ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2010

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №1, 2010 Механика

АГАЛОВЯН ЛЕНСЕР АБГАРОВИЧ
(к семидесятилетию со дня рождения)

Исполнилось 70 лет со дня рождения выдающегося ученого-механика, известного общественного деятеля, заведующего отделом „Механика тонкостенных систем" и советника директора Института механики НАН РА, академика Национальной Академии Наук Республики Армения, доктора физико-математических наук, профессора Ленсера Абгаровича Агаловяна.

Л.А.Агаловян родился 3 февраля 1940 года в селе Колатак Мартакертского района Нагорного Карабаха в семье учителей. В 1961 году Л.А.Агаловян с отличием окончил механико-математический факультет Ереванского государственного университета по специальности механика. После окончания университета был оставлен на работу в качестве ассистента кафедры теоретической механики. В 1966 году успешной защитой кандидатской диссертации завершил очную аспирантуру ЕГУ. Трудовую деятельность в качестве старшего преподавателя продолжил на кафедре высшей математики ЕГУ. С 1969-ого года отдает предпочтение научной деятельности и переходит на работу в Институт механики НАН РА в качестве старшего научного сотрудника. В 1980 году в Казанском государственном университете защищает докторскую диссертацию и ему присуждается ученая степень доктора физико-математических наук. В 1987 г. Л.А.Агаловян избирается на должность директора Института механики НАН РА и, неоднократно переизбираясь, почти 20 лет работает на этом посту.

В 1996 году избирается действительным членом НАН РА.

С 2006 года по сей день Л.А.Агаловян является советником директора Института механики НАН РА и заведует отделом «Механика тонкостенных систем».

Круг научных интересов Л.А.Агаловяна достаточно широк и охватывает теорию анизотропных пластин и оболочек, смешанные краевые задачи теории упругости и вязкоупругости, неклассические статические и динамические краевые задачи тонких тел, проблемы сейсмологии и сейсмостойкого строительства, обоснование прикладных моделей оснований и фундаментов, волновые процессы, распространение волн в слоистых средах и др.

Всеобщее признание получили работы Л.А.Агаловяна, в которых, на основе уравнений трехмерной теории упругости, впервые была построена асимптотическая теория анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Эта теория положила начало широкомасштабным исследованиям напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций, находящихся в стесненных, с лицевых сторон, условиях. Такие задачи часто встречаются на практике, однако, в силу явного несоответствия гипотезам Кирхгоффа-Лява, не могут быть решены в рамках классической теории пластин и оболочек. Построенная теория позволяет четко выделить рамки применимости как классической, так и уточненных теорий пластин и оболочек, построенных на основе гипотез, а также широко используемых для расчета упругих оснований-фундаментов моделей Винклера-Фукса, Пастернака, Клейна, вычислить коэффициенты постели для слоистых и неоднородных оснований.

Л.А.Агаловян является одним из первоисследователей задач погранслоя для балок, пластин и оболочек. Полученное математически точное решение для погранслоя прямоугольника позволило ему установить связь между погранслоем и принципом Сен-Венана, доказать справедливость этого принципа в случае первой краевой задачи теории упругости и объяснить неприменимость его ко второй и смешанной граничным задачам.

Показана эффективность асимптотического метода при решении динамических задач для анизотропных и слоистых тел. Найдены частоты собственных колебаний слоистых пакетов в виде полос и пластин, содержащих сжимаемые и несжимаемые, а также вязкоупругие слои. Намечены пути использования этих результатов в сейсмостойком строительстве, в частности, показано, что при надлежащем выборе параметров основания можно максимально разнести частоты собственных колебаний и сейсмических волн и, тем самым, снизить риск разрушения сооружения при землетрясении.

Основные научные достижения Л.А.Агаловяна обобщены в двух объемных монографиях (Л.А.Агаловян «Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек». М. Наука, 1997. 415 с. и Л.А.Агаловян, Р.С.Геворгян «Неклассические краевые задачи анизотропных балок, пластин и оболочек». Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.) и более чем 150 научных статьях.

Велика заслуга Л.А.Агаловяна и в деле подготовки высококвалифицированных научных кадров. Под его руководством 13 человек защитили кандидатские диссертации, двое из них защитили и докторские диссертации.

Научные заслуги Л.А.Агаловяна признаны мировой научной общественностью. Он является членом Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, Европейской Ассоциации по контролю сооружений, Президиума Национального комитета Армении по теоретической и прикладной механике, бюро отделения математических и технических наук НАН РА, редколлегии журнала «Известия НАН РА, Механика», международного редакционного совета журнала «Прикладная механика» (Украина). Председатель Специализированного Совета по защитам докторских диссертаций по специальностям «Механика деформируемого твердого тела», «Теоретическая механика» со дня его создания (1990 г.).

За большой вклад в развитие новых научных направлений в механике, решение актуальных проблем механики и прикладной математики, большую научно-организационную работу Л.А.Агаловян награжден грамотами НАН Армении «Говестагир» и «Вастакагир». В 1995 году Ассоциация армянских инженеров и ученых США присудила ему премию им. Виктора Амбарцумяна, в 2009 г. Американский биографический институт вручил Л.А.Агаловяну «Gold Medal For Armenia», а Международным биографическим центром признан одним из «Top 100 Scientists-2009».

Редакция журнала Известия НАН Армении, Механика, научная общественность Армении поздравляют Ленсера Абгаровича Агаловяна с юбилеем и желают ему крепкого здоровья, долгих лет жизни, новых творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №1, 2010 Механика

УДК 539.3:354.1

THE ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF 3D DYNAMIC PROBLEMS FOR ORTHOTROPIC CYLINDRICAL AND TOROIDAL SHELLS

AGHALOVYAN L.A.,GEVORGYAN R.S., GHULGHAZARYAN L.G. *)

Key words: asymptotic method, elasticity, shell, vibrations, space problem.
Ключевые слова: асимптотический метод, упругость, оболочка, колебания, трехмерная задача.

Աղալովյան Լ.Ա., Գևորգյան Ռ.Ս., Ղուլղազարյան Լ.Գ.
Օրթոտրոպ գլանային և տորոիդալ թաղանթների համար եռաչափ դինամիկ խնդիրների ասիմպտոտիկ լուծումներ

Ասիմպտոտիկ եղանակը արդյունավետ է բարակապատ մարմինների (հեծաններ, սալեր, թաղանթներ) համար ինչպես ստատիկ այնպես էլ դինամիկ եռաչափ խնդիրները լուծելու համար: Աշխատանքում դիտարկվում են օրթոտրոպ թաղանթների համար հարկադրական տատանումների խնդիրները, երբ դիմային մակերևույթների վրա տրված են տարբեր դասերի եզրային պայմաններ: Ստացված են ընդհանուր ասիմպտոտիկ լուծումները և որպես կիրառություն՝ լուծումներ գլանային և տորոիդալ թաղանթների համար:

Л.А. Агаловян, Р.С. Геворкян, Л.Г. Гулгазарян
Асимптотические решения трехмерных динамических задач для ортотропных цилиндрических и тороидальных оболочек

Асимптотический метод, развитый в [1-3], эффективен при решении как статических, так и динамических трехмерных задач для тонких тел (балки, пластины, оболочки). В работе рассматриваются задачи о вынужденных колебаниях ортотропных оболочек при различных вариантах граничных условий, заданных на лицевых поверхностях оболочки. Получены общие асимптотические решения и в качестве приложений рассмотрены вынужденные колебания цилиндрических и тороидальных оболочек.

The asymptotic method of solution of singularly perturbed differential equations have been applied for solving three-dimensional dynamic problems of forced vibrations of orthotropic cylindrical and toroidal shells. The obtained generalized asymptotic solution is illustrated on solutions of particular problems.

Introduction

For the last decades for the solution of the problems of elasticity theory (static and dynamic) the asymptotic method of the solution of singularly perturbed differential equations have been successfully applied.

The asymptotic method developed in [1-3] is effective for the solution of as static as well as dynamic three-dimensional problems for thin bodies (beams, plates, shells). Here we consider the problem on forced vibrations of orthotropic shells at various variants of boundary conditions given on the facial surfaces of the shell. A general asymptotic solution is obtained. As supplements, forced vibrations of cylindrical and toroidal shells are considered.

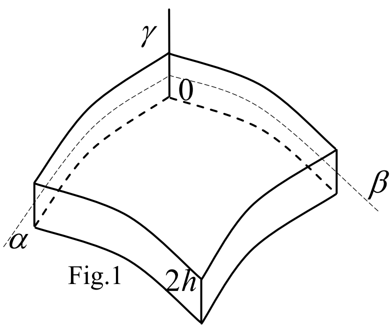


Fig.1

*) The work is reported on Final MEETING of INTAS Project «Some nonclassical problems for thin Structures», Rome, Italy, 22-23 Jan. 2009.

1. Setting of the problems and basic 3D equations and correlations of elasticity for shells

Consider forced vibrations of orthotropic shell of thickness 2h, occupying the area $D = \{\alpha,\beta,\gamma;\alpha,\beta \in D_0, -h \le \gamma \le h\}$, where D_0 is the middle surface, α,β are the curvature lines of the shell middle surface, γ is the rectilinear axis, directed perpendicularly to the middle surface (Fig. 1).

It is required to find the solutions of the three dimensional dynamic problem equations of elasticity theory in D area at the series of the boundary conditions on the facial surfaces $\gamma = \pm h$ and on the lateral surface. In order to diminish and simplify the computations we shall use the components of the nonsymmetric tensor of the stresses τ_{ij}, which are connected with the components of the symmetric tensor σ_{ij} by the formulae [1]

$$\tau_{\alpha\alpha} = \left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\sigma_{\alpha\alpha}, \quad \tau_{\alpha\beta} = \left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\sigma_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta;1,2)$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = \left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\sigma_{\alpha\gamma} \qquad (\alpha,\beta;1,2) \tag{1.1}$$

$$\tau_{\gamma\gamma} = \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\sigma_{\gamma\gamma}$$

The equations of elasticity theory will be written in the form of:
the equations of the movement

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\tau_{\alpha\alpha}\right) - k_\beta\tau_{\beta\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\tau_{\beta\alpha}\right) + k_\alpha\tau_{\alpha\beta} + \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\gamma} + \frac{2\tau_{\alpha\gamma}}{R_1} =$$

$$= \rho\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \qquad (A,B;\ \alpha,\beta;\ R_1,R_2;\ U,V)$$

$$\frac{\partial\tau_{\gamma\gamma}}{\partial\gamma} - \left(\frac{\tau_{\alpha\alpha}}{R_1} + \frac{\tau_{\beta\beta}}{R_2}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}}{\partial\beta} + k_\beta\tau_{\alpha\gamma} + k_\alpha\tau_{\beta\gamma} =$$

$$= \rho\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\tau_{\alpha\beta} = \left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\tau_{\beta\alpha} \quad \text{(the condition of symmetry)}$$

the correlations of elasticity (Hook's generalized law)

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + k_\alpha V + \frac{W}{R_1}\right) = \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{11}\tau_{\alpha\alpha} + \left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)a_{12}\tau_{\beta\beta} + a_{13}\tau_{\gamma\gamma}$$

$$(A,B;\ \alpha,\beta;\ R_1,R_2;\ U,V;\ a_{11},a_{22};\ a_{13},a_{23})$$

$$\left[1+\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\gamma^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial W}{\partial\gamma} = \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{13}\tau_{\alpha\alpha} + \left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)a_{23}\tau_{\beta\beta} + a_{33}\tau_{\gamma\gamma}$$

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial\beta} - k_\beta V\right) + \left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial\alpha} - k_\alpha U\right) = \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{66}\tau_{\alpha\beta} \tag{1.3}$$

$$\left[1+\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\gamma^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial U}{\partial\gamma}-\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{U}{R_1}+\frac{1}{A}\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{55}\tau_{\alpha\gamma}$$

$$(A,B;\quad \alpha,\beta;\quad R_1,R_2;\quad U,V;\quad a_{55},a_{44})$$

where $k_\alpha=\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}, k_\beta=\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}$ are the geodesic curvature, A,B are the coefficients of the first quadratic form, R_1,R_2 are the main radiuses of the middle surface curvature, ρ is the density, a_{ij} are constants of elasticity.

A problem is set: to find the solutions of the system of the equations (1.2), (1.3), satisfying the following boundary conditions on the facial surfaces $\gamma=\pm h$ of the shell:

$$U(-h)=u^-(\alpha,\beta)\exp(i\Omega t),\quad V(-h)=\mathrm{v}^-(\alpha,\beta)\exp(i\Omega t)$$
$$W(-h)=w^-(\alpha,\beta)\exp(i\Omega t) \tag{1.4}$$

$$\tau_{\alpha\gamma}(h)=0,\quad \tau_{\beta\gamma}(h)=0,\quad \tau_{\gamma\gamma}(h)=0 \tag{1.5}$$

or

$$U(h)=0,\quad V(h)=0,\quad W(h)=0 \tag{1.6}$$

are the boundary conditions of the first boundary problem

$$\sigma_{j\gamma}(\alpha,\beta,\pm h,t)=\pm\sigma^{\pm}_{j\gamma}(\alpha,\beta)\exp(i\Omega t);\qquad j=\alpha,\beta,\gamma \tag{1.7}$$

where Ω is the frequency of the outer forcing action.

2. The general integral of the inner problem

In order to find the solutions of the formulated problems in the equations (1.2), (1.3) we pass to dimensionless coordinates and displacements

$$\alpha=R\xi,\quad \beta=R\eta,\quad \gamma=\varepsilon R\zeta=h\zeta,\quad U=Ru,\quad V=R\mathrm{v},\quad W=Rw$$

where R is the characteristic dimension of the shell (the smallest of the radiuses of the curvature and linear dimensions of the middle surface), $\varepsilon=h/R$ is the small parameter. The solutions of the transformed system will be sought in the form of

$$Q_{\alpha\beta}=Q_{jk}(\xi,\eta,\zeta)\exp(i\Omega t)\qquad(\alpha,\beta,\gamma);\qquad j,k=1,2,3 \tag{2.1}$$

$Q_{\alpha\beta}$ is any of the sought stresses and displacements.

As a result we get a singularly perturbed by small parametre ε system

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}(B\tau_{11})-k_\beta R\tau_{22}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}(A\tau_{21})+k_\alpha R\tau_{12}+\left(\varepsilon^{-1}+r_1\zeta\right)\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\zeta}+2r_1\tau_{13}=$$
$$=-\varepsilon^{-2}\Omega_*^2u-(r_1+r_2)\varepsilon^{-1}\zeta\Omega_*^2u-r_1r_2\zeta^2\Omega_*^2u$$

$$(A,B;\quad \alpha,\beta;\quad r_1,r_2;\quad \xi,\eta;\quad u,\mathrm{v};\quad \tau_{11},\tau_{22};\quad \tau_{12},\tau_{21};\quad \tau_{13},\tau_{23})$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial\tau_{33}}{\partial\zeta}-\left(r_1\tau_{11}+r_2\tau_{22}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{23}}{\partial\eta}+k_\beta R\tau_{13}+k_\alpha R\tau_{23}=$$
$$=-\varepsilon^{-2}\Omega_*^2w-(r_1+r_2)\varepsilon^{-1}\zeta\Omega_*^2w-r_1r_2\zeta^2\Omega_*^2w \tag{2.2}$$

$$\left(1+\varepsilon r_2\zeta\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \xi}+k_\alpha R\mathrm{v}+r_1 w\right)=\left(1+\varepsilon r_1\zeta\right)a_{11}\tau_{11}+\left(1+\varepsilon r_2\zeta\right)a_{12}\tau_{22}+a_{13}\tau_{33}$$

$(A,B;\ \ \alpha,\beta;\ \ r_1,r_2;\ \ \xi,\eta;\ \ u,\mathrm{v};\ \ \tau_{11},\tau_{22};\ \ a_{11},a_{22};\ \ a_{13},a_{23})$

$$\left[\varepsilon^{-1}+\zeta(r_1+r_2)+\varepsilon\zeta^2 r_1 r_2\right]\frac{\partial w}{\partial \zeta}=\left(1+\varepsilon r_1\zeta\right)a_{13}\tau_{11}+\left(1+\varepsilon r_2\zeta\right)a_{23}\tau_{22}+a_{33}\tau_{33}$$

$$\left(1+\varepsilon r_1\zeta\right)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \eta}-k_\beta R\mathrm{v}\right)+\left(1+\varepsilon r_2\zeta\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \xi}-k_\alpha R u\right)=\left(1+\varepsilon r_1\zeta\right)a_{66}\tau_{12}$$

$$\left[\varepsilon^{-1}+\zeta(r_1+r_2)+\varepsilon\zeta^2 r_1 r_2\right]\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\left(1+\varepsilon r_2\zeta\right)r_1 u+\frac{1}{A}\left(1+\varepsilon r_2\zeta\right)\frac{\partial w}{\partial \xi}=\left(1+\varepsilon r_1\zeta\right)a_{55}\tau_{13}$$

$(A,B;\ \ r_1,r_2;\ \ \xi,\eta;\ \ u,\mathrm{v};\ \ \tau_{13},\tau_{23};\ \ a_{55},a_{44})$

$$\left(1+\varepsilon r_1\zeta\right)\tau_{12}=\left(1+\varepsilon r_2\zeta\right)\tau_{21}$$

$$r_1=\frac{R}{R_1},\ r_2=\frac{R}{R_2},\ \ \Omega_*^2=\rho h^2\Omega^2$$

The solution of such systems is combined from the solution of the inner problem (I^{int}) and the solution for the boundary layer I_b [1,4,5]

$$I=I^{\mathrm{int}}+I_b \tag{2.3}$$

The solution of inner problem I^{int} has the form

$$\tau_{jk}^{\mathrm{int}}(\xi,\eta,\zeta)=\varepsilon^{-1+s}\tau_{jk}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad j,k=1,2,3;\quad s=\overline{0,N} \tag{2.4}$$

$$\left(u^{\mathrm{int}}(\xi,\eta,\zeta),\mathrm{v}^{\mathrm{int}}(\xi,\eta,\zeta),w^{\mathrm{int}}(\xi,\eta,\zeta)\right)=\varepsilon^{s}\left(u^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\mathrm{v}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),w^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\right)$$

Substituting (2.4) into (2.2) we get a recurrent system for determining the values $\tau_{jk}^{(s)},u^{(s)},\mathrm{v}^{(s)},w^{(s)}$.

From this system the stresses tensor components can be expressed through the displacements by the formulae

$$\tau_{13}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta}-P_u^{(s-1)}\right],\quad \tau_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial \mathrm{v}^{(s)}}{\partial \zeta}-P_{\mathrm{v}}^{(s-1)}\right]$$

$$\tau_{11}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_2\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta}+\Delta_{23}P_{2\tau}^{(s-1)}+\Delta_1 P_{3\tau}^{(s-1)}-\Delta_2 P_w^{(s-1)}\right] \tag{2.5}$$

$(11,22,33;\ \ \Delta_2,\Delta_3,\Delta_{12};\ \ \Delta_{23},\Delta_1,\Delta_2;\ \ \Delta_1,\Delta_{13},\Delta_3)$

$$\tau_{12}^{(s)}=P_{1\tau}^{(s-1)},\quad \tau_{21}^{(s)}=P_{1\tau}^{(s-1)}-r_2\zeta\tau_{21}^{(s-1)}+r_1\zeta\tau_{12}^{(s-1)}$$

where

$$P_{j\tau}^{(m)}=0,\quad P_{u,\mathrm{v},w}^{(m)}\equiv 0\quad when\quad m<0$$

$$P_{1\tau}^{(s-1)}=\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \eta}-k_\beta R\mathrm{v}^{(s-1)}+r_1\zeta\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \eta}-k_\beta R\mathrm{v}^{(s-2)}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{A}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial \xi}-k_\alpha R u^{(s-1)}+r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-2)}}{\partial \xi}-k_\alpha R u^{(s-2)}\right)-r_1\zeta a_{66}\tau_{12}^{(s-1)}\right]$$

$$P_{2\tau}^{(s-1)} = \frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + k_\alpha R \mathrm{v}^{(s-1)} + r_1 w^{(s-1)} + r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \xi} + k_\alpha R \mathrm{v}^{(s-2)} + r_1 w^{(s-2)}\right) -$$

$$-r_1\zeta a_{11}\tau_{11}^{(s-1)} - r_2\zeta a_{12}\tau_{22}^{(s-1)}$$

$$(2\tau, 3\tau;\quad A, B;\quad \alpha, \beta;\quad r_1, r_2;\quad \xi, \eta;\quad u, \mathrm{v};\quad \tau_{11}, \tau_{22};\quad a_{11}, a_{22})$$

$$P_{4\tau}^{(s-1)} = r_1\tau_{11}^{(s-1)} + r_2\tau_{22}^{(s-1)} - \frac{1}{A}\frac{\partial \tau_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{B}\frac{\partial \tau_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} - k_\beta R\tau_{13}^{(s-1)} - k_\alpha R\tau_{23}^{(s-1)} - \tag{2.6}$$

$$-(r_1 + r_2)\zeta\Omega_*^2 w^{(s-1)} - r_1 r_2\zeta^2\Omega_*^2 w^{(s-2)}$$

$$P_{5\tau}^{(s-1)} = -\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(A\tau_{22}^{(s-1)}\right) + k_\alpha R\tau_{11}^{(s-1)} - \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(B\tau_{12}^{(s-1)}\right) - k_\beta R\tau_{21}^{(s-1)} - r_2\zeta\frac{\partial \tau_{23}^{(s-1)}}{\partial \zeta} -$$

$$-2r_2\tau_{23}^{(s-1)} - (r_1 + r_2)\zeta\Omega_*^2\mathrm{v}^{(s-1)} - r_1 r_2\zeta^2\Omega_*^2\mathrm{v}^{(s-2)}$$

$$(5\tau, 6\tau;\quad A, B;\quad u, \mathrm{v};\quad \alpha, \beta;\quad r_2, r_1;\quad \xi, \eta;\quad \tau_{11}, \tau_{22};\quad \tau_{12}, \tau_{21};\quad \tau_{23}, \tau_{13})$$

$$P_u^{(s-1)} = -\zeta(r_1 + r_2)\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \zeta^2 r_1 r_2\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \zeta} + r_1 u^{(s-1)} + \zeta r_1 r_2 u^{(s-2)} - \frac{1}{A}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi} -$$

$$-\frac{r_2\zeta}{A}\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \xi} + r_1\zeta a_{55}\tau_{13}^{(s-1)} \qquad (u, \mathrm{v};\quad A, B;\ r_1, r_2;\ \xi, \eta;\quad \tau_{13}, \tau_{23};\ a_{55}, a_{44})$$

$$P_w^{(s-1)} = -\zeta(r_1 + r_2)\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \zeta^2 r_1 r_2\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \zeta} + r_1\zeta a_{13}\tau_{11}^{(s-1)} + r_2\zeta a_{23}\tau_{22}^{(s-1)}$$

$$\Delta_1 = a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12},\ \Delta_2 = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13},\ \Delta_3 = a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}$$

$$\Delta_{ij} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2,\quad i, j = 1,2,3;\ \Delta = a_{11}\Delta_{23} + a_{13}\Delta_2 + a_{12}\Delta_1$$

The displacement vector components are determined from the equations

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}\Omega_*^2 u^{(s)} = a_{55}P_{6\tau}^{(s-1)} + \frac{\partial P_u^{(s-1)}}{\partial \zeta}, \qquad (u, \mathrm{v};\ a_{55}, a_{44};\ 6\tau, 5\tau)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta}{\Delta_{12}}\Omega_*^2 w^{(s)} = F_w^{(s-1)} \tag{2.7}$$

$$F_w^{(s-1)} = \frac{1}{\Delta_{12}}\left[\Delta P_{4\tau}^{(s-1)} - \Delta_2\frac{\partial P_{2\tau}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \Delta_3\frac{\partial P_{3\tau}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Delta_{12}\frac{\partial P_w^{(s-1)}}{\partial \zeta}\right]$$

The equations (2.7) have the solutions

$$u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = C_1^{(s)}(\xi, \eta)\sin\delta^u\zeta + C_2^{(s)}(\xi, \eta)\cos\delta^u\zeta + \overline{u}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \tag{2.8}$$

$$\mathrm{v}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = C_3^{(s)}(\xi, \eta)\sin\delta^{\mathrm{v}}\zeta + C_4^{(s)}(\xi, \eta)\cos\delta^{\mathrm{v}}\zeta + \overline{\mathrm{v}}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$w^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = C_5^{(s)}(\xi, \eta)\sin\delta^w\zeta + C_6^{(s)}(\xi, \eta)\cos\delta^w\zeta + \overline{w}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\delta^u = \sqrt{a_{55}}\Omega_*,\ \delta^{\mathrm{v}} = \sqrt{a_{44}}\Omega_*,\ \delta^w = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\Omega_*$$

$\overline{u}^{(s)}$, $\overline{\mathrm{v}}^{(s)}, \overline{w}^{(s)}$ are the private solutions of the equations (2.7).

According to (2.3) the boundary conditions (1.4)-(1.6) have the form

$$\begin{aligned}
&\tau_{13}^{(s)}(\zeta=1)=-\overline{\tau}_{13b}^{(s)}(\zeta=1)\\
&\tau_{23}^{(s)}(\zeta=1)=-\overline{\tau}_{23b}^{(s)}(\zeta=1)\\
&\tau_{33}^{(s)}(\zeta=1)=-\overline{\tau}_{33b}^{(s)}(\zeta=1)
\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
&u^{(s)}(\zeta=1)=-\overline{u}_b^{(s)}(\zeta=1)\\
&\mathrm{v}^{(s)}(\zeta=1)=-\overline{\mathrm{v}}_b^{(s)}(\zeta=1)\\
&w^{(s)}(\zeta=1)=-\overline{w}_b^{(s)}(\zeta=1)
\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
&u^{(s)}(\zeta=-1)=u^{-(s)}(\xi,\eta)\\
&\mathrm{v}^{(s)}(\zeta=-1)=\mathrm{v}^{-(s)}(\xi,\eta)\\
&w^{(s)}(\zeta=-1)=w^{-(s)}(\xi,\eta)
\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$u^{-(0)}=u^{-}/R,\quad u^{-(s)}=-\overline{u}_b^{(s)}(\zeta=-1),\quad s\neq 0\qquad (u,\mathrm{v},w)\ .$$

Substituting the solution (2.8) into (2.5) and satisfying the conditions (2.9), (2.11) we determine the value $C_i^{(s)}$ and the solution of the inner problem

$$u^{\mathrm{int}(s)}=\frac{\Phi_u^{(s)}(\zeta=1)\sin\delta^u(1+\zeta)-(\overline{u}^{(s)}(\zeta=-1)-u^{-(s)}(\zeta=-1))\cos\delta^u(1-\zeta)}{\cos 2\delta^u}+\overline{u}^{(s)}$$

$$(u,\mathrm{v},w)\tag{2.12}$$

where

$$\Phi_u^{(s)}(\zeta=1)=\frac{1}{\delta^u}\left[P_u^{(s-1)}(\zeta=1)-\frac{\partial\overline{u}^{(s)}(\zeta=1)}{\partial\zeta}-a_{55}\overline{\tau}_{13b}^{(s)}(\zeta=1)\right]\tag{2.13}$$

$$(u,\mathrm{v};13,23;a_{55},a_{44})$$

$$\Phi_w^{(s)}(\zeta=1)=\frac{\Delta_{12}P_w^{(s-1)}(\zeta=1)-\Delta_2P_{2\tau}^{(s-1)}(\zeta=1)-\Delta_3P_{3\tau}^{(s-1)}(\zeta=1)-\Delta\overline{\tau}_{33b}^{(s)}(\zeta=1)}{\delta^w\Delta_{12}}-$$

$$-\frac{1}{\delta^w}\frac{\partial\overline{w}^{(s)}(\zeta=1)}{\partial\zeta}$$

The solution (2.12) will be finite, if

$$\cos 2\delta^u\neq 0\quad (u,\mathrm{v},w)\tag{2.14}$$

The values of the frequency Ω, at which $\cos 2\delta^u=0\ \ (u,\mathrm{v},w)$, coincide with the main values of the frequencies of the free vibrations [6] resonance takes place.

The conditions (1.4), (1.6) ((2.10), (2.11)) correspond to the solution

$$u^{\mathrm{int}(s)}=\frac{(u^{-(s)}(\zeta=-1)-\overline{u}^{(s)}(\zeta=-1))\sin\delta^u(1-\zeta)-(\overline{u}_b^{(s)}(\zeta=1)+\overline{u}^{(s)}(\zeta=1))\sin\delta^u(1+\zeta)}{\sin 2\delta^u}+\overline{u}^{(s)}$$

$$(u,\mathrm{v},w)\tag{2.15}$$

which will be finite, if Ω is not the frequency of the free vibrations, i.e. $\sin 2\delta^u\neq 0\ \ (u,\mathrm{v},w)$.

3. Forced vibrations of shells in the boundary layer zone

The solution of the inner problem which is determined by the formulae (2.1), (2.4), (2.5), (2.12), (2.15) in general case will not satisfy the boundary conditions on the lateral surfaces (end-walls) of the shell. For this it is necessary to have another solution as well. Such solution is the solution for the boundary layer-solution, which satisfies trivial conditions on the facial surfaces $\gamma = \pm h$ and quickly decreases when removing from the lateral (end-wall) surface into the inside the shell. In order to build this solution near the lateral surface $\alpha = \alpha_0$, we pass to the dimensionless displacement vector components

$$u = U/R, \quad \mathrm{v} = V/R, \; w = W/R \tag{3.1}$$

and new independent variables

$$\alpha - \alpha_0 = h\xi_1, \; \beta = R\eta, \; \gamma = h\zeta \tag{3.2}$$

Then expanding all the geometrical parameters entering the equations (1.2), (1.3) into Taylor series by variable ξ_1, the solution of the transformed equations (1.2), (1.3) will be sought in the form of (2.1), (2.4) having written index “b” (from the word boundary) to all the sought values. The stresses tensor components succeed to be expressed through the displacements:

$$\tau_{23b}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial \mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial\zeta} - R_{4\tau}^{(s-1)}\right], \; \tau_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[A_0\frac{\partial \mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial\xi_1} - R_{6\tau}^{(s-1)}\right] \tag{3.3}$$

$$\tau_{12b}^{(s)} - \tau_{21b}^{(s)} = R_{7\tau}^{(s-1)} \;, \; A_0 = A(\alpha = \alpha_0)$$

$$\tau_{13b}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left[A_0\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\xi_1} + \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\zeta} - R_{5\tau}^{(s-1)}\right]$$

$$\tau_{11b}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(A_0\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\xi_1} - R_u^{(s-1)}\right)\Delta_{23} + R_{\mathrm{v}}^{(s-1)}\Delta_1 + \left(\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\zeta} - R_w^{(s-1)}\right)\Delta_2\right] \tag{3.4}$$

$$(11b, 22b, 33b; \;\; \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2; \;\; \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3; \;\; \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12})$$

The displacements vector components are determined from the equations:

$$\frac{1}{a_{66}}A_0^2\frac{\partial^2 \mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial\xi_1^2} + \frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Omega_*^2 \mathrm{v}_b^{(s)} = T_{\mathrm{v}}^{(s-1)} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}\frac{\Delta_{23}}{\Delta}A_0^2\frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial\xi_1^2} + A_0\left(\frac{\Delta_2}{\Delta} + \frac{1}{a_{55}}\right)\frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial\xi_1\partial\zeta} + \frac{1}{a_{55}}\frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Omega_*^2 u_b^{(s)} = T_u^{(s-1)} \\ a_{55}A_0^2\frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial\xi_1^2} + A_0\left(\frac{\Delta_2}{\Delta} + \frac{1}{a_{55}}\right)\frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial\xi_1\partial\zeta} + \frac{\Delta}{\Delta_{12}}\frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Omega_*^2 w_b^{(s)} = T_w^{(s-1)}\end{gathered} \tag{3.6}$$

where $R_{i\tau}^{(s-1)}, T_{u,\mathrm{v},w}^{(s-1)}$ are well-known values, $Q^{(m)} \equiv 0$ at $m < 0$. The antiplane boundary layer (boundary torsion) is determined by the equations (3.5) and correction (3.3), and the plane boundary layer is determined by (3.6), (3.4).

For the applications the approximation $s = 0$ is of great importance. Then the right parts of the equations (3.5), (3.6) are equal to null. It is necessary to find the damping solutions of these equations, satisfying the conditions

$$\tau_{23b}^{(0)} = 0 \;\; at \;\; \zeta = 1; \;\; \mathrm{v}_b^{(0)} = 0 \;\; at \;\; \zeta = -1 \tag{3.7}$$

$$\tau_{13b}^{(0)} = \tau_{33b}^{(0)} = 0 \;\; at \;\; \zeta = 1 \; ; \; u_b^{(0)} = w_b^{(0)} = 0 \;\; at \;\; \zeta = -1 \tag{3.8}$$

The solution of the problem (3.5), (3.7) is

$$\mathrm{v}_b^{(0)}(\xi_1, \eta, \zeta) = \exp(-\lambda_a\xi_1)C^{(0)}(\eta)\mathrm{v}_{b0}^{(0)}(\zeta) \tag{3.9}$$

where λ is the root of the equation

$$\cos 2\sqrt{a_{44}(\Omega_*^2 + \frac{A_0^2}{a_{66}}\lambda_a^2)} = 0 \tag{3.10}$$

i.e.

$$\lambda_{an} = \pm\sqrt{\frac{a_{66}}{A_0^2}\left(\frac{\pi^2(2n+1)^2}{16a_{44}} - \Omega_*^2\right)}, \quad \mathrm{v}_{b0n}^{(0)}(\zeta) = \cos\frac{\pi}{4}(2n+1)(1-\zeta) \tag{3.11}$$

The functions $\{\mathrm{v}_{b0n}^{(0)}\}$ compose an orthogonal system on the interval $[-1;1]$.

The plane boundary layer is the solution of the problem (3.6), (3.8). It has the form

$$\begin{aligned} u_b^{(0)}(\xi_1,\eta,\zeta) &= K_b^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi_1 + k\zeta) \\ w_b^{(0)}(\xi_1,\eta,\zeta) &= LK_b^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi_1 + k\zeta) \end{aligned} \tag{3.12}$$

where k_i are the roots of the characteristic equation

$$B_2k^4 + (\lambda_p^2B_3 + B_5)k^2 + \lambda_p^4B_1 + \lambda_p^2B_4 + \Omega_*^4 = 0 \tag{3.13}$$

$$B_1 = \frac{\Delta_{23}}{\Delta a_{55}}A_0^4,\ B_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta a_{55}},\ B_3 = \left(\frac{\Delta_{23}\Delta_{12} - \Delta_2^2}{\Delta^2} - 2\frac{\Delta_2}{\Delta a_{55}}\right)A_0^2$$

$$B_4 = \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta} + \frac{1}{a_{55}}\right)A_0^2\Omega_*^2,\ B_5 = \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \frac{1}{a_{55}}\right)\Omega_*^2$$

Multiplier L_i corresponds to each k_i

$$L_i = \frac{1}{(\Delta + \Delta_2a_{55})\lambda_pk_i}(\Delta_{23}a_{55}\lambda_p^2A_0^2 + \Delta k_i^2 + \Delta a_{55}\Omega_*^2) \tag{3.14}$$

Using (3.4), (3.12) satisfying conditions (3.8), we obtain a system of homogeneous algebraic equations, for the existence of the nonzero solution it is necessary the determinant of the system to be equal to zero, which can be given by the equation for determining λ_p :

$$\sum_{(1,2,3,4)}(-1)^1S_1\left[Q_2(L_3 - L_4) + Q_3(L_4 - L_2) + Q_4(L_2 - L_3)\right] = 0 \tag{3.15}$$

$$S_i = \left(\Delta_{12}k_iL_i - \Delta_2\lambda_pA_0\right)\exp(2k_i)$$

$$Q_i = \left(k_i - \lambda_pA_0L_i\right)\exp(2k_i),\ \ i = 1,2,3,4$$

The roots of the equation (3.15) are complex, we are interested in the roots with $\mathrm{Re}\lambda_p > 0$. Some of the first values λ and λ_p for the shells from glassplastics 2:1 are brought in Table 1.

When removing from the lateral surface $\alpha = \alpha_0$ into the inside the shell, the values of the antiplane boundary layer damp as $\exp(-\lambda_{an}\xi_1)$, and the values of the plane boundary layer damp as $\exp(-\lambda_{pn}\xi_1)$. From Table 1 follows, that it is possible to be restricted to five-six first boundary functions, as the functions with big numbers will decrease very quickly.

From the brought formulae, by the formal exchange ξ_1 into $\xi_1 = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_0}{h} - \xi = \dfrac{\alpha_1 - \alpha}{h}$, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ the data for the boundary layer near $\alpha = \alpha_1$ can be obtained.

Table 1

<table>
<tr><td rowspan="9">$\Omega_* = 1200$</td><td colspan="4">λ_{an}</td></tr>
<tr><td>0.709406</td><td>6.3865</td><td>10.6442</td><td>14.9019</td></tr>
<tr><td>3.54803</td><td>7.80573</td><td>12.0634</td><td>16.3211</td></tr>
<tr><td>4.96726</td><td>9.22496</td><td>13.4826</td><td>17.7403</td></tr>
<tr><td colspan="4">λ_{pn}</td></tr>
<tr><td>0.262736</td><td>3.02606
+0.492501 I</td><td>6.53197</td><td>8.99958</td></tr>
<tr><td>1.00957
+0.529569 I</td><td>4.16682</td><td>6.8507
+0.0707007 I</td><td>9.46818</td></tr>
<tr><td>1.93879</td><td>4.63984</td><td>7.05556</td><td>10.6242
+0.488721 I</td></tr>
<tr><td>2.45353</td><td>5.03027
+0.4013 I</td><td>8.62144
+0.392575 I</td><td>11.1858</td></tr>
</table>

4. Conjugation of the inner problem and boundary layer solutions

The general solution of the formulated problems has the form

$$I = I^{\text{int}} + I_b^I + I_b^{II} \tag{4.1}$$

where I^{int} is the solution of the inner problem, I_b^I is the solution of the boundary layer at $\alpha = \alpha_0$, I_b^{II} at $\alpha = \alpha_1$.

When solving singularly perturbed problems it is considered that it is possible to neglect I_b^{II} when the conditions at $\alpha = \alpha_0$ are satisfied and vice versa. It puts restrictions on the tangential dimension of the shell. It is necessary that

$$1 + \exp\left(-\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{h}\lambda_{a1}\right) \approx 1, \qquad 1 + \exp\left(-\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{h}\operatorname{Re}\lambda_{p1}\right) \approx 1 \tag{4.2}$$

We shall consider the conditions (4.2) satisfied.

Consider the procedure of the conjugations of the inner problem and boundary layer solutions, using the boundary conditions 3D of the problem on the lateral surface. Let at $\alpha = \alpha_0$ the conditions of rigid fastening be given

$$u(\xi = 0) = 0, \quad \mathrm{v}(\xi = 0) = 0, \quad w(\xi = 0) = 0 \tag{4.3}$$

or the conditions of free edge

$$\tau_{11}(\xi = 0) = 0, \quad \tau_{12}(\xi = 0) = 0, \quad \tau_{13}(\xi = 0) = 0 \tag{4.4}$$

The general solution may be represented in the form of

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}^{(s)} = \mathrm{v}^{\text{int}(s)} + \exp(-\lambda_{an}\xi_1)C_{1n}^{(s)}(\eta)\mathrm{v}_{b0n}^{(0)}(\zeta) + \overline{\mathrm{v}}_{bn}^{(s)}(\xi_1, \eta, \zeta) \\
&u^{(s)} = u^{\text{int}(s)} + A_{1n}^{(s)}(\eta)\operatorname{Re} u_{bn}^{(0)} + A_{2n}^{(s)}(\eta)\operatorname{Im} u_{bn}^{(0)} + \overline{u}_{bn}^{(s)}(\xi_1, \eta, \zeta) \quad (u, w) \\
&\tau_{ij}^{(s)} = \tau_{ij}^{\text{int}(s)} + \tau_{ijb}^{(s)} \qquad i, j = 1,2,3; \quad n = \overline{0, N}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

In case of the conditions (4.3) the satisfaction of the second condition brings to the correlation

$$C_{1n}^{(s)}(\eta)\mathrm{v}_{b0n}^{(0)}(\zeta) = -\mathrm{v}^{\mathrm{int}(s)} - \overline{\mathrm{v}}_{bn}^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) \tag{4.6}$$

from where

$$C_{1n}^{(s)}(\eta) = \int_{-1}^{1} \left(-\mathrm{v}^{\mathrm{int}(s)} - \overline{\mathrm{v}}_{bn}^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta)\right) \cos\frac{\pi(2n+1)(1-\zeta)}{4} d\zeta$$

The satisfaction of the rest two conditions (4.3) brings to an algebraic system

$$\begin{aligned} &A_{1n}^{(s)}(\eta)\,\mathrm{Re}\,u_{bn}^{(0)} + A_{2n}^{(s)}(\eta)\,\mathrm{Im}\,u_{bn}^{(0)} = \\ &= -u^{\mathrm{int}(s)}(0, \eta, \zeta) - \overline{u}_{bn}^{(s)}(\xi_1 = 0) \quad (u, w) \qquad n = \overline{1, N} \end{aligned} \tag{4.7}$$

From where $A_{1n}^{(s)}(\eta)$ and $A_{2n}^{(s)}(\eta)$ are determined by collocation method or by the method of least squares.

By the analogous way the conditions (4.4) and other variants of conditions on the lateral surface are satisfied.

5. Forced vibrations of an orthotropic cylindrical shell

For an orthotropic cylindrical shell

$$r_1 = 0,\ r_2 = 1,\ A = B = 1,\ k_\alpha = k_\beta = 0 \tag{5.1}$$

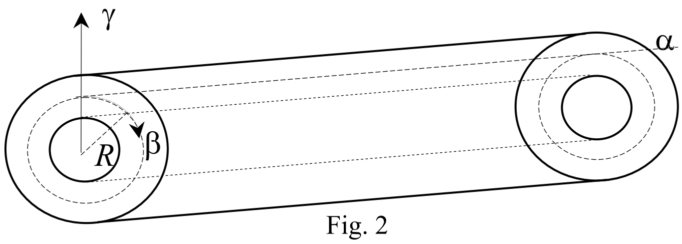


Fig. 2

Under the boundary conditions (1.4), (1.5) the solution is determined by the formulae (2.12), yet

$$\Phi_u^{(s)}(\zeta = 1) = \frac{1}{\delta^u}\left[-\zeta\left(\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \overline{u}^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{55}\overline{\tau}_{13b}^{(s)}\right]_{\zeta=1} \tag{5.2}$$

$$\Phi_{\mathrm{v}}^{(s)}(\zeta = 1) = \frac{1}{\delta^{\mathrm{v}}}\left[-\zeta\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \mathrm{v}^{(s-1)} - \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \eta} + \zeta a_{44}\tau_{23}^{(s-1)} - \frac{\partial \overline{\mathrm{v}}^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{44}\overline{\tau}_{23b}^{(s)}\right]_{\zeta=1}$$

$$\Phi_w^{(s)}(\zeta = 1) = \frac{1}{\delta^w \Delta_{12}}[\Delta_{12}\zeta\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \Delta_2\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} - \Delta_2\zeta\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \xi} -$$

$$-\Delta_3\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \Delta_3 w^{(s-1)} - \Delta\overline{\tau}_{33b}^{(s)}]_{\zeta=1} - \frac{1}{\delta^w}\frac{\partial \overline{w}^{(s)}(\zeta = 1)}{\partial \zeta}$$

In case $u^-(\xi,\eta) = u^- = \mathrm{const}$, $\mathrm{v}^-(\xi,\eta) = \mathrm{v}^- = \mathrm{const}$, $w^-(\xi,\eta) = w^- = \mathrm{const}$, if we are restricted by the first two approaches, we get the solution

$$U^{\mathrm{int}} = \left(\frac{u^-\cos(1-\zeta)\delta^u}{\cos 2\delta^u} + \frac{h}{2\delta^u\cos 2\delta^u}\left(\left(\frac{u^-}{R\cos 2\delta^u} - 2a_{55}\overline{\tau}_{13b}^{(1)}(\zeta = 1)\right)\sin\delta^u(1+\zeta) - \right.\right.$$

$$-\delta^u \cos\delta^u (1-\zeta)\left(\frac{u^-(1+\zeta)}{R} - 2u^{-(1)}(\zeta=-1)\right)\Bigg)\exp(i\Omega t)$$

$$V^{\text{int}} = \left(\frac{\text{v}^- \cos(1-\zeta)\delta^{\text{v}}}{\cos 2\delta^{\text{v}}} + \frac{h}{2\delta^{\text{v}}\cos 2\delta^{\text{v}}}\left(\left(\frac{3\text{v}^-}{R\cos 2\delta^{\text{v}}} - 2a_{44}\overline{\tau}_{23b}^{(1)}(\zeta=1)\right)\sin\delta^{\text{v}}(1+\zeta) - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\delta^{\text{v}}\cos\delta^{\text{v}}(1-\zeta)\left(\frac{\text{v}^-(1+\zeta)}{R} - 2\text{v}^{-(1)}(\zeta=-1)\right)\right)\right)\exp(i\Omega t) \quad (5.3)$$

$$W^{\text{int}} = \left(\frac{w^- \cos(1-\zeta)\delta^w}{\cos 2\delta^w} + \frac{h}{2\delta^w \Delta_{12}\cos 2\delta^w} \times\right.$$

$$\times\left(\left(\frac{w^-}{R\cos 2\delta^w}\left(\Delta_{12} - 2\Delta_3\right) - 2\Delta\overline{\tau}_{33b}^{(1)}(\zeta=1)\right)\sin\delta^u(1+\zeta) - \right.$$

$$\left.\left.-\delta^w \Delta_{12}\cos\delta^w(1-\zeta)\left(\frac{w^-(1+\zeta)}{R} - 2w^{-(1)}(\zeta=-1)\right)\right)\right)\exp(i\Omega t)$$

The stresses will be determined by the formulae (2.5).

Under the boundary conditions (1.4), (1.6) we have

$$U^{\text{int}} = \left(\frac{u^- \sin(1-\zeta)\delta^u}{\sin 2\delta^u} + \frac{h}{\sin 2\delta^u}\left(\left(u^{-(1)}(\zeta=-1) - \frac{u^-(1+\zeta)}{2R}\right)\sin\delta^u(1-\zeta) - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\overline{u}_b^{(1)}(\zeta=1)\sin\delta^u(1+\zeta)\right)\right)\exp(i\Omega t) \qquad (U,V,W;u,\text{v},w) \quad (5.4)$$

The asymptotic solution for shells comparing with the one for plates has a number of differences: if the functions entering the boundary conditions are polynomials, the iteration process for the plates breaks on the definite approximation and mathematically exact solution for a layer is obtained. And for the shells, as it follows from the formulae (5.3), (5.4), the iteration process doesn't break, therefore the solution will be asymptotic, i.e. the exactness will be approximately of the first rejected member of the series. For the plates in the dynamic problems the boundary layer doesn't influence on the solution of the inner problem, for the shells it influences (beginning from $s \geq 1$).

From the formulae (2.12), (2.15), (5.3), (5.4) it follows that in the shells two types of shear and longitudinal vibrations arise, they are independent for the initial approximation, and taking into account the following approximations they inter influence.

6. Forced vibrations of the toroidal shell

Consider an orthotropic toroidal shell in a toroidal system of coordinates $\{\theta, \varphi, \gamma : |\theta| \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |\gamma| \leq h\}, h << r\}$ (Fig.3).

Let on the inner surface $\gamma = -h$ normal, harmonical in time loading act:

$$\overline{\sigma}_{\gamma\gamma}(\theta,\varphi,\gamma=-h,t) = \sigma(\theta,\varphi)\sin\omega t, \;\; \overline{\sigma}_{j\gamma}(\theta,\varphi,\gamma=-h,t) = 0, \;\; j = \theta,\varphi \quad (6.1)$$

and the outer surface is free:

$$\overline{\sigma}_{j\gamma}(\theta,\varphi,\gamma=h,t) = 0, \quad j = \theta,\varphi,\gamma \quad (6.2)$$

or rigidly fastened:

$$\bar{u}_j(\theta, \varphi, \gamma = h, t) = 0, \quad j = \theta, \varphi, \gamma \tag{6.3}$$

Consider a close toroidal shell, by virtue of which here the boundary layer doesn't exist. It is required to find stress-strain state of the shell.

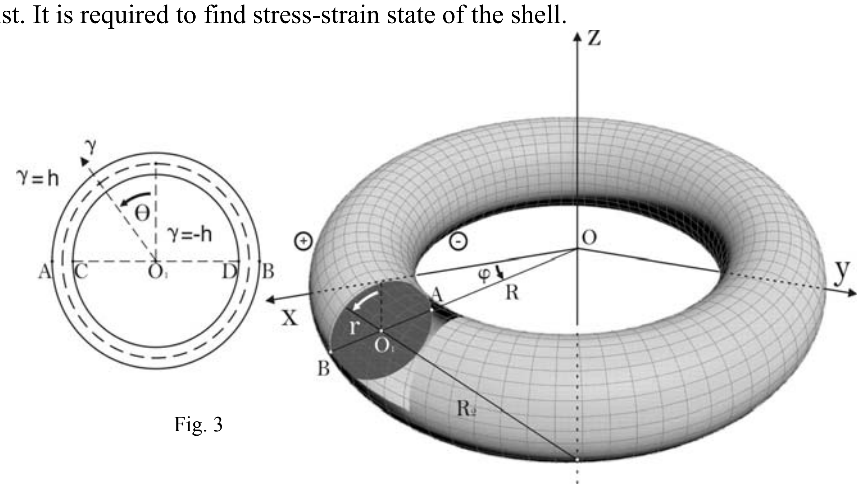


Fig. 3

For the considered shell $\alpha = \theta, \beta = \varphi$, and

$$A = r, B = R + r\sin\theta, R_1 = r, R_2 = (R + r\sin\theta)/\sin\theta, k_\alpha = 0,$$
$$k_\beta = \cos\theta/(R + r\sin\theta) \tag{6.4}$$

For the solution of the set boundary value problem all the required values will be sought in the form of

$$\bar{Q}(\theta, \varphi, \gamma, t) = Q(\theta, \varphi, \gamma)\sin\omega t, \quad \bar{Q} = \left\{\bar{\sigma}_{ij}, \bar{u}_j\right\} \tag{6.5}$$

and nonsymmetric tensor of stresses τ_{ij} by formula (1.1) will be applied.

In the equations of motion (1.2) and correlations of elasticity (1.3) we pass to dimensionless coordinates and displacements by formulae

$$\xi = \theta, \ \eta = \varphi, \ \zeta = \gamma/h = \varepsilon^{-1}\gamma/r, \ u_\theta = u/r$$
$$u_\varphi = v/r, \ u_\gamma = w/r, \ \varepsilon = h/r, \ h << r \tag{6.6}$$

As a result we get a singularly perturbed by small parametre ε system.

The solution of this system will be sought in the form of

$$\tau_{ij}(\theta, \varphi, \gamma) = \varepsilon^{-1+s}\tau_{ij}(\xi, \eta, \zeta), \ i, j = \theta, \varphi, \gamma$$
$$(u_\theta, u_\varphi, u_\gamma) = \varepsilon^s(u^{(s)}, v^{(s)}, w^{(s)}), \ s = \overline{0, N} \tag{6.7}$$

Substituting (6.7) into this system and equalizing in each equation the coefficients at the same degrees ε, all the stresses can be expressed through the displacements by formulae

$$\tau_{\theta\theta}^{(s)} = b_{11}e_{\theta\theta}^{(s)} + b_{12}e_{\beta\beta}^{(s)} + b_{13}e_{\gamma\gamma}^{(s)},$$
$$\tau_{\beta\beta}^{(s)} = b_{12}e_{\theta\theta}^{(s)} + b_{22}e_{\varphi\varphi}^{(s)} + b_{23}e_{\gamma\gamma}^{(s)},$$
$$\tau_{\gamma\gamma}^{(s)} = b_{13}e_{\theta\theta}^{(s)} + b_{23}e_{\varphi\varphi}^{(s)} + b_{33}e_{\gamma\gamma}^{(s)},$$
$$\tau_{\varphi\gamma}^{(s)} = b_{44}e_{\varphi\gamma}^{(s)}, \quad \tau_{\alpha\gamma}^{(s)} = b_{55}e_{\theta\gamma}^{(s)}, \quad \tau_{\theta\varphi}^{(s)} = b_{66}e_{\theta\varphi}^{(s)}$$

$$e_{\theta\theta}^{(s)} = e_{\theta\theta*}^{(s-1)}, \quad e_{\varphi\varphi}^{(s)} = e_{\varphi\varphi*}^{(s-1)}, \quad e_{\gamma\gamma}^{(s)} = \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} + e_{\gamma\gamma*}^{(s-1)}, \tag{6.8}$$

$$e_{\varphi\gamma}^{(s)} = \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} + e_{\varphi\gamma*}^{(s-1)}, \quad e_{\theta\gamma}^{(s)} = \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + e_{\theta\gamma*}^{(s-1)}, \quad e_{\theta\varphi}^{(s)} = e_{\theta\varphi*}^{(s-1)}$$

The displacements are determined from the equations

$$b_{33}\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \rho\omega^2 h^2 w^{(s)} = R_w^{(s-1)}$$

$$b_{55}\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \rho\omega^2 h^2 u^{(s)} = R_u^{(s-1)} \tag{6.9}$$

$$b_{44}\frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \rho\omega^2 h^2 v^{(s)} = R_v^{(s-1)}$$

where

$$R_w^{(s-1)} = \tau_{\theta\theta}^{(s-1)} + \frac{r\sin\xi}{B}\tau_{\varphi\varphi}^{(s-1)} - \frac{\partial \tau_{\theta\gamma}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{r}{B}\frac{\partial \tau_{\varphi\gamma}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{r\cos\xi}{B}\tau_{\theta\gamma}^{(s-1)} -$$

$$-\rho\omega^2 h^2 L(w^{(s-1)}) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(b_{13}e_{\theta\theta*}^{(s-1)} + b_{23}e_{\varphi\varphi*}^{(s-1)} + b_{33}e_{\gamma\gamma*}^{(s-1)})$$

$$R_u^{(s-1)} = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \xi}(B\tau_{\theta\theta}^{(s-1)}) + \frac{r\cos\xi}{B}\tau_{\varphi\varphi}^{(s-1)} - \frac{r}{B}\frac{\partial \tau_{\varphi\theta}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \tag{6.10}$$

$$-\zeta\frac{\partial \tau_{\theta\gamma}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \rho\omega^2 h^2 L(u^{(s-1)}) - b_{55}\frac{\partial}{\partial \zeta}e_{\theta\gamma*}^{(s-1)} - 2\tau_{\theta\gamma}^{(s-1)}$$

$$R_v^{(s-1)} = -\frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \eta}(B\tau_{\theta\varphi}^{(s-1)}) - \frac{r\cos\xi}{B}\tau_{\varphi\theta}^{(s-1)} -$$

$$-\zeta\frac{r\cos\xi}{B}\frac{\partial \tau_{\varphi\gamma}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \rho\omega^2 h^2 L(u^{(s-1)}) - b_{44}\frac{\partial}{\partial \zeta}e_{\varphi\gamma*}^{(s-1)} - \frac{2r\cos\xi}{B}\tau_{\varphi\gamma}^{(s-1)}$$

$$e_{\theta\theta*}^{(s-1)} = \frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + w^{(s-1)} + \zeta\frac{r\sin\xi}{B}\left(\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \xi} + w^{(s-2)}\right) - \zeta(a_{11}\tau_{\theta\theta}^{(s-1)} + a_{12}\frac{r\sin\xi}{B}\tau_{\varphi\varphi}^{(s-1)})$$

$$e_{\varphi\varphi*}^{(s-1)} = \frac{r}{B}\left(\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} + \sin\xi w^{(s-1)} + \cos\xi u^{(s-1)}\right) +$$

$$+\zeta\frac{r}{B}\left(\frac{\partial v^{(s-2)}}{\partial \eta} + \sin\xi w^{(s-2)} + \cos\xi u^{(s-2)}\right) - \zeta\left(a_{12}\tau_{\theta\theta}^{(s-1)} + a_{22}\frac{r\sin\xi}{B}\tau_{\varphi\varphi}^{(s-1)}\right)$$

$$e_{\gamma\gamma*}^{(s-1)} = L\left(\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \zeta}\right) - \zeta(a_{13}\tau_{\theta\theta}^{(s-1)} + a_{23}\frac{r\sin\xi}{B}\tau_{\varphi\varphi}^{(s-1)})$$

$$e_{\varphi\gamma*}^{(s-1)} = L\left(\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \zeta}\right) - \frac{r\sin\xi}{B}\left(v^{(s-1)} + \zeta v^{(s-2)} + a_{44}\zeta\tau_{\varphi\gamma}^{(s-1)}\right) +$$

$$+\frac{r}{B}\left(\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\eta}+\zeta\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial\eta}\right)$$

$$e_{\theta\gamma*}^{(s-1)}=L\left(\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\zeta}\right)-u^{(s-1)}-\zeta\frac{r\sin\xi}{B}\left(u^{(s-2)}+a_{55}\tau_{\theta\gamma}^{(s-1)}\right)+$$

$$+\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\eta}+\zeta\frac{r\sin\xi}{B}\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial\eta}$$

$$e_{\theta\varphi*}^{(s-1)}=\frac{r}{B}\left(\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\eta}-\cos\xi v^{(s-1)}\right)+\zeta\frac{r}{B}\left(\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial\eta}-\cos\xi v^{(s-2)}\right)+$$

$$+\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\xi}+\zeta\frac{r\sin\xi}{B}\frac{\partial v^{(s-2)}}{\partial\xi}-a_{66}\zeta\tau_{\theta\varphi}^{(s-1)}$$

$$L(Q^{(s-1)})=\zeta(r_1+r_2)Q^{(s-1)}+\zeta r_1r_2Q^{(s-2)},\ r_1=r/R_1=1,\ \ r_2=r/R_2$$

The solutions of the equations (6.9) are

$$\begin{aligned}
u^{(s)}&=M_u^{(s)}\sin\lambda_1\zeta+N_u^{(s)}\cos\lambda_1\zeta+I_u^{(s)}(\zeta),\quad \lambda_1=\omega h\sqrt{a_{55}\rho}\\
v^{(s)}&=M_v^{(s)}\sin\lambda_2\zeta+N_v^{(s)}\cos\lambda_2\zeta+I_v^{(s)}(\zeta),\quad \lambda_2=\omega h\sqrt{a_{44}\rho}\\
w^{(s)}&=M_w^{(s)}\sin\lambda_3\zeta+N_w^{(s)}\cos\lambda_3\zeta+I_w^{(s)}(\zeta),\ \ \lambda_3=\omega h\sqrt{\rho/b_{33}}
\end{aligned}\tag{6.11}$$

where $I_u^{(s)}(\zeta)$, $I_v^{(s)}(\zeta)$, $I_w^{(s)}(\zeta)$ are private solutions of the equations (6.9)

$$I_u^{(s)}(\zeta)=\frac{1}{\lambda_1}\int_0^{\zeta}\Phi_u^{(s)}(\tau)\sin\lambda_1(\zeta-\tau)d\tau\qquad (u,v,w;1,2,3)$$

$$\Phi_w^{(s)}(\zeta)=\gamma_{33}\frac{\partial T^{(s)}}{\partial\zeta}\Big/b_{33}+R_w^{(s-1)}(\zeta)/b_{33}\,,$$

$$\Phi_u^{(s)}=R_u^{(s-1)}/b_{55}\qquad (u,v;5,4)\tag{6.12}$$

$$b_{jj}=(a_{kk}a_{ll}-a_{kl}^2)/\Delta\quad j,k,l=1,2,3,\quad b_{jk}=(a_{jl}a_{kl}-a_{jk}a_{ll})/\Delta,\quad j\neq k\neq l$$

$$b_{55}=1/a_{55},\ b_{44}=1/a_{44}$$

$$\Delta=2a_{12}a_{13}a_{23}+a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{12}^2,\quad b_{44}=\frac{1}{a_{44}}\quad (4,5,6)$$

For each s the solution (6.11) contains six unknown functions, which are uniquely determined from six conditions (6.1), (6.2) or (6.1), (6.3).

Satisfying the conditions (6.1), (6.2) we have

$$\begin{aligned}
M_w^{(s)}&=\left[\sigma^{(s)}-I_\gamma^{(s)}(\zeta=-1)-I_\gamma^{(s)}(\zeta=1)\right]\Big/\left(2\lambda_3b_{33}\cos\lambda_3\right)\\
N_w^{(s)}&=\left[\sigma^{(s)}-I_\gamma^{(s)}(\zeta=-1)+I_\gamma^{(s)}(\zeta=1)\right]\Big/(2\lambda_3b_{33}\sin\lambda_3)\ \ ,\ \sin2\lambda_3\neq0\\
&(\alpha,\beta,\gamma;u,v,w;0,0,\sigma;1,2,3;55,44,33)
\end{aligned}\tag{6.13}$$

$$\sigma^{(0)}=\varepsilon\sigma,\ \ \sigma^{(1)}=\varepsilon^2\left(1+\frac{r\sin\xi}{B}\right)\sigma,\ \ \sigma^{(2)}=\varepsilon^3\frac{r\sin\xi}{B}\sigma,\ \ \sigma^{(s)}=0,\ \ s>2$$

$$I_{\alpha}^{(s)}(\zeta)=\frac{1}{\lambda_1}\int_0^{\zeta}\Phi_u^{(s)}(\tau)\cos\lambda_1(\zeta-\tau)d\tau \qquad (\alpha,\beta,\gamma;u,v,w;1,2,3)$$

If the frequency value of the outer action ω coincides with the main value of the free vibrations frequency, a resonance will take place, when even if one of the correlations is fulfilled

$$\sin 2\lambda_j=0 \quad j=1,2,3$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_{3\kappa}=\frac{\pi\kappa}{2} \Rightarrow \varpi_{\gamma rez.}=\frac{\pi k}{2h}\sqrt{\frac{b_{33}}{\rho}}\\
&\lambda_{1\kappa}=\frac{\pi\kappa}{2} \Rightarrow \varpi_{\theta rez.}=\frac{\pi k}{2h}\sqrt{\frac{b_{55}}{\rho}}=\frac{\pi k}{2h}\sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}\\
&\lambda_{2\kappa}=\frac{\pi\kappa}{2} \Rightarrow \varpi_{\varphi rez.}=\frac{\pi k}{2h}\sqrt{\frac{b_{44}}{\rho}}=\frac{\pi k}{2h}\sqrt{\frac{G_{23}}{\rho}}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

G_{13}, G_{23} are shear modules

The conditions (6.1), (6.3) correspond to the solution

$$\begin{aligned}
M_w^{(s)}&=\left[\left(\sigma^{(s)}-I_{\gamma}^{(s)}(\zeta=-1)\right)\cos\lambda_3+b_{33}\lambda_{33}I_w^{(s)}(\zeta=1)\sin\lambda_3\right]\Big/(b_{33}\lambda_3\cos 2\lambda_3)\\
N_w^{(s)}&=\left[\left(I_{\gamma}^{(s)}(\zeta=-1)-\sigma^{(s)}\right)\sin\lambda_3-b_{33}\lambda_3 I_w^{(s)}(\zeta=1)\cos\lambda_3\right]\Big/(b_{33}\lambda_3\cos 2\lambda_3)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\cos 2\lambda_3\neq 0 \qquad (\theta,\varphi,\gamma;u,v,w;0,0,\sigma;1,2,3;55,44,33)$$

A resonance arise, when $\cos 2\lambda_j=0 \quad j=1,2,3$, which correspond to the frequencies

$$\begin{aligned}
&\varpi_{rez}^{I}=\frac{\pi(2k-1)}{4h}\sqrt{\frac{b_{55}}{\rho}}=\frac{\pi(2k-1)}{4h}\sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}\\
&\varpi_{rez}^{II}=\frac{\pi(2k-1)}{4h}\sqrt{\frac{G_{23}}{\rho}}\\
&\varpi_{rez}^{III}=\frac{\pi(2k-1)}{4h}\sqrt{\frac{b_{33}}{\rho}}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

7. The solutions of private problems on forced vibrations of the toroidal shell

Let $\sigma(\theta,\varphi)=\sigma=\text{const}$. After the first step of iteration in the problem (6.1), (6.2) we have

$$\begin{aligned}
&\overline{\tau}_{\theta\theta}=\sigma\frac{b_{13}\sin\lambda_3(1-\zeta)}{b_{33}\sin 2\lambda_3}\sin\omega t, \quad \overline{\tau}_{\varphi\varphi}=\sigma\frac{b_{23}\sin\lambda_3(1-\zeta)}{b_{33}\sin 2\lambda_3}\sin\omega t\\
&\overline{\tau}_{\gamma\gamma}=\frac{\sigma\sin\lambda_3(1-\zeta)}{\sin 2\lambda_3}\sin\omega t, \quad \overline{\tau}_{\varphi\gamma}=\overline{\tau}_{\theta\gamma}=\overline{\tau}_{\theta\varphi}=0\\
&\overline{w}=\sigma\frac{\cos\lambda_3(1-\zeta)}{b_{33}\lambda_3\sin 2\lambda_3}\sin\omega t, \quad \overline{u}=\overline{v}=0
\end{aligned} \tag{7.1}$$

In the problem (6.1), (6.3) at $\sigma = \text{const}$ we have

$$\overline{\tau}_{\theta\theta} = \sigma \frac{b_{13}\cos\lambda_3(\zeta-1)}{b_{33}\cos 2\lambda_3}\sin\omega t, \quad \overline{\tau}_{\varphi\varphi} = \sigma \frac{b_{23}\cos\lambda_3(\zeta-1)}{b_{33}\cos 2\lambda_3}\sin\omega t$$

$$\overline{\tau}_{\gamma\gamma} = \frac{\sigma\cos\lambda_3(\zeta-1)}{\cos 2\lambda_3}\sin\omega t, \quad \overline{\tau}_{\varphi\gamma} = \overline{\tau}_{\theta\gamma} = \overline{\tau}_{\theta\varphi} = 0 \tag{7.2}$$

$$\overline{w} = \sigma \frac{\sin\lambda_3(\zeta-1)}{b_{33}\lambda_3\cos 2\lambda_3}\sin\omega t, \quad \overline{u} = \overline{v} = 0$$

The approximation $s = 1$ corresponds to

$$\tau_{\theta\theta}^{(1)} = \left(b_{11} + \frac{r\sin\xi}{B}b_{12}\right)w + \zeta\left(1 + \frac{r\sin\xi}{B}\right)b_{13}\frac{\partial w}{\partial\zeta} + b_{13}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\zeta} - \zeta\tau_{\theta\theta}$$

$$\tau_{\varphi\varphi}^{(1)} = \left(b_{12} + \frac{r\sin\xi}{B}b_{22}\right)w + \zeta\left(1 + \frac{r\sin\xi}{B}\right)b_{23}\frac{\partial w}{\partial\zeta} + b_{23}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\zeta} - \zeta\tau_{\varphi\varphi} \tag{7.3}$$

$$\tau_{\gamma\gamma}^{(1)} = \left(b_{13} + \frac{r\sin\xi}{B}b_{23}\right)w + \zeta\left(1 + \frac{r\sin\xi}{B}\right)b_{33}\frac{\partial w}{\partial\zeta} + b_{33}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\zeta}$$

$$\tau_{\varphi\gamma}^{(1)} = \tau_{\theta\varphi}^{(1)} = 0, \quad \tau_{\theta\gamma}^{(1)} = b_{55}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\zeta}$$

$$\overline{\tau}_{ij} = \tau_{ij}\sin\omega t, \quad \overline{w} = w\sin\omega t$$

$$w^{(1)} = M_w^{(1)}\sin\lambda_3(1-\zeta) + N_w^{(1)}\cos\lambda_3(1-\zeta) + \frac{W}{2b_{33}\lambda_3}\zeta\cos\lambda_3(1-\zeta)$$

$$u^{(1)} = M_u^{(1)}\sin\lambda_1(1-\zeta) + N_u^{(1)}\cos\lambda_1(1-\zeta) + \frac{U}{\lambda_3^2\left(b_{33}-b_{55}\right)}\sin\lambda_3(1-\zeta)$$

$$W = -\frac{\sigma}{\sin 2\lambda_3}\left(1 + \frac{r\sin\xi}{B}\right), \quad U = \frac{\sigma r\sin\xi}{Bb_{33}\sin 2\lambda_3}\left(b_{23} - b_{13}\right)$$

For boundary conditions (6.1), (6.2) we have

$$M_w^{(1)} = W^*(\zeta=1)\big/\left(b_{33}\lambda_3\right)$$

$$N_w^{(1)} = \left[W^*(\zeta=-1) - W^*(\zeta=1)\cos 2\lambda_3 - \left(1 + \frac{r\sin\xi}{B}\right)\varepsilon\sigma\right]\Big/\left(b_{33}\lambda_3\sin 2\lambda_3\right)$$

$$M_u^{(1)} = \frac{U}{\lambda_3\left(b_{55}-b_{33}\right)}, \quad N_u^{(1)} = \frac{U}{\lambda_3\left(b_{55}-b_{33}\right)}\frac{\cos 2\lambda_3 - \cos 2\lambda_1}{\sin 2\lambda_3}, \quad \sin 2\lambda_1 \neq 0 \tag{7.4}$$

$$W^*(\zeta) = \frac{W}{2\lambda_3}\left(\cos\lambda_3(1-\zeta) + \zeta\lambda_3\sin\lambda_3(1-\zeta)\right) + \zeta b_{33}\left(1 + \frac{r\sin\xi}{B}\right)\frac{\partial w}{\partial\zeta} + \\ + \left(b_{13} + b_{23}\frac{r\sin\xi}{B}\right)w$$

and for conditions (6.1), (6.3)

$$M_w^{(1)}=\left[W\sin 2\lambda_3+2\left(W^*(\zeta=-1)-\left(1+\frac{r\sin\xi}{B}\right)\varepsilon\sigma\right)\right]\Big/\left(b_{33}\lambda_3\cos 2\lambda_3\right)$$

$$N_w^{(1)}=-W\big/\left(2b_{33}\lambda_3\right),\quad M_u^{(1)}=\frac{U\cos 2\lambda_3}{\lambda_3\left(b_{55}-b_{33}\right)\cos 2\lambda_1},\quad N_u^{(1)}=0,\ \cos 2\lambda_1\neq 0 \tag{7.5}$$

Hence, after the two step of iteration the components of nonsymmetrical tensor of stresses and vector of displacement are

$$\tau_{\theta\theta}=\left(\overline{\tau}_{\theta\theta}+\frac{h}{R}\tau_{\theta\theta}^{(1)}\right)\sin\omega t,\quad \tau_{\varphi\varphi}=\left(\overline{\tau}_{\varphi\varphi}+\frac{h}{R}\tau_{\varphi\varphi}^{(1)}\right)\sin\omega t,\quad \tau_{\theta\varphi}=\frac{h}{R}\tau_{\theta\varphi}^{(1)}\sin\omega t$$

$$\tau_{\gamma\gamma}=\left(\overline{\tau}_{\gamma\gamma}+\frac{h}{R}\tau_{\gamma\gamma}^{(1)}\right)\sin\omega t,\quad \tau_{\varphi\gamma}=\frac{h}{R}\tau_{\varphi\gamma}^{(1)}\sin\omega t,\quad \tau_{\theta\gamma}=\frac{h}{R}\tau_{\theta\gamma}^{(1)}\sin\omega t$$

$$u_\theta=\frac{h^2}{R}u^{(1)}\sin\omega t,\quad u_\varphi=\frac{h^2}{R}\mathrm{v}^{(1)}\sin\omega t,\quad u_\gamma=h\overline{w}+\frac{h^2}{R}w^{(1)}\sin\omega t$$

References

1. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. M.: Nauka. Fizmatlit. 1997. 414p.
2. Aghalovyan L.A. Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-value problems of anisotropic layered beams, plates and shells. Yerevan. Publishing house of the National Academy of Sciences of Armenia. 2005. 468p.
3. Aghalovyan L.A. Asymptotic of solutions of classical and nonclassical boundary value problems of statics and dynamics of thin bodies.Int. Appl. Mech. 2002. V. 38. N 7. pp. 3-24.
4. Nayfeh A.H. Perturbation methods. John Wiley and Sons. 1973. 455p.
5. Vasiljeva A.B., Boutuzov V.F. Asymptotic decompositions of solutions of singulary perturbed equations. Moscow: Nauka. 1973. 272p.
6. Aghalovyan L.A. Ghulghazaryan L.G. Asymptotics solutions of non-classical boundary-value problems of the natural vibrations of orthotropic shells. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 70(2006). pp.102-115.

Aghalovyan Lenser Abgar
Academician of NAS RA, Head of Department,
Institute of Mechanics NAN, Yerevan, Armenia,
E-mail: aghal@mechins.sci.am

Gevorgyan Ruben Stepan
Doctor of Science, Leading Scientific Researcher,
Institute of Mechanics NAN, Yerevan, Armenia,
E-mail: gevorgyanrs@mail.ru

Ghulghazaryan Lusine Gurgen
Doctor of Mechanics, Scientific Researcher,
Institute of Mechanics NAN, Yerevan, Armenia,
E-mail: lusina@mail.ru

Received 27. 03. 2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №1, 2010 Механика

УДК.539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ

АРУТЮНЯН Л.А.

Ключевые слова: составное тело, трещина, биполярные координаты, функции Папковича-Нейбера, преобразование Фурье.
Keywords: composite body.crack, biopolar coordinaes, Papkovich-Neyber Functions, Fourier transformation.

Լ.Ա. Հարությունյան
Կիսաանվերջ ճաքեր պարունակող բաղադրյալ հարթության հարթ խնդիրը
Դիտարկված է բաղադրյալ հարթության առաջին եզրային հարթ խնդիրը, որը կազմված է տարբեր առաձգական հատկություններ ունեցող, բաժանման մակերևույթի վրա ճաքեր պարունակող, կիսահարթություններից: Օգտվելով Պապկովիչ-Նեյբերի ֆունկցիաներից, երկբևեռ կոորդինատային համակարգում, Ֆյուրեյի ինտեգրալի օգնությամբ, դիտարկվող խնդրի համար ստացվում է փակ լուծում: Հաշված են կոնտակտային լարումները և դեֆորմացիաները: Դիտարկված է մեկ մասնավոր դեպք, երբ ճաքի վրա կիրառված է հակադիր ուղղություններով երկու հավասար ինտենսիվությամբ կենտրոնացված ուժեր: Նյութերի բաժանման մակերևույթի վրա կոնտակտային լարումների և դեֆորմացիաների հաշվման համար ստացվում են պարզ արտահայտություններ:

L.A.Harutjunyan
A Plane Problem of a Composite Plane with Semi-Infinite Cracks
A plane problem of a composite plane, consisting of two half-planes with varions elastic characteristics is considered. On the sections lines there are semi-infinite cracks. With the help of Fourie integrals in the bepolar system of coordinates through Popkovich-Neyberg functions the set up problem is solved in closed way.

Рассматривается плоская задача составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними полубесконечными трещинами. При помощи интегралов Фурье в биполярной системе координат через функции Папковича-Нейбера задача решается замкнуто. Вычислены контактные напряжения и деформации. Решена одна конкретная задача, когда внешнее усилие, приложенное к берегам трещин, сводится к двум противоположно направленным сосредоточенным силам. Для вычислений контактных напряжений и деформаций получено простое выражение.

Рассматривается плоская задача составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними полубесконечными трещинами. Задачи о трещинах связаны с задачами определения напряжённо-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, представляющими интерес в теоретических и практических вопросах прочности разнообразных конструкций, они стали предметом исследования многих авторов [2–6].

На прямоугольной декартовой системе координат x и y при $y \geq 0$ полуплоскость имеет упругие характеристики G_1 и ν_1, а при $y \leq 0$ имеет упругие характеристики G_2 и ν_2 (G_1 и G_2 – модули сдвига материалов, ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона).

На участках граничной прямой $y = 0$, а именно на отрезке $|x| > a$, имеем трещину, а на участках $|x| < a$ имеем полный контакт материалов.

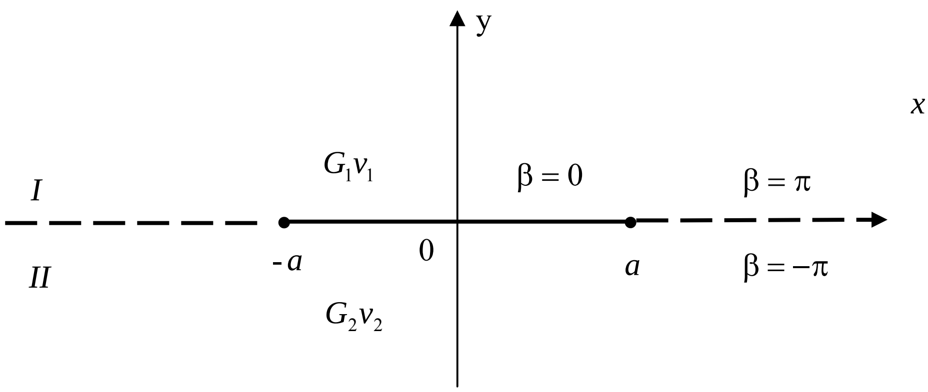
Для решения задачи весьма удобно использовать биполярные системы координат. Связь прямоугольных координат x и y с биполярными координатами α и β дается формулами [1]:

$$gx = \mathrm{sh}\alpha \ , \quad gy = \sin\beta \ , \quad ag = \mathrm{ch}\alpha + \cos\beta \tag{1}$$

(a – размерный параметр).

Координата α будет при этом изменяться от $-\infty$ до $+\infty$; в правой полуплоскости $\alpha > 0$, в левой $-\alpha < 0$; ось $0y$ является координатной линией $\alpha = 0$; точки $x = \pm a$, $y = 0$ соответствуют значениям $\alpha = \pm\infty$. Координата β меняется от $-\pi$ до $+\pi$, в верхней полуплоскости $\beta > 0$, в нижней – $\beta < 0$, $[-a, a]$ является координатной линией $\beta = 0$. Что касается отрезков оси $0x$ при $x < -a$ и $x > a$, то здесь координата β терпит разрыв, равный 2π, а именно на верхнем берегу $(y = +0)$ $\beta = \pi$, на нижнем – $(y = -0)$ $\beta = -\pi$.

Область $y = 0, \ |x| < a$ описывается координатной линией $\beta = 0$, а область $y = 0$, $|x| > a$ – линией $\beta = \pm\pi$ (фиг.1).



Фиг.1

Задача решается при помощи функции Папковича-Нейбера.

Общее решение плоской задачи теории упругости, согласно Папковичу-Нейберу, можно представить через три гармонические функции, поскольку одна из них принимается произвольно. Пользуясь этой произвольностью, принимаем одну из функций, равной тождественно нулю.

Приведем выражения перемещений u и ν, входящих в краевые условия напряжений σ_y и τ_{xy}, через функцию Папковича-Нейбера [1]

$$2GU(x,y) = -\frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial x}$$

$$2GV(x,y) = (3-4v)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial y}$$

$$\sigma_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[2(1-v)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y}\right] - y\frac{\partial^2\Phi_2(x,y)}{\partial y^2} \tag{2}$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2v)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial y}\right]$$

Рассмотрим первую основную задачу, то есть на берегах трещины заданы нормальное и касательное напряжения.

$$\sigma_y^{(m)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=(-1)^{m+1}\pi}=\sigma_m(\alpha)\ ,\ \tau_{xy}^{(m)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=(-1)^{m+1}\pi}=\tau_m(\alpha) \tag{3}$$

Предполагается, что функции $\sigma_m(\alpha)$ и $\tau_m(\alpha)$ $(m=1,2)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграле Фурье.

На линии контакта имеем полное сцепление, т.е. нормальное и касательное перемещения, так как нормальное и касательное напряжения равны:

$$\begin{gathered} U_1(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}=U_2(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}\ ,\ V_1(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}=V_2(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0} \\ \sigma_y^{(1)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}=\sigma_y^{(2)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}\ ,\ \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0} \end{gathered} \tag{4}$$

Подставляя в граничные условия (3) и (4) выражения (2) перемещений и напряжений через гармонические функции $\Phi_o^{(m)}(\alpha,\beta)$ и $\Phi_2^{(m)}(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ Папковича-Нейбера, мы приходим к следующей краевой задаче. При этом следует перейти от производных x и y к производным по α и β, пользуясь соотношениями [1]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\beta=0}=g\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\beta=0}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\beta=0}=g\frac{\partial}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0} \\ \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\beta=\pm\pi}=-g\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\beta=\pm\pi}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\beta=\pm\pi}=-g\frac{\partial}{\partial\beta}\Big|_{\beta=\pm\pi} \end{gathered} \tag{5}$$

получаем

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-\nu_m)\Phi_2^{(m)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(m)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=(-1)^{m+1}\pi}=\frac{a\sigma_m(\alpha)}{\mathrm{ch}\alpha-1} \\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2\nu_m)\Phi_2^{(m)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(m)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=(-1)^{m+1}\pi}=\frac{a\tau_m(\alpha)}{\mathrm{ch}\alpha-1} \\ \frac{\partial}{\partial\beta}\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}=\frac{G_1}{G_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0} \\ \left[(3-4\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0}= \\ =\frac{G_1}{G_2}\left[(3-4\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0} \\ \frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-\nu_2)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0}= \\ =\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0} \end{gathered} \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(1-2\nu_1\right)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Bigg|_{\beta=0}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(1-2\nu_2\right)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Bigg|_{\beta=0}$$

где введены новые гармонические функции

$$\Phi_3^{(m)}(x,y)=\frac{\partial\Phi_0^{(m)}(x,y)}{\partial y}\left(m=1,2\right).$$

Рассматриваемая краевая задача допускает точное решение в биполярных координатах, если представить искомые функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)\left(m=1,2\ ,\ n=2,3\right)$ в виде интегралов Фурье:

$$\Phi_{2,3}^{(m)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[A_{2,3}^{(m)}(\lambda)\operatorname{ch}\lambda\left(\pi+(-1)^m\beta\right)+$$
$$+B_{2,3}^{(m)}(\lambda)\operatorname{sh}\lambda\left(\pi+(-1)^m\beta\right)\Big]\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda}d\lambda \qquad \left(m=1,2\right) \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)\left(m=1,2,\ n=2,3\right)$, правые части которых будут содержать преобразования Фурье от заданных функций (разумеется, следует предположить, что эти преобразования существуют).

$$\frac{\chi_m+1}{2}B_2^{(m)}(\lambda)-B_3^{(m)}(\lambda)=(-1)^{m+1}\,\overline{\sigma}_m(\lambda),$$
$$\frac{\chi_m-1}{2}A_2^{(m)}(\lambda)-A_3^{(m)}(\lambda)=-\overline{\tau}_m(\lambda)\quad\left(m=1,2\right),$$
$$\left[A_3^{(1)}(\lambda)+\mu A_3^{(2)}(\lambda)\right]\operatorname{th}\lambda\pi+B_3^{(1)}(\lambda)+\mu B_3^{(2)}(\lambda)=0,$$
$$\chi_1A_2^{(1)}(\lambda)-A_3^{(1)}(\lambda)-\mu\chi_2A_2^{(2)}(\lambda)+\mu A_3^{(2)}+$$
$$+\left[\chi_1B_2^{(1)}(\lambda)-B_3^{(1)}(\lambda)-\mu\chi_2B_2^{(2)}(\lambda)+\mu B_3^{(2)}(\lambda)\right]\operatorname{th}\lambda\pi=0,$$
$$\left[\frac{\chi_1+1}{2}A_2^{(1)}(\lambda)-A_3^{(1)}(\lambda)+\frac{\chi_2+1}{2}A_2^{(2)}(\lambda)-A_3^{(2)}(\lambda)\right]\operatorname{th}\lambda\pi+ \tag{8}$$
$$+\frac{\chi_1+1}{2}B_2^{(1)}(\lambda)-B_3^{(1)}(\lambda)+\frac{\chi_2+1}{2}B_2^{(2)}(\lambda)-B_3^{(2)}(\lambda)=0,$$
$$\frac{\chi_1-1}{2}A_2^{(1)}(\lambda)-A_3^{(1)}(\lambda)-\frac{\chi_2-1}{2}A_2^{(2)}(\lambda)+A_3^{2}(\lambda)+$$
$$+\left[\frac{\chi_1-1}{2}B_2^{(1)}(\lambda)-B_3^{(1)}(\lambda)-\frac{\chi_2-1}{2}B_2^{(2)}(\lambda)+B_3^{(2)}(\lambda)\right]\operatorname{th}\lambda\pi=0,$$

где

$$\overline{\sigma}_m(\lambda)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_m(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{\mathrm{ch}\alpha-1}d\alpha\ ,\ \overline{\tau}_m(\lambda)=\frac{ia}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_m(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{\mathrm{ch}\alpha-1}d\alpha \tag{9}$$

$$\mu=G_1/G_2\ ,\ \chi_m=3-4\nu_m\qquad (m=1,2)$$

Решение системы (8) может быть представлено в следующем виде:

$$A_3^{(m)}(\lambda)=\frac{\chi_m-1}{2}A_2^{(m)}(\lambda)+\overline{\tau}_m(\lambda)$$

$$B_3^{(m)}(\lambda)=\frac{\chi_m+1}{2}B_2^{(m)}(\lambda)+(-1)^m\overline{\sigma}_m(\lambda)\quad (m=1,2)$$

$$\begin{gathered}A_2^{(2)}(\lambda)=-A_2^{(1)}(\lambda)+\left[\overline{\sigma}_2(\lambda)-\overline{\sigma}_1(\lambda)\right]\mathrm{cth}\lambda\pi+\overline{\tau}_1(\lambda)+\overline{\tau}_2(\lambda),\\ B_2^{(2)}(\lambda)=B_2^{(1)}(\lambda)+\left[\overline{\tau}_1(\lambda)-\overline{\tau}_2(\lambda)\right]\mathrm{cth}\lambda\pi-\overline{\sigma}_1(\lambda)-\overline{\sigma}_2(\lambda),\\ A_2^{(1)}(\lambda)=\Delta_1(\lambda)/\Delta(\lambda)\ ,\qquad B_2^{(1)}(\lambda)=\Delta_2(\lambda)/\Delta(\lambda),\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$2\Delta(\lambda)=\left(4h_2^2-h_1^2\right)\mathrm{ch}2\lambda\pi+4h_2^2+h_1^2,\ \Delta_1(\lambda)=2h_2M_2(\lambda)\mathrm{ch}\lambda\pi-h_1M_1(\lambda)\mathrm{sh}\lambda\pi$$

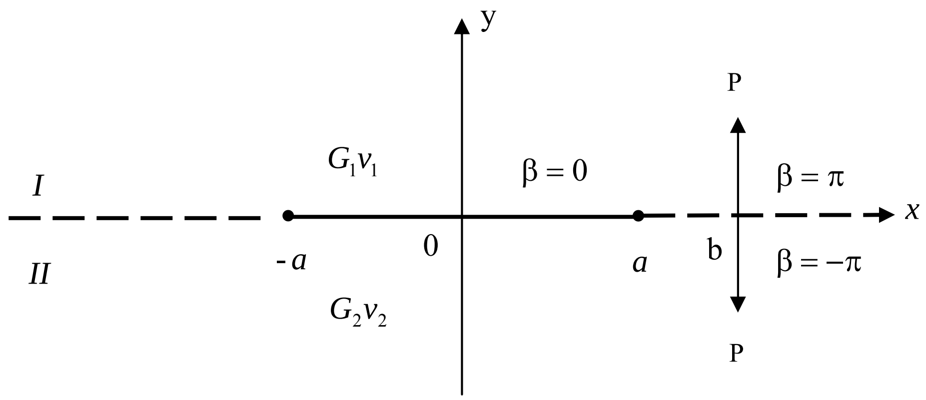
$$\Delta_2(\lambda)=2h_2M_1(\lambda)\mathrm{ch}\lambda\pi-h_1M_2(\lambda)\mathrm{sh}\lambda\pi$$

$$\begin{gathered}M_1(\lambda)=(1+\mu\chi_2)\left[\overline{\sigma}_1(\lambda)\mathrm{ch}\lambda\pi-\overline{\tau}_1(\lambda)\mathrm{sh}\lambda\pi\right]+\frac{\mu(1+\chi_2)}{2\mathrm{sh}\lambda\pi}\left[\overline{\tau}_2(\lambda)-\overline{\tau}_1(\lambda)\right]\\ M_2(\lambda)=(1+\mu\chi_2)\left[\tau_1(\lambda)\mathrm{ch}\lambda\pi-\overline{\sigma}_1(\lambda)\mathrm{sh}\lambda\pi\right]+\frac{\mu(1+\chi_2)}{2\mathrm{sh}\lambda\pi}\left[\overline{\sigma}_2(\lambda)-\overline{\sigma}_1(\lambda)\right]\end{gathered} \tag{11}$$

$$2h_1=\chi_1-1-\mu(\chi_2-1)\ ,\quad 4h_2=\chi_1+1+\mu(\chi_2+1)$$

Представляют интерес напряжения и деформации на линии контакта, а также деформации на берегах трещин.

Дадим решение одной конкретной задачи такого типа, когда внешние усилия, приложенные к берегам трещин, сводятся к двум противоположно направленным сосредоточенным силам величины P, приложенным в точках $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\pm\pi$ (фиг.2).



Фиг.2

где $b = a\left|\operatorname{cth}\frac{\alpha_0}{2}\right|$

В этом случае $\overline{\tau}_m(\lambda) = 0$, $\overline{\sigma}_m(\lambda) = -\frac{Pe^{i\lambda\alpha_0}}{\sqrt{2\pi}}$ $(m = 1{,}2)$ (12)

и получаем простое выражение для определения контактных напряжений и деформаций, а также деформации на берегах трещин

$$\sigma_y^{(m)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0} = \frac{P\sqrt{2(K+1)}}{2\pi}\cdot\frac{\cos(\alpha_0-\alpha)\theta}{b-x}\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\tau_{xy}^{(m)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0} = -\frac{PK_1}{\sqrt{2(K-1)}\,\pi}\cdot\frac{\sin(\alpha_0-\alpha)\theta}{b-x}\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$e_{xx}^{(m)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0} = \frac{P\sqrt{2}\,K_2}{8\pi G_1\sqrt{(K+1)}}\cdot\frac{\cos(\alpha_0-\alpha)\theta}{b-x}\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (13)$$

$$e_{yy}^{(m)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0} = \frac{P\sqrt{2}\,K_3}{8\pi G_1\sqrt{K+1}}\cdot\frac{\cos(\alpha_0-\alpha)\theta}{b-x}\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$e_{xy}^{(m)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0} = \frac{P\sqrt{2}\,K_4}{4\pi_1 G_1\sqrt{(K-1)}}\cdot\frac{\sin(\alpha_0-\alpha)\theta}{b-x}\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (m=1,2)$$

$$e_{xx}^{(1)}(\alpha,\pi) = -\frac{\chi_1-1}{G_1}K_0^* + \frac{\chi_1+1}{G_1}K_1^* \quad , \quad e_{yy}^{(1)}(\alpha,\pi) = -\frac{\chi_1+1}{G_1}K_0^* + \frac{\chi_1-1}{G_1}K_1^*$$

$$e_{xx}^{(2)}(\alpha,-\pi) = -\frac{\chi_1-1}{G_2}K_0^* - \frac{\chi_1+1}{G_2}K_1^* \quad , \quad e_{yy}^{(2)}(\alpha,-\pi) = -\frac{\chi_2+1}{G_2}K_0^* - \frac{\chi_2-1}{G_2}K_1^*$$

$$e_{xy}^{(1)}(\alpha,\pi) = -\frac{K_2^*}{G_1} \quad , \quad e_{xy}^{(2)}(\alpha,-\pi) = \frac{K_2^*}{G_2}$$

где

$$K = \frac{(\mu+\chi_1)^2 + (1+\mu\chi_2)^2}{2(\mu+\chi_1)(\mu+\mu\chi_2)}, \quad K_1 = \frac{(\mu+\chi_1)^2 - (1+\mu\chi_2)^2}{2(\mu+\chi_1)(\mu+\mu\chi_2)}$$

$$K_2 = \chi - 1 + \frac{(\chi_1+1)(1+\mu\chi_2)}{\mu+\chi_1} + 2K, \quad K_3 = \chi + 1 + \frac{(\chi_1-1)(1+\mu\chi_2)}{\mu+\chi_1} + 2K$$

$$K_4 = 1 + \frac{1+\mu\chi_2}{\mu+\chi_1} - 2K$$

$$\theta = \frac{1}{\pi}\ln\left[\sqrt{\frac{K+1}{2}} + \sqrt{\frac{K-1}{2}}\right], \quad \alpha_0 - \alpha = \ln\frac{(a-x)(b+a)}{(a+x)(b-a)}$$

$$K_0^* = \frac{Pa\delta(\alpha_0-\alpha)}{2\left(x^2-a^2\right)} \quad , \quad K_1^* = \frac{P}{4\pi}\cdot\frac{K_0}{\sqrt{K^2-1}}\cdot\frac{\sin(\alpha_0-\alpha)\theta}{x-b}\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$K_0 = K - \frac{1+\mu\chi_2}{\mu+\chi_1}, \qquad K_2^* = \frac{P\cos(\alpha_0-\alpha)\theta}{2\pi|x-b|}\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

При $G_1 = G_2 = G$, $v_1 = v_2 = v$ получаем

$$\sigma_y(\alpha,0) = \frac{P}{\pi(b-x)}\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$e_{xx}(\alpha,0) = e_{yy}(\alpha,0) = \frac{1-v}{G}\sigma_y(\alpha,0)$$

$$\tau_{xy}(\alpha,0) = e_{xy}(\alpha,0) = 0$$

$$e_{xx}^{(1)}(\alpha,\pi) = e_{xx}^{(2)}(\alpha,-\pi) = -\frac{2(1-2v)}{G}\cdot\frac{Pa\delta(\alpha_0-\alpha)}{2(x^2-a^2)}$$

$$e_{yy}^{(1)}(\alpha,\pi) = e_{yy}^{(2)}(\alpha,-\pi) = -\frac{4(1-v)}{G}\cdot\frac{Pa\delta(\alpha_0-\alpha)}{2(x^2-a^2)}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\pi) = -\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,-\pi) = -\frac{1}{G}\cdot\frac{P\cos(\alpha_0-\alpha)\theta}{2\pi|x-b|}\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}} \; .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 401 с.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344 с.
3. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
4. Панасюк В.В., Саврук М.П., Доцышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
5. Даштоян Л.Л. Об одной смешанной задаче для составной плоскости с двумя полубесконечными трещинами. / Материалы XII Республик. конф. молодых ученых. «Механика». Ереван: 2003, с.78–82.
6. Арутюнян Л.А. Плоская задача составной плоскости с трещиной. /Межд. научно-технич. конф. «Архитектуры и Строительства». Ереван: 2008, с.34–37.

Арутюнян Левон Арсенович
научный сотрудник Института механики НАН РА
адрес: пр. Маршала Баграмяна 24[б], 0019, Ереван, Армения

Поступила в редакцию 2.03.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №1, 2010 Механика

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ ОТ КРОМКИ ПЛАСТИНКИ

БЕЛУБЕКЯН М.В., ХАЧАТРЯН Л.С.

Ключевые слова: пластина, упругая волна, изгиб, отражение.

Keywords: plate, elastic wave, bending, reflection.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Լ. Ս Խաչատրյան
Ծռման ալիքի անդրադարձումը սալի սահմաններից

Ծռման ալիքի անդրադարձումը սալի սահմաններից խնդիրը ուսումնասիրվել է բազմիցս: Համեմատաբար քիչ ուսումնասիրված հարցերից է ծռման ալիքի անդրադարձումը սալի հարթ եզրերից: Այս աշխատանքում ներկայացնում ենք հետևյալ խնդիրը՝ ծռման ալիքի անդրադարձումը սալի տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Ազատ եզրի մասնավոր դեպքում, երբ բացակայում է ալիքի անդրադարձումը, ստացվում է տեղայնացված ծռման տատանումների խնդիրը:

M.V. Belubekyan, L.S. Khachatryan
Reflection of bending Waves from Border of the Plate

To problems of the reflection of the bending waves from flat border of the ambience dedicated to the multiple studies. Relatively little works are connected with questions of the reflection cuved waves from flat edge of the thin plate. In this work happen to the decisions of the problem of the plate under different border condition. For partial case of the free edge, as limiting case of the absence of the reflected wave, is got decision of the problem localized curved variations.

Задачам отражения упругих волн от плоской границы среды посвящены многочисленные исследования. Сравнительно мало работ связаны с вопросами отражения изгибных волн от плоской кромки тонкой пластинки. В настоящей работе приводятся решения задачи отражения изгибных волн от кромки пластинки при различных граничных условиях. Для частного случая свободной кромки, как предельный случай отсутствия отраженной волны, получается решение задачи локализованных изгибных колебаний .

Задачам отражения упругих волн от плоской границы среды посвящены многочисленные исследования [1]. Сравнительно мало работ связаны с вопросами отражения изгибных волн от плоской кромки тонкой пластинки [2]. В настоящей работе приводятся решения задачи отражения изгибных волн от кромки пластинки при различных граничных условиях. Для частного случая свободной кромки, как предельный случай отсутствия отраженной волны, получается решение задачи локализованных изгибных колебаний [3,4].

1. Пусть упругая пластинка занимает область

$$-\infty < x < \infty, 0 \le y < \infty, -h \le z \le h$$

На кромку пластинки $y = 0$ падает изгибная волна. Требуется определить отраженную волну при различных условиях закрепления кромки y=0.

Уравнение изгибных колебаний изотропной пластинки по теории Кирхгофа имеет вид [5]

$$D\Delta^2 w + 2gh\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1)$$

где $w-$ функция прогиба пластины, $\rho-$ плотность материала, $D-$ жесткость на изгиб

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \qquad (1.2)$$

$E-$ модуль Юнга, $\nu-$ коэффициент Пуассона.

Если представить решение уравнения (1.1) в виде гармонических волн [2]

$$w = w_0 \exp i(\omega t - k_1 x + k_2 y) \qquad (1.3)$$

то получается следующее характеристическое уравнение:

$$D(k_1^2 + k_2^2)^2 - 2\rho h\omega^2 = 0 \qquad (1.4)$$

Из (1.4) можно определить волновое число k_2 посредством k_1 и ω в виде четырех корней

$$k_{21} = -k_{22} = \sqrt{\Omega - k_1^2}, \quad k_{23} = -k_{24} = i\sqrt{\Omega + k_1^2} \qquad (1.5)$$

Очевидно, что для существования падающей волны необходимо условие

$$\Omega > k_1^2, \quad \Omega = (2\rho h)^{1/2} D^{1/2}\omega \qquad (1.6)$$

Из (1.3) и (1.5), с учетом (1.6) следует, что решение для падающей волны имеет вид:

$$W_{\text{п}} = A\exp i(\omega t - k_1 x + k_{21} y), \ k_1 \geq 0 \qquad (1.7)$$

и для отражённой волны

$$W_{\text{отр}} = B\exp i(\omega t - k_1 x - k_{21} y) + C\exp i(\omega t - k_1 x + k_{23} y) \qquad (1.8)$$

Слагаемое в (1.8) с амплитудой C является неоднородной волной, т.е. она затухает по глубине. Амплитуды отражённых волн B и C должны определяться удовлетворением граничными условиями при $y = 0$.

2. Вначале рассматривается случай жестко закрепленного края

$$W = 0, \ \partial w/\partial y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \qquad (2.1)$$

Подстановка

$$W = W_{\text{п}} + W_{\text{отр}}, \qquad (2.2)$$

согласно (1.7), (1.8), в граничные условия (2.1) приводит к системе алгебраических уравнений относительно искомых постоянных B и C, откуда и получается

$$B = \Omega^{-1}(\Omega - 2k_1^2 + 2i\sqrt{\Omega^2 - k_1^2})A; \ C = -2\Omega^{-1}(\Omega - k_1^2 - i\sqrt{\Omega^2 - k_1^4})A \qquad (2.3)$$

Из выражения (2.3) следует, что при условии $\Omega = 2k_1^2$ фаза отраженной волны меняется на 0,5π. В (2.3) частный случай $k_1 = 0$ соответствует нормально падающей волне.

Если край пластинки шарнирно закреплён, то должны выполняться условия

$$W = 0, \ \partial^2 w/\partial y^2 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \qquad (2.4)$$

Требуя, чтобы решение (2.2) удовлетворяло условию (2.4), получим

$$B = -A, \quad C = 0 \qquad (2.5)$$

т.е. при шарнирном закреплении неоднородная волна не существует. Решение для этого случая приводится в монографии [2].

Для варианта граничных условий скользящего контакта

$$\partial w / \partial y = 0, \quad \partial^3 w / \partial y^3 = 0 \tag{2.6}$$

искомое решение имеет вид

$$B = A, \ C = 0 \tag{2.7}$$

Граничные условия свободного края имеют вид

$$M_y = 0, \quad \tilde{N}_y = 0 \quad \text{при} \ y = 0 \tag{2.8}$$

или, согласно [5],

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{2.9}$$

В [2] вместо условия равенства нулю обобщенного перерезывающего усилия $\tilde{N}_y$ используется условие равенства нулю перерезывающего усилия N_y, т. е. вместо второго условия из (2.9) берётся условие $\partial^3 w / \partial y^3 = 0$.

Удовлетворение граничным условиям (2.9) приводит к следующей системе уравнений:

$$(q_2^2 + \nu)B - (q_1^2 - \nu)C = -(q_2^2 + \nu)A \tag{2.10}$$

$$q_2(q_2^2 + 2 - \nu)B + iq_1(q_1^2 - 2 + \nu)C = q_2(q_2^2 + 2 - \nu)A$$

где $q_1 = \sqrt{\eta + 1}, \quad q_2 = \sqrt{\eta - 1}, \quad \eta = k_1^{-2}\Omega$ (2.11)

Используя преобразования

$$\begin{aligned} &\pm iq_1(q_2^2 + \nu)(q_1^2 - 2 + \nu) + q_2(q_1^2 - \nu)(q_2^2 + 2 - \nu) = \\ &= \pm i(q_1 \mp iq_2)[q_1^2 q_2^2 - 2i(1-\nu)q_1 q_2 \pm \nu^2] \end{aligned} \tag{2.12}$$

получим решение системы уравнений в виде

$$B = -\frac{(q_1 + iq_2)[q_1^2 q_2^2 - 2i(1-\nu)q_1 q_2 - \nu^2]}{(q_1 - iq_2)\Delta_1} A \tag{2.13}$$

$$C = -\frac{2i}{q_1 - iq_2} \frac{q_2(q_2^2 + \nu)(q_1^2 - \nu)}{\Delta_1} A$$

где

$$\Delta_1 = q_1^2 q_2^2 - 2i(1-\nu)q_1 q_2 - \nu^2 \tag{2.14}$$

Из (2.13) в предельном случае $\Delta_1 \to 0$ получается дисперсионное уравнение локализованных изгибных колебаний пластинки, допускающее решение, удовлетворяющее условию $\eta < 1$ [4].

3. Как видно из предыдущего пункта, для граничных условий шарнирного закрепления и скользящего контакта, в отличие от граничных условий жесткого закрепления и свободного края, неоднородная волна не отражается $(C = 0)$. Можно ли заменой граничного условия жесткого закрепления условием упругого закрепления устранить отраженную неоднородную волну? Можно ли укреплением края свободной пластинки ребром жесткости устранить эту волну?

В частности, если к свободному краю пластинки прикреплено ребро, то согласно монографии [6], наиболее простой вариант учета ребра является замена граничных условий (2.9) условиями

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}+\frac{E_o I}{D}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \quad \text{при } y=0 \tag{3.1}$$

где $E_o I -$ жесткость ребра на изгиб, $E_o -$ модуль Юнга материала ребра, I – момент инерции поперечного сечения ребра.

Подстановка решения (2.2), с учетом (1.7), (1.8), в граничные условия (3.1) приводит к системе уравнений относительно искомых постоянных, откуда и, аналогично предыдущим случаям, они определяются

$$B=\frac{-(q_1+iq_2)[q_1^2 q_2^2-2i(1-\nu)q_1 q_2-\nu^2]}{(q_1-iq_2)[\Delta_1+\alpha k_1(q_1+iq_2)]}A \tag{3.2}$$

$$C=-\frac{2i(q_2^2+\nu)[q_2(q_1^2-\nu)+i\alpha k_1]}{(q_1-iq_2)[\Delta_1+\alpha k_1(q_1+iq_2)]}B$$

где $\alpha=E_o ID^{-1}$ (3.3)

Из выражения (3.2) видно, что нельзя подбором параметра α, характеризующего изгибную жесткость ребра, устранить неоднородную волну.

ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam, North-Holl. Publ. Co, 1984, p. 425.
2. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) М.: Наука, 1982. 332 с.
3. Коненков Ю. К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа. //Акуст. журн. 1960. №1. С.124-126.
4. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. ///ПМ. 1994. Т.30, № 2. С. 61-68.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
6. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Изд. Физматлит, 1963. 636 с.

Белубекян Мелс Вагаршакович
Профессор, кандидат физ.-мат. наук, главный научный сотрудник,
Институт механики НАН РА
Адрес: 0019 Ереван, пр.Баграмяна 24Б
Тел.: (+37410) 52-15-03, E-mail: mbelubekyan@sci.am

Хачатрян Лейли Самвеловна
Ереванский колледж права, экономики и управления,
преподаватель
Дом.тел.: (+37410) 66-69-88

Поступила в редакцию 17.04.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **63, №1, 2010** **Механика**

УДК 539.3

О ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТАВНОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ДЕЙСТВИИ “СЛЕДЯЩЕЙ” И НЕИЗМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ В ПРОЛЁТЕ

КАЗАРЯН К.Б., МАРТИРОСЯН С.Р., САНОЯН Ю.Г.

Ключевые слова: составная консоль, устойчивость, следящая сила, флаттер, дивергенция, сила неизменного направления.
Key words: non-uniform bar, stability, tangential force, flatter, divergence, the force parallel to the axis bar.

Կ. Բ. Ղազարյան, Ս. Ռ. Մարտիրոսյան, Յու. Գ. Սանոյան
Բաղադրյալ ձողի կայունության մի խնդրի մասին հետևող ու անփոփոխ ուղղություն ունեցող ուժերի ազդեցության տակ

Դիտարկված է բաղադրյալ առաձգական ձողի կայունության խնդիրը, որի մի ծայրը ազատ է, իսկ մյուսը՝ ամրակցված: Ձողը կազմված է երկու մասից՝ տարբեր ամրության գործակիցներով:Այդ մասերը միացնող հատույթում միաժամանակ կիրառված են “հետևող” ու անփոփոխ ուղղություն ունեցող երկու կենտրոնացված ուժեր: Գտնված են տվյալ ազդող ուժերի կրիտիկական արժեքները, որոնց դեպքում տեղի է ունենում դիվերգենտ և ֆլատերային տեսքերի կայունության կորուստ:

K. B. Gazaryan, S. R. Martirosyan, Ju. G. Sanoyan
On the Problem of Non -Uniform Cantilever Bar Stability Loaded at Span by a Concentrated Force Parallel to the Axis Bar and by Tangential Follower Force

The problem of disturbed motion stability of non-uniform elastic cantilever bar loaded at span by a concentrated force parallel to the axis of the un-deflected bar and by tangential force to the axis of the deflected bar is considered.

Рассматривается задача устойчивости возмущённого движения составного упругого консольного стержня, нагруженного “следящей” силой и силой неизменного направления, параллельной оси стержня, приложенных в пролёте.

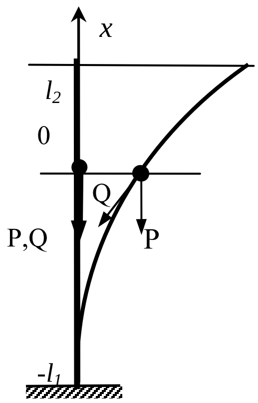
Случай одновременного действия следящей и неизменного направления сил, приложенных на свободном конце консольного стержня, приводится в [1], где показано стабилизирующее влияние сжимающей следящей нагрузки. В работе [2] рассмотрена задача устойчивости кусочно-неоднородной балки, когда на линии раздела материалов балки приложена следящая сила или сила неизменного направления. Показана возможность статической потери (дивергентной) устойчивости в случае действия следящей силы. В работе [3] в более общей постановке исследована устойчивость консольного стержня, сжатого тангенциальной силой. Рассмотрены различные варианты механических условий, осуществляемых в точке приложения силы. Обсуждены вопросы существования дивергентной и флаттерной типов потери устойчивости. Задача статической устойчивости разномодульного стержня, в середине которого приложена “мёртвая” или следящая сила, рассмотрена в [4]. В работах [5-6] рассмотрена задача устойчивости шарнирно опёртого составного стержня, изготовленного из двух различных материалов различных длин, под воздействием сосредоточенной силы, приложенной в пролёте. В работе [7] исследована задача устойчивости составного вязкоупругого стержня, нагруженного силой неизменного направления. Исследованы вопросы дивергентной и флаттерной форм потери устойчивости. Изучены также вопросы потери устойчивости стержня, когда одна из сил является сжимающей, а другая сила является растягивающей.

В настоящей работе показано, что одновременное воздействие сжимающих сил – неизменного направления и следящей, оказывает стабилизирующее действие при равенстве этих сил, а при остальных значениях сила неизменного направления оказывает эффект дестабилизации в смысле флаттерной потери устойчивости, а следящая сила приводит к стабилизации в смысле дивергентной потери устойчивости.

В случае, когда сила неизменного направления – растягивающая, а следящая – сжимающая, наличие силы неизменного направления приводит к стабилизации в смысле потери устойчивости флаттерного типа.

В случае же, когда сила неизменного направления является сжимающей, а следящая – растягивающей, наличие следящей силы приводит к дестабилизации в смысле дивергентной неустойчивости, а при равенстве этих сил происходит потеря устойчивости обоих типов.

1. Пусть упругий консольный стержень, состоящий из двух частей длинами l_1 и l_2, имеющих жёсткости E_1J_1 и E_2J_2 соответственно, нагружен следящей силой Q и силой неизменного направления P, приложенных в пролёте – в точке сопряжения участков $(x=0)$. При этом, конец $x=-l_1$ жёстко закреплён, а второй конец $x=l_2$ свободен (фиг.1).



Фиг.1

Будем считать, в целях упрощения, что погонная масса первой части стержня $m_1=\rho_1 S_1$ (ρ_1 и S_1 – плотность материала и площадь торцевого сечения соответственно), а также, что силы сопротивления пренебрежимо малы. Тогда, в рамках обычных предположений элементарной теории изгиба, дифференциальные уравнения малых изгибных колебаний для каждой части стержня около невозмущённой (прямолинейной) формы равновесия будут иметь вид:

$$E_1J_1\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}+(P+Q)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=0\,,\, w_1=w_1(x,t),\, x\in[-l_1,0] \tag{1}$$

$$E_2J_2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4}+m_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=0\,,\, w_2=w_2(x,t),\, x\in[0,l_2] \tag{2}$$

Здесь $m_2=\rho_2 S_2$ – погонная масса второй части стержня, ρ_2 – плотность материала, S_2 – площадь торцевого сечения; $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$ – малые прогибы в любой точке первой и второй частях стержня соответственно.

Граничные условия по концам стержня и в точке сопряжения будут

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0,\ x = -l_1 \tag{3}$$

$$w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, E_1 J_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = E_2 J_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, E_1 J_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial w_1}{\partial x} = E_2 J_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}, x = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3},\ x = l_2 \tag{5}$$

Задача устойчивости возмущённого движения консольного стержня состоит в нахождении критических значений параметров P, Q и таких их сочетаний, при которых краевая задача, описываемая уравнениями (1), (2) и граничными условиями (3)-(5), имеет решения, отличные от тривиального.

Представляя решение уравнений (1), (2) в виде гармонических колебаний

$$w_1(x,t) = f_1(x)e^{i\omega t},\ x \in [-l_1, 0]$$
$$w_2(x,t) = f_2(x)e^{i\omega t},\ x \in [0, l_2] \tag{6}$$

приходим к следующей краевой задаче на собственные значения:

$$f_1'''' + (k_1^2 + k_2^2) f_1'' = 0, x \in [-l_1, 0] \tag{7}$$

$$f_2'''' - \beta_2 \omega^2 f_2 = 0,\ x \in [0, l_2] \tag{8}$$

$$f_1 = f_1' = 0,\ x = -l_1$$
$$f_1 = f_2,\ f_1' = f_2',\ f_1'' = \alpha f_2''\ \ f_1''' + k_1^2 f_1' = \alpha f_2''',\ x = 0 \tag{9}$$
$$f_2'' = f_2''' = 0, \quad x = l_2$$

где

$$k_1^2 = P(E_1 J_1)^{-1}, k_2^2 = Q(E_1 J_1)^{-1}, \beta_2 = m_2 (E_2 J_2)^{-1}, \alpha = E_2 J_2 (E_1 J_1)^{-1} \tag{10}$$

Подставляя общий интеграл уравнений изогнутой оси стержня (7), (8)

$$f_1(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4,\ x \in [-l_1, 0] \tag{11}$$

$$f_2(x) = C_5 \sin \Omega x + C_6 \cos \Omega x + C_7 \mathrm{ch}\Omega x + C_8 \mathrm{sh}\Omega x,\ x \in [0, l_2] \tag{12}$$

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \sqrt{(P+Q)/(E_1 J_1)},\ \Omega^4 = \beta_2 \omega^2 = m_2 \omega^2 (E_2 J_2)^{-1} \tag{13}$$

и их производные в граничные условия (9), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_i, $i = 1,2...8$.

Для нахождения критических значений параметров P, Q и их сочетаний, приводящих к потере устойчивости в задаче (1)-(5), имеем алгебраическое уравнение относительно приведённой частоты $\overline{\Omega}$

$$\alpha^2 \overline{\Omega}^4 \gamma^4 [2(1-\cos r) - r\sin r](1 - \cos\overline{\Omega}\mathrm{ch}\overline{\Omega}) - \alpha\overline{\Omega}^3\gamma^3 r(\sin r - r\cos r)(\sin\overline{\Omega}\mathrm{ch}\overline{\Omega} + \cos\overline{\Omega}\mathrm{sh}\overline{\Omega}) -$$
$$-\alpha\overline{\Omega}^2\gamma^2[r(r^2 - r_1^2)\sin r + 2r_1^2(1-\cos r)]\sin\overline{\Omega}\mathrm{sh}\overline{\Omega} - \alpha\overline{\Omega}\gamma r^3 \sin r(\sin\overline{\Omega}\mathrm{ch}\overline{\Omega} - \cos\overline{\Omega}\mathrm{sh}\overline{\Omega}) +$$
$$+r^2[r^2 - r_1^2(1-\cos r)](1 + \cos\overline{\Omega}\mathrm{ch}\overline{\Omega}) = 0 \tag{14}$$

где

$$r = kl_1,\ r_1 = k_1 l_1,\ \overline{\Omega} = \Omega l_2, \gamma = l_1 / l_2 \tag{15}$$

или, в соответствии с (10), (13)

$$r = \sqrt{(P+Q)/E_1 J_1} l_1,\ r_1 = \sqrt{P/E_1 J_1} l_1, \overline{\Omega}^4 = m_2 \omega^2 l_2^4 / E_2 J_2 \tag{16}$$

которое получается приравниваем нулю определителя, составленного из коэффициентов полученной системы относительно постоянных C_i .

Переходя к пределу при $r \to 0$ в уравнении (14), в принятом приближении получаем следующее уравнение относительно частоты собственных колебаний незагруженного стержня:

$$\begin{gathered}\alpha^2\bar{\Omega}^4\gamma^4(1-\cos\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega})-4\alpha\bar{\Omega}^3\gamma^3(\sin\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}+\cos\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega})-12\alpha\bar{\Omega}^2\gamma^2\sin\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega}-\\ -12\alpha\bar{\Omega}\gamma(\sin\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}-\cos\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega})+12(1+\cos\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega})=0\end{gathered} \qquad (17)$$

где $\alpha, \gamma, \bar{\Omega}$ определены выражениями (10), (15) и (16).

2. Исследуем задачу устойчивости (1)-(5) в предположении

$$l_1 = l_2 = l\ (\gamma = 1),\ E_1J_1 = E_2J_2 = EJ\ (\alpha = 1) \qquad (18)$$

С помощью графо-аналитических и численных методов исследований получены следующие результаты.

1)Если $Q = 0$, то имеет место дивергентная неустойчивость при значениях

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 n^2 EJ}{4l^2} \quad n=1.2.3\ldots \qquad (19)$$

При $n = 1$ критическое значение сжимающей силы

$$P^*_{\text{кр.див.}} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \qquad (20)$$

соответствует обычной потере устойчивости в смысле Эйлера [1].

2) Если $P = 0$, то имеет место неустойчивость флаттерного типа. Первое критическое значение следящей силы

$$Q^*_{\text{кр.фл.}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \qquad (21)$$

Это значение примерно в два раза меньше критического значения следящей силы, полученного В.В.Болотиным при решении задачи устойчивости стержня, сжатого следящей силой, рассмотренной в [1].

3) Если $P = Q$, то имеют место как дивергентная, так и флаттерная типы неустойчивости. Критические значения сил определяются выражениями

$$P_{\text{кр.див}} = Q_{\text{кр.див}} = \frac{\pi^2 EJ}{2l^2},\ (P+Q)_{\text{кр.див}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \qquad (22)$$

$$P_{\text{кр.фл.}} = Q_{\text{кр.фл}} = \frac{\pi^2 EJ}{\sqrt{2}l^2},\ (P+Q)_{\text{кр.фл.}} = \frac{\sqrt{2}\pi^2 EJ}{l^2} \qquad (23)$$

В соответствии с (20) и (21), из (22) и (23) следует, что одновременное воздействие следящей и неизменного направления сил оказывает стабилизирующее действие. При этом, в смысле дивергентной неустойчивости значение (22) примерно в 4 раза превышает значение (20), а в смысле флаттерной неустойчивости значение (23) примерно в 1.4 раза превышает значение (21).

4) Если $0 < P < 2.47\,EJ/l^2$, то имеет место неустойчивость флаттерного типа. Соответствующие критические значения приведены в табл.1.

Таблица 1

$-P_{\text{кр.фл.}}\, l^2/EJ$	0.00	0.25	0.05	1.00	1.50	2.00	2.47
$-Q_{\text{кр.фл.}}\, l^2/EJ$	10.32	10.18	10.03	9.75	9.47	9.19	8.94

Как видно из табл.1, $\left(P+Q\right)_{\text{кр.фл.}}$ примерно равно значению (21). Следовательно, сила P оказывает дестабилизирующее действие: с возрастанием значения P флаттер имеет место при более меньших значениях $Q_{\text{кр.фл.}}$, чем значение (21).

5) Если $2.47\,EJ/l^2 < P < 8.68\,EJ/l^2$, то имеют место как флаттерная, так и дивергентная неустойчивости. Причём потеря устойчивости дивергентного типа происходит не позже потери устойчивости флаттерного типа. Соответствующие критические значения приведены в табл.2.

Таблица 2

$-P_{\text{кр.}}\,l^2/EJ$	2.47	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	8.68
$-Q_{\text{кр.фл.}}\,l^2/EJ$	8.94	8.66	8.16	7,70	7.27	6.90	6.59	6.40
$-Q_{\text{кр.див.}}\,l^2/EJ$	0.00	1.67	3.74	5.00	5.75	6.18	6.37	6.40

В этом случае, также, наличие силы P оказывает эффект дестабилизации в смысле флаттерной неустойчивости – с возрастанием значения P флаттер имеет место при более меньших значениях $Q_{\text{кр.фл.}}$, чем значение (21). А наличие силы Q приводит к стабилизации возмущённого движения стержня в смысле дивергентной неустойчивости. Отметим, что при $P_{\text{кр}} = 8.68\,EJ/l^2$ имеем $Q_{\text{кр.фл.}} = Q_{\text{кр.див.}} = 6.40\,EJ/l^2$.

6) Если $P > 8.68\,EJ/l^2$, то имеет место только лишь дивергентная неустойчивость. Соответствующие критические значения приведены в табл.3.

Таблица 3

$-P_{\text{кр.див.}}\,l^2/EJ$	8.68	11.20	13.87	15.87	17.62	19.24	20.76	22.21
$-Q_{\text{кр.див.}}\,l^2/EJ$	6.40	6.00	5.00	4.00	3.00	2.00	1.00	0.00

Заметим, что уравнение (14), в котором $\alpha = \gamma = 1$, а r и r_1 определяются выражениями (16), соответствует случаю, когда обе приложенные силы P и Q являются “сжимающими”: $P_x < 0,\ \ Q_x < 0$.

Однако немалый интерес представляет исследование задачи устойчивости возмущённого движения рассматриваемой консоли в случае, когда одна из приложенных сил является растягивающей, а другая – сжимающей.

3.Рассмотрим задачу устойчивости возмущённого движения составной консоли в случае, когда в исходном положении равновесия сила неизменного направления P является растягивающей, а следящая сила Q – сжимающей: $P_x > 0,\ \ Q_x < 0$.

Уравнение относительно собственных частот колебаний стержня в предположении (18) описывается следующим соотношением:

при $P > Q$

$$\begin{aligned}&\bar\Omega^4[2(1-\mathrm{ch}r)+r\mathrm{sh}r](1-\cos\bar\Omega\mathrm{ch}\bar\Omega)-\bar\Omega^3 r(r\mathrm{ch}r-\mathrm{sh}\,r)(\sin\bar\Omega\mathrm{ch}\bar\Omega+\cos\bar\Omega\mathrm{sh}\bar\Omega)-\\&-\bar\Omega^2[r(r^2-r_1^2)\mathrm{sh}r-2r_1^2(1-\mathrm{ch}r)]\sin\bar\Omega\mathrm{sh}\bar\Omega-\bar\Omega r^3\mathrm{sh}r(\sin\bar\Omega\mathrm{ch}\bar\Omega-\cos\bar\Omega\mathrm{sh}\bar\Omega)+\\&+r^2[r^2-r_1^2(1-\mathrm{ch}r)](1+\cos\bar\Omega\mathrm{ch}\bar\Omega)=0\end{aligned} \tag{24}$$

$$r = \sqrt{(P-Q)/EJ}\,l\,, r_1 = \sqrt{P/EJ}\,l\,, \bar{\Omega}^4 = m_2\omega^2 l^4 / EJ \tag{25}$$

при $P < Q$

$$\begin{aligned}&\bar{\Omega}^4[2(1-\cos r) - r\sin r](1-\cos\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}) - \bar{\Omega}^3 r(\sin r - r\cos r)\times\\ &\times(\sin\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega} + \cos\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega}) - \bar{\Omega}^2[r(r^2+r_1^2)\sin r - 2r_1^2(1-\cos r)]\sin\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega} -\\ &-\bar{\Omega}r^3\sin r(\sin\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega} - \cos\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega}) + +r^2[r^2 + r_1^2(1-\cos r)](1+\cos\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}) = 0\end{aligned} \tag{26}$$

$$r = \sqrt{(Q-P)/EJ}\,l,\ \ r_1 = \sqrt{P/EJ}\,l,\ \ \bar{\Omega}^4 = m_2\omega^2 l^4 / EJ \tag{27}$$

В этом случае при $P > Q$ возмущённое движение стержня устойчиво. А при $P < Q$ имеет место только флаттерная неустойчивость. При этом, наличие консервативной составляющей P приводит к стабилизации. Критические значения приведены в табл. 4.

Таблица 4

$P_{\text{кр.фл.}}\, l^2/EJ$	0.00	0.25	1.00	4.00	16.00	25.00	29.16	34.93
$-Q_{\text{кр.фл.}}\, l^2/EJ$	10.32	10,47	10.92	12.85	21.98	30.13	34.32	41.42

Если $P = Q \neq 0$, то уравнение относительно собственных частот колебаний стержня будет иметь вид

$$\begin{aligned}&\alpha^2\bar{\Omega}^4\gamma^4(1-\cos\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}) - 4\alpha\bar{\Omega}^3\gamma^3(\sin\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega} + \cos\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega}) - \left(12 - r_1^2\right)\alpha\bar{\Omega}^2\gamma^2\sin\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega} -\\ &-12\alpha\bar{\Omega}\gamma(\sin\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega} - \cos\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega}) + \left(12 + 6r_1^2\right)(1+\cos\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}) = 0\end{aligned}$$

$$r_1 = \sqrt{P/EJ}\,l\,,\ \bar{\Omega}^4 = m_2\omega^2 l^4 / EJ$$

При этом имеет место только дивергентная неустойчивость при $P^{\bullet}_{\text{кр.див}} = Q^{\bullet}_{\text{кр.див}} \approx 43{,}13 EJl^{-2}$.

4. Теперь рассмотрим задачу устойчивости возмущённого движения составной консоли в случае, когда в исходном положении равновесия сила неизменного направления P является сжимающей, а следящая сила Q - растягивающей: $P_x < 0$, $Q_x > 0$. Уравнение относительно собственных частот колебаний стержня в предположении (18) описывается следующим соотношением:

при $P < Q$

$$\begin{aligned}&\bar{\Omega}^4[2(1-\mathrm{ch}r) + r\mathrm{sh}r](1-\cos\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}) - \bar{\Omega}^3 r(r\mathrm{ch}r - \mathrm{sh}\,r)(\sin\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega} + \cos\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega}) -\\ &-\bar{\Omega}^2[r(r^2+r_1^2)\mathrm{sh}r + 2r_1^2(1-\mathrm{ch}r)]\sin\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega} - \bar{\Omega}r^3\,\mathrm{sh}r(\sin\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega} - \cos\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega}) +\\ &+r^2[r^2 + r_1^2(1-\mathrm{ch}r)](1+\cos\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}) = 0\end{aligned} \tag{28}$$

$$r = \sqrt{(Q-P)/EJ}\,l\,, r_1 = \sqrt{P/EJ}\,l\,, \bar{\Omega}^4 = m_2\omega^2 l^4 / EJ \tag{29}$$

а при $P > Q$ совпадает с уравнением (14), в котором r и r_1 определяются выражениями (25).

В этом случае при $P < Q$ возмущённое движение стержня устойчиво. А при $P > Q$ имеет место только дивергентная неустойчивость. При этом наличие следящей силы Q приводит к дестабилизации. Критические значения приведены в табл.5.

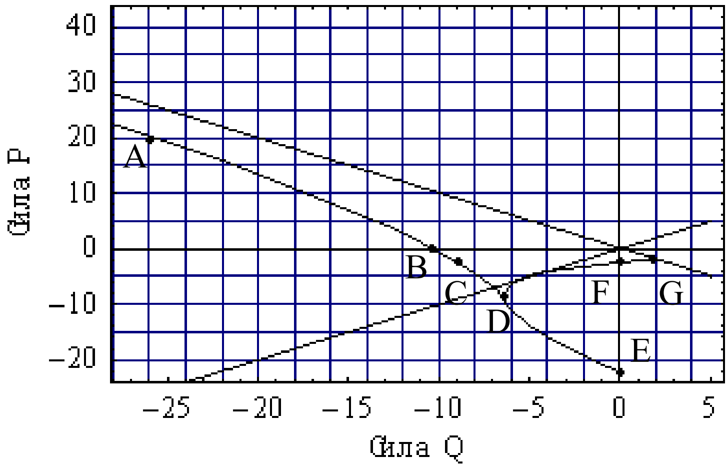
Таблица 5

$-P_{\text{кр.див.}}\, l^2/EJ$	2.47	2.40	2.22	2.06	2.00
$-Q_{\text{кр.див.}}\, l^2/EJ$	0.00	0.25	1.00	1.69	2.00

Если $P = Q \neq 0$, то уравнение относительно собственных частот колебаний стержня имеет вид

$$\alpha^2\bar{\Omega}^4\gamma^4(1-\cos\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}) - 4\alpha\bar{\Omega}^3\gamma^3(\sin\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}+\cos\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega}) - \alpha\bar{\Omega}^2\gamma^2\left(12+r_1^2\right)\sin\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega} -$$
$$-12\alpha\bar{\Omega}\gamma(\sin\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}-\cos\bar{\Omega}\mathrm{sh}\bar{\Omega}) + \left(12-6r_1^2\right)(1+\cos\bar{\Omega}\mathrm{ch}\bar{\Omega}) = 0$$

$r_1 = \sqrt{P/EJ}\,l$, $\bar{\Omega}^4 = m_2\omega^2 l^4/EJ$:



Фиг.2

При этом имеют место как дивергентная, так и флаттерная неустойчивости при $P^{\bullet}_{\text{кр.див}} = Q^{\bullet}_{\text{кр.див}} \approx 2EJl^{-2}$ и $P_{\text{кр.фл.}} = Q_{\text{кр.фл.}} \approx 43{,}23EJl^2l^{-2}$. Критические значения сил P и Q, приводящих к флаттерной неустойчивости, на порядок больше критических значений, приводящих к дивергентной неустойчивости.

На фиг. 2 показан график, иллюстрирующий явление потери устойчивости возмущённого движения составного стержня под воздействием силы неизменного направления и следящей силы, построенный по значениям, приведённым в табл. 1–5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
2. G.E. Lee and E. Reissner. Note on a Problem of Beam Buchling. J. of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Vol. 26, P. 839-840, 1975.
3. Белубекян М. В., Мовсисян Л. А. К задаче устойчивости консольного стержня, сжатого следящей нагрузкой. /Ереван: Тр. международной конференции

"Математическое моделирование механики сплошных сред. Методы граничных элементов. Санкт-Петербург. Т.2. 2003. С.95-98.
4. Амбарцумян С.А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Ереван: Изд. РАУ, 2004. 185 с.
5. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
6. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.
7. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1991. Т.44. № 4. С. 3–11.

Казарян Карен Багратович
Д.ф.-.м.н., ведущий научный сотрудник
Института механики НАН РА
адрес: пр. Маршала Баграмяна 24^{б}, 0019, Ереван, Армения
E-mail: ghkarren@gmail.com

Мартиросян Стелла Размиковна
Кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел: (+37410) 52-48-90, E-mail: mechins@sci.am

Саноян Юрий Геворкович
к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б},
Тел: (+37410) 52-48-90
E-mail: yusanoyan@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 3.04.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **63, №1, 2010** **Механика**

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ[1]

ХАЧАТРЯН А.М., ТОВМАСЯН А.Б.

Ключевые слова: термоупругость, геометрически нелинейные уравнения, анизотропная пластинка, смешанные условия, асимптотический метод, внутренняя задача.
Key words: termoelacticity, geometrically nonlinear equations, anisotropic plate, mixed conditions, asymptotic method, interior problem.

Ա.Մ. Խաչատրյան, Ա.Բ. Թովմասյան
Անիզոտրոպ ջերմաառաձգական սալի ներքին խնդրի լուծումը առաձգականության երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հիման վրա

Դիտարկվում է անիզոտրոպ ջերմաառանձգական սալի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման խնդիրը, երբ նրա դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների, իսկ մյուսի վրա` տեղափոխության վեկտորի նորմալ բաղադրիչի և տանգենցիալ լարումների արժեքները:

Հետազոտությունը կատարվում է առաձգականության տեսության երկրաչափորեն ոչ գծային եռաչափ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով: Գտնված է ներքին խնդրի ասիմպտոտիկան և կառուցված է նրա լուծումը: Ստացված են ռեկուրենտ բանաձևեր, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշելու ներքին խնդրի լարումների թենզորի և տեղափոխությունների վեկտորի բաղադրիչները:

A.M. Khachatryan, A.B. Tovmasyan
Asimptotic Solution of Three Dimention Interior Problem of Anisotropic Termoelasticity Plate on Basis of Geometrical Termoelesticity Non-Linear Theory of Elasticity

Consider a question of solution stress-strain state of anisotropic termoelasticity plate, when on one of the face surfaces are given values of stresses, and on the other surface-normal component of displacement vector of transference and tangential stresses. Investigation is leaded by the method of asymptotic integration geometrically non-linear equations of three dimention problem of theory of elasticity. Founded asimptotication and built solution, which appropriate to interior problem. Received recurent formulas, which allow determine all components of stresses tensor and vectors displacement of interior problem.

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной термоупругой пластинки, когда на одной из лицевых поверхностей заданы значения напряжений, а на другой – нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные напряжения.

Исследование проводится методом асимптотического интегрирования нелинейных уравнений трехмерной задачи теории упругости. Найдена асимптотика и построено решение, соответствующее внутренней задаче. Получены реккурентные формулы, позволяющие определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения внутренней задачи.

1. Классические краевые задачи полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [1,2]. Тем же методом решены неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек в монографиях [2,3]. Вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропных пластин рассмотрен в [7,8]. В работе [9] тем же методом решена смешанная трехмерная внутренняя задача для анизотропной термоупругой пластинки. Метод оказался эффективным также для решения динамических задач тонких тел [10]. В работах [11-

[1] Тезисы доклада работы опубликованы в Тр. Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Сентябрь 21-26. Горис-Степанакерт. 2008. С. 432-434.

13] асимптотическим методом решена первая краевая задача для однослойного и двухслойного анизотропных прямоугольников-полос и для ортотропной пластины по геометрически нелинейной теории упругости, проведено сравнение с решением по линейной теории.

Рассмотрим анизотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины $2h$. Будем считать, что материал пластинки обладает общей анизотропией и подчиняется обобщенному закону Гука. Пользуемся декартовой системой координат x, y, z, располагая оси Ox, Oy в срединной плоскости пластинки. Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи термоупругости анизотропного тела в области $\Omega = \{(x, y, z);\ x, y \in \Omega_0,\ |z| \le h,\ h << a\}$, где Ω_0 – область, занятая срединной поверхностью пластинки, a – характерный тангенциальный размер пластинки. На пластинку действуют заданные объёмные силы с компонентами $F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)$ и температурные воздействия, на лицевых поверхностях пластинки заданы условия

$$\begin{gathered}
\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{+}(x,z), \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{+}(x,z), \sigma_{z} = \sigma_{z}^{+}(x,z) \quad \text{при} \quad y = h \\
w = \varepsilon^3 w^{-}(x,z), \sigma_{xz} = \sigma_{yz}^{-}(x,z), \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{-}(x,z) \quad \text{при} \quad y = -h
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Решение задачи сводится к решению следующей системы нелинейных уравнений и соотношений термоупругости [4-6]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{xz}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{xz}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_z\right] + F_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_x + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_{xy} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma_{xz}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_{xy} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_y + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma_{xz}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_{xz} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_{yz} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma_z\right] + F_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial w}{\partial y}\sigma_{xy} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_{xz}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial w}{\partial y}\sigma_y + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_{xz}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial w}{\partial y}\sigma_{yz} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_z\right] + F_z = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\sigma_{yz} +$$

$$+a_{15}\sigma_{xz} + a_{16}\sigma_{xy} + \alpha_{11}\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\sigma_{yz} +$$

$$+a_{25}\sigma_{xz} + a_{26}\sigma_{xy} + \alpha_{22}\theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]=a_{13}\sigma_x+a_{23}\sigma_y+a_{33}\sigma_z+a_{34}\sigma_{yz}+$$
$$+a_{35}\sigma_{xz}+a_{36}\sigma_{xy}+\alpha_{33}\theta$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}=a_{14}\sigma_x+a_{24}\sigma_y+a_{34}\sigma_z+a_{44}\sigma_{yz}+$$
$$+a_{45}\sigma_{xz}+a_{46}\sigma_{xy}+\alpha_{12}\theta$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}=a_{15}\sigma_x+a_{25}\sigma_y+a_{35}\sigma_z+a_{45}\sigma_{yz}+$$
$$+a_{55}\sigma_{xz}+a_{56}\sigma_{xy}+\alpha_{13}\theta$$
$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}=a_{16}\sigma_x+a_{26}\sigma_y+a_{36}\sigma_z+a_{46}\sigma_{yz}+$$
$$+a_{56}\sigma_{xz}+a_{66}\sigma_{xy}+\alpha_{23}\theta$$

при граничных условиях (1.1) и условиях краевых задач теории упругости на боковой поверхности (они пока не конкретизируются).

Чтобы решить поставленную трехмерную нелинейную краевую задачу, вводятся безразмерные переменные $\xi=x/a,\ \eta=y/a,\ \zeta=z/h$ и безразмерные перемещения $U=u/a,\ V=v/a,\ W=w/a$.

В безразмерных координатах ξ,η,ζ система уравнений (1.2) превратится в новую систему, содержащую малый параметр $\varepsilon=h/a$. Эта система сингулярно возмущенная и ее решение складывается из решений внутренней задачи (основное решение) и пограничного слоя.

Решение внутренней задачи отыскивается в виде ряда по степеням малого параметра [1-3,7-12]

$$Q=\varepsilon^q\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^s Q^{(s)} \tag{1.3}$$

где Q – любое из напряжений или безразмерных перемещений, q – целое число, которое подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(s)}$. Число q определяется для каждой величины единственным образом [1,2]:

$$q=3 \text{ для } \sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\sigma_{xy},U,V,W, \tag{1.4}$$
$$q=4 \text{ для } \sigma_{xz},\sigma_{yz}$$

Эта асимптотика по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [7,8], однако, здесь, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.3) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра. Поэтому, было принято $q=q_0+4$, где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости. Асимптотике (1.3), (1.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (1.3) в преобразованную систему (1.2), с учетом (1.4), для определения коэффициентов разложения (1.3) получим систему

$$\frac{\partial\sigma_x^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_1^{*(s)}+F_x^{(s)}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{y}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_2^{*(s)}+F_y^{(s)}=0 \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{z}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_3^{*(s)}+F_z^{(s)}=0$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\xi}+U_\xi^{(s-3)}+V_\xi^{(s-3)}+W_\xi^{(s-1)}=a_{11}\sigma_x^{(s)}+a_{12}\sigma_y^{(s)}+a_{13}\sigma_z^{(s-2)}+$$

$$+a_{14}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{15}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{16}\sigma_{xy}^{(s)}+\alpha_{11}\theta^{(s)}$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\eta}+U_\eta^{(s-3)}+V_\eta^{(s-3)}+W_\eta^{(s-1)}=a_{12}\sigma_x^{(s)}+a_{22}\sigma_y^{(s)}+a_{23}\sigma_z^{(s-2)}+$$

$$+a_{24}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{25}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{26}\sigma_{xy}^{(s)}+\alpha_{22}\theta^{(s)}$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}+U_\zeta^{(s-3)}+V_\zeta^{(s-3)}+W_\zeta^{(s-1)}=a_{13}\sigma_x^{(s-2)}+a_{23}\sigma_y^{(s-2)}+a_{33}\sigma_z^{(s-4)}+$$

$$+a_{34}\sigma_{yz}^{(s-3)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(s-3)}+a_{36}\sigma_{xy}^{(s-2)}+\alpha_{33}\theta^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+U_{\eta\zeta}^{(s-4)}+V_{\eta\zeta}^{(s-4)}+W_{\eta\zeta}^{(s-4)}a_{14}\sigma_x^{(s-1)}+a_{24}\sigma_y^{(s-1)}+a_{34}\sigma_z^{(s-3)}+$$

$$+a_{44}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s-1)}+\alpha_{23}\theta^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+U_{\xi\zeta}^{(s-4)}+V_{\xi\zeta}^{(s-4)}+W_{\xi\zeta}^{(s-4)}=a_{15}\sigma_x^{(s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(s-1)}+a_{35}\sigma_z^{(s-3)}+$$

$$+a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)}+\alpha_{13}\theta^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\xi}+U_{\xi\eta}^{(s-3)}+V_{\xi\eta}^{(s-3)}+W_{\xi\eta}^{(s-3)}=a_{16}\sigma_x^{(s)}+a_{26}\sigma_y^{(s)}+a_{36}\sigma_z^{(s-2)}+$$

$$+a_{46}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s)}+\alpha_{13}\theta^{(s)}$$

где

$$\sigma_1^{*(s)}=\sigma_{11}^{(s)}+\sigma_{12}^{(s)},\ \sigma_2^{*(s)}=\sigma_{22}^{(s)}+\sigma_{21}^{(s)},\ \sigma_3^{*(s)}=\sigma_{33}^{(s)}+\sigma_{13}^{(s)}$$

$$\sigma_{12}^{(s)}=\sum_{i=0}^{s}\left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-i)}}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{y}^{(s-i)}}{\partial\eta}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-i)}}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-i)}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2U^{(i)}}{\partial\xi^2}\sigma_x^{(s-i)}+\frac{\partial^2U^{(i)}}{\partial\eta^2}\sigma_y^{(s-i)}+$$

$$+2\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\xi\partial\eta}\sigma_{xy}^{(s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\xi\partial\zeta}\sigma_{xz}^{(s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\eta\partial\zeta}\sigma_{yz}^{(s-i)}\Bigg]\qquad(1,2,3;U,V,W;\xi,\eta,\zeta)$$

$$\sigma_{11}^{(s)}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\zeta^2}\sigma_z^{(s-i)}+\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma_z^{(s-i)}}{\partial\zeta}\right]\quad(1,2,3;U,V,W;\xi,\eta,\zeta)$$

$$U_\xi^{(s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\xi},\quad U_{\xi\eta}^{(s)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\eta}\quad(U,V,W);\ (\xi,\eta,\zeta)\qquad(1.6)$$

Решив систему (1.5), получим

$$\begin{aligned}
&W^{(s)}=w^{(s)}(\xi,\eta)+w^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&U^{(s)}=u^{(s)}(\xi,\eta)+u^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta)\qquad(u,v)\\
&\sigma_z^{(s)}=\tau_{z0}^{(s)}+\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&\sigma_x^{(s)}=\tau_{x0}^{(s)}+\sigma_x^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta)\qquad(x,y)\\
&\sigma_{xy}^{(s)}=\tau_{xy0}^{(s)}+\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&\sigma_{xz}^{(s)}=\zeta\tau_{xz1}^{(s)}+\tau_{xz0}^{(s)}+\sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta)\qquad(x,y)
\end{aligned}\qquad(1.7)$$

где

$$\tau_{x0}=B_{11}\varepsilon_1+B_{12}\varepsilon_2+B_{16}\omega\quad(x,y;1,2)\qquad(1.8)$$

$$\tau_{xy0}^{(s)}=B_{16}\varepsilon_1^{(s)}+B_{26}\varepsilon_2^{(s)}+B_{66}\omega^{(s)}$$

$$\tau_{xz1}^{(s)}=-\left(\frac{\partial\tau_{x0}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{xy0}^{(s)}}{\partial\eta}\right)=-L_{11}(B_{ij})u^{(s)}-L_{12}(B_{ij})v^{(s)}\quad(x,y;\xi,\eta)\qquad(1.9)$$

$$\varepsilon_1^{(s)}=\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\xi},\ \varepsilon_2^{(s)}=\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\eta},\quad\omega^{(s)}=\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\xi}$$

Коэффициенты B_{ij} определяются по формулам

$$\begin{aligned}
&B_{11}=\left(a_{22}a_{66}-a_{26}^2\right)/\Omega,\ B_{22}=\left(a_{11}a_{66}-a_{16}^2\right)/\Omega\\
&B_{12}=\left(a_{16}a_{26}-a_{12}a_{66}\right)/\Omega,\ B_{66}=\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)/\Omega\\
&B_{16}=\left(a_{12}a_{22}-a_{16}a_{22}\right)/\Omega,\ B_{26}=\left(a_{12}a_{16}-a_{11}a_{26}\right)/\Omega\\
&\Omega=\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)a_{66}+2a_{12}a_{16}a_{26}-a_{11}a_{26}^2-a_{22}a_{16}^2
\end{aligned}\qquad(1.10)$$

Величины со звездочками, как всегда, известны и определяются по формулам

$$w^{*(s)}=\int_0^\zeta\Big(a_{13}\sigma_x^{(s-1)}+a_{23}\sigma_y^{(s-1)}+a_{33}\sigma_z^{(s-1)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(s-2)}+$$

$$+a_{36}\sigma_{xy}^{(s-1)}-\left(U_\zeta^{(s-4)}+V_\zeta^{(s-4)}+W_\zeta^{(s-4)}\right)+\alpha_{33}\theta^{(s)}\Big)d\zeta$$

$$u^{*(s)} = \int_0^{\zeta} \Big(a_{15}\sigma_x^{(s-1)} + a_{25}\sigma_y^{(s-1)} + a_{35}\sigma_z^{(s-1)} + a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)} +$$

$$+ a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)} - \frac{\partial w^{*(s)}}{\partial \xi} - \left(U_{\xi\zeta}^{(s-4)} + V_{\xi\zeta}^{(s-4)} + W_{\xi\zeta}^{(s-4)} \right) + \alpha_{13}\theta^{(s-1)} \Big) d\zeta$$

$$v^{*(s)} = \int_0^{\zeta} \Big(a_{14}\sigma_x^{(s-1)} + a_{24}\sigma_y^{(s-1)} + a_{34}\sigma_z^{(s-1)} + a_{44}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{45}\sigma_{xz}^{(s-2)} + \tag{1.11}$$

$$+ a_{46}\sigma_{xy}^{(s-1)} - \frac{\partial w^{*(s)}}{\partial \eta} - \left(U_{\eta\zeta}^{(s-4)} + V_{\eta\zeta}^{(s-4)} + W_{\eta\zeta}^{(s-4)} \right) + \alpha_{12}\theta^{(s-1)} \Big) d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(s)} = B_{11}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{12}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{16}\omega^{*(s)} + a_3\sigma_z^{(s-2)} + a_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + a_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(s-1)}$$

$$\sigma_y^{*(s)} = B_{12}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{22}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{26}^{(k)}\omega^{*(s)} + b_3\sigma_z^{(s-2)} + b_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + b_5\sigma_{xz}^{(s-1)}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = B_{16}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{22}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{66}\omega^{*(s)} + c_3\sigma_z^{(s-2)} + c_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + c_5\sigma_{xz}^{(s-1)}$$

$$\sigma_{xz}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial \eta} + \sigma_1^{*(s)} + F_x^{(s)} \right) d\zeta \quad (x, y; \xi, \eta; 1, 2)$$

$$\sigma_z^{*(s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial \eta} + \sigma_3^{*(s)} + F_z^{(s)} \right) d\zeta$$

где

$$\varepsilon_1^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \xi} + U_{\xi}^{(s-3)} + V_{\xi}^{(s-3)} + W_{\xi}^{(s-1)} - \alpha_{11}\theta^{(s)}$$

$$\varepsilon_2^{*(s)} = \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \eta} + U_{\eta}^{(s-3)} + V_{\eta}^{(s-3)} + W_{\eta}^{(s-1)} - \alpha_{22}\theta^{(s)} \tag{1.12}$$

$$\omega^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \xi} + U_{\xi\eta}^{(s-3)} + V_{\xi\eta}^{(s-3)} + W_{\xi\eta}^{(s-1)} - \alpha_{12}\theta^{(s)}$$

$$a_i = -\left(a_{1i}B_{11} + a_{2i}B_{12} + a_{i6}B_{16}\right), \; b_i = -\left(a_{1i}B_{12} + a_{2i}B_{22} + a_{i6}B_{26}\right)$$

$$c_i = -\left(a_{1i}B_{61} + a_{2i}B_{26} + a_{i6}B_{66}\right) \qquad (i = 1,2,...,6)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), для определения неизвестных величин получим следующую систему уравнений:

$$L_{11}\left(B_{ij}\right)u + L_{12}\left(B_{ij}\right)v = p_1^{(s)} \tag{1.13}$$

$$L_{12}\left(B_{ij}\right)u + L_{22}\left(B_{ij}\right)v = p_2^{(s)}$$

где дифференциальные операторы L_{ij} имеют вид

$$L_{11}\left(B_{ij}\right) = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$L_{22}\left(B_{ij}\right) = B_{22}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

$$L_{12}\left(B_{ij}\right)=B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \tag{1.14}$$

$$L_{13}\left(B_{ij}\right)=-\left[B_{11}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}+3B_{16}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\eta^2}+B_{26}\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}\right]$$

$$L_{23}\left(B_{ij}\right)=-\left[B_{22}\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}+3B_{26}\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\eta^2}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta}+B_{16}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\right]$$

В (1.13) $p_1^{(s)}$, $p_2^{(s)}$ играют роль обобщенных нагрузок, для вычисления которых получаются формулы

$$\begin{aligned}
p_1^{(s)} &= -X_1^{(s)}+\frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{*(s)}\left(\zeta=1\right)-\sigma_{xz}^{*(s)}\left(\zeta=-1\right)\right)\\
p_2^{(s)} &= -Y_1^{(s)}+\frac{1}{2}\left(\sigma_{yz}^{*(s)}\left(\zeta=1\right)-\sigma_{yz}^{*(s)}\left(\zeta=-1\right)\right)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Остальные неизвестные функции интегрирования $\tau_{xz0}^{(s)}, \tau_{yz0}^{(s)}, \tau_{z0}^{(s)}$ и $w^{(s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\tau_{xz0}^{(s)} &= X_2^{(s)}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{*(s)}\left(\zeta=1\right)+\sigma_{xz}^{*(s)}\left(\zeta=-1\right)\right)-\frac{1}{2}L_{13}\left(B_{ij}\right)w^{(s)}\\
\tau_{yz0}^{(s)} &= Y_2^{(s)}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{yz}^{*(s)}\left(\zeta=1\right)+\sigma_{yz}^{*(s)}\left(\zeta=-1\right)\right)-\frac{1}{2}L_{23}\left(B_{ij}\right)w^{(s)}\\
\tau_{z0}^{(s)} &= \sigma_z^{+(s)}-\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)\\
w^{(s)} &= w^{-(s)}-w_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,-1\right)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

где

$$X_{1,2}^{(s)}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{+(s)}\pm\sigma_{xz}^{-(s)}\right),\quad Y_{1,2}^{(s)}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{yz}^{+(s)}\pm\sigma_{yz}^{-(s)}\right),$$

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)}=\sigma_{xz}^{\pm},\ \sigma_{yz}^{\pm(0)}=\sigma_{yz}^{\pm},\ \sigma_z^{+(0)}=\sigma_z^{+},\ w^{(0)}=w^{-}$$

$$\sigma_{xz}^{\pm(s)}=\sigma_{yz}^{\pm(s)}=\sigma_z^{+(s)}=0, w^{-(s)}=0 \qquad s>0$$

Легко убедиться, что при $s=0$ система уравнений (1.13) совпадает с уравнениями обобщенной плоской задачи, когда имеется плоскость упругой симметрии. Для приближений $s>0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука,1976. 512 с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. “Гитутюн” НАН РА, 2005. 468с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с.

5. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948.
6. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988.
7. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией //В сб.: "XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин". Тезисы докл.. М.: 1977. 89с.
8. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида//Изв. НАН РА. Механика. 1996. Т. 49. №3. С.10-22.
9. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной задачи для анизотропной термоупругой пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. № 3-4. С.3-11.
10. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. Механика оболочек и пластин //Сб. докл. XIX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. РФ. Нижний Новгород. 1999. С.16-20.
11. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости //Изв. Северо-Кавказского центра высшей школы. Сер. естест. наук. 2001. Спецвыпуск. С.16-18.
12. Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной двухслойной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости //В сб.:"Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем". Ереван: 2002. С.213-218.
13. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. К решению первой краевой задачи для ортотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости. //Уч. записки АрГУ. 2004. №1(8). С.15-20.

Сведения об авторах:
Хачатрян Александр Мовсесович –доктор физ.-мат. .наук.,
профессор каф. математики АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (+37497) 20-19-49; E-mail: alexkhach49@yandex.ru

Товмасян Артур Бабкенович – канд. физ.-мат. .наук.,
доцент каф. инженерии АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (+37497) 20-32-42

Поступила в редакцию 24.03.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №1, 2010 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЭЛЕКТРОДЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ЩЕЛЬЮ

АГАЯН К.Л., ГРИГОРЯН Э.Х.

Ключевые слова: волновое поле, дифракция, пьезоэлектрическое пространство, функциональное уравнение, вычет, асимптотика.
Key words: wave field, diffraction, piezoelectric space, functional equation, residue**,** asymptotics

Կ.Լ. Աղայան, Է.Խ. Գրիգորյան
Սահքի հարթ էլեկտրոառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ էլեկտրոդի վրա ճեղքված պիեզոառաձգական տարածությունում

Դիտարկվում է պիեզոառաձգական միջավայր, որը բաղկացած է վակումային շերտով (ճեղքով) բաժանված երկու միանման 6mm դասի կիսատարածություններից: Ներքևի կիսատարածության եզրը ծածկված է կիսաանվերջ մետաղական շերտով (էլեկտրոդ): Ուսումնասիրվում է վերևի կիսատարածությունում տարածվող սահքի հարթ էլեկտրոառաձգական ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը կիսաանվերջ էլեկտրոդի վրա: Կառուցված է խնդրի փակ լուծումը, որով տրվում է էլեկտրոառաձգական ալիքային դաշտը պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածություններում և էլեկտրական պոտենցիալը վակումային շերտում: Ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են առաձգական տեղափոխությունները պիեզոէլեկտրիկի հեռու կետերի շրջակայքերում: Այդ բանաձևերում առանձնացված գումարելիների տեսքով մտնում են ընկնող, անդրադարձող, մակերևույթային (ճեղքային), անհամասեռ ծավալային ալիքները: Հաշված է էլեկտրոդի ծայրակետի շրջակայքում էլեկտրական ինդուկցիայի ուժգնության գործակիցը:

Երկու մասնավոր դեպքերում (էլեկտրոդը բացակայում է; էլեկտրոդը անվերջ է) խնդրի լուծումը տրվում է տարրական ֆունկցիաներով:

K.L. Aghayan, E.Kh. Grigoryan
Diffraction of Shear Plane Electroelastic Wave on the Semi-Infinite Electrode in the Piezoelectric Space with Crack

A piezoelectric medium consisting of two equal piezoelectric semi–space of 6mm class separated by vacuum layer is considered. An edge of lower semi–space is covered with semi–infinite metal coat (electrode). The problem of diffraction of shear plane electroelastic wave on the semi–infinite electrode propagated on the upper semi–space is investigated. The problem closed solution expressing the wave electroelastic field in every piezoelectric space and the meaning of electric potential in vacuum layer is built. Asymptotic equations determining behaviour of elastic displacement at distant areas of piezoelectric are obtained. The given equations in the form of discrete components consist of falling, reflected, surface (crack), inhomogeneous and three-dimensional waves. The concentration factor of electrical induction near the edge of electrode is calculated. In two special cases the solution of the problem is obtained in elementary functions.

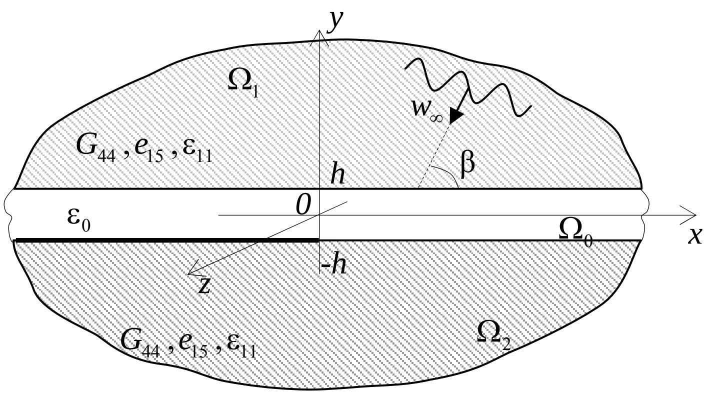
Рассматривается пьезоэлектрическая среда, состоящая из двух одинаковых пьезоэлектрических полупространств класса 6mm, разделённых вакуумным слоем (щель). Край нижнего полупространства покрыт полубесконечным металлическим покрытием (электрод). Исследуется задача о дифракции сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде, распространяющейся на верхнем полупространстве. Построено замкнутое решение задачи, представляющее волновое электро-упругое поле в каждом пьезоэлектрическом пространстве и значение электрического потенциала в вакуумном слое. Получены асимптотические формулы, определяющие поведение упругих перемещений на дальних зонах пьезоэлектрика. В эти формулы в виде отдельных составляющих входят падающая, отражённая, поверхностные (щелевые), неоднородные и объемные волны. Вычислен коэффициент концентрации электрической индукции около конца электрода. В двух частных случаях (электрод отсутствует; электрод бесконечный) решение задачи получено в элементарных функциях.

1. Рассмотрим пространство, состоящее из двух одинаковых пьезоэлектрических полупространств, разделенных вакуумным слоем толщиной $2h$. В декартовой системе координат $Oxyz$ полупространства занимают области $\Omega_1\left(|x|<\infty;\ y>h,\ |z|<\infty\right)$ и $\Omega_2\left(|x|<\infty;\ y<-h,\ |z|<\infty\right)$, а вакуумный слой – $\Omega_0\left(|x|<\infty;\ -h<y<h,\ |z|<\infty\right)$. Главные оси пьезоэлектрических полупространств (кристаллов) класса 6mm гексакональной симметрии параллельны друг другу и оси Oz. Предполагается, что полуплоскость $x<0$ границы нижнего полупространства покрыта тонким металлическим заземлённым слоем. Считая, что её жесткостью можно пренебречь, металлический слой рассматривается как электрод, занимающий полуплоскость $x<0,\ y=-h,\ |z|<\infty$ (фиг.1).

В кристалле, занимающий область Ω_1, распространяется падающая из бесконечности заданная сдвиговая плоская упругая волна $\bar{u}=\left(0;0;\,u_z^{(\infty)}(x,y,t)\right)$, поляризованная вдоль оси симметрии:

$$u_z^{(\infty)}\left(x,y,t\right)=w_\infty\left(x,y\right)e^{-i\omega t}=e^{-ik\left(x\cos\beta+y\sin\beta\right)-i\omega t} \tag{1.1}$$

где $w_\infty(x,y)$ – амплитуда, $\beta\left(0<\beta<\pi/2\right)$ – угол скольжения падающей упругой волны, k – волновое число, ω – частота колебании, t – время.



Фиг. 1

При этих предположениях требуется определить дифрагированное электроупругое поле в каждой области $\Omega_j\quad\left(j=0,1,2\right)$ пространства.

Единственное отличное от нуля упругое смещение $u_z^{(j)}(x,y,t)\ \left(j=1,2\right)$ и потенциал электрического поля $\varphi^{(j)}(x,y,t)\ \left(j=0,1,2\right)$ в соответствующих областях Ω_j ищем в виде:

$$u_z^{(j)}(x,y,t)=w_j(x,y)e^{-i\omega t},\qquad \varphi^{(j)}(x,y,t)=\varphi_j(x,y)e^{-i\omega t} \tag{1.2}$$

Тогда, в рамках квазистатической постановки задач для пьезоэлектрических тел [1] приходим к следующим краевым задачам относительно амплитуд из (1.2) (Δ – оператор Лапласа):

$$\left.\begin{aligned}&\Delta w_j(x,y)+k^2w_j(x,y)=0,\\&\Delta\varphi_j(x,y)-\left(e_{15}/\varepsilon_{11}\right)w_j(x,y)=0,\end{aligned}\right.\qquad (x,y)\in\Omega_j,\quad j=1,2 \tag{1.3}$$

$$\Delta\varphi_0(x,y)=0, \quad (x,y)\in\Omega_0 \tag{1.4}$$

с граничными и контактными условиями

$$\begin{aligned}
&\tau_{yz}(x,\pm h)=0, \quad |x|<\infty \\
&D_{1y}(x,h+0)=D_{0y}(x,h-0), \quad \varphi_1(x,h+0)=\varphi_0(x,h-0), \quad |x|<\infty \\
&\varphi_0(x,-h+0)=\varphi_2(x,-h-0)=F_+(x), \qquad -\infty<x<\infty \\
&D_{0y}(x,-h+0)-D_{2y}(x,-h-0)=\psi_-(x), \quad -\infty<x<\infty
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $F_+(x)=0$ при $x<0$ и $\psi_-(x)=0$ при $x>0$.

При этом, решение должно еще удовлетворять условию уходящей волны.

В (1.3)–(1.5) [1] e_{15} –пьезомодуль, $\varepsilon_{11}=\varepsilon_1/4\pi$ –диэлектрическая проницаемость, $\nu=\omega/k=\sqrt{c_{44}(1+\chi_1^2)/\rho}$ – фазовая скорость распространения сдвиговой упругой волны, c_{44} – упругая постоянная (модуль сдвига), ρ –плотность среды, D_{jy} – нормальная компонента электрической индукции, $\chi_1^2=e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$. Кроме того, имеют место соотношения [1]

$$D_{jy}(x,y)=e_{15}\frac{\partial w_j}{\partial y}-\varepsilon_{11}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}; \qquad (j=1,2)$$

$$D_{0y}(x,y)=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\ (\varepsilon_0=1); \quad \tau_{yz}(x,y)=c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{1.6}$$

Перейдем к решению краевых задач (1.3)–(1.5). Введём функции

$$w_j(x,y)-w_\infty(x,y)=W_j(x,y), \quad \varphi_j(x,y)-\varphi_\infty(x,y)=\Phi_j(x,y)\ (j=1,2) \tag{1.7}$$

$$\varphi_\infty(x,y)=(e_{15}/\varepsilon_{11})w_\infty(x,y) \tag{1.8}$$

Применим к (1.3)–(1.5) и (1.7) действительное интегральное преобразование Фурье по x. Тогда, имея в виду соотношения (1.6), приходим к уравнениям

$$\frac{d^2\overline{W}_j(\sigma,y)}{dy^2}-\gamma^2\overline{W}_j(\sigma,y)=0, \quad j=1,2; \quad (-1)^{j-1}y>h \tag{1.9}$$

$$\frac{d^2\overline{\phi}_j(\sigma,y)}{dy^2}-\sigma^2\overline{\phi}_j(\sigma,y)+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}k^2\overline{W}_j=0, \quad j=1,2; \quad (-1)^{j-1}y>h \tag{1.10}$$

$$\frac{d^2\overline{\varphi}_0(\sigma,y)}{dy^2}-\sigma^2\overline{\varphi}_0(\sigma,y)=0, \quad -h<y<h \tag{1.11}$$

с условиями

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_1(\sigma,h)=\overline{\varphi}_0(\sigma,h), \qquad \overline{\varphi}_0(\sigma,-h)=\overline{\varphi}_2(\sigma,-h)=\overline{F}_+(\sigma) \\
&\left.\left(c_{44}\frac{d\overline{W}_j}{dy}+e_{15}\frac{d\overline{\varphi}_j}{dy}\right)\right|_{y=(-1)^{j-1}h}=0, \ (j=1,2) \\
&\left.\left(e_{15}\frac{d\overline{W}_j}{dy}-\varepsilon_{11}\frac{d\overline{\varphi}_j}{dy}+\varepsilon_0\frac{d\overline{\varphi}_0}{dy}\right)\right|_{y=(-1)^{j-1}h}=\begin{cases}0, & j=1\\ \overline{\psi}_-(\sigma), & j=2\end{cases}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\bar{f}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\sigma x} dx, \qquad \gamma^2 = \sigma^2 - k^2 \tag{1.13}$$

Решение уравнений (1.9) и (1.10), представляющие уходящие волны, имеют вид

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = A_1 e^{-\gamma y}, \quad \bar{\Phi}_1(\sigma, y) = B_1 e^{-|\sigma| y} + (e_{15}/\varepsilon_{11}) \bar{W}_1(\sigma, y), \quad y > h, \tag{1.14}$$

$$\bar{W}_2(\sigma, y) = A_2 e^{\gamma y}, \quad \bar{\Phi}_2(\sigma, y) = B_2 e^{|\sigma| y} + (e_{15}/\varepsilon_{11}) \bar{W}_2(\sigma, y), \quad y < -h \tag{1.15}$$

а решение (1.11) –

$$\bar{\varphi}_0(\sigma, y) = A_0 \operatorname{ch}(\sigma y) + B_0(\sigma y), \quad -h < y < h \tag{1.16}$$

где $A_j(\sigma), B_j(\sigma)$ $(j = 0,1,2)$ – неизвестные функции.

При этом, функция из (1.13) $\sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$ при $|\sigma| > k$, и $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$, т.е. действительная ось обходит точки ветвления функции $\sqrt{\alpha^2 - k^2}$ $\sigma = -k$ сверху, а $\sigma = k$ снизу [2].

Удовлетворяя при помощи (1.14)–(1.16) условиям (1.12), приходим к следующей задаче Римана на действительной оси:

$$c_0 |\sigma| \bar{K}(\sigma) \bar{F}_+(\sigma) + \bar{\psi}_-(\sigma) = 2\pi c_1 \delta(\sigma - k\cos\beta) \tag{1.17}$$

где $\delta(x)$ –известная функция Дирака,

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{2}{1 + \varepsilon_{10}(1 + \chi_1^2)} \frac{\Delta_2(\sigma)\Delta_4(\sigma)}{\Delta_1(\sigma)\Delta_3(\sigma)} \tag{1.18}$$

$$c_0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_{11}(1 + \chi_1^2), \; \varepsilon_{10} = (\varepsilon_{01})^{-1} = \varepsilon_{11}/\varepsilon_0 \qquad \chi = \chi_1^2 / (1 + \chi_1^2)$$

$$c_1 = 2e_{15} k \cos\beta e^{-ikh\sin\beta} / \Delta_3^*(k\cos\beta) \tag{1.19}$$

$$\Delta_1(\sigma) = \varepsilon_{01}(\gamma - \chi|\sigma|), \quad \Delta_2(\sigma) = \Delta_1(\sigma) + \gamma \operatorname{th}(h|\sigma|),$$
$$\Delta_3(\sigma) = (1 + \operatorname{th}^2(h|\sigma|))\Delta_1(\sigma) + 2\gamma \operatorname{th}(h|\sigma|), \quad \Delta_4(\sigma) = \gamma + \Delta_1(\sigma)\operatorname{th}(h|\sigma|) \tag{1.20}$$

$$\Delta_3^*(\sigma) = (1 - \chi|\sigma|\gamma^{-1})\operatorname{ch}(2h|\sigma|) + \varepsilon_{10} \operatorname{sh}(2h|\sigma|) \tag{1.21}$$

Следует отметить, что дисперсионные функции $\Delta_j(\sigma)$ $(j = \overline{1,4})$ из (1.18) на действительной оси имеют по два корня $\pm\sigma_j$, которые расположены в порядке

$$0 < k < \sigma_4^* < \sigma_3^* < \sigma_2^* < \sigma_1^* < \infty \tag{1.22}$$

и других действительных корней не имеют [1, 11].

Следовательно, кроме отмеченного выше, предполагается, что в задаче Римана (1.17) действительная ось обходит точки $-\sigma_j^*$ сверху, а точки σ_j^*–снизу, что обеспечивает условие уходящей волны.

Неизвестные функции из (1.14)–(1.16) выражаются при помощи решения функционального уравнения (1.17) в виде

$$2\operatorname{ch}(\sigma h) A_0 = (\varepsilon_{01}\gamma)^{-1} \Delta_1(\sigma) B_1 e^{-|\sigma| h} + \bar{F}_+(\sigma) + 2e_{15}\varepsilon_{11}^{-1} g^{(-)}(\sigma)$$
$$2\operatorname{sh}(\sigma h) B_0 = (\varepsilon_{01}\gamma)^{-1} \Delta_1(\sigma) B_1 e^{-|\sigma| h} - \bar{F}_+(\sigma) + 2e_{15}\varepsilon_{11}^{-1} g^{(-)}(\sigma) \tag{1.23}$$

$$A_1 e^{-\gamma h} = -\chi \varepsilon_{11} (e_{15}\gamma)^{-1} |\sigma| B_1 e^{-|\sigma| h} + g^{(-)}(\sigma) \tag{1.24}$$

$$A_2 e^{-\gamma h} = \frac{\chi\varepsilon_{11}|\sigma|}{e_{15}\gamma\,\mathrm{ch}(2h\sigma)} B_1 e^{-|\sigma|h} + \frac{\chi\varepsilon_0 \sigma\,\mathrm{th}(2h\sigma)}{e_{15}\gamma} \overline{F}_+(\sigma) + \frac{\chi}{e_{15}\gamma} \overline{\psi}_-(\sigma) - g^{(+)}(\sigma)$$

$$B_2 e^{-|\sigma|h} = \frac{1}{\mathrm{ch}(2\sigma h)} B_1 e^{-|\sigma|h} + \varepsilon_{01}\,\mathrm{th}(2h|\sigma|)\overline{F}_+(\sigma) - \frac{\overline{\psi}_-(\sigma)}{\varepsilon_{11}|\sigma|}$$

$$B_1 e^{-|\sigma|h} = \frac{\overline{F}_+(\sigma)}{\Delta_3^*(\sigma)} - \frac{2e_{15}\,\mathrm{ch}(2kh\cos\beta)}{\varepsilon_{11}\Delta_3^*(k\cos\beta)} g^{(+)}(\sigma) \tag{1.25}$$

$$g^{(\pm)}(\sigma) = 2\pi e^{\pm ikh\sin\beta}\delta(\sigma - k\cos\beta) \tag{1.26}$$

Таким образом, решение поставленной выше задачи свелось к решению функционального уравнения (1.17).

Перейдя к решению (1.17), заметим, что $\overline{K}(\sigma) \to 1$ при $|\sigma| \to \infty$. Тогда имея в виду представления [3]:

$$\begin{aligned} &2\pi i\delta(\sigma - k\cos\beta) = (\sigma - k\cos\beta - i0)^{-1} - (\sigma - k\cos\beta + i0)^{-1} \\ &|\sigma| = (\sigma - i0)^{1/2}(\sigma + i0)^{1/2} \end{aligned} \tag{1.27}$$

решение уравнения (1.17) получим в виде [4–9]

$$\overline{F}_+(\sigma) = \frac{ic_1}{c_0\sqrt{k\cos\beta}\,\overline{K}_-(k\cos\beta)} \frac{1}{\sqrt{\sigma + i0}(\sigma - k\cos\beta + i0)\overline{K}_+(\sigma)} \tag{1.28}$$

$$\overline{\psi}_-(\sigma) = -\frac{ic_1\sqrt{\sigma - i0}\,\overline{K}_-(\sigma)}{\sqrt{k\cos\beta}\,\overline{K}_-(k\cos\beta)(\sigma - k\cos\beta - i0)} \tag{1.29}$$

где $\overline{K}(\sigma) = \overline{K}_+(\sigma)\cdot\overline{K}_-(\sigma)$, $\overline{K}_+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha > 0$, а $\overline{K}_-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha < 0,\ \alpha = \sigma + i\tau$. При этом, $\overline{K}_\pm(\alpha) \to 1$ при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности и

$$\overline{K}_\pm(\sigma) = \exp\left(\overline{R}_\pm(\sigma)\right) \quad \overline{R}_+(\sigma) = \int_0^\infty R(x) e^{i(\sigma + i0)x} dx = \frac{1}{2}\ln\left[\overline{K}(\sigma)\right] + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left[\overline{K}(t)\right]dt}{t - \sigma}$$

$$\overline{R}_-(\sigma) = \overline{R}_+(-\sigma), \qquad R(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[\overline{K}(\sigma)\right] e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{1.30}$$

2. Имея решение функционального уравнения (1.17) в виде (1.28) и (1.29), при помощи (1.23)–(1.26) и (1.14)–(1.16), после обратного преобразования Фурье, получим соответствующие формулы, определяющие дифрагированное электроупругое волновое поле в областях $\Omega_j\,(j = 0,1,2)$.

В области $\Omega_1\,(y \geq h)$ амплитуды упругого перемещения $w_1(x,y)$ и потенциал $\varphi_1(x,y)$ определяются формулами:

$$w_1(x,y) = W_1^{(1)}(x,y) + w_\infty(x,y) + w_{\text{отр}}^{(1)}(x,y) \tag{2.1}$$

$$W_1^{(1)}(x,y) = -\frac{\chi\varepsilon_{11}}{2\pi e_{15}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sigma|\overline{F}_+(\sigma) e^{-\gamma(y-h)} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\gamma\Delta_3^*(\sigma)} d\sigma \tag{2.2}$$

$$w_{\text{отр}}^{(1)}(x,y) = A_{\text{отр}}^{(1)} e^{ik(y-h)\sin\beta} e^{-ikx\cos\beta}$$

$$A_{\text{отр}}^{(1)}=\left[1+\frac{2i\chi\operatorname{ctg}\beta}{1-i\chi\operatorname{ctg}\beta+\varepsilon_{10}\operatorname{th}(2kh\cos\beta)}\right]e^{-ikh\sin\beta} \tag{2.3}$$

$$\varphi_1(x,y)=(e_{15}/\varepsilon_{11})w_1(x,y)+\Phi_1^{(1)}(x,y)+\varphi_{\text{нд}}^{(1)}(x,y) \tag{2.4}$$

$$\Phi_1^{(1)}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{F}_+(\sigma)e^{-|\sigma|(y-h)}e^{-i\sigma x}}{\Delta_3^*(\sigma)}d\sigma \tag{2.5}$$

$$\varphi_{\text{нд}}^{(1)}(x,y)=\Phi_{\text{нд}}^{(1)}e^{-k(y-h)\cos\beta}e^{-ikx\cos\beta} \tag{2.6}$$

$$\Phi_{\text{нд}}^{(1)}=-\frac{2e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{e^{-ikh\sin\beta}}{1-i\chi\operatorname{ctg}\beta+\varepsilon_{10}\operatorname{th}(2kh\cos\beta)}$$

В области Ω_0 для амплитуды $\varphi_0(x,y)$ получим:

$$\varphi_0(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{ch}(\sigma(y-h))}{\operatorname{ch}(2\sigma h)}-\frac{\chi|\sigma|}{\gamma}\frac{2\operatorname{sh}(\sigma(y+h))}{\operatorname{sh}(4\sigma h)}\right]\overline{F}_+(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma+\varphi_0^{(1)}(x,y) \tag{2.7}$$

$$\varphi_0^{(1)}(x,y)=\frac{2e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left[1-\frac{1-i\chi\operatorname{ctg}\beta}{\Delta_3^*(k\cos\beta)}\operatorname{ch}(kh\cos\beta)\right]\frac{\operatorname{sh}((y+h)k\cos\beta)}{\operatorname{sh}(2kh\cos\beta)}e^{-ikh\sin\beta}e^{-ikx\cos\beta}$$

В области $\Omega_2(y\le -h)$ получим

$$w_2(x,y)=\frac{\chi\varepsilon_{11}}{2\pi e_{15}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\sigma|}{\gamma}G(\sigma)\overline{F}_+(\sigma)e^{\gamma(h+y)}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{2.8}$$

$$\varphi_2(x,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w_2(x,y)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\sigma)\overline{F}_+(\sigma)e^{|\sigma|(h+y)}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{2.9}$$

$$G(\sigma)=\frac{1}{\Delta_3^*(\sigma)\operatorname{ch}(2h\sigma)}+\varepsilon_{01}\operatorname{th}(2h|\sigma|)-\frac{c_0}{\varepsilon_{11}}\overline{K}(\sigma) \tag{2.10}$$

Таким образом, решение задачи, т.е. определение электроупругого волнового поля в составном электроупругом пространстве в каждой области $\Omega_j\,(j=0,1,2)$ даётся формулами (2.1)–(2.10). В (2.1) $w_\infty(x,y)$, $w_{\text{отр}}^{(1)}(x,y)$ и $W_1^{(1)}(x,y)$– амплитуды падающей, отраженной и дифрагированных волн упругого перемещения, соответственно, в области Ω_1. В (2.4) $\varphi_{\text{нд}}^{(1)}(x,y)$–амплитуда неоднородной (щелевой) [11] волны потенциала электрического поля в Ω_1.

Очевидно, что для полного исследования характерных особенностей волнового поля в пьезоэлектрическом пространстве следует подробно исследовать интегральные составляющие, входящие в (2.1)–(2.9), представляющие дифрагированные волны в каждой области Ω_j. Однако, в связи с большим объемом задачи, в настоящей статье будут исследованы особенности волнового поля упругих перемещений и притом, только в области Ω_1.

Прежде чем перейти к этим исследованиям, остановимся на двух частных случаях рассматриваемой задачи, представляющие самостоятельный интерес.

I) Полубесконечный электрод отсутствует, т.е. оба края щели свободны [1]. Тогда очевидно, что $\overline{\psi}_-(\sigma)=0$ и из (1.5) и (1.17) следует, что в этом случае

$$\overline{\varphi}_2(\sigma,-h-0)=\overline{F}_+(\sigma)=2\pi c_1\delta(\sigma-k\cos\beta)/c_0 k\cos\beta\overline{K}(k\cos\beta) \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.1)–(2.10), получим формулы, представляющие электроупругое поле в $\Omega_j\,(j=0,1,2)$:

В Ω_1 $(y\ge h)$ —

$$w_1(x,y)=w_\infty(x,y)+\left(A_{\text{отр}}^{(1)}+A_{\text{отр}}^{(2)}\right)e^{ik(y-h)\sin\beta-ikx\cos\beta} \tag{2.12}$$

где $A_{\text{отр}}^{(1)}$ дается при помощи (2.5), а

$$A_{\text{отр}}^{(2)}=-\frac{i\chi\Delta_\beta\operatorname{ctg}\beta e^{-ik\sin\beta h}}{\Delta_3^*(k\cos\beta)}\frac{\left[\operatorname{ch}(k\cos\beta h)+\Delta_\beta\operatorname{sh}(k\cos\beta h)\right]^{-1}}{\left[\operatorname{sh}(k\cos\beta h)+\Delta_\beta\operatorname{ch}(k\cos\beta h)\right]} \tag{2.13}$$

$$\Delta_\beta=\varepsilon_{10}(1-i\chi\operatorname{ctg}\beta)$$

$$\varphi_1(x,y)=(e_{15}/\varepsilon_{11})w_1(x,y)+\left(\Phi_{\text{нд}}^{(1)}+\Phi_{\text{нд}}^{(2)}\right)e^{-k(y-h)\cos\beta}e^{-ikx\cos\beta} \tag{2.14}$$

где $\Phi_{\text{нд}}^{(1)}$ дается формулой (2.6), а

$$\Phi_{\text{нд}}^{(2)}=c_1/c_0\Delta_3^*(k\cos\beta)k\cos\beta\overline{K}(k\cos\beta) \tag{2.15}$$

Отметим, что в (2.12) часть отраженной волны

$$w_{\text{отр}}^{(2)}(x,y)=A_{\text{отр}}^{(2)}e^{ik(y-h)\sin\beta-ikx\cos\beta} \tag{2.16}$$

обусловлена присутствием нижнего полупространства и изчезает при $h\to\infty$.

В Ω_0 $(-h\le y\le h)$ —

$$\begin{gathered}\varphi_0(x,y)=\frac{c_1}{c_0 k\cos\beta\overline{K}(k\cos\beta)}\times\\ \times\left[\frac{\operatorname{ch}(k\cos\beta(y-h))}{\operatorname{ch}(2k\cos\beta h)}-i\chi\operatorname{ctg}\beta\frac{2\operatorname{sh}(k\cos\beta(y+h))}{\operatorname{sh}(4k\cos\beta h)}\right]e^{-ik\cos\beta x}+\varphi_0^{(1)}(x,y)\end{gathered} \tag{2.17}$$

где $\varphi_0^{(1)}(x,y)$ дается формулой (2.7).

В Ω_2 $(y\le -h)$—

$$w_2(x,y)=\left(-ic_1\chi\varepsilon_{11}\operatorname{ctg}\beta/c_0 k\cos\beta e_{15}\overline{K}(k\cos\beta)\right)G(k\cos\beta)e^{-ik\sin\beta(y+h)}e^{-ik\cos\beta x}$$

$$\varphi_2(x,y)=\frac{\varepsilon_{11}w_2(x,y)c_1}{e_{15}c_0 k\cos\beta\overline{K}(k\cos\beta)G(k\cos\beta)}e^{-ik\sin\beta(y+h)}e^{-ik\cos\beta x} \tag{2.18}$$

где $G(\sigma)$ дается формулой (2.10).

II) Нижняя граница $(y=-h)$ щели покрыта бесконечным электродом. Тогда $\overline{F}_+(\sigma)=0$ и опять из (2.1)–(2.11) получим:

В Ω_1 $(y\ge h)$

$$w_1(x,y)=w_\infty(x,y)+w_{\text{отр}}^{(1)}(x,y) \tag{2.19}$$

В Ω_0 $(-h\le y\le h)$

$$\varphi_0(x,y)=\varphi_0^{(1)}(x,y) \tag{2.20}$$

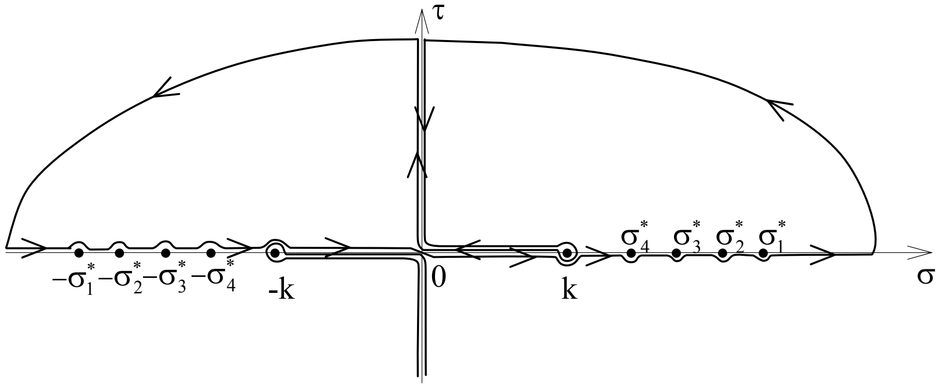
В Ω_2 $(y\le -h)$

$$w_2(x,y)=\varphi_2(x,y)\equiv 0 \tag{2.21}$$

Из (2.12) и (2.19) следует, что бесконечный электрод полностью (независимо от h) поглощает отраженную волну $w_{\text{отр}}^{(2)}(x, y)$ из (2.16).

3. Перейдем к исследованию волнового поля упругих перемещений в области Ω_1, представляющейся формулами (2.1)–(2.3). Для детального исследования интегрального составляющего (2.2) переходим на комплексную плоскость, разрезанную указанным на фиг.2 образом и преобразуем интегралы из (2.2) при помощи контурного интегрирования.

Сначала рассмотрим (2.2) в области $\Omega_1^{(1)}$ $(x < 0, y > h)$. Для этой области путь интегрирования следует замыкать в верхней полуплоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ (фиг.2). Подынтегральная функция из (2.2) содержит $|\sigma|$ и в знаменателе $\Delta_3^*(\sigma)$. Аналитическое продолжение функции $\Delta_3^*(\sigma)$ из (1.21) $\Delta_3^*(\alpha)$ не имеет чисто мнимых корней. Оно не может иметь также комплексных корней в разрезанной плоскости (фиг.2), поскольку, если полагать, что в первой четверти $\alpha = \alpha_0$ является комплексным корнем $\Delta_3^*(\alpha)$, то тогда и $\overline{\alpha}_0$ будет корнем $\Delta_3^*(\alpha)$, так как в разрезанной плоскости (фиг.2.) имеет место $\overline{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} = \sqrt{\overline{\alpha}^2 - k^2}$. Но, тогда нетрудно убедиться, что поле перемещений будет иметь составляющую, приходящую из бесконечности [8].



Фиг.2

Таким образом, аналитическое продолжение подынтегральной функции из (2.2) внутри контура интегрирования (на верхней полуплоскости) имеет единственную особую точку $\sigma = \sigma_3^*$ (корни $\Delta_3(\sigma)$ и $\Delta_3^*(\sigma)$ одинаковы), где она имеет простой полюс.

Имея в виду эти замечания, по обычной процедуре контурного интегрирования из (2.2) для $W_1^{(1)}(x, y)$ в области $\Omega_1^{(1)}$ получим

$$W_1^{(1)}(x, y) = w_1^{(1)}(x, y) + w_{\text{пз}}^{(1)}(x, y) + w_{\text{пов}}^{(3)}(x, y) \tag{3.1}$$

$$w_1^{(1)}(x, y) = \frac{D_1^*}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau}}{\overline{K}_+(i\tau)}\left[M_{11}(\tau)e^{-i\sqrt{k^2+\tau^2}(y-h)} + (M_{12}(\tau))e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}(y-h)}\right]e^{-\tau|x|}d\tau +$$
$$+\frac{D_1}{2\pi}\int_0^k \frac{\sqrt{\sigma}}{\overline{K}_+(\sigma)}\left[M_{14}(\sigma)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y-h)} + M_{15}(\sigma)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y-h)}\right]\frac{e^{i\sigma x}d\sigma}{\sigma - k\cos\beta + i0} \tag{3.2}$$

$$w_{\text{пз}}^{(1)}(x, y) = \frac{D_1^*}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau}}{\overline{K}_+(i\tau)}M_{13}(\tau)e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}(y-h)}e^{-\tau|x|}d\tau \tag{3.3}$$

$$w_{\text{пов}}^{(3)}(x,y)=A_{\text{пов}}^{(3)}e^{-\gamma_3^*(y-h)}e^{i\sigma_3^*|x|},\qquad \gamma_3^*=\sqrt{\left(\sigma_3^*\right)^2-k^2}$$

$$A_{\text{пов}}^{(3)}=\frac{D_1\sqrt{\sigma_3^*}\left[\overline{K}_+\left(\sigma_3^*\right)\right]^{-1}}{\gamma_3^*\left(\sigma_3^*-k\cos\beta\right)\operatorname{ch}\left(2\sigma_3^*h\right)}\left[\frac{\varepsilon_{01}\chi k^2}{\left(\gamma_3^*\right)^{3/2}}+\frac{2h}{\operatorname{ch}^2\left(2\sigma_3^*h\right)}\right]^{-1}, \tag{3.4}$$

$$M_{11}(\tau)=\left[\left(d^+(i\tau)\sqrt{k^2+\tau^2}-\chi\tau\cos(2h\tau)\right)(i\tau-k\cos\beta)\right]^{-1}$$

$$M_{12}(\tau)=\left[\left(d^+(i\tau)\sqrt{k^2+\tau^2}+\chi\tau\cos(2h\tau)\right)(i\tau-k\cos\beta)\right]^{-1} \tag{3.5}$$

$$M_{13}(\tau)=\frac{-2\sqrt{k^2+\tau^2}\cos(2h\tau)\cdot(i\tau-k\cos\beta)^{-1}}{\left[d^-(i\tau)\sqrt{k^2+\tau^2}-\chi\tau\cos(2h\tau)\right]\left[d^+(i\tau)\sqrt{k^2+\tau^2}+\chi\tau\cos(2h\tau)\right]}$$

$$M_{14}(\sigma)=\left[d^+(\sigma)\sqrt{k^2-\sigma^2}+i\chi\sigma\operatorname{ch}(2h\sigma)\right]^{-1},\quad d^{\pm}(\sigma)=\operatorname{ch}(2h\sigma)\pm\varepsilon_{10}\operatorname{sh}(2h\sigma)$$

$$M_{15}(\sigma)=\left[d^-(\sigma)\sqrt{k^2-\sigma^2}-i\chi\sigma\operatorname{ch}(2h\sigma)\right]^{-1} \tag{3.6}$$

$$D_1=\frac{2\chi\sqrt{k\cos\beta}}{1+\varepsilon_{01}+\chi_1^2}\,\frac{e^{-ikh\sin\beta}}{\overline{K}_-(k\cos\beta)\Delta_3^*(k\cos\beta)},\quad D_1^*=D_1e^{-i\pi/4} \tag{3.7}$$

В (3.1) $w_{\text{пов}}^{(3)}(x,y)$ – вычет подынтегральной функции в точке $\alpha=\sigma_3^*$– амплитуда поверхностной волны, $w_{\text{пз}}^{(1)}(x,y)$–амплитуда упругих перемещений, обусловленная чисто пьезоэффектом.

Подставляя (3.1) в (2.1), получим выражение для амплитуды упругого перемещения в области $\Omega_1^{(1)}(x<0,\ y>h)$, представленное в виде суммы падающей $\left(w_\infty(x,y)\right)$, отраженной $\left(w_{\text{отр}}(x,y)\right)$, поверхностной $\left(w_{\text{пов}}^{(3)}(x,y)\right)$ волны и регулярных интегралов из (3.2), (3.3).

Для более детального изучения влияния полубесконечного электрода на характер распределения волнового поля в рассматриваемой области пьезоэлектрика следует исследовать поведение интегральных слагаемых, входящих в (3.2) и (3.3), на дальних зонах, т.е. получить асимптотическое представление волнового поля, обусловленное $w_1^{(1)}(x,y)$ при $r=\sqrt{x^2+(y-h)^2}\to\infty$.

Рассмотрим (3.2). Перейдем к полярным координатам

$$x=r\cos\theta,\quad y-h=r\sin\theta,\quad \pi/2<\theta<\pi \tag{3.8}$$

и сделаем в (3.2) замену переменных [8]

$$\lambda_1(\sigma)=\sigma|\cos\theta|-\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta,\quad \lambda_2(\sigma)=\sigma|\cos\theta|+\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta \tag{3.9}$$

Тогда имея в виду, что $\lambda_2'(\sigma)>0$ при $0<\sigma<k|\cos\theta|$, $\lambda_2'(\sigma)<0$ при $k|\cos\theta|<\sigma<k$, а $\lambda_1'(\sigma)>0$ при $0<\sigma<k$, из (3.2) будем иметь:

а) при $\pi-\beta<\theta<\pi\qquad \left(\cos(\pi-\theta)>\cos\beta\right)$

$$w_1^{(1)}(r,\theta)=\sum_{j=1}^{3}Q_j(r,\theta)+Q_4^+(r,\theta) \tag{3.10}$$

$$Q_1(r,\theta)=\frac{D_1^*}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\tau}}{\overline{K}_+(i\tau)}\left[M_{11}(\tau)e^{-rn_1}+M_{12}(\tau)e^{-rn_2}\right]d\tau$$

$$Q_2(r,\theta)=\frac{D_1}{2\pi}\int\limits_{-k\sin\theta}^{k|\cos\theta|}\frac{\sqrt{\sigma_1(\lambda_1)}M_{14}(\sigma_1)\cdot e^{i\lambda_1 r}}{\overline{K}_+(\sigma_1)(\sigma_1-k\cos\beta+i0)}\frac{d\sigma_1}{d\lambda_1}d\lambda_1$$

$$Q_3(r,\theta)=\frac{D_1}{2\pi}\int\limits_{k\sin\theta}^{k}\frac{\sqrt{\sigma_2(\lambda_2)}M_{15}(\sigma_2)\cdot e^{i\lambda_2 r}}{\overline{K}_+(\sigma_2)(\sigma_2-k\cos\beta+i0)}\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2}d\lambda_2$$

$$Q_4^+(r,\theta)=-\frac{D_1}{2\pi}\int\limits_{k|\cos\theta|}^{k}\frac{\sqrt{\sigma_1(\lambda_2)}M_{15}(\sigma_1)e^{i\lambda_2 r}}{\overline{K}_+(\sigma_1)(\sigma-k\cos\beta+i0)}\frac{d\sigma_1}{d\lambda_2}d\lambda_2 \qquad (3.11)$$

где

$$\sigma_1(\lambda_i)=\lambda_j|\cos\theta|+\sqrt{k^2-\lambda_j^2}\sin\theta,\quad j=1,2$$
$$\sigma_2(\lambda_2)=\lambda_2|\cos\theta|-\sqrt{k^2-\lambda_2^2}\sin\theta \qquad (3.12)$$

$$n_1(\tau)=\tau|\cos\theta|+i\sqrt{k^2+\tau^2}\sin\theta,\quad n_2=\tau|\cos\theta|-i\sqrt{k^2+\tau^2}\sin\theta$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\lambda_2}=-\frac{\sqrt{k^2-\sigma_1^2}}{\sqrt{k^2-\lambda_2^2}},\quad \frac{d\sigma_j}{d\lambda_j}=\frac{\sqrt{k^2-\sigma_j^2}}{\sqrt{k^2-\lambda_j^2}},\qquad (j=1,2) \qquad (3.13)$$

Отметим, что при $\pi-\beta<\theta<\pi$ уравнения

$$\sigma_1(\lambda_1)-k\cos\beta=0 \quad \text{и} \quad \sigma_2(\lambda_2)-k\cos\beta=0 \qquad (3.14)$$

имеют, соответственно, корни $\lambda_{11}=-k\cos(\theta-\beta)$, $\lambda_{22}=-k\cos(\theta+\beta)$, принадлежащие, соответственно, интервалам $(-k\sin\theta,k|\cos\theta|)$ и $(k\sin\theta,k)$. При этом,

$$\frac{1}{\sigma_1(\lambda_1)-k\cos\beta+i0}=\frac{C_{-1}^{(1)}}{\lambda_1-\lambda_{11}+i0}+C_0^{(1)}+C_1^{(1)}(\lambda_1-\lambda_{11})+\ldots$$

$$\frac{1}{\sigma_2(\lambda_2)-k\cos\beta+i0}=\frac{C_{-1}^{(2)}}{\lambda_2-\lambda_{22}+i0}+C_0^{(2)}+C_1^{(2)}(\lambda_2-\lambda_{22})+\ldots \qquad (3.15)$$

где $C_0^{(1)},C_1^{(1)},\ldots,C_0^{(2)},C_1^{(2)},\ldots$ – постоянные, а

$$C_{-1}^{(1)}=\left(\left(d\sigma_1/d\lambda_1\right)\Big|_{\lambda_1=\lambda_{11}}\right)^{-1}=\sin(\theta-\beta)/\sin\beta,$$

$$C_{-1}^{(2)}=\left(\left(d\sigma_2/d\lambda_2\right)\Big|_{\lambda_2=\lambda_{22}}\right)^{-1}=-\sin(\theta+\beta)/\sin\beta$$

б) при $\pi/2<\theta<\pi-\beta \quad (\cos(\pi-\theta)<\cos\beta)$

$$w_1^{(1)}(r,\theta)=\sum_{j=1}^{3}Q_j(r,\theta)+Q_4^-(r,\theta)+w_{\text{отр}}^{(2)}(r,\theta) \qquad (3.16)$$

где $Q_j(r,\theta)$ $(j=1,2,3)$ даются формулой (3.11), а

$$Q_4^-(r,\theta)=-\frac{D_1}{2\pi}\int\limits_{k|\cos\theta|}^{k}\frac{\sqrt{\sigma_1(\lambda_2)}M_{15}(\sigma_1)e^{i\lambda_2 r}}{\overline{K}_+(\sigma_1)(\sigma_1-k\cos\beta-i0)}\frac{d\sigma_1}{d\lambda_2}d\lambda_2 \qquad (3.17)$$

Отметим, что при получении (3.16) было использовано представление (1.27). В этом случае в интервале $\pi/2<\theta<\pi-\beta$ уравнения

$$\sigma_1(\lambda_2)-k\cos\beta=0 \quad \text{и} \quad \sigma_2(\lambda_2)-k\cos\beta=0 \tag{3.18}$$

имеют, соответственно, корни $\lambda_{12}=-k\cos(\theta+\beta)$ и $\lambda_{22}=-k\cos(\theta+\beta)$ в интервалах $(k|\cos\theta|,k)$ и $(k\sin\theta,k)$. При этом,

$$\frac{1}{\sigma_1(\lambda_2)-k\cos\beta-i0}=\frac{B_{-1}^{(1)}}{\lambda_2-\lambda_{12}+i0}+B_0^{(1)}+B_1^{(1)}(\lambda_2-\lambda_{12})+\ldots \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{\sigma_2(\lambda_2)-k\cos\beta+i0}=\frac{B_{-1}^{(2)}}{\lambda_2-\lambda_{22}+i0}+B_0^{(2)}+B_1^{(2)}(\lambda_2-\lambda_{22})+\ldots$$

где $B_0^{(1)},B_1^{(1)},\ldots,B_0^{(2)},B_1^{(2)},\ldots$ – постоянные, а

$$B_{-1}^{(1)}=\left(\left|d\sigma_1/d\lambda_2\right|\Big|_{\lambda_2=\lambda_{12}}\right)^{-1}=\sin(\theta+\beta)/\sin\beta,$$

$$B_{-1}^{(2)}=\left(\left(d\sigma_2/d\lambda_2\right)\Big|_{\lambda_2=\lambda_{22}}\right)^{-1}=-\sin(\theta+\beta)/\sin(2\theta+\beta),$$

в) при $\theta=\pi-\beta$ из (3.2) получим

$$w_{\pi-\beta}^{(1)}(r)\equiv w_1^{(1)}(r,\pi-\beta)=Q_1(r,\pi-\beta)+Q_2(r,\pi-\beta)+Q_{15}(r) \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} Q_{15}(r)=\frac{D_1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\Bigg\{&\int_{k\cos\beta}^{k-\varepsilon}\Phi_{15}^{(1)}(\sigma_1)e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2-\int_{k\sin\beta}^{k-\varepsilon}\Phi_{15}^{(2)}(\sigma_2)e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2- \\ &-\int_{C'_\varepsilon}\Phi_{15}^{(1)}(\sigma_1(\varsigma))e^{i\xi r}d\varsigma-\int_{C''_\varepsilon}\Phi_{15}^{(2)}(\sigma_2(\varsigma))e^{i\xi r}d\varsigma\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\Phi_{15}^{(j)}(\sigma_j)=\left[\frac{\sqrt{\sigma_j(\lambda_2)}M_{15}(\sigma_j)}{\overline{K}_+(\sigma_j)(\sigma_j(\lambda_2)-k\cos\beta+i0)}\frac{d\sigma_j}{d\lambda_2}\right]\Bigg|_{\theta=\pi-\beta}=$$

$$=\frac{\sqrt{\sigma_j}\sqrt{k^2-\sigma_j^2}M_{15}(\sigma_j)}{\overline{K}_+(\sigma_j)\left[(k+\lambda_2)\sin\beta+(-1)^j\sqrt{k^2-\lambda_2^2}\cos\beta\right](k-\lambda_2)} \qquad j=1,2$$

где C'_ε и C''_ε – полуокружности с радиусом ε и с центром в точке $\alpha=k$, обходящие по часовой стрелке.

Таким образом, дифрагированное поле упругого перемещения в области $\Omega_1^{(1)}(x<0,\ y>h)$ определяется формулами (3.10), (3.16) и (3.20) при указанных выше значениях θ, соответственно.

Перейдем к определению асимптотических формул для $w_1^{(1)}(x,y)$ в области $\Omega_1^{(1)}(x<0,\ y>h)$. Эти формулы будут получены из интегралов, входящих в (3.10), (3.16) и (3.20), интегрируя их по частям [8, 12]. Для этого, нам необходимо иметь разложения подынтегральных функций около точек $\tau=0,\ \lambda_1=-k\sin\theta,$ $\lambda_2=k\sin\theta$ и $\lambda_2=k$.

Рассмотрим сначала $\overline{K}_+(\sigma)$. Из (1.30) имеем

$$\overline{R}(\sigma)=\overline{R}_+(\sigma)+\overline{R}_-(\sigma)=\ln\overline{K}(\sigma) \quad (3.22)$$

где $\overline{K}(\sigma)$ дается (1.18). Следовательно, для малых $|\sigma|$ получим

$$\overline{R}(\sigma)=d_0+d_1|\sigma|+O\left(|\sigma|^2\right),\ |\sigma|\to 0 \quad (3.23)$$

где $d_0=\ln\left(2/1+\chi_1^2+\varepsilon_{01}\right),\ d_1=\left(\varepsilon_{01}^2-1\right)\varepsilon_0^{-1}+i\chi(kh)^{-1}$

Тогда при помощи известного представления [3]

$$|\sigma|=\frac{\sigma}{\pi i}\ln(\sigma-i0)-\frac{\sigma}{\pi i}\ln(\sigma+i0)+\sigma \quad (3.24)$$

из (3.23) получим, что при $\sigma\to 0$

$$\overline{R}_+(\sigma)=\frac{1}{2}d_0-d_1\frac{\sigma}{\pi i}\left[\ln(\sigma+i0)-\frac{i\pi}{2}\right]+C_1\sigma+O\left(\sigma^2\right),\quad \overline{R}_-(\sigma)=\overline{R}_+(-\sigma) \quad (3.25)$$

где C_1 – постоянная.

Теперь имея в виду формулу

$$\overline{K}_+(\sigma)=e^{\overline{R}_+(0)}\left[1+\frac{\overline{R}_+(\sigma)-R_+(0)}{1!}+\frac{\left(\overline{R}_+(\sigma)-R_+(0)\right)^2}{2!}+\ldots\right] \quad (3.26)$$

вытекающую из (1.18), при помощи (3.25) и (3.26) получим следующее разложение для $\overline{K}_+(\sigma)$, при $\sigma\to 0$:

$$\overline{K}_+(\sigma)=a_0\left[1+a_1\sigma\ln(\sigma+i0)\right]+\left(C_1-i\pi a_1/2\right)\sigma+O\left(\sigma^2\left(1+\ln\sigma+\ln^2\sigma\right)\right) \quad (3.27)$$

$$a_0=\sqrt{2/\left(1+\chi_1^2+\varepsilon_{01}\right)},\quad a_1=\frac{i}{\pi}\left(\frac{\varepsilon_{01}^2-1}{\varepsilon_{01}}+i\frac{\chi}{kh}\right) \quad (3.28)$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}T_{1j}(\tau)=\frac{\sqrt{\tau}}{\overline{K}_+(i\tau)}M_{1j}(\tau),\ j=1,2,3;\\ T_{1j}(\sigma)=\frac{\sqrt{\sigma}}{\overline{K}_+(\sigma)}\frac{M_{1j}(\sigma)}{\sigma-k\cos\beta+i0},\ j=4,5\end{gathered} \quad (3.29)$$

Теперь имея (3.27), для функции T_{1j} из (3.29) получим следующие разложения:

при $\lambda_1\to -k\sin\theta$

$$T_{1j}(\tau)-N_{1j}^{(0)}(\tau)=O\left(\tau^{5/2}\left(1+\ln\tau+\ln^2\tau\right)\right),\ i=1,2,3,\ \tau\to 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\lambda_1}T_{14}(\sigma_1(\lambda_1))-N_{14}^{(0)}\left(\lambda_1^*\right)=O\left(\left(\lambda_1^*\right)^{5/2}\left(1+\ln\lambda_1^*+\ln^2\lambda_1^*\right)\right),\ \lambda_1^*=\lambda_1+k\sin\theta \quad (3.31)$$

при $\lambda_2\to k\sin\theta$

$$\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2}T_{15}(\sigma_2(\lambda_2))-N_{15}^{(0)}\left(\lambda_2^*\right)=O\left(\left(\lambda_2^*\right)^{5/2}\left(1+\ln\lambda_2^*+\ln^2\lambda_2^*\right)\right),\quad \lambda_2^*=\lambda_2-k\sin\theta \quad (3.32)$$

$$N_{1j}^{(0)}(\tau)=A_{1j}^{(1)}(\tau)^{1/2}+A_{1j}^{(2)}(\tau)^{3/2}\ln(\tau)+A_{1j}^{(3)}(\tau)^{3/2},\quad j=1,2,3 \quad (3.33)$$

$$N_{14}^{(0)}\left(\lambda_2^*\right)=A_{14}^{(1)}\left(\lambda_1^*\right)^{1/2}+A_{14}^{(2)}\left(\lambda_1^*\right)^{3/2}\ln\left(\lambda_1^*\right)+A_{14}^{(3)}\left(\lambda_1^*\right)^{3/2}\quad j=1,2,3 \quad (3.34)$$

$$N_{15}^{(0)}\left(\lambda_2^*\right)=A_{15}^{(1)}\left(\lambda_2^*\right)^{1/2}+A_{15}^{(2)}\left(\lambda_2^*\right)^{3/2}\ln\left(\lambda_2^*\right)+A_{15}^{(3)}\left(\lambda_2^*\right)^{3/2} \tag{3.35}$$

где $A_{1j}^{(3)}\ \left(j=\overline{1,5}\right)$ – постоянные, а

$$A_{11}^{(1)}=A_{12}^{(1)}=-A_{13}^{(1)}/2=-1/k^2a_0\cos\beta,\qquad A_{1j}^{(2)}=-ia_1A_{1j}^{(1)}\quad (j=1,2,3) \tag{3.36}$$

$$A_{14}^{(1)}=A_{15}^{(1)}=-1/k^2a_0\left|\cos\theta\right|^{3/2}\cos\beta,\qquad A_{14}^{(2)}=A_{15}^{(2)}=-ia_1A_{14}^{(1)}, \tag{3.37}$$

С другой стороны, в окрестности точки $\lambda_2=k$ имеют место разложения

$$T_{15}\left(\sigma_1\left(\lambda_2\right)\right)\frac{d\sigma_1}{d\lambda_2}-T_1^{(k)}\left(\lambda_2\right)=O\left(\left(k-\lambda_2\right)^{5/2}\right)\text{ при }\lambda_2\to k \tag{3.38}$$

$$T_{15}\left(\sigma_2\left(\lambda_2\right)\right)\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2}-T_2^{(k)}\left(\lambda_2\right)=O\left(\left(k-\lambda_2\right)^{5/2}\right)\text{ при }\lambda_2\to k \tag{3.39}$$

$$T_1^{(k)}\left(\lambda_2\right)=\sum_{n=0}^{5}(-1)^{n-1}b_{n-1}\left(k-\lambda_2\right)^{(n-1)/2},\quad T_2^{(k)}\left(\lambda_2\right)=\sum_{n=0}^{5}b_{n-1}\left(k-\lambda_2\right)^{(n-1)/2} \tag{3.40}$$

$$b_{-1}=\sqrt{k/2}\sin\theta T_{15}\left(k\left|\cos\theta\right|\right)=\frac{\sqrt{2\left|\cos\theta\right|}\sin\theta\left[\bar{K}_+\left(k\left|\cos\theta\right|\right)\right]^{-1}}{2k\left[2e^{2kh\left|\cos\theta\right|}\sin\theta-i\chi\left|\cos\theta\right|\right]}\frac{1}{\left(\left|\cos\theta\right|-\cos\beta\right)}$$

$$b_0=\left[\left|\cos\theta\right|T_{15}(\sigma)-k^2\sin^2\theta\, dT_{15}/d\sigma\right]\Big|_{\sigma=k\left|\cos\theta\right|}$$

$$b_1=-\frac{3\sin\theta}{4\sqrt{2k}}T_{15}\left(k\left|\cos\theta\right|\right)-\frac{3\sqrt{2k}}{2}\sin\theta\left|\cos\theta\right|\frac{dT_{15}}{d\sigma}\Big|_{\sigma=k\left|\cos\theta\right|}+k\sqrt{\frac{k}{2}}\sin^3\theta\frac{d^2T_{15}}{d\sigma^2}\Big|_{\sigma=k\left|\cos\theta\right|}$$

$$b_2=\left[-\cos2\theta\frac{dT_{15}}{d\sigma}+2k\sin^2\theta\left|\cos\theta\right|\frac{d^2T_{15}}{d\sigma^2}-\frac{k^2}{3}\sin^4\theta\frac{d^3T_{15}}{d\sigma}\right]\Big|_{\sigma=k\left|\cos\theta\right|}$$

$$b_3=-\frac{5\sin\theta}{4\sqrt{2k}}\left[-\frac{1}{8k}T_{15}(\sigma)+\left|\cos\theta\right|\frac{dT_{15}}{d\sigma}+k\left(\cos^2\theta+\cos2\theta\right)\frac{d^2T_{15}}{d\sigma^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{4k^2}{3}\sin^2\theta\left|\cos\theta\right|\frac{d^3T_{15}}{d\sigma^3}\right]\Big|_{\sigma=k\left|\cos\theta\right|} \tag{3.41}$$

$$b_4=\left[-\frac{\sin^2\theta}{32k}\frac{dT_{15}}{d\sigma}+\frac{1-4\sin^2\theta}{2}\left|\cos\theta\right|\frac{d^2T_{15}}{d\sigma^2}-\frac{k\sin^2\theta}{2}\left(1-4\cos^2\theta\right)\frac{d^3T_{15}}{d\sigma^3}\right]\Big|_{\sigma=k\left|\cos\theta\right|}$$

Теперь, имея полученные разложения, $w_1^{(1)}(r,\theta)$ из (3.10) представим в виде

$$w_1^{(1)}(r,\theta)=I_{11}(r,\theta)+I_{12}(r,\theta)+q_1(r,\theta) \tag{3.42}$$

$$I_{11}(r,\theta)=\frac{D_1^*}{2\pi}\left\{\int_0^\infty\left[\left(T_{11}(\tau)e^{-ir\sqrt{k^2+\tau^2}\sin\theta}-N_{11}^{(0)}(\tau)e^{-ikr\sin\theta}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left(T_{12}(\tau)e^{ir\sqrt{k^2+\tau^2}\sin\theta}-N_{12}^{(0)}(\tau)e^{ikr\sin\theta}\right)\right]e^{-\tau r\left|\cos\theta\right|}d\tau \tag{3.43}$$

$$
I_{12}(r,\theta)=\frac{D_1}{2\pi}\left\{\int\limits_{-k\sin\theta}^{k|\cos\theta|}\left[T_{14}(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{d\lambda_1}-N_{14}^{(0)}(\lambda_1)\right]e^{i\lambda_1 r}d\lambda_1-\int\limits_{k|\cos\theta|}^{\infty}N_{14}^{(0)}(\lambda_1)e^{i\lambda_1 r}d\lambda_1-\right.
$$

$$
-\int\limits_{k|\cos\theta|}^{k}\left[T_{15}(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{d\lambda_2}-T_1^{(k)}(\lambda_2)\right]e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2-\int\limits_{k}^{\infty}N_{15}^{(0)}(\lambda_2)e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2+
$$

$$
+\int\limits_{k\sin\theta}^{k}\left[T_{15}(\sigma_1)\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2}-T_2^{(k)}(\lambda_2)-N_{15}^{(0)}(\lambda_2)\right]e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2-
\tag{3.44}
$$

$$
\left.-\int\limits_{-\infty}^{k}T_2^{(k)}(\lambda_2)e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2+\int\limits_{-\infty}^{k|\cos\theta|}T_1^{(k)}(\lambda_2)e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2\right\}+q_1^{(1)}(r,\theta)
$$

$$
q_1^{(1)}(r,\theta)=\frac{D_1}{\sqrt{\pi}}\left[b_{-1}\frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{r^{1/2}}-b_1\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{r^{3/2}}+b_3\frac{3e^{i(kr+\pi/4)}}{4r^{5/2}}\right]
\tag{3.45}
$$

Здесь $N_{1j}^{(0)}(\tau)$ $(j=1,2,4,5)$ и $T_j^{(k)}(\lambda_2)$ $(j=1,2)$ даются формулами (3.33)–(3.35) и (3.40), соответственно, а b_j – (3.41).

Следует отметить, что при получении (3.42) имелись в виду равенства

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{-k\sin\theta}^{\infty}N_{14}^{(0)}(\lambda_1)e^{i\lambda_1 r}d\lambda_1=e^{-i\pi/4}\int\limits_{0}^{\infty}N_{11}^{(0)}(\tau)e^{-\tau r|\cos\theta|}d\tau=J_1\\
\int\limits_{k\sin\theta}^{\infty}N_{15}^{(0)}(\lambda_2)e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2=e^{-i\pi/4}\int\limits_{0}^{\infty}N_{12}^{(0)}(\tau)e^{-n_2 r}d\tau=J_2
\end{gathered}
\tag{3.46}
$$

вытекающие из (3.32)–(3.37). При этом [13],

$$
J_j=\frac{\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}}{2|r\cos\theta|^{3/2}}\left[A_{1j}^{(1)}+\frac{3}{r|\cos\theta|}\left(\frac{4}{3}A_{1j}^{(2)}+\frac{3}{2}A_{1j}^{(3)}\right)-\right.
$$

$$
\left.-\frac{3}{2r|\cos\theta|}A_{12}^{(2)}\left(C+\ln 4r|\cos\theta|\right)\right]\qquad j=1,2
$$

где $C=0{,}5772\ldots$ – постоянная Эйлера.

Имея в виду (3.30)–(3.32), нетрудно убедиться, что при $\tau\to 0$

$$
\begin{gathered}
T_{11}(\tau)e^{-ir\sqrt{k^2+\tau^2}\sin\theta}-N_{11}^{(0)}(\tau)e^{-ikr\sin\theta}=\\
=\tau^{5/2}e^{-ikr\sin\theta}\left[A_{11}^{(4)}\left(1+\ln\tau+\ln^2\tau\right)-\frac{ikr\sin\theta}{2k}A_{11}^{(1)}\right]
\end{gathered}
\tag{3.47}
$$

где $A_{11}^{(4)}$ – постоянная.

Аналогичная оценка имеет место и для второго слагаемого подынтегрального выражения $I_{11}(r,\theta)$.

Теперь при помощи (3.47) и (3.43) по свойству преобразования Лапласа получим, что при $r\to\infty$

$$I_{11}(r,\theta) = -\frac{15D_1^* A_{11}^{(1)}}{16k\sqrt{\pi}} \frac{\sin\theta \sin k(y-h)}{|\cos\theta|^{7/2}} \frac{1}{r^{5/2}} + O\left(r^{-7/2}\left(1+\ln r+\ln^2 r\right)\right)$$

(3.48)

Относительно $I_{12}(r,\theta)$ можно утверждать следующее. Интегралы, входящие в (3.44), допускают интегрирование по частям три раза (при условиях (3.30)–(3.32), (3.38) и (3.39)). Интегрируя теперь два раза по частям, интегралы, входящие в формулу (3.44), замечая при этом, что все внеинтегральные члены сокращаются, получим

$$I_{12}(r,\theta) = \frac{D_1}{2\pi r^2}\left\{\int_{-k\sin\theta}^{k|\cos\theta|} \frac{d^2}{d\lambda_1^2}\left[T_{14}(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{d\lambda_1} - N_{14}^{(0)}(\lambda_1)\right]e^{i\lambda_1 r}d\lambda_1 + \right.$$

$$+\int_{-k\sin\theta}^{k} \frac{d^2}{d\lambda_2^2}\left[T_{15}(\sigma_1)\frac{d\sigma_{12}}{d\lambda_2} - T_2^{(k)}(\lambda_2) - N_{15}^{(0)}(\lambda_2)\right]e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2 - \qquad (3.49)$$

$$-\int_{k|\cos\theta|}^{k} \frac{d^2}{d\lambda_2^2}\left[T_{15}(\sigma_1)\frac{d\sigma_{12}}{d\lambda_2} - T_1^{(k)}(\lambda_2)\right]e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2 + \int_{k|\cos\theta|}^{\infty} \frac{d^2 N_{14}^{(0)}(\lambda_1)}{d\lambda_1^2}e^{i\lambda_1 r}d\lambda_1 -$$

$$\left.-\int_{k}^{\infty} \frac{d^2 N_{15}^{(0)}(\lambda_2)}{d\lambda_2^2}e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2 - \int_{-\infty}^{k\sin\theta} \frac{d^2 T_2^{(k)}(\lambda_2)}{d\lambda_2^2}e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2 + \int_{-\infty}^{k|\cos\theta|} \frac{d^2 T_1^{(k)}(\lambda_2)}{d\lambda_2^2}e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2\right\}$$

Каждый интеграл, входящий в (3.49), имеет порядок r^{-1} при $r\to\infty$, в чем можно убедиться, интегрируя их еще один раз по частям. Следовательно, имеет место

$$I_{12}(r,\theta) = O\left(r^{-3}\right) \quad \text{при} \quad r\to\infty \qquad (3.50)$$

Таким образом, имея в виду (3.48) и (3.50), для $w_1^{(1)}(r,\theta)$ в секторе $\pi-\beta<\theta<\pi$ будем иметь асимптотику

$$w_1^{(1)}(r,\theta) = q_1^{(1)}(r,\theta) + O\left(r^{-5/2}\right) \quad \text{при } r\to\infty \qquad (3.51)$$

Аналогичным путем из (3.3) и (3.22) получим асимптотическую формулу

$$w_{\text{пз}}^{(1)}(r,\theta) = q_{\text{пз}}^{(1)}(r,\theta) + O\left(r^{-5/2}\ln r\right) \quad \text{при } r\to\infty$$

$$q_{\text{пз}}^{(1)}(r,\theta) = A_{\text{пз}}^{(1)} e^{ikr\sin\theta} r^{-3/2}, \quad A_{\text{пз}}^{(1)} = D_1^* \big/ 2\sqrt{\pi}a_0 k^2 \cos\beta |\cos\theta|^{3/2} \qquad (3.52)$$

Объединяя теперь в (2.1) формулы (3.1), (3.51) и (3.52), получим, что в секторе $\pi-\beta<\theta<\pi$

$$w_1(r,\theta) = e^{-ikh\sin\beta}e^{-ikr\cos(\theta-\beta)} + A_{\text{отр}}^{(1)}e^{-ikr\cos(\theta+\beta)} + A_{\text{пов}}^{(3)}e^{-\gamma_3^* r\sin\theta}e^{\sigma_3^* r|\cos\theta|} +$$

$$+\frac{D_1}{\sqrt{\pi}}\left[b_{-1}\frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{r^{1/2}} - b_1\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{r^{3/2}}\right] + q_{\text{пз}}^{(1)}(r,\theta) + O\left(r^{-5/2}\ln r\right) \quad \text{при } r\to\infty \qquad (3.53)$$

представляющее волновое поле упругих перемещений в секторе $\pi-\beta<\theta<\pi$ области $\Omega_1^{(1)}$ при $r=\sqrt{x^2+(y-h)^2}\to\infty$.

Аналогичными рассуждениями из (2.1), (3.1), (3.16) и (3.48) получим асимптотическую формулу для упругих перемещений в секторе $\pi/2<\theta<\pi-\beta$ при $r\to\infty$. Она имеет вид

$$w_1(r,\theta) = e^{-ikh\sin\beta} e^{-ikr\cos(\theta-\beta)} + \left[A^{(1)}_{\text{отр}} + A^{(2)}_{\text{отр}}\right] e^{-ikr\cos(\theta+\beta)} + A^{(3)}_{\text{пов}} e^{-\gamma_3^* r\sin\theta} e^{\sigma_3^* r|\cos\theta|} +$$

$$+ \frac{D_1}{\sqrt{\pi}}\left[b_{-1}\frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{r^{1/2}} - b_1\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{r^{3/2}}\right] + q^{(1)}_{\text{пз}}(r,\theta) + O\left(r^{-5/2}\ln r\right), \qquad r\to\infty \qquad (3.54)$$

Теперь рассмотрим случай $\theta = \pi - \beta$. Подынтегральные функции $\Phi^{(j)}_{15}(\sigma_1(\lambda_2))$ из (3.21) в окрестности точки $\lambda_2 = k$ имеют разложения

$$\Phi^{(j)}_{15}(\sigma_1(\lambda_2)) = \frac{B_0}{k-\lambda_2} + (-1)^j\frac{B_1}{\sqrt{k-\lambda_2}} + \ldots \qquad j = 1,2 \qquad (3.55)$$

где B_0, B_1 – постоянные. (3.56)

Тогда $w^{(1)}_1(r,\pi-\beta)$ из (3.20) можно представить в виде

$$w^{(1)}_1(r,\pi-\beta) = Q_1(r,\pi-\beta) + Q_2(r,\pi-\beta) +$$

$$+\frac{D_1}{2\pi}\left\{\int\limits_{k\cos\beta}^{k}\left[\Phi^{(1)}_{15}(\sigma_1(\lambda_2)) - \frac{B_0}{k-\lambda_2} - \frac{B_1}{\sqrt{k-\lambda_2}}\right]e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2 -\right.$$

$$-\int\limits_{k\sin\beta}^{k}\left[\Phi^{(2)}_{15}(\sigma_1) - \frac{B_0}{k-\lambda_2} + \frac{B_1}{\sqrt{k-\lambda_2}}\right]e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2 - \int\limits_{-\infty}^{k\cos\beta}\left[\frac{B_0}{k-\lambda_2} + \frac{B_1}{\sqrt{k-\lambda_2}}\right]e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2 +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{k\sin\beta}\left[\frac{B_0}{k-\lambda_2} - \frac{B_1}{\sqrt{k-\lambda_2}}\right]e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2 + q_{\pi-\beta}(r) \qquad (3.57)$$

$$q_{\pi-\beta}(r) = \frac{1}{2}A^{(2)}_{\text{отр}}e^{ikr} + \frac{D_1 B_1}{\sqrt{\pi}r^{1/2}}e^{i(kr-\pi/4)} \qquad (3.58)$$

Отметим, что при выводе (3.57) имелось в виду, что

$$\frac{D_1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{C'_\varepsilon}\Phi^{(1)}_{15}(\sigma_1(\varsigma))e^{i\zeta r}d\varsigma + \int\limits_{C''_\varepsilon}\Phi^{(2)}_{15}(\sigma_2(\varsigma))e^{i\zeta r}d\varsigma\right) = -\frac{1}{2}A^{(2)}_{\text{отр}}e^{ikr} \qquad (3.59)$$

Теперь, как это делалось выше, интегрирование по частям из (3.57) получим следующую асимптотическую формулу для $w^{(1)}_1(r,\pi-\beta)$:

$$w^{(1)}_1(r,\pi-\beta) = \frac{1}{2}A^{(2)}_{\text{отр}}e^{ikr} + O\left(r^{-1/2}\right) \quad \text{при} \quad r\to\infty \qquad (3.60)$$

Объединяя (3.60) с (3.1) и (2.1), при этом имея в виду (3.52), в итоге получим следующую формулу:

$$w_{\pi-\beta}(r) = e^{ikh\cos\beta}e^{-ikr\cos 2\beta} + A^{(3)}_{\text{пов}}e^{-\gamma_3^* r\sin\beta}e^{\sigma_3^* r\cos\beta} + A^{(1)}_{\text{отр}}e^{ikr} + 0{,}5A^{(2)}_{\text{отр}}e^{ikr} +$$

$$+O\left(r^{-1/2}\right) \quad \text{при} \quad r\to\infty \qquad (3.61)$$

представляющую асимптотику волнового поля упругих перемещений вдоль луча $\theta = \pi-\beta$, исходящего из точки $(0,h)$ при $r\to\infty$.

Таким образом, формулами (3.53), (3.54) и (3.61) определяется поведение волнового поля упругих перемещений в дальних зонах области $\Omega^{(1)}_1(x<0,\ y>h)$ при соответствующих значениях угла θ.

В конце остановимся на асимптотике упругих перемещений по линии $y=h,\ (x<0)$. Оказывается, что в этом случае искомую асимптотическую формулу можно получить из (3.53) предельным переходом при $\theta\to\pi$. Перейдя в (3.53) к пределу, имея при этом в виду (3.47), получим асимптотическую формулу для упругих перемещений по линии $y=h$ при $x\to-\infty$ в виде

$$w_1(x,h)=\left(e^{ikh\sin\beta}+A^{(1)}_{\text{отр}}\right)e^{-ik|x|\cos\beta}+A^{(3)}_{\text{пов}}e^{\sigma_3^*|x|}+q^{(1)}_{\pi}(x)+\frac{D_1^*\sqrt{h}}{2\sqrt{\pi}a_0k^2\cos\beta}\frac{1}{|x|^{3/2}}+$$

$$+O\left(|x|^{-5/2}\ln|x|\right) \tag{3.62}$$

$$q^{(1)}_{\pi}(x)=D_1B^{(1)}_{\pi}e^{i(kx-\pi/4)}\Big/2\sqrt{\pi}|x|^{3/2} \tag{3.63}$$

$$B^{(1)}_{\pi}=\left(\varepsilon_{01}+\text{th}(2hk)\right)\Big/\sqrt{2}k^2\varepsilon_{01}^2\overline{K}_+(k)\text{ch}(2kh)\sin^2(\beta/2) \tag{3.64}$$

4. Определим волновое поле упругих перемещений в области $\Omega_1^{(2)}(x>0,\ \ y\ge h)$ из (2.1). Так как $x>0$, то при переходе на комплексную плоскость следует контур интегрирования замыкать в нижней полуплоскости с разрезами (фиг.2) и заменить в интеграле (2.2) $\overline{K}_+(\sigma)$ на $\overline{K}(\sigma)/\overline{K}_-(\sigma)$. Тогда аналитическое продолжение подынтегральной функции внутри контура интегрирования регулярно кроме точек

$$\alpha_2=-\sigma_2^*,\ \alpha_4=-\sigma_4^*,\ \alpha_3=k\cos\beta-i0 \tag{4.1}$$

где оно имеет полюса первого порядка. Тогда опять по обычной процедуре контурного интегрирования из (2.1)–(2.3) получим аналогичную (3.1) формулу, определяющую поле упругих перемещений в области $\Omega_1^{(2)}(x>0,\ \ y\ge h)$

$$\begin{aligned}w_1(x,y)&=w_1^{(2)}(x,y)+w_\infty(x,y)+w^{(1)}_{\text{отр}}(x,y)+w^{(2)}_{\text{отр}}(x,y)+w^{(2)}_{\text{пз}}(x,y)+\\&+w^{(2)}_{\text{пов}}(x,y)+w^{(4)}_{\text{пов}}(x,y)\end{aligned} \tag{4.2}$$

где $w_\infty(x,y), w^{(1)}_{\text{отр}}(x,y)$ и $w^{(2)}_{\text{отр}}(x,y)$ даются формулами (1.1), (2.3) и (2.13), а

$$\begin{aligned}w_1^{(2)}(x,y)&=\frac{D_2^*}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\tau}\overline{K}_+(i\tau)}{\sqrt{k^2+\tau^2}}\Big[M_{21}(\tau)e^{-i\sqrt{k^2+\tau^2}(y-h)}+\\&\quad+M_{22}(\tau)e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}(y-h)}\Big]e^{-\tau|x|}d\tau+\\&\quad+\frac{D_2}{2\pi}\int_0^k\frac{\sqrt{\sigma}\overline{K}_+(\sigma)}{\sqrt{k^2-\sigma^2}}\Big[M_{24}(\sigma)e^{-i\sqrt{k^2+\tau^2}(y-h)}+M_{25}(\sigma)e^{i\sqrt{k^2-\sigma}}\Big]e^{-i\sigma x}dx\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$w^{(2)}_{\text{пз}}(x,y)=\frac{D_2^*}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\tau}\overline{K}_+(i\tau)}{\sqrt{k^2+\tau^2}}M_{23}(\tau)e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}(y-h)}e^{-\tau|x|}d\tau \tag{4.4}$$

$$w^{(\text{j})}_{\text{пов}}(x,y)=A^{(\text{j})}_{\text{пов}}e^{-\gamma_j^*(y-h)}\cdot e^{i\sigma_j^*x},\ \ \gamma_j^*=\sqrt{\left(\sigma_j^*\right)^2-k^2},\quad j=2{,}4 \tag{4.5}$$

$$A^{(2)}_{\text{пов}}=\frac{-iD_2\sqrt{\sigma_2^*}\,\text{th}\left(h\sigma_2^*\right)}{\overline{K}_+\left(\sigma_2^*\right)\left(\sigma_2^*+k\cos\beta\right)\left(\gamma_2^*\right)^{1/2}}\left[\frac{\varepsilon_{01}\chi k^2}{\left(\gamma_2^*\right)^{3/2}}+\frac{h}{\text{ch}^2\left(h\sigma_2^*\right)}\right]^{-1}$$

$$A_{\text{пов}}^{(2)}=\frac{-iD_2\sqrt{\sigma_4^*}\varepsilon_{10}}{\overline{K}_+\left(\sigma_4^*\right)\left(\sigma_4^*+k\cos\beta\right)\left(\gamma_4^*\right)^{1/2}}\left[\frac{\chi k^2\operatorname{th}\left(h\sigma_4^*\right)}{\left(\gamma_4^*\right)^{3/2}}+\frac{h\left(1-\chi\sigma_4^*\left(\gamma_4^*\right)^{-1/2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(h\sigma_4^*\right)}\right]^{-1} \tag{4.6}$$

$D_2=D_1c_0/2\varepsilon_0,\quad D_2^*=D_2e^{-i\pi/4}$,

$$M_{21}(\tau)=-\frac{\eta_-(\tau)(k\cos\beta+i\tau)^{-1}}{\left(\cos(h\tau)+\eta_-(\tau)\sin(h\tau)\right)\left(\sin(h\tau)-\eta_-(\tau)\cos(h\tau)\right)}$$

$$M_{22}(\tau)=-\frac{\eta_+(\tau)(k\cos\beta+i\tau)^{-1}}{\left(\cos(h\tau)+\eta_+(\tau)\sin(h\tau)\right)\left(\sin(h\tau)-\eta_+(\tau)\cos(h\tau)\right)} \tag{4.7}$$

$$M_{23}(\tau)=\frac{\eta_-(\tau)(k\cos\beta+i\tau)^{-1}}{\left(\cos(h\tau)-\eta_-(\tau)\sin(h\tau)\right)\left(\sin(h\tau)+\eta_+(\tau)\cos(h\tau)\right)}+$$

$$+\frac{\eta_+(\tau)(k\cos\beta+i\tau)^{-1}}{\left(\cos(h\tau)+\eta_+(\tau)\sin(h\tau)\right)\left(\sin(h\tau)-\eta_+(\tau)\cos(h\tau)\right)}$$

$$M_{24}(\sigma)=\frac{\xi_+(\sigma)(\sigma+k\cos\beta)^{-1}}{\left(\operatorname{ch}(h\sigma)+\xi_+(\sigma)\operatorname{sh}(h\sigma)\right)\left(\operatorname{sh}(h\sigma)+\xi_+(\sigma)\operatorname{ch}(h\sigma)\right)}$$

$$M_{25}(\sigma)=\frac{\xi_-(\sigma)(\sigma+k\cos\beta)^{-1}}{\left(\operatorname{ch}(h\sigma)+\xi_-(\sigma)\operatorname{sh}(h\sigma)\right)\left(\operatorname{sh}(h\sigma)+\xi_-(\sigma)\operatorname{ch}(h\sigma)\right)} \tag{4.8}$$

$$\eta_\pm(\tau)=i\varepsilon_{01}\left(1\pm\chi\tau/\sqrt{\tau^2+k^2}\right),\quad \xi_\pm(\sigma)=\varepsilon_{01}\left(1\pm\chi\sigma/\sqrt{k^2-\sigma^2}\right) \tag{4.9}$$

В (4.2) $w_{\text{пов}}^{(2)}(x,y)$ и $w_{\text{пов}}^{(4)}(x,y)$– амплитуды поверхностных волн, распространяющихся с фазовой скоростью ω/σ_2^* и ω/σ_4^* по направлению Ox.

Аналогичным путем, как в пункте 3, можно исследовать особенности волнового поля в области $\Omega_2(x>0,\ y\ge h)$. Не останавливаясь на этом, приведем лишь окончательную формулу, представляющую асимптотическое поведение упругих перемещений по линии $y=h$ при $x\to+\infty$. Она имеет следующий вид:

$$w_1(x,h)=\left[e^{-ikh\sin\beta}+A_{\text{отр}}^{(1)}+A_{\text{отр}}^{(2)}\right]e^{-ikx\cos\beta}+A_{\text{пов}}^{(2)}e^{i\sigma_2^*x}+A_{\text{пов}}^{(4)}e^{i\sigma_4^*x}+ \tag{4.10}$$

$$+\frac{\sqrt{2\pi}D_2k\overline{K}_+(k)}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}^2(kh)}+\frac{1}{\operatorname{ch}^2(kh)}+\frac{2\varepsilon_{01}}{\operatorname{sh}^2(2kh)}\right]\frac{e^{i(kx+\pi/4)}}{x^{3/2}}+O\left(x^{-5/2}(1+\ln x)\right)$$

Из полученных асимптотических формул вытекает, что полубесконечный электрод существенным образом влияет на качественное распределение волновго поля упругих перемещений. В частности, как следует из (2.4), (3.53) и (4.10), полубесконечный электрод возбуждает неоднородную волну $\varphi_{\text{нд}}^{(1)}(x,y)$ и поверхностные волны $w_{\text{пов}}^{(2)}(x,y)$, $w_{\text{пов}}^{(3)}(x,y)$, $w_{\text{пов}}^{(4)}(x,y)$. Далее, из формул (2.12) и (3.53) следует, что полубесконечный электрод поглощает отражённую волну из (2.16) $w_{\text{отр}}^{(2)}(x,y)$ в секторе $\pi-\beta<\theta\le\pi$, а из (3.61) следует, что полубесконечный электрод возбуждает по направлению луча $\theta=\pi-\beta$ перемещение $A_{\text{отр}}^{(2)}e^{ikr}$. В

(3.53) $q_{\text{пз}}^{(1)}(r,\theta)$– волна, распространяющаяся по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $\omega/k\sin\theta$ (или распространяющаяся по направлению Oy со скоростью ω/k), обусловленная присутствием электрода. При этом, на линии $y=h$ волна представляет собой неволновую часть, распространяющуюся со скоростью света.

5. В заключение коротко остановимся на асимптотическом распределении электрической индукции около конца полубесконечного электрода. Из (2.7)–(2.9) и (3.8) получим, что при $-\pi\le\theta\le 0$ и $r\to 0$

$$D_{2y}(x,y)=\left(\frac{\varepsilon_0}{c_0}-1\right)D_0\frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}}+O(1)$$
$$D_{2x}(x,y)=\left(\frac{\varepsilon_0}{c_0}-1\right)D_0\frac{\cos(\theta/2)}{r^{1/2}}+O(1) \qquad (5.1)$$

где $D_0=c_1e^{-i\pi/4}\Big/\sqrt{\pi k\cos\beta}\,\overline{K}_-(k\cos\beta)$, а c_1 дается формулой (1.19).

Учитывая, что

$$D_\theta(r,\theta)=-D_x\cos\theta+D_y\sin\theta \qquad (5.2)$$

из (5.1) получим формулу

$$D_{2\theta}(r,\theta)=\left(\frac{\varepsilon_0}{c_0}-1\right)D_0\frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}}+O(1) \qquad (5.3)$$

представляющую асимптотическое поведение электрической индукции около конца электрода при $-\pi\le\theta\le 0$ и $r=\sqrt{x^2+(y+h)^2}\to 0$.

Аналогичным образом получим, что при $0\le\theta\le\pi$ и $r=\sqrt{x^2+(y+h)^2}\to 0$

$$D_{0\theta}(r,\theta)=-\frac{\varepsilon_0}{c_0}D_0\frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}}+O(1) \qquad (5.4)$$

Имея (5.3) и (5.4), при помощи (1.29) нетрудно убедиться, что имеет место асимптотическое равенство

$$D_{2\theta}(r,-\pi-0)-D_{0\theta}(r,\pi+0)=\psi_-(x)\big|_{x\to-0}=\frac{D_0}{\sqrt{-x}}$$

при $r=|x|\to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пъезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с.
3. Функциональный анализ /под редакцией С.Г.Крейна. М.: Наука, 1972. 544с.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. //Уч. записки ЕГУ. 1979. 3. С.29-34.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.

6. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краю полубесконечного металлического слоя. //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №.4. С.43-52.
7. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краях параллельных полубесконечных металических слоёв. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С.16-28.
8. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-37.
9. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38-50.
10. Аветисян А.С. О поверхностных волнах в пьезоэлектрике при наличии электропроводящей среды вблизи его границы. //В сб.ст.: "Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов". Ереван. 1984. Т.1. С.27-30.
11. Danoyan Z.N., Piliposian G.I. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer. Int. J. of Solids and Structures. 2008. 44. 5829-5847.
12. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №1. С.40-51.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798с.

Агаян Каро Леренцович
Кандидат физ.-мат.наук, старший научный сотрудник
Института механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна $24^{б}$,
Тел: (+37410) 52-58-35; E-mail: karo-aga@mechins.sci.am

Григорян Эдуард Хосровович
Доктор физ.-мат.наук, профессор ЕГУ, факультет механики
Адрес: Ереван, ул.Алека Манукяна 1, ЕГУ, факультет механики
Тел: (+37410) 23-03-89

Поступила в редакцию 30.04.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №1, 2010 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ

СИНАНЯН С.С.

Ключевые слова: пьезоэлектрическое пространство, бесконечный металлический слой, линейный источник, поверхностная волна, асимптотические формулы, дальняя зона.
Key words: Piezoelectric space, infinite metallic layer, linear source, surface wave, asymptotic formulae, farther zone

Ս.Ս. Սինանյան
Երկու զուգահեռ անվերջ մետաղական շերտերով պյեզոէլեկտրական տարածությունում սահքային տատանումների գծային աղբյուրի խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու զուգահեռ անվերջ մետաղական շերտերով պյեզոէլեկտրական տարածությունում հաստատված սահքային տատանումների գծային աղբյուրի խնդիրը: Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի իրական ձևափոխության օգնությամբ: Գտնված են տեղափոխության ամպլիտուդի ասիմպտոտիկ բանաձևերը հեռավոր գոտում: Ցույց է տրված, որ անվերջ մետաղական շերտերի առկայությունը բերում է մակերևութային ալիքների առաջացման և այնպիսի ալիքների առաջացմանը, որոնք ճառագայթի ուղղությամբ տարածվում են ճառագայթի բացվածքի անկյունից կախված արագությամբ:

S.S. Sinanyan
Linear Source of Shift Oscillations Problem in Piezoelectric Space with Infinite Metallic Layer

Linear source of established shift oscillations problem is discussed in piezoelectric space with infinite metallic layer. The problem is solved using Fourier real transformation. Shift amplitude asymptotic formulae in farther zone are found. It is shown that existence of infinite metallic layer yields to appearance of surface wave and another wave spreading with a speed depending on the opening angle of direction.

В работе рассматривается задача линейного источника установившихся колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с двумя бесконечными металлическими экранами. Задача решается с помощью действительного преобразования Фурье. Относительно амплитуд перемещений получены асимптотические формулы в дальней зоне. Показано, что наличие бесконечных металлических слоев приводит к появлению поверхностных волн и волны, распространяющейся по направлению луча со скоростью, зависящей от угла раствора луча.

Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса 6mm гексагональной симметрии с осью Oz, совпадающей с главной осью кристалла. В пьезоэлектрическом пространстве имеется включение в виде двух параллельных бесконечных заземлённых тонких металлических слоев. Считается, что толщина металлических слоев настолько мала, что их жесткостью можно пренебречь, т.е. слои можно рассматривать как электроды, занимающие плоскости $-\infty < x < \infty,\ y = h,\ -\infty < z < \infty$ и $-\infty < x < \infty,\ y = -h,\ -\infty < z < \infty$. Пьезоэлектрическое пространство совершает установившиеся колебания под действием линейного источника $F\delta(x)\delta(y-y_0)e^{-i\omega t}$, где $F-$интенсивность действуюшей силы, и $y_0 > h$. Тогда величины, характеризующие электроупругое поле, зависят от времени пропорционально $e^{-i\omega t}$. В этом случае уравнения относительно амплитуд перемещения $w(x,y)$ и квазистатического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ примут вид [1].

$$\begin{aligned}&\Delta w + k^2 w = P\delta(x)\delta(y-y_0)\\&\Delta\varphi + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}k^2 w = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}P\delta(x)\delta(y-y_0)\end{aligned} \quad \text{при } y > h \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\Delta w + k^2 w = 0\\&\Delta\varphi + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}k^2 w = 0\end{aligned} \quad \text{при } y < h \tag{2}$$

ε_{11} – диэлектрическая проницаемость, e_{15} – пьезомодуль, ω – частота колебаний, $k = \omega/c$ – волновое число, $c = \sqrt{c_{44}(1+æ)/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, c_{44} – упругая постоянная, ρ – плотность среды, $P = F/c_{44}(1+æ)$, $æ = e_{15}{}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$, $\delta(x)$ – функция Дирака, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Решения уравнений (1), (2) должны удовлетворять контактным условиям

$$\begin{aligned}&w(x,\pm h+0) = w(x,\pm h-0),\\&\sigma_{yz}(x,\pm h+0) = \sigma_{yz}(x,\pm h-0),\ \varphi(x,\pm h) = 0\end{aligned} \tag{3}$$

где $\sigma_{yz} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

Здесь следует отметить, что решение еще должно удовлетворять условию уходящей волны.

Для решения уравнений (1), (2) с условиями (3), применив к ним действительное интегральное преобразование Фурье по x, получим

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\overline{w}}{dy^2} - \gamma^2\overline{w} = P\delta(y-y_0)\\&\frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2\overline{\varphi} + k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{w} = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}P\delta(y-y_0)\end{aligned} \quad \text{при } y > h \tag{4}$$

$$\frac{d^2\overline{w}}{dy^2} - \gamma^2\overline{w} = 0, \quad \frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2\overline{\varphi} + k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{w} = 0 \quad \text{при } -h < y < h \tag{5}$$

$$\frac{d^2\overline{w}}{dy^2} - \gamma^2\overline{w} = 0, \quad \frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2\overline{\varphi} + k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{w} = 0 \quad \text{при } y < -h \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\overline{w}(\sigma,\pm h+0) = \overline{w}(\sigma,\pm h-0),\ \overline{\varphi}(\sigma,\pm h) = 0\\&c_{44}\left.\frac{d\overline{w}}{dy}\right|_{y=\pm h+0} + e_{15}\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=\pm h+0} = c_{44}\left.\frac{d\overline{w}}{dy}\right|_{y=\pm h-0} + e_{15}\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=\pm h-0}\end{aligned} \tag{7}$$

где $\gamma^2 = \sigma^2 - k^2$, $\overline{f}(\sigma, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\sigma x} dx$, $f(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma$.

Решение системы, представляющее уходящую волну, представим в виде четного и нечетного по y составляющих:

$$\begin{aligned} \overline{w}(\sigma, y) &= \overline{w}_{\text{чётн}}(\sigma, y) + \overline{w}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) \\ \overline{\varphi}(\sigma, y) &= \overline{\varphi}_{\text{чётн}}(\sigma, y) + \overline{\varphi}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) \end{aligned} \tag{8}$$

где $\overline{w}_{\text{чётн}}(\sigma, y), \overline{\varphi}_{\text{чётн}}(\sigma, y)$ – решение задачи под действием силы с амплитудой $\dfrac{P}{2}\delta(x)\delta(y - y_0) + \dfrac{P}{2}\delta(x)\delta(y + y_0)$, $\overline{w}_{\text{нечётн}}(\sigma, y)$, $\overline{\varphi}_{\text{нечётн}}(\sigma, y)$ – решение задачи под действием силы с амплитудой $\dfrac{P}{2}\delta(x)\delta(y - y_0) - \dfrac{P}{2}\delta(x)\delta(y + y_0)$.

$$\left.\begin{aligned} \overline{w}_{\text{чётн}}(\sigma, y) &= C_1 e^{-\gamma|y|} - \frac{P}{4\gamma} e^{-\gamma\left||y| - y_0\right|} \\ \overline{\varphi}_{\text{чётн}}(\sigma, y) &= C_2 e^{-|\sigma||y|} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w} \end{aligned}\right\} \text{ при } |y| > h \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{w}_{\text{чётн}}(\sigma, y) &= C_3 \operatorname{ch}\gamma y \\ \overline{\varphi}_{\text{чётн}}(\sigma, y) &= C_4 \operatorname{ch}|\sigma| y + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w} \end{aligned}\right\} \text{ при } |y| < h \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{w}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) &= C_5 e^{-\gamma|y|} \operatorname{sgn}(y) - \frac{P}{4\gamma} e^{-\gamma\left||y| - y_0\right|} \operatorname{sgn}(y) \\ \overline{\varphi}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) &= C_6 e^{-|\sigma||y|} \operatorname{sgn}(y) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w} \end{aligned}\right\} \text{ при } |y| > h \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{w}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) &= C_7 \operatorname{sh}\gamma y \\ \overline{\varphi}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) &= C_8 \operatorname{sh}|\sigma| y + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w} \end{aligned}\right\} \text{ при } |y| < h \tag{12}$$

Выше имелось в виду, что $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$, $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$ при $|\sigma| > k$, т.е действительная ось комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ обходит точку $\sigma = -k$ сверху, а точку $\sigma = k$ – снизу [2].

Удовлетворив условиям (7), получим

$$C_1 = -\frac{P(1+æ)}{4} \frac{e^{-\gamma y_0}(1 + e^{-2|\sigma|h})(1 + e^{2\gamma h})}{K_1(\sigma)} + \frac{P}{4\gamma} e^{-\gamma(y_0 - 2h)}$$

$$C_3 = -\frac{P(1+æ)}{2} \frac{e^{-\gamma y_0}(1 + e^{-2|\sigma|h})}{K_1(\sigma)}, \quad C_4 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} C_3 \frac{\operatorname{ch}\gamma h}{\operatorname{ch}|\sigma|h}, \quad C_2 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} C_3 e^{|\sigma||h|} \operatorname{ch}\gamma h$$

$$C_5 = -\frac{P(1+æ)}{4} \frac{e^{-\gamma y_0}(1 - e^{-2|\sigma|h})(e^{2\gamma h} - 1)}{K_2(\sigma)} + \frac{P}{4\gamma} e^{-\gamma(y_0 - 2h)}$$

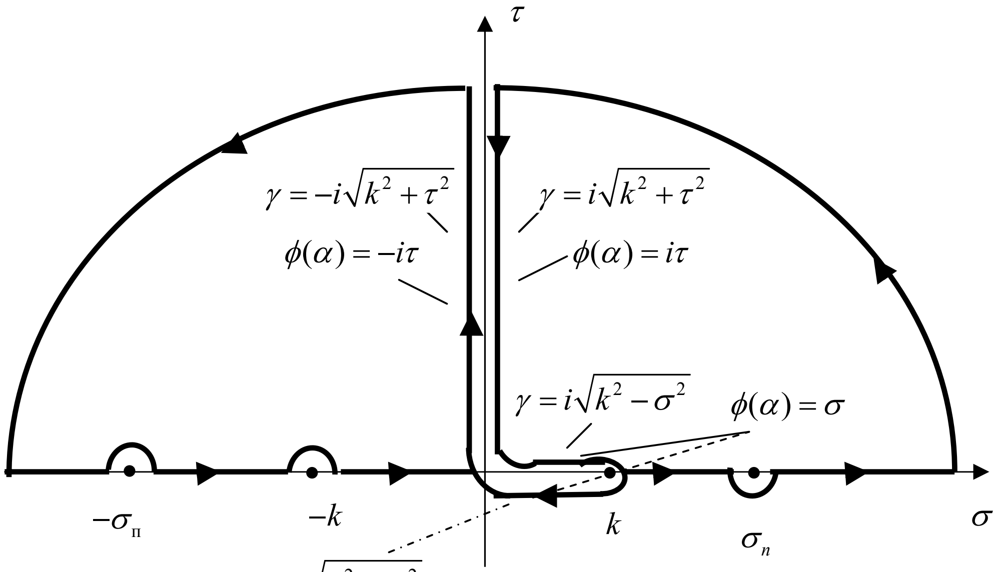
$$C_7 = -\frac{P(1+æ)}{2}\frac{e^{-\gamma y_0}(1-e^{-2|\sigma|h})}{K_2(\sigma)}, \quad C_8 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}C_7\frac{\mathrm{sh}\gamma h}{\mathrm{sh}|\sigma|h},$$

$$C_6 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}C_3 e^{|\sigma|h}C_7\,\mathrm{sh}\gamma h \tag{13}$$

$$K_1(\sigma) = (1+æ)\gamma(1+e^{-2|\sigma|h}) - |\sigma|æ(1+e^{-2\gamma h})$$

$$K_2(\sigma) = (1+æ)\gamma(1-e^{-2|\sigma|h}) - |\sigma|æ(1-e^{-2\gamma h}).$$

Применив обратное преобразование Фурье к (9), (10), (11), (12), получим



Фиг. 1

$$w(x,y) = w_{чётн}(x,y) + w_{нечётн}(x,y)$$

$$\varphi(x,y) = \varphi_{чётн}(x,y) + \varphi_{нечётн}(x,y) \tag{14}$$

где при $|y| > h$

$$w_{чётн}(x,y) = w^0_{чётн}(x,y) + w_{ист}(x,y)$$

$$w_{нечётн}(x,y) = w^0_{нечётн}(x,y)\,\mathrm{sgn}(y) + w_{ист}(x,y)\,\mathrm{sgn}(y)$$

$$w^0_{чётн}(x,y) = -\frac{P}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{2(1+æ)e^{-\gamma y_0}(1+e^{-2|\sigma|h})\mathrm{ch}\gamma h}{K_1(\sigma)} - \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma(y_0-h)}\right)e^{-\gamma(|y|-h)}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{15}$$

$$w^0_{нечётн}(x,y) = -\frac{P}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2(1+æ)e^{-\gamma y_0}(1-e^{-2|\sigma|h})\mathrm{sh}\gamma h}{K_2(\sigma)} - \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma(y_0-h)}\right)e^{-\gamma(|y|-h)}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{16}$$

$$w_{ист}(x,y) = -\frac{P}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\gamma||y|-y_0|}}{\gamma}e^{-i\sigma x}d\sigma = -i\frac{P}{8}H_0^{(1)}(kr_0)$$

где $r_0 = \sqrt{(y-y_0)^2 + x^2}$, $H_0^{(1)}(kr_0)$ – известная функция Ханкеля первого рода.

А при $|y|<h$ $\quad w_{\text{чётн}}(x,y)=-\dfrac{P}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(1+æ)e^{-\gamma y_0}(1+e^{-2|\sigma|h})}{K_1(\sigma)}\text{ch}\gamma y e^{-i\sigma x}d\sigma$ (17)

$$w_{\text{нечётн}}(x,y)=-\frac{P}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+æ)e^{-\gamma y_0}(1-e^{-2|\sigma|h})}{K_2(\sigma)}\text{sh}\gamma y e^{-i\sigma x}d\sigma \quad (18)$$

Заметим, что как показано в работе [5] на действительной оси ($\sigma\neq 0$) $K_2(\sigma)$, имеем нули только в точках $\sigma=\pm\sigma_{\text{п}2}$ при $kh>A$, где A – единственное решение уравнения $(1-e^{-2A})(1+æ)=2Aæ$, а $K_1(\sigma)$ в точках $\sigma=\pm\sigma_{\text{п}1}$ – при любых значениях kh ($\sigma=0$ не является полюсом для $\overline{w}_{\text{нечётн}}(\sigma,y)$).

Поэтому, чтобы выполнялись условия уходящей волны, контур интегрирования (действительная ось) должен обходить точку $\sigma=-\sigma_{\text{пj}}$ сверху, а точку $\sigma=\sigma_{\text{пj}}$ – снизу $(j=1,2)$ [2]. Далее вычислим интегралы (15)-(18) при $x<0$ с помощью метода контурного интеграла в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ с разрезами, указанными на фиг.1, при $|y|>h$ для чётной задачи получим:

$$w^0_{\text{чётн}}(x,y)=S_1(1+e^{2\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}h})e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}(|y|-h)}e^{i\sigma_{\text{п}1}|x|}-\frac{P}{8\pi}I_{11}(x,y)-\frac{P}{8\pi}I_{12}(x,y)$$

$$I_{11}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_1(\tau)}{N_1(\tau)}\cos(\sqrt{\tau^2+k^2}h)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\sigma$$

$$I_{12}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(\tau)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(\tau)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\sigma-$$

$$-\int_0^k\Psi_1(\sigma)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(|y|-h)}e^{i\sigma|x|}d\sigma-\int_0^k\Psi_2(\sigma)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(|y|-h)}e^{i\sigma|x|}d\sigma$$

$$\Phi_1(\tau)=\frac{2(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}(1+e^{-2i\tau h})\cos\sqrt{\tau^2+k^2}h}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1+e^{-2i\tau h})-\tau æ(1+e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}-\frac{e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}(y_0-h)}}{\sqrt{\tau^2+k^2}} \quad (19)$$

$$\Phi_2(\tau)=\frac{2(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}(1+e^{-2i\tau h})\cos\sqrt{\tau^2+k^2}h}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1+e^{-2i\tau h})+\tau æ(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}-\frac{e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(y_0-h)}}{\sqrt{\tau^2+k^2}}$$

$$\Psi_1(\sigma)=\frac{2(1+æ)e^{\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}(1+e^{-2\sigma h})\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}h}{(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1+e^{-2\sigma h})-\sigma æ(1+e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))}-\frac{e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h)}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}}$$

$$\Psi_2(\sigma)=\frac{2(1+æ)e^{-\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}(1+e^{-2\sigma h})\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}h}{(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1+e^{-2\sigma h})+\sigma æ(1+e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))}-\frac{e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h)}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}}$$

для нечётной задачи:

$$w^0_{\text{нечётн}}(x,y)=S_2(1+e^{2\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}h})e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}|y|}e^{i\sigma_{\text{п}2}|x|}-\frac{P}{8\pi}I_{21}(x,y)-\frac{P}{8\pi}I_{22}(x,y)$$

$$I_{11}(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{M_3(\tau)}{N_3(\tau)}\sin(\sqrt{\tau^2+k^2}h)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\sigma$$

$$I_{22}(x,y)=\int_0^\infty \Phi_1(\tau)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\sigma+\int_0^\infty \Phi_2(\tau)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\sigma-$$

$$-\int_0^k \Psi_2(\sigma)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(|y|-h)}e^{i\sigma|x|}d\sigma-\int_0^k \Psi_1(\sigma)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(|y|-h)}e^{i\sigma|x|}d\sigma$$

где уже

$$\Phi_1(\tau)=\frac{2i(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}(1-e^{-2i\tau h})\sin\sqrt{\tau^2+k^2}h}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{-2i\tau h})-\tau æ(1-e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}-\frac{e^{-i\sqrt{k^2+\tau^2}(y_0-h)}}{\sqrt{k^2-\tau^2}}$$

$$\Phi_2(\tau)=-\frac{2i(1+æ)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}(1-e^{-2i\tau h})\sin\sqrt{\tau^2+k^2}h}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{-2i\tau h})+\tau æ(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}-\frac{e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}(y_0-h)}}{\sqrt{k^2-\tau^2}}$$

$$\Psi_1(\sigma)=\frac{2i(1+æ)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}(1-e^{-2\sigma h})\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}}{(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1-e^{-2\sigma h})-\sigma æ(1-e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))}-\frac{e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h)}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}}$$

$$\Psi_2(\sigma)=-\frac{2i(1+æ)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}(1-e^{-2\sigma h})\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}}{(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1-e^{-2\sigma h})+\sigma æ(1-e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))}-\frac{e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h)}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}} \quad (20)$$

а при $|y|<h$

$$w_{\text{чётн}}(x,y)=S_1\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma_{\text{п}}{}^2-k^2}\,y)e^{i\sigma_{\text{п}}|x|}-\frac{P}{4\pi}I_{31}(x,y)-\frac{P}{4\pi}I_{32}(x,y)$$

$$w_{\text{нечётн}}(x,y)=S_2\operatorname{sh}\sqrt{\sigma_{\text{п}}{}^2-k^2}\,ye^{i\sigma_{\text{п}}|x|}-\frac{P}{4\pi}I_{41}(x,y)-\frac{P}{4\pi}I_{42}(x,y),$$

$$I_{42}(x,y)=\int_0^\infty \frac{i(1+æ)(1-e^{-2i\tau h})e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}\sin(\sqrt{\tau^2+k^2}\,y)}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{-2i\tau h})-\tau æ(1-e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}e^{-\tau|x|}d\tau-$$

$$-\int_0^\infty \frac{i(1-e^{-2i\tau h})(1+æ)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}\sin(\sqrt{\tau^2+k^2}\,y)}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{-2i\tau h})+\tau æ(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}e^{-\tau|x|}d\tau-\int_0^k\frac{M_4(\sigma)}{N_4(\sigma)}e^{i\sigma|x|}d\tau$$

$$I_{32}(x,y)=\int_0^\infty \frac{(1+æ)(1+e^{-2i\tau h})e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}\cos(\sqrt{\tau^2+k^2}\,y)}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1+e^{-2i\tau h})-\tau æ(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}e^{-\tau|x|}d\tau+$$

$$+\int_0^\infty \frac{(1+æ)(1+e^{-2i\tau h})e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}\cos(\sqrt{\tau^2+k^2}\,y)}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1+e^{-2i\tau h})-\tau æ(1+e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}e^{-\tau|x|}d\tau-\int_0^k\frac{M_2(\sigma)}{N_2(\sigma)}e^{i\sigma|x|}d\tau$$

где

$$I_{31}(x,y)=\int_0^\infty\frac{M_1(\tau)}{N_1(\tau)}\cos\sqrt{\tau^2+k^2}\,ye^{-\tau|x|}d\tau$$

$$I_{41}(x,y)=\int_0^\infty\frac{M_3(\tau)}{N_3(\tau)}\sin(\sqrt{\tau^2+k^2}\,y)e^{-\tau|x|}d\tau$$

$$M_1(\tau)=4\tau æ(1+æ)(1+e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})\cos^2(\tau h)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}$$

$$N_1(\tau)=(\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)(1+e^{2i\tau h})-\tauæ(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))\times$$
$$\times(\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)(1+e^{-2i\tau h})+\tauæ(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}}))$$
$$M_3(\tau)=-4ie^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})\tauæ\sin^2(\tau h)(1+æ)$$
$$N_3(\tau)=((1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{-2i\tau h})+\tauæ(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))\times$$
$$\times((1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{2i\tau h})-\tauæ(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))$$
$$M_4(\sigma)=[2i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0)(1-e^{-2\sigma h})-$$
$$-4i\sigmaæ\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}h)\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h))](1-e^{-2\sigma h})\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}y)$$
$$N_4(\sigma)=(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1-e^{-2\sigma h})-\sigmaæ(1-e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))\times$$
$$\times(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1-e^{-2\sigma h})+\sigmaæ(1-e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))$$
$$N_2(\sigma)=(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1+e^{-2\sigma h})-\sigmaæ(1+e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))\times$$
$$\times(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1+e^{-2\sigma h})+\sigmaæ(1+e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))$$
$$M_2(\sigma)=(1+æ)[2i(1+æ)\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+e^{-2\sigma h})\cos(\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0)-$$
$$-4i\sigmaæ\cos(\sqrt{k^2-\sigma^2}h)\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h))](1+e^{-2\sigma h})\cos(\sqrt{k^2-\sigma^2}y)$$
$$S_1=-\frac{Pi}{2}\frac{(1+æ)e^{-\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}y_0}(1+e^{-2\sigma_{п1}h})}{K_1'(\sigma_{п1})}$$
$$S_2=\begin{cases}-\dfrac{Pi(1+æ)e^{-\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}y_0}(1-e^{-2\sigma_{п2}h})}{2K_2{}'(\sigma_{п2})}, & kh>A\\ 0, & kh\le A\end{cases}$$
$$(\sigma_{п_1}{}^2-k^2)K_1'(\sigma_{п1})=(\sigma_{п_1}{}^2-k^2)\left.\frac{dK_1(\sigma)}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_{п1}}=(1+e^{-2h\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}})k^2æ+$$
$$+2e^{-2h\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}}hæ\sigma_{п1}{}^2\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}-2h(1+æ)e^{-2h\sigma_{п1}}(\sigma_{п1}{}^2-k^2)^{3/2}$$
$$(\sigma_{п2}{}^2-k^2)K_2{}'(\sigma_{п2})=(\sigma_{п2}{}^2-k^2)\left.\frac{dK_2(\sigma)}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_{п2}}=(1-e^{-2h\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}})k^2æ-$$
$$-2e^{-2h\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}}hæ\sigma_{п2}{}^2\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}+2h(1+æ)e^{-2h\sigma_{п2}}(\sigma_{п2}{}^2-k^2)^{3/2}$$

При получении представления $w(x,y)$ имелось в виду, что аналитическое продолжение функции $\phi(\sigma)=|\sigma|$ в комплексной плоскости α это $\phi(\alpha)=\alpha$ при $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, и $\phi(\alpha)=-\alpha$ при $\mathrm{Re}(\alpha)<0$. С такими разрезами в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ функции $K_j(\alpha)(j=1,2)$ не могут иметь чисто комплексных нулей. Поскольку, если $\alpha=\alpha_j\,(j=1,2)$ будут чисто комплексными нулями $K_j(\alpha)(j=1,2)$, находящимися в первой четверти, то, следовательно, $\alpha=\overline{\alpha}_j(j=1,2)$ также будут нулями $K_j(\alpha)(j=1,2)$ $(\overline{\sqrt{\alpha_j{}^2-k^2}}=\sqrt{\overline{\alpha}_j{}^2-k^2})$. А это означает, что $w(x,y)$ будет иметь составляющие в виде приходящей волны из $x\to+\infty$, что противоречит поставленной задаче. Нетрудно увидеть, что $\overline{w}(\alpha,y)$ на мнимой оси не имеет полюсов.

Отметим также, что в силу симметричности задачи по x, полученное представление $w(x,y)$ справедливо и при $x>0$.

Итак, получили представление $w(x,y)$ в виде суммы поверхностной волны и регулярных интегралов. Чтобы выявить влияние электродов на характер волнового поля в пьезоэлектрике, следует определить асимптотические формулы $w(x,y)$ в далёких точках. Для получения асимптотической формулы, когда $y>h$, при $kr\to\infty$ сделаем замену переменных

$(y-h)=r\sin\theta,\ x=r\cos\theta$, $\lambda_1=\sigma|\cos\theta|-\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta$,

$\lambda_2=\sigma|\cos\theta|+\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta$, следующими обозначениями:

$n_1(\tau)=i\sqrt{\tau^2+k^2}\sin\theta+\tau|\cos\theta|,\ \ n_2(\tau)=-i\sqrt{\tau^2+k^2}\sin\theta+\tau|\cos\theta|$

и используя метод, описанный в работах [3], [4], получим:

$$w_{\text{чётн}}(x,y)=2S_1\mathrm{ch}\left(h\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}\right)e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}r|\sin\theta|}e^{i\sigma_{\text{п}1}r|\cos\theta|}+b_{1\text{чётн}}\frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{\sqrt{kr}}- \tag{21}$$

$$-\frac{1}{16\sqrt{\pi}}\left(b_3+\frac{P}{\sqrt{2}}\left(\frac{4k((y_0-h)\sin\theta+ik(y_0-h)^2\cos^2\theta)-i}{2}\right)e^{-ik(y_0-h)\sin\theta}\right)\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{(kr)^{3/2}}-$$

$$-\frac{P}{4\pi}\frac{(1+e^{2ikh})æe^{iky_0}\cos kh}{(1+æ)\cos^2\theta}\frac{e^{ikr\sin\theta}}{(kr)^2}+O\left(\frac{1}{(kr)^{5/2}}\right)$$

при $kr\to\infty$

$$w_{\text{нечётн}}(x,y)=2S_2\mathrm{sh}\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}\,he^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}r|\sin\theta|}e^{i\sigma_{\text{п}2}r|\cos\theta|}+b_{1\text{нечётн}}\frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{\sqrt{kr}}-$$

$$-\frac{1}{16\sqrt{\pi}}\left(b_3+\frac{P}{\sqrt{2}}\left(\frac{4k((y_0-h)\sin\theta+ik(y_0-h)^2\cos^2\theta)-i}{2}\right)e^{-ik(y_0-h)\sin\theta}\right)\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{(kr)^{3/2}}+ \tag{22}$$

$$+\frac{P}{2\pi}\frac{i(1-e^{2ikh})æ(1+æ)(kh)^2}{((1-e^{2ikh})æ+2ikh(1+æ))^2\cos^2\theta}e^{iky_0}\sin kh\frac{e^{ikr\sin\theta}}{(kr)^2}+O\left(\frac{1}{(kr)^{5/2}}\right)$$

при $kr\to\infty$

где

$$b_{1\text{чётн}}=\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(1+æ)e^{ik\sin\theta y_0}(1+e^{-2ikh\sin\theta})\cos(kh\cos\theta)\sin\theta}{(1+æ)\sin\theta(1+e^{-2ikh\cos\theta})+iæ\cos\theta(1+e^{2ikh\sin\theta})}-\sin(k\sin\theta(y_0-h))\right)$$

$$b_{1\text{нечётн}}=-\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{i(1+æ)e^{k\sin\theta y_0}(1-e^{-2k\cos\theta h})\sin(kh\sin\theta)\sin\theta}{\sin\theta(1+æ)(1-e^{-2k\cos\theta h})+i\cos\thetaæ(1-e^{2ik\sin\theta h})}+\sin(k\sin\theta(y_0-h)\right]$$

$$b_3 = b_{31}\Psi_2(k\left|\cos\theta\right|) + b_{32}\left.\frac{d\Psi_2(\sigma)}{d\sigma}\right|_{\sigma=k\left|\cos(\theta)\right|} + b_{33}\left.\frac{d^2\Psi_2(\sigma)}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=k\left|\cos\theta\right|}$$

$$b_{31} = -\frac{3\sin\theta}{4\sqrt{2k}},\ b_{32} = -\left|\cos\theta\right|\sin\theta\frac{3\sqrt{2k}}{2},\ b_{33} = \frac{k^{3/2}\sin^3\theta}{\sqrt{2}}$$

где для $\Psi_2(\sigma)$ принимаются выражения (19) или (20) для нечётной или чётной задачи, соответственно.

Асимптотическая формула при $\left|kx\right| \to \infty$ для $w_{\text{нечётн}}(x,y)$, $\left|y\right| < h$ при $kh \neq A$ имеет вид:

$$w_{\text{нечётн}}(x,y) = S_2 \operatorname{sh}\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2 - k^2}\, y e^{i\sigma_{\text{п}2}\left|x\right|} -$$

$$-\frac{P}{2\sqrt{2}\pi}\frac{(1+æ)y_0(1-e^{-2kh}) - 2ækh(y_0-h)}{((1+æ)(1-e^{-2kh}) - 2khæ)^2}k^2(1-e^{-2kh})y\frac{e^{i(\left|kx\right|-\frac{\pi}{4})}}{\left|kx\right|^{3/2}} - \tag{23}$$

$$-\frac{P}{\pi}\frac{ie^{iky_0}(1-e^{2ikh})æk^2h^2\sin ky}{(2ikh(1+æ)+æ(1-e^{2ikh}))^2}\frac{1}{(kx)^2} + O(\frac{1}{\left|kx\right|^{5/2}})$$

а при $kh = A$

$$w_{\text{нечётн}}(x,y) = A_1\frac{P(1+æ)}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{i(\left|kx\right|+\pi/4)}}{\sqrt{\left|kx\right|}} + A_3\frac{P(1+æ)}{8\sqrt{\pi}}\frac{e^{i(\left|kx\right|-\pi/4)}}{\left|kx\right|^{3/2}} -$$

$$-\frac{P}{\pi}\frac{ie^{iky_0}(1-e^{2ikh})æk^2h^2\sin ky}{(2ikh(1+æ)+æ(1-e^{2ikh}))^2}\frac{1}{(kx)^2} + O(\frac{1}{\left|kx\right|^{5/2}})$$

$$A_2 = -y\sqrt{k}(2\sqrt{2}e^{-2kh}kh + (1-e^{-2kh})(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{3}\sqrt{2}k^2y^2))(-4(1-e^{-2kh})(1+æ)y_0 +$$

$$+8hkæ(y_0-h)) +$$

$$+\sqrt{2k}(1-e^{-2kh})y(-2y_0(1+æ)(1-e^{-2kh} + 4e^{-2kh}kh + \frac{2}{3}k^2y_0{}^2(1-e^{-2kh})) +$$

$$+4ækh(y_0-h)(3 + \frac{2}{3}k^2h^2 + \frac{2}{3}k^2(y_0-h)^2))$$

$$A_3 = \frac{1}{8h^4k^{3/2}æ^2}(-\frac{(e^{-2kh}(1+æ) - æ(1+\frac{4}{3}h^2k^2))^2}{2h^2k^3æ^2} + \frac{15+8h^2k^2}{6k})\frac{A_1}{2k^{3/2}} + \tag{24}$$

$$+\frac{1}{8h^4k^{3/2}æ^2}(\frac{A_1}{4k^{5/2}} + \frac{A_2}{2k})$$

$$A_1 = \frac{(1-e^{-2kh})y((1+æ)y_0(1-e^{-2kh}) - 2khæ(y_0-h))}{2\sqrt{2}k^2h^4æ^2}$$

для $w_{\text{чётн}}(x,y)$

$$w_{\text{чётн}}(x,y)=S_1\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}\,y)e^{i\sigma_{\text{п}1}|x|}-$$
$$-\frac{P}{8\sqrt{2\pi}}\frac{(1+æ)((1+æ)(1+e^{-2kh})-2kæ(y_0-h))(1+e^{-2kh})}{æ^2}\frac{e^{i(|kx|-\pi/4)}}{|kx|^{3/2}}+ \tag{25}$$
$$+\frac{P}{4\pi}\frac{1}{(kx)^2}\frac{æ(1+e^{2ikh})e^{iky_0}\cos ky}{(1+æ)}+O(\frac{1}{(kx)^{5/2}})$$

Отметим, что при отсутствии электродов $w(x,y)=w_{\text{ист}}(x,y)$. Тогда из формул (14), (23), (24), (25) следует, что наличие электродов приводит к появлению двух волн с волновыми числами $\sigma_{\text{п}1},\sigma_{\text{п}2}$ при $kh>A$, а при $kh\le A$ распространяется волна с волновым числом $\sigma_{\text{п}1}$, а также к появлению члена (последний в асимптотиках (23), (24), (25)), имеющий неволновой характер по x, кроме того, приводит к изменению поведения сдвиговой объемной волны при $|kx|\to\infty$, а при $kh=A$ поведение сдвиговой объемной волны не меняется.

Из асимптотических формул (14), (21), (22) следует, что наличие электродов при $kh>A$ приводит к появлению двух поверхностных волн с волновыми числами $\sigma_{\text{п}1},\sigma_{\text{п}2}$, а при $kh=A$ появляется только поверхностная волна с волновым числом $\sigma_{\text{п}1}$, а также к появлению волны – четвертый член в формулах (21), (22), распространяющийся по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $c/\sin\theta$ (или распространяющийся по направлению y со скоростью c).

Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Э.Х. Григоряну за постановку задачи и постоянное внимание к моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Б.Нобл. Метод Винера–Хопфа. М.: Изд. ИЛ, 1962. 279 с.
3. Агаян К. Л., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны упругого волновода в составное упругое пространство. // Изв. НАН Армении.Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-37.
4. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №1.С.40-51.
5. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краях параллельных полубесконечных металлических слоев.// Изв. НАН Армении.Механика. 2005. Т.58. №3. С.16-28.

Синанян Самвел Суренович
ЕрНИИММ, Инженер-программист
e-mail: ssinanyan@mail.ru

Поступила в редакцию 27.03.2009

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

С О Д Е Р Ж А Н И Е

CONTENTS