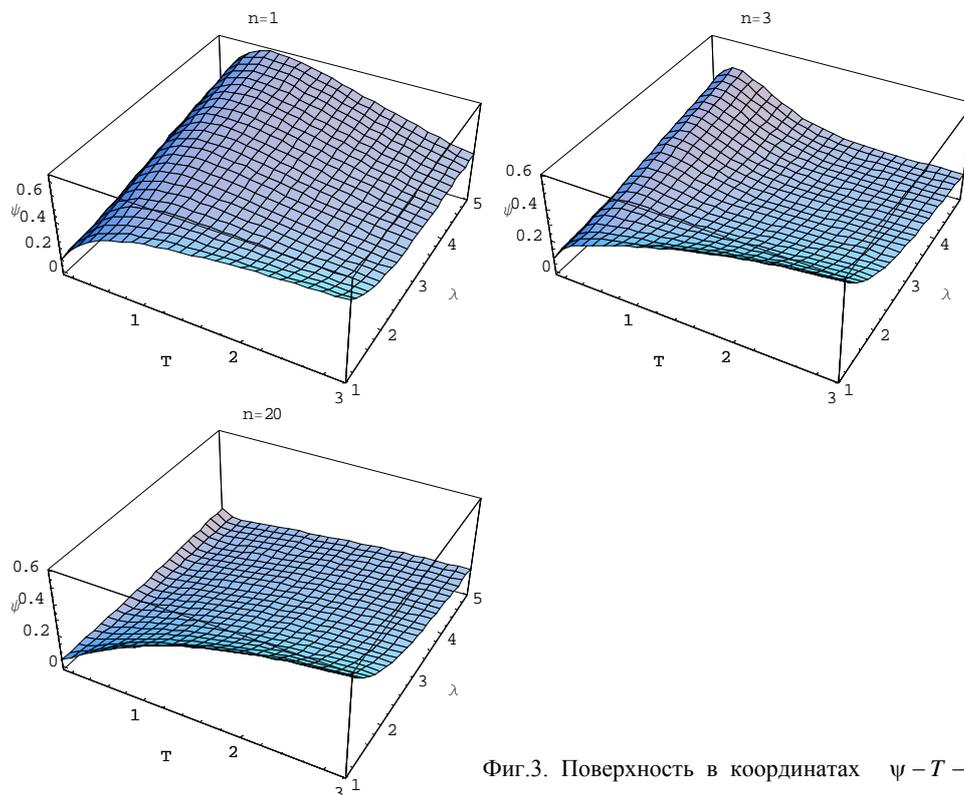
Ниже рассматривается графическое представление и анализ зависимости коэффициента поглощения  $\psi$  от ряда характеристик периодического изменения напряжения согласно линейной теории наследственности (7).



Фиг.1. Поверхность в координатах  $\psi - T - n$  при разных значениях степени асимметрии  $\lambda$ .



Фиг.2. Поверхность в координатах  $\psi - T - \lambda$  при разных значениях периода изменения напряжения  $T$ .



Фиг.3. Поверхность в координатах  $\psi - T - \lambda$  при разных значениях номера цикла  $n$ .

Как вытекает из формулы (7), коэффициент поглощения  $\psi$  не зависит от значения  $\sigma_0$ , хотя это вовсе не означает его независимость от амплитуды, так как для изучения зависимости от амплитуды необходимо обеспечение  $\sigma_0 \lambda = \text{const}$ .

На фиг.1 соответственно данным, полученным для глины [8],  $E=21.5$  МПа,  $a = 0.8 \text{сут.}^{-1}$ ,  $C=0.00955$ , приведены поверхности, описывающие зависимость значения коэффициента  $\psi$  от периода  $T$ , изменяющегося в минутах, и номера цикла  $n$  при различных значениях степени асимметрии  $\lambda$ . На фиг.2 приведены аналогичные поверхности в координатах  $\psi - T - \lambda$  при различных значениях периода  $T$ . На фиг.3 – то же в координатах  $\psi - T - \lambda$  при различных значениях  $n$ .

Как видно из данных фиг.1, при  $\lambda = 1$ , то есть при изменении нагрузки от нуля до  $2\sigma_0$ , с увеличением периода  $T$  коэффициент поглощения  $\psi$  монотонно растёт при любом номере цикла, причем зависимость от  $n$  при любом  $T$  весьма мала. При увеличении степени асимметрии нагружения ( $\lambda = 2.333$  и  $\lambda=4.333$ ) монотонность роста  $\psi$  от периода  $T$  нарушается: при малых значениях  $T$  значение  $\psi$  увеличивается, приближаясь к значению 0.6, а затем в районе  $T=1$  мин, в зависимости от  $\lambda$ , при первых циклах нагружения начинает уменьшаться. Зависимость коэффициента поглощения  $\psi$  от степени асимметрии  $\lambda$  с увеличением количества циклов  $n$  становится монотонно убывающей, хотя на первых циклах нагружения ( $n < 5$ ) при малых периодах  $T$  она является возрастающей.

Особое значение для приложений имеют данные при  $n = 20$ , так как при дальнейшем увеличении номера цикла изменение  $\psi$  несущественно. Наибольшее значение  $\psi = 0.6$  имеет место при  $\lambda = 1$  и  $T = 3$  мин, при этом, зависимость  $\psi$  от номера цикла несущественна.

На основе анализа фиг. 1–3 можно сделать вывод, что в пределах изменения параметров  $\lambda$ ,  $n$  и  $T$  наибольшие относительные потери энергии, определяемые коэффициентом  $\lambda$ , не превышают значения 0.6 и уменьшение его с увеличением номера цикла не всегда имеет место.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зинер С. Упругость и неупругость металлов. // В сб.: «Упругость и неупругость металлов». М.: Изд.иностр.лит., 1954. С.9-168.
2. Гурев А.В., Мирошников Э.В. О форме механического гистерезиса и влияние предварительной пластической деформации на рассеяние энергии. Киев: 1974. С.203-209.
3. Мицкевич З.А. Исследование внутреннего поглощения в металлах. //Изв. высших учебных заведений. М.: Машиностроение, 1961. №6. С.749-751.
4. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях. //ЖТФ АН СССР.1938. Т.8. Вып.6. С.483-495.
5. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
6. Шилькрут Д.И. Единая реологическая гипотеза для описания совместного влияния гистерезиса и наследственных явлений на колебательные процессы в не- вполне упругих системах. Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. С.93-109.
7. Петросян Т.Л. Экспериментальное исследование влияния степени асимметрии цикла на формы и площади петли гистерезиса водонасыщенных глинистых грунтов при компрессии. //Изв. НАН Армении. Науки о Земле. 1993. Т.46. №2. С.60-63.
8. Петросян Т.Л., Симонян А.М. Исследование гистерезиса при малоцикловой ползучести. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №2. С.114-121.
9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
10. Симонян А.М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Гитутюн, 1999. 255 с.

#### Сведения об авторах:

**Симонян Арег Михайлович** – ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА. Тел.:(374 10) 52 75 39, (374 93) 45 70 86  
E-mail: [simonyan areg@mail.ru](mailto:simonyan areg@mail.ru)

**Петросян Тигран Людвигович** – научн.сотудник Института механики НАН РА  
Тел.: (374 10) 67 43 04, (374 99) 16 50 38; E-mail: [tlpetrosyan@mail.ru](mailto:tlpetrosyan@mail.ru)

Поступила в редакцию 19.01.2011

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

**Մարտիրոսյան Ռադիկ Մարտիրոսի** (Օնոնյան 75-ամյակի առթիվ).....3

**Հակոբյան Վ.Ն., Միմոնյան Ա.Ռ.** Ճեղքեր պարունակող օրթոտրոպ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակի մասին ..... 4

**Աղալովյան Լ.Ա, Զաքարյան Տ.Վ.** Օրթոտրոպ երկշերտ սալի համար առաձգականության տեսության առաջին դինամիկական եզրային խնդրի ասիմպտոտիկական լուծումը..... 15

**Մուստաֆա Բարակատ** Կոշտության կողերով ուժեղացված անվերջ սալի ազատ տատանումները ..... 26

**Մովսիսյան Լ.Ա.** Դրոշմերի տակ օղակի կայունության մասին..... 32

**Սարգսյան Ա. Հ.** Թաղանթի բարակ տիրույթում ազատ պտույտներով առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության նախնական-եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ անալիզը..... 40

**Սարգսյան Ս. Հ.** Միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր կիրառական տեսությունը ..... 52

**Բարսեղյան Վ.Ռ., Միմոնյան Թ.Ա., Ստեփանյան Ա.Ա.** Մի քանի խաղացողների շատ նպատակային բազմություններով մի դիֆերենցիալ խաղի համար հիպոթետիկ անհամապատասխանությունը..... 63

**Միմոնյան Ա.Մ., Պետրոսյան Տ.Լ.** Ժառանգականության տեսության հիման վրա հիստերեզիսային էներգետիկ կորուստների ուսումնասիրությունը կախված պարբերական բեռնավորման բնութագրիչներից ..... 73

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Радик Мартиросович Мартиросян – К 75-летию со дня рождения.....</b>	<b>3</b>
<b>Акопян В.Н., Симонян А.Р.</b> О плоско-деформированном состоянии ортотропной плоскости с разрезами .....	4
<b>Агаловян Л.А., Закарян Т.В.</b> Асимптотическое решение первой динамической краевой задачи теории упругости для двухслойной ортотропной пластинки.....	15
<b>Мустафа Баракат</b> Свободные колебания бесконечной пластинки, усиленной рёбрами жёсткости.....	26
<b>Мовсисян Л.А.</b> К устойчивости кольца под штампами.....	32
<b>Саркисян А. А.</b> Асимптотический анализ начально-граничной динамической задачи несимметричной теории упругости со свободным вращением в области тонкой оболочки.....	40
<b>Саркисян С.О.</b> Общая прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек.....	52
<b>Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Степанян А.А.</b> Гипотетическое рассогласование для одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах ...	63
<b>Симонян А.М., Петросян Т.Л.</b> Исследование гистерезисных энергетических потерь в зависимости от характеристик периодического нагружения на базе теории наследственности .....	73

## CONTENTS

<b>Radik M. Martirosyan – 75-th Anniversary .....</b>	<b>3</b>
<b>Накобян V.N., Simonyan A.R.</b> On Plane-Deformed State of Orthotropic Plane with Slits .....	4
<b>Aghalovyan L.A, Zakaryan T.V.</b> The asymptotic solution of the first dynamic boundary value problem of the theory of elasticity for two-layered orthotropic plate.....	15
<b>Mustafa Baracat</b> Free vibrations of the infinite plate strengthened by the stiffening ribs..	26
<b>Movsisyan L.A.</b> The stability of cylindrical ring under punches .....	32
<b>Sargsyan A. H.</b> Asymptotical Analysis of Initial-Boundary problem of Elasticity Asymmetrical Theory with Free Rotation in Thin Area of the Shell .....	40
<b>Sargsyan S.H.</b> General Applied Theory of Micropolar thin Elastic Shells .....	52
<b>Barseghyan V.R., Simonyan T.A., Stepanyan A.A.</b> The Hypothetical Mismatch in One Several Person Differential Game at Many Aim Sets .....	63
<b>Simonyan A.M., Petrosjan T.L.</b> Investigation of hysteresis energy dissipation in dependence of characteristics of periodical loading on base of theory of heredity .....	73