

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԵԼԱԿԱՆԻԿ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2010

УДК 539.3

ИЗГИБ ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ БАЛОК НА КРАЕ УПРУГОЙ
ПОЛУПЛОСКОСТИ ПЛОСКИМ ШТАМПОМ
АГАЯН К.Л.

Ключевые слова: полубесконечная балка, штамп, обобщённые функции, интегральные уравнения.

Key words: semi-infinite beam, punch, generalized functions, integral equations.

Աղայան Կ.Լ.

Առաձգական կիսահարթության եզրում երկու կիսաանվերջ հեծանների ծռումը հարթ դրոշմով

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսահարթության եզրում ազատ հենված երկու կիսաանվերջ ձողերի (սալերի – գլանային ծռման պայմաններում) ծռման կոնտակտային խնդիրը: Ծռումն իրականացվում է, ձողերի նկատմամբ համաչափ դասավորված հարթ հիմքով դրոշմով: Խնդրի լուծումը բերվում է երկու ինտեգրալ հավասարումների համակարգի–դրոշմի տակ նորմալ կոնտակտային լարման (անընդհատ կորիզով Ֆրեդհոլմի II սեռի հավասարում) և ձողերի միջև կիսահարթության եզրագծի դեֆորմացիայի (Կոշու կորիզով սինգուլյար հավասարում) նկատմամբ: Վերջիններիս լուծումները բերվում է քվադրի լիովին ռեգուլյար գծային անվերջ համակարգի: Ցույց է տրվում, որ դրոշմի ծայրակետերում առաջանում են կենտրոնացված ուժ և մոմենտ:

Aghayan K.L.

The bending of two semi-infinite beams on the edge of elastic half-plane with flat punch

The contact problem of bending of two semi-infinite beams (plates in the condition of cylindrical bending) free lying on the border of elastic half-plane is considered. The bending is carrying out by symmetrically located, with regard to beams, rigid, smooth punch with plane foundation in the framework of classical theory of beam bending. The problem solution is brought to the system of two integral equations concerning contact stresses under the punch (Fredholm equation of II type with continuous kernel) and deformation of boundary points of half-plane between beams (singular equation with Cauchy kernel). The solution of given equations are brought to quasicomplete regular infinite system of linear algebraic equations. It is shown that in the boundary points of punch the concentrated force and concentrated moment are appeared.

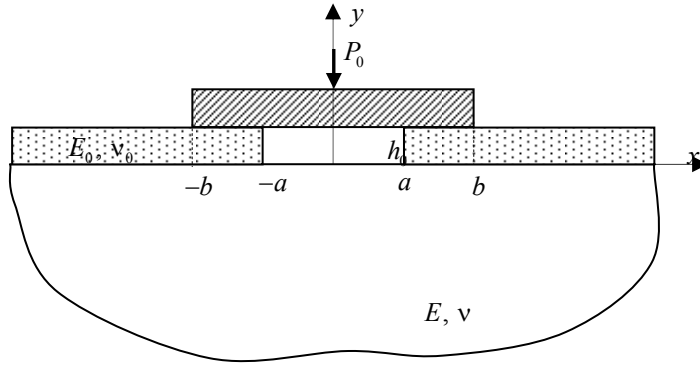
Рассматривается контактная задача об изгибе двух полубесконечных балок, свободно лежащих на границе упругой полуплоскости. Изгиб осуществляется симметрично расположенным относительно балок жестким, гладким штампом с плоским основанием в рамках классической теории изгиба балок. Решение задачи сведено к системе из двух интегральных уравнений относительно контактных напряжений под штампом (Фредгольмовское уравнение II рода с непрерывным ядром) и деформации граничных точек полуплоскости между балок (сингулярное уравнение с ядром Коши). Решение последних уравнений сведено к квазиполной регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Показано, что в крайних точках штампа возникают сосредоточенная сила и сосредоточенный момент.

В работе исследуется контактная задача об изгибе двух полубесконечных балок (пластин в условиях цилиндрического изгиба), свободно лежащих на границе упругой полуплоскости. Изгиб осуществляется симметрично расположенным относительно балок жестким гладким штампом с плоским основанием в рамках классической теории изгиба балок.

Контактные задачи о взаимодействии балок и пластин с линейно-деформированными основаниями тесно связаны с расчетами на прочность многих инженерных конструкций и их деталей. Этим и объясняется потребность более точного определения контактных напряжений в каждой конкретной задаче в этой области. Существуют многочисленные работы и монографии, посвященные исследованиям

вопросов о контактных взаимодействиях тонкостенных элементов в виде балок, плит и оболочек, лежащих на упругих основаниях с различными геометрическими формами, описываемыми разнообразными физическими моделями. Из этих работ отметим лишь [1-5], в которых исследованы задачи о контакте жесткого штампа с пластиной, лежащей на упругом основании и, тем самым, связаны с рассматриваемой здесь задачей.

1. Пусть на границе упругой полуплоскости свободно лежат две одинаковые полубесконечные балки (пластины при цилиндрическом изгибе). Пусть далее, на балки под действием вертикальной силы P_0 прижимается, симметрично расположенный относительно балок, гладкий жесткий штамп с плоским основанием (фиг.1). Предполагается, что под штампом $(x \in (-b, -a) \cup (a, b))$ и на полубесконечных контактных участках балок с полуплоскостью $(x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty))$ возникают только нормальные напряжения (касательные напряжения отсутствуют). Требуется определить эти нормальные контактные напряжения, принимая при этом двухстороннюю связь между балками и краями полуплоскости.



Фиг. 1

Обозначим через $p(x)$ и $q(x)$ соответственно, интенсивности неизвестных нормальных давлений под штампом и под полубесконечными балками и введем функции

$$P(x) = P^{(-)}(x) + P^{(+)}(x), \quad P^{(\pm)}(x) = [\vartheta(\pm x - a) - \vartheta(\pm x - b)]p(x) \\ N(x) = q^{(-a)}(x) + q^{(+a)}(x), \quad q^{(\pm a)}(x) = \vartheta(\pm x - a)q(x) \quad (1.1)$$

$$q^{(\pm b)}(x) = \vartheta(\pm x - b)q(x), \quad q^{(\pm)}(x) = q^{(\pm a)}(x) - q^{(\pm b)}(x) \\ W(x) = W^{(-)}(x) + W^{(+)}(x), \quad W^{(\pm)}(x) = \vartheta(\pm x - b) \frac{dw}{dx}, \quad (1.2)$$

где $w(x)$ – прогиб балки, $\vartheta(x)$ – функция Хевисайда.

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси балок запишется в следующем едином виде:

$$D_0 \frac{d^3 W}{dx^3} = N(x) - P(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (1.3)$$

где $D_0 = E_0 J_0$ – жесткость балки на изгиб, E_0 – её модуль упругости, J_0 – момент инерции. При цилиндрическом изгибе пластинки $D_0 = E_0 h_0^3 / 12(1 - \nu_0^2)$ (h_0 – толщина пластины, ν_0 – её коэффициент Пуассона).

Граничные условия при (1.3) будут:

$$W|_{x=\pm a \pm 0} = W'|_{x=\pm a \pm 0} = W''|_{x=\pm a \pm 0} = 0, \quad W \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Применив к (1.2) операцию дифференцирования в смысле теории обобщенных функций, имея при этом условия (1.4) и (1.1), получим:

$$D_0 \frac{d^3 W}{dx^3} = Q_b [\delta(x-b) + \delta(x+b)] + M_b [\delta(x+b) - \delta(x-b)] + q^{(-b)}(x) + q^{(b)}(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (1.5)$$

где Q_b и M_b – значения перерезывающей силы и изгибающего момента в точках $x = \pm b$ балки:

$$Q_b = D_0 \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=b+0} = -D_0 \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=-b-0}, \quad M_b = D_0 \frac{dW}{dx} \Big|_{x=b+0} = D_0 \frac{dW}{dx} \Big|_{x=-b-0} \quad (1.6)$$

Отметим, что при получении (1.5) было учтено также условие

$$W|_{x=\pm b} = 0. \quad (1.7)$$

Сопоставляя теперь (1.5) и (1.3), получим

$$p(x) = q^{(+)}(x) + q^{(-)}(x) - Q_b [\delta(x-b) + \delta(x+b)] + M_b [\delta(x+b) - \delta(x-b)], \quad (1.8)$$

которое указывает, что в граничных точках под штампом $x = \pm b$ могут возникнуть сосредоточенная сила Q_b и сосредоточенный момент M_b . При этом, из (1.8) следует, что контактное давление под штампом складывается из давления $q(x)$ ($x \in (-b, -a) \cup (a, b)$) под балкой, сосредоточенных сил Q_b и сосредоточенных моментов M_b , приложенных в граничных точках штампа [1,2].

Таким образом, имея $q(x)$, Q_b , M_b , неизвестное напряжение под штампом $p(x)$ можно определить из (1.8).

Обратимся теперь к контактным условиям. Для граничных точек полуплоскости в случае плоской деформации имеем [6]:

$$V(x) = -\frac{dv(x, 0)}{dx} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(s) ds}{s-x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.9)$$

где $v(x, 0)$ – вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости, E – модуль упругости полуплоскости, ν – ее коэффициент Пуассона.

Условие контакта между граничными точками полуплоскости и балок теперь запишется в виде:

$$V(x) = W(x) + g(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.10)$$

где $V(x)$ дается (1.9), $W(x)$ – (1.2), а

$$g(x) = [\vartheta(x+a) - \vartheta(x-a)]V(x) \quad (1.11)$$

Применив теперь к (1.5), (1.9) и (1.10) действительное преобразование Фурье, получим:

$$D_0 (-i\sigma)^3 \bar{W}(\sigma) = 2M_b \sigma \sin(b\sigma) + 2Q_b \cos(b\sigma) - \bar{q}^{(-b)}(\sigma) - \bar{q}^{(b)}(\sigma) \quad (1.12)$$

$$\bar{V}(\sigma) = -2(1-\nu^2) E^{-1} i \operatorname{sgn} \sigma (\bar{q}^{(-a)}(\sigma) + \bar{q}^{(a)}(\sigma)) \quad (1.13)$$

$$\bar{V}(\sigma) = \bar{W}(\sigma) + \bar{g}(\sigma) \quad (1.14)$$

где $\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx$, $-\infty < \sigma < \infty$.

Подставляя (1.12) и (1.13) в (1.14), получим

$$\begin{aligned} (\lambda + |\sigma|^3) [\bar{q}^{(-a)}(\sigma) + \bar{q}^{(a)}(\sigma)] &= 2\lambda [Q_b \cos(b\sigma) + M_b \sigma \sin(b\sigma)] + \\ &+ \lambda [\bar{q}^{(-)}(\sigma) + \bar{q}^{(+)}(\sigma)] + i\lambda^* \sigma^3 \bar{g}(\sigma), \\ \bar{q}^{(\pm a)}(\sigma) &= \bar{q}^{(\pm b)}(\sigma) + \bar{q}^{(\pm)}(\sigma). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим, что при цилиндрическом изгибе пластинок

$$\lambda = 6E(1 - \nu_0^2) / E_0 h_0^3 (1 - \nu^2); \quad \lambda^* = E/2(1 - \nu^2). \quad (1.16)$$

Применив к (1.15) обратное преобразование Фурье и имея в виду (1.11), после некоторых выкладок приходим к уравнению

$$\begin{aligned} q^{(-a)}(x) + q^{(a)}(x) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [q^{(-)}(s) + q^{(+)}(s)] K_c(x-s) ds - \\ &- \frac{\lambda^*}{\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{s-x} + K_s(s-x) \right] g(s) ds + \lambda M_b [K'_c(x+b) - K'_c(x-b)] + \\ &+ \lambda Q_b [K_c(x-b) + K_c(x+b)], \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$K_c(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\sigma x) d\sigma}{\lambda + |\sigma|^3}, \quad K_s(x) = -\lambda \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sigma x) d\sigma}{\lambda + |\sigma|^3} \quad (1.18)$$

Имея в виду чётность контактных напряжений ($q(x) = q(-x)$) и тот факт, что при $x \in (a, b)$ $q^{(a)}(x) = q^{(+)}(x)$ из (1.17), приходим к следующему интегральному уравнению Фредгольма II рода относительно контактных напряжений $q^{(+)}(x)$:

$$\begin{aligned} q^{(+)}(x) &= \lambda \int_a^b R(x, s) q^{(+)}(s) ds - \frac{\lambda^*}{\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{t-x} + K(t, x) \right] g(t) dt + \\ &+ \lambda M_b f_2(x) + \lambda Q_b f_1(x), \quad a < x < b \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} R(x, s) &= K_c(x-s) + K_c(x+s); \quad K(t, x) = K_s(t-x), \\ f_1(x) &= R(x, b), \quad f_2(x) = K'_c(x-b) - K'_c(x+b). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Предполагая теперь, что $x \in (-a, a)$, где $q^{(-a)}(x) = q^{(a)}(x) \equiv 0$, то опять из (1.17) получим сингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b R(x, s) q^{(+)}(s) ds - \frac{\lambda^*}{\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{t-x} + K(t, x) \right] g(s) ds + \\ + \lambda Q_b f_1(x) + \lambda M_b f_2(x) &= 0, \quad -a < x < a \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $R(x, s)$, $K(t, x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ даются формулами (1.20).

К уравнениям (1.19) и (1.2) следует присоединить условия, вытекающие из равновесия штампа и полубесконечной балки:

$$2Q_b = P_0 - 2 \int_a^b q^{(+)}(x) dx, \quad M_b = \int_b^\infty (x-b) q^{(b)}(x) dx \quad (1.22)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы интегральных уравнений (1.19) (уравнение Фредгольма II рода) и (1.21) (сингулярное уравнение с ядром Коши) с условиями (1.22).

После определения из (1.19) и (1.21) $q^+(x)$ и $g(x)$, контактные напряжения $q^{(b)}(x)$ будут даваться по формуле (1.17), принимая там $x \in (+b, \infty)$.

2. Приступим к решению системы (1.19)–(1.22).

При помощи замены переменных

$$x = \alpha x_1 + a, \quad t = at_1, \quad \alpha = (b-a)/\pi \quad (2.1)$$

приведем их к виду (индексы при x_1 и t_1 опускаем)

$$q_1(x) - \lambda \alpha \int_0^\pi R_1(x, s) q_1(s) ds + \frac{\lambda^*}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{t - \alpha x - 1} + a K_1(t, x) \right] \times \\ \times g_1(t) dt = F_1(x), \quad 0 < x < \pi \quad (2.2)$$

$$\lambda \alpha \int_0^\pi R_2(x, s) q_1(s) ds + \frac{\lambda^*}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{t - x} + a K_2(t, x) \right] \times \\ \times g_1(t) dt = F_2(x), \quad -1 < x < 1 \quad (2.3)$$

где $q_1(x) = q^{(+)}(\alpha x + a)$, $g_1(t) = g(at)$

$$R_1(x, s) = R(\alpha x + a, \alpha s + a), \quad K_1(t, x) = K(\alpha t, \alpha x + a) \\ R_2(x, s) = R(\alpha x, \alpha s + a), \quad K_2(t, x) = K(\alpha t, \alpha x) \\ F_1(x) = \lambda Q_b f_1(\alpha x + a) + \lambda M_b f_2(\alpha x + a), \quad F_2(x) = \lambda Q_b f_1(\alpha x) + \lambda M_b f_2(\alpha x) \quad (2.4)$$

Имея в виду [7, 8]

$$q^{(+)}(x) \sim (x-a)^{-1/2} \text{ при } x \rightarrow a+0, \quad V(x) \sim (a^2 - x^2)^{-1/2} \text{ при } x \rightarrow \pm a \mp 0, \quad (2.5)$$

решения (2.2) и (2.3) ищем в виде разложений

$$q_1(x) = A_0 x^{-1/2} + a_0/2 + \sum_{n=1}^\infty n^{\varepsilon_1} a_n \cos nx, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1/2 \quad (2.6)$$

$$g_1(t) = \sum_{n=1}^\infty n^{-\varepsilon_2} b_n (1-t^2)^{-1/2} T_{2n-1}(t), \quad -1 < t < 1, \quad 0 < \varepsilon_2 < 1/2 \quad (2.7)$$

где $A_0, B_0, \{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, а $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – многочлены Чебышева II рода.

Правая часть $F_1(x)$ уравнения (2.2) непрерывна на отрезке $[0, \pi]$. Тогда, подставляя (2.6) и (2.7) в уравнение (2.2) и имея в виду значение интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s)}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} ds = (-1)^{n+1} \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)^n}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.8)$$

получим

$$A_0 = \lambda^* \sqrt{a/2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon_2} b_n. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (2.2) и (2.3) по обычной процедуре, для определения неизвестных коэффициентов $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ получим следующую систему бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$a_k + \sum_{n=0}^{\infty} R_{kn}^{(11)} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} R_{kn}^{(12)} b_n = c_k^{(1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

$$b^k + \sum_{n=1}^{\infty} R_{kn}^{(21)} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} R_{kn}^{(22)} b_n = c_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} R_{kn}^{(11)} &= \frac{\lambda \alpha}{\pi} \frac{\delta_{on} - 2}{\rho_k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \int_0^{\pi} R_1(x, s) \cos ns ds \\ R_{kn}^{(12)} &= \frac{2\lambda^*}{\pi} \frac{1}{n^{\varepsilon_2} \rho_k} \int_0^{\pi} \left[\sqrt{(\alpha_1 x + 1)^2 - 1} - \alpha_1 x - 1 \right]^{2n} \cos kx dx + \\ &+ \frac{2\lambda^* a}{\pi^2} \frac{1}{n^{\varepsilon_2} \rho_k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \int_{-1}^1 K_1(t, x) (1-t^2)^{-1/2} T_{2n-1}(t) dt \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} R_{kn}^{(21)} &= \frac{\alpha \lambda}{\lambda^* \rho_k} (\delta_{on} - 2) k^{\varepsilon_2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n-2}(x) dx \int_0^{\pi} R_2(x, s) \cos ns ds \\ R_{kn}^{(22)} &= -2a \frac{k^{\varepsilon_2}}{n^{\varepsilon_2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n-2}(x) dx \int_{-1}^1 K_2(t, x) (1-t^2)^{-1/2} T_{2n-1}(t) dt \\ c_k^{(1)} &= \frac{2}{\pi \rho_k} \int_0^{\pi} \left[F_1(x) - \frac{A_0}{\sqrt{x}} - 2a \lambda A_0 \int_0^{\pi} \frac{R_1(x, s)}{\sqrt{s}} ds \right] \cos kx dx \quad k = \overline{0, \infty} \\ c_k^{(2)} &= \frac{2k^{\varepsilon_2}}{\lambda^*} \int_{-1}^1 \left[\lambda \alpha A_0 \int_0^{\pi} \frac{R_2(x, s)}{\sqrt{s}} ds - F_2(x) \right] \sqrt{1-x^2} U_{2n-2}(x) dx \quad k = \overline{1, \infty} \end{aligned} \quad (2.12)$$

где δ_{ik} – символ Кронеккера,

$U_{k-1}(x) = \sin(k \arccos x) / \sin(\arccos x)$ ($k = 1, 2, \dots$) – многочлены Чебышева второго рода,

$$\alpha_1 = \alpha/a, \quad \rho_k = k^{\varepsilon_1} + \delta_{0k}. \quad (2.13)$$

Отметим, что при получении (2.10) была использована ортогональность функции $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ в $(0, \pi)$ и $\{U_{n-1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $(-1, 1)$ с весом $(1-x^2)^{1/2}$, а также интегральное соотношение (2.8).

Для исследования бесконечных систем (2.10) на регулярность, представим первое слагаемое $R_{kn}^{(12)}$ из (2.11) в виде

$$\left(R_{kn}^{(12)} \right)_1 = -\frac{2\lambda^* \beta}{\pi n^{\varepsilon_2}} \int_1^{b/a} \frac{\left(t - \sqrt{t^2 - 1} \right)^{2n-1} \cos k\beta(t-1)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt, \quad \beta = a/\alpha.$$

Тогда будем иметь:

$$\left| \left(R_{kn}^{(12)} \right)_1 \right| \leq \frac{2\lambda^* \beta}{\pi n^{\varepsilon_2}} \int_0^{\chi} e^{-(2n-1)s} ds = \frac{2\lambda^* \beta}{\pi(2n-1)n^{\varepsilon}} \left(1 - e^{-(2n-1)\chi} \right), \quad \text{ch} \chi = \beta. \quad (2.14)$$

Остальные ядра из (2.10) можно исследовать известными [5,9] способами и, тем самым, убедиться, что бесконечная система (2.10), по крайней мере, квазивполне регулярна при всех значениях λ ($0 < \lambda < \infty$).

Присоединяя к (2.10) условия (1.22), (1.23) и (2.9), получим замкнутую систему для определения неизвестных $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, Q_b, M_b$ и A_0 . Имея значения этих величин, контактное давление под штампом можно определить по формуле (1.8), а контактные напряжения под балками – (2.6) и (1.17).

При больших значениях $|x|$, из (1.15) получим асимптотическую формулу, представляющую распределение контактных напряжений под балками при $|x| \rightarrow \infty$:

$$q(x) = -\frac{6}{\pi\lambda} (2Q_b + T_0) x^{-4} + \frac{60}{\pi\lambda} (4\lambda b M_b - 2b^2 Q_b + T_2) x^{-6} + O(x^{-8}), \quad (2.15)$$

$$T_j = 2 \int_a^b s^j q^{(+)}(s) ds, \quad (j = 0, 2)$$

Из (2.15) следует, что при больших значениях $|x|$ контактные напряжения становятся растягивающими. Из формулы (2.15) можно судить о скорости убывания контактных напряжений в зависимости от силовых факторов Q_b, M_b и $q^{(+)}(x)$.

3. Коротко остановимся на частном случае задачи, когда $a = 0$, т.е. рассмотрим контактную задачу, когда бесконечная балка (пластина), лежащая на границе упругой полуплоскости, изгибается гладким плоским штампом. Решение задачи в этом случае, как следует из (1.19), сводится к интегральному уравнению

$$q(x) = \int_0^1 K(x, s) q(s) ds + \frac{Q_b}{b} f_Q(x) + \frac{M_b}{b^2} f_M(x) \quad (0 < x < 1) \quad (3.1)$$

$$K(x, s) = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\sigma x) \cos(\sigma s)}{\lambda + \sigma^3} d\sigma$$

$$f_Q(x) = K(x, 1), \quad f_M(x) = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma \sin(\sigma) \cos(\sigma x)}{\lambda + \sigma^3} d\sigma. \quad (3.2)$$

Постоянные Q_b и M_b определяются из (1.22) и имеют вид:

$$Q_b/P_0 = (1 + A_2 - B_2 + I_2^*) / (B_M (3 - A_1 - I_3^*)) + (2 + B_1)(1 + A_2 + I_2^*)$$

$$M_b/bP_0 = B_2 / (1 - (2 + B_1)Q_b/P_0)$$

$$A_j = \int_0^1 I_1^*(x) q_j(x) dx, \quad B_j = 2 \int_0^1 q_j(x) dx, \quad B_j \quad (j = 1, 2)$$

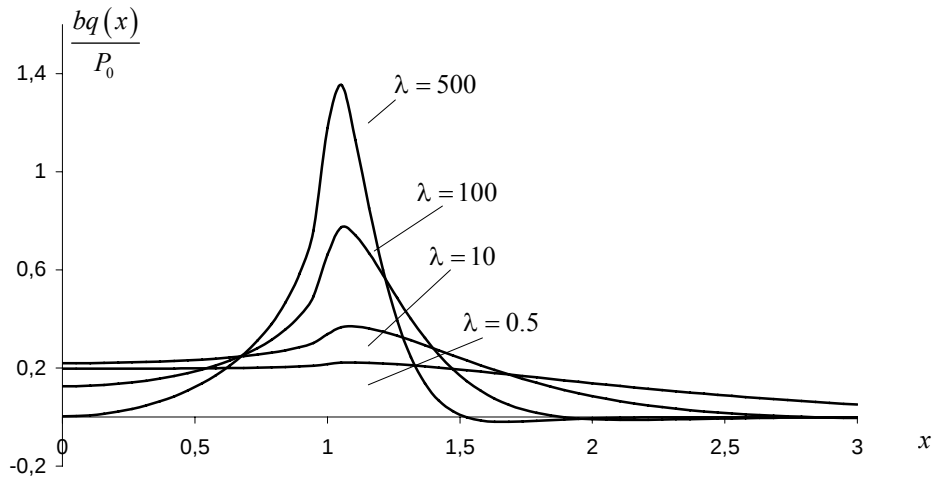
$$I_1^*(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma^2 \cos(\sigma) - \lambda \sin(\sigma)}{\sigma(\lambda + \sigma^3)} \cos(\sigma x) d\sigma$$

$$I_2^*(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 + \sin(2\sigma) - \sigma \cos(2\sigma)}{\lambda + \sigma^3} d\sigma$$

$$I_3^*(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\sin(2\sigma)}{\sigma(\lambda + \sigma^3)} + \frac{6\sigma \cos^2(\sigma)}{(\lambda + \sigma^3)^2} \right] d\sigma$$

где $q_1(x)$ – решение уравнения (3.1) при $b^{-1}Q_b = 1$, $M_a = 0$, а $q_2(x)$ – при $Q_a = 0$, $b^{-2}M_b = 1$. Имея решение уравнения (3.1), контактные напряжения вне штампа опять определяются из (3.1), принимая там $x \geq 1$.

На фиг.2 приведены графики распределения контактных напряжений, а в таблице – значения постоянных Q_b и M_b для некоторых значений параметра λ .



Фиг.2

Таблица

λ	0.5	1	5	10	30	100	500
Q_b	0.3232	0.2999	0.2674	0.2564	0.2584	0.2657	0.2763
M_b	0.2283	0.1781	0.1226	0.0976	0.0755	0.0542	0.0331

Как можно заметить из таблицы, с увеличением параметра λ , т.е. с уменьшением жесткости пластины, величина Q_b сначала заметно убывает, а затем медленно возрастает, в то время как M_b монотонно убывает. Из графиков же непосредственно видно, что почти равномерное распределение контактного давления в зоне действия штампа приближается к „сосредоточенной” силе под краем штампа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М. Некоторые контактные задачи для балок, пластин и оболочек. //Инж. ж. 1965. Т.5. №4. С.782-785.
2. Ефимов А.Б., Малый В.И., Толкачева Н.М. Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием. //МТТ. 1969. №1. С.167-171.
3. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием. //ПММ. 1975. Т.39. Вып.5.
4. Александров В.М., Шленев М.А. Плоские задачи о вдавливании штампа в пластинку Рейснера, лежащую на основании Фусса–Винклера. / В кн.: Теория плит и оболочек. – Ростов–на–Дону. Изд. Ростовск. Инж.-строит. ин-та, 1972.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
6. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
7. Григорян Э.Х. Изгиб двух полубесконечных балок, лежащих на границе упругой полуплоскости. //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.20–30.
8. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С.5–19.
9. Агаян К.Л. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками.// МТТ. 1972. №5. С.34-45.

Сведения об авторе:

Агаян Каро Леренцович – канд. физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении,
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24^б
E-mail: karo-aga@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 28.12.2009

УДК 539.3

О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКОГО
ВКЛЮЧЕНИЯ В СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

АКОПЯН В.Н., САРГСЯН А.О.

Ключевые слова: включение, контактные напряжения, составная полуплоскость, ортогональные многочлены.

Key words: inclusion, contact stresses, compound half-plane, orthogonal polynomials.

Հակոբյան Վ.Ն., Սարգսյան Ա.Օ.

Բաղադրյալ առաձգական կիսահարթության մեջ բացարձակ կոշտ ներդրակի շրջակայքում
լարումների կոնցենտրացիայի մասին

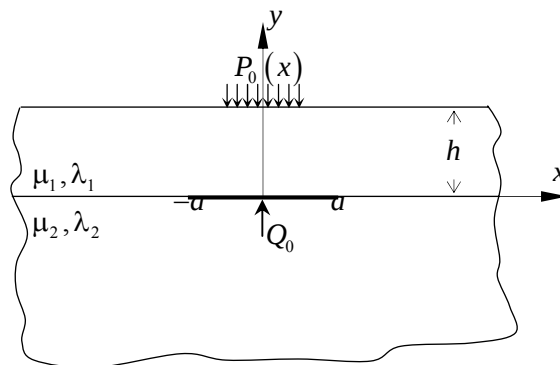
Դիտարկված է շերտից և կիսահարթությունից կազմված բաղադրյալ կիսահարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն տարբեր նյութերի միացման գծի վրա պարունակում է բացարձակ կոշտ, բարակ ներդրակ: Ստացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները, երբ ներդրակը հարակցված է կիսահարթությանը, իսկ շերտի հետ գտնվում է ողորկ կոնտակտի պայմաններում: Ուսումնասիրված է որոնելի ֆունկցիաների վարքը ներդրակի ծայրակետերում և կառուցված է խնդրի լուծումը օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ:

Hakobyan V.N., Sargsyan A.H.

Stress Concentration Near the Absolutely Rigid Inclusion in Compound Elastic Half-Plane

A plane stress-strain state of composite half-plane containing rigid thin inclusion on the interface of different materials is considered. The governing system of singular integral equations of the problem is derived, when one side of inclusion is rigidly fastened with the matrix, and the other side is in smooth contact. The behavior of the unknown functions at the endpoints of inclusion depending on the physical parameters is studied and solution of the problem by the method of orthogonal polynomials is constructed.

Исследованию напряженно-деформированного состояния однородных и составных массивных тел, содержащих абсолютно жесткие включения, посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных исследователей. Из них особо отметим работы [1-6], которые непосредственно связаны с настоящей работой. Здесь рассмотрено плоско-деформированное состояние составной полуплоскости, содержащей на линии стыка различных материалов абсолютно жесткое тонкое включение. Выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений поставленной задачи, когда одна из боковых сторон включения жестко сцеплена с матрицей, а другая сторона находится в условиях гладкого контакта. Изучено поведение искомых функций в концевых точках включения в зависимости от физических параметров и построено решение задачи методом ортогональных многочленов.



Փիգ.1

1. Рассмотрим плоско-деформированное состояние составной полуплоскости, состоящей из бесконечной упругой полосы толщиной h и упругой полуплоскости с коэффициентами Лямэ μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2 , когда на линии их соединения имеется

абсолютно жесткое тонкое включение длиной $2a$, нижняя сторона которого жестко сцеплена с упругой полуплоскостью, а верхняя сторона гладко контактирует с полосой (фиг.1). Будем считать, что составная полуплоскость деформируется под действием симметричной относительно оси OY нормальной распределенной нагрузки $P_0(x)$, приложенной к свободной границе полосы $y = h$, и сосредоточенной силы Q_0 , перпендикулярно приложенной к центру включения.

Ставится задача: определить контактные напряжения под включением, коэффициенты интенсивности в концевых точках включения и изучить закономерности изменения этих величин в зависимости от физических и геометрических характеристик поставленной задачи.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\sigma_y^{(1)}(x, h) = P_0(x), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, h) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.1a)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0), & \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) \\ U_1(x, 0) = U_2(x, 0), & V_1(x, 0) = V_2(x, 0) \end{cases} \quad (|x| > a) \quad (1.1б)$$

$$\begin{cases} V_1(x, +0) = V_2(x, -0) = \delta \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, +0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, -0) = 0 \end{cases} \quad |x| < a \quad (1.1в)$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ ($j = 1, 2$) – соответственно нормальные и касательные компоненты напряжений полосы и полуплоскости, $U_j(x, y)$ и $V_j(x, y)$ – горизонтальные и вертикальные смещения точек полосы и полуплоскости, а δ – неизвестная постоянная, характеризующая жесткое смещение включения.

Чтобы решить поставленную задачу, как обычно, введем в рассмотрение функции скачков.

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \begin{cases} 0, & |x| > a \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0), & |x| < a \end{cases} \\ \tau(x) &= \begin{cases} 0, & |x| > a \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), & |x| < a \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ U_1(x, 0) - U_2(x, 0), & |x| < a \end{cases}$$

$$V(x) = V_1(x, 0) - V_2(x, 0) = 0, \quad (-\infty < x < \infty)$$

Учитывая (1.2), решим задачу при условиях (1.1a)–(1.1б) и выразим компоненты напряжений и смещений через функции скачков. Далее удовлетворим условиям (1.1в), предварительно продифференцировав первое из них. В итоге придем к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{d_0}{\Delta_*} \sigma(x) - \frac{l_0}{\Delta_*} U'(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\tau(s) d(s)}{s-x} + \int_{-a}^a K_{11}^*(x-s) \sigma(s) ds + \\
& + \int_{-a}^a K_{12}^*(x-s) \tau(s) ds + \int_{-a}^a K_{13}^*(x-s) U'(s) ds = -F_1(x) \\
& \frac{d_0}{\Delta_*} \tau(x) + \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s) ds}{s-x} + \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s) ds}{s-x} - \int_{-a}^a K_{21}^*(x-s) \sigma(s) ds - \\
& - \int_{-a}^a K_{22}^*(x-s) \tau(s) ds + \int_{-a}^a K_{23}^*(x-s) U'(s) ds = F_2(x) \\
& \frac{l_0}{\Delta_*} \tau(x) - \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s) ds}{s-x} - \frac{l_3}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a K_{31}^*(x-s) \sigma(s) ds + \\
& + \int_{-a}^a K_{32}^*(x-s) \tau(s) ds + \int_{-a}^a K_{33}^*(x-s) U'(s) ds = -F_3(x)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}
K_{ij}^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{ij}(s) e^{ist} ds \\
Q_{11}(s) &= \frac{s \Delta_B^{(\sigma)}(s)}{i \Delta(s)} - \frac{d_0}{\Delta_*}; \quad Q_{12}(s) = \frac{s \Delta_B^{(\tau)}(s)}{i \Delta(s)} + \frac{d_1}{i \Delta_*} \operatorname{sgn} s; \quad Q_{13}(s) = \frac{\Delta_B^{(U)}(s)}{\Delta(s)} + \frac{l_0}{\Delta_*}; \\
Q_{21}(s) &= \frac{s \Delta_c^{(\sigma)}(s)}{i \Delta(s)} + \frac{d_1}{i \Delta_*} \operatorname{sgn} s; \quad Q_{22}(s) = \frac{s \Delta_c^{(\tau)}(s)}{i \Delta(s)} + \frac{d_0}{\Delta_*}; \quad Q_{23}(s) = \frac{\Delta_c^{(U)}(s)}{\Delta(s)} + \frac{l_2 \operatorname{sgn} s}{i \Delta_*}; \\
Q_{31}(s) &= 2 \vartheta_2^{(2)} \left[\frac{|s| \Delta_B^{(\sigma)}(s)}{\Delta(s)} + \frac{\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}}{2i \Delta_*} \operatorname{sgn} s \right] + 2 \vartheta_1^{(2)} Q_{21}(s); \\
Q_{32}(s) &= 2 \vartheta_2^{(2)} \left[\frac{|s| \Delta_B^{(\tau)}(s)}{\Delta(s)} + \frac{\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}}{2i \Delta_*} \operatorname{sgn} s \right] + 2 \vartheta_1^{(2)} Q_{22}(s); \\
Q_{33}(s) &= 2i \vartheta_2^{(2)} \left[\frac{\Delta_B^{(U)}(s)}{\Delta(s)} + \frac{l_0}{\Delta_*} \right] + 2 \vartheta_1^{(2)} Q_{23}(s); \\
\Delta(s) &= s^2 \left\{ \left[\left(\vartheta_2^{(2)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(2)} \right)^2 \right] \operatorname{ch}^2 z + \left(\vartheta_2^{(2)} \right)^2 \left[C_{11}^2 - \left(\frac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_2^{(1)}} \right)^2 \right] \operatorname{sh}^2 z + \right. \\
& \quad \left. + 2 \left(\vartheta_2^{(2)} \right)^2 \left[C_{11} - \frac{\vartheta_1^{(1)} (\vartheta_1^{(2)})}{\vartheta_2^{(1)} (\vartheta_2^{(2)})} \right] \operatorname{sh} |z| \operatorname{ch} z - \frac{\mu_1^2 z^2}{H_1^2} \left[C_{12}^2 - \left(\frac{\vartheta_2^{(2)}}{\vartheta_2^{(1)}} \right)^2 \right] \right\}; \\
\Delta_c^{(\sigma)}(s) &= -\frac{|s|}{2} \left\{ \vartheta_2^{(1)} \left[\operatorname{ch}^2 z - \left(\frac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_2^{(1)}} \right)^2 \operatorname{sh}^2 z \right] + \frac{\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2}{\vartheta_2^{(1)}} \operatorname{sh} |z| \operatorname{ch} z + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_1 (\mathfrak{g}_2^{(2)} + \mathfrak{g}_1^{(1)})}{H_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}} |z| + \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)} \mu_1^2}{H_1^2 (\mathfrak{g}_2^{(1)})^2} z^2 \Big\} \\
\Delta_B^{(\sigma)}(s) &= -\Delta_C^{(\tau)}(s) = -\frac{s}{2i} \left\{ \frac{\mathfrak{g}_1^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} C_{11} \text{sh}^2(hs) - \mathfrak{g}_1^{(2)} \text{ch}^2(hs) - \frac{\mu_1^2 C_{12}}{H_1^2 \mathfrak{g}_2^{(1)}} (hs)^2 \right\} \\
\Delta_B^{(\tau)}(s) &= -\frac{|s|}{2} \left\{ \frac{(\mathfrak{g}_2^{(1)})^2 - (\mathfrak{g}_1^{(1)})^2}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \text{ch}(hs) \text{sh}|hs| + \mathfrak{g}_2^{(2)} \left[\text{sh}^2(hs) - \left(\frac{\mathfrak{g}_1^{(1)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \right)^2 \text{sh}^2(hs) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu_1 (\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_1^{(1)})}{H_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}} |hs| + \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)} \mu_1^2}{H_1^2 (\mathfrak{g}_2^{(1)})^2} (hs)^2 \right\}; \\
\Delta_C^{(U)}(s) &= -\frac{s|s|(\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_1^{(1)})}{i\mathfrak{g}_2^{(1)}} \left\{ (\mathfrak{g}_2^{(1)} - \mathfrak{g}_1^{(1)}) \left[\mathfrak{g}_1^{(2)} \text{ch}(hs) \text{sh}|hs| + \frac{\mathfrak{g}_1^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \text{sh}^2(hs) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\mathfrak{g}_1^{(2)} \mu_1}{H_1} |hs| + \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)} \mu_1^2}{H_1^2 \mathfrak{g}_2^{(1)}} (hs)^2 \right\}; \\
\Delta_B^{(U)}(s) &= -\frac{s^2 (\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_1^{(1)}) \partial_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \left\{ (\mathfrak{g}_2^{(1)} - \mathfrak{g}_1^{(1)}) [C_{11} \text{sh}^2(hs) + \text{ch}(hs) \text{sh}|hs|] + \frac{\mu_1}{H_1} |hs| + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\mu_1^2 C_{12}}{H_1^2 \mathfrak{g}_2^{(2)}} (hs)^2 \right\}; \\
F_1(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \Delta_B^{(p)}(s)}{\Delta(s)} \bar{P}_0(s) e^{-isx} ds; \quad F_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \Delta_C^{(p)}(s)}{\Delta(s)} \bar{P}_0(s) e^{-isx} ds; \\
F_3(x) &= 2\mathfrak{g}_1^{(2)} F_2(x) + \frac{\lambda \mathfrak{g}_2^{(2)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s| \Delta_B^{(p)}(s)}{\Delta(s)} \bar{P}_0(s) e^{-isx} ds; \\
\Delta_B^{(p)}(s) &= \frac{is\mathfrak{g}_1^{(2)}}{2} \left\{ \text{ch}z + \frac{\mathfrak{g}_1^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_1^{(2)} \mathfrak{g}_2^{(1)}} \text{sh}|z| - \frac{\mu_1 |z|}{H_1 \mathfrak{g}_1^{(2)}} \left[\frac{\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \text{ch}z - C_{12} \text{sh}|z| \right] \right\}; \\
\Delta_C^{(p)}(s) &= \frac{|s| \mathfrak{g}_2^{(2)}}{2} \left\{ \text{ch}z + C_{11} \text{sh}|z| - \frac{\mu_1 |z|}{H_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}} \left[C_{12} \text{ch}z - \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \text{sh}|z| \right] \right\}; \quad (z = hs) \\
C_{11} &= \frac{(\mathfrak{g}_2^{(1)})^2 + \mathfrak{g}_1^{(1)} (\mathfrak{g}_1^{(2)} - \mathfrak{g}_1^{(1)})}{\mathfrak{g}_2^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)}}; \quad C_{12} = \frac{\mathfrak{g}_1^{(2)} - \mathfrak{g}_1^{(1)} - \mathfrak{g}_2^{(1)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}}; \\
\mathfrak{g}_1^{(j)} &= \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad \mathfrak{g}_2^{(j)} = \frac{\mu_j (\lambda_j + 2\mu_j)}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad d_0 = \frac{\mathfrak{g}_1^{(1)} - \mathfrak{g}_1^{(2)}}{2}; \quad d_1 = \frac{\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_2^{(2)}}{2}; \\
l_0 &= \mathfrak{g}_2^{(1)} (\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_2^{(2)}) - \mathfrak{g}_1^{(1)} (\mathfrak{g}_1^{(1)} - \mathfrak{g}_1^{(2)}); \quad l_1 = 2(\mathfrak{g}_1^{(2)} l_0 - \mathfrak{g}_2^{(2)} l_2); \\
l_2 &= \mathfrak{g}_1^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)} + \mathfrak{g}_2^{(1)} \mathfrak{g}_1^{(2)}; \quad l_3 = 2(\mathfrak{g}_1^{(2)} l_2 - \mathfrak{g}_2^{(2)} l_0); \quad \Delta_* = [\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_2^{(2)}]^2 - [\mathfrak{g}_1^{(1)} - \mathfrak{g}_1^{(2)}]^2.
\end{aligned}$$

При этом, искомые функции должны удовлетворять условиям равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках включения, т.е. условиям

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = Q_0; \quad \int_{-a}^a \tau(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a U'(x) dx = 0 \quad (1.4)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.3) при условиях (1.4).

2. Прежде чем перейти к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.3) при условиях (1.4), определим поведение искомых функций в концевых точках интервала $(-a, a)$. Для этого сперва рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда толщина полосы бесконечно большая, т.е. рассмотрим напряженное состояние составной плоскости из двух разнородных полуплоскостей, содержащей включение на линии их соединения. В этом случае система (1.3) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d_0}{\Delta_*} \sigma(x) - \frac{l_0}{\Delta_*} U'(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds = 0 \\ \frac{d_0}{\Delta_*} \tau(x) + \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s)}{s-x} ds = 0 \\ \frac{l_0}{\Delta_*} \tau(x) - \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_3}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s)}{s-x} ds = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Отметим, что последняя задача методом комплексных потенциалов не полностью была рассмотрена в работе [5].

Построим решение системы (2.1) при условиях (1.4). С этой целью исключим из последних двух уравнений (2.1) функцию $\tau(x)$. Получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{M \sigma(s) + N U'(s)}{s-x} ds = 0$$

$$\left(M = l_0 d_1 + l_2 d_0 = \mathfrak{G}_2^{(1)} \Delta_* / 2; \quad N = \mathfrak{G}_1^{(2)} \mathfrak{G}_2^{(1)} \Delta_* \right),$$

откуда [7]

$$M \sigma(x) + N U'(x) = \frac{C_0}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (2.2)$$

где C_0 – неизвестная постоянная.

Интегрируя уравнение (2.2) от $-a$ до a и учитывая условия (1.4), для неизвестной постоянной C_0 получим следующее значение:

$$C_0 = M Q_0 \quad (2.3)$$

Далее, выразим из (2.2) функцию $U'(x)$ через функцию $\sigma(x)$ и подставим в первые два уравнения (2.1). В итоге, для определения скачков напряжений получим следующую систему двух сингулярных интегральных уравнений:

$$\sigma(x) - \frac{\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s) ds}{s-x} = \frac{Q_0^*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \tau(x) - \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds = 0 \quad (2.4)$$

Здесь

$$Q_0^* = l_0 Q_0 / \tilde{\Delta}; \quad \tilde{\Delta} = \vartheta_2^{(1)} (\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}) - (\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)})^2;$$

$$\alpha = \vartheta_1^{(2)} (\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}) / \tilde{\Delta}; \quad \beta = \vartheta_2^{(2)} / \vartheta_1^{(2)}.$$

Заметим, что система (2.4) верна только в случае $\tilde{\Delta} \neq 0$. В этом случае, введя функции

$$\varphi_j(x) = \sigma(x) + \lambda_j^* \tau(x); \quad (\lambda_j^* = (-1)^{j+1} \sqrt{\alpha/\beta}; \quad j=1,2),$$

систему уравнений (2.4) представим в виде двух отдельных сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) + \frac{q_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds &= \frac{Q_0^*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}; \\ (-a < x < a, \quad q_j &= (-1)^j \sqrt{\alpha\beta}, \quad j=1,2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом,

$$\int_{-a}^a \varphi_j(x) dx = Q_0 \quad (j=1,2). \quad (2.6)$$

Сначала рассмотрим случай, когда q_j ($j=1,2$) – действительные числа, т.е. когда $\tilde{\Delta} > 0$. Тогда можем записать

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1+q_j^2} \left[g(x) - \frac{q_j X_j^+(x)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g(s) ds}{X_j^+(s)(s-x)} \right] + C_j X_j^+(x) \quad (2.7)$$

$$X_j(z) = (z+a)^{-\gamma_j} (z-a)^{\gamma_j-1}; \quad \gamma_j = \frac{1}{2\pi i} \ln |G_j| + \frac{\vartheta_j}{2\pi} = \frac{\vartheta_j}{2\pi};$$

$$0 < \vartheta_j = \arg G_j < 2\pi; \quad G_j = \frac{1-iq_j}{1+iq_j}; \quad |G_j| = 1; \quad g(x) = \frac{Q_0^*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Удовлетворяя условию (2.6), найдем

$$C_j = -Q_0 \frac{\sin \pi \alpha_j}{\pi \sqrt{G_j}} \quad (j=1,2).$$

Определим нормальные и касательные составляющие скачков напряжений на включении. Имеем

$$\sigma(x) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2}; \quad \tau(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{2\lambda^*}$$

Подставляя сюда значения функций $\varphi_j(x)$ ($j=1,2$) из (2.7) и учитывая, что

$$\frac{X_1^+(x)}{X_1^+(s)} = \frac{\omega(x)}{\omega(s)}; \quad \frac{X_2^+(x)}{X_2^+(s)} = \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)}; \quad q_j = (-1)^j q; \quad q = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \bar{G}_2 = G_1;$$

$$\vartheta_2 = 2\pi - \vartheta_1; \quad \gamma_2 = 1 - \gamma_1; \quad \omega(x) = (a+x)^{-\gamma_1} (a-x)^{\gamma_1-1};$$

получим

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+q^2} \left\{ \frac{2Q_0^*}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{Q_0^*}{2\pi^2} \int_{-a}^a \left[\frac{\omega(x)}{\omega(s)} - \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)} \right] \frac{(a^2-s^2)^{-1/2} ds}{(s-x)} \right\} + \quad (2.8)$$

$$+ \frac{Q_0 \sin \pi \gamma_1}{\pi} [\omega(x) + \omega(-x)];$$

$$\tau(x) = \frac{qQ_0^*}{2\pi^2 \lambda^* (1+q^2)} \int_{-a}^a \left[\frac{\omega(x)}{\omega(s)} + \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)} \right] \frac{ds}{\sqrt{a^2-s^2}(s-x)} + \quad (2.9)$$

$$+ \frac{Q_0 \sin \pi \gamma_1}{\pi} [\omega(x) - \omega(-x)].$$

Используя значение интеграла [8]

$$\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^{\alpha-1} \frac{dx}{x-y} = \frac{-\pi}{\sin \pi \alpha} \left[\cos \pi \alpha \left(\frac{y-a}{b-y} \right)^{\alpha-1} + 1 \right], \quad (0 < \operatorname{Re} \alpha < 2, \quad a < y < b)$$

окончательно получим

$$\sigma(x) = \frac{K_I}{\sqrt{a^2-x^2}} + K_{II} [\omega(x) + \omega(-x)]; \quad (2.10)$$

$$\tau(x) = K_{III} [\omega(x) - \omega(-x)]; \quad (2.11)$$

$$K_I = \frac{Q_0^*}{\pi(1+q^2)} [1 + q \operatorname{tg} \pi \gamma_1]; \quad K_{II} = -\frac{Q_0^*}{2\pi} \left[\frac{\tilde{\Delta} \sin \pi \gamma_1}{l_0} + \frac{q}{(1+q^2)\tilde{\Delta} \cos \pi \gamma_1} \right];$$

$$K_{III} = -\frac{Q_0^*}{2\lambda^* \pi} \left[\frac{\tilde{\Delta} \sin \pi \gamma_1}{l_0} + \frac{q}{(1+q^2)\tilde{\Delta} \cos \pi \gamma_1} \right].$$

Теперь определим последнюю неизвестную функцию $U(x)$. Из (2.2) для производной этой функции получим

$$U'(x) = -\frac{1}{2\mathfrak{G}_1^{(2)}} \sigma(x) + \frac{Q_0}{2\mathfrak{G}_1^{(2)} \pi \sqrt{a^2-x^2}} \quad (2.12)$$

Отсюда, интегрируя (2.12) по x от $-a$ до x , учитывая (2.10) и значение интеграла [8]

$$\omega_1(x) = \int_{-a}^x (x+a)^{-\gamma} (a-x)^{\gamma-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\gamma+1)}{k+1-\gamma} \left(\frac{a+x}{2} \right)^{k+1-\gamma}; \quad (|x| < a)$$

получим

$$U(x) = \frac{1}{2\mathfrak{G}_1^{(2)}} \left\{ \left[\frac{Q_0}{\pi} - K_I \right] \arcsin \frac{x}{a} + K_{II} [\omega_1(x) - \omega_1(-x)] \right\}; \quad (2.13)$$

Таким образом, определены все искомые функции, с помощью которых, используя вышеполученные формулы, можно полностью определить напряженно-деформированное состояние составной плоскости.

Теперь рассмотрим случай $\tilde{\Delta} < 0$, т.е. когда числа q_j ($j=1,2$) чисто мнимые. В этом случае решение уравнений (2.5) также будет даваться формулой (2.7). Однако в этом случае

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{2} - i\beta_1; & \gamma_2 &= \frac{1}{2} + i\beta_1; & q_j &= (-1)^j iq; \\ q &= \sqrt{-\alpha\beta}; & \beta_1 &= \frac{1}{2\pi} \ln|G_1|; & G_1 &= \frac{1-q}{1+q} < 0\end{aligned}$$

Последнее означает, что в рассматриваемом случае функции $\varphi_j(x)$ ($j=1,2$) имеют корневую особенность с осцилляцией. Заметим, что полученные выражения для скачков напряжений (2.10), (2.11) и смещений (2.13) остаются в силе. Что же касается случая $\tilde{\Delta} = 0$, который совпадает со случаем $\alpha = -1$ работы [5], то в этом случае, подставляя значение $\sigma(x)$ из (2.2) в первые два уравнения (2.1), получим

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(\xi) d\xi}{\xi - x} = - \frac{Q_0'}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \\ \tau(x) - \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\xi - x} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Из первого уравнения (2.14), при помощи второго условия из (1.4), находим

$$\tau(x) = \frac{Q_0' \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right)}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a < x < a). \quad (Q_0' = l_0 / 2\vartheta_1^{(2)} d_1) \quad (2.15)$$

Подставляя значение функции $\tau(x)$ из (2.15) во второе уравнение (2.14), получим сингулярное интегральное уравнение первого рода для определения функции $\sigma(x)$. Решение этого уравнения, удовлетворяющее первому из условий (1.4), дается формулой:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= - \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left\{ \frac{Q_0'}{2\pi^2 \beta} \ln^2 \left(\frac{a-x}{a+x} \right) - A \right\} \quad (-a < x < a). \\ (A &= Q_0' / 3\beta - Q_0) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Производная же от функции скачков горизонтальных смещений дается формулой

$$U'(x) = Q_0' \left[\frac{1}{2\pi^2} \ln^2 \left(\frac{a-x}{a+x} \right) - \frac{1}{3} \right] / 2\pi \vartheta_1^{(2)} \beta \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a < x < a) \quad (2.17)$$

3. Теперь перейдем к решению системы уравнений (1.3) при условиях (1.4) в случае, когда $\tilde{\Delta} \neq 0$. С этой целью введем новые искомые функции по формулам:

$$\begin{aligned}\psi_j(x) &= \frac{d_0}{\Delta_*} \sigma(x) - \frac{l_0}{\Delta_*} U'(x) + \frac{\mu_j^* d_1}{\Delta_*} \tau(x) \quad (j=1,2); \\ \psi_3(x) &= \frac{\vartheta_2^{(1)}}{\Delta_*} \sigma(x) + \frac{2\vartheta_1^{(2)} \vartheta_2^{(1)}}{\Delta_*} U'(x); \quad \left(\mu_j^* = (-1)^{j+1} \sqrt{\tilde{\Delta} / 2d_1 \vartheta_2^{(2)}} \right).\end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда, после некоторых несложных преобразований, систему (1.3) можно привести к виду:

$$\begin{cases} -\pi i \text{th}(\pi \mu'_j) \psi_j^*(t) + \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^*(\tau)}{\tau - t} d\tau + \sum_{n=1}^3 \int_{-1}^1 R_{nj}^*(t - \tau) \psi_n^*(\tau) d\tau = Q_j^*(t) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_3^*(\tau)}{\tau - t} d\tau + \sum_{n=1}^3 \int_{-1}^1 R_{n3}^*(t - \tau) \psi_n^*(\tau) d\tau = Q_3^*(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

$(j = 1, 2; -1 < t < 1)$

При этом условия (1.4) примут вид:

$$\int_{-1}^1 \psi_j^*(x) dx = P_j \quad (j = 1, 2, 3); \quad \left(P_1 = P_2 = \frac{d_0 Q_0}{a \Delta_*}; \quad P_3 = \frac{\mathfrak{g}_2^{(1)} Q_0}{a \Delta_*} \right). \quad (3.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_{nj}^*(x) &= (-1)^{n+1} \frac{a\pi}{q_j} [R_{n1}(ax) + a_j R_{n2}(ax) + b_j R_{n3}(ax)]; \\ R_{n1}(x) &= \frac{\Delta_*}{\tilde{\Delta}} \left[\mathfrak{g}_1^{(2)} K_{n1}^*(x) + \frac{\tilde{\Delta}}{2\mu_1^* d_1} K_{n2}^*(x) - \frac{1}{2} K_{n3}^*(x) \right]; \\ R_{n2}(x) &= \frac{\Delta_*}{\tilde{\Delta}} \left[\mathfrak{g}_1^{(2)} K_{n1}^*(x) - \frac{\tilde{\Delta}}{2\mu_1^* d_1} K_{n2}^*(x) - \frac{1}{2} K_{n3}^*(x) \right]; \quad (j = 1, 2; \quad n = 1 - 3); \\ R_{n3}(x) &= \frac{\Delta_*}{\tilde{\Delta}} \left[\frac{l_0}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} K_{n1}^*(x) - \frac{1}{2} K_{n3}^*(x) \right]; \quad Q_j^*(x) = \frac{a\pi}{q_j} [-F_1(x) + a_j F_2(x) - b_j F_3(x)]; \\ R_{n3}^*(x) &= -\frac{2}{\Delta_*} [l_0 R_{2n}(ax) + d_0 R_{3n}(ax)]; \quad Q_3^*(x) = \frac{2}{\Delta_*} [l_0 F_2(x) + d_0 F_3(x)]; \\ a_j &= \alpha^* \mu_j^* d_1 / (\alpha^* d_0 + \beta^* l_0); \quad b_j = \beta^* \mu_j^* d_1 / (\alpha^* d_0 + \beta^* l_0), \end{aligned}$$

а постоянная μ'_j ($j = 1, 2$) определяется из условия $\text{th} \mu'_j \pi = i q_j^{-1}$. Используя результаты работы [9], решения системы (3.2) представим в виде разложений:

$$\psi_j^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k^{(j)} P_k^{(j, \sigma_j)}(x)}{\omega_j(x)}; \quad (\omega_j(x) = (1-x)^{-j_j} (1+x)^{-\sigma_j}) \quad (3.4)$$

$$\psi_3^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k^{(3)} T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\gamma_j = -\frac{1}{2} - i\mu'_j; \quad \sigma_j = -\frac{1}{2} + i\mu'_j; \quad j = 1, 2) \quad (3.5)$$

где $P_k^{(j, \sigma_j)}(x)$ ($j = 1, 2; \quad k = 0, 1, 2, \dots$) – многочлены Якоби, $T_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – многочлен Чебышева первого рода, а постоянные $X_k^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3; \quad k = 0, 1, 2, \dots$) – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Для коэффициентов $X_0^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) из (3.3) сразу находим

$$X_0^{(j)} = \frac{P_j \text{ch}(\pi \mu'_j)}{\pi} \quad (j = 1, 2); \quad X_0^{(3)} = \frac{P_3}{\pi}. \quad (3.6)$$

Далее, подставляя значения функций $\psi_j(x)$ ($j = 1, 2, 3$) из (3.4) и (3.5) в (3.2) по обычной процедуре [9], для определения коэффициентов

$X_k^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots$) получим следующую систему из трех систем бесконечных алгебраических уравнений:

$$X_m^{(j)} = h_m^{(j)} \left[\sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}^{(j,n)} X_k^{(n)} + C_m^{(j)} \right] \quad (j = 1, 2, 3; m = 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

$$h_m^{(j)} = [m!]^2 \operatorname{ch} \pi \mu'_j / 2\pi \Gamma(m - j_j) \Gamma(m - \sigma_j) \quad (j = 1, 2); \quad h_m^{(3)} = 1.$$

$$A_{mk}^{(j,n)} = \int_{-1}^1 P_{m-1}^{(-j_j, -\sigma_j)}(x) \omega_j(x) dx \int_{-1}^1 R_{nj}^*(x-s) \frac{P_k^{(j_n, \sigma_n)}(s)}{\omega_n(s)} ds; \quad (j, n = 1, 2)$$

$$A_{mk}^{(j,3)} = \int_{-1}^1 P_{m-1}^{(-j_j, -\sigma_j)}(x) \omega_j(x) dx \int_{-1}^1 R_{3j}^*(x-s) \frac{T_k(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds; \quad (j = 1, 2)$$

$$A_{mk}^{(3,n)} = \int_{-1}^1 U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} dx \int_{-1}^1 R_{n3}^*(x-s) \frac{P_k^{(j_n, \sigma_n)}(s)}{\omega_n(s)} ds; \quad (n = 1, 2)$$

$$A_{mk}^{(3,3)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} dx \int_{-1}^1 R_{33}^*(x-s) \frac{T_k(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds;$$

$$C_m^{(j)} = \int_{-1}^1 Q_j^*(x) P_{m-1}^{(-j_j, -\sigma_j)}(x) \omega_j(x) dx - \sum_{n=1}^3 X_0^{(n)} A_{m0}^{(j,n)}; \quad (j = 1, 2)$$

$$C_m^{(3)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 Q_3^*(x) U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} dx - \sum_{n=1}^3 X_0^{(n)} A_{m0}^{(3,n)}.$$

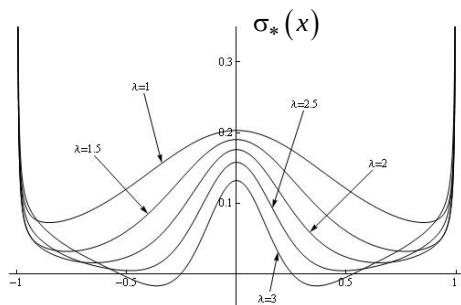
Нетрудно доказать, что система (3.7) квазивполне регулярна [9], т.е. коэффициенты разложения искомых функций, следовательно, и сами искомые функции определяются из (3.7) единственным образом. После нахождения этих функций скачки напряжений и производная скачка горизонтальных смещений определяются по формулам:

$$\sigma(x) = \frac{\mathfrak{g}_1^{(2)} \Delta_*}{\tilde{\Delta}} [\psi_1(x) + \psi_2(x) - v_0 \psi_3(x)]; \quad \tau(x) = \frac{\Delta_*}{2\mu_1 d_1} [\psi_1(x) - \psi_2(x)];$$

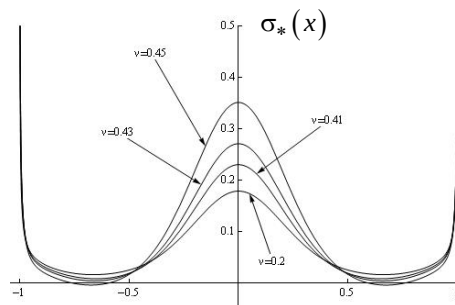
$$U'(x) = -\frac{\Delta_*}{2\tilde{\Delta}} \left[\psi_1(x) + \psi_2(x) - \frac{2d_0}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \psi_3(x) \right]; \quad (v_0 = -l_0 / \mathfrak{g}_1^{(2)} \mathfrak{g}_2^{(1)}).$$

Таким образом, решение поставленной задачи в случае $\tilde{\Delta} \neq 0$ методом ортогональных многочленов свелось к решению квазивполне регулярной системы бесконечных алгебраических уравнений. В случае же $\tilde{\Delta} = 0$ метод ортогональных многочленов не может привести к желаемому результату, так как на этот раз искомые функции помимо степенной особенности имеют также логарифмическую особенность. В конце приведем графики приведенного контактного давления $\sigma_*(x) = -\sigma_y^{(1)}(x/a)/E$ в зоне гладкого контакта в случае, когда полоса и полуплоскость изготовлены из одного и того же материала и на свободную границу составной полуплоскости действует сосредоточенная сила величиной P_0 , т.е. $P_0(x) = P_0 \delta(x)$. На фиг.2 приведены графики приведенного контактного давления в зависимости от изменения параметра $\lambda = a/h$, когда коэффициент Пуассона ν материала равен

0.3, а $P_0/E = 0.1$ (E – модуль Юнга). Нетрудно заметить, что при увеличении параметра λ в зоне контакта возникают участки растягивающих напряжений, что может привести к отрыву включения от матрицы.



Фиг.2



Фиг.3

На фиг.3 приведены графики приведенного контактного давления в зависимости от изменения коэффициента Пуассона, когда $\lambda = 2$. Как явствует из приведенных графиков, при приближении коэффициента Пуассона к 1/2 в центральной части контактной зоны давление увеличивается, а в остальных частях уменьшается так, что опять возникает опасность отрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344с.
2. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Сташук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наукова думка, 1983. 288с.
3. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. //Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №4. С.57-65.
4. Акопян В.Н., Саакян А.В. Напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие трещины, при смешанных граничных условиях на берегах трещин // Изв. РАН. МТТ. 1999. №3. С.106-113.
5. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. //Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
6. Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жесткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве. /В сб. трудов Международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, Ереван, 2007. С. 45-50.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.
9. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1972. Т.25. №2. С.15-35.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физико-математических наук,
Директор Института механики НАН РА.
Тел.: (37410)52-48-90; E-mail: vhakobyan@sci.am

Саркисян Арман Оганесович – соискатель Института механики НАН РА

Поступила в редакцию 15.04.2010

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ
С ЗАКРЕПЛЁННЫМ ОСНОВАНИЕМ И МЕТОД ЛЕВИНСОНА
ВАРТАНОВ А.Г.

Ключевые слова: колебание плиты, метод Левинсона, волны в упругом слое.

Key words: plate vibration, method of Levinson, waves in elastic layer.

Vardanov A.H.

Solution of a Problem of Natural Oscillations of a Finite Plate with Fastened Base and Method of Levinson

The exact solution of three-dimensional problem of free vibrations of a finite elastic plate with fastened base is considered. The problem is solved with the Lamé potentials and by method of Levinson, which has formulated to solve the three-dimensional plate problem with free faces. The dispersion equation for the vibration frequencies and the self functions characterizing the amplitude of oscillation are derived. Problems are solved in the case of the Navier conditions defined on the facial surfaces. It is shown that the method of Levinson leads to the exact solution.

Վարդանով Ա.Հ.

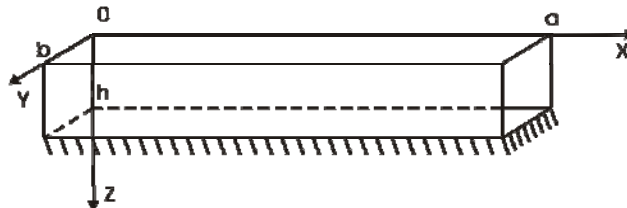
Ամրակցված հիմքով վերջավոր սալի սեփական տատանումների խնդրի լուծումը և Լեվինսոնի եղանակը

Աշխատանքը նվիրված է վերջավոր առաձգական սալի սեփական տատանումների խնդրի ճշգրիտ լուծմանը, եռաչափ դրվածքով: Խնդիրը լուծված է Լամեի պոտենցիալների միջոցով և, ազատ դիմային հարթակներով եռաչափ սալի խնդիրը լուծելու համար՝ առաջին անգամ Լեվինսոնի կողմից ձևակերպված մեթոդով: Ստացված են՝ ալիքի հաճախության նկատմամբ դիսպերսիոն հավասարում և ալիքային թիվը նկարագրող սեփական ֆունկցիաներ: Խնդիրները լուծված են սալի եզրերի վրա տրված Նավյեի պայմանների դեպքում: Ցույց է տրվում, որ դիտարկվող խնդիրը Լեվինսոնի եղանակով ճշգրիտ լուծվում է:

Работа посвящена точному решению трехмерной задачи собственных колебаний конечной упругой плиты на жестком основании. Задача решена с помощью потенциалов Ламе, а также с помощью метода Левинсона, впервые сформулированного для решения трехмерных задач плиты со свободными лицевыми поверхностями. Получены дисперсионное уравнение относительно частоты колебания и собственные функции, характеризующие амплитуду колебаний. Задачи решены в случае условий Навье, заданных на торцах плиты. Показано, что для рассматриваемой задачи метод Левинсона приводит к точному решению.

Впервые задача о распространении волн в упругом слое, границы которого свободны от напряжений, была решена Релеем [1] и Лембом [2] в двухмерной постановке. В дальнейшем эта проблема была детально исследована в [3-8]. Задача колебаний упругого слоя, лежащего на жёстком основании, впервые была рассмотрена в [9] и [10]. Задача собственных колебаний ортотропного и анизотропного слоя на жёстком основании на основе метода асимптотического интегрирования рассмотрена в [11-13].

Рассматриваются собственные колебания конечной плиты, занимающей в декартовой системе координат область $0 < x < a$; $0 < y < b$; $0 < z < h$.



Будем исходить из следующих динамических уравнений теории упругости:

$$\mu \Delta \bar{U} + (\lambda + \mu) \text{grad div} \bar{U} = \rho \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\text{где } \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\bar{U}(u_x, u_y, u_z) = \bar{U}(u, v, w)$ – вектор перемещения, λ и μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотность материала плиты.

На торцах плиты принимаются условия Навье, которые позволяют точно решить трехмерные краевые задачи теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(0, y, z) = \sigma_{xx}(a, y, z) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0, z) = \sigma_{yy}(x, b, z) = 0, \\ u_z(0, y, z) = u_z(a, y, z) = 0, \quad u_z(x, 0, z) = u_z(x, b, z) = 0, \\ u_y(0, y, z) = u_y(a, y, z) = 0, \quad u_x(x, 0, z) = u_x(x, b, z) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Плита свободна от напряжений на лицевой поверхности $z = 0$ и лежит на жестком основании при $z = h$:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0; \quad z = 0; \quad u_x = u_y = u_z = 0; \quad z = h. \quad (3)$$

Решения уравнений (1) найдем с помощью потенциалов:

$$\bar{U} = \text{grad} \Phi + \text{rot} \bar{\Psi}, \quad \text{div} \bar{\Psi} = 0 \quad (4)$$

Подставляя потенциалы в уравнения движений, получим следующие волновые уравнения [14]:

$$\Delta \bar{\Psi} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \Phi - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } c_t = \sqrt{\mu/\rho}; \quad c_l = \sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho}$$

Так как принятые граничные условия при $z = 0, h$ несимметричны, то данная задача не разделяется на симметричные и антисимметричные моды, как это имеет место для плиты со свободными краями [14].

Общие решения уравнений потенциалов для гармоничных волн, которые приводят к удовлетворению условиям Навье, имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{k} [C_1 \text{sh}(pkz) + C_2 \text{ch}(pkz)] \sin(\alpha kx) \sin(\beta ky) \exp(-i\omega t) \\ \psi_x &= \frac{1}{k} [C_3 \text{sh}(qkz) + C_4 \text{ch}(qkz)] \sin(\alpha kx) \cos(\beta ky) \exp(-i\omega t) \\ \psi_y &= \frac{1}{k} [C_5 \text{sh}(qkz) + C_6 \text{ch}(qkz)] \cos(\alpha kx) \sin(\beta ky) \exp(-i\omega t) \\ \psi_z &= -\frac{1}{k} \left[\frac{(\alpha C_3 + \beta C_5) \text{ch}(qkz)}{q} + \frac{(\alpha C_4 + \beta C_6) \text{sh}(qkz)}{q} \right] \cos(\alpha kx) \cos(\beta ky) \exp(-i\omega t) \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$q = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad p = \sqrt{1 - \theta \eta^2}; \quad \eta = \frac{\omega}{kc_t}, \quad \theta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{\pi n}{ak}; \beta = \frac{\pi m}{bk}; \quad k = \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{b^2} + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}}; \quad m, n = 1, 2, 3..$$

а ω – частота колебаний.

Как видно, потенциалы Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z , которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (5), удовлетворяют также условию $\text{div} \bar{\Psi} = 0$.

Функции перемещений посредством решений (6) записываются в виде:

$$\begin{aligned} u_x &= \partial_x \Phi + \partial_y \Psi_z - \partial_z \Psi_y, \\ u_y &= \partial_y \Phi - \partial_x \Psi_z + \partial_z \Psi_x, \\ u_z &= \partial_z \Phi + \partial_x \Psi_y - \partial_y \Psi_x. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, подставляя выражения потенциалов (6) в перемещения (8) и выражая постоянные C_3, C_4, C_5, C_6 через новые A_1, A_2, B_1, B_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} C_3 &= -\frac{B_1 \alpha \beta + B_2 (\beta^2 - q^2)}{q(q^2 - \alpha^2 - \beta^2)}; \quad C_4 = -\frac{A_1 \alpha \beta + A_2 (\beta^2 - q^2)}{q(q^2 - \alpha^2 - \beta^2)}, \\ C_5 &= -\frac{B_1 (q^2 - \alpha^2) - B_2 \alpha \beta}{q(q^2 - \alpha^2 - \beta^2)}; \quad C_6 = -\frac{A_1 (q^2 - \alpha^2) - A_2 \alpha \beta}{q(q^2 - \alpha^2 - \beta^2)}, \end{aligned} \quad (9)$$

получим функции перемещений в виде:

$$\begin{aligned} u_x &= \cos(\alpha kx) \sin(\beta ky) [\alpha (C_1 \text{sh}(pkz) + C_2 \text{ch}(pkz)) + A_1 \text{sh}(qkz) + B_1 \text{ch}(qkz)] \\ u_y &= \cos(\beta ky) \sin(\alpha kx) [\beta (C_1 \text{sh}(pkz) + C_2 \text{ch}(pkz)) + A_2 \text{ch}(qkz) + B_2 \text{sh}(qkz)] \\ u_z &= \sin(\alpha kx) \sin(\beta ky) p (C_1 \text{ch}(pkz) + C_2 \text{sh}(pkz)) + \\ &+ \sin(\alpha kx) \sin(\beta ky) \frac{(\alpha A_1 + \beta A_2) \text{ch}(qkz) + (\alpha B_1 + \beta B_2) \text{sh}(qkz)}{q} \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя перемещения u_x, u_y, u_z в граничные условия (2), которые запишем в виде: при $z = 0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \quad \gamma \frac{\partial u_z}{\partial z} + (\gamma - 2) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (11)$$

при $z = h$

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0,$$

где $\gamma = \theta^{-1}$,

получим следующую систему из шести уравнений относительно шести постоянных $A_1, A_2, C_1, C_2, B_1, B_2$:

$$\begin{cases} A_1(q^2 + \alpha^2) + \alpha(2C_1pq + A_2\beta) = 0 \\ A_2(q^2 + \beta^2) + \beta(2C_1pq + A_1\alpha) = 0 \\ 2B_1\alpha + 2B_2\beta + 2C_2(\alpha^2 + \beta^2) - C_2\gamma(\alpha^2 + \beta^2 - p^2) = 0 \\ C_2\alpha\text{ch}[hkp] + B_1\text{ch}[hkq] + C_1\alpha\text{sh}[hkp] + A_1\text{sh}[hkq] = 0 \\ C_2\beta\text{ch}[hkp] + B_2\text{ch}[hkq] + C_1\beta\text{sh}[hkp] + A_2\text{sh}[hkq] = 0 \\ C_1pq\text{ch}[hkp] + (A_1\alpha + A_2\beta)\text{ch}[hkq] + C_2pq\text{sh}[hkp] + (B_1\alpha + B_2\beta)\text{sh}[hkq] = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Из условия равенства нулю определителя этой системы получим следующее дисперсионное уравнение, определяющее зависимость безразмерной фазовой скорости η_0 от параметра относительной толщины kh :

$$F(\eta) = -\frac{(\lambda^2 + 4p^2q^2)\text{th}[khp]\text{th}[khq]}{pq} - \frac{4\lambda}{\text{ch}[khp]\text{ch}[khq]} + (4 + \lambda^2) = 0, \quad (13)$$

где

$$\lambda = 2 - \eta^2. \quad (14)$$

Дисперсионное уравнение (13) совпадает с дисперсионным уравнением в [15], если в последнем магнитное поле принять равным нулю. Оно также совпадает с дисперсионными уравнениями в [9] и [10]. Последние являются двумерными уравнениями и имеют иной вид.

В статьях [9], [10], [15] приведён анализ дисперсионного уравнения (13) относительно корней, где показано, что оно при сравнительно больших kh имеет один корень $\eta < 1$ и бесконечное число корней в диапазонах частот $1 < \eta < 1/\theta$; $\eta > 1/\theta$. Однако, эти частоты имеют нижнюю границу, ниже которой отсутствуют распространяющиеся моды. Границы этих частот запираются определяются из дисперсионного уравнения путем предельного перехода $k \rightarrow 0$ [9]. Эти частоты являются частотами толщинно и толщинно-сдвиговых одномерных, зависящих только от z , колебаний. Они совпадают с первыми приближениями асимптотических решений ряда колебаний пластин, полученных в работах [11,12]. Эти частоты определяются из уравнений $\cos(h\omega/c_l)\cos(h\omega/c_t) = 0$.

Основным отличием данной задачи от задачи колебания пластинки со свободными торцами заключается в том, что при больших kh минимальная частота колебаний или фазовая скорость η совпадает со скоростью волны Релея, и с уменьшением kh фазовая скорость возрастает. Волн со скоростями, меньшими, чем скорость поверхностных волн Релея, в данной задаче нет, чем она существенно отличается от задачи Лемба.

Далее определим для этой краевой задачи собственные функции, они получаются посредством выражения пяти постоянных интегрирования через одного в пяти граничных условиях, а шестое условие удовлетворяется тождественно. Эти собственные функций имеют вид:

$$u_x(x, y, z) = C\alpha \cos(\alpha x) \sin(\beta y) G(z) \exp(-i\omega t)$$

$$u_y(x, y, z) = C\beta \sin(\alpha x) \cos(\beta y) G(z) \exp(-i\omega t)$$

$$u_z(x, y, z) = Ckp \sin(\alpha x) \sin(\beta y) F(z) \exp(-i\omega t)$$

где

$$\begin{aligned}
G(z) = & -pq(1+q^2)\text{ch}[hkq]\text{ch}[kp(h-z)] + 2pq\text{ch}[kpz] + \\
& + pq(1+q^2)\text{ch}[kqz] - pq(1+pq)\text{ch}[k(hp-hq+qz)] + \\
& + pq(-1+pq)\text{ch}[hk(p+q)-kqz] + (1+q^2)\text{sh}[hkq]\text{sh}[kp(h-z)], \\
F(z) = & -\text{ch}[hkp]\left((1+q^2)\text{ch}[kpz] - 2\text{ch}[kqz]\right)\text{sh}[hkq] + \\
& + \left(2pq + (1+q^2)\text{sh}[hkp]\text{sh}[hkq]\right)\text{sh}[kpz] + \\
& + \text{ch}[hkq]pq\left((1+q^2)\text{ch}[kpz] - 2\text{ch}[kqz]\right)\text{sh}[hkp] + \\
& + \text{ch}[hkp]\text{ch}[hkq]\left(-pq(1+q^2)\text{sh}[kpz] - 2\text{sh}[kqz]\right) + \\
& + (1+q^2 + 2pq\text{sh}[hkp]\text{sh}[hkq])\text{sh}[kqz]
\end{aligned} \tag{15}$$

а C – постоянная.

Таким образом, нами полученное дисперсионное уравнение (13) для краевой задачи плиты на жестком основании (1), (2), (3) определяет фазовую скорость или частоту колебаний, а $G(z), F(z)$ являются собственными функциями.

При решении задачи колебаний конечной плиты, Левинсоном был предложен метод [8], который значительно упрощает ход решения. Этот метод заключается в том, что перемещения принимаются в виде:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) = & -g(z)\partial S(x, y)/\partial x, \quad v(x, y, z, t) = -g(z)\partial S(x, y)/\partial y, \\
w(x, y, z, t) = & f(z)S(x, y),
\end{aligned} \tag{16}$$

где $g(z)$ и $f(z)$ – неизвестные функции, подлежащие определению.

В этом случае для функции $S(x, y)$ принимается:

$$S(x, y) = \sin(\alpha_0 x) \sin(\beta_0 y)$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi n}{a}; \quad \beta_0 = \frac{\pi m}{b}; \quad n, m = 1, 2, 3 \dots$$

вследствие этого граничные условия Навье, которые позволяют точно решить трехмерные краевые задачи теории упругости, удовлетворяются.

Левинсоном [8] были получены точные дисперсионные уравнения как для антисимметричных (изгибных), так и для симметричных (планарных) колебаний, для задачи со свободными поверхностями.

Используем теперь этот метод для решения нашей краевой задачи (1),(2),(3).

Решения уравнений (3) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) = & -g(z)\exp(-i\omega t)\partial S(x, y)/\partial x \\
v(x, y, z, t) = & -g(z)\exp(-i\omega t)\partial S(x, y)/\partial y \\
w(x, y, z, t) = & f(z)\exp(-i\omega t)S(x, y)
\end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя эти функции в уравнения движения (3), получим следующие дифференциальные уравнения относительно $f(z), g(z)$, где первые два уравнения идентичны:

$$\begin{aligned}
g''[z] - (\gamma - 1)f'[z] - ((\alpha_0^2 + \beta_0^2)\gamma - \eta^2)g[z] &= 0 \\
g''[z] - (\gamma - 1)f'[z] - ((\alpha_0^2 + \beta_0^2)\gamma - \eta^2)g[z] &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\gamma f''[z] + (\alpha_0^2 + \beta_0^2)(\gamma - 1)g'[z] - (\alpha_0^2 + \beta_0^2 - \eta^2)f[z] = 0$$

Будем искать решения этих уравнений в виде:

$$g(z) = g_0 \exp[rz], \quad f(z) = f_0 \exp[rz].$$

Подставляя эти решения в уравнения (18) и приравнявая определитель к нулю, получим следующее характеристическое уравнение относительно η :

$$(r^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2 + \eta^2)(r^2\gamma - \alpha_0^2\gamma - \beta_0^2\gamma + \eta^2) = 0,$$

решения которого имеют вид

$$r_1 = k\sqrt{1 - \eta^2/\gamma} = kp, \quad r_2 = k\sqrt{1 - \eta^2} = kq.$$

В силу этого, общее решение будем искать в следующем виде:

$$g(z) = C_1 \operatorname{sh}[r_1 z] + C_2 \operatorname{ch}[r_1 z] + C_3 \operatorname{sh}[r_2 z] + C_4 \operatorname{ch}[r_2 z]$$

$$f(z) = A_1 \operatorname{sh}[r_1 z] + A_2 \operatorname{ch}[r_1 z] + A_3 \operatorname{sh}[r_2 z] + A_4 \operatorname{ch}[r_2 z]$$

Но так как для системы имеем четыре граничных условия, то из постоянных C_i и A_i независимы только 4, найдем эти связи. Подставляя $f(z)$ и $g(z)$ в один из дифференциальных уравнений, для коэффициентов A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) получим следующие связи:

$$A_1 = -C_2 r_1; \quad A_2 = -C_1 r_1; \quad A_3 = -\frac{k^2}{r_2} C_4; \quad A_4 = -\frac{k^2}{r_2} C_3$$

отсюда решения получают окончательный вид:

$$\begin{aligned}
g(z) &= C_1 \operatorname{sh}[r_1 z] + C_2 \operatorname{ch}[r_1 z] + C_3 \operatorname{sh}[r_2 z] + C_4 \operatorname{ch}[r_2 z] \\
f(z) &= -r_1 (C_1 \operatorname{ch}[r_1 z] + C_2 \operatorname{sh}[r_1 z]) - \frac{k^2}{r_2} (C_3 \operatorname{ch}[r_2 z] + C_4 \operatorname{sh}[r_2 z])
\end{aligned} \tag{19}$$

Подставляя (17) в граничные условия (12), получим граничные условия для функций $f(z)$ и $g(z)$ в следующем виде:

при $z = 0$

$$f(z) - g'(z) = 0, \quad (\alpha_0^2 + \beta_0^2)(\gamma - 2)g(z) + \gamma f'(z) = 0, \tag{20}$$

при $z = h$

$$g(z) = 0, \quad f(z) = 0.$$

Отметим, что граничные условия $u = 0, v = 0$ при $z = h$ и $\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0$ при $z = 0$ приводят к двум граничным условиям при $z = 0, h$.

Далее, подставляя решения (19) в граничные условия (20), получим систему из четырёх уравнений:

$$\begin{cases} 2C_1r_1 + C_3(k^2 + r_2^2) = 0 \\ k^2(C_2 + C_4r_2)(\gamma - 2) - (C_2r_1^2 + k^2C_4r_2)\gamma = 0 \\ C_2\text{ch}[hr_1] + C_4r_2\text{ch}[hr_2] + C_1\text{sh}[hr_1] + C_3r_2\text{sh}[hr_2] = 0 \\ C_1r_1\text{ch}[hr_1] + C_3k^2\text{ch}[hr_2] + C_2r_1\text{sh}[hr_1] + C_4k^2\text{sh}[hr_2] = 0 \end{cases}$$

приравняв определитель этой системы к нулю, получим дисперсионное уравнение, которое в точности совпадает с (13).

Собственные функции получим тем же путем, что и в предыдущей задаче, только здесь берутся 3 граничных условия, а через одно постоянное выражаются 3 постоянных интегрирования. Их вид будет таким:

$$u(x, y, z) = C \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} G(z) \exp(-i\omega t)$$

$$v(x, y, z) = C \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} G(z) \exp(-i\omega t)$$

$$w(x, y, z) = CkpS(x, y)F(z) \exp(-i\omega t)$$

где $G(z)$ и $F(z)$ – те же функции, что и в (13).

Таким образом, предложенный метод решения является точным, так как собственные функции и собственные числа совпадают. Однако, метод Левинсона не может быть применён для краевых задач на одном или на двух, из краев которых граничные условия относительно u, v заданы разными способами. Например, если на одной границе заданы условия $u=0, \sigma_{yz}=0, \sigma_{zz}=0$ или $v=0, \sigma_{xz}=0, \sigma_{zz}=0$, то в этом случае, в рамках метода Левинсона будем иметь два уравнения относительно $f(z)$ и $g(z)$ и три граничных условия для $f(z)$ и $g(z)$, что означает, что этот метод не применим для этих краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh, J. W. "On Waves Propagated Along the Plane Surface of an Elastic Solid," Proc. Lond. Math. Soc., 1885/1886.17, p. 4-11.
2. Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA., 1917. Vol. 93.
3. Viktorov, I.A. Rayleigh and Lamb Waves – Physical Theory and Applications. New York: Plenum Press. 1967.
4. Achenbach, J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. Elsevier. 1973.
5. Graff, K.F. Wave Motion in Elastic Solids. Mineola, NY: Oxford University Press. 1975.
6. Levinson, M. Free vibration of a simply supported rectangular plate: An exact elasticity solution, Journal of Sound and Vibration, 1985. 98.2. 289–298.
7. Rose, J.L. Ultrasonic Waves in Solid Media. New York: Cambridge University Press. 1999.
8. Royer, D., Dieulesaint, E. Elastic Waves in Solids. Springer. 2000.
9. Ишков П. К. О Распространении упругих волн в слое, лежащем на жёстком основании. // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1941. №2. С.169–176.

10. Мартыненко М.Д., Мелешко В.В. Распространение нормальных волн в слое, лежащем на жестком основании. //Прикладная механика. 1986. Т.22. №7. С.23–29.
11. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.18-28.
12. Оганесян Р.Ж. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания ортотропной пластинки // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №3. С.32-37.
13. Агаловян М.Л. Асимптотика собственных колебаний анизотропной полосы, //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С. 42-51.
14. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
15. Варганов А.Г., Магнитоупругие колебания идеально-проводящего слоя в постоянном магнитном поле. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №3. С.33-40.

Сведения об авторе:

Варганов Арташес Гайкович – аспирант Института механики НАН Армении.

E-mail: geops@mail.ru

Поступила в редакцию 28.06.2010

УДК 539.3

О РАВНОВЕСИИ КРУГОВОГО СЕКТОРА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ
ГЛАДКОГО КОНТАКТА НА РАДИАЛЬНЫХ СТОРОНАХ
САРГСЯН А.М.

Ключевые слова: круговой сектор, гладкий контакт, метод Фурье, особенность напряжений, коэффициент при особенности.

Keywords: circular sector, smooth contact, Fourier method, stress singularities, coefficients at the singularities.

Սարգսյան Ա.Մ.

Շրջանային սեկտորի հավասարակշռության մասին շառավիղային կողմերի վրա ուղղակի կոնտակտային պայմանների դեպքում

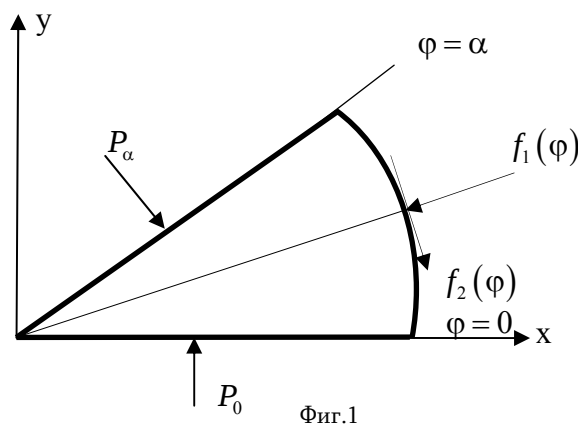
Դիտարկված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը միավոր շառավիղով և կամայական α բացվածքի անկյունով շրջանային սեկտորի համար, որի շառավիղային կողմերի վրա տեղի ունի կոշտ դրոշմի հետ առանց շփումի հսկայական ֆորմերի կոնտակտի պայման), իսկ եզրագծի աղեղային մասի վրա տրված են արտաքին բեռներ: Խնդրի լուծումը կառուցված է Ֆուրյեի մեթոդով: Ուսումնասիրված են լարումների եզակիությունների և եզակիության գործակիցների առանձնահատկությունները սեկտորի անկյունային կետի շրջակայքում:

Sargsyan A.M.

On Equilibrium of the Circular Sector under the Boundary Conditions
of the Smooth Contact on Radial Sides

In the paper a plane problem of elasticity theory for a circular sector with enique radius and arbitrary angle of opening α , when on the radial sides the conditions of contact with a rigid stamp without friction (condition of smooth contact) is realised, and on the other part of the contour external loadings are given, is considered. The solution of the problem is built with the help of Fourier method. The singularities of the stresses and the coefficients at the singularities in the vicinity of the sector angle point are investigated.

В работе рассматривается плоская задача теории упругости для кругового сектора с единичным радиусом и произвольным углом раствора α , когда на радиальных сторонах осуществляются условия соприкасания с жестким штампом без трения (условия гладкого контакта), а на дуговой части контура заданы внешние нагрузки. Решение задачи строится с помощью метода Фурье. Исследуются особенности напряжений и коэффициентов при особенностях в окрестности угловой точки сектора.



Отнесем сектор к декартовой и полярной системам координат, как показано на фиг. 1. Напряженное состояние сектора определяется решением бигармонического уравнения для функции напряжений Эри [1]

$$\Delta \Delta \Phi(r, \varphi) = 0 \quad (1)$$

при следующих граничных условиях, заданных на контуре сектора.

$$u_{\varphi}(r, \varphi) = \tau_{r\varphi}(r, \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \alpha, \quad (2)$$

$$\sigma_r(1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad \tau_{r\varphi}(1, \varphi) = f_2(\varphi). \quad (3)$$

Компоненты напряжений определяются с помощью функции Эри следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{r^2 \partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (4)$$

Представляя решение уравнений (1) в виде

$$\Phi = r^{\lambda+1} [A \sin(\lambda+1)\varphi + B \cos(\lambda+1)\varphi + C \sin(\lambda-1)\varphi + D \cos(\lambda-1)\varphi]$$

и используя уравнения состояний, уравнения Коши, а также (4) и удовлетворяя граничным условиям (2), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_j и B_j . Из условий существования нетривиального решения этой системы получим [2] $A = C = 0$ и следующее уравнение для определения параметра λ :

$$\sin(\lambda+1)\alpha \cdot \sin(\lambda-1)\alpha = 0. \quad (5)$$

Корни уравнения (5) – действительные и простые

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{\alpha} + 1, \quad \lambda_n^* = \frac{\pi n}{\alpha} - 1, \quad (k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6)$$

Требование конечности энергии деформаций в малой окрестности угловой точки сектора при конечной внешней нагрузке накладывает условие на корни уравнения (5)

$$\lambda_k > 0, \quad \lambda_n^* > 0 \quad (7)$$

Условие (7) ограничивает пределы изменения k и n :

- I. Для $0 < \alpha < 2\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), ($n = 2, 3, 4, \dots$),
- II. Для $0 < \alpha < \pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), ($n = 1, 2, 3, \dots$),
- III. Для $\pi < \alpha < 2\pi$ ($k = -1, 0, 1, \dots$), ($n = 2, 3, 4, \dots$).

Первые два случая рассмотрены в работах [2,3].

В работе [2] установлено, что поставленная задача имеет решение при $0 < \alpha < 2\pi$, если внешние нагрузки $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\pi}{\alpha} \int_0^\alpha f_1(\varphi) \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi d\varphi = \left(2 - \frac{\pi}{\alpha}\right) \int_0^\alpha f_2(\varphi) \sin \frac{\pi}{\alpha} \varphi d\varphi. \quad (7')$$

Для таких нагрузок особенность напряжений возникает только при $\alpha > \pi$.

Полученное в работе [3] решение (случай II) показывает, что при общих нагрузках на границе сектора $r = 1$, не удовлетворяющих условию (7'), особенность напряжений появляется уже при $\alpha > \pi/2$.

В настоящей работе рассматривается случай III.

Учитывая, что функции вида

$$\Phi_{kn}(r, \varphi) = D_k r^{\lambda_k+1} \cos(\lambda_k-1)\varphi + B_n r^{\lambda_n^*+1} \cos(\lambda_n^*+1)\varphi$$

$$(k = -1, 0, 1, \dots), \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), функция напряжений Эри ищем в виде

$$\Phi(r, \varphi) = D_{-1} r^{2-\alpha_0} \cos \alpha_0 \varphi + D_0 r^2 + D_1 r^{2+\alpha_0} \cos \alpha_0 \varphi +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} [D_k r^{\lambda_k+1} + B_k r^{\lambda_k^*+1}] \cos \alpha_0 k \varphi, \quad \alpha_0 = \pi/\alpha. \quad (8)$$

Тогда для компонентов напряжений получим

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \tau_{r\varphi} \\ \sigma_\varphi \end{Bmatrix} &= D_{-1}(1-\alpha_0) \begin{Bmatrix} (2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi \\ \alpha_0\sin\alpha_0\varphi \\ (2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi \end{Bmatrix} r^{-\alpha_0} + 2D_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \\
&+ D_1(1+\alpha_0) \begin{Bmatrix} (2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi \\ \alpha_0\sin\alpha_0\varphi \\ (2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi \end{Bmatrix} r^{\alpha_0} + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[D_k \lambda_k \begin{Bmatrix} (2-\alpha_0 k) \\ \alpha_0 k \\ (2+\alpha_0 k) \end{Bmatrix} r^{\alpha_0 k} + B_k \lambda_k^* (\lambda_k^* + 1) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} r^{\alpha_0 k-2} \right] \begin{Bmatrix} \cos\alpha_0 k\varphi \\ \sin\alpha_0 k\varphi \\ \cos\alpha_0 k\varphi \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Удовлетворив граничным условиям (3), для определения D_k и B_k , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&D_{-1}(2+\alpha_0)(1-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi + 2D_0 + D_1(2-\alpha_0)(1+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} [D_k \lambda_k (3-\lambda_k) - B_k \lambda_k^* (\lambda_k^* + 1)] \cos\alpha_0 k\varphi = f_1(\varphi), \\
&D_{-1}\alpha_0(1-\alpha_0)\sin\alpha_0\varphi + D_1\alpha_0(1+\alpha_0)\sin\alpha_0\varphi + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} [D_k \lambda_k (\lambda_k - 1) + B_k \lambda_k^* (\lambda_k^* + 1)] \sin\alpha_0 k\varphi = f_2(\varphi).
\end{aligned} \tag{10}$$

Умножая первое уравнение (10) на $\cos\alpha_0 m\varphi$, а второе уравнение – на $\sin\alpha_0 m\varphi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) и интегрируя по φ в интервале $(0, \alpha)$, находим

$$\begin{aligned}
D_0 &= \frac{1}{2\alpha_0} \int_0^\alpha f_1(\varphi) d\varphi, \quad D_k = \frac{\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k}}{\alpha \lambda_k}, \\
B_k &= \frac{(\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k})(3-\lambda_k) - 2\tilde{f}_{1k}}{\alpha \lambda_k^* (\lambda_k^* + 1)}, \\
D_{-1} &= \frac{\alpha_0 \tilde{f}_{11} - (2-\alpha_0) \tilde{f}_{21}}{\alpha \alpha_0^2 (1-\alpha_0)}, \quad D_1 = \frac{-\alpha_0 \tilde{f}_{11} + (2+\alpha_0) \tilde{f}_{21}}{\alpha \alpha_0^2 (1+\alpha_0)}, \\
\tilde{f}_{1k} &= \int_0^\alpha f_1(\varphi) \cos\alpha_0 k\varphi d\varphi, \quad \tilde{f}_{2k} = \int_0^\alpha f_2(\varphi) \sin\alpha_0 k\varphi d\varphi.
\end{aligned} \tag{11}$$

Окончательно, формулы для напряжений (9) примут вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \tau_{r\varphi} \\ \sigma_\varphi \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_0 \tilde{f}_{11} - (2-\alpha_0) \tilde{f}_{21}}{\alpha \alpha_0^2} \begin{Bmatrix} (2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi \\ \alpha_0\sin\alpha_0\varphi \\ (2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi \end{Bmatrix} r^{-\alpha_0} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f_1(\varphi) d\varphi \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\alpha_0 \tilde{f}_{11} - (2 + \alpha_0) \tilde{f}_{21}}{\alpha \alpha_0^2} \begin{Bmatrix} (2 - \alpha_0) \cos \alpha_0 \varphi \\ \alpha_0 \sin \alpha_0 \varphi \\ (2 + \alpha_0) \cos \alpha_0 \varphi \end{Bmatrix} r^{\alpha_0} + \\
& + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} \left[(\tilde{f}_{11} + \tilde{f}_{21}) \begin{Bmatrix} (2 - \alpha_0 k) \\ \alpha_0 k \\ (2 + \alpha_0 k) \end{Bmatrix} r^{\alpha_0 k} + \right. \\
& \left. + \left\langle (\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k})(2 - \alpha_0 k) - 2 \tilde{f}_{1k} \right\rangle \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} r^{\alpha_0 k - 2} \right] \begin{Bmatrix} \cos \alpha_0 k \varphi \\ \sin \alpha_0 k \varphi \\ \cos \alpha_0 k \varphi \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Итак, решение краевой задачи теории упругости для кругового сектора представлено в виде сходящихся степенных рядов (12), коэффициенты которых определяются в явном виде.

Из формул (12) следует, что в условиях общего нагружения границы $r = 1$, все три напряжения при приближении к угловой точки сектора ($r \rightarrow 0$) имеют особенности того или иного порядка для любого значения угла α из интервала $\pi < \alpha < 2\pi$. Причем, особенности напряжений обусловлены как первыми членами формул (12), содержащими множители $r^{-\alpha_0}$, так и соответствующими членами рядов с множителями $r^{\alpha_0 k - 2}$ ($k = 2, k = 3$).

При этом, порядок особенностей меняется в пределах

$$\begin{aligned}
-1 < -\alpha < -0,5, \quad \pi < \alpha < 2\pi, \\
-1 < \alpha_0 k - 2 < 0, \quad \pi < \alpha < 2\pi, \quad k = 2, \\
-0,5 < \alpha_0 k - 2 < 0, \quad 3\pi/2 < \alpha < 2\pi, \quad k = 3.
\end{aligned} \tag{13}$$

Коэффициенты при степенных особенностях $r^{-\alpha_0}$ и $r^{\alpha_0 k - 2}$ при общих нагрузках на дуговой части границы сектора не могут быть одновременно равны нулю. Рассмотрим для примера случай нагружения границы $r = 1$ следующей системой внешних воздействий:

$$f_1(\varphi) = P_1 \left[\delta \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} - \varphi_1 \right) + \delta \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} + \varphi_2 \right) \right], \tag{14}$$

$$f_2(\varphi) = -f_2(\alpha - \varphi);$$

($f_2(\varphi)$ является нечётной функцией относительно точки $\varphi = \alpha/2$ границы $r = 1$, а две сосредоточенные нормальные силы несимметрично расположены относительно биссектрисы сектора).

Тогда, как следует из (14),

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{11} &= -P_1 (\sin \alpha_0 \varphi_1 - \sin \alpha_0 \varphi_2), \quad \tilde{f}_{21} = 0, \\
\hat{f}_{12} &= -P_1 (\cos 2\alpha_0 \varphi_1 + \cos 2\alpha_0 \varphi_2), \quad \tilde{f}_{22} = \int_0^\alpha f_2(\varphi) \sin 2\alpha_0 \varphi d\varphi, \\
\hat{f}_{13} &= P_1 (\sin 3\alpha_0 \varphi_1 - \sin 3\alpha_0 \varphi_2), \quad \tilde{f}_{23} = 0.
\end{aligned} \tag{14'}$$

Коэффициент при $r^{-\alpha_0}$ становится равным нулю, когда $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha$, а коэффициенты при $r^{3\alpha_0-2}$, когда $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha/3$ и $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha$. В случае $k=2$ $\tilde{f}_{22} \neq 0$. Так что, степенная особенность напряжений того или иного порядка всегда существует в решении (12).

Интегрированием $\sigma_\varphi(r, 0)$ и $\sigma_\varphi(r, \alpha)$ по r в интервале (0,1) или с помощью двух первых уравнений статического равновесия системы штампы + сектор определим внешние силы P_0 и P_α , действующие на штампы в случае $f_2(\varphi) = 0$

$$\begin{aligned} P_\alpha &= P_1 \left[\frac{\cos \varphi_2 + \cos \varphi_1}{2 \sin \alpha/2} + \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}{2 \cos \alpha/2} \right], \\ P_0 &= P_1 \left[\frac{\cos \varphi_2 + \cos \varphi_1}{2 \sin \alpha/2} - \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}{2 \cos \alpha/2} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$, то $P_\alpha = P_0 = 0$ для любого значения α из интервала $\pi < \alpha < 2\pi$.

Н точки зрения механики деформируемого твердого тела (15) верны, в частности, для тех значений α, φ_1 и φ_2 , которые удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \geq -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (15')$$

Неравенство (15') получено из условий $P_\alpha \geq 0$ и $P_0 \geq 0$ с учетом того, что сосредоточенные силы, действующие на границе $r=1$, или сжимающие (при $0 < \varphi_j < \pi/2$), или растягивающие (при $\pi/2 < \varphi_j < \pi$). Возможны и другие варианты приложения сосредоточенных сил.

При $\varphi_1 = \varphi_2$ из (15) получим

$$P_\alpha = P_0 = P_1 \frac{\cos \varphi_1}{\sin \alpha/2}. \quad (16)$$

Более подробно исследуем поведение напряжений в окрестности угловой точки сектора ($r \rightarrow 0$) при $\alpha \rightarrow \pi$ и $\alpha \rightarrow 2\pi$:

а) в случае $\alpha \rightarrow \pi$ (фиг.2) порядок особенности напряжений, который обусловлен только первыми членами формул (12), стремится к 1, а коэффициенты при особенности в общем случае нагружения границы $r=1$ отличны от нуля.

Например, при тех же внешних воздействиях (14) первые члены формул (12) принимают вид

$$\frac{P_1 (\sin \alpha_0 \varphi_2 - \sin \alpha_0 \varphi_1)}{\alpha \alpha_0} \left\{ \begin{aligned} &(2 + \alpha_0) \cos \alpha_0 \varphi \\ &\alpha_0 \sin \alpha_0 \varphi \\ &(2 - \alpha_0) \cos \alpha_0 \varphi \end{aligned} \right\} r^{-\alpha_0}.$$

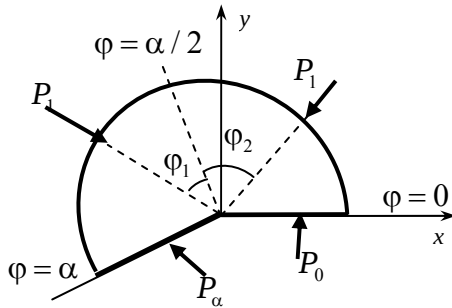
Как видно, коэффициенты при особенности $r^{-\alpha_0}$ отличны от нуля (если только $\varphi_1 \neq \varphi_2$ или $\varphi_1 + \varphi_2 \neq \pi$) и при $\alpha \rightarrow \pi$ все три напряжения в окрестности угловой точки кругового сектора стремятся к бесконечности, как $r^{-1+\varepsilon}$, где ε – сколь угодно малое положительное число ($\varepsilon \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \pi$).

Отметим, что при $\alpha \rightarrow \pi$ и $\varphi_1 \neq \varphi_2$ силы P_α и P_0 , как показывают формулы (15), стремятся к бесконечности, что естественно, иначе первое условие статического равновесия сектора невозможно обеспечить.

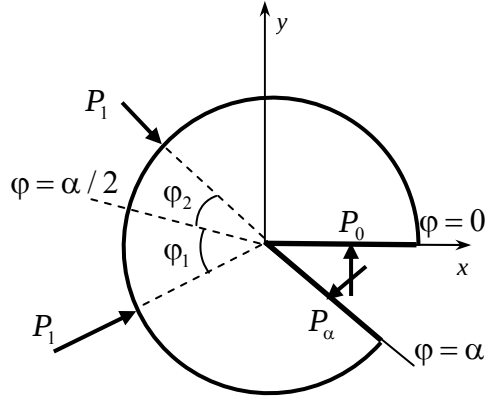
Когда внешние нагрузки удовлетворяют условию

$$-\alpha_0 \tilde{f}_{11} + (2 - \alpha_0) \tilde{f}_{21} = 0, \quad (17)$$

коэффициенты при особенности $r^{-\alpha_0}$ равняются нулю и приходим к задаче, рассмотренной в работе [2]. Ограничению (15) удовлетворяет, в частности, система внешних сил (14) при $\varphi_1 = \varphi_2$. В случае $\alpha = \pi$ условие (17) превращается в первое условие статического равновесия сектора $\Sigma X=0$ и получим задачу об упругом полукруге, прижатом по диаметру к гладкой жесткой основе. Следовательно, если система внешних сил, действующая на границе $r=1$, самоуравновешена в направлении оси ox , то эффект двух штампов, приложенных к диаметру полукруга (появление степенной особенности напряжений типа r^{-1} [5]), исчезает;



Фиг.2



Фиг.3

б) $\alpha \rightarrow 2\pi$, $k=2$ (фиг.3). И в этом случае порядок особенности напряжений стремится к 1, коэффициент которого

$(\tilde{f}_{12} + \tilde{f}_{22})(2 - \alpha_0 k) - 2\tilde{f}_{12} = 2(-\alpha_0 \tilde{f}_{12} + (1 - \alpha_0) \tilde{f}_{22})$ при общих нагрузках на границе $r=1$, как видно из (14'), отличен от нуля даже при $\varphi_1 = \varphi_2$. Для обеспечения статического равновесия в направлении оси ox , силы P_α и P_0 неограниченно увеличиваются при $\varphi_1 = \varphi_2$.

Заметим, что в случае $\alpha = 2\pi$ коэффициент при особенности r^{-1} превращается в выражение левой части первого уравнения статического равновесия сектора $\Sigma X=0$. Т.е. поставленная задача для $\alpha = 2\pi$ корректна, если внешние силы $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ самоуравновешены в направлении оси ox . При этом, хотя порядок особенности равняется 1, коэффициент при особенности становится равным нулю;

в) $\alpha \rightarrow 2\pi$, $k=3$. Порядок особенности напряжений стремится к 0.5, а коэффициент при особенности отличен от нуля, если $\varphi_1 + \varphi_2 \neq m\alpha/3$ ($m=1,3$) и $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Таким образом, решение краевой задачи теории упругости для кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах содержит

степенную особенность напряжений, порядок которого при $\alpha \rightarrow \pi$ или $\alpha \rightarrow 2\pi$ может достигать до порядка особенности напряжений под сосредоточенной силой.

Механическая интерпретация возникновения степенной особенности напряжений, подбъаіё которого стремится к единице, а коэффициент при такой особенности отличен от нуля, дана в работах [4,5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1987. 338 с.
2. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.//Актуальные проблемы механики сплошной среды. Тр. Международной конференции, посвященной 95-летию акад. НАН Армении Н.Х.Арутюняна. Ереван, 2007. С. 368-372.
3. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тр. VI Международной конференции, сентябрь 21-26, Горис- Степанакерт, 2008. Ереван, 2008. С. 394-398
4. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S. On a mixed problem for an elastic space with a crack under anti-plane and plane deformations. Collection of papers. Yerevan, 2005. 282 p.
5. Саргсян А.М. Об особенности напряжений в одной задаче теории упругости для клина // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61, №1. С. 48-51.

Сведения об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич – к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б, тел.: 58-60-54

E-mail: azat-sargsyan@mail.ru

Поступила в редакцию 08.09.2009

УДК 539.3

НАТЯГИВАНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ НА ЖЕСТКУЮ ФОРМУ
СИМОНЯН А.М.

Ключевые слова: анизотропия, оболочка вращения, термопрессование, композит.
Key words: anisotropic, axisymmetrical shell, thermopressure, compozite.

Միմոնյան Ա.Մ.

Անիզոտրոպ թաղանթի քաշումը կոշտ կաղապարի վրա

Դիտարկվում է առանցքային ուժերի ազդեցության տակ գտնվող անիզոտրոպ առանցքացիմետրիկ թաղանթի կոնտակտային ճնշումը կոշտ կաղապարի վրայով թաղանթի սահքի դեպքում: Այս խնդիրը կապված է բարակ կոմպոզիտ թաղանթի ջերմային մամլման հետ: Թաղանթը գտնվում է համեմատաբար բարձր ջերմային ընդարձակման գործակից ունեցող կոշտ կաղապարի և նրան ամրացված արտաքին մամլող թաղանթի միջև: Խնդիրը բերվում է Վոլտերայի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:

Simonyan A.M.

Stretch of Anisotropic Shell on Rigid Mould

The contact pressure at slipping of anisotropic axisymmetrical shell on surface of rigid mould at the action of longitudinal force is considered. This problem is connected with the thermopressure of thin shell from compozite, which is placed between rigid mould from material with the relatively high value of thermal expansion coefficient and external pressing shell, which is fixed with the mould. The problem is reduced to the solution of integral equation of Volterra.

Рассматриваются контактные давления при скольжении анизотропной оболочки вращения по поверхности жесткой формы под действием осевой силы. Настоящая задача имеет отношение к термопрессованию тонкой оболочки из композита, заключенной между жесткой формой из материала с относительно высоким значением коэффициента термического расширения и наружной прессующей оболочкой, закрепленной с формой. Задача сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра.

При изготовлении оболочек из композиционного материала возникает проблема прессования полуфабриката композита в процессе термоотверждения. С этой целью на полуфабрикат композита, уложенный на массивную форму из материала с относительно высоким термическим расширением, может быть надета оболочка с относительно низким термическим расширением и затем оболочка со стороны торца скрепляется с формой и все это перемещается в печь, где происходит термоотверждение, сопровождаемое с самопрессованием.

Настоящая работа посвящена определению распределения контактного давления, имеющего место при повышении температуры, приводящей к фактическому натягиванию оболочки на жесткую форму. Для конических оболочек эта задача рассмотрена в работе [1].

Итак, рассмотрим усеченную оболочку вращения (фиг. 1), форма образующей которой определяется функцией $r(x)$. При рассмотрении оболочки как безмоментной и в условиях действия осесимметричного нормального внутреннего давления $q(x)$ из условия равновесия получим следующие формулы для напряжений в кольцевом и продольном направлениях (σ_θ σ_ℓ соответственно):

$$\sigma_\theta(x) = \frac{r(x)\sqrt{1+[r'(x)]^2}}{\delta} q(x) - \frac{r''(x)}{\delta\sqrt{1+[r'(x)]^2}} \int_a^x r'(y)r(y)q(y)dy, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{\ell}(x) = \frac{\sqrt{1+[r'(x)]^2}}{\delta r(x)} \int_a^x r'(y)r(y)q(y)dy, \quad (1.2)$$

где δ – толщина оболочки.

Рассмотрим условие скольжения оболочки вдоль формы. Положим, что точка A , соответствующая координате $x = a$, в результате натяга занимает положение A_1 (фиг.1), а точка B , соответствующая текущей координате x , – положение B_1 .

Перемещения AA_1 и BB_1 связаны с деформациями ε_{θ} согласно формулам:

$$\begin{aligned} AA_1 &= \frac{A_2 A_1}{\sin \alpha(a)} = \frac{r(a)\varepsilon_{\theta}(a)}{r'(a)} \sqrt{1+[r'(a)]^2}, \\ BB_1 &= \frac{B_2 B_1}{\sin \alpha(x)} = \frac{r(x)\varepsilon_{\theta}(x)}{r'(x)} \sqrt{1+[r'(x)]^2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

С другой стороны, разница между $A_1 B_1$ и AB определяется общей деформацией оболочки в направлении ℓ :

$$A_1 B_1 - AB = BB_1 - AA_1 = \int_A^B \varepsilon_{\ell}(\ell) d\ell. \quad (1.4)$$

Таким образом, получим следующее условие для деформаций оболочки:

$$\frac{r(x)\varepsilon_{\theta}(x)}{r'(x)} \sqrt{1+[r'(x)]^2} - \frac{r(a)\varepsilon_{\theta}(a)}{r'(a)} \sqrt{1+[r'(a)]^2} = \int_a^x \varepsilon_{\ell}(y) \sqrt{1+[r'(y)]^2} dy \quad (1.5)$$

Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать деформации и перемещения оболочки относительно жесткой формы, будем формально считать, что жесткая форма, имеющая коэффициент термического расширения (КТР) λ_0 , от температуры не расширяется, а оболочка имеет КТР, равный $\lambda_{\varepsilon} - \lambda_0$ и $\lambda_{\theta} - \lambda_0$ (λ_{ε} и λ_0 соответствуют температурному расширению материала оболочки в направлениях ℓ и θ). Закон Гука для оболочки запишем так:

$$\varepsilon_{\ell} = \frac{\sigma_{\ell}}{E_{\ell}} - \frac{\mu_{\ell\theta}}{E_{\theta}} \sigma_{\theta} + (\lambda_{\ell} - \lambda_0)T; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}} - \frac{\mu_{\ell\theta}}{E_{\ell}} \sigma_{\ell} + (\lambda_{\theta} - \lambda_0)T. \quad (1.6)$$

После подстановки соотношений (1.1), (1.2) и (1.6) в (1.5) и используя формулу изменения порядка интегрирования [2]

$$\int_a^x f(y) \int_a^y \varphi(\xi) q(\xi) d(\xi) dy = \int_a^x \varphi(y) q(y) \int_y^x f(\xi) d\xi dy,$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{r^2(x)[1+(r'(x))^2]}{r'(x)} q(x) - \int_a^x q(y) \left\{ \frac{r(x)r''(x)}{r'(x)} r'(y)r(y) + \frac{1+(r'(x))^2}{r'(x)} \mu_{\ell\theta} r'(y)r(y) - \right. \\ & \left. - \mu_{\ell\theta} r(y)[1+(r'(y))^2] + r'(y)r(y) \int_y^x \left[\frac{1+(r'(\xi))^2}{r(\xi)} \cdot \frac{E_{\theta}}{E_{\ell}} + \mu_{\ell\theta} r''(\xi) \right] d\xi \right\} dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{r^2(a)[1+(r'(a))^2]}{r'(a)} q(a) + \left[\frac{r(x)\sqrt{1+(r'(x))^2}}{r'(x)} (\lambda_0 - \lambda_\theta) - \frac{r(a)\sqrt{1+(r'(a))^2}}{r'(a)} (\lambda_0 - \lambda_\theta) - (\lambda_0 - \lambda_\ell) \int_a^x \sqrt{1+(r'(y))^2} dy \right] \delta E_\theta T. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) перепишем так:

$$\left[q(x) - \int_a^x q(y) K(x, y) dy = q(a) f_1(x) + f_2(x) \right], \quad (1.8)$$

где приняты обозначения:

$$f_1(x) = \frac{r^2(a)[1+(r'(a))^2]}{r^2(x)[1+(r'(x))^2]} \frac{r'(x)}{r'(a)},$$

$$f_2(x) = \frac{r'(x)\delta E_\theta T}{r^2(x)[1+(r'(x))^2]} \left\{ (\lambda_0 - \lambda_\theta) \left[\frac{r(x)\sqrt{1+(r'(x))^2}}{r'(x)} - \frac{r(a)\sqrt{1+(r'(a))^2}}{r'(a)} \right] - (\lambda_0 - \lambda_\ell) \int_a^x \sqrt{1+(r'(y))^2} dy \right\},$$

$$K(x, y) = \frac{r''(x)r'(y)r(y)}{r(x)[1+(r'(x))^2]} + \mu_{\ell\theta} \frac{r'(y)r(y)}{r^2(x)} - \mu_{\ell\theta} \frac{r'(x)r(y)[1+(r'(y))^2]}{r^2(x)[1+(r'(x))^2]} + \frac{r'(x)r'(y)r(y)}{r^2(x)[1+(r'(x))^2]} \int_y^x \left[\frac{1+(r'(\xi))^2}{r(\xi)} \cdot \frac{E_\theta}{E_\ell} + \mu_{\ell\theta} r''(\xi) \right] d\xi.$$

Уравнение (1.8) является интегральным уравнением Вольтерра II рода и его решение может быть записано в форме [3]

$$q(x) = q(a) \left[f_1(x) + \int_a^x R(x, y) f_1(y) dy \right] + f_2(x) + \int_a^x R(x, y) f_2(y) dy, \quad (1.9)$$

где $R(x, y)$ – резольвентное ядро ядра $K(x, y)$.

Положим, что задано общее усилие N натяга оболочки со стороны ее большего торца ($x = b$). Из условия равновесия будем иметь

$$N = 2\pi\delta\sigma_\ell(b) \cos \alpha(b) \quad (1.10)$$

Подставляя в условие (1.10) соотношения (1.2) и (1.9), получим следующую формулу для определения $q(a)$:

$$q(a) = \frac{\frac{Nr(b)}{2\pi \cos \alpha(b) \sqrt{1+[r'(b)]^2}} - \int_a^b r'(y)r(y) \left[f_2(y) + \int_a^y f_2(\xi)R(y,\xi)d\xi \right] dy}{\int_a^b r'(y)r(y) \left[f_1(y) + \int_a^y f_1(\xi)R(y,\xi)d\xi \right] dy} \quad (1.11)$$

В предположении же, что оболочка большим торцом скреплена с жесткой формой по окружности ($x = b$), получим условие

$$\begin{aligned} u_1(b) &= 0 \\ \text{или, что же} \\ \varepsilon_\theta(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подставляя в (1.12) выражения (1.6), (1.1), (1.2) и (1.9), получим следующую формулу для определения $q(a)$:

$$\begin{aligned} q(a) &= \left\{ (\lambda_0 - \lambda_\theta) T \delta E_\theta - r(b) \sqrt{1+[r'(b)]^2} \left[f_2(b) + \int_a^b R(b,y) f_2(y) dy \right] + \right. \\ &+ \left[\frac{r''(b)}{\sqrt{1+[r'(b)]^2}} + \mu_{\epsilon\theta} \frac{\sqrt{1+[r'(b)]^2}}{r(b)} \right] \int_a^b r'(y)r(y) \left[f_2(y) + \int_a^y f_2(z)R(y,z)dz \right] dy \Big\} \times \\ &\times \left\{ r(b) \sqrt{1+[r'(b)]^2} \left[f_1(b) + \int_a^b f_1(y)R(b,y)dy \right] - \left[\frac{r''(b)}{\sqrt{1+[r'(b)]^2}} + \mu_{\epsilon\theta} \frac{\sqrt{1+[r'(b)]^2}}{r(b)} \right] \times \right. \\ &\times \left. \int_a^b r'(y)r(y) \left[f_1(y) + \int_a^y f_1(z)R(y,z)dz \right] dy \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (1.13)$$

В отличие от конических оболочек [1], где получены формулы для вычисления значений $q(x)$, практическое использование решения (1.9) вкуче с (1.13) для оболочек двоякой кривизины связано с трудностями определения резольвентного ядра $R(x, y)$, хотя, как показано, например, в работе [2], для уравнений Вольтерра II рода, каковым является уравнение (1.8), резольвентное ядро существует всегда. Если участок $b - a$ разделить на n элементов длины $\mu = (b - a) / n$ и в пределах каждого принять кусочно-постоянную аппроксимацию ядра $K(x, y)$, то для вычисления значений резольвенты может быть использовано интегральное уравнение для резольвенты [2]

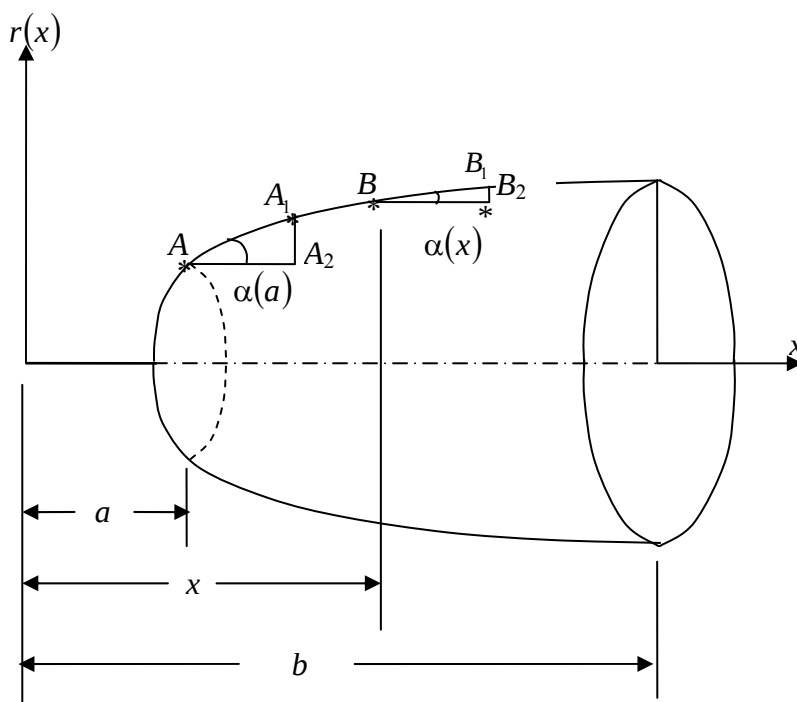
$$R(x, y) = K(x, y) + \int_a^x K(x, z)R(z, y)dz,$$

откуда может быть получено приближенное выражение $R(x, y)$:

$$\begin{aligned} R(y + m\mu, y) &\cong [1 + \mu K(y, y)] \{ K(y + m\mu, y) + \\ &+ \mu \sum_{i=1}^{m-1} K(y + \mu m, y + \mu i) K(y + \mu i, y) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu^2 \sum_{i=1}^{m-1} K(y + \mu m, y + \mu i) \sum_{j=1}^{i-1} K(y + \mu i, y + \mu j) K(y + \mu j, y) + \\
& + \mu^3 \sum_{i=1}^{m-1} K(y + \mu m, y + \mu i) \sum_{j=1}^{i-1} K(y + \mu i, y + \mu j) \sum_{\ell=1}^{j-1} K(y + \mu j, y + \mu \ell) K(y + \mu \ell, y) + \\
& + \dots + \mu^{m-1} K(y + \mu m, y + \mu(m-1)) \cdot K(y + \mu(m-1), y + \mu(m-2)) \cdot \dots \cdot K(y + \mu y)
\end{aligned}$$

Здесь имеется в виду, что y превышает значение a на кратное число, помноженное на μ , а $m < n$.



Фиг. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. Simonyan A.M. On theory of thermopressing of conic shells from composites. //Изв. АНТНА. 2009. №2. С.97-105.
2. Трикоми. Интегральные уравнения. Изд. Иностран.лит., 1960. 300 с.
3. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. М-Л.: Гостехиздат, 1947. 380с.

Сведения об авторе:

Симонян Арег Михайлович – ведущий научн. сотр. Института механики НАН РА.
Тел.: (374 10)52-75-39, (374 93)45-70-86.
E-mail: simonyan areg@mail.ru

Поступила в редакцию 21.10.2009

УДК 621.923

**МЕХАНИКА ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА
АВАКЯН Р.М., АРАКЕЛЯН М.М., НАЗАРЯН Э.А., КАХРИЗИ М.**

Ключевые слова: механика формоизменения, листовой металл, деформация, напряжение.
Keywords: mechanics of forming, sheet metal, strain, stress

**Ավագյան Ռ.Մ., Առաքելյան Մ.Մ., Նազարյան Է.Ա., Քահրիզի Մ.Ա.
Օղակաձև սկավառակի ձևափոխման մեխանիկան**

Արդյունաբար դեֆորմացիայի և դեֆորմացիոն ամրացման համատեղ փոփոխության պայմաններում մեծ պլաստիկ դեֆորմացիաների դեպքում կատարված է հաստատուն հաստության օղակաձև սկավառակի ձևափոխման վերլուծությունը: Ստացված են պլաստիկության տիրույթը նկարագրող անալիտիկ առնչություններ: Ներքին ճնշման հնարավոր սահմանային արժեքի դեպքում հաստատված են սկավառակի վերջնական և նախնական ձևի և չափերի միջև փոխադարձ կապեր:

**Avakyan R.M., Arakelyan M.M, Nazaryan E.A., Kahrizi M.A.
Mechanics of Forming Ring Disks**

The analysis of forming ring disk of constant thickness in conditions of large plastic deformations taking into account the interconnected change of effective strain and deformation hardening is carried out. The analytical dependences characterizing the relative size of plastic area are obtained. The interrelation between the initial and final form of a product is established at maximum possible size of internal pressure.

Проведен анализ формоизменения кольцевого диска постоянной толщины в случае больших пластических деформаций с учетом взаимосвязанного изменения эффективной деформации и деформационного упрочнения. Получены аналитические зависимости, характеризующие относительный размер пластической области. Установлена взаимосвязь между исходной и конечной формой изделия при предельно возможной величине внутреннего давления.

1. Введение.

При разработке прикладных и технологических проблем осесимметричного формоизменения металлов используют результаты решения задач по определению напряженно-деформированного состояния кольцевого диска и толстостенной трубы при больших пластических деформациях. К таким проблемам относятся определение конечной формы и размеров изделия и механических свойств материала, измененных вследствие деформирования при заданной величине и закономерности изменения внешней нагрузки.

Существующие методы анализа подобных задач основаны на схематизации процесса формоизменения, при которой проблему сводят к приданию уравнениям, характеризующим пластическое состояние, удобной для математических выкладок формы с целью получения замкнутых аналитических решений. Для этого рассматривают статически определимые задачи, вследствие чего становится возможным определение напряжений без рассмотрения уравнений связи между напряжениями и деформациями (скоростями деформаций).

Современное состояние анализа осесимметричных задач основано на пионерских работах [1,2,3], в которых рассматривается пластическое состояние толстостенной трубы бесконечной длины под действием равномерного внутреннего давления. В этих работах принимаются допущения, согласно которым поперечные сечения трубы при формоизменении остаются плоскими, на основе чего становится возможным определение напряжений из совместного решения уравнения равновесия

и условия пластичности для плоско-напряженного, либо для плоско-деформированного состояний. Из полученных решений следует, что при предельной величине внутреннего давления относительный диаметр трубы, находящейся в пластическом состоянии, в первом случае стремится к 2,963, а во втором – к 2,72. Фактически в обоих случаях решается плоская задача в полярных координатах при разных формах записи условия пластичности. Полученные результаты представляются несколько противоречивыми в связи с трудностями предположения, что при одинаковой величине внутреннего давления отсутствие осевой сжимающей нагрузки способствует увеличению относительного размера пластической области. Кроме того, по этим решениям трудно установить взаимосвязь между координатами рассматриваемых элементов в исходном и деформированном состояниях, поэтому определение конечной формы и размеров изделия становится неразрешимой задачей.

В другом классе работ [4,5,6] рассматривается упруго-пластическое состояние тонких пластин с круговым вырезом под действием внутреннего давления. В частности, в работе [4] показано, что в предельном состоянии на внутреннем контуре пластины радиальные и окружные напряжения, соответственно, достигают величин $\sigma_r = -2\sigma_s/\sqrt{3}$, $\sigma_\theta = -\sigma_s/\sqrt{3}$, и на основе уравнений связи напряжений и приращений деформаций делается вывод, что скорость (приращение) осевой деформации $d\varepsilon_z \rightarrow \infty$, а относительный радиус пластической области стремится к 1,75 при использовании условия текучести Мизеса, и к 1,65 – при использовании условия текучести Треска-Сен-Венана. В работах [5,6] сделана попытка получения более реального результата для осевой компоненты деформаций. Показано, что для предельной величины внутреннего давления относительная толщина внутреннего контура стремится к 3,61. Нереальность полученных результатов, по мнению авторов, обусловлена условностью схематизации процесса формоизменения.

Если в первом направлении работ противоречивость полученных результатов связана с рассмотрением плоского напряженного состояния на основе гипотезы плоских сечений, то во втором случае нереальность результатов обусловлена ошибочностью предположений, связанных с механикой формоизменения.

Поэтому представляется целесообразной и актуальной математическая корректная постановка задач формоизменения кольцевого диска постоянной толщины из материала с определенными механическими свойствами в условиях больших пластических деформаций.

В настоящей работе рассматривается формоизменение в предельном состоянии с учетом взаимосвязанного изменения осевой компоненты деформаций и деформационного упрочнения и ставятся следующие задачи:

–определение наибольшего относительного диаметра диска, находящегося в пластическом состоянии;

–установление взаимосвязи между конечной и исходной формами и размерами изделия.

2. Постановка задачи и исходные уравнения

Рассмотрим кольцевой диск толщиной H_0 , внутренний радиус которого $-r_0$, а наружный $-R_0$, нагруженный внутренним давлением p . Определим напряженно-деформированное состояние диска, не накладывая ограничений на величины деформаций. В отличие от общеизвестных работ [1,2,3,4], предположим, что диск состоит из множества кольцевых пластин размеров $2r_0$, $2R_0$ и толщиной h_0 , которые могут свободно деформироваться в радиальном и осевом направлениях при сохранении сплошности материала и отсутствии силового взаимодействия между пластинами. Очевидно, что такая модель наиболее реально отображает состояние

диска под действием внутреннего давления и отсутствия осевого сжимающего усилия.

Примем цилиндрическую систему координат ρ, θ, z , плоскость $z = 0$ которой является средней плоскостью пластин, а ось z направлена перпендикулярно к этой плоскости. Предполагается, что пластины нагружены внешними силами, параллельными средней плоскости, а характерный размер пластин $h_0/(R_0 - r_0) \ll 1$. В таких условиях радиальное, осевое и окружное направления будут главными направлениями напряжений и деформаций, а напряженное состояние, реализующееся в таких условиях, характеризуют как обобщенное плоское напряженное состояние [4].

Таким образом, проблема деформирования кольцевого диска сводится к анализу формоизменения множества тонкостенных кольцевых пластин, деформирующихся в условиях плоского напряженного состояния под действием внутреннего давления.

Для решения поставленных задач рассмотрим исходные уравнения, характеризующие пластическое состояние.

– Критерий текучести Мизеса

$$\sigma_i = \sigma_s = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2] \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$ – главные напряжения в радиальном, окружном и осевом направлениях.

– Эквивалентная деформация

$$\varepsilon_i = \left\{ \frac{2}{9} [(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\rho)^2] \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta$ и ε_z – главные деформации в тех же направлениях.

– Условие постоянства объема

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \quad (3)$$

– Соотношение между напряжениями и приращениями деформаций

$$\frac{d\varepsilon_\rho - d\varepsilon_\theta}{\sigma_\rho - \sigma_\theta} = \frac{d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_z}{\sigma_\theta - \sigma_z} = \frac{d\varepsilon_z - d\varepsilon_\rho}{\sigma_z - \sigma_\rho} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}, \quad (4)$$

где $d\varepsilon_i$ – интенсивность приращения деформаций, определяемая соотношением

$$d\varepsilon_i = \left\{ \frac{2}{9} [d\varepsilon_\rho - d\varepsilon_\theta]^2 + (d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_\rho)^2 \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

– Зависимость между напряжением текучести (1) и эквивалентной деформацией (2), представленная в виде степенной функции [8]

$$\sigma_i = \sigma_s = A \varepsilon_i^n, \quad (6)$$

где A и n – параметры деформационного упрочнения, зависящие от механических свойств деформируемого материала.

– Уравнение равновесия элемента осесимметрично нагруженной кольцевой пластины с учетом наличия осевой деформации [7]

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho \left(1 + \frac{\rho}{h} \frac{dh}{d\rho} \right) - \sigma_\theta = 0. \quad (7)$$

Приращения деформаций в окружном $d\varepsilon_\theta$ и осевом $d\varepsilon_z$ направлениях связаны

с приращением радиуса $d\rho$ и осевого смещения dh соотношениями

$$d\varepsilon_\theta = \frac{d\rho}{\rho}, \quad d\varepsilon_z = \frac{dh}{h}. \quad (8)$$

При плоско-напряженном состоянии ($\sigma_z = 0$) из (4) следуют зависимости:

$$d\varepsilon_\rho = \frac{2\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_\rho} d\varepsilon_\theta; \quad d\varepsilon_z = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} d\varepsilon_\theta. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) уравнение равновесия (7) принимает вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2 \frac{\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2}{2\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} = 0. \quad (10)$$

Интегрирование (10) совместно с (1) в принципе возможно лишь для идеально жестко-пластической модели деформируемого материала, поэтому решение поставленных задач прямым методом становится невозможным [7].

3. Формоизменение тонких кольцевых пластин

В наших работах [9,10,11] показано, что, представляя компоненты приращения деформаций в тригонометрической форме на девиаторной плоскости (π -плоскости) цилиндра пластичности, удовлетворяющие соотношению (5) и условию постоянства объема в дифференциальной форме ($d\varepsilon_\rho + d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_z = 0$),

$$d\varepsilon_\rho = d\varepsilon_i \cos \varphi, \quad d\varepsilon_\theta = d\varepsilon_i \cos(\varphi + 2\pi/3), \quad d\varepsilon_z = d\varepsilon_i \cos(\varphi + 4\pi/3) \quad (11)$$

по зависимостям (9) легко получить выражения для напряжений

$$\sigma_\rho = \sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6), \quad \sigma_\theta = -\sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi \quad (12)$$

удовлетворяющие критерию текучести Мизеса при плоско-напряженном состоянии ($\sigma_z = 0$). В зависимостях (11) и (12) параметр φ характеризует вид деформированного состояния и меняется в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ [9,10].

С учетом (8), (11) и (12) уравнение равновесия (10) можно представить на девиаторной плоскости (π -плоскости) в достаточно простой форме [10]:

$$d\sigma_\rho = \sigma_s \cdot d\varepsilon_i \quad (13)$$

Таким образом, система уравнений (1-7) приводится к виду, устанавливающему дифференциальную пропорциональную зависимость между радиальной компонентой напряжения и эквивалентной деформацией. В (13) коэффициентом пропорциональности является напряжение текучести материала, зависящее от реологической модели деформируемого материала.

При степенной зависимости напряжения текучести от эквивалентной деформации (6) уравнение (13), с учетом (12) легко интегрируется и приводится к виду:

$$\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_0^{n+1} = (1+n) \varepsilon_i^n \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6) \quad (14)$$

где ε_0 – эквивалентная деформация краевого элемента.

Пределы изменения параметра φ в рассматриваемой задаче устанавливается в зависимости от величины приложенной нагрузки. При небольшой величине внутреннего давления кольцевые пластины находятся в упругом состоянии и напряжения определяются из известного решения упругой задачи [3,4]. С

увеличением внутреннего давления до начальной критической величины, равной $\sigma_s / \sqrt{3}$, на внутреннем контуре появляются первые пластические деформации, при этом выполняется равенство $|\sigma_r| = |\sigma_\theta| = \sigma_s / \sqrt{3}$. По мере возрастания давления пластические деформации распространяются в направлении к наружному контуру и при предельной величине внутреннего давления относительный диаметр диска, охваченного пластическими деформациями, достигает наибольшей величины.

В указанном диапазоне изменения параметра φ вектор-функция $\bar{\epsilon}$, модуль которой численно равен эквивалентной деформации (2) [9,10], становится перпендикулярной к координатным осям ϵ_θ и ϵ_z , вследствие чего приращение и компоненты деформаций по этим осям становятся равными нулю.

Из зависимостей (12) следует, что несущая способность пластин исчерпывается, когда радиальные сжимающие напряжения на внутреннем контуре по абсолютной величине достигают значения $2\sigma_s / \sqrt{3}$, при котором $\varphi = 5\pi/6$. На границе упруго-пластической области осевая компонента деформаций становится равной нулю, вследствие чего на этой границе выполняется условие $|\sigma_r| = |\sigma_\theta| = \sigma_s / \sqrt{3}$. Следовательно, все виды деформаций, которые в принципе могут реализоваться в предельном состоянии, располагаются на девиаторной плоскости в виде сектора с центральным углом $\varphi = \pi/3$. Если параметр φ совпадает с отрицательным направлением оси ϵ_r , то ϵ_r – деформация сжатия в радиальном направлении, а ϵ_θ и ϵ_z – деформации растяжения, численно равные $\epsilon_r/2$. Если параметр φ совпадает с направлением $5\pi/6$, то $\epsilon_\theta = 0$, а ϵ_r и ϵ_z равны по величине и противоположны по знаку, то есть имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости $(\rho; z)$. Если параметр φ совпадает с направлением $7\pi/6$, то $\epsilon_z = 0$, а ϵ_r и ϵ_θ равны по величине и противоположны по знаку, то есть имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости $(\rho; \theta)$.

Из зависимости (14) легко определяются компоненты деформаций при $\epsilon_\theta = 0$

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= -\frac{1+n}{2} \left(1 + \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi \right), \quad \epsilon_\theta = \frac{1+n}{2} \left(\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi \right), \\ \epsilon_z &= \frac{1+n}{2} \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, в параметрической форме получено общее решение для напряженно-деформированного состояния кольцевого диска.

Установим взаимосвязь между параметром φ и координатой ρ рассматриваемого элемента в деформированном состоянии. Для этого, продифференцировав (14) при $(\epsilon_\theta = 0)$, с учетом (8) и (11), имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} = -(1+n) \left[\sin \varphi \cos \varphi + \left(\sqrt{3}/2 \right) \sin^2 \varphi + \left(\sqrt{3}/6 \right) \cos^2 \varphi \right] d\varphi \quad (16)$$

После интегрирования (16) приводится к виду

$$\ln \rho = -(1+n) \left[\left(\sqrt{3}/3 \right) \varphi - (1/4) \cos 2\varphi - \left(\sqrt{3}/12 \right) \sin 2\varphi \right] + C \quad (17)$$

Постоянная интегрирования в (17) находится из граничного условия, согласно которому при $\varphi = \frac{7}{6}\pi$ $\rho = R$ (R – внешний радиус пластической области).

С учетом граничного условия выражение (17) принимает вид:

$$\frac{\rho}{R} = \exp\left\{(1+n)\left[-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\varphi - \frac{7\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{12}\sin 2\varphi\right]\right\} \quad (18)$$

При выводе зависимости (18) учтено, что эффективная деформация (14) всегда является положительной скалярной величиной.

Подставляя в (18) значение параметра $\varphi = 5\pi/6$, при котором внутреннее давление достигает предельной величины, получим относительный наибольший диаметр пластической области

$$\frac{R}{\rho_0} = \exp\left[(1+n)\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right)\right] \approx \exp[(1+n)(0,854)] \quad (19)$$

где ρ_0 – радиус внутреннего контура в деформированном состоянии. При $n = 0$, предельное значение R/ρ_0 стремится к 2,35, что существенно меньше результата работ [1,2,3]. Зависимости (12), (14), (15) и (18), являясь параметрическим решением задачи, полностью определяют напряженно-деформированное состояние кольцевых пластин с учетом взаимосвязанного изменения осевой компоненты деформации и деформационного упрочнения.

Для определения конечной формы и размеров изделия при предельной величине внутреннего давления рассмотрим распределение окружных и осевых деформаций.

В зависимостях (4) и (5) приращения компонент деформаций отнесены к текущему деформированному состоянию, и их суммирование приводит к логарифмическим деформациям, удовлетворяющим условию постоянства объема (3):

$$\varepsilon_r = \ln \frac{d\rho}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \ln \frac{\rho}{r}; \quad \varepsilon_z = \ln \frac{h}{h_0} \quad (20)$$

где ρ , h и r , h_0 – текущие координаты и толщины рассматриваемого элемента пластины в деформированном и исходном состояниях, соответственно.

Из равенства (15) и (20) легко устанавливаются зависимости между координатами и толщины в текущем и исходном состояниях

$$\rho/r = \exp\left[\frac{1+n}{2}\left(\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right)\right], \quad h/h_0 = \exp\left[\frac{1+n}{2}\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right)\right] \quad (21)$$

В частности, для внутреннего контура, при $\varphi = \pi$, ($|\sigma_r| = \sigma_s$) из (21) следует

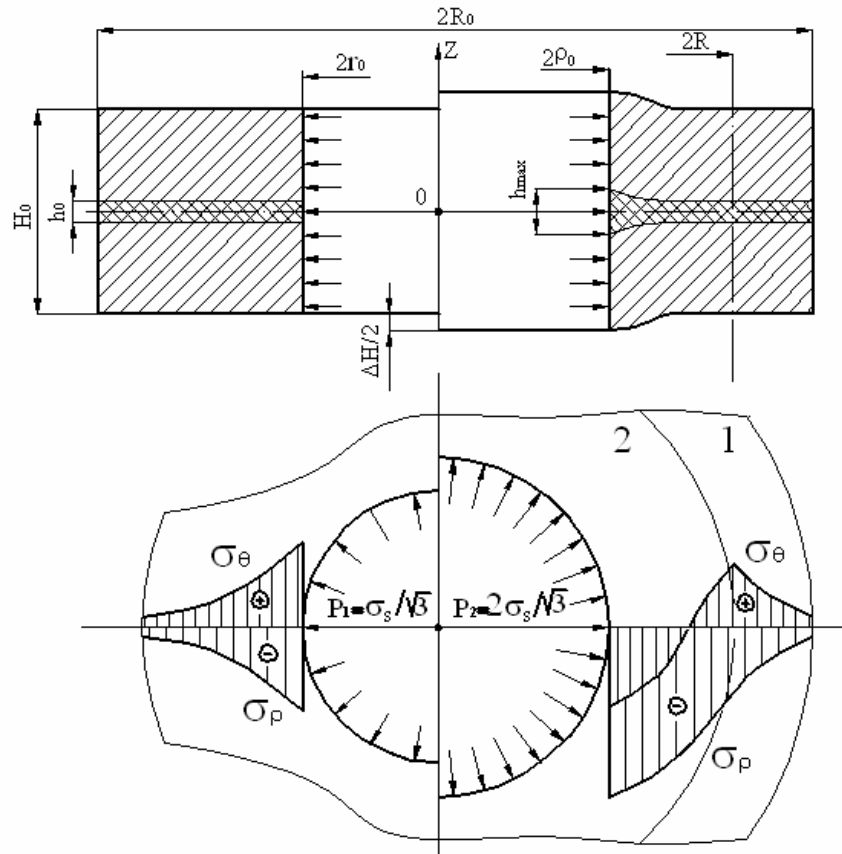
$$\rho_0/r_0 = h/h_0 = \exp \frac{1}{2}(1+n). \quad (22)$$

Для идеально жестко-пластической модели деформируемого материала ($n = 0$) относительное утолщение внутренней кромки составляет 1,648.

4. Обсуждение результатов.

Сопоставляя полученное решение со второй зависимостью (9), легко заметить, что при предельной величине внутреннего давления, равного $2\sigma_s/\sqrt{3}$, $d\varepsilon_z$ не может стремиться к бесконечности, так как при этом одновременно и числитель

указанной зависимости становится равным нулю. С другой стороны, из механики формоизменения следует, что при величине внутреннего давления, равного σ_s , модуль вектор-функции не может быть больше единицы, при этом, $\varphi = \pi$. Следовательно, наибольшая величина осевой компоненты деформаций стремится к 0,5, а относительная толщина пластины – к 1,648, что вполне соответствует значениям, реализуемым в экспериментах.



Фиг. 1

На фиг. 1. представлена исходная (слева) и конечная (справа) форма и размеры изделия, а также распределение напряжений при начальной и предельной величине внутреннего давления (1 – упругая область, 2 – пластическая область).

Для оценки наибольшей величины относительного утолщения внутренней кромки кольцевого диска $(\Delta H / H_0)$, приравнявая смещённые объёмы при допущении линейной зависимости ΔH от текущего радиуса ρ , получим:

$$\frac{\Delta H}{H_0} = \frac{r_0^2}{R^2} \frac{(\rho_0^2 / r_0^2 - 1)}{(1 - \rho_0^2 / R^2)} \quad (23)$$

Численный расчет при параметрах $\rho_0 / r_0 = 1,648$ и $R / \rho_0 = 2,35$ показывает, что осевое относительное утолщение внутренней кромки составляет

$\Delta H / H_0 \approx 0,14$, что сопоставимо с результатами экспериментальных исследований.

Выводы:

1. Получено аналитическое решение задачи формоизменения кольцевого диска постоянной толщины при больших пластических деформациях с учетом взаимосвязанного изменения эффективной деформаций и деформационного упрочнения.
2. Установлено, что относительный размер пластической области зависит от величины внутреннего давления и в пределе, для идеально жестко-пластической модели деформируемого материала, стремится к 2,35.
3. Показано, что относительное утолщение внутреннего контура диска в осевом направлении не превышает 15%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т.2. М.: Мир, 1969. 863с.
2. Унков Е.П., Джонсон У., Колмогоров В.Л. и др. Теория пластических деформаций. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
6. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford. 1998, p.362.
7. Попов Е.А. Основы теории листовой штамповки. М.: Машиностроение, 1977. 278 с.
8. Marciniak Z., Duncan J., Hu S., Mechanics of Sheet Metal Forming, Published by Butterworth-Heinemann, 2002, p.228.
9. Назарян Э.А., Константинов В.Ф. Кинематика деформирования в формоизменяющих операциях листовой штамповки. //Вестник Машиностроения. 1999. №2. С.35-41.
10. Nazaryan E., Arab N., Arakelyan M., Markosyan A., Mechanics of Forming Thin Ring Plates. International Deep Drawing Research Group – 2009 Conference, 1-3 June, Golden, Colorado, USA.
11. Назарян Э.А., Араб Н.Н., Аракелян М.М., Маркосян А.С. Механика формоизменения тонких кольцевых пластин. //Изв.НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.80-88.

Сведения об авторах:

Авакян Роланд Мамиконович – доктор физ.-мат. наук, профессор, член-корр. НАН РА, декан физического фак-та ЕГУ

Аракелян Милета Мартirosовна – канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры ФТТ ЕГУ, E-mail address: marakelyan@ysu.am.

Назарян Эрнест Агаджанович – доктор технических наук, ведущий научн. сотр. физического фак-та Ереванского Государственного Университета

Кахризи Мохаммад – аспирант мат.-мех. фак-та ЕГУ

Поступила в редакцию 28.12.2009

ДИФFUЗИЯ ВИХРЕЙ В МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

БРУТЯН М.А.

Ключевые слова: неньютоновская механика, микрополярная жидкость, вихревые течения, точные решения.

Key words: non-newtonian mechanics, micropolar fluids, vortex flows, exact solutions.

Բրուտյան Մ.Ա.

Մոթիկների դիֆուզիան միկրոպոլյար հեղուկում

Միկրոպոլյար հեղուկի հավասարումների շրջանակում գտնված են մրրկային հոսանքները նկարագրող լուծումներ, որոնք նման են կլասիկ նյուտոնյան հեղուկի համար Օզենի և Թեյլորի հայտնի լուծումներին: Մանրամասն ուսումնասիրված է Օզենի խնդիրը միկրոպոլյար հեղուկում ուղղագիծ մրրկային թելի դիֆուզիայի մասին: Հաստատված է, որ այն ավտոմոդել չէ և չունի անալիտիկ լուծում: Որոշված են ինտեգրալ ինվարիանտները և տրված է խնդրի թվային լուծումը:

Brutyan M.A.

Vortices Diffusion in a Micropolar Liquid

Solutions are found that describe vortex flow within the framework of micropolar liquid theory. These solutions are similar to well-known exact solutions of Oseen and Taylor for classical Newtonian fluid. It is shown that Oseen problem of a line vortex decay in micropolar liquid is not self-similar and does not have an exact solution. Integral invariants and numerical solution of the problem are provided. It is found that for Taylor problem of a vortex lattice diffusion the influence of micropolarity tends to more intensive vortex decay then in a classic Navier-Stokes fluid.

В рамках уравнений микрополярной жидкости найдены решения, описывающие вихревые течения, аналогичные известным точным решениям Озеена и Тейлора, полученным в рамках классической ньютоновской жидкости. Подробно исследована задача Озеена о диффузии прямолинейной вихревой нити в микрополярной жидкости. Установлено, что она не является автомодельной и не имеет точного аналитического решения. Определены интегральные инварианты и дано численное решение задачи. Найдено, что в задаче Тейлора о диффузии вихревой решетки влияние микрополярных свойств жидкости приводит к более интенсивному распаду вихрей по сравнению с обычной ньютоновской жидкостью модели Навье-Стокса.

1. Введение. Одной из важнейших задач теории нестационарных течений вязкой жидкости является задача о диффузии завихренности. С этим аспектом гидродинамики неизбежно сталкиваются при изучении течений в пограничных слоях, следах и других вихревых образованиях. В классической гидродинамике вязкой ньютоновской жидкости наиболее известный результат в этой области получил Озеен [1] в задаче о диффузии прямолинейной вихревой нити и Тейлор [2] в задаче о диффузии решетки вихрей. Решение Озеена описывает двумерное течение с круговой симметрией, линии тока которого представляют собой окружности с центром на оси вихря, а вектор завихренности параллелен этой оси и зависит только от радиального расстояния и времени. Этот вихрь можно рассматривать как регуляризацию прямолинейного вихря, в котором завихренность имеет особенность типа дельта-функции.

В уравнениях классической гидродинамики, основанных на линейной связи тензора напряжений и тензора скоростей деформаций, для описания течения используется единственное векторное поле – поле скоростей. Эти основные предположения, как известно, определяют класс ньютоновских жидкостей. Наиболее известной моделью неньютоновских сред, для описания которых требуются дополнительные переменные гидродинамического типа, является так называемая

микрополярная жидкость [3-6]. Привлекательность этой модели заключается в том, что она является, пожалуй, наиболее важным и одновременно простым обобщением классической модели Навье-Стокса. Дополнительно к полю скоростей в рассмотрение вводится единственное векторное поле угловых скоростей микровращения. Таким образом, к системе определяющих уравнений добавляется только одно (векторное) уравнение, соответствующее закону сохранения момента количества движения. Физически микрополярные жидкости могут адекватно представлять жидкости, состоящие из стержнеобразных элементов. Некоторые анизотропные жидкости, например, жидкие кристаллы, имеющие гантелевидные молекулы, относятся к этому типу. По существу сюда относятся и многие биологические жидкости, в частности, кровь животных. Другие жидкости, содержащие определенные полимерные добавки, также могут быть описаны математической моделью, в основе которой лежат представления о микрополярных жидкостях.

В настоящей работе на примере задачи Озеена (диффузия вихря) и Тейлора (диффузия вихревой решетки) изучается влияние микрополярности на нестационарный процесс вязкой диффузии. Сложность решения нестационарных задач в неньютоновских жидкостях привела к тому, что в этом направлении выполнено сравнительно небольшое число работ, посвященных главным образом вопросам линейной устойчивости простейших течений [7-10], задаче Стокса-Рэлея о движении плоскости [11-13] и задаче Рэлея о схлопывании пузыря в нелинейно-вязкой и вязкоупругой жидкости [14-17]. Диффузия вихря в рамках иных моделей неньютоновской жидкости рассматривалась ранее в работах [18,19].

2. Определяющие уравнения микрополярной жидкости. Уравнения микрополярной жидкости, часто называемые уравнениями асимметрической гидромеханики, характеризуются несимметричным тензором напряжений σ_{ij} и наличием дополнительного тензора микромоментов m_{ij}

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial_i V_j + \partial_j V_i) + k(\partial_i V_j - \varepsilon_{ijm}\Omega_m), \quad (1)$$

$$m_{ij} = \alpha\delta_{ij}\text{div}\Omega + \beta\partial_j\Omega_i + \gamma\partial_i\Omega_j \quad (2)$$

Здесь $\partial_i = \partial/\partial x_i$; δ_{ij} – тензор Кронекера; ε_{ijm} – антисимметричный тензор Леви-Чивита; p – давление; V – скорость; Ω – угловая скорость микровращения; μ – коэффициент динамической вязкости; α , β , γ – коэффициенты вращательной вязкости; k – коэффициент вихревой вязкости, характеризующий меру “сцепления” частицы со своим окружением. Из (1) и (2) видно, что при эйлеровом описании состояние в асимметрической гидромеханике определяется, не только полем скоростей, но и полем угловых скоростей микровращения Ω .

Нестационарные уравнения микрополярной жидкости имеют вид [5]:

$$\rho \frac{dV}{dt} = (\mu + k)\Delta V + k \text{rot}\Omega - \nabla p, \quad \text{div}V = 0 \quad (3)$$

$$\rho J \left[\frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \nabla)V \right] = (\alpha + \beta) \text{grad}(\text{div}\Omega) + \gamma \Delta \Omega - 2k\Omega + k \text{rot}V, \quad (4)$$

где ρ – плотность массы, а ρJ – плотность микромомента инерции. В ранней работе [4] не учитывались микроинерционные свойства среды: левая часть уравнения (3) предполагалась равной нулю. Уравнения, предложенные в [3] в левой части (4), не содержат члена $(\Omega \nabla)V$, ответственного за скорость деформации вихревых линий угловой скорости микровращения. В работе [5] было показано, что уравнение для

эволюции Ω , которое удовлетворяет основным требованиям, накладываемым на эволюцию аксиальных векторных полей в трехмерном пространстве, имеет вид (4). Подчеркнем то обстоятельство, что уравнение (4) с точностью до вязких членов формально совпадает с уравнением Гельмгольца для эволюции вектора завихренности $\omega = \text{rot}V$ в классической гидродинамике. Это естественно, так как оба вектора ω и Ω являются аксиальными. Заметим также, что наличие в левой части уравнения, описывающего эволюцию аксиального вектора, члена типа $(\Omega \nabla)V$ обязательно и встречается не только в уравнении Гельмгольца, но и, например, в уравнении Бэтчелора для разбавленных суспензий [20]. Нетрудно видеть, что в плоском и осесимметричном случае, а также в предельном случае малых чисел Рейнольдса уравнения, полученные в [3], и уравнения (3), (4) тождественно совпадают. Заметим, что в уравнениях (3) и (4) появились 4 дополнительных коэффициента вязкости α , β , γ и k , однако один из них, а именно k , играет особую роль, так как при $k = 0$ уравнение импульсов (3) отделяется от уравнения для микровращения (4). Таким образом, величина вихревой вязкости k дает возможность, в некотором смысле, измерять отличие микрополярной жидкости от классической ньютоновской.

3. Вихрь Озеена. Зададимся вопросом, существует ли в микрополярной жидкости аналог известного точного решения Озеена [1], полученного в рамках уравнений Навье-Стокса? В цилиндрической системе координат (r, θ, z) решение ищем в виде:

$$V = [0, v(r, t), 0], \quad \omega = \text{rot}V = [0, 0, \omega(r, t)], \quad p = p(r, t), \quad \Omega = [0, 0, \Omega(r, t)] \quad (5)$$

Используя (5) и вычисляя слагаемые, входящие в уравнения (3) и (4), а также учитывая выражение завихренности через азимутальную скорость $\omega = \partial v / \partial r + v / r$, приходим к следующим определяющим уравнениям:

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = (\mu + k) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right), \quad (6)$$

$$\rho J \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + k(\omega - 2\Omega). \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что при $k \neq 0$ уравнения (6), (7) не имеют автомодельного решения. Это связано с тем, что в микрополярной жидкости в отличие от классической существуют “внутренние длины” $L = \sqrt{J}$ и $R = \sqrt{\gamma / (\mu + k)}$, так что из соображений размерности уже не следует существование автомодельной переменной $r / \sqrt{vt}$, которая имеет место в ньютоновской жидкости ($k = 0$). Поэтому сведение задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений становится невозможным.

В безразмерных переменных $\xi = r / R$ и $\tau = t / T$, $T = R^2 / \Gamma_0$ уравнения (6) и (7) принимают вид:

$$A \xi \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right), \quad (8)$$

$$B \xi \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right) + \lambda \xi (\omega - 2\Omega). \quad (9)$$

Здесь $A = A_0(1 - \lambda)$, $A_0 = \rho\Gamma_0 / \mu$, $B = \rho J\Gamma_0 / \gamma$ и $\lambda = k / (\mu + k)$ – безразмерные параметры задачи, причем $A / B = R^2 / L^2 \gg 1$. При $\lambda = 0$ циркуляция скорости или суммарная завихренность Γ_0 в начальный момент времени по определению равна

$$\Gamma_0 = 2\pi R^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \omega_0(\xi, \tau) = 2\pi R^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\infty \omega_0(\xi, \tau) \xi d\xi.$$

Выполняя дифференцирование по ξ в (9) и считая, что $\Omega(\xi)$ и ее производные остаются конечными при $\xi = 0$, находим, что на оси должно выполняться условие

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0. \quad (10)$$

Тогда из (8) немедленно получаем, что

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0. \quad (11)$$

Проинтегрируем уравнения (8) и (9) по области течения. В результате имеем:

$$\frac{d\Gamma_\omega}{d\tau} = 0, \quad \Gamma_\omega = 2\pi R^2 \int_0^\infty \omega(\xi, \tau) \xi d\xi, \quad (12)$$

$$B \frac{d\Gamma_\Omega}{d\tau} = \lambda(\Gamma_\omega - 2\Gamma_\Omega), \quad \Gamma_\Omega = 2\pi R^2 \int_0^\infty \Omega(\xi, \tau) \xi d\xi. \quad (13)$$

Решая полученные уравнения с начальными условиями $\Gamma_\omega(0) = \Gamma_0$ и $\Gamma_\Omega(0) = \Gamma_{0\Omega}$, получаем

$$\Gamma_\omega = \Gamma_0 = \text{const}, \quad \Gamma_\Omega(\tau) = \frac{\Gamma_0}{2} + \left(\Gamma_{0\Omega} - \frac{\Gamma_0}{2} \right) \exp\left(-\frac{2\lambda\tau}{B}\right). \quad (14)$$

Заметим, что на больших временах $\tau \rightarrow \infty$ суммарная угловая скорость микровращения Γ_Ω стремится к $\Gamma_0/2$ при любых начальных данных $\Gamma_\Omega(0)$. Если вопрос о постановке начальных и граничных условий на ω решается так же, как и в классическом случае вихря Озеена, то соответствующий вопрос для Ω менее ясен [21]. Например, в качестве альтернативы условию прилипания обсуждаются и другие возможности, в частности, условие $\Omega = \omega/2$. Если в соответствии с этим в качестве начального условия принять $\Gamma_\Omega(0) = \Gamma_0/2$, то из (12) и (13) вместо (14) получим

$$\Gamma_\omega = \Gamma_0 = \text{const}, \quad \Gamma_\Omega = \Gamma_0/2 = \text{const}, \quad (15)$$

откуда замечаем, что в процессе диффузии в этом случае сохраняется не только суммарная завихренность, но и суммарная угловая скорость микровращения, причем $\Gamma_\Omega = \Gamma_\omega/2$.

Параболический тип уравнений (8) и (9) указывает на то, что в микрополярной жидкости, как и в классической ньютоновской среде, скорость распространения завихренности оказывается бесконечной. Диффузия вихря в другом классе неньютоновских сред, а именно в вязкоупругой жидкости рассмотрена в работе [19], где получено точное решение задачи и показано, что учет релаксационных свойств среды приводит к конечности скорости распространения завихренности.

Систему уравнений в частных производных (8) и (9) с помощью преобразования Фурье можно стандартным образом свести к системе ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений). Мы не приводим соответствующих выражений

ввиду их громоздкости, а также в связи с тем, что после решения ОДУ обратное преобразование Фурье не удастся выполнить в замкнутом виде.

Затухающие на бесконечности решения уравнений (8) и (9) находились численно конечно-разностным методом Келлера второго порядка точности [22]. Для этого (8) и (9) сначала приводятся к системе из четырех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} A\xi \frac{\partial \omega}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi U) - \lambda \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi W), & \frac{\partial \omega}{\partial \xi} &= U, \\ B\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi W) + \lambda \xi(\omega - 2\Omega), & \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} &= W, \end{aligned}$$

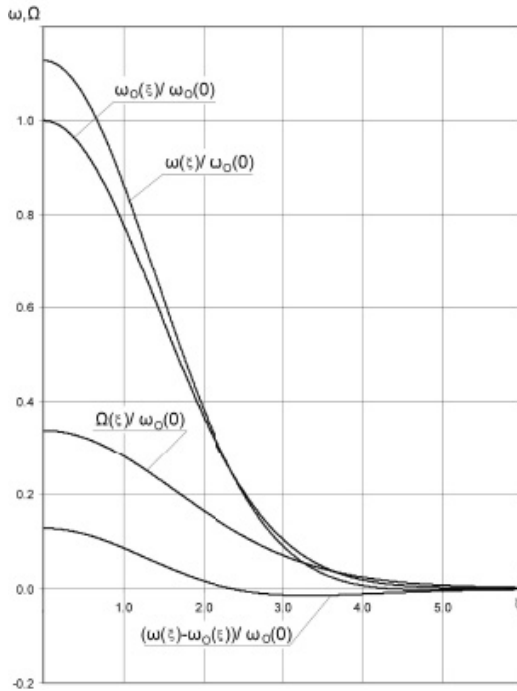
а затем, после конечно-разностной аппроксимации, сводятся к системе алгебраических уравнений, которая решается методом блочной прогонки с граничными условиями (10) и (11). В качестве начального условия для решения полной неавтономной задачи в момент времени $\tau = \tau_0 \rightarrow 0$ естественно взять автомодельное решение [23]. Соответствующее решение Озеена в новых переменных имеет вид:

$$\omega(\xi, \tau_0) = \frac{A_0 \Gamma_0}{4\pi \tau_0} \exp\left(-\frac{A_0 \xi^2}{4\tau_0}\right).$$

Для функции $\Omega(\xi, \tau)$ в качестве начального условия выбираем решение

$$\Omega(\xi, \tau_0) = \frac{B_0 \Gamma_0}{8\pi \tau_0} \exp\left(-\frac{B_0 \xi^2}{4\tau_0}\right),$$

которое соответствует условию (15).



Фиг.1. Распределение завихренности и угловой скорости микровращения в момент времени $\tau=1$ в задаче Озеена; $\omega(\xi)$ – завихренность в микрополярной жидкости, $\omega_0(\xi)$ – завихренность из решения Озеена в ньютоновской жидкости, $\Omega(\xi)$ – угловая скорость микровращения.

Равномерная по $\sqrt{\tau}$ расчетная сетка содержала 201 узел ($\tau \in [\tau_0, \tau_k]$, $\tau_0 = 0.01$, $\tau_k = 1$). Сетка по ξ содержала 2001 узел ($\xi_0 = 0$, $\xi_k = 20$). На фиг. 1 приведен результат численного расчета распределения завихренности при $\tau = 1$ и значениях параметров $A = 1$, $B = 0.1$ и $\lambda = 0.5$. Сравнение с решением Озеена показывает, что при одинаковом значении циркуляции $\Gamma_\omega = \Gamma_0$ величина завихренности на оси в микрополярной жидкости больше, а закон ее убывания более крутой. Во всех проведенных расчетах контролировалась точность выполнения интегральных инвариантов (14). Максимальное отклонение не превышало $2 \cdot 10^{-5}$.

Рассмотренный пример эволюции вихря с единственной нетривиальной компонентой скорости является классическим примером, иллюстрирующим эффект влияния вязкости на диффузию завихренности. Реальные течения

нередко имеют ненулевые составляющие скорости не только в азимутальном, но также в радиальном и аксиальном направлении. Точные решения, описывающие трехмерные нестационарные вихревые течения вязкой жидкости, автору не известны и, по-видимому, не существуют. Одним из точных решений трехмерных уравнений Навье-Стокса, описывающих стационарное вихревое течение с тремя ненулевыми компонентами скорости, является так называемый вихрь Бюргерса [24]. Это решение описывает стационарный процесс, в котором диффузия завихренности в радиальном направлении компенсируется ее усилением за счет растяжения вихревых линий вдоль оси. В работе [25] дано обобщение классического решения Бюргерса на случай микрополярной жидкости и показано, что эта задача, в отличие от рассмотренной диффузии вихря, допускает редукцию к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Вихревая решетка Тейлора. Рассмотрим теперь кратко задачу Тейлора о диффузии вихревой решетки с периодом 2π (выбор единиц длины) по осям x и y прямоугольной системы координат. По аналогии с классическим случаем ньютоновской жидкости решение ищем в виде:

$$\Psi = a \cos x \cos y \exp(-mt), \quad \Omega = b \cos x \cos y \exp(-mt). \quad (16)$$

Здесь Ψ – функция тока, а постоянные a и b определяются из начальных условий. Нетрудно убедиться, что уравнения (3), (4) в плоском случае можно представить в форме:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + \frac{\partial(\Delta \Psi, \Psi)}{\partial(x, y)} \right] = (\mu + k) \Delta^2 \Psi + k \Delta \sigma, \quad (17)$$

$$\rho J \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma, \Psi)}{\partial(x, y)} \right] = \gamma \Delta \sigma - 2k \sigma - k \Delta \Psi, \quad (18)$$

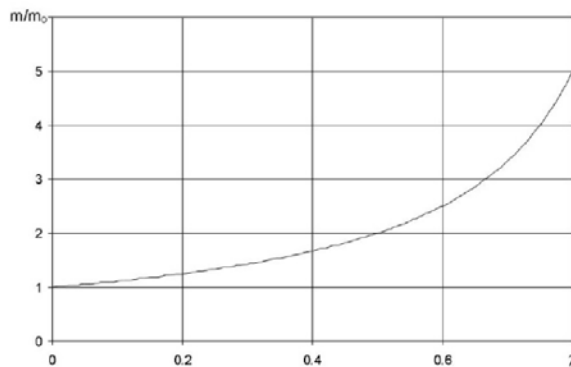
где $\partial(y_1, y_2) / \partial(x_1, x_2) = \det[\partial y_i / \partial x_j]$ – якобиан. Подставляя (16) в уравнения (17) и (18), получаем следующую однородную систему линейных уравнений:

$$[\rho m - 2(\mu + k)]a + kb = 0,$$

$$2ka + [\rho J m - 2(\gamma + k)]b = 0,$$

откуда из условия существования нетривиального решения стандартным образом приходим к квадратному уравнению относительно m . Решая его, находим:

$$\rho m = \mu + k + \frac{k + \gamma}{J} + \sqrt{\left(\mu + k - \frac{k + \gamma}{J} \right)^2 + \frac{2k^2}{J}} \quad (19)$$



Фиг.2. Зависимость коэффициента затухания m/m_0 от степени микрополярности λ .

В целом, решение (19) качественно подобно решению Тейлора [2] и описывает экспоненциальное затухание завихренности. На фиг.2 в качестве иллюстрации представлена зависимость параметра m/m_0 от безразмерного коэффициента вихревой вязкости $\lambda = k / (\mu + k)$. Величина $m_0 = 2\mu / \rho$ соответствует значению коэффициента затухания m в решении Тейлора. Видно, что при увеличении “степени микрополярности” распад вихревой решетки происходит быстрее, чем в классической ньютоновской жидкости.

5. Заключение. Рассмотрена задача о диффузии вихрей в микрополярной жидкости, которая описывает широкий класс неньютоновских сред с внутренним микровращением. Дано обсуждение применимости исходных уравнений к описанию плоских и пространственных вихревых течений. Установлено, что из-за наличия дополнительных “внутренних длин” задача о диффузии прямолинейной вихревой нити в микрополярной жидкости не является автомодельной в отличие от соответствующей задачи Озеена в рамках классической модели Навье-Стокса. Определены интегральные инварианты и дано численное решение задачи. В задаче Тейлора о диффузии вихревой решетки найдено аналитическое выражение для коэффициента затухания и показано, что влияние микрополярных свойств жидкости приводит к усилению процесса диффузии по сравнению с обычной ньютоновской жидкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Oseen C.W. Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Leipzig: Akad. Verlag. 1927. 337s.
2. Taylor G.I. On the decay of vortices in viscous fluid // *Phil. Mag.* 1923. V.46. P.671–674.
3. Eringen A.C. Theory of micropolar fluid // *J. Math. Mech.* 1966. V.16. №1. P.1–18.
4. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметрическая гидромеханика // *ПММ.* 1965. Т. 29. Вып 2. С.297–308.
5. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Об эффекте уменьшения сопротивления в микрополярной жидкости // *Инж.-физ. ж.* 1989. Т.57. №2. С.213–219.
6. Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкостей с несимметричным тензором напряжений. Ереван: Изд. Ереван.ун-та, 1986. 387с.
7. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Устойчивость периодического течения в микрополярной жидкости // *Инж.-физ. ж.* 1991. Т.60. №4. С.670–679.
8. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Устойчивость течения Колмогорова в вязкоупругой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1991. №4. С.17–24.
9. Ariman T., Cakmak A.S., Hill L.R. Flow of micropolar fluids between two concentric cylinders // *Phys. Fluids.* 1967. V.10. №12. P.2545–2550.
10. Sastry V.U.K., Das T. Stability of Couette flow and Dean flow in micropolar fluid. // *Int. J. Eng. Sci.* 1985. V.23. №11. P.1163–1187.
11. Tanner R.I. Note on the Rayleigh problem for a visco-elastic fluid // *ZAMP.* 1962. V.13. №6. P.573–580.
12. Huilgol R.R. Corrections and extensions to “Propagation of a vortex sheet in a visco-elastic liquids- the Rayleigh problem” // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 1983. V.12. №2. P.249–251.
13. Mochimaru Y. Unsteady-state development of plane Couette flow for visco-elastic fluids // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 1983. V.12. №2. P.135–152.
14. Fogler H.S., Goddard J.D. Collapse of spherical cavities in viscoelastic fluids // *Phys. Fluids.* 1970. V.13. P.1135–1141.

15. Brutyan M.A., Krapivsky P.L. Collapse of spherical bubbles in fluids with nonlinear viscosity // Quart. Appl. Math. 1993. V.LI. P.745–749.
16. Bloom F. Bubble stability in a class of non-Newtonian fluids with shear dependent viscosities // Intern. J. Non-Linear Mech. 2002. V.37. P.527–539.
17. Brutyan M.A., Krapivsky P.L. Collapse of spherical bubbles in viscoelastic liquids. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1991. V.44. P.549–557.
18. Bujurke M.M., Biradar S.N., Hiremath P.S. On diffusion of vorticity in couple stress fluid // ZAMM. 1988. V.68. №1. P.577–580.
19. Брутян М.А. Диффузия завихренности в вязкоупругой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1997. №5. С.18–23.
20. Batchelor G.K. The stress system in a suspension of force-free particles // JFM. 1970. V. 41. P.545–570.
21. Kirwan A.D. Boundary conditions for micropolar fluids // Int. J. Eng. Sci. 1986. V. 24, №. 7. P.1237–1242.
22. Keller H.B. Numerical methods in boundary layer theory // Ann. Rev. Fluid Mech. 1978. V. 10. P. 417–433.
23. Баренблатт Г.И. Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 255с.
24. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances in Applied Mechanics. Academic Press: 1948. V. 1. P. 171–199.
25. Брутян М.А. Вихрь Бюргерса в микрополярной жидкости // Докл. НАН Армении. 2010. Т.110. №1. С.35–41.

Сведения об авторах:

Брутян Мурад Абрамович – к. ф-м. н., старш.научн.сотр. ФГУП “Центрального аэрогидродинамического института им. проф. Н.Е.Жуковского”

Тел.: 556 3437(раб), 5569465(дом)

m_brut@mail.ru

Поступила в редакцию 08.02.2010

УДК 62-50

ОГРАНИЧЕННЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ
ДВИЖЕНИЯМИ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ИЗБЕГАЮЩИХ
СТОЛКНОВЕНИЯ

АВETИСЯН В.В., ЧАХМАХЧЯН Р.Э.

Ключевые слова: динамический объект, ограниченное управление

Keywords: dynamic object, limited control

Ավետիսյան Վ.Վ., Չախմախչյան Ռ.Է.

Բախումից խուսափող երկու դինամիկ օբյեկտների տարածական շարժումների սահմանափակ
կառավարումները

Դիտարկվում է տարածական շարժումներ կատարող դինամիկ օբյեկտների սահմանափակ կառավարումների կառուցման խնդիրը: Պահանջվում է որոշել կառավարման օրենքներն այնպես, որ ապահովվեն օբյեկտների տեղափոխումը ցանկացած իրարից տարբեր սկզբնական վիճակներից տրված իրարից տարբեր վերջնական վիճակներ և բացառվի դրանց բախումը համատեղ շարժման ընթացքում: Մշակվել է որոնելի կառավարումների կառուցման կոնստրուկտիվ ալգորիթմ: Մտացվել են պայմաններ սկզբնական, վերջնական վիճակների և վերջնական ժամանակի համար, որոնց դեպքում խնդիրը լուծելի է:

Avetisyan V.V., Chakhmakhchyan R.E.

Limited Controls of Spatial Motions of Two Dynamic Objects Avoiding Collision

In this problem is considered the system from two dynamic objects, which realize spatial motion and is required build limited controls, providing transition of objects from arbitrary initial difference states in given final difference states at final time and excluding of collision in process of the joint motion. A constructive algorithm for working out sought controls has been developed. Conditions are received on dynamic parameters of the system, under which delivered problem solvable for any initial and final states, satisfying assessed to restriction.

Рассматривается задача построения ограниченных управлений пространственными движениями двух динамических объектов. Требуется определить законы управлений, обеспечивающих переход объектов из произвольных разных начальных состояний в заданные разные конечные состояния за конечное время и гарантирующих отсутствия столкновения объектов в процессе совместного движения. Предложен конструктивный алгоритм построения искомых управлений. Получены условия на начальные и конечные состояния объектов, а также времени окончания процесса, при которых задача разрешима.

1. Постановка задачи. Рассматривается система из двух динамических объектов X, Y , движения которых описываются следующими уравнениями:

$$\dot{x} = A_X(t)x + B_X u; \quad \dot{y} = A_Y(t)y + B_Y v, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.1)$$

Здесь $x, y \in R^n$ – векторы фазовых состояний, $u, v \in R^r$ – векторы управлений объектов X, Y ; $A_{X,Y}(t), B_{X,Y}(t)$ – матрицы размера $n \times n$, $n \times r$ – соответственно, кусочно-непрерывно зависящие от t .

Через $\{x\}_k$ и $\{y\}_k$ обозначим k , $1 \leq k < n$ -мерные векторы, составленные из тех компонент векторов x и y соответственно, которые определяют декартовы координаты положений объектов X, Y .

Требуется определить управляющие вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$ с ограниченными компонентами

$$|u_i(t)| \leq u_i^0, \quad |v_i(t)| \leq v_i^0, \quad i = 1, \dots, r; \quad t \in [t_0, T] \quad (1.2)$$

так, чтобы объекты (1.1) из заданных начальных состояний в момент $t = t_0$

$$x(t_0) = x^0, \quad y(t_0) = y^0, \quad |\{x(t_0)\}_k - \{y(t_0)\}_k| \neq 0, \quad 1 \leq k < n \quad (1.3)$$

$$\{x(t_0)\}_l \geq 0, \quad \{y(t_0)\}_l \geq 0, \quad 1 \leq l \leq k$$

перешли в заданные конечные состояния

$$x(T) = x^1, \quad y(T) = y^1, \quad |\{x(T)\}_k - \{y(T)\}_k| \neq 0, \quad 1 \leq k < n \quad (1.4)$$

$$\{x(T)\}_l \geq 0, \quad \{y(T)\}_l \geq 0, \quad 1 \leq l \leq k$$

в некоторый нефиксированный момент времени $t = T$ и при этом удовлетворялись условия отсутствия столкновения объектов X, Y при совместном движении:

$$|\{x(t)\}_k - \{y(t)\}_k| \neq 0, \quad 1 \leq k < n, \quad t \in (t_0, T) \quad (1.5)$$

и следующие ограничения:

$$\{x(t)\}_l > 0, \quad \{y(t)\}_l > 0, \quad 1 \leq l \leq k; \quad t \in (t_0, T) \quad (1.6)$$

В (1.2)-(1.5) $|\cdot|$ – эвклидова норма вектора.

2. Построение управлений без ограничений. Запишем решения систем (1.1)

$$x(t) = \Phi_X(t) \left[x^0 + \int_{t_0}^t \Phi_X^{-1}(\tau) B_X(\tau) u(\tau) d\tau \right], \quad y(t) = \Phi_Y(t) \left[y^0 + \int_{t_0}^t \Phi_Y^{-1}(\tau) B_Y(\tau) v(\tau) d\tau \right] \quad (2.1)$$

где $\Phi_{X,Y}(t)$ – фундаментальные матрицы, определяемые условиями

$$\dot{\Phi}_{X,Y} = A_{X,Y} \Phi_{X,Y}, \quad \Phi_{X,Y}(t_0) = E_n, \quad E_n - n\text{-мерные единичные матрицы.}$$

Учитывая (1.3) и (1.4) задача сводится к отысканию таких управлений $u(t), v(t)$, при которых удовлетворяются условия

$$\int_{t_0}^T \Phi_X^{-1}(t) B_X(t) u(t) dt = \Phi_X^{-1}(T) x^1 - x^0, \quad \int_{t_0}^T \Phi_Y^{-1}(t) B_Y(t) v(t) dt = \Phi_Y^{-1}(T) y^1 - y^0 \quad (2.2)$$

и (1.5), а также ограничения (1.2).

Воспользуемся известным подходом [1]# построения управления без учета ограничений (1.3), (1.5), (1.6). Этот подход был распространен на случай наличия ограничений на управление и смешанных ограничений, наложенных в каждый момент времени на фазовые координаты [2-4].

Управления, решающие задачу без учета ограничений (1.3), (1.5), (1.6) ищем в виде #

$$u(t) = Q_X^T(t) C_X, \quad v(t) = Q_Y^T(t) C_Y \quad (2.3)$$

$$Q_X(t) = \Phi_X^{-1}(t) B_X(t), \quad Q_Y(t) = \Phi_Y^{-1}(t) B_Y(t) \quad (2.4)$$

а C_X, C_Y – постоянные n -мерные векторы. Подставляя (2.3) в (2.2), получим уравнения для векторов C_X, C_Y :

$$R_X(T) C_X = \Phi_X^{-1}(T) x^1 - x^0, \quad R_Y(T) C_Y = \Phi_Y^{-1}(T) y^1 - y^0 \quad (2.5)$$

$$R_X(T) = \int_{t_0}^T Q_X(t) Q_X^T(t) dt, \quad R_Y(T) = \int_{t_0}^T Q_Y(t) Q_Y^T(t) dt \quad (2.6)$$

В случае полной управляемости каждой из систем (1.1)[1], матрицы $R_X(T), R_Y(T)$ (2.6) – неособые [5] и поэтому (2.5) имеют единственные решения:

$$C_X = R_X^{-1}(T) (\Phi_X^{-1}(T) x^1 - x^0), \quad C_Y = R_Y^{-1}(T) (\Phi_Y^{-1}(T) y^1 - y^0) \quad (2.7)$$

Учитывая (2.6), (2.7), управления $u(t)$, $v(t)$ (2.3) и соответствующие им фазовые векторы $x(t)$, $y(t)$ (2.1) можно представить в следующем виде:

$$u(t) = F_X(t, T) \cdot x^*, \quad v(t) = F_Y(t, T) \cdot y^* \quad (2.8)$$

$$x(t) = G_X(t, T) \cdot x^*, \quad y(t) = G_Y(t, T) \cdot y^* \quad (2.9)$$

где $F_X(t, T)$, $F_Y(t, T)$ – $r \times 2n$ -мерные, а $G_X(t, T)$, $G_Y(t, T)$ – $n \times 2n$ -мерные матрицы

$$F_X = (F_X^0, F_X^1), \quad F_Y = (F_Y^0, F_Y^1), \quad x^* = (x^0, x^1)^T \quad (2.10)$$

$$G_X = (G_X^0, G_X^1), \quad G_Y = (G_Y^0, G_Y^1), \quad y^* = (y^0, y^1)^T$$

В (2.10) элементы блочных матриц $F_X^{0,1}, F_Y^{0,1}$ – размерности $r \times n$ и $G_X^{0,1}, G_Y^{0,1}$ – размерности $n \times n$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} F_X^0(t, T) &= -(\Phi_X^{-1}(t)B_X(t))^T R_X^{-1}(T), & F_X^1(t, T) &= (\Phi_X^{-1}(t)B_X(t))^T R_X^{-1}(T)\Phi_X^{-1}(T) \\ F_Y^0(t, T) &= -(\Phi_Y^{-1}(t)B_Y(t))^T R_Y^{-1}(T), & F_Y^1(t, T) &= (\Phi_Y^{-1}(t)B_Y(t))^T R_Y^{-1}(T)\Phi_Y^{-1}(T) \\ G_X^0(t, T) &= \Phi_X(t) - \Phi_X(t)R_X(t)R_X^{-1}(T), & G_X^1(t, T) &= \Phi_X(t)\Phi_X^{-1}(T)R_X^{-1}(T) \\ G_Y^0(t, T) &= \Phi_Y(t) - \Phi_Y(t)R_Y(t)R_Y^{-1}(T), & G_Y^1(t, T) &= \Phi_Y(t)\Phi_Y^{-1}(T)R_Y^{-1}(T) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для заданных x^*, y^* и любого $T > t_0$, решения $x(t)$, $y(t)$ (2.9) систем (1.1), (1.3) при управлениях $u(t)$, $v(t)$ (2.8) удовлетворяют краевым условиям (1.4). При этом, однако, построенные управления и соответствующие им фазовые переменные не обязательно удовлетворяют наложенным ограничениям (1.2), (1.5), (1.6). Получим условия на x^*, y^* и время процесса $T > t_0$, обеспечивающие выполнение наложенных ограничений (1.2), (1.5), (1.6).

3. Учет условия отсутствия столкновения. Подставим выражения (2.9) в соотношение (1.5) и представим его в виде

$$\left| \{x(t)\}_k - \{y(t)\}_k \right| = \left| \{x(t) - y(t)\}_k \right| = \left| \{G_X(t, T) \cdot x^* - G_Y(t, T) \cdot y^*\}_k \right| = \left| \{G(t, T)\} \cdot z^* \right| \quad (3.1)$$

$$t \in (t_0, T)$$

где

$$z^* = (x^*, y^*)^T = (x^0, y^0, x^1, y^1)^T \quad (3.2)$$

– $4n$ -мерный вектор, а

$$G(t, T) = (G_X^0(t, T) \quad G_X^1(t, T) \quad -G_Y^0(t, T) \quad -G_Y^1(t, T)) \quad (3.3)$$

– $n \times 4n$ -мерная матрица. В (3.1) матрица $\{G(t, T)\} - k \times 4n$ -мерная и состоит из первых k строк матрицы $G(t, T)$ (3.3).

Если обозначить

$$\{x(t, T) - y(t, T)\}_k = \{z(t, T)\} \quad (3.4)$$

то, с учетом (3.1), (3.2), из (1.5) и (3.4) получим

$$\left| \{z(t, T)\} \right| = \left| \{G(t, T)\} \cdot z^* \right| \neq 0, \quad t \in (t_0, T) \quad (3.5)$$

Для выполнения (3.5) необходимо и достаточно, чтобы не имела решения система

$$\{G(t, T)\}^{(1)} \cdot z^* = 0, \dots, \{G(t, T)\}^{(k)} \cdot z^* = 0, \quad t \in (t_0, T) \quad (3.6)$$

где

$$\{G(t, T)\}^{(j)} = \{g_{j1}^{X,0}(t, T), \dots, g_{jn}^{X,0}(t, T); g_{j1}^{X,1}(t, T), \dots, g_{jn}^{X,1}(t, T); \\ g_{j1}^{Y,0}(t, T), \dots, g_{jn}^{Y,0}(t, T); g_{j1}^{Y,1}(t, T), \dots, g_{jn}^{Y,1}(t, T)\} \quad j = 1, \dots, k \quad (3.7)$$

С учетом (3.7) запишем систему (3.6) в виде

$$\sum_{i=1}^n (g_{ji}^{X,0}(t, T)x_i^0 + g_{ji}^{X,1}(t, T)x_i^1 + g_{ji}^{Y,0}(t, T)y_i^0 + g_{ji}^{Y,1}(t, T)y_i^1) = 0 \quad (3.8)$$

$$t \in (t_0, T), \quad j = 1, \dots, k$$

Пусть функции $g_{ji}^{X,0}(t, T)$, $g_{ji}^{X,1}(t, T)$, $g_{ji}^{Y,0}(t, T)$, $g_{ji}^{Y,1}(t, T)$; $T > t_0$, $i = 1, \dots, n$ при некотором j , $1 \leq j \leq k$ линейно независимы на интервале $(t_0, \tau^{(j)})$. Тогда они линейно независимы на любом интервале (t_0, τ) , $\tau > \tau^{(j)}$, и для любого z^* (3.2), компоненты которого согласно (1.3), (1.4) одновременно не равны нулю, существует хотя бы одна точка $\bar{t} \in (t_0, \tau)$, в частности, $\bar{t} \in (t_0, \tau^{(j)})$, в которой $\{G(\bar{t}, T)\}^{(j)} \cdot z^* \neq 0$.

Для заданного $z^* \neq 0$ введем обозначение

$$M^{(j)}(t, T) = \{t \in (t_0, \infty) : \{G(t, T)\}^{(j)} \cdot z^* = 0; \quad z^* \neq 0, \quad T > t_0\} \quad (3.9)$$

Тогда, система (3.8) ((3.6)) будет неразрешимой на интервале (t_0, T) , если

$$\bigcap_{j=1}^p M^{(j)}(t, T) = \emptyset \quad (a) \quad \bigcap_{j=1}^p M^{(j)}(t, T) \neq \emptyset, \quad t \in (t_0, +\infty) \quad (b) \quad (3.10)$$

$$T \in (t_0, +\infty) \quad \bigcap_{j=1}^p M^{(j)}(t, T) \not\subset (t_0, T)$$

Отсюда следует, что для неразрешимости системы (3.8) достаточно искомого время $T > t_0$ выбирать любым в случае (3.10)(a):

$$T \in M_1 = (t_0, \infty) \quad (3.11)(a)$$

Если имеют место соотношения (3.10)(b), то для неразрешимости системы (3.8) ((3.6)) достаточно конечное время $T > t_0$ выбирать из следующего множества:

$$M_1 = \{T \in (t_0, +\infty) : t_1^*(T) \leq t_0 \text{ или } t_2^*(T) \geq T\}, \quad t_1^*(T), t_2^*(T) \in \bigcap_{j=1}^p M^{(j)}(t, T) \quad (3.11)(b)$$

$t_1^*(T)$, $t_2^*(T)$ – наибольший и наименьший общие корни j уравнений ($j = 1, \dots, p$; $1 \leq p \leq k$) системы (3.8).

Таким образом, для любого $z^* \neq 0$ (3.2) система (3.6) неразрешима и, следовательно, удовлетворяется условие (3.5), т.е. не имеет место столкновения объектов X , Y , если выполняются условия (3.10)(a) или (3.11)(a) при значениях T из (3.11)(a) или из (3.11)(b) соответственно.

4. Учет ограничений на управления и фазовые координаты. Элементы матриц F_X^0 , F_X^1 , F_Y^0 , F_Y^1 и G_X^0 , G_X^1 , G_Y^0 , G_Y^1 (2.11) обозначим через $f_{iq}^{X,0}$, $f_{iq}^{X,1}$, $f_{iq}^{Y,0}$, $f_{iq}^{Y,1}$ и $g_{iq}^{X,0}$, $g_{iq}^{X,1}$, $g_{iq}^{Y,0}$, $g_{iq}^{Y,1}$, соответственно, и введем следующие обозначения:

$$f_{iq}^{X,Y}(t,T) = \begin{cases} f_{iq}^{X,Y,0}(t,T), & q=1,\dots,n \\ f_{iq}^{X,Y,1}(t,T), & q=n+1,\dots,2n \end{cases}, \quad g_{iq}^{X,Y}(t,T) = \begin{cases} g_{iq}^{X,Y,0}(t,T), & q=1,\dots,n \\ g_{iq}^{X,Y,1}(t,T), & q=n+1,\dots,2n \end{cases}$$

$$x_q^* = \begin{cases} x_q^0, & q=1,\dots,n \\ x_q^1, & q=n+1,\dots,2n \end{cases}, \quad y_q^* = \begin{cases} y_q^0, & q=1,\dots,n \\ y_q^1, & q=n+1,\dots,2n \end{cases} \quad (4.1)$$

Тогда, с учетом (2.10), (2.11) и (4.1) управления (2.8) и фазовые координаты (2.9) можно представить в координатных формах:

$$u_i(t) = \sum_{q=1}^{2n} f_{iq}^X(t,T) x_q^*, \quad v_i(t) = \sum_{q=1}^{2n} f_{iq}^Y(t,T) y_q^*, \quad i=1,\dots,r \quad (4.2)$$

$$x_i(t) = \sum_{q=1}^{2n} g_{iq}^X(t,T) x_q^*, \quad y_i(t) = \sum_{q=1}^{2n} g_{iq}^Y(t,T) y_q^*, \quad i=1,\dots,n \quad (4.3)$$

Введем функции:

$$Q_i(T) = \left[\max_{t_0 \leq t \leq T} L_i(t,T) \right]^{-1/2}, \quad S_i(T) = \left[\max_{t_0 \leq t \leq T} K_i(t,T) \right]^{-1/2}, \quad i=1,\dots,r \quad (4.4)$$

где $L_i(t,T)$, $K_i(t,T)$ определяются из (4.1) и имеют вид:

$$L_i(t,T) = \sum_{q=1}^{2n} (f_{iq}^X)^2(t,T), \quad K_i(t,T) = \sum_{q=1}^{2n} (f_{iq}^Y)^2(t,T), \quad i=1,\dots,r \quad (4.5)$$

К соотношениям (4.2) применим неравенство Коши-Буняковского

$$|u_i| \leq \left(\sum_{q=1}^{2n} x_q^{*2} \right)^{1/2} \left(\sum_{q=1}^{2n} (f_{iq}^X)^2(t,T) \right)^{1/2}, \quad |v_i| \leq \left(\sum_{q=1}^{2n} y_q^{*2} \right)^{1/2} \left(\sum_{q=1}^{2n} (f_{iq}^Y)^2(t,T) \right)^{1/2}, \quad i=1,\dots,r \quad (4.6)$$

Тогда, с учетом (4.4), (4.5) неравенства (4.6) переписутся в виде:

$$|u_i| \leq |x^*| [L_i(t,T)]^{1/2} \leq |x^*| Q_i^{-1}(T), \quad |v_i| \leq |y^*| [K_i(t,T)]^{1/2} \leq |y^*| S_i^{-1}(T), \quad i=1,\dots,r \quad (4.7)$$

Из (4.7) следует, что наложенные ограничения (1.2) на компоненты векторов управления будут удовлетворены для всех $t \in [t_0, T]$, если время $T \geq t_0$ выбирать из условия

$$T \in [\bar{T}, \infty), \quad \bar{T} = \max(T_1, T_2) \quad (4.8)$$

где T_1 и T_2 – решения следующих уравнений:

$$|x^*| = \min_{1 \leq i \leq r} [u_i^0 Q_i(T)], \quad |y^*| = \min_{1 \leq i \leq r} [v_i^0 S_i(T)], \quad i=1,\dots,r \quad (4.9)$$

Отметим, что уравнения (4.9) имеют решения относительно $T \geq t_0$, так как функции в правых частях этих уравнений – монотонные по T .

Обратимся теперь к вопросу о выборе величины T , обеспечивающей выполнение ограничений (1.6). Из (2.9) и (1.6) для k фазовых координат систем (1.1) имеем:

$$\{x(t)\}_l = \{G_X(t,T) \cdot x^*\}_l > 0, \quad \{y(t)\}_l = \{G_Y(t,T) \cdot y^*\}_l > 0 \quad (4.10)$$

$$t \in (t_0, T), \quad l=1,\dots,k$$

Пусть $Z = \{z^*\} = \{(x^*, y^*)^T\} = \{x^0, x^1, y^0, y^1\}^T$ – множество тех начальных и конечных состояний (1.3), (1.4) объектов X , Y , для которых существует такое число $\bar{T} > 0$, что система неравенств (4.10) разрешима при $T = \bar{T}$. Тогда построенные управления (2.8) решают задачу (1.1)-(1.6) для заданного

$$z^* = (x^*, y^*)^T \in Z, \text{ если} \\ T \in M_1 \cap M_2 \cap [\bar{T}, +\infty) \quad (4.11)$$

где M_1 определяется из (3.11)(а) или (3.11)(b), а M_2 – из следующего множества:

$$M_2 = \left\{ T \in (t_0, +\infty): \begin{cases} \{G_X(t, T) \cdot x^*\}_l > 0 \\ \{G_Y(t, T) \cdot y^*\}_l > 0 \end{cases} z^* = (x^*, y^*)^T \in Z, T \in (t_0, \bar{T}) \right\} \quad (4.12)$$

Отметим, что вопрос существования T (4.11) зависит как от начальных и конечных состояний (1.3), (1.4), так и от динамики рассматриваемых объектов (1.1).

5. Модельный пример. Рассмотрим систему из двух точечных объектов, совершающих пространственные движения в гравитационном поле Земли. Уравнения движения объектов зададим в виде

$$X: m_X \ddot{x} = F_X + m_X g, \quad Y: m_Y \ddot{y} = F_Y + m_Y g \quad (5.1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – векторы координат объектов, $F_X = (F_{X1}, F_{X2}, F_{X3})$, $F_Y = (F_{Y1}, F_{Y2}, F_{Y3})$ – векторы управляющих сил объектов, $g = (0, 0, -g)$ – постоянный вектор ускорения свободного падения, а m_X, m_Y – соответственно массы объектов X и Y .

Требуется определить управляющие вектор-функции $F_X(t)$ и $F_Y(t)$ с ограниченными компонентами

$$|F_{Xi}(t)| \leq F_{Xi}^0, \quad |F_{Yi}(t)| \leq F_{Yi}^0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

так, чтобы объекты (5.1) перешли из начальных состояний в момент $t = 0$

$$x(0) = x^0, \dot{x}(0) = \dot{x}^0, y(0) = y^0, \dot{y}(0) = \dot{y}^0 \quad (5.3)$$

$$x^0 \neq y^0, \quad x_3^0 \geq 0, \quad y_3^0 \geq 0$$

в заданные конечные состояния

$$x(T) = x^1, \dot{x}(T) = \dot{x}^1, y(T) = y^1, \dot{y}(T) = \dot{y}^1 \quad (5.4)$$

$$x^1 \neq y^1, \quad x_3^1 \geq 0, \quad y_3^1 \geq 0$$

в некоторый нефиксированный момент времени $t = T$ и при их совместном движении не имело место столкновения, т.е. выполнялось условие

$$|x(t) - y(t)| \neq 0, \quad t \in (0, T) \quad (5.5)$$

а также выполнялись ограничения

$$x_3(t) \geq 0, \quad y_3(t) \geq 0, \quad t \in (0, T) \quad (5.6)$$

В переменных (с дальнейшим опусканием штрихов)

$$x' = x - gt^2/2, \quad y' = y - gt^2/2 \quad (5.7)$$

уравнения (5.1) запишутся в виде

$$m_X \ddot{x} = F_X, \quad m_Y \ddot{y} = F_Y \quad (5.8)$$

с сохранением исходных краевых данных и условия нестолкновения и ограничений (5.3)-(5.6).

Если ввести безразмерные переменные по следующим формулам (с дальнейшим опусканием штрихов):

$$t' = t/\gamma, T' = T/\gamma, \gamma = (m_X(x_1^0 - y_1^0)/F_{X1}^0)^{1/2} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
x'_1 &= x_1 / \xi_1, \quad x_1^{0,1} = x_1^{0,1} / \xi_1, \quad \dot{x}_1^{0,1} = \dot{x}_1^{0,1} / \xi_1, \quad \xi_1 = x_1^0 - y_1^0 \\
x'_i &= x_i / \xi_i, \quad x_i^{0,1} = x_i^{0,1} / \xi_i, \quad \dot{x}_i^{0,1} = \dot{x}_i^{0,1} / \xi_i, \quad \xi_i = (m_x (x_1^0 - y_1^0) / F_{xi}^0)^{-1/2}, \quad i = 2, 3 \\
y'_i &= y_i / \mu_i, \quad y_i^{0,1} = y_i^{0,1} / \mu_i, \quad \dot{y}_i^{0,1} = \dot{y}_i^{0,1} / \mu_i, \quad \mu_i = (m_y (x_1^0 - y_1^0) / F_{yi}^0)^{-1/2} \\
F'_{xi} &= F_{xi} / F_{xi}^0, \quad F'_{yi} = F_{yi} / F_{yi}^0, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

то соотношения (5.8), (5.2) упростятся: в них получим

$$m_x = m_y = 1, \quad F_{xi}^0 = F_{yi}^0 = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.10)$$

Далее введем обозначения

$$x_{i1} = x_i, \quad x_{i2} = \dot{x}_i, \quad y_{i1} = y_i, \quad y_{i2} = \dot{y}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.11)$$

и представим уравнения (5.8) в виде

$$\dot{x} = A_x x + B_x u, \quad \dot{y} = A_y y + B_y v \quad (5.12)$$

со следующими постоянными матрицами $A_{x,y}, B_{x,y}$, фундаментальными матрицами

Φ_x, Φ_y , фазовыми и управляющими векторами x, y и u, v соответственно:

$$A_{x,y} = \begin{pmatrix} A_{x,y}^1 & (0) & (0) \\ (0) & A_{x,y}^2 & (0) \\ (0) & (0) & A_{x,y}^3 \end{pmatrix}, \quad (0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_x^i = A_y^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.13)$$

$$B_{x,y} = (B_{x,y}^1, B_{x,y}^2, B_{x,y}^3)^T, \quad B_x^1 = B_y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_x^2 = B_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_x^3 = B_y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_x = \Phi_y = \begin{pmatrix} \Phi(t) & (0) & (0) \\ (0) & \Phi(t) & (0) \\ (0) & (0) & \Phi(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32})^T, \quad y = (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32})^T$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)^T, \quad u_i = F_{xi}, \quad v = (v_1, v_2, v_3)^T, \quad v_i = F_{yi}, \quad i = 1, 2, 3$$

В обозначениях (5.11) начальные и конечные условия (5.3), (5.4), ограничения на управления и координаты (5.2), (5.6), а также условие отсутствия столкновения (5.5) запишутся так:

$$x^0 = (x_{11}^0, x_{12}^0, x_{21}^0, x_{22}^0, x_{31}^0, x_{32}^0)^T, \quad y^0 = (y_{11}^0, y_{12}^0, y_{21}^0, y_{22}^0, y_{31}^0, y_{32}^0)^T \quad (5.14)$$

$$\sum_{i=1}^3 (x_{i1}^0 - y_{i1}^0)^2 \neq 0, \quad x_{31}^0 \geq 0, \quad y_{31}^0 \geq 0$$

$$x^1 = (x_{11}^1, x_{12}^1, x_{21}^1, x_{22}^1, x_{31}^1, x_{32}^1)^T, \quad y^1 = (y_{11}^1, y_{12}^1, y_{21}^1, y_{22}^1, y_{31}^1, y_{32}^1)^T \quad (5.15)$$

$$\sum_{i=1}^3 (x_{i1}^1 - y_{i1}^1)^2 \neq 0, \quad x_{31}^1 \geq 0, \quad y_{31}^1 \geq 0$$

$$|u_i(t)| \leq u_i^0, \quad |v_i(t)| \leq v_i^0, \quad u_i^0 = v_i^0 = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.16)$$

$$|x^{(1)}(t) - y^{(1)}(t)| \neq 0 \quad t \in (0, T) \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}
x^{(1)}(t) - y^{(1)}(t) &= (x_{11}(t) - y_{11}(t), \quad x_{21}(t) - y_{21}(t), \quad x_{31}(t) - y_{31}(t))^T \\
x_{31}(t) &> 0, \quad y_{31}(t) > 0, \quad t \in (0, T)
\end{aligned} \quad (5.18)$$

Определим управления $u(t), v(t)$ так, чтобы система (5.12) перешла из начального состояния (5.14) в заданное конечное состояние (5.15) и при этом удовлетворялись условия (5.16)-(5.18).

Применим общую схему построения управления, изложенную в предыдущих пунктах. С помощью (4.1)-(4.3), (5.11) найдем

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \sum_{q=1}^{12} f_{iq}^X(t, T) x_q^*, \quad v_i(t) = \sum_{q=1}^{12} f_{iq}^Y(t, T) y_q^*, \quad i = 1, 2, 3 \\ x_{i1}(t) &= \sum_{q=1}^{12} g_{iq}^X(t, T) x_q^*, \quad y_{i1}(t) = \sum_{q=1}^{12} g_{iq}^Y(t, T) y_q^*, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.19)$$

где через $x_q^*, y_q^*, q = 1, \dots, 6$ последовательно обозначены координаты векторов x^0, y^0 (5.14), а через $x_q^*, y_q^*, q = 7, \dots, 12$ – координаты векторов x^1, y^1 (5.15) соответственно.

Согласно вышеизложенной методики, управления (5.19) переводят системы (5.12) из начального состояния (5.15) в заданное состояние (5.16) при ограничениях (5.16), (5.18) без столкновения (5.17), если время T выбрать из условия (4.11). Перейдем к нахождению T .

Запишем условие (5.17) в виде

$$\|z(t, T)\| = \|G(t, T) \cdot z^*\| \neq 0, \quad t \in (0, T) \quad (5.20)$$

где с учетом (3.2), (3.3), (2.10), (2.11)

$$\{z(t, T)\} = \begin{pmatrix} z_1(t, T) \\ z_2(t, T) \\ z_3(t, T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}(t, T) - y_{11}(t, T) \\ x_{21}(t, T) - y_{21}(t, T) \\ x_{31}(t, T) - y_{31}(t, T) \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

$$\{G(t, T)\} = \left(\{G_X^0(t, T)\} \quad \{G_X^1(t, T)\} \quad -\{G_Y^0(t, T)\} \quad -\{G_Y^1(t, T)\} \right) \quad (5.22)$$

Здесь матрицы $\{G_{X,Y}^{0,1}(t, T)\}$ получаются из матриц $G_{X,Y}^{0,1}(t, T)$ (3.33) отбрасыванием четных строк:

$$\begin{aligned} \{G_X^{0,1}\} &= \{G_Y^{0,1}\} = \begin{pmatrix} g_{11}^{0,1} & g_{12}^{0,1} & g_{13}^{0,1} & g_{14}^{0,1} & g_{15}^{0,1} & g_{16}^{0,1} \\ g_{21}^{0,1} & g_{22}^{0,1} & g_{23}^{0,1} & g_{24}^{0,1} & g_{25}^{0,1} & g_{26}^{0,1} \\ g_{31}^{0,1} & g_{32}^{0,1} & g_{33}^{0,1} & g_{34}^{0,1} & g_{35}^{0,1} & g_{36}^{0,1} \end{pmatrix}, \quad z^* = (x^0, x^1, y^0, y^1)^T \\ g_{1i}^{0,1} &= 0, \quad i = 3, \dots, 6; \quad g_{2i}^{0,1} = 0, \quad i = 1, 2, 5, 6; \quad g_{3i}^{0,1} = 0, \quad i = 1, \dots, 4 \\ g_{11}^0 &= 1 + 2t^3/T^3 - 3t^2/T^2, \quad g_{12}^0 = t + t^3/T^2 - 2t^2/T \\ g_{11}^1 &= -2t^3/T^3 + 3t^2/T^2, \quad g_{12}^1 = t^3/T^2 - t^2/T \end{aligned} \quad (5.23)$$

При обозначениях (5.21)-(5.23) систему (3.8) ((3.6)) можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^2 (g_{1j}^0(t, T)(x_{ij}^0 - y_{ij}^0) + g_{1j}^1(t, T)(x_{ij}^1 - y_{ij}^1)), \quad t \in (0, T), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.24)$$

где коэффициенты $x_{i1}^{0,1} - y_{i1}^{0,1}, i = 1, 2, 3$ удовлетворяют условиям (5.14), (5.15).

Функции $g_{11}^0(t, T), g_{12}^0(t, T), g_{11}^1(t, T), g_{12}^1(t, T)$ (5.23) линейно независимы при $t \in (0, T)$ для произвольного $T > 0$ и при всех $z^* \neq 0$ (5.14), (5.15). Тогда для

заданного $z^* \neq 0$ условие (5.17) выполняется, т.е. система (5.24) неразрешима, если время $T > 0$ удовлетворяет условиям (3.10)(а) или (3.10)(б).

С учетом (5.23), преобразуем (5.24) к виду

$$a_{i3}t^3 + a_{i2}t^2 + a_{i1}t + a_{i0} = 0, \quad t \in (0, T), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.25)$$

где

$$\begin{aligned} a_{i0} &= \alpha_i^0, \quad a_{i1} = \beta_i^0, \quad a_{i2} = (-3\alpha_i^0 + 3\alpha_i^1)T^{-2} - (2\beta_i^0 + \beta_i^1)T^{-1}, \quad \alpha_i^{0,1} = x_i^{0,1} - y_i^{0,1} \\ a_{i3} &= (2\alpha_i^0 - 2\alpha_i^1)T^{-3} + (\beta_i^0 + \beta_i^1)T^{-2}, \quad \beta_i^{0,1} = \dot{x}_i^{0,1} - \dot{y}_i^{0,1}, \quad \alpha_1^0 = 1, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Для каждого уравнения системы (5.25) множество $M^{(j)}(t, T)$ (3.9) состоит не более из трех точек – корней уравнения. Количество и расположение этих корней зависят от коэффициентов $a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ (5.25), которые зависят как от начальных и конечных состояний объектов, так и от времени $T > 0$. Таким образом, для заданных начальных и конечных состояний ($z^* \neq 0$), согласно вышеизложенному, $T > 0$ определяется из (3.11)(а), если на интервале $(0, +\infty)$ хотя бы одно уравнение (5.25) неразрешимо или все уравнения разрешимы, но не имеют одинаковых корней (3.10)(а), и определяется из (3.11)(б)), если на интервале $(0, +\infty)$ все уравнения (5.25) разрешимы, имеют одинаковые корни, однако наименьший из них больше, чем конечное время или наибольший из них отрицательный (3.10)(б).

Запишем систему (5.25) в матричной форме:

$$A \cdot \bar{t} = \bar{b}, \quad A = (a_{ij})_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.27)$$

$$\bar{b} = (-a_{10}, -a_{20}, -a_{30})^T, \quad \bar{t} = (p, q, r)^T, \quad p = t^3, \quad q = t^2, \quad r = t, \\ 0 < r < T$$

Так как начальные и конечные положения объектов не совпадают – (5.14), (5.15), то $\bar{b} \neq 0$.

Пусть зафиксирован некоторый набор начальных и конечных состояний объектов X, Y (5.14), (5.15), а также время $T > 0$ окончания процесса. Вычислив детерминант матрицы (5.27) и проделав некоторые упрощения, получим

$$\det[A(T)] = f(x^0, x^1, y^0, y^1) \cdot T^{-4} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \text{где } f &= (\alpha_3^0 - \alpha_3^1)(\beta_1^1\beta_2^0 - \beta_1^0\beta_2^1) + \beta_3^0((- \alpha_2^0 + \alpha_2^1)\beta_1^1 + (\alpha_1^0 - \alpha_1^1)\beta_2^1) + \\ &+ \beta_3^1((- \alpha_2^0 + \alpha_2^1)\beta_1^0 + (- \alpha_1^0 + \alpha_1^1)\beta_2^0) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Так как $T > 0$, то из (5.28), (5.29) следует, что для тех начальных и конечных состояний (5.14), (5.15), при которых $f = 0$, равенство

$$\det[A(T)] = 0 \quad (5.30)$$

имеет место при любом $T > 0$ и поэтому система (5.27), следовательно, и система (5.25) неразрешимы, а условие (5.17) выполняется при любом выборе конечного времени $T > 0$. Это соответствует случаю (3.10)(а).

Для тех значений (5.14), (5.15), при которых $f \neq 0$ –

$$\det[A(T)] \neq 0 \quad (5.31)$$

и система (5.27) имеет единственное решение:

$$\bar{t}^* = (p^*, q^*, r^*)^T \quad (5.32)$$

$$p^*(T) = D_p / D, \quad q^*(T) = D_q / D, \quad r^*(T) = D_r / D, \quad D = \det[A(T)] \quad (5.33)$$

Для того, чтобы из существования решения $\bar{t}^*$ (5.32) системы (5.27) вытекало существование решения $t^* \in (0, T)$ системы (5.25), необходимо и достаточно, чтобы компоненты решения (5.33) удовлетворяли условиям:

$$q^*(T) = r^{*2}(T), \quad p^*(T) = q^*(T) \cdot r^*(T) \quad (a) \quad r^*(T) = t^*(T) \in (0, T) \quad (b) \quad (5.34)$$

Отсюда следует, что в случае (5.31), для неразрешимости системы (5.25), т.е. для того, чтобы имели место условия (3.10)(а) или (3.10)(b), достаточно, чтобы компоненты p^*, q^*, r^* (5.33) не удовлетворяли хотя бы одному из условий (5.34)(а) или (b). Покажем, что для рассматриваемого модельного примера всегда можно $T > 0$ выбрать так, чтобы не выполнялись соотношения (5.34)(а), т.е. имело место условие (3.10)(а).

Из (5.34), после некоторых упрощений получим

$$p^*(T) = (\alpha_3 + \beta_3 T)T^2, \quad q^*(T) = (\alpha_2 + \beta_2 T)T, \quad r^*(T) = t^*(T) = \alpha_1 + \beta_1 T \quad (5.35)$$

где α_1 и β_1 определяются следующим образом:

$$\alpha_1 = \frac{(\alpha_1^0 \alpha_3^0 - \alpha_1^1 \alpha_3^1)(\beta_2^0 - \beta_2^1) + \alpha_2^1(\alpha_3^0(\beta_1^1 - \beta_1^0) + \alpha_1^0(\beta_3^0 - \beta_3^1)) + \alpha_2^0(\alpha_3^1(\beta_1^0 - \beta_1^1) + \alpha_1^1(\beta_3^1 - \beta_3^0))}{\alpha_3^1(\beta_1^1 \beta_2^0 - \beta_1^0 \beta_2^1) + \alpha_3^0(\beta_1^0 \beta_2^1 - \beta_1^1 \beta_2^0) + ((\alpha_2^0 - \alpha_2^1)\beta_1^1 + (\alpha_1^1 - \alpha_1^0)\beta_2^1)\beta_3^0 + ((\alpha_2^1 - \alpha_2^0)\beta_1^0 + (\alpha_1^0 - \alpha_1^1)\beta_2^0)\beta_3^1}$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_3^0(\beta_1^0 \beta_2^1 - \beta_1^1 \beta_2^0) + \alpha_3^1(\beta_1^1 \beta_2^0 - \beta_1^0 \beta_2^1) + \alpha_1^0(\beta_2^0 \beta_3^1 - \beta_2^1 \beta_3^0)}{\alpha_3^1(\beta_1^1 \beta_2^0 - \beta_1^0 \beta_2^1) + \alpha_3^0(\beta_1^0 \beta_2^1 - \beta_1^1 \beta_2^0) + ((\alpha_2^0 - \alpha_2^1)\beta_1^1 + (\alpha_1^1 - \alpha_1^0)\beta_2^1)\beta_3^0 + ((\alpha_2^1 - \alpha_2^0)\beta_1^0 + (\alpha_1^0 - \alpha_1^1)\beta_2^0)\beta_3^1}$$

Аналогичным образом определяются $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ в (5.35).

Подставим (5.35) в (5.34)(а). После некоторых упрощений получим следующую систему:

$$\begin{cases} (\alpha_2 + \beta_2 T)T = (\alpha_1 + \beta_1 T)^2 \\ (\alpha_3 + \beta_3 T)T = (\alpha_1 + \beta_1 T)(\alpha_2 + \beta_2 T) \end{cases} \quad (5.36)$$

относительно T , которая для заданного набора $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3) \neq 0$ не совместима при

$$T \in M_1 = (0, +\infty) \setminus \{T^{(j)}\}_{j=1,2} \cap \{T : 0 \leq \alpha_1 + \beta_1 T \leq T\} \quad (5.37)$$

где $T^{(1)}, T^{(2)}$ – общие корни уравнений (5.36) в случае их существования.

Таким образом, для заданного набора $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3)$ и при любом $T \in M_1$ на интервале $(0, T)$ объекты X и Y гарантированно избегают от столкновения.

В соответствии с алгоритмом построения ограниченных управлений (2.8), (2.10), (2.11) и (4.1)-(4.9), а также с учетом (5.12), (5.15), (5.17), для вспомогательных функций Q_i, S_i (4.4) получим

$$Q_i(T) = S_i(T) = (72/T^4 + 20/T^2)^{-1/2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.38)$$

Подставим Q_i, S_i (5.38) в условия (4.9). Из полученных уравнений найдем

$$T_1 = (10|x^*|^2 + (100|x^*|^4 + 72|x^*|^2)^{1/2})^{1/2}, \quad T_2 = (10|y^*|^2 + (100|y^*|^4 + 72|y^*|^2)^{1/2})^{1/2} \quad (5.39)$$

Время T , при котором ограничения управления (5.16) не нарушаются для всех $t \in [0, T]$ с учетом (5.39), выбирается из условия (4.8):

$$T \in [\bar{T}, \infty), \quad \bar{T} = \max(T_1, T_2) \quad (5.40)$$

где T_1, T_2 определяются согласно (5.39).

Время T , при котором не нарушается первое ограничение в (5.18) для всех $t \in [0, T]$, выберем следующим образом. Из (2.9)-(2.11), (5.11), (5.14), (5.15) и (5.21)-(5.23) имеем $x_{31}(t) = g_{11}^0 x_{31}^0 + g_{11}^1 x_{31}^1 + g_{12}^0 x_{32}^0 + g_{12}^1 x_{32}^1$, в которой при $t \in [0, T]$ имеют место неравенства $g_{11}^0(t, T) \geq 0$, $g_{11}^1(t, T) \geq 0$, $g_{12}^0(t, T) \geq 0$, $g_{12}^1(t, T) \leq 0$. Так как $x_{31}^0, x_{31}^1 \geq 0$, то выполнение ограничений (5.18) зависит от величин x_{32}^0, x_{32}^1 . Рассмотрим случай, когда $x_{32}^0 > 0$ и $x_{32}^1 > 0$, остальные случаи получаются аналогичным образом. Если $x_{31}^0 > 0$ и $x_{31}^1 > 0$, то конечное время T нужно выбрать так, чтобы

$$\min_{t \in [0, T]} (g_{11}^0 x_{31}^0 + g_{11}^1 x_{31}^1 + g_{12}^0 x_{32}^0) \geq \max_{t \in [0, T]} |g_{12}^1 x_{32}^1| \quad (5.41)$$

Здесь, с одной стороны, $\max_{t \in [0, T]} |g_{12}^1 x_{32}^1| = (4T/27)x_{32}^1$ при $t = 2T/3$, а с другой стороны, $\min_{t \in [0, T]} (g_{11}^0 x_{31}^0 + g_{11}^1 x_{31}^1 + g_{12}^0 x_{32}^0) = \min\{x_{31}^0, x_{31}^1\}$. Следовательно, (5.41)

имеет место для любого

$$T \in M_2^X = \{T \in (0, +\infty); 0 < T \leq 27 \min(x_{31}^0, x_{31}^1) / 4x_{32}^1\} \quad (5.42)$$

Исходя из свойств функции $|g_{12}^1(t, T)x_{32}^1|$, множество (5.42) можно расширить и в (5.42) заменить $\min\{x_{31}^0, x_{31}^1\}$ на x_{31}^1 . Тогда включение (5.42) примет вид

$$T \in M_2^X = \{T \in (0, +\infty): 0 < T \leq \bar{T}_X, \bar{T}_X = 27x_{31}^1 / 4x_{32}^1\} \quad (5.43)$$

Аналогичное условие можно получить и для времени T , при котором для всех $t \in [0, T]$ не нарушается второе ограничение в (5.18):

$$T \in M_2^Y = \{T \in (0, +\infty): 0 < T \leq \bar{T}_Y, \bar{T}_Y = 27y_{31}^1 / 4y_{32}^1\} \quad (5.44)$$

Тогда, в соответствии с (4.12) и (5.43), (5.44), время T , при котором не нарушаются ограничения (5.18) для всех $t \in [0, T]$, выбирается из включения

$$T \in M_2 = M_2^X \cap M_2^Y \quad (5.45)$$

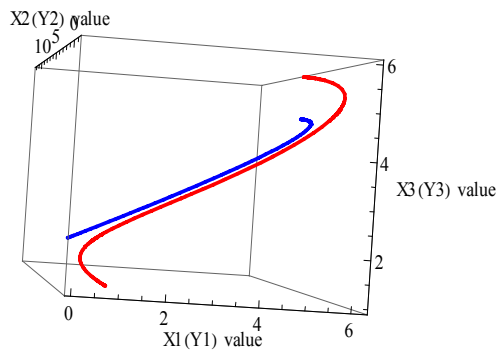
Таким образом, для заданных начальных и конечных состояний $z^* = (x^*, y^*)^T$ (5.14), (5.15), фиксируя любое T из условия (4.11), где $M_1, \bar{T}, M_2$ определяются согласно (5.37), (5.40), (5.45) соответственно, находим искомые управления $u_i(t), v_i(t) / i = 1, 2, 3$ и фазовые траектории $x_{i1}(t), y_{i1}(t) / i = 1, 2, 3$ по явным формулам (5.19), при которых решается задача (5.12), (5.14)-(5.18) и, следовательно, исходная задача (5.1)-(5.6).

В качестве иллюстрации приведем пример численной реализации описанного алгоритма управления объектами (5.1) при ограничениях (5.2), (5.5), (5.6). Начальные и конечные безразмерные данные (5.3), (5.4) задавались следующими:

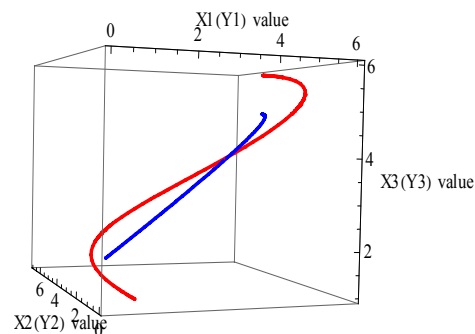
$$\begin{aligned} x^0 &= (1 \ 1 \ 1), \dot{x}^0 = (0 \ 1 \ 0), y^0 = (0 \ 0 \ 2), \dot{y}^0 = (0 \ 0 \ 0) \\ x^1 &= (6 \ 5 \ 6), \dot{x}^1 = (0 \ 7/10 \ 1/24), y^1 = (6 \ 5 \ 5), \dot{y}^1 = (-1/20 \ 0 \ 0) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Для этих значений из (5.29) получаем $f = 5/36$. Следовательно, (5.27) имеет единственное решение $\bar{t}^* = (p^*, q^*, r^*)^T$: $r^*(T) = -12/5 + 81T/125$, $q^*(T) = (-72/5 + 81T/125)T$, $p^*(T) = (-108/5 + 81T/125)T^2$. Система

(5.34)(a), соответствующая этим решениям и значениям (5.46), имеет единственное решение только при $T = 50$, т.е. в рассматриваемом случае $M_1 = (4, +\infty) \setminus \{50\}$ (5.37). Из (5.39) найдем $T_1 = 45$ и $T_2 = 42.5$ и согласно (5.40), конечное время T , при котором не нарушаются ограничения на управления, можно выбирать из интервала $[45, +\infty)$. Далее, из (5.43) определим $M_2^X = (0, 985)$, а из (5.44) – $M_2^Y = (0, +\infty)$. Следовательно, из (5.45) получим $M_2 = M_2^X = (0, 985)$. Таким образом, конечное время, за которое осуществляется заданный переход (5.46) при построенных управлениях (5.19), с учетом (5.45), можно выбрать из интервала $[45, 50) \cup (50, 985)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 представлены результаты численного моделирования для случаев $T = 65$ и $T = 50$ соответственно. При движении к заданным конечным состояниям объекты избегают от столкновения в первом случае, а во втором случае столкновение неизбежно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Об общей теории систем управления. //Труды 1-го Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. (IFAC). М.: АН СССР, 1961. Т.2, с.521-547.
2. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Наука, 2006. 326с.
3. Аветисян В.В. Ограниченное управление линейной динамической системой с ограничением на фазовую скорость // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 4. С.48-55.
4. Аветисян В.В. Управление электромеханической системой манипулятором при ограничениях на напряжение и ток // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. № 4. С.38-45.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.

Сведения об авторах:

Аветисян Ваган Вардгесович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории оптимального управления и приближенных методов, факультета математики и механики Ереванского государственного университета, (374 94) 44 95 60;

E-mail: vanavet@yahoo.com

Чахмахчян Рафаел Эдвардович, аспирант кафедры теории оптимального управления и приближенных методов, факультета математики и механики Ереванского государственного университета, (374 93) 28 52 24;

E-mail: rafayel.ch@gmail.com

Поступила в редакцию 21.12.2009

ЗАДАЧА О ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОЙ ВСТРЕЧЕ НЕСКОЛЬКИХ
УПРАВЛЯЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ
БАРСЕГЯН В.Р., СТЕПАНИАН А.А.

Ключевые слова: космические аппараты, парето-оптимальное управление, встреча, затраты на управление

Keywords: spacecrafts, pareto-optimal control, encounter, charges for control

Բարսեղյան Վ.Ռ., Ստեփանյան Ա.Ա.

Մի քանի ղեկավարվող տիեզերական սարքերի պարետո-օպտիմալ հանդիպման մասին

Դիտարկվում է մի քանի ղեկավարվող տիեզերական սարքերի մոտեցման խնդիրը, երբ շարժումը տեղի է ունենում բարակ սֆերիկ շերտում, շարժիչները աշխատում են անընդհատ, իսկ Երկրի ձգողականության ուժից բացի բոլոր զրգռող ուժերը անտեսվում են: Հաշվի առնելով ղեկավարող կողմերի անհատական շահերը՝ ձևավորված է շահույթի վեկտոր-ֆունկցիան, և կառուցված է պարետո-օպտիմալ լուծումը: Բերված է երեք օբյեկտների հանդիպման օրինակը:

Barseghyan V.R., Stepanyan A.A.

About Pareto-Optimal Encounter of Several Controllable Spacecrafts

The problem of encounter of several controllable spacecrafts is considered, when the motion takes place in the thin spherical layer, the controll engines run continuously and except the forces of the Earth's attraction all disturbing forces are neglected. Taking into consideration the individual interests of controlling sides the vector-function of gain is formed and the pareto-optimal solution is constructed. The example of encounter of three objects is given.

Рассматривается задача встречи нескольких управляемых космических аппаратов, когда движение происходит в тонком сферическом слое, двигатели управления работают непрерывно и кроме сил притяжения Земли все возмущающие силы пренебрегаются. Учитывая индивидуальные интересы управляющих сторон, сформулирована векторная функция выигрыша и построено парето-оптимальное решение. Приведен пример для встречи трех объектов.

1. Рассмотрим процесс управления одновременной встречи нескольких сотрудничающих космических аппаратов [1]. Предполагаем, что все космические аппараты встречаются с фиктивным неманеврирующим объектом (точкой), который находится на фиктивной орбите и является целью. Для описания относительного движения космических аппаратов и цели, считая их материальными точками, пренебрегая возмущениями от несферичности Земли, атмосферным сопротивлением и притяжением других небесных тел, запишем векторные уравнения движения для цели и каждого космического аппарата (управляемого объекта), участвующего в сближении:

$$\ddot{\mathbf{r}}_y + \frac{\mu}{r_y^3} \mathbf{r}_y = 0, \quad \ddot{\mathbf{r}}_a^{(i)} + \frac{\mu}{r_a^{(i)3}} \mathbf{r}_a^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}_y$ и $\mathbf{r}_a^{(i)}$ – геоцентрические радиус-векторы цели и i -ого космического аппарата, $\mathbf{u}^{(i)}$ – равнодействующий вектор ускорения от тяги двигателей i -ого аппарата, μ – гравитационная постоянная Земли.

Вычитая из второго уравнения (1.1) первое и определяя вектор дальности от цели до космических аппаратов $\mathbf{D}^{(i)} = \mathbf{r}_a^{(i)} - \mathbf{r}_y$, получим

$$\ddot{\mathbf{D}}^{(i)} + \frac{\mu}{r_y^3} \left[(\mathbf{r}_y + \mathbf{D}^{(i)}) \left(1 + \frac{\mathbf{D}^{(i)2}}{r_y^2} + \frac{2\mathbf{r}_y \mathbf{D}^{(i)}}{r_y^2} \right)^{-3/2} - \mathbf{r}_y \right] = \mathbf{u}^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

Пусть заданы начальные положения (в момент t_0) всех космических аппаратов

$$\mathbf{D}^{(i)}(t_0) = \mathbf{D}_0^{(i)}, \quad \dot{\mathbf{D}}^{(i)}(t_0) = \dot{\mathbf{D}}_0^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.3)$$

Предположим, что на интервале времени $[t_0, T]$ затраты на управление каждого космического аппарата определяются величиной

$$\mathfrak{I}_i(\mathbf{u}^{(i)}) = \left[\int_{t_0}^T (\mathbf{u}^{(i)}(t))^2 dt \right]^{1/2}. \quad (1.4)$$

Каждый космический аппарат стремится к встрече с остальными, определяемой конечным положением (в момент времени T) с заданными параметрами

$$\mathbf{D}^{(i)}(T) = \mathbf{D}_T(\alpha, \beta), \quad \dot{\mathbf{D}}^{(i)}(T) = \dot{\mathbf{D}}_T, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.5)$$

перелетая при этом с наименьшими затратами на управление. Здесь α и β – некоторые величины, предстоящие определению.

В рассматриваемой задаче о встрече предполагается, что все управляемые объекты имеют одинаковую информацию и у них есть возможность совместного выбора управлений. Исходя из непротивоположности интересов можно составить кооперацию всех управляемых объектов с векторной функцией выигрыша. Решение полученной задачи должно учитывать как индивидуальные интересы управляющих объектов, так и интересы любых коалиций, которые могут быть образованы внутри кооперации.

Одним из способов решения такой задачи является выбор управляющими объектами парето-оптимальных управлений [2]. Управляемые объекты должны выбрать управляющие воздействия, доставляющие выигрыши, близкие к идеальной точке

$$\mathfrak{I}^* = \{\mathfrak{I}_i^*, i = 1, \dots, n \mid \mathfrak{I}_i^* = \min_{\mathbf{u}} \mathfrak{I}_i(\mathbf{u}^{(i)})\} \quad (1.6)$$

и в качестве меры “близости” используется следующая норма:

$$\|\mathfrak{I}\| = \sum_{i=1}^n \left| \mathfrak{I}_i(\mathbf{u}^{(i)})^2 - \mathfrak{I}_i^{*2} \right|. \quad (1.7)$$

Величина $\left| \mathfrak{I}_i(\mathbf{u}^{(i)})^2 - \mathfrak{I}_i^{*2} \right|$ составляет величину дополнительных затрат на управление i -ого управляемого объекта, а норма $\|\mathfrak{I}\|$ характеризует “групповую потерю” объектов.

Сформулируем следующую задачу. Требуется найти оптимальные управляющие воздействия $\mathbf{u}^{(i)0}(t) = \{u_1^{(i)0}(t), u_2^{(i)0}(t), u_3^{(i)0}(t)\}$, $t \in [t_0, T]$ ($i = 1, \dots, n$) и значения параметров α и β , переводящие сотрудничающие объекты (1.2) из начальных фазовых состояний (1.3) в конечное фазовое состояние (1.5) так, чтобы затраты (1.7) на управляющие воздействия $\mathbf{u}^{(i)}(t)$ были наименьшими.

Рассмотрим относительные движения космических аппаратов в орбитальной системе координат, являющейся правым прямоугольным, начало которой находится на фиктивной орбите цели, ось y все время направлена вдоль радиуса-вектора цели, ось x перпендикулярна к ней, лежит в плоскости орбиты и направлена против движения.

Считая фиктивную орбиту цели круговой, линеаризованные уравнения относительных движений космических аппаратов в орбитальной системе координат, начало которой совпадает с целью, имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(i)} - 2\omega \dot{y}^{(i)} &= u_1^{(i)}, & \ddot{y}^{(i)} + 2\omega \dot{x}^{(i)} - 3\omega^2 y^{(i)} &= u_2^{(i)} \\ \ddot{z}^{(i)} + \omega^2 z^{(i)} &= u_3^{(i)} \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.8)$$

где $x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}$ – проекции вектора $D^{(i)}$ – дальности от цели до i -ого космического аппарата, $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}$ – проекции управляющего ускорения i -ого космического аппарата на соответствующие оси орбитальной системы, ω – орбитальная угловая скорость фиктивной цели $\omega^2 = \mu / r_y^3$

Вводя обозначения $x^{(i)} = x_1^{(i)}, \dot{x}^{(i)} = x_2^{(i)}, y^{(i)} = x_3^{(i)}, \dot{y}^{(i)} = x_4^{(i)}, z^{(i)} = x_5^{(i)}, \dot{z}^{(i)} = x_6^{(i)}$, систему уравнений (1.8) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{(i)} &= x_2^{(i)}, & \dot{x}_2^{(i)} &= 2\omega x_4^{(i)} + u_1^{(i)}, & \dot{x}_3^{(i)} &= x_4^{(i)}, \\ \dot{x}_4^{(i)} &= -2\omega x_2^{(i)} + 3\omega^2 x_3^{(i)} + u_2^{(i)}, & \dot{x}_5^{(i)} &= x_6^{(i)}, & \dot{x}_6^{(i)} &= -\omega^2 x_5^{(i)} + u_3^{(i)}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9) в матричной форме запишутся в виде

$$\dot{x}^{(i)} = Ax^{(i)} + Bu^{(i)} \quad (i=1, \dots, n), \quad (1.10)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega^2 & 3\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u^{(i)} = \begin{pmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u^{(i)0}(t) = \{u_1^{(i)0}(t), u_2^{(i)0}(t), u_3^{(i)0}(t)\}$, $t \in [t_0, T]$ ($i=1, \dots, n$) и значения параметров α и β , переводящие систему (1.10) из начальных фазовых состояний $x^{(i)}(t_0) = \{x_1^{(i)}(t_0), x_2^{(i)}(t_0), \dots, x_6^{(i)}(t_0)\}$ в конечное фазовое состояние $x(T, \alpha, \beta) = \{0, V_1, \beta, V_2, \alpha, V_3\}$ так, чтобы затраты (1.7) на управляющие воздействия $u^{(i)}(t)$ были наименьшими.

Отметим, что для определенности значение фазового вектора в конечный момент времени выбрано в виде $x(T, \alpha, \beta) = \{0, V_1, \beta, V_2, \alpha, V_3\}$, координаты которой могли бы иметь иной вид согласно (1.5), что не будет существенно влиять на ниже-приведенное решение задачи.

2. Определение оптимальных управлений $u^{(i)0}(t)$ представляет собой краевую задачу. Следуя [3], оптимальные управления представляются в явном виде и зависят линейно от краевых условий:

$$u^{(i)0}(t, \alpha, \beta) = H'[T, t] Q^{-1}(T, t_0) [x^{(i)}(T, \alpha, \beta) - X[T, t_0] x^{(i)}(t_0)] \quad (i=1, \dots, n), \quad (2.1)$$

где $H[T, t] = B X[T, t]$ – переходная матрица, $X[T, t]$ – нормированная фундаментальная матрица решений однородной части уравнения (1.10), $Q(T, t_0)$ – матрица с элементами q_{ij} ,

$$q_{jl} = \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^T h_{jk}(T, \tau) h_{kl}(T, \tau) d\tau, \quad (2.2)$$

h_{ij} – элементы матрицы $H[T, t]$. Здесь штрих означает транспонирование.

Для системы (1.10) (или (1.9)) фундаментальная матрица $X[T, t]$ имеет следующий вид:

$$X[T, t] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\omega} (4 \sin \omega(T-t) - 3\omega(T-t)) & 6(\omega(T-t) - \sin \omega(T-t)) & \frac{2}{\omega} (1 - \cos \omega(T-t)) & 0 & 0 \\ 0 & 4 \cos \omega(T-t) - 3 & 6\omega(1 - \cos \omega(T-t)) & 2 \sin \omega(T-t) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\omega} (\cos \omega(T-t) - 1) & 4 - 3 \cos \omega(T-t) & \frac{1}{\omega} \sin \omega(T-t) & 0 & 0 \\ 0 & -2 \sin \omega(T-t) & 3\omega \sin \omega(T-t) & \cos \omega(T-t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \omega(T-t) & \frac{1}{\omega} \sin \omega(T-t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega \sin \omega(T-t) & \cos \omega(T-t) \end{pmatrix}$$

Элементы q_{ij} (2.2) матрицы Q имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{1}{\omega^3} (14\theta + 3\theta^3 + 24\theta \cos \theta - 32 \sin \theta - 3 \sin 2\theta), & q_{12} &= \frac{1}{2\omega^2} (8 + 9\theta^2 - 8 \cos \theta + 12 \sin \theta (\sin \theta - 2\theta)), \\ q_{13} &= \frac{3}{\omega^3} (\sin \theta - \theta)^2, & q_{14} &= \frac{1}{2\omega^2} (16 \sin \theta + 3 \sin 2\theta - 10\theta - 12\theta \cos \theta), \\ q_{22} &= \frac{1}{\omega} (19\theta + 3 \sin 2\theta - 24 \sin \theta), & q_{23} &= \frac{1}{2\omega^2} (22\theta - 28 \sin \theta + 3 \sin 2\theta), & q_{24} &= \frac{12}{\omega} \sin^4 \left(\frac{1}{2}\theta\right), \\ q_{33} &= \frac{1}{4\omega^3} (26\theta - 32 \sin \theta + 3 \sin 2\theta), & q_{34} &= \frac{1}{\omega^2} (5 - 3 \cos \theta) \sin^2 \left(\frac{1}{2}\theta\right), \\ q_{44} &= \frac{1}{\omega} (10\theta - 3 \sin 2\theta), & q_{55} &= \frac{1}{4\omega^3} (2\theta - \sin 2\theta), & q_{56} &= \frac{1}{2\omega^2} \sin^2 \theta, & q_{66} &= \frac{1}{4\omega} (2\theta + \sin 2\theta), \\ q_{15} &= q_{16} = q_{25} = q_{26} = q_{35} = q_{36} = q_{45} = q_{46} = 0, & q_{ij} &= q_{ji} \quad (i, j = 1, \dots, 6), & \theta &= \omega(T - t_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая начальные и конечные значения системы, согласно формуле (2.1), получаем оптимальные управляющие воздействия в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1^{(i)0}(t, \alpha, \beta) &= \alpha A_1^{(i)}(t) + \beta B_1^{(i)}(t) + C_1^{(i)}(t) \\ u_2^{(i)0}(t, \alpha, \beta) &= \alpha A_2^{(i)}(t) + \beta B_2^{(i)}(t) + C_2^{(i)}(t) \\ u_3^{(i)0}(t, \alpha, \beta) &= \alpha A_3^{(i)}(t) + \beta B_3^{(i)}(t) + C_3^{(i)}(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} A_1^{(i)}(t) &= A_2^{(i)}(t) = B_3^{(i)}(t) = 0, \\ A_3^{(i)}(t) &= \bar{q}_{56} \cos(\omega(T-t)) + \bar{q}_{55} \frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega}, \\ B_1^{(i)}(t) &= 2\bar{q}_{33} \frac{-1 + \cos(\omega(T-t))}{\omega} + \bar{q}_{23}(-3 + 4 \cos(\omega(T-t))) - 2\bar{q}_{34} \sin(\omega(T-t)) + \\ &\quad + \bar{q}_{13}(-3T + 3t + \frac{4 \sin(\omega(T-t))}{\omega}), \\ B_2^{(i)}(t) &= -2\bar{q}_{13} \frac{-1 + \cos(\omega(T-t))}{\omega} + 2\bar{q}_{23} \sin(\omega(T-t)) + \bar{q}_{34} \cos(\omega(T-t)) + \bar{q}_{33} \frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega} \\ C_1^{(i)}(t) &= (-x_1^{(i)}(t_0) - 2x_4^{(i)}(t_0)) \frac{1 - \cos \theta}{\omega} - 6x_3^{(i)}(t_0)(\theta - \sin \theta) - x_2^{(i)}(t_0) \frac{-3\theta + 4 \sin \theta}{\omega} \times \\ &\quad \times (2\bar{q}_{13} \frac{-1 + \cos(\omega(T-t))}{\omega} + \bar{q}_{12}(-3 + 4 \cos(\omega(T-t))) - 2\bar{q}_{14} \sin(\omega(T-t)) + \\ &\quad + \bar{q}_{11}(-3T + 3t + \frac{4 \sin(\omega(T-t))}{\omega})) + (v_1 - 6x_3^{(i)}(t_0)\omega(1 - \cos \theta) - x_2^{(i)}(t_0)(-3 + 4 \cos \theta) - \\ &\quad - 2x_4^{(i)}(t_0) \sin \theta)(2\bar{q}_{23} \frac{-1 + \cos(\omega(T-t))}{\omega} + \bar{q}_{22}(-3 + 4 \cos(\omega(T-t))) - 2\bar{q}_{24} \sin(\omega(T-t)) + \\ &\quad + \bar{q}_{12}(-3T + 3t + \frac{4 \sin(\omega(T-t))}{\omega})) + (-x_3^{(i)}(t_0)(4 - 3 \cos \theta) - 2x_2^{(i)}(t_0) \frac{-1 + \cos \theta}{\omega} - x_4^{(i)}(t_0) \frac{\sin \theta}{\omega}) \times \\ &\quad \times (2\bar{q}_{33} \frac{-1 + \cos(\omega(T-t))}{\omega} + \bar{q}_{23}(-3 + 4 \cos(\omega(T-t))) - 2\bar{q}_{34} \sin(\omega(T-t)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{q}_{13}(-3T+3t+\frac{4\sin(\omega(T-t))}{\omega}))+(v_2-x_4^{(i)}(t_0)\cos\theta+x_2^{(i)}(t_0)\sin\theta-3x_3^{(i)}(t_0)\omega\sin\theta)\times \\
& \times(2\bar{q}_{34}\frac{-1+\cos(\omega(T-t))}{\omega}+\bar{q}_{24}(-3+4\cos(\omega(T-t)))-2\bar{q}_{44}\sin(\omega(T-t))+ \\
& +\bar{q}_{14}(-3T+3t+\frac{4\sin(\omega(T-t))}{\omega})). \\
C_2^{(i)}(t)= & (-x_1^{(i)}(t_0)-2x_4^{(i)}(t_0)\frac{1-\cos\theta}{\omega}-6x_3^{(i)}(t_0)(\theta-\sin\theta)-x_2^{(i)}(t_0)\frac{-3\theta+4\sin\theta}{\omega})\times \\
& \times(-2\bar{q}_{11}\frac{-1+\cos(\omega(T-t))}{\omega}+2\bar{q}_{12}\sin(\omega(T-t))+\bar{q}_{14}\cos(\omega(T-t))+ \\
& +\bar{q}_{13}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega})+(v_1-6x_3^{(i)}(t_0)\omega(1-\cos\theta)-x_2^{(i)}(t_0)(-3+4\cos\theta)-2x_4^{(i)}(t_0)\sin\theta)\times \\
& \times(-2\bar{q}_{12}\frac{-1+\cos(\omega(T-t))}{\omega}+\bar{q}_{24}\cos(\omega(T-t))+2\bar{q}_{22}\sin(\omega(T-t))+ \\
& +\bar{q}_{23}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega})+(-x_3^{(i)}(t_0)(4-3\cos\theta)-2x_2^{(i)}(t_0)\frac{-1+\cos\theta}{\omega}-x_4^{(i)}(t_0)\frac{\sin\theta}{\omega})\times \\
& \times(-2\bar{q}_{13}\frac{-1+\cos(\omega(T-t))}{\omega}+\bar{q}_{34}\cos(\omega(T-t))+2\bar{q}_{23}\sin(\omega(T-t))+ \\
& +\bar{q}_{33}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega})+(v_2-x_4^{(i)}(t_0)\cos\theta+2x_2^{(i)}(t_0)\sin\theta-3x_3^{(i)}(t_0)\omega\sin\theta)\times \\
& \times(-2\bar{q}_{14}\frac{-1+\cos(\omega(T-t))}{\omega}+\bar{q}_{44}\cos(\omega(T-t))+2\bar{q}_{24}\sin(\omega(T-t))+\bar{q}_{34}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega}), \\
C_3^{(i)}(t)= & (-x_5^{(i)}(t_0)\cos\theta-x_6^{(i)}(t_0)\frac{\sin\theta}{\omega})(\bar{q}_{56}\cos(\omega(T-t))+\bar{q}_{55}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega})+ \\
& +(v_3-x_6^{(i)}(t_0)\cos\theta+x_5^{(i)}(t_0)\omega\sin\theta)(\bar{q}_{66}\cos(\omega(T-t))+\bar{q}_{56}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega}).
\end{aligned}$$

Здесь $\bar{q}_{ij}$ – элементы матрицы $Q^{-1}(T, t_0)$.

Выражения (2.4) характеризуют зависимость оптимального управления каждого объекта от конечного положения.

Оптимальную фазовую траекторию для i -ого управляющего объекта получим, интегрируя (1.9) (или (1.10)) с учетом $u^{(i)o}(t, \alpha, \beta)$ (2.4) при начальном условии $x^{(i)}(t_0)$

$$x^{(i)o}(t, \alpha, \beta) = X[t, t_0]x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^t X[t, \tau]Bu^{(i)o}(\tau, \alpha, \beta)d\tau. \quad (2.5)$$

Затраты на движения (2.5) согласно (1.4) будут

$$\mathfrak{I}_i(u^{(i)o}(\alpha, \beta)) = \left[\int_{t_0}^T \left[\left(u_1^{(i)o}(t, \alpha, \beta) \right)^2 + \left(u_2^{(i)o}(t, \alpha, \beta) \right)^2 + \left(u_3^{(i)o}(t, \alpha, \beta) \right)^2 \right] dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Выполняя интегрирование, получим, что затраты на управления выражаются величиной

$$\mathfrak{I}_i(u^{(i)o}(\alpha, \beta)) = \mathfrak{I}_i(\alpha, \beta) = (a_1^{(i)}\alpha^2 - 2b_1^{(i)}\alpha + a_2^{(i)}\beta^2 - 2b_2^{(i)}\beta + c^{(i)})^{\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

где

$$a_1^{(i)} = \int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^3 (A_j^{(i)}(t))^2 \right] dt, \quad b_1^{(i)} = - \int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^3 A_j^{(i)}(t)C_j^{(i)}(t) \right] dt,$$

$$a_2^{(i)} = \int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^3 (B_j^{(i)}(t))^2 \right] dt, \quad b_2^{(i)} = - \int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^3 B_j^{(i)}(t) C_j^{(i)}(t) \right] dt.$$

$$c^{(i)} = \int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^3 (C_j^{(i)}(t))^2 \right] dt.$$

Из (2.6) получим, что минимальные затраты на управление i -ого управляющего объекта будут при

$$\alpha_i^o = \frac{b_1^{(i)}}{a_1^{(i)}}, \quad \beta_i^o = \frac{b_2^{(i)}}{a_2^{(i)}},$$

следовательно,

$$\mathfrak{I}_i^* = \mathfrak{I}_i(u^{(i)o}(\alpha_i^o, \beta_i^o)) = (a_1^{(i)}\alpha_i^{o2} - 2b_1^{(i)}\alpha_i^o + a_2^{(i)}\beta_i^{o2} - 2b_2^{(i)}\beta_i^o + c^{(i)})^{\frac{1}{2}} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.7)$$

Подставляя выражения (2.6) и (2.7) в минимизируемый функционал (1.7), получим, что для определения парето-оптимального набора управления, необходимо решить задачу минимизации функции переменных α и β . Считая величины α и β определенными, можно найти соответствующий им набор управлений из соотношения (2.4), решающих задачу встречи, а также затраты на управление каждого объекта из формулы (2.6). С помощью найденных управлений объектов, можно построить фазовые траектории, переводящие объекты к точке встречи. Для этого необходимо воспользоваться формулой (2.5).

3. В качестве примера рассмотрим задачу встречи трех объектов.

Пусть длина промежутка времени управления равна $T - t_0 = 30$ сек ($t_0 = 0$), фиктивная орбита имеет радиус 6600км, а $\omega = 1.176 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{сек}}$.

Пусть начальным положением для первого, второго и третьего объектов являются соответственно векторы

$$x^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.2328 \\ 60 \\ -4.1115 \\ 80 \\ 0.0369 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 40 \\ -9.0613 \\ -50 \\ 7.6229 \\ 60 \\ 0.065 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} -10 \\ -4.9545 \\ -80 \\ -7.2583 \\ -30 \\ -0.0841 \end{pmatrix}.$$

Тогда, значения функционалов (1.4) для каждого объекта получаются

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= (0.0004443\alpha^2 - 0.07159\alpha + 0.0004448\beta^2 + 0.001045\beta + 3.674057)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathfrak{I}_2 &= (0.0004443\alpha^2 - 0.05418\alpha + 0.0004448\beta^2 - 0.0599846\beta + 12.208928)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathfrak{I}_3 &= (0.0004443\alpha^2 + 0.02778\alpha + 0.0004448\beta^2 + 0.166386\beta + 21.929144)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Согласно (2.7), получены следующие минимальные значения затрат на управления:

$$\mathfrak{I}^*(u) = (0.790181, 8.5348, 5.93659).$$

Подставляя последнее и (3.1) в (1.7), будем иметь:

$$\|\mathfrak{I}\| = 0.001333\alpha^2 - 0.09799\alpha + 0.001334\beta^2 + 0.10744\beta + 22.5506. \quad (3.2)$$

Минимизируя (3.2) по параметрам α и β , получаем, что минимум достигается при следующих значениях: $\alpha_0 = 36.7$, $\beta_0 = -40.25$.

Таким образом, получены парето-оптимальные управления, которые имеют следующий вид:

$$u^{(1)^\circ}(t) = \begin{pmatrix} 28.98 + 0.027t - 28.795 \cos(\lambda t) - 30.359 \sin(\lambda t) \\ 15.059 - 15.179 \cos(\lambda t) + 14.398 \sin(\lambda t) \\ -0.293 \cos(\lambda t) + 16.536 \sin(\lambda t) \end{pmatrix},$$

$$u^{(2)^\circ}(t) = \begin{pmatrix} 78.636 + 0.124t - 77.696 \cos(\lambda t) - 142.684 \sin(\lambda t) \\ 70.384 - 71.342 \cos(\lambda t) + 38.848 \sin(\lambda t) \\ -0.164 \cos(\lambda t) + 9.144 \sin(\lambda t) \end{pmatrix},$$

$$u^{(3)^\circ}(t) = \begin{pmatrix} -113.16 + 0.116t + 113.881 \cos(\lambda t) - 128.746 \sin(\lambda t) \\ 65.608 - 64.373 \cos(\lambda t) - 56.941 \sin(\lambda t) \\ 0.456 \cos(\lambda t) - 25.68 \sin(\lambda t) \end{pmatrix},$$

где $\lambda = 0.00117689$. Значения затрат на управления будут:

$$\mathfrak{T}_1(u^{(1)^\circ}(t)) = 2.32199, \quad \mathfrak{T}_2(u^{(2)^\circ}(t)) = 13.9532, \quad \mathfrak{T}_3(u^{(3)^\circ}(t)) = 17.5734.$$

Законы движения объектов примут следующий вид:

$$x_1^{(1)}(t) = 3.3366300964 \times 10^8 \sin^2(\lambda t / 2) + 179756.452t - 43.4631t^2 - 0.01329t^3 +$$

$$+ 64489.171t \cos(\lambda t) - 5 \times 10^{-12}t \cos(2\lambda t) - (2.07535841 \times 10^8 + 61168.27t) \sin(\lambda t)$$

$$x_3^{(1)}(t) = 8.7329105 \times 10^7 - 49240.658t - 22.5886t^2 -$$

$$- (8.73290425 \times 10^7 + 30584.137t) \cos(\lambda t) + (6.78234 \times 10^7 - 32244.586t) \sin(\lambda t)$$

$$x_5^{(1)}(t) = (80 - 7025.269t) \cos(\lambda t) + (5.969382 \times 10^6 - 124.5t) \sin(\lambda t)$$

$$x_1^{(2)}(t) = 4.514890997 \times 10^8 + 842185.517t - 117.9536t^2 - 0.062126t^3 +$$

$$+ (-4.514890597 \times 10^8 + 303095.91t) \cos(\lambda t) - 2 \times 10^{-11}t \cos(2\lambda t) -$$

$$- (9.731499845 \times 10^8 + 165044.695t) \sin(\lambda t)$$

$$x_3^{(2)}(t) = 4.09313029 \times 10^8 - 133633.101t - 105.57665t^2 - (4.09313079 \times 10^8 +$$

$$+ 82522.3473t) \cos(\lambda t) + (1.83673131 \times 10^8 - 151547.954t) \sin(\lambda t)$$

$$x_5^{(2)}(t) = (60 - 3884.7826t) \cos(\lambda t) + (3.300944 \times 10^6 - 69.479t) \sin(\lambda t)$$

$$x_1^{(3)}(t) = -6.55694178 \times 10^8 + 774172.554t + 169.7403t^2 - 0.05791t^3 +$$

$$+ (6.55694168 \times 10^8 + 273487.44t) \cos(\lambda t) - 2 \times 10^{-11}t \cos(2\lambda t) +$$

$$+ (-8.9019785 \times 10^8 + 241911.18t) \sin(\lambda t)$$

$$x_3^{(3)}(t) = 3.75384401 \times 10^8 + 192303.753t - 98.4115t^2 + (-3.7538448102 \times 10^8 +$$

$$+ 120955.5893t) \cos(\lambda t) - (2.6618171715 \times 10^8 + 136743.72t) \sin(\lambda t)$$

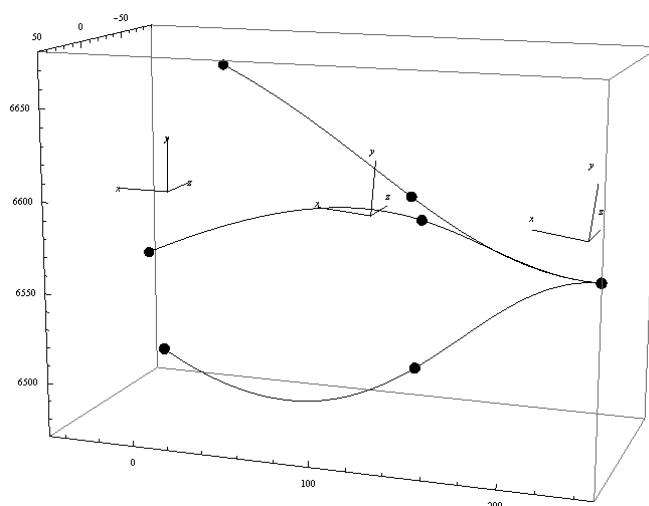
$$x_5^{(3)}(t) = (-30 + 10910.058t) \cos(\lambda t) + (-9.270315 \times 10^6 + 193.812t) \sin(\lambda t).$$

В нижеследующей таблице приведены значения координат объектов в промежуточные моменты времени:

Таблица

$x(t) \backslash t$	$t = 0$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 30$
$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_3^{(1)}(t) \\ x_5^{(1)}(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5.34422 \\ 15.8021 \\ 68.9528 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.60426 \\ -23.3328 \\ 48.0493 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.58794 \times 10^{-8} \\ -40.2557 \\ 36.7558 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_3^{(2)}(t) \\ x_5^{(2)}(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ -50 \\ 60 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -10.2766 \\ -13.265 \\ 54.2627 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9.39724 \\ -25.5143 \\ 42.9265 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.19564 \times 10^{-8} \\ -40.2557 \\ 36.7558 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1^{(3)}(t) \\ x_3^{(3)}(t) \\ x_5^{(3)}(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -10 \\ -80 \\ -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -29.9452 \\ -101.657 \\ -13.0669 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -14.1183 \\ -66.3889 \\ 19.262 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -40.2557 \\ 36.7558 \end{pmatrix}$

Движения объектов графически представляются в виде



ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев А.А., Соколов В.Б. Встреча на орбите. М.: Машиностроение, 1969. 367с.
2. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск.: Изд. ТГУ, 1985. 276с.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.

Сведения об авторах:

Барсегян Вая Рафаслович – Доктор физ-мат.наук, профессор,
Ереванский Госуниверситет, факультет математики и механики
barsegh@ysu.am, barseghyan@sci.am

Степанян Арег Ашотович – Аспирант Ереванского Госуниверситета,
факультет математики и механики
Mexanikus2006@yahoo.com

Поступила в редакцию 01.10.2008

УДК 519.6

ОЦЕНКА РАССТОЯНИЯ ЛОМАННОЙ ЭЙЛЕРА ОТ СТАБИЛЬНЫХ
МНОЖЕСТВ ДЛЯ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩИХСЯ СИСТЕМ
ГАБРИЕЛЯН М. С.

Ключевые слова: ломаные Эйлера, экстремальная стратегия, стабильный мост.

Keywords: Euler's Broken Line, Extremal Strategy, Stable Bridge.

Գաբրիելյան Մ.Ս.

Էտապ առ էտապ փոփոխվող դինամիկայով համակարգերի համար ստարիլ բազմությունից էյլերի
բեկյալի հեռավորության գնահատականը

Էտապ առ էտապ փոփոխվող դինամիկայով համակարգերի համար որոշված է բավականին ճիշտ գնահատական էքստրեմալ ստրատեգիայով կառուցված էյլերի բեկյալների և համապատասխան մաքսիմալ ստարիլ բազմություններից ունեցած հեռավորությունների համար, ցանկացած վերջավոր ժամանակահատվածի դեպքում:

Gabrielyan M.S.

Estimation of Distance of Euler's Broken Line from Constant Multitude for
Step by Step Changing Systems

The sharp estimation of distance of Euler's broken line which is built by extremal strategy relative to maximal stable bridge for any terminal time interval is determined.

Для поэтапно меняющихся конфликтно-управляемых систем определяется достаточно точная оценка расстояния ломаной Эйлера, построенной экстремальной стратегией относительно максимальных стабильных мостов для любого конечного промежутка времени.

Движение конфликтно-управляемых систем определяется системами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k^{(1)}[t] = f_k(t, x_k^{(1)}[t], u_k, v_k[t]) \quad \text{при} \quad x_k^{(1)}[t_*] = x_k^{(1)*} \quad k=1, 2, \dots, m$$

где $u_k \in P_k$, $v_k[t] \in Q_k$ – интегрируемая по Лебегу реализация управления второго игрока. Здесь $f_k: [t_0, \infty) \times R^n \times P_k \times Q_k \rightarrow R^n$ – непрерывная функция, $P_k \subset R^{p_k}$, $Q_k \subset R^{q_k}$ – компакты, характеризующие возможности игроков. Предполагается, что в точках t_k соблюдается непрерывность траектории, т.е. $x_k^{(1)}[t_k] = x_{k-1}^{(1)}[t_k]$.

Наряду с движением $x_k^{(1)}(t)$, $k=1, \dots, m$, рассмотрим движение $x_k^{(2)}(t)$, которое удовлетворяет следующему уравнению в контингенциях:

$$\dot{x}_k^{(2)} \in co \left[f_k: f_k = f_k(t, x_k^{(2)}(t), u_k, v_k^*), u_k \in P_k \right], \quad k=1, \dots, m; \quad x_k^{(2)}(t_*) = x_k^{(2)*}.$$

Известно, что правую часть этих систем можно представить в виде ([1], стр. 60):

$$\dot{x}_k^{(2)} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ki}^{(t)} f_k \left(t, x_k^{(2)}(t), u_{ki}, v_k^* \right), \quad \text{где } \alpha_{ki}^{(t)} \geq 0; \quad u_{ki} \in P_k;$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ki}^{(t)} = 1.$$

Векторы $u_k^* \in P_k$ и $v_k^* \in Q_k$ выбраны из следующих условий:

$$\max_{v_k \in Q_k} \left(x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right)' f_k \left(t_*, x_k^{(1)}, u_k, v_k \right) = \min_{u_k \in P_k} \max_{v_k \in Q_k} \left(x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right)' f_k \left(t_*, x_k^{(1)}, u_k, v_k \right)$$

$$k = 1, \dots, m$$

$$\min_{u_k \in P_k} \left(x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right)' f_k \left(t_*, x_k^{(1)}, u_k, v_k \right) = \max_{v_k \in Q_k} \min_{u_k \in P_k} \left(x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right)' f_k \left(t_*, x_k^{(1)}, u_k, v_k \right)$$

$$k = 1, \dots, m$$

Обозначим через $\rho_k(t)$ расстояние между точками $x_k^{(1)}[t]$ и $x_k^{(2)}[t]$, т. е.

$$\rho_k(t) = \left\| x_k^{(2)}[t] - x_k^{(1)}[t] \right\|;$$

$$\rho_k(t_*) = \left\| x_k^{(2)}[t_*] - x_k^{(1)}[t_*] \right\| = \left\| x_k^{(2)} - x_k^{(1)} \right\| \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Оценивая величину $\rho_k(t)$ для каждого $k = 1, 2, \dots, m$ точно так, как в [2], получим:

$$\rho_k^2(t) \leq e^{2\lambda_k(t-t_*)} \times \rho_k^2(t_*) + \varphi(\Delta) \cdot \frac{1}{2\lambda_k} \left(e^{2\lambda_k(t-t_*)} - 1 \right) \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Здесь λ_k – постоянная Липшица по x_k функции f_k в рассматриваемой области

$$\varphi(\Delta) = \max \left(\varphi(\Delta_1), \dots, \varphi(\Delta_m) \right), \quad \Delta = \max \left(\Delta_1, \dots, \Delta_m \right),$$

где $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ – ограниченные числа, а

$$\rho(t_*) = \max \rho_k(t_*) \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, m$$

Как в [2], следует, что $\rho(t_*) \rightarrow 0$ и $\varphi(\Delta) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$, и из полученного неравенства следует, что расстояние ломаной Эйлера от стабильного множества стремится к нулю, если $\rho(t_*) \rightarrow 0$ и $\varphi(\Delta) \rightarrow 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М: Наука, 1974.
2. Габриелян М.С. Оценка расстояния ломаной Эйлера от стабильного множества. //Изн. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №2. С.63–65.

Сведения об авторе:

Габриелян Михаил Сергеевич – доктор техн. наук, профессор Ереванского государственного университета
Телефон (дом): (374.10)57-47-28

Поступила в редакцию 26.03.2010

СОДЕРЖАНИЕ

63 тома 2010 г. “Изв.НАН Армении. Механика”

1. **Авакян Р.М., Аракелян М.М., Назарян Э.А., Кахризи М.А.** – Механика
формоизменения кольцевого диска4–43
2. **Аветисян В.В., Чахмахчян Р.Э.** – Ограниченные управления простран-
ственными движениями двух динамических объектов, избегающих
столкновения4–59
3. **Агаловян Ленсер Абгарович** – К 70-летию со дня рождения..... 1–3
4. **Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Гулгазарян Л.Г.** – Асимптотические решения
трехмерных динамических задач для ортотропных цилиндрических и
тороидальных оболочек1–6
5. **Агаян К.Л., Григорян Э.Х.** – Дифракция сдвиговой плоской электроупругой
волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с
щелью1–50
6. **Агаян К.Л.** – Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой
полуплоскости плоским штампом4–3
7. **Акопян В.Н., Саргсян А.О.** – О концентрации напряжений возле абсолютно
жесткого включения в составной упругой полуплоскости4–12
8. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** – К микрополярной теории весьма
пологих оболочек.....3–23
 - **Аракелян М.М.** – см. № 1
9. **Арутюнян Л.А.** – Плоская задача составной плоскости с трещинами1–23
 - **Атоян Л.А.** – см. №19
10. **Барсегян В.Р., Степанян А.А.** – Задача о парето-оптимальной встрече
нескольких управляемых космических аппаратов4–71
11. **Белубекян М.В., Хачатрян Л.С.** – Отражение изгибной волны от кромки
пласти.....1–30
 - **Белубекян М.В.** – см.№ 8
12. **Брутян М.С.** – Диффузия вихрей в микрополярной жидкости4–51
13. **Вартанов А. Г.** Магнитоупругие колебания идеально-проводящего слоя в
постоянном магнитном поле.....3 – 33
14. **Вартанов А.Г.** – Решение задачи собственных колебаний конечной
плиты с закреплённым основанием и метод Левинсона4–23
15. **Габриелян М.С.** – Оценка расстояния ломаной Эйлера от стабильных множеств
для поэтапно меняющихся систем4–79
16. **Гаспарян А.В., Мхитарян С.М.** – О напряжённом состоянии композита в виде
пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской
деформации оболочек2–10
 - **Геворкян Р.С.** – см. № 4
17. **Григорян Самвел Самвелович** – К 80-летию со дня рождения.....2–3

18. **Григорян Э.Х., Синянян С.С.** – Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем2–56
 - **Григорян Э.Х.** – см. №5
 - **Гулгазарян Л.Г.** – см. №4
19. **Даноян З.Н., Атоян Л.А.** – Отражение спиновых волн от границы ферромагнитной среды при обобщённых граничных условиях.....2–34
20. **Динунц А.С.** – Решение динамической контактной задачи о взаимодействии полубесконечных штампов с упругой полуплоскостью с учётом фактора износа3–5
21. **ИНФОРМАЦИЯ**3–83
22. **Казарян К.Б., Мартиросян С.Р., Саноян Ю.Г.** – О задаче устойчивости составного консольного стержня при одновременном действии «следающей» и неизменного направления сил, приложенных в пролёте1–34
 - **Кахризи М.А.** – см. №1
23. **Манукян Э.А., Мкртчян М.С.** – Об антиплоской задаче кусочно-однородного упругого слоя, содержащего на линии спая систему щелей и абсолютно жёстких тонких включений2–21
 - **Мартиросян С.Р.** – см. №22
 - **Мкртчян М.С.** – см. №23
 - **Мхитарян С.М.** – см. №16
 - **Назарян Э.А.** – см. 1
24. **Оганян Г.Г.** – О формах нелинейного распространения высокочастотных возмущений в термически релаксирующей газожидкостной смеси3–66
 - **Саноян Ю.Г.** – см. №22
25. **Саргсян А.М.** – О равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах4–31
26. **Саргсян А.М.** – Принцип соответствия в задачах теории упругости и электроупругости.....3–13
 - **Саргсян А.О.** – см. №7
27. **Саркисян А. А.** – Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок3–41
28. **Саркисян В. К.** – Об уточнении формулы для определения собственной частоты горизонтального маятника3–9
 - **Саркисян Л.С.** – см. №31
29. **Саркисян В. С.** – К 75-летию со дня рождения3–3
30. **Саркисян С. О.** – Общая теория магнитотермоупругости тонких оболочек.2–40
31. **Саркисян С.О., Саркисян Л.С.** – Магнитоупругость микрополярных упругих тонких оболочек и пластин3–52
32. **Симонян А.М.** – Натягивание анизотропной оболочки на жёсткую форму ...4–38
33. **Синянян С.С.** – Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными бесконечными металлическими слоями.....1–70
 - **Степанян А.А.** – см. №10
 - **Синянян С.С.** – см. №18

- Товмасын А.Б. – см. №34
- 34. Хачатрян А.М., Товмасын А.Б. – Асимптотическое решение трехмерной внутренней задачи анизотропной термоупругой пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости 1–42
- Хачатрян Л.С. – см. №11
- 35. Худаяров Б.А. – Исследование флаттера вязкоупругих ортотропных пластин 2–67
- 36. Худаяров Б.А. – Флаттер вязкоупругих цилиндрических оболочек с учетом пограничного слоя в потоке газа 3–76
- 37. Цатурян А. Е Поперечные колебания вертикального стержня под воздействием следящей нагрузки..... 2–78
- Чахмахчян Р.Э. – см. №2

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Աղայան Կ.Լ. Առաձգական կիսահարթության եզրում երկու կիսաանվերջ հեծանների ծռումը հարթ դրոշմով	3
Հակոբյան Վ.Ն., Սարգսյան Ա.Հ. Բաղադրյալ առաձգական կիսահարթության մեջ բացարձակ կոշտ ներդրակի շրջակայքում լարումների կոնցենտրացիայի մասին	12
Վարդանով Ա.Հ. Ամրակցված հիմքով վերջավոր սալի սեփական տատանումների խնդրի լուծումը և Լեվինսոնի եղանակը	23
Սարգսյան Ա.Մ. Շրջանային սեկտորի հավասարակշռության մասին շառավիղային կոդների վրա ողորկ կոնտակտային պայմանների դեպքում	31
Միմոնյան Ա.Մ. Անիզոտրոպ թաղանթի քաշումը կոշտ կաղապարի վրա	38
Ավագյան Ռ.Մ., Առաքելյան Մ.Մ., Նազարյան Է.Ա., Քահրիզի Մ.Ա. Օղակաձև սկավառակի ձևափոխման մեխանիկան	43
Բրուսյան Մ.Ա. Մրրիկների դիֆուզիան միկրոպոլյար հեղուկում	51
Ավետիսյան Վ.Վ., Չախմախչյան Ռ.Է. Բախումից խուսափող երկու դինամիկ օբյեկտների տարածական շարժումների սահմանափակ կառավարումները	59
Բարսեղյան Վ.Ռ., Ստեփանյան Ա.Ա. Մի քանի ղեկավարվող տիեզերական սարքերի պարետո-օպտիմալ հանդիպման մասին	71
Գաբրիելյան Մ.Ս. Էտապ առ Էտապ փոփոխվող դինամիկայով համակարգերի համար ստաբիլ բազմությունից Էյլերի բեկյալի հեռավորության գնահատականը	79
Բովանդակություն “ՀՀ ԳԱԱ տեղեկագիր Մեխանիկա” 2010թ. 63 հատորի	81

СОДЕРЖАНИЕ

Агаян К.Л. Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой полуплоскости плоским штампом	3
Акопян В.Н., Саргсян А.О. О концентрации напряжений возле абсолютно жёсткого включения в составной упругой полуплоскости	12
Варганов А.Г. Решение задачи собственных колебаний конечной плиты с закреплённым основанием и метод Левинсона	23
Саргсян А.М. О равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах	31
Симонян А.М. Натягивание анизотропной оболочки на жесткую форму	38
Авакян Р.М., Аракелян М.М., Назарян Э.А., Кахризи М. Механика формоизменения кольцевого диска	43
Брутян М.А. Диффузия вихрей в микрополярной жидкости	51
Аветисян В.В., Чахмакчян Р.Э. Ограниченные управления пространственными движениями двух динамических объектов, избегающих столкновения	59
Барсегян В.Р., Степанян А.А. Задача о парето-оптимальной встрече нескольких управляемых космических аппаратов	71
Габриелян М. С. Оценка расстояния ломаной Эйлера от стабильных множеств для поэтапно меняющихся систем	79
С о д е р ж а н и е 62 тома 2009 г. “Изн. НАН Армении, Механика”	81

CONTENTS

Aghayan K.L. The bending of two semi-infinite beams on the edge of elastic half-plane with flat punch	3
Hakobyan V.N., Sargsyan A.H. Stress Concentration Near the Absolutely Rigid Inclusion in Compound Elastic Half-Plane	12
Vardanov A.H. Solution of a Problem of Natural Oscillations of a Finite Plate with Fastened Base and Method of Levinson	23
Sargsyan A.M. On Equilibrium of the Circular Sector under the Boundary Conditions of the Smooth Contact on Radial Sides	31
Simonyan A.M. Stretch of Anisotropic Shell on Rigid Mould	38
Avakyan R.M., Arakelyan M.M., Nazaryan E.A., Kahrizi M.A. Mechanics of Forming Ring Disks	43
Brutyanyan M.A. Vortices Diffusion in a Micropolar Liquid	51
Avetisyan V.V., Chakhmakhchyan R.E. Limited Controls of Spatial Motions of Two Dynamic Objects Avoiding Collision	59
Barseghyan V.R., Stepanyan A.A. About Pareto-Optimal Encounter of Several Controllable Spacecrafts	71
Gabrielyan M.S. Estimation of Distance of Euler's Broken Line from Constant Multitude for Step by Step Changing Systems	79
Content of Proceedings Of National Academy Of Sciences Of Armenia Mechanics 2010 V. 63	81