ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

МХИТАРЯН СУРЕН МАНУКОВИЧ
(К 70-летию со дня рождения)

Именитому ученому в области смешанных краевых задач механики сплошной среды и математической физики, доктору физико-математических наук, профессору Сурену Мануковичу Мхитаряну исполнилось 70 лет со дня рождения.

С.М.Мхитарян родился 4-ого мая 1939 года в селе Карчахпюр Варденисского района Армении. В 1963 году с отличием окончил механико-математический факультет Ереванского государственного университета и был оставлен на работу ассистентом на кафедре «Механика». В 1964-67 годы проходил аспирантское обучение на кафедре теоретической механики Одесского строительного института под руководством известного математика члена-корреспондента АН Украины, профессора М.Г.Крейна. С 1967-ого года работает в Институте механики НАН РА. В 1969 г. защитил кандидатскую, а в 1991 году – докторскую диссертации.

Фундаментальные научные исследования профессора С.М.Мхитаряна, направленные на развитие аналитических и численных методов решения контактных и смешанных краевых задач теорий упругости, вязкоупругости и ползучести, получение замкнутых решений для новых задач из этого класса, несомненно внесли существенный вклад в развитие механики деформируемого твердого тела. В этих исследованиях четко прослеживается строгая математическая последовательность и стремление привлечь к решению задач механики всё новые элементы из богатейшего арсенала высшей математики, что, безусловно, является ценнейшим приобретением аспирантского обучения. При этом получены и новые результаты в области математики, например, новые спектральные соотношения для сингулярных интегральных операторов.

Профессором С.М. Мхитаряном опубликовано более 90 научных статей и расширенных тезисов международных конференций. Достаточно широкий спектр полученных результатов обобщен в книге «Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками», написанной в соавторстве с профессором В.М.Александровым.

Довольно обширна и научно-педагогическая деятельность профессора С.М.Мхитаряна. Более тридцати лет он является фактическим руководителем научного направления контактных и смешанных задач теории упругости и вязкоупругости в Институте механики НАН РА. Совместно с научной деятельностью проф. С.М.Мхитарян преподавал в различных ВУЗ-ах республики. Под его научным руководством и непосредственном консультативном участии защищено более 20-ти кандидатских и докторских диссертаций.

Профессор С.М.Мхитарян долгие годы является членом редакционной коллегии журнала Известия НАН Армении "Механика".

Редакция журнала Известия НАН Армении "Механика" сердечно поздравляет дорогого Сурена Мануковича со славным юбилеем, желает крепкого здоровья, новых творческих успехов, всяческих благ в жизни.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

ГЕВОРКЯН РУБЕН СТЕПАНОВИЧ
(К 70-летию со дня рождения)

Родился 17 ноября 1939г. в селе Азат Ханларского района Аз.ССР, в семье ремесленника.

В 1957 г. окончил армянскую школу №12 г. Кировабада (Гандзак) и поступил на механико-математический факультет Ереванского государственного университета, который окончил по специальности “Механика” в 1962 г. и был назначен лаборантом Кафедры механики.

С 1963 г. по 1966 г. преподавал в школе и техникуме в Коми АССР, одновременно работая инженером в строительной лаборатории. В 1967 г. работал старшим инженером Ереванского Научно-исследовательского Института камня и силикатов.

С января 1968 г. Геворкян Р.С. перешел на преподавательскую работу в Ереванском Зооветеринарном институте, который позже объединившись с Армянским сельскохозяйственным институтом, переименован в Армянский Государственный аграрный университет. Работал преподавателем, старшим преподавателем (с 1988 г.), доцентом (с 1990 г.) и профессором кафедры “Высшая математика и теоретическая механика” (с сентября 2000 г. по сентябрь 2007 г.). Профессором Геворкяном Р.С. написаны свыше 20 учебно-методических работ.

Научно-педагогическая работа Геворкяна Р.С. была отмечена почетными грамотами Министерства Образования и Науки РА (2005г.) и Республиканского комитета профсоюза работников сельского хозяйства АрмССР (1985г.).

Начиная с 1981 г., Геворкян Р.С. стал активно заниматься научной работой. Он защитил кандидатскую (1987 г.) и докторскую (1999 г.) диссертаци, профессор с 2000 года.

С 1991 г. по совместительству, а с 2007 г. на полной ставке работает в Институте механики НАН Армении ведущим научным сотрудником.

Научная деятельность доктора физико-математических наук, профессора Геворкяна Р.С. посвящена получению асимптотических решений неклассических смешанных краевых задач теории термоупругости слоистых балок, пластин и оболочек из сжимаемых и несжимаемых, анизотропных, упругих и вязкоупругих материалов. Решения таких задач имеют широкое применение в сейсмостойком строительстве, в частности, в расчетах фундаментов и оснований, резинометаллических сейсмоизоляторов зданий и сооружений. Р.С.Геворкяном также получены важные результаты в температурных задачах для пластин и оболочек, в пространственных термоупругих задачах для тороидальных оболочек. Результаты его исследований обобщены в книге Л.А.Агаловяна, Р.С.Геворкяна– Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: "Гитутюн", 2005. 468с. и в более 50 научных статьях, большая часть которых опубликована в авторитетных иностранных журналах и трудах международных конференций.

Неоднократно участвовал с интересными докладами на международных научных конференциях как в Армении, так и за рубежом, в частности, в Харькове (Украина, 1986г.), Вене (Австрия, 2004 г.), на Санторини (Греция, 2005 г.), в Сан Диего (США, 2006 г.).

Профессор Р.С.Геворкян является одним из основных исполнителей международных научных грантов: SOROS (1994-1995г.г.)., INTAS 97-1140 (1999 – 2001 г.г.), ISTC - A 651 (2002 – 2004 г.г.), INTAS 03-51-5547 (2004-2006 гг.), ISTC – A892 (2005-2006 гг.), INTAS-06-100017 (2007-2008 гг.)

Р.С. Геворкяна отличает трудолюбие, целеустремленность и полная отдача сил научным исследованиям.

Редакция журнала "Известия НАН Армении. Механика" и сотрудники Института механики поздравляют Рубена Степановича Геворкяна со славным юбилеем, желают ему доброго здоровья и новых творческиж успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ НАКЛАДКАМИ

Агабекян П.В., Гулян К.Г.

Ключевые слова: накладка, деформация, контактные напряжения, преобразование, ортогональные многочлены.
Key words: stringer, deformation, contact stresses, transformation, orthogonal polynomials.

Պ.Վ. Աղաբեկյան, Կ.Գ. Ղուլյան
Կոնտակտային խնդիր, երկու կիսաանվերջ վերադիրներով ուժեղացված կիսաանվերջ սալի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսաանվերջ վերադիրներով ուժեղացված կիսաանվերջ սալի խնդիր: Կիսաանվերջ սալը դեֆորմացվում է վերադիրների ծայրերին կիրառված ուժերի ազդեցության տակ:

Ֆուրյեի ձևափոխությունների օգնությամբ, խնդիրը բերվում է վերադիրների միջև գտնվող միջանկյալ հատվածի դեֆորմացիաների նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:

Այնուհետև սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծումը, Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների օգնությամբ բերվում է քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի լուծմանը:

Ստացված են անվերջությունում կոնտակտային լարումների վարքը բնութագրող խարակտերիստիկ բանաձևեր:

P.V. Aghabekyan, K.G. Goulyan
Contact problem for a semi–infinite plate, fastened by two semi–infinite stringers

In the paper a contact problem for a semi–infinite plate, fastened by two semi–infinite stringers is considered. The semi–infinite plate is deformed under the action of the forces, applied at the end points of the stringers.

With the help of Fourie transformations, the problem is reduced to the solution of the singular integral equations, relative to the deformation of the intermediate interval between the stringers. Later on, the solution of the singular integral equation with the help of Chebishev orthogonal polynomials is reduced to the solution of quasi–totally regular infinite systems of linear algebraic equations.

The asymptotic formulae, characterizing the behaviour of tangential contact stresses at the points at infinity, are obtained.

В работе рассматривается контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными накладками. Полубесконечная пластина деформируется под действием сил, приложенных на концах накладок.

С помощью преобразования Фурье задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно деформации промежуточного интервала между накладками. Далее решение сингулярного интегрального уравнения с помощью ортогональных многочленов Чебышева сводится к решению квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Получены асимптотические формулы, характеризующие поведение тангенциальных контактных напряжений в бесконечно удаленных точках.

Пусть полубесконечная пластина с двумя полубесконечными накладками деформируется под действием сил P_1 и P_2, приложенных, соответственно, на левом и правом концах накладок и направленных вдоль накладок. Причем, накладки параллельны границе пластины и находятся на одной линии. Относительно накладок принимается во внимание модель контакта по линии, то есть предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка [1].

А относительно упругой полубесконечной пластины принимается, что она находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния.

Считается, что накладки не сопротивляются изгибу.

Задача заключается в определении контактных тангенциальных напряжений, действующих под накладками.

Рассматриваемую задачу представим в виде суммы четной и нечетной задач.

1. Четная задача. В случае чётной задачи, силы, действующие на концах накладок, равны $Q_1 = \dfrac{P_1 + P_2}{2}$ и имеют одинаковые направления.

Решение задачи строится методом, изложенным в [2]. Имея в виду вышесказанное, уравнения равновесия накладок запишутся в виде:

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} = \frac{\tau_1(x)}{E_1 F_1}; \quad |x| > a \tag{1.1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=-a} = \frac{Q_1}{E_1 F_1}; \quad \left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=a} = -\frac{Q_1}{E_1 F_1}, \tag{1.2}$$

где $u_1(x)$ – перемещение точек накладок, $\tau_1(x)$ – интенсивность тангенциальных контактных сил, F_1 – площадь поперечного сечения накладок, E_1 – модуль упругости накладок, Q_1 – сосредоточенная сила, действующая на концах накладок.

Уравнения равновесия (1.1) при условии (1.2) с помощью обобщённых функций можно записать в виде одного уравнения в следующем виде:

$$\frac{dU_1}{dx} = \frac{\tau_1^*(x)}{E_1 F_1} - \frac{Q_1}{E_1 F_1}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right], \quad -\infty < x < \infty \tag{1.3}$$

где

$$U_1(x) = \left[\theta(-x-a) + \theta(x-a)\right]\frac{du_1}{dx}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$\tau_1^*(x) = \left[\theta(-x-a) + \theta(x-a)\right]\tau_1(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

$\delta(x)$ – функция Дирака, $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

С другой стороны, для деформации точек полубесконечной пластины, когда на неё действуют тангенциальные усилия интенсивностью $\tau_1^*(x)$, имеем [3]:

$$U(x,b) = U^{(1)}(x,b) + U^{(2)}(x,b) = -\frac{1}{\pi H l}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{x-s} - \frac{8b^2(x-s)}{\left[(x-s)^2 + 4b^2\right]^2} + \right.$$

$$\left. + d_1\,\frac{x-s}{(x-s)^2 + 4b^2} + d_2\,\frac{2b^2(x-s)\left[12b^2 - (x-s)^2\right]}{\left[(x-s)^2 + 4b^2\right]^3}\right\}\tau_1^*(s)\,ds, \tag{1.4}$$

$$-\infty < x < \infty$$

где

$$U^{(1)}(x,b)=\left[\theta(-x-a)+\theta(x-a)\right]\frac{du(x,b)}{dx},\quad -\infty<x<\infty,$$
$$U^{(2)}(x,b)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]\frac{du(x,b)}{dx},\quad -\infty<x<\infty,$$
$u(x,b)$ – горизонтальные перемещения точек полубесконечной пластины, H – толщина пластины,
$$l=\frac{2\mu}{3-\nu},\quad d_1=\frac{(1+\nu)(\nu-3)+8}{(1+\nu)(3-\nu)},\quad d_2=\frac{2(1+\nu)}{3-\nu},$$
μ – коэффициент Ляме, ν – коэффициент Пуассона.

Условием контакта между пластиной и накладками будет следующее:
$$U_1(x)=U^{(1)}(x,b)\quad -\infty<x<\infty. \tag{1.5}$$
Теперь, применив к (1.3), (1.4) и (1.5) преобразование Фурье, после некоторых выкладок, соответственно, получим
$$-i\sigma\bar{U}_1(\sigma)=\frac{\bar{\tau}_1^*(\sigma)}{E_1F_1}-\frac{2Q_1}{E_1F_1}\cos(\sigma a) \tag{1.6}$$
$$\bar{U}^{(1)}(\sigma,b)=-\frac{i}{Hl}\left\{\operatorname{sgn}\sigma+\left(d_1\operatorname{sgn}\sigma-b\sigma+d_2b^2\operatorname{sgn}\sigma\cdot\sigma^2\right)e^{-2|\sigma|b}\right\}\bar{\tau}_1^*(\sigma)-\bar{U}^{(2)}(\sigma,b) \tag{1.7}$$
$$\bar{U}_1(\sigma)=\bar{U}^{(1)}(\sigma,b), \tag{1.8}$$
где $\bar{U}(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(x)e^{i\sigma x}dx;\quad \bar{\tau}_1^*(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tau_1^*(x)e^{i\sigma x}dx.$

Далее имея в виду условие контакта (1.8), сопоставлением формул (1.6) и (1.7), после некоторых преобразований, для трансформанты Фурье тангенциальных контактных напряжений и деформаций промежуточного интервала между накладками получим следующее функциональное уравнение:
$$\bar{\tau}_1^*(\sigma)=\frac{i\sigma Hl\bar{U}^{(2)}(\sigma,b)}{\lambda+\bar{K}(\sigma)}+2Q_1\lambda\frac{\cos(\sigma a)}{\lambda+\bar{K}(\sigma)}, \tag{1.9}$$
где $\lambda=\dfrac{Hl}{E_1F_1};\quad \bar{K}(\sigma)=|\sigma|+\left(d_1|\sigma|-b\sigma^2+d_2b^2|\sigma|^3\right)e^{-2|\sigma|b}$. (1.10)

Применив к (1.9) обратное преобразование Фурье, для тангенциальных контактных напряжений получим
$$\tau_1^*(x)=-Hl\int\limits_{-\infty}^{\infty}R'(x-s)U^{(2)}(s,b)ds+Q_1\lambda\left[R(x-a)+R(x+a)\right],\quad -\infty<x<\infty \tag{1.11}$$
где $\bar{R}(\sigma)=\dfrac{1}{\lambda+\bar{K}(\sigma)},\qquad R(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{-i\sigma x}}{\lambda+\bar{K}(\sigma)}d\sigma.$

Далее, имея в виду, что $\tau_1^*(x)=0$ при $|x|<a$, из уравнения (1.11) для деформации промежуточного интервала между накладками получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-a}^{a} R'(x-s)U^{(2)}(s,b)\,ds = \frac{Q_1\lambda}{Hl}\left[R(x+a)+R(x-a)\right], \quad |x|<a \tag{1.12}$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению интегрального уравнения (1.12).

Решение интегрального уравнения (1.12) приводим к эквивалентным квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Структура решения интегрального уравнения (1.12) зависит от ядра $R(x)$. Для этого $\bar{R}(\sigma)$ представим в виде

$$\bar{R}(\sigma) = \frac{1}{\lambda+\bar{K}(\sigma)} = \frac{1}{\lambda+|\sigma|+\bar{K}_1(\sigma)} = \frac{1}{\lambda+|\sigma|} - \bar{R}_1(\sigma), \tag{1.13}$$

где $\bar{K}_1(\sigma) = \left(d_1|\sigma| - b\sigma^2 + d_2 b^2 |\sigma|^3\right) e^{-2|\sigma|b}$,

$$\bar{R}_1(\sigma) = \frac{\bar{K}_1(\sigma)}{\left(\lambda+|\sigma|\right)\left(\lambda+|\sigma|+\bar{K}_1(\sigma)\right)}.$$

Применив к (1.13) обратное преобразование Фурье, будем иметь [4]:

$$R(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\psi(1) + \ln\frac{1}{|\lambda x|} + \frac{\pi|\lambda x|}{2}\right\} + \tag{1.14}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left\{(-1)^m\frac{(\lambda x)^{2m}}{(2m)!}\left[\psi(2m+1)+\ln\frac{1}{|\lambda x|}\right] + (-1)^m\frac{\pi}{2}\frac{|\lambda x|^{2m+1}}{(2m+1)!}\right\} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{R}_1(\sigma)e^{-i\sigma x}\,d\sigma$$

где ряд сходится при любых x и где $\psi(u)$ – известная функция пси.

Тогда из (1.14) для $R'(x)$ получим

$$R'(x) = -\frac{1}{\pi x} + \frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn} x + R_2'(x), \tag{1.15}$$

где

$$R_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left\{(-1)^m\frac{(\lambda x)^{2m}}{(2m)!}\left[\psi(2m+1)+\ln\frac{1}{|\lambda x|}\right] + (-1)^m\frac{\pi}{2}\frac{|\lambda x|^{2m+1}}{(2m+1)!}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{R}_1(\sigma)e^{-i\sigma x}\,d\sigma.$$

Заменяя в уравнении (1.12) $x = ax,\ s = as$ и имея в виду представление (1.15), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(as)}{s-x}\,ds +$$

$$+a\int_{-1}^{1}\left\{R_2'\left[a(x-s)\right] + \frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right\} f(as)\,ds = \frac{Q_1\lambda}{Hl}q(ax), \tag{1.16}$$

где $f(as) = u'(as),\ q(ax) = R\left[a(x+1)\right] + R\left[a(x-1)\right]$.

Таким образом, решение задачи свелось к решению сингулярного интегрального уравнения (1.16). После определения $f(as)$ из уравнения (1.16), искомые контактные напряжения $\tau_1(x)$ определяются из формулы (1.11).

Имея в виду, что $f(as)$ нечетная функция, решение уравнения (1.16) ищем в виде

$$f(as)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\sum_{n=1}^{\infty}X_nT_{2n-1}(s) \tag{1.17}$$

где $T_k(u)=\cos(k\arccos u)$, $k=1,2,...$ – многочлены Чебышева первого рода.

Подставляя выражение $f(as)$ из (1.17) в интегральное уравнение (1.16), при этом используя известное спектральное соотношение [5]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(s)}{(s-x)\sqrt{1-s^2}}ds=U_{k-1}(x)\ \text{при}\ |x|<1, \tag{1.18}$$

где $U_{k-1}(u)=\sin(k\arccos u)/\sin(\arccos u)$, $k=1,2,...$, – многочлены Чебышева второго рода, известным способом [5] для определения неизвестных коэффициентов получим следующую квазивполне регулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений [6,7]:

$$X_m+\sum_{n=1}^{\infty}K_{nm}X_n=q_m,(m=1,2...), \tag{1.19}$$

где коэффициенты при неизвестных и свободных членах определяются следующими формулами:

$$K_{nm}=\frac{2a}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{R_2'\left[a(x-s)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right\}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-s^2}}T_{2n-1}(s)U_{2m-2}(x)dsdx,$$

$$q_m=\frac{2Q_1\lambda}{\pi Hl}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}q(ax)U_{2m-2}(x)dx.$$

После определения $X_n(n=1,2...)$ искомые контактные напряжения $\tau_1(ax)$ представляются в виде [2,8]:

$$\begin{aligned}\tau_1(ax)=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\Bigg\{&\left(|x|+\sqrt{x^2-1}\right)^{-2n+1}+\\+a\int_{-1}^{1}&\left[R_2'\left[a(x-s)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right]\frac{T_{2n-1}(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds\Bigg\}-\frac{Q_1\lambda}{Hl}q(ax),\quad |x|>1.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Теперь приступим к получению асимптотической формулы для $\tau_1(x)$, когда $|x|\to\infty$.

Для этого пользуемся разложением $\overline{\tau}_1(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$.

$$\overline{\tau}_1(\sigma)=A_0+A|\sigma|+B\sigma^2+C|\sigma|^3+O\left(\sigma^4\right), \tag{1.21}$$

где $A_0=2Q_1$; $\quad A=-\dfrac{2Q_1(d_1+1)}{\lambda}$;

$$B=\frac{iHl\left[\overline{U}^{(2)}(0)\right]'}{\lambda}+2Q_1\left[\frac{(d_1+1)^2}{\lambda^2}+\frac{(2d_1+1)b}{\lambda}-\frac{a^2}{2}\right];$$

$$C=-\frac{iHl(d_1+1)\left[\bar{U}^{(2)}(0)\right]'}{\lambda^2}+2Q_1\left[\frac{a^2(d_1+1)}{2\lambda}-\frac{(d_1+1)^3}{\lambda^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{2b(d_1+1)(2d_1+1)}{\lambda^2}-\frac{2b^2(d_1+d_2+2)}{\lambda}\right];$$

$$\bar{U}^{(2)}(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}U^{(2)}(x)e^{i\sigma x}dx=\int\limits_{-a}^{a}f(x)e^{i\sigma x}dx,$$

$$\left[\bar{U}^{(2)}(0)\right]'=i\int\limits_{-a}^{a}xf(x)dx,$$

Из (1.21) по известному свойству интеграла Фурье при $|x|\to\infty$ для $\tau_1(x)$ получим

$$\tau_1(x)=-\frac{A}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{6C}{\pi}\cdot\frac{1}{x^4}+O\left(x^{-6}\right). \tag{1.22}$$

Здесь были использованы следующие значения интегралов:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma^{2n}e^{-i\sigma x}d\sigma=(-1)^n\,\delta^{(2n)}(x),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\sigma|^{2n+1}e^{-i\sigma x}d\sigma=(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{\pi}\cdot\frac{1}{x^{2n+2}}, \tag{1.23}$$

$$(n=0,1,2,...)$$

2. Нечетная задача. В случае нечетной задачи, силы, действующие на концах накладок, равны $Q_2=\dfrac{P_1-P_2}{2}$ $P_1>P_2$ и имеют противоположные направления.

Тогда уравнение равновесия запишется в виде

$$\frac{d^2u_2}{dx^2}=\frac{\tau_2(x)}{E_1F_1};\quad |x|>a \tag{2.1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\left.\frac{du_2}{dx}\right|_{x=-a}=\frac{Q_2}{E_1F_1},\qquad \left.\frac{du_2}{dx}\right|_{x=a}=\frac{Q_2}{E_1F_1}, \tag{2.2}$$

где $\tau_2(x)$ –интенсивность тангенциальных контактных сил, $u_2(x)$ –перемещение точек накладок.

Уравнение (2.1) при условиях (2.2), подобно (1.3), запишется в следующем виде:

$$\frac{dU_2}{dx}=\frac{\tau_2^*(x)}{E_1F_1}+\frac{Q_2}{E_1F_1}\left[\delta(x-a)-\delta(x+a)\right],\quad -\infty<x<\infty \tag{2.3}$$

Применим к (2.3) преобразование Фурье

$$-i\sigma\bar{U}_2(\sigma)=\frac{\bar{\tau}_2^*(\sigma)}{E_1F_1}+\frac{2iQ_2}{E_1F_1}\sin(\sigma a). \tag{2.4}$$

Далее, удовлетворив условию контакта (1.8), при этом, имея в виду (2.4) и (1.2), для трансформанты Фурье контактных напряжений получим следующее уравнение:

$$\bar{\tau}_2^*(\sigma)=\frac{i\sigma Hl\bar{U}^{(2)}(\sigma,b)}{\lambda+\bar{K}(\sigma)}-2i\lambda Q_2\frac{\sin(\sigma a)}{\lambda+\bar{K}(\sigma)}. \tag{2.5}$$

Применив к (2.5) обратное преобразование Фурье, для тангенциальных контактных напряжений получим

$$\tau_2^*(x)=-Hl\int_{-\infty}^{\infty}R'(x-s)U^{(2)}(s,b)ds-\lambda Q_2\left[R(x-a)-R(x+a)\right], \tag{2.6}$$
$$-\infty<x<\infty$$

Имея в виду, что $\tau_2^*(x)=0$ при $|x|<a$, из (2.6) для деформации промежуточного интервала между накладками получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-a}^{a}R'(x-s)U^{(2)}(s,b)ds=-\frac{\lambda Q_2}{Hl}\left[R(x-a)-R(x+a)\right],\quad |x|<a \tag{2.7}$$

Далее, используя разложения по формулам (1.13)–(1.15) и поступая аналогично, как в первом параграфе, решение задачи сводится к решению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(as)}{s-x}ds+$$
$$+a\int_{-1}^{1}\left\{R_2'\left[a(x-s)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right\}\varphi(as)ds=-\frac{\lambda Q_2}{Hl}g(ax), \tag{2.8}$$

где $\varphi(as)=u'(as)$, $g(ax)=R\left[a(x-1)\right]-R\left[a(x+1)\right]$.

Таким образом, решение задачи свелось к решению сингулярного интегрального уравнения (2.8).

Ввиду того, что $\varphi(as)$ – четная функция, решение (2.8) ищем в виде

$$\varphi(as)=X_0F(s)+\frac{\lambda Q_2}{Hl}\psi(s), \tag{2.9}$$

где

$$F(s)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\sum_{n=1}^{\infty}Y_{2n}^{(1)}T_{2n}(s)$$
$$\psi(s)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\sum_{n=1}^{\infty}Y_{2n}^{(2)}T_{2n}(s)$$

Подставляя $\varphi(as)$ из (2.9) в интегральное уравнение (2.8), при этом используя соотношение (1.18), для определения коэффициентов $Y_{2n}^{(j)}$ $(j=1,2)$ получим следующие квазивполне регулярные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений [6,7]:

$$Y_{2m}^{(j)}+\sum_{n=1}^{\infty}K_{2m2n}Y_{2n}^{(j)}=l_m^{(j)},\quad (j=1,2),\ m=1,2..., \tag{2.10}$$

где

$$K_{2m2n}=\frac{2a}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{R_2'\left[a(x-s)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right\}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-s^2}}T_{2n}(s)U_{2m-1}(x)dsdx,$$

$$l_m^{(1)} = -K_{2m,0} = -\frac{2a}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left\{R_2'\left[a\left(x-s\right)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\left(x-s\right)\right\}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-s^2}}U_{2m-1}\left(x\right)dsdx,$$

$$l_m^{(2)} = -g_m = -\frac{2\lambda Q_2}{\pi Hl}\int\limits_{-1}^{1}\left\{R\left[a\left(x-1\right)\right]-R\left[a\left(x+1\right)\right]\right\}\sqrt{1-x^2}U_{2m-1}\left(x\right)dx.$$

Постоянная X_0 определяется из условия

$$a\int\limits_1^\infty \tau_2\left(as\right)ds = Q_2$$

и имеет вид

$$X_0 = \frac{Q_2\left[1-\frac{\lambda a}{Hl}\int\limits_1^\infty \psi_1\left(x\right)dx\right]}{a\int\limits_1^\infty F_1\left(x\right)dx},$$

где $F_1\left(x\right)=\frac{Hl}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{F\left(s\right)}{s-x}ds+a\int\limits_{-1}^{1}R_2'\left[a\left(x-s\right)\right]F\left(s\right)ds,$

$$\psi_1\left(x\right)=\frac{Hl}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\psi\left(s\right)}{s-x}ds+a\int\limits_{-1}^{1}R_2'\left[a\left(x-s\right)\right]\psi\left(s\right)ds+g\left(ax\right).$$

После определения $Y_{2n}^{(j)}\left(j=1,2...\right)$, $n=1,2...$, искомые контактные напряжения $\tau_2\left(ax\right)$ представляются в виде [2,8]:

$$\tau_2\left(ax\right)=-X_0\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{x^2-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{x^2-1}}\left(\left|x\right|+\sqrt{x^2-1}\right)^{-2n}+\right.$$

$$\left.+a\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_{2n}\left(s\right)}{\sqrt{1-s^2}}\left[R_2'\left[a\left(x-s\right)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\left(x-s\right)\right]ds\right\}\cdot\left[X_0Y_{2n}^{(1)}+\frac{\lambda Q_2}{Hl}Y_{2n}^{(2)}\right]+ \quad (2.11)$$

$$+aX_0\int\limits_{-1}^{1}\left[R_2'\left[a\left(x-s\right)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\left(x-s\right)\right]\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}+\frac{\lambda Q_2}{Hl}g\left(ax\right),\quad \left|x\right|>1.$$

Для получения асимптотической формулы для $\tau_2\left(x\right)$, когда $\left|x\right|\to\infty$, пользуемся разложением $\overline{\tau}_2\left(\sigma\right)$ при $\left|\sigma\right|\to 0$

$$\overline{\tau}_2\left(\sigma\right)=A_1 i\sigma+B_1 i\sigma\left|\sigma\right|+C_1 i\sigma^3+O\left(\sigma^4\right), \quad (2.12)$$

где

$$A_1=\frac{Hl\overline{U}^{(2)}\left(0\right)}{\lambda}-2aQ_2,$$

$$B_1=\frac{2aQ_2\left(d_1+1\right)}{\lambda}-\frac{Hl\left(d_1+1\right)}{\lambda^2}\overline{U}^{(2)}\left(0\right),$$

$$C_1 = Hl\left[\frac{(d_1+1)^2}{\lambda^3} - \frac{b(2d_1+1)}{\lambda^2}\right]\bar{U}^{(2)}(0) + \frac{Hl}{2\lambda}\left[\bar{U}^{(2)}(0)\right]^u +$$

$$+\frac{a^3 Q_2}{3} - 2aQ_2\left[\frac{(d_1+1)^2}{\lambda^2} + \frac{b(2d_1+1)}{\lambda}\right],$$

$$\bar{U}^{(2)}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} U^{(2)}(x) e^{i\sigma x} dx = \int_{-a}^{a} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx,$$

$$\bar{U}^{(2)}(0) = \int_{-a}^{a} \varphi(x) dx, \quad \left[\bar{U}^{(2)}(0)\right]^u = -\int_{-a}^{a} x^2 \varphi(x) dx.$$

Применив обратное преобразование Фурье к (2.12) для $\tau_2(x)$ при $|x| \to \infty$, получим

$$\tau_2(x) = -\frac{2B_1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{24C_1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^5} + O\left(x^{-7}\right). \tag{2.13}$$

Здесь были использованы формулы (1.23).

После определения $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ искомое контактное напряжение $\tau(x)$ будет равно

$$\tau(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x).$$

Авторы выражают свою благодарность профессору Э.Х. Григоряну за ценные советы в ходе решения задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стренберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. // ПМ. Тр. Амер. общ. инж. механиков. 1968. Сер. Е. №4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х. Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости. // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. №2. С.62-71.
3. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Полубесконечная пластина, усиленная внутренним полубесконечным стрингером, параллельным границе пластины. // Изд. «Гитутюн» НАН Армении. 2006. С.138-143.
4. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.3-10.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 467с.
6. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками //ПММ. 1972. Т.36. №5.
7. Григорян Э.Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины //ПММ. 1974. Т.38. №2.
8. Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. //Jn.: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Noordhoff Intern.Publ. Leyden. 1973. P.368–425.

Институт механики НАН Армении
Государственный университет экономики

Поступила в редакцию
10.11.2008

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

АНТИПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОГО ПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНАМИ ПРИ СМЕШАННЫХ УСЛОВИЯХ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В.

Ключевые слова: антиплоское напряженное состояние, сингулярное интегральное уравнение.
Key words: anti-plane stress state, singular integral equation.

Վ.Ն.Հակոբյան, Լ.Լ.Դաշտոյան, Լ.Վ.Հակոբյան

Ճաք պարունակող բաղադրյալ տարածության հակահարթ լարվածային վիճակը խառը պայմանների դեպքում

Ուսումնասիրված է առաձգական կիսատարածությունից և մեկ այլ նյութից պատրաստված երկու քառորդ տարածություններից կազմված բաղադրյալ տարածության լարվածային վիճակը, երբ նրանց միացման հարթության մեջ առկա է վերջավոր երկարությամբ ճաք, որի ափերին տրված են խառը պայմաններ:

Խնդիրը բերվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների և կառուցվել է նրա փակ լուծումը:

V.N.Hakobyan, L.L.Dashtoyan, L.V.Hakobyan

On Anti-plane Stress State of Compound Space with Crack Under Mixed Conditions

In present work the anti-plane stress state of compound space, consisting of elastic half-space and two quarter-spaces is considered. There is a finite-length crack under mixed conditions on banks, in junction plane of half-space and quarter-spaces.

The problem is reduced to singular integral equations and the closed solution is built.

В настоящей работе методом сингулярного интегрального уравнения построено замкнутое решение задачи об антиплоском напряженном состоянии составного пространства, полученного при помощи соединения упругого полупространства с двумя одинаковыми четверть-пространствами, когда на плоскости стыка полупространства с четверть-пространствами имеется магистральная трещина конечной длины, на берегах которой заданы смешанные условия.

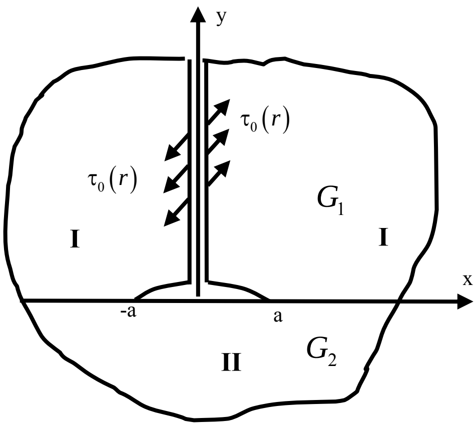
Исследованию напряженно-деформируемого состояния однородных и составных массивных тел с трещинами, когда на берегах трещины заданы условия смешанного типа, посвящен ряд работ, среди которых отметим [3-5], непосредственно связанных с нижерешенной задачей.

1. Постановка задачи и вывод определяющей системы уравнений. Пусть составное пространство, состоящее из упругого полупространства и двух одинаковых четверть-пространств, изготовленных из другого материала, на плоскости стыка полупространств с четверть-пространствами содержит конечную магистральную трещину длиной $2a$, симметрично расположенную по отношению свободных краев четверть-пространств.

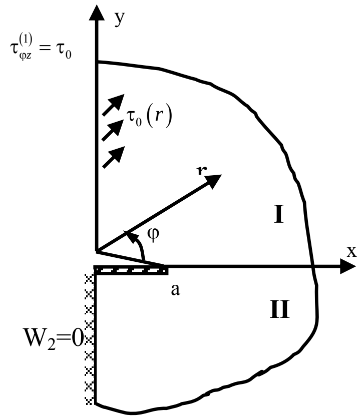
Считается, что нижний берег конечной трещины жестко защемлен, верхний берег свободен от напряжений, а составное пространство деформируется под воздействием одинаковых, противоположно направленных касательных нагрузок $\tau_0(r)$, действующих на свободных граничных полуплоскостях четверть-пространств (фиг.1).

Учитывая кососимметричность поставленной задачи относительно оси OY, рассмотрим только правое полупространство $\{\ 0 \le x, y \le \infty, \quad -\infty < z < \infty\ \}$ (фиг.2).

Тогда поставленную задачу в полярной системе координат можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:



Фиг.1



Фиг.2

$$\begin{aligned}
&\tau_{\varphi z}^{(1)}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=\tau_0(r),\ W_2\left(r,-\frac{\pi}{2}\right)=0 && (0<r<\infty)\\
&\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0),\ W_1(r,0)=W_2(r,0) && (a<r<\infty) \qquad (1.1)\\
&\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=0,\quad W_2(r,0)=0 && (0<r<a)
\end{aligned}$$

Здесь $W_j(r,0)$ $(j=1,\,2)$ – компоненты смещения точек соответственно верхнего и нижнего четверть-пространств, каждая из которых в области своего определения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W_j}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W_j}{\partial \varphi^2}=0$$

$\tau_{\varphi z}^{(j)}(r,\varphi)$ – компоненты касательных напряжений, действующие в четверть-пространствах и связанные со смещениями по известным формулам:

$$\tau_{\varphi z}^{(j)}(r,\varphi)=-\frac{G_j}{r}\frac{\partial W_j(r,\varphi)}{\partial \varphi}, \qquad (1.2)$$

где G_j –модули сдвига соответствующих четверть-пространств.

Ставится задача: определить раскрытие конечной трещины и коэффициент интенсивности напряжений в ее концевой точке.

Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение функции скачков напряжений и разности смещений берегов трещины:

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)-\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0)=\begin{cases}\tau(r), & 0<r<a\\ 0, & r>a\end{cases}$$
$$W_1(r,0)-W_2(r,0)=\begin{cases}W(r), & 0<r<a\\ 0, & r>a\end{cases} \qquad (1.3)$$

Добавим к (1.3) первые четыре условия (1.1) и выразим напряжения и смещения через функции скачков напряжений $\tau(r)$ и разности смещений берегов трещины $W(r)$.

Для этого решения уравнений Лапласа в соответствующих четверть-пространствах представим в виде интегралов Меллина:

$$W_j(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[A_j\sin\varphi s+B_j\cos\varphi s\right]r^{-s}ds$$

$$(-1<c<0;\ \ j=1,2)$$

Удовлетворяя первым четырем условиям (1.1), неизвестные коэффициенты A_j и B_j $(j=1,\,2)$ выразятся через функции скачков напряжений $\tau(r)$ и разности смещений $W(r)$.

Затем, удовлетворяя последним двум условиям (1.1), первоначально дифференцируя второе из них по r, для определения функций $\tau(r)$ и $W^{/}(r)$ придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{G_1}\displaystyle\int\limits_0^a K_{11}(r,r_0)\tau(r_0)dr_0-\int\limits_0^a K_{12}(r,r_0)W^{/}(r_0)dr_0=f_1(r)\\ \displaystyle\int\limits_0^a K_{12}(r,r_0)\tau(r_0)dr_0-G_1G\int\limits_0^a K_{11}(r,r_0)W^{/}(r_0)dr_0=f_2(r)\end{cases}\qquad(1.4)$$

$$(0<r<a),$$

где

$$K_{11}(r,r_0)=\frac{1}{4\pi ir}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sin\pi s}{\Delta(s)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^s ds,$$

$$K_{12}(r,r_0)=\frac{1}{2\pi ir}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sin^2\dfrac{\pi s}{2}}{\Delta(s)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^s ds,$$

$$f_1(r)=\frac{1}{2\pi ir}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\overline{\tau_0}(s)\sin\dfrac{\pi s}{2}}{G_1\Delta(s)}r^{-s}ds,$$

$$f_2(r)=\frac{G}{2\pi ir}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\overline{\tau_0}(s)\cos\dfrac{\pi s}{2}}{\Delta(s)}r^{-s}ds,$$

$$\overline{\tau_0}(s)=\int\limits_0^\infty\tau_0(r)r^s ds,$$

$$\Delta(s)=G\cos^2\frac{\pi s}{2}-\sin^2\frac{\pi s}{2},\qquad G=\frac{G_2}{G_1}.$$

Полученную систему нужно рассматривать совместно с условиями

$$W(a)=0,\quad W(0)<\infty,\qquad \tau(0)<\infty.\qquad(1.5)$$

2. Решение системы определяющих уравнений. Перейдем к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.4).

С этой целью, следуя работе [6], второе из этих уравнений умножим на $\lambda \neq 0$ и просуммируем с первым.

Получим

$$\begin{gathered}\int_0^a K_{11}(r,r_0)\left[\tau(r_0)-\lambda G W_*^{/}(r_0)\right]dr_0 + \\ +\lambda\int_0^a K_{12}(r,r_0)\left[\tau(r_0)-\frac{1}{\lambda}W_*^{/}(r_0)\right]dr_0 = G_1 f_1(r)+\lambda f_2(r)\end{gathered} \qquad (2.1)$$

$$\left(W_*^{/}(r) = G_1 W^{/}(r) \right).$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при $W_*(r)$ были равны, т.е. $\lambda G = \dfrac{1}{\lambda}$.

Тогда, приняв в (2.1) поочередно $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{G}}$ и $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}$, придем к следующим двум независимым интегральным сингулярным уравнениям:

$$\int_0^a \left[K_{11}(r,r_0) \pm \left(\sqrt{G}\right)^{-1} K_{12}(r,r_0)\right]\varphi_{\mp}(r_0)\,dr_0 = F_{\mp}(r),\ \ 0<r<a \qquad (2.2)$$

где
$$F_{\mp}(r) = G_1 f_1(r) \pm \sqrt{G}^{-1} f_2(r),$$
$$\varphi_{\mp}(r) = \tau(r) \mp \sqrt{G}W_*^{/}(r).$$

После ряда математических выкладок уравнения (2.2) примут следующий вид:

$$\varphi_-(r) + \frac{2\sqrt{G}}{\pi}\int_0^a \frac{r^{1-\alpha}r_0^{\alpha}\varphi_-(r_0)}{r_0^2-r^2}dr_0 = -(G+1)\sqrt{G}F_-(r), \qquad (2.3)$$

$$\varphi_+(r) - \frac{2\sqrt{G}r^{\alpha-1}}{\pi}\int_0^a \frac{r_0^{2-\alpha}\varphi_+(r_0)}{r_0^2-r^2}dr_0 = (G+1)\sqrt{G}F_+(r). \qquad (2.4)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1-G}{1+G}.$$

При этом, решения уравнений (2.3) и (2.4) должны быть ограниченными в точке $r=0$. Переходя в (2.3) и (2.4) к новым переменным по формулам

$$r_0^2 = a^2 s;\ \ r^2 = a^2 x$$

и вводя функции

$$\psi_-(x) = x^{\frac{\alpha-1}{2}} \varphi_-\left(a\sqrt{x}\right),$$

$$\psi_+(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}} \varphi_+\left(a\sqrt{x}\right),$$

$$x^{\frac{\alpha-1}{2}} (G+1)\sqrt{G} F_-\left(a\sqrt{x}\right) = F_-^*(x),$$

$$x^{\frac{1-\alpha}{2}} (G+1)\sqrt{G} F_+\left(a\sqrt{x}\right) = F_+^*(x),$$

уравнения (2.3) и (2.4) можно записать в виде

$$\psi_-(x) + \frac{\sqrt{G}}{\pi} \int_0^1 \frac{\psi_-(s)}{s-x} ds = -F_-^*(x), \tag{2.5}$$

$$\psi_+(x) - \frac{\sqrt{G}}{\pi} \int_0^1 \frac{\psi_+(s)}{s-x} ds = F_+^*(x). \tag{2.6}$$

При этом, $\psi_\pm(0) < \infty$.

Решения уравнений (2.5) и (2.6), ограниченные в точке $x = 0$, запишутся в следующем виде [1]:

$$\psi_\pm(x) = \frac{1}{1-q_\pm^2} \left\{ \pm F_+^*(x) \pm \frac{q_\pm \omega_\pm(x)}{\pi i} \int_0^1 \frac{F_\pm^*(s)\,ds}{\omega_\pm(s)(s-x)} \right\}, \quad (0 < x < 1), \tag{2.7}$$

где $\quad q_\pm = \pm i\sqrt{G}$, $\; X_j(z) = \left(\dfrac{z}{z-1} \right)^{1-\gamma_j}$

$$\omega_+(x) = X_1^+(x), \quad \omega_-(x) = X_2^+(x)$$

$$\gamma_j = \frac{\ln|g_i|}{2\pi i} + \frac{\vartheta_j}{2\pi}, \quad g_1 = \frac{1+q_+}{1-q_+}, \quad g_2 = \overline{g_1}$$

$$0 \le \vartheta_j = \arg g_j \le 2\pi \quad (j = 1,2).$$

После определения функций $\psi_\pm(x)$ легко найти функцию скачка напряжений $\tau(r)$ и производную функции раскрытия трещины по формулам

$$\tau(r)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha-1}\psi_+\left(\frac{r^2}{a^2}\right)+\left(\frac{r}{a}\right)^{1-\alpha}\psi_-\left(\frac{r^2}{a^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{G}\left(F_+(r)-F_-(r)\right)}{2}+ \tag{2.8}$$

$$+\frac{G}{\pi}\int_0^a\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\alpha}\frac{\omega_+^*(r)F_+(r_0)}{\omega_+^*(r_0)}+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-\alpha}\frac{\omega_-^*(r)F_-(r_0)}{\omega_-^*(r_0)}\right\}\frac{r_0dr_0}{r_0^2-r^2},$$

$$W'(r)=\frac{1}{2G_1\sqrt{G}}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha-1}\psi_+\left(\frac{r^2}{a^2}\right)-\left(\frac{r}{a}\right)^{1-\alpha}\psi_-\left(\frac{r^2}{a^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{F_+(r)+F_-(r)}{2\sqrt{G}\cdot G_1}+ \tag{2.9}$$

$$+\frac{1}{\pi G_1}\int_0^a\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\alpha}\frac{\omega_+^*(r)F_+(r_0)}{\omega_+^*(r_0)}-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\alpha}\frac{\omega_-^*(r)F_-(r_0)}{\omega_-^*(r_0)}\right\}\frac{r_0dr_0}{r_0^2-r^2}.$$

Здесь

$$\omega_+^*(r)=-\sqrt{g_1}\left(\frac{r^2}{a^2-r^2}\right)^{1-\gamma_1};\quad \omega_-^*(r)=-\sqrt{g_2}\left(\frac{r^2}{a^2-r^2}\right)^{1-\gamma_2}.$$

Отсюда при помощи интегрирования, учитывая условие $W(a)=0$, для функции раскрытия трещины получим следующее выражение:

$$W(r)=\int_r^a W'(r)\,dr\,. \tag{2.10}$$

Далее, чтобы определить коэффициент интенсивности контактных напряжений в концевой точке трещины, выразим напряжения при помощи функций $\psi_\pm(x)$.

Тогда, имеем

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=-\frac{\sqrt{G}}{2\pi(G+1)}\left[x^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_0^1\frac{\psi_+(s)ds}{s-x}+x^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_0^1\frac{\psi_-(s)ds}{s-x}\right]+f_2(r)$$

$$\left(x=\frac{r^2}{a^2};\ r>a\right). \tag{2.11}$$

Пусть $G<1$, тогда $1-\gamma_1>1-\gamma_2$. Следовательно, в точке $x=1$ доминирующим является первое слагаемое в (2.11).

Тогда, подставляя значение $\psi_+(x)$ из формулы (2.7) в (2.11) и проделав некоторые математические упрощения, получим

$$\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0)=\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=$$

$$=\frac{Gr^{1+\alpha-2\gamma_1}}{\pi\sqrt{G+1}\,a^{\alpha-1}\left(r^2-a^2\right)^{1-\gamma_1}}\cdot\int_0^a\frac{sF_+(s)\,ds}{\omega\left(\frac{s^2}{a^2}\right)\left(s^2-r^2\right)}+F_{**}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) \tag{2.12}$$

$(a<r<\infty)$.

Здесь $F_{**}\left(\frac{r^2}{a^2}\right)$ – регулярная функция.

Используя (2.12), вычислим коэффициент концентраций напряжений в точке $r=a$.

$$K_{III}(a)=\sqrt{2\pi}\lim_{r\to a+0}(r-a)^{1-\gamma_j}\,\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=$$

$$=-\frac{\sqrt{2\pi}Ga^{1-\gamma_1}}{\pi\sqrt{G+1}\cdot 2^{1-\gamma_1}}\int_0^a\frac{s^{2\gamma_1-1}F_+(s)\,ds}{\left(a^2-s^2\right)^{\gamma_1}}. \tag{2.13}$$

Заметим, что в случае однородного пространства, т.е. тогда $G=1$, для коэффициента концентрации напряжений имеем

$$K_{III}(a)=\frac{a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi}2^{3/4}}\int_0^1\frac{F_+(s)\,ds}{\sqrt{s}\left(a^2-s^2\right)^{\frac{1}{4}}},$$

что совпадает с полученным в [5] результатом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402с.
3. Акопян В.Н., Саакян А.В. О напряженном состоянии упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на жесткое включение конечной длины. /В сб.: “Проблемы механики деформируемого твердого тела”, посв. 85-летию акад. НАН РА С.А.Амбарцумяна. Ереван-2007, с. 16-25.
4. Hakobyan V.N. The mixed problem for anisotropic compound wedge with crack. Coll. “Modern problems of deformable bodies mechanics”, Yerevan – 2005, pp.114-124.
5. Даштоян Л.Л., Акопян Л. В. Антиплоское напряженное состояние пространства с трещинами при смешанных условиях на одном берегу. //Тр.VI международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 2008. С. 224 – 229.
6. Акопян В. Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. //Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т.48, N: 4. С.57-65.

Институт механики

НАН Армении

Поступила в редакцию

8.12.2008

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

THE METHOD'S OF COMPLEX ANALYSIS FOR THE SOLUTION OF PLANE PROBLEMS OF THE THEORY OF THERMOCONDUCTIVITY AND THERMOELASTISITY FOR MULTIPLY CONNECTED BODIES.

Bardzokas D.I., Lalou P.

Ключевые слова: многосвязанные тела, теория теплопроводности и термоупругости, комплексный анализ, плоские задачи, сингулярные интегральные уравнения, трещины, стрингеры.
Key words: multiply connected bodies, theory of thermoconductivity and thermoelasticcity, complex analysis, singular integral equations, craks, stringers.

Դ.Ի. Բարձոկաս, Պ. Լալոու

Կոմպլեքս անալիզի մեթոդներով ջերմահաղորդականության և ջերմաառաձգականության տեսության հարթ խնդիրների լուծումը բազմակապ մարմինների համար

Կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության և սինգուլյար ինտեգրալ հավասա-րումների մեթոդների կիրառմամբ զարգացվում է ճաքեր, ինչպես նաև ուղղագիծ և կորագիծ ստրինգերներ պարունակող բազմակապ իզոտրոպ մարմինների համար ջերմահաղորդականության և ջերմաառաձգականության տեսության հարթ խնդիրների լուծման մեթոդ: Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ:

Д.И. Бардзокас, П. Лалоу

Решение плоских задач теории теплопроводности и термоупругости для многосвязных тел методами комплексного анализа

Применением методов теории функций комплексного переменного и сингулярных интегральных уравнений развивается метод решения плоских задач теории теплопроводности и термоупргости для многосвязных изотропных тел, содержащих трещины, а также прямолинейные и криволинейные стрингеры. Рассматриваются конкретные примеры.

1. INTRODUCTION

During their service life, engineering structures are subjected not only to static and dynamic loads, but usually they are also affected by the presence of thermal fields. Thermal influences may sometimes alter the physic-mechanical properties of the materials and consequently, they may affect their strength properties and the resistance of the structure to loads. In the general case, the resulting expansions (contractions) are not occurring freely in the continuous medium. Instead, they produce thermal stresses which, in combination with the mechanical ones (due to external loading), can contribute to the initiation and propagation of cracks.

Even if the failure mechanism cannot, in many cases, be completely described only by the propagation of cracks in materials, the investigations of the conditions which trigger the initiation of a crack or a crack system from the pre-existing defects in the material (cracks, inclusions, cavities, welded joints etc.) is of great theoretical and practical importance. For this reason, the present investigation is concerned with the study of the stress-deformation state of a body under the influence of mechanical and thermal fields of forces, in the regions where singularities or stress concentrators exist, by using the complex functions method and the theory of singular integral equations [1, 2, 3]. The methodology applied is based on the theory of linear elasticity and thermoelasticity of the anisotropic medium and is an extension of a previous work [4], since it includes the effects of curvilinear (in the form of circular arcs) thin strip inclusions and holes.

The present development of this general method permits one to use it effectively for studying the interaction between various types of defects in an isotropic or anisotropic material and reinforcements, in the presence of mechanical and thermal fields of forces, and furthermore to extend it for solving many important problems of engineering practice.

2. FUNDAMENTAL EQUATIONS OF PLANE PROBLEMS IN THERMOCONDUCTIVITY AND THERMOELASTICITY

For the formulation of the mathematical theory of the strength of isotropic or anisotropic bodies characterized by defects in the form of cracks, holes, inclusions etc., under the influence of mechanical and thermal fields of forces, the model of the linear thermo elastic body is used [4]. A general theory of this model assumes that:

a) the strain components are infinitesimal;

b) the relationships between various components of stresses and strains are given by the generalized linear Hooke's law, and

c) the elastic and thermal properties of the body are, in general, different in different directions, but they are independent of the temperature and stress.

Furthermore, it is assumed that at any point of an anisotropic body, a plane of elastic and thermal symmetry exists. Also, it is assumed that the temperature $T(x,y,z,t)$ in an anisotropic body is a continuous function of spatial coordinates x,y,z and time t; and that this holds also for the first differential coefficient with respect to t and for the first and second differential coefficients with respect to x,y and z. The body is referred to a Cartesian or curvilinear coordinate system with unit vectors $\vec{i},\vec{j}$ and $\vec{k}$.Accordingly, an elementary surface characterized by a normal vector $\vec{n}$ which contains a random point of the body is considered. At the point under consideration, the thermo conductivity vector $\overrightarrow{K_n}$ which refers to the elementary surface with normal vector is defined by

$$\overrightarrow{K_n} = a_1 k_{11}\vec{i} + a_2 k_{22}\vec{j} + a_3 k_{33}\vec{k} \tag{1}$$

Where k_{ii} $\left(i=\overline{1,3}\right)$ are the coefficients of thermal conductivity, and a_i are the direction cosines between the vector $\vec{n}$ and the unit vectors $\vec{i},\vec{j}$ and $\vec{k}$. The surfaces where the thermal conductivity vector $\overrightarrow{K_n}$ coincides with the normal vector $\vec{n}$ are called principal surfaces of thermal conductivity, whereas the directions normal to them are called principal directions of thermal conductivity. Accordingly, the density of the thermal flux q_n across the elementary surface with normal direction is defined as

$$q_n = -(\overrightarrow{K_n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad} T}) \tag{2}$$

The surface which is crossed by the thermal flux of maximum density is called principal surface of thermal flux, and the direction perpendicular to it is called principal direction of thermal flux at the point under consideration.

In the case where the axes of the reference system coincide with the principal directions of the thermal conductivity, the thermal field is described by the following differential equation

$$k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - Q, \tag{3}$$

Where c is the specific heat of the body, ρ expresses its density, and Q is the quantity of heat which is radiated from the unit volume per unit of time.

In order to find the solution of the partial differential equation (3) in space and time domains, the initial and boundary conditions should be known a priori. The boundary or surface conditions of thermal conductivity encountered in practice are [5]:

i. Boundary conditions of the first kind, when the values of temperature are given at all points of the surface of the body,

$$T = f_1(x, y, z, t) \tag{4}$$

ii. Boundary conditions of the second kind, when the values of density of the thermal flux are given at all points of the surface of the body,

$$\overrightarrow{K_n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} = f_2(x, y, z, t) \tag{5}$$

iii. Boundary conditions of the third kind, called also "radiation boundary conditions", when the conditions of thermal exchange with the surrounding medium (of temperature T_o) are given at all points of the surface of the body,

$$\overrightarrow{K_n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} = \lambda(T - T_o), \tag{6}$$

where λ is the coefficient of surface heat transfer.

In the sequel, the fundamental equations of thermoelasticity will be given. For this purpose let us consider a cylindrical body with the generatrix of its lateral surface perpendicular to the plane of the plane of the Cartesian coordinate system, and its end faces being thermally insulated. Further it is assumed that the temperature at any point of the body depends on the spatial coordinates x, y and that the body is characterized by linear thermal anisotropy, such that at any point one of the principal directions of thermal conductivity is perpendicular to the plane xOy .If the body is homogeneous and it does not contain any thermal source, then Eq. (3) takes the form

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \tag{7}$$

Where $\lambda_{11} = k_{11} \cos^2 a + k_{22} \sin^2 a$

$$\lambda_{22} = k_{11} \sin^2 a + k_{22} \cos^2 a$$

$$\lambda_{12} = (k_{11} - k_{22}) \sin a \cos a \tag{8}$$

With a being the angle between the Ox -axis and one of the principal directions of thermal conductivity, and the quantities k_{ij}, λ_{ij} ($i, j = 1,2$) are constant.

The general solution of Eq.(7) is given in the form [6]:

$$T = F(z_3) + \overline{F(z_3)} = 2\,\text{Re}\,F(z_3) \tag{9}$$

Where the overbear denotes complex conjugate, Re denotes the real part of what follows and $F(z_3)$ is an analytic function of the complex variable z_3 .Parameter μ_3 is one of the roots of the characteristic equation

$$\lambda_{22}\mu^2 + 2\lambda_{12}\mu + \lambda_{11} = 0 \tag{10}$$

Where $\mu_3 = -\lambda_{12} + i(k_{11}k_{22})^{1/2} / \lambda_{22}$

With i denoting the usual imaginary unit.

The thermal flux as a function of $F(z_3)$ is expressed by a function of β_1, β_2

Which are the direction cosines between the normal vector n and the element ds

$$\overrightarrow{K_n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} = (\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y})\beta_1 + (\lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y})\beta_2 \tag{11}$$

By virtue of Eq. (9), relationship (11) assumes the following form

$$\overrightarrow{K_n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} = A_1^* F'(z_3) + \overline{A_1^* F'(z_3)} \tag{12}$$

where $\left(' \equiv \dfrac{d}{dz_3} \right)$, and $A_1^* = (\lambda_{12} + \mu_3 \lambda_{22})(-\beta_2 + \mu_3 \beta_1)$

Basing on relationships (9) and (12), we can find the temperature and the thermal flux at any point of the body, if the mathematical form of the thermal potential $F(z_3)$ is a priori known.

At any point of homogeneous and anisotropic body under a plane strain state, where exists a plane of elastic symmetry which is perpendicular to Oz -axis and coincides with one of the principal directions of thermal conductivity. The generalized Hooke's law in this case takes the form

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} + \alpha_{16}\sigma_{xy} + \beta_{11}T, \\
\varepsilon_{yy} &= \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} + \alpha_{26}\sigma_{xy} + \beta_{22}T, \\
\gamma_{xy} &= \alpha_{16}\sigma_{xx} + \alpha_{26}\sigma_{yy} + \alpha_{36}\sigma_{zz} + \alpha_{66}\sigma_{xy} - 2\beta_{66}T, \\
\varepsilon_{zz} &= \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} + \alpha_{36}\sigma_{xy} + \beta_{33}T = 0, \\
\gamma_{yz} &= \alpha_{44}\sigma_{yz} + \alpha_{45}\sigma_{xz} = 0, \ \gamma_{xz} = \alpha_{45}\sigma_{yz} + \alpha_{55}\sigma_{xz} = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

or alternatively $\varepsilon_{xx} = c_{11}\sigma_{xx} + c_{12}\sigma_{yy} + c_{16}\sigma_{xy} + \alpha_1 T$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yy} &= c_{12}\sigma_{xx} + c_{22}\sigma_{yy} + c_{26}\sigma_{xy} + \alpha_2 T \\
\gamma_{xy} &= c_{16}\sigma_{xx} + c_{26}\sigma_{yy} + c_{66}\sigma_{xy} - 2\alpha_6 T
\end{aligned} \tag{14}$$

where a_{ij}, c_{ij} express the elasticity coefficients and are related by

$$c_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \qquad i,j = 1,2,6 \tag{15}$$

In the sequel β_{ij} are the coefficients which given the strain tensor components of a body element free form external tractions, due to a temperature change of one degree. For these coefficients then following relationships hold true:

$$a_i = \beta_{ii} - \frac{\beta_{33}a_{i3}}{a_{33}} \quad (i = 1,2) \qquad a_6 = \beta_{66} + \frac{\beta_{33}a_{36}}{2a_{33}} \tag{15΄}$$

Under the condition that coefficients $c_{ij}, a_i, \lambda_{ij}$ remain constant and independent of the variations of the stress components and the temperature of the body, the relationships giving the stresses and displacements as a function of the complex potentials $\Phi(z_1), \Psi(z_2)$ and $F(z_3)$ are the following:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2\,\mathrm{Re}[\mu_1^2\Phi(z_1) + \mu_2^2\Psi(z_2) + \eta_o\mu_3 F(z_3)] \\
\sigma_{yy} &= 2\,\mathrm{Re}[\Phi(z_1) + \Psi(z_2) + \eta_o F(z_3)] \\
\sigma_{xy} &= -2\,\mathrm{Re}[\mu_1\Phi(z_1) + \mu_2\Psi(z_2) + \eta_o\mu_3 F(z_3)] \\
u &= 2\,\mathrm{Re}[p_1\phi(z_1) + p_2\psi(z_2) + p_*\psi(z_3)] \\
v &= 2\,\mathrm{Re}[q_1\phi(z_1) + q_2\psi(z_2) + q_*\psi(z_3)] \\
p_j &= c_{11}\mu_j^2 + c_{12} - c_{16}\mu_j \qquad \mu_j q_j = c_{12}\mu_j^2 + c_{22} - c_{26}\mu_j \qquad j = 1,2
\end{aligned} \tag{16}$$

And $p_* = a_1 + \eta_o(c_{11}\mu_3^2 - c_{16}\mu_3 + c_{12)} \quad \mu_3 p_* = a_2 + \eta_o(c_{11}\mu_3^2 - c_{26}\mu_3 + c_{22})$

$$\eta_o = -(a_1\mu_3^2 + 2a_6\mu_3 + a_2)/\Delta(\mu_3)$$

$$\Delta(\mu_3) = c_{11}(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)(\mu_3 - \overline{\mu_1})(\mu_3 - \overline{\mu_2}) \quad (17)$$

$$\Phi(z_1) = \phi'(z_1) \qquad \Psi(z_2) = \psi'(z_2) \qquad F(z_3) = \psi'(z_3)$$

For the transversely isotropic body, Hooke's law in plane strain conditions takes the following simplified form

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_z + \beta_{11}T, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_z + \beta_{11}T,$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_z}{E_z}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{1}{E}\sigma_z + \beta_{33}T = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}}\tau_{xy}, \quad (18)$$

and for the generally isotropic body,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) + aT, \; \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) + aT, \; \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}. \quad (19)$$

In the above relations the coefficients β_{11} and β_{33} are, respectively, the thermal coefficients of linear expansion on the plane of isotropy (parallel to the plane xOy), and along the direction perpendicular to the plane of isotropy.

The relationships for the derivation of the stress tensor and displacement vector components are simplified as follows:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]$$

$$(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \quad (20)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\phi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)} + \beta\int F(z)dz \quad T(x,y) = \operatorname{Re} F(z)$$

Where for the case of transversely isotropic body

(a) $\kappa = 1 + \frac{2E}{1+\nu}\left(\frac{1-\nu}{E} - \frac{2\nu_z}{E_z}\right), \quad \beta = \frac{2E}{1+\nu}\left(\beta_{11} + \nu_z\beta_{33}\right),$ (plane strain case),

(b) $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \qquad \beta = \frac{2E\beta_{11}}{1+\nu},$ (generalized plane stress case)

And for the isotropic body

(c) $\kappa = 3 - 4\nu, \qquad \beta = aE,$ (plane strain case),

(d) $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \qquad \beta = \frac{aE}{1+\nu},$ (generalized plane stress case)

In the case where at the point $\left(x_0, y_0\right)$ inside the orthotropic medium a thermal source of power q_0 exists, the complex potentials in the region enclosing this point take the form $\left(j = \overline{1,3}\right)$

$$\phi(z_1) = a_0'(z_1 - t_1)\ln(z_1 - t_1), \quad \psi(z_2) = \beta_0'(z_2 - t_2)\ln(z_2 - t_2),$$

$$\psi(z_3) = m_0(z_3 - t_3)\ln(z_3 - t_3), \; m_0 = -\frac{q_0}{4\pi\sqrt{k_{11}k_{22}}}, t_j = x_0 + \mu_j y_0, \quad (21)$$

And the coefficients a_0', β_0' are given from the following relations:

$$\alpha_0' = \frac{m - n\mu_2}{\mu_1 - \mu_2},\ \beta_0' = -\frac{m - n\mu_1}{\mu_1 - \mu_2},\ \mathrm{Im}\left[m(\mu_1 + \mu_2) - n\mu_1\mu_2 - m\lambda_0 / c_{11}\right] = 0,$$

$$\mathrm{Im}\left[m\mu_1\mu_2 + n\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2) - m_0\left(a_1\mu_3 - \lambda_0(\mu_3 - \mu_1 - \mu_2)\right)/c_{11}\right] = 0,$$

with $\lambda_0 = \dfrac{\left(a_1\mu_3^2 + 2a_6\mu_3 + a_2\right)}{\left(\mu_3 - \overline{\mu_1}\right)\left(\mu_3 - \overline{\mu_2}\right)}$

For the case of the transversely isotropic or generally isotropic medium, the corresponding complex potentials take the following form:

$$\Phi(z) = A_0 \ln(z - z_0),\quad \psi(z) = -\frac{A_0\overline{z_0}}{z - z_0},\ F(z) = m_0 \ln(z - z_0), \tag{22}$$

where $A_0 = -\dfrac{\beta m_0}{1 + \kappa}, \qquad m_0 = -\dfrac{q_0}{4\pi\lambda}.$

Recapitulating, the solution of the plane problem of steady state thermoelasticity is derived in two consecutive stages. In the first stage the steady thermal field $T(x, y)$ is derived satisfying one of the boundary conditions (4)-(6) and the differential thermo elasticity equation (7) for the anisotropic medium, or the Laplace equation

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0 \tag{23}$$

for the isotropic medium. The second stage refers to the derivation of the stress tensor and displacement vector components by using relations (16) or (20).

3. THERMAL CONTACT CONDITIONS BETWEEN TWO BODIES.

At the first stage of the solution of the thermo elastic problem for bodies with thin inclusions and cracks it is of great importance to describe correctly the phenomenon of thermal conductivity along the lips of the crack and the contact interfaces of the thin inclusion with the body. This is achieved by properly choosing the representative computational model of thermal contact between the bodies characterized by different elastic and thermal constants. Following [7] approach to the formulation of the model which describes the condition of thermal contact, it is assumed that the contact surfaces are separated by a thin interlayer (inclusion) with the same thermo-physical parameters (Fig.1). If these parameters are assumed to be constant and the thickness of the interlayer tends to zero, it takes the form of a physical separating surface of the two bodies, and the corresponding boundary conditions on this surface correspond to the real contact condition of the two bodies.

The thermo conductivity equation of the embedded layer (isotropic inclusion) referred to the coordinate system (n, s) is the following:

$$\frac{\partial^2 T_c}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial s^2} = 0 \tag{24}$$

On the separating surfaces $n = \pm h$ of the isotropic inclusion and the anisotropic medium, the following conditions of thermal contact are satisfied

$$T_c(s, \pm h) = T^{\pm}, \qquad -\lambda \left.\frac{\partial T_c}{\partial n}\right|_{n=\pm h} = T_n^{\pm}, \tag{25),(26}$$

where λ is the coefficient of thermal conductivity of the inclusion ,

$$T_n^{\pm} = -\left(\overrightarrow{K_n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad} T}\right)^{\pm} \tag{27}$$

and $T^{\pm}, T_n^{\pm}$ express the limiting values of the temperature and the thermal flux along the boundary $n = \pm h$ of the anisotropic medium.

Then the following integral representations are introduced:

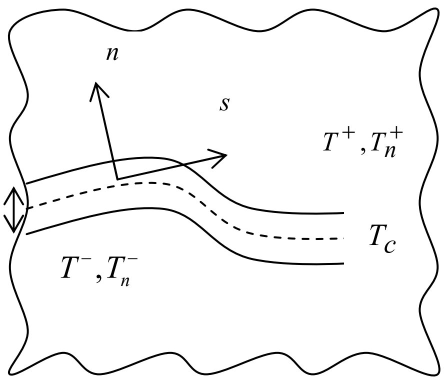


Fig.1. Contact of two infinite elastic bodies, with the contact region to be represented by a thin inclusion characterized by the same thermo physical properties as those of the two bodies.

$$T_c^* = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} T_c dn, \tag{28}$$

$$T_c^{**} = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} T_c n dn. \tag{29}$$

Multiplying relationship (24) by $1/2h$ and integrating with respect to n in the range $(-h, h)$ and by virtue of the relations (25) and (26), the following equation is derived:

$$\lambda_s \frac{\partial^2 T_c^*}{\partial s^2} + \left(T_n^+ - T_n^-\right) = 0, \qquad \lambda_s = 2\lambda h\,. \tag{30}$$

Furthermore, multiplying (24) by $3n/2h^2$ and integrating with respect to n in the range $(-h, h)$ we get

$$\lambda_s \frac{\partial^2 T_c^{**}}{\partial s^2} + 3\lambda\left(T_n^+ + T_n^-\right) - 6\lambda_n\left(T^+ - T^-\right) = 0, \;\; \lambda_n = \lambda/2h \tag{31}$$

In order to derive the expressions for the quantities T_c^*, T_c^{**} with respect to the limiting values of the temperature $T^{\pm}$ of the anisotropic body, we use the operational expression of the solution of (24) which can be written as follows:

$$\frac{\partial^2 T_c}{\partial n^2} + p^2 T_c = 0 \qquad \left(\mathrm{p}^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) \tag{32}$$

By considering condition the expression gives the following solution;

$$T_c = \frac{\left(T^+ + T^-\right)}{2\cos ph}\cos pn + \frac{\left(T^+ + T^-\right)}{2\sin ph}\sin pn. \tag{33}$$

By virtue of (33), relationships (28) and (29) become

$$T_c^* = \frac{\left(T^+ + T^-\right)}{2ph}\,\mathrm{tg}ph, \quad T_c^{**} = \frac{3}{2p^2h^2}\left(T^+ + T^-\right)\left(1 - ph\,\mathrm{ctg}ph\right). \tag{34}$$

Substituting the values of T_c^* and T_c^{**} found from (34) into relations (30) and (31), respectively, and for $h \to 0$, we get the following relations:

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(T^+ + T^-\right) + 2\left[\left(\overrightarrow{K_n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}T}\right)^+ - \left(\overrightarrow{K_n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}T}\right)^-\right] = 0, \tag{35}$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(T^+ - T^-\right) + 6\left[\left(\overrightarrow{K_n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}T}\right)^+ + \left(\overrightarrow{K_n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}T}\right)^-\right] - 12\lambda_n\left(T^+ - T^-\right) = 0.$$

The above relations represent the conditions of "non-ideal thermal contact'' at the surface of the anisotropic medium. In the case of the isotropic medium, relations (35) are simplified as follows,

$$\begin{aligned} &\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2}(T^+ + T^-) + 2\lambda^*\left[\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^-\right] = 0 \\ &\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2}(T^+ - T^-) + 6\lambda^*\left[\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^+ + \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^-\right] - 12\lambda_n(T^+ - T^-) = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

where λ^* is the coefficient of thermal conductivity of the isotropic medium.

In the case when instead of a thin inclusion we have a crack, the values of λ_s and λ_n characterize its thermal conductivity in the longitudinal and transverse directions, respectively. Depending on thermal conductivity we distinguish three categories of cracks:

a) a thermally conducting crack for $\lambda_s \neq 0, \lambda_n \neq 0$;

b) a longitudinally thermally insulating crack for $\lambda_s = 0, \lambda_n \neq 0$;

c) a thermally insulating crack for $\lambda_s = \lambda_n = 0$.

4. STATEMENT OF THE PROBLEM OF A MULTI-CONNECTED BODY.

Let us consider an infinite isotropic plate S containing M internal curvilinear cracks l_j $\left(j = \overline{1, M}\right)$, N thin strip inclusions (stringers) L_j $\left(j = \overline{1, N} \;\; or \;\; j = \overline{1, n_1^{'} + n_2^{'}}\right)$; $n_1^{'}$ denotes the number of straight stringers, whereas $n_2^{'}$ the number of curvilinear (circular arcs) stringers and L the number of holes indexed as γ_j $\left(j = \overline{1, L}\right)$. The plate is subjected to biaxial state of stresses $\left(N_1, N_2\right)$ at infinity and is under the influence of a homogeneous thermal flow q_∞. Besides these loading conditions, concentrated forces $P_j + iQ_j$ are acting at the points $z_j^*\left(j = \overline{1, k_1}\right)$, moments M_j at the points $z_j^{**}\left(j = \overline{1, k_2}\right)$, and k_3 thermal sources of powers q_j at the points $a_j\left(j = \overline{1, k_3}\right)$ on the plane of the plate.

Here we assume that the only deformation, which can be sustained by the straight stringers, is the one directed along their longitudinal axis. Furthermore, both the straight and the curvilinear stringers are taken to be of zero bending stiffness.

In plane thermo conductivity problems of cracked bodies with inclusions, the temperature field $T(x, y)$ is expressed as follows:

$$T(x,y) = T_o(x,y) + T_*(x,y) \tag{37}$$

where $T_0(x,y)$ is the known thermal field induced to the continuous medium, and $T_*(x,y)$ the perturbed thermal field due to the presence of defects in the body.

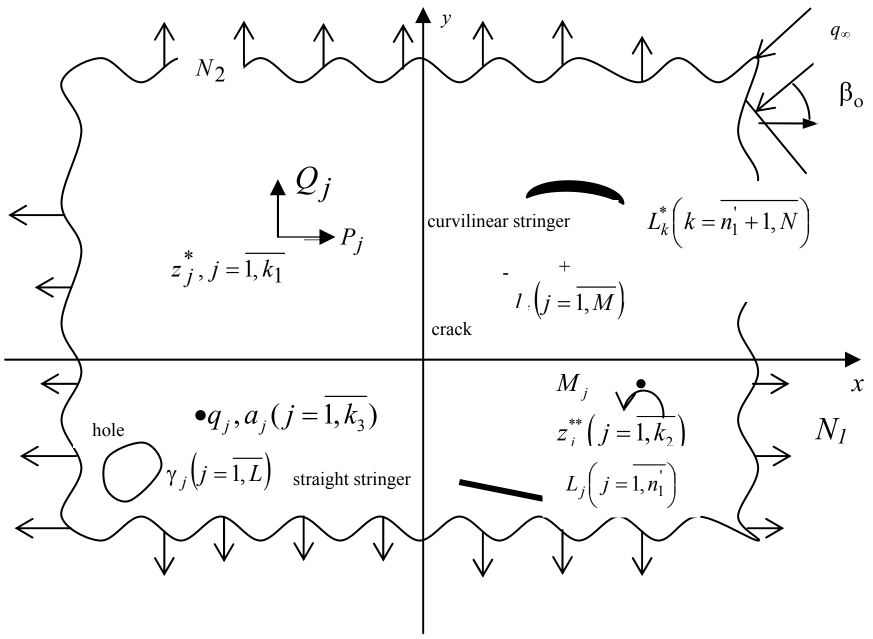


Fig. 2. Infinite isotropic thin plate containing M curvilinear cracks, $N\left(L_j \cup L^*{}_k\right)$ thin strip inclusions and L holes, which is subjected at infinity to a biaxial state of stress $\left(N_1, N_2\right)$ and to a homogeneous thermal flow q_∞

Depending on the thermal contact conditions at the boundaries of the crack and the thin inclusion, we have the following three relations:

$$T_*^{\pm} = f^{\pm}(t) - T_o(t)\,,\ \left(\overrightarrow{K_n}\cdot\overrightarrow{\text{grad}T_*}\right)^{\pm} = Q^{\pm}(t) - \left(\overrightarrow{K_n}\cdot\overrightarrow{\text{grad}T_0}\right) \tag{38),(39}$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(T_*^+ + T_*^-\right) + 2\left[\left(\overrightarrow{K_n}\cdot\overrightarrow{\text{grad}T}\right)^+ - \left(\overrightarrow{K_n}\cdot\overrightarrow{\text{grad}T}\right)^-\right] = -2\lambda_s \frac{\partial^2 T_0}{\partial s^2},$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(T_*^+ - T_*^-\right) + 6\left[\left(\overrightarrow{K_n}\cdot\overrightarrow{\text{grad}T}\right)^+ + \left(\overrightarrow{K_n}\cdot\overrightarrow{\text{grad}T}\right)^-\right] - 12\lambda_n\left(T_*^+ - T_*^-\right) =$$

$$= -12\left(\overrightarrow{K_n}\cdot\overrightarrow{\text{grad}T_0}\right). \tag{40}$$

Where $f^{\pm}(t)$ and $Q^{\pm}(t)$ express the know temperatures and thermal fluxes along the boundaries of the crack or the thin inclusion, (n,s) refer to the curvilinear coordinate system; λ is the thermal conductivity. In the case of a crack, the parameters λ_s and λ_n correspond to the thermal conductivity in the longitudinal and transverse directions, respectively, and eq.(38)-(40) read:

$$T_*^{\pm} = f_j^{\pm} - T_0, t \in L_{1j}^*,\quad j = \overline{1,n_1}\qquad t \in L_{3j}^*, j = \overline{\left(n_1 + n_2 + 1, N + M + L\right)} \tag{41}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial T_*}{\partial n}\right)^{\pm}=\pm Q_j^{\pm}-\lambda\frac{\partial T_0}{\partial n},\qquad t\in L_{2j}^*, j=\overline{(n_1+1,n_1+n_2)} \tag{42}$$

$$\lambda_s\frac{\partial^2}{\partial s^2}(T_*^+-T_*^-)+6\lambda\left[\left(\frac{\partial T_*}{\partial n}\right)^{+}+\left(\frac{\partial T_*}{\partial n}\right)^{-}\right]-12\lambda_n(T_*^+-T_*^-)=-12\lambda\frac{\partial To}{\partial n}$$

$$\lambda_s\frac{\partial^2}{\partial s^2}(T_*^+ + T_*^-)+2\lambda\left[\left(\frac{\partial T_*}{\partial n}\right)^{+}-\left(\frac{\partial T_*}{\partial n}\right)^{-}\right]=-2\lambda_s\frac{\partial^2 T_o}{\partial s^2} \tag{43}$$

where t is the complex coordinate of a point on the contour. When considering a hole, only one of the (41)-(42) thermal conditions is applied.

In addition to the thermal boundary conditions (41)-(43) we also introduce the following mechanical boundary conditions as in Refs. [8,9] on the crack, stringer and hole boundaries:

1. The normal and shear stresses that act along boundaries l_k of the crack and the boundaries γ_j of the holes are considered to be known:

$$\left.\left(\sigma_n^{\pm}-i\sigma_t^{\pm}\right)\right|_{l_k},\quad k=\overline{1,M}\;;\quad \left.\left(\sigma_n-i\sigma_t\right)\right|_{\gamma_j},\quad j=\overline{1,L} \tag{44), (45}$$

2. Along the boundary of the straight stringer L_k the stresses are given by:

$$\sigma_n^+=\sigma_n^-,\varepsilon_0=\frac{du_t^+}{dx_k}=\frac{du_t^-}{dx_k},u_n^++iu_t^+=u_n^-+u_t^- on L_k, k=\overline{1,n_1'} \tag{46}$$

Where x_k denotes the abscissa referred to the local coordinate system $x_kO_ky_k$ positioned at the mid-point of the stringer L_k. By virtue of the condition of equilibrium and Hooke's law for the case of generalized plane stress, relations (46) take the form:

$$ih\left[\left(\sigma_n^+-i\sigma_t^+\right)-\left(\sigma_n^--i\sigma_t^-\right)\right]+\frac{E^{(k)}S^{(k)}}{E}ie^{i\theta_k}\frac{d}{dt}\left[\left(\sigma_n^++\sigma_s^+\right)-(1+\nu)\sigma_n^+\right]=0$$

$$t\in L_k,\; k=\overline{1,n_1'} \tag{47}$$

where t is the complex coordinate of a point on L_k, h is the thickness of the plate, $E^{(k)}, S^{(k)}$, express the modulus of elasticity and cross-sectional area, respectively, of the stringers L_k and θ_k denotes the angle formed by positive directions of stringer axis; Ox_k and Ox axis; E, ν express the plate's modulus of elasticity and Poisson's ratio, respectively.

3. Finally, along the curvilinear (circular arc) boundary of the stringer $L_k^*\left(k=\overline{n_1'+1,N}\right)$, the following relationships hold [6,8,9,10]:

$$-\frac{T(\theta)}{R_k}+h\left(\sigma_n^--i\sigma_n^-\right)=0,\qquad \frac{1}{R_k}\frac{dT(\theta)}{d\theta}+h\left(\sigma_t^+-\sigma_t^-\right)=0 \tag{48}$$

$$u_n^++iu_t^+=u_n^-+iu_t^-,\qquad \varepsilon_0=\frac{du_t^+}{dt}=\frac{du_t^-}{dt}$$

If we consider Hooke's law in generalized plane stress, the above set of equations read:

$$ER_kh\left[\left(\sigma_n^+-\sigma_n^-\right)-i\left(\sigma_t^+-\sigma_t^-\right)\right]-E^{(k)}S^{(k)}\left[1-\left(t-m_ke^{ib_k}\right)\frac{d}{dt_k}\right]\times$$

$$\times\left[\left(\sigma_n^+ + \sigma_s^+\right) - (1+\nu)\sigma_n^+\right] = 0 \tag{49}$$

where $T(\theta)$ is the circumferential component of the force which acts along the line in the middle plane of the stringer. In generalized plane stress conditions, $T(\theta)$ is given by:

$$T(\theta) = E^{(k)} S^{(k)} \varepsilon_0^{str} \tag{50}$$

with ε_θ^{str} being the circumferential component of strain along the line in the middle plane of the stringer:

$$\varepsilon_0^{str} = \frac{1}{E}\left(\sigma_s - \nu\sigma_n\right) \tag{51}$$

5. FORMATION OF THE STATE EQUATIONS.

The derivation of the singular integral equations is based on the method of complex potentials.

The thermal potential $F(z)$ $\left[T(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\,F(z)\right]$ of the thermal field $T(x,y)$ is expressed as follows:

$$F(z) = \frac{q_\infty}{2} z e^{-i\beta_0} - \sum_{j=1}^{k_3} \frac{q_j}{2\pi\lambda^*} \ln(z - a_{j)} + F_*(z) \tag{52}$$

$F_*(z)$ represents the thermal potential that refers to the perturbed thermal field and is given by:

$$F_*(z) = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{1J}^*} \frac{f_j^*(\tau) + i\phi_j^{(2)}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{2j}^*} f_j^{**}(\tau) e^{-ia_j} \ln(\tau - z) d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{2j}^*} \frac{\phi_j^{(1)}(\tau)}{\tau - z} d\tau \right] + \sum_{j=n_1+n_2+1}^{N+M+L} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3J}^*} \frac{\phi_j^{(1)} + i\phi_j^{(2)}}{\tau - z} d\tau \tag{53}$$

$\left(\phi_j^{(1)} + i\phi_j^{(2)}\right)$ denote the densities along the crack, stringer and hole boundaries.

The quantities $f_j^*(t)$ and $f_j^{**}(t)$ are expressed as:

$$f_j^*(t) = \frac{1}{2}\left[f_j^+(t) - f_j^-(t)\right], \qquad f_j^{**}(t) = -\frac{1}{2\lambda^*}\left[Q^+(t) + Q^-(t)\right] \tag{54}$$

By substitution of the limiting values of Eq. (53), to the boundary conditions Eqs (41)-(43) we get the following system of integro-differential equations. $t \in L_{1k}^*$, $k = \overline{1, n_1}$

$$2\,\mathrm{Re}\left[\left[\frac{1}{\pi} \int_{L_{1K}} \frac{\phi_k^{(2)}(\tau)}{\tau - t} dt\right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n_1} \frac{1}{\pi} \int_{L_{1j}^*} \frac{\phi_j^{(2)}(\tau)}{\tau - t} dt + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{1}{\pi i} \int_{L_{2j}^*} \frac{\phi_j^{(1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=n_1+n_2+1}^{N+M+L} \frac{1}{\pi i} \int_{L_j} \frac{\phi_j^{(1)}(\tau) + i\phi_j^{(2)}(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] = f_k^+(t) + f_k^-(t) - 2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{\pi i} \int_{L_{2J}^*} \frac{f_j^*(\tau)}{\tau - z} d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{1}{\pi i} \int_{L_{2j}^*} f_j^{**} e^{-ia_j} \ln(\tau - t) d\tau + \frac{q_\infty}{2} t e^{-i\beta_0} + \sum_{j=1}^{k_3} \frac{q_j}{2\pi\lambda} \ln\left(t - a_j\right) \right] \tag{55}$$

$$2\,\mathrm{Re}\left\{e^{ia_k(t)}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_{2k}^*}\frac{\phi^{*(1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\sum_{\substack{j=n_1+1\\ j\neq k}}^{n_1+n_2}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{2j}^*}\frac{\phi^{*(2)}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{1j}^*}\frac{\phi^{*(2)}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=n_1+n_2+1}^{N+M+L}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{3j}^*}\frac{\phi_j^{(1)}(\tau)+i\phi_j^{(2)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]\right\}=\frac{Q_k^+(t)-Q_k^-(t)}{\lambda^*}-2\,\mathrm{Re}\Big[e^{ia_k(t)}ia_k(t)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{q_\infty}{2}e^{-i\beta_0}-\sum_{j=1}^{k_3}\frac{q}{2\pi\lambda}\frac{1}{t-a_j}\right)+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{1j}^*}\frac{f_j^*(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau+\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{2l}^*}\frac{f_j^{**}(\tau)e^{-ia_j(\tau)}}{\tau-t}d\tau\right]\Big],$$

$$t\in L_{2k}^*,\qquad k=\overline{n_1+1,n_1+n_2} \tag{56}$$

$$\mathrm{Re}\left[\omega_k(s)e^{ia_k(t)}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_{3k}^*}\frac{\phi_k^{'(1)}(\tau)+i\phi_k^{'(2)}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{e^{2ia_k(t)}}{\pi i}\int_{L_{3K}^*}\frac{\phi_k^{'(1)}(\tau)+i\phi_k^{'(2)}}{\tau-t}d\tau\right]+\right.$$

$$+\sum_{\substack{j=n_1+n_2+1\\ j\neq k}}^{N+M+L}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_{3j}^*}\frac{\phi_j^{'(1)}(\tau)+i\phi_j^{'(2)}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{e^{2ia_k(t)}}{\pi i}\int_{L_{3j}^*}\frac{\phi_j^{'(1)}(\tau)+i\phi_j^{'(2)}}{\tau-t}d\tau\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_{1j}^*}\frac{i\phi_j^{'(2)}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{e^{2ia_k(t)}}{\pi i}\int_{L_{1j}^*}\frac{i\phi_j^{'(2)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\sum_{j=n\ +1}^{n_1+n_2}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_{2j}^*}\frac{\phi_j^{'(1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{e^{2ia_k(t)}}{\pi i}\int_{L_{2j}^*}\frac{\phi_j^{'(1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\frac{\lambda}{\lambda_s}\left[e^{ia_k(t)}\phi_\kappa^{'(1)}(t)+i\phi_k^{'(2)}(t)\right]\right]=-2\,\mathrm{Re}\Big[\omega_k(s)e^{ia_k(t)}\times$$

$$\times\left[\frac{q_\infty}{2}e^{-i\beta_0}-\sum_{j=1}^{k_3}\frac{q}{2\pi\lambda}\left[\frac{1}{t-a_j}-\frac{e^{2ia\ (t)}}{(t-a_j)^2}\right]\right]-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k_1}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{1j}^*}\frac{f_j^*(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{e^{2ia_k(t)}}{\pi i}\times\right.$$

$$\times\int_{L_{1j}^*}\frac{f_j^*(\tau)}{\tau-t}d\tau+\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{1J}^*}\frac{f_j^*(\tau)e^{-ia_j(\tau)}}{\tau-t}d\tau-\frac{e^{2ia_k(t)}}{\pi i}\times$$

$$\left.\times\int_{L_{2J}^*}\left(\omega_j(s)e^{-ia_j(s)}f_j^{**}(\tau)+f_j^{**}(\tau)\right)e^{-ia_j(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}\right]\Big]\Big] \tag{57}$$

$$\mathrm{Re}\Big\{\omega_k(s)e^{ia_k(t)}\left[\phi_k^{'(1)}(t)+i\phi_k^{'(2)}(t)-e^{2ia_k(t)}\left(\phi_k^{'(1)}(t)+i\phi_k^{'(2)}(t)\right)\right]+$$

$$+6\frac{\lambda}{\lambda_s}e^{ia_k(t)}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_{3k}^*}\frac{\phi_k^{'(1)}(\tau)+i\phi_k^{'(2)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\sum_{\substack{j=n_1+n_2+1\\ j\neq k}}^{N+M+L}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_{3j}^*}\frac{\phi_j^{'(1)}(\tau)+i\phi_j^{'(2)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{1j}^*}\frac{i\phi_j^{'(2)}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{2j}^*}\frac{\phi_j^{'(1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau-12\frac{\lambda_n}{\lambda_s}\left(\phi_k^{(1)}(t)+i\phi_k^{(2)}(t)\right)\right\}=$$

$$-12\frac{\lambda}{\lambda_s}\mathrm{Re}\left[e^{ia_k(t)}\left(\frac{q_\infty}{2}e^{-i\beta_0}-\sum_{j=1}^{k_3}\frac{q_j}{2\pi\lambda}\frac{1}{\tau-a_j}\right)-\frac{1}{12}\left(\sum_{j=1}^{n_1}\frac{1}{\pi i}\int_{L_{1J}^*}\frac{f_j^{'*}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\frac{1}{\pi i}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{L_{2j}^*}f_j^{**}\frac{e^{-ia_j(t)}}{\tau-t}d\tau\right)\right]\quad t\in L_{3k}^*,\ k=\overline{n_1+n_2+1,N+M+L},\ \omega_k(s)=a_k{}'(s)\qquad(58)$$

In the description of the boundary conditions (44)-(48) the complex potentials $\Phi_0(z)$ and $\Psi_0(z)$ are defined as follows:

$$\Phi_o(z)=\Gamma-\sum_{j=1}^{k_1}\frac{P_j+iQ_j}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{z-z_j^*}+\frac{\beta}{1+\kappa}\sum_{j=1}^{k_3}\frac{q_j}{2\pi\lambda}\ln(z-a_{j)})+\Phi(z)\qquad(59)$$

$$\Psi_o(z)=\Gamma'+\sum_{j=1}^{k_1^*}\left[\frac{\kappa(P_j-iQ_{j)}}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{z-z_j{}^*}-\frac{\overline{z_j^*}(P_j+iQ_{j)}}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{(z-z_j^*)^2}\right]-$$

$$\sum_{j=1}^{k_2}\frac{M_j}{2\pi}\frac{1}{(z-z_j^{**})^2}-\frac{\beta}{1+\kappa}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{2\pi\lambda^*}\frac{\overline{a_j}}{z-a_j}+\Psi(z)\qquad(60)$$

where $\Gamma=\frac{1}{4}(N_1+N_2)\quad \Gamma'=-\frac{1}{2}(N_1-N_2)$ (61)

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{G_{1j}(\tau)}{\tau-z}d\tau+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int_{Lj}\frac{G_{2j}(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{G_{3j}(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

$G_{1j}(t),\ G_{2j}(t),\ G_{3j}(t)$ denote the densities on l_j, L_j and γ_j, respectively.

By virtue of the boundary conditions Eqs. (44)-(46) and Eq. (48), as well as Muskhelishvilli formulae, we get the following integral representation for $\Psi(z)$:

$$\Psi(z)=\sum_{j=1}^{M}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{l_l}\frac{q_{1j}(\tau)}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\overline{G_{1j}(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\bar{\tau}G_{1j}(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau\right]+$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\kappa}{2\pi i}\int_{L_J}\frac{\overline{G_{2j}(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\bar{\tau}G_{2j}}{(\tau-z)^2}d\tau\right]+\qquad(62)$$

$$\sum_{j=1}^{L}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{q_{1j}^*(\tau)}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{\overline{G_{3j}(\tau)}}{\tau-z}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{\bar{\tau}G_{3j}}{(\tau-z)^2}d\tau\right]$$

where: $q_{1j}(t)=(\sigma_n^+-\sigma_n^-)-i(\sigma_t^+-\sigma_t^-),\quad t\in l_j,\quad j=\overline{1,M}$

$q_{1j}^*(t)=(\sigma_n-i\sigma_t),\quad t\in\gamma_j,\quad j=\overline{1,L}$

The combination of boundary conditions (44) and (46), with the Muskhelishvilli formulae and Sohotsky-Plemelj formulae [1] for the integral representations of $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ and $F_*(z)$, gives the following system of singular equations: $t\in l_k$, $k=\overline{1,M}$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{l_k}\frac{G_{1k}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{l_k}\frac{\overline{G_{1k}(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\overline{d\tau}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{l_k}\frac{\overline{G_{1k}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\frac{1}{2\pi i}\int_{l_k}\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2}G_{1k}(\tau)d\tau\right]+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{M}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{l_{jk}}\frac{G_{1j}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{l_j}\frac{\overline{G_{1j}(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\overline{d\tau}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{l_j}\frac{\overline{G_{1j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\pi i}\int_{l_j}\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2}G_{1j}(\tau)d\tau\right]\right]+\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L_{jk}}\frac{G_{2j}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{L_j}\frac{\overline{G_{2j}(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\overline{d\tau}-\right.$$

$$\left.-\frac{dt}{\overline{dt}}\left[-\frac{\kappa}{\pi i}\int_{L_j}\frac{\overline{G_{2j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\frac{1}{\pi i}\int_{L_j}\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2}G_{2j}(\tau)d\tau\right]\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{L}\left[\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{G_{3j}(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{\overline{G_{3j}(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\overline{d\tau}-\right.$$

$$\left.-\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{\overline{G_{3j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}-\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{(\tau-t)^2}G_{3j}(\tau)d\tau\right]\right]=$$

$$=A_{1k}(t,\bar{t})-\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{l_k}\frac{q_{1k}(\tau)}{\tau-t}\overline{d\tau}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{M}\frac{1}{\pi i}\int_{l_j}\frac{q_{1j}(\tau)}{\tau-t}\overline{d\tau}+\sum_{j=1}^{L}\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{q_{1j}^{*}(\tau)}{\tau-t}\overline{d\tau}\right], \tag{63}$$

Using the boundary conditions (46) we have relative integral equations along the boundaries of the hole γ_j.

and $t\in L_k$, $k=\overline{1,n_1'}$

$$ih[(\kappa+1)G_{2k}(t)+\beta\phi_{2k}(t)]+\frac{E^{(k)}S^{(k)}}{E}ie^{i\theta_k}\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}\left[\frac{3-\nu-\kappa(1+\nu)}{2}G_{2k}(t)-\frac{\beta(1+\nu)}{2}\phi_{2k}(t)+\right.\right.$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\int_{L_k}\frac{G_{2k}(\tau)}{\tau-t}d\tau-(1+\nu)\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{\kappa}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\overline{G_{2k}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{(\bar{\tau}-\bar{t})G_{2k}(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau\right.$$

$$\left.+\frac{\beta}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\overline{\phi_{2k}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}\right]+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\left[\frac{1-\nu}{\pi i}\int_{L_j}\frac{G_{2j}(\tau)}{\tau-t}d\tau-(1+\nu)\frac{dt}{\overline{dt}}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\kappa}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\overline{G_{2j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{(\bar{\tau}-\bar{t})G_{2k}(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau+\frac{\beta}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\overline{\phi_{2k}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}\right]\right]+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{N}\left[\frac{1-\nu}{\pi i}\int_{L_j}\frac{G_{2j}(\tau)}{\tau-t}d\tau-(1+\nu)\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{\kappa}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\overline{G_{2j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{(\overline{\tau}-\overline{t})G_{2j}(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\beta}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\overline{\phi_{2j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}\right]\right]+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{M}\left[\frac{1-\nu}{\pi i}\int_{L_j}\frac{G_{1j}(\tau)}{\tau-t}d\tau+(1+\nu)\frac{dt}{\overline{dt}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\overline{G_{1j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{(\overline{\tau}-\overline{t})G_{1j}(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau\right]\right]+\sum_{j=1}^{L}\left[\frac{1-\nu}{\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{G_{3j}(\tau)}{\tau-t}d\tau+(1+\nu)\frac{dt}{\overline{dt}}\times\right.$$

$$\left.\left.\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{\overline{G_{3j}(\tau)}}{\tau-t}\overline{d\tau}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{(\tau-t)^2}G_{3j}(\tau)d\tau\right]\right]\right)=A_{2k}(t,\overline{t}) \qquad (64)$$

$$A_{1k}(t,\overline{t})=(\sigma_n^{+}+\sigma_n^{-})-i(\sigma_t^{+}+\sigma_t^{-})-2\left(\Gamma+\overline{\Gamma}+\frac{dt}{\overline{dt}}\Gamma'\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k_1}\left[2\,\mathrm{Re}\frac{P_j+iQ_j}{\pi(1+\kappa)}\frac{1}{t-z_j^*}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{\kappa(P_j+iQ_j)}{\pi(1+\kappa)}\frac{1}{t-z_j^*}+\frac{P_j+iQ_j}{\pi(1+\kappa)}\frac{\overline{t}-\overline{z_j^*}}{t-z_j^*}\right]\right]-$$

$$-i\sum_{j=1}^{k_2}\frac{dt}{\overline{dt}}\frac{M_j}{\pi}\frac{1}{(t-z_j^{**})^2}-\frac{\beta}{1+\kappa}\sum_{j=1}^{k_3}\frac{q_j}{2\pi\lambda}\left[\mathrm{Re}\ln(t-a_j)+\frac{dt}{\overline{dt}}\frac{\overline{t}-\overline{a_j}}{t-a_j}\right]$$

$$A_{2k}(t,\overline{t})=\frac{E^{(k)}S^{(k)}}{E}ie^{i\theta_k}\frac{d}{\overline{dt}}\mathrm{Re}\left[\frac{dt}{\overline{dt}}\left(\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{\pi i}\int_{l_j}\frac{q_{1j}(\tau)}{\tau-t}\overline{d\tau}+\sum_{j=1}^{L}\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{q_{1j}^{*}(\tau)}{\tau-t}\overline{d\tau}\right)\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{k_1}(1-\nu)\frac{P_j+iQ_j}{\pi(1+\kappa)}\frac{1}{t-z_j^*}-\frac{dt}{\overline{dt}}\left(\frac{\kappa(P-iQ_j)}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{t-z_j^*}+\frac{P_j+iQ_j}{2\pi(1+\kappa)}\frac{\overline{t}-\overline{z_j^*}}{t-z_j^*}\right)-$$

$$-i\sum_{j=1}^{k_2}\frac{dt}{\overline{dt}}\frac{M_j}{2\pi}\frac{1}{(t-z_j^{**})^2}-\frac{\beta}{1+\kappa}\sum_{j=1}^{k_3}\frac{q_j}{2\pi\lambda}\left[2(1-\nu)\ln(t-a_j)+\frac{dt}{\overline{dt}}\frac{\overline{t}-\overline{a_j}}{t-a_j}\right]$$

If we use the boundary conditions (48)-(49) for the curvilinear stringer, we take another two relative integral equations.

Finally, the system of integro-differential equations (60), (61) is augmented with the conditions for singlevaluedness of the displacement along l_k $\left(k=\overline{1,M}\right)$:

$$\int_{l_k}G_{1k}(t)\,dt=\frac{1}{1+\kappa}\int_{l_k}\overline{q_{1k}(t)}\,dt-\frac{\beta}{1+\kappa}\int_{l_k}\varphi_{1k}(t)\,dt,\quad t\in l_k,\quad k=\overline{(1,M)} \qquad (65)$$

The densities $G_{1k}(t)$, $G_{2k}(t)$, $G_{3k}(t)$ on the cracks, stringers and holes, respectively, are expressed as follows:

$$G_{1k}(t)=\frac{q_{1k}(t)}{1+\kappa}+g_{1k}(t)-\frac{\beta}{1+\kappa}\phi_{1k}(t),\qquad t\in l_k,\quad k=\overline{1,M}, \qquad (66)$$

$$G_{2k}(t)=\frac{i(\sigma_t^+-\sigma_t^-)}{1+\kappa}-\frac{\beta}{1+\kappa}\phi_{2k}(t), \qquad t\in L_k, \quad k=\overline{1,N},$$

$$G_{3k}(t)=\frac{q_{1k}^*(t)}{1+\kappa}+g_{3k}(t)-\frac{\beta}{1+\kappa}\phi_{3k}(t), \qquad t\in \gamma_k, \quad k=\overline{1,L},$$

$$g_{1k}(t)=\frac{2\mu}{1+\kappa}\frac{d}{dt}\left[(u^+(t)-u^-(t))+i(\upsilon^+(t)-\upsilon^-(t))\right],\ g_{3k}(t)=\frac{2\mu}{1+\kappa}\frac{d}{dt}(u(t)+i\upsilon(t)).$$

6. NUMERICAL APPLICATION

As examples of application of the method developed we present two different problems. We assume an infinite plate which contains one rectilinear crack of a length l .The Ox axis coincides with the axis of the crack and its origin with the mid-point of the crack. The plate is under the influence of homogeneous flux heat q_∞ at infinity. Furthermore, heat sources $+q_1,-q_1$, $+q_2,-q_2$ act at points $(a_{1,0})$, $(-a_{1,}0)$ $(0,a_2)$ and $(0,-a_2)$ respectively. The behavior of the stress intensity factors is given below:

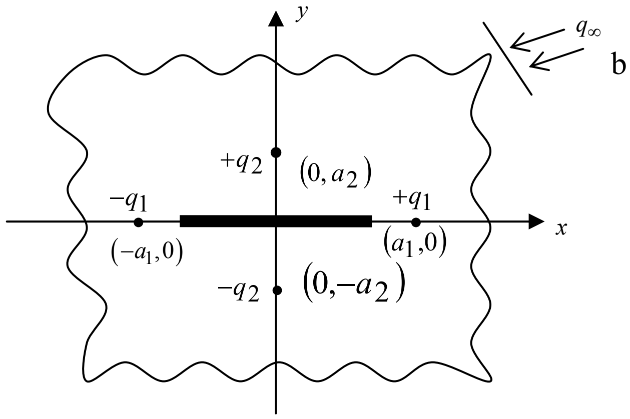
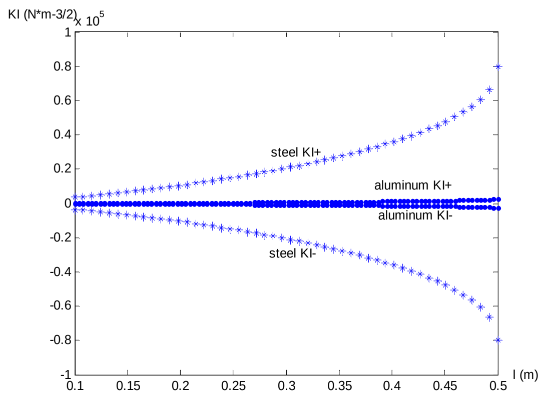
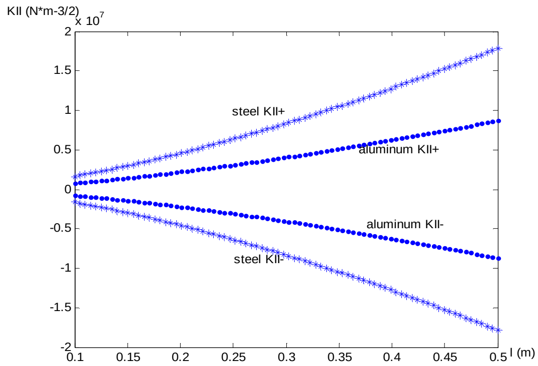


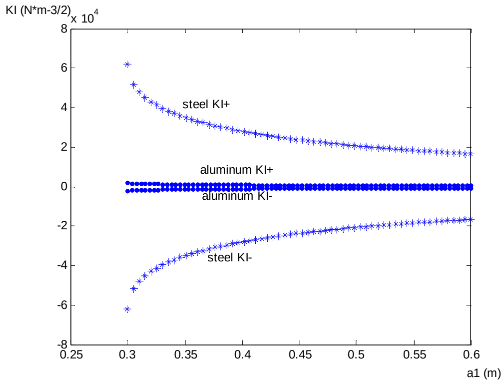
Fig. 3 Infinite plate under the influence of thermal field



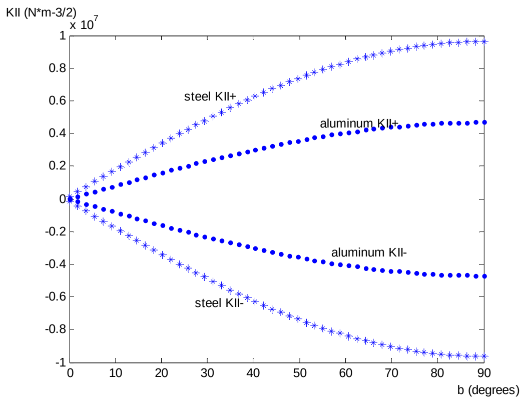
Fig(3a): The variation of K_I stress intensity factor when the length of the crack is increasing



Fig(3b):The variation of K_{II} stress intensity factor when the length of the crack is increasing



Fig(3c): The variation of K_I intensity factor when the distance of the heat source of the point O, is increasing



Fig(3d): The variation of K_{II} intensity factor, when the angle b is increasing

In sequel we assume an infinite plate which contains three rectilinear cracks of lengths $l_1 = 1m, l_2 = 0.2m, l_3 = 0.2m$. The Ox axis coincides with the axis of the crack l_1 and its origin with the mid-point of the crack. The crack l_2 is perpendicular to Ox axis at 0.5. The crack l_3 is parallel to Ox axis, and its mid-point is at point $(0.5,-0.2)$. The plate is submitted to stress $N_2 = 9.81 \cdot 10^4 N/m^2$ at infinity. Heat sources act near the lips of each of the cracks l_2 and l_3.

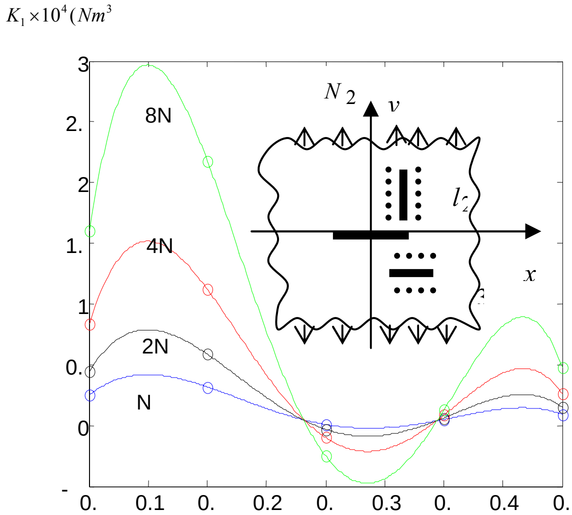
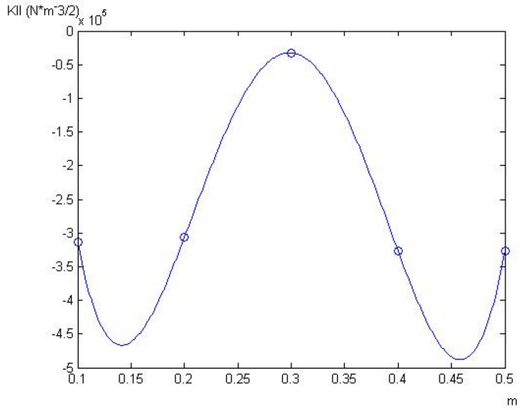


Fig (4a): The variation of K_I stress intensity factor , when the distance of the mid-point of l_2 from Ox axis is increasing.



Fig(4b): The variation of K_{II} stress intensity factor, when the distance of the mid-point of l_2 from Ox axis increasing.

The numerical solution of the singular integral equations, based on the substitution of the integrals by a discrete analogue. The discrete points used (both integration and collocation points) are the notes of an approximate formulae and they are determined on the basis of some functional relation.

7. CONCLUDING REMARKS

Basing on the method of complex functions and the theory of singular integral equations, a general method was proposed for solving plane thermoelasticity and thermo conductivity problems for cracked, isotropic or anisotropic, multiply connected bodies with linear and curvilinear stringers.

Many important engineering problems can be solved by the above general method, such as the body with a partially of fully supported hole and periodic linear and circularly symmetric arrays of cracks, stringers, inclusions etc., as well as other plane elastic problems of a generic geometry which may be encountered in actual engineering applications. It is obvious that the important aspect of prediction of the behavior of a body under the influence of existing singularities inside the mechanical and thermal fields of forces can be considered by using the proposed method.

Furthermore, the principles and procedures of the method can be effectively applied to extend it to a large category of problems, such as bodies with inclusions and bodies in contact containing or not a s system of cracks.

The work was carried out in the framework of an agreement on scientific cooperation between the National Technical University of Athens and the Institute of Mechanics, national Academy of Sciences (NAS) of Armenia.

REFERENCES

1. N.I.MUSKHELISHVILI, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, P.Noordhoff, Groningen 1965.
2. N.I.MUSKHELISHVILI, Singular integral equations, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen 1958.
3. F.D. GAKHOV, Boundary value problems, Pergamon, Oxford 1966.
4. P.S. THEOCARIS, D. BARDZOKAS and V.Z. PARTON, Plane problems of the theory of elasticity, thermoelasticity and thermo conductivity for cracked isotropic or anisotropic bodies with reinforcements [in Greek], Minutes of the Academy of Athens, 65, 206-236,1990.
5. H.S. CARSLAW and J.C. JAEGER, Conduction of heat in solids, 2nd Edition, Clarendon Press, Oxford 1959.
6. Alexandrov V.M., Mkhitaryan S.M. (1983).”Contact problems for bodies with covers and layers”. Moscow, Nauka (in Russian).
7. I.S. PODSTRIGACH, Influence of inhomogeneous inclusions on the distribution of thermal fields and stresses in elastic bodies [in Russian], Stress Concentration, 1, 207-218, 1965.
8. P.S. THEOCARIS and D. BARDZOKAS, The influence of a finite stringer on the stress intensities around cracks in plates, Eng. Fract. Mech., 14, 493-507, 1981.
9. P.S. THEOCARIS and D. BARDZOKAS, Reinforcement of cracked plate by a loaded strip inclusion, Ing. Achiv, 55, 45-56, 1985.
10. D. BARDZOKAS, V.Z. PARTON and P.S. THEOCARIS, Integral equations of the theory of elasticity for the multiply connected bodies with inclusions [in Russian], P.M.M , 53, 3, 485-495, 1989.

National Technical University of Athens
School of Applied Mathematical and Physical Sciences
Department of Mechanics
Laboratory of Testing and Materials 5,
Heroes of Polytechniou Avenue, Theoharis Building
Zografou Campus, 157 73 Athens HELLAS

Поступила в редакцию
17.02.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Агаловян М.Л.

Ключевые слова: общая анизотропия, полоса, свободные колебания, частота, асимптотика.
Key words: general anisotropic, strip, free vibration, frequence, asimptotics.

Մ.Լ.Աղալովյան
Անիզոտրոպ շերտի սեփական տատանումների ասիմպտոտիկան

Ուսումնասիրված են իր հարթության մեջ ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված շերտի սեփական տատանումները, երբ շերտի երկայնական նիստերից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ հակադիր նիստը ազատ է, կամ կոշտ ամրակցված: Ասիմպտոտիկ մեթոդով արտածված են բնութագրիչ հավասարումներ սեփական տատանումների հաճախությունները որոշելու համար: Ապացուցված է, որ շերտում կարող են առաջանալ երկու տիպի սեփական տատանումներ: Սակայն, ի տարբերություն իզոտրոպ և օրթոտրոպ շերտերի, տատանումները չեն հանդիսանում մաքուր սահքային և երկայնական: Որոշված են տատանումների ձևերը: Ցույց է տրված, որ յուրաքանչյուր դեպքի համար սեփական ֆունկցիաները կազմում են օրթոնորմալ համակարգ:

M.L.Aghalovyan
Asimptotics of free vibrations of anisotropic strip

Free vibrations of strip which has general anisotropy in his plane are investigated, then one of the faces is rigidly fastened, the opposite free, or rigidly fastened. Characteristic equations for determining frequencies of free vibrations are derived by the asymptotic method. It′s proved that two types of own vibrations are arising in the strip. But in contrast to isotropic and ortotropic strips vibrations are not purely shear and purely longitudinal. The forms of own vibrations are determined. It′s shown that for each case eigenfunctions formed ortonormalized system.

Исследованы собственные колебания полосы, обладающей общей анизотропией в своей плоскости, когда одна из лицевых граней жестко закреплена, а противоположная грань свободна или жестко закреплена. Асимптотическим методом выведены характеристические уравнения для определения частот собственных колебаний. Доказано, что в полосе возникают два типа собственных колебаний. Однако, в отличие от изотропных и ортотропных полос, колебания не являются чисто сдвиговыми или чисто продольными. Определены формы собственных колебаний. Показано, что при каждом случае собственные функции образуют ортонормированную систему.

1.Основные соотношения и постановка задач. Для решения динамических задач теории упругости для тонких тел (балки, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Этим методом решен ряд задач о собственных и вынужденных колебаниях ортотропных балок, пластин и оболочек [1-4]. В [5,6] рассмотрены вынужденные колебания пластин с общей анизотропией при серии граничных условий на лицевых поверхностях пластинки.

В работе рассмотрены собственные колебания полосы, обладающей общей анизотропией в своей плоскости.

Требуется найти в области $D=\{(x,y):0\le x\le l\ ,\ -h\le y\le h\ ,\ h\ll l\}$ ненулевые решения динамических уравнений теории упругости:
уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

соотношения упругости

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{16}\sigma_{xy}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}=a_{12}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{26}\sigma_{xy} \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}=a_{16}\sigma_{xx}+a_{26}\sigma_{yy}+a_{66}\sigma_{xy}$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$u_x\left(y=-h\right)=0,\quad u_y\left(y=-h\right)=0 \qquad (1.3)$$

$$\sigma_{xy}\left(y=h\right)=0,\quad \sigma_{yy}\left(y=h\right)=0 \qquad (1.4)$$

или

$$u_x\left(y=h\right)=0,\quad u_y\left(y=h\right)=0 \qquad (1.5)$$

2. Общий интеграл поставленных задач на собственные значения. Решение сформулированных задач будем искать в виде

$$\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}=\left(\sigma_{11}\left(x,y\right),\ \sigma_{12}\left(x,y\right),\ \sigma_{22}\left(x,y\right)\right)\exp\left(i\omega t\right),$$

$$u_x,u_y=\left(\bar{u}_x\left(x,y\right),\ \bar{u}_y\left(x,y\right)\right)\exp\left(i\omega t\right). \qquad (2.1)$$

Переходя к безразмерным переменным $\xi=x/l$, $\zeta=y/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $u=\bar{u}_x/l, v=\bar{u}_y/l$, решения задач сводятся к решению сингулярно-возмущенной малым параметром $\varepsilon=h/l$ системы

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2 u=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2 v=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{16}\sigma_{12} \qquad (2.2)$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial v}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{26}\sigma_{12}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial v}{\partial\xi}=a_{16}\sigma_{11}+a_{26}\sigma_{22}+a_{66}\sigma_{12}\quad,\ \omega_*^2=\rho h^2\omega^2\ ,$$

где ω – искомая частота собственных колебаний, a_{ik} – постоянные упругости, ρ – плотность.

Решение системы (2.2) представим в виде [7]

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{(s)} \ , \ i,j=1,2 \ , \ (u,v) = \varepsilon^{s}\left(U^{(s)}, V^{(s)}\right)$$
$$\omega_*^2 = \varepsilon^k \omega_{*k}^2 \ , \ k=\overline{0,N} \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.2), применив правило Коши умножения рядов, получим следующую рекуррентную систему для определения неизвестных коэффициентов $\sigma_{ik}^{(s)}$, $U^{(s)}$, $V^{(s)}$, ω_{*k}^2

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2 U^{(s-k)} = 0 \qquad k=\overline{0,s}$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2 V^{(s-k)} = 0$$
$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} = a_{11}\sigma_{11}^{(s)} + a_{12}\sigma_{22}^{(s)} + a_{16}\sigma_{12}^{(s)} \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{12}\sigma_{11}^{(s)} + a_{22}\sigma_{22}^{(s)} + a_{26}\sigma_{12}^{(s)}$$
$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi} = a_{16}\sigma_{11}^{(s)} + a_{26}\sigma_{22}^{(s)} + a_{66}\sigma_{12}^{(s)}$$

$Q^{(m)} \equiv 0$ при $m<0$, обозначение $k=\overline{0,s}$ всегда означает, что по немому (повторяющемуся) индексу „k” происходит суммирование в пределах целочисленных значений $0,s$.

Из последних трех уравнений системы (2.4) напряжения можно выразить через перемещения

$$\sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[A_{26}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} - A_{12}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} + A_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + A_{26}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]$$
$$\sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[A_{66}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} - A_{16}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} - A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} - A_{16}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right] \tag{2.5}$$
$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[A_{11}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} - A_{16}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} + A_{26}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + A_{11}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]$$

$A_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, $A_{22} = a_{22}a_{66} - a_{26}^2$, $A_{66} = a_{11}a_{66} - a_{16}^2$, $A_{12} = a_{12}a_{66} - a_{16}a_{26}$,
$A_{16} = a_{11}a_{26} - a_{12}a_{16}$, $A_{26} = a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22}$, $\Delta = A_{11}a_{66} - A_{16}a_{26} + A_{26}a_{16}$

Подставив (2.5) в первые два уравнения (2.4), для определения $U^{(s)}, V^{(s)}$ получим систему

$$A_{11}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} - A_{16}\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Delta\omega_{*k}^2 U^{(s-k)} = R_u^{(s)} \ , \ k=\overline{0,s}$$
$$-A_{16}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} + A_{66}\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Delta\omega_{*k}^2 V^{(s-k)} = R_v^{(s)} \tag{2.6}$$

где

$$R_u^{(s)} = -\Delta \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{26} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - A_{11} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}$$

$$R_v^{(s)} = -\Delta \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{16} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \qquad (2.7)$$

Для ортотропной полосы

$$A_{16} = 0\ ,\ A_{26} = 0\ ,\ A_{66} = a_{11} a_{66}\ ,\ \Delta = A_{11} a_{66} \qquad (2.8)$$

и система (2.6) распадается на два независимых при $s = 0$ уравнения

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66} \omega_{*k}^2 U^{(s-k)} = \frac{1}{A_{11}} R_u^{(s)} \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{A_{11}}{a_{11}} \omega_{*k}^2 V^{(s-k)} = \frac{1}{A_{66}} R_v^{(s)} \qquad (2.10)$$

Этот случай подробно рассмотрен в [7].

В частности, установлено, что условиям (1.3), (1.4) соответствуют собственные главные значения частот

$$\omega_{*on}^{I} = \frac{\pi}{4\sqrt{a_{66}}}\left(2n+1\right),\ \omega_{*on}^{II} = \frac{\pi}{4\sqrt{B_{11}}}\left(2n+1\right),\ n \in N$$

$$B_{11} = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} = \frac{A_{11}}{a_{11}} \qquad (2.11)$$

и собственные функции

$$\psi_n^{I,II} = \sin \frac{\pi}{4}\left(2n+1\right)\left(1+\zeta\right) \qquad (2.12)$$

которые составляют ортонормированную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$.

Условиям (1.3), (1.5) относительно u_x соответствуют характеристические уравнения и главные значения $\left(s = 0\right)$ частот:

а) $\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_{*0} = 0,\quad \omega_{*0n}^{I} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a_{66}}}\left(2n+1\right) \qquad n \in N$ (2.13)

(симметричная задача)

б) $\sin\sqrt{a_{66}}\,\omega_{*0} = 0,\quad \omega_{*0n}^{I} = \dfrac{\pi n}{\sqrt{a_{66}}} \qquad n \in N$ (2.14)

(задача изгиба).

Собственными функциями являются

а) $\psi_n^{I}\left(\zeta\right) = \cos\dfrac{\pi}{2}\left(2n+1\right)\zeta$, б) $\varphi_n^{I}\left(\zeta\right) = \sin \pi n \zeta$, (2.15)

которые также составляют ортонормированные системы.

Условиям $u_y\left(\pm h\right) = 0$ соответствуют

а) $\sin \omega_{*0}\sqrt{B_{11}} = 0,\quad \omega_{*0n}^{II} = \dfrac{\pi n}{\sqrt{B_{11}}}$, $n \in N$ (симметричная задача) (2.16) б) $\cos\omega_{*0}\sqrt{B_{11}} = 0,\quad \omega_{*0n}^{II} = \dfrac{\pi(2n+1)}{2\sqrt{B_{11}}}$, $n \in N$ (задача изгиба) (2.17)

и собственные функции $\varphi_n^I(\zeta)$ и $\psi_n^I(\zeta)$.

Частотам (2.13), (2.14) соответствуют собственные сдвиговые, а частотам (2.16), (2.17) – продольные колебания.

Будем считать, что $A_{16} \neq 0$, $A_{26} \neq 0$. Тогда система уравнений (2.6) должна быть решена совместно. Из этой системы $V^{(s)}$ можно выразить через $U^{(s)}$ по формуле

$$\Delta\omega_{*0}^2 V^{(s)} = -\frac{A_{11}A_{66} - A_{16}^2}{A_{16}}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} - \frac{A_{66}}{A_{16}}\Delta\omega_{*0}^2 U^{(s)} +$$
$$+\frac{A_{66}}{A_{16}}\left(R_u^{(s)} - \Delta\omega_{*m}^2 U^{(s-m)}\right) + R_v^{(s)} - \Delta\omega_{*m}^2 V^{(s-m)}\ ,\ m = \overline{1,s} \tag{2.18}$$

Подставив (2.18) в первое уравнение (2.6), получим уравнение для определения $U^{(s)}$

$$\left(A_{11}A_{66} - A_{16}^2\right)\frac{\partial^4 U^{(s)}}{\partial\zeta^4} + \left(A_{11} + A_{66}\right)\Delta\omega_{*0}^2\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Delta^2\omega_{*0}^4 U^{(s)} =$$
$$= \Delta\omega_{*0}^2\left(R_u^{(s)} - \Delta\omega_{*m}^2 U^{(s-m)}\right) + A_{66}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(R_u^{(s)} - \Delta\omega_{*m}^2 U^{(s-m)}\right) + \tag{2.19}$$
$$+A_{16}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(R_v^{(s)} - \Delta\omega_{*m}^2 V^{(s-m)}\right),\ m = \overline{1,s}$$

Рассмотрим приближение $s = 0$, ему соответствует

$$\left(A_{11}A_{66} - A_{16}^2\right)\frac{\partial^4 U^{(0)}}{\partial\zeta^4} + \left(A_{11} + A_{66}\right)\Delta\omega_{*0}^2\frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial\zeta^2} + \Delta^2\omega_{*0}^4 U^{(0)} = 0 \tag{2.20}$$

Решением уравнения (2.20) является

$$U^{(0)} = A^{(0)}\sin\alpha_1\zeta + B^{(0)}\cos\alpha_1\zeta + C^{(0)}\sin\alpha_2\zeta + D^{(0)}\cos\alpha_2\zeta \tag{2.21}$$

где

$$\alpha_1 = \beta_1\sqrt{\Delta}\omega_{*0}\ ,\ \alpha_2 = \beta_2\sqrt{\Delta}\omega_{*0} \tag{2.22}$$

$$\beta_1^2 = \frac{A_{11} + A_{66} - \sqrt{\left(A_{11} - A_{66}\right)^2 + 4A_{16}^2}}{2\left(A_{11}A_{66} - A_{16}^2\right)},\ \beta_2^2 = \frac{A_{11} + A_{66} + \sqrt{\left(A_{11} - A_{66}\right)^2 + 4A_{16}^2}}{2\left(A_{11}A_{66} - A_{16}^2\right)}$$

β_1, β_2 – вещественные числа.

Согласно формулам (2.5), (2.18)

$$\sigma_{12}^{(0)} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(A_{11} + A_{66}\right)\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta} + \frac{A_{11}A_{66} - A_{16}^2}{\Delta\omega_{*0}^2}\frac{\partial^3 U^{(0)}}{\partial\zeta^3}\right]$$
$$\sigma_{22}^{(0)} = -\frac{1}{\Delta A_{16}}\left[A_{66}\frac{A_{11}A_{66} - A_{16}^2}{\Delta\omega_{*n}^2}\frac{\partial^3 U^{(0)}}{\partial\zeta^3} + \left(A_{66}^2 + A_{16}^2\right)\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta}\right] \tag{2.23}$$

$$\Delta\omega_{*0}^2 V^{(0)} = -\frac{1}{A_{16}}\left[\left(A_{11}A_{66} - A_{16}^2\right)\frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial \zeta^2} + A_{66}\Delta\omega_{*0}^2 U^{(0)}\right]$$

Используя формулы (2.21), (2.23), удовлетворим условия (1.3), (1.4):

$$\sigma_{12}^{(0)}\left(\zeta = 1\right) = 0,\ \sigma_{22}^{(0)}\left(\zeta = 1\right) = 0\ ,\ U^{(0)}\left(\zeta = -1\right) = 0\ ,\ V^{(0)}\left(\zeta = -1\right) = 0 \quad (2.24)$$

получим следующую алгебраическую однородную систему:

$$\begin{aligned}
&A^{(0)}\sin\alpha_1 - B^{(0)}\cos\alpha_1 + C^{(0)}\sin\alpha_2 - D^{(0)}\cos\alpha_2 = 0\\
&A^{(0)}c_1\cos\alpha_1 - B^{(0)}c_1\sin\alpha_1 + C^{(0)}c_2\cos\alpha_2 - D^{(0)}c_2\sin\alpha_2 = 0\\
&A^{(0)}c_3\cos\alpha_1 - B^{(0)}c_3\sin\alpha_1 + C^{(0)}c_4\cos\alpha_2 - D^{(0)}c_4\sin\alpha_2 = 0\\
&A^{(0)}c_5\sin\alpha_1 - B^{(0)}c_5\cos\alpha_1 + C^{(0)}c_6\sin\alpha_2 - D^{(0)}c_6\cos\alpha_2 = 0
\end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned}
&c_1 = \beta_1\left(A_{11} + A_{66} - \beta_1^2 b_1^2\right),\quad c_2 = \beta_2\left(A_{11} + A_{66} - \beta_2^2 b_1^2\right),\\
&c_3 = \beta_1\left(A_{66}^2 + A_{16}^2 - A_{66}b_1^2\beta_1^2\right),\ c_4 = \beta_2\left(A_{66}^2 + A_{16}^2 - A_{66}b_1^2\beta_2^2\right),\\
&c_5 = \left(b_1^2\beta_1^2 - A_{66}\right),\ c_6 = \left(b_1^2\beta_2^2 - A_{66}\right),\ b_1^2 = A_{11}A_{66} - A_{16}^2.
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Систему (2.25) можно свести к двум алгебраическим системам относительно $A^{(0)}$, $B^{(0)}$ и $C^{(0)}$, $D^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
&A^{(0)}\sin\alpha_1 - B^{(0)}\cos\alpha_1 = 0\\
&A^{(0)}\cos\alpha_1 - B^{(0)}\sin\alpha_1 = 0
\end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
&C^{(0)}\cos\alpha_2 - D^{(0)}\sin\alpha_2 = 0\\
&C^{(0)}\sin\alpha_2 - D^{(0)}\cos\alpha_2 = 0
\end{aligned} \quad (2.28)$$

Для существования ненулевых решений систем (2.27) и (2.28) необходимо, чтобы их определители были равны нулю. В результате будем иметь следующие уравнения и соответствующие им значения частот:

$$\cos 2\alpha_1 = 0\ ,\ \alpha_1 = \frac{\pi}{4}\left(2n+1\right),\ \omega_{*0n}^{I} = \frac{\pi}{4\beta_1\sqrt{\Delta}}\left(2n+1\right),\ n \in N\ , \quad (2.29)$$

$$\cos 2\alpha_2 = 0\ ,\ \alpha_2 = \frac{\pi}{4}\left(2m+1\right),\ \omega_{*0m}^{II} = \frac{\pi}{4\beta_2\sqrt{\Delta}}\left(2m+1\right),\ n \in N \quad (2.30)$$

Учитывая (2.29), (2.30), из (2.27) и (2.28) будут следовать

$$B_n^{(0)} = A_n^{(0)} tg\alpha_1 = A_n^{(0)} tg\frac{\pi}{4}\left(2n+1\right) = \left(-1\right)^n A_n^{(0)}$$

$$C_m^{(0)} = \left(-1\right)^m D_m^{(0)} \quad (2.31)$$

Таким образом, в полосе с общей анизотропией возникают два типа собственных колебаний с частотами, соответственно (2.29), (2.30), которым будут соответствовать собственные функции

$$U_{nI}^{(0)} = A_n^{(0)}\left(\xi\right)\psi_n\left(\zeta\right),\ \psi_n\left(\zeta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\frac{\pi}{4}\left(2n+1\right)\zeta + \left(-1\right)^n\cos\frac{\pi}{4}\left(2n+1\right)\zeta\right]$$

$$U_{nII}^{(0)}=C_n^{(0)}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\alpha_2\zeta+(-1)^n\cos\alpha_2\zeta\right]=C_n^{(0)}\psi_n(\zeta) \tag{2.32}$$

Легко убедиться, что функции $\psi_n(\zeta)$ составляют ортонормированную систему на интервале $-1\le\zeta\le1.$

Отметим, что в отличие от случая ортотропной полосы, собственные колебания анизотропной полосы в силу (2.29), (2.30), (2.22), (2.5) не являются чисто сдвиговыми или чисто продольными.

Напряжения и перемещения $V^{(0)}$ будут определены по формулам (2.5), (2.23).

3. **О приближениях** $s\ge1.$ При $s=1$ необходимо решать уравнение (2.19) для каждой из групп значений, собственных частот ω_{*0n}^{I} , ω_{*0n}^{II}. Для $s=1$ уравнение (2.19) записывается

$$\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^2\right)\frac{\partial^4U^{(1)}}{\partial\zeta^4}+\left(A_{11}+A_{66}\right)\Delta\omega_{*0}^2\frac{\partial^2U^{(1)}}{\partial\zeta^2}+\Delta^2\omega_{*0}^4U^{(1)}+ \tag{3.1}$$

$$+\Delta\omega_{*1}^2\left(\Delta\omega_{*0}^2U^{(0)}+A_{66}\frac{\partial^2U^{(0)}}{\partial\zeta^2}+A_{16}\frac{\partial^2V^{(0)}}{\partial\zeta^2}\right)=\Delta\omega_{*0}^2R_u^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(A_{66}R_u^{(1)}+A_{16}R_v^{(1)}\right)$$

где

$$R_u^{(1)}=-\Delta\frac{\partial\sigma_{11}^{(0)}}{\partial\xi}-\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}\left(A_{26}U^{(0)}+A_{11}V^{(0)}\right),$$

$$R_v^{(1)}=-\Delta\frac{\partial\sigma_{12}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}\left(A_{12}U^{(0)}+A_{16}V^{(0)}\right), \tag{3.2}$$

$$\sigma_{11}^{(0)}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[A_{26}U^{(0)}-A_{12}V^{(0)}\right],\quad \sigma_{12}^{(0)}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[A_{11}U^{(0)}-A_{16}V^{(0)}\right]$$

Пусть $\omega_{*0n}=\omega_{*0n}^{I}=\dfrac{\pi}{4\beta_1\sqrt{\Delta}}(2n+1).$

Уравнение (3.1) запишем в виде

$$\begin{gathered}\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^2\right)\frac{\partial^4U_{nI}^{(1)}}{\partial\zeta^4}+\left(A_{11}+A_{66}\right)\Delta(\omega_{*0n}^{I})^2\frac{\partial^2U_{nI}^{(1)}}{\partial\zeta^2}+\\ +\Delta^2(\omega_{*0n}^{I})^4U_{nI}^{(1)}+\Delta(\omega_{*1n}^{I})^2\cdot f_{nI}^{(0)}=R_{uvnI}^{(1)}\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}f_{nI}^{(0)}=\Delta(\omega_{*0n}^{I})^2U_{nI}^{(0)}+A_{66}\frac{\partial^2U_{nI}^{(0)}}{\partial\zeta^2}+A_{16}\frac{\partial^2V_{nI}^{(0)}}{\partial\zeta^2}\\ R_{uvnI}^{(1)}=\Delta(\omega_{*0n}^{I})^2R_{unI}^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(A_{66}R_{unI}^{(1)}+A_{16}R_{vnI}^{(1)}\right)\end{gathered} \tag{3.4}$$

Используя формулы (2.23), (2.32), (3.2), (3.4), будем иметь

$$f_{nI}^{(0)}=\left(\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2-\frac{A_{11}A_{66}-A_{16}^2}{\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2}\alpha_{1n}^4\right)A_n^{(0)}(\xi)\psi_n(\zeta)$$

$$R_{uvnI}^{(1)} = \frac{1}{A_{16}}\left\{\left[A_{66}\left(A_{11}-A_{12}\right)-2A_{16}A_{26}\right]\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2 + \right.$$

$$+\left[\left(A_{11}-A_{12}\right)\left(2A_{16}^2 - A_{11}A_{66} - A_{66}^2\right) + 2A_{16}A_{66}\left(A_{26}+A_{16}\right)\right]\alpha_{1n}^2 + \qquad (3.5)$$

$$\left. + \frac{1}{\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2}\left[A_{66}\left(A_{11}-A_{12}\right)-2A_{16}^2\right]\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^2\right)\alpha_{1n}^4\right\}\cdot\left[A_n^{(0)}(\xi)\right]'\psi_n'(\zeta)$$

Поскольку функции $\left\{\psi_n\left(\zeta\right)\right\}$ составляют ортонормированную систему, $U_{nI}^{(1)}$ будем искать в виде ряда по этим функциям [8,9]:

$$U_{nI}^{(1)} = a_{mn}^{(1)}(\xi)\psi_m(\zeta) \quad m = \overline{0,\infty} \qquad (3.6)$$

Подставив (3.6) в (3.3), умножив обе части полученного уравнения на $\psi_k\left(\zeta\right)$ и проинтегрировав в пределах $-1 \le \zeta \le 1$, с учетом (3.5), получим

$$\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^2\right)a_{mn}^{(1)}\alpha_{1m}^4\delta_{mk} - \left(A_{11}+A_{66}\right)\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2 a_{mn}^{(1)}\alpha_{1m}^2\delta_{mk} + \qquad (3.7)$$

$$+\Delta^2\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^4 a_{mn}^{(1)}\delta_{mk} + \Delta\left(\omega_{*1n}^{I}\right)^2\left[\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2 - \frac{A_{11}A_{66}-A_{16}^2}{\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2}\alpha_{1n}^4\right]A_n^{(0)}\delta_{nk} = \left(R_{uvnI}^{(1)}\right)_k$$

где δ_{mk} – символ Кронекера, а

$$\left(R_{uvnI}^{(1)}\right)_k = \int_{-1}^{1} R_{uvnI}^{(1)}\psi_k(\zeta)d\zeta \qquad (3.8)$$

При $k \ne n$ в (3.7) четвертое слагаемое обращается в нуль и имеем

$$a_{kn}^{(1)} = \frac{\left(R_{uvnI}^{(1)}\right)_k}{\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^2\right)a_{1k}^4 - \left(A_{11}+A_{66}\right)\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2 a_{1k}^2 + \Delta^2\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^4} \qquad (3.9)$$

При $k = n \ne m$ из (3.7) вытекает

$$\left(\omega_{*1n}^{I}\right)^2 = \frac{\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2\left(R_{uvnI}^{(1)}\right)_n}{\left[\Delta^2\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^4 - \left(A_{11}A_{66}-A_{16}^2\right)\alpha_{1n}^4\right]A_n^{(0)}} \qquad (3.10)$$

Таким образом, определены $a_{kn}^{(1)}$ при $k \ne n$ и $\omega_{*1n}^{(I)}$. Остается определить $a_{nn}^{(1)}$. Для его определения используем условие нормировки [8,9] :

$$\frac{1}{\left\|U_{nI}^{(0)}\right\|^2}\int_{-1}^{+1}\left(U_{nI}^{(0)} + \varepsilon U_{nI}^{(1)}\right)^2 d\zeta = 1 \qquad (3.11)$$

из (3.11) следуют условия

$$\frac{1}{\left\|U_{nI}^{(0)}\right\|^2}\int_{-1}^{1}\left(U_{nI}^{(0)}\right)^2 d\zeta = 1 \qquad (3.12)$$

$$\int_{-1}^{1} U_{nI}^{(0)} U_{nI}^{(1)} d\zeta = 0 \tag{3.13}$$

Условие (3.12) выполняется тождественно, а (3.13) записывается в виде

$$\int_{-1}^{1} a_{nn}^{(1)} \psi_n \psi_n d\zeta = 0 \tag{3.14}$$

откуда следует, что $a_{nn}^{(1)} = 0$.

Из (3.5), (3.8) следует, что $(R_{uvnI}^{(1)})_k \neq 0, \ (R_{uvnI}^{(1)})_n \neq 0$.

Следовательно, $U_{nI}^{(1)} \neq 0$, $\omega_{*1n}^{(I)} \neq 0$.

Ограничившысь первыми двумя приближениями, будем иметь

$$U_{nI} = U_{nI}^{(0)} + \varepsilon U_{nI}^{(1)} \ , \ \omega_{*n}^{(I)} = \omega_{*0n}^{I} + \varepsilon \omega_{*1n}^{I} \tag{3.15}$$

Отметим, что для ортотропной полосы [7] $U_{nI}^{(1)} = 0$, $\omega_{*1n}^{I} = 0$, т.е. поправка имеет порядок $0\left(\varepsilon^2\right)$, в то время, как в случае общей анизотропии поправка порядка $0\left(\varepsilon\right)$.

Аналогичным образом рассматриваются приближения $s \geq 2$, а также случаи, соответствующие значениям ω_{*0n}^{II} .

4. Основные соотношения, соответствующие условиям (1.3), (1.5). Используя формулы (2.21), (2.23), удовлетворим условиям (1.3), (1.5).

Удовлетворение этим условиям приводит к решению следующих алгебраических систем

$$\begin{cases} A^{(0)} \sin\alpha_1 + C^{(0)} \sin\alpha_2 = 0 \\ c_5 A^{(0)} \sin\alpha_1 + c_6 C^{(0)} \sin\alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} B^{(0)} \cos\alpha_1 + D^{(0)} \cos\alpha_2 = 0 \\ c_5 B^{(0)} \cos\alpha_1 + c_6 D^{(0)} \cos\alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Из (4.1) следуют:

а)
$$\begin{gathered} \sin\alpha_1 = 0 \Rightarrow \quad \alpha_1 = \pi n, \ \omega_{*on}^{I} = \frac{\pi n}{\beta_1\sqrt{\Delta}} \ , \ n \in N \\ U_{I}^{(0)} = A^{(0)} \sin \pi n\zeta \ , \quad B^{(0)} = C^{(0)} = D^{(0)} \equiv 0 \end{gathered} \tag{4.3}$$

б)
$$\begin{gathered} \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \quad \alpha_2 = \pi m, \ \omega_{*om}^{II} = \frac{\pi m}{\beta_2\sqrt{\Delta}} \ , \ m \in N \\ U_{II}^{(0)} = C^{(0)} \sin \pi m\zeta \ , \quad A^{(0)} = B^{(0)} = D^{(0)} \equiv 0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

а из (4.2) имеем

в)
$$\begin{gathered} \cos\alpha_1 = 0 \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1), \ \omega_{*on}^{III} = \frac{\pi}{2\beta_1\sqrt{\Delta}}(2n+1) \ , \ n \in N \\ U_{III}^{(0)} = B^{(0)} \cos\alpha_1\zeta = B^{(0)} \cos\frac{\pi}{2}\left(2n+1\right)\zeta, \ A^{(0)} = C^{(0)} = D^{(0)} \equiv 0 \end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\cos\alpha_2 = 0 \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}(2m+1), \quad \omega_{*om}^{IV} = \frac{\pi}{2\beta_2\sqrt{\Delta}}(2m+1), \; m \in N$$

г) (4.6)

$$U_{IV}^{(0)} = D^{(0)} \cos\frac{\pi}{2}(2m+1)\zeta, \; A^{(0)} = B^{(0)} = C^{(0)} \equiv 0$$

Функции $\{\sin\pi n\zeta\}$ составляют ортонормированную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$. Таким же свойством обладают функции $\left\{\cos\frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta\right\}$.

Приближения $s \ge 1$ рассматриваются изложенным в п.3 способом.

Качественная картина напряженно-деформированного состояния аналогична.

Аналогичным образом рассматриваются собственные колебания анизотропной полосы, порожденные другими вариантами граничных условий при $y = \pm h$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин.//Изв. ВУЗ-ов РФ, Северо-Кавказский регион. Естеств.науки. 2000. №3. С.8-11.
2. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. //Междунар. научн. журнал. Прикл. Механика. 2002. Т.38. №7. С.3-24.
3. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. Неклассические краевые задачи о собственных и вынужденных колебаниях анизотропных пластин.//В сб.:Механика оболочек и пластин (Тр.XIX Международной конф. по теории оболочек и пластин). Изд. Нижегородского университета. Нижний Новгород. 1999. С.16-20.
4. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. //ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.
5. Агаловян М.Л. Пространственная задача о вынужденных колебаниях пластин с общей анизотропией. //В сб.: Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд.„Гитутюн" НАН Армении. Ереван. 2006. С.42-49.
6. Агаловян М.Л. О характере вынужденных колебаний пластин при общей анизотропии. //В сб.: XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды. Изд. Саратовского университета. 2007. С.14-18.
7. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы. //Докл. НАН Армении. 2003. Т.103. №4. С.296-300.
8. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир,1976. 455с.
9. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
5.05.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

О ХАРАКТЕРЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЗОНЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Закарян Т.В.

Ключевые слова: пограничный слой, собственные колебания, анизотропия, частота.
Key words: boundary layer, free vibrations, anisotropic, frequencies.

Տ.Վ. Զաքարյան

Օրթոտրոպ շերտի սեփական տատանումների բնույթը սահմանային շերտում

Ուսումնասիրված են օրթոտրոպ շերտի սեփական տատանումները ուղղաձիգ եզրերի շրջակայքում՝ առաձգականության տեսության առաջին եզրային խնդրի դեպքում: Ցույց է տրված, որ սահմանային շերտում սեփական տատանումները ունեն մարող բնույթ՝ էքսպոնենցիալ օրենքով, արտածված է տրանսցենդենտ հավասարում որտեղից որոշվում են մարումը բնութագրող էքսպոնենցիալ ֆունկցիայի ցուցիչները: Ցույց է տրված, որ յուրաքանչյուր սեփական հաճախությանը համապատասխանում է մարող ֆունկցիաների իր դասը:

T.V.Zakaryan

On the Character of Free Vibrations in the Boundary Layer Zone of Orthotropic Strip

The characteristic vibrations in the boundary layer zone of orthotropic strip for first boundary-value problem of the elasticity theory are considered. It is showed that vibrations in the boundary layer zone are damping exponentially. The transcendental equation for finding the value of damping-rate exponents is deduced.

Рассмотрены собственные колебания в зоне пограничного слоя ортотропной полосы в первой краевой задаче теории упругости. Показано, что колебания в зоне пограничного слоя затухают экспоненциально. Выведено трансцендентное уравнение, откуда определяются значения показателей экспонент, характеризующие скорость затухания.

Первая статическая краевая задача теории упругости для ортотропной полосы асимптотическим методом решена в [1]. Была установлена связь полученного решения с классической теорией балок и стержней, а также с принципом Сен-Венана [1,2]. Первая краевая динамическая задача для изотропной полосы асимптотическим методом рассмотрена в [3]. Первая динамическая краевая задача для ортотропной полосы решена в [4,5]. Первая краевая внутренняя задача для двухслойной полосы решена в [6]. В этих работах было показано, что асимптотика для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения принципиально отличается от асимптотики в статической задаче. Была установлена новая асимптотика, позволившая найти общее асимптотическое решение динамической задачи. Собственные колебания ортотропной полосы во внутренней задаче рассмотрены в [7]. Показано, что возможны два типа собственных колебаний – сдвиговые и продольные, которым соответствуют различные группы собственных значений. Вторая и смешанная динамические краевые задачи асимптотическим методом для полос, пластин и оболочек рассмотрены в [8-11]. В настоящей работе рассмотрены собственные колебания в зоне пограничного слоя ортотропной полосы. Показано, что каждой собственной частоте соответствует свой класс пограничных функций.

1. **Основные уравнения и соотношения задачи.** Требуется найти такое решение динамических уравнений теории упругости для ортотропной полосы

$D=\{(x,y):\ 0\le x\le l,\ -h\le y\le h,\ h<<l\}$, которое локализовано вблизи торца $x=0$ и удовлетворяет нулевым условиям на продольных краях $y=\pm h$ для напряжений. Считается, что полоса находится в условиях плоской деформации. Решение динамических уравнений теории упругости:
уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\beta_{11}\sigma_{xx}+\beta_{12}\sigma_{yy},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\beta_{12}\sigma_{xx}+\beta_{22}\sigma_{yy},\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=a_{66}\sigma_{xy}, \tag{1.2}$$

$$\beta_{ij}=\frac{1}{a_{33}}\left(a_{ij}a_{33}-a_{i3}a_{j3}\right),\qquad i,j=1,2\ ,\quad a_{66}=\frac{1}{G_{12}},$$

будем искать в виде

$$\sigma_{xx}(x,y,t)=\sigma_{11}(x,y)\exp(i\omega t),\quad \sigma_{xy}(x,y,t)=\sigma_{12}(x,y)\exp(i\omega t)$$
$$\sigma_{yy}(x,y,t)=\sigma_{22}(x,y)\exp(i\omega t),\quad u(x,y,t)=u_x(x,y)\exp(i\omega t) \tag{1.3}$$
$$v(x,y,t)=u_y(x,y)\exp(i\omega t),$$

где ω – частота собственных колебаний.

2.Собственные колебания полосы в зоне пограничного слоя. Чтобы выявить характер собственных колебаний полосы в зоне пограничного слоя вблизи торца $x=0$, в уравнениях (1.1), (1.2) перейдем к безразмерным координатам $\eta=x/h,\ \zeta=y/h$ и безразмерным перемещениям $U=u_x/l,\ V=u_y/l$, одновременно всем искомым величинам припишем индекс «b»(от слова boundary). В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{11b}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12b}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2U_b=0,\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12b}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22b}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2V_b=0,$$
$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U_b}{\partial\eta}=\beta_{11}\sigma_{11b}+\beta_{12}\sigma_{22b},\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V_b}{\partial\zeta}=\beta_{12}\sigma_{11b}+\beta_{22}\sigma_{22b}, \tag{2.1}$$
$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U_b}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V_b}{\partial\eta}=a_{66}\sigma_{12b},\quad \omega_*^2=\rho h^2\omega^2.$$

Решение системы (2.1) будем искать в виде

$$\sigma_{jkb}=\varepsilon^{-1+s}\overline{\sigma}_{jkb}^{(s)}(\eta,\zeta)\ ,\ (U_b,V_b)=\varepsilon^s(\overline{U}_b^{(s)},\overline{V}_b^{(s)})\ ,\ \omega_*^2=\varepsilon^s\omega_{*s}^2,\ s=\overline{0,N}. \tag{2.2}$$

Подставив (2.2) в (2.1), для определения коэффициентов представления (2.2) получим систему

$$\frac{\partial\overline{\sigma}_{11b}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\overline{\sigma}_{12b}^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_{*k}^2\overline{U}_b^{(s-k)}=0\ ,\ \frac{\partial\overline{\sigma}_{12b}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\overline{\sigma}_{22b}^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_{*k}^2\overline{V}_b^{(s-k)}=0,\ k=\overline{0,s} \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial\overline{U}_b^{(s)}}{\partial\eta}=\beta_{11}\overline{\sigma}_{11b}^{(s)}+\beta_{12}\overline{\sigma}_{22b}^{(s)}\ ,\ \frac{\partial\overline{V}_b^{(s)}}{\partial\zeta}=\beta_{12}\overline{\sigma}_{11b}^{(s)}+\beta_{22}\overline{\sigma}_{22b}^{(s)},\ \frac{\partial\overline{U}_b^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\overline{V}_b^{(s)}}{\partial\eta}=a_{66}\overline{\sigma}_{12b}^{(s)}$$

Решение системы (2.3) будем искать в виде

$$\overline{Q}_b^{(s)} = Q_b^{(s)}(\zeta)\exp(-\lambda\eta) \tag{2.4}$$

где $\overline{Q}_b^{(s)}$ – любое из напряжений и перемещений, λ – пока неизвестное число. Поскольку мы ищем затухающее при удалении от торца $x=0$ решение, необходимо, чтобы $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Подставив (2.4) в (2.3), получим систему

$$-\lambda\sigma_{11b}^{(s)} + \frac{d\sigma_{12b}^{(s)}}{d\zeta} + \omega_{*k}^2 U_b^{(s-k)} = 0,\; -\lambda\,\sigma_{12b}^{(s)} + \frac{d\sigma_{22b}^{(s)}}{d\zeta} + \omega_{*k}^2 V_b^{(s-k)} = 0,\; k=\overline{0,s} \tag{2.5}$$

$$-\lambda U_b^{(s)} = \beta_{11}\sigma_{11b}^{(s)} + \beta_{12}\sigma_{22b}^{(s)},\; \frac{dV_b^{(s)}}{d\zeta} = \beta_{12}\sigma_{11b}^{(s)} + \beta_{22}\sigma_{22b}^{(s)},\; \frac{dU_b^{(s)}}{d\zeta} - \lambda V_b^{(s)} = a_{66}\sigma_{12b}^{(s)}$$

Из этой системы напряжения можно выразить через перемещения

$$\sigma_{11b}^{(s)} = -\frac{1}{\Delta_1}\left(\lambda\beta_{22}U_b^{(s)} + \beta_{12}\frac{dV_b^{(s)}}{d\zeta}\right),\; \sigma_{22b}^{(s)} = \frac{1}{\Delta_1}\left(\lambda\beta_{12}U_b^{(s)} + \beta_{11}\frac{dV_b^{(s)}}{d\zeta}\right),$$

$$\sigma_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left(\frac{dU_b^{(s)}}{d\zeta} - \lambda V_b^{(s)}\right) \tag{2.6}$$

Для определения перемещений получается система

$$\frac{d^2U_b^{(s)}}{d\zeta^2} + \lambda\,\Delta_2\frac{dV_b^{(s)}}{d\zeta} + \Delta_3 U_b^{(s)} = -a_{66}\omega_{*m}^2 U_b^{(s-m)} \quad,\; m=\overline{1,s}$$

$$\beta_{11}\frac{d^2V_b^{(s)}}{d\zeta^2} + \lambda\,\Delta_4\frac{dU_b^{(s)}}{d\zeta} + \Delta_5 V_b^{(s)} = -\Delta_1\omega_{*m}^2 V_b^{(s-m)} \tag{2.7}$$

где $\Delta_1 = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2$, $\Delta_2 = \frac{a_{66}}{\Delta_1}\beta_{12} - 1$, $\Delta_3 = \frac{a_{66}}{\Delta_1}\left(\lambda^2\beta_{22} + \Delta_1\omega_{*0}^2\right)$,

$$\Delta_4 = \beta_{12} - \frac{\Delta_1}{a_{66}}\;,\; \Delta_5 = \frac{\Delta_1}{a_{66}}\left(\lambda^2 + a_{66}\omega_{*0}^2\right) \tag{2.8}$$

Из системы (2.7) $V_b^{(s)}$ можно выразить через $U_b^{(s)}$ по формуле

$$V_b^{(s)} = \frac{\beta_{11}a_{66}}{\lambda\left(\beta_{12}a_{66} - \Delta_1\right)\left(\lambda^2 + a_{66}\omega_{*0}^2\right)}\left[\frac{d^3U_b^{(s)}}{d\zeta^3} + \right.$$

$$+\frac{\left(a_{66}^2 + 2a_{66}\beta_{12} - \Delta_1\right)\lambda^2 + a_{66}^2\beta_{11}\omega_{*0}^2}{\beta_{11}a_{66}}\frac{dU_b^{(s)}}{d\zeta} + \tag{2.9}$$

$$\left. + a_{66}\omega_{*m}^2\frac{dU_b^{(s-m)}}{d\zeta} - \frac{\lambda}{\beta_{11}}\left(a_{66}\beta_{12} - \Delta_1\right)\omega_{*m}^2 V_b^{(s-m)}\right],\quad m=\overline{1,s}$$

А для определения $U_b^{(s)}$ получим уравнение

$$\frac{d^4U_b^{(s)}}{d\zeta^4} + \frac{1}{\beta_{11}}\left[\left(2\beta_{12} + a_{66}\right)\lambda^2 + \left(\beta_{11}a_{66} + \Delta_1\right)\omega_{*0}^2\right]\frac{d^2U_b^{(s)}}{d\zeta^2} +$$

$$+\frac{1}{\beta_{11}}\left[\beta_{22}\lambda^4 + \left(a_{66}\beta_{22} + \Delta_1\right)\omega_{*0}^2\lambda^2 + \Delta_1 a_{66}\omega_{*0}^4\right]U_b^{(s)} = R_{Ub}^{(s)} \tag{2.10}$$

$$R_{Ub}^{(s)} = -a_{66}\omega_{*m}^2 \frac{d^2U_b^{(s-m)}}{d\zeta^2} - \frac{\Delta_5 a_{66}\omega_{*m}^2}{\beta_{11}} U_b^{(s-m)} + \frac{\lambda\Delta_1\Delta_2\omega_{*m}^2}{\beta_{11}} \frac{dV_b^{(s-m)}}{d\zeta}, \; m = \overline{1,s}$$

Одновременно для напряжений имеем

$$\sigma_{11b}^{(s)} = \frac{\beta_{12}}{\lambda(\beta_{12}a_{66} - \Delta_1)}\left[\frac{d^2U_b^{(s)}}{d\zeta^2} + \frac{1}{\beta_{12}}\left(a_{66}\beta_{12}\omega_{*0}^2 + \lambda^2\beta_{22}\right)U_b^{(s)} + a_{66}\omega_{*m}^2 U_b^{(s-m)}\right]$$

$$\sigma_{12b}^{(s)} = -\frac{1}{(\beta_{12}a_{66} - \Delta_1)(\lambda^2 + a_{66}\omega_{*0}^2)}\left[\beta_{11}\frac{d^3U_b^{(s)}}{d\zeta^3} + \left((a_{66} + \beta_{12})\lambda^2 - \right.\right. \tag{2.11}$$

$$\left.\left. -(a_{66}\beta_{12} - \Delta_1 - a_{66}\beta_{11})\omega_{*0}^2\right)\frac{dU_b^{(s)}}{d\zeta} + a_{66}\beta_{11}\omega_{*m}^2\frac{dU_b^{(s-m)}}{d\zeta} - \lambda(\beta_{12}a_{66} - \Delta_1)\omega_{*m}^2 V_b^{(s-m)}\right]$$

$$\sigma_{22b}^{(s)} = -\frac{\beta_{11}}{\lambda(\beta_{12}a_{66} - \Delta_1)}\left[\frac{d^2U_b^{(s)}}{d\zeta^2} + \left(\frac{(a_{66} + \beta_{12})\lambda^2}{\beta_{11}} + a_{66}\omega_{*0}^2\right)U_b^{(s)} + \right.$$

$$\left. + a_{66}\omega_{*m}^2 U_b^{(s-m)}\right], \quad m = \overline{1,s}$$

Решение уравнения (2.10) имеет вид

$$U_b^{(s)} = U_{b0}^{(s)} + U_{b\tau}^{(s)} \tag{2.12}$$

где $U_{b0}^{(s)}$ – решение однородного, а $U_{b\tau}^{(s)}$ – частное решение неоднородного уравнения (2.10).

$$U_{b0}^{(s)} = A_1^{(s)}e^{k_1\zeta} + A_2^{(s)}e^{-k_1\zeta} + A_3^{(s)}e^{k_3\zeta} + A_4^{(s)}e^{-k_3\zeta} \tag{2.13}$$

где $k_{1,3}^2 = \dfrac{\omega_{*0}^2}{2\beta_{11}}\left[\left(-2(a_{66} + \beta_{12})\gamma^2 - (a_{66}\beta_{11} + \Delta_1)\right) \pm \sqrt{D}\right], \; \gamma = \dfrac{\lambda}{\omega_{*0}}$ (2.14)

$$D = \left(4\beta_{12}a_{66} - 4\Delta_1 + a_{66}^2\right)\gamma^4 + 2\left[2(\beta_{11} - \beta_{12})(a_{66}\beta_{12} - \Delta_1) + \right.$$

$$\left. + a_{66}(a_{66}\beta_{11} - \Delta_1)\right]\gamma^2 + (a_{66}\beta_{11} - \Delta_1)^2$$

ω_{*0} – значение частоты для исходного приближения.

Это значение ω_{*0} определяется из решения внутренней задачи о собственных колебаниях полосы [7].

Решение пограничного слоя должно удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{12b}(\zeta = \pm 1) = 0, \; \sigma_{22b}(\zeta = \pm 1) = 0 \tag{2.15}$$

По формулам (2.11), определив напряжения $\sigma_{12b}^{(s)}$, $\sigma_{22b}^{(s)}$ и удовлетворив условиям (2.15) при $s = 0$, получим систему

$$\begin{aligned}
&A_1^{(0)}b_1e^{k_1} - A_2^{(0)}b_1e^{-k_1} + A_3^{(0)}b_2e^{k_3} - A_4^{(0)}b_2e^{-k_3} = 0\\
&A_1^{(0)}b_1e^{-k_1} - A_2^{(0)}b_1e^{k_1} + A_3^{(0)}b_2e^{-k_3} - A_4^{(0)}b_2e^{k_3} = 0\\
&A_1^{(0)}d_1e^{k_1} + A_2^{(0)}d_1e^{-k_1} + A_3^{(0)}d_2e^{k_3} + A_4^{(0)}d_2e^{-k_3} = 0\\
&A_1^{(0)}d_1e^{-k_1} + A_2^{(0)}d_1e^{k_1} + A_3^{(0)}d_2e^{-k_3} + A_4^{(0)}d_2e^{k_3} = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$b_1 = k_1(\beta_{11}k_1^2 + \omega_{*0}^2 c_1),\ b_2 = k_3(\beta_{11}k_3^2 + \omega_{*0}^2 c_1),\ d_1 = k_1^2 + c_2\omega_{*0}^2,\ d_2 = k_3^2 + c_2\omega_{*0}^2$$

$$c_1 = (a_{66} + \beta_{12})\gamma^2 - (a_{66}\beta_{12} - \Delta_1 - a_{66}\beta_{11}),\ c_2 = \frac{1}{\beta_{11}}(a_{66} + \beta_{12})\gamma^2 + a_{66} \qquad (2.17)$$

Для существования ненулевого решения системы (2.16) необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю. В результате получим следующее трансцендентное уравнение для определения значений λ

$$(b_1d_2 + b_2d_1)^2 \operatorname{ch}2(k_1 - k_3) - (b_2d_1 - b_1d_2)^2 \operatorname{ch}2(k_1 + k_3) - 4b_1b_2d_1d_2 = 0 \qquad (2.18)$$

В работе [7] было доказано, что во внутренней задаче о собственных колебаниях возможны следующие четыре группы собственных значений ω_{*0n}:

$$\text{а) } \omega_{*0n}^{I} = \frac{\pi n}{\sqrt{a_{66}}},\quad \text{б) } \omega_{*0n}^{II} = \frac{\pi}{2\sqrt{a_{66}}}(2n+1), \qquad (2.19)$$

$$\text{в) } \omega_{*0n}^{III} = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\Delta_1}}\pi n,\quad \text{г) } \omega_{*0n}^{IV} = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\Delta_1}}\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n \in N \qquad (2.20)$$

Частотам (2.19) соответствуют собственные сдвиговые колебания с формами собственных колебаний, соответственно,

$$U_n^{I} = \cos\pi n\zeta,\quad U_n^{II} = \sin\frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta \qquad (2.21)$$

Частотам же (2.20) соответствуют собственные продольные колебания с формами собственных колебаний

$$V_n^{III} = \cos\pi n\zeta,\quad V_n^{IV} = \sin\frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta,\ n \in N \qquad (2.22)$$

Для каждого случая формы собственных колебаний ортогональны на интервале $-1 \le \zeta \le 1$.

Из формул (2.14), (2.18) следует, что если λ – корень уравнения (2.18), то $(-\lambda)$ тоже является корнем этого уравнения. Корнями будут также $\pm\overline{\lambda}$. Нас будут интересовать корни с $\operatorname{Re}\lambda > 0$. В силу (2.18) в системе (2.16) независимым будет одна постоянная, остальные из этой системы можно выразить через эту постоянную, например, через $A_{1n}^{(0)}$. Представив $A_{1n}^{(0)} = \frac{1}{2}(B_{1n}^{(0)} - iB_{2n}^{(0)})$ и учитывая, что $A_{1n}^{(0)}$ соответствует $\overline{A_{1n}^{(0)}}$, решение (2.4) запишется в виде

$$\overline{Q_b^{(0)}} = \left(\operatorname{Re} Q_{bn}^{(0)}(\zeta)\exp(-\lambda\eta)\right)B_{1n}^{(0)} + \left(\operatorname{Im} Q_{bn}^{(0)}(\zeta)\exp(-\lambda\eta)\right)B_{2n}^{(0)} \qquad (2.23)$$

И решение (2.23) будет вещественным.

Для пластинки из однонаправленного намоточного стеклопластика с характеристиками:

$$E_1 = 55.917\cdot10^9\ \Pi a,\quad E_2 = 13.734\cdot10^9\ \Pi a,\quad E_3 = 13.734\cdot10^9\ \Pi a,$$

$$G_{12} = 5.592\cdot10^9\ \Pi a,\ G_{23} = 4.905\cdot10^9\ \Pi a,\ G_{13} = 5.592\cdot10^9\ \Pi a, \qquad (2.24)$$

$$\nu_{12} = 0.277,\ \nu_{23} = 0.4,\ \nu_{31} = 0.068,\ \rho = 1925\ \text{кг/м}^3$$

определены первые несколько корней λ уравнения (2.18), соответствующие собственным значениям (2.19) и (2.20). Они приведены в виде табл. 1-4.

$\omega_{*0n}^{I} = \frac{\pi n}{\sqrt{a_{66}}}$ Таблица 1

	n=1	n =2	n =3	n =4
λ_1	0.184008	0.504935+1.68106i	0.052042+1.98127i	0.0589251+2.22152i
λ_2	0.730153	1.25751	1.18919	0.0723835+1.52505i
λ_3	1.19814	1.27142	1.72384	1.33862
λ_4	1.5751+0.137981i	1.98089	2.02301	1.72129
λ_5	1.99497	2.0115	2.62852	2.51505
λ_6	2.15272	2.48217	2.66858	2.54282

$\omega_{*0n}^{II} = \frac{\pi}{2\sqrt{a_{66}}}(2n+1)$ Таблица 2

	n =1	n =2	n =3	n =4
λ_1	0.0549626+0.944907i	0.565988	0.0878633+2.13463i	0.0144117+2.98964i
λ_2	0.793118	1.4833	0.143385+1.59992i	1.87099
λ_3	1.02982	1.67037	0.402594	1.95453
λ_4	1.64323	2.32138	1.52784	2.75972
λ_5	1.67219	2.32641	2.08073	2.93586
λ_6	2.15952	2.8757	2.30789	3.56046

$\omega_{*0n}^{III} = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\Delta_1}}\pi n$ Таблица 3

	n =1	n =2	n =3	n =4
λ_1	0.441707+1.47056i	0.0879806+2.13371i	0.0537048+3.4307i	0.134602
λ_2	0.780703	0.143327+1.5987i	1.46275	2.32559
λ_3	1.48291	0.412292	2.15349	2.59006
λ_4	1.49301	1.52899	2.66487	3.37605
λ_5	2.08793	2.08182	3.06789	3.71224
λ_6	2.25984	2.30868	3.62414	4.27902

$\omega_{*0n}^{IV} = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\Delta_1}}\frac{\pi}{2}(2n+1)$ Таблица 4

	n =1	n =2	n =3	n =4
λ_1	0.662561+2.20584i	0.897133	0.0801603+3.57418i	0.00947789+5.36227i
λ_2	1.30324	2.0731	0.135341+3.04782i	0.0730633+4.91575i
λ_3	1.57064	2.11065	0.164921+2.28407i	0.0830888+4.50496i
λ_4	2.18899	2.90476	1.81136	1.28307
λ_5	2.26419	3.041	2.53568	2.54046
λ_6	2.83946	3.6822	2.85175	2.99405

Поскольку каждому собственному значению ω_{*0} соответствует своя группа собственных функций пограничного слоя, в окрестности торца $x=0$ будет создана довольно пестрая картина [12].

Приближения $s \geq 1$ могут быть рассмотрены тем же способом, что мы имели во внутренней задаче [7], однако вряд ли это будет представлять практический интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977. Т.30. №5. С. 48-62.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
3. Агаловян Л.А. , Геворкян Р. С. Асимптотическое решение первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы. //Прикл. мат. и мех. (ПММ). 2008. Т.72. Вып.4. С.633-634: Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 72 (2008), pp 452-460. Elsevier 2008.
4. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Об асимптотике вынужденных колебаний ортотропной полосы. //Докл. НАН Армении. 2007. Т.107. №2. С. 173-178.
5. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Асимптотическое решение динамической первой краевой задачи теории упругости для ортотропной полосы. //В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван. 2007. С.21-27.
6. Закарян Т.В. О динамической первой краевой задаче теории упругости для двухслойной ортотропной полосы. //Изв.НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №3. С.41-50.
7. Агаловян Л.А. , Закарян Т. В. О частотах и формах собственных колебаний ортотропной полосы со свободными продольными краями. // В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван. 2008. С. 36-42.
8. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. ВУЗов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С.8-11.
9. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы. // Докл. НАН Армении. 2003. Т.103. №4. С. 296-301.
10. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Междунар. научн. журнал. Прикл. Механика. 2002. Т.38. №7. С.3-24.
11. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. // Прикл. мат. и мех. (ПММ). 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.
12. Агаловян М.Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы. //В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван: Изд.ЕГУ, 1997. С.132-135.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
24.03.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

RECTANGULAR PLATE, UNDER TANGENTIAL LOADS WHEN TWO OPPOSITE EDGES ARE HINGED

K.L. Martirosyan

Ключевые слова: изгиб, шарнирное закрепление, упругость, пластина
Key words: bending, hinge joined, elasticity, plate

Ք.Լ. Մարտիրոսյան
Ուղղանկյուն սալը շոշափող բեռի առկայության դեպքում, երբ հանդիպակաց կողմերը հոդակապորեն ամրակցված են

Աշխատանքում դիտարկված է ուղղանկյուն սալը շոշափող բեռի առկայության դեպքում, երբ հանդիպակաց կողմերը հոդակապորեն ամրակցված են: Սալի լարվածադեֆորմացված վիճակի խնդիրը լուծված է դասական տեսության, առաջին կարգի ճշգրտված տեսության և բարձր կարգի ճշգրտված տեսության հիման վրա: Կատարված է համեմատություն տեղափոխությունների միջև:

К.Л. Мартиросян
Прямоугольная пластинка под действием касательных нагрузок, при шарнирном закреплении двух противоположных сторон

В работе рассматривается прямоугольная пластинка под действием касательных нагрузок при шарнирном закреплении двух противоположных сторон. Задача напряженного дефформированного состояния пластинки при наличии касательных нагрузок рассматривается на основе классической теории – Кирхгофа, на основе уточненной теории первого порядка – теории Рейснера-Генки-Миндлина по варианту Васильева, на основе уточненной теории высокого порядка – теории Амбарцумяна.

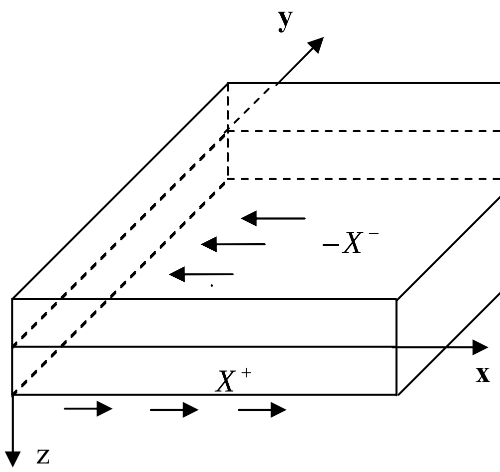
In this work a plate under the action of tangential loads, when two opposite edges are hinged is considered. The problem of stressed deformed state of plate under the action of the tangential loads is considered on the base of classical theory of Kirchhoff , on the base of refined theory of first order Reissner-Genki-Mindlin by Vasilyev variant, on the base of refined theory of high order of A. Ambartsumyan.

In 1957 Vlasov established the exact solution to a three -dimension problem of the bending of rectangular plate under the action of the transversal loads [1]. It was considered that on all edges of plate Navie conditions are given.
The solution is presented in the form of double series of the relative thickness.
It has been presented the comparison of this solution and solution by Kirchhoff theory. For thin plates when the square of the relative thickness is neglected by comparing to one, is coincides with the Kirchhoff solution.
In 1985 Levinson received the solution of the same problem on the base of semi inverse method [2].
In 1999 on the base of Levinson's solution V. Nicotra, P. Podio-Guidugli and A. Tiero considered transversal isotropic cylinder on which for all edges Navier conditions are given [3]. They obtained the exact solution to a three dimensional problem under the action as of the transversal loads and as tangential loads on the face surfaces.
After that in 2003 on the base of [2] the exact solution to a three -dimensional problem for transversely isotropic, linearly elastic body in the form of right cylinder under the action of the transversal load, on edges of which are sliding contact are received by P.Nardinocchi and P. Podio-Guidugli [4].
In 2007 on the base of [1], the problem of plate bending in the form of cylindrical surface under the action of tangential loads on the face planes is considered [5].
It has been considered that sliding contact conditions on the edges of the plate are given and on the face planes only tangential loads act. The problem is solved by using exact equations of theory of elasticity. For comparison with results of approximate theories, the Kirchhoff's

theory for plates and the theory, where the transversal shears are taken into account, it is necessary to produce the solution in the form of decomposition by the parameter of thickness ratio. The problem is also solved by using the refined theory of A. Ambartsumyan. In both cases the deflection decreases when the transversal shears are taken into account. This differs from normal loads action, which increases the deflection.
In this work a plate under the action of tangential loads, when two opposite edges are hinged is considered.

The problem of stressed deformed state of plate under the action of the tangential loads is considered on the base of classical theory of Kirchhoff (K), on the base of refined theory of first order Reissner-Genki-Mindlin by Vasilyev (V) variant [7], on the base of refined theory of high order of A. Ambartsumyan (A) [6].

1. Let the plate-band occupies area $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$



On the face surfaces of plate are given tangential loads:

$$z = h: \quad \sigma_{33} = 0,\ \sigma_{31} = X^+(x,y),\ \sigma_{32} = 0$$
$$z = -h: \quad \sigma_{33} = 0,\ \sigma_{31} = -X^-(x,y),\ \sigma_{32} = 0 \tag{1.1}$$

Admissions for displacements [8] by the theories (K), (V) and (A) correspondingly:

$$U_1 = U - z\frac{\partial W}{\partial x}, \quad U_2 = V - z\frac{\partial W}{\partial y}, \quad U_3 = W \tag{1.2}$$

$$U_1 = U - z\theta_1, \quad U_2 = V - z\theta_2, \quad U_3 = W \tag{1.3}$$

$$U_1 = U - z\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{z}{2G}\left(X_1 + \frac{z}{2h}X_2\right) + \frac{1}{G}g(z)\varphi_1,$$
$$U_2 = V - z\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{G}g(z)\varphi_2, \quad U_3 = W \tag{1.4}$$

Here U, V are displacements of median surface, W is deflection of plate and functions $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$, are independent of coordinate z, G is the shear modulus,

$$X_1 = X^+ - X^-, \quad X_2 = X^+ + X^-, \quad g(z) = z\left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) \tag{1.5}$$

In general the problems of generalized plane deformation and of bending are not separated. They are separated only in special cases when $X_1 = 0$ or $X_2 = 0$.

If $X_2 = 0$ ($X^+ = -X^-$), then the tangential loads don't yield the bending and in this case only the problem of generalized state is supposed to be observe.

If $X_1 = 0$ ($X^+ = X^-$), then only the problem of bending is supposed to be solved.

It should be noted, that tangential loads are given only on one face surface, then the loads are require the solution of both problems.

We are received the following equations for planar displacement of middle surface of the plate by the theories (K) and (V):

$$\Delta U + \theta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\frac{2X_2}{C(1-\nu)}$$

$$\Delta V + \theta \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \quad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu} \tag{1.6}$$

by the theory (A):

$$\Delta U + \theta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\frac{2X_2}{C(1-\nu)} - \frac{\theta h}{3E}\left(\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 X_2}{\partial y^2}\right)$$

$$\Delta V + \theta \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\frac{\theta h}{12G}\frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y} \tag{1.7}$$

The equations for bending of plate are received by the theory (K):

$$\Delta^2 W = \frac{h}{D}\frac{\partial X_1}{\partial x} \tag{1.8}$$

by the theory (V):

$$\Delta W - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0$$

$$D\left[\Delta\theta_1 + \theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y}\right)\right] + \frac{4Gh}{1-\nu}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \theta_1\right) = \frac{2h}{1-\nu}X_1 \tag{1.9}$$

$$D\left[\Delta\theta_2 + \theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right)\right] + \frac{4Gh}{1-\nu}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta_2\right) = 0$$

by the theory (A):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{3}{4}\frac{\partial X_1}{\partial x}$$

$$D\frac{\partial}{\partial x}\Delta W - \frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_1 + \theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right] + \frac{4h}{3}\varphi_1 =$$

$$= \frac{2h^3}{3(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2}\right) \tag{1.10}$$

$$D\frac{\partial}{\partial y}\Delta W - \frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_2 + \theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right] + \frac{4h}{3}\varphi_2 = \frac{h^3\theta}{3}\frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial y}$$

$$D\frac{\partial}{\partial y}\Delta W - \frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_2 + \theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right] + \frac{4h}{3}\varphi_2 = \frac{h^3\theta}{3}\frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial y}$$

2. Let us consider the rectangular plate which occupies area:

$$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h\,.$$

The tangential loads are given in the following form:

$$X_2 = \tau_0 \sin\lambda_1 y \ \text{ where } \lambda_1 = \frac{\pi}{b} \qquad (2.1)$$

It has been assumed, that on the edges $y = 0,\ b$ of plate are given the hinge joined conditions by the theories (K) и (V):

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0,\quad U = 0 \ \text{ on } \ y = 0, b \qquad (2.2)$$

by the theory (A):

$$U = -\frac{h}{12G}X_2,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \ \text{ on } \ y = 0, b \qquad (2.3)$$

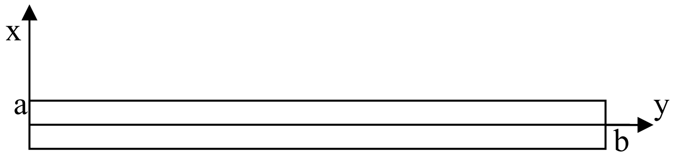
and on the face surfaces of plate are given only tangential loads (1.1).
Let on the edges $x = 0, a$ are given the sliding contact by the theories (K) and (V):

$$U = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \ \text{ on } \ x = 0, a \qquad (2.4)$$

by the theory (A):

$$U = -\frac{h}{12G}X_2,\quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \ \text{ on } \ x = 0, a \qquad (2.5)$$

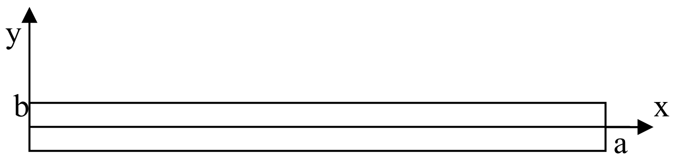
For the thin plate $\beta^2 << 1 \ \Leftrightarrow a << b$



the statements for efforts by theories (K), (V) and (A), when x=0, are:

$$T_1 = \frac{(1-\nu)}{\lambda_1}\beta\theta\tau_0 \sin\lambda_1 y,\ \ T_2 = \frac{\beta}{2\lambda_1}\tau_0\left(\nu - \frac{2\beta^2}{3}\right)\sin\lambda_1 y \qquad (2.6)$$

For long plate $\beta^2 >> 1 \ \Leftrightarrow a >> b$



the statements for efforts by theories (K), (V) and (A), when x=0, are:

$$T_1 = \frac{(3+\nu)b\tau_0}{2\pi}\sin\lambda_1 y,\ T_2 = \frac{b\tau_0}{2\pi}\sin\lambda_1 y \qquad (2.7)$$

We should note that problems, where tangential loads are acting were considered in the references [9], [10], [11].
For thin $\beta^2 << 1$ and long plates $\beta^2 >> 1$ the statement for efforts by theories (K), (V) when $x = 0$ is:

$$S=-\frac{b\tau_0}{\pi}\cos\lambda_1 y \tag{2.8}$$

For thin $\beta^2 << 1$ and long plates $\beta^2 >> 1$ the statement for efforts by theory (A) when $x=0$ is:

$$S=-\frac{b\tau_0}{\pi}\left(1-\frac{h^2\lambda_1^2}{6}\right)\cos\lambda_1 y \tag{2.9}$$

3. Here the problem of bending of rectangular plate is considered.
It is supposed that the tangential loads are given in the following form:

$$X_1=\tau_0\sin\lambda_1 y \text{ where } \lambda_1=\frac{\pi}{b} \tag{3.1}$$

We assume, that on the edges $y=0,\ b$ of plate are given the hinge joined conditions by the theories (K):

$$W=0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0 \text{ on } y=0,b \tag{3.2}$$

by the theory (V):

$$W=0,\quad \theta_1=0,\quad \frac{\partial\theta_2}{\partial y}=0 \text{ on } y=0,b \tag{3.3}$$

by the theory (A):

$$\mathrm{W}=0,\quad \varphi_1=-\frac{5}{8}X_1,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\frac{4}{5G}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0 \text{ on } y=0,b \tag{3.4}$$

and on the face surfaces of plate only tangential loads are given (1.1).
Let us consider, that on the edges $x=0,a$ are given the conditions of the sliding contact by the theories (K):

$$\frac{\partial W}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}=\frac{h}{D}X_1 \text{ on } x=0,a \tag{3.5}$$

by the theory (V):

$$\frac{\partial W}{\partial x}=0,\quad \theta_1=0,\quad \frac{\partial\theta_2}{\partial x}=0 \text{ on } x=0,a \tag{3.6}$$

by the theory (A):

$$\varphi_1=-\frac{3}{4}X_1\quad \frac{\partial W}{\partial x}+\frac{1}{10G}X_1=0,\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{1}{8}\frac{\partial X_1}{\partial y}=0 \text{ on } x=0,a \tag{3.7}$$

For thin plate $\frac{a}{b}<<1$ the statements for bending by theories (K) and (A) when x=0 are:

When $(a\lambda)^2<<1$

$$(\mathrm{K})W=\frac{ha^3(1-a\lambda_1)\tau_0}{6D(2+a\lambda_1)^2}\sin\lambda_1 y \tag{3.8}$$

$$(\mathrm{A})W=\frac{ha^3(1-a\lambda_1)\tau_0}{6D(2+a\lambda_1)^2}\left(1+\frac{2h^2\lambda_1^2}{15}+\frac{8h^2}{5a^2(1-\nu)}\frac{1+a\lambda_1}{1-a\lambda_1}\right)\sin\lambda_1 y \tag{3.9}$$

We should note that when $\frac{2h^2\lambda_1^2}{15}+\frac{8h^2}{5a^2(1-\nu)}\frac{1+a\lambda_1}{1-a\lambda_1}<<1$ the deflections by theories (K) and (A) are coincide. $a\lambda<<1$

$$(\text{K})W=\frac{h\,a^3\tau_0}{24D}\sin\lambda_1 y\,,\ (\text{A})W=\frac{ha^3\tau_0}{24D}\left(1+\frac{2h^2\lambda_1^2}{15}+\frac{8h^2}{5a^2(1-\nu)}\right)\sin\lambda_1 y \quad (3.10)$$

and when $\frac{2h^2\lambda_1^2}{15}+\frac{8h^2}{5a^2(1-\nu)}<<1$ the deflections by theories (K) and (A) are coincide.

For long plates $a/b>>1$ the deflections by theories (K) and (A) when $x=0$ are:

$$(\text{K})W=\frac{h\,\tau_0}{2D\lambda_1^3}\sin\lambda_1\,,\ (\text{A})W=\frac{h\,\tau_0}{2D\lambda_1^3}\left(1-\frac{2h^2\lambda_1^2\,\theta}{15}\right)\sin\lambda_1 y \quad (3.11)$$

We should note that when $2h^2\lambda_1^2\,\theta/15<<1$ the deflections by theories (K) and (A) are coincide.

We received also the deflection by the theory (V), which has a significant difference from the deflection by the theory (A) since by the theory (A) the tangential stresses satisfy the conditions on the face planes, in contrast to theory (V) as the theory (A) has higher order, then theory (V).

This contribution was partly provided within the INTAS grant 8886

References

1. Власов. Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной плиты. //Вест. Моск. Унив. Механика. 1957. №2. С.25-34.
2. M. Levinson. The simply supported rectangular plate: An exact, three-dimensional, linear elasticity solution. J. Elasticity 7., 283–291, 1985.
3. V. Nicotra, P. Podio-Guidugli and A. Tiero. Exact equilibrium solutions for linearly elastic plate-like bodies. J. Elasticity 56., 231-245, 1999.
4. P.Nardinocchi and P. Podio-Guidugli. Levinson-type benchmarks for slide-clamped and elastically supported plates. J. Elasticity 73., 211-220, 2003.
5. Белубекян М.В., Мартиросян К.Л. К задаче изгиба пластинки по форме цилиндрической поверхности при наличии касательных нагрузок на лицевых поверхностях.// Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т 60. №2. С.41-46.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
7. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ // Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С.45-58.
8. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин учитывающих поперечные сдвиги. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. 2002. с.67-88.
9. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Тонкая пластина при действии поверхностной касательной нагрузки. //Изв. НАН Армении. Сер. техн. наук. 1999. Т. 52. №3. С. 278-283.
10. Киракосян Р.М. Влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки при наличии касательных поверхностных нагрузок. //Докл. НАН Армении. 2006. Т. 106. №4. С.304-311.
11. Киракосян Р.М. К уточненной теории ортотропных пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок. //ПМ. 2008. Т.44. №4. С.107-119.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
27.03.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Петросян Г. А., Хачатрян А.М.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, смешанные условия, асимптотический метод, внутренняя задача, пограничный слой.
Key words: anisotropic plate, mixed conditions, asymptotic method, interior problem, doundary layer.

Գ.Ա.Պետրոսյան, Ա.Մ.Խաչատրյան
Անիզոտրոպ սալի մի խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը

Քննարկվում է անիզոտրոպ սալի եռաչափ խնդրի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը: Սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ: Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդի կիրառմամբ կառուցված են ներքին խնդրի և սահմանային շերտի տիպի խնդրի լուծումները: Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ:

A.M.Khachatryan, G.A.Petrosyan
Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic plate

Consider a question of solution stress-strain state in three dimention problem for an asymptotic plate, in the surface of which are given mixed conditions of theory of elasticity. With appliance of asymptotic method of integration are built solutions of the interior problem and boundary layer. Consider concrete examples.

Обсуждается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в трехмерной задаче для анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. С применением асимптотического метода интегрирования построены решения внутренней задачи, пограничного слоя. Рассмотрены конкретные примеры.

1. В работе [1] асимптотическим методом построена приближенная теория изгиба пластин из изотропных материалов. В [2] тем же методом определено напряженно-деформированное состояние пластин в случае общей анизотропии. Было показано, что решение пограничного слоя, в отличие от изотропного и ортотропного случаев, не распадается на плоский и антиплоский погранслои, а описывается обыкновеннным дифференциальным уравнением шестого порядка. Классические статические краевые задачи полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [3]. Асимптотический метод использован для решения второй и смешанных краевых задач в [4, 5]. Смешанная краевая задача в плоской задаче для анизотропной полосы-прямоугольника решена в [6].

Рассматривается трехмерная задача теории упругости для анизотропной пластинки: $\Omega = \{(x, y, z): 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, |z| \le h, h << a\}$. На лицевых плоскостях пластинки заданы следующие условия теории упругости:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{-}(x,y),\;\; \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{-}(x,y),\;\; w = \frac{l}{h} w^{-}(x,y) \quad \text{при} \;\; z = -h$$
$$u = \frac{l}{h} u^{+}(x,y),\quad v = \frac{l}{h} v^{+}(x,y),\quad \sigma_z = \frac{l}{h} \sigma_Z^{+}(x,y) \quad \text{при} \;\; z = h. \tag{1.1}$$

Краевые условия на торцах $x = 0,\ a$ пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трехмерных уравнений теории упругости [7]. Вводя безразмерную координатную систему $\xi = x/l$, $\eta = y/l,\ \zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U = u/l$, $V = v/l$, $W = w/l$, получим систему, которая содержит малый геометрический параметр $\varepsilon = h/l$, где $l = \max(a,b)$. Решение этой системы состоит из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде рядов [1-4]:

$$Q = \varepsilon^{q} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{s} Q^{(s)} \tag{1.2}$$

где Q – любое из напряжений или безразмерных перемещений.

Значения для q подбираются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(s)}$. Для рассматриваемой задачи эта цель достигается лишь при [5]:

$$q = -1 \;\text{äëÿ}\;\; \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_z, U, V, W, \qquad q = 0 \;\; \text{äëÿ}\;\; \sigma_{\mathrm{xz}}, \sigma_{yz} \tag{1.3}$$

Подставляя (1.2), с учетом (1.3), в преобразованные уравнения теории упругости и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{y}^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{zy}^{(s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{z}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0,$$
$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_x^{(s)} + a_{12}\sigma_y^{(s)} + a_{13}\sigma_z^{(s)} + a_{14}\sigma_{yz}^{(s-1)} + a_{15}\sigma_{xz}^{(s-1)} + a_{16}\sigma_{xy}^{(s)},$$
$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \eta} = a_{12}\sigma_x^{(s)} + a_{22}\sigma_y^{(s)} + a_{23}\sigma_z^{(s)} + a_{24}\sigma_{yz}^{(s-1)} + a_{25}\sigma_{xz}^{(s-1)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s)}, \tag{1.4}$$
$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13}\sigma_x^{(s-1)} + a_{22}\sigma_y^{(s-1)} + a_{33}\sigma_z^{(s-1)} + a_{34}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{35}\sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{36}\sigma_{xy}^{(s-1)},$$
$$\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{15}\sigma_x^{(s-1)} + a_{25}\sigma_y^{(s-1)} + a_{35}\sigma_z^{(s-1)} + a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)} +$$
$$+ a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)},\;\; (u, v; \xi, \eta; 5,4; 1,2; x, y)$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \xi}=a_{16}\sigma_x^{(s)}+a_{26}\sigma_y^{(s)}+a_{36}\sigma_z^{(s)}+a_{46}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s)}.$$

Интегрируя полученную систему по ζ, получим

$$\sigma_z^{(s)}=\sigma_z^{*(s)}+\sigma_{z0}^{(s)},\qquad \sigma_x^{(s)}=\sigma_x^{*(s)}+\tau_{x0}^{(s)}+a_3\sigma_{z0}^{(s)},\ \left(x,y;a,b\right),$$

$$U^{(s)}=u^{*(s)}+u_0^{(s)}\ \left(U,V,W\right), \tag{1.5}$$

$$\sigma_{xy}^{(s)}=\sigma_{xy}^{*(s)}+\tau_{xy0}^{(s)}+c_3\sigma_{z0}^{(s)},\qquad \sigma_{xz}^{(s)}=\sigma_{xz}^{*(s)}+\tau_{xz1}^{(s)}\zeta+\sigma_{xz0}^{(s)},$$

где

$$\tau_{x0}^{(s)}=B_{11}\varepsilon_1^{(s)}+B_{12}\varepsilon_2^{(s)}+B_{16}\omega^{(s)},\left(1,2;\ x,y\right),\quad \tau_{xy0}^{(s)}=B_{16}\varepsilon_1^{(s)}+B_{26}\varepsilon_2^{(s)}+B_{66}\omega^{(s)}$$

$$\tau_{xz1}^{(s)}=-\left(\frac{\partial \tau_{x0}^{(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tau_{xy0}^{(s)}}{\partial \eta}+a_3\frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}}{\partial \xi}+c_3\frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}}{\partial \eta}\right),\ \left(x,y;\ \xi,\eta;\ a,b\right) \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_1^{(s)}=\frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial \xi},\qquad \varepsilon_2^{(s)}=\frac{\partial v_0^{(s)}}{\partial \eta},\qquad \omega^{(s)}=\frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial \eta}+\frac{\partial v_0^{(s)}}{\partial \xi}.$$

Коэффициенты B_{ij}, a_i, b_i, c_i известны и определяются по формулам [3,7]:

$$B_{11}=\left(a_{22}a_{66}-a_{26}^2\right)/\Omega,\ B_{12}=\left(a_{16}a_{26}-a_{12}a_{66}\right)/\Omega,\ B_{16}=\left(a_{12}a_{26}-a_{16}a_{22}\right)/\Omega$$

$$B_{22}=\left(a_{11}a_{66}-a_{16}^2\right)/\Omega,\ B_{26}=\left(a_{12}a_{16}-a_{11}a_{26}\right)/\Omega,\ B_{66}=\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)/\Omega,$$

$$\Omega=\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)a_{66}+2a_{12}a_{16}a_{26}-a_{11}a_{26}^2-a_{22}a_{16}^2, \tag{1.7}$$

$$a_i=-\left(a_{1i}B_{11}+a_{2i}B_{12}+a_{i6}B_{16}\right),\quad b_i=-\left(a_{1i}B_{12}+a_{2i}B_{22}+a_{i6}B_{26}\right),$$

$$c_i=-\left(a_{1i}B_{61}+a_{2i}B_{26}+a_{i6}B_{66}\right),\left(i=3,4,5\right)$$

$\sigma_{xz0}^{(s)},\sigma_{yz0}^{(s)},\sigma_{z0}^{(s)},u_0^{(s)},v_0^{(s)},w_0^{(s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1).

Величины со звездочками, входящие в уравнения (1.5), как обычно, известны для каждого приближения s и определяются по следующим формулам:

$$\sigma_z^{*(s)}=-\int_0^\zeta\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial \eta}\right)d\zeta,$$

$$u^{*(s)}=\int_0^\zeta\Big(a_{15}\sigma_x^{(s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(s-1)}+a_{35}\sigma_z^{(s-1)}+a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)}-$$

$$-\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}\Big)d\zeta\quad \left(u,v;1,2;5,4;\xi,\eta;x,y\right)$$

$$w^{*(s)}=\int_0^\zeta\left(a_{13}\sigma_x^{(s-1)}+a_{23}\sigma_y^{(s-1)}+a_{33}\sigma_z^{(s-1)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{36}\sigma_{xy}^{(s-1)}\right)d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(s)}=B_{11}\varepsilon_1^{*(s)}+B_{12}\varepsilon_2^{*(s)}+B_{16}\omega^{*(s)}+a_3\sigma_z^{*(s)}+a_4\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_5\sigma_{xz}^{(s-1)}, \tag{1.8}$$

$$\sigma_y^{*(s)}=B_{12}\varepsilon_1^{*(s)}+B_{22}\varepsilon_2^{*(s)}+B_{26}\omega^{*(s)}+b_3\sigma_z^{*(s)}+b_4\sigma_{yz}^{(s-1)}+b_5\sigma_{xz}^{(s-1)},$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = B_{16}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{26}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{66}\omega^{*(s)} + c_3\sigma_z^{*(s)} + c_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + c_5\sigma_{xz}^{(s-1)},$$

$$\sigma_{xz}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial\eta}\right)d\zeta,\ (x,y;\ \xi,\eta)$$

$$\varepsilon_1^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi},\qquad \varepsilon_2^{*(s)} = \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\eta},\qquad \omega^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\xi}.$$

Предполагается, что $Q^{(s-k)} \equiv 0$, если $s < k$.

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования:

$$u_0^{(s)} = u^{+(s)} - u^{*(s)}(\xi,\eta,1),\ (u,v) \qquad w_0^{(s)} = w^{-(s)} - w^{*(s)}(\xi,\eta,-1),$$

$$\sigma_{z0}^{(s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1), \tag{1.9}$$

$$\sigma_{xz0}^{(s)} = \sigma_{xz}^{-} - L_{11}(B_{ij})u^{+} - L_{12}(B_{ij})v^{+} - a_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\xi} - c_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\eta} + L_{11}(B_{ij})u^{*(s)}(\xi,\eta,1) +$$

$$+ L_{12}(B_{ij})v^{*(s)}(\xi,\eta,1) + a_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi} + c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta} - \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,-1)$$

$$\sigma_{yz0}^{(s)} = \sigma_{yz}^{-} - L_{12}(B_{ij})u^{+} - L_{22}(B_{ij})v^{+} - c_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\xi} - b_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\eta} + L_{12}(B_{ij})u^{*(s)}(\xi,\eta,1) +$$

$$+ L_{22}(B_{ij})v^{*(s)}(\xi,\eta,1) + c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi} + b_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta} - \sigma_{yz}^{*(s)}(\xi,\eta,-1)$$

Здесь $L_{ij}(B_{ij})$–известные дифференциальные операторы второго порядка [7]

$$\begin{aligned} L_{11}(B_{ij}) &= B_{11}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},\ (1,2;\xi,\eta) \\ L_{12}(B_{ij}) &= B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{26}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \end{aligned} \tag{1.10}$$

С учетом (1.10) окончательное решение внутренней задачи представим в виде:

$$U^{(s)} = u^{+(s)} + u^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) - u^{*(s)}(\xi,\eta,1),\ (u,v),$$

$$W^{(s)} = w^{-(s)} + w^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) - w^{*(s)}(\xi,\eta,-1)$$

$$\sigma_z^{(s)} = \sigma_z^{+} + \sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) - \sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1), \tag{1.11}$$

$$\sigma_x^{(s)} = B_{11}\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\xi} + B_{12}\frac{\partial v^{+(s)}}{\partial\eta} + B_{16}\left(\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{+(s)}}{\partial\xi}\right) + a_3\sigma_z^{+(s)} -$$

$$-B_{11}\frac{\partial u^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi} - B_{12}\frac{\partial v^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta} - B_{16}\left(\frac{\partial u^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi}\right) +$$

$$+\sigma_x^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) - a_3\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1),\ (x,y;1,2;u,v;\xi,\eta;a_3,b_3)$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = B_{16}\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\xi} + B_{26}\frac{\partial v^{+(s)}}{\partial\eta} + B_{66}\left(\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{+(s)}}{\partial\xi}\right) + c_3\sigma_z^{+(s)} -$$

$$- B_{16}\frac{\partial u^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi} - B_{26}\frac{\partial v^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta} - B_{66}\left(\frac{\partial u^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi}\right) +$$

$$+ \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) - c_3\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)$$

$$\sigma_{xz}^{(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} + \Big[-L_{11}(B_{ij})u^{+(s)} - L_{12}(B_{ij})v^{+(s)} - a_3\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\xi} - c_3\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\eta} +$$

$$+L_{11}(B_{ij})u^{*(s)}(\xi,\eta,1) + L_{12}(B_{ij})v^{*(s)}(\xi,\eta,1) + a_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi} - \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) +$$

$$+c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta}\Big](\zeta+1) - \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,-1), \quad (x,y;1,2;u,v;\xi,\eta;a_3,b_3) \qquad (1.12)$$

В формулх (1.12) необходимо учитывать, что

$$u^{+(0)} = u^+,\ v^{+(0)} = v^+,\ w^{-(0)} = w^-,\ \sigma_z^{+(0)} = \sigma_z^+,\ \sigma_{xz}^{-(0)} = \sigma_{xz}^-,\ \sigma_{yz}^{-(0)} = \sigma_{yz}^-$$

$$u^{+(s)} = v^{+(s)} = w^{-(s)} = 0\ ,\quad \sigma_z^{+(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} = \sigma_{yz}^{-(s)} = 0, \qquad \text{при}\ \ s > 0$$

В качестве иллюстрации рассмотрим частные примеры.

а) Пусть

$$\sigma_z^+ = -q,\ u^+ = v^+ = 0, \qquad \sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^- = 0,\ w^- = 0$$

В рассматриваемой задаче асимптотический процесс обрывается при $s = 2$.

С помощью решений (1.12) и рекуррентных формул (1.9) определим все величины внутренней задачи. Точное решение задачи имеет вид

$$\sigma_x = -a_3 q,\ \ \sigma_y = -b_3 q,\ \ \sigma_{xy} = -c_3 q\ ,$$

$$\sigma_{xz} = 0,\ \ \sigma_{yz} = 0,\ \ \sigma_z = -q\ ,$$

$$u = (a_{15}a_3 + a_{25}b_3 + a_{56}c_3 + a_{35})(h-y)q\ , \qquad (1.13)$$

$$v = (a_{14}a_3 + a_{24}b_3 + a_{46}c_3 + a_{34})(h-y)q\ ,$$

$$w = -(a_{13}a_3 + a_{23}b_3 + a_{36}c_3 + a_{33})(y+h)q\ .$$

б) Рассмотрим другой пример. Допустим

$$\sigma_z^+ = 0,\ u^+ = v^+ = 0,\ \sigma_{xz}^- = \tau_1,\ \sigma_{yz}^- = \tau_2,\ w^- = 0$$

В данной задаче отличны от нуля лишь первые три приближения. В результате получим

$$\sigma_x = \frac{h}{l}(a_4\tau_2 + a_5\tau_1), \quad \sigma_y = \frac{h}{l}(b_4\tau_2 + b_5\tau_1), \quad \sigma_{xy} = \frac{h}{l}(c_4\tau_2 + c_5\tau_1),$$

$$\sigma_{xz} = \tau_1, \qquad \sigma_{yz} = \tau_2, \qquad \sigma_z = 0, \qquad (1.14)$$

$$u = \frac{h}{l}\Big[(a_{15}a_5 + a_{25}b_5 + a_{56}c_5 + a_{55})\tau_1 + (a_{15}a_4 + a_{25}b_4 + a_{56}c_4 + a_{45})\tau_2\Big](\zeta-1),$$

$$v = \frac{h}{l}\Big[(a_{14}a_5 + a_{24}b_5 + a_{46}c_5 + a_{45})\tau_1 + (a_{14}a_4 + a_{24}b_4 + a_{46}c_4 + a_{44})\tau_2\Big](\zeta-1),$$

$$w=\frac{h}{l}\Big[\big(a_{13}a_5+a_{23}b_5+a_{36}c_5+a_{35}\big)\tau_1+\big(a_{13}a_4+a_{23}b_4+a_{36}c_4+a_{34}\big)\tau_2\Big](\zeta+1).$$

2. Для построения решения типа пограничного слоя на торце $x=0$, в преобразованных уравнениях теории упругости, написанных в безразмерных координатах ξ,η,ζ, вводим новую переменную t по формуле $t=\xi/\varepsilon$. Вновь полученные уравнения решаются с помощью функций типа погранслоя [3,4]

$$R_p=\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{\chi_p+s}R_p^{(s)}(\eta,\zeta)\exp(-\lambda t) \qquad (2.1)$$

где R_p – любое из напряжений и перемещений, при этом $\mathrm{Re}\,\lambda>0$. Непротиворечивые значения для χ_p получим, если $\chi_{\sigma_i}=\chi,\ \chi_{u_i}=\chi+1$ [2,3,4].

Все неизвестные величины пограничного слоя выражаются через напряжения $\sigma_{yzp}^{(s)}$ и $\sigma_{zp}^{(s)}$ [3]:

$$\sigma_{xp}^{(s)}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+R_x^{(s-1)},\quad \sigma_{xyp}^{(s)}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta}+R_{xy}^{(s-1)},\quad \sigma_{xzp}^{(s)}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta}+R_{xz}^{(s-1)},$$

$$\sigma_{yp}^{(s)}=-\frac{1}{a_{22}}\left(\frac{a_{12}}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{a_{25}}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{a_{26}}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta}+a_{23}\sigma_{zp}^{(s)}+a_{24}\sigma_{yzp}^{(s)}\right)+R_y^{(s-1)},$$

$$u_p^{(s)}=-\frac{A_{11}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\frac{A_{15}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{A_{16}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{A_{13}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(s)}-\frac{A_{14}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(s)}+R_u^{(s-1)}, \qquad (2.2)$$

$$v_p^{(s)}=-\frac{A_{16}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\frac{A_{25}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{A_{26}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{A_{23}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(s)}-\frac{A_{24}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(s)}+R_v^{(s-1)},$$

$$w_p^{(s)}=-\frac{A_{11}}{\lambda^4}\frac{\partial^3\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^3}-\frac{A_{16}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{\lambda^2}\big(A_{13}+A_{35}\big)\frac{\partial\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{2A_{15}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}-$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}\big(A_{14}+A_{25}\big)\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{A_{33}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(s)}-\frac{A_{34}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(s)}+R_w^{(s-1)}$$

где использованы следующие обозначения:

$$A_{k1}=\big(a_{22}a_{kk}-a_{k2}^2\big)a_{22}^{-1},\ (k=1,4),\ \ A_{4k}=\big(a_{3k}a_{22}-a_{23}a_{2k}\big)a_{22}^{-1},\ (k=3,4),$$

$$A_{1k}=\big(a_{1k}a_{22}-a_{12}a_{2k}\big)a_{22}^{-1},\ \ A_{2k}=\big(a_{k6}a_{22}-a_{2k}a_{26}\big)a_{22}^{-1},(k=3,4,5,6), \qquad (2.3)$$

$$A_{3k}=\big(a_{k5}a_{22}-a_{2k}a_{25}\big)a_{22}^{-1},\ \ (k=3,4,5)$$

Величины $R_k^{(s-1)}$ известны и определяются по рекуррентным формулам [3].

Функции $\sigma_{yzp}^{(s)}$ и $\sigma_{zp}^{(s)}$ определяются из уравнений [3]

$$\begin{gathered}L_1\sigma_{zp}^{(s)}+L_2\sigma_{yzp}^{(s)}=R_1^{(s-1)},\\ L_2\sigma_{zp}^{(s)}+L_3\sigma_{yzp}^{(s)}=R_2^{(s-1)}.\end{gathered} \qquad (2.4)$$

Дифференциальные операторы L_i и обобщенные нагрузки $R_1^{(s-1)},R_2^{(s-1)}$ определяются известным образом [3]:

$$L_1 = A_{11}\frac{\partial^4}{\partial\zeta^4} + 2A_{15}\lambda\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + \left(2A_{13} + A_{35}\right)\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2A_{45}\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{43}\lambda^4,$$

$$L_2 = A_{16}\lambda\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + \left(A_{14} + A_{25}\right)\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \left(A_{23} + A_{34}\right)\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{44}\lambda^4, \qquad (2.5)$$

$$L_3 = A_{26}\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2A_{24}\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{41}\lambda^4,$$

$$R_1^{(s-1)} = -\left(\frac{\partial R_w^{(s-1)}}{\partial\zeta} + a_{13}R_x^{(s-1)} + a_{23}R_y^{(s-1)} + a_{35}R_{xz}^{(s-1)} + a_{36}R_{xy}^{(s-1)}\right)\lambda^4,$$

$$R_2^{(s-1)} = -\left(\frac{\partial R_v^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \frac{\partial w_p^{(s-1)}}{\partial\eta} + a_{14}R_x^{(s-1)} + a_{24}R_y^{(s-1)} + a_{45}R_{xz}^{(s-1)} + a_{46}R_{xy}^{(s-1)}\right)\lambda^4.$$

При $s = 0$ решение системы (2.4) можно определить при помощи функции напряжений Φ

$$\sigma_{yzp}^{(s)} = L_1\Phi, \quad \sigma_{zp}^{(s)} = -L_2\Phi \qquad (2.6)$$

которая является решением краевой задачи

$$\left(L_1L_3 - L_2^2\right)\Phi = 0 \qquad (2.7)$$

$$A_{11}L_2\Phi''(\zeta=1) + \lambda\left(A_{15}L_2 - A_{16}L_1\right)\Phi'(\zeta=1) + \lambda^2\left(A_{13}L_2 - A_{14}L_1\right)\Phi(\zeta=1) = 0,$$

$$A_{16}L_2\Phi''(\zeta=1) + \lambda\left(A_{25}L_2 - A_{26}L_1\right)\Phi'(\zeta=1) + \lambda^2\left(A_{23}L_2 - A_{24}L_1\right)\Phi(\zeta=1) = 0$$

$$L_2\Phi(\zeta=1) = 0, \quad L_2\Phi'(\zeta=-1) = 0, \quad L_1\Phi(\zeta=-1) = 0 \qquad (2.8)$$

$$A_{11}L_2\Phi'''(\zeta=-1) + \lambda\left(2A_{15}L_2 - A_{16}L_1\right)\Phi''(\zeta=-1) + \lambda^2\left(\left(A_{13} + A_{51}\right)L_2 - \right.$$
$$\left. - \left(A_{14} + A_{25}\right)L_1\right)\Phi'(\zeta=-1) + \lambda^3\left(A_{33}L_2 - A_{34}L_1\right)\Phi(\zeta=-1) = 0$$

Условия (2.8) являются следствием однородных поверхностных условий
$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,\ w = 0$ при $\zeta = -1$, $u = v = 0,\ \sigma_z = 0$ при $\zeta = 1$.

Краевая задача (2.7), (2.8) – обобщенная задача на собственные значения.

Уравнение (2.7) является обыкновенным дифференциальным уравнением шестого порядка, в котором η входит как параметр. Решая уравнение (2.7) и удовлетворив условиям (2.8), получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных констант $C_i\ (i = 1,2,...,6)$. Приравнивая к нулю определитель этой системы, получим трансцендентное уравнение для определения λ.

Решение поставленной смешанной задачи будет иметь следующий окончательный вид

$$J = Q + R_p^{[1]} + R_p^{[2]}$$

где Q – решение внутренней задачи, а $R_p^{[1]}$ и $R_p^{[2]}$ – решения типа пограничного слоя при $x = 0$ и $x = a$, соответственно.

В заключение отметим, что для ортотропных материалов уравнения (2.4) распадаются на два уравнения, первое из которых четвертого порядка и определяет решение плоского погранслоя, а второе – второго порядка и определяет антиплоский погранслой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686.
2. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией // В сб.:“XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин”. Тезисы докладов. М.: 1977. С.5.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука,1997. 415с.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд.“Гитутюн” НАН РА, 2005. 468с.
5. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.3-11.
6. Петросян Г.А. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной полосы-прямоугольника //Уч. записки АрГУ. №1(14). 2007. С.36-42.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с.

Арцахский государственный
университет

Поступила в редакцию
24.03.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

ON BOUNDARY LAYER THE 3D PROBLEM ABOUT FORCED VIBRATIONS OF ORTHOTROPIC PLATE, FREELY-LYING ON THE RIGID FOUNDATION

Sargsyan M. Z.[*)]

Keywords: boundary layer, plate, damping, frequency, Coulomb friction, singularly perturbed system, 3D problem, forced vibration, conjugation of solutions.
Ключевые слова: пограничный слой, пластина, затухание, частота, кулоново трение, сингулярно-возмущенная система, трехмерная задача, вынужденные колебания, сопряжение решений.

Մ. Զ. Սարգսյան
Կոշտ հենարանի վրա ազատ հենված օրթոտրոպ սալի սահմանային շերտի համար ստիպողական տատանման եռաչափ խնդիրը

Դիտարկված է կոշտ հենարանի վրա ազատ հենված օրթոտրոպ սալի սահմանային շերտի խնդիրը, երբ սալի վերին նիստի վրա ազդում է ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ բեռ: Ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառմամբ որոշված է սահմանային շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը: Ուսումնասիրված է սահմանային շերտի մեծությունների մարումը: Տրված է սահմանային շերտի և ներքին խնդրի լուծումների կարման եղանակ:

М. З. Саргсян
О пограничном слое в трехмерной задаче о вынужденных колебаниях ортотропной пластины, свободно лежащей на жестком основании

Рассмотрена задача пограничного слоя ортотропной пластинки, лежащей на жестком основании, на верхнюю лицевую плоскость которой действует гармонически изменяющаяся во времени нормальная нагрузка. С применением асимптотического метода определено напряженно-деформированное состояние в пограничном слое. Исследовано затухание величин в пограничном слое. Показан способ сопряжения решения внутренней задачи и пограничного слоя.

The problem of boundary layer of the orthotropic plate simply supported on the rigid foundation is considered, when on the upper plane of plate the normal load affects. The stressedly-deformed state boundary layer of plate is determined by using the asymptotic method. The damping of vlues for boundary layer are researched. The method of conjugation of the solutions of inner problem and of boundary layer is showed.

Introduction

As we know, the equations of elasticity theory for thin bodies written in dimensionless coordinates are singularly perturbed by small parameter differential equation. For this kind of equation and systems the asymptotic method is usually applied [1]. Theory of isotropic plates and shells [2], theory of anisotropic plates, shells and beams [3] are built by this method. The asymptotic method effective for solution of dynamic problems of elasticity, particularly, the problems on free and forced vibrations of plate[4].The asymptotic method is also used to solving non-classical boundary layer's problems , i.e. when the boundary conditions are specified on the lateral surfaces of thin bodies. This kind of problems on natural and forced vibrations was solved in References [5, 6]. The review of the papers on the application of the asymptotic method for the solution of static and dynamic problems of beams, plates and shells is included in [7]. Below the boundary layer's problem of orthotropic plate simply-supported on the rigid foundation is researched, when on the upper plane of the plate the normal load acts.

[*)] It has been reported in FINAL MEETING of INTAS Project "Some nonclassical problems for thin Structures", Rome, Italy, 22-23 Jan 2009.

1. Consider the orthotropic plate $D=\{(x,y,z),\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ |z|\le h,\ h<<l,\ l=\min(a,b)\}$, on which upper plane affects the normal load:

$$F(x,y,t)=P(x,y)\exp(i\Omega t)$$

which changes by time harmonically. Here Ω is the frequency of influencing force. On the lower face of the plate are given the simply supported conditions subject to friction. The conditions on the lateral surface may be arbitrary, whose corresponds the solution of boundary layer. It's supposed, that the friction is Coulomb friction, which means the shear stresses are proportional to the normal stress. So we will have the following boundary conditions:

$$\begin{aligned}&z=h,\quad \sigma_{zz}=-P(x,y)\exp(i\Omega t),\ \ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0\\&z=-h,\quad w=0,\ \ \sigma_{xz}=f_1\sigma_{zz},\ \ \sigma_{yz}=f_2\sigma_{zz}\end{aligned}\tag{1.1}$$

where f_1 and f_2 are coefficients of friction along coordinate directions x and y.

From these boundary conditions the complete solution of the inner problem is obtained [8], which will not satisfy to conditions on lateral surface. For satisfying them it is necessary to construct the solution of the boundary layer.

Now consider the boundary layer of plate near the lateral face $x=0$. The boundary conditions for boundary layer have the following forms:

$$\begin{aligned}&z=h\qquad \sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0,\\&z=-h\qquad \sigma_{xz}=f_1\sigma_{zz},\ \ \sigma_{yz}=f_2\sigma_{zz},\ \ W=0\end{aligned}\tag{1.2}$$

For constructing the solution, which corresponds to the boundary layer, we have to pass to dimensionless coordinates and components of displacement vector:

$$\gamma=\frac{x}{h},\ \eta=\frac{y}{l},\ \zeta=\frac{z}{h},\ U=\frac{u_x}{l},\ V=\frac{u_y}{l},\ W=\frac{u_z}{l}\tag{1.3}$$

Where h is the thickness of the plate, $l=\min(a,b)$ and $h<<l$. Consequently, we will get singularly perturbed with small parameter ε system:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\gamma}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\Omega_*^2U=0\qquad(1,2,3;\ U,V,W)\\&\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\gamma}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}\qquad\qquad(\gamma,\zeta;\ U,W;\ 1,2)\\&\frac{\partial V}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33}\\&\frac{\partial U}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\gamma}=a_{66}\sigma_{12}\\&\varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\gamma}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13}\\&\frac{\partial W}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23},\qquad \Omega_*^2=\rho h^2\Omega^2,\ \ \varepsilon=h/l\end{aligned}\tag{1.4}$$

The solution of this system will be sought in form of the following asymptotic expansion:

$$\begin{aligned}&\sigma_{ijb}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{ijb}^{(s)}(\eta,\zeta)\exp(-\lambda\gamma),\\&U_b=\varepsilon^sU_b^{(s)}(\eta,\zeta)\exp(-\lambda\gamma),\qquad(U,V,W)\quad i,j=1,2,3,\quad s=\overline{0,S}\end{aligned}\tag{1.5}$$

Notation $s=\overline{0,S}$ means that by dummy index s summation from 0 up to the number of approximation S takes place. Substituting the forms (1.5) into the system (1.4) we get the system for determining components of the stress tensor and the displacement vector:

$$
\begin{gathered}
-\lambda\sigma_{11b}^{(s)}+\frac{\partial\sigma_{13b}^{(s)}}{\partial\zeta}+\Omega_*^2U_b^{(s)}=R_{1\sigma}^{(s)},\quad -\lambda\sigma_{12b}^{(s)}+\frac{\partial\sigma_{23b}^{(s)}}{\partial\zeta}+\Omega_*^2V_b^{(s)}=R_{2\sigma}^{(s)}\\
-\lambda\sigma_{13b}^{(s)}+\frac{\partial\sigma_{33b}^{(s)}}{\partial\zeta}+\Omega_*^2W_b^{(s)}=R_{3\sigma}^{(s)}\\
\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\sigma_{jjb}^{(s)}+\lambda U_b^{(s)}=0,\quad \sum_{j=1}^{3}a_{j2}\sigma_{jjb}^{(s)}=R_V^{(s)},\quad \sum_{j=1}^{3}a_{j3}\sigma_{jjb}^{(s)}-\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}=0\\
\frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta}-\lambda W_b^{(s)}=a_{55}\sigma_{13b}^{(s)},\ -\lambda V_b^{(s)}=a_{66}\sigma_{12b}^{(s)}+R_U^{(s)},\ \frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23b}^{(s)}+R_W^{(s)}
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

where

$$
R_{i\sigma}^{(s)}=-\frac{\partial\sigma_{i2b}^{(s-1)}}{\partial\eta},\quad i=1,2,3
$$

$$
R_U^{(s)}=-\frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta},\quad (U,V,W)
$$

Using (1.6) it is possible to express all the required values in terms of components of displacement vector by formulae:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11b}^{(s)}=-A_{23}\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{22}\lambda U_b^{(s)}+A_{12}R_V^{(s)} &&\sigma_{12b}^{(s)}=-\frac{1}{a_{66}}(\lambda V_b^{(s)}-R_U^{(s)})\\
&\sigma_{22b}^{(s)}=-A_{13}\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{12}\lambda U_b^{(s)}-A_{33}R_V^{(s)} &&\sigma_{13b}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}(\frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta}-\lambda W_b^{(s)})\\
&\sigma_{33b}^{(s)}=A_{11}\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{23}\lambda U_b^{(s)}+A_{13}R_V^{(s)} &&\sigma_{23b}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}(\frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial\zeta}-R_W^{(s)})
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

and from the system (1.6) for components of displacements vector the following equations are obtained:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2U_b^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\lambda(1-a_{55}A_{23})\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}+a_{55}(A_{22}\lambda^2+\Omega_*^2)U_b^{(s)}=T_U^{(s)}\\
\frac{\partial^2W_b^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\lambda\frac{1-a_{55}A_{23}}{A_{11}}\frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{1}{A_{11}}(\frac{\lambda^2}{a_{55}}+\Omega_*^2)W_b^{(s)}=T_W^{(s)}
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

$$
\frac{\partial^2V_b^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}(\frac{\lambda^2}{a_{66}}+\Omega_*^2)V_b^{(s)}=T_V^{(s)}
\tag{1.9}
$$

$$
\begin{gathered}
T_U^{(s)}=A_{12}a_{55}\lambda R_V^{(s)}+a_{55}R_{1\sigma}^{(s)},\ T_V^{(s)}=-\frac{a_{44}}{a_{66}}\lambda R_U^{(s)}+a_{44}R_{2\sigma}^{(s)}+\frac{\partial R_W^{(s)}}{\partial\zeta},\\
T_W^{(s)}=-\frac{A_{13}}{A_{11}}\lambda R_V^{(s)}+\frac{1}{A_{11}}R_{3\sigma}^{(s)}
\end{gathered}
\tag{1.10}
$$

Now we will consider only approximation $s=0$, because the next approximations don't represent any practical interest.

So in approximation $s=0$ the right-hand members (1.10) of equations (1.8) (1.9) is equal to zero:

$$T_U^{(0)}=T_V^{(0)}=T_W^{(0)}=0$$

and boundary conditions will get the following forms:

$$\begin{aligned}&\zeta=-1 \quad \sigma_{13b}^{(0)}=f_1\sigma_{33b}^{(0)},\quad W_b^{(0)}=0\\&\zeta=1 \quad \sigma_{13b}^{(0)}=\sigma_{33b}^{(0)}=0\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}&\zeta=-1 \quad \sigma_{23b}^{(0)}=f_2\sigma_{33b}^{(0)}\\&\zeta=1 \quad \sigma_{23b}^{(0)}=0\end{aligned} \tag{1.12}$$

The solution of the system (1.8) will be sought in the following form:

$$U_b^{(0)}=G_b^{(0)}(\eta)\exp k\zeta,\quad W_b^{(0)}=LG_b^{(0)}(\eta)\exp k\zeta, \tag{1.13}$$

where L is an indefinite multiplier for a present. Substituting the forms of components of displacement vector (1.13) into the system of equations (1.8) we will get the following system:

$$\begin{cases}k^2-\lambda(1-a_{55}A_{23})Lk+A_{22}a_{55}\lambda^2+a_{55}\Omega_*^2 \ =0\\ k^2-\lambda\dfrac{1-a_{55}A_{23}}{A_{11}}k+\dfrac{1}{A_{11}a_{55}}L\lambda^2+L\dfrac{\Omega_*^2}{A_{11}} \ =0\end{cases} \tag{1.14}$$

from which multiplier L will have the following form:

$$L=\frac{k^2+A_{22}a_{55}\lambda^2+a_{55}\Omega_*^2}{(1-a_{55}A_{23})\lambda k} \tag{1.15}$$

and for k the following characteristic equation is obtained.

$$k^4+(B_1\lambda^2+B_2\Omega_*^2)k^2+B_3\lambda^4+B_4\lambda^2\Omega_*^2+B_5\Omega_*^2=0 \tag{1.16}$$

where

$$B_1=A_{22}a_{55}-\frac{1-a_{55}A_{23}}{A_{11}}+\frac{1}{a_{55}A_{11}},\ B_2=a_{55}+\frac{1}{A_{11}},$$

$$B_3=\frac{A_{22}}{A_{11}},\ B_4=\frac{1+a_{55}A_{22}}{A_{11}},\ B_5=\frac{a_{55}}{A_{11}}$$

The equation (1.16) has four roots:

$$\begin{aligned}&k_{1,2}^2=\frac{-B_1\lambda^2-\Omega_*^2B_2\pm\sqrt{D}}{2}\\&D=(B_1^2-4B_3)\lambda^4+\Omega_*^2(2B_1B_2-4B_4)\lambda^2+\Omega_*^2B_2^2-4B_5\Omega_*^2\end{aligned} \tag{1.17}$$

Therefore, for any k_i there will be a one multiplier L_i:

$$L=L(k_i)\ \Rightarrow\ L_i=\frac{k_i^{\,2}+A_{22}a_{55}\lambda^2+a_{55}\Omega_*^2}{(1-a_{55}A_{23})\lambda k_i} \tag{1.18}$$

So the solution of system (1.8) will have the following form:

$$U_b^{(0)}=\sum_{i=1}^{4}G_{ib}^{(0)}(\eta)\exp k_i\zeta,\quad W_b^{(0)}=\sum_{i=1}^{4}L_iG_{ib}^{(0)}(\eta)\exp k_i\zeta, \tag{1.19}$$

in $s=0$ approximation. Satisfying the boundary conditions (1.11) and in consideration of (1.7) we will get a system of homogeneous equations, for existence of which nonzero solution it is necessary that the determinant of matrix of coefficients of the system to be equal to zero.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 e^{k_1} & \alpha_2 e^{k_2} & \alpha_3 e^{k_3} & \alpha_4 e^{k_4} \\ \beta_1 e^{k_1} & \beta_2 e^{k_2} & \beta_3 e^{k_3} & \beta_4 e^{k_4} \\ L_1 e^{-k_1} & L_2 e^{-k_2} & L_3 e^{-k_3} & L_4 e^{-k_4} \\ \mu_1 e^{-k_1} & \mu_2 e^{-k_2} & \mu_3 e^{-k_3} & \mu_4 e^{-k_4} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.20}$$

$\alpha_i = k_i - L_i\lambda,\ \beta_i = A_{11}L_i k_i + A_{23}\lambda,\ \mu_i = k_i(1/a_{55} - f_1 A_{11} L_i) - \lambda(L_i/a_{55} + f_1 A_{23}),\ i=\overline{1,4}$

The equation (1.20) is the characteristic equation for λ. The roots of this equation we will denote by λ_{pn}. Coefficient of system of homogeneous equations will be expressed in term of one of them, for example by $G_{1b}^{(1)}(\eta)$. Taking into account, that to each λ_p, with $\operatorname{Re}\lambda_p > 0$, corresponds its conjugate $\overline{\lambda_p}$, we will represent the $G_{1bn}^{(s)}(\eta)$ in the following form:

$$G_{1bn}^{(s)}(\eta) = \left(A_{1n}^{(s)} - iA_{2n}^{(s)}\right)/2 \tag{1.21}$$

Consequently, in the final forms of required quantities, we will have the real expression in the following general form:

$$Q_b^{(s)}(\gamma,\eta,\zeta) = \operatorname{Re}\tilde{Q}_{bn}^{(s)} A_{1n}^{(s)} + \operatorname{Im}\tilde{Q}_{bn}^{(s)} A_{2n}^{(s)} \tag{1.22}$$

where we are used the following notations:

$$\tilde{Q}_{bn}^{(s)} = Q_{bn}\exp\left(-\lambda_{pn}\gamma\right),\ Q_b^{(s)} = Q_{bn}G_{1bn}^{(s)} \tag{1.23}$$

Now return to equation (1.9). In the approximation $s=0$ the solution of this equation will be sought in form of

$$V_b^{(0)} = C_b^{(0)}(\eta)\exp\theta\zeta \tag{1.24}$$

After substituting this form into equation (1.9), we will obtain the following form of $V_b^{(0)}$:

$$V_b^{(0)} = C_{1b}^{(0)}\sin\theta\zeta + C_{2b}^{(0)}\cos\theta\zeta \tag{1.25}$$

where $\theta = \sqrt{(\lambda^2/a_{66} + \Omega_*^2)a_{44}}$.

In the plane problem when $\lambda = \lambda_p$, satisfying the following boundary conditions:

$$\zeta = -1 \quad \sigma_{23b}^{(0)} = f_2\sigma_{33b}^{(0)},\ \ \zeta = 1 \quad \sigma_{23b}^{(0)} = 0 \tag{1.26}$$

it is possible to express the coefficients $C_{ib}^{(0)}$ by $G_{ib}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} C_{1b}^{(0)} &= \frac{a_{44} f_2}{2 f_1 \cos\theta_p}\sum_{i=1}^{4} G_{ib}^{(0)}(\eta)(k_i - L_i\lambda_p)\exp\left(-k_i\right) \\ C_{2b}^{(0)} &= \frac{a_{44} f_2}{2 f_1 \sin\theta_p}\sum_{i=1}^{4} G_{ib}^{(0)}(\eta)(k_i - L_i\lambda_p)\exp\left(-k_i\right) \end{aligned} \tag{1.27}$$

So, the components of displacement vector $U_b^{(0)}, W_b^{(0)}$ corresponding to the plane problem, give rise to component of displacement vector $V_b^{(0)}$, which corresponds to the out-of-plane problem, because of Coulomb friction.

Now consider the out-of-plane problem. In this case we have $\lambda \neq \lambda_p$, from which follows that all coefficients $G_{ib}^{(0)}$ equal to zero. Therefore, the components of displacement $U_b^{(0)}$ and $W_b^{(0)}$ are equal to zero too:

$$U_b^{(0)} = W_b^{(0)} = 0$$

So we will have the following boundary conditions:

$$\zeta = \pm 1 \quad \sigma_{23b}^{(0)} = 0 \tag{1.28}$$

satisfying to which we will get a system of homogeneous equations for existence of which nonzero solution it is necessary the fulfillment of the following equality:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_a & -\sin\theta_a \\ \cos\theta_a & \sin\theta_a \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin 2\theta_a = 0 \tag{1.29}$$

We will denote the roots of this equation by λ_{an}, which will have the following form:

$$\lambda_a = \pm\sqrt{a_{66}\left(\frac{\pi^2 n^2}{4a_{44}} - \Omega_*^2\right)}, \quad n = \overline{0, N} \tag{1.30}$$

In this case $V_b^{(0)}$ will have the following form:

$$V_{b2}^{(0)} = H_{1b}^{(0)} \sin\theta_2\zeta + H_{2b}^{(0)} \cos\theta_2\zeta \tag{1.31}$$

where from coefficients $H_{1b}^{(0)}, H_{2b}^{(0)}$ only a one, for example $H_{1b}^{(0)}$, is independent because of equation (1.29), and other is expressed by it. The roots of equation (1.29) are real. Therefore, for stresses we will get the following real expressions:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11b}^{(0)} = \sigma_{22b}^{(0)} = \sigma_{33b}^{(0)} = \sigma_{13b}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{12b}^{(0)} = -\frac{\lambda_2}{a_{66}}\left(H_{1b}^{(0)} \sin\theta_2\zeta + H_{2b}^{(0)} \cos\theta_2\zeta\right) \\ &\sigma_{23b}^{(0)} = -\frac{\theta_2}{a_{44}}\left(H_{1b}^{(0)} \cos\theta_2\zeta - H_{2b}^{(0)} \sin\theta_2\zeta\right) \end{aligned} \tag{1.32}$$

So the out-of-plane problem is completely separated from the plane problem. As we know the all required quantities of boundary layer are proportional to $\exp(-\lambda\gamma)$:

$$Q_b \sim \exp(-\lambda\gamma)$$

where the real positive part of λ is attributed the rate of damping of boundary layer.

plastic SVAM 10:1

	λ_p	λ_a
1	$0.17174 - 0.293819\,i$	0.896929
2	$0.17174 + 0.293819\,i$	2.29646
3	$0.2191 - 0.0528\,i$	3.56686
4	$0.729788 + 0.0528\,i$	4.81152
5	0.8789	6.04636
6	0.9984	7.27639
7	1.41	8.50368

glass plastic STET

	λ_p	λ_a
1	$0.016-0.3448\,i$	1.24176
2	$0.016+0.3448\,i$	2.77092
3	$0.1817-0.3328\,i$	4.2314
4	$0.1817+0.3328\,i$	5.67646
5	0.5605	7.1155
6	1.2111	8.55155
7	1.32946	9.98592

In tables the first seven values of λ_p and λ_a are reduced for the plastic SVAM 10:1 ($E_1 = 38.25910^9 \times \mathrm{Pa}$, $E_2 = 17.658 \times 10^9\,\mathrm{Pa}$, $E_3 = 9.6138 \times 10^9\,\mathrm{Pa}$, $G_{12} = 5.199310^9\,\mathrm{Pa}$, $G_{13} = 3.8357\ 10^9\,\mathrm{Pa}$, $G_{23} = 3.1392\ 10^9\,\mathrm{Pa}$, $\nu_{12} = 0.22$, $\nu_{23} = 0.31$, $\nu_{31} = 0.07$, $h = 0.5\mathrm{m}$, $\rho = 1900\mathrm{kg/m}^3$, $f_1 = 0.2$, $\Omega = 2\pi / 0.1$) and glass plastic STET

($E_1 = 35.2179\times10^9$ Pa , $E_2 = 28.7433\times10^9$ Pa , $E_3 = 17.9523\times10^9$ Pa, $G_{12} = 7.4556\times10^9$ Pa , $G_{13} = 6.4746\times10^9$ Pa , $G_{23} = 6.1803\times10^9$ Pa , $\nu_{12} = 0.177$, $\nu_{31} = 0.157$, $h = 0.5$m , $\rho = 1900\text{kg/m}^3$, $f_1 = 0.2$, $\Omega = 2\pi/0.1$):

From the table it is obvious that the boundary layer damps in out-of-plane problem faster, then in the plane problem.

2. Now we consider the first boundary condition on the lateral face $\gamma = 0$:

$$\sigma_{xx} = \varphi(\eta,\zeta),\ \sigma_{xy} = \psi(\eta,\zeta),\ \sigma_{xz} = \chi(\eta,\zeta) \tag{2.1}$$

The general solution of the formulated problem is the sum of the solution of the inner problem and of boundary layer. It will be written in the following form:

$$I = I^{\text{int}} + I_b \tag{2.2}$$

For determination of the 3 unknown coefficients of solution corresponding to boundary layer, we will use the quadratic error on lateral face $\gamma = 0$, which will have following form:

$$J = \int_{-1}^{1}\left[\left(\sigma_{xx}^{\text{int}} + \sigma_{xxb} - \varphi(\eta,\zeta)\right)^2 + \left(\sigma_{xy}^{\text{int}} + \sigma_{xyb} - \psi(\eta,\zeta)\right)^2 + \left(\sigma_{xz}^{\text{int}} + \sigma_{xzb} - \chi(\eta,\zeta)\right)^2\right]d\zeta \tag{2.3}$$

It will be minimum on the lateral face $\gamma = 0$ if following derivatives are equal to zero:

$$\frac{\partial J}{\partial A_{1n}^{(s)}} = \frac{\partial J}{\partial A_{2n}^{(s)}} = \frac{\partial J}{\partial H_{1b}^{(s)}} = 0 \tag{2.4}$$

So, from this system of equation it is possible to find required coefficients and, consequently, to find the complete solution corresponding to boundary layer.

REFERENCES

1. Nayfeh A. Perturbation Methods. New York: John Willey and Sons. 1973. 455p.
2. Goldenveizer A. L. The Theory of Thin Elastic Shells. Moscow: Nauka. 1976. 510p.
3. Aghalovyan L. A. The Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Moscow: Nauka. Fizmatlit. 1997. 414p.
4. Aghalovyan L. A. A class of problems on the forced vibrations of anisotropic plates. //Problems of the Mechanics of Thin Deformable Bodies. Yerevan. Armenia. 2002. pp. 8-19.
5. Aghalovyan L. A. An asymptotic method of solving dynamic mixed problems of anisotropic strips and plates. //Izv Vuzov Severo-Kavkaz Region Yestesv Nauki 2000. Vol. 3. pp.8-11.
6. Aghalovyan L.A. Determination of frequencies of natural vibrations and eigenfunction in a three-dimensional mixed boundary-value problem for plates. //In: Proc. Conf. “Present Problems of the Optimal Control and Stability Systems“. Yerevan: Izd YeGU. 1997. pp. 128-31.
7. Aghalovyan L.A. The asymptotic form of the solutions of classical and non-classical boundary-value problems of the statics and dynamics of thin bodies.// Int. Appl. Mech. 2002. Vol.38. №7. pp. 3-24.
8. Sargsyan M. Z. The 3D problem on forced vibrations of orthotropic plate free situated on the rigid foundation.// In coll.: ”The problems of dynamics of interaction of deformable media”. Inst. of Mech. of NAS of RA. Yerevan. 2008. pp.399-403. 456p.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
9.03.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 621.983

МЕХАНИКА ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ТОНКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Назарян Э.А., Араб Н.Н., Аракелян М.М., Маркосян А.С.

Ключевые слова: формоизменение, вытяжка, отбортовка, листовой металл, вид деформации.
Key words: forming, deep drawing, flanging, sheet metal, deformation types.

Է.Ա.Նազարյան, Ն.Ն.Արաբ, Մ.Մ.Առաքելյան, Ա.Ս.Մարկոսյան

Բարակ օղակաձեվ թիթեղների ձեվափոխման մեխանիկան

Դեֆորմացիոն ամրացման և հաստության փոխկապակցված փոփոխության պայմաններում կատարված է բարակ օղակաձև թիթեղների ձևավորման վերլուծությունը մեծ պլաստիկ դեֆորմացիաների դեպքում: Հաստատված է, որ համասեռ ամրացման դեպքում պլաստիկության հարթ լարվածային վիճակի հավասարումները արտապատկերվում են պլաստիկության գլանի π - հարթության վրա շառավղային լարման և համարժեք դեֆորմացիայի փոփոխման արագությունների միջև համեմատական կախվածության տեսքով: Դեֆորմացվող նյութի իդեալ կոշտ-պլաստիկ և ամրացվող մոդելների համար, երկառանցք միանշան և տարանշան լարված վիճակների դեպքում ստացված են գլխավոր լարումների և դեֆորմացիաների բաշխման համար անալիտիկ արտահայտություններ:

E.A.Nazaryan, N.N.Arab, M.M.Arakelyan, A.S. Markosyan

Mechanics of Forming thin Ring Plates

The analysis of forming thin ring plates in case of the big plastic deformations taking into account the interconnected change of material thickness and deformation hardening is carried out. It is established, that in case of isotropic hardening the equations characteristing plastic flat intense condition, are displayed on π -planes of the plasticity cylinder in the form of proportional dependence between speeds of radial pressure change and equivalent deformation. Analytical dependences for distribution of the main pressure and deformations are obtained at biaxial homonymic and heteronymic strained conditions for ideally stiff-plastic and hardening models of the deformable material.

Проведен анализ формоизменения тонких кольцевых пластин в случае больших пластических деформаций с учетом взаимосвязанного изменения толщины материала и деформационного упрочнения. Установлено,что в случае изотропного упрочнения уравнения, характеризующие пластическое плоское напряженное состояние, отображаются на π -плоскости цилиндра пластичности в виде пропорциональной зависимости между скоростями изменения радиального напряжения и эквивалентной деформации. Получены аналитические зависимости для распределения главных напряжений и деформаций при двухосно-одноименном и разноименном напряженных состояниях для идеально жестко-пластической и упрочняющей моделей деформируемого материала.

1. Введение

Многочисленные прикладные проблемы формоизменения листового металла требуют решения задач по определению напряженно-деформированного состояния при больших пластических деформациях. К таким проблемам относится прогнозирование параметров точности и прочности изделий, изготовленных методами формоизменения листового металла.

Возможности существующих приближенных методов анализа подобных задач для реального листового металла (с учетом деформационного упрочнения) ограничены по области приложений и особенно по точности получаемых решений [1,2,3]. Поэтому представляется целесообразной математически корректная постановка задач формоизменения листового металла в условиях взаимосвязанного изменения толщины и деформационного упрочнения.

При осесимметричном формоизменении листового металла точность изделий зависит от стабильности диаметральных размеров, которая для изотропного материала при отсутствии остаточных напряжений обусловлена распределением толщины по образующей изделия. Прочность изделий при тех же условиях определяется итоговым распределением напряжения текучести материала. В процессах формоизменения листового металла напряжение текучести функционально связано с эквивалентной деформацией, которая, в свою очередь, однозначно определяется главными деформациями. Следовательно, проблема прогнозирования параметров прочности и точности сводится к установлению величины и распределения эквивалентной деформации по образующей.

В настоящей работе разработан общий метод анализа задач осесимметричного формоизменения листового металла в условиях взаимосвязанного изменения толщины и деформационного упрочнения и продемонстрировано применение метода при деформировании тонких кольцевых пластин.

2. Общий метод анализа формоизменения листового металла при осевой симметрии деформирования

При осевой симметрии деформирования принимается, что формоизменение листового металла происходит в условиях плоского напряженного состояния [1,2,3]. Напряжения и деформации могут быть определены совместным решением уравнений теории пластичности и уравнения, описывающего деформационное упрочнение [1, 5].

Согласно критерию текучести Мизеса, напряжение текучести имеет вид:

$$\sigma_s = \{\frac{1}{2}[(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2]\}^{1/2}, \tag{1}$$

где $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$ – главные напряжения в радиальном, окружном направлении и по толщине, соответственно.

Напряжение текучести (1) зависит от величины эквивалентной деформации, которая определяется следующим образом:

$$\varepsilon_i = \{\frac{2}{9}[(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\rho)^2]\}^{1/2}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_з$ – главные деформации в тех же направлениях, удовлетворяющие условию постоянства объема:

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \tag{3}$$

Соотношения между напряжениями и приращениями главных деформаций имеют вид:

$$\frac{d\varepsilon_\rho - d\varepsilon_\theta}{\sigma_\rho - \sigma_\theta} = \frac{d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_z}{\sigma_\theta - \sigma_z} = \frac{d\varepsilon_z - d\varepsilon_\rho}{\sigma_z - \sigma_\rho} = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i}{\sigma_s}, \tag{4}$$

где $d\varepsilon_i$ – интенсивность приращения главных деформаций, которая определяется соотношением:

$$d\varepsilon_i = \{\frac{2}{9}[d\varepsilon_\rho - d\varepsilon_\theta)^2 + (d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_\rho)^2]\}^{1/2} \tag{5}$$

В условиях плоского напряженного состояния $(\sigma_z = 0)$ из (4) следует:

$$d\varepsilon_\rho = \frac{2\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_\rho} d\varepsilon_\theta, \quad d\varepsilon_z = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} d\varepsilon_\theta. \tag{6}$$

Зависимость между напряжением текучести (1) и эквивалентной деформацией (2) удобно представить в виде степенной функции [2,3].

$$\sigma_s = A\varepsilon_i^n, \tag{7}$$

где A и n – параметры деформационного упрочнения, зависящие от механических свойств листового металла.

Уравнение равновесия элемента, вырезанного главными сечениями из осесимметрично нагруженной оболочки переменной толщины имеет вид [1]:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho \left(1 + \frac{\rho\, ds}{s\, d\rho}\right) - \sigma_\theta = 0 \tag{8}$$

Приращения главных деформаций в окружном направлении и в направлении толщины связаны с приращением радиуса $d\rho$ и толщины ds соотношениями

$$d\varepsilon_\theta = \frac{d\rho}{\rho}, \quad d\varepsilon_z = \frac{ds}{s}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), с учетом зависимостей (6), после некоторых преобразований получим

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2\frac{\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho\sigma_\theta + \sigma_\theta^2}{\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} = 0. \tag{10}$$

Интегрирование (10) с учетом (1) возможно только для идеально жестко-пластической модели деформируемого материала $(\sigma_s = \text{const})$. При интегрировании (10) с учетом деформационного упрочнения необходимо принятие дальнейших упрощающих допущений, основным из которых является условие постоянства толщины. Такое допущение равносильно утверждению, что формоизменение листового металла происходит в условиях плоской деформации, что в принципе исключает возможность решения задач, в которых реализуется плоское напряженное состояние.

2.1. Деформации и напряжения при плоском напряженном состоянии и их представление

В условиях больших пластических деформаций из условия (3) следует, что деформации взаимосвязаны и могут быть представлены на плоскости в косоугольных координатах. Рассмотрим π-плоскость цилиндра пластичности, где начало координат соответствует нулевым деформациям (состоянию заготовки до деформирования), а геометрическое место точек, последовательных деформированных состояний представляет собой путь деформации рассматриваемой материальной частицы. В общем случае текущие величины главных деформаций представляют собой проекции вектор-функции $\vec{\varepsilon}_i$ на косоугольные координатные оси, путь деформации описывается вектор-функцией $\vec{\varepsilon}_i(\rho)$ $(\rho -$ некоторый параметр времени), а направление скорости деформации $d\vec{\varepsilon}_i / d\rho$ совпадает с касательной к пути деформации. Модуль текущей величины вектор-функции $\vec{\varepsilon}_i(\rho)$ численно равен эквивалентной деформации (2) [4].

Приращения главных деформаций в рассматриваемой плоскости удобно представить в тригонометрической форме:

$$d\varepsilon_\rho = d\varepsilon_i \cos\varphi, \quad d\varepsilon_\theta = d\varepsilon_i \cos(\varphi + \frac{2}{3}\pi), d\varepsilon_z = d\varepsilon_i \cos(\varphi + \frac{4}{3}\pi), \tag{11}$$

где φ – угол вида деформированного состояния.

Из совместного решения (6) и (11) устанавливаются зависимости радиальных и окружных напряжений от угла вида деформированного состояния:

$$\sigma_\rho = \sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6), \sigma_\theta = -\sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\varphi, \tag{12}$$

удовлетворяющие критерию текучести Мизеса (1).

Для облегчения интерпретации полученных результатов начало отсчета на π - плоскости совмещено с осью ε_ρ, а увеличение угла φ взято в направлении против часовой стрелки. При изменении $0 \le \varphi \le 2\pi$ радиальные лучи делят π-плоскость на 12 секторов с центральными углами, равными $\pi/6$ (фиг.1а).

В указанном диапазоне изменения параметра φ вектор-функция $\vec{\varepsilon}_i(\rho)$ становится либо параллельной, либо перпендикулярной к координатным осям $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$, вследствие чего главные деформации по этим осям изменяются в пределах от единицы до нуля.

С учетом зависимостей (11) и (12) уравнение равновесия (10) можно представить на π-плоскости в достаточно простой форме:

$$d\sigma_\rho = \sigma_s d\varepsilon_i \,. \tag{13}$$

Таким образом, система уравнений, характеризующих плоское напряженное состояние, отображается на π-плоскости в виде пропорциональной зависимости между скоростями изменения радиального напряжения и эквивалентной деформации. Коэффициентом пропорциональности в (13) является напряжение текучести материала, характеризующее, согласно (7), деформационное упрочнение.

При допущении $d\varepsilon_i = |d\varepsilon_\theta|$ и использовании критерия текучести $\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_s$ дифференциальная зависимость (13) принимает вид: $\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0$, что представляет собой обычно применяемое в приложениях уравнение равновесия без учета изменения толщины материала.

3. Анализ формоизменения тонких кольцевых пластин

Рассмотрим формоизменение тонкой кольцевой пластины размерами R_0, r_0, s_0. При определенных размерных характеристиках пластины и деформирующего инструмента возможны следующие варианты формоизменения:

– вытяжка цилиндрического изделия при постоянной или переменной величине диаметра центрального отверстия (фиг.1с).

– отбортовка центрального отверстия при постоянной или переменной величине диаметра наружного контура (фиг.1в).

Указанный характер формоизменения позволяет условно разделить деформацию кольцевой пластины на две составляющие: растяжение кольцевых пластин с размерами R_0, a, s_0 и a, r_0, s_0 под нагрузками интенсивности σ_s, приложенными, соответственно, к внутреннему и наружному контурам. Очевидно, что при такой схематизации не учитываются напряжения, возникающие вследствие изгиба материала на радиусных кромках деформирующих инструментов, а участок кольца, разделяющий зону вытяжки от зоны отбортовки, заменяется условной окружностью радиуса a.

Проблема интегрирования (13) заключается в том, что в общем случае приращение эквивалентной деформации, определяемое дифференцированием (2), не равняется интенсивности приращения главных деформаций (5). Легко показать, что такое равенство возможно только при пропорциональном изменении главных деформаций, что соответствует радиальным путям деформаций на π-плоскости. При таком допущении из (13) следует:

$$\sigma_{\rho} = \frac{A}{n+1}\varepsilon_i^{n+1} + c\,. \tag{14}$$

Постоянную интегрирования находим из граничных условий, по которым для свободных от нагрузки контуров радиальные напряжения равны нулю. С учетом граничных условий, приравняв результат интегрирования соотношению (12), имеем:

$$\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_{\text{êð}}^{n+1} = (1+n)\varepsilon_i^{n}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\varphi + \pi/6), \tag{15}$$

где $\varepsilon_{\text{êð}}$ – эквивалентная деформация краевого элемента.

Пределы изменения угла вида деформированного состояния в рассматриваемых задачах устанавливаются в зависимости от знака окружной деформации и величины наибольших растягивающих напряжений. Из зависимостей (12) следует, что в направлениях $\varphi = 0, \varphi = 5\pi/3$ радиальные напряжения достигают величины, равной пределу текучески материала. В диапазоне углов $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ окружные деформации отрицательны, а в диапазоне $\frac{4\pi}{3} \le \varphi \le \frac{5\pi}{3}$ положительны. Таким образом, все виды деформаций, которые, в принципе, могут реализоваться в процессах вытяжки и отбортовки, располагаются на полуплоскости и занимают равные сектора с центральными углами $\varphi = \pi/3$ (фиг.1а).

Если путь деформации совпадает с осью ε_θ, то ε_θ – деформация растяжения в окружном направлении, а $\varepsilon_\rho, \varepsilon_z$ – деформации сжатия, численно равные $\varepsilon_\theta/2$.

Если путь деформации совпадает с осью ε_ρ , то ε_ρ – деформация растяжения в радиальном направлении, а $\varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ – деформации сжатия, численно равные $\varepsilon_\rho/2$. Если путь деформации совпадает с отрицательным направлением оси ε_z, то ε_z – деформация сжатия по толщине, а $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta$ – деформации растяжения, численно равные $\varepsilon_z/2$. Если путь деформации $\varepsilon_\rho = 0,$ а $\varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ равны по величине и противоположны по знаку, то имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости (θ, z). Если путь деформации совпадает с направлением $\varepsilon_\theta = 0,$ а $\varepsilon_\rho, \varepsilon_z$ равны по величине и противоположны по знаку, то имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости (ρ, z). Если путь деформации совпадает с направлением $\varepsilon_z = 0,$ а $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta$ равны по величине и противоположны по знаку, то имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости (ρ, θ). Таким образом, пути деформации с углами $\varphi = 3\pi/2, 11\pi/6, \pi/6$ соответствуют чистому сдвигу, соответственно, в плоскостях (θ, z), (ρ, z), (ρ, θ), а с углами $\varphi = 0, 4\pi/3, \pi/3, 5\pi/3$ – чистому растяжению и сжатию, соответственно, в радиальном, окружном направлениях и в направлении по толщине (фиг.1).

Полученное решение позволяет установить взаимосвязь между координатами рассматриваемой материальной частицы и углом вида деформированного состояния. Для этого, продифференцировав (15) при $\varepsilon_{êð} = 0$, с учетом (9), (11), имеем:

$$\frac{d\rho}{\rho} = (1+n)(\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{6}\cos^2\varphi)d\varphi \ . \tag{16}$$

После интегрирования (16) приводится к виду

$$\ln\rho = (1+n)(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin 2\varphi) + C. \tag{17}$$

Постоянная интегрирования в (17) находится из следующих граничных условий: для внешней кольцевой пластины $\rho = R_0, \varphi = \pi/3$; для внутренней кольцевой пластины $\rho = r_0, \varphi = 4\pi/3$. С учетом граничных условий выражение (17) принимает вид:

для внешней кольцевой пластины

$$\frac{\rho}{R_0} = \exp\{(1+n)[\frac{\sqrt{3}}{3}(\varphi - \pi/3) - \frac{1}{4}\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin 2\varphi]\} \tag{18}$$

для внутренней кольцевой пластины:

$$\frac{\rho}{r_0} = \exp\{(1+n)[\frac{\sqrt{3}}{3}(\varphi - 4\pi/3) - \frac{1}{4}\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin 2\varphi]\} \tag{19}$$

Подставляя в (18) и (19) предельные значения углов вида деформированного состояния $\varphi = 0, \varphi = \frac{5}{3}\pi$, при которых растягивающие напряжения достигают величины, равной пределу текучести материала, получим отношение наибольших размеров кольцевых пластин:

$$\frac{a}{r_0} = \frac{R_0}{a} = \exp[(1+n)(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9})] \approx \exp[0{,}854(1+n)] \tag{20}$$

При n=0 предельные величины отношений R_0/a и a/r_0 равны 2.35, что совпадает с результатом работы [4] и достаточно близко к величинам, обычно реализуемым в экспериментах [1,2].

Используя значение эквивалентной деформации, легко определить главные деформации для начального пластического состояния кольцевых пластин:

$$\varepsilon_\rho = \frac{1+n}{2}(1 + \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi), \ \ \varepsilon_\theta = -\frac{1+n}{2}(\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi)$$
$$\varepsilon_z = -\frac{1+n}{2}(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi) \tag{21}$$

Таким образом, зависимости (12), (15), (18), (19) и (21), являясь параметрическим решением задачи, полностью определяют напряженно-деформированное состояние кольцевых пластин с учетом взаимосвязанного изменения толщины материала и деформационного упрочнения.

Очевидно, что, исключая параметр φ, можно получить зависимости, характеризующие распределение главных напряжений и деформаций по координате материальной частицы для начальных пластических состояний пластин.

4. Обсуждение результатов

На фиг.2a,в представлены графики распределения главных напряжений и толщины, а на фиг.2c,d – графики распределения эквивалентной и главных деформаций по координате материальной частицы, соответственно, для внешней и внутренней кольцевых пластин.

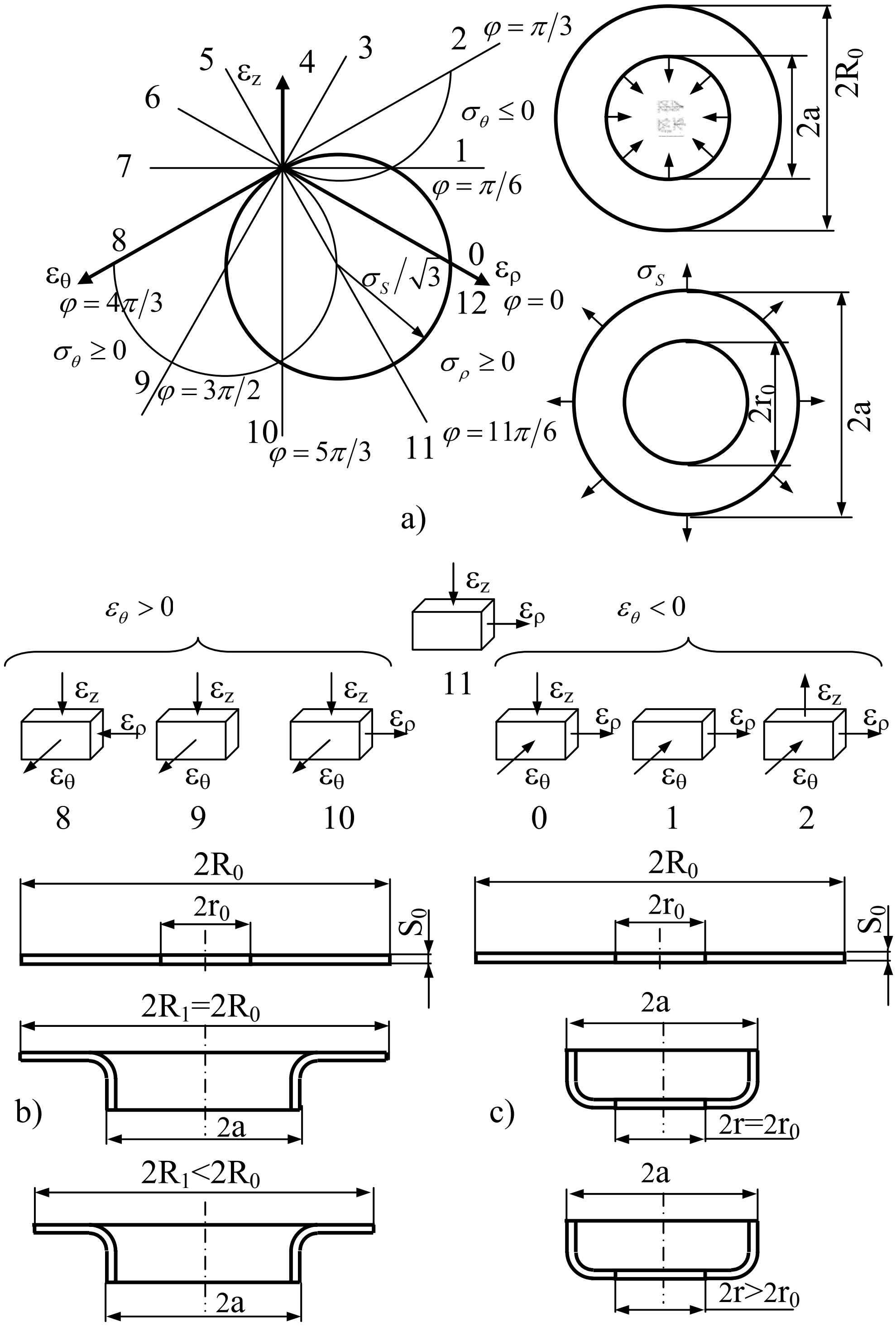
Из графиков следуют некоторые характерные особенности формоизменения кольцевых пластин. Для внешней кольцевой пластины эквивалентная деформация и радиальная компонента отличаются незначительно. На краевом участке внешняя пластина испытывает деформацию утолщения, а окружная деформация на некотором удалении от внутреннего контура достигает по абсолютной величине наибольшей величины.

Для внутренней кольцевой пластины эквивалентная деформация и деформация по толщине по абсолютной величине отличаются незначительно. Вблизи внутреннего контура внутренняя пластина испытывает деформацию радиального сжатия, а окружная деформация на некотором удалении от внешнего контура достигает наибольшей величины. Деформационное упрочнение, качественно не меняя деформированное состояние, существенно влияет на напряженное состояние. Координаты материальных частиц, разграничивающие характерные виды деформации, можно определить из зависимостей (18), (19).

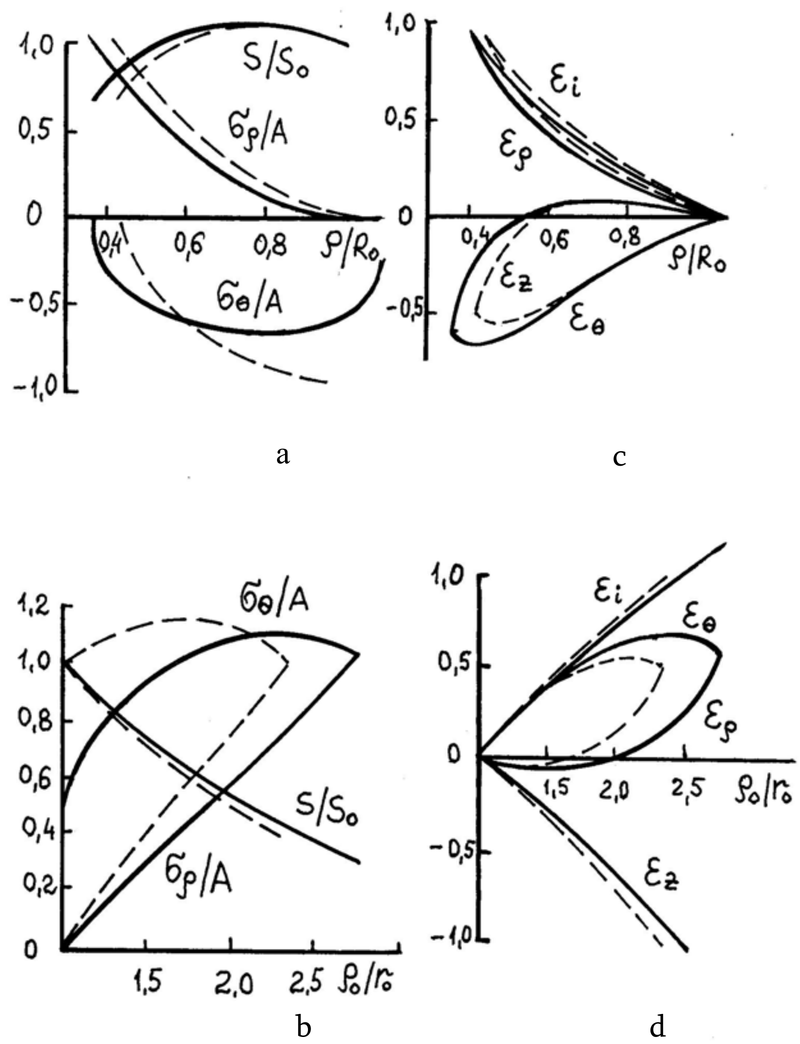
Установленное распределение деформаций может быть использовано как для определения исходных размеров кольцевых пластин по заданным размерам изделия, так и для оптимизации параметров процесса формоизменения.

Выводы.

1. Получено аналитическое решение задачи формоизменения кольцевых пластин для двухосно одноименного и разноименного напряженных состояний при взаимосвязанном изменении толщины материала и деформационного упрочнения.
2. Установлено, что относительный размер пластической области кольцевых пластин при указанных напряженных состояниях для идеально жестко-пластической модели деформируемого материала равен 2,35.
3. Показано, что деформационное упрочнение, качественно не меняя деформированное состояние, существенно влияет на напряженное состояние.



Фиг.1. Виды деформаций и напряженное состояние на π-плоскости (a)
(b – отбортовка, c – вытяжка)



Фиг.2. Распределение главных напряжений и толщины (a, b), эквивалентной и главных деформаций (c, d) для внешней и внутренней кольцевых пластин

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е.А. Основы теории листовой штамповки. М.: Машиностроение,1977. 278 с.
2. Marciniak Z., Dunkan J.L., Hu S.J. Mechanics of Sheet Metal Forming, published by Butterworth-Heinemann, 2002, 205 pp.
3. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford Classic Texts, 1998. 362 pp.
4. Назарян Э.А., Константинов В.Ф. Кинематика деформирования в формоизменяющих операциях листовой штамповки. //Вестник машиностроения. 1999. №2. С.35-41.
5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 26.03.2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика