

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԻԿԱԿԱՆ ԶԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2010



САМВЕЛ САМВЕЛОВИЧ ГРИГОРЯН

(К восьмидесятилетию со дня рождения)

Исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося учёного – механика, действительного члена Российской академии наук, заслуженного профессора Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова Самвела Самвеловича Григоряна.

С.С. Григорян родился 18 марта 1930 года в Нагорном Карабахе, в 1948 году в городе Баку окончил с золотой медалью среднюю школу и поступил на механико-математический факультет МГУ, который окончил с отличием в 1953 году. Там же в 1956 году окончил аспирантуру под руководством академика Л.И. Седова и с тех пор работает в МГУ – младшим научным сотрудником, старшим научным сотрудником, с 1962 года по 1981 год – заместителем директора Института механики МГУ по научной работе, с 1981 года по 1992 год – заведующим отделом, с 1992 года по 2001 год директором Института механики МГУ, с 2001 года по настоящее время – заведующим отделом и лабораторией механики природных процессов.

С.С. Григорян – разносторонний учёный, обогативший современную механику и смежные с ней науки выдающимися научными результатами. В начале 60-х годов им была создана механико-математическая теория для количественного описания процессов движения, деформирования и разрушения грунтов и горных пород, значительно опередившая аналогичные исследования за рубежом. Под руководством С.С. Григоряна и при его непосредственном участии усилиями специалистов многих организаций были проведены лабораторные и полевые эксперименты, позволившие конкретизировать материальные функции и параметры, фигурирующие в построенной им общей теории, и тем самым превратить её в инструмент для

конкретных практических применений. На этой базе были поставлены и эффективно решены основные задачи о действии мощных ядерных взрывов в грунтах и горных породах, о силовом и кинематическом воздействии сейсмо-взрывных волн на расположенные в таких средах объекты и сооружения специального назначения, что было использовано для обеспечения нужного темпа развития и научного уровня прикладных исследований и технических разработок в специализированных учреждениях и ведомствах оборонного комплекса страны. Пионерские исследования С.С. Григоряна сыграли в этом ведущую роль и общепризнанны. Они составили предмет его докторской диссертации «Исследования по механике грунтов» (МГУ, 1965 год). Нужно отметить, что проблемой создания общей теории для динамики грунтов С.С. Григорян начал заниматься ещё в аспирантуре (в 1955 году), до выбора им темы кандидатской диссертации (в области гидродинамики). Разработанная теория получила в научной литературе название – модель Григоряна.

Одновременно с этой крупной научной разработкой С.С. Григорян занимался решением других важных задач по оборонной тематике. Им была построена простая теория для определения характеристик силового и кинематического воздействия мощных взрывных волн на расположенные в воздухе, на поверхности земли и в воде сооружения и объекты оборонной техники, официально включенная в инженерную практику организаций оборонного ведомства. За эту работу С.С. Григорян был удостоен премии Совета Министров СССР (1985 год). Также в сотрудничестве с оборонными организациями им были всесторонне исследованы (теоретически и экспериментально, в натурных и полевых условиях) разнообразные системы амортизации заглубленных в грунт специальных сооружений, нашедшие применение в соответствующей инженерной практике. На базе созданной им общей теории для динамики грунтов С.С. Григорян построил очень простое решение классической проблемы оборонного дела – задачи о проникании боевых объектов (снарядов, авиабомб, ракет) в грунты и провёл в Институте механики МГУ эксперименты, показавшие высокую точность этого решения. Тем самым проблема была закрыта. По заказу ракетно-космического ведомства С.С. Григорян с коллегами из Института механики МГУ провёл детальное теоретическое и экспериментальное исследование обнаруженного в практике испытаний крупных космических ракетных комплексов явления возникновения интенсивных колебаний газожидкостного содержимого в баках топлива и окислителя таких ракет, приводившего к искажению показаний контрольных датчиков и к авариям. В результате была построена рациональная теория явления, оказавшегося новым в механике жидкости и газа, на основе которой были выработаны и использованы на практике рекомендации по устранению подобных явлений и безопасной эксплуатации соответствующих ракетных комплексов. Результаты проведённого исследования оказались возможным использовать и для иных, необоронных, технологических применений. С.С. Григоряном построены точные решения ряда задач газовой динамики, при этом обнаружен эффект несуществования решений при определённых условиях, имеющий принципиально важное значение для газовой динамики, решения задач аэродинамики и нестационарной гидродинамики, нашедшие применение при изучении оптимальных аэродинамических конфигураций внешней формы сверхзвуковых летательных аппаратов, а также для определения силового гидродинамического воздействия на движущиеся в воде объекты с существенно меняющейся во времени геометрией, что ранее в гидромеханике не исследовалось. Им было построено приближённое решение задачи о кавитационном обтекании удлиненных тел в воде, нашедшее разнообразные применения в работах других авторов.

Еще одной крупной научной проблемой фундаментального характера, которой параллельно стал заниматься в те же годы С.С. Григорян, явилась механика склоновых процессов – снежных лавин, ледников и ледниковых покровов, обвалов

горных пород, оползней и селевых потоков. По этой проблематике он организовал в Институте механики МГУ научный семинар, на котором в течение продолжительного времени детально обсуждались основные научные достижения в этой области предшественников и новые работы. Здесь им также были выполнены исследования общего характера – проведены анализ основных механизмов и определяющих факторов для изучаемых процессов и построение механико-математических моделей для их количественного описания, постановки и решения важнейших и типичных задач. На этой основе С.С. Григорьяном и его учениками вместе со специалистами из других научных организаций страны были выполнены обширные конкретные исследования – теоретические и экспериментальные, в частности и полевые, результаты которых вошли в научный фонд рассматриваемой области знаний.

Теоретические исследования С.С. Григоряна по механике снежных лавин и ледников придали этой области современной теоретической гляциологии черты завершенности и используются для математического моделирования конкретных гляциологических явлений, прогноза их эволюции и последствий. Эти исследования позволили, в частности, дать рациональное объяснение «загадочным» феноменам «воздушных волн» снежных лавин и быстрых подвижек «пульсирующих» ледников.

В процессе проведения исследований по механике склоновых процессов С.С. Григорьян обнаружил и сформулировал новый закон трения для движущихся по твёрдому основанию потоков дроблённых материалов (снега, горных пород и т.п.), существенно отличающийся от известного и широко применяемого закона Кулона. Отличие это количественно и качественно выражает естественное физическое представление о том, что касательное напряжение на поверхности контакта трущихся материалов, в отличие от нормального напряжения, действующего там же, не может быть как угодно большим, что предполагается в законе трения Кулона, а должно стабилизироваться на некотором уровне с ростом нормального напряжения. С помощью нового закона С.С. Григорьяну удалось объяснить и количественно описать давно известный, но остававшийся необъяснённым, феномен аномальной подвижности больших масс обрушенных землетрясением или сильным взрывом горных пород. Этот же закон объясняет эффект изменения морфологии ударных кратеров на поверхностях Луны и планет земной группы с ростом характерного размера кратера. Математическая модель и новый закон трения были использованы С.С. Григорьяном для математического и физического лабораторного моделирования известных крупномасштабных обвальных явлений (Усойский завал и возникновение Сарезского озера на Памире, обвалы на горном массиве Невадо-Уаскаран в Южной Америке и др.), а также при разработке проекта строительства высокой (порядка 350м) плотины для Камбаратинской ГЭС на реке Нарын в Киргизии с помощью взрывного обрушения больших масс горных пород на бортах ущелья реки. Результаты работ С.С. Григоряна и его лаборатории по этой проблеме составили отдельный том проектной документации, работы по строительству плотины были начаты, но прекратились из-за распада СССР.

Проведёнными на специальной установке в Институте механики МГУ экспериментами по измерению трения скольжения при больших нормальных давлениях для монолитных (не дроблённых) материалов была установлена применимость закона трения Григоряна и для таких случаев силового взаимодействия твёрдых материалов, что придало этому закону универсальный характер. Автор применил его для решения ряда других задач принципиально важного характера. Среди них – задача о природе известного в механике парадокса сухого трения – парадокса Пэнлеве, установленного более ста лет тому назад и остававшегося необъяснённым. С.С. Григорьян показал, что замена закона трения Кулона на предложенный им новый закон устраняет этот парадокс.

Другое «парадоксальное» явление, которое было им объяснено и рассчитано с помощью нового закона трения, это эффект «аномального» – сверхглубокого проникания твёрдых металлических микрочастиц, разогнанных взрывом до больших (километры в секунду) скоростей, в твёрдые же металлические материалы, установленный в экспериментах. Аномальность явления состоит в том, что в таких экспериментах разогнанные частицы проникают в материал мишени на глубины порядка многих сотен их характерных размеров.

Еще одно «странное» явление, которое было объяснено и математически рассчитано С.С. Григоряном с помощью нового закона трения, это нередкие случаи неудач в практике строительства крупных ирригационных каналов с помощью взрывов на выброс грунта (в Средней Азии, в Краснодарском крае), когда после подрыва уложенного в траншею длинного заряда взрывчатки вместо «нормальной» протяжённой глубокой выемки – ложа будущего канала образуется едва заметная депрессия на поверхности грунта со слабо выраженным возвышением вдоль оси – над взрывной траншеей. На основе проведённого исследования С.С. Григорян предложил видоизменение схемы размещения зарядов взрывчатых веществ в грунт в этих «аномальных» условиях, которое и было внедрено в практику подобных работ со стопроцентной результативностью, и проблема была снята.

Новый закон трения был успешно применён и в работах других авторов при решении конкретных (неаномальных) задач современной механики.

Таким образом, следует констатировать, что в механике появился новый закон трения, без применения которого целый ряд механических явлений в природе и в технических устройствах не поддаётся рациональному объяснению и расчёту, и их просто описывает этот закон – закон трения Григоряна.

В конце 70-х годов С.С. Григоряном была создана количественная теория процессов торможения и дробления небесных тел (астероидов, ядер комет), вторгающихся в атмосферы планет и Солнца, с помощью которой было дано рациональное объяснение феномена Тунгусского метеорита, предсказаны последствия столкновения кометы Шумайкер-Леви-9 с Юпитером в 1994 году, объяснено поведение малых комет вблизи Солнца. Это исследование принципиально закрыло «таинственную» проблему Тунгусского метеорита.

В конце 80-х годов С.С. Григоряном была построена количественная теория процессов зарождения и эволюции очагов землетрясений, возникновения самих землетрясений, трансформации сейсмических волн при их распространении в слоисто-неоднородных приповерхностных горных массивах и резонансных явлений, определяющих разрушительное действие землетрясений. С помощью этой теории им были впервые выведены теоретически формулы для установленных ранее наблюдениями основных эмпирических закономерностей современной сейсмологии и разработана принципиальная концепция организации мониторинга предвестниковых полей геофизических аномалий, возникающих в процессе эволюции очагов землетрясений, для прогноза сильных землетрясений.

В это же время С.С. Григоряном была построена новая гидродинамическая модель, описывающая медленные течения воды в крупных мелководных акваториях (дельтах больших рек и эстуариях), более простая по сравнению с классическими моделями, но достаточно точно воспроизводящая реальные характеристики описываемых явлений. Эта модель позволила, в частности, количественно оценить возможное влияние начатых тогда строительством защитных сооружений в Невской губе Финского залива на течения воды в ней и показать незначительность такого влияния, что сыграло важную роль в принятии решения о продолжении приостановленного строительства.

В конце 60-х годов С.С. Григорян также заинтересовался проблемами биомеханики. В Институте механики МГУ тогда начал работать семинар по биомеханике, в исследования в этой области стали вовлекаться специалисты из

смежных областей знаний – механики и математики, биологии, медицины, биофизики – из многих регионов страны. Занятия биомеханикой приобрели всесоюзный (позднее – всероссийский) характер, стали проводиться симпозиумы, конференции, около 30 лет действует семинар (мини съезд) по биомеханике, ежегодно собирающийся, по очереди, в Москве – в Институте механики МГУ и в Ленинграде (ныне Санкт-Петербурге) – в Институте физиологии им. И.П. Павлова РАН. С.С. Григорян был одним из научных руководителей этого семинара и инициаторов включения новой научной специальности «Биомеханика» в номенклатуру специальностей Высшей аттестационной комиссии страны.

С.С. Григоряном была проведена серия оригинальных исследований по биомеханике: дано рациональное объяснение и построена количественная теория феномена звуков Короткова, широко используемого при измерении артериального давления крови; открыто новое явление – возможность регуляции давления в системе кровообращения животных и человека введением в неё малых добавок высокомолекулярных полимеров и выделен из крови натуральный биополимер, выполняющий эту регуляторную функцию, тем самым было сделано научное открытие в области физиологии кровообращения; поставлены и решены новые задачи об оптимальности структуры и функции системы кровообращения живых существ. Им выполнена особая работа, относящаяся к сложной проблеме естественно-научного анализа феноменов сознания, памяти, узнавания, – построена концепция математической природы этих феноменов.

В начале 2000-х годов С.С. Григорян заинтересовался ещё несколькими проблемами механики природных явлений. В 2002 году им была построена простая теория и механико-математическая модель механизма «загадочного» явления – шаровой молнии, объясняющая все зарегистрированные в наблюдениях её свойства. В том же году им построена также очень простая количественная модель тропического циклона – тайфуна, а совсем недавно – менее масштабного аналогичного по природе явления – разрушительного смерча, торнадо. В 2008 году построена модель современного вулканизма в зонах взаимодействия литосферных плит Земли, объясняющая природу и механику нагрева и плавления горных пород в этих зонах – образования магмы, расклинивания вышележащих пород возникающим при этом высоким давлением в ней и её подъёмом к дневной поверхности, формирующим вулканические постройки. Построена модель нелинейных термомеханических процессов, протекающих в недрах Земли при дифференциации мантийных пород там. Модель обладает свойством сильного обострения (типа явления теплового взрыва), объясняющая основные крупномасштабные эффекты, сопровождающие геологическую эволюцию Земли. Построена простая модель термомеханического равновесия атмосфер Земли и планет.

Уже давно С.С. Григорян начал заниматься трудными проблемами космологии – науки о Вселенной и современной астрофизики. Им была предложена модель существенно неоднородной Вселенной, принципиально отличающаяся от общепринятой, постулирующей её однородность и изотропность «в большом». В начале 2005 года С.С. Григорян построил количественную теорию равновесия и динамических взаимодействий нейтронных звёзд и «чёрных дыр» – сверхплотных остатков эволюции и взрывного разрушения обычных звёзд, а также «захвата» такими объектами разреженной газо-пылевой материи из соседних с ними областей. Эта теория основана на классической механике Ньютона, его законе всемирного тяготения и представлениях современной теории элементарных частиц. Она объясняет все регистрируемые наблюдениями эффекты, связанные с подобными объектами, а также и другие эффекты в доступной наблюдениям части Вселенной. Она свободна от трудностей ныне существующей теории, основанной на общей теории относительности.

Множество описанных выше научных результатов С.С. Григоряна, относящихся к значительно различающимся объектам и процессам, объединяет некоторая общность, что позволяет их отнести к единому научному направлению, названному С.С. Григоряном Механикой природных процессов. Такое же название имеет созданный и руководимый им научный отдел в Институте механики МГУ.

С.С. Григорян занимался и многими другими научными проблемами. Им получены существенные результаты по механике процессов в нефтегазодобывающей промышленности (в частности, создано простое и эффективное устройство для ликвидации тяжёлых аварий, часто возникающих при бурении глубоких скважин). Поставлены и решены некоторые принципиальные задачи механики спорта, благодаря чему советские спортсмены в санном спорте и бобслее впервые завоевали высшие награды на Олимпийских играх и мировых чемпионатах, а сам С.С. Григорян в течение многих лет возглавлял Федерацию санного спорта и бобслея СССР и был членом Национального Олимпийского комитета СССР.

Им с сотрудниками было синтезировано новое вещество – полимеро-минеральный композит, названный авторами кавэластом, обладающий поразительным свойством увеличиваться в объёме до 50 раз при замачивании водой, что определяет многочисленные возможные его применения – для пожаротушения, увеличения водоудерживающей способности почв в засушливых регионах, гидроизоляции подземных частей сооружений и хранилищ вредных отходов, ликвидации потерь воды из водоёмов, каналов и водохранилищ, для применений в нефтегазодобывающей промышленности. Начато успешное практическое применение кавэласта.

Длительное время работая руководителем Института механики МГУ (заместителем директора по научной работе, директором), С.С. Григорян достиг значительных научно-организационных результатов, сыгравших важную роль в превращении института в один из ведущих научных центров мира в области современной механики. Особенно ответственной была его работа в должности директора института, на которую он с большим преимуществом по числу поданных голосов был избран «общенародным» голосованием всех учёных института, имевших учёные степени, в 1991 году, когда был разрушен Советский Союз. Тогда прекратилось финансирование хоздоговорных работ, и нужно было сохранить большой коллектив сотрудников, содержавшихся за счёт этого источника. Нужно было сохранить все научные школы и направления института, найти большие финансовые средства для оплаты уже начавшихся работ по замене сложного крупногабаритного оборудования аэродинамического испытательного комплекса института. Все эти проблемы новый директор С.С. Григорян сумел успешно решить в очень короткие сроки и сохранить творческий научный потенциал Института механики МГУ.

За научные достижения С.С. Григорян был удостоен премий им. М.В. Ломоносова (МГУ, 1967 г.), С.А. Чаплыгина (АН СССР, 1970 г.), золотой медали и премии им. М.А. Лаврентьева (АН СССР, 1986 г.), премии Совета Министров СССР (1985 г.), Государственной премии Украины (1991 г.), премии им. С.Н. Фёдорова (2004 г.), звания «Рыцарь наук и искусств» и медали (РАЕН, 2000 г.). Он – член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике, член Международного общества по прикладной математике и механике (GAMM – Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik).

С.С. Григорян был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР (1987 г.), действительным членом Российской академии наук (2000 г.), действительным членом Международной академии астронавтики (1979 г.), Международной академии информатизации (1995 г.), Международной академии духовного единства народов мира (1999 г.), Российской академии артиллерийских и ракетных наук (1993 г.), Российской академии естественных наук (1993 г.),

Инженерной академии Украины (1995 г.), Российской инженерной академии (2005 г.), Международной инженерной академии (2005 г.), Инженерно-технологической академии Армении, иностранным членом Национальной академии наук Республики Армения (2000 г.), и Китайской академии наук (2006 г.).

С.С. Григорян – автор нескольких сотен научных работ, включая ряд монографий, многих десятков изобретений.

Под научным руководством С.С. Григоряна множество его учеников защитило кандидатские и докторские диссертации по специальностям из физико-математических, геолого-минералогических, технических, биологических, медицинских и географических наук. Двое из его учеников стали академиками Российской академии наук, двое – академиками Китайской академии наук, один – членом-корреспондентом Академии наук Таджикистана. Многие из них стали профессорами в СССР, Российской Федерации и в других странах.

В октябре 1959 года – январе 1960 года С.С. Григорян работал в Китайской Народной Республике – прочитал годовой курс сверхзвуковой аэродинамики и газовой динамики для большой группы (около 80 человек) молодых специалистов из авиационной отрасли. Двое из них впоследствии стали академиками, многие профессорами, и четверо – профессорами и генералами. За эту работу С.С. Григорян был награждён медалью «Китайско-Советская дружба», а в 2006 году избран иностранным членом Академии наук КНР.

В течение последних 20 лет С.С. Григорян активно и результативно занимается общественной работой в области развития межнационального согласия и дружбы между различными этническими группами населения Москвы, в решении проблем армянской общины Москвы и России, возглавляя Армянскую общину Москвы и Региональную национально-культурную автономию армян Москвы. На этом посту им также достигнуты значительные результаты, высоко оценённые этнической общественностью Москвы, Мэрией и Правительством Москвы, с которыми Армянская община Москвы тесно и плодотворно сотрудничает. За эту работу С.С. Григорян Правительством Москвы был награждён специальным золотым знаком.

С.С. Григорян является одним из учредителей Союза армян России и Всемирного Армянского Конгресса, он входит в состав руководства этих общественных организаций. Союзом армян России он был награжден высшей наградой – орденом «Серебряный крест» (2002 год).

Академик РАН В.А.Садовничий
Академик РАН Р.И.Нигматуллин

Редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» и научная общественность Армении с большим чувством благодарности и гордости разделяют высокую оценку научной и научно-организационной деятельности академика РАН и НАН Армении Самвела Самвеловича Григоряна, данную всемирно известными учёными, академиками РАН В.А.Садовничим и Р.И.Нигматуллиным.

Одновременно отмечаем, что Самвел Самвелович является большим патриотом, на протяжении многих десятилетий поддерживает тесные научные контакты с Родиной, подготовил множество национальных кадров. По его инициативе проведён ряд Международных конференций в Армении и Нагорном Карабахе.

Желаем дорогому Самвелу Самвеловичу карабахского долголетия, новых творческих успехов, всех благ.

УДК 539.3

**О НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ КОМПОЗИТА В ВИДЕ ПАКЕТА ИЗ
ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЧИСЛА УПРУГИХ СЛОЁВ ПРИ
АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

ГАСПАРЯН А. В., МХИТАРЯН С. М.

Ключевые слова: композит, теория упругости, конечно-разностные уравнения, модели тонкого слоя.

Keywords: composite, theory of elasticity, equations of finite differences, models of thin layers.

Գասպարյան Ա.Վ., Մխիթարյան Ս.Մ.

**Հակահարթ դեֆորմացիայի դեպքում կամայական վերջավոր թվով առաձգական շերտերից
բաղկացած փաթեթի տեսքով կոմպոզիտի լարվածային վիճակի մասին**

Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ դիտարկվում է հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ կոմպոզիտի լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդիրը: Կոմպոզիտը կտոր առ կտոր համասեռ մարմին է՝ փաթեթի տեսքով, բաղկացած տարբեր առաձգական և երկրաչափական բնութագրիչներ ունեցող կամայական վերջավոր թվով շերտերից:

Gasparyan A.V., Mkhitarian S.M.

**On Stressed State of a Composite in Form of a Package Composed of an Arbitrary Number of Elastic
Layers under Antiplane Deformation**

A problem on stressed state of a composite under antiplane deformation is considered with application of Fourier integral transform. The composite is a piecewise homogeneous body in form of a package composed of an arbitrary finite number of layers with different elastic and geometric characteristics.

При помощи интегрального преобразования Фурье рассматривается задача о напряженном состоянии композита при антиплоской деформации, представляющего собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа слоев с различными упругими и геометрическими характеристиками.

Задачи о напряженном состоянии кусочно-однородных тел в виде пакетов, состоящих из произвольного конечного числа упругих слоев, ввиду их теоретической и практической важности стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на работу В.З. Власова [1] и на монографию [2], где для решения таких задач развит метод начальных функций. Укажем также на статью В. В. Власова [3], где этот метод применяется к решению задачи о равновесии толстых многослойных плит. Эта же задача с применением методов преобразования Фурье и матричного исчисления рассматривается в работе Буфлера [4]. С методом начальных функций тесно связан разработанный А.И. Лурье символический метод, который применяется в задаче о равновесии толстого упругого слоя [5]. Асимптотическими методами задачи о напряженном состоянии двух и трехслойных композитов исследованы в монографии Л.А. Агаловяна и Р.С. Геворкяна [6].

В настоящей работе при помощи интегрального преобразования Фурье рассматривается задача о напряженном состоянии композита, представляющего собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа слоев с различными упругими и геометрическими характеристиками, когда на граничных плоскостях действуют касательные силы, вызывающие антиплоскую деформацию. Кратко обсуждается также соответствующая смешанная граничная задача. Из полученных результатов выведены уравнения деформирования тонкого упругого слоя, описывающие известные модели Мелана и Винклера. Рассмотрены частные случаи и приведены числовые результаты.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть композит, отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, представляет собой пакет из произвольного конечного числа n упругих слоев

$$\Omega_k = \{-\infty < x < \infty, \quad h_{k-1} \leq y \leq h_k\} \quad (k = \overline{1, n})$$

с модулями сдвига G_k . Пусть далее к нижней и верхней плоскостям $y = h_0$ и $y = h_n$ приложены касательные силы интенсивностей $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$, соответственно, т. е.

$$\tau_{yz}|_{y=h_0} = \tau_0(x), \quad \tau_{yz}|_{y=h_n} = \tau_n(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

обеспечивающие состояние антиплоской деформации с базовой плоскостью Oxy . Здесь τ_{yz} – компонента касательных напряжений. Требуется определить компоненты напряжений и смещений в композите, когда функции напряжения крайних граней композита $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$ наперед заданы. Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи обозначим через $w_k = w_k(x, y)$ единственную отличную от нуля компоненту смещений в направлении оси Oz , а неизвестные касательные контактные напряжения на гранях $y = h_{k-1}$ и $y = h_k$ ($k = \overline{1, n}$) слоя Ω_k – $\tau_{k-1}(x)$ и $\tau_k(x)$, соответственно. Тогда, воспользовавшись законом Гука для слоя Ω_k , придем к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0 & (-\infty < x < \infty, \quad h_{k-1} < y < h_k) \\ G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_{k-1}} = \tau_{k-1}(x), \quad G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_k} = \tau_k(x) & (-\infty < x < \infty, \quad k = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (1.1)$$

Для решения граничной задачи (1.1) введем в рассмотрение трансформанты Фурье

$$\{\bar{\tau}_k(\lambda); \bar{w}_k(\lambda, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\tau_k(x); w_k(x, y)\} e^{i\lambda x} dx,$$

где λ – спектральный параметр Фурье. Тогда (1.1) перейдет в следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}_k}{dy^2} - \lambda^2 \bar{w}_k = 0 & (h_{k-1} < y < h_k, \quad k = \overline{1, n}) \\ G_k \frac{d \bar{w}_k}{dy} \Big|_{y=h_{k-1}} = \bar{\tau}_{k-1}(\lambda), \quad G_k \frac{d \bar{w}_k}{dy} \Big|_{y=h_k} = \bar{\tau}_k(\lambda) \end{cases} \quad (1.2)$$

Решение задачи (1.2) имеет вид

$$\bar{w}_k = \bar{w}_k(\lambda, y) = A_k \operatorname{ch} \lambda y + B_k \operatorname{sh} \lambda y \quad (h_{k-1} \leq y \leq h_k) \quad (1.3)$$

где коэффициенты A_k и B_k определяются из граничных условий краевой задачи (1.1) при помощи матричного равенства

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda G_k \operatorname{sh} \lambda (h_{k-1} - h_k)} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \lambda h_k & -\operatorname{ch} \lambda h_{k-1} \\ -\operatorname{sh} \lambda h_k & \operatorname{sh} \lambda h_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{k-1} \\ \bar{\tau}_k \end{pmatrix} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (1.4)$$

Далее запишем условия непрерывности смещений на линии контакта $y = h_k$ слоев Ω_k и Ω_{k+1} , которые при помощи (1.3) запишутся в виде

$$A_k \operatorname{ch} \lambda h_k + B_k \operatorname{sh} \lambda h_k = A_{k+1} \operatorname{ch} \lambda h_k + B_{k+1} \operatorname{sh} \lambda h_k \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

или в эквивалентной матричной форме

$$(\operatorname{ch} \lambda h_k \quad \operatorname{sh} \lambda h_k) \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = (\operatorname{ch} \lambda h_k \quad \operatorname{sh} \lambda h_k) \begin{pmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{pmatrix} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.5)$$

Теперь, приняв во внимание (1.4), из (1.5) после простых преобразований относительно трансформантов Фурье неизвестных касательных напряжений $\bar{\tau}_k(\lambda)$ получим следующую систему конечно-разностных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} &= 0 \quad (k = \overline{1, n-1}) \\ a_k &= \frac{1}{G_k \operatorname{sh}(\lambda d_k)}, \quad b_k = \frac{\operatorname{cth}(\lambda d_k)}{G_k}, \quad d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь d_k ($k = \overline{1, n}$) – высота k -ого слоя Ω_k .

Для сведения (1.6) к конечно-разностным уравнениям первого порядка положим

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - b_k \bar{\tau}_k = \omega_k \quad (1.7)$$

$$a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} - b_{k+1} \bar{\tau}_k = \chi_{k+1} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.8)$$

Тогда система уравнений (1.6) перейдет в систему

$$\omega_k + \chi_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.9)$$

Таким образом, решение поставленной здесь задачи сводится к решению конечно-разностных уравнений первого порядка (1.7), (1.8) и (1.9).

После того, как построены решения этих уравнений, по формуле (1.4) определяются коэффициенты A_k и B_k , а затем по формуле (1.3) – функции $\bar{w}_k(\lambda, y)$. Наконец, при помощи обратного интегрального преобразования Фурье определяются функции $w_k(x, y)$ ($k = \overline{1, n}$), а при помощи последних – напряжения в любой точке композита.

2. Решение определяющих конечно-разностных уравнений первого порядка.

Решения определяющих конечно-разностных уравнений (1.7) и (1.8) построим известным методом [7]. Сначала уравнение (1.7) представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_k &= [1 - P(k)] \bar{\tau}_{k-1} + Q(k), \\ P(k) &= \frac{b_k - a_k}{b_k}, \quad Q(k) = -\frac{\omega_k}{b_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

и рассмотрим однородное уравнение

$$\bar{\tau}_k = [1 - P(k)] \bar{\tau}_{k-1} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.2)$$

Отсюда можем записать

$$\bar{\tau}_1 = [1 - P(1)] \bar{\tau}_0$$

$$\bar{\tau}_2 = [1 - P(2)] \bar{\tau}_1$$

.....

$$\bar{\tau}_k = [1 - P(k)] \bar{\tau}_{k-1}$$

Перемножая почленно эти равенства, получим решение однородного уравнения (2.2) в виде

$$\bar{\tau}_k = \bar{\tau}_0 \prod_{j=1}^k [1 - P(j)] \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.3)$$

Далее исходя из (2.3), методом вариации находим решение неоднородного уравнения (2.1):

$$\bar{\tau}_k = - \sum_{i=1}^k A_i \frac{C_i}{C_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.4)$$

$$A_i = G_i \operatorname{th}(\lambda d_i), \quad C_i = \prod_{r=1}^i \operatorname{ch}(\lambda d_r) \quad (i = \overline{1, n})$$

Таким же образом решение уравнения (1.8) с учетом (1.9) представляется формулой

$$\bar{\tau}_k = \sum_{i=k}^{n-1} B_i \frac{D_{i+1}}{D_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.5)$$

$$B_i = G_{i+1} \operatorname{sh}(\lambda d_{i+1}), \quad D_i = \prod_{r=i}^{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{r+1})$$

Теперь приравнявая выражения (2.4) и (2.5) относительно неизвестных ω_i ($i = \overline{1, n-1}$), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$- \sum_{i=1}^k A_i \frac{C_i}{C_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} = \sum_{i=k}^{n-1} B_i \frac{D_{i+1}}{D_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.6)$$

Преобразуем систему (2.6) к системе с левой треугольной матрицей. С этой целью представим ее в виде

$$A_k \omega_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_i C_i}{C_k} \omega_i + \sum_{i=k}^{n-1} \frac{B_i D_{i+1}}{D_k} \omega_i = \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} - \frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.7)$$

и положим

$$K_n = \prod_{r=1}^n \operatorname{ch}(\lambda d_r) \quad (2.8)$$

Тогда легко видеть, что

$$D_{i+1} = \prod_{r=i+1}^{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{r+1}) = \frac{K_n}{\operatorname{ch}(\lambda d_{i+1}) C_i}$$

$$D_k = \prod_{r=k}^{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{r+1}) = \frac{K_n}{C_k} = \prod_{r=k+1}^n \operatorname{ch}(\lambda d_r) \quad (i = \overline{k, n-1}; \quad k = \overline{1, n-1})$$

В результате, система (2.7) перейдет в систему

$$\sum_{i=1}^k A_i C_i \omega_i + C_k^2 \sum_{i=k}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i = \bar{\tau}_0 - \frac{C_k^2}{K_n} \bar{\tau}_n \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.9)$$

Далее положив

$$X_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i \quad (2.10)$$

обнаружим, что

$$\sum_{i=k}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i = X_n - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i$$

С учётом последнего система уравнений (2.9) окончательно преобразуется в следующую систему линейных уравнений с левой треугольной матрицей:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k L_{ki} \omega_i &= g_k \quad (k = \overline{1, n-1}) \\ L_{ki} &= \begin{cases} A_i C_i - \frac{C_k^2}{C_i} A_{i+1} & (i = \overline{1, k-1}) \\ A_k C_k & (i = k) \end{cases} \\ g_k &= \bar{\tau}_0 - C_k^2 \left(X_n + \frac{\bar{\tau}_n}{K_n} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Чтобы определить X_n из (2.10), решение системы (2.10) при правой части $g_k^{(1)}$ – вектора-столбца из k строк, состоящего только из единиц, обозначим через $\omega_i^{(1)}$ ($i = \overline{1, n-1}$), а при правой части $g_k^{(2)} = C_k^2$ – через $\omega_i^{(2)}$ ($i = \overline{1, n-1}$). Тогда решение системы (2.11) выразится формулой

$$\omega_i = \bar{\tau}_0 \omega_i^{(1)} - \left(X_n + \frac{\bar{\tau}_n}{K_n} \right) \omega_i^{(2)} \quad (i = \overline{1, n-1})$$

Подставляя это выражение ω_i в (2.10), находим

$$X_n = \frac{\bar{\tau}_0 K_n S_n^{(1)} - \bar{\tau}_n S_n^{(2)}}{K_n [1 + S_n^{(2)}]}, \quad S_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i^{(j)} \quad (j = 1, 2)$$

Система уравнений (2.11) легко решается. Известным способом можно построить также ее аналитическое решение. А именно, введем в рассмотрение левую треугольную матрицу

$$L = (L_{ki}) \quad (i = \overline{1, k}; \quad k = \overline{1, n-1})$$

Тогда элементы обратной матрицы $M = (M_{ki}) = L^{-1}$, которая также левотреугольная, определяются формулами

$$M_{ii} = \frac{1}{L_{ii}}, \quad M_{ki} = 0 \quad (k < i)$$

$$M_{ki} = - \sum_{j=i}^{k-1} \frac{L_{kj} M_{ji}}{L_{kk}} \quad (k > i)$$

Из последних равенств элементы M_{ki} обратной матрицы L^{-1} последовательно определяются.

3. Смешанная граничная задача для композита. Вкратце остановимся также на смешанной граничной задаче для композита, когда на его нижней граничной плоскости опять заданы касательные силы, а на верхней граничной плоскости – смещения, т. е.

$$\tau_{yz} \Big|_{y=h_0} = G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=h_0} = \tau_0(x), \quad w_n(x, y) \Big|_{y=h_n} = w_n(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $w_n(x)$ – наперёд заданная функция. В этом случае все предыдущие результаты остаются в силе кроме результатов для последнего слоя Ω_n , для которого имеют место смешанные граничные условия:

$$G_n \frac{\partial w_n}{\partial y} \Big|_{y=h_{n-1}} = \tau_{n-1}(x), \quad w_n(x, y) \Big|_{y=h_n} = w_n(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

В трансформантах Фурье для слоя Ω_n получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}_n}{dy^2} - \lambda^2 \bar{w}_n = 0 & (h_{n-1} < y < h_n) \\ G_n \frac{d \bar{w}_n}{dy} \Big|_{y=h_{n-1}} = \bar{\tau}_{n-1}, \quad \bar{w}_n(\lambda, y) \Big|_{y=h_n} = \bar{w}_n \end{cases}$$

Решение этой граничной задачи выражается формулой ($h_{n-1} \leq y \leq h_n$)

$$\bar{w}_n(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda G_n \operatorname{ch}(\lambda d_n)} \left[\lambda G_n \bar{w}_n \operatorname{ch} \lambda (y - h_{n-1}) - \bar{\tau}_{n-1} \operatorname{sh} \lambda (h_n - y) \right] \quad (3.1)$$

где $\bar{w}_n = \bar{w}_n(\lambda)$ – трансформанта Фурье функции $w_n(x)$. С другой стороны, при помощи (1.3) и (1.4) при $k = n-1$ и $y = h_{n-1}$ после элементарных выкладок получим

$$\bar{w}_{n-1}(\lambda, h_{n-1}) = \frac{\bar{\tau}_{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{n-1}) - \bar{\tau}_{n-2}}{\lambda G_{n-1} \operatorname{sh}(\lambda d_{n-1})} \quad (3.2)$$

Теперь условие непрерывности смещений в образах Фурье

$$\bar{w}_n(\lambda, h_{n-1}) = \bar{w}_{n-1}(\lambda, h_{n-1})$$

при помощи (3.1) и (3.2) приводит к соотношению

$$\bar{\tau}_{n-2} = G_{n-1} \operatorname{sh}(\lambda d_{n-1}) \left\{ \left[\frac{\operatorname{cth}(\lambda d_{n-1})}{G_{n-1}} + \frac{\operatorname{th}(\lambda d_n)}{G_n} \right] \bar{\tau}_{n-1} - \frac{\lambda \bar{w}_n}{\operatorname{ch}(\lambda d_n)} \right\} \quad (3.3)$$

В данном случае смешанной краевой задачи сначала необходимо построить решение разностных уравнений (1.6) или (1.7) – (1.9) при $k = \overline{1, n-2}$. Затем решение $\bar{\tau}_{n-2}$, которое выражается через $\bar{\tau}_0$ и $\bar{\tau}_{n-1}$, следует подставить в (3.3), откуда определится $\bar{\tau}_{n-1}$. Далее необходимо найти $\bar{\tau}_n$:

$$\bar{\tau}_n = G_n \frac{d\bar{w}_n}{dy} \Big|_{y=h_n} = \lambda G_n \bar{w}_n \text{th}(\lambda d_n) + \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\text{ch}(\lambda d_n)} \quad (3.4)$$

В частности, когда грань $y = h_n$ жестко закреплена, то $w_n(x) \equiv 0$ и следовательно, $\bar{w}_n = 0$. Тогда формулы (3.3) и (3.4) примут, соответственно, вид

$$\bar{\tau}_{n-2} = G_{n-1} \text{sh}(\lambda d_{n-1}) \left[\frac{\text{cth}(\lambda d_{n-1})}{G_{n-1}} + \frac{\text{th}(\lambda d_n)}{G_n} \right] \bar{\tau}_{n-1}; \quad \bar{\tau}_n = \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\text{ch}(\lambda d_n)}$$

4. Частные случаи и числовые результаты. Рассмотрим частный случай двухслойного композита, когда $n = 2$. В данном случае из (2.9) или (2.11) сразу определится $\bar{\omega}_1$, а затем из (2.4) или (2.5) определится $\bar{\tau}_1$ через $\bar{\tau}_0$ и $\bar{\tau}_2$. При этом образы Фурье смещений $\bar{w}_1(\lambda, y)$ и $\bar{w}_2(\lambda, y)$ определяются по (1.3) и (1.4). Выражение $\bar{\tau}_1$ можно получить также из (1.6) при $n = 2$. В результате

$$\bar{w}_1(\lambda, y) = -\frac{1}{\lambda G_1 \text{sh}(\lambda d_1)} \left[\text{ch}\lambda(h_1 - y) \bar{\tau}_0 - \text{ch}\lambda(y - h_0) \bar{\tau}_1 \right] \quad (h_0 \leq y \leq h_1) \quad (4.1)$$

$$\bar{w}_2(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda G_2 \text{sh}(\lambda d_2)} \left[\text{ch}\lambda(y - h_1) \bar{\tau}_2 - \text{ch}\lambda(h_2 - y) \bar{\tau}_1 \right] \quad (h_1 \leq y \leq h_2) \quad (4.2)$$

$$\bar{\tau}_1 = \frac{G_2 \text{sh}(\lambda d_2) \bar{\tau}_0 + G_1 \text{sh}(\lambda d_1) \bar{\tau}_2}{G_2 \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + G_1 \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} \quad (-\infty < \lambda < \infty) \quad (4.3)$$

Теперь, исходя из (4.1) или (4.2), выведем дифференциальное уравнение деформирования материального волокна с ординатой y , причем $(h_{k-1} \leq y \leq h_k)$ ($k = 1, 2$). С этой целью (4.1) запишем в виде

$$\lambda G_1 \text{sh}(\lambda d_1) \bar{w}_1(\lambda, y) = \text{ch}\lambda(y - h_0) \bar{\tau}_1 - \text{ch}\lambda(h_1 - y) \bar{\tau}_0 \quad (h_0 \leq y \leq h_1)$$

и в этом равенстве целые функции $\lambda \text{sh}(\lambda d_1)$, $\text{ch}\lambda(y - h_0)$ и $\text{ch}\lambda(h_1 - y)$ разложим в ряды, ограничиваясь в них членами порядка λ^2 . В результате, будем иметь $(-\infty < \lambda < \infty)$

$$d_1 G_1 \lambda^2 \bar{w}_1(\lambda, y) = \bar{\tau}_1(\lambda) - \bar{\tau}_0(\lambda) + \frac{(y - h_0)^2}{2} \lambda^2 \bar{\tau}_1(\lambda) - \frac{(h_1 - y)^2}{2} \lambda^2 \bar{\tau}_0(\lambda).$$

Отсюда при помощи формулы обратного преобразования Фурье получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее в рамках принятой точности механическое поведение деформирования материальной линии с ординатой y первого слоя композита $(-\infty < x < \infty, h_0 \leq y \leq h_1)$:

$$d_1 G_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \tau_0(x) - \tau_1(x) + \frac{(y - h_0)^2}{2} \tau_1''(x) - \frac{(h_1 - y)^2}{2} \tau_0''(x) \quad (4.4)$$

Теперь из (4.4) при $y = h_0$ или $y = h_1$ находим, соответственно,

$$d_1 G_1 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \tau_0 - \tau_1 - \frac{d_1^2}{2} \tau_0'' \quad (4.5)$$

$$d_1 G_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \tau_0 - \tau_1 + \frac{d_1^2}{2} \tau_1'' \quad (-\infty < x < \infty) \quad (4.6)$$

Далее в (4.5) – (4.6) совершим предельные переходы $d_1 \rightarrow 0$ и $G_1 \rightarrow \infty$ таким образом, чтобы жесткость материального волокна $D = d_1 G_1$ осталась постоянной [8]. В результате,

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = \tau_0 - \tau_1 \quad (D = d_1 G_1)$$

Этим уравнением описывается известная модель Мелана для тонкого слоя-стрингера.

Если же в (4.5) – (4.6) положить $\tau = \tau_0 = \tau_1$ и пренебречь жестким смещением волокна, то после интегрирования придём к известной модели Винера

$$Dw = \pm \frac{d_1^2}{2} \tau \quad (D = d_1 G_1)$$

с коэффициентом постели $d_1^2/2D$.

Вполне аналогичные уравнения можно получить для второго слоя композита.

Обращаясь к контактным напряжениям, действующими между слоями, из (4.3) при помощи обратного преобразования Фурье получим

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(|x-s|) \tau_0(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(|x-s|) \tau_2(s) ds \quad (k = G_2/G_1) \\ K(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\lambda d_2) \cos(\lambda x) d\lambda}{k \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} \\ L(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\lambda d_1) \cos(\lambda x) d\lambda}{k \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для упрощения этих формул рассмотрим частный случай нагружения двухслойного композита, когда

$$\tau_0(x) = \tau_1(x) = T \delta(x), \quad (-\infty < x < \infty)$$

где $\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака. Тогда после введения безразмерных величин

$$\alpha = \lambda d_1; \quad \xi = x/d_1; \quad \delta = d_2/d_1; \quad \tilde{\tau}_1(\xi) = d_1 \tau_1(d_1 \xi)/T$$

формулы (4.7) примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_1(\xi) &= \frac{1}{\pi} \left[k K_0(|\xi|) + L_0(|\xi|) \right] \quad (-\infty < \xi < \infty) \\ K_0(\xi) &= \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\alpha \delta) \cos(\alpha \xi) d\alpha}{k \text{sh}(\alpha \delta) \text{ch} \alpha + \text{sh} \alpha \text{ch}(\alpha \delta)} \\ L_0(\xi) &= \int_0^{\infty} \frac{\text{sh} \alpha \cos(\alpha \xi) d\alpha}{k \text{sh}(\alpha \delta) \text{ch} \alpha + \text{sh} \alpha \text{ch}(\alpha \delta)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рассмотрим частные случаи формул (4.8):

1) Пусть $k = 1$, т. е. $G_1 = G_2$ и, следовательно, имеем однородные слои. Тогда, после вычисления интегралов $K_0(\xi)$ и $L_0(\xi)$ ([9], формула 3.981.5, стр. 518), получим $(-\infty < \xi < \infty)$

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{2(\delta+1)} \left\{ \frac{\sin[\pi\delta/(\delta+1)]}{\operatorname{ch}[\pi\xi/(\delta+1)] + \cos[\pi\delta/(\delta+1)]} + \frac{\sin[\pi/(\delta+1)]}{\operatorname{ch}[\pi\xi/(\delta+1)] + \cos[\pi/(\delta+1)]} \right\} \quad (4.9)$$

Если считать $d_1 = \text{const}$, а $d_2 \rightarrow 0$, то $\delta \rightarrow 0$ и тогда (4.9) даст

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \delta(\xi)$$

т. е. сосредоточенная сила из верхнего слоя непосредственно передаётся к нижнему слою.

2) Пусть $k \ll 1$, т. е. $G_1 \ll G_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{k \operatorname{sh}(\alpha\delta)}{k \operatorname{sh}(\alpha\delta) \operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}(\alpha\delta)} &= \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} \left[1 - \frac{\operatorname{th}\alpha}{\operatorname{th}\alpha + k \operatorname{th}(\alpha\delta)} \right] \\ \text{б) } \frac{\operatorname{sh}\alpha}{k \operatorname{sh}(\alpha\delta) \operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}(\alpha\delta)} &= \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha\delta)} \frac{\operatorname{th}\alpha}{\operatorname{th}\alpha + k \operatorname{th}(\alpha\delta)} \end{aligned}$$

Далее разложим функцию

$$g(k) = \frac{\operatorname{th}\alpha}{\operatorname{th}\alpha + k \operatorname{th}(\alpha\delta)}$$

в ряд Маклорена по параметру k и пренебрежём членами порядка k^j , $j \geq 2$, т. е. ограничимся только линейными относительно k членами. В этом приближении из (4.8) получим $(-\infty < \xi < \infty)$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_1(\xi) &= \frac{k}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\alpha\delta)}{\operatorname{sh}\alpha} \cos(\alpha\xi) d\alpha - \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\alpha\delta)}{\operatorname{th}\alpha \operatorname{ch}(\alpha\delta)} \cos(\alpha\xi) d\alpha \right] + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\xi)}{\operatorname{ch}(\alpha\delta)} d\alpha. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Если теперь в (4.10) положить $k \approx 0$ и воспользоваться выражениями известного интеграла [9] (формула 3.981.3, стр. 517), то

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{2\delta \operatorname{ch}(\pi\xi/2\delta)} \quad (-\infty < \xi < \infty).$$

3) Пусть теперь $k \gg 1$, т. е. $G_1 \gg G_2$. Тогда поступив совершенно аналогично случаю 2) и пренебрегая членами порядка k^{-j} , $j \geq 2$, из (4.8) находим $(-\infty < \xi < \infty)$

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{2\text{ch}(\pi\xi/2)} + \frac{1}{\pi k} \left[\int_0^\infty \frac{\text{th}\alpha}{\text{sh}(\alpha\delta)} \cos(\alpha\xi) d\alpha - \int_0^\infty \frac{\text{th}\alpha}{\text{ch}\alpha \text{th}(\alpha\delta)} \cos(\alpha\xi) d\alpha \right] \quad (4.11)$$

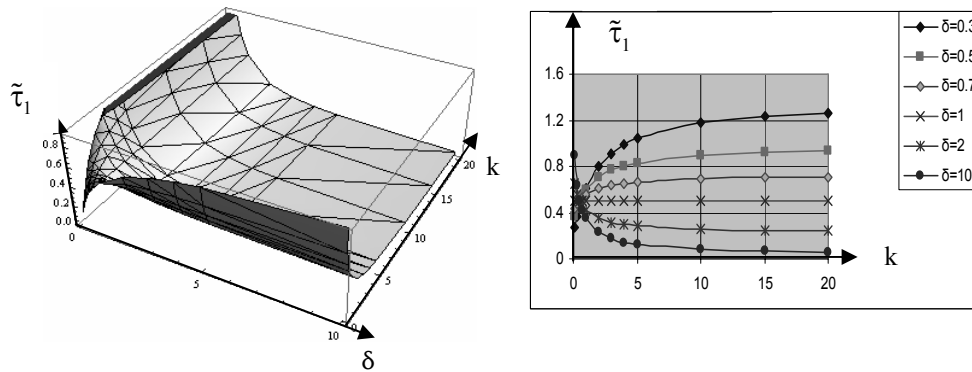
Отсюда при предельном переходе $k \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{2\text{ch}(\pi\xi/2)} \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

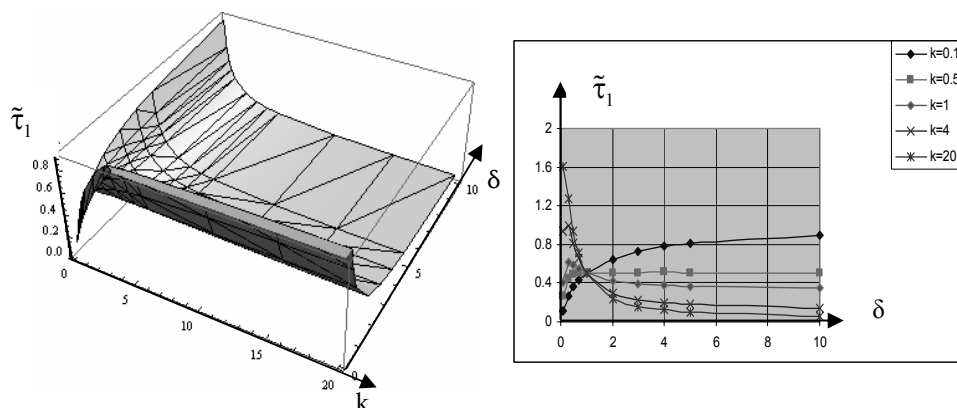
В общем случае для вычисления безразмерных касательных контактных напряжений имеем формулы (4.8). Положив в них, в частности, $\xi = 0$ и в интегралах перейдя к новой переменной t по формуле $x = -\ln t$ ($0 < t < 1$), придем к формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_1(0) &= \frac{2}{\pi} [kK(0) + L(0)], \quad K(0) = \int_0^1 \frac{(1-t^{2\delta})dt}{k(1+t^2)(1-t^{2\delta}) + (1-t^2)(1+t^{2\delta})} \\ L(0) &= \int_0^1 \frac{(1-t^2)t^{\delta-1}dt}{k(1+t^2)(1-t^{2\delta}) + (1-t^2)(1+t^{2\delta})} \end{aligned} \quad (4.12)$$

На фиг. 1 построена поверхность $\tilde{\tau}_1(0)$ в зависимости от параметров k и δ и приведены графики $\tilde{\tau}_1(0)$ в зависимости от параметра δ при различных фиксированных значениях k . На фиг.2 для более наглядного представления опять построена поверхность $\tilde{\tau}_1(0)$ в зависимости от параметров k и δ , поменяв при этом местами оси этих параметров, а также приведены графики $\tilde{\tau}_1(0)$ как функции от k при различных фиксированных значениях δ . На этих фигурах наглядно показан ход изменений $\tilde{\tau}_1(0)$ в зависимости от характерных параметров k и δ . При этом, легко видеть, что по (4.12), когда $\delta = 1$, имеем $K(0) = L(0) = \pi/2(k+1)$ и, следовательно, $\tilde{\tau}_1(0)$ не зависит от отношения модулей сдвига k . Это свойство $\tilde{\tau}_1(0)$ хорошо видно на приведенных графиках, особенно на фиг.1.



Фиг.1



Фиг.2

Авторы благодарят А.В.Саакяна за замечания по улучшению изложения текста статьи в части комментариев к приведённым фигурам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости.// Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 7. С.49–69.
2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании М.: Физматгиз, 1960. 491с.
3. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах равновесия толстых многослойных плит // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 7. С.40–48.
4. Bufler H. Theory of Elasticity of a Multilayered Medium.// Journal of Elasticity, vol. 1, No. 2, 1971, pp.125–143.
5. Лурье А. Н. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491с.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн, Изд. НАН РА, 2005. 608с.
7. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М: Наука, 1967. 375 с.
8. Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben über geschweißte oder geklebte Verbindungen. Österr. Ing. Arch, 1964, Bd 18, N 3-4, S. 284-292.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Сведения об авторах:

Гаспарян Ануш Вараздатовна

Младший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24Б

Тел. (+37410) 52-48-90, E-mail: anush@mechins.sci.am

Мхитарян Сурен Манукович

Доктор физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник,

Институт механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24Б

Тел. (+37410) 52-48-90, E-mail: mechins@sci.am

Поступила в редакцию 18.08.2009

УДК 529.3.01

ОБ АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО УПРУГОГО
СЛОЯ, СОДЕРЖАЩЕГО НА ЛИНИИ СПАЯ СИСТЕМУ ЩЕЛЕЙ И
АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ
МАНУКЯН Э.А., МКРТЧЯН М.С.

Ключевые слова: напряжения, слой, трещина, включения, система сингулярных интегральных уравнений, коэффициенты интенсивностей напряжений, раскрытие трещины.

Keywords: stress, layer, crack, inclusion, system of singular integral equations, coefficients of stress intensity, crack opening displacement

Մանուկյան Է.Ա., Մկրտչյան Մ.Ս.

Միացման գծի վրա ճաքեր և բարակապատ բացարձակ կոշտ ներդրակների համակարգ
պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական շերտի հակահարթ խնդրի մասին

Աշխատանքում հետազոտվում է առաձգական կտոր առ կտոր համասեռ շերտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ խնդիրը հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ, ընդ որում շերտի ազատ եզրերի վրա ազդում են կամայական բաշխված ուժեր, իսկ տարասեռ նյութերի միացման գծի վրա հորիզոնական ուղղությամբ դասավորված են ճաքեր և բացարձակ կոշտ ներդրակներ:

Manukyan E.A., Mkrtchyan M.S.

On Anti-Plane Problem of Piecewise Homogeneous Elastic Layer Containing the System of Crack on
Junction Line and Absolutely Rigid Thin Inclusions

In present work we consider the problem on the components' determination of strain stress state of piecewise homogeneous layer under anti-plane deformation. There are tangentially distributed loads on borders and there are cracks and absolutely rigid inclusions on horizontal line of junction of heterogeneous materials.

В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния кусочно-однородного слоя при антиплоской деформации, грани которого нагружены распределенными тангенциальными силами, а на горизонтальной линии спая разнородных материалов расположены трещины и абсолютно жесткие включения.

Задачи о трещинах и включениях тесно связаны с задачами определения напряженно-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, содержащих концентраторы напряжений. Ввиду их теоретической и практической важности в вопросах горной механики, механики композитов и прочности разнообразных инженерных конструкций они стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на работы [1-4].

1. Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ кусочно-однородный упругий слой состоит из верхнего слоя $\Omega_+ = \{-\infty < x, z < \infty, 0 \leq y \leq h_+\}$ с модулем сдвига G_+ и нижнего слоя $\Omega_- = \{-\infty < x, z < \infty, -h_- \leq y \leq 0\}$ с модулем сдвига G_- , и в плоскости $y = 0$ содержит систему сквозных взаимно не пересекающихся трещин и тонких абсолютно жестких включений, причем их следы в плоскости Oxy составляют систему интервалов L_1 и L_2 соответственно.

$$L_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1} [a_k, b_k]; \quad a_k < b_k \quad (k = 1, 2, \dots, N_1); \quad b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_1 - 1})$$

$$L_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2} [c_k, d_k]; \quad c_k < d_k \quad (k = 1, 2, \dots, N_2); \quad d_k < c_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_2 - 1})$$

$$L = L_1 \cup L_2$$

Пусть, далее, грани верхнего и нижнего слоёв нагружены распределенными тангенциальными силами с интенсивностями $\tau_{yz}|_{y=h_{\pm}} = f_{\pm}(x) \quad (-\infty < x < \infty)$, кроме того, берега трещин также нагружены силами с заданными интенсивностями $\tau_{yz}|_{y=\pm 0} = -\tau_{\pm}^{(1)}(x) \quad (x \in L_1)$, а на систему включений L_2 действуют силы с равнодействующими P_k , направленными вдоль оси Oz , вызывающие продольный сдвиг упругого слоя в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy .

Требуется определить плотность дислокаций смещений на берегах трещин, раскрытие трещин, скачки напряжений на берегах включений, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородную упругую полосу вдоль оси Ox разрежем на две части, а затем, для действующих на их гранях $y = \pm 0$ напряжений введем следующие обозначения ($L' = R/L; R = (-\infty, \infty)$):

$$-\tau_{yz}|_{y=+0} = T_+(x) = \begin{cases} \tau_+^{(1)}(x) & (x \in L_1); \\ \tau_+^{(2)}(x) & (x \in L_2); \\ \tau(x) & (x \in L'); \end{cases} \quad -\tau_{yz}|_{y=-0} = T_-(x) = \begin{cases} \tau_-^{(1)}(x) & (x \in L_1) \\ \tau_-^{(2)}(x) & (x \in L_2) \\ \tau(x) & (x \in L') \end{cases} \quad (1)$$

На системе включений L_2 смещения постоянны:

$$u_z^+(x, y)|_{y=+0} = u_z^-(x, y)|_{y=-0} = g(x) = \tilde{\delta}_k = \text{const} \quad (2)$$

$$x \in (c_k, d_k) \quad (k = \overline{1, N_2})$$

Граничные условия при $y = \pm h_{\pm}$ имеют вид:

$$\tau_{yz}^+|_{y=h_+} = G_+ \frac{\partial u_z^+(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h_+} = f_+(x); \quad \tau_{yz}^-|_{y=h_-} = G_- \frac{\partial u_z^-(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h_-} = f_-(x), \quad (x \in R) \quad (3)$$

где $u_z^{\pm}(x, y)$ – смещения точек в направлении оси Oz , соответственно, верхней и нижней полос, которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta u_z^{\pm}(x, y) = \frac{\partial^2 u_z^{\pm}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{\pm}(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

Далее введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Omega(x) = T_+(x) + T_-(x); \quad h(x) = \frac{du_z^+(x, +0)}{dx} + \frac{du_z^-(x, -0)}{dx}$$

$$\chi(x) = T_+(x) - T_-(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \in L_2) \\ \tau_+^{(1)}(x) - \tau_-^{(1)}(x) & (x \in L_1) \\ 0 & (x \in L') \end{cases} \quad (5)$$

а также плотность дислокаций смещений

$$w(x) = \frac{du_z^+(x, +0)}{dx} - \frac{du_z^-(x, -0)}{dx} = \begin{cases} \varphi(x) & (x \in L_1) \\ 0 & (x \in R/L_1) \end{cases} \quad (6)$$

С помощью прямого и обратного преобразования Фурье по переменной x , из уравнения (4) и граничных условий (1)-(3) в соответствии с обозначениями (5)-(6) придем к системе ключевых уравнений задачи относительно плотностей дислокаций на берегах трещин $w(x)$ и скачков касательных контактных напряжений $\chi(x)$ на берегах включений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{w(s)ds}{s-x} - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(x-s)w(s)ds - \frac{G_+ - G_-}{2G_+G_-} \chi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} M(x-s)\chi(s)ds - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} M(x-s)\chi(s)ds = -\frac{G_+ + G_-}{2G_+G_-} \Omega(x) - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_+} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-s)f_+(s)ds - \\ & \quad - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_-} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-s)f_-(s)ds; \quad (x \in R) \\ & -\frac{G_+ - G_-}{2} w(x) - \frac{G_+G_-}{\pi} \int_{L_1} M(x-s)w(s)ds + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\chi(s)ds}{s-x} + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{\chi(s)ds}{s-x} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} Q(x-s)\chi(s)ds + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} Q(x-s)\chi(s)ds = \frac{G_+ + G_-}{2} h(x) + \\ & + \frac{G_+ + G_-}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x-s)f_+(s)ds - \frac{G_+ + G_-}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(x-s)f_-(s)ds; \quad (x \in R) \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^{\infty} \frac{G_+ \text{th}(\lambda h_+) [\text{th}(\lambda h_-) - 1] + G_- \text{th}(\lambda h_-) [\text{th}(\lambda h_+) - 1]}{G_+ \text{th}(\lambda h_+) + G_- \text{th}(\lambda h_-)} \sin(\lambda x) d\lambda \\ M(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\text{th}(\lambda h_+) - \text{th}(\lambda h_-)}{G_+ \text{th}(\lambda h_+) + G_- \text{th}(\lambda h_-)} \cos(\lambda x) d\lambda \\ Q(x) &= \int_0^{\infty} \frac{G_+ [\text{th}(\lambda h_+) - 1] + G_- [\text{th}(\lambda h_-) - 1]}{G_+ \text{th}(\lambda h_+) + G_- \text{th}(\lambda h_-)} \sin(\lambda x) d\lambda \\ F_1(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\text{th}(\lambda h_-)}{\text{ch}(\lambda h_+) [G_+ \text{th}(\lambda h_+) + G_- \text{th}(\lambda h_-)]} \cos(\lambda x) d\lambda \\ F_2(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\text{th}(\lambda h_+)}{\text{ch}(\lambda h_-) [G_+ \text{th}(\lambda h_+) + G_- \text{th}(\lambda h_-)]} \cos(\lambda x) d\lambda \\ G_1(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda x) d\lambda}{\text{ch}(\lambda h_+) [G_+ \text{th}(\lambda h_+) + G_- \text{th}(\lambda h_-)]} \end{aligned}$$

$$G_2(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x) d\lambda}{\operatorname{ch}(\lambda h_-) [G_+ \operatorname{th}(\lambda h_+) + G_- \operatorname{th}(\lambda h_-)]}$$

Рассматривая теперь первое уравнение системы (7) на L_1 , а второе уравнение на L_2 , придём к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) задачи:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi(s) ds}{s-x} - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(x-s) \varphi(s) ds - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} M(x-s) \psi(s) ds = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{L_1} M(x-s) [\tau_+^{(1)}(s) - \tau_-^{(1)}(s)] ds - \left[\frac{\tau_+^{(1)}(x)}{G_+} + \frac{\tau_-^{(1)}(x)}{G_-} \right] - \\ & - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_+} \int_{-\infty}^\infty F_1(x-s) f_+(s) ds - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_-} \int_{-\infty}^\infty F_2(x-s) f_-(s) ds; \quad (x \in L_1) \\ & - \frac{G_+ G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} M(x-s) \varphi(s) ds + \frac{1}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_2} \frac{\psi(s) ds}{s-x} + \\ & + \frac{1}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_2} Q(x-s) \psi(s) ds = - \frac{1}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} \frac{[\tau_+^{(1)}(s) - \tau_-^{(1)}(s)] ds}{s-x} + \\ & + \frac{1}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} Q(x-s) [\tau_+^{(1)}(s) - \tau_-^{(1)}(s)] ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty G_1(x-s) f_+(s) ds - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty G_2(x-s) f_-(s) ds; \quad (x \in L_2) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Система (8) должна рассматриваться при условиях:

$$\int_{a_k}^{b_k} \varphi(x) dx = 0 \quad (k = \overline{1, N_1}) \quad (9)$$

$$\int_{c_k}^{d_k} \psi(x) dx = P_k \quad (k = \overline{1, N_2}) \quad (10)$$

Первое из них эквивалентно условиям непрерывности смещений в концевых точках разреза, а второе представляет собой условия равновесия k -того включения.

Рассматривая же первое уравнение системы (7) вне разрезов и включений, будем иметь:

$$\begin{aligned} \tau(x) = & - \frac{G_+ G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} \frac{\varphi(s) ds}{s-x} + \frac{G_+ G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} K(x-s) \varphi(s) ds + \\ & + \frac{G_+ G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_2} M(x-s) \psi(s) ds + \frac{G_+ G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} M(x-s) [\tau_+^{(1)}(s) - \tau_-^{(1)}(s)] ds - \\ & - \frac{G_-}{\pi} \int_{-\infty}^\infty F_1(x-s) f_+(s) ds - \frac{G_+}{\pi} \int_{-\infty}^\infty F_2(x-s) f_-(s) ds; \quad (x \in L') \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, поставленная задача о напряжённом состоянии упругой полосы с трещинами и абсолютно жёсткими включениями сводится к решению системы (8) при условиях (9)-(10). После решения (8)-(10) разрушающее напряжение определяется формулой (11).

2. Для решения определяющей СИУ (8)–(10) сначала введем безразмерные координаты и величины:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x}{|a_1|}, \quad \eta = \frac{s}{|a_1|}; \quad h_1 = \frac{h_+}{|a_1|}; \quad h_2 = \frac{h_-}{|a_1|}; \quad \alpha_k = \frac{a_k}{|a_1|}, \quad \beta_k = \frac{b_k}{|a_1|}; \quad (k = \overline{1, N_1}) \\ \gamma_k &= \frac{c_k}{|a_1|}, \quad \delta_k = \frac{c_k}{|a_1|}; \quad (k = \overline{1, N_2}), \quad \mu = G_+/G_-; \quad L_{01} = \bigcup_{k=1}^{N_1} (\alpha_k; \beta_k); \quad L_{02} = \bigcup_{k=1}^{N_2} (\gamma_k; \delta_k) \quad (12) \\ \Phi_0(\xi) &= \Phi(|a_1|\xi); \quad \Psi_0(\xi) = \frac{\Psi(|a_1|\xi)}{G_+ + G_-}; \quad \tau_{\pm}^{(1)}(\xi) = \frac{\tau_{\pm}^{(1)}(|a_1|\xi)}{G_+ + G_-}; \quad f_{\pm}^{(0)}(\xi) = \frac{f_{\pm}^{(0)}(|a_1|\xi)}{G_+ + G_-}\end{aligned}$$

после чего (8) преобразуется в следующее СИУ:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} \frac{\Phi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} K_0(\xi - \eta) \Phi_0(\eta) d\eta - \\ & \quad - \frac{\mu + 1}{\pi} \int_{L_{02}} M_0(\xi - \eta) \Psi_0(\eta) d\eta = l_1(\xi); \quad (\xi \in L_{01}) \\ & - \frac{\mu}{\pi(\mu + 1)} \int_{L_{01}} M_0(\xi - \eta) \Phi_0(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{L_{02}} \frac{\Psi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \int_{L_{02}} Q_0(\xi - \eta) \Psi_0(\eta) d\eta = l_2(\xi), \quad (\xi \in L_{02}) \end{aligned} \right. \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} K_0(x) &= \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) [\operatorname{th}(\lambda h_2) - 1] + \operatorname{th}(\lambda h_2) [\operatorname{th}(\lambda h_1) - 1]}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \sin(\lambda x) d\lambda \\ M_0(x) &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda h_1) - \operatorname{th}(\lambda h_2)}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \cos(\lambda x) d\lambda \\ Q_0(x) &= \int_0^\infty \frac{\mu [\operatorname{th}(\lambda h_1) - 1] + [\operatorname{th}(\lambda h_2) - 1]}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \sin(\lambda x) d\lambda \\ F_{10}(x) &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda h_2)}{\operatorname{ch}(\lambda h_1) [\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)]} \cos(\lambda x) d\lambda \\ F_{20}(x) &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda h_1)}{\operatorname{ch}(\lambda h_2) [\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)]} \cos(\lambda x) d\lambda \\ G_{10}(x) &= \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x) d\lambda}{\operatorname{ch}(\lambda h_1) [\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)]} \\ G_{20}(x) &= \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x) d\lambda}{\operatorname{ch}(\lambda h_2) [\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1(\xi) &= \frac{\mu+1}{\pi} \int_{L_{01}} M_0(\xi-\eta) [\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)] d\eta - \frac{\mu+1}{\mu} \tau_+^{(0)}(\xi) - (\mu+1) \tau_-^{(0)}(\xi) - \\
&- \frac{(\mu+1)^2}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} F_{10}(\xi-\eta) f_+^{(0)}(\eta) d\eta - \frac{(\mu+1)^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{20}(\xi-\eta) f_-^{(0)}(\eta) d\eta; \quad (\xi \in L_{01}) \\
l_2(\xi) &= -\frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} \frac{[\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)] d\eta}{\eta - \xi} + \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} Q_0(\xi-\eta) [\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)] d\eta + \\
&+ \frac{\mu+1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{10}(\xi-\eta) f_+^{(0)}(\eta) d\eta - \frac{\mu+1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{20}(\xi-\eta) f_-^{(0)}(\eta) d\eta; \quad (\xi \in L_{02})
\end{aligned}$$

Теперь каждый интервал $(\alpha_k, \beta_k), (\gamma_k, \delta_k)$ системы L_{01} и L_{02} преобразуем в интервал $(-1, 1)$, полагая

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2}, \quad \eta = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} u + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad (-1 < t, u < 1) \\
\xi &= \frac{\delta_k - \gamma_k}{2} t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2}, \quad \eta = \frac{\delta_k - \gamma_k}{2} u + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \quad (k = \overline{1, N_2}), \quad (-1 < t, u < 1)
\end{aligned}$$

в результате СИУ (13) преобразуется в систему интегральных уравнений относительно функций:

$$\begin{aligned}
\varphi_k(t) &= \varphi_0 \left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right) \quad (-1 < t < 1; \quad k = \overline{1, N_1}) \\
\psi_k(t) &= \psi_0 \left(\frac{\delta_k - \gamma_k}{2} t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \right) \quad (-1 < t < 1; \quad k = \overline{1, N_2})
\end{aligned}$$

на интервале $(-1, 1)$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(u) du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_1} \int_{-1}^1 K_{km}^{(1)}(t, u) \varphi_m(u) du - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_1} \int_{-1}^1 K_{km}(t, u) \varphi_m(u) du - \\ & - \frac{\mu+1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_2} \int_{-1}^1 M_{km}^{(2)}(t, u) \psi_m(u) du = l_{1k}(t); \quad (-1 < t < 1; \quad k = \overline{1, N_1}) \\ & - \frac{\mu}{\pi(\mu+1)} \sum_{m=1}^{N_1} \int_{-1}^1 M_{km}^{(1)}(t, u) \varphi_m(u) du + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_k(u) du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_2} \int_{-1}^1 K_{km}^{(2)}(t, u) \psi_m(u) du + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_2} \int_{-1}^1 Q_{km}(t, u) \psi_m(u) du = l_{2k}(t), \quad (-1 < t < 1; \quad k = \overline{1, N_2}) \end{aligned} \right. \quad (14)$$

где

$$K_{km}^{(1)}(t, u) = \left(u - \frac{\beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m} t + \frac{\beta_m + \alpha_m}{\beta_m - \alpha_m} - \frac{\beta_k + \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m} \right)^{-1}; \quad (m, k = \overline{1, N_1})$$

$$\begin{aligned}
K_{km}^{(2)}(t, u) &= \left(u - \frac{\delta_k - \gamma_k}{\delta_m - \gamma_m} t + \frac{\delta_m + \gamma_m}{\delta_m - \gamma_m} - \frac{\delta_k + \gamma_k}{\delta_m - \gamma_m} \right)^{-1}; \quad (m, k = \overline{1, N_2}) \\
K_{km}(t, u) &= \lambda_m^{(1)} K_0 \left(\lambda_k^{(1)} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} - \lambda_m^{(1)} u - \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} \right); \quad (m, k = \overline{1, N_1}) \\
M_{km}^{(1)}(t, u) &= \lambda_m^{(1)} M_0 \left(\lambda_k^{(2)} t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} - \lambda_m^{(1)} u - \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_1}; k = \overline{1, N_2}) \\
M_{km}^{(2)}(t, u) &= \lambda_m^{(2)} M_0 \left(\lambda_k^{(1)} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} - \lambda_m^{(2)} u - \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_2}; k = \overline{1, N_1}) \\
Q_{km}(t, u) &= \lambda_m^{(2)} Q_0 \left(\lambda_k^{(2)} t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} - \lambda_m^{(2)} u - \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m, k = \overline{1, N_2}) \\
l_{1k}(t) &= l_1 \left(\lambda_k^{(1)} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right); \quad (k = \overline{1, N_1}; t \in (-1, 1)) \\
l_{2m}(t) &= l_2 \left(\lambda_m^{(2)} t + \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_2}; t \in (-1, 1)) \\
\lambda_m^{(1)} &= (\beta_m - \alpha_m)/2, \quad (m = \overline{1, N_1}); \quad \lambda_k^{(2)} = (\delta_k - \gamma_k)/2, \quad (k = \overline{1, N_2})
\end{aligned}$$

а условие (9), (10) – в следующие условия:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \varphi_k(u) du &= 0; \quad (k = \overline{1, N_1}) \\
\int_{-1}^1 \psi_k(u) du &= \hat{P}_k; \quad \left(\hat{P}_k = \frac{2P_k}{(\delta_k - \gamma_k)|a_1|(G_+ + G_-)} \right); \quad (k = \overline{1, N_2})
\end{aligned} \tag{15}$$

К системе СИУ (14) при условиях (15) применим изложенный в [5, 6, 7] метод решения СИУ. С этой целью сначала положим

$$\varphi_k(t) = \frac{x_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < t < 1, k = \overline{1, N_1}); \quad \psi_k(t) = \frac{y_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < t < 1, k = \overline{1, N_2})$$

где $x_k(t)$ и $y_k(t)$ – функции, принадлежащие гильбертовскому классу функции на отрезке $[-1, 1]$, а затем выберем произвольное натуральное число M . Далее, следуя известной процедуре [5], систему (14) при условиях (15) сведем к следующей системе линейных алгебраических уравнений (ЛАУ):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{x_k(u_n)}{u_n - t_r} + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq k}}^M K_{km}^{(1)}(t_r, u_n) x_m(u_n) - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^M K_{km}(t_r, u_n) x_m(u_n) - \\ & - \frac{\mu + 1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^M M_{km}^{(2)}(t_r, u_n) y_m(u_n) = l_{1k}(t_r); \quad (k = \overline{1, N_1}; \quad r = \overline{1, M-1}) \\ & \sum_{n=1}^M x_k(u_n) = 0; \quad (k = \overline{1, N_1}) \\ & - \frac{\mu}{M(\mu + 1)} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^M M_{km}^{(1)}(t_r, u_n) x_m(u_n) + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{y_k(u_n)}{u_n - t_r} + \\ & + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq k}}^M K_{km}^{(2)}(t_r, u_n) y_m(u_n) + \\ & + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^M Q_{km}(t_r, u_n) y_m(u_n) = l_{2k}(t_r); \quad (k = \overline{1, N_2}; \quad r = \overline{1, M-1}) \\ & \frac{\pi}{M} \sum_{n=1}^M y_k(u_n) = \hat{P}_k; \quad (k = \overline{1, N_2}) \end{aligned} \right.$$

откуда определяются неизвестные $\{x_k(u_n)\} (k = \overline{1, N_1}; n = \overline{1, M})$ и $\{y_k(u_n)\} (k = \overline{1, N_2}; n = \overline{1, M})$.

Здесь

$$u_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2M}\pi\right), \quad (n = \overline{1, M}); \quad t_r = \cos\left(\frac{\pi r}{M}\right), \quad (r = \overline{1, M-1}) \quad (16)$$

Чебышевские узлы – т.е. корни, соответственно, уравнений $T_M(u) = 0$, $U_{M-1}(t) = 0$, где $T_M(u)$ и $U_{M-1}(t)$ – многочлены Чебышева первого и второго родов, соответственно.

Перейдем к определению коэффициентов интенсивностей разрушающих касательных напряжений (КИН) в антиплоской задаче теории упругости в концевых точках a_k, b_k трещин $(a_k; b_k) (k = \overline{1, N_1})$. Если в известных формулах для КИН однородного тела в случае антиплоской деформации [8] модуль сдвига заменить приведенным модулем сдвига, то для КИН кусочно-однородного тела получим следующие формулы [9]:

$$\begin{aligned} K_{III}(a_k) &= \frac{G_+}{1+\mu} \lim_{x \rightarrow a_k+0} \sqrt{2\pi(x-a_k)} \varphi(x) \\ K_{III}(b_k) &= -\frac{G_+}{1+\mu} \lim_{x \rightarrow b_k-0} \sqrt{2\pi(b_k-x)} \varphi(x). \quad (\mu = G_+/G_-) \end{aligned} \quad (17)$$

После преобразования формулы (17), в соответствии с (12) и после перехода к переменной t , будем иметь:

$$K_{III}^0(a_k) = \frac{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}}{1+\mu} x_k(-1); \quad K_{III}^0(b_k) = -\frac{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}}{1+\mu} x_k(1); \quad (k = \overline{1, N_1}) \quad (18)$$

где введены безразмерные КИН:

$$K_{III}^0(a_k) = \frac{K_{III}(a_k)}{\sqrt{\pi|a_1|G_+}}; \quad K_{III}^0(b_k) = \frac{K_{III}(b_k)}{\sqrt{\pi|a_1|G_+}}; \quad (k=1, N_1) \quad (19)$$

Входящие в (18) значения $x_k(\pm 1)$ функции $x_k(t)$ определяются при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа по чебышевским узлам (16) и выражаются формулами [5]:

$$\begin{aligned} x_k(1) &= \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (-1)^{n+1} x_k(u_n) \operatorname{ctg} \left(\frac{2n-1}{4M} \pi \right) \\ x_k(-1) &= \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (-1)^{M+n} x_k(u_n) \operatorname{tg} \left(\frac{2n-1}{4M} \pi \right); \quad (k=1, N_1) \end{aligned} \quad (20)$$

Для безразмерных раскрытий трещин $w_k(t)$ с учетом (12) можем записать [5]:

$$\begin{aligned} w_k(t) &= \int_{-1}^t \frac{x_k(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\pi}{M} \sum_{u_n \leq t} x_k(u_n); \quad (-1 \leq t \leq 1) \\ w_k(t) &= \frac{2}{b_k - a_k} \hat{w}_k \left(\frac{b_k - a_k}{2} t + \frac{b_k + a_k}{2} \right); \quad (-1 \leq t \leq 1) \end{aligned} \quad (21)$$

где $\hat{w}_k(x)$ – раскрытие k -той трещины.

Далее рассмотрим частный случай, когда на линии соединения разнородных полос содержатся симметрично расположенные трещины и абсолютно жесткое тонкое включение, $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 = (-b, -a)$, $L_2 = (a, b)$, $(0 \leq a < b)$. Предположим, что на свободных гранях полос нагрузки отсутствуют $f_+(x) = f_-(x) = 0$, а на берегах щелей действуют равные между собой напряжения произвольных интенсивностей $\tau_+^{(1)}(x) = \tau_-^{(1)}(x) = \tau(x)$ ($x \in L_1$). При этом частном случае система (14) запишется в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\phi}(u) du}{u-t} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{K}(t-u) \tilde{\phi}(u) du - \\ & - \frac{\mu+1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{M}_1(t-u) \tilde{\psi}(u) du = - \frac{(\mu+1)^2}{\mu} \tau_0(t); \quad (t \in (-1, 1)) \\ & - \frac{\mu}{\pi(\mu+1)} \int_{-1}^1 \tilde{M}_2(t-u) \tilde{\phi}(u) du + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\psi}(u) du}{u-t} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{Q}(t-u) \tilde{\psi}(u) du = 0. \quad (t \in (-1, 1)) \end{aligned} \right. \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(t) &= \phi \left(\frac{b-a}{2} t - \frac{b+a}{2} \right); \quad (-1 < t < 1) \\ \tilde{\psi}(t) &= \frac{1}{G_+ + G_-} \psi \left(\frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} \right); \quad (-1 < t < 1) \\ \tau_0(t) &= \frac{1}{G_+ + G_-} \tau \left(\frac{b-a}{2} t - \frac{b+a}{2} \right); \quad (-1 < t < 1) \end{aligned}$$

$$\tilde{K}(t-u) = \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) [\operatorname{th}(\lambda h_2) - 1] + \operatorname{th}(\lambda h_2) [\operatorname{th}(\lambda h_1) - 1]}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \sin \lambda(t-u) d\lambda;$$

$$\tilde{M}_1(t-u) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda h_1) - \operatorname{th}(\lambda h_2)}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \cos \lambda \left((t-u) - \frac{2(1+\rho)}{1-\rho} \right) d\lambda;$$

$$\tilde{M}_2(t-u) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda h_1) - \operatorname{th}(\lambda h_2)}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \cos \lambda \left((t-u) + \frac{2(1+\rho)}{1-\rho} \right) d\lambda;$$

$$\tilde{Q}(t-u) = \int_0^\infty \frac{\mu [\operatorname{th}(\lambda h_1) - 1] + [\operatorname{th}(\lambda h_2) - 1]}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \sin \lambda(t-u) d\lambda; \quad (-1 < t, u < 1)$$

$$\text{а } \mu = \frac{G_+}{G_-}; \quad h = \frac{h_+}{b}; \quad H = \frac{h_-}{b}; \quad h_1 = \frac{2h}{1-\rho}; \quad h_2 = \frac{2H}{1-\rho}; \quad \rho = \frac{a}{b}$$

Далее, по известной численно-аналитической методике, как и в общем случае, из системы (22) и условий на щели $(-b, -a)$ и включения (a, b) , из (9) и (10) будем иметь следующую систему ЛАУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{K}(t_r - u_m) \right] x(u_m) - \frac{\mu+1}{M} \times \\ \quad \times \sum_{m=1}^M \tilde{M}_1(t_r - u_m) y(u_m) = -\frac{(\mu+1)^2}{\mu} \tau_0(t_r); \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ \sum_{m=1}^M x(u_m) = 0; \\ -\frac{\mu}{M(\mu+1)} \sum_{m=1}^M \tilde{M}_2(t_r - u_m) x(u_m) + \frac{1}{M} \times \\ \quad \times \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{Q}(t_r - u_m) \right] y(u_m) = 0; \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M y(u_m) = \tilde{P}, \end{array} \right. \quad (23)$$

где $\tilde{P} = \frac{2P_1}{\Delta(G_+ + G_-)}$; $\Delta = b - a$, а u_m и t_r – соответствующие чебышевские узлы

из (16). В этом случае соответствующие формулы (18) – (19) для безразмерных КИН в точках $-b$ и $-a$ заменяются формулами:

$$K_{III}^{(0)}(-b) = \frac{1}{\mu+1} x(-1); \quad K_{III}^{(0)}(-a) = -\frac{1}{\mu+1} x(1) \quad (24)$$

$$K_{III}^0(-b) = \frac{2K_{III}(-b)}{\sqrt{2\pi\Delta G_+}}; \quad K_{III}^0(-a) = \frac{K_{III}(-a)}{\sqrt{2\pi\Delta G_+}}$$

Далее, для простоты примем $\tau_0(t) = 0.01$ и $\tilde{P} = 0.01$. Тогда после решения системы (23) при разных значениях параметров μ, h, H, ρ находим

соответствующие значения КИН в концевых точках трещины по формулам (24) и соответствующее раскрытие трещины по формуле (21).

Вычисленные по формулам (24) значения КИН $K_{III}^0(-b)$ и $K_{III}^0(-a)$ в зависимости от изменения параметра ρ (при изменении этого параметра полагается, что длина симметрично расположенных трещин и включения постоянны) и при фиксированных значениях других параметров μ, h, H приведены в табл. 1, которые характерны для этих КИН и при других значениях параметров. Здесь дополнительно отметим, что под $K_{III}^0(-a)$ при $a = 0 (\rho = 0)$ надо понимать как предельное значение КИН трещины при $-a \rightarrow -0$.

Значения КИН $K_{III}^0(-b)$, $K_{III}^0(-a)$ ($\mu = 2, h = 1, H = 100$)

Таблица 1

ρ	0	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
$K_{III}^0(-b)$	0.0158	0.01574	0.01568	0.01557	0.01547	0.01538
$K_{III}^0(-a)$	0.01588	0.01582	0.01575	0.01563	0.01552	0.01541

ρ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
$K_{III}^0(-b)$	0.01529	0.01521	0.01515	0.01509	0.01504	0.01502
$K_{III}^0(-a)$	0.01531	0.01523	0.01515	0.01509	0.01504	0.01502

Значение КИН $K_{III}^0(-b)$, $K_{III}^0(-a)$ имеют максимальное значение при $\rho = 0$, т.е. когда трещина и включение соединяются, притом значение КИН $K_{III}^0(-a)$ всегда больше, чем $K_{III}^0(-b)$, а при возрастании параметра ρ до единицы оба значения уменьшаются и приближаются друг к другу.

Вычисленные значения КИН $K_{III}^0(-b)$ и $K_{III}^0(-a)$ в зависимости от изменения параметра h при фиксированных значениях других параметров μ, ρ, H приведены в табл.2, которые характерны для этих КИН и при других значениях параметров.

Значения КИН $K_{III}^0(-b)$, $K_{III}^0(-a)$ ($\mu = 2, \rho = 0.5, H = 100$)

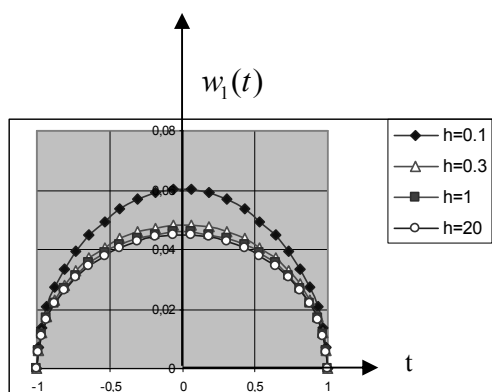
Таблица 2

h	0.1	0.2	0.3	0.5	0.6	0.8
$K_{III}^0(-b)$	0.01847	0.01656	0.01595	0.01553	0.01545	0.01535
$K_{III}^0(-a)$	0.01851	0.01661	0.01601	0.01558	0.01549	0.01538

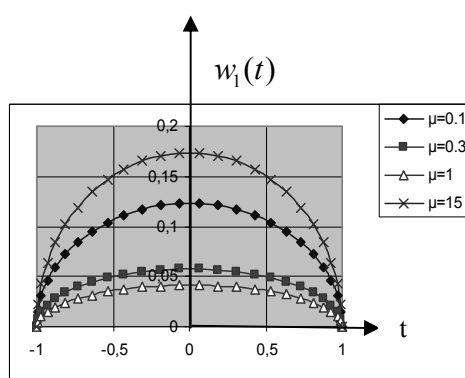
h	0.9	1	8	30	50	100
$K_{III}^0(-b)$	0.01532	0.01529	0.01504	0.01501	0.015	0.015
$K_{III}^0(-a)$	0.01534	0.01531	0.01504	0.01501	0.015	0.015

Очевидно, что значения КИН $K_{III}^0(-b)$, $K_{III}^0(-a)$ с возрастанием параметра h уменьшаются, приближаясь к своему предельному значению, которое одинаково для обоих концов трещины.

Вычисленные по формуле (21) безразмерные раскрытия трещины $w_1(t)$ для различных значений параметра h и при фиксированных значениях $\rho = 0.5, \mu = 2, H = 100$ графически изображены на фиг. 1. По мере возрастания h эти графики спускаются вниз, приближаясь к предельной кривой при $h = \infty$. А на фиг.2 тоже изображены безразмерные раскрытия трещины $w_1(t)$ для различных значений параметра μ при фиксированном значении $\rho = 0.5, h = 1, H = 100$. В этом случае получается, что раскрытие трещины минимальное, когда полоса однородная.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для некоторых значений характерных параметров, при которых нагрузки не превышают теоретическую прочность материалов, раскрытия трещины могут быть большими по сравнению с приведенными здесь их величинами. Эти величины регулируются деформационными критериями распространения трещины. Например, по известному критерию Леонова-Панасюка [10], когда в окрестностях вершин трещины раскрытие достигает критического значения $\delta_{кр}$, трещина распространяется. Тогда, заведомо, прежде чем раскрытие достигнет расчетных больших величин, трещина уже распространена.

В заключение авторы благодарят В.Н. Акопяна за полезное обсуждение результатов работы и за сделанные замечания.

Основные результаты работы доложены на Международной конференции по проблемам динамики взаимодействия деформируемых сред (сентябрь 21-26, 2008, Горис-Степанакерт).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М: Наука, 1974. 456с.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М: Наука, 1983. 488с.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
6. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
7. Theocaris P.S., Iokamidis N.I. Numerical Integration Methods for the solution of singular Integral Equations. Quart. Appl. Math., vol XXXV, No1, pp. 173-185, 1977.
8. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. //Механика разрушения и прочность материалов. Спр. пособие под общей редакцией В.В. Панасюка, т. 2. Киев: Наукова думка, 1988. 619с.
9. Мкртчян М.С. Напряженное состояние упругого кусочно-однородного пространства с трещинами или абсолютно жесткими включениями при антиплоской и плоской деформациях. /Кандидатская диссертация. Ереван, Институт механики НАН РА, 2001.
10. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.

Сведения об авторах:

Манукян Эмиль Абетович – канд. физ-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: Ереван, 0019, пр. Маршала Баграмяна 24^Б

Мкртчян Мушег Серёжаевич – канд. физ-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении

Тел.: (37410)43-16-52

E-mail: muscheg@meching.sci.am

Поступила в редакцию 21.04.2009

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ СПИНОВЫХ ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ ФЕРРОМАГНИТНОЙ
СРЕДЫ ПРИ ОБОБЩЁННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ
ДАНОЯН З. Н., АТОЯН Л. А.

Ключевые слова: ферромагнитная среда, спиновые волны, отражение волн, сопутствующие поверхностные волны.

Keywords: Ferromagnetic medium, spin waves, waves reflection, accompanying surface waves.

Դանոյան Զ. Ն., Աթոյան Լ. Ա.

Սպինային ալիքների անդրադարձումը ֆերոմագնիսական միջավայրի
էզրից ընդհանրացված եզրային պայմանների դեպքում

Աշխատանքում լուծված է ծավալային սպինային ալիքի անդրադարձման խնդիրը, որը ֆերոմագնիսական միջավայրի խորքից ընկնում է նրա մակերևույթին այն դեպքում, երբ միջավայրի մակերևույթին տրված են ընդհանրացված եզրային պայմաններ մագնիսացման խտության համար: Խնդրի լուծումը հնարավորություն է տալիս պնդելու, որ բացի հայելային անդրադարձող ալիքից առաջանում են երկու անհամասեռ ուղեկցող մակերևույթային ալիքներ, որոնք տարածվում են միջավայրի մակերևույթով միևնույն արագությամբ, սակայն դեպի միջավայրի խորքը մարում են տարբեր մարման գործակիցներով, ինչպես նաև վակուումում տարածվող ուղեկցող մակերևույթային մագնիսաստատիկ ալիք: Ալիքի անդրադարձման գործակիցների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ֆերոմագնիսական միջավայրի մակերևույթին ցանկացած անկյունով ալիքի անկման դեպքում, անդրադարձումը ունի ներքին լրիվ անդրադարձման բնույթ, բացառությամբ նորմալ և զուգահեռ անկման դեպքերի:

Danoyan Z. N., Atoyan L. H.

Reflection of Spin Waves From the Boundary of Ferromagnetic Medium under Generalized Boundary Conditions

In the paper reflection problem of an incident bulk ferromagnetic spin-wave is solved. The wave reflects from the ferromagnetic medium surface, when on the surface are given the generalized boundary conditions for magnetization density [4]. Solution of the problem provides a foundation to confirm, that in ferromagnetic medium appears two nonhomogeneous accompanying surface waves, besides of the mirror reflected wave. The two surface waves propagation velocities are the same, but coefficients of damping are different. The magneto static nonhomogeneous waves also arise in outside medium. As a result it is shown that the spin-wave reflection from the ferromagnetic medium surface is the full internal reflection for all the incident waves angles, except of perpendicular or parallel cases.

В работе решается задача отражения объемной спиновой волны, падающей изнутри ферромагнитной среды на ее поверхность, для случая, когда на поверхности ферромагнетика заданы обобщенные граничные условия для плотности намагничивания [4]. Решение задачи даёт основание утверждать, что в среде, кроме зеркально отраженной волны, возникают две неоднородные сопутствующие поверхностные волны, распространяющиеся по поверхности с одинаковой скоростью, но с различными коэффициентами спада в глубь среды, а также сопутствующая неоднородная магнитостатическая волна в вакууме. Анализ коэффициентов отражения волны показывает, что при любом угле падения спиновой волны на поверхность ферромагнетика отражение от поверхности носит характер полного внутреннего отражения, за исключением случаев нормального и параллельного падений.

Введение. Сведения о спиновых и упруго-спиновых волнах можно найти в фундаментальных работах [1, 2]. В дальнейшем появились исследования, связанные с поверхностными спиновыми и упруго-спиновыми волнами в работах [2, 3, 5, 6, 7 и др.].

В настоящей работе решается задача отражения объемной спиновой волны от поверхности полубесконечной недеформируемой ферромагнитной среды,

границей с вакуумом. На поверхности среды задается обобщенное граничное условие для плотности намагничивания ферромагнетика, которое получается из условия непрерывности нормальной составляющей плотности потока энергии на поверхности среды [1, 2]. Решаемая задача является обобщением предыдущей работы авторов [5], где решена задача отражения спиновой волны от поверхности недеформируемого ферромагнитного полупространства при обычных граничных условиях. Впервые обобщенные граничные условия были использованы в работе [4], далее в несколько ином виде они встречаются в работах [5, 6, 7]. В заключение заметим, что в настоящее время авторами решается задача отражения упруго-спиновой волны от поверхности ферромагнитного полупространства при обобщенных граничных условиях.

1. Постановка задачи. Пусть недеформируемая ферромагнитная среда в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $y > 0$. Вне среды, в области $y < 0$, предполагается вакуум. Граница ферромагнетика $y = 0$ считается магнитно-свободной. Ось Oz совпадает с осью легкого намагничивания ферромагнетика. Предполагается, что ферромагнетик находится во внешнем магнитном поле напряженности $\vec{H}_0$, совпадающей по направлению с осью Oz .

Объемная плотность намагничивания $\vec{M}_0 = \rho_0 \vec{\mu}_0$ параллельна магнитному полю $\vec{H}_0$, $\vec{\mu}_0$ – плотность намагничивания, отнесенная к единице массы, ρ_0 – массовая плотность ферромагнетика. Возмущения в среде характеризуются вектором магнитного момента $\vec{\mu}(\mu(x, y, t), \nu(x, y, t), 0)$ и напряженностью магнитного поля $\vec{h} = -\text{grad}\varphi(x, y, t)$, где φ – магнитостатический потенциал среды. Согласно [2] принимаем, что возмущение плотности намагничивания перпендикулярно к $\vec{M}_0$. Возмущение в вакууме характеризуется напряженностью магнитного поля $\vec{h}_e = -\text{grad}\varphi_e(x, y, t)$, где φ_e – магнитостатический потенциал в вакууме. Волновое поле в среде описывается следующей граничной задачей [2,5]:

1) Уравнения в среде (в области $y > 0$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial t} &= \Omega_m (\rho_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{b} \nu - \lambda \Delta \nu) \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} &= \Omega_m (\rho_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \hat{b} \mu + \lambda \Delta \mu) \\ \Delta \varphi &= \rho_0 (\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y})\end{aligned}\quad (1.1)$$

2) Граничные условия на поверхности среды (в области $y = 0$):

$$\varphi = \varphi_e, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \rho \nu = \frac{\partial \varphi_e}{\partial y}, \quad \xi \frac{\partial \mu}{\partial y} + \eta \mu = 0, \quad \xi \frac{\partial \nu}{\partial y} + \eta \nu = 0 \quad (1.2)$$

3) Уравнение в вакууме (в области $y < 0$):

$$\Delta \varphi_e = 0 \quad (1.3)$$

Первое граничное условие есть требование непрерывности магнитостатического потенциала на поверхности среды. Второе условие вытекает из непрерывности возмущения напряженности магнитного поля на поверхности среды. Третье и

четвёртое обобщённые граничные условия для компонент плотности намагничивания получаются из условия непрерывности нормальной составляющей плотности потока энергии на поверхности недеформируемого ферромагнетика [2, 3]. Обобщённые параметры ξ и η выбираются соответствующим образом: для каждого конкретного случая обычно рассматриваются два частных случая: а) $\xi = 1, \eta = 0$; в этом случае получается результат, соответствующий результату работы авторов [1], б) $\xi \rightarrow \infty, \eta = 1$.

Выше $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Omega_m = \gamma_0 \rho_0 \mu_0, \quad \gamma_0 - \text{гирромагнитное отношение}$

($\gamma_0 = 1,76 \times 10^7 (\text{эрс} \times \text{сек})^{-1}$, $\hat{b}$ – постоянная магнитной анизотропии, λ – модуль обменного взаимодействия. Введённые выше обозначения соответствуют обозначениям, принятым в работе [2].

2. Решение задачи. Решение системы (1.1) ищется в виде плоских волн:

$$\mu = M e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}, \quad v = N e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}, \quad \varphi = \Phi e^{iqy} e^{i(px-\omega t)} \quad (2.1)$$

где M, N, Φ – амплитуды соответствующих величин, p и q – продольное и поперечное волновые числа, ω – частота волн.

Подставляя (2.1) в систему уравнений (1.1), получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений для определения неизвестных амплитуд. Условие разрешимости этой системы даёт дисперсионное уравнение для определения квадрата волнового числа в зависимости от частоты волны ω , которое имеет вид:

$$k^2 [\Omega^2 - (\hat{b} + \lambda k^2)(1 + \hat{b} + \lambda k^2)] = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{где } \Omega = \frac{\omega}{\Omega_m}, \quad k^2 = p^2 + q^2$$

Отсюда для квадрата волнового числа получаем следующие значения:

$$\begin{aligned} k^2 &= \lambda^{-1} (-\Omega_{DE} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Omega^2}) > 0 \\ k^2 &= -\lambda^{-1} (\Omega_{DE} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Omega^2}) < 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$k^2 = 0$$

где $\Omega_{DE} = 1/2 + \hat{b}$ – частота Деймона–Эшбаха.

Первому корню (2.3) соответствуют объёмные однородные волны – падающая и отражённая, для которых поперечные компоненты имеют вид:

$$q_1 = -q_0; \quad q_2 = q_0$$

где

$$q_0 = \sqrt{\lambda^{-1} (\Omega_{DE} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Omega^2}) - p^2} > 0 \quad (2.4)$$

Второму и третьему корням (2.3) соответствуют поперечные компоненты волнового вектора со знаком плюс:

$$q_3 = ir_0, q_4 = i|p|$$

где

$$r_0 = \sqrt{\lambda^{-1}(\Omega_{DE} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Omega^2}) + p^2} > 0 \quad (2.5)$$

Следовательно, решение системы (1.1) в виде плоских гармонических волн можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mu &= \left[M_0 e^{-iq_0 y} + M_1 e^{iq_0 y} + M_2 e^{-r_0 y} + M_3 e^{-|p|y} \right] e^{i(px - \omega t)} \\ \nu &= \left[N_0 e^{-iq_0 y} + N_1 e^{iq_0 y} + N_2 e^{-r_0 y} + N_3 e^{-|p|y} \right] e^{i(px - \omega t)} \\ \varphi &= \left[\Phi_0 e^{-iq_0 y} + \Phi_1 e^{iq_0 y} + \Phi_2 e^{-r_0 y} + \Phi_3 e^{-|p|y} \right] e^{i(px - \omega t)} \\ \Phi_e &= \Phi_e e^{|p|y} e^{i(px - \omega t)} \Phi_e \end{aligned} \quad (2.6)$$

где M_0, N_0, Φ_0 – амплитуды, соответствующие падающей волне; M_1, N_1, Φ_1 – амплитуды, соответствующие отраженной волне; M_2, N_2, Φ_2 и M_3, N_3, Φ_3 – амплитуды, соответствующие первой и второй сопутствующим поверхностным неоднородным волнам, соответственно; Φ_e – амплитуда магнитостатического возмущения в вакууме. Все амплитуды, входящие в (2.6), согласно уравнениям (1.1), связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} M_0 &= \rho_0^{-1}(Rq_0 + ip)\Phi_0, \quad N_0 = \rho_0^{-1}(Rp - iq_0)\Phi_0 \\ M_1 &= \rho_0^{-1}(-Rq_0 + ip)\Phi_1, \quad N_1 = \rho_0^{-1}(Rp + iq_0)\Phi_1 \\ M_2 &= i\rho_0^{-1}(-R_1 r_0 + p)\Phi_2, \quad N_2 = \rho_0^{-1}(R_1 p - r_0)\Phi_2 \\ M_3 &= i|p|Q, \quad N_3 = \rho_0^{-1}pQ\Phi_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь введены обозначения:

$$R = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\Omega^2}}{2\Omega}, \quad R_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\Omega^2}}{2\Omega}, \quad Q = \frac{1}{\Omega + \sigma b}, \quad \sigma = \pm 1$$

$\sigma = +1$, если продольная составляющая волнового вектора совпадает с положительным направлением оси Ox и $\sigma = -1$ – в обратном случае.

Подставляя решение (2.6) в граничные условия (1.2), для нахождения искоемых амплитуд Φ_1, Φ_2, Φ_3 и Φ_e получим систему:

$$\begin{aligned} \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 &= \Phi_e \\ -iq_0 \Phi_0 + iq_0 \Phi_1 - r_0 \Phi_2 - |p| \Phi_3 - \rho_0(N_0 + N_1 + N_2 + N_3) &= |p| \Phi_e \\ \xi(-iq_0 M_0 + iq_0 M_1 - r_0 M_2 - |p| M_3) + \eta(M_0 + M_1 + M_2 + M_3) &= 0 \\ \xi(-iq_0 N_0 + iq_0 N_1 - r_0 N_2 - |p| N_3) + \eta(N_0 + N_1 + N_2 + N_3) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Исключив из первых двух уравнений системы Φ_e и воспользовавшись соотношениями (2.7), получим линейную систему трех уравнений относительно амплитуд Φ_1, Φ_2 и Φ_3 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(1 + \sigma R) + \Phi_2(1 + \sigma R_1) + \Phi_3(2 + \sigma Q) &= -\Phi_0(1 + \sigma R) \\ \Phi_1(ip - q_0 R)(i\xi q_0 + \eta) + \Phi_2 i(p - R_1 r_0)(\eta - r_0 \xi) + \Phi_3 |p| iQ(\xi |p| - \eta) &= \\ = \Phi_0(Rq_0 + ip)(iq_0 \xi - \eta) & \\ \Phi_1(Rp + iq_0)(i\xi q_0 + \eta) + \Phi_2(R_1 p - r_0)(\eta - \xi r_0) + \Phi_3 Qp(\eta - \xi |p|) &= \\ = \Phi_0(iq_0 - Rp)(\eta - i\xi q_0) & \end{aligned} \quad (2.9)$$

Опуская довольно громоздкие вычисления, выпишем решение системы (2.8):

$$\Phi_1 = \frac{A_1 - iB_1}{A_1 + iB_1} \Phi_0; \Phi_2 = \frac{A_2}{A_1 + iB_1} \Phi_0; \Phi_3 = \frac{A_3}{A_1 + iB_1} \Phi_0; \Phi_e = \frac{A_e}{A_1 + iB_1} \Phi_0 \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= q_0[(2 + \sigma Q)(\eta - r_0 \xi)(p^2 \xi + r_0 \eta)(R^2 - 1) + |p|Q(\eta - \xi |p|) \times \\ &\times (\xi p + \sigma \eta)(\sigma + R)^2] \\ B_1 &= |p|Q(\eta - \xi |p|)(\eta - r_0 \xi)(p - \sigma r_0)(\sigma + R)^2 + (2 + \sigma Q)(\eta - r_0 \xi) \times \\ &\times (p^2 \eta - r_0 \xi q_0^2)(1 - R^2) + |p|Q(\eta - \xi |p|)(\sigma \xi q_0^2 - p\eta)(\sigma + R)^2 \\ A_2 &= 2pq_0[-(\eta - \xi |p|)(\sigma \eta + p\xi)(\sigma + R)^2 - \\ &- (2 + \sigma Q)(1 - R^2)(q_0^2 \xi^2 + \eta^2) + R\xi \eta p(2 + \sigma Q)(1 - R)] \\ A_3 &= 2q_0[(\eta R + p\xi)(1 + \sigma R)(p - Rr_0)(\eta - r_0 \xi) + (1 - R^2)(R + \sigma) \times \\ &\times (p\eta^2 + q_0^2 p\xi^2) - (1 + \sigma R)(\eta - r_0 \xi)(pR - r_0)(\eta + \xi pR)] \\ A_e &= 2A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Найдём коэффициенты отражения волны, воспользовавшись соотношениями (2.7) и (2.10):

$$\begin{aligned} R_{\text{отр}}(M) &= \frac{M_1}{M_0} = -\frac{Rq_0 - ip}{Rq_0 + ip} \cdot \frac{A_1 - iB_1}{A_1 + iB_1} \\ R_{\text{отр}}(N) &= \frac{N_1}{N_0} = \frac{Rp + iq_0}{Rp - iq_0} \cdot \frac{A_1 - iB_1}{A_1 + iB_1} \\ R_{\text{отр}}(\Phi) &= \frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \frac{A_1 - iB_1}{A_1 + iB_1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Все коэффициенты комплексны и по модулю равны единице, это означает, что отражение носит характер полного внутреннего отражения при любом угле скольжения волны, исключение составляют случаи нормального падения волны, а также случай нулевого угла скольжения волны по поверхности среды. Полагая в (2.9) - (2.11) $\xi = 1$ и $\eta = 0$, мы приходим к результату, полученному авторами в работе [5].

Заключение. При произвольном угле падения объемной спиновой волны изнутри недеформируемого ферромагнитного полупространства на его поверхность, при обобщенных граничных условиях происходит: а) зеркальное отражение объемной волны от поверхности среды, б) возникновение двух сопутствующих неоднородных поверхностных волн, распространяющихся по поверхности среды с одинаковой скоростью, но с различными коэффициентами спадания в глубь среды, и одной сопутствующей неоднородной магнитостатической волны в вакууме.

Коэффициенты отражения объемной волны в общем случае комплексны и по модулю равны единице, это означает, что отражение имеет характер полного внутреннего отражения при произвольном угле падения за исключением нормального и параллельного падений. В частном случае обобщенного граничного условия на поверхности ферромагнетика мы приходим к результату, полученному уже в предыдущей работе авторов [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. И. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 367с.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
3. Damon R. W., Eshbach J. R. Magneto static modes of a ferromagnetic slab. //J. Phys. Chem. Solids. 1961. №19. P. 308-320.
4. Soohoo R. F. Magnetic thin films. New York: Harper and Row. 1965.
5. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А., Атоян Л.А. Отражение спиновых (магнитных) волн от границы ферромагнитного полупространства //Тр. VI-ой Международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис – Степанакерт. 2008. С.115 – 120.
6. Багдасарян Г.Е., Асаян Д.Д., Даноян З.Н., Даноян Э.А., Саакян С.Л. Поверхностные спиновые волны в ферромагнитном полупространстве с учетом обменных взаимодействий. //Тр. VI-ой Международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис-Степанакерт. 2008. С.110-115.
7. Wolfram T., De Wames R. E. Linewidth and Dispersion of the Virtual Magnon Surface State in Thick Ferromagnetic Films.//Physical Review.1970. Vol.1. №1. P. 4358-4360.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович – доктор ф.-м. н.,
зав.отделом Института механики НАН Армении
E-mail: zavendanoyan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович – канд. ф.-м. н.,
научный сотрудник Института механики НАН Армении.
E-mail: levous@mail.ru

Поступила в редакцию 17.06.2009

УДК 539.3

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТОТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК^{*)}

ՏԱՐԿԻՍՅԱՆ Տ. Օ.

Ключевые слова: магнитотермоупругость, тонкая оболочка, сдвиговые деформации, прикладная-двумерная общая теория.

Key words: magnetothermoelasticity, thin shell, shift deformations, general applied-two-dimensional theory.

Մարգարյան Ս. Հ.

Բարակ թաղանթների մագնիսաջերմաառաձգականության ընդհանուր տեսությունը

Աշխատանքում ձևակերպվում են ընդունելություններ (վարկածներ), որոնք ունեն ասիմպտոտիկ հիմնավորում, և նրանց հիման վրա կառուցված է էլեկտրա- և ջերմահաղորդիչ ոչ ֆերոմագնիսական բարակ թաղանթների ընդհանուր ճշգրտված կիրառական-երկչափ տեսությունը, որի շրջանակներում լիովին հաշվի են առնված թաղանթում սահքային դեֆորմացիաները:

Sargsyan S. H.

The General Theory of Magnetothermoelasticity of Thin Shells

The present paper provides asymptotically grounded hypotheses, on the basis of which the general specified applied-two-dimensional theory of magnetothermoelasticity of electro- and thermoconducting non-ferromagnetic thin shells is constructed. In case of this theory the shift deformations in the shell are completely taken into account.

В данной работе формулируются предположения (гипотезы), имеющие асимптотическое подтверждение, и на их основе построена общая уточненная прикладная-двумерная теория магнитотермоупругости электро- и теплопроводящих неферромагнитных тонких оболочек, при которой полностью учитываются сдвиговые деформации в оболочке.

Введение. В работах [1-3] на основе метода гипотез трехмерные уравнения магнитоупругости приведены к двумерной и изучены задачи колебания и устойчивости электропроводящих тонких пластин и оболочек, находящихся во внешних магнитных полях. В работах [4,5], включая внешнюю задачу электродинамики, построена асимптотически точная общая двумерная теория магнитоупругости и магнитотермоупругости электропроводящих неферромагнитных тонких оболочек и пластин. Построенные теории магнитоупругости и магнитотермоупругости тонких оболочек и пластин работ [4,5] соответствуют теории упругих оболочек на основе гипотез Кирхгоффа-Лява.

В данной работе рассматриваются трехмерные уравнения магнитотермоупругости в области тонкой оболочки, сформулируются обоснованные гипотезы (имеющие асимптотическую природу) и на этой основе построена общая уточненная прикладная-двумерная теория магнитотермоупругости тонких оболочек, при которой, в отличие от работ [4,5], полностью учитываются сдвиговые деформации на уровне уточненной теории упругих тонких оболочек Тимошенко-Рейсснера.

^{*)} Работа доложена на 8th International Congress on Thermal Stresses. June 1-4, 2009. University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, USA.

Уравнения и начально-граничные условия трехмерной магнитотермоупругости

Рассмотрим оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое электро- и теплопроводящее неферромагнитное изотропное тело и отнесем его к триортогональной неподвижной системе координат [4,6].

Пусть оболочка находится во внешнем магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{B}_0$.

Будем исходить из основных уравнений линеаризованной теории магнитотермоупругости для трехмерной среды, записанных в выбранной системе координат [7-9]:

– уравнения механики упругого деформируемого тела с учетом массовых сил электромагнитного происхождения и температурного воздействия (которые имеют место в области оболочки):

– уравнения движения:

$$\frac{\partial H_2 \vec{\sigma}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_1 \vec{\sigma}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial H_1 H_2 \vec{\sigma}_3}{\partial \alpha_3} + H_1 H_2 \left(-\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + \vec{F} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}_0 \quad (2)$$

$\vec{F}$ – плотность массовых сил электромагнитного происхождения,

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{B}_0 \right) \quad (3)$$

$\vec{j}$ – вектор плотности возбужденного электрического тока проводимости в области оболочки;

– соотношения, выражающие связь компонентов деформации с перемещениями и соотношения обобщенного закона Гука с учетом температурного воздействия:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{H_i}{H_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{U_i}{H_i} \right) + \frac{H_j}{H_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{U_j}{H_j} \right) \right) = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk} \right] + \delta_{ij} \alpha_i \theta \quad (4)$$

– уравнения квазистационарной электродинамики, которые имеют место в области оболочки

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, & \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{E} = 4\pi \rho_e, & \text{div} \vec{h} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

– уравнения квазистационарной электродинамики в окружающем оболочку воздушном пространстве, которое представляет собой всё трёхмерное пространство за исключением трёхмерной области занимаемой оболочкой (с большой точностью эти уравнения отождествляем с уравнениями квазистационарной электродинамики для вакуума):

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{h}^{(e)} = 0, & \text{rot} \vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{E}^{(e)} = 0, & \text{div} \vec{h}^{(e)} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

– уравнение температурного поля, которое имеет место в области оболочки (для простоты пренебрегаем термоэлектрическими эффектами и не учитываем термоупругое рассеяние энергии) [10-12]:

$$\frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(H_1 H_2 \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_3} \right) \right] - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{W_0}{\lambda} \quad (7)$$

Здесь $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$ – векторы упругих напряжений, соответственно, на площадках, нормали которых проходят вдоль координатных линий $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\vec{U}$ – вектор перемещения точек оболочки; θ – функция температуры; $\vec{h}, \vec{E}$ и $\vec{h}^{(e)}, \vec{E}^{(e)}$ – соответственно, векторы напряженности возбужденного магнитного и электрического полей в области оболочки и в окружающем пространстве; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона, α_i – коэффициент линейного температурного расширения, a – коэффициент температуропроводности, λ – коэффициент теплопроводности, σ – электропроводность, ρ – плотность материала оболочки, $W_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)$ – плотность источников тепла.

К системе уравнений (1)-(7) трехмерной магнитотермоупругости, определяющей поведение движущейся упругой, электро- и теплопроводящей оболочки в заданном магнитном поле, должны быть присоединены механические, электродинамические и температурные граничные и начальные условия:

механические граничные условия на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ имеют вид

$$\sigma_{k3} \big|_{\alpha_3 = \pm h} = \pm q_k^{\pm} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8)$$

на поверхности края оболочки (Σ) могут иметь место граничные условия первого варианта граничных условий трехмерной теории упругости:

$$n_j \sigma_{ij} = q_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (9)$$

где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности (Σ); могут быть заданы также условия жесткого защемления точек поверхности Σ или трехмерные граничные условия теории упругости, которые эквивалентны условиям шарнирного опирания;

начальные условия для механической части задачи выражаются так:

$$U_i \big|_{t=0} = U_i^0, \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} \big|_{t=0} = V_i^0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

электродинамические граничные условия по всей поверхности $\alpha_3 = +h, \alpha_3 = -h$ и Σ трехмерной области оболочки выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} n_i [h_i]_- &= 0, & \varepsilon_{ijk} n_j [h_k]_- &= 0 \\ \varepsilon_{ijk} [E_k]_- &= 0, & n_i [E_i]_- &= 4\pi \hat{\rho}_e \end{aligned} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (11)$$

где при $\alpha_3 = h$ $\vec{n} = \vec{n}^+$; при $\alpha_3 = -h$ $\vec{n} = \vec{n}^-$ ($\vec{n}^{\pm}$ – нормальные векторы к лицевым поверхностям оболочки $\alpha_3 = \pm h$), а на поверхности края оболочки Σ , вектор $\vec{n}$ является нормальным вектором к этой поверхности; ε_{ijk} – компоненты тензора Леви-Чивиты; $[.]_-$ означает скачок величины через поверхность области

трехмерной оболочки, контактирующей с воздушным пространством; $\hat{\rho}_e$ – поверхностная плотность электрического заряда;

начальные условия возбужденного электромагнитного поля

$$h_i|_{t=0} = 0 \quad \text{либо} \quad j_i|_{t=0} = 0; \quad h_i^{(e)}|_{t=0} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

Так как окружающую оболочку область занимает все трехмерное пространство за исключением области трехмерной оболочки, векторы электромагнитного поля (6) должны подчиняться следующим условиям на бесконечности:

$$|E^{(e)}| = 0\left(\frac{1}{r}\right), \quad |h^{(e)}| = 0\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad 0 \leq t < \infty \quad (13)$$

Для определенности допустим, что для температурного поля оболочки, на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ заданы граничные условия теплообмена между оболочкой и окружающей средой (с воздушным пространством), а на боковой поверхности Σ задана температура [10-12]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n^+} + \mu^+ (\theta - \theta_e^+) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_3 = h \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n^-} + \mu^- (\theta - \theta_e^-) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_3 = -h$$

$$\theta = \theta_e^\Sigma \quad \text{на поверхности края оболочки} \quad \Sigma. \quad (15)$$

Здесь μ^+, μ^- – относительные коэффициенты теплообмена через поверхности $\alpha_3 = \pm h$; θ_e^+, θ_e^- и θ_e^Σ – значения температуры среды, омывающей, соответственно, лицевые поверхности $\alpha_3 = \pm h$ и поверхность края Σ оболочки. В нашем случае можем считать, что $\mu^+ = \mu^- = \mu$.

Начальное условие для температурного поля оболочки имеет вид:

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (16)$$

Гипотезы магнитотермоупругости тонких оболочек

Основной предпосылкой для построения общей двумерной теории магнитотермоупругости упругих электро- и теплопроводящих тонких оболочек являются гипотезы магнитотермоупругости тонких тел. Эти гипотезы вытекают из асимптотической природы [4,5] интегрирования начально-граничной задачи магнитотермоупругости (1)-(16), когда трехмерная область оболочки тонкая. Наша цель – использовать качественные стороны асимптотического решения начально-граничной задачи магнитотермоупругости (1)-(16), в случае тонкой области оболочки, обобщать гипотезы магнитотермоупругости, сформулированные в работах [4,5], таким образом, чтобы в отличие от работ [4,5], полностью учесть сдвиговые деформации в оболочке и построить общую уточненную прикладную-двумерную теорию магнитотермоупругости тонких оболочек.

Эти гипотезы (предположения) формулируются следующим образом:

- а) нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение U_3 не зависит от координаты α_3 ;
- б) нормальным напряжением σ_{33} по сравнению с напряжениями σ_{11}, σ_{22} в уравнениях обобщенного закона Гука можем пренебрегать;

- в) везде ниже будем предполагать, что $h \ll R$, где R – характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки, т.е. величиной h/R будем пренебрегать относительно единицы;
- г) температурное поле по толщине трехмерной оболочки меняется по линейному закону;
- д) тангенциальные компоненты вектора напряженности возбужденного электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбужденного магнитного поля по толщине трехмерной оболочки остаются неизменными;
- е) нормальной компонентой j_3 электрического тока проводимости в трехмерной тонкой области оболочки можем пренебрегать;
- ж) сначала для определения тангенциальных перемещений U_1, U_2 , напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}$ и электродинамических величин в области оболочки, примем, что касательные напряжения σ_{13}, σ_{23} не зависят от координаты α_3 . После определения указанных величин напряжения σ_{13}, σ_{23} окончательно определим, прибавляя к принятым значениям слагаемые, получаемые, соответственно, из первого и второго скалярных уравнений движения из векторного уравнения (1) интегрированием по независимой переменной α_3 , потребовав, чтобы усредненные по толщине оболочки величины были равны нулю;
- з) для определения электромагнитного поля в окружающем оболочку пространстве, трехмерную область, занимаемую тонкой оболочкой, можем представлять как математический разрез по срединной поверхности оболочки, по которой будут течь поверхностные токи электропроводимости, представляющие собой усредненные токи по толщине оболочки.

Отметим, что предположение д) совместно с гипотезами Кирхгоффа-Лява (гипотезы магнитоупругости) впервые были сформулированы в работе [1]; предположение г) принято и использовано в работах [10-13]; предположение з) предложено в работах [14,15], канонические граничные условия для электродинамических величин на этой основе получены для идеально проводящих конечных оболочек в работе [15], а для конечно-проводящих оболочек – в работе [4] (см. далее формулы (63)).

Общая уточненная прикладная-двумерная теория магнитотермоупругости тонких оболочек

На основании предположения а), нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение U_3 не зависит от координаты α_3 , т.е.

$$U_3 = w(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (17)$$

где $w(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – нормальное перемещение точек срединной поверхности оболочки.

Принимая во внимание предположение ж), сначала для напряжений σ_{13}, σ_{23} примем

$$\sigma_{13} = \overset{0}{\sigma}_{13}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad \sigma_{23} = \overset{0}{\sigma}_{23}(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (18)$$

Рассмотрим из системы (4) уравнения относительно деформаций e_{13} и e_{23} . Учитывая формулы (17), (18) и предположения в), ж), находим

$$U_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \psi_1(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad U_2 = u_2(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \psi_2(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (19)$$

где

$$\psi_1 = \frac{2(1+\nu)^0}{E} \sigma_{13} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}, \quad \psi_2 = \frac{2(1+\nu)^0}{E} \sigma_{23} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2} \quad (20)$$

Отметим, что u_1, u_2, w – компоненты вектора перемещения точек срединной поверхности оболочки:

$$U|_{\alpha_3=0} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + w \vec{n} \quad (21)$$

Здесь, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – орты координатных линий α_1, α_2 при $\alpha_3 = 0$, $\vec{n}$ – нормальный вектор к срединной поверхности оболочки $\alpha_3 = 0$; ψ_1, ψ_2 – углы поворота первоначально прямолинейного нормального к срединной поверхности оболочки элемента вокруг ортов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ координатных линий α_1, α_2 при $\alpha_3 = 0$.

Таким образом, формулы (17), (19) представляют собой закон изменения перемещений по толщине оболочки, который соответствует кинематической гипотезе теории оболочек Тимошенко-Рейсснера [13,14]. Из формул (17), (19) следует, что прямолинейный перпендикулярный к срединной поверхности элемент после деформации не остаётся перпендикулярным к ней, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины.

Углы поворота ψ_1 и ψ_2 представим в виде

$$\gamma_{13} = \psi_1 - \theta_1, \quad \gamma_{23} = \psi_2 - \theta_2 \quad (22)$$

$$\text{где } \theta_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2} \quad (23)$$

здесь γ_{13}, γ_{23} – углы поворота указанного прямолинейного элемента относительно нормали к срединной поверхности (углы поперечных сдвигов).

Для углов поперечного сдвига γ_{13} и γ_{23} из выражений (20) получим

$$\gamma_{13} = \frac{2(1+\nu)^0}{E} \sigma_{13}, \quad \gamma_{23} = \frac{2(1+\nu)^0}{E} \sigma_{23} \quad (24)$$

Подставляя значения перемещений (17), (19) в формулы (4), с учетом предположения в), для тангенциальных деформаций e_{11}, e_{22}, e_{12} находим

$$e_{11} = \varepsilon_{11} + \alpha_3 \chi_{11}, \quad e_{22} = \varepsilon_{22} + \alpha_3 \chi_{22}, \quad e_{12} = \omega + \alpha_3 \tau \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{w}{R_2} \\ \omega &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 \\ \chi_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_2, & \chi_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_1 \\ \tau &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_2 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_1 \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \omega$ – компоненты тензора тангенциальной деформации, а величины $\chi_{11}, \chi_{22}, \tau$ – компоненты тензора изгибной деформации и скручивания срединной поверхности оболочки.

Принимая предположения г), для функции температуры θ можем написать

$$\theta = v_1(\alpha_1, \alpha_2, t) + \frac{\alpha_3}{h} v_2(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (27)$$

где $v_1 = \frac{1}{2}(\theta^+ + \theta^-)$ – средняя температура нормального элемента оболочки,

$v_2 = \frac{1}{2}(\theta^+ - \theta^-)$ – нормальный перепад температуры; $\theta^+(\alpha_1, \alpha_2, t)$ и $\theta^-(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – температуры, соответственно, на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = h$ и $\alpha_3 = -h$.

Величины $v_1(\alpha_1, \alpha_2, t)$ и $v_2(\alpha_1, \alpha_2, t)$ представляют собой усредненные (интегральные) характеристики температурного поля в оболочке:

$$v_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \theta d\alpha_3, \quad v_2 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \theta \alpha_3 d\alpha_3 \quad (28)$$

Уравнения для определения v_1 и v_2 получим, усредняя по толщине трехмерной оболочки уравнение трехмерного температурного поля (7), которое можем записать в виде

$$\Delta \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_3^2} + 2\kappa \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (29)$$

Здесь $\kappa = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ – средняя кривизна срединной поверхности оболочки;

$\Delta(\cdot)$ – двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta(\cdot) = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2} \right) \right] \quad (30)$$

Если будем придерживаться предположения в), с учетом закона о распределении температуры по толщине оболочки (27), из уравнения трехмерного температурного поля (29) и граничных условий (14) приходим к следующей системе двумерных уравнений температурного поля относительно усредненных по толщине оболочки температурных функций $v_1(\alpha_1, \alpha_2, t)$ и $v_2(\alpha_1, \alpha_2, t)$ (в области срединной поверхности оболочки):

$$h^2 \Delta v_1 - \mu_1 v_1 - \mu_2^* v_2 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial v_1}{\partial t} = -(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) - \frac{1}{\lambda} W_1(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (31)$$

$$h^2 \Delta v_2 - 3(1 + \mu_1) v_2 - 3\mu_2^* v_1 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial v_2}{\partial t} = -3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1) - \frac{1}{\lambda} W_2(\alpha_1, \alpha_2, t)$$

где

$$\mu_2^* = \mu_2 - \kappa h, \quad \mu_1 = h(\mu^+ + \mu^-)/2, \quad \mu_2 = h(\mu^+ - \mu^-)/2$$

$$t_1 = (\theta_e^+ + \theta_e^-)/2, \quad t_2 = (\theta_e^+ - \theta_e^-)/2, \quad W_1 = \int_{-h}^h W_0 d\alpha_3, \quad W_2 = \frac{3}{h} \int_{-h}^h W_0 \alpha_3 d\alpha_3$$

В нашем случае (считая $\mu^+ = \mu^- = \mu$) получим, что $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = h\mu$, $\mu_2^* = -\kappa h$.

На граничном контуре Γ срединной поверхности оболочки Ω следует подставить (исходя из формулы (15)) следующие усредненные граничные условия:

$$v_1|_{\Gamma} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \theta_{\Sigma} d\alpha_3, \quad v_2|_{\Gamma} = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \theta_{\Sigma} \alpha_3 d\alpha_3 \quad (32)$$

К этим граничным условиям необходимо присоединить также начальные условия (16) при $t = 0$, которое после усреднения принимает вид:

$$v_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \theta_0 d\alpha_3, \quad v_2 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \theta_0 \alpha_3 d\alpha_3 \quad \text{при } t = 0 \quad (33)$$

Отметим, что система двумерных уравнений (31) температурного поля для усредненных характеристик (28) температурной функции, граничные условия (32) и начальные условия (33) получены в работах [10-12].

Теперь подставим значения тангенциальных деформаций e_{11}, e_{22}, e_{12} из (25), (26) в соответствующие формулы обобщенного закона Гука (4), с учетом предположения б) для напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) + \alpha_3 (\chi_{11} + \nu \chi_{22}) - (1+\nu) \alpha_t \theta] \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) + \alpha_3 (\chi_{22} + \nu \chi_{11}) - (1+\nu) \alpha_t \theta] \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} [\omega + \alpha_3 \tau] \quad (-h \leq \alpha_3 \leq h) \end{aligned} \quad (34)$$

Введем вместо напряжений интегральные характеристики по толщине трехмерной оболочки – усилия и моменты, отнесенные к единице длины координатных линий и приложенные к срединной поверхности оболочки. Принимая предположение в), для усредненных силовых и моментных характеристик будем иметь [17]:

$$T_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} d\alpha_3, \quad T_{22} = \int_{-h}^h \sigma_{22} d\alpha_3, \quad S = \int_{-h}^h \sigma_{12} d\alpha_3 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-h}^h \sigma_{11} \alpha_3 d\alpha_3, \quad M_{22} = \int_{-h}^h \sigma_{22} \alpha_3 d\alpha_3, \quad H = \int_{-h}^h \sigma_{12} \alpha_3 d\alpha_3 \\ Q_{13} &= \int_{-h}^h \sigma_{13} d\alpha_3, \quad Q_{23} = \int_{-h}^h \sigma_{23} d\alpha_3 \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь, T_{11}, T_{22}, S – тангенциальные усилия; M_{11}, M_{22}, H – изгибающие и крутящий моменты; Q_{13}, Q_{23} – перерезывающие усилия.

Используя для напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ формулы (34) и формулу (27) для функций температуры, для усилий T_{11}, T_{22}, S и моментов M_{11}, M_{22}, H получим:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{2Eh}{1-v^2}(\epsilon_{11} + v\epsilon_{22}) - \frac{2Eh}{1-v}\alpha_t v_1, & T_{22} &= \frac{2Eh}{1-v^2}(\epsilon_{22} + v\epsilon_{11}) - \frac{2Eh}{1-v}\alpha_t v_1 \\
S &= \frac{2Eh}{2(1+v)}\omega, & M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3(1-v^2)}(\chi_{11} + v\chi_{22}) - \frac{2Eh^2}{3(1-v)}\alpha_t v_2 \\
M_{22} &= \frac{2Eh^3}{3(1-v^2)}(\chi_{22} + v\chi_{11}) - \frac{2Eh^2}{3(1-v)}\alpha_t v_2, & H &= \frac{2Eh^3}{2(1+v)}\tau
\end{aligned} \tag{37}$$

Используя выражения (37) для усилий и моментов, для напряжений (34) получим следующие формулы:

$$\sigma_{11} = \frac{T_{11}}{2h} + \alpha_3 \frac{3M_{11}}{2h^3}, \quad \sigma_{22} = \frac{T_{22}}{2h} + \alpha_3 \frac{3M_{22}}{2h^3}, \quad \sigma_{12} = \frac{S}{2h} + \alpha_3 \frac{3H}{2h^3} \tag{38}$$

Обратимся теперь к уравнениям электродинамики (5) в области трехмерной оболочки.

На основе предположений д) и е) можем написать:

$$E_1 = E_{10}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad E_2 = E_{20}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad h_3 = h_{30}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad j_3 = 0 \tag{39}$$

Далее с учетом формул (3), (17), (19), (39), для тангенциальных компонент вектора плотности возбужденного электрического тока j_1, j_2 и нормального компонента E_3 возбужденного в трехмерной оболочке электрического поля, получим

$$j_1 = j_{10} + \alpha_3 \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} B_{03}, \quad j_2 = j_{20} - \alpha_3 \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} B_{03} \tag{40}$$

$$E_3 = \frac{1}{c} \frac{\partial u_2}{\partial t} B_{01} - \frac{1}{c} \frac{\partial u_1}{\partial t} B_{02} + \alpha_3 \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} B_{01} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} B_{02} \right) \tag{41}$$

где

$$j_{10} = \sigma \left[E_{10} + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial u_2}{\partial t} B_{03} - \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} B_{02} \right) \right], \quad j_{20} = \sigma \left[E_{20} + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} B_{01} - \frac{1}{c} \frac{\partial u_1}{\partial t} B_{03} \right) \right] \tag{42}$$

Если рассматривать векторное уравнение $\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$ из системы уравнений

электродинамики (5) в области трехмерной оболочки, то из первых двух скалярных уравнений, с учетом (39), (40) и предположения в), для тангенциальных компонент вектора возбужденного в оболочке магнитного поля после пренебрежения

величинами $\frac{1}{A_1} \frac{\partial h_{30}}{\partial \alpha_1}$ и $\frac{1}{A_2} \frac{\partial h_{30}}{\partial \alpha_2}$, как асимптотически малыми членами, получим:

$$\begin{aligned}
h_1 &= h_{10}(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \frac{4\pi}{c} j_{20} - \frac{1}{2} \alpha_3^2 \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} B_{03} \\
h_2 &= h_{20}(\alpha_1, \alpha_2, t) - \alpha_3 \frac{4\pi}{c} j_{10} - \frac{1}{2} \alpha_3^2 \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} B_{03}
\end{aligned} \tag{43}$$

где h_{10} и h_{20} – значения h_1 и h_2 на срединной поверхности оболочки ($\alpha_3 = 0$); для простоты здесь принято, что компоненты B_{0i} заданного вектора $\vec{B}_0$ не зависят от поперечной координаты α_3 (в некоторых частных случаях это означает, что

начальное магнитное поле однородно, т.е. B_{0i} – постоянные).

Уравнение $4\pi\rho_e = \text{div}\vec{E}$ из системы уравнений электродинамики (5) в области оболочки, с учетом (39),(41) и предположения в), служит для определения объемной плотности электрического заряда ρ_e в области оболочки. Третье скалярное уравнение из векторного уравнения $\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}$, с учетом формул (39) и предположения в) (входящие в это скалярное уравнение величины не зависят от координаты α_3), как убедимся ниже, будет идентичным с соответствующим уравнением $\text{rot}\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t}$ во внешней задаче электродинамики на разрезе по срединной поверхности оболочки ($\alpha_3 = 0$).

Определим напряжение σ_{33} . Для этого рассмотрим третье скалярное уравнение из векторного уравнения движения (1), руководствуясь предположениями в) и ж). Интегрируя это уравнение относительно α_3 , окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = \sigma_{33}^0(\alpha_1, \alpha_2, t) - \alpha_3 \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial \sigma_{13}^0}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \sigma_{23}^0}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2^0}{\partial \alpha_1} \sigma_{13}^0 + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1^0}{\partial \alpha_2} \sigma_{23}^0 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2h} \left(\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{c} j_{10} B_{02} - \frac{1}{c} j_{20} B_{01} \right] + \\ + \frac{\alpha_3^2}{2} \left[\frac{3}{2h^3} \left(\frac{M_{11}}{R_1} + \frac{M_{22}}{R_2} \right) - \frac{\sigma}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} B_{03} - \frac{\sigma}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} B_{03} \right] \end{aligned} \quad (44)$$

где σ_{33}^0 – значение σ_{33} при $\alpha_3 = 0$.

Обратимся теперь к полному определению напряжений σ_{13} и σ_{23} . Для этого принимаем во внимание предположение ж). Рассмотрим первые два скалярных уравнения движения из векторного уравнения (1). С учетом предположения в) и е), формул (17),(19),(40), из этих уравнений интегрированием по α_3 будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{13} = \sigma_{13}^0(\alpha_1, \alpha_2, t) - \frac{\alpha_3}{2h} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} 2S + \right. \\ \left. + \frac{2h\sigma_{13}^0(\alpha_1, \alpha_2, t)}{R_1} - 2h\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{1}{c} 2hj_{20} B_{03} \right] - \frac{3}{2h^3} \frac{\alpha_3^2}{2} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} 2H - \rho \frac{2h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{2h^3}{3} \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} B_{03} \right] \\ \bar{\sigma}_{23} = \sigma_{23}^0(\alpha_1, \alpha_2, t) - \frac{\alpha_3}{2h} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (T_{22} - T_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} 2S + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2h^0 \sigma_{23}(\alpha_1, \alpha_2, t)}{R_2} - 2h\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{1}{c} 2hj_{10} B_{03} \left[-\frac{3}{2h^3} \frac{\alpha_3^2}{2} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (M_{22} - M_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} 2H - \rho \frac{2h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{2h^3}{3} \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} B_{03} \right] \right] \quad (45)
\end{aligned}$$

По идее предположения ж), от величин (45) потребуем следующие условия:

$$\int_{-h}^h \bar{\sigma}_{13} d\alpha_3 = 0, \quad \int_{-h}^h \bar{\sigma}_{23} d\alpha_3 = 0 \quad (46)$$

При подчинении (45) условиям (46) определим величины $\sigma'_{13}(\alpha_1, \alpha_2, t)$ и $\sigma'_{23}(\alpha_1, \alpha_2, t)$. После определения этих величин подставляем их снова в формулы (45), в результате, окончательно будут известны величины $\bar{\sigma}_{13}$ и $\bar{\sigma}_{23}$. Касательные напряжения σ_{13} и σ_{23} по предположению ж) полностью определим как соответствующие суммы (18) и (45). Таким образом, получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} = & \sigma_{13}^0(\alpha_1, \alpha_2, t) - \frac{\alpha_3}{2h} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} 2S + \right. \\
& \left. + \frac{2h^0 \sigma_{13}(\alpha_1, \alpha_2, t)}{R_1} - 2h\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{1}{c} 2hj_{20} B_{03} \right] + \frac{1}{4h} \left(1 - \frac{3\alpha_3^2}{h^2} \right) \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} 2H - \rho \frac{2h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{2h^3}{3} \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} B_{03} \right] \\
\sigma_{23} = & \sigma_{23}^0(\alpha_1, \alpha_2, t) - \frac{\alpha_3}{2h} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (T_{22} - T_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} 2S + \right. \\
& \left. + \frac{2h^0 \sigma_{23}(\alpha_1, \alpha_2, t)}{R_2} - 2h\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{1}{c} 2hj_{10} B_{03} \right] + \frac{1}{4h} \left(1 - \frac{3\alpha_3^2}{h^2} \right) \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (M_{22} - M_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} 2H - \rho \frac{2h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{2h^3}{3} \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} B_{03} \right] \quad (47)
\end{aligned}$$

На основе выражений (47) и (36), для поперечных сил Q_{13} и Q_{23} получим:

$$Q_{13} = 2h^0 \sigma_{13}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad Q_{23} = 2h^0 \sigma_{23}(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (48)$$

Теперь при помощи формул (24) получим следующие физические связи между поперечными силами и углами деформаций сдвигов:

$$Q_{13} = 2h \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{13}, \quad Q_{23} = 2h \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{23} \quad (49)$$

Далее на основании (47) и (44) можем удовлетворять силовым граничным условиям (8) на лицевых поверхностях $\alpha_3 = \pm h$. В результате, приходим к

следующим двумерным уравнениям движения оболочки с учетом сил электромагнитного происхождения:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} 2S + \frac{Q_{13}}{R_1} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
& + \frac{1}{c} \tilde{j}_{20} B_{03} = -(q_1^+ + q_1^-) \\
& \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (T_{22} - T_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} 2S + \frac{Q_{23}}{R_2} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \\
& - \frac{1}{c} \tilde{j}_{10} B_{03} = -(q_2^+ + q_2^-) \\
& Q_{13} - \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} 2H \right] + \\
& + \rho \frac{2h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{2h^3}{3} \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} B_{03} = h(q_1^+ - q_1^-) \\
& Q_{23} - \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (M_{22} - M_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} 2H \right] + \\
& + \rho \frac{2h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} + \frac{2h^3}{3} \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} B_{03} = h(q_2^+ - q_2^-) \\
& - \left(\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} \right) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial Q_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial Q_{23}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} Q_{13} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} Q_{23} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\
& + \frac{1}{c} \tilde{j}_{10} B_{02} - \frac{1}{c} \tilde{j}_{20} B_{01} = -(q_3^+ + q_3^-).
\end{aligned} \tag{50}$$

Здесь

$$\tilde{j}_{10} = 2hj_{10} = \int_{-h}^h j_1 d\alpha_3, \quad \tilde{j}_{20} = 2hj_{20} = \int_{-h}^h j_2 d\alpha_3$$

т.е. $\tilde{j}_{10}$ и $\tilde{j}_{20}$ – тангенциальные компоненты усредненного (поверхностного) тока электропроводимости по срединной поверхности оболочки. Используя формулы (40), (42), для усредненных токов получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_{10} &= 2\sigma h \left[E_{10} + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial u_2}{\partial t} B_{03} - \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} B_{02} \right) \right] \\
\tilde{j}_{20} &= 2\sigma h \left[E_{20} + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} B_{01} - \frac{1}{c} \frac{\partial u_1}{\partial t} B_{03} \right) \right]
\end{aligned} \tag{51}$$

Таким образом, механическая часть двумерной теории магнитотермоупругости тонкой оболочки построена, она представляет собой систему уравнений движения (50), соотношения упругости (37), (49), геометрические соотношения (26), (22), (23).

Присоединим к системе уравнений механической части задачи магнитотермоупругости тонких оболочек соответствующие двумерные граничные и начальные условия:

если край Γ срединной поверхности оболочки определяется уравнением $\alpha_1 = \alpha_{10}$, то граничными условиями будут:

для загруженного края

$$T_{11} = T_{11}^*, \quad S = S^*, \quad M_{11} = M_{11}^*, \quad H = H^*, \quad Q_{13} = Q_{13}^* \quad (52)$$

для жестко защемленного края

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad w = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0 \quad (53)$$

для шарнирно-закрепленного края

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad \psi_2 = 0 \quad (54)$$

начальные условия (при $t = 0$):

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^0 u_1 d\alpha_3, & u_2 &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^0 u_2 d\alpha_3, & w &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^0 u_3 d\alpha_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^0 V_1 d\alpha_3, & \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^0 V_2 d\alpha_3, & \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^0 V_3 d\alpha_3 \end{aligned} \quad (55)$$

Система уравнений (50),(37),(49),(26),(22),(23), граничные условия (52) (либо (53), либо (54)) и начальные условия (55) представляют двумерную модель механической части задачи магнитотермоупругости тонких оболочек по уточненной теории упругих оболочек Тимошенко-Рейсснера.

Двумерную модель теплопроводности тонкой оболочки представляет система уравнений (31), граничные условия (32) и начальные условия (33). Следует отметить, что задача теплопроводности тонкой оболочки (как и ее трехмерный вариант) в данном случае, это отдельная начально-граничная задача.

Сейчас обратим внимание на тот факт, что в уравнения (50) механической части задачи магнитотермоупругости тонких оболочек входят усредненные поверхностные токи электропроводимости $(\tilde{j}_{10}, \tilde{j}_{20})$, которые нам неизвестны. Чтобы замкнуть уравнения (50),(37),(49),(26),(22),(23), следует рассмотреть уравнения и гранично-начальные условия электродинамической части задачи.

Рассмотрим уравнения квазистационарного электромагнитного поля (6), которые имеют место во всем трехмерном пространстве R^3 за исключением трехмерной тонкой области оболочки. Будем руководствоваться предположением 3), при помощи которого существенно упрощается область, где имеют место уравнения (6). Предположение 3) дает возможность при определении квазистационарного электромагнитного поля в окружающем оболочку воздушном пространстве, область трехмерной тонкой оболочки рассматривать в R^3 как математический разрез по срединной поверхности оболочки. Это означает, что разности $h_1^+ - h_1^-$ и $h_2^+ - h_2^-$ для величин h_1 и h_2 можем рассматривать как скачки через этот разрез. На этой основе систему уравнений (6) можем представить так:

$$\text{rot} \vec{h}^{(e)} = \frac{4\pi}{c} \delta(\alpha_3) \chi(\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega) \vec{I}, \quad \text{rot} \vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t} \quad (56)$$

$$\text{div} \vec{E}^{(e)} = 0, \quad \text{div} \vec{h}^{(e)} = 0$$

Здесь $\delta(\alpha_3)$ – дельта-функция Дирака; $\chi(\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega)$ – функция Хевисайда;

$\vec{I} = \{\tilde{j}_{10}, \tilde{j}_{20}, 0\}$. Отметим, что вектор $\vec{I}$ представляет собой вектор плотности

поверхностного (усредненного) тока электропроводимости по срединной поверхности оболочки Ω .

На основании формул (43) для h_1 и h_2 легко заметить, что

$$h_1^+ - h_1^- = \tilde{j}_{10}, \quad h_2^+ - h_2^- = -\tilde{j}_{20} \quad (57)$$

Если взять оператор ротации от второго векторного уравнения из системы (56), с учетом третьего уравнения из этой системы, приходим к следующему уравнению:

$$\Delta_1 \vec{E}^{(e)} = \frac{4\pi}{c} \delta(\alpha_3) \chi(\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega) \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} \quad (58)$$

Здесь $\Delta_1(\cdot)$ – трехмерный оператор Лапласа.

Имея в виду соответствующие граничные условия из (11) и формулы (39), можем утверждать, что нормальная компонента вектора возбужденного магнитного поля $h_3^{(e)}$ и тангенциальные компоненты вектора возбужденного электрического поля $E_1^{(e)}, E_2^{(e)}$ будут непрерывными функциями на разрезе $\alpha_3 = 0$. Следовательно, можем утверждать, что на разрезе $\alpha_3 = 0$ имеем

$$h_3^{(e)}|_{\alpha_3=0} = h_{30}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad E_1^{(e)}|_{\alpha_3=0} = E_{10}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad E_2^{(e)}|_{\alpha_3=0} = E_{20}(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (59)$$

Фундаментальное решение (функция Грина) [18] для уравнения $\Delta_1 \vec{E}^{(e)} = 0$ в бесконечном пространстве R^3 , если в одной точке на срединной поверхности оболочки $Q \in \Omega$ (при $\alpha_3 = 0$) приложена особенность типа дельта-функции, а в бесконечности даны условия (13), имеет вид $-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{PQ}}$, где R_{PQ} – трехмерное расстояние от точки $Q \in \Omega$ до точки наблюдения $P \in R^3$ в трехмерном пространстве.

Имея это в виду, решение уравнения (58) во всем трехмерном пространстве R^3 можем представить в виде

$$\vec{E}^{(e)}(P, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{1}{R_{PQ}} \vec{I}(Q, t) d\Omega, \quad Q \in \Omega, \quad P \in R^3 \quad (60)$$

Из векторного равенства (60) рассмотрим значения тангенциальных составляющих $E_1^{(e)}$ и $E_2^{(e)}$, кроме того, точку наблюдения P берем в области Ω срединной поверхности оболочки, учитывая формулы (59), будем иметь:

$$\begin{aligned} E_{10}(P, t) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{\tilde{j}_{10}(Q, t) \vec{e}_1(P) \vec{e}_1(Q) + \tilde{j}_{20}(Q, t) \vec{e}_2(Q) \vec{e}_1(P)}{R_{PQ}} d\Omega \\ E_{20}(P, t) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{\tilde{j}_{10}(Q, t) \vec{e}_1(Q) \vec{e}_2(P) + \tilde{j}_{20}(Q, t) \vec{e}_2(Q) \vec{e}_2(P)}{R_{PQ}} d\Omega, \quad P \in \Omega \end{aligned} \quad (61)$$

Отметим, что третье скалярное уравнение из векторного уравнения (60) служит для определения $E_3^{(e)+}$ и $E_3^{(e)-}$. Далее, с учетом формулы (41) и последней из граничных условий из (11) можем определить поверхностные электрические заряды $\hat{\rho}_e$ на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$.

Используя формулы (51) для усреднённых токов, уравнения системы (61) можем представлять через поверхностные усредненные токи $\tilde{j}_{10}$ и $\tilde{j}_{20}$, а именно:

$$\begin{aligned}\tilde{j}_{10}(P, t) = & -\frac{2\sigma h}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{\tilde{j}_{10}(Q, t) \vec{e}_1(P) \vec{e}_1(Q) + \tilde{j}_{20}(Q, t) \vec{e}_2(Q) \vec{e}_1(P)}{R_{PQ}} d\Omega + \\ & + \frac{2\sigma h}{c} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} B_{03} - \frac{\partial w}{\partial t} B_{02} \right) \\ \tilde{j}_{20}(P, t) = & -\frac{2\sigma h}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{\tilde{j}_{10}(Q, t) \vec{e}_1(Q) \vec{e}_2(P) + \tilde{j}_{20}(Q, t) \vec{e}_2(Q) \vec{e}_2(P)}{R_{PQ}} d\Omega + \\ & + \frac{2\sigma h}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial t} B_{01} - \frac{\partial u_1}{\partial t} B_{03} \right) \quad P \in \Omega\end{aligned}\quad (62)$$

К двумерной системе интегродифференциальных уравнений (62) электродинамической части задачи, которая имеет место в области срединной поверхности оболочки Ω , следует присоединить соответствующие граничные и начальные условия.

Граничные условия на контуре Γ ($\alpha_1 = \alpha_{10}$) срединной поверхности оболочки имеют вид [4]:

$$\tilde{j}_{10} = 0, \quad \tilde{j}_{20} = 0 \quad (63)$$

Начальные условия при $t = 0$ будут выражаться так:

$$\tilde{j}_{10}|_{t=0} = 0, \quad \tilde{j}_{20}|_{t=0} = 0 \quad (64)$$

Система двумерных уравнений, граничных и начальных условий (50), (37), (49), (26), (22), (23), (52)-(55), (31)-(33), (62)-(64), определяют двумерную математическую модель магнитотермоупругости электро- и теплопроводящих тонких оболочек в уточненной постановке (с учетом поперечных сдвигов).

Если в указанной системе уравнений значения главных кривизн срединной поверхности оболочки подставим ноль, получим основные уравнения, граничные и начальные условия уточненной теории магнитотермоупругости тонких пластин (отдельно при изгибе и обобщенного плоского напряженного состояния).

Если в построенной модели не будем учитывать температурное воздействие, получим уточненную теорию магнитоупругости тонких оболочек и пластин на базе уточненной теории оболочек и пластин Тимошенко-Рейсснера.

Если в построенной модели будем считать, что начальное магнитное поле нулевое ($\vec{B}_0 = 0$), получим уточненную теорию термоупругости тонких оболочек и пластин на базе теории оболочек и пластин Тимошенко-Рейсснера [16, 19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит, 1996. 288с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143с.
4. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд. НАН Армении, 1992. 235с.
5. Sargsyan S. H. Magnetoelasticty of Electric conductive Anisotropic Thin Shells//Proc. of the 5th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics. TS 2003. 8-11 June 2003. Blacksburg, VA. USA. WA-4-5-1-WA-4-5-4.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
7. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф. Магнитоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1981. 293 с.
8. Maugin G. A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. 1988.
9. Eringen C. A. Microcontinuum Field Theoris. I Foundations and Solids. Springer. New York, ets. 1998. 325p.
10. Болотин В.В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С.361-363.
11. Подстригач Л.С., Швеи Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 344 с.
12. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд. АН СССР. 1962. 364с.
13. Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Об устойчивости цилиндрической оболочки в электромагнитном поле //Докл. АН Арм.ССР. 1967. Т. 61. №2. С.49-55.
14. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Об уравнениях магнитоупругих тонких пластин// ПММ. 1975. Т.39. Вып.5. С.955-959.
15. Багдасарян Г.Е. Уравнения магнитоупругих колебаний тонких идеально проводящих пластин// ПМ. 1983. Т. XIX. №12. С.87-91.
16. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Изд. Наукова думка, 1973. 248с.
17. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: Судостроение, 1987. 316с.
18. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. М.: Высшая школа, 1980. 335с.
19. Швеи Р.Н., Лунь Е.И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига //ПМ. 1971. Т.7. № 10. С.121-125.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович –

доктор физ.-мат.наук, профессор, Чл-корр. НАН Армении

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М.Налбандяна

Поступила в редакцию 04.09.2009

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СЛОЕМ
ГРИГОРЯН Э.Х., СИНАНЫАН С.С.

Ключевые слова: пьезоэлектрическое пространство, бесконечный металлический слой, полубесконечный слой, поверхностная волна, асимптотические формулы, дальняя зона, цилиндрическая волна.

Key words: Piezoelectric space, infinite metallic layer, semi-infinite layer, surface wave, asymptotic formulae, farther zone, cylindrical wave

Գրիգորյան Է.Խ., Սինանյան Ս.Ս.

Սահի՞ր հարթ էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա անվերջ մետաղական շերտով պեղծելեկտրական տարածությունում

Աշխատանքում դիտարկվում է սահի՞ր հարթ էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա անվերջ մետաղական շերտով պեղծելեկտրական տարածությունում: Խնդրի լուծումը Ֆուրյեի իրական ձևափոխության օգնությամբ հանգեցվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի խնդրի տիպի խնդրի լուծմանը: Գտնված են տեղափոխության ամպլիտուդի ասիմպտոտիկ բանաձևեր հեռավոր գոտում: Ցույց է տրված, որ կիսաանվերջ մետաղական շերտի առկայությունը բերում է մակերևութային և գլանային ալիքների առաջացմանը և այնպիսի ալիքների առաջացմանը, որոնք ճառագայթի ուղղությամբ տարածվում են ճառագայթի բացվածքի անկյունից կախված արագությամբ:

Grigoryan E.Kh., Sinanyan S.S.

Diffraction of the plane shift electroelastic wave on the semi-infinite metal layer in piezoelectric space with infinite metal layer

Diffraction of the plane shift electroelastic wave on the semi-infinite metal layer in piezoelectric space with infinite metal layer is discussed. Solution of the problem can be brought to the solution of Riemann problem in analytic functions theory, using real Fourier transformation. Asymptotic formulae of shift amplitude in further zone are found. It is shown that the existence of semi-infinite metal layer leads to appearance of surface and cylindrical waves and a wave which propagates in the direction of the beam, with a speed depending on the angle of beam spread.

В работе рассматривается дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. Решение задачи с помощью действительного преобразования Фурье приводится к решению задачи типа Римана в теории аналитической функции. Относительно амплитуд перемещений получены асимптотические формулы в дальней зоне. Показано, что наличие полубесконечного металлического слоя приводит к появлению поверхностных и цилиндрических волн и волны, распространяющейся по направлению луча со скоростью, зависящей от угла раствора луча.

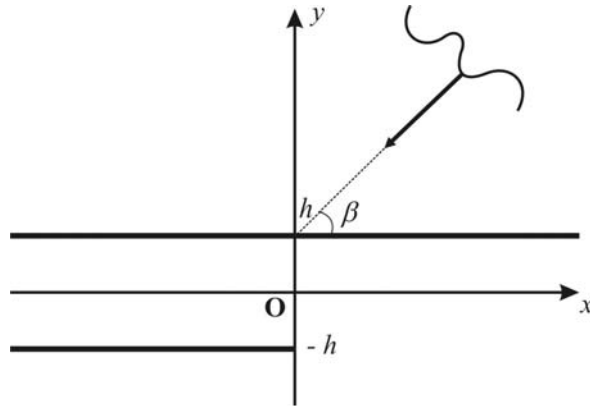
Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса bmm гексагональной симметрии с осью OZ , совпадающей с главной осью кристалла. В пьезоэлектрическом пространстве имеются включения в виде параллельных бесконечных и полубесконечных заземлённых тонких металлических слоев. Считается, что толщина металлических слоев настолько мала, что их жесткостью можно пренебречь, т.е. слои можно рассматривать как электроды, занимающие плоскость

$-\infty < x < \infty, y = h, -\infty < z < \infty$ и полуплоскость
 $-\infty < x \leq 0, y = -h, -\infty < z < \infty$.

Из бесконечности, под углом β к плоскостям электродов ($0 < \beta < \pi/2$), распространяется плоская волна сдвига со следующими значениями перемещения $w_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$ и электрического потенциала $\Phi_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$, где

$$w_\infty(x, y) = e^{-ikx \cos \beta - iky \sin \beta}$$

$$\Phi_\infty(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-ikx \cos \beta - iky \sin \beta} \quad (1)$$



Фиг. 1

тогда величины, характеризующие электроупругое поле, зависят от времени, пропорционально $e^{-i\omega t}$. В этом случае уравнения относительно амплитуд перемещения $w(x, y)$ и квазистатического электрического потенциала $\Phi(x, y)$ примут вид [1]:

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad \Delta \Phi + \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} k^2 w = 0 \quad (2)$$

ϵ_{11} – диэлектрическая проницаемость, e_{15} – пьезомодуль, ω – частота колебаний, $k = \omega/c$ – волновое число, $c = \sqrt{c_{44}(1 + \alpha)}/\rho$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, c_{44} – упругая постоянная, ρ – плотность среды,

$$\alpha = e_{15}^2 / c_{44} \epsilon_{11}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа.}$$

Решение уравнения (2) должно удовлетворять контактными условиям:

$$w(x, \pm h + 0) = w(x, \pm h - 0)$$

$$\sigma_{yz}(x, \pm h + 0) = \sigma_{yz}(x, \pm h - 0), \quad \Phi(x, h) = 0$$

$$\Phi(x, -h) = \Phi^+(x), \quad D_y(x, -h + 0) - D_y(x, -h - 0) = -\epsilon_{11} \Psi^-(x) \quad (3)$$

где $\sigma_{yz}(x, y) = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ – амплитуда тангенциальных напряжений,

$D_y(x, y) = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ – амплитуда компоненты вектора электрической

индукции и $\Phi^+(x) = 0$ при $x < 0$, $\Psi^-(x) = 0$ при $x > 0$.

Введем функции

$$u(x, y) = w(x, y) - w_\infty(x, y), \quad \varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_\infty(x, y) \quad (4)$$

Функции $u(x, y)$, $\varphi(x, y)$ удовлетворяют уравнениям (2), а их действительные преобразования Фурье по x удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}(\sigma, y)}{dy^2} - \gamma^2 \bar{u}(\sigma, y) &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{\varphi}(\sigma, y)}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\varphi}(\sigma, y) + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}(\sigma, y) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и следующим контактными условиями:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma, \pm h + 0) &= \bar{u}(\sigma, \pm h - 0), \quad \bar{\varphi}(\sigma, h) = -2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-ikh \sin \beta} \delta(\sigma - k \cos \beta) \\ \bar{\varphi}(\sigma, -h) &= \bar{\varphi}^+(\sigma) - 2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{ikh \sin \beta} \delta(\sigma - k \cos \beta) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} c_{44} \frac{d\bar{u}}{dy} \Big|_{y=\pm h+0} + e_{15} \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \Big|_{y=\pm h+0} &= c_{44} \frac{d\bar{u}}{dy} \Big|_{y=\pm h-0} + e_{15} \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \Big|_{y=\pm h-0} \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \Big|_{y=-h+0} - \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \Big|_{y=-h-0} &= -\bar{\Psi}^-(\sigma) \end{aligned}$$

где

$$\gamma^2 = \sigma^2 - k^2, \quad \bar{f}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad \delta(\sigma) - \text{функция Дирака.}$$

Следует отметить, что функции $\bar{u}(\sigma, y)$, $\bar{\varphi}(\sigma, y)$ еще должны удовлетворять условию уходящей волны.

Решение системы (5), представляющее уходящую волну, имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma, y) &= A_0(\sigma) e^{-\gamma y} \\ \bar{\varphi}(\sigma, y) &= B_0(\sigma) e^{-|\sigma| y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u} \end{aligned} \quad \text{при } y > h \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma, y) &= A_1(\sigma) \text{ch} \gamma y + A_2(\sigma) \text{sh} \gamma y \\ \bar{\varphi}(\sigma, y) &= B_1(\sigma) \text{ch} |\sigma| y + B_2(\sigma) \text{sh} |\sigma| y + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u} \end{aligned} \quad \text{при } |y| < h \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma, y) &= A_3(\sigma) e^{\gamma y} \\ \bar{\varphi}(\sigma, y) &= B_3(\sigma) e^{|\sigma| y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u} \end{aligned} \quad \text{при } y < -h \quad (9)$$

Выше имелось в виду, что $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$, $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$ при $|\sigma| > k$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ обходит точку $\sigma = -k$ сверху, а точку $\sigma = k$ – снизу [2].

Удовлетворив условиям (6), приходим к следующей задаче типа Римана на действительной оси [4-13]:

$$2(1 + \varkappa)|\sigma| \bar{K}(\sigma) \bar{\Phi}^+(\sigma) + \bar{\Psi}^-(\sigma) = 2\pi i c_1 \delta(\sigma - k \cos \beta) \quad (10)$$

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{((1 + \varkappa) - \varkappa|\sigma|/\gamma)}{((1 + \varkappa)(1 + e^{-2|\sigma|h}) - \varkappa|\sigma|(1 + e^{-2\gamma h})/\gamma)((1 + \varkappa)(1 - e^{-2|\sigma|h}) - \varkappa|\sigma|(1 + e^{-2\gamma h})/\gamma)}$$

$$c_1 = \varkappa(1 + \varkappa) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} 2\eta_1 \eta_2 \left(\frac{\cos(h\eta_2)}{K_1(\eta_1)} + \frac{i \sin(h\eta_2)}{K_2(\eta_1)} \right)$$

Неизвестные функции выражаются решением функционального уравнения

$$\begin{aligned} A_0(\sigma) &= \frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \bar{\Phi}^+(\sigma) \frac{(1 + \varkappa)\gamma e^{\gamma h} (e^{-2|\sigma|h} - e^{-2\gamma h})}{K_1(\sigma) K_2(\sigma)} + \\ &+ 4\pi \varkappa |\sigma| \left(\frac{\cos(h\eta_2)}{K_1(\sigma)} \operatorname{ch} \gamma h - \frac{i \sin(h\eta_2)}{K_2(\sigma)} \operatorname{sh} \gamma h \right) \delta(\sigma - \eta_1) \\ A_1(\sigma) &= -\frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \frac{\bar{\Phi}^+(\sigma) e^{-\gamma h}}{K_1(\sigma)} + \frac{4\pi \varkappa \cos(h\eta_2) \eta_1 e^{i h \eta_2}}{K_1(\eta_1)} \delta(\sigma - \eta_1) \\ A_2(\sigma) &= \frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \frac{\bar{\Phi}^+(\sigma) e^{-\gamma h}}{K_2(\sigma)} - \frac{4\pi i \varkappa \sin(h\eta_2) \eta_1 e^{i h \eta_2}}{K_2(\eta_1)} \delta(\sigma - \eta_1) \\ A_3(\sigma) &= -\frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \bar{\Phi}^+(\sigma) \frac{(1 + \varkappa)\gamma(1 - e^{-2h(|\sigma| + \gamma)}) - |\sigma| \varkappa(1 - e^{-4\gamma h})}{K_1(\sigma) K_2(\sigma)} + \\ &+ 4\pi \varkappa \eta_1 \left(\frac{\cos^2(h\eta_2)}{K_1(\eta_1)} - \frac{\sin^2(h\eta_2)}{K_2(\eta_1)} \right) \delta(\sigma - \eta_1) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B_0(\sigma) e^{-|\sigma|h} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A_0(\sigma) e^{-\gamma h} + 2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-i h \eta_2} \delta(\sigma - \eta_1) &= 0 \\ B_3(\sigma) e^{-|\sigma|h} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A_3(\sigma) e^{-\gamma h} + 2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{i h \eta_2} \delta(\sigma - \eta_1) &= \bar{\Phi}^+(\sigma) \end{aligned} \quad (12)$$

$$2B_1(\sigma) \operatorname{ch} |\sigma|h + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} 2A_1(\sigma) \operatorname{ch} \gamma h + 4\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \cos(h\eta_2) \delta(\sigma - \eta_1) = \bar{\Phi}^+(\sigma) \quad (13)$$

$$2B_2(\sigma) \operatorname{sh} |\sigma|h + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} 2A_2(\sigma) \operatorname{sh} \gamma h - 4\pi i \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \sin(h\eta_2) \delta(\sigma - \eta_1) = -\bar{\Phi}^+(\sigma) \quad (14)$$

где

$$K_1(\sigma) = (1 + \varkappa)\gamma(1 + e^{-2|\sigma|h}) - |\sigma| \varkappa(1 + e^{-2\gamma h})$$

$$K_2(\sigma) = (1 + \varkappa)\gamma(1 - e^{-2|\sigma|h}) - |\sigma| \varkappa(1 - e^{-2\gamma h}), \quad k \cos \beta = \eta_1, \quad k \sin \beta = \eta_2$$

Перейдя к решению (10), заметим, что $\bar{K}(\sigma) \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, тогда, имея в виду представления [3],

$$2\pi i \delta(\sigma - \eta_l) = (\sigma - \eta_l - i0)^{-1} - (\sigma - \eta_l + i0)^{-1}$$

$$|\sigma| = (\sigma - i0)^{1/2} (\sigma + i0)^{1/2}, (\sigma - i0)^{-1} = \sigma^{-1} + \pi i \delta(\sigma)$$

решение уравнения получим в виде

$$\bar{\Phi}^+(\sigma) = -\frac{c_1}{2(1+\varkappa)(\sigma + i0)^{1/2} \bar{K}^+(\sigma) \bar{K}^-(\eta_l)(\eta_l)^{1/2} (\sigma - \eta_l + i0)}$$

$$\bar{\Psi}^-(\sigma) = \frac{c_1(\sigma - i0)^{1/2} \bar{K}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\eta_l)(\eta_l)^{1/2} (\sigma - \eta_l - i0)}$$

где $\bar{K}(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma) \bar{K}^-(\sigma)$, $\bar{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im } \alpha > 0$, а $\bar{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im } \alpha < 0$, $\alpha = \sigma + i\tau$. При этом, $\bar{K}^\pm(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в своих областях регулярности и [2]

$$\bar{K}^\pm(\sigma) = \exp(\bar{R}^\pm(\sigma)), \quad \bar{R}^+(\sigma) = \int_0^\infty R(x) e^{i(\sigma+i0)x} dx, \quad \bar{R}^-(\sigma) = \bar{R}^+(-\sigma)$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \ln[\bar{K}(\sigma)] e^{-i\sigma x} d\sigma$$

Заметим, что как показано в работе [5], на действительной оси ($\sigma \neq 0$) $K_2(\sigma)$ имеет нули только в точках $\sigma = \pm \sigma_{n2}$ при $kh > h_a$, где $\zeta = h_a$ – единственное решение уравнения $2\zeta \varkappa = (1+\varkappa)(1 - e^{-2\zeta})$, а $K_1(\sigma)$ в точках $\sigma = \pm \sigma_{n1}$ при любых значениях kh ($\sigma = 0$ не является полюсом для $\bar{u}(\sigma, y)$).

Поэтому, чтобы выполнялись условия уходящей волны, действительная ось должна обходить точку $\sigma = -\sigma_{nj}$ сверху, а точку $\sigma = \sigma_{nj}$ – снизу ($j = 1, 2$) [2].

Применив обратное преобразование Фурье к (7), (8), (9), получим решение задачи.

В частном случае, когда в пьезоэлектрическом пространстве имеется включение в виде одного бесконечного электрода, занимающий плоскость $-\infty < x < \infty$, $y = h$, $-\infty < z < \infty$, решение примет вид [5]:

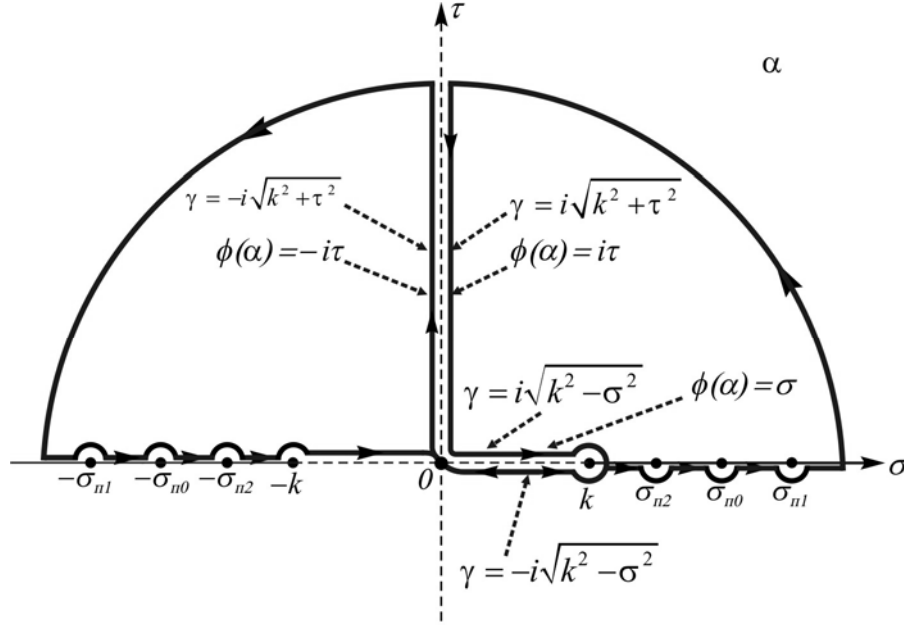
$$w(x, y) = w_\infty(x, y) - \frac{\varkappa \cos \beta e^{-2ikh \sin \beta}}{\varkappa \cos \beta + i(1+\varkappa) \sin \beta} e^{iky \sin \beta - ikx \cos \beta} \quad \text{при } y > h \quad (15)$$

$$\varphi(x, y) = \varphi_\infty(x, y) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (1+A) e^{-k(y-h) \cos \beta - ikx \cos \beta}$$

$$w(x, y) = -\frac{\varkappa \cos \beta}{\varkappa \cos \beta + i(1+\varkappa) \sin \beta} e^{-ik(y-h) \sin \beta - ikx \cos \beta} \quad \text{при } y < h \quad (16)$$

$$\varphi(x, y) = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (1+A) e^{-k(y-h) \cos \beta - ikx \cos \beta}$$

$$A = -\frac{\alpha \cos \beta e^{-ikh \sin \beta}}{\alpha \cos \beta + i(1 + \alpha) \sin \beta}$$



Фиг. 2

Подробно остановимся на исследовании $w(x, y)$ в случае $x < 0$ и $y > h$. Имеем

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_\infty(x, y) + w_{\text{отр}}(x, y).$$

$$w_1(x, y) = A^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma |\sigma| (e^{-2|\sigma|h} - e^{-2\gamma h})}{\bar{K}^+(\sigma)(\sigma + i0)^{1/2}(\sigma - \eta_1 + i0)K_1(\sigma)K_2(\sigma)} e^{-i\sigma x} e^{-\gamma(y-h)} d\sigma \quad (17)$$

$$w_{\text{отр}}(x, y) = 2\alpha\eta_1 \left(\frac{\cos^2(h\eta_2)}{K_1(\eta_1)} - \frac{\sin^2(h\eta_2)}{K_2(\eta_1)} \right) e^{iky \sin \beta - ikx \cos \beta}$$

где

$$A^* = -\frac{1}{4\pi} \frac{\alpha^2(1 + \alpha)k^2 \sin 2\beta}{\bar{K}^-(\eta_1)(\eta_1)^{1/2}} \left(\frac{\cos(h\eta_2)}{K_1(\eta_1)} + \frac{i \sin(h\eta_2)}{K_2(\eta_1)} \right)$$

Вычисляя интеграл (17) при $x < 0$, с помощью метода контурного интеграла в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ с разрезами, указанными на фиг. 2, получим

$$w_1(x, y) = w_{11}(x, y) + w_{\text{пз}}(x, y) + w_{\text{пов}}(x, y) \quad (18)$$

$$w_{\text{пов}}(x, y) = w_{\text{пов}}^{(1)} e^{i\sigma_{n1}|x|} e^{-i\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2}(y-h)} + w_{\text{пов}}^{(2)} e^{i\sigma_{n2}|x|} e^{-i\sqrt{\sigma_{n2}^2 - k^2}(y-h)}$$

$$w_{\text{пов}}^{(1)} = -2\pi \frac{\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2} \sqrt{\sigma_{n1}} (e^{-2\sigma_{n1}h} - e^{-2i\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2}h})}{\bar{K}^+(\sigma_{n1})(\sigma_{n1} - \eta_1)K_1'(\sigma_{n1})K_2(\sigma_{n1})}$$

$$w_{\text{пов}}^{(2)} = \begin{cases} -\frac{2\pi \sqrt{\sigma_{n2}^2 - k^2} \sqrt{\sigma_{n2}} (e^{-2\sigma_{n2}h} - e^{-2i\sqrt{\sigma_{n2}^2 - k^2}h})}{\bar{K}^+(\sigma_{n2})(\sigma_{n2} - \eta_1)K_1(\sigma_{n2})K_2'(\sigma_{n2})}, & kh > h_a \\ 0, & kh \leq h_a \end{cases}$$

$$w_{n3}(x, y) = - \int_0^\infty \frac{N_{15}(\tau) + M_{15}(\tau)}{\bar{K}^+(i\tau)(i\tau)^{1/2}(i\tau - \eta_1)} e^{-\tau|x|} e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(y-h)} d\tau$$

$$w_{11}(x, y) = \int_0^\infty \frac{M_{12}(\tau) e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}(y-h)} + M_{15}(\tau) e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(y-h)}}{\bar{K}^+(i\tau)(i\tau)^{1/2}(i\tau - \eta_1)} e^{-\tau|x|} d\tau -$$

$$- \int_0^k \frac{M_{13}(\sigma) e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y-h)} + M_{14}(\sigma) e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y-h)}}{\bar{K}^+(\sigma)(\sigma + i0)^{1/2}(\sigma - \eta_1 + i0)} e^{i\sigma|x|} d\sigma$$

Итак, получили представления $w_{11}(x, y)$, $w_{n3}(x, y)$ в виде регулярных интегралов, которые удобны для вычисления при малых значениях x, y .

$$M_{12}(\tau) = \frac{M_0(i\tau, -1)}{M_{12}^{(1)}(\tau)}, \quad M_{15}(\tau) = \frac{M_0(i\tau, 1)}{M_{15}^{(1)}(\tau)}, \quad M_{13}(\sigma) = \frac{iM_0(\sigma, -1)}{M_{13}^{(1)}(\sigma)}$$

$$M_{14}(\sigma) = \frac{iM_0(\sigma, 1)}{M_{14}^{(1)}(\sigma)}, \quad N_{15}(\tau) = -\frac{M_0(-i\tau, 1)}{N_{15}^{(1)}(\tau)}$$

где

$$M_0(\sigma, \eta) = \sigma \sqrt{k^2 - \sigma^2} (e^{-2\sigma h} - e^{2\text{sgn}(\eta) i \sqrt{k^2 - \sigma^2} h})$$

$$M_{12}^{(1)}(\tau) = ((1 + \varkappa) \sqrt{\tau^2 + k^2} (1 + e^{-2i\tau h}) - \varkappa \tau (1 + e^{-2i\sqrt{\tau^2 + k^2} h})) \times$$

$$\times ((1 + \varkappa) \sqrt{\tau^2 + k^2} (1 - e^{-2i\tau h}) - \varkappa \tau (1 - e^{-2i\sqrt{\tau^2 + k^2} h}))$$

$$M_{15}^{(1)}(\tau) = ((1 + \varkappa) \sqrt{\tau^2 + k^2} (1 + e^{-2i\tau h}) + \varkappa \tau (1 + e^{2i\sqrt{\tau^2 + k^2} h})) \times$$

$$\times ((1 + \varkappa) \sqrt{\tau^2 + k^2} (1 - e^{-2i\tau h}) + \varkappa \tau (1 - e^{2i\sqrt{\tau^2 + k^2} h}))$$

$$M_{13}^{(1)}(\sigma) = ((1 + \varkappa) i \sqrt{k^2 - \sigma^2} (1 + e^{-2\sigma h}) - \varkappa \sigma (1 + e^{-2i\sqrt{k^2 - \sigma^2} h})) \times$$

$$\times ((1 + \varkappa) i \sqrt{k^2 - \sigma^2} (1 - e^{-2\sigma h}) - \varkappa \sigma (1 - e^{-2i\sqrt{k^2 - \sigma^2} h}))$$

$$M_{14}^{(1)}(\sigma) = ((1 + \varkappa) i \sqrt{k^2 - \sigma^2} (1 + e^{-2\sigma h}) + \varkappa \sigma (1 + e^{2i\sqrt{k^2 - \sigma^2} h})) \times$$

$$\times ((1 + \varkappa) i \sqrt{k^2 - \sigma^2} (1 - e^{-2\sigma h}) + \varkappa \sigma (1 - e^{2i\sqrt{k^2 - \sigma^2} h}))$$

$$N_{15}^{(1)}(\tau) = ((1 + \varkappa) \sqrt{\tau^2 + k^2} (1 + e^{2i\tau h}) - \varkappa \tau (1 + e^{2i\sqrt{\tau^2 + k^2} h})) \times$$

$$\times ((1 + \varkappa) \sqrt{\tau^2 + k^2} (1 - e^{2i\tau h}) - \varkappa \tau (1 - e^{2i\sqrt{\tau^2 + k^2} h}))$$

$$(\sigma_{n1}^2 - k^2) K_1'(\sigma_{n1}) = (\sigma_{n1}^2 - k^2) \frac{dK_1(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_{n1}} = (1 + e^{-2h\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2}}) k^2 \varkappa +$$

$$+ 2e^{-2h\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2}} h \varkappa \sigma_{n1}^2 \sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2} - 2h(1 + \varkappa) e^{-2h\sigma_{n1}} (\sigma_{n1}^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$(\sigma_{n2}^2 - k^2) K_2'(\sigma_{n2}) = (\sigma_{n2}^2 - k^2) \frac{dK_2(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_{n2}} = (1 - e^{-2h\sqrt{\sigma_{n2}^2 - k^2}}) k^2 \varkappa -$$

$$- 2e^{-2h\sqrt{\sigma_{n2}^2 - k^2}} h \varkappa \sigma_{n2}^2 \sqrt{\sigma_{n2}^2 - k^2} + 2h(1 + \varkappa) e^{-2h\sigma_{n2}} (\sigma_{n2}^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}$$

При получении представления $w_1(x, y)$ имелось в виду, что аналитическое продолжение функции $\phi(\sigma) = |\sigma|$ в комплексной плоскости α – это $\phi(\alpha) = \alpha$ при $\text{Re}(\alpha) > 0$ и $\phi(\alpha) = -\alpha$ при $\text{Re}(\alpha) < 0$. С такими разрезами в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ функции $K_j(\alpha) (j=1, 2)$ не могут иметь чисто комплексных нулей, поскольку, если $\alpha = \alpha_j (j=1, 2)$ будут чисто комплексными нулями $K_j(\alpha) (j=1, 2)$, находящиеся в первой четверти, то, следовательно, $\alpha = \bar{\alpha}_j (j=1, 2)$ также будут нулями $K_j(\alpha) (j=1, 2)$ $\left(\sqrt{\alpha_j^2 - k^2} = \sqrt{\bar{\alpha}_j^2 - k^2} \right)$.

Это означает, что $u(x, y)$ будет иметь составляющие в виде приходящей волны из $x \rightarrow +\infty$, что противоречит поставленной задаче. Нетрудно показать, что $\bar{u}(\alpha, y)$ на мнимой оси не имеет полюсов.

Чтобы выявить влияние полубесконечного электрода на характер волнового поля в пьезоэлектрике с бесконечным электродом, следует определить асимптотические формулы $w(x, y)$ в далёких точках. Для получения асимптотической формулы, когда $y > h$ при $kr \rightarrow \infty$, перейдем к полярным координатам $(y - h) = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$, сделаем замену переменных

$\lambda_1(\sigma) = \sigma |\cos \theta| - \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta$, $\lambda_2(\sigma) = \sigma |\cos \theta| + \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta$ и следуя работам [5-7], получим:

при $\pi - \beta < \theta < \pi$

$$w(x, y) = A^* w_{\text{пов}}(x, y) + w_{\text{отр}}(x, y) + A^* D_1^* b_{11} \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(kr)^{1/2}} + A^* D_1^* b_{12} \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{(kr)^{3/2}} +$$

$$+ A^* D_1^* D_2^* \frac{e^{ikr \sin \theta}}{(kr)^2 \cos^2 \theta} + O\left(\frac{\ln^3 kr}{(kr)^3}\right), \quad kr \rightarrow \infty \quad (19)$$

при $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$

$$w(x, y) = A^* w_{\text{пов}}(x, y) + w_{\text{отр}}^{(1)}(x, y) + A^* D_1^* b_{21} e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(kr)^{1/2}} +$$

$$+ A^* D_1^* e^{-\frac{\pi i}{4}} b_{22} \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(kr)^{3/2}} + A^* D_1^* e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{e^{ikr \sin \theta}}{(kr)^2 \cos^2 \theta} + O\left(\frac{\ln^3 kr}{(kr)^3}\right), \quad kr \rightarrow \infty \quad (20)$$

$$w_{\text{отр}}^{(1)}(x, y) = -\frac{e^{-2ikh \sin \beta} \mathfrak{A} \cos \beta}{i(1 + \mathfrak{A}) \sin \beta + \mathfrak{A} \cos \beta} e^{-ikx \cos \beta + iky \sin \beta}$$

при $\theta = \pi - \beta$

$$w(x, y) = A^* w_{\text{пов}}(x, y) + w_{\text{отр}}(x, y) + A^{***} e^{ikr} + O\left(\frac{1}{\sqrt{kr}}\right), \quad kr \rightarrow \infty \quad (21)$$

$$A^{***} = -\frac{1}{2} \frac{(e^{-2k \cos \beta h} - e^{2k \sin \beta h}) \mathfrak{A} (1 + \mathfrak{A}) \cos \beta}{(i(1 + \mathfrak{A}) \sin \beta + \mathfrak{A} \cos \beta)} \left(\frac{\cos(h\eta_2)}{K_1(\eta_1)} + \frac{i \sin(h\eta_2)}{K_2(\eta_1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
D_1^* &= (4h(1+\mathfrak{x})(1 + \frac{(1-e^{-2ikh})}{2ikh} \frac{\mathfrak{x}}{1+\mathfrak{x}}))^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \\
D_2^* &= \frac{k(i(1-e^{2ikh})(-2ikh(1+\mathfrak{x}) + (1+e^{2ikh})\mathfrak{x}) - 4kh(1+\mathfrak{x}))}{4(1+\mathfrak{x})^2((1-e^{2ikh})\mathfrak{x} + 2ikh(1+\mathfrak{x}))^2} \times \\
&\times ((1-e^{2ikh})\mathfrak{x} + 2ikh(1+\mathfrak{x})) - 4ih^2k^2(1-e^{2ikh})(1+\mathfrak{x})^2
\end{aligned} \tag{22}$$

Для $|y| < h$ и $kh \neq h_a$ получим, что при $|kx| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= A^* D_1^* w^{(1)} e^{i\sigma_{n1}|x|} + A^* D_1^* w^{(1)} e^{i\sigma_{n2}|x|} + A^* D_1^* A_4^* \frac{e^{ikx}}{(k|x|)^{3/2}} + \\
&+ A^* D_1^* A_5^* \frac{1}{(kx)^2} + O\left(\frac{\ln^3 |kx|}{|kx|^3}\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
A_4^* &= \frac{-8k^2 h(y-h)\mathfrak{x} + 4i(1+\mathfrak{x})e^{-ikh}k(y \operatorname{ch} kh + h \operatorname{sh} kh)}{\bar{K}^+(k)\sqrt{2k\mathfrak{x}}(2kh\mathfrak{x} - (1+\mathfrak{x})(1-e^{-2kh}))(1-\cos\beta)} \\
A_5^* &= \frac{ie^{ikh} \sin ky}{(-1+e^{2ikh})\mathfrak{x} - 2ikh(1+\mathfrak{x})} \left(\frac{2kh^2(1+\mathfrak{x})}{(-1+e^{2ikh})\mathfrak{x} - 2ikh(1+\mathfrak{x})} - \right. \\
&\left. - \frac{(1+e^{2ikh})\mathfrak{x} - 2ikh(1+\mathfrak{x})}{2k(1+\mathfrak{x})} - \frac{(1+\mathfrak{x})khe^{iky} + e^{ikh}\mathfrak{x} \sin k(-h+y)}{k(1+\mathfrak{x}) \sin ky} \right)
\end{aligned}$$

а для $kh = h_a$ при $|kx| \rightarrow \infty$ будем иметь:

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= A^* D_1^* w^{(1)} e^{i\sigma_{n1}|x|} + A^* D_1^* w^{(1)} e^{i\sigma_{n2}|x|} + A^* D_1^* A_3^* \frac{e^{i(k|x|-\pi/4)}}{\sqrt{|kx|}} + \\
&+ A^* D_1^* A_4^* \frac{e^{i(k|x|-\pi/4)}}{(k|x|)^{3/2}} + A^* D_1^* A_5^* \frac{1}{(kx)^2} + O\left(\frac{\ln^3 |kx|}{|kx|^3}\right)
\end{aligned} \tag{24}$$

$$A_3^* = \frac{-\sqrt{2k}k(y-h)\mathfrak{x} + i\sqrt{2k}e^{-kh}(1+\mathfrak{x}) \operatorname{sh} kh}{\bar{K}^+(k)4h^2k^3\mathfrak{x}^2(1-\cos\beta)}$$

$$w^{(1)} = -\frac{f(\sigma_{n1})}{\bar{K}^+(\sigma_{n1})(\sigma_{n1}-\eta_1)K_1'(\sigma_{n1})K_2(\sigma_{n1})}$$

$$w^{(2)} = \begin{cases} -\frac{f(\sigma_{n2})}{\bar{K}^+(\sigma_{n2})(\sigma_{n2}-\eta_1)K_1(\sigma_{n2})K_2'(\sigma_{n2})}, & kh > h_a \\ 0, & kh \leq h_a \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f(\sigma) &= 2(1+\mathfrak{x})\sqrt{\sigma^2-k^2}e^{-(\sigma+\sqrt{\sigma^2-k^2})h} \operatorname{sh}(\sigma h - \sqrt{\sigma^2-k^2}y) - \\
&- 2\mathfrak{x}\sigma e^{-2\sqrt{\sigma^2-k^2}h} \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma^2-k^2}(y-h))
\end{aligned}$$

$b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, A_4$ вычисляются так, как и в работах [5-7], здесь не приводятся значения этих коэффициентов из-за громоздкости формул.

Из формул (23), (24), следует, что наличие полубесконечного электрода приводит к появлению двух волн с волновыми числами σ_{n1}, σ_{n2} при $kh > h_a$, а при $kh \leq h_a$ распространяется волна с волновым числом σ_{n1} , а также к появлению цилиндрической волны и последнего члена в асимптотике (23), (24), имеющий неволновой характер по x при $|kx| \rightarrow \infty$.

Из формул (19), (20) следует, что наличие полубесконечного электрода приводит при $kh > h_a$ к появлению двух поверхностных волн с волновыми числами σ_{n1}, σ_{n2} , а при $kh \leq h_a$ появляется только поверхностная волна с волновым числом σ_{n1} , а также к появлению цилиндрической волны и волны, распространяющейся по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $c/\sin \theta$ (или распространяющейся по направлению y со скоростью c).

В заключение приведём асимптотическую формулу электрической индукции около конца полубесконечного электрода. Из (11-13):

$$\text{при } -\pi \leq \theta \leq 0 \text{ и } r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2} \rightarrow 0 \quad D_\theta(r, \theta) = D_0 \frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}} + O(1),$$

$$\text{а при } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ и } r \rightarrow 0 \quad D_{\theta 1}(r, \theta) = D_{10} \frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}} + O(1),$$

$$\text{где } D_0 = c_1 e^{i\pi/4} (\varkappa - 1) / 4\sqrt{\pi} (1 + \varkappa) \bar{K}^-(k \cos \beta) (k \cos \beta)^{1/2},$$

$$D_{10} = c_1 e^{i\pi/4} / 4\sqrt{\pi} \bar{K}^-(k \cos \beta) (k \cos \beta)^{1/2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Б.Нобл-Метод Виннера-Хопфа. М.: ИИЛ, 1962. 279с.
3. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544с.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ. 1979. №3. С.29-34.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны упругого волновода в составное упругое пространство. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-37.
6. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №1. С.40-51.
7. Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными бесконечными металлическими слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.70-79.
8. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краях параллельных полубесконечных металлических слоев. //Изв. НАН Армении. 2005. Т.58. №3. С.16-28.
9. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. 63. №1. С.50-69.

10. Восканян А.Р., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с кусочно-однородным бесконечным упругим включением. // Изв. НАН Армении. 2007. Т.60. №2. С.3-20.
11. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. // Изв. НАН Армении. 2005. Т.58. №1. С.38-50.
12. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.
13. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными полубесконечными трещинами. //В кн.: «Проблемы взаимодействия деформированных сред». V-ая Межд. конф. Горис, 2005г. С. 163-168.

Сведения об авторах:

Григорян Эдуард Хосровович

Доктор физ.-мат.наук, профессор ЕГУ, факультет механики

Адрес: Ереван, ул.Алека Манукяна 1, ЕГУ, факультет механики

Тел: (+37410) 23-03-89

Синанян Самвел Суренович – аспирант

Института механики НАН Армении

E-mail: ssinanyan@mail.ru;

Тел.: (+37410) 65-21-06

Поступила в редакцию 08.12.2009

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛАТТЕРА ВЯЗКОУПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ
ПЛАСТИН
ХУДАЯРОВ Б.А.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, численные методы и алгоритмы, пластина, флаттер, вязкоупругость.

Key words: integro-differential equations, numerical methods and algorithm, plates, flutter, viscoelastic.

Խուդայարով Բ. Ա.

Առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ սալերի ֆլատերի հետազոտումը

Հետազոտվում է առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ սալերի ֆլատերը գազի հոսանքով շրջնոսվելիս: Աշխատանքի հիմնական ուղղությունը կայանում է նյութի առաձգամածուցիկ հատկությունների հաշվառումը գերձայնային արագությունների դեպքում: Մշակված է ալգորիթմ ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման համար: Բերված են ֆլատերի կրիտիկական արագության հաշվարկի արդյունքները:

Khudayarov B. A.

The Investigation of Flutter of Viscoelastic of Orthotropic Plates

The flutter of viscoelastic of orthotropic plates streamlined by a gas current are investigated. The basic direction of the present work consists in taking into account of viscoelastic material properties at supersonic speeds. An algorithm of the numerical solution for the problem has been worked out on the basis of the method. The results of the flutter critical speed calculations have been given.

Исследуется задача о флаттере вязкоупругих ортотропных пластин, обтекаемых потоком газа. Основное направление работы состояло в учёте вязкоупругих свойств материала при сверхзвуковых скоростях. Разработан алгоритм численного решения интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Приведены результаты расчетов критической скорости флаттера.

Исследование задачи о колебаниях вязкоупругих пластин, цилиндрических панелей и оболочек, обладающих различными механическими свойствами по разным направлениям, привлекло к себе особое внимание в связи с применением в конструкциях композиционных материалов с непрерывными волокнами из стекла, бора, углерода, графита и т.д.

Задача нелинейного флаттера ортотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, была впервые рассмотрена в работе [1], где для аэродинамических сил использовалась приближенная формула «поршневой теории». В работе [2] задача решается в нелинейной постановке для трехслойной ортотропной пластинки. Позднее [3] эта задача рассматривалась для упругих ортотропных панелей, а динамический процесс рассмотрен без учета распространения упругих волн, однако в вязкоупругой постановке задача не исследована.

В данной работе рассматривается вязкоупругая ортотропная пластина в потоке газа. Определена критическая скорость флаттера пластины.

Рассмотрим прямоугольную вязкоупругую ортотропную пластинку со сторонами a и b , которая обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа со скоростью V . Будем предполагать, что оси ортотропии материала совпадают с направлениями осей x и y . Аэродинамическое давление учитываем по поршневой теории А.А. Ильюшина [4].

Нелинейные уравнения движения вязкоупругих ортотропных пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, записываются в виде:

$$B_{11}^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12}^* \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) +$$

$$+ B^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$B_{22}^* \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{21}^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) +$$

$$+ B^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{h^2}{12} \left\{ B_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [8B^* + B_{12}^* + B_{21}^*] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \left[B_{11}^* \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12}^* \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial w}{\partial y} B^* \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \left[B_{21}^* \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22}^* \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial w}{\partial x} B^* \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} +$$

$$+ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{B}{h} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{BV}{h} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{B_1 V^2}{h} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (3)$$

где ρ – плотность материала; h – толщина оболочки; $B_{ij}^* = b_{ij}(1 - R_{ij}^*)$; $B^* = b(1 - R^*)$; $(i, j = 1, 2)$; R_{ij}^* , R^* – интегральные операторы:

$$R^* \varphi(t) = \int_0^t R(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad R_{ij}^* \varphi(t) = \int_0^t R_{ij}(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau; \quad R(t - \tau), \quad R_{ij}(t - \tau) -$$

ядра релаксации, определяемые при рассмотрении одноосной задачи.

Граничные условия будут иметь вид:

$$\text{при } x = 0, x = a \quad w = 0, v = 0, N_x = 0, M_x = 0$$

$$\text{при } y = 0, y = b \quad w = 0, u = 0, N_y = 0, M_y = 0$$

Этим условиям удовлетворим, представляя искомые функции $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$ в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

$$\begin{aligned}
v(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \\
w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}
\end{aligned} \tag{4}$$

Решение уравнения (1)–(3), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать в виде (4). Подставляя (4) в систему (1)–(3) и применяя метод Бубнова-Галеркина, получим систему ИДУ. Введя в ИДУ следующие безразмерные

величины: $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{u}{h}, \frac{v}{h}, \frac{w}{h}, \frac{V_\infty t}{a}$ и сохраняя при этом прежние обозначения, запишем:

$$\begin{aligned}
&\ddot{u}_{kl} + (a_{10}C_{11}^* + a_{11}C^*)u_{kl} + (a_{12}C_{12}^* + a_{13}C^*)v_{kl} + \\
&+ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \left[(a_{16}C_{11}^* + a_{17}C^*)\Delta_{1klnmir} - (a_{18}C_{12}^* + a_{19}C^*)\Delta_{2klnmir} \right] w_{nm} w_{ir} = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&\ddot{v}_{kl} + (a_{20}C_{22}^* + a_{21}C^*)v_{kl} + (a_{22}C_{21}^* + a_{23}C^*)u_{kl} + \\
&+ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \left[(a_{26}C_{22}^* + a_{27}C^*)\Delta_{3klnmir} - (a_{28}C_{21}^* + a_{29}C^*)\Delta_{4klnmir} \right] w_{nm} w_{ir} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{w}_{kl} + M\dot{w}_{kl} + (a_{30}C_{11}^* + a_{31}C_{12}^* + a_{32}C_{22}^* + a_{33}C^*)w_{kl} + \\
&+ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M b_{2klnmir} C_{12}^* w_{nm} w_{ir} + \\
&+ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M w_{nm} \left\{ (d_{1klnmir} C_{11}^* + d_{2klnmir} C_{21}^* + d_{3klnmir} C^*)u_{ir} + (d_{4klnmir} C_{12}^* + \right. \\
&+ d_{5klnmir} C_{22}^* + d_{6klnmir} C^*)v_{ir} + (d_{7klnmir} C_{11}^* + d_{8klnmir} C_{12}^* + d_{9klnmir} C_{22}^*)w_{ir} \left. \right\} + \\
&+ \aleph \lambda M_p \left(2\lambda_1 M^* \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} w_{nl} + \frac{\aleph+1}{4} M^{*2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \Gamma_{klnmir} w_{nm} w_{ir} \right) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
a_{10} &= \pi^2 k^2 \Delta; \quad a_{11} = \pi^2 l^2 \lambda^2 g; \quad a_{12} = \pi^2 kl \lambda \Delta; \quad a_{13} = \pi^2 kl \lambda g \\
a_{16} &= \pi n i^2 \Delta / \lambda_1; \quad a_{17} = \pi n r^2 \lambda^2 g / \lambda_1; \quad a_{18} = \pi m i r \lambda^2 \Delta / \lambda_1 \\
a_{19} &= \pi m i r \lambda^2 g / \lambda_1; \quad a_{20} = \pi^2 \lambda^2 l^2 / \Delta; \quad a_{21} = \pi^2 k^2 g; \quad a_{22} = \pi^2 \lambda kl / \Delta \\
a_{23} &= \pi^2 kl \lambda g; \quad a_{26} = \pi \lambda^3 r^2 m / (\Delta \lambda_1); \quad a_{27} = \pi m i^2 \lambda g / \lambda_1 \\
a_{28} &= \pi \lambda n i r / (\Delta \lambda_1); \quad a_{29} = \pi n i r \lambda g / \lambda_1 \\
a_{30} &= \frac{\pi^4 k^4 \Delta}{12 \lambda_1^2}; \quad a_{31} = \frac{\lambda^4 \pi^4 \Delta}{6 \lambda_1^2}; \quad a_{33} = \frac{\lambda^4 \pi^4 g}{3 \lambda_1^2}; \quad a_{32} = \frac{1}{\Delta} \frac{\lambda^4 \pi^4 l^4}{12 \lambda_1^2} \\
d_{1klnmir} &= \lambda_1 n i \Delta \pi (n \Delta_{7klnmir} + i \Delta_{5klnmir}); \quad d_{5klnmir} = \lambda^2 m i (r \Delta_{6klnmir} - \\
&- m \Delta_{7klnmir}) / (\Delta \lambda_1); \quad d_{2klnmir} = \beta_1 n \Delta k_x (i \Delta_{5klnmir} - n \Delta_{7klnmir}) \\
d_{3klnmir} &= r \lambda^2 \Delta \pi (i m \Delta_{6klnmir} + n r \Delta_{5klnmir} - 2 n r \Delta_{8klnmir}) / \lambda_1; \quad d_{8klnmir} = \lambda^2 m r \pi \times \\
&\times (\lambda r \Delta_{6klnmir} - m \Delta_{7klnmir}) / (\Delta \lambda_1); \quad d_{9klnmir} = m \lambda^2 (\lambda_1 r k_y \Delta_{6klnmir} - m \beta_1 k_x \Delta_{7klnmir}) / \Delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{6klmnr} &= (-nmrg\pi\lambda\Delta_{8klmnr}(\lambda+1) + mir\pi g\lambda^2\Delta_{6klmnr} + nr^2\pi g\lambda^2\Delta_{5klmnr})/\lambda_1 \\
d_{7klmnr} &= (-nmig\pi\lambda\Delta_{8klmnr}(\lambda+1) + mi^2\pi g\lambda\Delta_{6klmnr} + nir\pi g\lambda\Delta_{5klmnr})/\lambda_1 \\
d_{4klmnr} &= n\beta_1 k_y \Delta(i\Delta_{5klmnr} - n\Delta_{7klmnr}) + m\lambda^2 k_x (r\beta_1 \Delta_{6klmnr} - m\Delta_{7klmnr} / \lambda_1) / \Delta \\
C_{11}^* &= \frac{1-R_{11}^*}{1-\mu_1\mu_2}; \quad C_{12}^* = \frac{\mu_2(1-R_{12}^*)}{1-\mu_1\mu_2}; \quad C_{21}^* = \frac{\mu_1(1-R_{21}^*)}{1-\mu_1\mu_2} \\
C_{22}^* &= \frac{1-R_{12}^*}{1-\mu_1\mu_2}; \quad C^* = 1-R^*; \quad \Delta = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}; \quad g = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}
\end{aligned}$$

Требуется найти критическую скорость флаттера $V_{кр}$ [5, 6] из решения системы ИДУ (5)-(7), удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(0) &= u_{0nm}, \quad \dot{u}_{nm}(0) = \dot{u}_{0nm}, \quad v_{nm}(0) = v_{0nm}, \quad \dot{v}_{nm}(0) = \dot{v}_{0nm}, \\
w_{nm}(0) &= w_{0nm}, \quad \dot{w}_{nm}(0) = \dot{w}_{0nm}
\end{aligned}$$

Для решения задачи нелинейного флаттера вязкоупругих ортотропных пластинок, описываемой системой ИДУ (5)-(7), используем численный метод, основанный на применении квадратурных формул [7].

Интегрируя систему (5)-(7) два раза по t , запишем её в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключим слабо-сингулярные особенности интегрального оператора R^* . Затем, полагая $t = t_i$, $t_i = i\Delta t$, $i = 1, 2, \dots$ ($\Delta t = \text{const}$) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления $u_{ikl} = u_{kl}(t_i)$, $v_{ikl} = v_{kl}(t_i)$ и $w_{ikl} = w_{kl}(t_i)$, получим следующие рекуррентные формулы для ядра Колтунова – Ржаницына:

$$\begin{aligned}
u_{pkl} &= u_{0kl} + \dot{u}_{0kl} t_p - \sum_{j=0}^{p-1} A_j(t_p - t_j) \left\{ a_{10} \left(u_{jkl} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^j B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) u_{j-skl} \right) + \right. \\
&+ \frac{a_{11}}{\mu_{12}} \left(u_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-skl} \right) + \frac{a_{13}}{\mu_{12}} \left(v_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl} \right) + \\
&+ a_{12} \mu_2 \left(v_{jkl} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^j B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) v_{j-skl} \right) + \\
&+ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \left[\Delta_{1klmnr} a_{16} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^j B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) + \right. \\
&+ \Delta_{1klmnr} \frac{a_{17}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
&- \Delta_{2klmnr} a_{18} \mu_2 \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^j B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
&- \left. \left. \Delta_{2klmnr} \frac{a_{19}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) \right] \right\} \mu_{12} = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{pkl} = & v_{0kl} + \dot{v}_{0kl} t_p - \sum_{j=0}^{p-1} A_j (t_p - t_j) \left\{ a_{20} \left(v_{jkl} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^j B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) v_{j-skl} \right) + \right. \\
& + \frac{a_{21}}{\mu_{12}} a_{21} \left(v_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl} \right) + \\
& + \frac{a_{23}}{\mu_{12}} \left(u_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-skl} \right) + \\
& + a_{22} \mu_1 \left(u_{jkl} - \frac{A_{21}}{\alpha_{21}} \sum_{s=0}^j B_s^{(21)} \exp(-\beta_{21} t_s) u_{j-skl} \right) + \\
& + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \left[\Delta_{3klmnr} a_{26} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^j B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) + \right. \\
& + \Delta_{3klmnr} \frac{a_{27}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
& - \Delta_{4klmnr} a_{28} \mu_1 \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{21}}{\alpha_{21}} \sum_{s=0}^j B_s^{(21)} \exp(-\beta_{21} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
& \left. - \Delta_{4klmnr} \frac{a_{29}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) \right] \} \mu_{12} = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
w_{pkl} = & \frac{\mu_{12}}{1 + A_p M_\lambda} \left\{ w_{0kl} + \left(\dot{w}_{0kl} + M_\lambda w_{0kl} \right) t_p - \sum_{j=0}^{p-1} A_j \left(M_p w_{jkl} - \right. \right. \\
& - (t_p - t_j) \left[\frac{\aleph \lambda M_p}{\mu_{12}} \left(2\lambda_1 M^* \sum_{n=1}^N \gamma_{kn} w_{jnl} + \frac{\aleph + 1}{4} M^{*2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \Gamma_{klnmir} w_{jnm} w_{jir} \right) + \right. \\
& + a_{30} \left(w_{jkl} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^j B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) w_{j-skl} \right) + \\
& + a_{31} \mu_2 \left(w_{jkl} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^j B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-skl} \right) + \\
& + a_{32} \left(w_{jkl} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^j B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) w_{j-skl} \right) + \\
& + \frac{a_{33}}{\mu_{12}} \left(w_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-skl} \right) + \\
& \left. + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \mu_2 b_{2klmnr} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^j B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) + \right.
\end{aligned}$$

**Зависимость критической скорости флаттера от
физико-механических и геометрических параметров пластинки**

Таблица 1

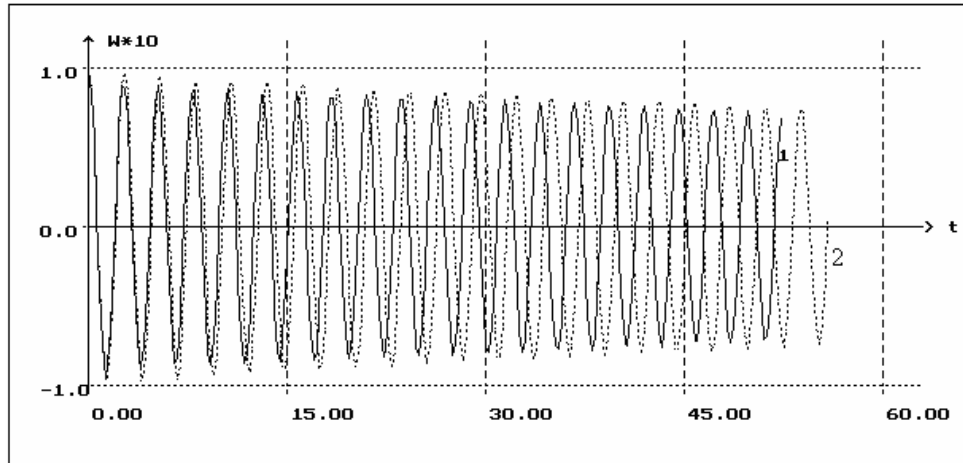
Δ	g	μ_1	μ_2	λ	λ_1	материал панели	$V_{кр}$
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,5	50	вязкоупругий	980
4,8482	0,0226	0,26	0,017				892
3,0976	0,1549	0,02	0,32				615
2,2761	0,1398	0,15	0,01963				463
2,1467	0,1356	0,13	0,023				440
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,1	50	вязкоупругий	532
				2,3			734
				2,6			1124
				2,8			1433
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,5	40	вязкоупругий	1022
					45		725
					50		532
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,5	50	вязкоупругий	985
							1062
							1341
2,2761	0,1398	0,15	0,01963	2,5	50	упругий	625
						вязкоупругий	463

Исследовалось влияние параметра λ (отношение длины стороны a к b) на критическую скорость флаттера вязкоупругих ортотропных пластин, материал которых относится к стеклопластикам марки 1. С ростом параметра λ увеличивается протяженность пластины в направлении течения и происходит сближение удлиненных краев пластины. Последнее способствует повышению относительной жесткости и росту критической скорости, которое можно проследить по табл. 1. При $\lambda = 2,1$ эта скорость равна 532м/с. С увеличением параметра λ до 2,8, критическая скорость возрастает в 2,69 раза.

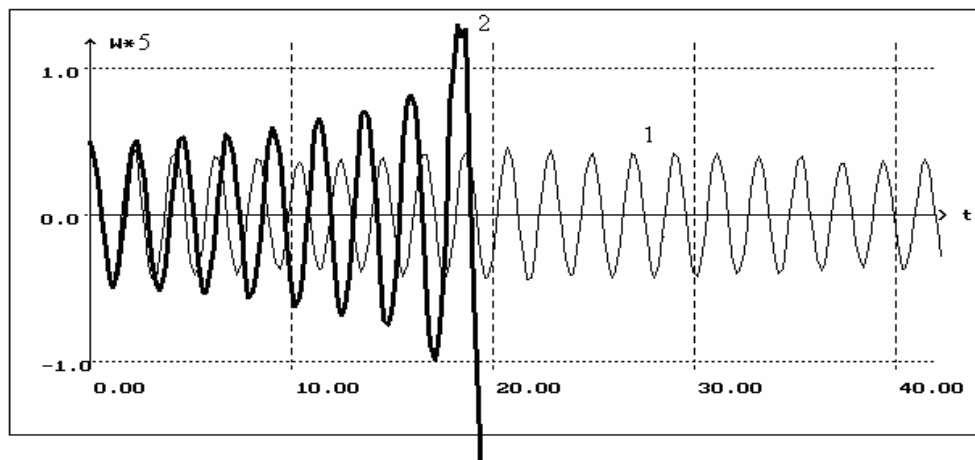
Далее исследовано влияние параметра относительной толщины λ_1 (отношение стороны a к толщине h пластинки) на критическую скорость флаттера. Для $\lambda_1 = 40, 45$ и 50 значения $V_{кр}$ соответственно равны 1022, 725 и 532, то есть с уменьшением толщины стенок пластинки (с увеличением параметра λ_1) критическая скорость флаттера уменьшается.

На фиг. 1 изучено влияние на прогиб свойств материала вязкоупругой ортотропной пластины при числах Маха $M^*=2,1$. При расчете использованы следующие данные: $\Delta = 2,1467$; $g = 0,1356$; $\mu_1 = 0,13$; $\mu_2 = 0,023$ (кривая 1); $\Delta = 1,2389$; $g = 0,1272$; $\mu_1 = 0,142$; $\mu_2 = 0,0925$ (кривая 2); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $A_{11} = 0,12$; $\alpha_{11} = 0,2$; $\beta_{11} = 0,08$; $A_{12} = 0,001$; $A_{21} = 0,001$; $\alpha_{12} = 0,02$; $\alpha_{21} = 0,02$; $\beta_{12} = 0,005$; $\beta_{21} = 0,005$; $A_{22} = 0,15$; $\alpha_{22} = 0,32$; $\beta_{22} = 0,5$; $\lambda_1 = 25$, $\lambda = 1,9$. Из этих кривых видно, что характеристики материала пластины сильно влияют на частоту колебаний.

Исследовано влияние вязкоупругих свойств материала на колебательный процесс пластины (фиг.2). С учетом вязкости амплитуда колебаний быстро возрастает, т.е. скорость потока является критической.



Фиг. 1. $\Delta = 2,1467$; $g = 0,1356$; $\mu_1 = 0,13$; $\mu_2 = 0,023$ (1); $\Delta = 1,2389$; $g = 0,1272$; $\mu_1 = 0,142$; $\mu_2 = 0,0925$ (2); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $A_{11} = 0,12$; $\alpha_{11} = 0,2$; $\beta_{11} = 0,08$; $A_{12} = A_{21} = 0,001$; $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,02$; $\beta_{12} = \beta_{21} = 0,005$; $A_{22} = 0,15$; $\alpha_{22} = 0,32$; $\beta_{22} = 0,5$; $\lambda_1 = 25$, $\lambda = 1,9$; $V = 717$ м/с.

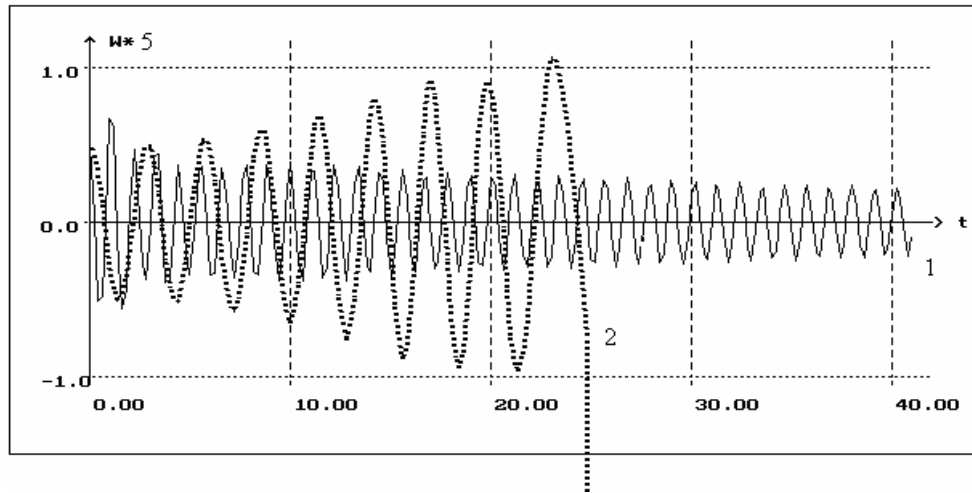


Фиг. 2. Упругий (1); вязкоупругий (2) $\lambda = 2,5$; $V = 528$ м/с; $\lambda_1 = 25$;

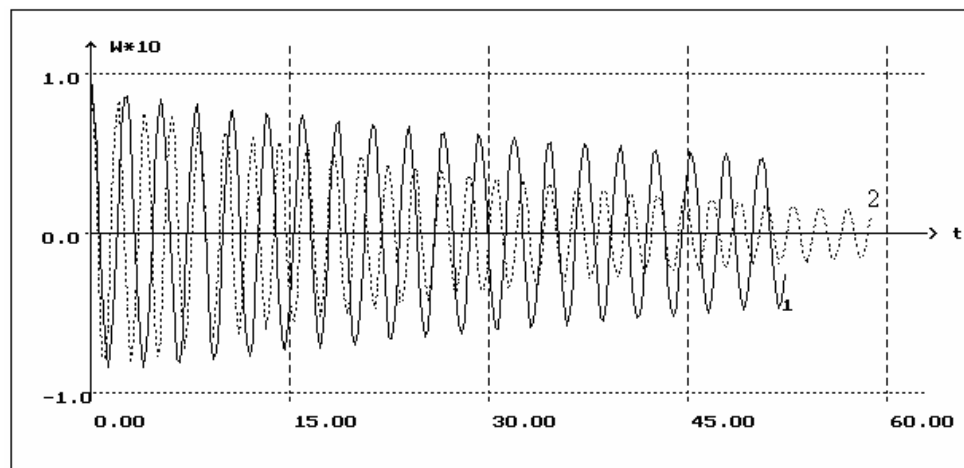
$$\Delta = 2,1; g = 0,01; \mu_1 = 0,32; \mu_2 = 0,02.$$

Аналогично, на фиг. 3 представлены результаты влияния вязкоупругих свойств пластины. Обе кривые построены в вязкоупругой постановке. Однако, значение вязкости для первой кривой меньше, чем для второй. Поэтому амплитуда колебаний для второй кривой быстрее увеличивается по сравнению с первой. Для второй кривой скорость потока является критической.

На фиг. 4 представлено изменение прогиба w в зависимости от времени t для вязкоупругой пластины в различных числах параметра удлинения λ (сплошная линия для $\lambda = 1,1$ (1); штриховая линия для $\lambda = 1,8$ (2)).

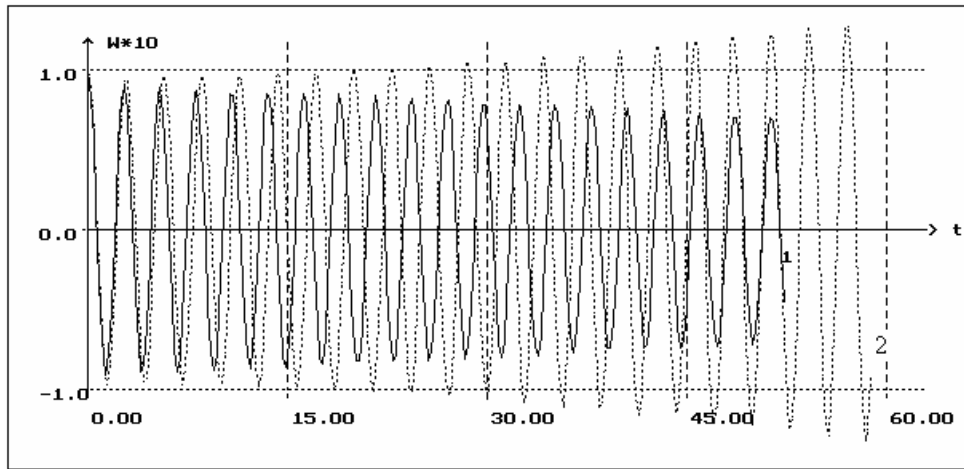


Фиг.3. $A_{11}=0,02$; $A_{12}=A_{21}=0,0001$; $A_{22}=0,01$; $A=0,021$ (1); $A_{11}=0,2$; $A_{12}=A_{21}=0,001$; $A_{22}=0,1$; $A=0,21$ (2); $\alpha_{11}=0,2$; $\beta_{11}=0,08$; $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0,02$; $\beta_{12}=\beta_{21}=0,005$; $\alpha_{22}=0,32$; $\beta_{22}=0,5$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $\lambda=1,5$; $\Delta=2,1467$; $g=0,1356$; $\mu_1=0,13$; $\mu_2=0,023$.

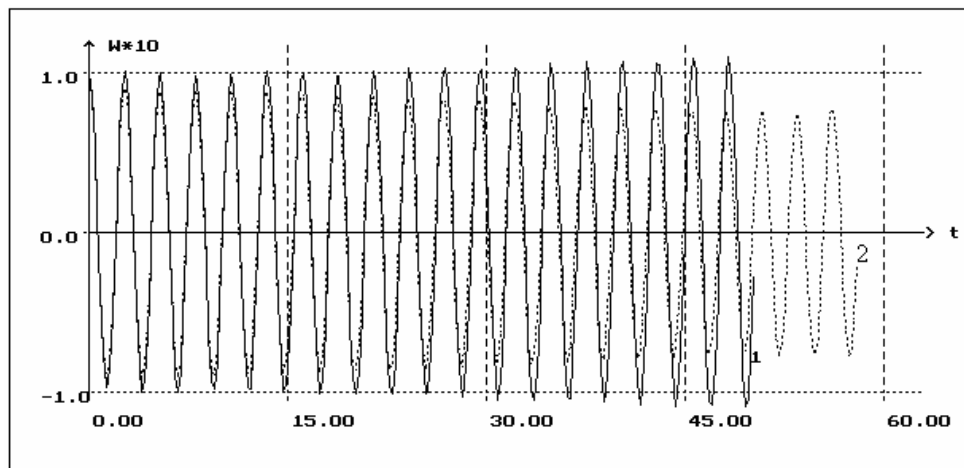


Фиг. 4. $\lambda=1,1$ (1); $\lambda=1,8$ (2); $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $A_{11}=0,12$; $\alpha_{11}=0,2$; $\beta_{11}=0,08$; $A_{12}=A_{21}=0,12$; $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0,02$; $\beta_{12}=\beta_{21}=0,005$; $A_{22}=0,15$; $\alpha_{22}=0,32$; $\beta_{22}=0,5$; $\Delta=2,1467$; $g=0,1356$; $\mu_1=0,13$; $\mu_2=0,023$; $V=547$ м/с.

Как видно из фиг.4, расхождение в результатах, полученных по различным числам параметра удлинения λ , как и ожидалось, наблюдается с начального времени. При расчетах использованы следующие реологические параметры: $A_{11}=0,12$; $\alpha_{11}=0,2$; $\beta_{11}=0,08$; $A_{12}=0,12$; $A_{21}=0,12$; $\alpha_{12}=0,02$; $\alpha_{21}=0,02$; $\beta_{12}=0,005$; $\beta_{21}=0,005$; $A_{22}=0,15$; $\alpha_{22}=0,32$; $\beta_{22}=0,5$ и материалы со следующими свойствами: $\Delta=2,1467$; $g=0,1356$; $\mu_1=0,13$; $\mu_2=0,023$.



Фиг.5. $\lambda_1 = 20$ (1); $\lambda_1 = 70$ (2); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $A_{11} = 0,12$; $\alpha_{11} = 0,2$; $\beta_{11} = 0,08$; $A_{12} = A_{21} = 0,012$; $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,02$; $\beta_{12} = \beta_{21} = 0,005$; $A_{22} = 0,15$; $\alpha_{22} = 0,32$; $\beta_{22} = 0,5$; $\Delta = 2,1467$; $g = 0,1356$; $\mu_1 = 0,13$; $\mu_2 = 0,023$.



Фиг. 6. $A = 0,01$; $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,05$ (1); $A_{11} = 0,12$; $\alpha_{11} = 0,2$; $\beta_{11} = 0,01$; $A_{12} = A_{21} = 0,001$; $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,02$; $\beta_{12} = \beta_{21} = 0,03$; $A_{22} = 0,2$; $\alpha_{22} = 0,4$; $\beta_{22} = 0,08$; $A = 0,01$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$ (2); $\lambda = 1,8$; $\Delta = 2,1$; $g = 0,001$; $\mu_1 = 0,32$; $\mu_2 = 0,01$; $\lambda_1 = 25$; $V = 638 \text{ м/с}$.

Изучено влияние относительной толщины λ_1 на колебания пластины (фиг.5). С уменьшением толщины пластины (с ростом параметра λ_1) амплитуда колебаний быстро возрастает и движение будет флаттерным. Уменьшение параметра λ_1 дает возможность значительно повысить устойчивость пластины.

На фиг. 6 исследовано влияние свойства материала пластины. Пластины имеют следующие геометрические параметры: $\lambda = 1,8$; $\lambda_1 = 25$ и выполнены из материала со следующими свойствами: $\Delta = 1$; $\mu = 0,32$; $A = 0,01$; $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,05$ (кривая 1);

$A_{11}=0,12$; $\alpha_{11}=0,2$; $\beta_{11}=0,01$; $A_{12}=0,001$; $A_{21}=0,001$; $\alpha_{12}=0,02$;
 $\alpha_{21}=0,02$; $\beta_{12}=0,03$; $\beta_{21}=0,03$; $A_{22}=0,2$; $\alpha_{22}=0,4$; $\beta_{22}=0,08$; $A=0,01$;
 $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$ (кривая 2). Из графика видно, что для вязкоупругой изотропной пластины амплитуда колебаний медленно возрастает, а для ортотропных – со временем затухает. Это означает, что значение критической скорости флаттера для вязкоупругой изотропной пластины относительно меньше, чем для соответствующей ортотропной (при одинаковых геометрических размерах).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №4. С.91-96.
2. Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости трехслойной ортотропной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1961. Т. XVI. №5. С.21-30.
3. Jehad F.A., Ibrahim R.A., Ronald F.G. Nonlinear Flutter of Orthotropic Composite panel Under Aerodynamic Heating // J. AIAA. 1993. Vol.31. №8. P. 1256–1268.
4. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикладная математика и механика. 1956. Т. XX. Вып. 6. С. 733–755.
5. Худаяров Б.А. Численное решение задачи о флаттере вязкоупругих трехслойных пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №1. С. 59-62.
6. Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А. Исследование влияния вязкоупругого свойства материала конструкций летательного аппарата на критическое время и критические скорости флаттера // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. №1. С. 75–82.
7. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. №5. С. 867-871.
8. Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. // Intern. J. Solids Structures. 1969, V.5, №9, p.965-989.

Сведения об авторе:

Худаяров Бахтияр Алимович – к.ф.-м.н., доцент каф. «Высшей математики»

Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

E-mail: bakht-Flpo@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.04.2009

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПОД
ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКИ

ЦАТУРЯН А. Е

Ключевые слова: стержень, сосредоточенная масса, дивергентная неустойчивость, флаттер.
Keywords: beam, point mass, divergent instability, flutter.

Ծառուրյան Ա.Ե.

Չողի լայնական տատանումները հետևող ուժի ազդեցության տակ

Դիտարկվում է ձողի կայունության խնդիր երկու տարբեր եզրային պայմաններով: Գտնված են ուժի կրիտիկական արժեքներ, որոնց դեպքում առկա են դիվերգենտ և ֆլատտերային անկայունություններ:

Tsaturyan A.E.

Transverse Vibration of Vertical Beam Under Action of Follower Type Load

In this work the problem of stability of disturbed movement beam with point mass at two different boundary condition is considered. Found critical value of force when taked place divergent and flutter instability.

В работе рассматривается задача устойчивости возмущенного движения стержня при двух различных граничных условиях. Найден критические значения сил, при которых имеют место дивергентная и флаттерная неустойчивости.

1. Пусть конец стержня $x = 0$ закреплен таким образом, что нет перемещений, а изгибающий момент пропорционален тангенсу угла наклона балки. На другом конце стержня $x = l$ изгибающий момент равен нулю и приложены следящая сжимающая нагрузка P и сосредоточенная масса m .

В предположении, что масса стержня и силы сопротивления пренебрежимо малы, уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид [1]

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

где $w(x, t)$ – прогиб стержня.

Исследуем уравнение (1.1) при следующих граничных условиях [1, 2]:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad x = l \quad (1.3)$$

В работе [1] исследована задача устойчивости стержня при $\delta = 0$, что соответствует условию жесткого защемления конца $x = 0$. Отыскивая решение задачи устойчивости (1.1)-(1.3) в виде

$$w(x, t) = f(x)e^{i\omega t} \quad (1.4)$$

приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$f'''(x) + k^2 f''(x) = 0 \quad (1.5)$$

$$f(x) = 0, \quad f'(x) - \delta f''(x) = 0, \quad x = 0$$

$$f''(x) = 0, \quad EJf'''(x) = -m\omega^2 f(x), \quad x = l \quad (1.6)$$

$$\text{где } k^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Подставляя общее решение уравнения (1.5)

$$f(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4$$

в граничные условия (1.6), получаем следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $C_i \neq 0, i = \overline{1,4}$

$$C_2 + C_4 = 0$$

$$C_1 k + \delta k^2 C_2 + C_3 = 0 \quad (1.7)$$

$$C_1 k^2 \sin kl + C_2 k^2 \cos kl = 0$$

$$C_1 (\omega^2 m \sin kl - EJk^3 \cos kl) +$$

$$+ C_2 (EJk^3 \sin kl + \omega^2 m \cos kl - m\omega^2) + C_3 ml\omega^2 = 0$$

Чтобы иметь ненулевые коэффициенты C_i , приравняем нулю детерминант системы (1.7)

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 \sin kl - EJk^2 \cos kl & EJk^2 \sin kl + m\omega^2 \cos kl - m\omega^2 & m\omega^2 l \\ -k^2 \sin kl & -k^2 \cos kl & 0 \\ k & \delta k^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

откуда получаем следующее выражение для частот собственных колебаний стержня:

$$\omega^2 = \frac{EJ}{ml^3} \frac{\alpha^3}{\sin \alpha (1 + \delta \alpha^2 / l) - \alpha \cos \alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (1.8)$$

где $\alpha = kl$.

Переходя к пределу при $a \rightarrow 0$ ($P \rightarrow 0$) в выражении (1.8), в принятом приближении получаем

$$\omega^2 = \frac{3}{1 + 3\delta/l} \frac{EJ}{ml^3}, \quad \alpha = 0 \quad (1.9)$$

Из выражения (1.9) очевидно, что $\omega^2 > 0$ при всех δ . Иными словами, при отсутствии следящей силы P возмущенное движение стержня устойчиво при всех δ .

Обращая знаменатель (1.8) в нуль

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha \cdot (1 + \alpha^2 \delta / l)^{-1} \quad (1.10)$$

находим критические значения силы P , приводящие к флаттерной неустойчивости.

В табл. 1 приведены некоторые критические значения P для соответствующих значений δ/l .

Таблица 1

δ/l	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
α	4.49	4.13	3.9	3.76	3.66	3.59	3.54	3.49	3.46	3.42	3.4
α^2	20.16	17.05	15.21	14.13	13.39	12.88	12.53	12.18	11.97	11.69	11.56

При $\delta \rightarrow 0$ уравнение (1.8) преобразуется к виду

$$\omega^2 = \frac{EJ}{ml^2} \frac{\alpha^2}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha},$$

совпадающему с выражением для частот собственных колебаний консоли, нагруженной следящей силой и при наличии сосредоточенной массы на свободном конце [1].

В случае $\delta \rightarrow \infty$ из (1.10) следует, что $\omega^2 \rightarrow 0$. Это означает, что имеем шарнирно закрепленный стержень. В этом случае ($\omega^2 = 0$) имеет место дивергентная неустойчивость ($\omega^2 = 0$). Критическая сила для балки с распределённой массой, найденная Бекком, равна $P_{кр} = 20.05 \times \frac{EJ}{l^2}$, которая получается при $\delta/l = 3,14$, поскольку

$$\frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{20.05} - \tan \sqrt{20.05}}{20.05 \tan \sqrt{20.05}} = 3.1428$$

Из соотношения (1.10) следует, что при увеличении величины δ значение $P_{кр}$ уменьшается, т.е. при $\delta \gg 0$ понадобится все меньшее значение $P_{кр}$, при котором система выходит из равновесного состояния.

2. Теперь рассмотрим задачу устойчивости стержня с упругим закреплением на конце $x = 0$ в предположении, что на свободном конце $x = l$ наряду с приложенной следящей силой P имеется, также, сосредоточенный инерционный момент I . При этом, уравнение колебаний возмущенного движения стержня и граничные условия будут описываться следующими соотношениями [1-3]:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0 \quad (2.2)$$

$$EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad x = l \quad (2.3)$$

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче (1.1)-(1.3), нетрудно показать, что и в этом случае упругое закрепление приводит к уменьшению значения критической силы $P_{кр}$.

В самом деле, приравнявая детерминант системы алгебраических уравнений нулю

$$\begin{vmatrix} k\gamma\omega^2 \cos kl + k^2 \sin kl & k^2 \cos kl - \gamma\omega^2 k \sin kl & \gamma\omega^2 \\ -k^3 \cos kl & k^3 \sin kl & 0 \\ k & \delta k^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

получаем выражение для квадрата частот собственных колебаний стержня

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\gamma(l \sin \alpha + \delta \alpha \cos \alpha)} \quad (2.4)$$

где $\alpha = kl$, $\gamma = \frac{I}{EJ}$.

Легко показать, что предел квадрата частоты ω^2 при $\alpha \rightarrow 0$ равен

$$\omega^2 = \frac{EJ}{l(l + \delta)} \quad (2.5)$$

откуда очевидно, что при всех значениях δ возмущенное движение стержня устойчиво. Критические значения силы P определяются из решения уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha \cdot \delta / l \quad (2.6)$$

которые приведены в табл. 2 при соответствующих значениях δ/l .

Таблица 2

δ/l	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
α	3.14	2.86	2.65	2.5	2.38	2.29	2.22	2.16	2.11	2.06	2.03
α^2	9.86	8.18	7.02	6.2	5.66	5.24	4.93	4.67	4.45	4.24	4.12

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 337с.
2. Чжунь (K.R. Chun) Собственные колебания балки с упругим закреплением на одном конце и другим свободным концом. //Прикладная механика. (Тр.америк.общ. инженеров-механиков) 1972. Мир, № 4. С.298-299.
3. Ржаницын А.Р. Консольный стержень, нагруженный следящей силой. //Изв. НАН Армении. Механика. 1985. Т.38. №5. С.33-44.

Сведения об авторе:

Цатурян Ануш Ерджаниковна – мл. н. сотр. Института механики НАН Армении
E-mail: anntsaturyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 13.11.2008

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Գրիգորյան Սամվել Սամվելի (Ծննդյան 80-ամյակի առթիվ).....	3
Գասպարյան Ա.Վ., Մխիթարյան Ս.Ս. Հակահարթ դեֆորմացիայի դեպքում կամայական վերջավոր թվով առաձգական շերտերից բաղկացած փաթեթի տեսքով կոմպոզիտի լարվածային վիճակի մասին	10
Մանուկյան Է.Ա., Մկրտչյան Մ.Ս. Միացման գծի վրա ճաքեր և բարակապատ բացարձակ կոշտ ներդրակների համակարգ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական շերտի հակահարթ խնդրի մասին	21
Դանոյան Զ.Ն., Աթոյան Լ.Հ. Սպինային ալիքների անդրադարձումը ֆերոմագնիսական միջավայրի եզրից ընդհանրացված եզրային պայմանների դեպքում.....	34
Սարգսյան Ս.Հ. Բարակ թաղանթների մագնիսաջերմաառաձգականության ընդհանուր տեսությունը	40
Գրիգորյան Է.Խ., Մինանյան Ս.Ս. Սահքի հարթ էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա անվերջ մետաղական շերտով պլեգոէլեկտրական տարածությունում	56
Խուդայարով Բ.Ա. Առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ սալերի ֆլատերի հետազոտումը	67
Ծատուրյան Ա.Ե. Ձողի լայնական տատանումները հետևող ուժի ազդեցության տակ	78

СОДЕРЖАНИЕ

Григорян Самвел Самвелович – К 80-летию со дня рождения	3
Гаспарян А. В., Мхитарян С. М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации оболочек	10
Манукян Э.А., Мкртчян М.С. Об антиплоской задаче кусочно-однородного упругого слоя, содержащего на линии спая систему щелей и абсолютно жёстких тонких включений	21
Даноян З. Н., Атоян Л. А. Отражение спиновых волн от границы ферромагнитной среды при обобщённых граничных условиях.....	34
Саркисян С. О. Общая теория магнитотермоупругости тонких оболочек	40
Григорян Э.Х., Синанян С.С. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем	56
Худаяров Б.А. Исследование флаттера вязкоупругих ортотропных пластин	67
Цатурян А. Е Поперечные колебания вертикального стержня под воздействием следящей нагрузки	78

CONTENTS

Grigoryan S. Samvel – 80-th Anniversary	3
Gasparyan A.V, Mkhitaryan S.M. On Stressed State of a Composite in Form of a Package Composed of an Arbitrary Number of Elastic Layers under Antiplane Deformation	10
Manukyan E.A., Mkrtychyan M.S. On Anti-Plane Problem of Piecewise Homogeneous Elastic Layer Containing the System of Crack on Junction Line and Absolutely Rigid Thin Inclusions	21
Danoyan Z. N., Atoyan L. H. Reflection of Spin Waves From the Boundary of Ferromagnetic Medium under Generalized Boundary Conditions.....	34
Sargsyan S. H. The General Theory of Magnetothermoelasticity of Thin Shells	40
Grigoryan E.Kh., Sinanyan S.S. Diffraction of the plane shift electroelastic wave on the semi-infinite metal layer in piezoelectric space with infinite metal layer	56
Khudayarov B. A. The Investigation of Flutter of Viscoelastic of Orthotropic Plates	67
Tsaturyan A.E. Transverse Vibration of Vertical Beam Under Action of Follower Type Load	78