

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵԴԵԿՆԻԿԱԳԻՏ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

2011



**ГЕВОРГ ЕРВАНДОВИЧ БАГДАСАРЯН**  
(К 75-летию со дня рождения)

13-го января 2011г. исполнилось 75 лет крупному ученому–механику, основателю нового научного направления в области механики сплошных сред, академику НАН РА, доктору физико-математических наук, профессору, главному научному сотруднику Института механики НАН РА Геворгу Ервандовичу Багдасаряну.

**Геворг Ервандович Багдасарян** родился 13 января 1936г. в селе Цахкаовит области Арагацотн Армении. В 1953г., окончив среднюю школу в г.Апаран, поступил на физико-математический факультет ЕрГУ, который окончил в 1958г. с отличием. С 1958г. по 1964г. работал в Институте механики НАН РА. В 1963г. в Москве в Институте проблем механики Г.Е. Багдасарян защитил кандидатскую диссертацию “Задачи устойчивости анизотропных оболочек и пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа” и получил степень кандидата технических наук. С 1964 по 1979гг. работал в Институте механики НАН РА в качестве ведущего научного сотрудника, далее с 1978 по 1998гг. был заведующим отделом магнитоупругости. В 1977г. в Киеве в Институте механики АН УССР защитил докторскую диссертацию “Задачи магнитоупругости тонких пластин и оболочек” и получил ученую степень доктора физико-математических наук. С 1978 по 1979гг. был директором Института механики НАН РА. В 1990г. был избран член-корреспондентом НАН РА, а в 1994г.– академиком. По его инициативе и участия в ЕрГУ были созданы две кафедры, которые он возглавлял успешно долгие годы. В 1993-1995гг. был деканом факультета прикладной математики ЕрГУ, с 1994г. по 1998г. – ректор Армянского педагогического института. В 1998-2002гг. был председателем Высшей аттестационной комиссии РА, а с 2002г. по 2007г.– советником ректора ЕрГУ.

Г.Е.Багдасарян является автором более 200 оригинальных научных работ и четырех монографий, две из которых были изданы в издательстве “Наука”.

Г.Е.Багдасарян создал научный коллектив, который под его руководством сейчас проводит большую работу по математическому моделированию и решению практически важных задач прочности, устойчивости, колебаний и распространения волн в области механики сплошных сред. Велика заслуга Г.Е. Багдасаряна в деле подготовки высококвалифицированных научных кадров. Под его руководством защищены около двадцати кандидатских и докторских диссертаций.

Область научных интересов Г.Е. Багдасаряна чрезвычайно широка, перечислим лишь основные направления его научной деятельности, охватывающей, в основном, различные аспекты механики сплошной среды:

**1. Колебания и устойчивость.** В этой области предложены эффективные аналитические и численные методы для исследования параметрических, вынужденных и флаттерных колебаний. Получены новые важные результаты.

**2. Магнитоупругость.** Предложены гипотезы магнитоупругости тонких тел, на основе которых построена общая теория описания и исследования взаимосвязанных механических и электромагнитных явлений для тонкостенных проводящих тел (совместно с академиком С.А. Амбарцумяном и профессором М.В. Белубекианом). Г.Е. Багдасаряном (совместно с профессором З.Н. Данояном), для геометрически нелинейных тонких пластин выдвинуты гипотезы магнитоупругости. Исходя из основных положений нелинейной теории магнитоупругости и вышеуказанных гипотез, трехмерная задача магнитоупругости сведена к двумерной. Получены основные двумерные нелинейные уравнения и соотношения, описывающие колебательные и волновые процессы в упругой проводящей тонкой пластине при наличии внешнего однородного магнитного поля. Решены конкретные задачи.

Сформулирован ряд модельных задач магнитоупругих колебаний и устойчивости, на основе решения которых выявлены новые явления и эффекты, обусловленные взаимодействием магнитных и механических полей. Проведена также экспериментальная проверка полученных теоретических результатов.

Предложены также математические модели для описания поведения сверхпроводящих и магнитомягких ферромагнитных тел в стационарных и нестационарных магнитных полях. Кроме того, исследованы вопросы прочности и разрушения тел с дефектами под воздействием магнитных полей и ряд других задач.

**3. Волновые процессы в различных средах.** В этой области разработаны теоретические основы исследования распространения взаимосвязанных различных волн в пьезоэлектрических, пьезомагнитных, магнитострикционных и ферромагнитных средах. Выявлено возникновение сдвиговых поверхностных, щелевых и сопутствующих волн нового типа.

Г.Е.Багдасарян награжден рядом орденов и медалей. За выдающиеся достижения в области науки отмечен государственными премиями и наградами, в частности, золотыми медалями от Министерства образования и науки РА, Педагогического университета им.Х.Абовяна и Американского института развития.

Г.Е.Багдасарян является также членом многих престижных международных научных и общественных организаций.

Редколлегия журнала “Известия НАН Армении. Механика”, научная общественность Армении сердечно поздравляют **Геворга Ервандовича Багдасаряна** с юбилеем и желают ему доброго здоровья, плодотворной научной деятельности и дальнейших творческих успехов во благо развития науки в Армении.

УДК 539.3

**РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ  
АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИХ ШТАМПОВ ПО ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ  
БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА**

**АМИРДЖАНЫАН А.А.**

**Ключевые слова:** штамп, контактные задачи, равномерное движение, полый цилиндр  
**Key words:** hollow cylinder, contact problems, uniform motion, rigid punch.

**Ամիրջանյան Հ. Ա.**

**Բացարձակ կոշտ դրոշմների պարբերական համակարգի, հավասարաչափ շարժումը անվերջ,  
սնամեջ գլանի միջով**

Դիտարկված է անվերջ, սնամեջ գլանի առանցքաախմետրիկ լարվածային վիճակը, երբ գլանի ներքին մակերևույթով հաստատուն արագությամբ շարժվում է բացարձակ կոշտ դրոշմների պարբերական համակարգ, իսկ արտաքին մակերևույթը ազատ է, կամ կոշտ ամրակցված:

Ուսումնասիրված է դրոշմների տակ գործող լարումների վարքը, կախված գլանի ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերից

**Amirjanyan H. A.**

**On Uniform Motion of a Periodic System of Absolutely Rigid Stamps, in the Hollow Cylinder**

Axissymmetric stress state of the infinite hollow cylinder when on the inner surface of the cylinder acts a periodic system of uniformly moving circular stamps and the outer surface is free of loads or rigidly clamped is considered

The behavior of the contact stresses, acting under the stamp, in dependence on the physical and geometrical parameters of the cylinder is studied.

Рассмотрено осесимметричное напряженное состояние бесконечного полого цилиндра, по внутренней поверхности которого с постоянной скоростью движется периодическая система абсолютно жёстких кольцевых штампов, а внешняя поверхность свободна от нагрузок или жестко закреплена.

Исследовано поведение контактных напряжений, действующих под штампами, в зависимости от физических и геометрических параметров цилиндра.

Пусть по внутренней поверхности бесконечного упругого полого цилиндра с внутренним радиусом  $r_0$  и внешним радиусом  $r_1$ , изготовленного из материала с модулем сдвига  $\mu$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , с постоянной скоростью  $V_0$  движется периодическая система абсолютно жёстких, осесимметричных штампов, а внешняя поверхность полого цилиндра свободна от нагрузок или жестко закреплена.

Будем считать, что скорость движения вкладышей  $V_0$  меньше скорости распространения поверхностных волн в полом цилиндре, а в зоне контакта цилиндра с вкладышем имеет место сухое трение, т.е. между касательными напряжениями и давлениями под вкладышем имеется связь по закону Кулона

$$\tau(z) = f \sigma(z), \quad (1)$$

где  $f$  – коэффициент трения.

Ставится задача: определить давление в зоне контакта вкладыша с цилиндром и изучить закономерности его изменения в зависимости от физических и геометрических параметров цилиндра и вкладыша.

Предположим, что вкладыши имеют цилиндрическую форму с радиусом  $r_0 + \delta$ . Тогда, условие контакта в движущейся со скоростью  $v_0$  цилиндрической системе координат  $OxOz$ , ось  $Oz$  которой направлена по главной оси цилиндра, будет иметь вид

$$u_r(r_0, z) = \delta, \quad (2)$$

где  $u_r(r_0, z)$  – нормальное смещение точек внутренней границы цилиндра,  $\delta$  – разность радиусов вкладыша и цилиндра.

Согласно результатам работы [1], радиальная компонента перемещений точек внутренней границы цилиндра под воздействием осесимметрично распределенных сосредоточенных нормальных и касательных нагрузок интенсивности  $P$  и  $Q$  имеет вид:

$$u_r(r_0, z) = \frac{P}{\pi\mu} \left( \vartheta_1 \ln \frac{1}{|z|} + \int_0^\infty \tilde{K}_{21}(kr_0) \frac{\cos(kz)}{k} dk \right) + \frac{Q}{\pi\mu} \left( \vartheta_0 \vartheta_1 \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} z + \int_0^\infty \tilde{K}_{22}(kr_0) \frac{\sin(kz)}{k} dk \right),$$

где

$$\vartheta_0 = \frac{\beta - \alpha_1 \alpha_2}{(1 - \beta) \alpha_1}; \quad \vartheta_1 = \frac{(1 - \beta) \alpha_1}{2(\beta^2 - \alpha_1 \alpha_2)}; \quad \alpha_1 = \sqrt{1 - \theta \eta}; \quad \alpha_2 = \sqrt{1 - \eta},$$

$$\beta = \frac{1 + \alpha_2^2}{2} = 1 - \frac{\eta}{2}; \quad \eta = \left( \frac{v_0}{c_2} \right)^2; \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad \theta = \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)},$$

а значения функций  $\tilde{K}_{ij}(z)$  ( $i, j = 1, 2$ ) приведены в работе [1] и здесь не приводятся из-за громоздкости.

Тогда, на основании принципа суперпозиции, для периодической с периодом  $2L$  системы сил  $P$  и  $Q$  имеем

$$u_r(r_0, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P}{\pi\mu} \left( \vartheta_1 \ln \frac{1}{|z - 2nL|} + \int_0^\infty \tilde{K}_{21}(kr_0) \frac{\cos k(z - 2nL)}{k} dk \right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Q}{\pi\mu} \left( \vartheta_0 \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(z - 2nL) + \int_0^\infty \tilde{K}_{22}(kr_0) \frac{\sin k(z - 2nL)}{k} dk \right).$$

Для распределённых на интервалах  $(-a + 2nL, a + 2nL)$  оси  $Oz$  нормальных и касательных нагрузок интенсивности  $\sigma(z)$  и  $\tau(z)$ , связанных условием (1), можем записать:

$$u_r(r_0, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left( G \left( \frac{s-z}{r_0} \right) - \vartheta_1 \ln \sin \frac{\pi|s-z|}{2L} - \frac{\pi}{2} f \vartheta_0 \vartheta_1 \operatorname{sgn}(s-z) \right) \frac{\sigma(s)}{\mu} ds, \quad (3)$$

где

$$G(z) = \frac{\pi}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\pi m} \left( \tilde{K}_{21} \left( \frac{\pi}{\lambda} m \right) \cos \left( \frac{\pi}{\lambda} mz \right) + f \tilde{K}_{22} \left( \frac{\pi}{\lambda} m \right) \sin \left( \frac{\pi}{\lambda} mz \right) \right) + C_0,$$

$$\lambda = \frac{L}{r_0} \quad C_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left( \mathfrak{G}_1 + \tilde{K}_{21} \left( \frac{\pi}{\lambda} k \right) \right).$$

Здесь использован факт, что на интервале  $(-L, L)$  имеют место соотношения:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-2nL} = \frac{\pi}{2L} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2L}; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln|x-2nL| = \ln \sin \frac{\pi x}{2L},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2nL) = \delta(x); \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^n} = \operatorname{Li}_n(e^{ix}),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik2Ln} = \frac{\pi}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - \frac{\pi}{L} m\right),$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ik(x-2nL)} dk &= \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik2nL} dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik2nL} dk = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} \frac{\pi}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - \frac{\pi}{L} m\right) dk = \frac{\pi}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{L} m\right) e^{i\frac{\pi}{L} mx} \end{aligned}$$

Теперь удовлетворим условию контакта (2), первоначально продифференцировав его по  $z$ . В итоге, для определения неизвестного контактного давления  $\sigma(x)$  получим следующее сингулярное интегральное уравнение второго рода:

$$f \mathfrak{G}_0 \frac{\sigma(z)}{\mu} + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{s-z} \frac{\sigma(s)}{\mu} ds + \frac{1}{\pi \mathfrak{G}_1} \int_{-a}^a \frac{1}{r_0} K\left(\frac{s-z}{r_0}\right) \frac{\sigma(s)}{\mu} ds = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$K(z) = \frac{\pi}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \tilde{K}_{21} \left( \frac{\pi}{\lambda} m \right) \sin \frac{\pi m z}{\lambda} + f \tilde{K}_{22} \left( \frac{\pi}{\lambda} m \right) \cos \frac{\pi m z}{\lambda} \right) + \mathfrak{G}_1 \left( \frac{\pi}{2\lambda} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2\lambda} - \frac{1}{z} \right).$$

Для получения однозначного решения к уравнению (4) нужно добавить условие

$$u_r(r_0, 0) = \delta. \quad (5)$$

После решения уравнения (4) при условии (5), легко определить равнодействующее контактных напряжений по формуле

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = P. \quad (6)$$

Заметим, что для численных расчетов в качестве дополнительного условия к уравнению (4) удобнее использовать условие (6), задавая наперед равнодействующее контактных напряжений  $P$ , а затем, из условия (5) можно будет найти соответствующую разность радиусов вкладыша и цилиндра. В дальнейшем, мы так и поступим.

Уравнение (4) будем решать при помощи метода дискретных особенностей [2]. Для этого, при помощи замены переменных

$$z = at; \quad s = a\tau; \quad s, z \in (-a, a),$$

интегральное уравнение (4) запишем на интервале  $(-1, 1)$  и введём обозначения

$$\sigma^*(t) = \frac{1}{\mu} \sigma(at); \quad p^* = \frac{P}{a\mu}; \quad K^*(t) = \frac{1}{\vartheta_1 r_0} K\left(\frac{a}{r_0}(t)\right).$$

Получим уравнение

$$f\vartheta_0\sigma^*(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma^*(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K^*(\tau-t)\sigma^*(\tau) d\tau = 0. \quad (7)$$

Условие (6), при этом, принимает вид:

$$\int_{-1}^1 \sigma^*(\tau) d\tau = p^*. \quad (8)$$

Используя известные результаты Н.И.Мусхелишвили [3] о поведении сингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования, решение уравнения (7) представим в виде:

$$\sigma^*(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \varphi(t) = \omega(t)\varphi(t), \quad (9)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – те решения уравнений

$$\text{ctg}(\alpha\pi) + f\vartheta_0 = 0; \quad -\text{ctg}(\beta\pi) + f\vartheta_0 = 0; \quad 0 < |\alpha|, |\beta| < 1,$$

которые обеспечивают надлежащее поведение искомых функций в точках  $\pm 1$ . Очевидно, что в рассматриваемом случае искомая функция в конечных точках неограничена. Следовательно,  $\alpha$  и  $\beta$  будут даваться формулами:

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \gamma; \quad \beta = -\frac{1}{2} - \gamma; \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \arctg(f\vartheta_0).$$

Неизвестную функцию  $\varphi(t)$  заменим интерполяционным многочленом  $\varphi_n(t)$ , определяемым формулой

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{(t-\tau_i) P_n^{(\alpha,\beta)}(\tau_i)}, \quad (10)$$

где  $\varphi_m = \varphi(\tau_m)$ , а  $\{\tau_m\}_{m=1}^n$  – корни многочлена Якоби  $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ .

Как и в [4], для функции  $K(z)$  в окрестности точки  $z=0$  имеет место следующее представление:

$$K(z) = -\log|z| K_L(z) + \frac{\pi}{2} \text{sgn}(z) K_S(z) + K_{RP}(z), \quad (11)$$

где  $K_{L,S,RP}(z)$  – достаточно гладкие функции, хорошо аппроксимируемые полиномами, и  $K_L(z)$  и  $K_S(z)$  совпадают с соответствующими функциями в [4].

Сохраняя обозначения работы [4] и используя приведённые там квадратурные формулы для интегралов, содержащих  $\log|z|$  и  $\text{sgn}(z)$ , заменим в (7) и (8) интегралы квадратурными формулами. Далее, приравнивая обе части уравнения (7) в корнях полинома Якоби  $P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(z)$ ,  $z = \zeta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\varphi_i$ :

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i}{(\tau_i - \zeta_j)} + w_i K_{RP}^*(z_i, \zeta_j) + \chi_{Si}(\zeta_j) K_S^*(z_i, \zeta_j) + \chi_{Li}(\zeta_j) K_L^*(z_i, \zeta_j) \right) \varphi_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_i = p^*, \quad (12)$$

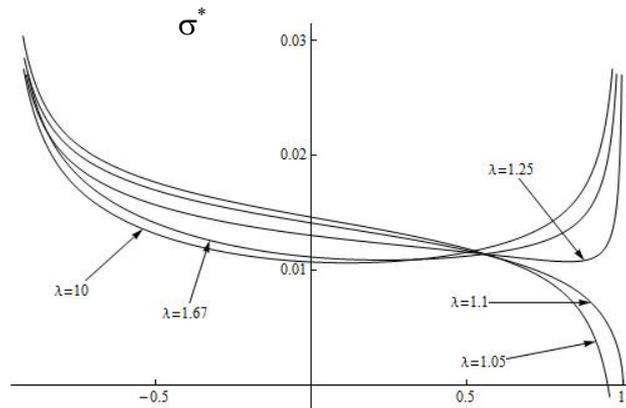
где

$$w_i = -\frac{2^{\alpha+\beta} P_{n+\alpha+\beta}^{(-\alpha, -\beta)}(\tau_i)}{\sin \pi \alpha P_n^{(\alpha, \beta)}(\tau_i)}.$$

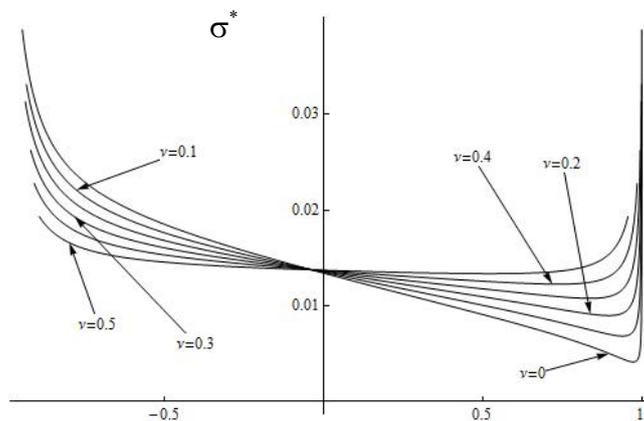
Проведен численный анализ и изучено изменение контактного давления в зависимости от физических и геометрических параметров цилиндра и вкладыша с плоским основанием. Результаты вычислений приведены в виде графиков на фиг.1 и фиг.2. На фиг.1 приведены графики контактного давления для различных значений параметра  $\lambda = L/a$  в случае, когда внешняя поверхность цилиндра свободна от напряжений и  $\nu = 0,3$ ,  $f = 0,3$ ,  $\eta = 0,4$ ,  $p^* = 0,1$ ,  $r_1/r_0 = 2,5$ ,  $a/r_0 = 1$ . Как видно из графиков, при уменьшении этого параметра, т.е. когда вкладыши приближаются друг к другу, контактное давление в передней части контактной зоны уменьшается и при  $\lambda < 1,101$  становится отрицательным. Это означает, что чем меньше расстояние между вкладышами, тем больше вероятность отрыва передней части вкладыша от матрицы. При увеличении же расстояний между вкладышами контактные напряжения под вкладышами стремятся к определенному закону распределения, соответствующему случаю движения одного вкладыша в цилиндре с цилиндрической выемкой.

Нужно отметить также, что при увеличении толщины цилиндра предельное значение  $\lambda$ , при котором нормальные напряжения меняют знак, уменьшается.

На фиг. 2 приведены графики контактного давления для различных значений коэффициента Пуассона в случае, когда внешняя поверхность цилиндра закреплена,  $f = 0,3$ ,  $\eta = 0,4$ ,  $p^* = 0,1$ ,  $r_1/r_0 = 2,5$ ,  $a/r_0 = 1$ ,  $L/a = 1,2$ . Как видно из графиков, при увеличении коэффициента Пуассона контактное давление в передней части контактной зоны уменьшается, а в задней части увеличивается.



Фиг.1



Фиг.2

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амирджанян А.А. Равномерное движение силовых нагрузок по внутренней поверхности бесконечного полого цилиндра //Тр.Международной школы-конференции молодых учёных “Механика –2009”, М550, Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2009. С.140-144.
2. Саакян А.В. Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с комплексным коэффициентом //Докл. НАН Армении. 1997. Т.97. №4. С.32-36.
3. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 510с.
4. Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Равномерное движение абсолютно жёсткого штампа по внутренней поверхности бесконечного полого цилиндра. //В сб. научных трудов Международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Т.1. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2010. С.81-85.

#### Сведения об авторе:

**Амирджанян Арутюн Арменович** – аспирант Института механики НАН Армении  
Тел.: (37410) 27-62-23  
E-mail: [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

Поступила в редакцию 03.11.2010

УДК 539.3

**ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ  
МЕЛКОНЯН А.В.**

**Ключевые слова:** упругий слой, волна, фазовая скорость, динамические потенциалы, уравнение Рэлея.

**Keywords:** elastic layer, wave, phase speed, dynamic potentials, Rayleigh's equation.

**Մելկոնյան Ա.Վ.**

**Առաձգական շերտում ալիքների տարածման եռաչափ խնդիրը**

Աշխատանքում դիտարկված է առաձգական շերտում ալիքների տարածման եռաչափ խնդիրը: Շերտը սահմանափակող հարթությունների վրա տրված են նորմալ լարման, շոշափող լարումներից մեկի և շոշափող տեղափոխություններից մեկի գրոյի հավասարվելու պայմանները: Միմետրիկ և շեղ սիմետրիկ տատանումների ֆազային արագության համար ստացվել են բնութագրիչ հավասարումներ: Դիտարկվել են սահմանային դեպքեր, երբ ալիքի երկարությունը շատ մեծ է և շատ փոքր է շերտի հաստության համեմատ: Բերված են ալիքի ֆազային արագության համար թվային հաշվարկներ:

**Melkonyan A.V.**

**Three-dimensional Problem of Wave's Propagation in Elastic Layer**

The three-dimensional problem of wave's propagation in an elastic layer is considered. On planes limiting a layer, the conditions of equality to zero of a normal stress, one of the tangent stresses and one of the tangent displacements are given. For phase speed of symmetric and antisymmetric vibrations the characteristic equations are received. The limiting cases are considered: length of a wave is very great and very small in comparison with thickness of the layer. The numerical accounts for phase speed of the wave are given.

Рассматривается трехмерная задача распространения волн в упругом слое. На плоскостях, ограничивающих слой, заданы условия равенства нулю нормального напряжения, одного из касательных напряжений и одного из касательных перемещений. Для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний получены характеристические уравнения. Рассмотрены предельные случаи: длина волны очень велика и очень мала по сравнению с толщиной слоя. Приведены числовые расчеты для фазовой скорости волны.

1. Рассмотрим упругий слой толщиной  $2h$ . В прямоугольной декартовой системе координат  $(oxyz)$  слой занимает следующую область:  $x \in (-\infty; +\infty)$ ,  $y \in (-\infty; +\infty)$ ,  $z \in [-h, h]$ . Пусть в этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью  $c$ . Для уравнения распространения упругих волн в слое (уравнение Ламе) [1]

$$c_2^2 \Delta \bar{u} + (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \bar{u} = \ddot{\bar{u}} \quad (1.1)$$

вводится преобразование Ламе [1]

$$\bar{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi} \quad (\text{div } \vec{\psi} = 0) \quad (1.2)$$

Здесь приняты следующие общеизвестные обозначения:  $c_1 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $c_2 = \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$  – скорости распространения продольной и поперечной волн соответственно,

$\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$  – вектор перемещения,  $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ ,  $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ ,

$\ddot{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$ ,  $\varphi(x, y, z, t)$  и  $\bar{\psi}(x, y, z, t)$  – динамические потенциалы,  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе.

Подстановка (1.2) в уравнения (1.1) приводит к следующим волновым уравнениям [1-3]:

$$\Delta\varphi - c_1^{-2}\ddot{\varphi} = 0, \quad \Delta\bar{\psi} - c_2^{-2}\ddot{\bar{\psi}} = 0. \quad (1.3)$$

Общее решение уравнений (1.3) представляется в виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi^*(z) \cdot \exp i(k_1x + k_2y - ckt) \quad (1.4)$$

$$\bar{\psi}(x, y, z, t) = \bar{\psi}^*(z) \cdot \exp i(k_1x + k_2y - ckt)$$

Согласно (1.4), уравнения (1.3) приводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомым функций  $\varphi^*(z)$  и  $\bar{\psi}^*(z)$ .

Решая полученные уравнения для динамических потенциалов, будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= (A\text{sh}v_1z + B\text{ch}v_1z) \cdot \exp i(k_1x + k_2y - ckt) \\ \bar{\psi}(x, y, z, t) &= (\bar{C}\text{sh}v_2z + \bar{D}\text{ch}v_2z) \cdot \exp i(k_1x + k_2y - ckt) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$v_1^2 = k^2(1 - \eta\theta), \quad v_2^2 = k^2(1 - \eta), \quad \eta = \frac{c^2}{c_2^2}, \quad \theta = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

$A, B, \bar{C}(C_1, C_2, C_3), \bar{D}(D_1, D_2, D_3)$  – неизвестные постоянные.

Напряжения, согласно закону Гука и преобразованию (1.2), выражаются через динамические потенциалы следующими формулами [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu(\partial_1^2\varphi + \partial_1\partial_2\psi_3 - \partial_1\partial_3\psi_2) + \lambda\Delta\varphi \\ \sigma_{22} &= 2\mu(\partial_2^2\varphi + \partial_2\partial_3\psi_1 - \partial_1\partial_2\psi_3) + \lambda\Delta\varphi \\ \sigma_{33} &= 2\mu(\partial_3^2\varphi + \partial_1\partial_3\psi_2 - \partial_2\partial_3\psi_1) + \lambda\Delta\varphi \\ \sigma_{12} &= \mu(2\partial_1\partial_2\varphi + \partial_1\partial_3\psi_1 - \partial_2\partial_3\psi_2 + \partial_2^2\psi_3 - \partial_1^2\psi_3) \\ \sigma_{13} &= \mu(2\partial_1\partial_3\varphi + \partial_2\partial_3\psi_3 - \partial_1\partial_2\psi_1 + \partial_1^2\psi_2 - \partial_3^2\psi_2) \\ \sigma_{23} &= \mu(2\partial_2\partial_3\varphi + \partial_1\partial_2\psi_2 - \partial_1\partial_3\psi_3 + \partial_3^2\psi_1 - \partial_2^2\psi_1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Примем, что на плоскостях, ограничивающих слой, заданы следующие граничные условия (стесненный свободный край) [4]:

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad u_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h. \quad (1.7)$$

Здесь, в отличие от условий свободной границы, ставится ограничение на перемещение вдоль оси  $ou$ . Подставляя (1.5) в (1.2) и (1.6) и используя граничные условия (1.7), получим систему восьми линейных однородных уравнений, содержащих постоянные  $A, B, \bar{C}$  и  $\bar{D}$ . Приравнивание определителя этой системы уравнений нулю приводит к характеристическому уравнению, из которого при заданных значениях  $\theta$  и  $k$  можно найти фазовую скорость  $c$ .

2. Упростим задачу, рассмотрим две системы частных решений [1]:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= B \operatorname{ch} v_1 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{11} &= C_1 \operatorname{sh} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{12} &= C_2 \operatorname{sh} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{13} &= D_3 \operatorname{ch} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\varphi_2 &= A \operatorname{sh} v_1 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{21} &= D_1 \operatorname{ch} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{22} &= D_2 \operatorname{ch} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{23} &= C_3 \operatorname{sh} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{11} &= C_1 \operatorname{sh} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{12} &= C_2 \operatorname{sh} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{13} &= D_3 \operatorname{ch} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{21} &= D_1 \operatorname{ch} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{22} &= D_2 \operatorname{ch} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\
\psi_{23} &= C_3 \operatorname{sh} v_2 z \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Подставляя формулы (2.1) в соотношения (1.2), нетрудно заметить, что перемещения  $u_1$  и  $u_2$  являются симметричными, а  $u_3$  – антисимметричным относительно плоскости  $z = 0$ . Напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  симметричны, а  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{23}$  антисимметричны относительно плоскости  $z = 0$ . Решение (2.1) соответствует симметричному виду колебаний. Используя указанные свойства симметрии, достаточно учесть граничные условия только при  $z = h$ . Граничные условия при  $z = h$  согласно (1.2) и (1.6) примут вид:

$$\begin{aligned}
2\partial_1 \partial_3 \varphi + \partial_2 \partial_3 \psi_3 - \partial_1 \partial_2 \psi_1 + \partial_1^2 \psi_2 - \partial_3^2 \psi_2 &= 0 \\
2\mu \left( \partial_3^2 \varphi + \partial_1 \partial_3 \psi_2 - \partial_2 \partial_3 \psi_1 \right) + \lambda \Delta \varphi &= 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\partial_2 \varphi + \partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3 = 0$$

Подставляя (2.1) в граничные условия (2.3) с учетом условия  $\operatorname{div} \vec{\psi} = 0$ , получим систему четырех однородных уравнений относительно  $C_1, C_2, B, D_3$ :

$$\begin{aligned}
ik_2 \operatorname{ch} v_1 h \cdot B + v_2 \operatorname{ch} v_2 h \cdot C_1 - ik_1 \operatorname{ch} v_2 h \cdot D_3 &= 0 \\
2ik_1 v_1 \operatorname{sh} v_1 h \cdot B + k_1 k_2 \operatorname{sh} v_2 h \cdot C_1 - (k_1^2 + v_2^2) \operatorname{sh} v_2 h \cdot C_2 + ik_2 v_2 \operatorname{sh} v_2 h \cdot D_3 &= 0 \\
((\lambda + 2\mu) v_1^2 - \lambda k^2) \operatorname{ch} v_1 h \cdot B - 2ik_2 v_2 \mu \operatorname{ch} v_2 h \cdot C_1 + 2ik_1 v_2 \mu \operatorname{ch} v_2 h \cdot C_2 &= 0 \\
ik_1 \cdot C_1 + ik_2 \cdot C_2 + v_2 \cdot D_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Из условия существования нетривиального решения системы уравнений (2.4) получим характеристическое уравнение:

$$\frac{\operatorname{th} v_1 h}{\operatorname{th} v_2 h} = \frac{(2 - \eta)^2 - \xi^2 \eta (1 - \eta)}{4\sqrt{(1 - \eta\theta)(1 - \eta)}} \tag{2.5}$$

где  $\xi = k_2 / k_1$ .

Рассмотрим предельные случаи. Если длина волны  $l = 2\pi/k$  очень велика по сравнению с толщиной слоя  $2h$ , то величины  $v_1 h$  и  $v_2 h$  будут малы при конечном значении  $c$ . Заменяя в уравнении (2.5) гиперболические тангенсы их аргументами, получим

$$(2 - \eta)^2 - 4(1 - \eta\theta) - \xi^2 \eta (1 - \eta) = 0, \tag{2.6}$$

откуда, кроме  $\eta = 0$  имеем

$$c_\xi = \frac{2c_2}{c_1} \sqrt{\frac{4(c_1^2 - c_2^2) + \xi^2 c_1^2}{4(1 + \xi^2)}} \tag{2.7}$$

В частном случае  $\xi = 0$  ( $k_2 = 0$ , плоская деформация) из (2.7) получаем [1]

$$c = c_N = \frac{2c_2}{c_1} \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \quad (2.8)$$

Из (2.7) видно, что в отличие от плоской деформации волна обладает свойством дисперсии т.е. зависит от  $\xi$ .

В табл.1 приведены значения безразмерного параметра  $\beta = \frac{c^2}{c_N^2} = \frac{4(1-\theta) + \xi^2}{4(1-\theta)(1+\xi^2)}$ ,

определяющие фазовую скорость волны в зависимости от  $\xi$  для фиксированных значений  $\theta$ .

Таблица 1

$\theta = 0 (\nu = 0,5)$											
$\xi$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	5	10	100
$\beta$	1	0,971	0,897	0,802	0,707	0,625	0,4	0,294	0,279	0,257	0,250
$\theta = 1/3 (\nu = 0,25)$											
$\xi$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	5	10	100
$\beta$	1	0,976	0,914	0,835	0,756	0,688	0,5	0,412	0,399	0,381	0,375
$\theta = 1/2 (\nu = 0)$											
$\xi$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	5	10	100
$\beta$	1	0,981	0,931	0,868	0,805	0,75	0,6	0,530	0,519	0,505	0,500

Из табл.1 видно, что с возрастанием  $\xi$  безразмерный параметр фазовой скорости  $\beta$  уменьшается. При уменьшении коэффициента Пуассона ( $\nu$ ) безразмерный параметр фазовой скорости  $\beta$  увеличивается при фиксированных значениях  $\xi$ .

Отметим, что уравнение (2.6) не имеет решения, удовлетворяющего условию  $\eta < 1$ .

Предположим, далее, что длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя  $2h$ . Тогда величины  $\nu_1 h$  и  $\nu_2 h$  очень велики, а отношение гиперболических тангенсов в левой части уравнения (2.5) можно принять равным единице. В этом предельном случае получим

$$(2 - \eta)^2 - 4\sqrt{(1 - \eta\theta)(1 - \eta)} - \xi^2 \eta(1 - \eta) = 0. \quad (2.9)$$

В частном случае  $\xi = 0$  (плоская деформация) уравнение (2.9) совпадает с классическим уравнением Рэлея. Уравнение (2.9) подробно исследовано в работе [4,5].

В общем случае симметричных колебаний фазовую скорость  $c$  требуется определить из уравнения (2.5).

Из уравнения (2.5) делаем вывод, что фазовая скорость  $c$  зависит от  $k_1 h$  и  $\xi$  и поэтому имеет место дисперсия. Из рассмотренных предельных случаев следует, что для первой формы колебаний фазовая скорость лежит в интервале  $[c_{R\xi}, c_\xi]$ . ( $c_{R\xi}$  – значение фазовой скорости поверхностной волны (2.9)).

Перейдем к колебаниям, выраженным формулами (2.2). Подставляя (2.2) в формулы для перемещений (1.2), замечаем, что  $u_1$  и  $u_2$  антисимметричны, а  $u_3$  симметричны относительно плоскости  $z = 0$ . Используя формулы (1.6), убеждаемся, что напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  антисимметричны относительно плоскости  $z = 0$ , а

$\sigma_{13}, \sigma_{23}$  симметричны относительно этой плоскости. Подставляя формулы (2.2) в граничные условия (2.3), получим систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned} ik_2shv_1h \cdot A - ik_1shv_2h \cdot C_3 + v_2shv_2h \cdot D_1 &= 0 \\ 2ik_1v_1chv_1h \cdot A + ik_2v_2chv_2h \cdot C_3 + k_1k_2chv_2h \cdot D_1 - (k_1^2 + v_2^2)chv_2h \cdot D_2 &= 0 \\ ((\lambda + 2\mu)v_1^2 - \lambda k^2)shv_1h \cdot A - 2ik_2v_2\mu shv_2h \cdot D_1 + 2ik_1v_2\mu shv_2h \cdot D_2 &= 0 \\ v_2 \cdot C_3 + ik_1 \cdot D_1 + ik_2 \cdot D_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Приравнивание определителя этой системы нулю дает характеристическое уравнение

$$\frac{thv_1h}{thv_2h} = \frac{4\sqrt{(1-\eta\theta)(1-\eta)}}{(2-\eta)^2 - \xi^2\eta(1-\eta)}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим и здесь предельные случаи. Пусть длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя  $2h$  и  $c < c_2$ . Разлагая гиперболические тангенсы в ряд и сохраняя три члена ряда, после некоторых преобразований и исключая корень  $\eta = 0$ , получим

$$\eta - \frac{4}{3}(kh)^2(1-\theta) - \xi^2(1-\eta) \left( 1 - \frac{(kh)^2}{3}(1-\eta\theta) \right) = 0. \quad (2.12)$$

Учитывая, что  $kh = k_1h\sqrt{1+\xi^2}$ , уравнение (2.12) можно записать в виде

$$\eta - \frac{4}{3}(k_1h)^2(1+\xi^2)(1-\theta) - \xi^2(1-\eta) \left( 1 - \frac{(k_1h)^2}{3}(1+\xi^2)(1-\eta\theta) \right) = 0. \quad (2.13)$$

Из уравнения (2.13) можно определить фазовую скорость волн изгиба. Здесь мы имеем дело с дисперсией волны – фазовая скорость зависит от  $k_1h$  и  $\xi$ . При  $\xi = 0$  из (2.13) получаем  $c^2 = \frac{4}{3}c_2^2(k_1h)^2(1-\theta)$  – значение фазовой скорости волн изгиба в случае плоской деформации [1,6].

В табл.2 приведены безразмерные значения фазовой скорости волн изгиба. При фиксированных  $k_1h$  с возрастанием  $\xi$  безразмерное значение фазовой скорости волн изгиба увеличивается. При  $\xi \rightarrow \infty$  фазовая скорость в слое стремится к  $c_2$ .

Таблица 2

$\theta = \frac{1}{3} (v = 0,25)$						
$\xi = 0$		$\xi = 0,4$	$\xi = 0,8$	$\xi = 1$	$\xi = 4$	$\xi = 10$
$k_1h$	$\eta_1$	$\eta_1$	$\eta_1$	$\eta_1$	$\eta_1$	$\eta_1$
0	0	0,137931	0,390244	0,5	0,941176	0,990099
0,001	0,000001	0,137932	0,390245	0,500001	0,941177	0,9901
0,003	0,000008	0,137939	0,390251	0,500007	0,941183	0,990105
0,005	0,000022	0,137952	0,390263	0,500019	0,941193	0,990116
0,01	0,000089	0,138016	0,390321	0,500075	0,941244	0,990166
0,03	0,0008	0,138692	0,390942	0,500675	0,941785	0,990712
0,05	0,002222	0,140044	0,392184	0,501877	0,942876	0,991868
0,1	0,008889	0,146387	0,398019	0,507525	0,948175	0,998698

При другом предельном случае длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя, имеем, что при  $k_1 h \rightarrow \infty$  и  $c < c_2$  левая часть уравнения (2.11) стремится к единице и уравнение (2.11) сводится к уравнению (2.9).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA., vol. 93, 1917.
3. Ишков П.К. О распространении упругих волн в слое, лежащем на жёстком основании. //Изв. АН СССР. Сер. географическая и геофизическая. 1941. №2.
4. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея. //Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. №4.
5. Knowles J. K. A note on surface waves. Journal of Geophysical Research. 1966, vol. 21, №22.
6. Мелконян А.В., Саркисян С.В. К пространственной задаче распространения упругих волн в пластинке. //Сб. трудов международной школы-конференции молодых ученых. Механика, 2009. Ереван: 2009.

#### **Мелконян Аветик Варданович**

Аспирант кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ  
Адрес: ул. Алека Манукяна 1, ЕГУ, Ереван, Армения  
Тел.: (+37491) 31-50-57, E-mail: [av.mlk@inbox.ru](mailto:av.mlk@inbox.ru)

Поступила в редакцию 27.05. 2010

УДК 539.1

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СОПРЯЖЕНИЮ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ С  
АНАЛИТИЧЕСКИМ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ  
ХАЧИКЯН А.С., СААКЯН А.В., САРГСЯН В.Г.

**Ключевые слова:** численные решения, аналитические решения, сопряжение, кручение

**Keywords:** numerical solution, analytical solution, conjugation, torsion

Խաչիկյան Ա.Ս., Սահակյան Ա.Վ., Սարգսյան Վ.Գ.

Թվային և անալիտիկ լուծումների համակցման մի մոտեցման մասին ոլորման խնդրի օրինակով

Առաջարկվում է առաձգականության տեսության խնդիրների լուծման թվային և անալիտիկ մեթոդների համակցման մի մոտեցում: Դիտարկվող տիրույթի մի քանի ենթատիրույթներում խնդրի լուծումը կառուցվում է անալիտիկ մեթոդներով, իսկ մնացած ենթատիրույթներում՝ թվային մեթոդներով: Ձևավորելով կցման պայմանները ենթատիրույթների հպման սահմաններում ստանում ենք դրված ամբողջ խնդրի որոշիչ հավասարումների համակարգը:

Որպես օրինակ բերված է տարբեր առաձգական բնութագրեր ունեցող և ընդհանուր կողով միացած երկու ուղղանկյուններից բաղկացած ուղղանկյան ոլորման խնդիրը: Այս խնդրի անալիտիկ լուծումը հայտնի է: Կառուցված են թվային և թվային-անալիտիկ լուծումները: Լուծումների արդյունքները լավ են համաձայնվում ճշգրիտ անալիտիկ լուծման հետ:

Khachikyan A.S., Sahakyan A.V., Sargsyan V.G.

On an Approach to Conjugation of Numerical and Analytical Solutions on an example of Torsion Problem

The approach to conjugation of the numerical and analytical solutions of elasticity theory problems is proposed. In several parts of considered region the solution of a problem is constructed by analytical methods, and in the others - by numerical ones. Satisfying the contact conditions on adjacent borders of parts, we come to the system of resolving equations of a problem.

As an example the solution of a problem of torsion of the compound rectangular region is given. The rectangle consists from two rectangles with different elastic characteristics, connected on the common edges. The analytical solution of this problem is known. Numerical and numerically-analytical solutions are constructed. Results of solutions well conforms to the exact analytical solution.

Предлагается подход к сопряжению численного и аналитического решения задач теории упругости. В нескольких подобластях рассматриваемой области решение задачи строится аналитическими методами, а в остальных – численными. Записав условия контакта на смежных границах подобластей, приходим к разрешающей системе уравнений поставленной задачи в целом.

В качестве примера приводится решение задачи кручения прямоугольной области, состоящей из двух прямоугольников, соединенных по общей стороне и имеющих разные упругие характеристики. Аналитическое решение этой задачи известно. Построены численное и численно-аналитическое решения. Результаты решений хорошо согласуются с точным аналитическим решением.

1. Современное состояние вычислительной техники и программного обеспечения позволяет решать много сложных задач. Однако экономичное использование машинного времени актуально всегда. Между тем разбиение больших областей на конечные элементы при методе конечных элементов (МКЭ), или разбиение границы таких областей на граничные элементы при методе граничных элементов (МГЭ) приводит к большому расходу машинного времени. Часто оставляет желать лучшего численное решение задач при наличии в рассматриваемых областях зон концентрации напряжений. Это осознается многими исследователями, которые делают шаги на ее разрешение. В работе [1] авторы стараются решить проблему введением особых сингулярных элементов (МКЭ). В качестве решения для сингулярных элементов принимается линейная комбинация нескольких сингулярных собственных функций от местных решений задачи в сингулярной точке. В работе [2]

автор предлагает совместное решение задачи методом сингулярных интегральных уравнений для бесконечной части области и методом МКЭ для конечной ее части. Существуют и другие аналогичные предложения.

Здесь предлагается подход, позволяющий в задачах для больших, в том числе безграничных, областей и областей, включающих зоны концентрации, совместить аналитическое решение для некоторых подобластей с численным решением для других подобластей.

2. Рассмотрим область, которая имеет достаточно произвольную геометрическую форму (фиг.1). Очевидно, что для такой области применение классических аппаратов аналитического решения затруднительно и эффективное решение задачи можно построить лишь численно.



Фиг. 1

Пусть рассматриваемая область состоит из двух разнородных частей  $B$  и  $C$ . Принципиально такая область позволяет лишь численное решение. Однако для подобласти  $B$  возможно построение аналитического решения. Представим для этой подобласти аналитическое решение, обозначая неизвестные значения напряжений и перемещений на линии контакта подобластей символической записью  $\sigma_b, u_b$ . Представим также численное решение методом МКЭ или МГЭ для подобласти  $C$ , обозначив неизвестные значения напряжений и перемещений записью  $\sigma_c, u_c$ . Написав условия непрерывности решений на

линии контакта подобластей

$$\sigma_b = \sigma_c, \quad u_b = u_c, \quad (1)$$

и присовокупив их к обычному набору уравнений, мы получим полный набор уравнений для решения задачи.

В принципе, разбиение области на подобласти произвольно. Однако для получения непрерывного, удобного для численных расчетов, решения необходимо тщательно выбрать линию раздела подобластей. Во-первых, разделяемая подобласть должна допускать аналитическое решение. Но основное требование, налагаемое на воображаемые линии (или поверхности) контакта, заключается в том, что на линии контакта не должны иметь место условия, нарушающие непрерывность решения. В частности, на поверхности контакта, в особенности на ее краях, не должны быть удовлетворены условия возникновения сингулярностей. Если такие условия имеют место, то такие зоны необходимо выделять в отдельные подобласти.

Например, в представленном на фиг.1 случае, точка  $D$  является концентратором напряжений и в ее окрестности напряжения сколь угодно возрастают, тем самым принуждая к значительному увеличению в этой области числа вычислительных операций. Очевидно, что исключение окрестности точки  $D$ , выделенной на фиг.1 пунктирной линией, из численного расчета, при адекватном учете ее воздействия, приведет к упрощению и стабилизации численного расчета.

Отметим, что условия возникновения сингулярностей в настоящее время достаточно хорошо исследованы [3-7]. Как правило, напряженное состояние в окрестности произвольного концентратора напряжений можно представить в виде произведения определенной функции, описывающей особенность напряжений, и произвольной регулярной функции, определяемой из внешних условий. В частности, в случае, представленном на фиг. 1, напряженное состояние в окрестности точки  $D$  (область  $D$ ) совпадает с напряженным состоянием в вершине составного клина, где напряжения представляются в виде [3,4]:

$$\sigma = r^\lambda f(\theta) \quad (2)$$

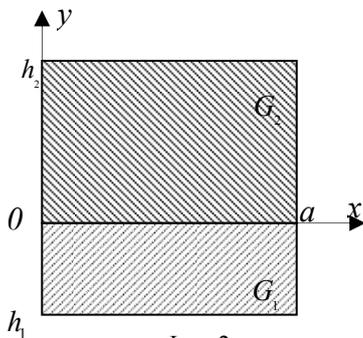
При этом под символом  $\sigma$  понимается соответствующий компонент тензора напряжений, а показатель особенности  $\lambda > -1$  зависит как от упругих характеристик материалов составляющих клиньев, так и от углов их раствора.

На основе местных решений для вершины клина напряженно-деформированное состояние области  $D$  выражается посредством неких произвольных функций  $\varphi_i(\theta)$ , заданных на воображаемой линии раздела области  $D$ , в данном случае – дуге. Число этих функций определяется постановкой задачи: в задачах изгиба и кручения необходима одна функция, в плоской задаче – две функции, а в трехмерной задаче – три функции. В качестве произвольных функций  $\varphi_i(\theta)$  могут выступать значения на линии раздела либо всех компонентов перемещений, либо всех компонентов напряжений, либо частично тех и других, либо неких потенциальных функций. При этом выбор этих функций полностью диктуется методом аналитического решения в этой области и удобством представления через них значений компонентов перемещений и напряжений на линии раздела.

Как следует из вышесказанного, полученная разрешающая система разнородна в том плане, что со стороны численного решения имеем алгебраические уравнения, а со стороны аналитического решения – функциональные. Для эффективного совмещения этих уравнений предлагается введенные в аналитические решения произвольные функции  $\varphi_i(\theta)$  заменить интерполяционными многочленами с неизвестными коэффициентами и получить представления перемещений и напряжений на линии раздела, выраженные посредством конечного числа неизвестных коэффициентов. Требуя далее выполнения условия контакта в определенных точках расчетной схемы численного решения, находящихся на линии контакта, получим замкнутую систему алгебраических уравнений, частью неизвестных которой будут коэффициенты интерполяционных многочленов.

3. Проиллюстрируем сказанное на примере решения задачи кручения неоднородного прямоугольника, аналитическое решение которой известно [8,9].

Пусть имеем прямоугольник, подвергнутый кручению и занимающий область  $\Omega = \{0 \leq x \leq a, -h_1 \leq y \leq h_2\}$  (фиг.2). При этом, модуль сдвига для области  $D_1 = \{0 \leq x \leq a, -h_1 \leq y \leq 0\}$  обозначим через  $G_1$ , а для области  $D_2 = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h_2\}$  – через  $G_2$ .



3.1. Следуя работе [8], в которой получено аналитическое решение задачи кручения нескольких прямоугольников, соединенных поочередно по общей стороне, для области  $D_2$  построим аналитическое решение, полагая, что на линии контакта функция напряжений равна некой, пока неизвестной, функции  $f(x)$ . Отметим, что в этой конкретной задаче концы линии контакта двух прямоугольников не являются источниками концентрации напряжений [4].

В области  $D_2 = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h_2\}$  функция напряжений при кручении  $U(x, y)$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2G_2 \quad (3)$$

при следующих граничных условиях:

$$U(0, y) = 0, \quad U(x, h_2) = 0, \quad U(a, y) = 0, \quad U(x, 0) = f(x). \quad (4)$$

Напряжения равны

$$\tau_{13} = \mathfrak{G} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{23} = -\mathfrak{G} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (5)$$

где  $\mathfrak{G}$  – угол кручения.

Вертикальное перемещение  $w(x, y)$  определяется формулой

$$w(x, y) = \mathfrak{G} \left[ \omega(s) + \int_0^s \frac{\partial U}{\partial n} ds \right] + w(x_0, y_0), \quad (6)$$

где  $w(x_0, y_0)$  – перемещение некой точки  $(x_0, y_0)$  рассматриваемой области,  $s$  – координата по линии, соединяющей точки  $(x, y)$  и  $(x_0, y_0)$ ,  $n$  – нормаль этой линии,  $\omega(s)$  – удвоенная площадь области, ограниченной указанной линией и векторами  $(x, y)$  и  $(x_0, y_0)$ .

После перехода к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{y}{a}, \quad h_2^* = \frac{h_2}{a}, \quad W(\xi, \zeta) = \frac{1}{G_2 a^2} U(x, y), \quad f^*(\xi) = \frac{1}{G_2 a^2} f(x)$$

уравнение (3) и условия (4) примут вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} = -2, \quad (7)$$

$$W(0, \zeta) = 0, \quad W(\xi, h_2^*) = 0, \quad W(1, \zeta) = 0, \quad W(\xi, 0) = f^*(\xi).$$

Нетрудно найти, что решением последнего уравнения, удовлетворяющим первым трем условиям (7), является

$$W(\xi, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\sinh \pi k (h_2^* - \zeta)}{\sinh \pi k h_2^*} B_k + \frac{\sinh \pi k h_2^* - \sinh \pi k \zeta}{\sinh \pi k h_2^*} \frac{4}{\pi^3 k^3} (1 - (-1)^k) \right] \sin \pi k \xi. \quad (8)$$

В случае заданной функции  $f^*(\xi)$  очевидно, что коэффициенты  $B_k$  были бы определены из четвертого условия (7), в то время как в случае неизвестной функции  $f^*(\xi)$  удовлетворение указанному условию привело бы лишь к замене одной бесконечной системы неизвестных коэффициентов другой.

3.2. Решение в смежной прямоугольной области представим методом граничных элементов, следуя работе [10]. Воспользуемся функцией кручения в непрямом методе граничных элементов.

Напряжения и перемещения выражаются формулами

$$u = -\vartheta yz, \quad v = \vartheta xz, \quad w = \vartheta P(x, y), \quad (9)$$

$$\sigma_{13} = \vartheta G_1 \left( \frac{\partial P}{\partial x} - y \right), \quad \sigma_{23} = \vartheta G_1 \left( \frac{\partial P}{\partial y} + x \right). \quad (10)$$

Здесь  $\vartheta$  – угол кручения,  $G_1$  – модуль сдвига материала области  $D_1 = \{0 \leq x \leq a, -h_1 \leq y \leq 0\}$ .

Функция кручения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Сингулярное решение этого уравнения от единичного источника, приложенного в точке  $\xi(\xi, \eta, \zeta)$ , представляется в виде:

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0},$$

где  $r$  есть расстояние между точками  $x(x, y, z)$  и  $\xi(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $r_0$  – произвольная постоянная, не влияющая на решение.

При действии единичного источника для описания напряжений введем в рассмотрение функцию

$$F(x, \xi) = -\frac{(x - \xi)n_1(x) + (y - \eta)n_2(x)}{2\pi r^2},$$

где  $n_i(x)$  – компоненты единичного вектора внешней нормали к линейному элементу.

В случае распределённой по периметру прямоугольника фиктивной нагрузки  $\varphi(\xi)$  будем иметь:

$$P(x) = \int_S G(x, \xi) \varphi(\xi) dS(\xi) + C,$$

$$h(x) = \int_S F(x, \xi) \varphi(\xi) dS(\xi).$$

Условия на свободных сторонах области  $D_1$  имеют вид:

$$h(x) = n_2 x - n_1 y. \quad (11)$$

Подвергнув дискретизации эти выражения, получим

$$P(x_0^p) = \sum_{q=1}^M \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S} G(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + C, \quad (12)$$

$$h(x_0^p) = -(1/2)\varphi(x_0^p) + \sum_{q=1}^M \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S} F(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q). \quad (13)$$

Здесь  $x_0^p$  – координаты центра  $p$ -ого граничного элемента,  $\Delta S$  – длина  $q$ -ого граничного элемента,  $\varphi(x_0^p)$  – значение фиктивной неизвестной нагрузки в середине  $p$ -ого участка, являющееся основной неизвестной метода решения. При выполнении интегрирований в этих формулах учитывается сингулярность функций  $G(x, \xi), F(x, \xi)$ .

3.3. Таким образом, в области  $D_2$  напряжения и перемещения посредством формул (8), (5) и (6) выражаются через последовательность коэффициентов  $B_k$ , а в области  $D_1$  – посредством формул (12), (13), (9) и (10) через  $M$  значений фиктивной нагрузки  $\varphi(x_0^p)$  на каждом граничном элементе. Поскольку условия контакта (1) могут быть удовлетворены лишь в конечном числе  $K$  граничных элементов, расположенных на линии контакта, а также учитывая факт убывания коэффициентов  $B_k$  с возрастанием индекса  $k$ , можно взять в расчет только первые  $K$  членов последовательности  $B_k$ . Тогда, записав условия контакта (1) в  $K$  точках линии контакта и граничные условия на свободных границах области  $D_1$ , получим разрешающую систему из  $M + K$  алгебраических уравнений относительно  $M$  значений фиктивной нагрузки  $\varphi(x_0^p)$  и  $K$  коэффициентов  $B_k$ .

Относительно произвольных постоянных интегрирования, выражающих жесткое смещение области, отметим что они определяются благодаря дополнительным уравнениям равновесия системы. В случае нашей конкретной задачи эти постоянные равны нулю, так как уравнения равновесия заранее удовлетворены.

Исходя из полученных выше представлений, описанный подход к получению системы уравнений, разрешающей задачу в целом, является наиболее очевидным и органически вписывается в схему решения поставленной задачи.

Однако, в данном конкретном случае мы поступим несколько иначе.

Неизвестную функцию  $f^*(\xi)$ , входящую в граничные условия (7), заменим интерполяционным многочленом Лежандра по корням многочлена Чебышева первого рода.

Построим следующий интерполяционный многочлен Лежандра, который в  $N$  узлах совпадает с функцией  $f^*(\xi)$ ,

$$f_N(\xi) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \frac{f^*(s_i) T_N(2\xi - 1)}{(\xi - s_i) U_{N-1}(2s_i - 1)} = \sum_{i=1}^N f^*(s_i) g_i(\xi), \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad (14)$$

где  $T_N(\xi)$  и  $U_N(\xi)$  – многочлены Чебышева первого и второго рода,

$$g_i(\xi) = \frac{1}{N} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} T_k(2\xi - 1) T_k(2s_i - 1) \right],$$

$$s_i = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{(2i-1)\pi}{2N} \right) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Разложим многочлены  $g_i(\xi)$  в тригонометрический ряд по синусам

$$g_i(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^i \sin(\pi m \xi), \quad \text{где} \quad d_m^i = 2 \int_0^1 g_i(\xi) \sin(\pi m \xi) d\xi$$

и перепишем интерполяционный многочлен  $f_N(\xi)$  в виде, удобном для удовлетворения четвертому граничному условию (7),

$$f_N(\xi) = \sum_{i=1}^N f^*(s_i) \sum_{m=1}^{\infty} d_m^i \sin(\pi m \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^N f^*(s_i) d_m^i \right\} \sin(\pi m \xi). \quad (15)$$

Заменяя в граничном условии (7) функцию  $f^*(\xi)$  интерполяционным многочленом  $f_N(\xi)$  в полученном виде и удовлетворяя этому условию, найдем

$$B_k = -\frac{4}{\pi^3 k^3} \left( 1 - (-1)^k \right) + \sum_{i=1}^N d_k^i f(s_i)$$

Следовательно, для функции напряжения будем иметь выражение

$$\begin{aligned} W(\xi, \zeta) = & \sum_{i=1}^N f^*(s_i) \sum_{k=1}^{\infty} d_k^i \frac{\sinh \pi k (h_2^* - \zeta)}{\sinh \pi k h_2^*} \sin \pi k \xi + \\ & + \frac{16}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \pi k \frac{(h_2^* - \zeta)}{2} \sinh \pi k \frac{\zeta}{2} \sin \pi k \xi}{\cosh \pi k \frac{h_2^*}{2} k^3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что бесконечные ряды, входящие в последнее выражение, сходятся и могут быть вычислены независимо от функции  $f^*(\xi)$ .

Таким образом, в представлении функции напряжений при кручении для области  $D_2$  неизвестными остались  $N$  значений функции  $f^*(\xi)$  в узловых точках, которые должны быть определены из условий контакта областей  $D_1$  и  $D_2$ .

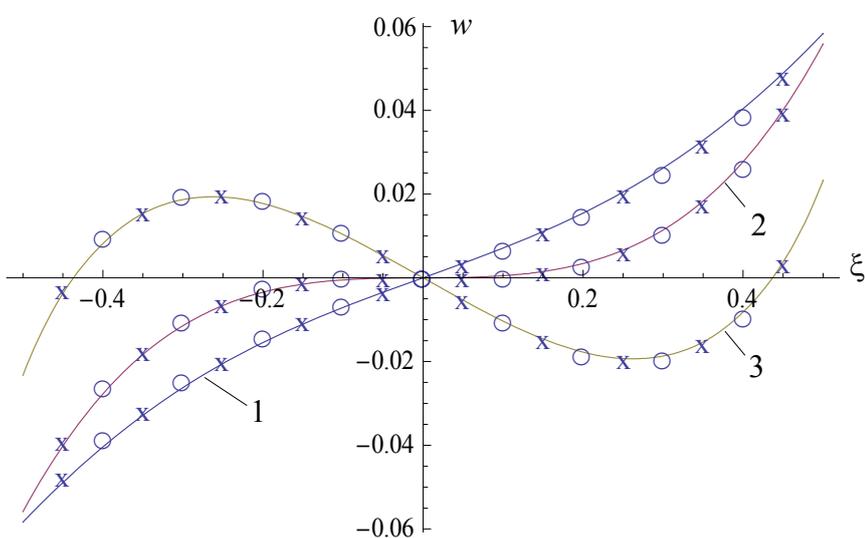
Как было отмечено выше, максимальным числом разрешающей системы алгебраических уравнений является  $M + K$ . Однако, исходя из различия в подходах к приближению неизвестных функций на контактной линии, очевидно, что число  $N$  коэффициентов интерполяционного многочлена может быть существенно ниже числа  $K$  участков разделки контактной линии. То есть, при полном удовлетворении условий контакта во всех расчетных точках контактной линии мы будем иметь переполненную систему уравнений. Возникает вопрос рационального выбора  $K + N$  точек линии контакта и условий, которые будут там удовлетворены.

Разрешающая система была построена обеспечением выполнения условий равенства перемещений во всех  $K$  расчетных точках контактной линии, а условия равенства напряжений – лишь в  $N$  ближайших к концам контактной линии точках. Таким образом, выписав все необходимые для решения задачи условия, получим систему из  $M + N$  алгебраических уравнений.

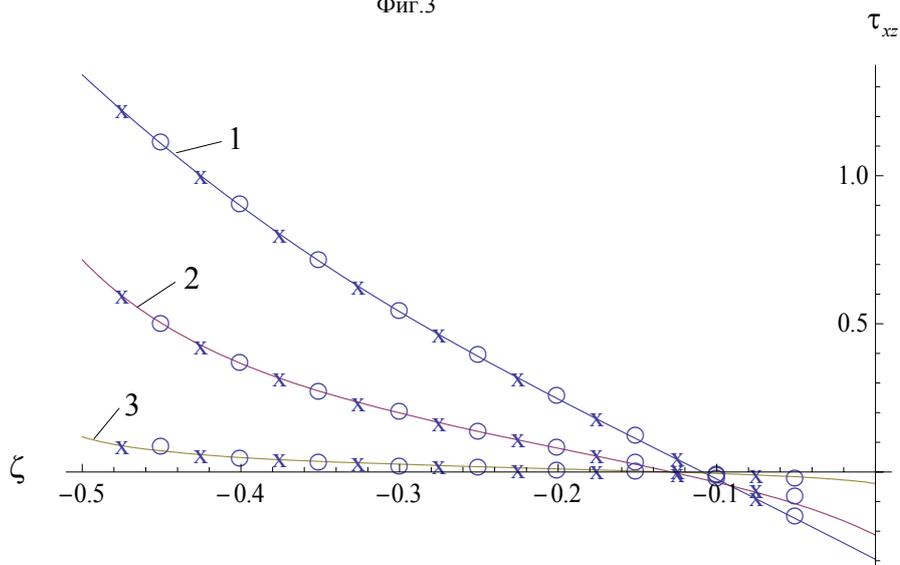
Для проведения сравнительного анализа, согласно [8], было выписано аналитическое решение всей задачи, а также построен алгоритм ее численного решения.

3.4. Вычисления были проведены по всем указанным схемам: на основе аналитического решения, численно и по предлагаемому численно – аналитическому подходу. При этом густота сетки в двух последних схемах выбрана одинаковой – 20 точек на единицу длины, а порядок интерполяции  $N$  для предлагаемой схемы изменялся от 4-ех до 14-ти. Оказалось, что результаты при  $N = 5$  и  $N = 14$  отличаются друг от друга на сотые доли процента.

Некоторые результаты проведенных вычислений показаны на фиг. 3,4. На фиг.3 показаны безразмерные перемещения точек линий  $y = -0.2$  (кривая 1),  $y = -0.35$  (кривая 2) и  $y = -0.49$  (кривая 3). На фиг.4 представлены кривые распределения безразмерных тангенциальных напряжений по площадкам  $x = 0.23$ ,  $x = 0.42$ ,  $x = 0.49$  области  $D_1$ . Сплошные линии представляют результаты аналитического решения, кружочки представляют численное решение, а крестики – численно-аналитическое решение. Вычисления проведены при отношении модулей сдвига прямоугольников  $G_1/G_2 = 5/2$ . Как видно из приведенных графиков, совпадение результатов вычислений достаточно хорошее. Сравнение численных значений перемещений и напряжений в одинаковых точках показало, что результаты численно-аналитического расчета находятся между результатами аналитических и чисто численных расчетов.



Фиг.3



Фиг.4

4. Приведенный пример имеет целью показать основные этапы применения предлагаемой методики. Однако, он не может претендовать на полноту, в основном, из-за большого разнообразия представлений аналитических решений. Выбор примера для иллюстрации продиктован наличием возможности сравнения полученных результатов с имеющимся аналитическим решением общей задачи, а также отсутствием сингулярных точек в области. К последнему случаю авторы намерены обратиться в следующей работе. Тем не менее, авторы надеются, что статья в достаточной мере выявляет суть вопроса и окажется полезной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Борзенков С.М., Матвеев В.П. Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости. //Изв. РАН. МТТ. 1995. №6. С. 48-61.
2. Ladopoulos E.G. Coupling of singular integral equation methods and finite elements in 2-D elasticity. *Forschung im Ingenieurwesen* 69 (2004) 11-16.
3. Williams M.L. Stress Singularities Resulting from various Boundary Conditions in angular corners of plates in extension. *J. of Appl. Mech.*, 19, 1952, p. 526-528.
4. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. НАН РА, 1987. 338 с.
5. Боджи Д. В. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. //Прикладная механика. Тр. Америк. о-ва инж.-механиков. Сер. Е. 1971. Т.38. №2. С.87-96.
6. Sinclair G.B. Logarithmic stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. // *Trans. of the ASME, J. appl. Mech.*, 1999. vol. 66. July, p. 556-560.
7. Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий на поведение напряжений в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. № 3. С.74-81.
8. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 688с.
9. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 720с.
10. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М: Мир, 1984. 494с.

#### Сведения об авторах:

##### **Хачикян Альберт Серобович,**

Кандидат техн. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА

Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>

Е-mail: [albert\\_khachikyan@yahoo.com](mailto:albert_khachikyan@yahoo.com)

##### **Саакян Аветик Вараздатович,**

Кандидат физ.-мат. наук. Зам.директора Института механики НАН РА,

Тел.: (37410) 568188, (37494)579348

Е-mail: [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am), [avsahakyan@gmail.com](mailto:avsahakyan@gmail.com)

##### **Саргсян Вардан Гарегинович,**

Канд. техн. наук, ведущий научн. сотр. Института механики НАН Армении

Адрес: Ереван 0064, ул. А. Бабаджаняна 67, кв. 36; Тел.: (+37410)74-02-89

Поступила в редакцию 02.03.2010

УДК 539.3

**О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ  
НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ  
АГАЛОВЯН Л.А., САРГСЯН М.З.**

**Ключевые слова:** вязкое сопротивление, частота собственных колебаний, симметричная и антисимметричная задачи, сдвиговые колебания, продольные колебания.

**Keywords:** viscous resistance, frequency of free vibrations, symmetric and antisymmetric problems, shear vibrations, longitudinal vibrations.

Աղալովյան Լ.Ա., Սարգսյան Մ.Զ.

**Մածուցիկ դիսպրոպիայի առկայության դեպքում օրթոտրոպ սալերի սեփական տատանումների մասին**

Դիտարկվում է օրթոտրոպ սալերի սեփական տատանումների առաձգականության տեսության եռաչափ խնդիրը մածուցիկ շփման հաշվառմամբ, երբ սալի դիմադրի հարթությունների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ: Ասիմպտոտիկ մեթոդով ցույց է տրված, որ առաջանում են 3 խումբ սեփական տատանումներ– 2 խումբ սահքային, 1 խումբ երկայնական սեփական տատանումներ: Որոշված են սալի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակները, տատանման ձևերը և հաճախությունների գլխավոր արժեքները սեփական տատանումների վերը նշված 3 խմբի համար:

Aghalovyan L.A., Sargsyan M.Z.

**On Free Vibrations of Orthotropic Plates in the Presence of Viscous Resistance**

The three-dimensional problem of elasticity theory of the free vibrations of orthotropic plates in the presence of viscous resistance, on the facial plane of which mixed-boundary conditions of elasticity theory are given is considered. By the asymptotic method it is shown that 3 groups of free vibrations, 2 groups of shearing and 1 group of longitudinal free vibrations are appeared. The stress-deformed states, principal values of frequencies and the forms of natural vibrations of plates relevant to 3 groups of free vibrations are determined.

Рассматривается трехмерная задача теории упругости о собственных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления, на лицевых плоскостях которых заданы смешанные краевые условия теории упругости. Асимптотическим методом показано, что возникают 3 группы собственных колебаний – 2 группы сдвиговых, 1 группа продольных колебаний. Определены напряженно-деформированные состояния, главные значения частот и формы собственных колебаний пластин, соответствующие трем группам собственных колебаний.

**Введение**

Для решения динамических задач теории упругости для тонких тел (пластины, оболочки, балки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений. Этим методом решён ряд класс задач о собственных и вынужденных колебаниях ортотропных балок-полос, пластин и оболочек [1-5].

В работе асимптотическим методом рассмотрены собственные колебания ортотропной пластины, лежащей на жёстком основании, с учётом вязкого сопротивления.

1. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях ортотропной пластины  $D = \{(x, y, z), (x, y) \in D_0, |z| \leq h, h \ll l\}$  (где  $D_0$  – срединная поверхность,  $2h$  – толщина,  $l$  – характерный тангенциальный размер пластины), с учётом вязкого сопротивления [6] при граничных условиях смешанной задачи теории упругости:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = h, \quad w = 0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = -h \quad (1.1)$$

или

$$w = 0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = \pm h \quad (1.2)$$

Условия на боковой поверхности не будем конкретизировать, поскольку они для этих классов задач не влияют на значения частот собственных колебаний. Ими обусловлены собственные колебания в зоне пограничного слоя [5].

Для определения частот собственных колебаний и построения решения внутренней задачи, в уравнениях и соотношениях пространственной задачи теории упругости переходим к безразмерным координатам  $\xi = x/l$ ,  $\eta = y/l$ ,  $\zeta = z/l$  и компонентам вектора перемещения  $U = u/l$ ,  $V = v/l$ ,  $W = w/l$ . В результате получим сингулярно возмущенную геометрическим малым параметром  $\varepsilon = h/l$  систему, решение которой ищем в виде асимптотического представления:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jk}^{(s)} e^{i\omega t}, \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad j, k = 1, 2, 3 \quad s = \overline{0, N},$$

$$(U, V, W) = \varepsilon^s (U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}) e^{i\omega t}, \quad \omega_* = \varepsilon^s \omega_{*s}, \quad (\omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2). \quad (1.3)$$

Подставив (1.3) в преобразованную систему уравнений динамической задачи и применив правило Коши умножения рядов  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , получим

рекуррентную систему:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + (\omega_{*m-n} \omega_{*n} - 2iK \omega_{*m}) U^{(s-m)} = 0, \quad (1, 2, 3; U, V, W),$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_{11}^{(s)} + a_{12} \sigma_{22}^{(s)} + a_{13} \sigma_{33}^{(s)} \quad \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{66} \sigma_{12}^{(s)},$$

$$\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{11}^{(s)} + a_{22} \sigma_{22}^{(s)} + a_{23} \sigma_{33}^{(s)} \quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{55} \sigma_{13}^{(s)}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_{11}^{(s)} + a_{23} \sigma_{22}^{(s)} + a_{33} \sigma_{33}^{(s)} \quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{23}^{(s)},$$

$$2K = k_1 h / \sqrt{\rho}, \quad n = \overline{0, m}, \quad m = \overline{0, s},$$

где  $k_1$  – коэффициент вязкого сопротивления,  $\rho$  – плотность пластины.

Из системы (1.4) все искомые величины можно выразить через  $U^{(s)}$ ,  $V^{(s)}$ ,  $W^{(s)}$  по формулам:

$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \left( \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{11}^{(s)} = -A_{23} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{22} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta},$$

$$\sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left( \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{22}^{(s)} = -A_{13} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad (1.5)$$

$$\sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \left( \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{33}^{(s)} = A_{11} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{23} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta},$$

где

$$A_{11} = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{\Delta}, \quad A_{22} = \frac{a_{22} a_{33} - a_{23}^2}{\Delta}, \quad A_{33} = \frac{a_{11} a_{33} - a_{13}^2}{\Delta}, \quad A_{12} = \frac{a_{12} a_{33} - a_{13} a_{23}}{\Delta},$$

$$A_{13} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{\Delta}, A_{23} = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{\Delta}, \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2.$$

Для определения функций  $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$  из (1.4) получаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\omega_{*m-n} \omega_{*n} - 2iK \omega_{*m}) U^{(s-m)} = R_U^{(s)}, \quad n = \overline{0, m}, \quad m = \overline{0, s}, \quad (1.6)$$

$$(U, V, W; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}).$$

$$R_U^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \zeta \partial \xi} - a_{55} \left( \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad R_V^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \xi} - a_{44} \left( \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) \quad (1.7)$$

$$R_W^{(s)} = \frac{A_{23}}{A_{11}} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \zeta \partial \xi} + \frac{A_{13}}{A_{11}} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{1}{A_{11}} \left( \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right).$$

Для определения значений частот собственных колебаний, рассмотрим уравнения (1.6) сначала при  $s = 0$ :

$$\frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\omega_{*0}^2 - i2K \omega_{*0}) U^{(0)} = 0 \quad (U, V, W; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}). \quad (1.8)$$

Решениями уравнений (1.8) являются:

$$U^{(0)} = C_{1U}^{(0)} \cos \sqrt{a_{55} (\omega_{*0}^2 - i2K \omega_{*0})} \zeta + C_{2U}^{(0)} \sin \sqrt{a_{55} (\omega_{*0}^2 - i2K \omega_{*0})} \zeta \quad (1.9)$$

$$(U, V, W; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}).$$

Используя (1.9), удовлетворив условиям, вытекающим с учётом (1.5) из граничных условий (1.1) или (1.2) относительно  $\sigma_x$

$$\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1, \quad (1.10)$$

получим систему алгебраических уравнений относительно функций  $C_{1U}^{(0)}, C_{2U}^{(0)}$ :

$$\begin{cases} -C_{1U}^{(0)} \sin \gamma_{U0} + C_{2U}^{(0)} \cos \gamma_{U0} = 0, \\ C_{1U}^{(0)} \sin \gamma_{U0} + C_{2U}^{(0)} \cos \gamma_{U0} = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

где  $\gamma_{U0} = \sqrt{a_{55} (\omega_{*0}^2 - i2K \omega_{*0})}$ . Из существования ненулевого решения этой системы имеем:

$$\sin \gamma_{U0} \cos \gamma_{U0} = 0, \quad (1.12)$$

откуда вытекают 2 случая:

$$\sin \gamma_{U0} = 0 \Rightarrow \gamma_{U0} = \pi n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.13)$$

$$\cos \gamma_{U0} = 0 \Rightarrow \gamma_{U0} = \frac{\pi}{2} (2n+1), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.14)$$

При (1.13) имеем симметричную задачу, где для приведенных частот получим следующие значения:

$$\omega_{*0n} = iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a_{55}} - K^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.15)$$

1) В случае  $K > \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}}}$  имеем:

$$\omega_{*0n} = iK \pm i \sqrt{K^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a_{55}}}, \quad n \in N. \quad (1.16)$$

Из (1.3), (1.16) следует, что затухание величин будет происходить без колебания, как

$$\exp \frac{1}{h\sqrt{\rho}} \left( -K - \sqrt{K^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a_{55}}} \right) t \quad \text{или} \quad \exp \frac{1}{h\sqrt{\rho}} \left( -K + \sqrt{K^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a_{55}}} \right) t.$$

2) В случае  $K < \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}}}$  будем иметь:

$$\omega_{*0n} = iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a_{55}} - K^2}, \quad n \in N. \quad (1.17)$$

При этих значениях частот из (1.3) следует, что затухание будет колебательным. Поскольку  $1/a_{55} = G_{13}$  – достаточно большое число, второй вариант на практике будет встречаться часто и в дальнейшем сосредоточим внимание на этом случае. Рассмотрим этот случай более подробно.

Итак, определили некоторый класс значений частот собственных колебаний пластины (обозначим индексом “I”). Учитывая, что  $\omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2$ , имеем

$$\omega_{0n}^I = \frac{1}{h\sqrt{\rho}} \left( iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a_{55}} - K^2} \right), \quad n \in N. \quad (1.18)$$

Из системы (1.11) с учетом (1.13) следует  $C_{2V}^{(0)} = 0$ , следовательно, (1.9) примет вид:

$$U_{nI}^{(0)} = C_{1U}^{(0)}(\xi, \eta) \cos \gamma_{U0} \zeta = C_{1UnI}^{(0)}(\xi, \eta) \cos \pi n \zeta, \quad n \in N. \quad (1.19)$$

Случаю (1.14) (антисимметричная задача, где все величины будем обозначать индексом “II”) соответствуют частоты

$$\omega_{0n}^{II} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}} \left( iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 (2n+1)^2}{4a_{55}} - K^2} \right), \quad n \in N \quad (1.20)$$

и следующие формы собственных колебаний:

$$U_{nII}^{(0)} = C_{2UnII}^{(0)}(\xi, \eta) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} \zeta, \quad n \in N. \quad (1.21)$$

Аналогичным образом, удовлетворив условиям (1.1) или (1.2) относительно  $\sigma_{yz}$ , получим следующие значения частот и формы собственных колебаний:

$$\omega_{0n}^{III} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}} \left( iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a_{44}} - K^2} \right), \quad n \in N \quad (\text{симметричная задача}) \quad (1.22)$$

$$\omega_{0n}^{IV} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}} \left( iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 (2n+1)^2}{4a_{44}} - K^2} \right), \quad n \in N \quad (\text{антисимметричная задача}) \quad (1.23)$$

$$V_{nIII}^{(0)} = C_{1VnIII}^{(0)}(\xi, \eta) \cos \pi n \zeta, \quad n \in N \quad (\text{симметричная задача}) \quad (1.24)$$

$$V_{nIV}^{(0)} = C_{2VnIV}^{(0)}(\xi, \eta) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} \zeta, \quad n \in \mathbb{N} \text{ (антисимметричная задача)} \quad (1.25)$$

Теперь рассмотрим граничные условия (1.1) относительно  $\sigma_z, w$ . Этим условиям соответствуют

$$\frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta} = 0 \text{ при } \zeta = 1; \quad W^{(0)} = 0 \text{ при } \zeta = -1. \quad (1.26)$$

Удовлетворив условиям (1.26), учитывая (1.9), получим систему алгебраических уравнений относительно функций  $C_{1W}^{(0)}, C_{2W}^{(0)}$ :

$$\begin{cases} -C_{1W}^{(0)} \sin \gamma_{W0} + C_{2W}^{(0)} \cos \gamma_{W0} = 0, \\ C_{1W}^{(0)} \cos \gamma_{W0} - C_{2W}^{(0)} \sin \gamma_{W0} = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Из существования ненулевого решения этой системы получим уравнение для определения соответствующих частот собственных колебаний:

$$\cos 2\gamma_{W0} = 0 \Rightarrow \gamma_{W0} = \frac{(2n+1)\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.28)$$

которым будут соответствовать частоты

$$\omega_{0n}^V = \frac{1}{h\sqrt{\rho}} \left( iK \pm \sqrt{A_{11} \frac{\pi^2}{16} (2n+1)^2 - K^2} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.29)$$

Отметим, что при условиях (1.26) симметричная и антисимметричная задачи не разделяются. Из системы (1.27) имеем  $C_{2W}^{(0)} = C_{1W}^{(0)} \operatorname{tg} \gamma_{W0}$ , следовательно, из (1.9) и (1.28) получим следующие формы собственных колебаний:

$$W_{nV}^{(0)} = \bar{C}_{1WnV}^{(0)}(\xi, \eta) \cos \frac{(2n+1)\pi}{4} (1-\zeta), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \bar{C}_{1W}^{(0)} = \frac{C_{1W}^{(0)}}{\cos \gamma_{W0}}. \quad (1.30)$$

Условиям (1.2) относительно  $w$  будут соответствовать условия

$$W^{(0)} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1. \quad (1.31)$$

Удовлетворив условиям (1.31), учитывая (1.9), получим следующие частоты и формы собственных колебаний:

$$\omega_{0n}^{VI} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}} \left( iK \pm \sqrt{A_{11} \pi^2 \frac{(2n+1)^2}{4} - K^2} \right), \quad n \in \mathbb{N} \text{ (антисимметричная задача)} \quad (1.32)$$

$$\omega_{0n}^{VII} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}} \left( iK \pm \sqrt{A_{11} \pi^2 n^2 - K^2} \right), \quad n \in \mathbb{N} \text{ (симметричная задача)} \quad (1.33)$$

$$W_{nVI}^{(0)} = C_{1WnVI}^{(0)}(\xi, \eta) \cos \frac{(2n+1)}{2} \pi \zeta, \quad n \in \mathbb{N} \text{ (антисимметричная задача)} \quad (1.34)$$

$$W_{nVII}^{(0)} = C_{2WnVII}^{(0)}(\xi, \eta) \sin \pi n \zeta, \quad n \in \mathbb{N} \text{ (симметричная задача)} \quad (1.35)$$

Нужно отметить, что все коэффициенты, участвующие в формулах (1.19), (1.21), (1.24), (1.25), (1.30), (1.34), (1.35), для форм собственных колебаний являются функциями от  $\xi, \eta$  и определяются из условий на боковой поверхности.

Значения частот  $\omega_{0n}^I$  и  $\omega_{0n}^{II}$  не будут удовлетворять условиям существования ненулевого решения систем алгебраических уравнений соответствующих  $\sigma_{yz}^{(0)}$ ,  $W^{(0)}$ , и эти системы будут иметь нулевые решения, т.к. их определители будут отличны от нуля, следовательно:

$$V_{nI}^{(0)} = W_{nI}^{(0)} = V_{nII}^{(0)} = W_{nII}^{(0)} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.36)$$

Точно так же при случаях  $\omega_{0n} = \omega_{0n}^{III}, \omega_{0n}^{IV}$  и  $\omega_{0n} = \omega_{0n}^V, \omega_{0n}^{VI}, \omega_{0n}^{VII}$  будем иметь соответственно

$$U_{nIII}^{(0)} = W_{nIII}^{(0)} = U_{nIV}^{(0)} = W_{nIV}^{(0)} = 0, \quad (1.37)$$

$$U_{nV}^{(0)} = V_{nV}^{(0)} = U_{nVI}^{(0)} = V_{nVI}^{(0)} = U_{nVII}^{(0)} = V_{nVII}^{(0)} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.38)$$

И, наконец, для напряжений соответствующим частотам  $\omega_{0n} = \omega_{0n}^I, \omega_{0n}^{II}$  и  $\omega_{0n} = \omega_{0n}^{III}, \omega_{0n}^{IV}$  имеем следующие значения:

$$\sigma_{jknI}^{(0)} = \sigma_{jknII}^{(0)} = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad jk \neq 13, \quad (1.39)$$

$$\sigma_{13nI}^{(0)} = -C_{1UnI}^{(0)} \frac{\pi n}{a_{55}} \sin \pi n \zeta, \quad \sigma_{13nII}^{(0)} = C_{2UnII}^{(0)} \frac{(2n+1)\pi}{2a_{55}} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \zeta, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sigma_{jknIII}^{(0)} = \sigma_{jknIV}^{(0)} = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad jk \neq 23, \quad (1.40)$$

$$\sigma_{23nIII}^{(0)} = -C_{1VnIII}^{(0)} \frac{\pi n}{a_{44}} \sin \pi n \zeta, \quad \sigma_{23nIV}^{(0)} = C_{2VnIV}^{(0)} \frac{(2n+1)\pi}{2a_{44}} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \zeta, \quad n \in \mathbb{N}$$

Напряжения, соответствующие частотам  $\omega_{0n} = \omega_{0n}^V, \omega_{0n}^{VI}$  при (1.1), будут:

$$\sigma_{jkn}^{(0)} = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad j \neq k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.41)$$

$$\sigma_{11nV}^{(0)} = -A_{23} \bar{C}_{1WnV}^{(0)}(\xi, \eta) \frac{(2n+1)\pi}{4} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4} (1-\zeta), \quad (11, 22, 33; A_{23}, A_{13}, -A_{11}),$$

а при (1.2) будем иметь:

$$\sigma_{jknVI}^{(0)} = \sigma_{jknVII}^{(0)} = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad j \neq k, \quad (1.42)$$

$$\sigma_{11nVI}^{(0)} = A_{23} C_{1WnVI}^{(0)} \frac{(2n+1)\pi}{2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} \zeta, \quad (11, 22, 33; A_{23}, A_{13}, -A_{11}),$$

$$\sigma_{11nVII}^{(0)} = -A_{23} C_{2WnVII}^{(0)} \pi n \cos \pi n \zeta, \quad (11, 22, 33; A_{23}, A_{13}, -A_{11}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Итак, мы получили 3 группы собственных колебаний, из которых две группы – сдвиговые колебания с частотами  $\omega_{0n}^I, \omega_{0n}^{II}, \omega_{0n}^{III}, \omega_{0n}^{IV}$  и одна группа – продольные колебания с частотами  $\omega_{0n}^V, \omega_{0n}^{VI}$ .

**2. Об ортогональности форм собственных колебаний.** Можно показать, что каждое из семейств функций  $\{U_{nI}^{(0)}\}, \{U_{nII}^{(0)}\}, \{V_{nIII}^{(0)}\}, \{V_{nIV}^{(0)}\}, \{W_{nV}^{(0)}\}, \{W_{nVI}^{(0)}\}, \{W_{nVII}^{(0)}\}$  составляет ортогональную систему на интервале  $-1 \leq \zeta \leq 1$ , т.е., например,

$$\int_{-1}^1 U_{nI}^{(0)} U_{mI}^{(0)} d\zeta = 0, \quad \text{при } n \neq m \quad (U, V, W), \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Чтобы показать справедливость выполнения (2.1), запишем уравнение (1.8) для функций  $U_{mI}^{(0)}$ :

$$\frac{\partial^2 U_{ml}^{(0)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \left( (\omega_{*0m}^1)^2 - i2K\omega_{*0m}^1 \right) U_{ml}^{(0)} = 0. \quad (2.2)$$

Умножив обе части уравнения (2.2) на  $U_{nl}^{(0)}$  и проинтегрировав по  $\zeta$  на интервале  $[-1, 1]$ , получим:

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 U_{ml}^{(0)}}{\partial \zeta^2} U_{nl}^{(0)} d\zeta + a_{55} \left( (\omega_{*0m}^1)^2 - i2K\omega_{*0m}^1 \right) \int_{-1}^1 U_{nl}^{(0)} U_{ml}^{(0)} d\zeta = 0. \quad (2.3)$$

Проинтегрировав по частям (2.3) и учитывая условия (1.10), будем иметь:

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 U_{ml}^{(0)}}{\partial \zeta^2} U_{nl}^{(0)} d\zeta = \frac{\partial U_{ml}^{(0)}}{\partial \zeta} U_{nl}^{(0)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\partial U_{ml}^{(0)}}{\partial \zeta} \frac{\partial U_{nl}^{(0)}}{\partial \zeta} d\zeta = - \int_{-1}^1 \frac{\partial U_{ml}^{(0)}}{\partial \zeta} \frac{\partial U_{nl}^{(0)}}{\partial \zeta} d\zeta$$

и (2.3) примет вид:

$$- \int_{-1}^1 \frac{\partial U_{ml}^{(0)}}{\partial \zeta} \frac{\partial U_{nl}^{(0)}}{\partial \zeta} d\zeta + a_{55} \left( (\omega_{*0m}^1)^2 - i2K\omega_{*0m}^1 \right) \int_{-1}^1 U_{nl}^{(0)} U_{ml}^{(0)} d\zeta = 0. \quad (2.4)$$

Подобным образом написав уравнение (1.8) для функций  $U_{nl}^{(0)}$ , но на этот раз умножив на  $U_{ml}^{(0)}$ , будем иметь:

$$- \int_{-1}^1 \frac{\partial U_{nl}^{(0)}}{\partial \zeta} \frac{\partial U_{ml}^{(0)}}{\partial \zeta} d\zeta + a_{55} \left( (\omega_{*0m}^1)^2 - i2K\omega_{*0m}^1 \right) \int_{-1}^1 U_{nl}^{(0)} U_{ml}^{(0)} d\zeta = 0. \quad (2.5)$$

Вычитав из (2.4) соотношение (2.5), будем иметь:

$$a_{55} (\omega_{*0n}^1 - \omega_{*0m}^1) (\omega_{*0n}^1 + \omega_{*0m}^1 - i2K) \int_{-1}^1 U_{nl}^{(0)} U_{ml}^{(0)} d\zeta = 0. \quad (2.6)$$

При  $n \neq m$ ,  $\omega_{*0n}^1 \neq \omega_{*0m}^1$  из (2.6) вытекает:

$$\int_{-1}^1 U_{nl}^{(0)} U_{ml}^{(0)} d\zeta = 0. \quad (2.7)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что функции

$$\Psi_{nl} = \frac{U_{nl}^{(0)}}{C_{1U_{nl}}^{(0)}(\eta, \xi)}, \quad \{\Psi_{nl}\} = \{\cos \pi n \zeta\}, \quad n \in \mathbf{N} \quad (2.8)$$

составляют ортонормированное множество на интервале  $-1 \leq \zeta \leq 1$ .

Ортогональность остальных семейств функций и ортонормированность соответствующих  $\Psi_n$  доказывается подобным образом.

**3. О приближениях  $s \geq 1$ .** Рассмотрим уравнения (1.6) при  $s = 1$  и  $\omega_{*0n} = \omega_{*0n}^1$ .

Сперва рассмотрим первое уравнение (1.6):

$$\frac{\partial^2 U_{nl}^{(1)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \omega_{*0n}^1 (\omega_{*0n}^1 - 2iK) U_{nl}^{(1)} + a_{55} \omega_{*1n}^1 (2\omega_{*0n}^1 - 2iK) U_{nl}^{(0)} = R_{U_{nl}}^{(1)} \quad (3.1)$$

Решение (3.1) представим в виде ряда по собственным функциям  $U_{nl}^{(1)}$  нулевого приближения:

$$U_{nl}^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} U_{ml}^{(0)}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.2)$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям (1.1) и (1.2), соответствующим  $\sigma_{xz}$ . Подставив (3.2) в (3.1) и учитывая, что из (2.2) следует

$$\frac{\partial^2 U_{ml}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = -a_{55} \left( (\omega_{*0m}^I)^2 - i2K \omega_{*0m}^I \right) U_{ml}^{(0)}, \text{ получим:}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\omega_{*0n}^I - \omega_{*0m}^I) (\omega_{*0n}^I + \omega_{*0m}^I + i2K) b_{nm} a_{55} U_{ml}^{(0)} = -2a_{55} \omega_{*1n}^I (\omega_{*0n}^I - iK) U_{nl}^{(0)} + R_{U_{nl}}^{(1)} \quad (3.3)$$

Умножив (3.3) на  $U_{kl}^{(0)}$  и проинтегрировав по  $\zeta$  на отрезке  $[-1, 1]$ , учитывая ортогональность функций  $\{U_{nl}^{(0)}\}$ , получим:

$$b_{nk} a_{55} (\omega_{*0n}^I - \omega_{*0k}^I) (\omega_{*0n}^I + \omega_{*0k}^I + i2K) = -2a_{55} \omega_{*1n}^I (\omega_{*0n}^I - iK) C_{U_{nk}l}^{(0)} \delta_{nk} + R_{U_{nk}l}^{(1)} \quad (3.4)$$

где  $\delta_{nk}$  – символ Кронекера, а

$$C_{U_{nk}l}^{(0)} = \frac{C_{1U_{nl}}^{(0)}}{C_{1U_{kl}}^{(0)}}, \quad R_{U_{nk}l}^{(1)} = \frac{1}{\left(C_{1U_{kl}}^{(0)}\right)^2} \int_{-1}^1 R_{U_{nl}}^{(1)} U_{kl}^{(0)} d\zeta, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.5)$$

При  $n = k$  из (3.4) будем иметь:

$$\omega_{*1n}^I = \frac{R_{U_{nn}l}^{(1)}}{2a_{55} (\omega_{*0n}^I - iK)}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (3.6)$$

а при  $n \neq k$ :

$$b_{nk} = \frac{R_{U_{nk}l}^{(1)}}{a_{55} (\omega_{*0n}^I - \omega_{*0k}^I) (\omega_{*0n}^I + \omega_{*0k}^I + i2K)}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.7)$$

Из (1.5), (1.7), (1.36) следует  $R_{U_{nl}}^{(1)} = 0$ , следовательно, из (3.5) и (3.7) имеем:

$$b_{nk} = 0, \quad n \neq k, \quad \omega_{*1n}^I = 0, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.8)$$

Для определения  $b_{nn}$  нормируем  $U_n$ :

$$\frac{1}{\|U_{nl}^{(0)}\|^2} \int_{-1}^1 \left( U_{nl}^{(0)} + \varepsilon U_{nl}^{(1)} \right)^2 d\zeta = 1, \text{ где } \|U_{nl}^{(0)}\|^2 = \int_{-1}^1 \left( U_{nl}^{(0)} \right)^2 d\zeta, \quad (3.9)$$

откуда получим:

$$\int_{-1}^1 U_{nl}^{(0)} U_{nl}^{(1)} d\zeta = 0, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.10)$$

Подставив  $U_{nl}^{(1)}$  в (3.10), используя (3.2), будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_{nk} \int_{-1}^1 U_{nl}^{(0)} U_{kl}^{(0)} d\zeta + b_{nn} \int_{-1}^1 U_{nl}^{(0)} U_{nl}^{(0)} d\zeta = 0.$$

Так как  $n \neq k$ , то из последнего следует  $b_{nn} \int_{-1}^1 U_{nl}^{(0)} U_{nl}^{(0)} d\zeta = 0$ , или

$$b_{nn} = 0, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.11)$$

Итак, при  $\omega_{*0n} = \omega_{*0n}^I$  имеем:

$$U_{nl}^{(1)} = 0, \quad \omega_{*1n}^I = 0, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.12)$$

Теперь рассмотрим приближение  $s = 2$ . Первое уравнение (1.6) при  $s = 2$  имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U_{nl}^{(2)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \omega_{*0n}^I (\omega_{*0n}^I - 2iK) U_{nl}^{(2)} + a_{55} \omega_{*2n}^I (2\omega_{*0n}^I - 2iK) U_{nl}^{(0)} = R_{U_{nl}}^{(2)} \quad (3.13)$$

Решение снова ищем в виде:

$$U_{nl}^{(2)} = \sum_{r=1}^{\infty} c_{nr} U_{rl}^{(0)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Повторив те же действия, получим:

$$\omega_{*2n}^I = \frac{R_{U_{nl}}^{(2)}}{2a_{55} (\omega_{*0n}^I - iK)}, \quad n = k, \quad (3.15)$$

$$c_{nk} = \frac{R_{U_{nk}}^{(2)}}{a_{55} (\omega_{*0n}^I - \omega_{*0k}^I) (\omega_{*0n}^I + \omega_{*0k}^I + i2K)}, \quad n \neq k, \quad (3.16)$$

$$R_{U_{nk}}^{(2)} = \frac{1}{(C_{1U_{kl}}^{(0)})^2} \int_{-1}^1 R_{U_{kl}}^{(2)} U_{kl}^{(0)} d\zeta = \frac{1}{C_{1U_{kl}}^{(0)}} \int_{-1}^1 R_{U_{kl}}^{(2)} \Psi_{kl} d\zeta. \quad (3.17)$$

Для определения  $R_{U_{nl}}^{(2)}$ , учитывая (1.5), (1.7), (1.36), будем иметь:

$$R_{U_{nl}}^{(2)} = (a_{55} A_{23} - 1) \frac{\partial^2 W_{nl}^{(1)}}{\partial \zeta \partial \xi} - a_{55} \left( A_{22} \frac{\partial^2 U_{nl}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a_{66}} \frac{\partial^2 U_{nl}^{(0)}}{\partial \eta^2} \right). \quad (3.18)$$

В соотношении (3.18) неизвестными остаются только функции  $W_{nl}^{(1)}$ , определяющиеся из третьего уравнения (1.6), которое с учетом (1.13) будет:

$$\frac{\partial^2 W_{nl}^{(1)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\pi^2 n^2}{a_{55} A_{11}} W_{nl}^{(1)} = R_{W_{nl}}^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.19)$$

где  $R_{W_{nl}}^{(1)}$  можно определить, используя соотношения (1.5), (1.7), (1.19):

$$R_{W_{nl}}^{(1)} = \frac{1}{A_{11}} \left( A_{23} - \frac{1}{a_{55}} \right) \frac{\partial^2 U_{nl}^{(0)}}{\partial \xi \partial \zeta} = - \left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\xi} \frac{1}{A_{11}} \left( A_{23} - \frac{1}{a_{55}} \right) \pi n \sin \pi n \zeta. \quad (3.20)$$

Решив однородное уравнение (3.19), получим:

$$W_{n0l}^{(1)} = D_{W1}^{(1)} \sin \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55} A_{11}}} \zeta + D_{W2}^{(1)} \cos \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55} A_{11}}} \zeta.$$

Из (3.19), (3.20) получим частное решение уравнения (3.19):

$$W_{n1l}^{(1)} = \left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\xi} \frac{1 - a_{55} A_{23}}{\pi n (1 - a_{55} A_{11})} \sin \pi n \zeta.$$

Итак, для  $W_{nl}^{(1)}$  имеем

$$W_{nl}^{(1)} = D_{W1}^{(1)} \sin \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55} A_{11}}} \zeta + D_{W2}^{(1)} \cos \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55} A_{11}}} \zeta + \left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\xi} \frac{1 - a_{55} A_{23}}{\pi n (1 - a_{55} A_{11})} \sin \pi n \zeta \quad (3.21)$$

Для определения коэффициентов  $D_{W1}^{(1)}, D_{W2}^{(1)}$  удовлетворим условиям, вытекающим из граничных условий (1.1) и (1.2). Этими условиями при (1.1) будут:

$$W_{nl}^{(1)}(\zeta = -1) = 0; \quad \left( A_{11} \frac{\partial W_{nl}^{(1)}}{\partial \zeta} - A_{23} \frac{\partial U_{nl}^{(0)}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\zeta=1} = 0. \quad (3.22)$$

Из (3.22), используя (1.19) и (3.21), получим неоднородную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $D_{w1}^{(1)}, D_{w2}^{(1)}$ , определитель которой не равен нулю, следовательно, эта система будет иметь единственное ненулевое решение:

$$D_{w1}^{(1)} = \frac{\sqrt{a_{55}A_{11}}}{A_{11}\pi n \cos \frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}} (-1)^{n+1} \left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\xi} \frac{A_{11} - A_{23}}{1 - a_{55}A_{11}} \cos \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}, \quad (3.23)$$

$$D_{w2}^{(1)} = \frac{\sqrt{a_{55}A_{11}}}{A_{11}\pi n \cos \frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}} (-1)^{n+1} \left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\xi} \frac{A_{11} - A_{23}}{1 - a_{55}A_{11}} \sin \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}.$$

Из (3.18), учитывая (3.21), (3.23) и (1.19), будем иметь:

$$R_{U_{nl}}^{(2)} = \left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\xi\xi} \frac{a_{55}A_{23} - 1}{(1 - a_{55}A_{11})} (-1)^{n+1} \frac{A_{11} - A_{23}}{A_{11} \cos \frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}} \cos \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}} (1 + \zeta) -$$

$$- \left( \left( a_{55}A_{22} - \frac{(1 - a_{55}A_{23})^2}{(1 - a_{55}A_{11})} \right) \left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\xi\xi} + \frac{a_{55}}{a_{66}} \left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\eta\eta} \right) \cos \pi n \zeta, \quad (3.24)$$

а для определения  $R_{U_{nkl}}^{(2)}$  имеем:

$$R_{U_{nkl}}^{(2)} = \frac{1}{C_{1U_{kl}}^{(0)}} \int_{-1}^1 R_{U_{nl}}^{(2)} \sin \pi k \zeta d\zeta. \quad (3.25)$$

Учитывая (3.24) и (3.25), будем иметь:

$$R_{U_{nkl}}^{(2)} = (-1)^{n+k+2} \frac{2a_{55}k(a_{55}A_{23} - 1)(A_{11} - A_{23})}{\pi(1 - a_{55}A_{11})(n^2 - a_{55}A_{11}k^2)} \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}{\cos \frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}} \frac{\left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\xi\xi}}{C_{1U_{kl}}^{(0)}}. \quad (3.26)$$

В итоге, по формулам (3.15), (3.16), учитывая (3.26), определяются  $\omega_{*2n}^I$  и  $c_{nk}$ :

$$\omega_{*2n}^I = \frac{\left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\xi\xi}}{C_{1U_{nl}}^{(0)}} \frac{(a_{55}A_{23} - 1)(A_{11} - A_{23})}{(1 - a_{55}A_{11})^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}{\pi n \cos \frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

$$c_{nk} = \frac{\left( C_{1U_{nl}}^{(0)} \right)_{\xi\xi} 2k(-1)^{n+k+2} (a_{55}A_{23} - 1)(A_{11} - A_{23}) \sin^2 \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}{C_{1U_{kl}}^{(0)} \pi (\omega_{*0n}^I - \omega_{*0k}^I) (\omega_{*0n}^I + \omega_{*0k}^I + i2K) (1 - a_{55}A_{11}) (n^2 - a_{55}A_{11}k^2) \cos \frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}} \quad (3.28)$$

Для определения  $c_{mn}$  поступим так же, как в случае  $b_{mn}$ , в результате получим:

$$c_{nn} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.29)$$

Итак, мы определили  $U_{nl}^{(2)}$  и  $\omega_{*2n}^1$ , которые отличны от нуля. Следовательно, имеем:

$$\begin{cases} \omega_{*n}^1 = \omega_{*0n}^1 + \varepsilon^2 \omega_{*2n}^1, \\ U_{nl} = U_{nl}^{(0)} + \varepsilon^2 U_{nl}^{(2)}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Аналогичным образом при условиях (1.2) и для остальных случаев найденных частот получаются подобные результаты.

Поскольку  $W_{nl}^{(1)} \neq 0$ , можем заключить, что сдвиговые собственные колебания порождают продольные собственные колебания и наоборот, т.е. при высших приближениях один тип собственных колебаний будет сопровождаться другим типом собственных колебаний. Однако, поскольку  $W_{nl}^{(0)} = 0, W_{nl}^{(1)} \neq 0$  и аналогично для остальных случаев, амплитуда сопутствующего колебания будет на порядок меньше основного.

Из полученных результатов следует, что начальное приближение дает достаточно точные значения для частот и форм собственных колебаний. И поэтому в практических приложениях можно ограничиться этими значениями частот для исходного приближения, которые назовем главными значениями частот.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин.// Изв. ВУЗ-ов РФ, Северо-Кавказский регион. Ест. науки. 2000. №3. С.8-11.
2. Агаловян Л.А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин.// Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: Изд-во "Титутюн" НАН Армении, 2002. С.9-19.
3. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек.// ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.
4. Агаловян Л.А., Азатян Г.Л. Собственные колебания ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления. // Изв.НАН Армении.Механика. 2005. Т.58. №2. С.48-58.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория деформируемых тонкостенных систем. //Труды международной школы-конференции молодых ученых. Механика. Ереван. 2009. с. 5-35.
6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1959. 439с.

#### Сведения об авторах:

**Агаловян Ленсер Абгарович**, академик НАН РА, зав. отделом, советник директора Института механики НАН РА.

**Адрес:** 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>,  
Тел: (+37410) 52-58-35, E-mail: [aghal@mechins.sci.am](mailto:aghal@mechins.sci.am)

**Саргсян Месроп** – аспирант Института механики НАН Армении

Тел.: (093)069950, дом: (0224)22335  
E-mail: [messarg@gmail.com](mailto:messarg@gmail.com)

Поступила в редакцию 12.05.2010

УДК 539.3:534.1

**КОЛЕБАНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ОРТОТРОПНОЙ  
УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ  
СО СВОБОДНЫМ ТОРЦОМ И ТРЕМЯ ЖЁСТКО ЗАЩЕМЛЁННЫМИ  
КРАЯМИ**

**ГУЛГАЗАРЯН Г.Р., ХАЧАНЯН А.А.**

**Ключевые слова:** колебания, безмоментная, классическая, цилиндрическая, непрерывный спектр, характеристики.

**Keywords:** vibrations, unmoment, classical, cylindrical, continuous spectrum, characteristics.

**Ղուղազարյան Գ.Ր., Խաչանյան Ա.Ա.**

**Ազատ ծայրով և մնացած եզրերով կոշտ ամրակցված, փոփոխական կորության բաց անմոմենտ  
օրթոտրոպ առաձգական զլանային թաղանթի տատանումները**

Հետազոտվում է ազատ ծայրով և մնացած եզրերով կոշտ ամրակցված, փոփոխական կորության բաց անմոմենտ օրթոտրոպ առաձգական զլանային թաղանթի սեփական տատանումները: Ենթադրվում է, որ ձնիչներն ուղղահայաց են ծայրերին և ծոման կոշտությունը հավասար է զրոյի (անմոմենտ թաղանթ)։ Մեփական հաճախությունների անչափ բնութագրիչների որոշման համար արտաձված են դիսպերսիոն հավասարումներ: Պարաբոլական տեսքի տարբեր ուղղորդ կորերով և տարբեր երկարություններով զլանային թաղանթների համար կատարված են թվային հաշվարկներ:

**Ghulghazaryan G.R., Khachanyan A.A.**

**Vibrations of an Elastic Orthotropic Unmoment Open Cylindrical Shell with Variable Curvature and Free End, when Other Edges are Rigid-Clamped**

The problem of existence of free vibrations of an elastic orthotropic open cylindrical shell (with arbitrary directional curve) with free end, when other edges are rigid – clamped is studied. The investigation is carried out for elastic orthotropic shell when bending rigidity is vanishingly small (the moment free shell). The dispersion equations for finding the natural frequencies of vibrations are derived. The calculations were carried out for the shells with directing curve in form of a parabola with different values of curvature and lengths.

Исследуются собственные колебания незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки с переменной кривизной, со свободным торцом и тремя жёстко защемлёнными краями. Предполагается, что образующие ортогональны к краям оболочки и её жёсткость на изгиб равна нулю (безмоментная оболочка). Найдены дисперсионные уравнения для нахождения характеристики собственных частот колебаний. Конкретные вычисления выполнены для оболочек с направляющими в виде параболы с различной величиной кривизны и длины образующей.

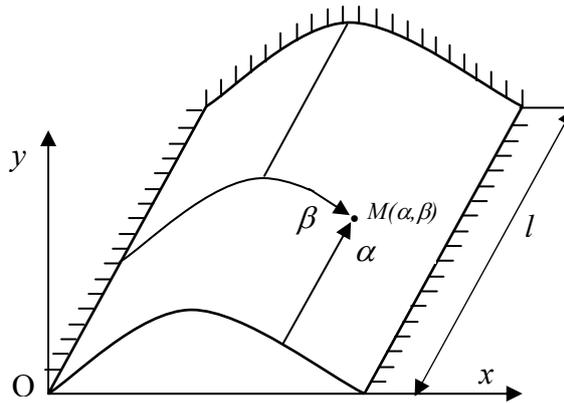
**Введение.** Исследование собственных колебаний оболочек занимает важное место в динамике деформируемого твёрдого тела. Это обусловлено как потребностями самой теории, так и практическими запросами различных отраслей машиностроения, строительства, приборостроения и т.д. Впервые свободные колебания цилиндрической оболочки со свободным торцом исследованы в [1], где понятие волны Рэлея обобщено к волнам, локализованным у свободного края безмоментной полубесконечной круговой замкнутой цилиндрической оболочки. Особый интерес представляют задачи, связанные с цилиндрическими оболочками переменной кривизны. Для решения таких задач применяются различные аналитические и численные методы [2-7]. Для цилиндрических оболочек со свободным краем первые частоты распределены очень густо [8-11]. Поэтому численный расчёт не всегда эффективен. Эти трудности преодолеваются с помощью комбинирования аналитической и асимптотической теорий, а также численными методами. В настоящей работе исследуются собственные колебания безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны, со свободным торцом и тремя жёстко защемлёнными краями. Находятся дисперсионные уравнения и устанавливается асимптотическая связь меж-

ду дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для круговой незамкнутой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки и ортотропной прямоугольной пластинки соответственно. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным торцом, когда образующие жестко защемлены. Задача не допускает разделения переменных. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича–Власова [12-15]. В качестве базисных функций используются следующие функции:

$$w_m(\beta) = 1 - \cos km\beta, \quad k = 2\pi/s, \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (1)$$

В дальнейшем под  $s$  для пластинки подразумевается ширина пластинки, а для цилиндрической оболочки – длина направляющей кривой поверхности. Заметим, что  $w_m(0) = w_m(s) = 0, \quad w'_m(0) = w'_m(s) = 0$ .

**1. Постановка задачи и некоторые математические особенности.** Рассматриваются собственные колебания незамкнутой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями. На поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты



Фиг. 1.

наты  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha (0 \leq \alpha \leq l)$  и  $\beta (0 \leq \beta \leq s)$  являются соответственно текущей длиной образующей и текущей длиной дуги направляющей кривой (фиг. 1).  $l$  – длина цилиндрической оболочки, а  $s$  – длина направляющей кривой. Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой поверхности можно представить в виде  $R^{-2} = k^2(r_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta)$ ,  $k = 2\pi/s, 0 \leq \beta \leq s, \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty$ . (1.1)

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанные в выбранных криволинейных координатах  $\alpha, \beta$  [16]

$$\begin{aligned} -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + B_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_3}{R} \right) &= \lambda u_1, \\ -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_3}{R} \right) &= \lambda u_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$-\frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \lambda u_3.$$

Здесь  $u_1, u_2, u_3$  – проекции вектора смещений, соответственно в направлениях  $\alpha, \beta$  и нормали к поверхности оболочки,  $B_{ik}$  – коэффициенты упругости,  $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$  – кривизна направляющей кривой поверхности.  $\lambda = \omega^2 \rho$ , где  $\omega$  – частота собственных колебаний,  $\rho$  – плотность материала.

Граничные условия имеют вид [16]:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (1.3)$$

$$u_1|_{\alpha=l} = u_2|_{\alpha=l} = 0, \quad (1.4)$$

$$u_1|_{\beta=0,s} = u_2|_{\beta=0,s} = 0, \quad (1.5)$$

где соотношения (1.3) являются условиями свободного края при  $\alpha=0$ , а соотношения (1.4), (1.5) – условиями жесткого заземления при  $\alpha=l, \beta=0, \beta=s$  соответственно. Для пары вектор-функций  $f^{(j)}(\alpha, \beta) = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$ ,  $j=1,2$  введем скалярное произведение по формуле

$$(f^{(1)}, f^{(2)}) = \int_0^l \int_0^s \sum_{j=1}^3 u_j^{(1)} \bar{u}_j^{(2)} d\beta d\alpha. \quad (1.6)$$

Гильбертово пространство вектор-функций со скалярным произведением (1.6) обозначим через  $L_2(G)$ , где  $G = [0, l] \times [0, s]$ . Норму в  $L_2(G)$ , как обычно, вводим по формуле  $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ . Задача (1.2)-(1.5) является самосопряженной и имеет неотрицательный дискретный спектр (ср. с [9], стр. 84, [17]). Соответствующий оператор обозначим через  $L_0^{(ск)}$ . Спектр оператора  $L_0^{(ск)}$  не является чисто дискретным. Оказывается, что при любых самосопряженных граничных условиях операторы, порожденные системой уравнений (1.2), имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком  $[0, \lambda_0]$  – множеством значений функции

$$\Omega(\beta, \theta) = \frac{B_{66}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)R^{-2}(\beta) \sin^4 \theta}{B_{66}(B_{11} \sin^4 \theta + B_{22} \cos^4 \theta) + (B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \quad (1.7)$$

$$0 \leq \beta \leq s, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Отметим, что появление этого участка непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (1.2) по Дуглису – Ниренбергу. Как известно, эллиптичности системы недостаточно для того, чтобы задача Дирихле была корректно поставлена даже в случае однородных систем. Для существования нетривиального решения задачи (1.2)-(1.5) следует дополнительно потребовать выполнение вдоль границы некоторого условия алгебраического характера. Это условие называется условием дополненности (условия Шапиро–Лопатинского) [18]. Отметим, что для задачи (1.2)-(1.5) условие Шапиро–Лопатинского эквивалентно условию (ср. с [8]; [9], с. 97; [11])

$$Q(\lambda, \beta) = B_{66}(\lambda - B_{22}R^{-2}(\beta)) + \sqrt{B_{22}\lambda(B_{11}\lambda - (B_{11}B_{22} - B_{12}^2)R^{-2}(\beta))} \neq 0, \quad (1.8)$$

$$0 \leq \beta \leq s$$

Множество значений  $\lambda$ , при которых нарушается условие (1.8), т.е.  $Q(\lambda, \beta) = 0$ ,  $0 \leq \beta \leq s$ ,

обозначим через  $\Omega_\gamma$ . Вне множества  $[0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$  для оператора  $L_0^{(ck)}$  выполняется условие дополнителности (1.8) [8], [11].

Справедливо следующее утверждение: *вне множества  $[0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$  спектр оператора  $L_0^{(ck)}$  состоит из изолированных собственных значений конечной кратности.*

Это утверждение следует из следующего общего утверждения [8].

**Теорема.** Для того, чтобы точка  $\lambda$  принадлежала непрерывному спектру оператора  $L_0^{(ck)}$ , необходимо и достаточно, чтобы при этом  $\lambda$  нарушалось условие эллиптичности в смысле Дуглиса–Ниренберга краевой задачи (1.2)–(1.5), иначе говоря, нарушалось условие эллиптичности системы (1.2) или условие Шапиро–Лопатинского краевой задачи (1.2)–(1.5).

Заметим, что оператор  $L_0^{(ck)}$  имеет сколь угодно большие положительные собственные значения. Это следует из его неотрицательности и неограниченности.

**2. Вывод и анализ дисперсионного уравнения оператора  $L_0^{(ck)}$ .** Решение системы (1.2), удовлетворяющее условиям (1.5), ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp(k\chi\alpha) \left( \sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin km\beta \right), \quad u_2 = \exp(k\chi\alpha) \left( \sum_{m=1}^{\infty} v_m (1 - \cos km\beta) \right), \\ w &= k \exp(k\chi\alpha) \left( \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin km\beta \right), \quad w = u_3 / R. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $u_m, v_m, w_m$  – неопределенные коэффициенты,  $\chi$  – неопределенный коэффициент затухания. Подставим выражения (2.1) в систему (1.2). Полученные первые два уравнения умножаем на  $\sin km\beta$ ,  $\cos km\beta$  соответственно и интегрируем в пределах от 0 до  $s$ . В итоге получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (B_{11}\chi^2 - B_{66}m^2 + \lambda/k^2)u_m + (B_{12} + B_{66})\chi m v_m = B_{12}\chi w_m, \\ (B_{12} + B_{66})\chi m u_m - (B_{66}\chi^2 - B_{22}m^2 + \lambda/k^2)v_m = B_{22}m w_m, \end{cases} \quad (2.2)$$

откуда получаем соотношения:

$$c_m u_m = \chi a_m w_m, \quad c_m v_m = -m b_m w_m, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{B_{12}}{B_{11}}\chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta^2, \quad \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}}, \\ b_m &= \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}\chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta^2, \\ c_m &= \chi^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}m^2\chi^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}}\eta^2\chi^2 + (m^2 - \eta^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2 \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обе части третьего уравнения системы (1.2) умножим на  $R^{-1}$  и подставим (2.1) в него. Учитывая представление (1.1), соотношения (2.3), правило умножения тригонометрических рядов ([20], стр. 592), затем, умножая обе части полученного уравнения на  $\sin km\beta$  и интегрируя в пределах от 0 до  $s$ , придём к бесконечной системе уравнений:

$$\left( (r_0 - r_{2m})A_m - 2\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta^2 \right) w_m + \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} (r_{|n-m|} - r_{n+m})A_n w_n = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (2.5)$$

$$A_n = p_n/c_n, \quad p_n = c_n + n^2 b_n - B_{12}/B_{22} \chi^2 a_n, \quad n = \overline{1, +\infty}. \quad (2.6)$$

Так как в области определения  $A_n$  имеем  $A_n = O(1/n^2)$ , следовательно,  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$ . Учитывая также представление (1.1), получим

$$\sum_{n, m=1}^{\infty} |A_n| (|r_{n+m}| + |r_{|n-m|}|) \leq 3 \left( |r_0|/2 + \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \right) < +\infty. \quad (2.7)$$

Следовательно, бесконечный определитель системы (2.5) при  $\lambda \notin [0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$  и  $\chi$  в области определения коэффициентов (2.6) относится к известному классу сходящихся определителей – к нормальным определителям [19]. Чтобы система (2.5) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы её определитель равнялся нулю:

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = 0. \quad (2.8)$$

Предположим, что  $\chi_1, \chi_2$  – различные корни уравнения (2.8) с неположительными действительными частями, тогда  $\chi_3 = -\chi_1$  и  $\chi_4 = -\chi_2$  также являются различными корнями уравнения (2.8). Пусть  $(w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \dots, w_m^{(j)}, \dots)$ ,  $j = \overline{1, 4}$  являются нетривиальными решениями системы (2.5) при  $\chi_j, j = \overline{1, 4}$  соответственно. Представим решение задачи (1.2)-(1.5) в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^4 u_i^{(j)}, \quad i = 1, 2, \quad w = \sum_{j=1}^4 w^{(j)}, \quad (2.9)$$

где  $u_i^{(j)}, w^{(j)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 4}$  – решения системы (1.2), имеющие вид (2.1) при  $\chi = \chi_j$ . Подставим (2.9) в граничные условия (1.3), (1.4). В полученные первые уравнения из (1.3) и (1.4) умножаем на  $\sin km\beta$ , а вторые уравнения на  $\cos km\beta$ , затем интегрируя в пределах от 0 до  $s$ , получим совокупность систем уравнений:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_{1j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{\chi_j R_{2j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_m^{(j)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{\chi_j a_m^{(j)}}{c_m^{(j)}} \exp(z_j) w_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{b_m^{(j)}}{c_m^{(j)}} \exp(z_j) w_m^{(j)} = 0$$

$$R_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} m^2 b_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)}, \quad R_{2j}^{(m)} = (a_m^{(j)} + b_m^{(j)}), \quad z_j = k\chi_j l, \quad (2.11)$$

а  $a_m^{(j)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)}$  – значения  $a_m, b_m, c_m$  из (2.4) при  $\chi = \chi_j$  соответственно. Чтобы совокупность систем уравнений (2.10) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$\text{Det} \begin{vmatrix} R_{11}^{(m)} & R_{12}^{(m)} & R_{11}^{(m)} \exp(z_1) & R_{12}^{(m)} \exp(z_2) \\ \chi_1 R_{21}^{(m)} & \chi_1 R_{21}^{(m)} & -\chi_1 R_{21}^{(m)} \exp(z_1) & -\chi_1 R_{21}^{(m)} \exp(z_2) \\ \chi_1 a_m^{(1)} \exp(z_1) & \chi_2 a_m^{(2)} \exp(z_2) & -\chi_1 a_m^{(1)} & -\chi_2 a_m^{(2)} \\ b_m^{(1)} \exp(z_1) & b_m^{(2)} \exp(z_2) & b_m^{(1)} & b_m^{(2)} \end{vmatrix} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.12)$$

вне множества  $[0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$  имела  $\lambda$ -решение. Уравнения (2.12) эквивалентны уравнениям:

$$(x_2 - x_1)^2 K_{2m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) Q_{2m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + 4x_1 x_2 R(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) \exp(z_1 + z_2) - \quad (2.13)$$

$$-(x_1 + x_2)^2 K_{5m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) Q_{5m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, \infty}.$$

$$K_{im}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + (-1)^i \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4, \quad i = 2, 5,$$

$$Q_{im}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \gamma_1 x_1^2 x_2^2 + (-1)^i \gamma_2 x_1 x_2 + \gamma_3 (x_1^2 + x_2^2) + \gamma_4, \quad i = 2, 5,$$

$$R(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \bar{R}_{12}^{(m)} \bar{R}_{22}^{(m)} \bar{a}_m^{(1)} \bar{b}_m^{(1)} + \bar{R}_{11}^{(m)} \bar{R}_{21}^{(m)} \bar{a}_m^{(2)} \bar{b}_m^{(2)},$$

$$\delta_1 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad \eta_m = \frac{\eta}{m},$$

$$\delta_2 = -\eta_m^2 \left( \frac{B_{22} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{22} B_{66} - B_{12} B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^2 \right),$$

$$\delta_3 = \frac{B_{12} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} \eta_m^2 (1 - \eta_m^2), \quad \delta_4 = \frac{B_{12} B_{66} (B_{12} + B_{22})}{B_{11}^3} \eta_m^4 (1 - \eta_m^2),$$

$$\gamma_1 = \frac{B_{12} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66})}{B_{11}^2 B_{66}}, \quad x_j = \frac{\chi_j}{m}, \quad j = 1, 2, \quad (2.14)$$

$$\gamma_2 = - \left( \frac{B_{22} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^2 B_{66}} + \frac{B_{12} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{22} B_{66} - B_{12} B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^2 \right),$$

$$\gamma_3 = - \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11}^2} (1 - \eta_m^2), \quad \gamma_4 = - \frac{B_{22}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right).$$

$$\bar{R}_{1j}^{(m)} = \left( \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 \right) x_j^2 + \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} (1 - \eta_m^2) \eta_m^2,$$

$$\bar{b}_m^{(j)} = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} x_j^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2),$$

$$\bar{R}_{2j}^{(m)} = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} x_j^2 + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2, \quad \bar{a}_m^{(j)} = \frac{B_{12}}{B_{11}} x_j^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2, \quad j = 1, 2.$$

Численный анализ показывает, что левые части равенств (2.13) становятся малыми величинами, когда любые два корня уравнения (2.8) становятся близкими друг к другу. Это усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, множитель  $(x_2 - x_1)^2$ , стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Выполняя элементарные действия над столбцами определителя из (2.12), уравнения (2.12) или (2.13) приводятся к эквивалентному виду

$$K_{2m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) Q_{2m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + \quad (2.15)$$

$$+ 4(m_{11}m_{21}m_{32}m_{42} + m_{12}m_{22}m_{31}m_{41}) \exp(z_1 + z_2) - 4m_{11}m_{21}m_{41}m_{31}[z_1z_2]^2 -$$

$$- 2[m_{11}m_{21}(m_{31}m_{42} + m_{32}m_{41}) + m_{31}m_{41}(m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21})][z_1z_2](\exp(z_2) - \exp(z_1)) -$$

$$- (m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21})(m_{31}m_{42} + m_{32}m_{41})(\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty},$$

$$m_{11} = \overline{R_{11}^{(m)}}, \quad m_{12} = \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 \right) (x_1 + x_2),$$

$$m_{21} = x_1 \overline{R_{21}^{(m)}}, \quad m_{22} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2,$$

$$m_{31} = x_1 \overline{a_m^{(1)}}, \quad m_{32} = \frac{B_{12}}{B_{11}} (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2, \quad (2.16)$$

$$m_{41} = \overline{b_m^{(1)}}, \quad m_{42} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} (x_1 + x_2).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение: *если  $R^{-2}(\beta)$  можно представить в виде (1.1) и  $\lambda \notin [0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ , то уравнения (2.13) и (2.15) являются дисперсионными уравнениями оператора  $L_0^{(ck)}$ , где  $\alpha_2 = mx_2$  и  $\alpha_2 = mx_2$  – различные корни уравнения (2.8) с неположительными действительными частями.*

Заметим, что если  $\chi_1 = mx_1$  и  $\chi_2 = mx_2$  имеют отрицательные действительные части, то при  $ml \rightarrow \infty$  уравнения (2.13) и (2.16) преобразуются к уравнениям:

$$K_{2m}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.17)$$

$$Q_{2m}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \gamma_1 x_1^2 x_2^2 + \gamma_2 x_1 x_2 + \gamma_3 (x_1^2 + x_2^2) + \gamma_4 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.18)$$

Уравнения (2.17) являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом, когда граничные образующие жёстко защемлены (ср. с [11]). Уравнения (2.18) соответствуют тому, что другой торец цилиндрической оболочки жёстко защёмлён.

**3. Частные случаи.** В общем случае решение уравнения (2.8) представляет собой сложную задачу. Поэтому рассмотрим следующие частные случаи.

**Случай а)**  $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$  ( $r_m = 0, m = \overline{1, +\infty}$ ), т.е. имеем безмоментную круговую ортотропную цилиндрическую оболочку открытого профиля со свободным торцом и тремя защёмлёнными краями. В этом случае система (2.5) принимает вид

$$\left( (r_0 - r_{2m}) A_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 \right) w_m = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (3.1)$$

следовательно, уравнение (2.8) распадается на совокупность уравнений

$$r_{mm} = r_0 p_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 c_m = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.2)$$

или уравнений

$$\left( \eta^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2} \right) \chi^4 - \eta^2 \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} m^2 - \frac{(B_{11} + B_{66})}{B_{11}} \eta^2 + \right.$$

$$+\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2+B_{66}B_{22}r_0}{B_{11}B_{66}}\frac{r_0}{2}\chi^2 + \eta^2(m^2-\eta^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2+\frac{B_{22}r_0}{B_{11}2}\right)=0, \quad m=\overline{1,+\infty} \quad (3.3)$$

Пусть  $\lambda \notin [0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$  и  $\chi_1, \chi_2$  являются корнями уравнения (3.3) с неположительными действительными частями. Так как уравнения (3.3) биквадратны, то однозначно определяются выражения  $\chi_1^2 \chi_2^2, \chi_1^2 + \chi_2^2$ . Подставляя эти выражения в (2.13), придём к дисперсионным уравнениям для безмоментной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом и тремя защемлёнными краями.

$$(x_2 - x_1)^2 K_{2m}(\eta_m^2, r_0) Q_{2m}(\eta_m^2, r_0) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) - \\ - 4x_1 x_2 R(\eta_m^2, r_0) \exp(z_1 + z_2) - (x_2 + x_1)^2 K_{5m}(\eta_m^2, r_0) Q_{5m}(\eta_m^2, r_0) \times \\ \times (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, \infty} \quad (3.4)$$

$$K_{im}(\eta_m^2, r_0) = (1 - \eta_m^2) \left[ (1 + \varepsilon_m) \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right] + (-1)^{i-1} x_1 x_2 \left( \eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \varepsilon_m \right), \quad i = 2, 5, \\ Q_{im}(\eta_m^2, r_0) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m \right) + (-1)^i x_1 x_2 \left( \eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \varepsilon_m \right), \quad i = 2, 5; \\ R(\eta_m^2, r_0) = 2(1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m \right) \left[ \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} (1 + \varepsilon_m) - \frac{B_{11} + B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right], \quad \varepsilon_m = \frac{r_0}{2m^2}. \quad (3.5)$$

Заметим, что если  $\chi_1 = mx_1$  и  $\chi_2 = mx_2$  имеют отрицательные действительные части, то при  $l \rightarrow \infty$  уравнения (3.4) преобразуются к уравнениям:

$$K_{2m}(\eta_m^2, r_0) = (1 - \eta_m^2) \left[ (1 + \varepsilon_m) \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right] - x_1 x_2 \left( \eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \varepsilon_m \right) = 0, \quad (3.6)$$

$$Q_{2m}(\eta_m^2, r_0) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m \right) + x_1 x_2 \left( \eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \varepsilon_m \right) = 0, \quad (3.7) \\ m = \overline{1, +\infty}.$$

Уравнения (3.6) являются дисперсионными уравнениями безмоментной ортотропной полубесконечной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими.

Существует асимптотическая связь между уравнениями (3.7) и условием нарушения нормальной разрешимости задачи (1.2)-(1.5) (см. (1.8) и (1.9)).

Действительно, заметим, что уравнения (3.7) эквивалентны уравнениям

$$(1 - \frac{\eta^2}{m^2}) \left( \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 - \frac{B_{22}r_0}{B_{11}2} \right) + \\ + \eta \sqrt{\left(1 - \frac{\eta^2}{m^2}\right) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(1 + \frac{r_0}{2m^2}\right) - \frac{B_{66}}{B_{11}} \frac{\eta^2}{m^2} \right) \left( \eta^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 r_0}{B_{11}B_{66} 2} \right)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.8)$$

При  $m \rightarrow \infty$  уравнения (3.8) преобразуются в уравнение

$$\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 - \frac{B_{22}r_0}{B_{11}2} + \sqrt{\frac{B_{22}}{B_{11}} \eta^2 \left( \eta^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 r_0}{B_{11}B_{66} 2} \right)} = 0, \quad (3.9)$$

которое эквивалентно условию нарушения нормальной разрешимости задачи (1.2) – (1.5) при  $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$ . При  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  уравнения (3.3) преобразуются в уравнения

$$c_m = \chi^4 - \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} m^2 - \frac{(B_{11} + B_{66})}{B_{11}} \eta^2 \right) \chi^2 + (m^2 - \eta^2) \left( \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.10)$$

которые являются характеристическими уравнениями системы, моделирующей планарные колебания прямоугольной пластинки с одним свободным и тремя жестко заземленными сторонами. Уравнения (3.4) в этом случае преобразуются в уравнения

$$(x_2 - x_1)^2 K_{2m}(\eta_m^2) Q_{2m}(\eta_m^2) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) - 4x_1 x_2 R(\eta_m^2) \exp(z_1 + z_2) - (x_2 + x_1)^2 K_{5m}(\eta_m^2) Q_{5m}(\eta_m^2) \times (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, \infty}; \quad (3.11)$$

$$K_{im}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) + (-1)^{i-1} \eta_m^2 x_1 x_2, \quad i = 2, 5,$$

$$Q_{im}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \frac{B_{66}}{B_{11}} + (-1)^i x_1 x_2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad i = 2, 5, \quad (3.12)$$

$$R(\eta_m^2) = 2 \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{11} + B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right).$$

Здесь  $\chi_1 = x_1 m$ ,  $\chi_2 = x_2 m$  – корни уравнения (3.10) с неположительными действительными частями. Уравнения (3.11) являются дисперсионными уравнениями прямоугольной пластинки с одним свободным и тремя жестко заземленными сторонами.

Если  $\chi_1 = mx_1$  и  $\chi_2 = mx_2$  имеют отрицательные действительные части, то при  $l \rightarrow \infty$  уравнения (3.11) распадаются на совокупность уравнений

$$K_{2m}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 x_1 x_2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.13)$$

$$Q_{2m}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \frac{B_{66}}{B_{11}} + x_1 x_2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (3.14)$$

Уравнения (3.13) являются уравнениями Рэлея для полубесконечной ортотропной пластинки–полосы со свободным торцом и жестко заземленными боковыми краями [11].

**Случай б)**  $R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$  ( $r_m = 0$ ,  $m = \overline{2, +\infty}$ ). В этом случае система уравнений (2.5) принимает вид:

$$\{r_1 p_{m-1} \omega_{m-1} + r_{mm} \omega_m + r_1 p_{m+1} \omega_{m+1} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.15)$$

$$\omega_m = w_m / c_m, \quad r_{mm} = r_0 p_m - 2B_{66} \eta^2 c_m / B_{22}, \quad (3.16)$$

где  $p_m, c_m$  определяются формулами (2.6), (3.10). Так как определитель системы (3.15) также относится к нормальному типу, то для нахождения нетривиального решения приравняем к нулю её определитель

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1) = 0, \quad (3.17)$$

$\chi^2$ -решение уравнения (3.17) вычисляется следующим образом. Возьмём усечённый определитель из  $D$  при конечном  $n$  и приравним к нулю:

$$D_n(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1) = 0. \quad (3.18)$$

Найдём  $\chi_n$ -решений алгебраических уравнений (3.18). Точное решение уравнения (3.17) получится из  $\chi_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Раскрывая определитель  $D_m$  по элементам последнего столбца или строки, получим следующую рекуррентную последовательность:

$$\begin{cases} D_1 = r_{11}, & D_2 = r_{22}D_1 - r_1^2 p_1 p_2 \\ D_m = r_{mm}D_{m-1} - r_1^2 p_{m-1} p_m D_{m-2} & m \geq 3 \end{cases} \quad (3.19)$$

Справедливо следующее утверждение [11]: при фиксированном  $m \geq 2$  и при условии  $\lambda \notin [0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$  уравнения (3.17) имеют  $\chi^2$ -формальные решения вида

$$(\chi_j^{(i)})^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_{jm}^{(i)} r_1^4 + \dots, \quad i, j = 1, 2, \quad (3.20)$$

где  $\chi_j^{(m)}$  – корни уравнения  $r_{mm} = 0$  (или уравнения (3.3)) с неположительными действительными частями и

$$\alpha_j^{(m)} = \frac{p_m(p_{m-1}r_{m+1m+1} + p_{m+1}r_{m-1m-1})}{r_{m-1m-1}r_{m+1m+1}r'_{mm}} \Big|_{\chi=\chi_j^{(m)}}, \quad j = 1, 2. \quad (3.21)$$

Здесь  $r'_{mm}$  – производная по  $\chi^2$ . Таким образом, в этом случае для нахождения безразмерных характеристик коэффициентов затухания  $k\chi_j^{(i)}$ ,  $i, j = 1, 2$  можно использовать приближённые формулы

$$\chi_j^{(i)} \approx -\left((\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2\right)^{1/2}, \quad i, j = 1, 2, \quad (3.22)$$

а для нахождения характеристик собственных частот  $\eta/m$ -уравнения (2.13), (2.15).

**Случай в)**  $R^{-2} = k^2 r_1 \cos k\beta$  ( $r_0 = 0, r_m = 0, m = \overline{2, +\infty}$ ).

В этом случае все полученные формулы в данном пункте сохраняются, только всюду надо подставить  $r_0 = 0$  (ср. с [21]). Существенные изменения приобретают  $r_{mm}$  и  $\alpha_j^{(m)}$ ,  $j = 1, 2$  в формулах (3.16), (3.21) соответственно:

$$r_{mm} = -2B_{66} / B_{22} \eta^2 c_m, \quad \alpha_j^{(m)} = \frac{p_m(p_{m-1}c_{m+1} + p_{m+1}c_{m-1})}{4(B_{66} / B_{22} \eta^2)^2 c_{m-1} c_{m+1} c'_m} \Big|_{\chi=\chi_j^{(m)}}, \quad j = 1, 2, \quad m = \overline{0, +\infty}. \quad (3.23)$$

В (3.23)  $\chi_j^{(m)}$ ,  $j = 1, 2$  – корни характеристического уравнения планарного колебания пластинки (3.10) с неположительными действительными частями.

В табл. 1–4, используя дисперсионные уравнения (2.15), (3.4), (3.11), приведены безразмерные характеристики собственных значений  $\eta/m$  и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм в зависимости от  $m, a, b$  для оболочек с направляющими

$$y = ba^{-2}(a^2 - x^2), \quad |x| \leq a; \quad a = 2, b = 1; \quad a = 2, b = 2. \quad (3.24)$$

В качестве коэффициентов затухания, приведены значения следующих величин:  
 $k\chi_0 / m = \max \{k \operatorname{Re} \chi_1 / m, k \operatorname{Re} \chi_2 / m\}$  (3.25)

В табл. 1–4 представлены результаты для вариантов 1,2,3 соответственно при  $R^{-2} = 0$ ;  $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$ ;  $R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$  применительно к ортотропным цилиндрическим оболочкам с направляющими (3.24), изготовленными из стеклопластика с механическими параметрами [22]

$\rho = 2.4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $E_1 = 6.37 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2$ ;  $E_2 = 1.47 \cdot 10^{10}$ ;  $G = 4.9 \cdot 10^6$ ;  $\nu_1 = 0.26$ ;  
 $\nu_2 = 0.06$  (3.26)

и геометрическими параметрами:  $a=2, b=1, l=15, s=4.5912, r_0=0.205, r_1=0.0306$ ;  
 $a=2, b=1, l=5, s=4.5912, r_0=0.205, r_1=0.0306$ ;  $a=2, b=2, l=15, s=5.9158$ ,  
 $r_0=0.8653, r_1=0.3021$ ;  $a=2, b=2, l=5, s=5.9158, r_0=0.8653, r_1=0.3021$ .

Таблица 1

m	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$
1	-0.0650	0.9900				
2	-0.0856	0.9825	-0.0689	0.9850	-0.0689	0.9850
3	-0.0865	0.9822	-0.0733	0.9831	-0.0733	0.9831
4	-0.0866	0.9821	-0.0743	0.9826	-0.0743	0.9826
5	-0.0866	0.9821	-0.0747	0.9824	-0.0747	0.9824
10	-0.0866	0.9821	-0.0752	0.9822	-0.0752	0.9822
20	-0.0866	0.9821	-0.0754	0.9821	-0.0754	0.9821
100	-0.0866	0.9821	-0.0754	0.9821	-0.0754	0.9821

Таблица 2

m	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$
3	-0.0650	0.9900	-0.0373	0.9956	-0.0373	0.9956
4	-0.0797	0.9849	-0.0634	0.9874	-0.0634	0.9874
5	-0.0840	0.9832	-0.0704	0.9844	-0.0704	0.9844
6	-0.0856	0.9826	-0.0731	0.9832	-0.0731	0.9832
7	-0.0862	0.9823	-0.0742	0.9827	-0.0742	0.9827
10	-0.0865	0.9821	-0.0752	0.9822	-0.0752	0.9822
20	-0.0866	0.9821	-0.0754	0.9821	-0.0754	0.9821
100	-0.0866	0.9821	-0.0754	0.9821	-0.0754	0.9821

Таблица 3

m	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$
1	-0.0650	0.9900				
2	-0.0856	0.9825	-0.0349	0.9935	-0.0341	0.9934
3	-0.0865	0.9822	-0.0513	0.9861	-0.0513	0.9862
4	-0.0866	0.9821	-0.0549	0.9842	-0.0548	0.9842
5	-0.0866	0.9821	-0.0562	0.9834	-0.0562	0.9835
10	-0.0866	0.9821	-0.0580	0.9825	-0.0580	0.9825
20	-0.0866	0.9821	-0.0584	0.9822	-0.0584	0.9822
100	-0.0866	0.9821	-0.0585	0.9821	-0.0585	0.9821

Таблица 4

m	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$	$k\chi_0 / m$	$\eta / m$
3	-0.0650	0.9900				
4	-0.0797	0.9849	-0.0278	0.9960	-0.0277	0.9960
5	-0.0840	0.9832	-0.0460	0.9889	-0.0460	0.9890
6	-0.0856	0.9826	-0.0522	0.9858	-0.0522	0.9858
7	-0.0862	0.9823	-0.0550	0.9842	-0.0550	0.9842
10	-0.0865	0.9821	-0.0576	0.9827	-0.0576	0.9827
20	-0.0866	0.9821	-0.0584	0.9822	-0.0584	0.9822
100	-0.0866	0.9821	-0.0585	0.9821	-0.0585	0.9821

**Заключение.** В статье показано, что у свободного торца ортотропной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки, когда остальные края жестко защемлены и квадрат кривизны можно представить в виде (1.1), могут существовать колебания, затухающие от свободного края вдоль её образующих. Частоты собственных колебаний таких ортотропных цилиндрических оболочек определяются совокупностью уравнений (2.13) или (2.15). Для круговой незамкнутой цилиндрической оболочки – (3.4) или (2.15) и пластинки – (3.11) или (2.15). Численный анализ показывает, что у свободного торца незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки существуют бесконечное число затухающих и незатухающих собственных колебаний. Существования у свободного торца, затухающие вдоль образующих колебания, зависят от длины образующей, кривизны направляющей кривой и коэффициентов упругости. При больших  $m$  или при малой кривизне все характеристики собственных колебаний безмоментной цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам планарных колебаний пластинки со свободной стороной, когда остальные стороны жестко защемлены. Более того, при  $ml \rightarrow \infty$  все характеристики стремятся к характеристикам планарных колебаний полубесконечной пластинки–полосы со свободным торцом, когда смежные границы жестко защемлены. С увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки первые частоты увеличиваются, а процесс затухания ослабевает.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке // В. сб.: Волновые задачи механики. Нижний Новгород. 1992. С. 87-91.
2. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. Вычислит. математ. и мат. физика. 1961. Т.1. № 3. С. 542-545.
3. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарёв А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова Думка, 1986. 170 с.
4. Гулгазарян Г.Р. Формула распределения частот цилиндрической оболочки с произвольной направляющей // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 2. С.139-143.
5. Костромин В.П., Мяченков В.И. Колебания незамкнутых цилиндрических оболочек переменной кривизны // Прикл. Механика. 1972. Т.8. Вып.8. С.113–116.
6. Grigorenko Ya.M., Rozhok L. S. Solving the Stress Problem for Hollow Cylinders with Corrugated Elliptical Cross Section// Int. Appl. Mech. 2004, 40, № 2. p. 169-175.
7. Semenyuk N.P., Babich I.Yu., Zhukova N.B. Natural Vibrations of Corrugated cylindrical Shells //Int. Appl. Mech. 2005, 41, № 5. p. 512-519.

8. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И. Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания // Сибирский матем. журнал. 1973. Т.4. № 5. С.978-986.
9. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383с.
10. Асланян А.Г., Лидский В.Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1974. 156с.
11. Гулгазарян, Г.Р. Колебания безмоментной консольной ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны// Изв. РАН. МТТ. 2007. №1. С. 84–99.
12. Власов В.З. Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек // Строительная промышленность. 1932. № 11. С.33-38; № 12. С.21-26.
13. Канторович Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла// Изв. АН СССР. Отд. Мат. и ест. наук. 1933. № 5. С.647-653.
14. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Л.В. Канторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса // Инж. физ. журн. 1982. Т.44. № 6. С. 1007-1013.
15. Беспалова Е.И. К решению стационарных задач теории пологих оболочек обобщенным методом Канторовича–Власова // Прикл. Механика. 2008. Т.44. № 11. С.99-111.
16. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
17. Рисс Ф., Секефальви – Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587с.
18. Солонников В.А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса–Л. Ниренберга //Изв. АН СССР. Математика. 1964. Т. 28. С. 665-706. Труды Матем. ин-та АН СССР, 1970. Т. 110. №6. С.233-297.
19. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 695 с.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: Физматгиз, 1963. 656с.
21. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Колебания ортотропной гофрированной цилиндрической оболочки со свободными краями // Прикл. Механика. 2006. Т.42. № 12. С.97-114.
22. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев. // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С.171-174.

**Сведения об авторах:**

**Гулгазарян Гурген Рубенович** – доктор ф.-м. н., профессор кафедры мат. анализа и теории функций АГПУ им. Х. Абовяна. Тел.: (+37410) 64-91-21; E-mail: [ghulgr@yahoo.com](mailto:ghulgr@yahoo.com)

**Хачанян Алвард Артаваздовна** – соискатель АГПУ им. Х. Абовяна. Тел.: (37410)63-86-83

Поступила в редакцию 27.05.2010

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ  
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
ПЕТРОСЯН Г.А., ХАЧАТРЯН А.М.**

**Ключевые слова:** анизотропная пластинка, смешанные условия, асимптотический метод, внутренняя задача, нелинейная задача.

**Key words:** anisotropic plate, mixed conditions, asymptotic method, interior problem, non-linear problem.

**Պետրոսյան Գ.Ա., Խաչատրյան Ա.Մ.**

**Անիզոտրոպ սալի մի խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը  
առաձգականության ոչ գծային տեսության հիման վրա**

Քննարկվում է անիզոտրոպ սալի մի եռաչափ խնդրի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումների հիման վրա, երբ սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ: Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով լուծված է ներքին խնդիրը: Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ:

**Petrosyan G.A., Khachatryan A.M.**

**Asymptotic Solution of one Mixed Boundary Problem of Anisotropic  
Plate, on the Base of Geometrical Non-Linear Theory of Elasticity**

Consider a question of solution stress-strain state in three dimension problem for an asymptotic plate, on the base of geometrical non-linear equations, in the surface of which are given mixed conditions of theory of elasticity. With appliance of asymptotic method of integration are built solutions of the interior problem. Consider concrete examples.

Обсуждается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в трехмерной задаче для анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейных уравнений, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. С применением асимптотического метода интегрирования решена внутренняя задача. Рассмотрены конкретные примеры.

1. Асимптотическая теория для классических статических краевых задач изотропных пластин и оболочек построена в [1]. Подобные задачи для анизотропных полос, пластин и оболочек решены в [2]. Неклассические задачи теории упругости рассмотрены в [3]. Асимптотическим методом интегрирования построено и напряженно-деформированное состояние пластин с общей анизотропией в [7]. Этим же методом построено решение для анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости в [8]. Первая краевая задача для анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости решена в [9]. Смешанная краевая задача для анизотропной пластинки в линейной постановке решена в [10].

Рассматривается трехмерная задача для анизотропной прямоугольной пластинки по геометрически нелинейной теории упругости:  $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, |z| \leq h, h \ll a, b\}$ , где  $a, b$  – размеры пластинки в плоскости  $Oxy$ , а  $h$  – толщина пластинки. На лицевых плоскостях пластинки заданы следующие смешанные условия теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^-(x, y), \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^-(x, y), w = \left(\frac{h}{l}\right)^3 w^-(x, y) \text{ при } z = -h \\ u &= \left(\frac{h}{l}\right)^3 u^+(x, y), v = \left(\frac{h}{l}\right)^3 v^+(x, y), \sigma_z = \left(\frac{h}{l}\right)^3 \sigma_z^+(x, y) \text{ при } z = h. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Краевые условия на торцах  $x = 0, a$  пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трехмерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости [4-6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{xz} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{yz} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_z \right] = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z + \\ + a_{14} \sigma_{yz} + a_{15} \sigma_{xz} + a_{16} \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = a_{16} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{36} \sigma_z + \\ + a_{46} \sigma_{yz} + a_{56} \sigma_{xz} + a_{66} \sigma_{xy} \end{aligned}$$

Вводя безразмерную координатную систему  $\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h$  и безразмерные перемещения  $U = u/l, V = v/l, W = w/l$ , получим систему, которая содержит малый геометрический параметр  $\varepsilon = h/l$ , где  $l = \max(a, b)$ . Решение этой системы складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде суммы по степеням малого параметра [1-3, 7-10]:

$$Q = \varepsilon^q \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(s)}, \quad (1.3)$$

где  $Q$  – любое из напряжений или безразмерных перемещений.

Значения для  $q$  подбираются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему относительно  $Q^{(s)}$ . Для рассматриваемой задачи эта цель достигается лишь при:

$$q = 3 \text{ для } \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_z, U, V, W, \quad q = 4 \text{ для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz}. \quad (1.4)$$

Эта асимптотика по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости. Однако, здесь, чтобы получить итерационный процесс, асимптотическое представление (1.3) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра. Асимптотике (1.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставляя (1.3) с учетом (1.4) в преобразованные нелинейные уравнения теории упругости и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_1^{*(s)} = 0, \quad (x, y; \xi, \eta; 1, 2), \\
& \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{zy}^{(s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_3^{*(s)} = 0, \\
& \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \xi} + U_\xi^{(s-3)} + V_\xi^{(s-3)} + W_\xi^{(s-3)} = a_{11} \sigma_x^{(s)} + a_{12} \sigma_y^{(s)} + a_{13} \sigma_z^{(s)} + a_{14} \sigma_{yz}^{(s-1)} + \\
& \quad + a_{15} \sigma_{xz}^{(s-1)} + a_{16} \sigma_{xy}^{(s)}, \quad (1, 2; 4, 5; x, y; \xi, \eta; U, V), \\
& \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + U_\zeta^{(s-2)} + V_\zeta^{(s-2)} + W_\zeta^{(s-2)} = a_{13} \sigma_x^{(s-1)} + a_{22} \sigma_y^{(s-1)} + a_{33} \sigma_z^{(s-1)} + a_{34} \sigma_{yz}^{(s-2)} + \\
& \quad + a_{35} \sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{36} \sigma_{xy}^{(s-1)}, \\
& \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + U_{\xi\zeta}^{(s-3)} + V_{\xi\zeta}^{(s-3)} + W_{\xi\zeta}^{(s-3)} = a_{15} \sigma_x^{(s-1)} + a_{25} \sigma_y^{(s-1)} + a_{35} \sigma_z^{(s-1)} + \\
& \quad + a_{45} \sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{55} \sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{56} \sigma_{xy}^{(s-1)}, \quad (1, 2; 4, 5; x, y; \xi, \eta; U, V) \\
& \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(s-3)} + V_{\xi\eta}^{(s-3)} + W_{\xi\eta}^{(s-3)} = a_{16} \sigma_x^{(s)} + a_{26} \sigma_y^{(s)} + a_{36} \sigma_z^{(s)} + \\
& \quad + a_{46} \sigma_{yz}^{(s-1)} + a_{56} \sigma_{xz}^{(s-1)} + a_{66} \sigma_{xy}^{(s)},
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned}
& \sigma_1^{*(s)} = \sigma_{11}^{(s-3)} + \sigma_{12}^{(s-2)}, \quad \sigma_2^{*(s)} = \sigma_{22}^{(s-3)} + \sigma_{21}^{(s-2)}, \quad \sigma_3^{*(s)} = \sigma_{33}^{(s-4)} + \sigma_{32}^{(s-2)}, \\
& \sigma_{11}^{(s)} = \sum_{i=0}^s \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \sigma_x^{(s-i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-i)}}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s-i)}}{\partial \eta} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-i)}}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{zy}^{(s-i)}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \xi^2} \sigma_x^{(s-i)} + \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \eta^2} \sigma_y^{(s-i)} + \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \xi \partial \eta} \sigma_{xy}^{(s-i)} + 2 \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \xi \partial \zeta} \sigma_{xz}^{(s-i)} + 2 \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \eta \partial \zeta} \sigma_{yz}^{(s-i)}, \quad (1, 2, 3; U, V, W) \right. \\
& \sigma_{12}^{(s)} = \sum_{i=0}^s \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \sigma_z^{(s-i)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \zeta^2} \sigma_z^{(s-i)} \right), \quad (1, 2, 3; U, V, W)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$U_\xi^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \xi}, \quad U_{\xi\eta}^{(s)} = \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \eta}, \quad (U, V, W),$$

$$U_\eta^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \eta} \frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \eta}, \quad U_{\zeta\eta}^{(s)} = \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \eta}, \quad (U, V, W),$$

$$U_\zeta^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \zeta}, \quad U_{\xi\zeta}^{(s)} = \sum_{i=0}^s \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \zeta} \quad (U, V, W).$$

Интегрируя полученную систему (1.5) по  $\zeta$ , для напряжений и перемещений получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}\sigma_z^{(s)} &= \sigma_{z0}^{(s)} + \sigma_z^{*(s)}, & U^{(s)} &= u_0^{(s)} + u^{*(s)}, & (U, V, W), \\ \sigma_x^{(s)} &= \tau_{x0}^{(s)} + a_3 \sigma_{z0}^{(s)} + \sigma_x^{*(s)}, & (x, y; a, b), & & \sigma_{xy}^{(s)} = \tau_{xy0}^{(s)} + c_3 \sigma_{z0}^{(s)} + \sigma_{xy}^{*(s)}, \\ \sigma_{xz}^{(s)} &= \tau_{xz1}^{(s)} \zeta + \sigma_{xz0}^{(s)} + \sigma_{xz}^{*(s)}, & (x, y), & & \end{aligned}\quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned}\tau_{x0}^{(s)} &= B_{11} \varepsilon_1^{(s)} + B_{12} \varepsilon_2^{(s)} + B_{16} \omega^{(s)}, & (1, 2; x, y), \\ \tau_{xy0}^{(s)} &= B_{16} \varepsilon_1^{(s)} + B_{26} \varepsilon_2^{(s)} + B_{66} \omega^{(s)}, \\ \tau_{xz1}^{(s)} &= - \left( \frac{\partial \tau_{x0}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy0}^{(s)}}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}}{\partial \xi} + c_3 \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}}{\partial \eta} \right), & (x, y; \xi, \eta; a, b) \\ \varepsilon_1^{(s)} &= \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial \xi}, & \varepsilon_2^{(s)} &= \frac{\partial v_0^{(s)}}{\partial \eta}, & \omega^{(s)} &= \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_0^{(s)}}{\partial \xi}. \end{aligned}\quad (1.8)$$

Коэффициенты  $B_{ij}, a_i, b_i, c_i$  определяются по известным формулам [4, 9, 10].

$\sigma_{xz0}^{(s)}, \sigma_{yz0}^{(s)}, \sigma_{z0}^{(s)}, u_0^{(s)}, v_0^{(s)}, w_0^{(s)}$  – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1).

Величины со звездочками, входящие в уравнения (1.7), как обычно, известны для каждого приближения  $s$ , поскольку выражаются через предыдущие приближения. Сюда же входят члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Эти величины определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_z^{*(s)} &= - \int_0^\zeta \left( \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial \eta} + \sigma_3^{*(s)} \right) d\zeta, \\ u^{*(s)} &= \int_0^\zeta \left( a_{15} \sigma_x^{(s-1)} + a_{25} \sigma_y^{(s-1)} + a_{35} \sigma_z^{(s-1)} + a_{45} \sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{55} \sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{56} \sigma_{xy}^{(s-1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} - U_{\xi\xi}^{(s-3)} - V_{\xi\xi}^{(s-3)} - W_{\xi\xi}^{(s-3)} \right) d\zeta, \\ v^{*(s)} &= \int_0^\zeta \left( a_{14} \sigma_x^{(s-1)} + a_{24} \sigma_y^{(s-1)} + a_{34} \sigma_z^{(s-1)} + a_{44} \sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{45} \sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{46} \sigma_{xy}^{(s-1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} - U_{\eta\xi}^{(s-3)} - V_{\eta\xi}^{(s-3)} - W_{\eta\xi}^{(s-3)} \right) d\zeta, \\ w^{*(s)} &= \int_0^\zeta \left( a_{13} \sigma_x^{(s-1)} + a_{23} \sigma_y^{(s-1)} + a_{33} \sigma_z^{(s-1)} + a_{34} \sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{35} \sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{36} \sigma_{xy}^{(s-1)} - \right. \\ &\quad \left. - U_\zeta^{(s-2)} - V_\zeta^{(s-2)} - W_\zeta^{(s-2)} \right) d\zeta, \\ \sigma_x^{*(s)} &= B_{11} \varepsilon_1^{*(s)} + B_{12} \varepsilon_2^{*(s)} + B_{16} \omega^{*(s)} + a_3 \sigma_z^{*(s)} + a_4 \sigma_{yz}^{(s-1)} + a_5 \sigma_{xz}^{(s-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{*(s)} &= B_{12}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{22}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{26}\omega^{*(s)} + b_3\sigma_z^{*(s)} + b_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + b_5\sigma_{xz}^{(s-1)}, \\
\sigma_{xy}^{*(s)} &= B_{16}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{26}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{66}\omega^{*(s)} + c_3\sigma_z^{*(s)} + c_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + c_5\sigma_{xz}^{(s-1)}, \\
\sigma_{xz}^{*(s)} &= -\int_0^\zeta \left( \frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial \eta} + \sigma_1^{*(s)} \right) d\zeta, \quad (1, 2; x, y; \xi, \eta), \tag{1.9}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \xi} + U_\xi^{(s-3)} + V_\xi^{(s-3)} + W_\xi^{(s-3)}, \quad (1, 2; u, v; \xi, \eta),$$

$$\omega^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(s-3)} + V_{\xi\eta}^{(s-3)} + W_{\xi\eta}^{(s-3)}.$$

Предполагается, что  $Q^{(s-k)} \equiv 0$ , если  $s < k$ .

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{aligned}
u_0^{(s)} &= u^{+(s)} - u^{*(s)}(\xi, \eta, 1), \quad (u, v), \quad w_0^{(s)} = w^{-(s)} - w^{*(s)}(\xi, \eta, -1), \\
\sigma_{z0}^{(s)} &= \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1), \tag{1.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz0}^{(s)} &= \sigma_{xz}^- - L_{11}(B_{ij})u^+ - L_{12}(B_{ij})v^+ - a_3 \frac{\partial \sigma_z^+}{\partial \xi} - c_3 \frac{\partial \sigma_z^+}{\partial \eta} + L_{11}(B_{ij})u^{*(s)}(\xi, \eta, 1) + \\
&\quad + L_{12}(B_{ij})v^{*(s)}(\xi, \eta, 1) + a_3 \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \xi} + c_3 \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \eta} - \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi, \eta, -1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz0}^{(s)} &= \sigma_{yz}^- - L_{12}(B_{ij})u^+ - L_{22}(B_{ij})v^+ - c_3 \frac{\partial \sigma_z^+}{\partial \xi} - b_3 \frac{\partial \sigma_z^+}{\partial \eta} + L_{12}(B_{ij})u^{*(s)}(\xi, \eta, 1) + \\
&\quad + L_{22}(B_{ij})v^{*(s)}(\xi, \eta, 1) + c_3 \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \xi} + b_3 \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \eta} - \sigma_{yz}^{*(s)}(\xi, \eta, -1)
\end{aligned}$$

Здесь  $L_{ij}(B_{ij})$  – известные дифференциальные операторы второго порядка [4].

С учетом (1.12), окончательное решение внутренней задачи представим в виде:

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= u^{+(s)} + u^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta) - u^{*(s)}(\xi, \eta, 1), \quad (U, V), \\
W^{(s)} &= w^{-(s)} + w^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta) - w^{*(s)}(\xi, \eta, -1) \\
\sigma_z^{(s)} &= \sigma_z^+ + \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta) - \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1), \tag{1.11} \\
\sigma_x^{(s)} &= B_{11} \frac{\partial u^{+(s)}}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial v^{+(s)}}{\partial \eta} + B_{16} \left( \frac{\partial u^{+(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}}{\partial \xi} \right) + a_3 \sigma_z^{+(s)} - \\
&\quad - B_{11} \frac{\partial u^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \xi} - B_{12} \frac{\partial v^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \eta} - B_{16} \left( \frac{\partial u^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \eta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial v^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \xi} \right) + \sigma_x^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta) - a_3 \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1), \quad (x, y; \xi, \eta; 1, 2; u, v; a, b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(s)} &= B_{16} \frac{\partial u^{+(s)}}{\partial \xi} + B_{26} \frac{\partial v^{+(s)}}{\partial \eta} + B_{66} \left( \frac{\partial u^{+(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}}{\partial \xi} \right) + c_3 \sigma_z^{+(s)} - \\
&\quad - B_{16} \frac{\partial u^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \xi} - B_{26} \frac{\partial v^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \eta} - B_{66} \left( \frac{\partial u^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \eta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial v^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \xi} \right) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta) - c_3 \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1), \\
\sigma_{xz}^{(s)} &= \sigma_{xz}^{- (s)} + \left[ -L_{11} (B_{ij}) u^{+(s)} - L_{12} (B_{ij}) v^{+(s)} - a_3 \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}}{\partial \xi} - c_3 \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}}{\partial \eta} + \right. \\
&\quad + L_{11} (B_{ij}) u^{*(s)}(\xi, \eta, 1) + L_{12} (B_{ij}) v^{*(s)}(\xi, \eta, 1) + a_3 \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \xi} + \\
&\quad \left. + c_3 \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \eta} \right] (\zeta + 1) + \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta) - \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi, \eta, -1), \\
&\quad (x, y; \xi, \eta; 1, 2; u, v; a, b).
\end{aligned}$$

Решение (1.11) внешне полностью совпадает с решением соответствующей линейной задачи, но здесь величины со звездочками включают в себе и те члены, которые обусловлены нелинейностью данной задачи.

В формулах (1.11) необходимо учитывать, что

$$\begin{aligned}
u^{+(0)} &= u^+, \quad v^{+(0)} = v^+, \quad w^{-(0)} = w^-, \quad \sigma_z^{+(0)} = \sigma_z^+, \quad \sigma_{xz}^{-(0)} = \sigma_{xz}^-, \quad \sigma_{yz}^{-(0)} = \sigma_{yz}^-, \\
u^{+(s)} &= v^{+(s)} = w^{-(s)} = 0, \quad \sigma_z^{+(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} = \sigma_{yz}^{-(s)} = 0 \quad \text{при } s > 0
\end{aligned}$$

**2. Рассмотрим конкретные примеры.**

а) Пусть

$$\sigma_z^+ = -q, \quad u^+ = v^+ = 0, \quad \sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^- = 0, \quad w^- = 0.$$

Используя формулы (1.6), (1.9) и (1.11) и считая все приближения до  $s = 7$  включительно, получим следующее решение:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{h^3}{l^3} a_3 q, \quad \sigma_y = -\frac{h^3}{l^3} b_3 q, \quad \sigma_{xy} = -\frac{h^3}{l^3} c_3 q, \\
\sigma_{xz} &= 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_z = -\frac{h^3}{l^3} q, \\
u &= \frac{h^3}{l^3} k_{35} (h - z) q, \quad v = \frac{h^3}{l^3} k_{34} (h - z) q, \\
w &= -\frac{h^3}{l^3} k_{33} (z + h) q - \left[ \frac{h^6 q^2}{2l^6} (k_{33}^2 + k_{34}^2 + k_{35}^2) + \frac{h^9 q^3}{2l^9} k_{33} (k_{33}^2 + k_{34}^2 + k_{35}^2) \right] (z + h)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $k_{ij} = a_i a_{1j} + b_i a_{2j} + c_i a_{j6} + a_{ij}$ ,  $(i, j = 3, 4, 5)$ .

Нелинейность задачи проявляется с приближения  $s = 4$ . Поправки, обусловленные нелинейностью, взяты в квадратные скобки. Были учтены первые две отличные от нуля поправки.

По сравнению с той же задачей в линейной постановке [10], претерпела изменение только формула для перемещения  $w$ .

б) Рассмотрим другой пример. Пусть

$$\sigma_z^+ = px + qy, \quad u^+ = v^+ = 0, \quad \sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^- = 0, \quad w^- = 0.$$

Вычисляя приближения до  $s = 4$  для напряжений и до  $s = 5$  для перемещений, получим следующие формулы для неизвестных величин:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{h^3}{l^3} a_3 (px + qy) + \frac{h^3}{l^3} (B_{11}k_{35}p + B_{12}k_{34}q + B_{16}(k_{34}p + k_{35}q))(z-h) + \\ &+ \left[ -\frac{h^6}{l^6} a_3 c_0 (px + qy) + \dots \right] (z-h), \\ \sigma_{xy} &= \frac{h^3}{l^3} c_3 (px + qy) + \frac{h^3}{l^3} (B_{16}k_{35}p + B_{26}k_{34}q + B_{66}(k_{34}p + k_{35}q))(z-h) + \\ &+ \left[ -\frac{h^6}{l^6} c_3 c_0 (px + qy) + \dots \right] (z-h), \\ \sigma_{xz} &= \left[ \frac{h^6}{2l^6} c_0 (a_3 p + c_3 q)(z-3h) - \frac{h^6}{2l^6} k_{35} (a_3 p^2 + 2c_3 pq + b_3 q^2)(z-3h) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^7}{l^7} a_0 (px + qy) + \dots \right] (z+h), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sigma_z = \left[ \frac{h^3}{l^3} (px + qy) - \frac{h^6}{l^6} c_0 (px + qy) + \dots \right] (z-h),$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{h^3}{l^3} k_{35} (px + qy)(z-h) + \frac{h^3}{2l^3} a_0 (z-h)^2 + \\ &+ \left[ -\frac{h^6}{2l^6} k_{35} c_0 (z-h)(px + qy) + \frac{2h^7}{l^7} p (k_{34}^2 + k_{35}^2)(px + qy) + \dots \right] (z-h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{h^3}{l^3} k_{33} (px + qy)(z+h) + \frac{h^3}{2l^3} c_0 (z-3h)(z+h) + \\ &+ \left[ -\frac{h^6}{2l^6} (k_{33}^2 + k_{34}^2 + k_{35}^2)(px + qy)^2 + \dots \right] (z+h), \end{aligned}$$

$$\text{где } a_0 = a_5 k_{35} p + b_5 k_{34} q + c_5 (k_{34} p + k_{35} q) - k_{33} p,$$

$$c_0 = a_3 k_{35} p + b_3 k_{34} q + c_3 (k_{34} p + k_{35} q).$$

Напряжения  $\sigma_y$  и  $\sigma_{yz}$  и перемещение  $v$  имеют аналогичный вид.

Здесь, также поправки, обусловленные нелинейностью задачи, взяты в квадратные скобки.

Полученные формулы и рассмотренные примеры показывают, что учёт нелинейности будет существенным для толстых пластин при сильной анизотропии и большой изменяемости внешних нагрузок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких оболочек. М.: 1976. 510с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во “Гитутюн” НАН РА, 2005. 468с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с.
5. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948.
6. Черных К.Ф., Литвененкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988.
7. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией // В сб.: ”XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин”. Тезисы докладов. М.: 1977.
8. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости // Изв. Северо-Кавказского центра высшей школы. Сер. естест. наук. Спецвыпуск. 2001. С.16-18.
9. Хачатрян А.М., Товмасын А.Б. Первая краевая задача для анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости. //Ученые записки АрГУ. 2007. №1(14). С.30-35.
10. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.65-72.

### Сведения об авторах:

#### **Хачатрян Александр Мовсесович**

Доктор физ-мат наук, профессор, зав. кафедрой математики АрГУ

**Адрес:** НКР, г. Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5

Тел.: (37497)20-19-49

Е-mail: [alexkhach49@yandex.ru](mailto:alexkhach49@yandex.ru)

#### **Петросян Гаянэ Альбертовна**

Ассистент кафедры математики АрГУ

**Адрес:** НКР, г. Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5

Тел.: (37497)23-83-10

Е-mail: [gayan-petrosian@rambler.ru](mailto:gayan-petrosian@rambler.ru)

Поступила в редакцию 11.05.2010

**ОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ  
УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН \*)  
САРКИСЯН С.О.**

**Ключевые слова:** микрополярный, упругий, пластинка, тонкая, модели  
**Key words:** micropolar, elastic, plate, thin, models

**Մարգարյան Ս.Ն.**

**Միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի մաթեմատիկական մոդելները**

Աշխատանքում ձևակերպվում են ընդունելություններ (վարկածներ), որոնք ունեն ասիմպտոտիկ հիմնավորում, և նրանց հիման վրա, կախված ֆիզիկական անչափ պարամետրերի ընդունած արժեքներից, կառուցված են միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի ընդհանուր կիրառական-երկչափ՝ ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով և «փոքր սահքային կոշտության» մոդելները: Միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի այս կառուցված ընդհանուր տեսություններում լիարժեքորեն հաշվի են առնված ընդլայնական սահքային և նմանատիպ ծազումով մյուս բոլոր դեֆորմացիաները:

**Sargsyan S.H.**

**General Mathematical Models of Micropolar Thin Elastic Plates**

In the present paper there are first formulated assumptions (hypotheses) which have asymptotical confirmation and afterwards, based on the hypotheses, depending on the values of sizeless physical constants, there are constructed the general applied two-dimensional models of micropolar thin elastic plates with independent rotation; constraint rotation and with "small shift rigidity". In all these models the transverse shift and other related deformations are completely taken into account.

В данной работе формулируются предположения (гипотезы), имеющие асимптотическое подтверждение, и на их основе, в зависимости от значений физических безразмерных параметров построены общие прикладные-двумерные модели микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью». В построенных общих теориях микрополярных упругих тонких пластин полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

**Введение.** В связи с задачами микро- и нанотехнологии актуально построение моделей микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок. Современный обзор исследований в этой области приведены в работах [1,2].

Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких оболочек, пластин (балок) заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной задачи микрополярной теории упругости к некоторой двумерной (одномерной) краевой задаче. Для достижения этой цели уместно использование качественной стороны результата асимптотического метода интегрирования граничной задачи микрополярной теории упругости в тонких областях [3-7].

В данной работе, применяя результат асимптотического анализа краевой задачи трехмерной микрополярной теории упругости в тонкой области пластинки [3], формулируются предположения (гипотезы) и на их основе, в зависимости от

\*)Работа доложена на 16 th US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics. June 27-July 2, 2010, State College, Pennsylvania, USA.

значений физических безразмерных параметров, построены общие прикладные-двумерные теории микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений; со стесненным вращением; “с малой сдвиговой жесткостью”, при которых полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

### Постановка задачи

Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины  $2h$  как трехмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений (в декартовых координатах) пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [8-10]:

уравнения равновесия

$$\sigma_{mn,n} = 0, \quad \mu_{mn,n} + y_{nmk} \sigma_{mk} = 0 \quad (1)$$

физические соотношения

$$\sigma_{mn} = (\mu + \alpha) \cdot \gamma_{mn} + (\mu - \alpha) \cdot \gamma_{nm} + \lambda \cdot \gamma_{kk} \cdot \delta_{nm}, \quad (2)$$

$$\mu_{mn} = (\gamma + \varepsilon) \cdot \chi_{mn} + (\gamma - \varepsilon) \cdot \chi_{nm} + \beta \cdot \chi_{kk} \cdot \delta_{nm},$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{nm} = V_{m,n} - y_{kmm} \cdot \omega_k, \quad \chi_{nm} = \omega_{m,n}. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_{nm}, \mu_{nm}$  – компоненты несимметричных тензоров силового и моментного напряжений;  $\gamma_{nm}, \chi_{nm}$  – компоненты несимметричных тензоров деформаций и изгиба-кручений;  $V_n, \omega_n$  – компоненты векторов перемещения и независимого поворота;  $-h \leq x_3 \leq h$ ;  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  – упругие постоянные микрополярного материала; индекс  $n$  после запятой означает дифференцирование по координате  $x_n$ ;  $y_{kmm}$  – тензор Леви-Чивиты;  $\delta_{nm}$  – символы Кронекера; индексы  $n, m, k$  принимают значения 1,2,3.

Следует констатировать, что основной физической постоянной, придерживающей уравнения (1)-(3) на уровне микрополярной теории упругости, является физическая постоянная  $\alpha$  (при  $\alpha = 0$  из этой системы будут отделяться уравнения классической теории упругости).

Рассмотрим задачу изгиба микрополярных пластин (т.е. антисимметричную по  $x_3$  задачу).

Для граничных условий на лицевых плоскостях пластинки  $x_3 = \pm h$  будем считать заданными силовые и моментные напряжения:

$$\sigma_{3i} = p_i/2, \quad \sigma_{33} = \pm p_3/2, \quad \mu_{3i} = \pm m_i/2, \quad \mu_{33} = m_3/2 \quad (i=1,2) \quad (4)$$

Граничные условия на боковой поверхности пластинки  $\Sigma$ , в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек, записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Предположим, что толщина пластинки  $2h$  мала по сравнению с длиной волны деформации  $a$  в плане. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкой пластинки состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю область трехмерной пластинки и пограничных слоев, локализирующихся вблизи боковой поверхности

$\Sigma$ . Построение общей двумерной модели микрополярных упругих тонких пластин тесно связано с построением внутренней задачи. Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, построим модель микрополярной упругой пластинки на основе метода гипотез. Сами гипотезы сформулируем на основе результата асимптотического анализа поставленной трехмерной краевой задачи в тонкой пространственной области пластинки [3].

При определении внутреннего НДС (так и краевого НДС) большую роль играют значения физических констант материала пластинки, с этой точки зрения вводим следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{\mu}{\alpha}, \quad \frac{a^2\mu}{\beta}, \quad \frac{a^2\mu}{\gamma}, \quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \quad (5)$$

(уже отмеченный геометрический размер  $a$  здесь играет роль масштабного фактора).

### Модель микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений

Рассмотрим случай, когда безразмерные физические параметры пластинки (5) принимают значения:

$$\frac{\mu}{\alpha} \sim 1 \text{ (т.е. } \alpha \sim \mu), \quad \frac{a^2\mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \quad (6)$$

Качественные результаты [3] исходного приближения асимптотического метода интегрирования поставленной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3) позволяют в основу построения прикладной-двумерной модели микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений сформулировать следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

а) нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости пластинки, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной срединной плоскости, свободно вращается под некоторым углом, не изменяя при этом своей длины; вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений и свободных вращений:

$$V_i = x_3 \psi_i(x_1, x_2), \quad V_3 = w(x_1, x_2), \\ \omega_i = \Omega_i(x_1, x_2), \quad \omega_3 = x_3 \iota(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

где  $\psi_i$  – полные углы поворота, а  $\Omega_i$  – некоторые свободные повороты первоначально нормального элемента вокруг осей  $x_i$ ;  $w$  – перемещение точек срединной плоскости в направлении  $x_3$ ;  $\iota$  – интенсивность свободного поворота  $\omega_3$  вдоль оси  $x_3$ .

Кинематические гипотезы (7) относительно перемещений, это по сути дела, представляют собой известные гипотезы Тимошенко в классической теории упругих пластин [11]. Кинематические гипотезы (7) в целом можем трактовать как обобщенные гипотезы Тимошенко в микрополярной теории пластин;

б) силовым напряжением  $\sigma_{33}$  в обобщенном законе Гука (2) можем пренебречь относительно силовых напряжений  $\sigma_{ii}$ ;

в) для определения деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, для силового напряжения  $\sigma_{3i}$  и моментного напряжения  $\mu_{33}$  сначала примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(x_1, x_2), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

после определения указанных величин, окончательно, значения  $\sigma_{3i}$  и  $\mu_{33}$  определим соответственно, как сумму значения (8) и результата интегрирования либо первых двух уравнений из (1), либо шестого из (1) уравнения равновесия, для которых потребуем условия, чтобы усредненные по толщине пластинки величины были равны нулю.

Отметим, что силовая часть перечисленных гипотез (имеем в виду гипотезу в)) отличается от соответствующей гипотезы теории Тимошенко в классическом случае [11]. Забегая вперед, отметим, что двумерная теория, построенная на основе гипотез а)-в) (так и ее классический аналог), будет асимптотически точной теорией.

Основная система уравнений общей теории изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, построенных с помощью перечисленных гипотез а)-в), будет выражаться так:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -\tilde{p}_3, \quad N_{3i} - \left( \frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} \right) = h\tilde{p}_i, \quad (9)$$

$$\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = -\tilde{m}_i, \quad (10)$$

$$L_{33} - \left[ \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} + (M_{12} - M_{21}) \right] = h\tilde{m}_3$$

физические соотношения

$$N_{i3} = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{3i}, \quad N_{3i} = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{i3}, \quad (11)$$

$$M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{ii} + \nu K_{jj}), \quad M_{ij} = \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}],$$

$$L_{ii} = 2h \left[ \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \kappa_{ii} + \frac{2\beta\gamma}{\beta + 2\gamma} \kappa_{jj} \right] + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} L_{33}, \quad L_{ij} = 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}], \quad (12)$$

$$\Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \tilde{m}_i \right], \quad L_{33} = 2h(\beta + 2\gamma)\iota + 2h\beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})$$

геометрические соотношения

$$K_{ii} = \frac{\partial \psi_i(x_1, x_2)}{\partial x_i}, \quad K_{ij} = \frac{\partial \psi_j(x_1, x_2)}{\partial x_i} - (-1)^j \iota, \quad (13)$$

$$\Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{i3} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j \Omega_j,$$

$$\kappa_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, i \neq j). \quad (14)$$

Здесь  $N_{13}, N_{31}$  – усилия,  $M_{ii}, M_{ij}$  – осредненные моменты от силовых напряжений,  $L_{ii}, L_{ij}$  и  $L_{33}$  – осредненные моменты от моментных напряжений,  $\Lambda_{i3}$  – гипермоменты от моментных напряжений  $\mu_{i3}$ :

$$N_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad N_{3i} = \int_{-h}^h \sigma_{3i} dx_3, \quad M_{ii} = \int_{-h}^h x_3 \sigma_{ii} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h x_3 \sigma_{ij} dx_3, \\ L_{ii} = \int_{-h}^h \mu_{ii} dx_3, \quad L_{33} = \int_{-h}^h \mu_{33} dx_3, \quad L_{ij} = \int_{-h}^h \mu_{ij} dx_3, \quad \Lambda_{ii} = \int_{-h}^h x_3 \mu_{i3} dx_3,$$

$\Gamma_{3i}, \Gamma_{i3}$  – сдвиговые деформации,  $K_{ii}, K_{ij}, k_{ii}, k_{ij}$  – изменения кривизны и кручения от силовых и моментных напряжений соответственно,  $l_{i3}$  – изменения гиперкривизны срединной плоскости пластинки.

К системе уравнений (9)-(14) микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением присоединим “смягченные” граничные условия на граничном контуре  $\Gamma$  срединной плоскости пластинки (например, при  $x_1 = \text{const}$ ):

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*; \quad M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*, \\ N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*; \quad (15)$$

$$L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11} = \kappa_{11}^*; \quad L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12} = \kappa_{12}^*; \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*. \quad (16)$$

Система уравнений (9)-(14) и граничные условия (15), (16) будут представлять собой математическую модель микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, при которой полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Это система 12-ого порядка с 6-ю граничными условиями на каждом крае срединной плоскости пластинки. Она содержит 35 уравнений относительно 35 неизвестных функций:  $N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}, M_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, \Lambda_{i3}, L_{33}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, \kappa_{ii}, \kappa_{ij}, l_{i3}, \psi_i, w, \Omega_i, \iota$ .

Если на основе принципа Даламбера, в уравнениях равновесия (9), (10) будем соответственным образом включать силу инерции  $\left( 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$  и моменты инерции

$$\left( \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}, 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2}, \frac{2h^3}{3} J \frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2} \right), \quad \text{приходим к общим динамическим}$$

уравнениям микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением (к которым следует кроме граничных условий (15), (16) присоединить также соответствующие начальные условия).

При  $\alpha = 0$  из уравнений (9)-(14) и граничных условий (15), (16) отделятся классические уравнения и граничные условия теории упругих пластин на основе гипотез Тимошенко [11] (с некоторым отличием, связанным с статической гипотезой в)).

Если в системе уравнений (9)-(14) пренебречь поперечными сдвигами, т.е. если считать

$$\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i} = 0 \quad \text{или} \quad \Psi_i = -\frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad (17)$$

получим модель микрополярных упругих пластин со свободным вращением, когда вместо обобщенных кинематических гипотез Тимошенко (7) в основу примем обобщенную на микрополярный случай гипотезу Кирхгоффа (т.е. формулы (7) с учетом условий (17)).

Основные уравнения этой модели микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением будут представлять собой уравнения равновесия (9), (10) и нижеследующие физические, геометрические соотношения и граничные условия:

физические соотношения

$$N_{3i} - N_{i3} = 4\alpha h(\Gamma_{3i} - \Gamma_{i3}),$$

$$M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{ii} + \nu K_{jj}), \quad M_{ij} = \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}], \quad (18)$$

$$L_{ii} = 2h \left[ \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \kappa_{ii} + \frac{2\beta\gamma}{\beta + 2\gamma} \kappa_{jj} \right] + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} L_{33}, \quad L_{ij} = 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}], \quad (19)$$

$$\Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\tilde{m}_i}{2h} \right], \quad L_{33} = 2h(\beta + 2\gamma)\iota + 2h\beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{3i} - \Gamma_{i3} = -2 \left[ \frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j \Omega_j \right], \quad K_{ii} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}, \quad K_{ij} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - (-1)^j \iota \quad (20)$$

$$\kappa_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i} \quad (21)$$

граничные условия

$$M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad K_{11} = K_{11}^*, \quad N_{13} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^* \quad (22)$$

$$L_{11} = L_{11}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{11} = \kappa_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{12} = \kappa_{12}^*,$$

$$\Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \quad \text{или} \quad l_{13} = l_{13}^*. \quad (23)$$

При данной модели, если формально подставим  $\alpha = 0$ , отделятся уравнения и граничные условия классической теории пластин на основе гипотез Кирхгоффа.

В этом же разделе отметим, что когда физические безразмерные параметры (5) имеют значения

$$\alpha \sim \mu, \quad \frac{a^2 \alpha}{\beta} \ll 1, \quad \frac{a^2 \alpha}{\gamma} \ll 1, \quad \frac{a^2 \alpha}{\varepsilon} \ll 1, \quad (24)$$

то, как показывает асимптотический анализ поставленной трехмерной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3) микрополярной теории упругости, в последних трех уравнениях равновесия из (1) можем пренебрегать разностями силовых напряжений  $\sigma_{3i} - \sigma_{i3}$ ,  $\sigma_{12} - \sigma_{21}$  и, в результате, в двумерной теории «моментная часть» задачи отделится от «силовой части» задачи, как самостоятельная граничная задача.

Таким образом, если в основу принимать гипотезы а)-в), в случае (24), пренебрегая в уравнениях равновесия указанными разностями силовых напряжений,

получим модель микрополярных пластин «с малой сдвиговой жесткостью» (это название происходит из того, что физическая постоянная  $\alpha$  – тоже модуль сдвига, как и классический модуль  $\mu$ , а в условиях (24), при данном  $a$   $\alpha$  – малая величина).

В случае принятия обобщенных кинематических гипотез Тимошенко, модель микрополярных пластин «с малой сдвиговой жесткостью» определится следующим образом: «моментная часть» задачи – это уравнения равновесия (10), в которых необходимо пренебрегать следующими разностями:  $N_{j3} - N_{3j}, M_{12} - M_{21}$ ; физическими соотношениями (12), геометрическими соотношениями (14) и граничными условиями (16); «силовая часть» задачи – это уравнения равновесия (9), физические соотношения (11), геометрические соотношения (13) и граничные условия (15).

А в случае принятия в основу обобщенные кинематические гипотезы Кирхгоффа, для этой модели микрополярных пластин получим для «моментной части» опять отмеченную выше граничную задачу, а для «силовой части» задачи будем иметь те же уравнения равновесия, к которым следует присоединить физические соотношения (18), геометрические соотношения (20) и граничные условия (22).

Модель микрополярных пластин «с малой сдвиговой жесткостью» имеет следующую важную характеристику: если «моментная часть» имеет нулевое решение  $\Omega_j \equiv 0, t \equiv 0$  (это будет иметь место, когда соответствующая граничная задача будет однородной), то «силовая часть» задачи не будет совпадать с соответствующей классической моделью пластин, так как в определяющих уравнениях этой теории (как с учетом поперечных сдвигов, так и без их учета) будут присутствовать члены с физической постоянной  $\alpha$ .

#### Модель микрополярных упругих тонких пластин со стесненным вращением

Рассмотрим теперь случай, когда физические безразмерные параметры (5) имеют значения:

$$\alpha \gg \mu, \quad \frac{a^2 \mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{a^2 \mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{a^2 \mu}{\varepsilon} \sim 1. \quad (25)$$

Как показывает асимптотический анализ [3] поставленной трехмерной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3), в случае (25) вектор поворота  $\vec{\omega}$  в асимптотических приближениях выражается через вектор перемещения  $\vec{V}$  формулой, идентичной соответствующей формуле классической теории упругости:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V}, \quad (26)$$

а это означает, что изучаемый вопрос теперь находится в области микрополярной теории упругости со стесненным вращением [10,12], или иначе, псевдоконтинуума Коссера.

Отметим, что трехмерная микрополярная теория упругости со стесненным вращением имеет некоторые особенности [12]: а) в этой теории для материала тела используются четыре упругих константы  $-\lambda, \mu$  (или  $E, \nu$ ) и  $\gamma, \varepsilon$  (или [12]  $l, \eta$ ); б) на поверхности тела вместо шести граничных условий можно ставить только пять, а это в данном случае означает, что в граничных условиях на лицевых поверхностях пластинки (4) для моментного напряжения  $\mu_{33}$  невозможно ставить произвольные

граничные условия (т.к. легко показать, что в трехмерной модели со стесненным вращением  $\mu_{33}$  выражается через  $\mu_{11}$  и  $\mu_{22}$ ).

Изучая асимптотические свойства краевой задачи для систем уравнений (1)-(3) [3], в случае (25), в основу построения прикладной-двумерной модели микрополярных упругих тонких пластин можем принимать следующие предположения (гипотезы) – это сформулированные в предыдущем пункте обобщенные кинематические гипотезы Тимошенко а), статические гипотезы б) и в) (последние на этот раз только для силовых напряжений  $\sigma_{3i}$ ), и д) условие стесненного вращения (векторная формула (26)).

Основная система уравнений общей теории изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин со стесненным вращением, построенная с помощью перечисленных выше гипотез а)-д), с полным учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций, можем представить так:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -\tilde{p}_3, \quad N_{3i} - \left( \frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} \right) = h\tilde{p}_i, \\ \frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = -\tilde{m}_i, \quad \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} + M_{12} - M_{21} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} N_{i3} + N_{3i} = 4\mu h(\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i}), \quad M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{ii} + \nu K_{jj}), \\ M_{12} + M_{21} = \frac{4\mu h^3}{3}[K_{12} + K_{21}], \quad L_{ii} = 4\gamma h\kappa_{ii}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$L_{ij} = 2h\left[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}\right], \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\left(\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}l_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}\frac{\tilde{m}_i}{2h}\right)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{i3} + \Gamma_{3i} = \Psi_i + \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad K_{ii} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_i}, \quad K_{12} + K_{21} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}, \\ \kappa_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i}, \\ \Omega_i = -\frac{1}{2}(-1)^j\left(\Psi_j - \frac{\partial w}{\partial x_j}\right), \quad \iota = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

К системе уравнений (27)-(29) микрополярных пластин со стесненным вращением следует присоединить граничные условия на граничном контуре срединной плоскости пластинки (15), (16).

Если в системе уравнений (27)-(29) пренебречь поперечными сдвигами, т.е. будем считать выполненными условия (17), получим основные уравнения микрополярных упругих пластин со стесненным вращением, когда вместо обобщенных кинематических гипотез Тимошенко примем обобщенные гипотезы Кирхгоффа:

$$\begin{aligned} & \text{уравнения равновесия} \\ \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -\tilde{p}_3, \quad \frac{\partial(L_{12} + M_{11})}{\partial x_1} + \frac{\partial(L_{22} + M_{21})}{\partial x_2} - N_{13} = -\tilde{m}_2 - h\tilde{p}_1, \\ \frac{\partial(L_{11} - M_{12})}{\partial x_1} + \frac{\partial(L_{21} - M_{22})}{\partial x_2} + N_{23} = -\tilde{m}_1 + h\tilde{p}_2, \end{aligned} \quad (30)$$

$$M_{12} - M_{21} = \frac{h^2}{3} \frac{\gamma + \varepsilon}{\gamma - \varepsilon} \left( \frac{\partial \tilde{m}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{m}_2}{\partial x_2} \right)$$

$$\begin{aligned} & \text{физическо-геометрические соотношения} \\ M_{11} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \quad M_{22} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), \\ M_{12} + M_{21} = -\frac{4\mu h^3}{3} 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad L_{11} = 4\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad L_{22} = -4\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ L_{12} = 2h \left[ -(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right], \quad L_{21} = 2h \left[ (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right], \end{aligned} \quad (31)$$

к которым следует присоединить следующие граничные условия (при  $x_1 = \text{const}$ ):

$$(M_{11} + L_{12}) = \int_{-h}^h (x_3 p_1^* + m_2^*) dx_3, \quad (32)$$

$$N_{13} + \frac{\partial}{\partial x_2} (M_{12} - L_{11}) = \int_{-h}^h \left[ p_3^* + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_3 p_2^* - m_1^*) \right] dx_3.$$

Легко заметить, что систему уравнений (30), (31) можно привести к одному уравнению относительно прогиба  $w(x_1, x_2)$ :

$$D^* \Delta \Delta w = \tilde{p}_3 + h \left( \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x_2} \right) + \left( \frac{\partial \tilde{m}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{m}_1}{\partial x_2} \right), \quad (33)$$

где

$$D^* = D + 2h(\gamma + \varepsilon), \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \quad (34)$$

Уравнение (33) – это обобщенное на микрополярный случай уравнение изгиба пластин Софи Жермен-Лагранжа по классической теории упругости. Здесь  $D^*$  представляет собой цилиндрическую жесткость микрополярной пластинки, когда имеет место стесненное вращение,  $D$  – классическая жесткость пластинки.

Отметим, что модель микрополярной упругой пластинки со стесненным вращением (30)-(32) ранее построена в работах [13,14]. Асимптотическим методом эта модель построена в работе [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек//Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С.84-95.
2. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-type theories of Plates and Shells: a short review and bibliography// Arch. Appl. Mech. Special Issue. Doi 10. 1007/s 00419-009-0365-3.
3. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости// ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
4. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости //Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С. 41-54.
5. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости //Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С.309-319.
6. Sargsyan S.H. Thermoelasticity of Thin Shells on the Basis of Asymmetrical Theory of Elasticity // Journal of Thermal Stresses. 2009. V. 32. №8. P.791-818.
7. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады РАН . 2010. Т. 435. №3.
8. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц //Физика твердого тела. 1960. Т.2. №7. С.1399-1409.
9. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т.28. Вып. 6. С.1117-1120.
10. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.
11. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наукова думка, 1977. 183с.
12. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Периодич. сб. перев. иностр. статей. 1965. №3. С.89-112.
13. Геворгян Г.А. Уравнения изгиба пластин моментной теории упругости //ПМ. 1966. Т.2 Вып.7. С.74-79.
14. Хоффмек О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений //ПМ. Тр. Америк. общ-ва инжен.-мех. Сер. Е. 1964. Т.31. №4. С.149-150.

#### Сведения об авторе:

**Саркисян Самвел Оганесович** – чл.-корр.НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат.анализа и дифференц. уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна

**E-mail:** [slusin@yahoo.com](mailto:slusin@yahoo.com). **Тел.:** (091) 60 57 15

Поступила в редакцию 02.09.2010

УДК 539.3

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ  
МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОМ, ИДЕАЛЬНО  
ПРОВОДЯЩЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ  
МАНУКЯН В.Ф.**

**Ключевые слова:** поверхностная волна, полупространство, трехмерные, магнитное поле, дисперсия.

**Keywords:** surface wave, semi-space, three dimensional, magnetic field, dispersion.

**Մանուկյան Վ. Ֆ.**

**Շռայափ մակերևութային մագնիսաառաձգական ալիքների տարածումը իզոտրոպ և իդեալական հաղորդիչ կիսատարածությունում**

Շռայափ դրվածքով դիտարկվում է մագնիսաառաձգական մակերևութային ալիքների տարածումը կիսատարածությունում, երբ վերջինիս եզրը ազատ է լարումներից: Կիսատարածության նյութը համարվում է իզոտրոպ և իդեալական հաղորդիչ: Ցույց է տրվում, որ այդ դեպքում մակերևութային ալիքը, ի տարբերություն Ռեյլեյի ալիքի, ունի դիսպերսիայի հատկություն:

**Manukyan V. F.**

**The propagation of the three dimensional surface magnetoelastic wave in isotropic ideal conducting semi-space**

The three dimensional problem of the propagation of the magnetoelastic waves along the free boundary of semi-space is considered. The problem for the model of the isotropic ideal conducting material is investigated.

Рассматривается трехмерная задача распространения магнитоупругих волн вдоль границы полупространства, свободного от напряжений. Задача исследуется для модели изотропного идеально проводящего материала. Установлено, что в этом случае поверхностная волна, в отличие от волн Рэлея для изотропных сред, обладает свойством дисперсии.

Исследованию распространения магнитоупругих поверхностных волн (ПВ) посвящен ряд работ, обзор которых приведен в [1,2]. В этих работах, в основном, рассматривались плоские и антиплоские деформации (двухмерные волны). В статье [3] рассмотрены трехмерные задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве. В работе [4] исследованы трехмерные задачи распространения ПВ в анизотропных средах. В настоящей работе рассматриваются магнитоупругие пространственные ПВ в полубесконечной идеально проводящей изотропной среде.

1. В прямоугольной декартовой системе координат  $(x, y, z)$  идеально проводящее полупространство занимает область:  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-\infty < z < +\infty$ ,  $0 \leq y < +\infty$ . Система уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид:

$$\begin{aligned} c_t^2 \Delta u + (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{f_x}{\rho} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ c_t^2 \Delta w + (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{f_z}{\rho} &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$c_l^2 \Delta v + (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{f_y}{\rho} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Здесь  $u, v, w$  – проекции вектора перемещения  $\vec{u}$  на оси координат  $x, y, z$ , соответственно,  $\rho$  – плотность материала среды,  $f_x, f_y, f_z$  – проекции вектора объемной силы  $\vec{f}$ ;  $c_l$  и  $c_t$  – скорости распространения продольной и поперечной волн, соответственно.

Для идеального проводника выражение для объемной пондеромоторной силы имеет вид [1,2]:

$$\vec{f} = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \text{rotrot}(\vec{u} \times \vec{H}_0) \right] \times \vec{H}_0, \quad (1.2)$$

где  $\vec{H}_0$  – вектор магнитной индукции в начальном невозмущенном состоянии,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды. Пусть среда в невозмущенном состоянии находится в постоянном магнитном поле:

$$\vec{H}_0 = H_0 \hat{i}. \quad (1.3)$$

В таком случае, учитывая (1.2) и (1.3), для компонент объемной силы получаем:

$$f_x = 0, \quad f_y = \frac{\mu H_0^2}{4\pi} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right), \quad f_z = \frac{\mu H_0^2}{4\pi} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \quad (1.4)$$

Подстановка (1.4) в (1.1) приводит к следующим уравнениям движения:

$$\begin{aligned} \theta \Delta u + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \theta \Delta w + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \chi \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right) &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \theta \Delta v + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \chi \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\text{где } \theta = \frac{c_t^2}{c_l^2}, \quad \chi = \frac{H_0^2 \mu}{4\pi \rho c_l^2}.$$

Рассмотрим трехмерные волны с амплитудой, затухающей в направлении оси  $y$ :

$$u = A e^{-kvy} \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z), \quad v = B e^{-kvy} \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z) \quad (1.6)$$

$$w = C e^{-kvy} \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z)$$

где  $k_1, k_3$  – волновые числа,  $k = \sqrt{k_1^2 + k_3^2}$ .

Подставляя (1.6) в уравнения (1.5), получим однородную систему уравнений для  $A, B, C$ . Система будет иметь ненулевые решения, если его определитель равен нулю. Это дает

$$\begin{aligned} & \left[ \theta(1 - \eta - v^2) + \chi(1 - \xi^2) \right], \\ & \left[ \theta(1 - \eta - v^2)(1 - \theta\eta - v^2) + \chi(1 - v^2)(1 - \xi^2 - \theta(\eta + v^2 - \xi^2)) \right] 0 = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $\eta$  – безразмерный параметр скорости распространения поверхностной волны:

$$\eta = \omega^2 c_t^{-2} k^{-2}, \quad \xi = k_3 k^{-1}.$$

Для поверхностных волн мы должны рассмотреть только случай положительных корней  $v_1, v_2, v_3$ . Решение (1.6) теперь можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^3 \alpha_k A_k \exp(-k v_k y) \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z), \\ v &= \sum_{k=1}^3 \beta_k A_k \exp(-k v_k y) \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z), \\ w &= \sum_{k=1}^3 \gamma_k A_k \exp(-k v_k y) \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $v_k$  – коэффициенты затухания

$$v_1 = \sqrt{1 - \eta + \chi \theta^{-1} (1 - \xi^2)}, \quad v_k = \sqrt{\frac{a - (-1)^k \sqrt{b}}{2\theta(1 + \chi)}}, \quad (k = 2, 3), \quad (1.9)$$

$$a = \theta(2 - \eta(1 + \theta)) + \chi(1 + \theta - \xi^2 + \theta\xi^2 - \theta\eta),$$

$$b = (1 - \theta)^2 (1 - \xi^2)^2 \chi^2 + \eta^2 \theta^2 (1 - \theta + \chi)^2 - 2\eta\theta\chi(1 - \theta)(1 - \xi^2)(1 - \theta + \chi),$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = -\frac{i\xi}{v_1}, \quad \gamma_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \frac{i(1 - \theta)v_2 \sqrt{1 - \xi^2}}{\theta - \theta\eta - v_2^2 + \chi(1 - v_2^2) + (1 - \theta)\xi^2}$$

$$\gamma_2 = -\frac{(1 - \theta)\xi \sqrt{1 - \xi^2}}{\theta - \theta\eta - v_2^2 + \chi(1 - v_2^2) + (1 - \theta)\xi^2}, \quad \beta_3 = 1, \quad (1.10)$$

$$\alpha_3 = -\frac{i(1 - \theta)v_3 \sqrt{1 - \xi^2} [\theta(1 - \eta - v_3^2) + \chi(1 - \xi^2)]}{[\chi + \theta(1 - \eta - v_3^2)] [\theta(\eta + v_3^2) - 1] + \chi(1 - \theta)\xi^2},$$

$$\gamma_3 = -\frac{i\xi v_3 [\theta(1 - \eta - v_3^2)(1 - \theta) + \chi(1 - \xi^2 - \theta(\eta + v_3^2 - \xi^2))]}{[\chi + \theta(1 - \eta - v_3^2)] [\theta(\eta + v_3^2) - 1] + \chi(1 - \theta)\xi^2}.$$

В частном случае, при отсутствии магнитного поля ( $\chi = 0$ ) из (1.6) получаем перемещения пространственной задачи, которые приводятся в [3].

2. Предполагая, что плоскость свободна от напряжений, имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{2i} + t_{2i} = t_{2i}^{(e)}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.1)$$

где  $\sigma_{ki}$  – компоненты тензора напряжения,  $t_{ki}$  и  $t_{ki}^{(e)}$  – возмущения компонент тензоров Максвелла в среде и в вакууме, соответственно. Принимая допущение  $t_{ki}^{(e)} \ll t_{ki}$ , и в граничных условиях (2.1) не учитывая члены, связанные с напряжениями Максвелла в вакууме, внутренняя задача магнитоупругости полностью отделяется от внешней задачи. В этом случае для граничных условий получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + (1 + \theta^{-1}\chi) \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ (1 - 2\theta) \frac{\partial u}{\partial x} + (1 + \chi) \frac{\partial v}{\partial y} + (1 - 2\theta + \chi) \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подстановка (1.8) в (2.2) приводит к однородным алгебраическим уравнениям относительно  $A_1, A_2, A_3$ . Из условия нетривиальности решений этой системы получаем дисперсионное уравнение следующего вида:

$$R(\eta, \theta, \chi, \xi) \equiv \det[a_{ik}] = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{Здесь } a_{1k} = v_k \alpha_k + i\sqrt{1 - \xi^2} (1 + \chi\theta^{-1}) \beta_k$$

$$a_{2k} = i(1 - \theta)\sqrt{1 - \xi^2} \alpha_k + (1 + \chi)\beta_k v_k + i(1 - 2\theta + \chi)\xi\gamma_k, \quad a_{3k} = i\xi\beta_k + \gamma_k v_k,$$

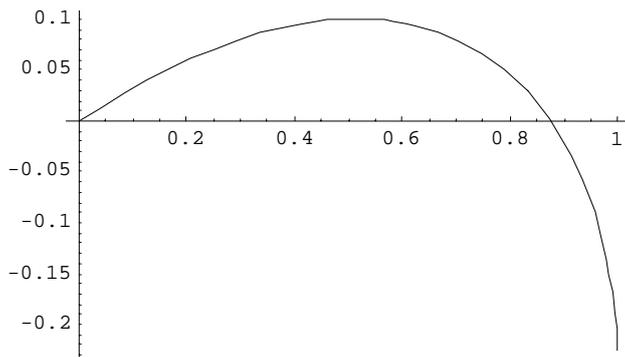
где  $v_k, \alpha_k, \beta_k$  и  $\gamma_k$  определяются по формулам (1.9) и (1.10).

При отсутствии магнитного поля уравнение (2.3) после ряда преобразований приводится к уравнению

$$(2 - \eta)^2 - 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)} = 0, \quad (2.4)$$

которое совпадает с уравнением Рэлея для пространственной задачи [3]. Из (2.3) следует, что наличие магнитного поля приводит к появлению дисперсии. Решая (2.3), можно найти параметр фазовой скорости  $\eta$  и исследовать влияние магнитного поля на поверхностную волну.

В заключение для количественной оценки влияния магнитного поля рассмотрим числовой пример. Для расчета примем  $H_0 = 1.2 \cdot 10^5$  э,  $\mu = 1$ . В этом случае для разных материалов при любом значении  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) можно построить графики



Фиг. 1. График функции  $R(\eta, 0.5)$  для материала Al (Алюминий)

функций Рэлея  $R(\eta)$ .

Следует отметить, что рассматриваемые графики качественно не отличаются. С этой целью приведём один из них (фиг.1). Фиг.1 показывает, что график функции  $R(\eta, 0.5)$ , начиная с нуля, возрастает, но с некоторого значения  $\eta$  уменьшается и пересекается с осью  $\eta = 0$  в единственной точке. Из этого следует, что дисперсионное уравнение в интервале затухания имеет

единственное решение.

В табл. 1 приводятся корни уравнения  $R(\eta, \xi) = 0$  для материалов Al (алюминий) и Cu (медь).

Таблица 1

Al (алюминий)			Cu (медь)	
$\xi(k_3/k)$	$\eta$	Усл. затухания	$\eta$	Усл. затухания
0	0.875236	(0, 1.00448)	0.876212	(0, 1.00251)
0.2	0.875092	(0, 1.0043)	0.87613	(0, 1.00241)
0.4	0.87466	(0, 1.00376)	0.875885	(0, 1.00211)
0.6	0.87394	(0, 1.00287)	0.875479	(0, 1.00161)
0.8	0.872932	(0, 1.00161)	0.874908	(0, 1.0009)
1	0.871638	(0, 1)	0.874176	(0, 1)

Из табл.1 видно, что с возрастанием  $\xi$  безразмерный параметр  $\eta$  уменьшается, что означает увеличение степени локализации поверхностной волны. Следует отметить, что в некоторых случаях учет естественной анизотропии тоже приводит к подобному результату [4].

В табл. 2 на основе численного анализа приведены зависимости скорости волны от величины напряжённости магнитного поля при различных  $\xi$ .

Таблица 2

Cu (медь).			
$H_0 \times 10^5 \text{ э}$	$\xi = 0$	$\xi = 0.5$	$\xi = 1$
0	0.874145	0.874145	0.874145
0.2	0.874202	0.874188	0.874145
0.4	0.874376	0.874319	0.874148
0.6	0.874661	0.874533	0.874152
0.8	0.875062	0.874837	0.874158
1	0.875578	0.875225	0.874166
1.2	0.876212	0.875702	0.874176
1.4	0.876959	0.876265	0.874187

Табл.2 показывает, что с увеличением напряжённости магнитного поля безразмерный параметр фазовой скорости возрастает, причем это явление усиливается с уменьшением  $\xi$ . Таким образом, поперечное магнитное поле ( $\xi = 1$ ) имеет гораздо меньшее влияние на фазовую скорость, чем продольное поле ( $\xi = 0$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд.ЕГУ, 2006. 492 с.
2. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости. Ереван: Изд.ЕГУ, 1997. 104 с.
3. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трехмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея. //Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. № 4. С.362-368.
4. Мгерян Д.Э. Исследование упругой поверхностной волны в анизотропном полупространстве в трехмерной постановке.// Канд. дисс., Ереван: 2008.108 с.

#### **Сведения об авторе:**

**Манукян Вардан Францевич** – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры физики ГПИ, (374 93) 46 49 03, E-mail: [mvardan\\_1972@mail.ru](mailto:mvardan_1972@mail.ru)

Поступила в редакцию 08.02.2010

**NUMERICAL ANALYZING OF BEAM BENDING UNDER DIFFERENT LOADS  
LOCATING WITH CRACK AND HOLE IN CENTER  
B. YAZDIZADEH**

**Keywords:** Beam, Bending, Crack, Finite element

**Ключевые слова:** балка, изгиб, трещина, конечный элемент

**Յազդիզադե Բ.**

**Տարբեր բեռների ազդեցության տակ գտնվող, կենտրոնում անցք և ճաք ունեցող հեծանի ծաման  
թվային վերլուծությունը**

Աշխատանքում դիտարկված է հեծանը՝ տարբեր պայմաններով. ճակատային մակերևույթ դուրս եկող տարբեր երկարությամբ ճաքերով հեծան, կլոր անցքով հեծան և նեղ էլիպսների ձև ունեցող հորիզոնական և ուղղահայաց անցքերով հեծան: Հեծանը գտնվում է տարբեր բնույթի նորմալ բեռների ազդեցության տակ: Վերջավոր էլեմենտների մեթոդի օգնությամբ որոշված են մեծագույն նորմալ տեղափոխությունները: Բերված է ստացված արդյունքների համեմատությունը ճաքի, կլոր և էլիպտական անցքերի դեպքերում: Ստացված արդյունքները կարևոր են հակադարձ խնդրի լուծման տեսանկյունից:

**Яздизаде Б.**

**Численный анализ изгиба балки под действием различных нагрузок, имеющей трещину и отверстие в центре**

В работе рассмотрена балка с различными условиями: балка с трещинами различных длин, выходящих на лицевую поверхность, балка с круглым отверстием и балка с горизонтальным и вертикальным отверстиями в виде узких эллипсов. Балка находится под действием нормальных нагрузок различного характера. С помощью метода конечных элементов определены максимальные нормальные перемещения. Приводится сравнение полученных результатов для случаев трещины, круглого и эллиптических отверстий. Полученные результаты важны с точки зрения решения обратной задачи.

In this research, a beam with different conditions considered: beam with crack up to edge with the different lengths, beam with circle hole and beam with horizontal and vertical narrow elliptical hole. The beam is under different vertical load position on its surface and for every load position, the maximum vertical displacement calculated with Finite Element approximation. Results are compared with each other when the crack, hole and elliptical hole are inserted. It is important that inverse problem could obtain from these results.

**Introduction**

Fracture Mechanics or Linear Elastic Fracture Mechanics as we know it, was originated by Wieghardt and Inglis [1]. Both independently showed that cavities and flaws in continuum materials act as stress concentrators which, in the limit of sharp edges (cracks), produce infinite stress at the tip [2].

A fairly thorough description of the approaches for solving the crack problems is made by many researchers [3-6].

These were the first attempts to bring closer the theories of fracture mechanics (FM) and continuum mechanics (CM). About the same time, the Finite Element Method (FEM) and digital computers dashed into the engineering community as a gifted means for quantifying solutions in structural and solid mechanics. Naturally, fracture mechanic researchers implemented their FE methods, while continuum mechanic researchers implemented theirs [7].

The rapid development in computing technologies, especially with respect to increased computational power and data storage capacity, has made numerical simulation of crack closure more and more feasible, provided that finite element (FE) models can be shown to be correct and their limitations and applicability are understood [8]. Through performing a FE analysis, there is also the possibility of checking and refining some fundamental assumptions imposed in analytical methods, e.g., the assumption of infinite plates and simplification of material constitutive relations. Research on investigating problems of crack propagation using the FE method commenced in the early seventies [9-10].

The finite elements method can be easily implemented for beam elements without cracks since the stiffness and generalized geometrical stiffness matrixes of a noncracked beam are already commonly known (for example in [11]). However, the situation essentially changes if the structural elements are transversely cracked.

### Defining problem

Consider a beam as shown in pic.1. This beam loaded as illustrated. The beam displacement formula is [12]:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

Where  $E$  is module of elasticity,  $I$  is moment of inertia,  $y$  is vertical displacement of a point in  $x$  position.

As we know for the beam of Pic.1 solution of above differential equation with such boundary conditions,  $(dy/dx)_{x=L} = 0$ ,  $y_{x=L} = 0$ , is  $y = \frac{P}{6EI} (2L^3 - 3L^2x + x^3)$ .

The maximum displacement (at  $x = 0$ ) is  $\frac{PL^3}{3EI}$ . These parameters are considered for beam:

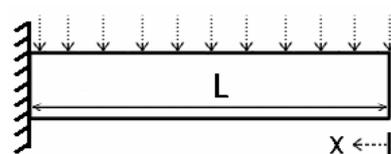
$$L = 1.5 \text{ m}, P = 100 \text{ N}, b = 0.01 \text{ m}, h = 0.12 \text{ m}, E = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

Where  $h$  and  $b$  are the beam height and thickness respectively. Maximum displacement for this beam is 0.03906 m.

Maximum displacement calculated from numerical solution (finite element) is 0.03917 m. It is clear that the error of finite element solution is less than 0.3 %.



Pic.1



Pic.2

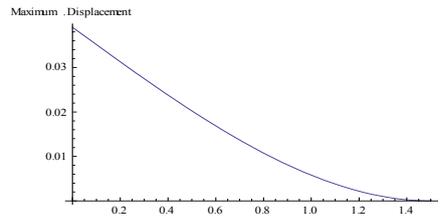
In pic.2 the load  $P$  is applied on different horizontal position  $x$  and displacement of the end of beam is calculated for each position. Mention that the displacement due to the slope of the beam must have been calculated for the rest of the beam i.e.  $x \times \text{Sin}(\theta_x)$ , where  $\theta_x$  is slope angle of beam at  $x$  position where the load is applied and

$$\theta_x = \left( \frac{dy}{dx} \right)_x = \frac{P(L-x)^2}{2EI}.$$

Therefore, we have this formula for general maximum displacement:

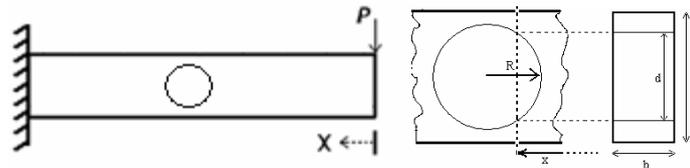
$$y_{\max} = \frac{P(L-x)^3}{3EI} + x \times \text{Sin}(\theta_x) = \frac{P(L-x)^3}{3EI} + x \times \text{Sin}\left(\frac{P(L-x)^2}{2EI}\right) \quad (2)$$

The results of different load positions are shown in fig. 1:



**Fig.1**  
 $x$  = Load position distance from end of the beam

Now let solve beam displacement with one hole inside it located in the center as illustrated in pic.3.



**Pic.3**

Moment of inertia of the beam is not constant around the inserted hole. For calculation of beam displacement in this condition, *Castigliano's theorem* is used. For the beam, show in pic.3 this theorem is as follows [12]:

$$y = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \quad (3)$$

Where  $U$  is the strain energy and  $M$  is moment.

The moment of inertia of the cross section of the beam ( $I'$ ), at  $x$  position that show in pic.3 is:

$$I' = \frac{bh^3 - b(2\sqrt{R^2 - (L/2 - x)^2})^3}{12}$$

Where  $2\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x\right)^2} = d$  as shown in pic.3.

Relation (3) is expanded below:

$$y = \int_0^{L/2-R} \frac{12Px}{Ebh^3} dx + \int_{L/2-R}^{L/2+R} \frac{12Px}{E(bh^3 - b(2\sqrt{R^2 - (L/2 - x)^2})^3)} dx + \int_{L/2+R}^L \frac{12Px}{Ebh^3} dx \quad (4)$$

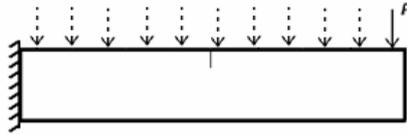
After giving value to variables and calculate the integrals, displacement is equal to 0.03942 m. Displacement calculated from *finite element software* is equal to 0.03997 m. The difference between these two solutions is 1.3%.

Because the bending caused by shear stress is neglected in analytical solution, perhaps this percentage is occurred. Anyway this different is acceptable for continuing the procedure in different case with finite element method only.

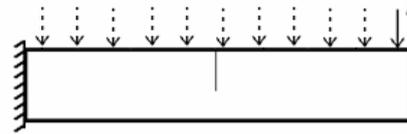
Best element chooses for finite element analysis are explain in [13, 14].

*First Problem:*

Consider a beam as shown in pic.4. This beam loaded with different vertical loads on its surface then calculating the Maximum vertical displacement at the end of it. This beam has a vertical crack up to edge inside it that the length of it is 33% of the beam height. These calculations do again with 83% crack length, inside the beam as shown in pic.5.



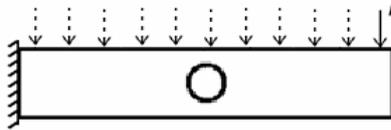
Pic.4



Pic.5

*Second Problem:*

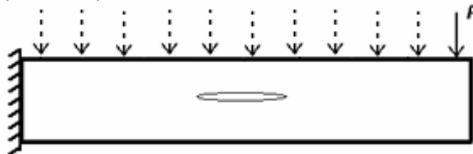
As like as previous beam all procedures do again with a circular hole instead of crack as shown in pic.6. Recall that for first load position the displacement calculated analytically from equation (4).



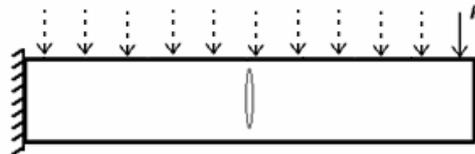
Pic.6

*Third Problem:*

The same as Second Problem applying horizontal and vertical elliptical hole instead of circular hole as shown in pic.7 and pic.8. The radiuses of elliptical holes are (0.04 m) and (0.001 m).



Pic.7



Pic.8

Displacement for all condition is calculated. Comparisons of results give some important rule for detecting some condition on inverse problems.

**Results**

*First Problem:*

Displacement graph for crack with length of 33% of beam height is shown in fig.2 and fig.3 in column and line view respectively. Note that crack position is at distance of 0.65 m from beam end. Each column denote the displacement of free end of the beam and data below the column is denote to the distance of the load that applied from free end of the beam.

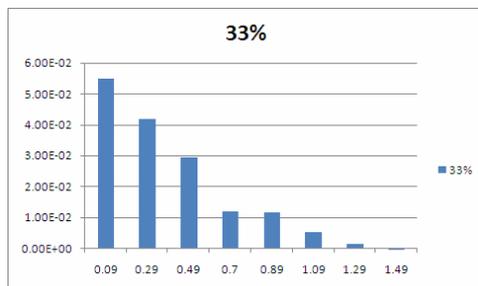


Fig.2. Maximum displacement of beam with crack inside (33% crack length)

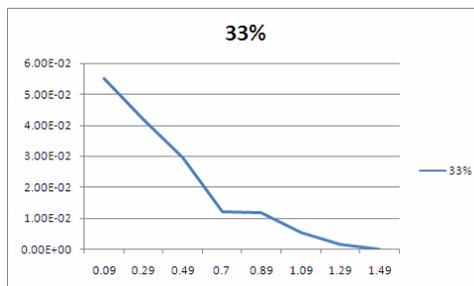
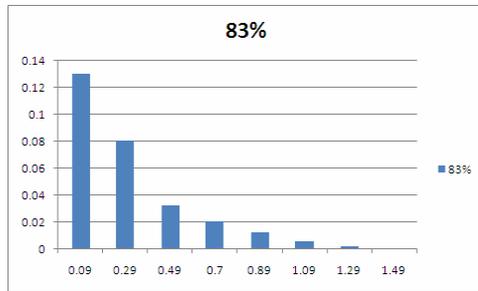
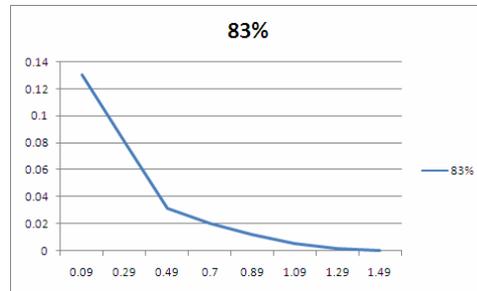


Fig.3. Maximum displacement of beam with crack inside (33% crack length)

Displacement graph for crack with length of 83% of beam height is shown in fig.4 and fig.5



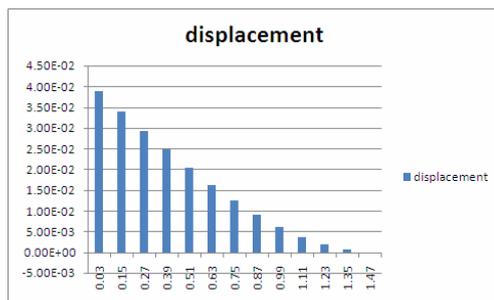
**Fig.4.** Max displacement of beam with crack inside (83% crack length)



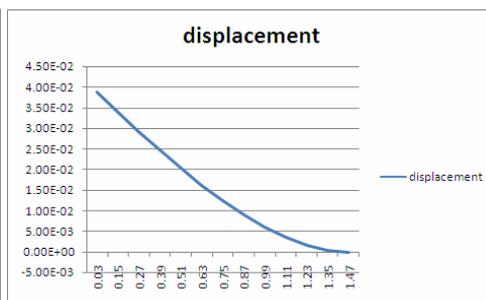
**Fig.5.** Max displacement of beam with crack inside (83% crack length)

Second Problem:

Displacement graph for hole is shown in figure.6 and fig.7 in column and line view respectively. Each column denote the displacement of free end of the beam and data below the column is denote to the distance of the load that applied from free end of the beam.



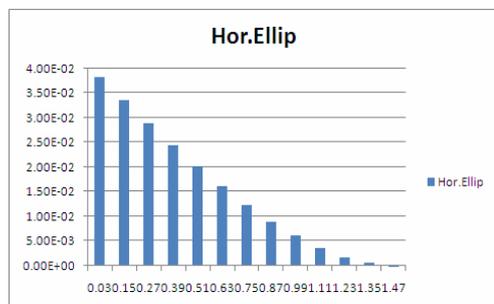
**Fig.6.** Maximum displacement of beam with hole inside



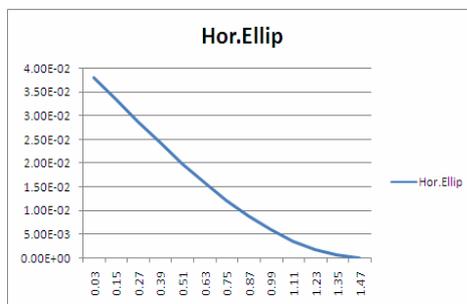
**Fig.7.** Maximum displacement of beam with hole inside

Third Problem:

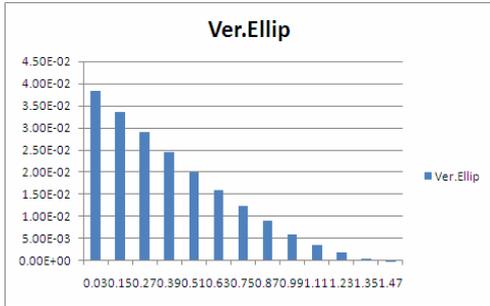
Displacement graph for horizontal elliptical hole is shown in fig.8 and fig.9 in column and line view respectively and also for vertical elliptical hole is shown in fig.10 and fig.11 Each column denote the displacement of free end of the beam and data below the column is denote to the distance of the load that applied from free end of the beam.



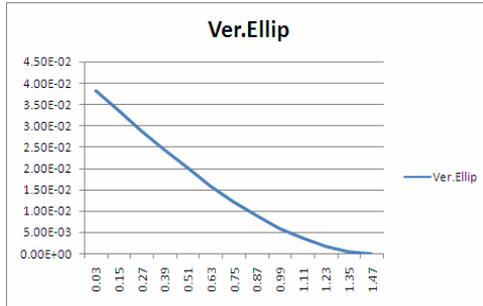
**Fig.8.** Maximum displacement of beam with horizontal elliptical hole inside



**Fig.9.** Maximum displacement of beam with horizontal elliptical hole inside



**Fig.10.** Maximum displacement of beam with vertical elliptical hole inside



**Fig. 11.** Maximum displacement of beam with vertical elliptical hole inside

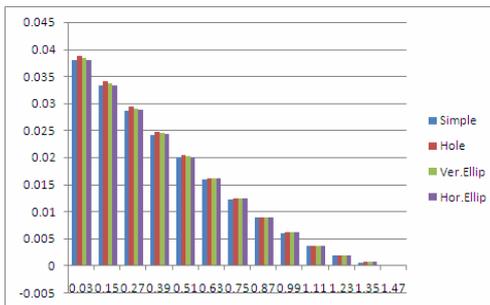
**Conclusion:**

In fig.3 and fig.5 there is some changing at range of displacement value after the position of crack that enables us to distinguish the crack on the beam. It means that we can divide the graph in two parts, before and after the crack. Before the crack, changing in displacement is same as the beam without crack and approximation of simple beam show in table 2 can be used. In second part that load applied after crack range of changing displacement in 2 and 3 approximation degree is shown in table 1. This is trustworthy mention that after analyzing beam displacement in laboratorial test if there is some crack up to edge, we can distinguish it by compare the graphs that obtain from test with these approximation relation in table.1, and also examine the length of the crack.

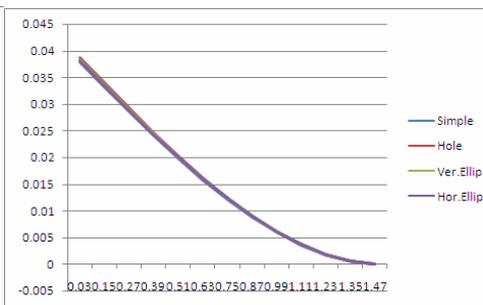
**Table 1.** 3<sup>rd</sup> and 2<sup>nd</sup> order approximation for second part of graphs in figure.3 and 5

33% length	$y = -0.0003x^3 + 0.0027x^2 - 0.0217x + 0.1032$	$y = 0.0006x^2 - 0.015x + 0.0694$
83% length	$y = 0.0017x^3 - 0.0141x^2 - 0.0168x + 0.261$	$y = 0.0007x^2 - 0.0521x + 0.1819$

In fig.12 and 13, displacement range is shown for simple beam, circle hole, vertical and horizontal elliptical hole together. The figure imply that before the hole the range of beam displacement is the same for all and after the hole less displacement is belong to simple beam without any hole, then horizontal elliptical hole, vertical elliptical hole and circle hole respectively.



**Fig. 12.** Maximum displacement of beam compared in all conditions (column view)



**Fig. 13.** Maximum displacement of beam compared in all conditions (line view)

Table 2 shows 4<sup>th</sup> and 3<sup>rd</sup> order approximation of graphs of fig.13. Comparison of these polynomials one can conclude that there is no any obvious distinction between simple beam and horizontal elliptical hole, which mean that with laboratorial test we cannot distinguish horizontal elliptical hole. However, in other case it can be possible if there is a precise test

then with comparison of graphs that obtain from the test with these 4<sup>th</sup> and 3<sup>rd</sup> order polynomials carefully, we can detect the hole, location and the kind of it, in the beam.

**Table 2.** 4<sup>th</sup> and 3<sup>rd</sup> order approximation for graphs in fig.1, 7, 9 and 11

	4 <sup>th</sup> order approximation	3 <sup>rd</sup> order approximation
simple beam	$y = 9E-10x^4 + 1E-05x^3 - 2E-05x^2 - 0.0047x + 0.0426$	$y = 1E-05x^3 - 2E-05x^2 - 0.0047x + 0.0426$
hole	$y = -2E-07x^4 + 2E-05x^3 - 7E-05x^2 - 0.0047x + 0.0435$	$y = 1E-05x^3 - 2E-05x^2 - 0.0048x + 0.0436$
ver.ellips	$y = -7E-08x^4 + 1E-05x^3 - 4E-05x^2 - 0.0047x + 0.0431$	$y = 1E-05x^3 - 2E-05x^2 - 0.0048x + 0.0431$
hor.ellips	$y = 1E-09x^4 + 1E-05x^3 - 2E-05x^2 - 0.0047x + 0.0427$	$y = 1E-05x^3 - 2E-05x^2 - 0.0047x + 0.0427$

**Acknowledgment:**

Special thanks to my Supervisors, Prof. Karen Ghazariyan and Dr. Haikaz Yeghiazariyan for their important helps.

**References:**

1. Inglis, C., Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Proc Int Naval Architects.
2. Antonio Caballero , A.D., Mesh scalability in direct finite element simulation of brittle fracture. Engineering Fracture Mechanics, 2008. 75(14): p. 18.
3. Savruk, M.P., Two-dimensional Problems of Elasticity for Body with Crack. 1981, Savruk: Kiev.
4. Erdogan, F., Stress intensity factors. Applied Mechanic, 1983.
5. Sih, G.C. and H. Liebowitz, Mathematical theories of brittle fracture. Fracture. Vol. 2. 1968, New York: Academic Press.
6. Sneddon, I.N. and M. Lowengrub, Crack Problems in Classical Theory of Elasticity. 1969, New York Wiley.
7. Cervera, M. and M. Chiumenti, Mesh objective tensile cracking via a local continuum damage model and a crack tracking technique. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineerig, 2006. 196(1-3): p. 16.
8. Wei, L.-W. and M.N. James, A study of fatigue crack closure in polycarbonate CT specimens. Engineering Fracture Mechanics, 2000. 66(3): p. 20.
9. Kobayashi, A., S. Chiu, and R. Beeuwkes, Engineering Fracture Mechanics 1973. 5(2).
10. Newman, J., A finite element analysis of fatigue crack closure. Mechanics of fatigue crack growth. 1976: ASTM STP.
11. Bhatt, P., Structures. 1999: Addison Wesley Longman Limited.
12. Popov, E.P., Engineering Mechanics of Solids. first ed. 1990, New Jersey: Prentice-Hall. 760.
13. Yazdizadeh B., Some FEM models for bending and vibration problems of beam. Proceeding of Yerevan State University, 2011 (submitted).
14. Yazdizadeh B., Comparison of different PLANE Models in finite element software in structural mechanics. Proceeding of Yerevan State University, 2010. 3(6): p. 7.

**Yazdizadeh Behrooz**

PhD. Student of Department of Mechanics, Faculty of Mathematics and Mechanics, Yerevan State University, A. Manoukian St.1, Yerevan, Armenia,

E-Mail: [behyazd@gmail.com](mailto:behyazd@gmail.com)

Tell: +37494406217

Поступила в редакцию 27.05.2010

Բ Ո Վ Ա Ն Ն Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

**Բաղդասարյան Գևորգ Երվանդի** (Օննդյան 75-ամյակի առթիվ) .....3

**Ամիրջանյան Հ. Ա.** Բացարձակ կոշտ դրոշմների պարբերական համակարգի հավասարաչափ շարժումը անվերջ, սնամեջ գլանի միջով .....5

**Մելքոնյան Ա.Վ.** Առաձգական շերտում ալիքների տարածման եռաչափ խնդիր. 11

**Խաչիկյան Ա.Ս., Սահակյան Ա.Վ., Սարգսյան Վ.Գ.** Թվային և անալիտիկ լուծումների համակցման մի մոտեցման մասին ոլորման խնդրի օրինակով .....17

**Աղալովյան Լ.Ա., Սարգսյան Մ.Զ.** Մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում օրթոտրոպ սալերի սեփական տատանումների մասին .....26

**Ղուլդազարյան Գ.Ռ. , Խաչանյան Ա.Ա.** Ազատ ծայրով և մնացած եզրերով կոշտ ամրակցված, փոփոխական կորության բաց անմոմենտ օրթոտրոպ առաձգական գլանային թաղանթի տատանումները .....37

**Պետրոսյան Գ.Ա., Խաչատրյան Ա. Մ.** Անիզոտրոպ սալի մի խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը առաձգականության ոչ գծային տեսության հիման վրա .....50

**Սարգսյան Ս.Հ.** Միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի մաթեմատիկական մոդելները .....58

**Մանուկյան Վ. Ֆ.** Եռաչափ մակերևութային մագնիսաառաձգական ալիքների տարածումը իզոտրոպ և իդեալական հաղորդիչ կիսատարածությունում .....68

**Յազդիզադե Բ.** Տարբեր բեռների ազդեցության տակ գտնվող, կենտրոնում անցք և ճաք ունեցող հեծանի ծոման թվային վերլուծությունը .....73

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

<b>Геворг Ервандович Багдасарян</b> – К 75-летию со дня рождения.....	3
<b>Амирджанян А.А.</b> Равномерное движение периодической системы абсолютно жёстких штампов по внутренней поверхности бесконечного полого цилиндра .....	5
<b>Мелконян А.В.</b> Трёхмерная задача распространения волн в упругом слое .....	11
<b>Хачикян А.С., Саакян А.В., Саргсян В.Г.</b> Об одном подходе к сопряжению численного решения с аналитическим на примере задачи кручения .....	17
<b>Агаловян Л.А., Саргсян М.З.</b> О собственных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления .....	26
<b>Гулгазарян Г.Р., Хачанян А.А.</b> Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом и тремя жёстко защемлёнными краями.....	37
<b>Петросян Г.А., Хачатрян А.М.</b> Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости.....	50
<b>Саркисян С.О.</b> Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин .....	58
<b>Манукян В.Ф.</b> Распространение трехмерной поверхностной магнитоупругой волны в изотропном, идеально проводящем полупространстве .....	68
<b>Яздизаде Б.</b> Численный анализ изгиба балки под действием различных нагрузок, имеющей трещину и отверстие в центре .....	73

## CONTENTS

<b>Bagdasaryan Gevorg Ervand</b> – 75-th Anniversary .....	3
<b>Amirjanyan H. A.</b> On Uniform Motion of a Periodic System of Absolutely Rigid Stamps, in the Hollow Cylinder .....	5
<b>Melkonyan A.V.</b> Three-dimensional Problem of Wave's Propagation in Elastic Layer.....	11
<b>Khachikyan A.S., Sahakyan A.V., Sargsyan V.G.</b> On an Approach to Conjugation of Numerical and Analytical Solutions on an example of Torsion Problem .....	17
<b>Aghalovyan L.A., Sargsyan M.Z.</b> On Free Vibrations of Orthotropic Plates in the Presence of Viscous Resistance .....	26
<b>Ghulghazaryan G.R., Khachanyan A.A.</b> Vibrations of an Elastic Orthotropic Unmoment Open Cylindrical Shell with Variable Curvature and Free End, when Other Edges are Rigid–Clamped .....	37
<b>Petrosyan G.A. , Khachatryan A.M.</b> Asymptotic Solution of one Mixed Boundary Problem of Anisotropic Plate, on the Base of Geometrical Non-Linear Theory of Elasticity .....	50
<b>Sargsyan S.H.</b> General Mathematical Models of Micropolar Thin Elastic Plates .....	58
<b>Manukyan V. F.</b> The propagation of the three dimensional surface magnetoelastic wave in isotropic ideal conducting semi-space.....	68
<b>Yazdizadeh B.</b> Numerical Analyzing of Beam Bending under Different Loads Locating with Crack and Hole in Center .....	73