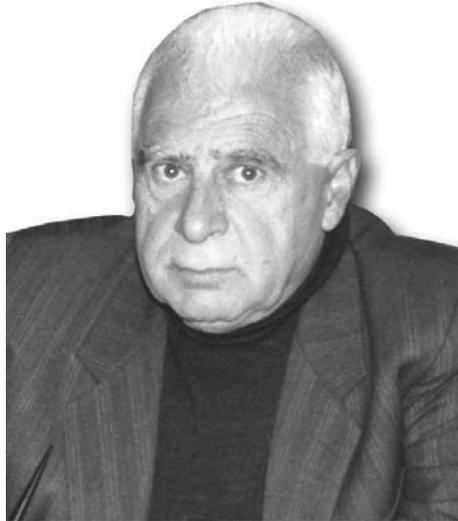


ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻՍԻՆԵՂԵՂԵՎԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2010



ВЛАДИМИР САРКИСОВИЧ САРКИСЯН
(К 75-летию со дня рождения)

25-ого июня 2010 г. исполнилось 75 лет академику НАН РА, заслуженному деятелю науки РА, доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Саркисовичу Саркисяну.

Владимир Саркисович Саркисян родился 25-ого июня 1935 года в городе Джульфа Нахичевана, в семье железнодорожника, которая в 1938 году переехала в Ереван. В 1957 году он успешно окончил отделение механики физико-математического факультета Ереванского государственного университета и был назначен ассистентом кафедры механики. В 1959 году он поступил в аспирантуру ЕГУ и в 1962 году в Москве защитил кандидатскую, а в 1972 году в Казани – докторскую диссертацию. В 1961-1978 гг. В.С.Саркисян работал старшим преподавателем, доцентом, профессором. С 1978г. – В.С.Саркисян заведующий кафедрой механики сплошной среды ЕГУ. В 1986 году был избран членом-корреспондентом НАН РА, а в 1996 году – академиком НАН РА.

Профессор В.С.Саркисян – известный специалист в области механики сплошной среды. Научные исследования В.С.Саркисяна относятся к ряду современных проблем механики анизотропных и неоднородных тел: прочности конструкций из композиционных материалов, оптимальному проектированию формы и материала конструкций (стержни, пластинки, оболочки), динамическим проблемам анизотропных неоднородных сред, контактными задачам упругих тел с упругими накладками, граничным задачам теории упругости с различными криволинейными анизотропиями. Для решения многих задач теории упругости анизотропных, неоднородных тел существенную роль имеют предложенные, развитые и обобщенные им методы физических и геометрических малых параметров, эффективный приближенный метод, построенный на основе

УДК 539.1

**РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О
ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ШТАМПОВ С
УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ С УЧЁТОМ ФАКТОРА ИЗНОСА
ДИНУНЦ А. С.**

Ключевые слова: нестационарные задачи штампов, износ, метод Винера-Хопфа, форма решения Смирнова-Соболева.

Key words: unsteady stamp problems, wear, Vinner-Hopf method, Smirnov–Sobolev solution form.

Դինունց Ա. Ս.

Վիսասանվերջ դրոշմի կոնտակտային դինամիկ խնդիրների լուծման առաձգական կիսահարթությունում՝ մաշման գործոնի հաշվառումով

Աշխատանքում տրված է Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ կիսասանվերջ դրոշմի և առաձգական վերին կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության դինամիկական խնդրի լուծումը՝ մաշման գործոնի հաշվառումով: Բերված է Վիներ-Հոպֆի հավասարման և կառուցված է վերջինիս փակ լուծումը: Կատարված է խնդրի թվային վերլուծությունը և կոնտակտային լարումների փոփոխության օրինաչափությունները ներկայացված են գրաֆիկներով:

Dinunts A.S.

The solution of dynamic contact problems of interactions of semi-infinite stamps with elastic half-plane in presence of wear

In present paper the analytical and numerical investigation of problems of stamps for unsteady mixed boundary conditions and in presence of wear by the method of integral transforms of Laplace and Fourier, as well as by method of Vinner-Hopf is done. The stresses on stamps are calculated and graphs are constructed.

В настоящей работе исследуется задача контактного взаимодействия полубесконечных штампов с упругой средой в виде упругой верхней полуплоскости при нестационарном динамическом режиме с учетом фактора износа материала среды методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье, а также Винера-Хопфа. Другие нестационарные смешанные задачи о полубесконечных вертикальном и горизонтальном штампах при наличии износа решены в [1]. Последний приводит к устранению особенности у края штампа. Тем не менее, как и в случае без износа, где может иметь место разрушение среды около края штампа и в данном случае при некоторых граничных параметрах, может иметь место неупругое поведение под штампом, что проверено в настоящей работе численными расчетами нормального и касательного напряжения под штампом и дано сравнение с пределами текучести механики разрушения. Контактные задачи теории упругости с учетом фактора износа исследованы в монографиях [4,5].

1.1. Обозначим через U, V компоненты перемещений, a, b – скорости упругих волн. Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в плоском случае имеют вид:

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничные условия имеют вид ($y = 0$):

$$\sigma_{yy} = 0, x < 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + k\sigma_{yy} = C_0 H(x) \delta(t), \quad x > 0 \quad (1.2)$$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

где $H(x)$ – единичная функция Хевисайда, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Вторым условием (1.2) описывается обобщённая модель абразивного износа.

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x . Обозначая \bar{U}, \bar{V} преобразование Лапласа по t от U, V , через \bar{U}, \bar{V} преобразование Фурье по x от \bar{U}, \bar{V} , можно искать решение в виде

$$\bar{U}; \bar{V} = \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}_n y} \bar{U}^{(n)}; \bar{V}^{(n)} d\bar{\alpha} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получим

$$\bar{\beta}_n = \sqrt{\omega^2 / c_n^2 - \bar{\alpha}^2}, \quad \bar{\beta}_n^{\pm} = \sqrt{\omega / c_n \pm \bar{\alpha}}, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b, \quad \bar{\beta}_n = \bar{\beta}_n^+ \bar{\beta}_n^-, \quad n = 1, 2 \quad (1.4)$$

$s = -i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа по t . Кроме того,

$$\bar{V}^{(1)} = \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\alpha}} \bar{U}^{(1)}, \quad \bar{V}^{(2)} = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_2} \bar{U}^{(2)}$$

Подставляя (1.3) в (1.2) и проводя обратное преобразование Фурье по x , можно получить уравнение Винера-Хопфа

$$\sigma_{yy}^- \frac{kF_2(\bar{\alpha})}{F(\bar{\alpha})} = \frac{C_0}{2\pi i \bar{\alpha}} + sV^+ \quad (1.5)$$

$$\text{где } \sigma_{yy}^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \bar{\sigma}_{yy} \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx, \quad V^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \bar{V} \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx,$$

$$R(\bar{\alpha}) = 2F(\bar{\alpha}) (\omega^2 / b^2 - \omega^2 / a^2) \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2$$

$$F_2(\bar{\alpha}) = F(\bar{\alpha}) - \frac{a^2 \omega}{2\rho k b^4 (a^2 / b^2 - 1) \bar{\beta}_2},$$

$$R(\bar{\alpha}) = 4\bar{\alpha}^{-2} \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 + (\omega^2 / b^2 - 2\bar{\alpha}^2)^2 \quad \text{– функция Рэлея, } F(\bar{\alpha}) \rightarrow 1, \quad F_2(\bar{\alpha}) \rightarrow 1$$

при $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$.

Отметим, что индекс (+) дает функции аналитические в верхней полуплоскости $\bar{\alpha}$, а индекс (-) дает функции аналитические в нижней полуплоскости $\bar{\alpha}$.

Уравнение (1.5) Винера-Хопфа решается известным методом в виде [2]. Функция

$$F_2(\bar{\alpha}) \text{ имеет четыре корня. Обозначим их через } \frac{\omega}{a} \alpha_1^0, \quad \frac{\omega}{a} \bar{\alpha}_1^0, \quad \frac{\omega}{a} \alpha_2^0, \quad \frac{\omega}{a} \bar{\alpha}_2^0 \text{ и}$$

введём функцию

$$F_3(\bar{\alpha}) = F_2(\bar{\alpha}) \frac{(\omega/a - \bar{\alpha})(\omega/a + \bar{\alpha})^3}{\left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{a} \alpha_1^0\right) \left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{a} \alpha_2^0\right) \left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{a} \bar{\alpha}_1^0\right) \left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{a} \bar{\alpha}_2^0\right)} \quad (1.6)$$

$F_3(\bar{\alpha}) \rightarrow 1$ при $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ и не имеет нулей во всей комплексной плоскости $\bar{\alpha}$.

Черта над α_k^0 обозначает сопряжённое значение. Представим $F(\bar{\alpha})$, $F_3(\bar{\alpha})$ в виде $F(\bar{\alpha}) = F^+(\bar{\alpha})F^-(\bar{\alpha})$, $F_3(\bar{\alpha}) = F_3^+(\bar{\alpha})F_3^-(\bar{\alpha})$ (1.7)

где

$$F^-(\alpha) = \frac{a/c_R - a\bar{\alpha}/\omega}{\sqrt{a/b - a\bar{\alpha}/\omega} \sqrt{1 - a\bar{\alpha}/\omega}} \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_1^{a/b} \operatorname{arctg} \frac{4\zeta^2 \sqrt{1-\zeta^2} \sqrt{a^2/b^2 - \zeta^2}}{(a^2/b^2 - 2\zeta^2)^2} \frac{d\zeta}{\zeta - a\bar{\alpha}/\omega} \right]$$

$$G^-(\bar{\alpha}) = \operatorname{Exp} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^{a/b} \operatorname{arctg} \frac{(\rho ka)^{-1} a^4/b^4 \sqrt{\zeta^2 - 1} - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{a^2/b^2 - \zeta^2}}{(a^2/b^2 - 2\zeta^2)^2} \frac{d\zeta}{\zeta - a\bar{\alpha}/\omega} + \frac{1}{\pi} \int_{a/b}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{(\rho ka)^{-1} a^4/b^4 \sqrt{\zeta^2 - 1}}{(a^2/b^2 - 2\zeta^2)^2 - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{\zeta^2 - a^2/b^2}} \frac{d\zeta}{\zeta - a\bar{\alpha}/\omega} \right\}$$

$$F_3^-(\bar{\alpha}) = \frac{\sqrt{\omega/a - \bar{\alpha}}}{\sqrt{\omega/b - \bar{\alpha}}} G^-(\bar{\alpha}); \quad F^+(\bar{\alpha}) = \frac{F(\bar{\alpha})}{F^-(\bar{\alpha})}; \quad F_3^+(\bar{\alpha}) = \frac{F_3(\bar{\alpha})}{F_3^-(\bar{\alpha})}.$$

Тогда для $F_2(\bar{\alpha})$ получим

$$F_2(\bar{\alpha}) = F_2^+(\bar{\alpha})F_2^-(\bar{\alpha}) \quad (1.8)$$

$$F_2^-(\alpha) = \frac{G^-(\bar{\alpha}) \omega/a (a\bar{\alpha}/\omega - \alpha_1^0) (a\bar{\alpha}/\omega - \alpha_2^0)}{\sqrt{a/b - a\bar{\alpha}/\omega} \sqrt{1 - a\bar{\alpha}/\omega}};$$

$$F_2^+(\alpha) = \frac{F_2(\bar{\alpha}) \sqrt{\omega/a - a\bar{\alpha}/\omega} \sqrt{\omega/b - a\bar{\alpha}/\omega}}{G^-(\bar{\alpha}) (a\bar{\alpha}/\omega - \alpha_1^0) (a\bar{\alpha}/\omega - \alpha_2^0)}$$

Уравнение Винера-Хопфа (1.5) примет вид:

$$\sigma_{yy}^- \frac{kF_2^+(\bar{\alpha})F_2^-(\bar{\alpha})}{F^+(\bar{\alpha})F^-(\bar{\alpha})} = \frac{C_0}{2\pi i \alpha} + sV^+ \quad (1.9)$$

или $k\sigma_{yy}^- \frac{F_2^-(\bar{\alpha})}{F^-(\bar{\alpha})} = \frac{C_0}{2\pi i \alpha} \frac{F^+(\bar{\alpha})}{F_2^+(\bar{\alpha})} + sV^+ \frac{F^+(\bar{\alpha})}{F_2^+(\bar{\alpha})}$

Левая часть уравнения – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а правая часть – в верхней полуплоскости, кроме $\bar{\alpha} = 0$, где она имеет полюс первого порядка. Вычитаем из обеих сторон главную часть Лорановского разложения

функции $\frac{C_0}{2\pi i \alpha} \frac{F^+(\bar{\alpha})}{F_2^+(\bar{\alpha})}$ в этой точке и получаем [2,3]

$$k\sigma_{yy}^- \frac{F_2^-(\bar{\alpha})}{F^-(\bar{\alpha})} - \frac{C_0}{2\pi i \alpha} \frac{F^+(0)}{F_2^+(0)} = \frac{C_0}{2\pi i \alpha} \frac{F^+(\bar{\alpha})}{F_2^+(\alpha)} - \frac{C_0}{2\pi i \alpha} \frac{F^+(0)}{F_2^+(0)} + sV^+ \frac{F^+(\bar{\alpha})}{F_2^+(\alpha)} \quad (1.10)$$

Так как точки $-\omega/a$, $-\omega/b$, $-\omega/c_R$ не принадлежат верхней полуплоскости плоскости $\bar{\alpha}$, то правая часть уравнения (1.10) представляет собой функцию аналитическую в верхней полуплоскости, а левая часть того же уравнения – в нижней полуплоскости. По принципу непрерывного продолжения можно утверждать, что левая и правая части этого уравнения являются аналитическими продолжениями одна другой. Остается выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической во всей плоскости $\bar{\alpha}$ в бесконечно удаленной точке. Используя теорему [2], нетрудно показать, что аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Тогда, в силу теоремы Лиувилля, она тождественно равна нулю во всей плоскости $\bar{\alpha}$,

$$k\sigma_{yy}^- \frac{F_2^-(\bar{\alpha})}{F^-(\bar{\alpha})} - \frac{C_0}{2\pi i \alpha} \frac{F^+(0)}{F_2^+(0)} = \frac{C_0}{2\pi i \alpha} \frac{F^+(\bar{\alpha})}{F_2^+(\alpha)} - \frac{C_0}{2\pi i \alpha} \frac{F^+(0)}{F_2^+(0)} + sV^+ \frac{F^+(\bar{\alpha})}{F_2^+(\alpha)} = 0 \quad (1.11)$$

Из (1.11) получаем

$$\sigma_{yy}^- = \frac{C_0}{2\pi i \alpha} \frac{F^+(0)}{F_2^+(0)} \frac{F^-(\bar{\alpha})}{F_2^-(\alpha)}$$

где $F^+(0) = F^-(0) = \sqrt{\frac{a^3/b^3}{2(a^2/b^2 - 1)}}$, $F_2^+(0) = [1 - 1/\rho k a] \frac{a^5/b^4}{2G^-(0)(a^2/b^2 - 1)\sqrt{a/b}\alpha_1^0\alpha_2^0\omega}$

Сделав обратные преобразования Лапласа и Фурье и переходя к безразмерным переменным $\bar{\alpha} = \alpha\omega/a$; $\bar{\zeta} = \zeta\omega/a$, можно получить решение (1.5) в форме Смирнова-Соболева [3], при $y = 0$, $x > 0$

$$\sigma_{yy} = -2 \operatorname{Re} \frac{C_0}{2\pi a t i} \frac{F^+(0)}{F_2^+(0)} \frac{F^-(at/x)}{F_2^-(at/x)} \quad (1.12)$$

где

$$F^-(at/x) = \frac{a/c_R - at/x}{\sqrt{1 - at/x}\sqrt{a/b - at/x}} \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_1^{a/b} \operatorname{arctg} \frac{4\zeta^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \sqrt{a^2/b^2 - \zeta^2}}{(a^2/b^2 - 2\zeta^2)^2} \frac{d\zeta}{\zeta - at/x} \right]$$

$$F_2^-(at/x) = \frac{G^-(at/x)(at/x - \alpha_1^0)(at/x - \alpha_2^0)}{a\sqrt{a/b - at/x}\sqrt{1 - at/x}} \quad (1.13)$$

В формуле $F_2^+(0)$ подставлено $\omega = 1$.

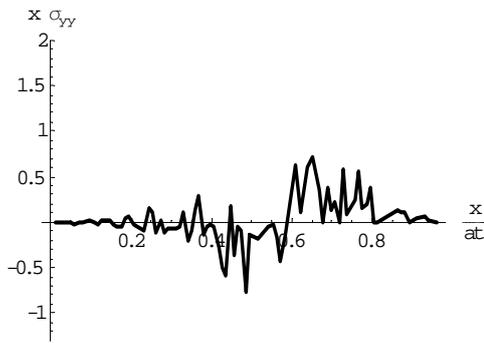
Из формулы (1.12) видно, что особенности при $x = 0$ нет.

При $x = 0$, $k \neq 0$ σ_{yy} конечно около края штампа, тем не менее, применимость полученного по линейной теории упругости решения может нарушаться при $\sigma_{yy} \geq \sigma_s$, где σ_s есть предел перехода в неупругое состояние. Чтобы выяснить, для каких приложенных перемещений C_0 это будет, на полуоси $x > 0$ сделаны расчёты

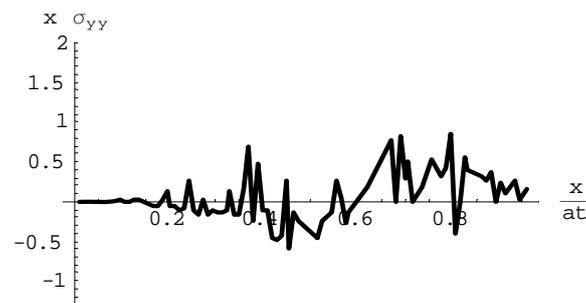
интегралов в $\frac{C_0}{\pi a t} \operatorname{Re} i \frac{F^+(0) F^-(at/x)}{F_2^+(0) F_2^-(at/x)}$ и результаты приведены на графике для

$0.01 < x/at < 0.9606$, $C_0/\pi a = 0.6$

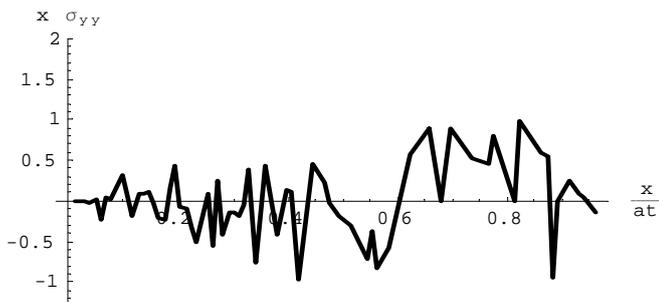
а) $ak\rho = 0.4$ $\alpha_1^0 = 5.20618i$, $\alpha_2^0 = 0.998188$,



б) $ak\rho = 0.6$, $\alpha_1^0 = 3.07749 i$, $\alpha_2^0 = 0.993729$



в) $ak\rho = 0.8$, $\alpha_1^0 = 11.7915 i$, $\alpha_2^0 = 0.97917$



Теперь рассмотрим частный случай, когда $k = 0$

$$\sigma_{yy} = 0, x < 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = C_0 H(x) \delta(t), \quad x > 0 \quad (1.14)$$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Аналогично получим решение (1.14) в виде

$$\sigma_{yy} = 2\rho a \frac{C_0}{\pi t} (a^2/b^2 - 1) \sqrt{\frac{a^5}{2b^3(a^2 - b^2)}} \frac{b^4}{a^4} \operatorname{Re} \frac{F^-(at/x) \sqrt{x - bt}}{i\sqrt{x}} \quad (1.15)$$

т. е. имеем известную особенность.

2.1. В этом параграфе рассмотрена следующая сингулярная граничная задача ($y = 0$):

$$\sigma_{xy} = 0, \quad x < 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + k\sigma_{xy} = C_0 H(x) \delta(t), \quad x > 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

для которой получено уравнение Винера-Хопфа следующего вида:

$$\sigma_{xy}^- k \left(1 + \frac{s\omega^2 \bar{\beta}_2}{k\rho b^4 iR(\bar{\alpha})} \right) = \frac{C_0}{2\pi i \bar{\alpha}} + sU^+ \quad (2.2)$$

$$\sigma_{xy}^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \bar{\sigma}_{xy} \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx, \quad U^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \bar{U} \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx$$

Для решения уравнения (2.2) введем функцию

$$F_4(\bar{\alpha}) = \left(R(\bar{\alpha}) - \omega^3 \bar{\beta}_2 / k\rho b^4 \right) \frac{1}{2\omega^2 (1/b^2 - 1/a^2) \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2} \quad (2.3)$$

$$F_4(\bar{\alpha}) \rightarrow 1 \text{ при } \bar{\alpha} \rightarrow \infty.$$

Эта функция имеет шесть нулей, которые обозначим через $\frac{\omega}{a} \alpha_1^0, \frac{\omega}{a} \alpha_1^0, \frac{\omega}{a} \alpha_2^0,$

$\frac{\omega}{a} \alpha_2^0, \frac{\omega}{a} \alpha_3^0, \frac{\omega}{a} \alpha_3^0$. Для факторизации функции $F_4(\bar{\alpha})$ введем функцию

$$F_5(\bar{\alpha}) = F_4(\bar{\alpha}) \frac{(\omega/a - \bar{\alpha})(\omega/a + \bar{\alpha})^5}{\left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{a} \alpha_1^0\right) \left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{a} \alpha_2^0\right) \left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{a} \alpha_1^0\right) \left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{a} \alpha_2^0\right) \left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{a} \alpha_3^0\right) \left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{a} \alpha_3^0\right)} \quad (2.4)$$

$$F_5(\bar{\alpha}) \rightarrow 1 \text{ при } \bar{\alpha} \rightarrow \infty.$$

Функция $F_5(\bar{\alpha})$ не имеет нулей во всей комплексной плоскости $\bar{\alpha}$ и известным методом [2] можно представить

$$F_5(\bar{\alpha}) = F_5^+(\bar{\alpha}) F_5^-(\bar{\alpha}) \quad (2.5)$$

Сделав обратные преобразования Лапласа и Фурье и переходя к безразмерным переменным $\bar{\alpha} = \alpha\omega/a; \bar{\zeta} = \zeta\omega/a$, можно получить решение (2.2) в виде Смирнова-Соболева [3], при $x = 0, k \neq 0$

$$\sigma_{xy} = \frac{C_0}{\pi k a t} \cdot \frac{\sqrt{2(a^2/b^2 - 1)}}{(1 - 1/k\rho b) a^2 / b^2} \operatorname{Re} \frac{G_1^-(0) \alpha_1^0 \alpha_2^0 \alpha_3^0 (a/c_R - at/x)}{i G_1^-(at/x) (at/x - \alpha_1^0) (at/x - \alpha_2^0) (at/x - \alpha_3^0)} \times \exp \left[- \int_1^{a/b} \operatorname{arctg} \frac{4\zeta^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \sqrt{a^2/b^2 - \zeta^2}}{(a^2/b^2 - 2\zeta^2)^2} \frac{d\zeta}{\zeta - at/x} \right] \quad (2.6)$$

где

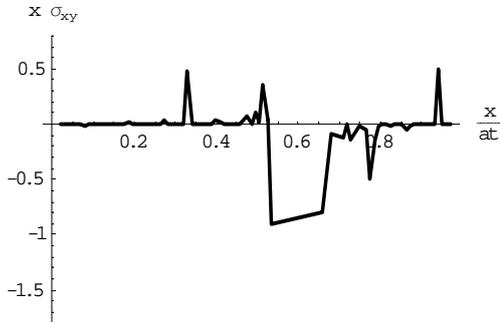
$$G_1^-(at/x) = \text{Exp} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_1^{a/b} \text{arctg} \frac{4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{a^2/b^2 - \zeta^2}}{(a^2/b^2 - 2\zeta^2)^2 - \sqrt{a^2/b^2 - \zeta^2}} (\text{kap})^{-1} a^4/b^4 \frac{d\zeta}{\zeta - at/x} + \frac{1}{\pi} \int_{a/b}^{\infty} \text{arctg} \frac{(\rho \text{ka})^{-1} \sqrt{\zeta^2 - a^2/b^2} a^4/b^4}{(a^2/b^2 - 2\zeta^2)^2 - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{\zeta^2 - a^2/b^2}} \frac{d\zeta}{\zeta - at/x} \right\}$$

Из формулы (2.6) видно, что особенности при $x = 0$ нет.

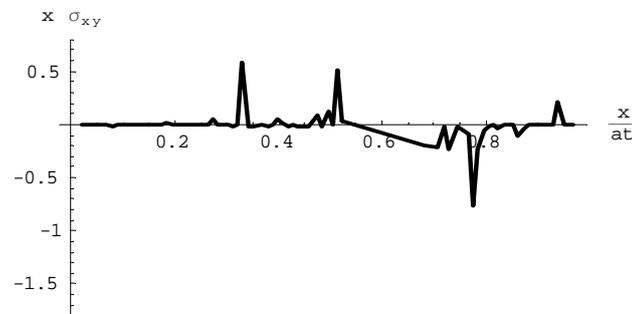
Сделаны расчеты интегралов в $x\sigma_{xy}$ и результаты приведены на графиках для

$$0.02 < x/at < 0.9706, C_0/a = 0.6$$

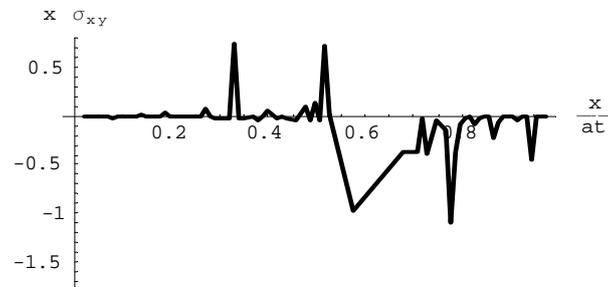
а) $ak\rho = 0.4, \alpha_1^0 = 5.40389 i, \alpha_2^0 = -1.71871 + 0.0247045 i, \alpha_3^0 = -1.71871 + 0.0247045 i$



б) $ak\rho = 0.6, \alpha_1^0 = 3.42057 i, \alpha_2^0 = -1.72191 + 0.0466494 i, \alpha_3^0 = 1.72191 + 0.0466494 i$



в) $ak\rho = 0.8, \alpha_1^0 = 2.37734 i, \alpha_2^0 = 1.73228 + 0.0663149 i, \alpha_3^0 = -1.73228 + 0.0663149 i$



2.2 Теперь рассмотрим частный случай, когда $k = 0$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad x < 0 \quad \frac{\partial U}{\partial t} = C_0 H(x) \delta(t), \quad x > 0 \quad (2.7)$$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Аналогично получим решение в виде

$$\sigma_{yy} = 2\sqrt{2}\rho a \frac{C_0}{\pi t} \sqrt{a^2/b^2 - 1} b^2/a^2 \sqrt{b/a} \operatorname{Re} \frac{F^-(at/x)\sqrt{x-at}}{i\sqrt{x}} \quad (2.8)$$

т. е. имеем известную особенность.

Автор благодарит д. ф.-м. н., профессора А. Н. Мартиросяна за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Варданян С.В., Мартиросян Г.А., Костандян К.С., Динунц А.С. Нестационарные задачи о трещинах и штампах / Вестник, Ереван: 2007, с.106-119.
2. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ. 1962. 278 с.
3. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред //Ереван: «Зангак-97». 2007. 244с.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 274с.
5. Горячева И.Р. Механика фракционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 480с.

Сведения об авторе:

Динунц А. С. – преподаватель кафедры математики Горисского гос.университета

E-mail: dinunts2007@rambler.ru

Поступила в редакцию 12.01.2010

УДК 539.3, 539.3:537.228.1

**ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ И ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ
САРГСЯН А.М.**

Ключевые слова: упругость, электроупругость, анизотропия, принцип соответствия.
Key words: elasticity, electroelasticity, anisotropy, the principle of conformity.

Սարգսյան Ա.Մ.

Համապատասխանության սկզբունքը առաձգականության և էլեկտրաառաձգականության տեսության խնդիրներում

Համաձայն պարզված ու հաստատված սկզբունքի, եթե հայտնի է ընդհանրացված հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող ընդհանուր տեսքի անիզոտրոպիայով օժտված համասեռ պրիզմաձև մարմնի առաձգականության տեսության խնդրի լուծումը, ապա ընդհանրարացված հարթ լարվածային վիճակում գտնվող բարակ պլաստիկայի համար (որի միջին հարթությունը համեմատվում է առաձգական մարմնի ընդլայնական կտրվածքի հետ) էլեկտրաառաձգականության խնդիրը կարելի է ստանալ առաձգական մարմնի դեֆորմացիայի բերված գործակիցների համապատասխան փոփոխությամբ՝ պեգալէկտրիկ մարմնի առաձգական հաստատուններով, դիէլէկտրիկ ընկալունակություններով և պեգամոդուլներով: Առաձգական և էլէկտրաառաձգական գործակիցների միջև ստացված են անհրաժեշտ առնչություններ, որոնք հնարավորություն են տալիս լուծել նաև հակառակ խնդիրը՝ էլէկտրաառաձգական խնդրի լուծումից ստանալ առաձգական խնդրի լուծումը:

Sargsyan A.M.

The principle of conformity in the problems of elasticity theory and elektroelasticity

According to the established principle, if the solution of the elasticity theory problem for a homogeneous prismatic body, having anisotropy of the general form and being in the state of generalized plane deformation is known, then the solution of the elektroelasticity problem for a thin piezoelectric plate (the mean plane of which coincides with the cross-section of the elastic body), being in plane stress state, if is possible with the corresponding change of the derived deformation's coefficients of the elastic material on the elasticity coefficients, dielectric sensitivities and piezoelectric modules of the piezomaterial. The necessary correlations, between these coefficients, giving possibility to solve the inverse problem as well, i.e. to have the solution of elastic problem from the solution of the elektroelasticity problem.

Согласно установленному принципу, если известно решение задачи теории упругости для однородного призматического тела, обладающего анизотропией общего вида и находящегося в состоянии обобщенной плоской деформации, то решение задачи электроупругости для тонкой пьезоэлектрической пластинки (срединная плоскость которого совпадает с поперечным сечением упругого тела), находящейся в обобщенном плоском напряженном состоянии, можно получить соответствующей заменой приведенных коэффициентов деформации упругого материала на коэффициенты упругости, диэлектрической восприимчивости и пьезоэлектрические модули пьезоматериала. Получены необходимые соотношения между этими коэффициентами, дающие возможность для решения также обратной задачи, т.е. из решений задачи электроупругости получить решение упругой задачи.

Подобие многих установившихся плоских полей различной физической природы (механических, тепловых, диффузионных, фильтрационных, электрических, магнитных и т. д.) и их характеристик (напряжения, поток тепла, поток вещества, плотность расхода жидкости, напряжения электрических и магнитных полей и т.д.) общеизвестны [1-4]. Например, задача о кручении бруса полностью отождествляется с задачей равновесия гибкой мембраны, равномерно натянутой на жесткий контур, совпадающий с контуром поперечного сечения бруса, и нагруженный равномерным давлением (мембранная аналогия Прандтля). В точках концентрации напряжений более точные результаты можно получить из аналогии с листовым проводником.

Существуют также несколько аналогий между задачами о кручении и гидростатическими задачами о движении жидкости в трубах [1].

Таблица подобия некоторых вышеуказанных полей и их характеристик приведена, например, в книге [2].

В работах [4,5] исследован характер распределения установившихся плоских физических полей и поведения их характеристик в окрестности края поверхности контакта кусочно однородного изотропного и анизотропного клина.

Во всех перечисленных выше исследованиях речь идет о подобии несвязанных физических полей.

В данной работе установлено, что задачи теории упругости анизотропного тела и задачи электроупругости также подобны, откуда и название статьи.

Как известно, решения задач теории упругости для однородного тела, обладающего прямолинейной анизотропией общего вида, ограниченного какой-либо цилиндрической поверхностью (или плоскостями) и находящегося в состоянии обобщенной плоской деформации, приводятся к интегрированию систем линейных связанных дифференциальных уравнений [6]

$$L_4^y F(x, y) + L_3^y \psi(x, y) = 0, \quad L_3^y F(x, y) + L_2^y \psi(x, y) = 0 \quad (1)$$

с соответствующими граничными условиями на боковой поверхности тела, образующая которого параллельна оси z .

В (1) L_4^y, L_3^y, L_2^y – дифференциальные операторы четвертого, третьего и второго порядков

$$\begin{aligned} L_4^y &= \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{2b} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{6b}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{1b} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L_3^y &= -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_2^y &= \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3} a_{j3} / a_{33} \end{aligned} \quad (2)$$

где β_{ij} – приведенные коэффициенты деформации упругого материала, a_{ij} – коэффициенты деформации.

Функции напряжений $F(x, y)$ и $\psi(x, y)$, с помощью которых определяются напряжения

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

тождественно удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Если на боковой поверхности (на контуре поперечного сечения) цилиндрического тела заданы внешние усилия X_n, Y_n, Z_n , то граничные условия имеют вид [6,7]

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\int_0^s Y_n ds, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^s X_n ds, \quad \psi = \int_0^s Z_n ds \quad (5)$$

где интегралы берутся по дуге контура поперечного сечения цилиндрического тела от некоторой начальной точки до переменной точки s .

Когда на контуре поперечного сечения цилиндрического тела известны перемещения $u_1(s), v_1(s)$ и $w_1(s)$, то граничные условия запишутся в виде

$$u(s) = u_1(s), \quad v(s) = v_1(s), \quad w(s) = w_1(s) \quad (6)$$

Известно также, что для решения задач электроупругости тонкой пьезоэлектрической пластинки, имеющей в каждой точке плоскость материальной симметрии, параллельную срединной плоскости пластинки (плоскость xu) и находящуюся в обобщенном плоском напряженном состоянии, имеем систему линейных связанных дифференциальных уравнений

$$4\pi L_4 \tilde{F}(x, y) - L_3 \tilde{\Psi}(x, y) = 0, \quad L_3 \tilde{F}(x, y) + L_2 \tilde{\Psi}(x, y) = 0 \quad (1')$$

и соответствующие механические и электрические граничные условия [8,9].

Дифференциальные операторы \tilde{L}_k ($k = 2, 3, 4$) в (1') имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{L}_4 &= s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ \tilde{L}_3 &= -g_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12} + g_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{21} + g_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ \tilde{L}_2 &= \eta_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\eta_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \eta_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2')$$

где s_{ij} – упругие коэффициенты пластинки при отсутствии электрической индукции, η_{ij} – диэлектрические восприимчивости, измеренные при постоянных механических напряжениях, g_{ij} – пьезоэлектрические модули.

Функции напряжений $\tilde{F}(x, y)$ и индукции $\tilde{\Psi}(x, y)$, с помощью которых определяются осредненные по толщине напряжения и компоненты вектора электрической индукции

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2}, \quad \tilde{\sigma}_y = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = -\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x \partial y}, \quad D_1 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y}, \quad D_2 = -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x} \quad (3')$$

тождественно удовлетворяют первым двум уравнениям (4) и уравнению электростатики

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} = 0 \quad (4')$$

Пусть на боковой поверхности цилиндрического тела (той же геометрии, что в упругой задаче) заданы осредненные значения внешних усилий \tilde{X}_n, \tilde{Y}_n и распределение заряда q_s . Тогда граничные условия задаются в виде [8,9]

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = -\int_0^s \tilde{Y}_n ds, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = \int_0^s \tilde{X}_n ds, \quad \tilde{\Psi} = \int_0^s q_s ds \quad (5')$$

Если на контуре поперечного сечения заданы осредненные значения перемещений $\tilde{u}_1(s)$ и $\tilde{v}_1(s)$ и электростатического потенциала $\tilde{U}_1(s)$, то граничные условия принимают вид

$$\tilde{u}(s) = \tilde{u}_1(s), \quad \tilde{v}(s) = \tilde{v}_1(s), \quad \tilde{U}(s) = \tilde{U}_1(s) \quad (6')$$

Введя обозначения

$$\tilde{L}_4 = L_4^*, \quad \tilde{L}_3 = -4\pi L_3^*, \quad \tilde{L}_2 = -4\pi L_2^*$$

и подставляя их в (1'), (2'), получим

$$L_4^* \tilde{F} + L_3^* \tilde{\Psi} = 0, \quad L_3^* F + L_2^* \tilde{\Psi} = 0 \quad (1'')$$

где

$$\begin{aligned} L_4^* &= s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L_3^* &= -\left(-\frac{g_{22}}{4\pi}\right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(-\frac{g_{12} + g_{26}}{4\pi}\right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \left(-\frac{g_{21} + g_{16}}{4\pi}\right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \left(-\frac{g_{11}}{4\pi}\right) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_2^* &= \left(-\frac{\eta_{22}}{4\pi}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\left(-\frac{\eta_{12}}{4\pi}\right) + \left(\frac{\eta_{11}}{-4\pi}\right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2'')$$

Сравнивая краевые задачи (1), (2), (5), (6) и (1''), (2''), (5'), (6'), легко установить принцип соответствия между математическими задачами теории упругости и электроупругости: если известно решение задач теории упругости для однородного призматического тела, обладающего анизотропией общего вида и находящегося в состоянии обобщенной плоской деформации, то решение задач электроупругости для тонкой пьезоэлектрической пластинки, находящейся в обобщенном плоском напряженном состоянии, получим заменой в упругой задаче

$$\begin{aligned} \beta_{22} \text{ на } s_{22}, \quad \beta_{26} \text{ на } s_{26}, \quad 2\beta_{12} + \beta_{66} \text{ на } 2s_{12} + s_{66}, \quad \beta_{16} \text{ на } s_{16}, \quad \beta_{11} \text{ на } s_{11} \\ \beta_{24} \text{ на } (-\eta_{22})/4\pi, \quad \beta_{45} \text{ на } (-\eta_{12})/4\pi, \quad \beta_{55} \text{ на } (-\eta_{11})/4\pi \\ \beta_{24} \text{ на } (-\eta_{12})/4\pi, \quad (\beta_{25} + \beta_{46}) \text{ на } (-g_{12} - g_{16})/4\pi \\ (\beta_{14} + \beta_{56}) \text{ на } (-g_{21} - g_{16})/4\pi \end{aligned} \quad (7)$$

Причем, в электроупругой задаче компоненты вектора электрической индукции D_1 и D_2 соответствуют напряжениям τ_{xz} и τ_{yz} в упругой задаче, а электростатический потенциал $\tilde{U}(x, y)$ – упругому перемещению $w(x, y)$.

Для иллюстрации полученного соответствия рассмотрим местное решение задачи теории упругости для призматического анизотропного клина с произвольным углом раствора θ_1 , на радиальных сторонах которого заданы внешние нагрузки.

Представляя решение уравнений (1) в виде [10]

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{j=1}^3 \left[A_j (x + \mu_j y)^{\lambda+1} + B_j (x + \bar{\mu}_j y)^{\lambda+1} \right] \\ \Psi(x, y) &= \sum_{j=1}^3 \left[f_j A_j (x + \mu_j y)^\lambda + \bar{f}_j B_j (x + \bar{\mu}_j y)^\lambda \right] \end{aligned} \quad (8)$$

и удовлетворяя однородным граничным условиям, для определения A_j, B_j получим однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3 &= 0 \\ A_1 \mu_1 + A_2 \mu_2 + A_3 \mu_3 + B_1 \bar{\mu}_1 + B_2 \bar{\mu}_2 + B_3 \bar{\mu}_3 &= 0 \\ A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + B_1 \bar{a}_1 + B_2 \bar{a}_2 + B_3 \bar{a}_3 &= 0 \\ A_1 \mu_1 a_1 + A_2 \mu_2 a_2 + A_3 \mu_3 a_3 + B_1 \bar{\mu}_1 \bar{a}_1 + B_2 \bar{\mu}_2 \bar{a}_2 + B_3 \bar{\mu}_3 \bar{a}_3 &= 0 \\ A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 + B_1 \bar{f}_1 + B_2 \bar{f}_2 + B_3 \bar{f}_3 &= 0 \\ A_1 f_1 a_1 + A_2 f_2 a_2 + A_3 f_3 a_3 + B_1 \bar{f}_1 \bar{a}_1 + B_2 \bar{f}_2 \bar{a}_2 + B_3 \bar{f}_3 \bar{a}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из условий существования нетривиального решения системы (9) получим трансцендентное уравнение для определения параметра λ

$$\Delta(\lambda) = 0 \quad (10)$$

В (8) – (10) λ – параметр, определяющий степень сингулярности напряжений в окрестности ребра трехмерного клина, $\mu_j = \sigma_j + j\tau_j$ и $\bar{\mu}_j = \sigma_j - j\tau_j$ – корни алгебраического уравнения

$$l_4^y(\mu)l_2^y(\mu) - l_3^y(\mu)^y l_3(\mu) = 0 \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} l_4^y(\mu) &= \beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12}\beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22} \\ l_3^y(\mu) &= \beta_{15}\mu^3 - (\beta_{14} + \beta_{56})\mu^2 + (\beta_{25} + \beta_{46})\mu - \beta_{24} \\ l_2^y(\mu) &= \beta_{55}\mu^2 - 2\beta_{45}\mu + \beta_{44} \end{aligned} \quad (11')$$

$$f_j = -l_3^y(\mu_j)/l_2^y(\mu_j), \quad \bar{f}_j = -l_3^y(\bar{\mu}_j)/l_2^y(\bar{\mu}_j)$$

$$a_j = (\cos \theta_1 + \mu_j \sin \theta_1)^\lambda, \quad \bar{a}_j = (\cos \theta_1 + \bar{\mu}_j \sin \theta_1)^\lambda$$

Переходя в (3) и (8) к полярной системе координат $r, \theta (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$, легко исследовать поведение напряжений в окрестности ребра анизотропного клина.

Если уравнение (10) имеет корни в полосе $0 < \text{Re} \lambda < 1$ комплексной плоскости λ , то напряжения неограниченно возрастают при $r \rightarrow 0$. Порядок особенности при этом равен $|\text{Re} \lambda_1 - 1|$, где λ_1 – корень уравнения (10) с наименьшей положительной действительной частью в полосе $0 < \text{Re} \lambda < 1$.

Теперь, исходя из принципа соответствия, с помощью (8) – (11') получим местное решение задачи электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина, на гранях которого осуществляются граничные условия (5'). Решение этой задачи было получено ранее в работе [11].

Произведя в уравнении (11) и обозначениях (11') замену (7), будем иметь

$$4\pi l_4^*(\mu)l_2^*(\mu) + l_3^*(\mu)l_3(\mu) = 0 \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} l_4^*(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22} \\ l_3^*(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22} \\ l_2^*(\mu) &= \eta_{11}\mu^2 - 2\eta_{12}\mu + \eta_{22} \end{aligned} \quad (12')$$

$$f_j^* = -l_3^*(\mu_{*j})/l_2^*(\mu_{*j}), \quad \bar{f}_j^* = -l_3^*(\bar{\mu}_{*j})/l_2^*(\bar{\mu}_{*j})$$

$$a_j^* = (\cos \theta_1 + \mu_{*j} \sin \theta_1)^\lambda, \quad \bar{a}_j^* = (\cos \theta_1 + \bar{\mu}_{*j} \sin \theta_1)^\lambda$$

В формулах (8), уравнениях (9), (10) и в обозначениях (12') – μ_{*j} и $\bar{\mu}_{*j}$ в данном случае являются корнями уже уравнения (12).

Сравнивая соотношения (8) – (10) (после замены (7)) и (12), (12') с соотношениями (6) – (10) работы [11], замечаем их полное совпадение, что подтверждает действительность обнаруженного принципа соответствия.

Отмеченное соответствие, конечно, не уменьшает в каком-либо смысле математических трудностей при решении задач электроупругости или упругости.

Однако, полученное соответствие с познавательной точки зрения имеет определенное значение, так как оно дает возможность представить влияние пьезоэлектрических модулей и диэлектрических восприимчивостей с помощью влияния соответствующей системы упругих констант, которые легче поддаются физической интерпретации [12]. И, к тому же, из многих известных решений задач теории упругости легко получить соответствующие решения электроупругой задачи и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Гудьер Д.Ж. Теория упругости М.: Наука, 1975. 575 с.
2. Будаков Б.М. и др. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 668 с.
3. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338с.
4. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. // Докл. АН АрмССР. 1988. № 4. С.161-165.
5. Саргсян А.М. О влиянии граничных условий на малонапряженность антиплоской задачи кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина. // Изв. НАН Армении, Механика. 2002. Т.55. №1. С.17-22.
6. Лехницкий С.Е. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
7. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам // МТТ. 1979. № 6. С.33-42.
8. Вековищева И.А. Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. // ПМ. 1975. № 2. С. 85- 89.
9. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. //ПМ. 1975. № 5. С.45-53.
10. Алексанян Р.К. Об одном классе решений уравнений плоской теории упругости анизотропного тела. // Докл. АН АрмССР. 1975. № 4. С. 219-224.
11. Саргсян А.М. Поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки пьезоэлектрического клина при обобщенном плоском напряженном состоянии. //Докл. НАН Армении. 1999. № 1. С. 35-39.
12. Рабинович А.Л. Об упругих постоянных и прочности авиационных материалов. // Тр. ЦАГИ. 1946. № 582. С.1-56.

Сведения об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич – канд физ.-мат.наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24^б

Тел.: (+37410) 52-48-90

Поступила в редакцию 08.09.2009

УДК 534.111

**ОБ УТОЧНЕНИИ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННОЙ
ЧАСТОТЫ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО МАЯТНИКА
САРКИСЯН В. К.**

Ключевые слова: горизонтальный маятник, собственная частота.
Keywords: horizontal pendulum, intrinsic frequency.

Մարզայան Վ. Կ.

Հորիզոնական ճոճանակի սեփական հաճախության որոշման բանաձևի ճշգրտման մասին

Էներգիայի հավասարման օգտագործումով որոշված է ճոճանակի սեփական հաճախությունը: Կոնկրետ ճոճանակի համար հաշվարկված է սեփական հաճախությունը: Փորձով հաստատված է բանաձևի ճշտությունը: Կատարված է ստացված բանաձևի համեմատությունը գրականության մեջ բերված բանաձևերի հետ:

Sarkisyan V. K.

About clarification of the formula for determination of intrinsic frequency of horizontal pendulum

Using the equation the intrinsic frequency of pendulum is decided. Intrinsic frequency is calculated for a certain pendulum. The verity of formula is confirmed by experiment. The deduced is compared with formulas brought in literature.

Выведена формула для определения собственной частоты горизонтального маятника с применением уравнения энергии. Произведен расчет собственной частоты конкретного маятника. Доказано, что экспериментальные результаты совпадают с расчетными данными в пределах корректности эксперимента. Проведено сравнение с формулами, приведенными в литературе.

Известно, что в сейсмологии горизонтальный маятник применяется для измерения вертикальных колебаний почвы. Выбором собственной частоты маятника подбирается низкий предел частот измеряемых колебаний. В теории сейсмометрии доказывается, что маятник может с достаточной точностью измерять амплитуду колебания, если частота измеряемых колебаний больше собственной частоты маятника более чем в 2 раза. Поэтому, разработка маятника с возможно низкой собственной частотой является решающим фактором для измерения сейсмических колебаний. Диапазон частот сейсмических колебаний – 1...20 Гц для инженерной сейсмологии, и начиная с 0,01 Гц – для региональной сейсмологии. Таким образом, для применения в инженерной сейсмологии необходимо иметь сейсмометр с собственной частотой маятника 0,5 Гц.

Известно, что собственная частота маятника зависит от длины и массы маятника. Для уменьшения размеров и веса сейсмометра, в сейсмометрии используют астатический маятник [5], причем астатическую силу создает пружина, соединенная с маятником под некоторым углом, одновременно уравновешивая вес маятника (фиг. 1).

Известна формула для определения собственной частоты горизонтального маятника [1]. При применении этой формулы в конкретном инженерном расчете сейсмометра получаются сомнительные результаты, а полученные результаты экспериментально не подтверждаются.

Обсудим формулы горизонтального маятника, приведенные в литературе. В литературе известна формула для определения собственной частоты горизонтального маятника ([1], стр.380):

$$p^2 = \frac{g}{l} \left[\frac{ka^2 \sin^2 \beta}{Mgl} - \left(1 - \frac{a \cos \beta}{Z} \operatorname{ctg} \beta \right) \right] \quad (1)$$

Буквенные обозначения формулы см. ниже.

Не вникая в подробности вывода формулы и не проводя её анализа, а имея в виду только окончательный результат (1), который предлагается для практического инженерного применения, заметим недостатки формулы:

– почему собственная частота маятника зависит от полной длины Z , уравновешивающей пружины?

По сути, пружина на процесс колебаний может влиять только своей жесткостью. Одинаковую жесткость могут иметь пружины различных размеров.

– почему при $\beta = 0^\circ$ p стремится к бесконечности?

По сути, при $\beta = 0^\circ$ собственная частота маятника должна уменьшаться до нуля ввиду увеличения астазирующей силы.

Обсуждая формулу, приведенную в другой литературе ([2], стр. 112)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgl}} = T_0 \sqrt{\operatorname{tg} \gamma} \quad (2)$$

(угол γ – это угол между осью маятника и прямой, соединяющей центр качания маятника с точкой закрепления пружины с корпусом прибора), увидим, что при $\gamma = 0$ $T = 0$ и при $\gamma = 90^\circ$ T стремится к бесконечности, что неверно.

Кроме того, на собственную частоту маятника не может влиять место (точка) закрепления пружины с корпусом прибора.

Как показано выше, имеются непонятные и необъяснимые результаты, которые ставят под сомнение применение формул (1) и (2) в практических расчетах. Это вынудило автора, для разработки нового сейсмометра вновь решить задачу определения собственной частоты горизонтального маятника, когда уравновешивающая пружина действует под некоторым углом.

Уравновешивающую вес маятника пружина действует на плечо l маятника под некоторым углом β (фиг.1).

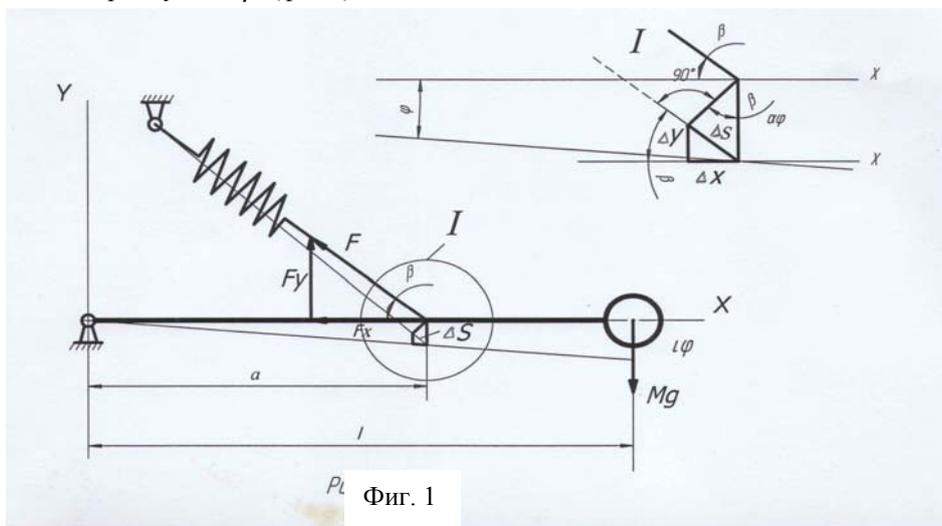


Рис. Фиг. 1

Силу растяжения пружины F можно разложить на две составляющие по оси x и y . Составляющая F_y , действуя на плечо длиной a , уравнивает момент массы M маятника. Составляющая же F_x создает астатическую силу. Увеличивая астатическую силу, можно снизить собственную частоту маятника.

С применением закона сохранения энергии для определения собственной частоты горизонтального маятника [3] удобно и просто решать поставленную задачу.

Действительно, пренебрегая массой пружины и учитывая только массу подвешенного тела маятника, находим кинетическую энергию системы в процессе колебаний

$$M v^2/2 = M \left(\frac{ld\varphi}{dt} \right)^2 / 2 \quad (3)$$

где M – масса тела, v – линейная скорость массы, $d\varphi/dt$ – угловая скорость, маятника, l – длина маятника.

Потенциальная энергия системы в данном случае состоит из потенциальной энергии деформации пружины и потенциальной энергии груза, зависящей от его положения. Как доказано в [3], полное изменение потенциальной энергии системы равно:

$$k\Delta S^2/2 \quad (4)$$

k – жесткость пружины, ΔS – полная деформация пружины (фиг.1)

Имея выражения (3), (4) и пренебрегая рассеянием энергии, получим уравнение энергии:

$$M \left(ld\varphi/dt \right)^2 / 2 + k \Delta S^2 / 2 = \text{const} \quad (5)$$

Значение постоянной в правой части этого уравнения определяется начальными условиями. В начальный момент $t = 0$ угловое перемещение груза равно φ_0 , начальная скорость равна нулю. При $\varphi = 0$, $\Delta S = 0$ скорость максимальна. Из уравнения (5) получаем:

$$Ml^2\varphi_0^2 p^2 / 2 = k\Delta S^2 / 2 \quad (6)$$

где p – собственная круговая частота маятника и $\varphi = \varphi_0 \sin pt$.

Условие (6), в сущности, означает, что максимальная кинетическая энергия равна максимальной потенциальной энергии.

Заметим, что (фиг.1) $\Delta S = a\varphi \sin \beta$, где ΔS – полная деформация пружины. Учитывая, что движение описывается уравнением $\varphi = \varphi_0 \sin pt$, из уравнения (6) получаем:

$$Ml^2\varphi_0^2 p^2 = ka^2\varphi_0^2 \sin^2 \beta$$

или

$$p^2 = ka^2 \sin^2 \beta / J \quad (7)$$

где $J = MI^2$ – момент инерции массы M относительно центра качания.

Анализируя формулу (7), заметим, что собственная частота маятника при $\beta = 90^\circ$ равна:

$$p^2 = ka^2/J$$

что совпадает с формулой, приведённой в литературе [3] и [4].

По мере уменьшения угла β от 90° до нуля, собственная частота будет уменьшаться ввиду увеличения астазирующей силы. Формула (7) не противоречит физическому смыслу колебания горизонтального маятника, и расчеты по этой формуле соответствуют экспериментальным данным с соответствующей погрешностью определения конструктивных размеров маятника.

Для конкретного маятника со следующими размерами - $k = 2000 \cdot \text{Н/м}$, $J = 20,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^2$, $a = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ при $\beta = 26^\circ$, теоретически, для собственного периода маятника получается $T = 2,3 \text{ с}$, экспериментально – $T = 2,2 \text{ с}$.

Заметим, что в формуле (7) угол β практически не может равняться нулю, ибо при этом невозможно обеспечить уравнивание маятника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саваренский Е.Ф., Кирнс Д.П. Элементы сейсмологии и сейсмометрии. М.: Техноиздат, 1955. 531 с.
2. Гевондян Т.А., Киселев Л.Т. Приборы для измерения и регистрации колебаний. М.: Машгиз, 1962. 459 с.
3. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. М.: Изд. «Высшая школа». 1966.
4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 442 с.
5. Николаи Е.А Теоретическая механика. Ч.2. М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1957.

Сведения об авторе:

Саркисян Ваагн Каренович,

Аспирант Института геофизики и инженерной сейсмологии им. А.Г.Назарова НАН Армении

E-mail: vahagn_sargsyan@rocketmail.com

Поступила в редакцию 06.02.2009

УДК 539

**К МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ВЕСЬМА ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК
АМБАРЦУМЯН С.А., БЕЛУБЕКЯН М.В.**

Ключевые слова: пологая оболочка, микровращение, изгиб, колебание
Keywords: shallow shell, microrotation, bending, vibration

Համաբարձումյան Ս.Ա., Բելուբեկյան Մ.Վ.

Փոքր կորություն ունեցող թաղանթների միկրոբևեռ տեսության վերաբերյալ

Կիրիով-Լյավի վարկածի և պսևդո Կոսսերայի միջավայրի տեսության հիման վրա առաջարկված է փոքր կորություն ունեցող թաղանթների տեսություն:

Հետազոտված է փոքր կորություն ունեցող սֆերիկ թաղանթի ծոման և տատանումների խնդիրները: Որոշված է թաղանթի հաստության չափը, որի դեպքում միկրոպտույտները էական են:

Ambartsumian S.A., Belubekyan M.V.

On micropolar theory of shallow shells

The simplified theory of the shallow shells is suggested on the base of the Kirchhof-Love hypothesis and pseudo-Cosserat medium. The bending and vibrations problem of the shallow spherical shell is investigated. The value of shell small thickness is determined, when microrotational are essential.

Предлагается теория весьма пологих оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа-Лява и среды псевдо Коссера. Исследуется задача изгиба и колебания пологой сферической оболочки. Устанавливается порядок малости толщины оболочки, при которой учет микровращений имеет существенное значение.

Рассматривается вопрос построения микрополярной технической теории весьма пологих тонких оболочек на основании общей теории оболочек [1,2] и теории псевдоконтинуума Коссера [3].

1. Теория строится на основании следующих гипотез и предположений:

- а) гипотеза недеформируемых нормалей Кирхгоффа –Лява [1,2,4];
- б) основные положения теории псевдоконтинуума Коссера, в предположении, что повороты в плоскостях, параллельных срединной поверхности, пренебрежительно малы и при дифференцировании ведут себя как постоянные [1];
- в) оболочка описывается в смешанной системе триортогональных координат α_i , где α_1 и α_2 – криволинейные координаты, совпадающие с направлениями главных кривизн срединной поверхности оболочки, α_3 – нормальная к ним прямолинейная координата;
- г) коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности оболочки k_i при дифференцировании ведут себя как постоянные [1,4];
- д) теория строится с точностью $1 \pm k_i \alpha_3 \approx 1$, и соответствующие коррективы, при очевидности, вводятся по ходу изложения.

2. Согласно принятым гипотезам и предположениям для перемещений какой-либо точки оболочки имеем [1,4]:

$$u_1 = u - \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \quad u_2 = v - \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \quad u_3 = w \quad (2.1)$$

где $u = u(\alpha_1, \alpha_2)$, $v = v(\alpha_1, \alpha_2)$ и $w = w(\alpha_1, \alpha_2)$ – продольные и поперечное перемещения срединной поверхности оболочки.

С учетом принятых предположений и (2.1) для поворотов имеем [3,5]

$$\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \quad \omega_2 = -\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \quad \omega_3 \approx 0 \quad (2.2)$$

Для компонент несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения получим [3,6]:

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} - \alpha_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + k_1 w, \quad \gamma_{33} = 0 \quad (2.3)$$

$$\gamma_{22} = \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} - \alpha_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + k_2 w$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \alpha_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \alpha_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}$$

Далее

$$\chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \chi_{33} = 0$$

$$\chi_{13} = -k_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \quad \chi_{23} = k_2 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \quad \chi_{31} = 0 \quad (2.5)$$

$$\chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, \quad \chi_{21} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, \quad \chi_{32} = 0$$

Закон малых упругих деформаций имеет вид [3]

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \sigma_{ij}\lambda\gamma_{kk} \quad (2.6)$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ij} + \sigma_{ij}\beta\chi_{kk} \quad (2.7)$$

где σ_{ji} – силовые напряжения; μ_{ji} – моментные напряжения; $\mu = E/2(1 + \nu)$; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; $\lambda = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – новые упругие постоянные; σ_{ji} – символ Кронекера.

Согласно гипотезе Кирхгофа–Лява, пренебрегая нормальным напряжением σ_{33} из (2.6), для нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22} получим

$$\sigma_{11} = B\gamma_{11} + B_{12}\gamma_{22}, \quad \sigma_{22} = B\gamma_{22} + B_{12}\gamma_{11} \quad (2.8)$$

$$\text{где } B = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad B_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (2.9)$$

Для касательных напряжений σ_{12} и σ_{21} , учитывая, что $\delta_{ji} = 0$ при $i \neq j$, получим

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} \quad (2.10)$$

Из (2.7), согласно (2.5) и значению символа Кронекера $\delta_{ii} = 1$, для моментных напряжений μ_{ji} получим

$$\mu_{11} = (2\gamma + \beta)\chi_{11} + \beta\chi_{22}, \quad \mu_{22} = (2\gamma + \beta)\chi_{22} + \beta\chi_{11}, \quad \mu_{33} = 0 \quad (2.11)$$

а для остальных напряжений, естественно,

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ij} \quad (2.12)$$

Подставляя значения γ_{ji} и χ_{ji} , соответственно, из (2.3)–(2.5) в (2.8)–(2.12), для силовых и моментных напряжений получим:

$$\sigma_{11} = B \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + (Bk_1 + B_{12}k_2)w - \alpha_3 \left(B \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right) \quad (2.13)$$

$$\sigma_{22} = B \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + (Bk_2 + B_{12}k_1)w - \alpha_3 \left(B \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \right)$$

$$\sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right) + \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right) - 2\alpha_3 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \quad (2.14)$$

$$\sigma_{21} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} \right) + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} \right) - 2\alpha_3 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}$$

Остальные силовые напряжения при необходимости будут определяться из уравнений равновесия.

Далее имеем:

$$\mu_{11} = 2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mu_{22} = -2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mu_{33} = 0 \quad (2.15)$$

$$\mu_{12} = -(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \quad (2.16)$$

$$\mu_{21} = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} - (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}$$

$$\mu_{13} = -k_1(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \quad \mu_{31} = -k_1(\gamma - \varepsilon) \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \quad (2.17)$$

$$\mu_{23} = -k_2(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \quad \mu_{32} = k_2(\gamma - \varepsilon) \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}$$

Уравнения движения без учета объемных сил и объемных моментов имеют вид [1,3,6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \sigma_{31}) + k_1 \sigma_{13} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \sigma_{32}) + k_2 \sigma_{23} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \sigma_{33}) + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \alpha_2} - k_2 \sigma_{22} - k_1 \sigma_{11} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

а также

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \mu_{31}) + k_1 \mu_{13} + \sigma_{23} - \sigma_{32} &= J \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \mu_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \mu_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \mu_{32}) + k_1 \mu_{23} + \sigma_{31} - \sigma_{13} &= J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \mu_{33}) + \frac{\partial \mu_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial \alpha_2} - k_2 \mu_{22} - k_1 \mu_{11} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$H_1 = 1 + \alpha_3 k_1, \quad H_2 = 1 + k_2 \alpha_3 \quad (2.20)$$

ρ – плотность материала оболочки, J – динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении)

3. Пусть условия на внешних поверхностях оболочки ($\alpha_3 = \pm h/2$, h – толщина оболочки) таковы:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = Z^+, \quad \sigma_{31} = X^+, \quad \sigma_{32} = Y^+ \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \frac{h}{2} \\ \sigma_{33} = -Z^-, \quad \sigma_{31} = -X^-, \quad \sigma_{32} = -Y^- \quad \text{при} \quad \alpha_3 = -\frac{h}{2} \\ \mu_{33} = 0, \quad \mu_{31} = 0, \quad \mu_{32} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Согласно (2.1), (2.18), (3.1), осредненные уравнения движения запишутся следующим образом [1,2,6,7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial \alpha_2} = -X_2 + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha_1} = -Y_2 + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial \alpha_2} - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} = -Z_2 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} d\alpha_3 = -hX_1 - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_1 \partial t^2} \\ \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_1} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{32} d\alpha_3 = -hY_1 - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_1 \partial t^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь, как и в классической теории пологих оболочек [1,4], в первых двух уравнениях (3.2) опущены члены $k_1 N_{13}$ и $k_2 N_{23}$. Третье уравнение (моментное-силовое) не приводится, так как считается, что они с точностью $1 \mp \alpha_3 k_i$ удовлетворены тождественно [1,2].

Что касается шестого уравнения равновесия, которое имеет вид [1,2,4]

$$S_{12} - S_{21} + k_1 H_{12} - k_2 H_{21} = 0 \quad (3.4)$$

с точностью теории весьма пологих оболочек удовлетворяется тождественно [1,2].

Согласно (2.2), (2.19) и (3.1), осредненные уравнения движения запишутся следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial R_{21}}{\partial \alpha_2} + k_1 Q_{13} + N_{23} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{32} d\alpha_3 &= Jh \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_2 \partial t^2} \\ \frac{\partial P_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial R_{12}}{\partial \alpha_1} + k_2 Q_{23} - N_{23} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} d\alpha_3 &= Jh \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_1 \partial t^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Третье «планарное» уравнение движения, которое имеет вид

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial \alpha_2} - k_2 P_{22} - k_1 P_{11} + S_{12} - S_{21} = 0 \quad (3.6)$$

с принятой точностью также удовлетворяется тождественно.

Для внутренних сил и моментов, входящих в уравнения (3.2)-(3.6), согласно (2.13)-(2.17) имеем:

$$\begin{aligned} T_{11} &= Bh \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + k_1 w \right) + B_{12} h \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + k_2 w \right) \\ T_{22} &= Bh \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + k_2 w \right) + B_{12} h \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + k_1 w \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} S_{12} &= \mu h \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right) + \alpha h \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right) \\ S_{21} &= \mu h \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} \right) + \alpha h \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= -\frac{Bh^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - \frac{B_{12}h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \\ M_{22} &= -\frac{Bh^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} - \frac{B_{12}h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$H_{12} = H_{21} = -2\mu \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \quad (3.10)$$

$$P_{12} = 2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad P_{22} = -2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \quad (3.11)$$

$$R_{12} = -(\gamma + \varepsilon) h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + (\gamma - \varepsilon) h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \quad (3.12)$$

$$R_{21} = (\gamma + \varepsilon) h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} - (\gamma - \varepsilon) h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}$$

$$Q_{13} = -(\gamma + \varepsilon) h k_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \quad Q_{23} = (\gamma + \varepsilon) h k_2 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \quad (3.13)$$

С помощью уравнений (3.3) и (3.5) из третьего уравнения системы (3.2), исключая N_{13} и N_{23} , получим следующее уравнение движения:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 (\mu_{11} + R_{12})}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 (H_{12} + H_{21} + P_{22} - P_{11})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial^2 (M_{22} - R_{21})}{\partial \alpha_2^2} - \\
& - k_1 \frac{\partial Q_{13}}{\partial \alpha_2} + k_2 \frac{\partial Q_{23}}{\partial \alpha_1} - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} = -Z_2 - h \left(\frac{\partial X_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_2} \right) + \\
& + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - h \left(\rho \frac{h^2}{12} + J \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Таким образом, получили замкнутую систему из трех уравнений движения (3.2) и (3.14), где для силовых членов имеем

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{X^+ - X^-}{2}, Y_1 = \frac{Y^+ - Y^-}{2}, Z_2 = Z^+ + Z^- \\
X_2 &= X^+ + X^-, Y_2 = Y^+ + Y^-,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (3.7)-(3.13) в первые два уравнения (3.2) и в уравнения (3.14), получим следующую систему дифференциальных уравнений движения в искомах перемещениях $u(\alpha_1, \alpha_2)$, $v(\alpha_1, \alpha_2)$ и $w(\alpha_1, \alpha_2)$:

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} + a_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + (Bk_1 + B_{12}k_2) \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = -\frac{X_2}{h} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.16}$$

$$B \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_2^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} + a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + (Bk_2 + B_{12}k_1) \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} = -\frac{Y_2}{h} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& a_{33} \Delta \Delta w + (Bk_1 + B_{12}k_2) \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + (Bk_2 + B_{12}k_1) \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \\
& + (\gamma + \varepsilon) \left(k_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} + k_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) w + (Bk_1^2 + 2B_{12}k_1k_2 + Bk_2^2) w = \\
& = \frac{Z_2}{h} + \left(\frac{\partial X_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_2} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho \frac{h^2}{12} + J \right) \Delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$a_{12} = B_{12} + \mu - \alpha, \quad a_{33} = \frac{Bh^2}{12} + \gamma + \varepsilon, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \tag{3.19}$$

Вероятнее всего, во многих задачах весьма пологих оболочек члены с множителями k_i^2 в уравнении (3.19) могут быть пренебрежены.

Граничные условия имеют структуру граничных условий классической теории, однако имеют некоторое иное содержание [1,4,6].

Граничные условия запишем лишь для края, определяющегося координатной линией $\alpha_1 = \alpha_0 = \text{const}$:

а) свободный край –

$$T_{11} = 0, \quad S_{12} + k_2 (H_{12} - P_{11}) = 0, \quad N_{13} + \frac{\partial (H_{12} - P_{11})}{\partial \alpha_2} = 0, \quad M_{11} + R_{12} = 0 \tag{3.20}$$

б) шарнирно закреплённый край –

$$M_{11} + R_{12} = 0, \quad T_{11} = 0, \quad w = 0, \quad v = 0 \tag{3.21}$$

в) заделанный край –

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad -\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + k_1 u = 0 \quad (3.22)$$

Очевидно, возможны и другие непротиворечащие варианты граничных условий [1,2,4,6].

Перерезывающие силы определяются из уравнений (3.3), (3.5) и имеют вид

$$\begin{aligned} N_{13} &= \frac{\partial(M_{11} + R_{12})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(H_{21} + P_{22})}{\partial \alpha_2} + k_2 Q_{23} + hX_1 \\ N_{23} &= \frac{\partial(M_{22} + R_{21})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(H_{12} + P_{11})}{\partial \alpha_1} - k_1 Q_{13} + hY_1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

4. Рассмотрим две задачи.

а) Всяма полая оболочка в виде сферического прямоугольника перекрывает площадь $a \times b$, имеет толщину h и кривизну срединной поверхности $k_1 = k_2 = k = R^{-1}$. Оболочка шарнирно закреплена по всему контуру $(\alpha_1 = 0, a; \alpha_2 = 0, b)$ и несёт нормально приложенную нагрузку

$$Z_2 = q \sin \frac{\pi \alpha_1}{a} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b}, \quad X^\pm = 0, \quad Y^\pm = 0 \quad (4.1)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} T_{11} = 0, \quad M_{11} + R_{12} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0, \alpha_1 = a \\ T_{22} = 0, \quad M_{22} - R_{21} = 0, \quad u = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_2 = 0, \alpha_2 = b \end{aligned} \quad (4.2)$$

Полагая

$$u = A_1 \cos \frac{\pi \alpha_1}{a} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b}, \quad v = A_2 \sin \frac{\pi \alpha_1}{a} \cos \frac{\pi \alpha_2}{b}, \quad w = A \sin \frac{\pi \alpha_1}{a} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b} \quad (4.3)$$

удовлетворяем граничным условиям (4.2), а из системы уравнений (3.16)–(3.18), согласно (3.19) и (4.1), для искомым постоянных A_i получим:

$$A_1 = \frac{1+\nu}{\pi R} a \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}, \quad A_2 = \frac{1+\nu}{\pi R} \frac{a^2}{b} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^{-1} \quad (4.4)$$

$$A = \frac{qa^4}{D\pi^4} \left[(\gamma_0 + 1) \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{\pi^2 R^2 h^2} - \gamma_0 \frac{a^2}{\pi^2 R^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \right]^{-1} \quad (4.5)$$

$$\text{где } \gamma_0 = 12 \frac{\gamma + \varepsilon}{Bh^2} = \frac{6(1-\nu)}{\mu h^2} (\gamma + \varepsilon), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.6)$$

Обратим внимание, что в формулах отсутствуют постоянные α и β , которые тоже характеризуют микрополярность, однако при этом постоянное α фигурирует в соответственных формулах расчётных напряжений и внутренних усилий.

Из (4.4) и (4.5) при $\gamma = 0$, т.е. без учёта явлений микрополярности получим соответствующие представления классической теории [4], в частности, из (4.5) для постоянного A имеем:

$$A_0 = \frac{qa^4}{D\pi^4} \left[\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{\pi^2 R^2 h^2} \right]^{-1} \quad (4.7)$$

Сопоставляя (4.5) и (4.7), получим относительный прогиб оболочки с учётом явлений микрополярности

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{\pi^4 R^2 h^2}}{\left(1 + \gamma_0\right)\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{\pi^4 R^2 h^2} - \gamma_0 \frac{a^2}{\pi^2 R^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad (4.8)$$

Рассмотрим численный пример. Пусть $a = b = 20h$, $R = 2a$. Материал оболочки – «алюминиевая дробь в эпоксидной смоле» [7], для которого имеем: $\mu = 1,89 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,4$, $\gamma + \varepsilon = 2,64 \cdot 10^3$ н. Согласно (4.6) и (4.8), для обобщённого постоянного γ_0 и относительного максимального прогиба оболочки при различных абсолютных значениях толщины оболочки h имеем (табл.1):

Таблица 1

$h - \mu$	γ_0	A / A_0
0,001	5,0286	0,4134
0,002	1,2971	0,7429
0,003	0,5507	0,8667
0,005	0,2011	0,9475

Рассматривая результаты, приведённые в табл.1, замечаем, что с увеличением абсолютной толщины оболочки существенно уменьшается влияние учёта микрополярности.

б) Рассмотрим задачу свободных колебаний сферической панели ($a \times b$, h , $k_1 = k_2 = k = R^{-1}$). В этом случае система уравнений (3.16)–(3.18) приводится к виду:

$$\begin{aligned} B \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} + (B_{12} + \mu - \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{B + B_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ B \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_2^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} + (B_{12} + \mu - \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{B + B_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \left(\frac{Bh^2}{12} + \gamma + \varepsilon \right) \Delta^2 w + \frac{B + B_{12}}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\gamma + \varepsilon}{R^2} \Delta w + \\ + 2 \frac{B + B_{12}}{R} w &= -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho \frac{h^2}{12} + J \right) \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Первые два уравнения системы (4.9) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha) \Delta u + (B_{12} + \mu - \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{B + B_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\mu + \alpha) \Delta v + (B_{12} + \mu - \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{B + B_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

[8], преобразуем уравнения (4.10) с помощью следующих представлений:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} \quad (4.11)$$

тогда система уравнений (4.10) известным способом приводится к следующим уравнениям:

$$B\Delta\Phi + \frac{B+B_{12}}{R}w = \rho \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

$$(\mu + \alpha)\Delta\Psi = \rho \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$
(4.12)

Полагая

$$\bar{\Psi} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{mn} e^{i\omega_{mn}t} \cos \mu_m \alpha_1 \cos \lambda_n \alpha_2$$
(4.13)

где

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \quad \mu_m = \frac{m\pi}{a}$$
(4.14)

из второго уравнения (4.12), откуда следует, что сдвиговая волна планарных колебаний (Ψ) не зависит от изгибных (w), получим следующую формулу для определения частот этих колебаний:

$$\omega_{mn}^2 = (\mu + \alpha) \rho^{-1} (\lambda_n^2 + \mu_m^2)$$
(4.15)

откуда видно, что учёт микрополяриности приводит к увеличению частоты колебаний.

Третье уравнение системы (4.9) с учётом (4.11) приводится к виду

$$\left(B \frac{h^2}{12} + \gamma + \varepsilon \right) \Delta^2 w + \frac{B+B_{12}}{R} \Delta\Phi + \frac{\gamma + \varepsilon}{R^2} \Delta w +$$

$$+ 2 \frac{B+B_{12}}{R^2} w = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho \frac{h^2}{12} + J \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w$$
(4.16)

Первое уравнение (4.12) и уравнение (4.16) составляют полную систему уравнений относительно искомым функций Φ и w .

В случае, когда оболочка по всему контуру шара ($\alpha_1 = 0, a; \alpha_2 = 0, b$) шарнирно закреплена, т.е. имеем граничные условия (3.21), решения указанной системы уравнений представим следующим образом:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} e^{i\omega_{mn}t} \sin \mu_m \alpha_1 \sin \lambda_n \alpha_2$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} e^{i\omega_{mn}t} \sin \mu_m \alpha_1 \sin \lambda_n \alpha_2$$
(4.17)

Подставляя значения Φ и w из (4.17) в первое уравнение системы (4.12) и в уравнение (4.16), приравнявая к нулю детерминант полученной системы алгебраических уравнений, приходим к следующему уравнению для определения частот колебаний:

$$\omega_{mn}^4 - \frac{B}{\rho} (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \left[1 - \frac{\gamma + \varepsilon}{BR^2} + 2 \frac{1+\nu}{R^2} (\mu_m^2 + \lambda_n^2)^{-1} + \left(\frac{h^2}{6} + \frac{\gamma + \varepsilon}{B} + \frac{J}{\rho} \right) (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \right]$$

$$\omega_{mn}^2 + \frac{B^2}{\rho^2} (\mu_m^2 + \lambda_n^2)^2 \left[\left(\frac{h^2}{12} + \frac{\gamma + \varepsilon}{B} \right) (\mu_m^2 + \lambda_n^2) + \frac{1-\nu^2}{R^2} (\mu_m^2 + \lambda_n^2)^{-1} - \frac{\gamma + \varepsilon}{BR^2} \right] = 0$$
(4.18)

Поступая известным образом, и в уравнении (4.16) пренебречь инерционными членами для определения частот продольных планарных колебаний, получим следующую приближённую формулу:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{B}{\rho}(\mu_m^2 + \lambda_n^2) - 12 \frac{(1+\nu)^2}{R^2 h^2} \frac{B}{\rho} (\mu_m^2 + \lambda_n^2)^{-1} \left[1 + 12 \frac{\gamma + \varepsilon}{B h^2} + \right. \\ \left. + 24 \frac{1+\nu}{R^2 h^2} (\mu_m^2 + \lambda_n^2)^{-2} - 12 \frac{\gamma + \varepsilon}{B R^2 h^2} (\mu_m^2 + \lambda_n^2)^{-1} \right]^{-1} \quad (4.19)$$

Из (4.19) следует, что в отличие от частот сдвиговых планарных колебаний (4.15), частоты продольных планарных колебаний уменьшаются при учёте микрополярности материала оболочки.

Пренебрегая инерционным членом в первом уравнении системы (4.12) и поступая обычным образом, для частот поперечных колебаний получим следующую приближённую формулу:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \left[1 + 12 \frac{1-\nu^2}{R^2 h^2} (\mu_m^2 + \lambda_n^2) + 12 \frac{\gamma + \varepsilon}{B h^2} \left(1 - \frac{(\mu_m^2 + \lambda_n^2)^{-1}}{R^2} \right) \right] \times \\ \times \left[1 + \left(\frac{h^2}{12} + \frac{J}{\rho} \right) (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \right]^{-1} \quad (4.20)$$

Приведенные здесь результаты находятся в согласии с результатами, полученными С.О. Саркисяном и его последователями на основе применения асимптотического метода интегрирования [9,10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
5. Новожилов В.В. Теория упругости. Ленинград: Судпромгиз, 1958. 370 с.
6. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАНА, 1999. 214 с.
7. Савин Г.Н., Лукашев А.А., Лыско Е.М., Вершенко С.А., Агасьев Г.Г. Распространение упругих волн в континууме Коссера со стеснённым вращением частиц // Прикладная механика. 1970. Т.6. Вып.6. С.37–41.
8. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. Т.1. Колебания линейных систем (Под ред. Болотина В.В.). М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
9. Саркисян С.О. Общая теория упругих оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т. 108. №4. С. 309-319.
10. Саркисян С.О. Краевые задачи несимметричной теории упругости для тонких пластин // ПММ. 2008. №1. С.129-147.

Сведения об авторах:

Амбарцумян Сергей Александрович – Академик НАН Армении, профессор, доктор техн. наук, иностранный член РАН, Институт механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б

Тел.: (+374 10)52-06-44. E-mail: gyumreci@gmail.com

Белубекян Мелс Вагаршакевич,

Профессор, кандидат физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении

Тел.: (+37410)52-15-03; E-mail: mbelubekyan@sci.am

Поступила в редакцию 17.07.2009

УДК 539.3

**МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩЕГО СЛОЯ В
ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

ВАРТАНОВ А. Г.

Ключевые слова: волна, магнитоупругость, слой.

Key words: wave, magnetoelasticity, layer.

Վարդանով Ա. Հ.

Իդեալական հաղորդիչ շերտի մագնիսաառաձգական տատանումները հաստատուն մագնիսական դաշտում

Աշխատանքում դիտարկվում է մագնիսաառաձգական ալիքի տարածումը իզոտրոպ շերտում: Ենթադրվում է, որ շերտը օժտված է իդեալական հաղորդիչի հատկություններով: Մագնիսական դաշտը ուղղահայաց է ալիքի տարածման հարթությանը: Շերտի մի կողմը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուսը ազատ է լարումներից:

Ստացված է դիսպերսիոն հավասարում և կատարված է թվային հաշվարկ՝ շերտի փուլային արագությունը որոշելու համար:

Vardanov A.H.

Magnetoelastic Vibrations of Perfect Conductive Layer in Constant Magnetic Field

The problem of magnetoelastic waves in an isotropic layer is considered. The layer is immersed in magnetic field and have properties of perfect conductor. The magnetic field is perpendicular to the plane of wave motion. One side of the layer is clamped, and the other is free from mechanical loads.

The dispersion equation is derived. Calculated the phase velocity ratio.

В работе рассматривается распространение магнитоупругой волны в изотропном слое. Слой находится под воздействием постоянного магнитного поля. Слой имеет свойства идеального проводника. Магнитное поле перпендикулярно к плоскости распространения волны. Одна сторона слоя жёстко прикреплена, а другая свободна от напряжений.

Получено дисперсионное уравнение. Выполнены численные расчёты для фазовой скорости волны.

Впервые задача о распространении волн в упругом слое, границы которого свободны от напряжений, была решена Релеем и Лембом [2], а задача слоя, лежащего на жёстком основании, впервые была рассмотрена Ишковым [3]. Задача собственных колебаний ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на основе метода асимптотического интегрирования рассмотрена в [4]. Задачи магнитоупругих колебаний пластин рассмотрены во многих работах [5-7]. К недавно опубликованным работам о магнитоупругих колебаниях можно отнести [8-9].

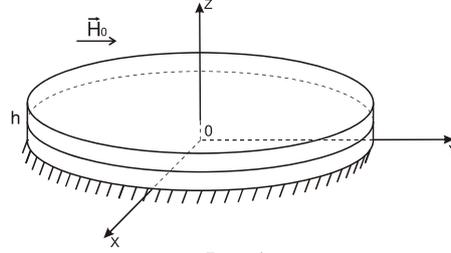
Рассмотрим изотропный упругий идеально проводящий слой, находящийся в постоянном магнитном поле

$$\vec{H}_0 = (0, H_2, 0)$$

Слой ограничен плоскостями $z = (0; h)$. Свойства окружающей среды слоя тождественны со свойствами вакуума.

Пусть в этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c . Плоскость $z = h$ свободна от напряжений, а плоскость $z = 0$ жёстко закреплена. В бесконечном пространстве плоская продольная волна распространяется со скоростью c_L , а поперечная волна – со скоростью c_T . В слое скорость волны будет

отличной от c_L и c_T . Ограничения упругого пространства двумя плоскостями вызывают возмущения, влияющие на изменения фазовой скорости и напряжённого состояния.



Фиг. 1

Уравнения движения в перемещениях упругого слоя с учётом магнитного поля имеют следующий вид:

$$c_T^2 \Delta_0 \vec{u} + (c_L^2 - c_T^2) \text{grad div } \vec{u} + \frac{\mu_0}{4\pi\rho} \left[\text{rot rot}(\vec{u} \times \vec{H}_0) \right] \times \vec{H}_0 = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

где

$$\Delta_0 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1')$$

$\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещения, μ_0 – магнитная проницаемость слоя. c_L и c_T – соответственно, продольная и поперечная скорости распространения волны в среде.

Будем рассматривать плоскую задачу, т.е. перемещения u_1 и u_3 будут независимы от переменной y , а $u_2 \equiv 0$.

Эти уравнения в раскрытом виде можно представить как

$$\begin{aligned} c_T^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + c_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ c_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + c_T^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$c_1^2 = c_L^2 + v_2^2, \quad v_2^2 = \frac{\mu_0 H_0^2}{4\pi\rho} \quad (2')$$

Аналогично [1], уравнения (2) с помощью введения потенциалов φ, ψ

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

можно привести к виду

$$c_1^2 \Delta \varphi - \ddot{\varphi} = 0, \quad c_T^2 \Delta \psi - \ddot{\psi} = 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4)$$

Уравнения (4) являются волновыми уравнениями. Их решения будем искать в виде

$$\varphi(x, z, t) = \varphi^*(z) \exp[ik(x - ct)], \quad \psi(x, z, t) = \psi^*(z) \exp[ik(x - ct)] \quad (5)$$

где $\Phi^*(z)$ и $\Psi^*(z)$ – неизвестные функции от переменной z , $k = 2\pi/l$ – волновое число, c – фазовая скорость волны, l – длина волны.

Подставив уравнения (5) в волновые уравнения (4), получим

$$\frac{d^2\Phi^*(z)}{dz^2} - k^2\alpha^2\Phi^*(z) = 0, \quad \frac{d^2\Psi^*(z)}{dz^2} - k^2\beta^2\Psi^*(z) = 0 \quad (6)$$

где

$$\alpha^2 = 1 - \frac{c^2}{c_1^2}, \quad \beta^2 = 1 - \frac{c^2}{c_2^2} \quad (6')$$

Уравнения (6) есть однородные линейные дифференциальные уравнения, решения которых будем искать в виде

$$\Phi^*(z) = A \sin h(k\alpha z) + B \cos h(k\alpha z) \quad (7)$$

$$\Psi^*(z) = C \sin h(k\beta z) + D \cos h(k\beta z)$$

где A, B, C, D – неизвестные постоянные интегрирования.

Вместе с уравнениями (1) рассмотрим линейные уравнения электродинамики окружающей среды (вакуума), которые в нашем случае приводятся к следующим уравнениям:

$$c_0^2 \Delta h_2^{(e)} - \ddot{h}_2^{(e)} = 0, \quad c_0^2 \Delta e_1^{(e)} - \ddot{e}_1^{(e)} = 0 \quad (8)$$

где величины с индексом (e) характеризуют окружающую среду, c_0 – электродинамическая постоянная, h_2 и e_1 – составляющие векторов индуцированного магнитного и электрического полей.

Решения уравнений (8) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} h_2^{(1)} &= C_1 \exp[-v_3 z + ik(x - ct)] \\ e_1^{(1)} &= C_2 \exp[-v_3 z + ik(x - ct)] \end{aligned} \quad \text{при } z \geq h \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h_2^{(2)} &= C_3 \exp[v_3 z + ik(x - ct)] \\ e_1^{(2)} &= C_4 \exp[v_3 z + ik(x - ct)] \end{aligned} \quad \text{при } z \leq 0$$

$$\text{где } v_3^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_0^2} \right)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные, связанные между собой следующими выражениями:

$$C_1 = -\frac{ikc}{c_0 v_3} C_2, \quad C_3 = \frac{ikc}{c_0 v_3} C_4 \quad (9')$$

Далее, имеем 6 граничных условий на поверхностях пластинки:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} + T_{13} &= T_{13}^{(1)} & u_1 &= 0 \\ \sigma_{33} + T_{33} &= T_{33}^{(1)} \quad \text{при } z = h, & u_3 &= 0 & \text{при } z = 0 \\ e_1 &= e_1^{(1)} & e_1 &= e_1^{(2)} \end{aligned} \quad (10)$$

где σ_{13} и σ_{33} – компоненты тензора напряжений, T_{13} и T_{33} – компоненты тензора Максвелла, которые имеют следующий вид:

$$T_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} (H_i h_j + H_j h_i) - \delta_{ij} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{H}_0 \vec{h} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (11)$$

В нашем случае тензор Максвелла [6] имеет вид

$$T_{13} = T_{13}^{(1)} = 0, \quad T_{33} = -\frac{\mu_0}{4\pi} h_2 H_2, \quad T_{33}^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} h_2^{(1)} H_2 \quad (12)$$

где

$$h_2 = -H_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \quad (13)$$

Из закона Ома для движущейся среды [6] имеем

$$\vec{j} = 4\pi\sigma \left(\vec{e} + \frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right)$$

Для идеального проводника имеем

$$e_1 \approx \frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial u_3}{\partial t} H_2 \quad (14)$$

Таким образом, получим граничные условия в виде:

$$\sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{33} - \frac{\mu_0}{4\pi} H_2^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) = -\frac{1}{4\pi} H_2 h_2^{(1)} \quad \text{при } z = h \quad (15)$$

$$\frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial u_3}{\partial t} H_2 = e_1^{(1)}$$

$$u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial u_3}{\partial t} H_2 = e_1^{(2)} \quad \text{при } z = 0 \quad (16)$$

Закон Гука для изотропного тела имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

отсюда получим

$$\sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda\varepsilon_{11} \quad (17)$$

Для деформации имеем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (18)$$

Подставив уравнения (18) в (17), получим напряжения, представленные перемещениями

$$\sigma_{13} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (19)$$

Подставив уравнения (12), (13), (14), (19) в (15) и (16), получим граничные условия, представленные перемещениями. Далее получим граничные условия для функции Φ и Ψ . Подставив значения Φ и Ψ (7) и удовлетворяя граничным условиям, получим следующую однородную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} Aa_{11} + Ba_{12} + Ca_{13} + Da_{14} = 0 \\ Aa_{21} + Ba_{22} + Ca_{23} + Da_{24} + C_1 a_{25} = 0 \\ Aa_{31} + Ba_{32} + Ca_{33} + Da_{34} + C_1 a_{35} = 0 \\ Ba_{42} + Ca_{43} = 0 \\ Aa_{51} + Da_{54} = 0 \\ Ba_{62} + Da_{64} + C_4 a_{66} = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

где приняты следующие обозначения:

$$a_{11} = 2i\alpha \cos h(k\alpha h), \quad a_{12} = 2i\alpha \sin h(k\alpha h)$$

$$a_{13} = -(1 + \beta^2) \sin h(k\beta h), \quad a_{14} = -(1 + \beta^2) \cos h(k\beta h)$$

$$a_{21} = \left(2\mu\alpha^2 + \lambda(\alpha^2 - 1) + \frac{\mu_0 H_2^2}{4\pi} (\alpha^2 - 1) \right) \sin h(k\alpha h)$$

$$a_{22} = \left(2\mu\alpha^2 + \lambda(\alpha^2 - 1) + \frac{\mu_0 H_2^2}{4\pi} (\alpha^2 - 1) \right) \cos h(k\alpha h)$$

$$a_{23} = 2i\mu\beta \cos h(k\beta h), \quad a_{24} = 2i\mu\beta \sin h(k\beta h), \quad a_{25} = \frac{H_2 e^{-v_3 h}}{4\pi k^2}$$

$$a_{31} = -i\alpha \sin h(k\alpha h), \quad a_{32} = -i\alpha \cos h(k\alpha h), \quad a_{41} = a_{44} = a_{52} =$$

$$a_{33} = \sin h(k\beta h), \quad a_{34} = \cos h(k\beta h), \quad = a_{53} = a_{61} = a_{63} = 0$$

$$a_{35} = \frac{c_0^2 v_3 e^{-v_3 h}}{ik^3 c^2 \mu_0 H_2}, \quad a_{42} = a_{54} = i, \quad a_{43} = -\beta$$

$$a_{51} = \alpha, \quad a_{62} = -i\alpha, \quad a_{64} = 1, \quad a_{66} = -\frac{c_0}{\mu_0 H_2 k^2 c}$$

Для того, чтобы система уравнений (20) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель матрицы его коэффициентов был равен нулю

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & 0 & 0 \\ 0 & a_{62} & 0 & a_{64} & 0 & a_{66} \end{pmatrix} = 0$$

Имея в виду, что $c^2/c_0^2 \ll 1$ и выполнив необходимые упрощения, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \cos h(hk\alpha) \cos h(hk\beta) + \Gamma_3 \sin h(hk\alpha) \sin h(hk\beta) = 0 \quad (21)$$

где приняв во внимание обозначения (1'), (2'), (6'), а также

$$\eta^2 = \frac{c^2}{c_T^2}, \quad \theta = \frac{c_T^2}{c_1^2}, \quad \theta_A = \frac{c_T^2}{c_L^2}, \quad \gamma = \frac{v_2^2}{c_L^2}, \quad \theta = \frac{\theta_A}{1+\gamma} \quad (22)$$

получим

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -2\sqrt{1-\eta^2}\theta\sqrt{1-\eta^2} \left(\eta^2\theta(\gamma-1) + \theta_A(4-\eta^2) \right) \\ \Gamma_2 &= \sqrt{1-\eta^2}\theta\sqrt{1-\eta^2} \left(4\theta_A + (2-\eta^2)(2\theta_A - \eta^2\theta(1+\gamma)) \right) \\ \Gamma_3 &= (2-\eta^2)(\eta^2\theta+\gamma) + 2\theta_A \left(\eta^2(3+2\theta(1-\eta^2)) - 4 \right) \end{aligned}$$

Напишем уравнение (21) в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(\eta) &= -2 \left(\eta^2\theta(\gamma-1) + \theta_A(4-\eta^2) \right) + \\ &+ \left(4\theta_A + (2-\eta^2)(2\theta_A - \eta^2\theta(1+\gamma)) \right) \cos h \left(hk\sqrt{1-\eta^2}\theta \right) \cos h \left(hk\sqrt{1-\eta^2} \right) + \\ &+ \left((2-\eta^2)(\eta^2\theta+\gamma) + 2\theta_A \left(\eta^2(3+2\theta(1-\eta^2)) - 4 \right) \right) \frac{\sin h \left(hk\sqrt{1-\eta^2}\theta \right) \sin h \left(hk\sqrt{1-\eta^2} \right)}{\sqrt{1-\eta^2}\theta\sqrt{1-\eta^2}} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь нами будут рассмотрены решения, относящиеся к случаю $\eta < 1$.

Как следует из численного решения уравнения (23), это уравнение не имеет решений $\eta < 1$ при малых hk .

Таблица 1

$\theta_A = 0.25; \quad \theta = \theta_A/1+\gamma$						
γ	0	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,1	0,2
hk	4.145	4.147	4.163	4.336	7.045	20.784

Таблица 2

$\theta_A = 1/3 \quad (\lambda = \mu)$						
γ	0	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,1	0,2
hk	3.806	3.807	3.819	3.942	5.616	9.792

В табл. 1 и 2 представлены предельные значения параметра hk , до которого уравнение (23) не имеет решения с фазовой скоростью меньше, чем скорость поперечной волны при разных θ и γ . γ характеризует магнитное поле, а $\theta_A = c_T^2/c_L^2$.

Для последующих числовых расчётов удобно сделать следующие обозначения, следуя Лембу [2]:

$$hk\alpha = \omega, \quad hk\beta = m\omega \quad \text{и} \quad \rho v_2^2 = \mu\beta_2^2.$$

Для простоты, здесь и в последующих расчётах рассматривается случай $\theta_A = 1/3$ ($\lambda = \mu$). В этом случае дисперсионное уравнение (21) примет вид:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \cos h(\omega) \cos h(m\omega) + \Gamma_3 \sin h(\omega) \sin h(m\omega) = 0$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{4\sqrt{2}m(2\beta_2^2(m^2 - 3) - 3(3 + m^2))\sqrt{6 - \beta_2^2(m^2 - 3)}}{(3 + \beta_2^2)(m^2 - 3)^2\sqrt{3 + \beta_2^2}}$$

$$\Gamma_2 = \frac{\sqrt{2}m(5m^4 - 18m^2 + 45)\sqrt{6 - \beta_2^2(m^2 - 3)}}{(m^2 - 3)^3\sqrt{3 + \beta_2^2}}$$

$$\Gamma_3 = \frac{\beta_2^2(7m^4 - 30m^2 - 9) - 3(m^4 + 22m^2 + 9)}{(3 + \beta_2^2)(m^2 - 3)^2}$$

А для η и hk получим

$$\eta = \sqrt{\frac{(m^2 - 1)(3 + \beta_2^2)}{m^2 - 3 - \beta_2^2}}; \quad kh = \sqrt{\frac{3 - m^2}{2}}\omega^2$$

В таблицах представлены числовые расчёты безмерной фазовой скорости η от величины hk , характерной толщины слоя при различных значениях магнитного поля.

Таблица 3

$\beta_2^2 = 0$		$\beta_2^2 = 0.001$		$\beta_2^2 = 0.01$		$\beta_2^2 = 0.1$		$\beta_2^2 = 0.2$	
hk	η	hk	η	hk	η	hk	η	hk	η
5,239	0,942	5,239	0,942	5,239	0,942	5,247	0,941	5,284	0,94
4,346	0,968	4,346	0,968	4,346	0,968	4,352	0,968	4,367	0,967
4,006	0,986	4,006	0,986	4,006	0,986	4,009	0,986	4,02	0,985
3,851	0,996	3,851	0,996	3,851	0,996	3,854	0,996	3,863	0,996
3,806	1	3,806	1	3,809	1	3,833	1	3,858	1
3,763	1,003	3,763	1,003	3,765	1,003	3,788	1,003	3,812	1,003
3,483	1,028	3,483	1,028	3,483	1,028	3,498	1,029	3,513	1,029
2,958	1,101	2,958	1,101	2,958	1,102	2,959	1,103	2,959	1,105
2,676	1,162	2,676	1,162	2,675	1,163	2,67	1,165	2,66	1,169
2,458	1,224	2,458	1,224	2,456	1,225	2,446	1,229	2,434	1,234
1,929	1,463	1,929	1,464	1,926	1,465	1,903	1,477	1,877	1,49
1,689	1,638	1,689	1,638	1,686	1,64	1,659	1,661	1,626	1,683
1,605	1,715	1,605	1,715	1,611	1,717	1,608	1,742	1,573	1,769
0	1,732	0	1,732	0	1,734	0	1,76	0	1,788

Наименьшее значение фазовая скорость принимает при $hk \rightarrow \infty$, равное скорости Релея. С уменьшением hk фазовая скорость увеличивается, достигая значения $\sqrt{3 + \beta_2^2}$. Магнитное поле слабо влияет на фазовую скорость при $hk > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA., vol. 93, 1917.
3. Ишков П.К. О распространении упругих волн в слое, лежащем на жёстком основании. //Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1941. №2. С.169-176.
4. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. // Изв.НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С. 18–28.
5. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
6. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991.
7. Саркисян С.В. К задаче распространения магнитоупругих волн в пластине. //Тр.14-ой Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Кутаиси: 1987. Т.2. С.400-405.
8. Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В. Определение частот изгибных колебаний магнитоупругой цилиндрической оболочки //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №3. С.227–237.
9. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized Magnetoelastic Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate, Journal of Applied Mechanics, Transaction ASME, USA, November 2007, vol. 74, p. 1071-1077.

Сведения об авторе:

Варганов Арташес Гайкович,

Аспирант Института механики НАН Армении

Адрес: Ереван, 0019, пр. Маршала Баграмяна 24^б

E-mail: geops@mail.ru

Поступила в редакцию 17.06.2009

УДК 539.3

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ
ТОНКИХ БАЛОК**

ՏԱՐԿՑՅԱՆ Ա. Ա.

Ключевые слова: тонкие балки, упругие, микрополярные, свободные колебания, собственные частоты, собственные формы.

Key words: thin beams, elastic, micropolar, free oscillation, own frequencies, own forms.

Մարզայան Ա. Հ.

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի ազատ տատանումները

Աշխատանքում միկրոպոլյար, առաձգական բարակ ձողերի ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով և «փոքր սահքային կոշտությամբ» տեսությունների միաչափ դինամիկ հավասարումների հիման վրա, որտեղ հաշվի են առնված բոլոր պտտա-սահքային դեֆորմացիաները, ուսումնասիրված են ձողերի ազատ տատանումները ծայրերի հոդակապորեն ամրացման դեպքում: Ըստ նշված տեսությունների, լուծելով դրված խնդիրը, որոշված են միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի ծռման տատանումների սեփական հաճախություններն ու տատանումների սեփական ձևերը ըստ նշված տեսությունների: Բոլոր հաշվումները հանգեցված են վերջնական թվային արդյունքների: Թվային անալիզի հիման վրա պարզաբանվում են միկրոպոլյար առաձգական ձողերի դինամիկական բնութագրերի ինքնատիպ յուրահատկությունները:

Sargsyan A. H.

The Free Vibrations of Micropolar Thin Elastic Bars

The present paper is aimed at the study of free vibrations of thin bars in case of hinged end. The study is based on the one-dimensional dynamic equations of the theories of micropolar thin elastic bars with independent rotation; constraint rotation; and small shift rigidity, in case of which all rotator-shift deformations are taken into consideration. The solution of the formulated problem enables the definition of frequencies proper and forms proper of bending vibrations of micropolar thin elastic bars in terms of the aforementioned theories. All the calculations are reduced to final numerical results. The numerical analysis exposes the peculiarities inherent to the dynamic characteristics of micropolar thin elastic bars.

В работе на основе одномерных динамических уравнений микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением и «с малой сдвиговой жесткостью», при которых учтены все вращательно-сдвиговые деформации, изучены свободные колебания балок при шарнирном опирании на концах. Решая поставленную задачу, определены собственные частоты и собственные формы изгибных колебаний микрополярных упругих тонких балок по указанным теориям. Все расчеты доведены до окончательных численных результатов. На основе численного анализа выявляются специфические особенности динамических характеристик упругих микрополярных балок.

Введение. Построению теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек посвящены работы [1-8]. В работах [9-12], в зависимости от значений безразмерных физических параметров, построены общие математические модели микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек, при которых фактически не учтены поперечные и родственные с ними другие сдвиговые деформации. На основе асимптотического анализа начально-граничных задач несимметричной теории упругости в тонких областях, в работах [13,14] сформулированы предположения (гипотезы), при помощи которых построены общие уточненные модели микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек, при которых в указанных тонких телах полностью учитываются все вращательно-сдвиговые деформации. В работах [15-18], на основе [9-12] теорий микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек со свободным вращением, со стесненным вращением и «с малой сдвиговой жесткостью» изучены колебания шарнирно-опертых балок, прямоугольных и круглых пластин, цилиндрических оболочек.

В данной работе, на основе уточненных общих моделей микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью» [13,14] изучаются собственные изгибные колебания шарнирно-опертых балок. Проводится численный анализ, выявляются специфические особенности колебаний упругих балок из микрополярного материала, сравниваются полученные результаты с соответствующими результатами работ [15-17].

1. Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением.

Основные уравнения динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [13,14]:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{2\alpha}{\mu + \alpha} \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \right) = 0$$

соотношения упругости

$$N_{12} = \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} N_{21} + 2h \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \gamma_{12}, \quad N_{21} = 2h(\mu + \alpha) \left(\gamma_{21} + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} \gamma_{12} \right) \quad (1.2)$$

$$M_{11} = D \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\psi_1(x_1, t) - \frac{2\alpha}{\mu + \alpha} \Omega_3(x_1, t) \right), \quad L_{13} = 2hB\chi_{13}$$

где

$$\gamma_{21} = \psi_1(x_1, t) + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} \Omega_3(x_1, t), \quad \gamma_{12} = \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial x_1} - \Omega_3(x_1, t), \quad \chi_{13} = \frac{\partial \Omega_3(x_1, t)}{\partial x_1} \quad (1.3)$$

$D = 2Eh^3 / 3$ – классическая жесткость балки

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a \quad (1.4)$$

Здесь N_{12}, N_{21} – усилия; M_{11} – усредненный момент от силового напряжения; L_{13} – усредненный момент от моментного напряжения; w – прогиб стержня; Ω_3 – свободный поворот точек средней линии балки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости ее изгиба; ψ_1 – часть этого поворота; E, μ, α, B – упругие константы микрополярного материала балки; γ_{12} и γ_{21} – сдвиговые деформации; χ_{13} – изгибно-крутильная деформация в точках средней линии балки; ρ – плотность материала; J – ее мера инерции при вращении; a – длина балки; $0 \leq x_1 \leq a$; t – время.

Отметим, что как указано в работах [13,14], микрополярная теория балок (1.1)-(1.4) имеет место, когда физические безразмерные параметры имеют следующие значения:

$$\frac{\mu}{4\alpha} \sim 1, \quad \frac{\dot{a}^2 \mu}{\hat{A}} \sim 1 \quad (1.5)$$

Из уравнений (1.1)-(1.3) перейдем к уравнениям относительно перемещения w и углов Ω_3 , ψ_1 и получим:

$$\begin{aligned}
(\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
B \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_1^2} - 2\alpha \psi_1 + 2\alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \Omega_3 &= J \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \\
(\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{Eh^2}{3} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} - \frac{2\alpha}{\mu + \alpha} \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_1^2} \right] + \\
+ \frac{\rho h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{2\alpha}{\mu + \alpha} \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Граничные условия (1.4) примут вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial \psi_1(x_1, t)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_3(x_1, t)}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a \tag{1.7}$$

Представим решение граничной задачи (1.6), (1.7) в виде:

$$\begin{aligned}
w &= (A_m \cos(p_m t) + B_m \sin(p_m t)) \sin \frac{m\pi}{a} x_1 \\
\Omega_3 &= (A'_m \cos(p_m t) + B'_m \sin(p_m t)) \cos \frac{m\pi}{a} x_1 \\
\psi_1 &= (A''_m \cos(p_m t) + B''_m \sin(p_m t)) \cos \frac{m\pi}{a} x_1
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $A_m, B_m, A'_m, B'_m, A''_m, B''_m$ – постоянные; p_m – частота собственных колебаний микрополярной балки со свободным вращением. Подставим решение (1.8) в систему дифференциальных уравнений (1.6), в результате получим однородные алгебраические уравнения относительно $A_m, B_m, A'_m, B'_m, A''_m, B''_m$:

$$\begin{aligned}
\left[\rho p_m^2 - (\mu + \alpha) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] A_m + \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \frac{m\pi}{a} A'_m - (\mu - \alpha) \frac{m\pi}{a} A''_m &= 0 \\
(\mu - \alpha) \frac{m\pi}{a} A_m - \left[\frac{Eh^2}{3} \frac{2\alpha}{\mu + \alpha} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{\rho h^2}{3} \frac{2\alpha}{\mu + \alpha} p_m^2 \right] A'_m + \\
+ \left[(\mu + \alpha) + \frac{Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right] A''_m &= 0 \\
2\alpha \frac{m\pi}{a} A_m + \left[J p_m^2 - B \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \right] A'_m - 2\alpha A''_m &= 0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Поскольку нас интересует ненулевое решение, то потребуем, чтобы детерминант матрицы, соответствующий системе уравнений (1.9), был равен нулю. Тогда для определения собственных частот p_m получим следующее алгебраическое уравнение шестой степени:

$$C_{m1} p_m^6 - C_{m2} p_m^4 + C_{m3} p_m^2 - C_{m4} = 0 \tag{1.10}$$

где $C_{m1} = J \frac{\rho^2 h^2}{3}$

$$C_{m2} = \frac{\rho^2 h^2}{3} \left[B \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 4\alpha \right] + J\rho \left[\frac{Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \mu + \alpha + (\mu + \alpha) \frac{h^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]$$

$$C_{m3} = J \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[4\mu\alpha + (\mu + \alpha) \frac{Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] + B\rho \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[\frac{Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + (\mu + \alpha) + (\mu + \alpha) \frac{h^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] + 4\alpha\rho \left[\frac{Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \mu + \mu \frac{h^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \quad (1.11)$$

$$C_{m4} = B \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left[4\mu\alpha + (\mu + \alpha) \frac{Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] + 4\mu\alpha \frac{Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4$$

Результаты численных вычислений приведены в табл. 1,2,3.

Таблица 1

Физические параметры материала балки: $\alpha = 0,115$ ГПа, $\mu = 1,033$ ГПа, $\lambda = 2,195$ ГПа, $B = \gamma + \varepsilon = 4,23$ Н; плотность материала: $\rho = 590$ кг/м ³ ; мера инерции при вращении: $J = 5,31 \cdot 10^{-4}$ кг/м; $\delta = h/a = 1/40$								
размеры балки		Жесткость		Собственные частоты				
		микро- полярная теория	класси- ческая теория	микрополярная теория балок со свободным вращением [15-18]		уточненная микрополярная теория балок со свободным вращением		
a , мм	h , мм	$2Bh$, Н·мм	D , Н·мм	P_1 , МГц	P_2 , МГц	P_1 , МГц	P_2 , МГц	P_3 , МГц
0,01	0,00025	0,00212	0,00000003	262,109	281,496	263,042	281,541	9694,43
0,05	0,00125	0,01058	0,0000036	49,792	59,272	49,951	59,313	1938,89
0,1	0,0025	0,02115	0,000088	23,034	32,031	23,122	32,049	969,94
0,5	0,0125	0,10575	0,003605	2,584	11,42	2,637	11,42	193,91
1	0,025	0,2115	0,028838	0,769	9,599	0,821	9,598	96,98
2	0,0375	0,423	0,230702	0,204	9,033	0,254	9,022	48,56
3	0,075	0,6345	0,77862	0,092	8,921	0,014	8,887	32,46

Таблица 2

Физические параметры материала балки: $\alpha = 4,33$ МПа, $\mu = 104$ МПа, $\lambda = 416$ МПа, $B = \gamma + \varepsilon = 45,3$ Н; плотность материала: $\rho = 340$ кг/м ³ ; мера инерции при вращении: $J = 1,76 \cdot 10^{-3}$ кг/м; $\delta = h/a = 1/40$								
размеры балки		Жесткость		Собственные частоты				
		микро- полярная теория	классическая теория	микрополярная теория балок со свободным вращением [15-18]		уточненная микрополярная теория балок со свободным вращением		
a , мм	h , мм	$2Bh$, Н·мм	D , Н·мм	P_1 , Гц	P_2 , Гц	P_1 , Гц	P_2 , Гц	P_3 , Гц
0,5	0,0125	1,1325	0,00038	1002918	1396573	1003520	1415740	78497500
1	0,025	2,265	0,00303	494312	708383	495416	717284	39248800
2	0,05	4,53	0,02427	235520	371690	237210	375239	19624400
5	0,125	11,325	0,37917	77145	181561	79213	182200	7849780
10	0,25	22,65	3,03333	27639	126691	29768	126771	3924930
20	0,375	45,3	24,2667	8264	105929	10322	105930	1962540
30	0,75	67,95	81,9	3843	101249	5731	101249	1308440

Таблица 3

Физические параметры материала балки: $\alpha = 1,6$ ГПа, $\mu = 2$ ГПа, $\lambda = 3$ ГПа, $V = \gamma + \varepsilon = 2$ кН; плотность материала: $\rho = 10^5$ кг/м ³ ; мера инерции при вращении: $J = 10^4$ кг/м; $\delta = h/a = 1/40$										
размеры балки		Жесткость		Собственные частоты						
		микро-полярная теория	классическая теория	уточненная классическая теория балок Тимошенко-Рейсснера		микрополярная теория балок со свободным вращением [15-18]		уточненная микрополярная теория балок со свободным вращением		
a мм	h мм	$2Bh$ Н·мм	D Н·мм	P_1 Гц	P_2 Гц	P_1 Гц	P_2 Гц	P_1 Гц	P_2 Гц	P_3 Гц
5	0,125	500	6,7708	6473,1	1966820	280,9	118478,4	282,88	118479	2633000
10	0,25	1000	54,167	3236,5	983410,2	140,5	59241,44	144,23	59241,8	1316500
20	0,5	2000	433,33	1618,3	491705,1	70,23	29625,22	77,449	29625,4	658251
30	0,75	3000	1462,5	1078,9	327803,4	46,81	19755,15	57,064	19755,3	438834
50	1,25	5000	6770,8	647,31	196682,1	28,06	11862,68	43,022	11862,7	263301

В табл. 1 расчеты сделаны для синтетического полиуретана [19], в табл. 2 – для пенистого полиуретана [19], а в табл. 3 – для гипотетического материала. Как видно из этих таблиц, частоты микрополярной балки могут находиться как в области сверхвысоких частот, так и в области низких частот. Для весьма тонких микрополярных балок частоты по теории работ [15-18] близки к частотам по уточнённой теории микрополярных балок (на основе уточнённой теории получается еще одна высокая частота) при относительно толстых микрополярных балках, результаты по указанным теориям различаются, в последних строках таблиц эта разность составляет 30%÷50%.

2. Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок со стеснённым вращением.

Основные уравнения динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [13,14]:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

$$N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0,$$

соотношения упругости

$$N_{12} + N_{21} = 4\mu h \gamma_{21}, \quad M_{11} = D \frac{\partial \psi_1(x_1, t)}{\partial x_1}, \quad L_{13} = 2hB \chi_{13} \tag{2.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{21} = \psi_1(x_1, t) + \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial x_1}, \quad \Omega_3(x_1) = -\frac{1}{2} \left(\psi_1(x_1, t) - \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial x_1} \right), \quad \chi_{13} = \frac{\partial \Omega_3(x_1, t)}{\partial x_1} \tag{2.3}$$

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a \tag{2.4}$$

Отметим, что как указано в работах [13,14], микрополярная теория балок (2.1)-(2.4) имеет место, когда физические безразмерные параметры имеют следующие значения:

$$\frac{\mu}{4\alpha} \sim \delta^2, \quad \frac{a^2\mu}{B} \sim 1 \quad (2.5)$$

Относительно перемещения w и угла ψ_1 получим следующие уравнения:

$$2\mu \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + \frac{B}{2} \left(\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x_1^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} \right) = 2\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{J}{2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x_1 \partial t^2} - \frac{J}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial t^2} \quad (2.6)$$

$$2\mu \left(\psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \frac{B}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \right) + \frac{J}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{J}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} - \frac{2Eh^2}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \frac{2\rho h^2}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0$$

Граничные условия (2.4) примут вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial \psi_1(x_1, t)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a \quad (2.7)$$

Представим решение в следующем виде:

$$w = \left(A_m \cos(p_m t) + B_m \sin(p_m t) \right) \sin \frac{m\pi}{a} x_1 \quad (2.8)$$

$$\psi_1 = \left(A_m'' \cos(p_m t) + B_m'' \sin(p_m t) \right) \cos \frac{m\pi}{a} x_1$$

где A_m, B_m, A_m'', B_m'' – постоянные; p_m – частота собственных колебаний микрополярной балки со стесненным вращением. Подставим решение (2.8) в систему дифференциальных уравнений (2.6), в результате получим однородные алгебраические уравнения относительно A_m, B_m, A_m'', B_m'' :

$$\left[2\rho p_m^2 + \frac{J}{2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{B}{2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 - 2\mu \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] A_m + \left[\frac{B}{2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 - \frac{J}{2} \frac{m\pi}{a} p_m^2 - 2\mu \frac{m\pi}{a} \right] A_m'' = 0$$

$$\left[\frac{J}{2} \frac{m\pi}{a} p_m^2 - \frac{B}{2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + 2\mu \frac{m\pi}{a} \right] A_m + \left[\frac{2Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{2\rho h^2}{3} p_m^2 - \frac{J}{2} p_m^2 + \frac{B}{2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 2\mu \right] A_m'' = 0$$

Для определения собственных частот p_m получается алгебраическое уравнение четвертой степени:

$$C_{m1} p_m^4 - C_{m2} p_m^2 + C_{m3} = 0 \quad (2.9)$$

где

$$C_{m1} = \frac{4\rho^2 h^2}{3} + \rho J + \frac{J\rho h^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2$$

$$C_{m2} = \frac{2Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[2\rho + \frac{J}{2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] +$$

$$+ \left[2\rho + \frac{2\rho h^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \left[2\mu + \frac{B}{2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] + 4\mu J \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \quad (2.10)$$

$$C_{m3} = \frac{2Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left[2\mu + \frac{B}{2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] + 4B\mu \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4$$

Решение этого уравнения дает два спектра собственных частот, в то время, как соответствующая теория работ [15-17] дает один спектр собственных частот. Для указанных частот колебаний получим следующие формулы:

$$p_m^2 = \frac{C_{m2} - \sqrt{C_{m2}^2 - 4C_{m1}C_{m3}}}{2C_{m1}} \quad (2.11)$$

$$p_m^2 = \frac{C_{m2} + \sqrt{C_{m2}^2 - 4C_{m1}C_{m3}}}{2C_{m1}} \quad (2.12)$$

Результаты численных вычислений приведены в табл. 4, 5.

Таблица 4

Физические параметры материала балки: $\alpha = 100$ ГПа, $\mu = 2$ ГПа, $\lambda = 3$ ГПа, $V=\gamma+\varepsilon = 1$ кН; плотность материала: $\rho = 1114$ кг/м ³ ; мера инерции при вращении: $J=0,01$ кг/м; $\delta = h/a = 1/40$								
размеры балки		Жесткость		Собственные частоты				
		микро- поля- рная теория	класси- ческая теория	уточненная классическая теория балок Тимошенко- Рейсснера		микрополя- рная теория балок со стесненным вращением [15-18]	уточненная микрополя- рная теория балок со стесненным вращением	
a , мм	h , мм	D^* , Н·мм	D , Н·мм	P_1 , Гц	P_2 , Гц	P_1 , Гц	P_1 , Гц	P_2 , Гц
20	0,5	2433,3	433,3	14607	4889939	24965	24881	975096
10	0,25	1054,2	54,2	30665	9317343	71685	71454	1226098
5	0,125	506,77	6,77	61329	18634687	177831	177517	1907033
3	0,075	301,46	1,46	102215	31057812	317049	316790	2945472
2	0,05	200,43	0,43	153323	46586718	486933	486740	4302747
1,5	0,0375	150,18	0,18	204431	62115624	654849	654698	5682048
1	0,025	100,05	0,05	306647	93173437	988434	988330	8463668
0,5	0,0125	50,007	0,007	613294	186346874	1984389	1984336	16855614

Таблица 5

Физические параметры материала балки: $\alpha = 100$ ГПа, $\mu = 2$ ГПа, $\lambda = 3$ ГПа, $V=\gamma+\varepsilon = 1$ кН; плотность материала: $\rho = 590$ кг/м ³ ; мера инерции при вращении: $J=5,31 \cdot 10^{-6}$ кг/м; $\delta = h/a = 1/40$								
размеры балки		Жесткость		Собственные частоты				
		микро- поля- рная теория	класси- ческая теория	уточненная классическая теория балок Тимошенко- Рейсснера		микрополя- рная теория балок со стесненным вращением [15-18]	уточненная микрополя- рная теория балок со стесненным вращением	
a мм	h мм	D^* Н·мм	D Н·мм	P_1 Гц	P_2 Гц	P_1 Гц	P_1 Гц	P_2 Гц
20	0,5	2433,3	433,3	20072	6719238	37909	37742	6632037
10	0,25	1054,2	54,2	42136	12802910	135212	133985	12240791
5	0,125	506,77	6,77	84272	25605821	519956	506288	21940911
3	0,075	301,46	1,46	140454	42676368	1427596	1337246	30757265
2	0,05	200,43	0,43	210681	64014552	3184075	2791610	38233131
1,5	0,0375	150,18	0,18	280908	85352736	5608053	4552171	44343071
1	0,025	100,05	0,05	421362	128029104	12320534	8520132	56016064
0,5	0,0125	50,007	0,007	842725	256058208	44154390	20984573	93966894

Как видно из табл. 4 и 5 (отметим, что материал балки–гипотетический), видно, что при больших значениях меры инерции J (табл.3) низкая частота, получаемая по уточнённой микрополярной теории балок со стесненным вращением (формула (2.11)) практически совпадает с частотой, получаемой по микрополярной теории балок со стесненным вращением работ [15-18]. При достаточно малых значениях меры инерции J (табл.4) видно, что низкие частоты практически совпадают при относительно больших размерах, но их отличие становится намного заметнее при малых размерах и в последних строках оно достигает до 30%÷50%.

3. Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок «с малой сдвиговой жёсткостью».

Основные уравнения динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких балок «с малой сдвиговой жесткостью» с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [13,14] (особенностью этой теории является то, что моментная часть задачи отделяется от силовой части):

«Чисто моментная часть» задачи:
уравнение движения

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

соотношение упругости

$$L_{13} = 2hB \chi_{13} \quad (3.2)$$

геометрическое соотношение

$$\chi_{13} = \frac{\partial \Omega_3(x_1, t)}{\partial x_1} \quad (3.3)$$

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$L_{13} = 0 \text{ при } x_1 = 0; a \quad (3.4)$$

«Силовая часть» задачи:
уравнения движения

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

соотношения упругости

$$N_{21} = 2\mu h \gamma(x_1), \quad M_{11} = D \frac{\partial \psi_1(x_1, t)}{\partial x_1} + \nu \frac{h^2}{3} \frac{\partial N_{21}}{\partial x_1} \quad (3.6)$$

$$N_{12} = N_{21} - 8h\alpha \Omega_3(x_1, t) - 4h\alpha \left(\psi_1(x_1, t) - \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial x_1} \right)$$

геометрическое соотношение

$$\gamma(x_1) = \psi_1(x_1, t) + \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial x_1} \quad (3.7)$$

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$w = 0, \quad M_{11} = 0 \text{ при } x_1 = 0; a \quad (3.8)$$

Отметим, что как указано в работах [13,14], микрополярная теория балок (3.1)-(3.8) имеет место, когда физические безразмерные параметры имеют следующие значения:

$$\frac{\mu}{4\alpha} \sim \delta^{-2}, \quad \frac{a^2 \mu}{B} \sim 1 \quad (3.9)$$

Из уравнений (3.1)-(3.3) можем перейти к уравнению относительно угла Ω_3 :

$$B \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_1^2} - J \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

к которому присоединим граничные условия (3.4) (с учетом (3.2),(3.3)):

$$\frac{\partial \Omega_3(x_1, t)}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a \quad (3.11)$$

Одновременно, из уравнений (3.5)-(3.7) можем перейти к уравнениям относительно перемещения w и угла ψ_1 :

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) - 2\alpha \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) - 4\alpha \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \mu \left(\psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \frac{Eh^2}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} - \frac{\nu \mu h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \right) + \frac{\rho h^2}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Представим решение граничной задачи (3.10), (3.11) в виде:

$$\Omega_3 = \left(A'_m \cos(p_m t) + B'_m \sin(p_m t) \right) \cos \frac{m\pi}{a} x_1 \quad (3.13)$$

а решение соответствующих однородных уравнений системы (3.12) – в виде:

$$\begin{aligned} w &= \left(A_m \cos(p_m t) + B_m \sin(p_m t) \right) \sin \frac{m\pi}{a} x_1 \\ \psi_1 &= \left(A''_m \cos(p_m t) + B''_m \sin(p_m t) \right) \cos \frac{m\pi}{a} x_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $A_m, B_m, A'_m, B'_m, A''_m, B''_m$ – постоянные; p_m – частота собственных колебаний микрополярной балки «с малой сдвиговой жесткостью».

Подставим решение (3.13) в дифференциальное уравнение (3.10). Поскольку постоянные A'_m, B'_m отличны от нуля, то для определения собственных частот получим:

$$p_m = \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{B}{J}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Теперь подставим решение (3.15) в систему дифференциальных уравнений (3.12), в результате получим однородные алгебраические уравнения относительно A_m, B_m, A''_m, B''_m :

$$\begin{aligned} \left[\rho p_m^2 - \mu \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - 2\alpha \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] A_m + (2\alpha - \mu) \frac{m\pi}{a} A''_m &= 0 \\ \left[\mu + \frac{\nu \mu h^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \frac{m\pi}{a} A_m + \left[\mu + \frac{Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{\nu \mu h^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right] A''_m &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из этой системы для определения собственных частот p_m получим алгебраическое уравнение четвертой степени:

$$C_{m1} p_m^4 - C_{m2} p_m^2 + C_{m3} = 0 \quad (3.17)$$

где

$$C_{m1} = \frac{\rho^2 h^2}{3}, \quad C_{m2} = \rho \left[\mu + \frac{Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{\nu \mu h^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] + (\mu + 2\alpha) \frac{\rho h^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \quad (3.18)$$

$$C_{m3} = 4\alpha \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[\mu + \frac{\nu\mu h^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] + (\mu + 2\alpha) \frac{Eh^2}{3} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4$$

Решение уравнения (3.17) даёт два спектра собственных частот, имеющие вид (2.11), (2.12). В итоге получается три спектра собственных частот (отметим, что по теории, не учитывающей поперечные сдвиги [15-17], имеем два спектра собственных частот).

Результаты численных вычислений приведены в табл.6.

Таблица 6

Физические параметры материала балки: $\alpha = 4,33$ МПа, $\mu = 104$ МПа, $\lambda = 416$ МПа, $B = \gamma + \varepsilon = 45,3$ Н; плотность материала: $\rho = 340$ кг/м ³ ; мера инерции при вращении: $J = 4,4 \cdot 10^{-4}$ кг/м;									
размеры балки		Собственные частоты							
		уточненная классическая теория балок Тимошенко-Рейсснера		микрополярная теория балок "с малой сдвиговой жесткостью" [15-18]		уточненная микрополярная теория балок "с малой сдвиговой жесткостью"			
$\delta = h/a = 1/40$	$a, \text{мм}$	$h, \text{мм}$	$P_1, \text{Гц}$	$P_2, \text{Гц}$	$P_1, \text{Гц}$	$P_2, \text{Гц}$	$P_1, \text{Гц}$	$P_2, \text{Гц}$	$P_3, \text{Гц}$
	3	0,075	43775	12822246	240405	350530	239823	350530	12826399
	6	0,15	21887	6411123	120202	180519	119911	180519	6413199
	8	0,2	16415	4808342	90151	136677	89933	136677	4809899
	15	0,375	8755	2564449	48081	74249	47964	74249	2565279
$\delta = h/a = 1/10$	$a, \text{мм}$	$h, \text{мм}$	$P_1, \text{Гц}$	$P_2, \text{Гц}$	$P_1, \text{Гц}$	$P_2, \text{Гц}$	$P_1, \text{Гц}$	$P_2, \text{Гц}$	$P_3, \text{Гц}$
	3	0,3	165927	3382781	294555	350530	281938	350530	3399023
	6	0,6	82963	1691391	147277	180519	140969	180519	1699511
	8	0,8	62222	1268543	110458	136677	105727	136677	1274633
	15	1,5	33185	676556	58911	74249	56387	74249	679804

В расчетах использованы параметры упругости для полиуретана с другими инерционными характеристиками [19]. Как отметили, по микрополярной теории "с малой сдвиговой жесткостью" моментная часть полностью отделяется от силовой части задачи. Соответствующая частота при этом обозначена через P_2 , эта величина (табл.6) одна и та же как по теории работ [15-18], так и по уточнённой теории (в уточнённой теории и в теории работ [15-18] моментная часть задачи определяется системой одинаковых уравнений и граничных условий). Как видно из табл. 5, низкие частоты по силовой части задачи по теории работ [15-18] и по уточнённой теории почти одинаковые (следовательно, по микрополярной теории «с малой сдвиговой жесткостью» при расчетах рекомендуется руководствоваться наиболее упрощённой теорией [15-18]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Green A.E., Naghdi P.M. The Linear Elastic Cosserat Surface and Shell Theory // Intern. J. Solid and Struct. 1968. V.4. № 6. P.585-592.
2. Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Динамика и прочность машин/ Тр.Ленингр. политех. ин-та. № 386. 1982. С.29-42.
3. Palmov V.A., Altenbach H. Uber eine Cosseratsche Theorie fur elastische Platen // Techn. Mech. 1982. V.3. №3. S.3-9.
4. Пальмов В.А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек //В сб.: Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1986. С. 106-112.
5. Шкутин А. И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Изд-во «Наука», 1988. 128 с.
6. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Механика упругих микрополярных оболочек // Дальневосточный математический журнал. 2003. Т.4. № 2. С.182-225.

7. Ванин Г.А. Моментная механика тонких оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 4. С.116-138.
8. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. 214 с.
9. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С.129-147.
10. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С.41-54.
11. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С.309-319.
12. Саркисян С.О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек // Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. № 2. С.154-166.
13. Саркисян С.О. Общие модели микрополярных упругих тонких пластин // Вестник Пермского гос.тех. ун.-та. Математическое моделирование систем и процессов. 2008. №16. С. 111-120.
14. Саркисян С.О. Общая теория тонких пластин на основе несимметричной теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010 (в печати).
15. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Динамические задачи для тонких стержней и пластин по несимметричной теории упругости // Межвуз. сб. научных трудов, посвященный 80-летию С. Н. Мергеляна. Ванадзор: Государственный педагогический институт им. О. Туманяна. 2008. Т. 2. С. 4-17.
16. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Свободные колебания микрополярных пластин // Тр. VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Нижний Новгород: Изд. Дом «Диалог Культур», 2008. С.415-423.
17. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Динамические эффекты колебаний микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек. // Первая Всероссийская конференция. Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой: Наномех.-2009. Нижний Новгород, 21-23 сентября, 2009. Тезисы докладов. С.58.
18. Саркисян А.А. Свободные колебания микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек // Сб. тр. Международной школы-конференции молодых ученых. 28 сентября – 1 октября, 2009, Агавнадзор, Армения 2009. С.304-309.
19. Lakes R. Experimental Methods for study of Cosserat Elastic Solids and Other Generalized Elastic Continua // Continuum Models for Materials with Micro-Structure (Edited by H. Muhlaus, J. Wiley). New York, 1995. P. 1-22.

Сведения об авторе:

Саркисян Армену Акоповна – аспирант

Гюмрийский Государственный Педагогический институт им. М.Налбандяна

Поступила в редакцию 12.03.2010

УДК 539.3

**МАГНИТОУПРУГОСТЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ
ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН^{*)}**

Саркисян С.О., Саркисян Л.С.

Ключевые слова: микрополярная теория, электропроводность, неферромагнитность, тонкие оболочки, пластины.

Key words: micropolar theory, electroconductivity, nonferromagnetic, thin shells, plates

Մարգարյան Ս. Հ., Մարգարյան Լ.Ս.

Բարակ թաղանթների և սալերի մագնիսաառաձգականությունը առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսությամբ

Աշխատանքում ասիմպտոտիկական մեթոդի հիմքի վրա կառուցված են միկրոպոլյար առաձգական էլեկտրահաղորդիչ ոչ ֆերրոմագնիսական բարակ թաղանթների և սալերի ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով, «սահքային փոքր կոշտությամբ» ընդհանուր մաթեմատիկական մոդելները:

Sargsyan S.H., Sargsyan L.S.

Magnetoelasticity of Thin Plates and Shells on the basis of the Asymmetrical Theory of Elasticity

The present paper is aimed at constructing general mathematical models with independent and constraint rotation and models with “small shift rigidity” of thin elastic electro conductive micropolar shells and plates.

В работе на основе асимптотического метода построены общие математические модели микрополярных упругих электропроводящих неферромагнитных оболочек и пластин с независимыми полями перемещений и вращений со стеснённым вращением «с малой сдвиговой жёсткостью».

Введение. Вопрос о построении теории магнитоупругости электропроводящих тонких оболочек и пластин на основе классической теории упругости изучены в работах [1-5]. С вопросом о построении теории упругости, учитывающей не только силовые, но и моментные напряжения, приходится сталкиваться при решении задач об определении напряженно-деформированного состояния для материалов, обладающих электромагнитными свойствами [6-10]. С этой точки зрения, актуально построение общих математических моделей упругих электропроводящих, а также, ферромагнитных тонких оболочек и пластин на основе трехмерной несимметричной теории упругости.

В работе [5] на основе асимптотического метода построена общая прикладная-двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек по классической теории упругости. В работах [11-16] асимптотическим методом построены теории тонких балок, оболочек и пластин на основе несимметричной теории упругости.

В данной работе асимптотическим методом построена основная система двумерных уравнений магнитоупругости электропроводящих не ферромагнитных тонких оболочек и пластин на основе трехмерной несимметричной теории магнитоупругости. Для определения электромагнитного поля в окружающей оболочку или пластинку области (бесконечное трёхмерное пространство за

^{*)} Работа доложена на «Euromech Colloquium 510. UPMC, Paris, France, May 13-16, 2009, Mechanics of Generalized Continua: A hundred years after the Cosserats».

исключением области тонкого тела) трёхмерную область, занимаемую тонкой оболочкой или пластинкой на уровне исходного приближения асимптотического метода, можем представлять как математический разрез по срединной поверхности оболочки или пластинки, по которой будут течь поверхностные токи электропроводности, представляющие собой усредненные токи по толщине оболочки или пластинки. Получены двумерные граничные условия на граничном контуре срединной поверхности оболочки или пластинки, как для механических, так и для соответствующих электродинамических величин. В результате, в зависимости от значений безразмерных физических параметров материала построены общие математические модели магнитоупругости микрополярных электропроводящих не ферромагнитных тонких оболочек и пластин с независимыми полями перемещений и вращений со стесненным вращением и «с малой сдвиговой жесткостью».

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное микрополярное упругое электропроводящее (неферромагнитное) однородное тело и отнесём его к триортогональной неподвижной системе координат [5,17]. Пусть оболочка находится во внешнем стационарном однородном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}^0 = \{H_{01}, H_{02}, H_{03}\}$. Будем исходить из основных уравнений линеаризованной теории магнитоупругости для трехмерной микрополярной среды [6-10].

Уравнения движения микрополярного (неферромагнитного) упругого электропроводящего тела с учетом массовых сил – электромагнитного происхождения:

уравнения движения

$$\nabla_m \sigma^{mn} + f^n = \rho \frac{\partial^2 V^n}{\partial t^2}, \quad \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk} \sigma_{mk} = J \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

обобщенный закон Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} &= (\mu + \alpha) \gamma_{mn} + (\mu - \alpha) \gamma_{nm} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{nm} \\ \mu_{mn} &= (\gamma + \varepsilon) \kappa_{mn} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{nm} + \beta \kappa_{kk} \delta_{nm} \end{aligned} \quad (1.2)$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn} \omega^k, \quad \kappa_{mn} = \nabla_m \omega_n \quad (1.3)$$

уравнения электродинамики (квазистационарной) с конечной электропроводностью в области движущейся среды

$$\text{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{h} = 0, \quad \text{div} \vec{E} = 4\pi \rho_e \quad (1.4)$$

уравнения электродинамики (квазистационарной) во внешней от тела области (вакуума):

$$\text{rot} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{rot} \vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{E}^{(e)} = 0, \quad \text{div} \vec{h}^{(e)} = 0 \quad (1.5)$$

Здесь $m, n = 1, 2, 3$; σ^{nm} , μ^{nm} – контравариантные компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn} , κ_{mn} – ковариантные компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения; V_n – ковариантные компоненты вектора перемещения (\vec{V}), ω_n – ковариантные компоненты вектора независимого поворота ($\vec{\omega}$):

$$\vec{F} = \{f^1, f^2, f^3\} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{H}^0 \quad (1.6)$$

\vec{F} – вектор массовых сил электромагнитного происхождения;

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \times \vec{H}^0 \right) \quad (1.7)$$

\vec{j} – вектор плотности возбужденного в теле полного электрического тока; $\vec{E}, \vec{E}^{(e)}$ – векторы напряженности возбужденного электрического тока, соответственно, в теле и в вакууме; $\vec{h}, \vec{h}^{(e)}$ – векторы напряженности возбужденного магнитного поля, соответственно, в теле и в вакууме; ρ_e – объемная плотность электрического заряда в теле; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие константы микрополярного материала оболочки, ρ – плотность материала, j – мера инерции при вращении материала тела; σ – коэффициент электропроводности материала тела; c – электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в вакууме; δ_{nm} – символы Кронекера, e^{nmk} – контравариантные компоненты тензора Леви-Чивиты.

Механические граничные условия на лицевых поверхностях оболочки имеют вид:

$$\sigma_{k3} \Big|_{\alpha_3 = \pm h} = \mp q_k^\pm \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.8)$$

На поверхности края оболочки Σ предполагается, что заданы граничные условия либо первого, либо второго, либо смешанного варианта граничных условий микрополярной теории упругости.

Электродинамические граничные условия, как на лицевых поверхностях оболочки, так и на поверхности края оболочки будут представлять следующие соотношения:

$$n^k [E_k]_- = 4\pi \hat{\rho}_e, \quad e^{nmk} n_m [h_k]_- = 0, \quad n^k [h_k]_- = 0, \quad e^{nmk} n_m [E_k]_- = 0 \quad (1.9)$$

Здесь, $[\cdot]_-$ – скачок искомой величины через поверхность раздела сред (тела и вакуума); $\hat{\rho}_e$ – плотность поверхностного электрического заряда; n^k ($k = 1, 2, 3$) – компоненты вектора нормали к поверхности тела.

Условиями на бесконечности будут служить требования, по которым убывание векторов электромагнитного поля в вакууме на расстоянии происходило бы по закону:

$$\left| \vec{E}^{(e)} \right| = 0 \left(\frac{1}{r} \right), \quad \left| \vec{h}^{(e)} \right| = 0 \left(\frac{1}{r} \right) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad 0 \leq t < \infty \quad (1.10)$$

где r – расстояние от начала координат до точки наблюдения.

При помощи начальных условий, при $t = 0$ задаются значения компонентов вектора перемещения, вектора независимого поворота, компоненты линейной и вращательной скоростей точек тела, а также изменения характеристик электромагнитного поля.

2. Преобразование трехмерных уравнений микрополярной теории магнитоупругости. Удобно введение несимметричного тензора силовых напряжений [5,14,17] и аналогичного тензора для моментных напряжений [14,15]:

$$\begin{aligned}
\tau_{ii} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \sigma_{ii}, \quad \tau_{ij} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \sigma_{ij}, \quad \tau_{i3} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \sigma_{i3} \quad (i \leftrightarrow 3) \\
\nu_{ii} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \mu_{ii}, \quad \nu_{ij} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \mu_{ij}, \quad \nu_{i3} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \mu_{i3} \quad (i \leftrightarrow 3) \\
\tau_{33} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \sigma_{33}, \quad \nu_{33} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \mu_{33}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем индексы i, j принимают значения 1, 2, притом $i \neq j$.

В обозначениях (2.1) основная система магнитоупругости микрополярного тела принимает вид:

уравнения движения

$$\begin{aligned}
L_1 + \frac{\tau_{13} + \tau_{31}}{R_1} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{\partial \tau_{31}}{\partial \alpha_3} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \left\{ \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} - \frac{1}{c} H_{03} j_2 + \frac{1}{c} H_{02} j_3 \right\} \\
L_2 + \frac{\tau_{23} + \tau_{32}}{R_2} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial \tau_{32}}{\partial \alpha_3} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \left\{ \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} + \frac{1}{c} H_{03} j_1 - \frac{1}{c} H_{01} j_3 \right\} \\
-L + F + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial \alpha_3} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \left\{ \rho \frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} - \frac{1}{c} H_{02} j_1 + \frac{1}{c} H_{01} j_2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
K_i + \frac{\nu_{i3} + \nu_{3i}}{R_i} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) \frac{\partial \nu_{3i}}{\partial \alpha_3} - (-1)^j \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) (\tau_{3j} - \tau_{j3}) &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) J \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} \\
-K + \Phi + \frac{\partial \nu_{33}}{\partial \alpha_3} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \tau_{12} - \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \tau_{21} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) J \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) e_i &= \frac{1}{E} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) \tau_{ii} - \frac{\nu}{E} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \tau_{jj} - \frac{\nu}{E} \tau_{33} \\
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_3} &= \frac{1}{E} \tau_{33} - \frac{\nu}{E} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \tau_{11} - \frac{\nu}{E} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \tau_{22} \\
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) t_j - (-1)^j \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \omega_3 &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) \tau_{ij} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \tau_{ji} \\
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_3} - (-1)^j \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \omega_j &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \tau_{3i} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \tau_{i3} \\
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) g_i + (-1)^j \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \omega_j &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) \tau_{i3} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) \tau_{3i} \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \kappa_i &= \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) v_{ii} - \frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) v_{jj} - \frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)} v_{33} \\
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_3} &= \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} v_{33} - \frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) v_{11} - \frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) v_{22} \\
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) n_j &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) v_{ij} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} v_{ji}, \quad \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_3} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} v_{3i} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} v_{i3} \\
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \theta_i &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) v_{i3} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) v_{3i}.
\end{aligned}$$

уравнения электродинамики для движущейся оболочки области

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_2} \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2} - \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3} - \frac{h_2}{R_2} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{4\pi\sigma}{c} \left(E_1 + \frac{1}{c} \left(H_{03} \frac{\partial V_2}{\partial t} - H_{02} \frac{\partial V_3}{\partial t}\right)\right) \\
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3} + \frac{h_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{4\pi\sigma}{c} \left(E_2 + \frac{1}{c} \left(H_{01} \frac{\partial V_3}{\partial t} - H_{03} \frac{\partial V_1}{\partial t}\right)\right) \\
\frac{1}{A_1} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) h_2 - \frac{1}{A_2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) h_1 &= \\
&= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{4\pi\sigma}{c} \left(E_3 + \frac{1}{c} \left(H_{02} \frac{\partial V_1}{\partial t} - H_{01} \frac{\partial V_2}{\partial t}\right)\right) \\
\frac{1}{A_1} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) h_1 + \frac{1}{A_2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) h_2 + \\
&+ \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_3} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{h_3}{R_1} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{h_3}{R_2} = 0 \\
\frac{1}{A_2} \frac{\partial E_3}{\partial \alpha_2} - \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial E_2}{\partial \alpha_3} - \frac{E_2}{R_2} &= -\frac{1}{c} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial h_1}{\partial t} \\
\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{\partial E_1}{\partial \alpha_3} + \frac{E_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial E_3}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{c} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{\partial h_2}{\partial t} \\
\frac{1}{A_1} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial E_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) E_2 - \frac{1}{A_2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{\partial E_1}{\partial \alpha_2} - \\
&- \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) E_1 = -\frac{1}{c} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial h_3}{\partial t} \\
\frac{1}{A_1} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial E_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) E_1 + \frac{1}{A_2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{\partial E_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) E_2 + \\
&+ \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{\partial E_3}{\partial \alpha_3} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \frac{E_3}{R_1} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \frac{E_3}{R_2} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) 4\pi\rho_e
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2} \right) \frac{\partial j_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1} \right) j_1 + \frac{1}{A_2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1} \right) \frac{\partial j_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2} \right) j_2 + \\
& \quad + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1} \right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2} \right) \frac{\partial j_3}{\partial \alpha_3} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2} \right) \frac{j_3}{R_1} + \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1} \right) \frac{j_3}{R_2} = 0 \\
j_1 &= \sigma \left(E_1 + \frac{1}{c} \left(H_{03} \frac{\partial V_2}{\partial t} - H_{02} \frac{\partial V_3}{\partial t} \right) \right), \quad j_2 = \sigma \left(E_2 + \frac{1}{c} \left(H_{01} \frac{\partial V_3}{\partial t} - H_{03} \frac{\partial V_1}{\partial t} \right) \right) \\
j_3 &= \sigma \left(E_3 + \frac{1}{c} \left(H_{02} \frac{\partial V_1}{\partial t} - H_{01} \frac{\partial V_2}{\partial t} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Механические граничные условия на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ будут выражаться так:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\tau_{3i}}{1 + \alpha_3 / R_j} \right]_{\alpha_3 = \pm h} &= \mp q_i^\pm, & \left[\frac{\tau_{33}}{(1 + \alpha_3 / R_1)(1 + \alpha_3 / R_2)} \right]_{\alpha_3 = \pm h} &= \mp q_3^\pm \\
\left[\frac{v_{3i}}{1 + \alpha_3 / R_j} \right]_{\alpha_3 = \pm h} &= \mp m_i^\pm, & \left[\frac{v_{33}}{(1 + \alpha_3 / R_1)(1 + \alpha_3 / R_2)} \right]_{\alpha_3 = \pm h} &= \mp m_3^\pm
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
L_i &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \tau_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\tau_{ii} - \tau_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\tau_{ji} + \tau_{ij}) \\
L &= \frac{\tau_{11}}{R_1} + \frac{\tau_{22}}{R_2}, \quad F = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \tau_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \tau_{23} \\
K_i &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (v_{ii} - v_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (v_{ji} + v_{ij}) \\
K &= \frac{v_{11}}{R_1} + \frac{v_{22}}{R_2}, \quad \Phi = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_{23}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v_{23} \\
e_i &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} V_j + \frac{V_3}{R_i}, \quad t_i = \frac{1}{A_j} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} V_j, \quad g_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_i} - \frac{V_i}{R_i} \\
\kappa_i &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \omega_j + \frac{\omega_3}{R_i}, \quad n_i = \frac{1}{A_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \omega_j, \quad \theta_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\omega_i}{R_i}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

3. Асимптотический метод. Рассмотрим задачу сведения трехмерной начально-граничной задачи (2.2)-(2.5), (1.5), (2.6), (1.9), (1.10) несимметричной теории магнитоупругости для тонкой оболочки к двумерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем, включая вопрос об удовлетворении граничным и начальным условиям. Отметим, что указанная проблема тесно связана с построением внутреннего итерационного процесса, а последняя, как убедимся, представляет двумерную задачу.

Для этой цели в трехмерных уравнениях несимметричной теории магнитоупругости перейдем к безразмерным величинам и выполним замену независимых переменных (координат α_n и времени t):

$$\begin{aligned} \alpha_i &= R\lambda^{-p}\xi_i, & \alpha_3 &= R\lambda^{-l}\zeta, & t &= \lambda^\omega \frac{h}{c_0}\tau, & c_0 &= \sqrt{\frac{E}{\rho}} \\ \frac{J}{\rho h^2} &= \lambda^{l(2k+1)}\bar{J}, & \bar{\tau}_{ij} &= \frac{\tau_{ij}}{E}, & \bar{v}_{ij} &= \frac{v_{ij}}{RE}, & \bar{V}_k &= \frac{V_k}{h}, & \bar{H}_{ok} &= \frac{H_{ok}}{\sqrt{E}} \\ \bar{H}_{ok} &= \lambda^{\kappa_1} H_{ok}^*, & \bar{h}_k &= \frac{h_k}{\sqrt{E}}, & \bar{E}_k &= \frac{c}{c_0} \frac{E_k}{\sqrt{E}}, & \bar{\rho}_e &= \frac{c}{c_0} \frac{h\rho_e}{\sqrt{E}} \\ \bar{j}_k &= \frac{c}{c_0} \frac{j_k}{\sigma\sqrt{E}}, & R_m &= \frac{c_0}{c} \frac{\sigma h}{c}, & \bar{R}_i &= \frac{R_i}{R}, & \bar{q}_k^\pm &= \frac{q_k^\pm}{E}, & \bar{m}_\kappa^\pm &= \frac{m_\kappa^\pm}{RE}, & t_0 &= \lambda^{-l(\omega-1)} \frac{R}{c_0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь R_m – безразмерный параметр электропроводности материала оболочки, величина ω характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния (НДС) во времени; величина p/l характеризует изменяемость НДС по координатам; p, l – целые числа, $l > p \geq 0$; λ – большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$; R – характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки.

При определении НДС оболочки большую роль играют значения физических констант микрополярного материала оболочки. С этой точки зрения будем вводить следующие безразмерные параметры:

$$\frac{\alpha}{E}, \quad \frac{\beta}{R^2 E}, \quad \frac{\gamma}{R^2 E}, \quad \frac{\varepsilon}{R^2 E} \quad (3.2)$$

Во всех рассмотренных ниже случаях примем: $R_m \sim 1$.

Следуя асимптотическому методу при построении внутренней задачи, наша цель будет заключаться в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ и времени τ) уравнения магнитоупругости к двумерным уравнениям (с независимыми переменными ξ_1 и ξ_2 и времени τ).

4. Теория магнитоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Будем предполагать, что безразмерные физические параметры (3.2) имеют значения:

$$\frac{\alpha}{E} \sim 1, \quad \frac{\beta}{R^2 E} \sim 1, \quad \frac{\gamma}{R^2 E} \sim 1, \quad \frac{\varepsilon}{R^2 E} \sim 1 \quad (4.1)$$

Числа ω , k и κ_1 в выражении (3.1) выбираем таким образом, чтобы в асимптотических приближениях получались непротиворечивые уравнения и чтобы инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения. Таким образом, получим:

$$\omega = 1 + \frac{p}{l}, \quad k = \frac{1}{2} - \frac{p}{l}, \quad 2\kappa_1 = -l - p \quad (4.2)$$

Имея в виду (4.1), (4.2), для величин внутренней задачи в трехмерной области оболочки с асимптотической точностью $O(\lambda^{p-l})$ получим следующие асимптотические представления:

$$V_i = h\lambda^{l-p} (V_i^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta V_i^1), \quad V_3 = h\lambda^{l-2p+c} (V_3^0 + \lambda^{-l+c}\zeta V_3^1), \quad \tau_{ii} = E\lambda^0 (\tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta \tau_{ii}^1)$$

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \lambda^{-p+c} \left(\omega_i^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \omega_i^1 \right), \quad \omega_3 = \lambda^0 \left(\omega_3^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \omega_3^1 \right), \quad \tau_{ij} = E\lambda^0 \left(\tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \tau_{ij}^1 \right) \\
\tau_{3i} &= E\lambda^{-p+c} \left(\tau_{3i}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{3i}^1 \right), \quad \tau_{i3} = E\lambda^{-p+c} \left(\tau_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{i3}^1 \right) \\
v_{ii} &= RE\lambda^{-2p+c} \left(v_{ii}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{ii}^1 \right), \quad v_{ij} = RE\lambda^{-2p+c} \left(v_{ij}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{ij}^1 \right) \\
v_{3i} &= RE\lambda^{-p} \left(v_{3i}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_{3i}^1 \right), \quad v_{i3} = RE\lambda^{-p} \left(v_{i3}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_{i3}^1 \right) \\
\tau_{33} &= E\lambda^{-l+c} \left(\tau_{33}^0 + \zeta \tau_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^2 \tau_{33}^2 \right), \quad v_{33} = RE\lambda^{-l} \left(v_{33}^0 + \zeta v_{33}^1 + \lambda^{-l+c} \zeta^2 v_{33}^2 \right) \\
h_i &= \sqrt{E}\lambda^{\kappa_2} \left(h_i^0 + \zeta h_i^1 \right), \quad h_3 = \sqrt{E}\lambda^{\kappa_2} h_3^0, \quad 2\kappa_2 = -l + p
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $c = 2p - l$ при $l \leq 2p$, $c = l - 2p$ при $2p \leq l \leq 4p$, $c = 2p$ при $l \geq 4p$.

В построенном итерационном процессе важен тот факт, что поле вращений точек оболочки независимо от поля перемещений.

Используем понятия усредненных усилий, силовых и моментных усредненных моментов:

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= \int_{-h}^h (1 + \alpha_3/R_j) \sigma_{ii} d\alpha_3, \quad S_{ij} = \int_{-h}^h (1 + \alpha_3/R_j) \sigma_{ij} d\alpha_3, \quad G_{ii} = - \int_{-h}^h (1 + \alpha_3/R_j) \sigma_{ii} \alpha_3 d\alpha_3, \\
L_{ii} &= \int_{-h}^h (1 + \alpha_3/R_j) \mu_{ii} d\alpha_3, \quad L_{ij} = \int_{-h}^h (1 + \alpha_3/R_j) \mu_{ij} d\alpha_3, \quad H_{ij} = \int_{-h}^h (1 + \alpha_3/R_j) \sigma_{ij} \alpha_3 d\alpha_3
\end{aligned} \tag{4.4}$$

а также, перемещений и независимых поворотов точек срединной поверхности оболочки:

$$u_i = V_i|_{\zeta=0}, \quad w = -V_3|_{\zeta=0}, \quad \Omega_i = \omega_i|_{\zeta=0}, \quad \Omega_3 = -\omega_3|_{\zeta=0}. \tag{4.5}$$

Как главный результат, на основе построенной внутренней задачи, на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, получим основную систему уравнений общей прикладной-двумерной теории магнитоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений:

$$\begin{aligned}
& \text{уравнения движения} \\
& \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) + \\
& \quad + (-1)^j \frac{1}{c} j_{0j} H_{03} = 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + (q_i^+ + q_i^-) \\
& \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \\
& \quad + (-1)^j (N_{3j} - N_{j3}) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} + (m_i^+ + m_i^-) \\
& \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{1}{c} j_{01} H_{02} + \frac{1}{c} j_{02} H_{01} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (q_3^+ + q_3^-) \\
& \frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (S_{12} - S_{21}) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} - (m_3^+ + m_3^-)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned}
 T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}] - \frac{\nu}{1-\nu} h (q_3^+ - q_3^-), \quad S_{ij} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}] \\
 L_{ii} &= 2h \left[\frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \chi_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta + 2\gamma} \chi_{jj} \right] - h \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} m, \quad L_{ij} = 2h [(\gamma + \varepsilon) \chi_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \chi_{ji}] \quad (4.7) \\
 N_{i3} &= -2h \frac{4\alpha\mu}{\alpha + \mu} \Gamma_{i3} + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} h (q_i^+ - q_i^-), \quad L_{i3} = -2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \chi_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} h (m_i^+ - m_i^-)
 \end{aligned}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{i3} &= -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i} + (-1)^j \Omega_j, \quad \chi_{i3} = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i} \\
 \Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j - \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i + (-1)^j \Omega_3 \\
 \chi_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j - \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \chi_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

интегродифференциальные уравнения для компонентов электрической поверхностной токи проводимости [5]:

$$\begin{aligned}
 j_{01}(P, t) &= -\frac{2\sigma h}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left[\frac{j_{01}(Q, t) \vec{e}_1(Q) \vec{e}_1(P)}{R_{PQ}} + \frac{j_{02}(Q, t) \vec{e}_2(Q) \vec{e}_1(P)}{R_{PQ}} \right] d\Omega + \\
 &\quad + \frac{2\sigma h}{c} \left(H_{03} \frac{\partial u_2(P, t)}{\partial t} - H_{02} \frac{\partial w(P, t)}{\partial t} \right), \quad P \in \Omega \\
 j_{02}(P, t) &= -\frac{2\sigma h}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left[\frac{j_{01}(Q, t) \vec{e}_2(P) \vec{e}_1(Q)}{R_{PQ}} + \frac{j_{02}(Q, t) \vec{e}_2(Q) \vec{e}_2(P)}{R_{PQ}} \right] d\Omega + \\
 &\quad + \frac{2\sigma h}{c} \left(H_{01} \frac{\partial w(P, t)}{\partial t} - H_{03} \frac{\partial u_1(P, t)}{\partial t} \right), \quad P \in \Omega
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь T_{ii} , S_{ij} , N_{i3} – усредненные усилия; L_{ii} , L_{ij} , L_{i3} – усредненные моменты от моментных напряжений; $\tilde{A}_{ii}, \tilde{A}_{ij}, \tilde{A}_{i3}$ – компоненты тензора деформации, χ_{ii} , χ_{ij} , χ_{i3} – компоненты тензора изгиба-кручения в точках срединной поверхности оболочки. \vec{e}_1, \vec{e}_2 – орты координатных линий α_1 и α_2 на срединной поверхности оболочки; R_{PQ} – фундаментальное решение системы уравнений (1.5) для всего вакуумного трехмерного пространства (R^3) [5]; R_{PQ} – трехмерное расстояние между точкой $Q \in \Omega$ и произвольной точкой $P \in R^3$ наблюдателя (в системе уравнений (4.9), $P \in \Omega$).

Механические граничные условия на контуре Γ срединной поверхности оболочки будут выражаться так:

$$\begin{aligned}
T_{11} \Big|_{\Gamma} &= \int_{-h}^h p_1^* d\alpha_3, & S_{12} \Big|_{\Gamma} &= \int_{-h}^h p_2^* d\alpha_3, & N_{13} \Big|_{\Gamma} &= - \int_{-h}^h p_3^* d\alpha_3 \\
L_{11} \Big|_{\Gamma} &= \int_{-h}^h m_1^* d\alpha_3, & L_{12} \Big|_{\Gamma} &= \int_{-h}^h m_2^* d\alpha_3, & L_{13} \Big|_{\Gamma} &= - \int_{-h}^h m_3^* d\alpha_3
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Электродинамические граничные условия на этом же контуре Γ имеют вид [5]:

$$j_{01} = 0, \quad j_{02} = 0 \tag{4.11}$$

К основным уравнениям (4.6)-(4.9) и граничным условиям (4.10),(4.11) следует присоединить соответствующие начальные условия.

Таким образом, уравнения (4.6)-(4.9), граничные условия (4.10),(4.11) и начальные условия образуют общую математическую модель магнитоупругости микрополярных упругих электропроводящих неферромагнитных оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

5. Теория магнитоупругости микрополярных тонких оболочек со стеснённым вращением. Предположим, что безразмерные физические параметры материала оболочки (3.2) теперь имеют значения:

$$\frac{\alpha}{E} \sim 1, \quad \frac{\beta}{R^2 E} = \lambda^{-2l} \beta_*, \quad \frac{\gamma}{R^2 E} = \lambda^{-2l} \gamma_*, \quad \frac{\varepsilon}{R^2 E} = \lambda^{-2l} \varepsilon_*, \quad \text{где } \beta_*, \gamma_*, \varepsilon_* \sim 1 \tag{5.1}$$

Для чисел ω , k и κ_1 для рассматриваемого случая (5.1) получим

$$\omega = 1 + \frac{p}{l}, \quad k = \frac{1}{2} - \frac{p}{l}, \quad 2\kappa_1 = -l - p + 2c, \tag{5.2}$$

где $c = 2p - l$ при $l \leq 2p$, $c = 0$ при $l \geq 2p$.

Для величин внутренней задачи в трехмерной области оболочки на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ получим следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned}
\tau_{ii} &= E\lambda^0 (\tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{ii}^1), & \tau_{ij} &= E\lambda^0 (\tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{ij}^1), & V_i &= h\lambda^{l-p} (V_i^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta V_i^1) \\
\tau_{3i} &= E\lambda^{p-c} (\tau_{3i}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \tau_{3i}^1 + \lambda^{-2l+2p} \tau_{3i}^2), & \tau_{i3} &= E\lambda^{p-c} \tau_{i3}^0, & \tau_{33} &= E\lambda^{-l+2p-c} (\tau_{33}^0 + \zeta \tau_{33}^1) \\
V_3 &= h\lambda^{l-c} V_3^0, & \omega_i &= \lambda^{p-c} \omega_i^0, & v_{ii} &= RE\lambda^{-c} v_{ii}^0, & v_{ij} &= RE\lambda^{-c} v_{ij}^0, & \omega_3 &= \lambda^0 (\omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \omega_3^1) \\
v_{i3} &= RE\lambda^{-p} (v_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{i3}^1) (i \leftrightarrow 3), & v_{33} &= RE\lambda^{-c} (v_{33}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_{33}^1 + \lambda^{-2l+2p} \zeta^2 v_{33}^2) \\
h_i &= \sqrt{E}\lambda^{\kappa_2} (h_i^0 + \zeta h_i^1), & h_3 &= \sqrt{E}\lambda^{\kappa_2} h_3^0, & 2\kappa_2 &= -l + p, & j_k &= \frac{c_0}{c} \sigma \sqrt{E}\lambda^{\kappa_1} j_k^0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Качественная сторона построенной внутренней задачи состоит в том, что повороты точек срединной поверхности оболочки теперь связаны с перемещениями этих же точек.

Если в данном случае ввести усредненные силовые и моментные характеристики (4.4) и использовать обозначения (4.5), как главный результат, на основе построенной внутренней задачи для случая (5.1),(5.2), на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ получим систему основных уравнений прикладной-двумерной теории магнитоупругости микрополярных упругих тонких оболочек со стеснённым вращением:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) + (-1)^j \frac{1}{c} J_{0j} H_{03} = 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + (q_i^+ + q_i^-)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{1}{c} j_{01} H_{02} + \frac{1}{c} j_{02} H_{01} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (q_3^+ + q_3^-) \quad (5.4) \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (G_{ii} - (-1)^j L_{ij}) + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \left[(G_{ii} - (-1)^j L_{ij}) - (G_{jj} + (-1)^j L_{ji}) \right] - \frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (H_{jj} + (-1)^j L_{ji}) \\ - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \left[(H_{jj} + (-1)^j L_{ji}) + (H_{ii} - (-1)^j L_{ij}) \right] - N_{i3} = (-1)^j \left[2Jh \frac{\partial^2 \Omega_j}{\partial t^2} + (m_j^+ + m_j^-) \right] - h(q_i^+ - q_i^-) \end{aligned}$$

соотношения упругости

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \quad S_{ij} = \frac{2Eh}{1+\nu} [\Gamma_{12} + \Gamma_{21}] + (-1)^j \frac{1}{2} (m_3^+ + m_3^-) \quad (5.5)$$

$$G_{ii} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \quad H_{ij} = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)} [K_{12} + K_{21}] + (-1)^j \frac{1}{2} [(m_3^+ + m_3^-) + L_{33}]$$

$$L_{ii} = 2h \left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma} \chi_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma} \chi_{jj} \right] + \frac{\beta}{\beta+2\gamma} L_{33}, \quad L_{ij} = 2h [(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}]$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j - \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i \quad (5.6)$$

$$K_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \beta_j, \quad K_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \beta_i, \quad \beta_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}$$

$$\chi_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j - \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \chi_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i$$

$$\Omega_i = -(-1)^j \frac{1}{2} (\psi_j - \beta_j), \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} (\Gamma_{21} - \Gamma_{12})$$

$$\text{где } L_{33} = \left(\frac{\text{th}(hk_1)}{hk_1} - 1 \right) 4\gamma h (\chi_{11} + \chi_{22}) - \frac{\text{th}(hk_1)}{hk_1} (m_3^+ - m_3^-).$$

К уравнениям (5.4)-(5.6) следует присоединить систему интегродифференциальных уравнений (4.9) для усредненных электрических токов j_{10}, j_{20} по срединной поверхности оболочки.

Механические граничные условия на контуре Γ срединной поверхности оболочки будут выражаться так [14,15]:

$$T_{11}|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_1^* d\alpha_3, \quad S_{12}|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_2^* d\alpha_3, \quad (L_{12} - G_{11})|_{\Gamma} = \int_{-h}^h (\alpha_3 p_1^* + m_2^*) d\alpha_3 \quad (5.7)$$

$$\left[-N_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_{12} - L_{11}) \right] |_{\Gamma} = \int_{-h}^h \left[p_3^* + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\alpha_3 p_2^* - m_1^*) \right] d\alpha_3$$

Электродинамические граничные условия на Γ будут иметь вид (4.11).

Уравнения (5.4)-(5.6), (4.9), граничные условия (5.7), (4.11) и соответствующие начальные условия образуют общую математическую модель микрополярных упругих электропроводящих не ферромагнитных оболочек со стесненным вращением.

6. Теория магнитоупругости микрополярных тонких оболочек “с малой сдвиговой жёсткостью”. Предположим, теперь, что физические безразмерные параметры (3.2) представимы в виде:

$$\frac{\alpha}{E} = \lambda^{-2l+2p} \alpha_*, \quad \frac{\beta}{R^2 E} = \beta_*, \quad \frac{\gamma}{R^2 E} = \gamma_*, \quad \frac{\varepsilon}{R^2 E} = \varepsilon_*, \quad \text{где } \alpha_*, \beta_*, \gamma_*, \varepsilon_* \sim 1 \quad (6.1)$$

Для чисел ω , k и κ_1 для рассматриваемого случая получим:

$$\omega = 1 + \frac{c}{2l}, \quad k = \frac{1}{2} + \frac{p}{l} - \frac{c}{2l}, \quad 2\kappa_1 = -l - p + c \quad (6.2)$$

где $c = 2p - l$ при $l \leq 2p$, $c = l - 2p$ при $2p \leq l \leq 4p$, $c = 2p$ при $l \geq 4p$.

Для величин внутренней задачи в трехмерной области оболочки с асимптотической точностью $O(\lambda^{p-l})$ получим следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} \tau_{ii} &= \mu \lambda^l \left(\tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{ii}^1 \right), \quad \tau_{ij} = \mu \lambda^l \left(\tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{ij}^1 \right), \\ \tau_{3i} &= \mu \lambda^p \left(\tau_{3i}^0 + \zeta \tau_{3i}^1 + \lambda^{-l+2p-c} \tau_{3i}^2 \right), \quad \tau_{33} = \mu \lambda^p \left(\tau_{33}^0 + \zeta \tau_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c} \tau_{33}^2 \right), \\ \tau_{33} &= \mu \lambda^c \left(\tau_{33}^0 + \lambda^{-c} \zeta \tau_{33}^1 \right), \quad V_i = R \lambda^{l-p} \left(V_i^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta V_i^1 \right) \\ v_{ii} &= R \mu \lambda^{l+2p-c} \left(v_{ii}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{ii}^1 \right), \quad v_{ij} = R \mu \lambda^{l+2p-c} \left(v_{ij}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_{ij}^1 \right) \\ v_{3i} &= R \mu \lambda^{l+3p-2c} \left(v_{3i}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_{3i}^1 \right), \quad v_{i3} = R \mu \lambda^{l+3p-2c} \left(v_{i3}^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_{i3}^1 \right) \\ v_{33} &= R \mu \lambda^{4p-2c} \left(v_{33}^0 + \zeta v_{33}^1 + \lambda^{-l+c} \zeta^2 v_{33}^1 \right), \quad V_3 = R \lambda^{l-c} \left(V_3^0 + \lambda^{-l+c} \zeta V_3^1 \right) \\ \omega_i &= \lambda^{l+p-c} \left(\omega_i^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \omega_i^1 \right), \quad \omega_3 = \lambda^{l+2p-2c} \left(\omega_3^0 + \lambda^{-l+c} \zeta \omega_3^1 \right) \\ h_i &= \sqrt{E \lambda^{\kappa_2}} \left(h_i^0 + \zeta h_i^1 \right), \quad h_3 = \sqrt{E \lambda^{\kappa_2}} h_3^0, \quad 2\kappa_2 = -l + p - c, \quad j_k = \frac{c_0}{c} \sigma \sqrt{E \lambda^{\kappa_1}} j_k^0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Отметим, что на основании (6.1), (6.2) в получаемых двумерных уравнениях внутренней задачи магнитоупругости микрополярных оболочек на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, величины “чисто моментного” происхождения отделяются и образуют отдельную систему уравнений.

Сформулируем эти отдельные группы двумерных уравнений.

Уравнения “чисто моментной” части задачи магнитоупругости микрополярных тонких оболочек:

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} + (m_i^+ + m_i^-) \\ \frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} - (m_3^+ + m_3^-) \end{aligned} \quad (6.4)$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} L_{ii} &= 2h \left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma} \chi_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma} \chi_{jj} \right] + h \frac{\beta}{\beta+2\gamma} (m_3^+ - m_3^-), \quad L_{ij} = 2h \left[(\gamma+\varepsilon) \chi_{ij} + (\gamma-\varepsilon) \chi_{ji} \right] \\ L_{i3} &= -2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \chi_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} L_{3i}, \quad \text{где } L_{3i} = h (m_i^+ - m_i^-) \end{aligned} \quad (6.5)$$

геометрические соотношения

$$\chi_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j - \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \chi_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \quad \chi_{i3} = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i} \quad (6.6)$$

Уравнения “чисто силовой” части задачи магнитоупругости микрополярных тонких оболочек:

уравнения движения

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{1}{c} j_{01} H_{02} + \frac{1}{c} j_{02} H_{01} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (q_3^+ + q_3^-)$$

$$\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) +$$

$$+ (-1)^j \frac{1}{c} j_{0j} H_{03} = 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + (q_i^+ + q_i^-)$$

$$N_{3i} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial G_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (G_{ii} - G_{jj}) - \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (H_{ji} + H_{ij}) + \frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + h(q_i^+ - q_i^-)$$

соотношения упругости

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}] - \frac{\nu}{1-\nu} h (q_3^+ - q_3^-), \quad S_{ij} = 2\mu h (\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) - (-1)^j 4\alpha h \Omega_3,$$

$$N_{i3} = N_{3i} - 2h \cdot 4\alpha \Gamma_{i3}, \quad G_{ii} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \quad H_{ij} = \frac{2h^3}{3} \mu (K_{12} + K_{21}) \quad (6.7)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{i3} = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i} + (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j - \frac{w}{R_i} \quad (6.8)$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i, \quad K_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \beta_j, \quad K_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \beta_i$$

К уравнениям (6.3)-(6.8) следует присоединить уравнения (4.9) для усредненных электрических токов по срединной поверхности оболочки.

Механические граничные условия на контуре Γ срединной поверхности оболочки будут выражаться так:

для “чисто моментной части задачи”

$$L_{1i} \Big|_{\Gamma} = \int_{-h}^h m_i^* d\alpha_3, \quad L_{13} \Big|_{\Gamma} = -\int_{-h}^h m_3^* d\alpha_3 - \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{-h}^h \alpha_3 m_2^* d\alpha_3 \quad (6.9)$$

для “силовой части задачи”

$$T_{11} \Big|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_1^* d\alpha_3, \quad S_{12} \Big|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_2^* d\alpha_3, \quad G_{11} \Big|_{\Gamma} = -\int_{-h}^h \alpha_3 p_1^* d\alpha_3$$

$$\left(-N_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_2} \right) \Big|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_3^* d\alpha_3 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{-h}^h \alpha_3 p_2^* d\alpha_3 \quad (6.10)$$

Уравнения (6.4)-(6.8), (4.9), граничные условия (6.9), (6.10), (4.11) и соответствующие начальные условия образуют общую математическую модель микрополярных упругих электропроводящих неферромагнитных оболочек “с малой

сдвиговой жесткостью”.

Отметим, что от построенных моделей для оболочек можем получить основные уравнения, граничные и начальные условия для микрополярных упругих электропроводящих не ферромагнитных пластин со свободным вращением; со стесненным вращением; “с малой сдвиговой жесткостью”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Изд.Физматлит, 1996. 288с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М. В. Некоторые задачи электромагнито-упругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143с.
4. Багдасарян Г. Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1999. 440 с.
5. Саркисян С. О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд. НАН Армении, 1992. 232с.
6. Kaliski S. Thermo-magneto-microelasticity //Bull. De L'Academie Polonise des Sciences. 1968. Vol. XVI. № 1. P. 7-13.
7. Kaliski S., Nowacki W. Wave-type Equation of Thermo-magneto-microelasticity// Bull. De L'Academie Polonise des Sciences. 1970. Vol. XVII. № 4. P. 155-159.
8. Maugin G. A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. 1988.
9. Eringen A. C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundation and Solids. Springer-Verlag. N. Y. 1999. 319p.
10. Багдасарян Г. Е., Асанян Д. Д. Основные уравнения и соотношения теории несимметричной магнитоупругости ферромагнитного тела //В сб.: “Проблемы механики деформируемых тел”, посвящённом 80-летию С. А. Амбарцумяна. Ереван: Изд. НАН Армении, 2002. С. 37-47.
11. Саркисян С. О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости //Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С. 41-54.
12. Sargsyan S. H. Dynamic Problem of Thin Plates on the Basis of Asymmetric Theory of Elasticity// Proc. of XXXIV Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. 2006. Repino, Saint-Petersburg, Russia, 25 June-1 July, 2006. P. 447-458.
13. Саркисян С. О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. № 1. С. 129-147.
14. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости //Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С. 309-319.
15. Саркисян С. О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек //Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. № 2. С. 54-166.
16. Sargsyan S. H. Analytical Mechanics of Bars, Plates and Shells on Asymmetrical Theory of Elasticity //XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. ICTAM 2008. August 24-29, 2008. Adelaide, Australia. Abstracts book. P. 228.
17. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН Армении, д.ф.-м.н., проф., зав. каф. мат.анализа и дифф. уравнений. Гюмрийский гос. пединститут
Тел.: (312)3–26-29; E-mail: afarmanyanyan@yahoo.com

Саркисян Лусине Самвеловна–к.ф.-м.н., доцент, н. С. каф. мат.анализа и дифф. уравнений. Гюмрийский гос. пединститут Тел.: (312)3–26-29;
E-mail: afarmanyanyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 27.06.2009

УДК 532.529.5: 532.591

**О ФОРМАХ НЕЛИНЕЙНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕРМИЧЕСКИ
РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ
ОГАНЯН Г.Г.**

Ключевые слова: газ, жидкость, волна, нелинейность, вязкость, межфазный теплообмен.
Keywords: gas, liquid, nonlinearity, viscosity, interfacial heat exchange

Օհանյան Գ.Գ.

**Գազահեղուկ խառնուրդում բարձր հաճախությամբ զրգրումների
նչ գծային տարածման ձևերի մասին**

Ուսումնասիրված են պրոպագացիոն գազի քվազիադիաբատիկ և քվազիիզոթերմիկ ռեժիմներում բարձր հաճախությամբ տարածվող ալիքների վարքը ոչ գծային դրվածքով: Դուրս են բերված այդպիսի ալիքային դինամիկա նկարագրող պարզեցված ոչ գծային հավասարումները, որոնց համար կառուցված են ճշգրիտ մասնավար լուծումները: Ջերմափոխանակության բացակայության և առաջին ռեժիմի դեպքերում ցույց է տրված, որ զրգրումները տարածվում են մեկուսացված, իսկ երկրորդ ռեժիմի՝ հարվածային ալիքի տեսքով:

Ohanyan G.G.

**On the Forms of Nonlinear Propagation of High-Frequency Perturbation
in a Thermal Relaxing Gas-Liquid mixture**

The quasyadiabatic and quasyisothermic regimes of propagation of highfrequency perturbation are considered in a thermal relaxing gas–fluid mixture. The simplified nonlinear equations are obtained. It is shown that in the absence of heat transfer and under the quasyadiabatic regime the form of propagation is solitone, or the shock wave in quasyisotherm regime.

Изучение высокочастотного волнового процесса без учета теплообмена, которому соответствует адиабатический или изотермический предельные режимы термодинамического поведения газа в пузырьках, сводится к исследованию решений нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Построены его точные частные решения, описывающие распространение уединённых волн как со скоростью, меньшей скорости звука в чистой жидкости (классическое решение), так и превышающей её. В пределе, когда реализуются сверхвысокие частоты, величины скоростей совпадают.

В случае малой по величине интенсивности межфазного теплообмена различаются квазиадиабатический и квазиизотермический режимы распространения высокочастотных возмущений, описываемые нелинейными модельными уравнениями, соответственно, третьего и второго порядков. Для их упрощенных вариантов построены точные частные решения, указывающие, что в первом из режимов при определенном законе теплообмена формой распространения является уединенная, а во втором – ударная волна. Скорости перемещения фронтов волн по величине могут отличаться от скорости звука в жидкости.

Экспериментальное изучение частотной зависимости фазовой скорости волны в водовоздушной смеси [1] выявило, что при высоких вынуждающих частотах фазовая скорость сравнима по величине со скоростью звука в воде, а при более высоких может даже превосходить ее. Обзор работ по изучаемому вопросу приведен в [2,3]. В газожидкостной смеси межфазный теплообмен может стать главным механизмом диссипации [2,4]. В таких смесях не выяснены формы распространения высокочастотной волны.

1. Основные уравнения. Рассматривается бесстолкновительная монодисперсная газожидкостная смесь, в которой отсутствуют процессы дробления, слипания и образования новых пузырьков сферической формы. Предполагается, что внешние источники тепла отсутствуют и температура несущей фазы (сжимаемая жидкость) постоянна. Из системы модельных уравнений течения смеси [3,4] в приближении Буссинеска можно получить многоволновое уравнение, описывающее нелинейное

распространение одномерных волн давления как с учетом эффектов сжимаемости и вязкости [2,3], так и межфазного теплообмена [5]

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{f0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{10}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + v \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - (1 - \beta_0) a_{10}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] - \right. \\
& \left. - \alpha_f \frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2} \right\} = \frac{1}{t_T} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{e0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{10}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + \right. \\
& \left. + v \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - (1 - \beta_0) a_{10}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] - \alpha_e \frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2} \right\} \\
& \alpha_e = \frac{1}{3} \frac{P_0}{\beta_0 \rho_0 a_0^2} \left(1 + 2 \frac{P_0}{\beta_0 \rho_0 a_0^2} \right), \quad \alpha_f = \frac{\gamma}{2} \frac{P_0}{\beta_0 \rho_0 a_0^2} \left(1 + \frac{P_0}{\beta_0 \rho_0 a_0^2} \right) \\
& v = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\beta_0 a_{10}^2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\omega_{ar}^2} \frac{a_{f0}^2}{a_{10}^2}, \quad a_{f0}^2 = \gamma a_{e0}^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_0 \rho_0} \\
& \omega_{ar}^2 = \gamma \omega_{ir}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_0} \frac{1}{R_0^2}, \quad \frac{1}{t_T} = \frac{3\gamma \lambda_2 \text{Nu}}{2 R_0^2}, \quad a_{e0} \leq a_0 \leq a_{f0}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь t – время, x – пространственная координата, P – безразмерное избыточное давление, ρ – плотность, R – радиус пузырька, μ – динамическая вязкость жидкости, λ_2 и γ – теплопроводность и показатель адиабаты газа, β_0 – объемное газосодержание, Nu – число Нуссельта, характеризующее интенсивность межфазного теплообмена, t_T – время тепловой релаксации, ω_{ar} и ω_{ir} – резонансные частоты Миннаерта, a – скорость звука. Индексы 1,2 и 0 отнесены, соответственно, к параметрам жидкости, газа и состоянию термодинамического равновесия (покоя) смеси, e и f – к изотермическому и адиабатическому предельным режимам термодинамического поведения газа в пузырьках. Формулы для нелинейных коэффициентов α_e, α_f , а также скоростей звука a_{e0} и a_{f0} приведены в упрощённом виде, где сжимаемостью жидкости пренебрежено.

Линейный вариант уравнения (1.1) использован в [6] для выявления зависимости фазовой скорости волны от частоты Ω , входящего в смесь сигнала. Сравнение численных расчетов, следуемых из теоретического анализа, с данными экспериментов [1,3] выявило их удовлетворительное совпадение. Структура уравнения (1.1), а именно, наличие волновых операторов разных порядков свидетельствует об иерархии распространения волн. Действительно, в отсутствие вязкости из анализа дисперсионного уравнения следует вывод, что как при адиабатическом ($t_T \rightarrow \infty$, $\text{Nu} \rightarrow 0$), так и изотермическом ($t_T \rightarrow 0$, $\text{Nu} \rightarrow \infty$) поведении газа в пузырьках при высоких частотах $\Omega^2 \gg 1/\beta_1 = \omega_{ar}^2 a_{10}^2 / a_{f0}^2$ в уравнении (1.1) главными становятся волновые операторы высших порядков. А это означает, что при реализации таких частот волна перемещается со скоростью звука a_{10} в чистой жидкости. При низких $\Omega^2 \ll \omega_{ar}^2 a_{10}^2 / a_{f0}^2$ частотах волна распространяется либо с адиабатической a_{f0} , либо с изотермической a_{e0} скоростью звука в смеси. Приведённый анализ иерархии волн согласуется с теорией Уизема [7].

Целью исследования является изучение процесса нелинейного распространения высокочастотного возмущения, описываемого волновым оператором высшего порядка. Поэтому в волновых операторах низшего порядка уравнения (1.1) можно полагать $\partial^2/\partial t^2 \approx a_{10}^2 \partial^2/\partial x^2$ и учесть, что $a_{e0}, a_{f0} \ll a_{10}$. Далее при интегрировании получаемого упрощённого уравнения константы интегрирования берутся равными нулю. Последующий переход к координатам

$$t' = \frac{a_{10}}{a_{f0}} \omega_{ar} t, \quad x' = \frac{\omega_{ar}}{a_{f0}} x \quad (1.2)$$

позволяет записать уравнение в безразмерной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial P}{\partial t} + P - \alpha_f P^2 \right) = -\chi \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial P}{\partial t} + P - \alpha_e P^2 \right) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \nu \beta_0 \omega_{ar} \frac{a_{10}}{a_{f0}} = \frac{4 \mu}{3 \rho_0} \frac{\omega_{ar}}{a_{10} a_{f0}}, & \chi &= \frac{1}{t_T} \frac{1}{\omega_{ar}} \frac{a_{f0}}{a_{10}} = \frac{\gamma}{2} \frac{\omega_{ar}}{a_{10} a_{f0}} \frac{\lambda_2 \text{Nu}}{\beta_0} = \\ &= 6\gamma \frac{a_{f0}}{a_{10}} \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}}, & \text{Pe} &= \frac{4R_0^2}{\lambda_2} \omega_{ar} \end{aligned}$$

Здесь и далее штрихи над координатами опущены, Pe – число Пекле, характеризующее квадрат отношения диаметра пузырька к температурному погранслою внутри пузырька, при этом зависимость числа Nu от Pe берётся в виде [4]

$$\text{Nu} = \frac{2z^2(z \text{cth } z - 1)}{z^2 - 3(z \text{cth } z - 1)}, \quad z = \frac{\sqrt{\text{Pe}}}{2} \quad (1.4)$$

2. Квазиadiaбатический режим. Такой режим волнового процесса реализуется при термодинамическом поведении газа, отличающегося, пусть ненамного, от адиабатического. При этом, время тепловой релаксации превышает макроскопическое, например, период собственных колебаний пузырька, так что

$$t_T \geq \frac{2\pi}{\omega_{ar}}, \quad \chi \leq \frac{1}{2\pi} \frac{a_{f0}}{a_{10}} \quad (2.1)$$

Полагая в (1.1) $a_0 = a_{f0}$, будем иметь $\alpha_f = (\gamma + 1)/(2\gamma)$. Ввиду малости межфазного теплообмена его взаимодействием со слабым нелинейным эффектом в правой части уравнения (1.3) пренебрегается. Там же, в силу высокочастотности волнового процесса можно считать P быстро меняющейся во времени функцией, т.е. полагать $\partial P/\partial t \gg -\chi P$. Тогда упрощенный вариант уравнения (1.3) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} + (1 + \chi\delta)u - u^2 \right] = -\chi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad u = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} P \quad (2.2)$$

В бездиссипативном приближении ($\chi = \delta = 0$) уравнение (2.2) получено в [2,3]. Для нелинейных обобщённых уравнений волновой динамики в [8,9] разработан алгоритм построения точных частных решений, который в развитии используемого ими метода применяется к исследованию уравнения (2.2). Искомое решение ищется в виде разложения Лорана

$$u(x, t) = u_1 F^{-2} + u_1 F^{-1} + u_3 + \sum_{i=4}^{\infty} u_i F^{i-3} \quad (2.3)$$

где функции $F(x, t)$, $u_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots$) определяются в процессе построения решения. Подставляя (2.3) в (2.2), приравняем нулю выражения коэффициентов при степенях F . Из коэффициентов при F^{-5} , F^{-4} находим

$$u_1 = 6(F_t^2 - F_x^2)$$

$$u_2 = -\frac{6}{5}(F_{tt} - F_{xx}) - \frac{24}{25} \frac{F_t^2 F_{tt} - 2F_t F_x F_{tx} + F_x^2 F_{xx}}{F_t^2 - F_x^2} - \frac{6}{5} \chi \frac{F_t^2 - F_x^2}{F_t} - \frac{6}{5} \delta F_t \quad (2.4)$$

Здесь и ниже F_t, F_x, F_{tx}, \dots – частные производные от функции F . При нахождении функций u_3, u_i ($i \geq 4$) получаем рекуррентные дифференциальные соотношения. Однако, выясняется, что функция u_7 , определяемая из приравненного нулю коэффициента при F , в силу первой формулы из (2.3) выпадает из рассмотрения. Тем самым, рекуррентность нарушается, что дает основание полагать $u_i = 0$ ($i \geq 7$), после чего из выражений при F^6, F^4, F^2 следуют значения $u_6 = u_5 = u_4 = 0$. Тогда функция u_3 будет удовлетворять уравнению по виду, полностью совпадающему с (2.1), откуда определяются его тривиальные решения $u_3 = 0$ и $u_3 = 1 + \chi \delta$. Кроме того, из выражений коэффициентов при F^{-3}, F^{-2} и F^{-1} получим уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (G_1 + \delta u_1 F_t + u_1 u_2 - u_2 \nabla^2 F) + F_t \left[\Delta u_1 + (1 - 2u_3 + \chi \delta) u_1 + \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} - G_2 - \right.$$

$$\left. - u_2^2 - \delta u_2 F_t \right] + \chi (G_1 - u_2 \nabla^2 F) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta u_1 + (1 - 2u_3 + \chi \delta) u_1 + \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} - G_2 - u_2^2 - \delta u_2 F_t \right] -$$

$$- F_t \left[\Delta u_2 + (1 - 2u_3 + \chi \delta) u_2 - \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \right] + \chi (\Delta u_1 - G_2) = 0$$

$$G_1 = u_1 \Delta F + 2L u_1, \quad G_2 = u_2 \Delta F + 2L u_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta u_2 + (1 - 2u_3 + \chi \delta) u_2 + \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \right] + \chi \Delta u_2 = 0, \quad L = F_t \frac{\partial}{\partial t} - F_x \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.5)$$

Выберем функцию $F(x, t)$ в виде

$$F(x, t) = 1 + e^{kx - \omega t}, \quad \omega = \text{const}, \quad k = \text{const}, \quad (2.6)$$

где значения величин ω, k определяются ниже. Подстановка (2.6) в (2.4) приводит к формулам

$$u_1 = 6(\omega^2 - k^2) e^{2(kx - \omega t)}, \quad u_2 = -6 \left[(\omega^2 - k^2) \left(1 - \frac{1}{5} \frac{\chi}{\omega} \right) - \frac{1}{5} \delta \omega \right] e^{kx - \omega t} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.6), (2.7) в уравнения (2.5), получим алгебраическую систему уравнений для определения значений ω и k :

$$\begin{aligned}
& \omega^2 (\omega^2 - k^2)^2 + (1 + \chi\delta - 2u_3) \omega^2 (\omega^2 - k^2) - \frac{6}{5} \chi \omega (\omega^2 - k^2)^2 - \frac{1}{25} \chi^2 (\omega^2 - k^2)^2 - \\
& - \frac{2}{25} \chi \delta \omega^2 (\omega^2 - k^2) - \frac{6}{5} \delta \omega^3 (\omega^2 - k^2) - \frac{1}{25} \delta^2 \omega^4 = 0 \\
& 3\omega^2 (\omega^2 - k^2)^2 + 3(1 + \chi\delta - 2u_3) \omega^2 (\omega^2 - k^2) - \frac{18}{5} \chi \omega (\omega^2 - k^2)^2 + \\
& + \frac{3}{25} \chi^2 (\omega^2 - k^2)^2 + \frac{6}{25} \chi \delta \omega^2 (\omega^2 - k^2) - \frac{18}{5} \delta \omega^3 (\omega^2 - k^2) + \frac{3}{25} \delta^2 \omega^4 - \\
& - \frac{1 + \chi\delta - 2u_3}{5} [\chi \omega (\omega^2 - k^2) + \delta \omega^3] = 0 \\
& \omega (\omega^2 - k^2) + (1 + \chi\delta - 2u_3) \omega - \chi (\omega^2 - k^2) - \delta \omega^2 = 0 \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует соотношение, комбинирование которого с третьим уравнением позволяет выявить полезные для последующего анализа системы (2.8) связи

$$\omega (\omega^2 - k^2 + 1 + \chi\delta - 2u_3) \left(\omega^2 - k^2 + \frac{1 + \chi\delta - 2u_3}{6} \right) = 0 \tag{2.9}$$

Решения нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Пусть $\delta = \chi = 0$. В случае $u_3 = 0$ из (2.9) находим значение $\omega^2 - k^2 = -1$, которое подстановкой в формулы (2.7) позволяет, в силу разложения (2.3), получить явный вид функции $u(x, t)$. Совершив переход к размерным координатам (1.2) и давлению $P = P_0(1 + P')$, будем иметь

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{3\gamma}{\gamma + 1} \text{ch}^{-2} \left(\frac{1}{2} K \xi \right), \quad \xi = x - Vt \tag{2.10}$$

$$K = k \frac{\omega_{ar}}{a_{f0}} = \omega \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2} \frac{\omega_{ar}}{a_{f0}}}, \quad \Omega = \omega \frac{a_{10}}{a_{f0}} \omega_{ar}, \quad V = \frac{\Omega}{K} = a_{10} \left(1 + \frac{1}{\omega^2} \right)^{-1/2}$$

Здесь и ниже K и Ω – величины, имеющие размерность волнового числа и частоты, ξ – сопутствующая координата, связанная с фронтом $\xi = 0$, V – скорость перемещения фронта волны.

Если же $u_3 = 1$, то $\omega^2 - k^2 = 1$ и для размерного давления получим формулу

$$\frac{P}{P_0} = \frac{3\gamma + 1}{\gamma + 1} \left[1 - \frac{3\gamma}{3\gamma + 1} \text{ch}^{-2} \left(\frac{1}{2} K \xi \right) \right], \quad V = a_{10} \left(1 - \frac{1}{\omega^2} \right)^{-1/2} \tag{2.11}$$

Построенные решения (2.10) и (2.11) описывают поведения уединенных волн с разными амплитудами, распространяющимися вдоль положительного направления оси x , соответственно, со скоростями $V < a_{10}$ и $V > a_{10}$. При значениях $\omega^2 \gg 1$ получим $V \approx a_{10}$. Отметим, что в работах Корпела, например [10], приводится лишь решение (2.10).

Решение уравнения (2.2). Ограничимся рассмотрением наличия достаточно крупных пузырьков, что позволяет без ущерба общности в системе (2.8), (2.9) полагать $\chi\delta \ll 1$. Физически приемлемыми являются лишь решения, построенные при значении $u_3 = 0$. Из системы следует, что её корнями являются значения

$$\omega^2 - k^2 = -1, \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{\chi}{\delta}}$$

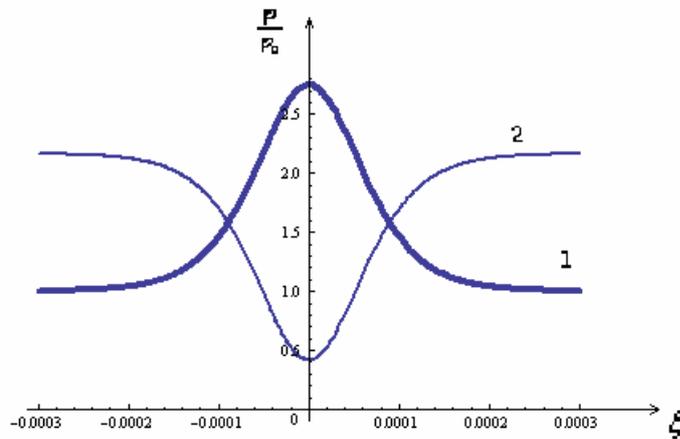
Тогда, в силу формул (2.6), (2.7) и разложения (2.3), можно построить функцию $u(x, t)$ как точное частное решение уравнения (2.2). Далее после перехода к координатам (1.2) и размерному (истинному) давлению решение запишется в форме

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{3\gamma}{\gamma+1} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{1}{2} K \xi \right), \quad \xi = x - Vt \quad (2.12)$$

$$K = \sqrt{1 + \frac{\chi}{\delta} \frac{\omega_{ar}}{a_{f0}}}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\chi}{\delta} \frac{a_{10}}{a_{f0}}} \omega_{ar}, \quad V = \frac{\Omega}{K} = a_{10} \left(1 + \frac{\delta}{\chi} \right)^{-1/2}$$

Полученное решение описывает эволюцию уединённой волны, перемещающейся вдоль положительного направления оси x со скоростью $V < a_{10}$. В случае $\chi/\delta \gg 1$ получим $V \approx a_{10}$. Отметим, что первое решение (2.10) уравнения Клейна–Гордона является обобщением формулы (2.12), поскольку, полагая в (2.10) $\omega = \sqrt{\chi/\delta}$, приходим к решению (2.12).

В рассматриваемом режиме при малых возмущениях радиуса для вычисленных по формулам (1.3), (1.4) значений параметра χ должно выполняться требование (2.1). В качестве иллюстрации изложенной теории рассмотрена водовоздушная ($\lambda_2 = 2.16 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$) смесь с исходными параметрами $\beta_0 = 0.01$, $P_0 = 0.05 \text{ МПа}$, $T_0 = 293 \text{ К}$. На фиг. 1 приведены графики решений (2.10), (2.12) и (2.11), отнесённые к пузырькам с $R_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, при которых $\chi = 6.762 \cdot 10^{-3}$, $\chi/\delta = 87670$, $\text{Nu} = 77.5$, $\Omega = 38.463 \text{ МГц}$, $V = 1500 \text{ м/с}$.



Фиг.1. Уединенные волны, описываемые нелинейными уравнениями (2.2) и Клейна–Гордона. Кривая 1 соответствует решению уравнения (2.10) или (2.12), кривая 2 – (2.11).

3. Квазиизотермический режим. Такой режим в газожидкостной смеси реализуется в случае, когда термодинамическое поведение газа в пузырьках отличается, пусть незначительно, от изотермического. Полагая в (1.1) $a_0 = a_{e0}$, будем иметь $\alpha_e = 1$, $\alpha_f = \gamma$. При чисто изотермическом режиме время тепловой релак-

сации несравнимо мало в сравнении с макроскопическим, например, с периодом колебания пузырька $t = 2\pi/\omega_{ir}$ и восстановление теплового равновесия в пузырьках можно полагать мгновенным: $t_T \rightarrow 0$ ($Nu \rightarrow \infty$, $\chi \rightarrow \infty$). Волновой процесс описывается лишь правой частью уравнения (1.3). В исследуемом квазиизотермическом режиме, когда

$$t_T < t = \frac{2\pi}{\omega_{ir}}, \quad \chi = 6\gamma \frac{a_{e0}}{a_{10}} \frac{Nu}{Pe} > \frac{1}{2\pi} \frac{a_{e0}}{a_{10}}, \quad Pe = \frac{2R_0^2}{\lambda_2} \omega_{ir} \quad (3.1)$$

в уравнении (1.3) главной является его правая часть. Подставляя её в левую часть, получим упрощенное уравнение

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial P}{\partial t} + P - P^2 - \frac{2(\gamma-1)}{\chi} P \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

Здесь диссипация проявляется через эффект вязкости. Искомое решение $p(x, t)$ ищется в виде разложения (2.2), а функция $F(x, t)$ будет вновь выбрана в форме (2.6). Последующие выкладки аналогичны приведённым в п.2. Из приравненных нулю выражений коэффициентов при F^{-5}, F^{-3} будет иметь

$$P_1 = 0, \quad P_2 = -\frac{\chi}{\gamma-1} \frac{F_t^2 - F_x^2}{F_t} = \frac{\chi}{\gamma-1} \frac{\omega^2 - k^2}{\omega} e^{kx - \omega t} \quad (3.3)$$

При получении рекуррентных соотношений, из которых должны последовательно определяться функции $P_i (i \geq 3)$, выясняется, что функция P_5 , удовлетворяющая приравненной нулю совокупности свободных членов (коэффициент при F^0), в силу (3.3), выпадает из рассмотрения, что приводит к нарушению рекуррентности. Тогда можно полагать $P_i = 0 (i \geq 5)$, а из коэффициента при F находим $P_4 = 0$. В силу полученных нулевых значений, функция P_3 удовлетворяет уравнению по виду, совпадающему с (3.2), откуда следуют тривиальные значения $P_3 = 0, P_3 = 1$. Из приравненных нулю коэффициентов при F^{-2}, F^{-1} будем иметь уравнения

$$P_2 \Delta F + 2LP_2 + \delta P_2 F_t + P^2 + \frac{2(\gamma-1)}{\chi} \left(P_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} - P_2 P_3 F_t \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$\Delta P_2 + \delta \frac{\partial P_2}{\partial t} + P_2 (1 - 2P_3) - \frac{2(\gamma-1)}{\chi} P_3 \frac{\partial P_2}{\partial t} = 0$$

Здесь виды операторов Δ, L приведены в (2.5). Подставляя уже укороченное разложение (2.2) и формулу (3.3) в уравнения (3.4), получим систему алгебраических соотношений, из которой определятся значения

$$\omega = \frac{\chi}{\gamma-1-\chi\delta} (2P_3 - 1), \quad \omega^2 - k^2 = -\frac{\gamma-1}{\gamma-1-\chi\delta} (2P_3 - 1)^2, \quad \chi\delta < \gamma-1 \quad (3.5)$$

Согласно формулам (3.3), (3.5), вне зависимости от значения P_3 , точное частное решение уравнения (3.2), выраженное через размерное (истинное) давление и записанное в размерных координатах (1.2), будет иметь вид:

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{1}{1 + e^{\pm k\xi}}, \quad \xi = x \mp Vt, \quad V = \frac{\Omega}{K} = a_{10} \left(1 + \frac{\gamma-1}{\chi} \frac{\gamma-1-\chi\delta}{\chi} \right)^{-1/2}$$

$$K = \frac{\chi}{\gamma - 1 - \chi\delta} \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{\chi} \frac{\gamma - 1 - \chi\delta}{\chi} \frac{\omega_{ir}}{a_{e0}}}, \quad \Omega = \frac{\chi}{\gamma - 1 - \chi\delta} \frac{a_{10}}{a_{e0}} \omega_{ir} \quad (3.6)$$

Здесь Ω – частота, K – волновое число, V – скорость перемещения фронта волны. Для волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в (3.6) выбираются верхние знаки. В этом случае получим асимптотические значения

$$P(-\infty) = 2P_0, \quad P(\infty) = P_0$$

которые характеризуют однородные состояния смеси вдали от фронта $\xi = 0$. Поскольку решение (3.6) непрерывно соединяет эти состояния впереди ($\xi > 0$) и позади ($\xi < 0$) него, постольку оно описывает структуру ударной волны давления, распространяющейся со скоростью $V < a_{10}$. При реализации значений $\chi \gg \gamma - 1$, имеющих место в случае сверхмелких пузырьков, имеем $V \approx a_{10}$. Для более крупных ($\chi\delta \ll \gamma - 1$, $\chi \sim \gamma - 1$), слагаемыми, ответственными за эффект вязкости в (3.2) и (3.6), можно пренебречь. Если же $\chi\delta > \gamma - 1$, то получаемое решение лишено физического смысла. С увеличением R_0 происходит увеличение значения числа Pe и поверхности пузырька, что усиливает интенсивность межфазного теплообмена. Однако, в силу (1.4) и (3.1), значения Nu/Pe и χ уменьшаются, при этом, для рассматриваемого режима ограничение снизу на величину параметра χ сохраняется.

Помимо вязкости, существует другой механизм диссипации, а именно: необратимый межфазный теплообмен. В исследуемом режиме в уравнении (1.3) главной является его правая часть и поэтому в волновом операторе левой части можно полагать $\partial^2 / \partial t^2 \approx a_{10}^2 \partial^2 / \partial x^2$. Далее принимается, что избыточное давление является медленно меняющимся по t -функции, т.е. $\partial P / \partial t \ll P$. В этом случае уравнение (1.3) упрощается и запишется в виде

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{\chi} \frac{\partial P}{\partial t} + P - P^2 - \frac{2\gamma}{\chi} P \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (3.7)$$

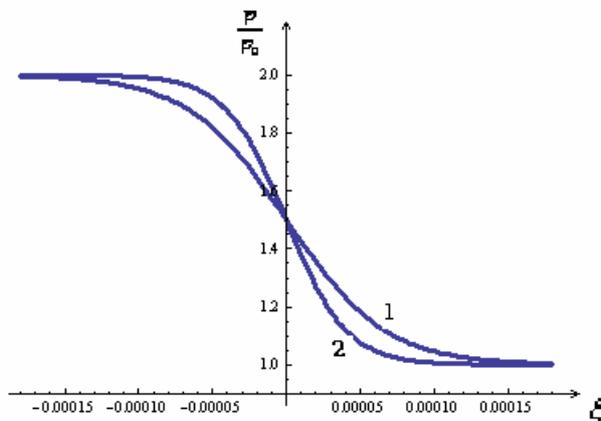
где диссипация обусловлена лишь наличием теплообмена. Решением уравнения (3.7), записанном в размерной форме, является описывающая структуру ударной волны функция (3.6), однако, с иными параметрами

$$K = \frac{\chi}{\gamma - 1} \sqrt{1 + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{\chi^2} \frac{\omega_{ir}}{a_{e0}}}, \quad \Omega = \frac{\chi}{\gamma - 1} \frac{a_{10}}{a_{e0}} \omega_{ir} \quad (3.8)$$

$$V = \frac{\Omega}{K} = a_{10} \left(1 + \frac{\gamma}{\chi} \frac{\gamma - 1}{\chi} \right)^{-1/2}$$

При значениях $\chi^2 \gg \gamma(\gamma - 1)$, имеющих место в случае сверхмелких пузырьков, имеем $V \approx a_{10}$, а для более крупных ($\chi \sim \gamma - 1$) получим $V < a_{10}$. С целью численной реализации полученных формул рассмотрена водовоздушная смесь с исходными характеристиками $\beta_0 = 0.01$, $P_0 = 0.05 \text{ МПа}$, $T_0 = 293 \text{ К}$, $R_0 = 7 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, для которой, в силу (1.4) и (3.1), $Nu = 11.48$, $\chi = 0.276$. На фиг.2 приведены графики решения (3.6) с разными (3.6) и (3.8) параметрами волны,

для которых $\Omega = 25.62 \text{ МГц}$ и, соответственно, $V = 852 \text{ м/с}$, $V = 520 \text{ м/с}$.



Фиг. 2. Структуры ударных волн давления. Кривая 1 соответствует решению уравнения (3.2), кривая 2 – (3.7).

Заключение. Распространение быстрой (высокоскоростной) волны в термически релаксирующей газожидкостной смеси описывается уравнениями, порядок которых обусловлены режимом термодинамического поведения газа в пузырьках. При адиабатическом или изотермическом поведении оно описывается нелинейным уравнением второго порядка (Клейна–Гордона). Его точные частные решения описывают распространение уединённых волн с разными амплитудами, перемещающимися как со скоростью, меньшей скорости звука в чистой жидкости (классическое решение), так и превышающей её. При квазиадиабатическом режиме порядок уравнения повышается на единицу вследствие учёта термической релаксации в пузырьках. Построенное для него точное частное решение совпадает с классическим при значении реализующейся частоты, равной отношению параметров, ответственных за проявление эффектов теплообмена, и вязкости. При квазиизотермическом режиме волновая динамика описывается обобщённым уравнением Клейна–Гордона на случай обусловленной учетом теплообмена дополнительной нелинейности. В этом режиме эффектом вязкости можно пренебречь. Построенные решения описывают структуры ударных волн давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fox F.E., Curley S.R., Larson G.S. Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1955. V.27. №3. P.534-539.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.2. М.: Наука, 1987. 360с.
3. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.2. М.: Наука, 1987. 464с.
5. Оганян Г.Г. Влияние межфазного теплообмена на нелинейное распространение волн в газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С.77-87.
6. Оганян Г.Г. О тепловом механизме затухания волны в газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С.75-83.
7. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves, etc.: Wiley, 1974, 636p. = Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 623с.

8. Кудряшов Н.А. Точные солитонные решения обобщённого уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т.52. № 3. С.465-470.
9. Кудряшов Н.А., Сухарев М.Б. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде // ПММ. 2001.Т.65. №5. С884-894.
10. Корпел А., Бенерджи П.П. Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям с дисперсией и к решениям солитонного типа // Тр. Ин-та инженеров по электротехн. и радиоэлектрон. ТИИЭР. 1984. Т.32. №9. С.6-30.

Сведения об авторе:

Оганян Гагик Гришаевич

Канд. физ.-мат.наук, ведущий научн.сотр.Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б. Тел.: (+37493)946-947

E-mail: oganyangagik@gmail.com

Поступила в редакцию 14.05.2009

УДК 539.3

**ՓԼԱՏՏԵՐ ՎՅԱԿՕՍՊՐՈՒԿ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻՆԵՐԻ ՑԻԼԻՆԴՐԻԿԵՍԿԻ ՕԲՈԼՈՇԿԵՐ
Ս ԿԵՏՈՄ ՍՐԱՆԻՇՆՈՒՄ ԿՐՈՒՄ ԳԱՅԻ ՍՏՐՈՒՄ
ԽՈՒԴԱՅՐՈՎ Բ.Ա.**

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, оболочка, флаттер, вязкоупругость.

Key words: integro-differential equations, shells, flutter, viscoelastic.

Խոսքարար Բ.Ա.

Սահմանային շերտի հաշվառմամբ առաձգամածուցիկ զլանային թաղանթների ֆլաթերը գազի հոսանքում

Որստամնասիրված է սահմանային շերտի հաշվառմամբ առաձգամածուցիկ զլանային թաղանթների ֆլաթերը գազի հոսանքում: Աշխատանքի հիմնական ուղղվածությունը առաձգամածուցիկ հատկությունների ուսումնասիրությունն է գերձայնային արագությունների ժամանակ: Որոշված են թաղանթի ֆլաթերի կրիտիկական արագությունները:

Khudayarov B. A.

Flutter Viscoelastic of a Cylindrical Shells taking into Account of a Boundary Layer in a Flow of Gas

In this work is investigated the flutter of viscoelastic cylindrical shells streamlined by gas current. The basic direction of work is consisted in taking into account of viscoelastic material's properties at supersonic speeds. Critical speeds for shell flutter are defined.

Исследуются задачи о флаттере вязкоупругих цилиндрических оболочек с учетом пограничного слоя в потоке газа. Основное направление работы состояло в учете вязкоупругих свойств материала при сверхзвуковых скоростях. Определены критические скорости флаттера оболочки.

В настоящее время многие результаты теоретических и экспериментальных исследований флаттера находятся еще в плохом согласии. Ввиду сложности явления панельного флаттера большинство теоретических исследований связано с использованием упрощающих предположений. Однако эти допущения, как правило, оказываются настолько ограничительными, что теоретическая модель перестает с достаточной точностью отражать реальные условия. Расхождения между теоретическими и экспериментальными оценками флаттера можно отчасти приписать следующим факторам: 1) неточной идеализации всех возможных сложных условий опирания панелей; 2) неучету влияния вязкости материала конструкции; 3) неучету влияния пограничного слоя.

В реальных условиях между поверхностью обшивки летательного аппарата и обтекающим её сверхзвуковым потоком имеется вязкий пограничный слой. Толщина его зависит от параметров потока и от конфигурации конструкции.

Учет пограничного слоя для упругих конструкций впервые был сделан в работе Фына [1] и Андерсона [2]. Фыном была предложена идеализованная схема пограничного слоя.

Влияние вязкоупругих свойств материала конструкций и учет пограничного слоя и некоторые результаты численного решения задачи о флаттере будут обсуждены ниже.

Рассмотрим шарнирно опертую, замкнутую, круговую, вязкоупругую цилиндрическую оболочку при наличии пограничного слоя. Оболочка с радиусом кривизны R срединной поверхности и длиной L , обтекается с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа со скоростью V , направленной вдоль образующих. Будем пользоваться обычными гипотезами теории упругих оболочек [3, 4], считая

справедливой гипотезу Кирхгоффа-Лява и полагая прогибы малыми по сравнению с толщиной оболочки.

Для выяснения роли пограничного слоя при флаттере цилиндрической оболочки воспользуемся идеализированной схемой, предложенной Фыном [1]. Представим пограничный слой в виде кольцевой области равномерного дозвукового течения, расположенный между оболочкой и однородным сверхзвуковым потоком. Толщину дозвуковой области обозначим через δ , скорость течения – через V_δ (фиг.1).

Физические соотношения между напряжениями σ_x , σ_y и σ_{xy} в срединной поверхности и деформациями ε_x , ε_y , ε_{xy} , согласно модели Больцмана – Вольтерра, примем в виде

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(1-R^*)(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \quad (x \leftrightarrow y), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}(1-R^*)\varepsilon_{xy}$$

где E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; R^* – интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$:

$$R^*\varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

Уравнения вязкоупругой цилиндрической оболочки с учетом пограничного слоя возьмём в виде

$$\frac{D}{h}(1-R^*)\nabla^4 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{q}{h} \quad (1)$$

$$\nabla^4 \Phi = -(1-R^*) \frac{E}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\text{где } \nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2.$$

Приводя систему (1) к одному уравнению, получим

$$\frac{D}{h}(1-R^*)\nabla^8 w + \frac{E}{R^2}(1-R^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nabla^4 \left(\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{q}{h} \right) = 0 \quad (2)$$

где q – аэродинамическая нагрузка:

$$q(x, y, t) = \frac{\aleph p_\infty M^* w_{nm}}{R} \cos \frac{my}{R} \left[\overline{B_{nm}} \cos \frac{n\pi x}{L} + \overline{\overline{B_{nm}}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right]$$

$$\overline{B_{nm}} = \frac{n_1 + n_2 n_3}{1 + n_3^2} p_1, \quad \overline{\overline{B_{nm}}} = \frac{n_1 n_3 + n_2}{1 + n_3^2} p_1, \quad p_1 = \frac{\sqrt{1 - M_\delta^2} p_\delta M_\delta}{\aleph p_\infty M^*}$$

$$n_1 = \left(\frac{n\pi R}{L} \right)^2 \Theta \left(1 - \frac{\bar{\delta}}{\eta_0} \right), \quad n_2 = \left(\frac{n\pi R}{L} \right)^2 \bar{\delta}, \quad n_3 = \Theta \bar{\delta} \left(1 - \frac{\bar{\delta}}{\eta_0^2} \right)$$

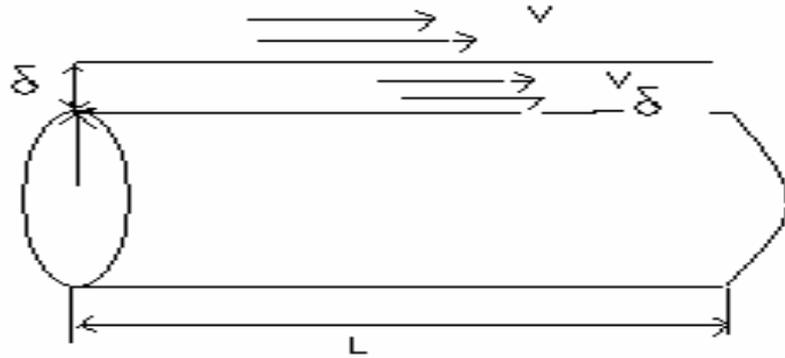
$$\bar{\delta} = \frac{M_\delta \delta}{R\sqrt{1-M_\delta^2}}, \quad \eta_0 = \frac{M_\delta}{\sqrt{1-M_\delta^2}}, \quad \Theta = \frac{\aleph p_\infty M^* L}{\sqrt{1-M_\delta^2} \aleph_\delta p_\delta M_\delta n \pi R}$$

Здесь ρ – плотность материала оболочки; h – толщина оболочки; \aleph – показатель политропы газа; p_∞ и V_∞ – соответственно, давление и скорость звука в невозмущённом потоке; $D = Eh^3 / (12(1-\mu^2))$ – цилиндрическая жёсткость;

$M^* = \frac{V}{V_\infty}$ – число Маха в невозмущённом потоке; $M_\delta^* = \frac{V_\delta}{V_{\delta\infty}}$ – число Маха в пограничном слое; $V_{\delta\infty}$ – скорость звука в пограничном слое.

Решения системы (2) ищем в виде

$$w(x, y, t) = \sum_n^N \sum_m^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{my}{R} \quad (3)$$



Фиг. 1. Пограничный слой на поверхности цилиндрической оболочки, обтекаемой потоком газа.

Подставляя (3) в уравнение (2) и применяя метод Бубнова–Галеркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений. Вводя в этой системе безразмерные коэффициенты и сохраняя прежние обозначения, систему сводим к уравнению относительно амплитуды прогиба w_{kl} :

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{kl} + \varepsilon \dot{w}_{kl} + \Omega^2 (1-R^*) B_{kl} w_{kl} + M_E (1-R^*) \left(k^2 \frac{\pi^2}{\lambda} \right)^2 w_{kl} - \\ - \sigma_0 C_{kl} w_{kl} + q^* \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \Gamma_{klmn} w_{nm} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } \Omega^2 = \frac{\lambda^2}{12(1-\mu^2)} M_E^2 (\beta_1)^2, \quad \lambda = \frac{L}{R}; \quad M_E = \sqrt{\frac{E}{\rho V_\infty^2}}$$

$$M_p = \sqrt{\frac{P_\infty}{\rho V_\infty^2}}; \quad \beta_1 = \frac{h}{R}; \quad q^* = \aleph M_p M^* \lambda^2 / \beta_1$$

Γ_{klmn} , A_{kl} , B_{kl} , C_{kl} – безразмерные коэффициенты.

Интегрирование системы (3) при ядре Колтунова–Ржаницына ($R(t) = A \cdot \exp(-\beta t) \cdot t^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$) проводилось численным методом, основанным на использовании квадратурных формул [5].

В качестве критерия, определяющего критическую скорость $V_{кр}$, принимаем условие, предложенное в работах [6-8].

Для определения $V = V_{кр}$ рассматриваются числа V_1 и V_2 , расположенные на интервале (V_0, V_n) таким образом, что $(V_0 < V_1 < V_2 < V_n)$. Сравнивая закон изменения w при $(V = V_1$ и $V = V_2)$, можно сделать следующие выводы:

а) если при $V < V_1$ закон изменения функции w близок к гармоническому, значит, $V_{кр}$ не может быть на интервале (V_0, V_1) , т.е. $V_{кр}$ лежит на интервале (V_1, V_n) ;

б) если при $(V > V_1)$ наблюдается быстрый рост функции w во времени, значит $V_{кр}$ лежит на интервале (V_0, V_1) .

Процессы а) и б), т.е. процесс исключения интервалов, не дающих нежелательные явления, повторяется для (V_0, V_1) или (V_1, V_n) и т.д. Поиск завершается тогда, когда оставшийся подынтервал уменьшается до достаточно малых размеров.

Результаты вычислений представлены в табл.1 и отражаются графиками, приведёнными на фиг.2–5. В табл.1 приводятся результаты расчетов, проведенных по формуле (4) при $N = 5$, $M = 6$ для оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа с параметрами $p_\infty = 1,014$ кг/см², $\aleph = 1,4$ и $V_\infty = 340$ м/с.

Из табл.1 видно, что увеличение вязкоупругих свойств материала конструкций при наличии пограничного слоя, критическая скорость флаттера уменьшается в 2,05 раза относительно упругих.

Исследовано влияние толщины пограничного слоя и скорости течения в дозвуковой зоне на критическую скорость флаттера. Увеличение толщины пограничного слоя и числа Маха в дозвуковой зоне приводит к увеличению критической скорости.

Таблица 1

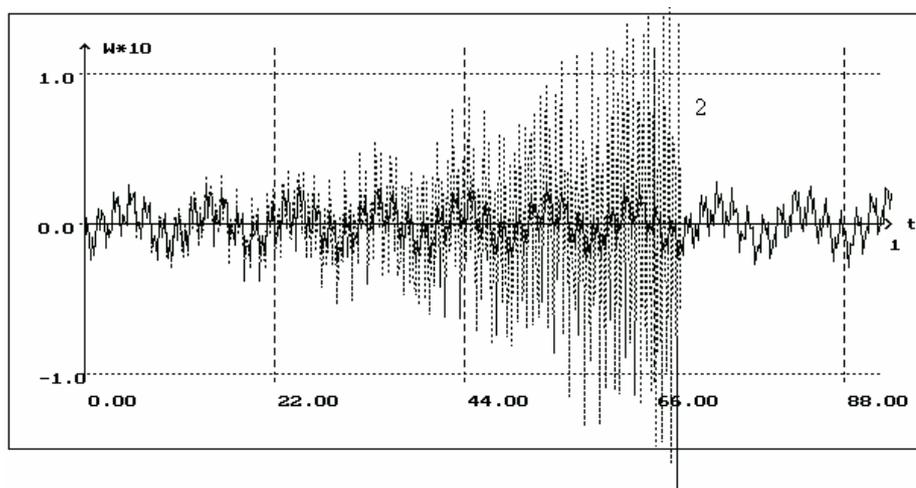
Скорость флаттера вязкоупругой цилиндрической оболочки с учётом пограничного слоя

A	α	β	β_δ	M_δ	$V_{кр}$
0	0,25	0,05	0,009	0,4	1180
0,007					996
0,1					575
0,07	0,12	0,05	0,009	0,4	661
	0,75				787
0,1	0,25	0,05	0,001	0,15	485
			0,08		753
0,1	0,25	0,05	0,009	0,5	700
				0,8	912

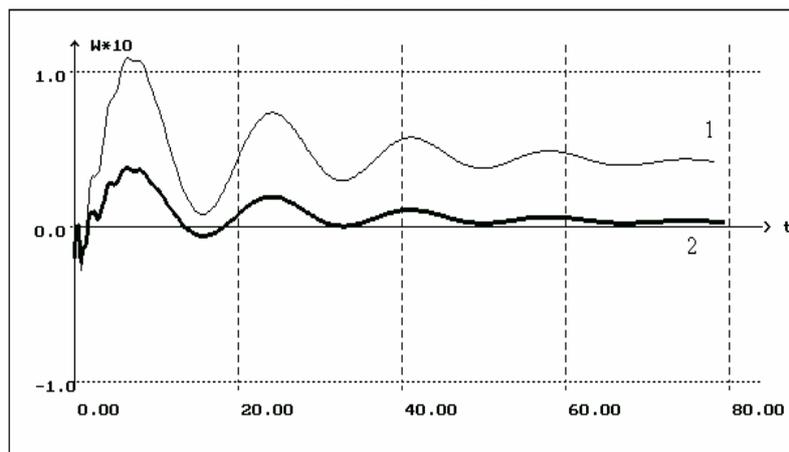
На фиг. 2 приведены зависимости $w = w(t)$ при ряде значений параметра вязкости A для цилиндрических оболочек. Из графиков видно, что решение упругих и вязкоупругих задач существенно отличается. В упругом случае колебания происходят периодические колебания. С увеличением значений параметра A критическая скорость флаттера уменьшается на 30-55%.

На фиг. 3 представлены в графической форме результаты вычислений при $\lambda = 6$, $N = 5$, $M = 6$, выполненных по (3). Из графиков видно, что увеличение скорости течения в дозвуковой области приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

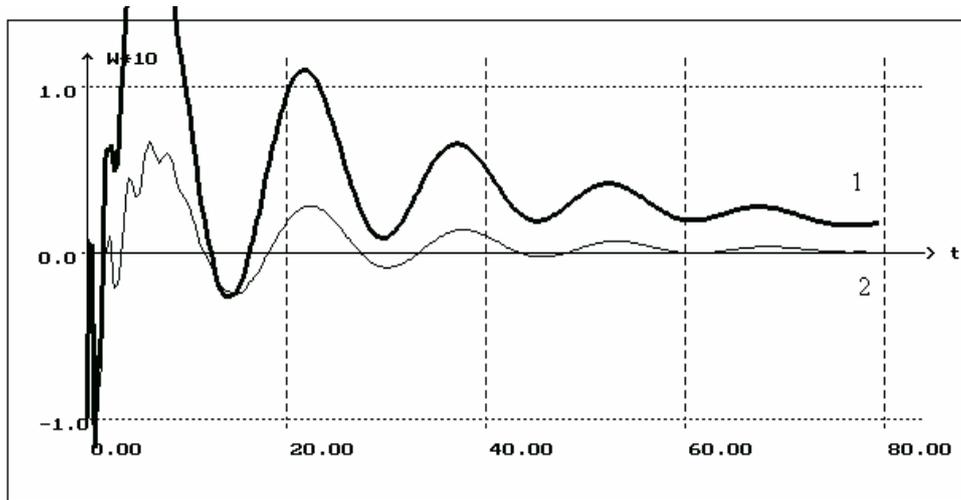
Увеличение толщины пограничного слоя влияет не только на величины критической скорости флаттера, но и на амплитуды колебаний оболочки (фиг. 4).



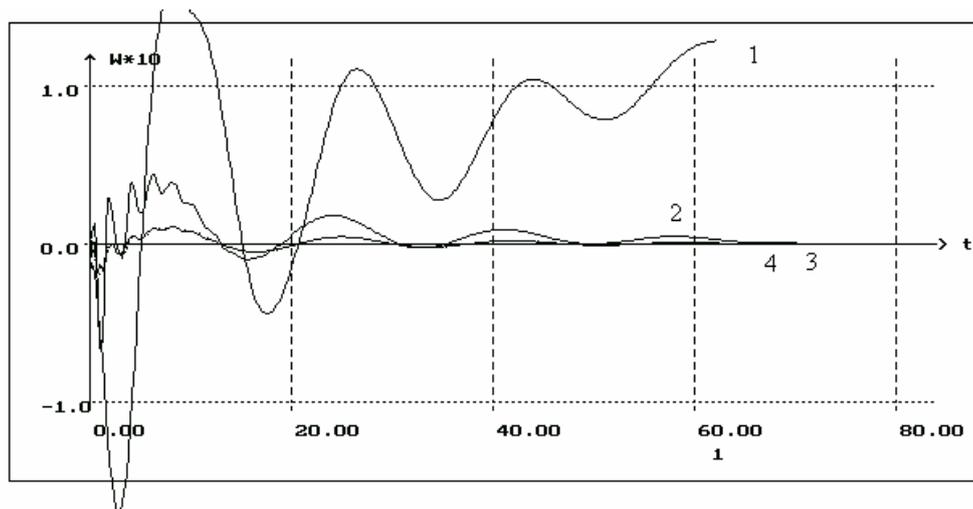
Фиг.2. Зависимость прогиба цилиндрической оболочки от времени при значениях параметра вязкости: $A = 0(1)$; $A = 0,001(2)$; $N = 5$; $\lambda_1 = 100$; $\lambda = 6$; $\beta_1 = 0,005$; $M_\delta = 0,35$; $\beta_\delta = 0,02$; $V = 918$.



Фиг. 3. Зависимость прогиба цилиндрической оболочки от времени при различных числах Маха в пограничном слое $M_\delta = 0,2(1)$; $M_\delta = 0,8(2)$.



Фиг. 4. Влияние толщины пограничного слоя на амплитуды колебаний оболочки:
 $\beta_\delta = 0,001(1)$; $\beta_\delta = 0,08(2)$.



Фиг. 5. Влияние числа полуволн по направлению образующих на амплитуду колебаний оболочки: $N = 2(1)$; $N = 3(2)$; $N = 4(3)$; $N = 5(4)$.

Исследована сходимость амплитуд колебаний оболочки. На фиг.5 приведены зависимости амплитуды прогиба от безразмерного времени t . При использовании пяти членов решение, очевидно, сходится (результаты очень близки к результатам с учетом четырёх членов), тогда как результаты, полученные при использовании всего лишь двух членов, являются неточными. Поэтому во всех расчетах, проведённых в настоящей работе, использовалось пять форм колебаний.

В заключение отметим, что увеличение толщины пограничного слоя и скорости течения в дозвуковой области приводит к возрастанию критической скорости флаттера, т.е. эффект пограничного слоя является стабилизирующим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фын Я.И. Некоторые последние достижения в исследовании панельного флаттера // Ракетная техника и космонавтика. 1963. № 4. С. 161–175.
2. Anderson W.I. Oscillatory pressures in an idealized boundary layer with application to cylinder flutter // J. AIAA. 1966. V.4. № 5. P. 865–872.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
5. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. №5. С. 867-871.
6. Худаяров Б.А. Численное решение задачи о флаттере вязкоупругих трехслойных пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №1. С. 59-62.
7. Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А. Исследование влияния вязкоупругого свойства материала конструкций летательного аппарата на критическое время и критические скорости флаттера //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. №1. С. 75–82.
8. Khudayarov B.A. Numerical Analysis of the Nonlinear Flutter of Viscoelastic Plates // International Applied Mechanics. New York, USA. 2005. Vol. 41. № 5. P. 538-542.

Сведения об авторе:

Худаяров Бахтияр Алимович – к.ф.-м.н., доцент каф. “Высшей математики” Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства
E-mail: bakht-Flpo@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.04.2009

ИНФОРМАЦИЯ

С 19-го по 23-ое июня в курортном городе Банфф (Альберта, Канада) состоялся XIV-ый Международный Симпозиум по динамическим играм и приложениям (14-th INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC GAMES AND APPLICATIONS).

Симпозиум и сборник "Достижения в динамических играх: теория, приложения и численные методы для дифференциальных и стохастических игр" (Advances in Dynamic Games: theory, applications and numerical methods for differential and stochastic games), изданный по материалам симпозиума были посвящены памяти выдающегося ученого, иностранного члена НАН Армении, члена-корреспондента РАН, лауреата Государственной премии РФ, профессора МФТИ Арика Артаваздовича Меликяна.

На симпозиуме были представлены доклады известных ученых, работающих в этой области, в частности, П. Бернарда (Франция), Дж. Лейтмана и Т. Башара (США), Ж. Олсдера (Голландия), Дж. Закура (Канада), Л.А. Петросяна и А. Ченцова (Россия), Ф. Имадо (Япония) и других.

В сборнике симпозиума приводятся выступления академика Ф.Л. Черноуьско (ИПМ РАН, Россия), иностранного члена НАН РА Л.А. Петросяна (СПбГУ, Россия), профессоров Ф. Имадо (Университет Шиншу, Япония), Б. Рустема (Имперский Колледж, Лондон, Англия), Н.В. Овакимян и Д. Степановича (Иллинойский университет, США), В.В. Аветисяна (ИМ НАН, Армения), Н.Н. Болотника (ИПМ РАН, Россия), А. Братусья (МГУ, Россия), К. Сажовского (Политехнический институт, Вроцлав, Польша), В.С. Пацко (ИММ, Екатеринбург, Россия), а также А.Р. Ахметжанова (ИПМ РАН, Россия) и М. Бородовского (Технологический институт, Атланта, США), посвященные памяти А.А. Меликяна.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Սարգսյան Վ.Ս. (Ծննդյան 75-ամյակի առթիվ)3

Դինուսց Ա. Ս. Կիսասանվերջ դրոշմի կոնտակտային դինամիկ խնդիրների լուծումն առաձգական կիսահարթությունում՝ մաշման գործոնի հաշվառումով5

Սարգսյան Ա.Մ. Համապատասխանության սկզբունքը առաձգականության և էլեկտրաառաձգականության տեսության խնդիրներում..... 13

Սարգսյան Վ. Կ. Հորիզոնական ճոճանակի սեփական հաճախության որոշման բանաձևի ճշգրտման մասին.....19

Համբարձումյան Ս.Ա., Բելուբեկյան Մ.Վ. Փոքր կորություն ունեցող թաղանթների միկրոբևեռ տեսության վերաբերյալ 23

Վարդանով Ա. Հ. Իդեալական հաղորդիչ շերտի մագնիսաառաձգական տատանումները հաստատուն մագնիսական դաշտում33

Սարգսյան Ա. Հ. Միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի ազատ տատանումները..... 41

Սարգսյան Ս. Հ., Սարգսյան Լ.Ս. Բարակ թաղանթների և սալերի մագնիսաառաձգականությունը առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսությամբ52

Օհանյան Գ.Գ. Գազահեղուկ խառնուրդում բարձր հաճախությամբ գրգռումների ոչ գծային տարածման ձևերի մասին..... 66

Խուդոյարով Բ.Ա. Սահմանային շերտի հաշվառմամբ առաձգամածուցիկ գլանային թաղանթների ֆլաթերը գազի հոսանքում76

Տեղեկատվություն.....83

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Саркисян В. С. К 75-летию со дня рождения.....	3
Динунц А. С. Решение динамической контактной задачи о взаимодействии полубесконечных штампов с упругой полуплоскостью с учётом фактора износа	5
Саргсян А.М. Принцип соответствия в задачах теории упругости и электроупругости	13
Саркисян В. К. Об уточнении формулы для определения собственной частоты горизонтального маятника	19
Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К микрополярной теории весьма пологих оболочек.....	23
Варганов А. Г. Магнитоупругие колебания идеально-проводящего слоя в постоянном магнитном поле	33
Саркисян А. А. Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок	41
Саркисян С.О., Саркисян Л.С. Магнитоупругость микрополярных упругих тонких оболочек и пластин	52
Оганян Г.Г. О формах нелинейного распространения высокочастотных возмущений в термически релаксирующей газожидкостной смеси	66
Худаяров Б.А. Флаттер вязкоупругих цилиндрических оболочек с учетом пограничного слоя в потоке газа	76
ИНФОРМАЦИЯ	83

CONTENTS

Sargsyan Vladimir S. 75-th Anniversary	3
Dinunts A.S. The solution of dynamic contact problems of interactions of semi-infinite stamps with elastic half-plane in presence of wear	5
Sargsyan A.M. The principle of conformity in the problems of elasticity theory and elektroelasticity	13
Sarkisyan V. K. About clarification of the formula for determination of intrinsic frequency of horizontal pendulum	19
Ambartsumian S.A., Belubekyan M.V. On micropolar theory of shallow shells	23
Vardanov A.H. Magnetoelastic Vibrations of Perfect Conductive Layer in Constant Magnetic Field	33
Sargsyan A. H. The Free Vibrations of Micropolar Thin Elastic Bars	41
Sargsyan S.H., Sargsyan L.S. Magnetoelasticity of Thin Plates and Shells on the basis of the Asymmetrical Theory of Elasticity	52
Ohanyan G.G. On the Forms of Nonlinear Propagation of High-Frequency Perturbation in a Thermal Relaxing Gas-Liquid mixture	66
Khudayarov B. A. Flutter Viscoelastic of a Cylindrical Shells taking into Account of a Boundary Layer in a Flow of Gas	76
Information	83