ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 539.3

О РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИХ ШТАМПОВ ПО ГРАНИЦЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: смешанная задача, штамп, составная полуплоскость, контактные напряжения, преобразование Фурье.
Key words: mixed problem, indentation, piecewise homogeneous half-plane, Fourier transform.

Վ. Ն. Հակոբյան, Հ .Ա. Ամիրջանյան
Կտոր-առ-կտոր համասեռ կիսահարթության եզրով հավասարաչափ շարժվող բացարձակ կոշտ դրոշմների համակարգի մասին

Ուսումնասիրված է հաստատուն արագությամբ շարժվող բացարձակ կոշտ դրոշմների համակարգի կոնտակտային փոխազդեցությունը բաղադրյալ կիսահարթության հետ: Շարժվող կոորդինատական համակարգում խնդրի լուծումը բերված է երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որի լուծումը կառուցված է դիսկրետ եզակիությունններ մեթոդով:

V.N.Hakobyan, H.A. Amirjanyan
About indentation of the system of uniformly moving rigid punches in piecewise homogeneous half-plane

The contact interaction between the system of absolutely rigid stamps with constant rate of movement and compound half-plane is investigated. The solution of considered problem in movable system of coordinates is reduced to the system of second kind singular integral equations. The solution of last one is built by the method of discrete singularities.

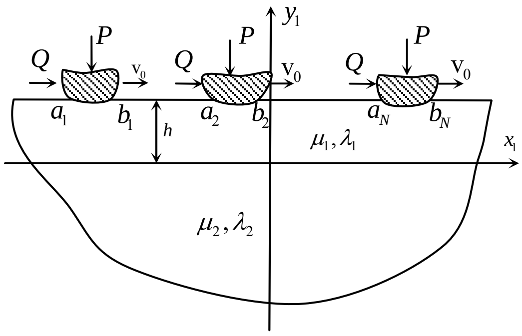
Исследована задача о контактном взаимодействии движущейся с постоянной скоростью системы абсолютно жестких штампов с упругой, кусочно-однородной полуплоскостью. В движущейся системе координат решение задачи сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений второго рода, решение которой построено численно-аналитическим методом дискретных особенностей. Выявлены закономерности изменения контактных напряжений в зависимости от физико-механических и геометрических параметров.

Исследованию контактного взаимодействия движущихся с постоянной скоростью абсолютно жестких штампов с упругой полуплоскостью или полосой посвящены работы [6-8]. В работе Н.Х.Арутюняна и В.М.Александрова [2] исследовано контактное взаимодействие движущегося с постоянной скоростью абсолютно жесткого штампа с упругой полуплоскостью через тонкую упругую накладку или через тонкий слой жидкости.

В настоящей работе исследована задача о контактном взаимодействии движущейся с постоянной скоростью системы абсолютно жестких штампов с упругой, кусочно-однородной полуплоскостью. В движущейся системе координат решение задачи сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений второго рода, решение которой построено численно-аналитическим методом дискретных особенностей. Выявлены закономерности изменения контактных напряжений в зависимости от физико-механических и геометрических параметров.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть по границе составной полуплоскости, состоящей из бесконечной упругой полосы толщины h с коэффициентами Ламэ λ_1, μ_1 и упругой полуплоскости с коэффициентами λ_2, μ_2, со скоростью v_0 равномерно движется система, состоящая из N абсолютно жёстких штампов, на каждый из которых действуют нормальные нагрузки P и горизонтальные нагрузки Q (фиг. 1). Нагрузки приложены таким образом, что штампы скользят, не переворачиваясь. Будем считать, что полоса сцеплена с полуплоскостью, скорость движения штампов v_0 меньше скорости распространения поверхностных волн в составной полуплоскости, а в зонах контакта штампов с составной полуплоскостью имеет место сухое трение, т.е. касательные напряжения, действующие под штампами, связаны с давлениями под абсолютно жёсткими штампами по закону Кулона



Фиг. 1

$$\tau_j(x) = f\,\sigma_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, N), \tag{1.1}$$

где f – коэффициент трения.

Ставится задача: определить контактное давление под абсолютно жёсткими штампами и контактные напряжения, действующие на линии контакта полуплоскости с полосой.

В движущейся со скоростью v_0 системе координат условие контакта абсолютно жёстких штампов с полуплоскостью имеет вид

$$\mathrm{v}_j(x) = \delta_j + \mathrm{g}_j(x); \quad (a_j < x < b_j); \quad (j = 1, \ldots, N), \tag{1.2}$$

где $\mathrm{v}_j(x) - (j = \overline{1, N})$ –нормальные смещения точек границы составной полуплоскости, δ_j – осадки штампов, а $\mathrm{g}_j(x)$ – функции, описывающие основания штампов.

Используя результаты работы [3], для нормальных смещений точек границы составной полуплоскости можем записать следующее выражение:

$$\begin{gathered}\mathrm{v}(x) = \frac{\vartheta_1}{2\pi\mu_1}\sum_{i=1}^{N}\int_{a_i}^{b_i}\left(\ln|x-s| + K_1\left(\frac{x-s}{h}\right)\right)\sigma_i(s)\,ds + \\ + \frac{\vartheta_1\vartheta_0}{2\pi\mu_1}\sum_{i=1}^{N}\int_{a_i}^{b_i}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-s) + K_2\left(\frac{x-s}{h}\right)\right)\tau_i(s)\,ds.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\vartheta_1 = \frac{(1-\beta_1)\alpha_{11}}{R_1^-}; \quad \vartheta_0 = \frac{C_1^-}{(1-\beta_1)\alpha_{11}};$$

$$\alpha_{ij} = \sqrt{1 - \mathrm{v}_0^2 / c_{ij}^2}; \quad \beta_j = 1 - \mathrm{v}_0^2 / 2c_{2j}^2;$$

$$c_{1j}^2 = (\lambda_j + 2\mu_j)/\rho_j; \; c_{2j}^2 = \mu_j/\rho_j; \; (i, j = 1,2);$$

$$\alpha_\pm = \alpha_{11} \pm \alpha_{21}; \; R_i^\pm = \beta_i^{\,2} \pm \alpha_{1i}\alpha_{2i}; \; C_i^\pm = \beta_i \pm \alpha_{1i}\alpha_{2i}; \; H_i^\pm = 1 \pm \alpha_{1i}\alpha_{2i};$$

$$\Delta(k) = \mu^2 R_2^- + R_1^- \left(d_1^- (\operatorname{ch}\alpha_+ k - 1) + d_2^+ \operatorname{sh}\alpha_+ k \right) +$$
$$+ R_1^+ \left(d_1^+ (\operatorname{ch}\alpha_- k - 1) + d_2^- \operatorname{sh}\alpha_- k \right);$$

$$F(k) = R_1^- \left(d_2^+ - d_1^- \right) \exp(-\alpha_+ k) + \left(R_1^- d_2^- - R_1^+ d_1^+ \right) \operatorname{ch}\alpha_- k +$$
$$+ \left(R_1^- d_1^+ - R_1^+ d_2^- \right) \operatorname{sh}\alpha_- k + \mu^2 R_2^- - R_1^- d_1^- - R_1^+ d_1^+;$$

$$G(k) = \left(R_1^- \frac{C_1^+}{C_1^-} - R_1^+ \right) \left(d_1^+ (\operatorname{ch} k\alpha_- - 1) + d_2^- \operatorname{sh} k\alpha_- \right) + \mu \left(R_1^- \frac{C_2^-}{C_1^-} - \mu R_2^- \right);$$

$$d_1^\pm = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_{11}\alpha_{21}(1-\beta_1)^2} \left(R_1^\pm H_2^- - 2\mu C_1^\pm C_2^- + \mu^2 H_1^\pm R_2^- \right);$$

$$d_2^\pm = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \pm \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \right); \; \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \; \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}; \; c = \frac{c_{22}^2}{c_{21}^2} = \frac{\mu}{\rho};$$

$$K_1(x) = \int_0^\infty \frac{F(k)}{\Delta(k) k} \cos kx \, dk, \quad K_2(x) = \int_0^\infty \frac{G(k)}{\Delta(k) k} \sin kx \, dk.$$

Подставляя значения $\mathrm{v}(x)$ из (1.3) в условия контакта (1.2), дифференцируя по x и учитывая соотношения (1.2), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$f\vartheta_0 \frac{\sigma_j(x)}{\mu_1} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{s-x} \frac{\sigma_i(s)}{\mu_1} ds + \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{h} K\left(\frac{s-x}{h} \right) \frac{\sigma_i(s)}{\mu_1} ds = \frac{g_j'(x)}{\vartheta_1} \quad (1.4)$$
$$\left(a_j < x < b_j; \quad j = 1, \ldots, N \right),$$

где

$$K(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\infty \frac{F(s)}{\Delta(s)} \sin sx \, ds + f\vartheta_0 \int_0^\infty \frac{G(s)}{\Delta(s)} \cos sx \, ds \right).$$

Систему уравнений (1.4) нужно рассматривать при условиях

$$\int_{a_j}^{b_j} \sigma_j(s) ds = P; \quad \left(j = 1, \ldots, N \right), \quad (1.5)$$

которые описывают равновесие каждого из штампов в отдельности.

Отметим, что в случае, когда $\mathrm{v}_0 = 0$, а материалы полосы и полуплоскости одинаковые, т.е. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_*$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, уравнение (1.4) переходит в известное уравнение контакта штампов с полуплоскостью с учётом сил трения [6]

$$-f\,\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\sigma_j(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{N}\int_{a_i}^{b_i}\frac{1}{s-x}\sigma_i(s)\,ds=\frac{\mu_*}{(1+\nu)}g_j'(x)\,.$$

Систему сингулярных интегральных уравнений (1.4) можно решать различными методами. В частности, методом ортогональных многочленов Якоби её можно свести к решению квазивполне регулярной системы бесконечных алгебраических уравнений [1,4]. Однако, численная реализация этих систем связана со значительными вычислительными трудностями. Исходя из этого, систему (1.4) будем решать численно-аналитическим методом дискретных особенностей [7], который, на наш взгляд, значительно облегчает и ускоряет численную реализацию полученных уравнений.

Чтобы использовать метод дискретных особенностей, при помощи замены переменных

$$x=d_j+l_jt;\quad s=d_j+l_j\tau;\quad \left(d_j=\frac{b_j+a_j}{2};l_j=\frac{b_j-a_j}{2};\right)\quad s,x\in\left(a_j,b_j\right),$$

$$\left(j=1,\ldots,N\right)$$

систему интегральных уравнений (1.4) сформулируем на интервале (-1,1) и введём обозначения

$$\sigma_j^*(t)=\frac{1}{\mu_1}\sigma_j\left(d_j+l_jt\right);\ g_j^*(t)=\frac{g_j'\left(d_j+l_jt\right)}{\vartheta_1};\quad p_j^*=\frac{P}{l_j\mu_1};$$

$$K_{ij}^*(\tau,t)=\frac{l_j}{h}K\left(\frac{l_j}{h}\left(\tau-l_j/l_i\,t+\left(d_i-d_j\right)/l_i\right)\right);\ \left(i,j=1,\ldots,N\right).$$

Получим систему

$$\begin{gathered}f\vartheta_0\sigma_j^*(t)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sigma_j^*(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\int_{-1}^{1}\frac{\sigma_i^*(\tau)}{\tau-l_j/l_i\,t+\left(d_i-d_j\right)/l_i}d\tau+\\+\sum_{i=1}^{N}\int_{-1}^{1}K_{ij}^*(\tau,t)\sigma_i^*(\tau)d\tau=g_j^*(t).\end{gathered}\tag{1.6}$$

Условия равновесия штампов при этом принимают вид

$$\int_{-1}^{1}\sigma_j^*(\tau)d\tau=p_j^*.$$

Используя известные результаты Н.И.Мусхелишвили [5] о поведении сингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования, решение уравнения (1.6) представим в виде

$$\sigma_j^*(t)=(1-t)^{\alpha_j}(1+t)^{\beta_j}\varphi_j(t)=\omega_j(t)\varphi_j(t),\tag{1.7}$$

где α_j и β_j – те решения уравнений

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha_j\pi\right)+f\vartheta_0=0;\ -\operatorname{ctg}\left(\beta_j\pi\right)+f\vartheta_0=0;\ 0<\left|\alpha_j\right|,\left|\beta_j\right|<1,$$

которые обеспечивают надлежащее поведение искомых функций в точках ±1. В частности, в случае, когда во всех концевых точках искомые функции не ограничены, α_j и β_j будут даваться формулами

$$\alpha_j = \alpha = -\frac{1}{2} + \gamma; \quad \beta_j = \beta = -\frac{1}{2} + \gamma; \qquad \gamma = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(f\vartheta_0\right).$$

Неизвестные функции $\varphi_j\left(t\right)$ заменим интерполяционными многочленами $\varphi_{nj}\left(t\right)$, определяемыми формулой

$$\varphi_{nj}\left(t\right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\varphi_{mj}^{*}\, \mathrm{P}_n^{\left(\alpha_j,\beta_j\right)}\left(t\right)}{\left(t-\tau_m\right)\mathrm{P}_n'^{\left(\alpha_j,\beta_j\right)}\left(\tau_m\right)}, \tag{1.8}$$

где $\varphi_{mj}^{*} = \varphi_{nj}\left(\tau_m^j\right)$; $\left\{\tau_m^j\right\}_{m=1}^{n}$ – корни многочлена $\mathrm{P}_n^{\left(\alpha_j,\beta_j\right)}\left(t\right)$. Подставляя представление функции $\sigma^{*}\left(t\right)$ из (1.7) в (1.6) и в условие равновесия штампов, придём к системе $\sum\limits_{j=1}^{N} n-\kappa_j+1$; $\left(\kappa_j = -\alpha_j - \beta_j\right)$ алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\varphi_{mi}^{*}\chi_m^i\left(\frac{1}{\tau_m^i - l_j/l_i\, t_k^j + \left(d_i-d_j\right)/l_i} + \pi K_{ij}^{*}\left(\tau_m^i, t_k^j\right)\right) = \mathrm{g}_j^{*}\left(t_k\right), \tag{1.9}$$

$$\sum_{m=1}^{n}\varphi_{mj}^{*}\chi_m^j = p_j^{*}. \tag{1.10}$$

Здесь $\left(j=1,\ldots,N;\ k=1,\ldots,n-\kappa_j\right)$

$$\chi_m^j = -\frac{1}{2^{\kappa_j}\sin\pi\alpha_j}\frac{\mathrm{P}_{n-\kappa_j}^{\left(-\alpha_j,-\beta_j\right)}\left(\tau_m\right)}{\mathrm{P}_n'^{\left(\alpha_j,\beta_j\right)}\left(\tau_m\right)},$$

а $\left\{t_k^j\right\}_{k=1}^{n-\kappa_j}$ – корни многочлена $\mathrm{P}_{n-\kappa_j}^{\left(-\alpha_j,-\beta_j\right)}\left(t\right)$.

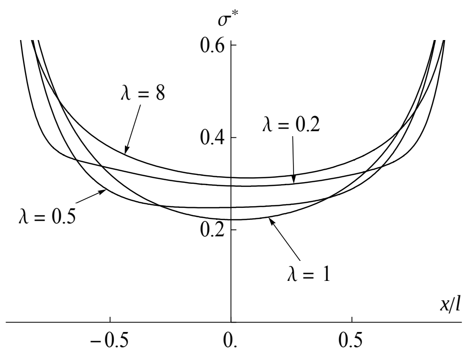
2. Численное решение некоторых частных случаев поставленной задачи

Сначала рассмотрим случай одного штампа с плоским основанием. В этом случае уравнения (1.9) и (1.10) принимают вид

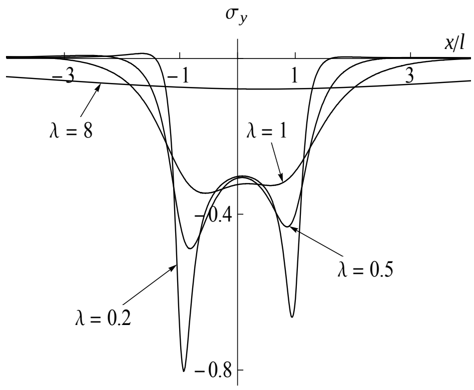
$$\sum_{m=1}^{n}\varphi_m\,\chi_m\left(\frac{1}{\tau_m - t_k} + \pi K^{*}\left(\tau_m - t_k\right)\right) = \mathrm{g}^{*}\left(t_k\right), \tag{2.1}$$

$$\sum_{m=1}^{n}\varphi_m\,\chi_m = p^{*}; \qquad \left(k=1,2\ldots,n-1\right). \tag{2.2}$$

Не нарушая общности, в уравнениях (2.1) – (2.2) приняв $p^{*}=1$, проведён численный анализ и выявлены закономерности изменения напряжений, действующих как на линии стыка полосы с полуплоскостью, так и в зоне контакта штампа с полосой, в зависимости от геометрических и механических характеристик рассматриваемой задачи, а также от скорости движения штампа. Результаты вычислений приведены в виде графиков (фиг.2-5).

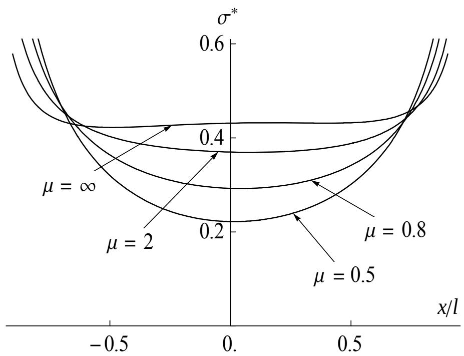


Фиг.2а

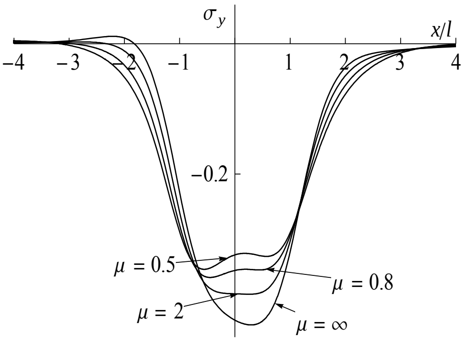


Фиг.2б

На фигурах 2а и 2б приведены графики контактных давлений, действующих под штампом и в зоне стыка полосы с полуплоскостью, соответственно, при различных значениях параметра $\lambda = h/l$, в случае, когда $\mu = 0.5$; $\rho = 1$; $v_0 = 0.4c_{21}$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $f = 0.27$. Они показывают, что при увеличении параметра λ уменьшается влияние механических характеристик полуплоскости на распределение давления под штампом и при $\lambda > 25$ имеет место практическое совпадение с распределением контактных давлений в случае однородной полуплоскости (разность составляет менее 0,6%). На линии стыка полосы с полуплоскостью при увеличении параметра λ давления в зоне, расположенной под штампами, уменьшаются.



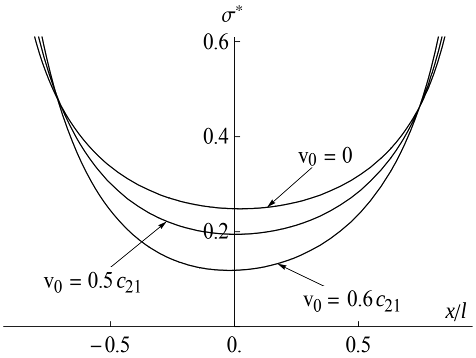
Фиг.3а



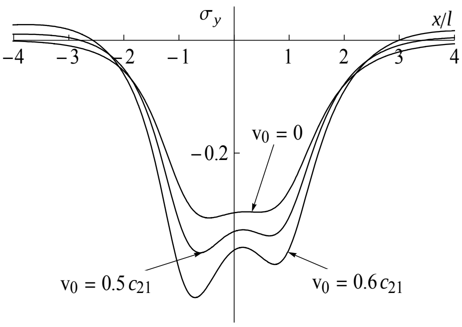
Фиг.3б

Расчеты показывают, что с увеличением отношения ρ плотностей полосы и полуплоскости давление в центре контактной зоны под штампом уменьшается, а коэффициенты концентрации напряжений увеличиваются, но изменения давления под штампом проявляются только при приближении скорости движения штампов v_0 к скорости распространения поверхностных волн и находятся в пределах 6-8%. Указанные особенности сохраняются и при других значениях μ, а в предельных случаях $\mu \to 0, \infty$, и $v_0 = 0$ все указанные величины не зависят от ρ. На фигурах 3а и 3б приведены графики контактного давления, действующего под штампом и контактных напряжений в зоне стыка полосы с полуплоскостью, соответственно, при различных значениях параметра μ, в случае, когда $\rho = 1$; $v_0 = 0.4c_{21}$;

$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $\lambda = 1$; $f = 0.27$, из которых видно, что с увеличением μ давление в центре контактной зоны под штампом увеличивается, а коэффициенты концентрации напряжений уменьшаются.

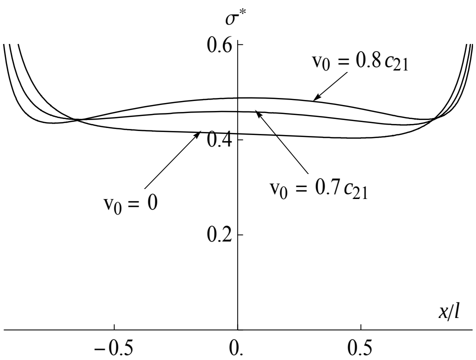


Фиг.4а

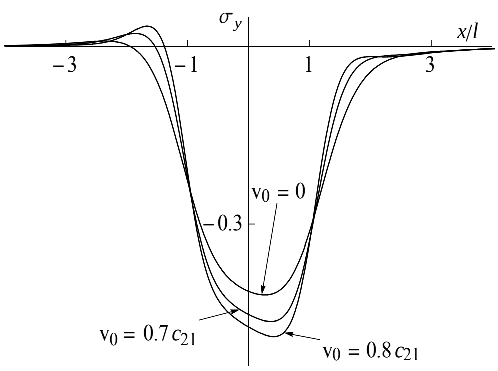


Фиг.4б

В зависимости от отношения модулей сдвига полосы и полуплоскости μ изменяется характер зависимости контактных напряжений от скорости движения штампа. Так, при больших μ с увеличением v_0 давление в центре контактной зоны под штампом увеличивается (фиг. 4: $\mu = \infty$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $\lambda = 1$; $f = 0.27$), а при малых μ уменьшается (фиг. 5: $\mu = 0.5$; $\rho = 1$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $\lambda = 1$; $f = 0.27$).



Фиг.5а



Фиг.5б

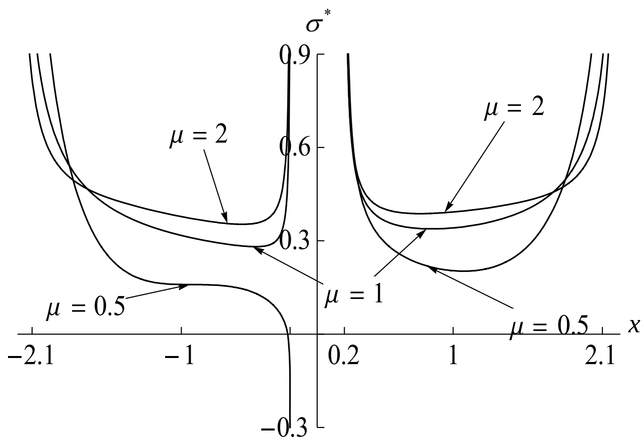
Для значений μ, близких к единице, зависимость контактных давлений от скорости движения штампа незначительна и проявляется только при скоростях, близких к фазовой скорости поверхностных волн.

Проведены также вычисления для случая двух одинаковых штампов с плоским основанием. В этом случае уравнения (1.9) и (1.10) принимают вид

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{m=1}^{n}\varphi_n^i\left(\tau_m\right)\chi_m\left(\frac{1}{\tau_m - t_k + \left(d_i - d_j\right)/l} + \pi K_{ij}^*\left(\tau_m, t_k\right)\right) = 0;$$

$$\sum_{m=1}^{n}\varphi_n^i\left(t_m\right)\chi_m = p_i^* \quad \left(i=1,2\right);\ \left(k=1,n-1\right).$$

На фиг. 6 приведены результаты для случая, когда $\mathrm{v}_0 = 0.6c_{21}$; $\rho = 1$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $f = 0.3$; $l = h$; $d = 1.2l$. Они показывают, что, когда полоса жестче полуплоскости, в передней части следящего штампа возникает зона отрицательных напряжений, что может привести к отрыву штампа от основания.



Фиг.6

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н. Напряжённо-деформированное состояние составного клина, усиленного жёстким включением. /В сб.: Механика деформируемого твёрдого тела. Ереван: Изд. АН Арм ССР, 1993. С.63-78.
2. Александров В.М., Арутюнян Н.Х. Взаимодействие движущегося упругого штампа с упругой полуплоскостью через накладку или тонкий слой идеальной жидкости. // ПММ. 1978. Т.42. Вып. 3. С.475-485.
3. Амирджанян А.А. О равномерном движении силовых нагрузок по границе кусочно-однородной полуплоскости. /В сб.: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Ереван. 2007. С.54-58.
4. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скреплёнными упругими накладками. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1972. Т.25. №2. С.15-35.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 510 с.
6. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости . М.: Гостехиздат, 1953. 296 с.
7. Лифанов И.К., Саакян А.В. Метод численного решения задачи о вдавливании движущегося штампа в упругую полуплоскость с учётом тепловыделения. //ПММ. 1982. Т.46. Вып.3. С.494-501.
8. Саакян А. В. О вдавливании пары равномерно движущихся штампов в упругую полосу. /В кн.: Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. С.217-221.

Институт механики
Поступила в редакцию

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.

Ключевые слова: колебание, цилиндрическая оболочка, микровращение, поперечный сдвиг.
Key words: vibration, cylindrical shell, microrotation, transversal shear

Ս.Ա. Համբարձումյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան
Շրջանային գլանային թաղանթի առանցքասիմետրիկ տատանումների խնդրի վերաբերյալ

Առաջարկվում է գլանային թաղանթի տատանումների հավասարումների մոդել: Հաշվի են առնվում միկրոպտույտները և լայնական սահքերը: Որոշված են մեմբրանային, ծռման և պտտական տատանումների հաճախականությունները:

S.A.Hambartsumian, M.V.Belubekyan
On a problem of axis-symmetric vibrations of circular cylindrical shell

The model of vibration equations of cylindrical shell with regard to microrotations and transversal shears is suggested. The frequency of membrane, bending and rotational vibrations are determined.

Предлагается модель уравнений колебаний цилиндрической оболочки с учетом микровращений и поперечных сдвигов. Определяются частоты мембранных, изгибных и вращательных колебаний.

1. Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка (R,h,l) в системе смешанных координат α_i (α_1 и α_2 совпадают, соответственно, с образующими и с направляющими срединной поверхности оболочки, α_3 – нормальная к срединной поверхности прямолинейная координата)

Задача решается согласно микрополярной теории [1]. Предполагается, что:

а) нормальные к срединной поверхности оболочки перемещения u_3 не зависят от координаты $\alpha_3, u_3 = w(\alpha_1)$; (1.1)

б) касательные напряжения σ_{31} по толщине оболочки меняются по заданному закону [2]

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\varphi_1(\alpha_1); \tag{1.2}$$

в) силовые напряжения σ_{33} и моментные напряжения μ_{3i} пренебрежимо малы;

г) повороты ω_1 и ω_3 равны нулю, а повороты ω_2 имеют структуру поворотов, определяемых по уточненным теориям оболочек [1,2]

$$\omega_2 = \frac{\partial w(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\psi_1(\alpha_1), \tag{1.3}$$

$w(\alpha_1), \varphi(\alpha_1), \psi(\alpha_1)$ – искомые функции.

Напряжение определяется следующим образом [1,3]:

$$\sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ji},$$
$$\mu_{ji} = (\gamma+2)\chi_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{kk}\delta_{ij}, \tag{1.4}$$

где

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)},\ \lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} - \left(ML^{-1}T^{-2}\right),$$

$$\alpha - \left(ML^{-1}T^{-2}\right);\ \gamma,\varepsilon,\beta - \left(MLT^{-2}\right)$$ – новые постоянные.

γ_{ji}, χ_{ji} – компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения, для которых имеем [1]

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1},\ \gamma_{22} = \frac{u_3}{R},\quad \gamma_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + w_2,$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} - w_2 \quad \gamma_{12} = 0,\ \gamma_{21} = 0,\ \gamma_{23} = 0, \gamma_{32} = 0, \tag{1.5}$$

$$\chi_{11} = 0,\ \chi_{22} = 0,\ \chi_{33} = 0, \chi_{12} = 0 \quad \chi_{21} = 0,\ \chi_{31} = 0, \chi_{32} = \frac{\partial w_2}{\partial \alpha_3},$$

$$\chi_{13} = 0,\ \chi_{23} = 0.$$

Поступая обычным образом [1,2], для тангенциальных перемещений $u_1(u_2 = 0)$ имеем

$$u_1 = u(\alpha_1) - \alpha_3 \frac{\partial w(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)(\varphi_1 - 2\alpha\psi_1), \tag{1.6}$$

где $u(\alpha_1)$ – искомое тангенциальное перемещение срединной поверхности.

Согласно (1.1)-(1.6) для отличных от нуля напряжений получим

$$\sigma_{11} = B\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + v\frac{w}{R}\right) - \alpha_3 B\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + I_0 \frac{B}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + 2\alpha\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$\sigma_{22} = B\left(\frac{w}{R} + v\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}\right) - \alpha_3 B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + I_0 \frac{B_{12}}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + 2\alpha\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1}\right), \tag{1.7}$$

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\varphi_1,$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1 + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1\right),$$

$$\mu_{12} = -(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + (\gamma+\varepsilon)\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1},$$

$$\mu_{21} = -(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + (\gamma-\varepsilon)\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1}, \tag{1.8}$$

$$\mu_{23}=(\gamma+\varepsilon)\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{2R}\left(\frac{h^2}{4}-\alpha_3^3\right)+\alpha_3(\gamma-\varepsilon)\right]\psi_1.$$

где

$$B=\frac{E}{1-\nu^2},\ B_{12}=\frac{\nu E}{1-\nu^2},\ I_0=\frac{\alpha_3}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{\alpha_3^2}{3}\right) \tag{1.9}$$

Далее для внутренних усилий и моментов получим:

$$T_{11}=Bh\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+B_{12}\frac{h}{R}w,\ T_{22}=B\frac{h}{R}w+B_{12}h\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}$$

$$N=\frac{h^3}{12}\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1\right) \tag{1.10}$$

$$\mu_{11}=-\frac{Bh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+\frac{Bh^5}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}+2\alpha\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}\right)$$

$$\mu_{22}=-\frac{B_{12}h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+\frac{B_{12}h^5}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}+2\alpha\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}\right) \tag{1.11}$$

$$Q_{23}=(\gamma+\varepsilon)\frac{h}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-(\gamma+\varepsilon)\frac{h^3}{12R}\psi_1 \tag{1.12}$$

$$R_{12}=-(\gamma+\varepsilon)h\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{h^3}{12}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}$$

$$R_{21}=-(\gamma-\varepsilon)h\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{h^3}{12}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1} \tag{1.13}$$

Уравнения движения имеют вид [1]:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial N}{\partial\alpha_1}-\frac{T_{22}}{R}=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{dM_{11}}{\partial\alpha_1}-\frac{h^3}{12}\phi_1=-\rho\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial t^2}-\frac{h^2}{10(\mu+\alpha)}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}-\frac{\alpha h^2}{20(\mu+\alpha)}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right), \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{R}Q_{23}+\frac{h^3}{12}\phi_1-N=-Jh\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial t^2}-\frac{h^2}{12}\frac{\mu+\alpha}{4\mu}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right),$$

где $J-\left(ML^{-1}\right)$ – динамическая характеристика среды, мера инерции при вращении, $\rho-\left(ML^{-3}\right)$ – плотность материала.

Подставляя значения внутренних усилий и моментов из (1.10)-(1.13) в уравнения (1.14), получим уравнения движения в искомых функциях $u(\alpha_1),\ w(\alpha_1),\ \varphi_1(\alpha_1),\ \psi_1(\alpha_1)$

$$Bh\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1^2}+B_{12}h\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.15}$$

$$B_{12}h\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+Bh\frac{w}{R^2}-\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{h^3}{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}-\frac{\mu\alpha h^3}{3(\mu+\alpha)}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}=-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

$$\frac{Bh^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1^3}-\frac{Bh^5}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha_1^2}+2\alpha\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1^2}\right)+\frac{h^3}{12}\varphi_1=$$
$$=\rho\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial t^2}-\frac{\alpha h^2}{20(\mu+\alpha)}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right) \quad (1.17)$$

$$(\gamma+\varepsilon)h\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1^3}-(\gamma+\varepsilon)\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1^2}-\frac{h^3}{12}\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1-$$
$$-(\gamma+\varepsilon)\frac{h}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\frac{h^3}{12}\left(\frac{\gamma+\varepsilon}{R^2}+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\right)\psi_1= \quad (1.18)$$
$$=Jh\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial t^2}-\frac{h^2}{48}\frac{\mu+\alpha}{\mu}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)$$

2. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, шарнирно закрепленную по торцам $\alpha_1=0,\ \alpha_1=l$.

Граничные условия, очевидно, запишутся следующим образом:

$$T_{11}=0, M_{11}=0,\ w=0, R_{12}=0 \text{ при } \alpha_1=0,l. \quad (2.1)$$

Решения системы уравнений (1.15)-(1.18), удовлетворяющие граничным условиям (2.1), представим следующим образом:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{iwt}\cos\lambda_n\alpha_1,\ w=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{iwt}\sin\lambda_n\alpha_1,$$
$$\phi_1=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{iwt}\cos\lambda_n\alpha_1,\ \psi_1=\sum_{n=1}^{\infty}D_n e^{iwt}\cos\lambda_n\alpha_1, \quad (2.2)$$

где A_n,B_n,C_n,D_n – постоянные интегрирования, $\lambda_n=n\pi/l,\ \omega$ – частота колебаний.

Подставляя (2.2) в систему уравнений движения (1.15)-(1.18), при этом введя следующие обозначения:

$$\eta_n=\frac{\rho\omega^2}{B\lambda_n^2},\ \xi_n=\frac{1}{R\lambda_n},\ C_n=B\lambda_n^3F_n,\ D_n=\frac{12\lambda_n}{h^2}E_n,$$
$$\zeta_n=\frac{\lambda_n^2h^2}{12},\ \alpha_0=\frac{\alpha}{\mu},\ \gamma_0=\frac{\gamma+\varepsilon}{B}\lambda_1^2,\ j_0=\frac{J\lambda_1^2}{\rho}, \quad (2.3)$$

получим следующую алгебраическую систему с безразмерными коэффициентами относительно искомых постоянных A_n,B_n,F_n,E_n:

$$(1-\eta_n)A_n-v\xi_nB_n=0 \quad (2.4)$$

$$v\xi_nA_n-(\xi_n^2-\eta_n)B_n-\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\zeta_nF_n-\frac{2(1-v)\alpha_0}{1+\alpha_0}E_n=0 \quad (2.5)$$

$$(1-\eta_n)B_n-\left[1+\frac{12\zeta_n(1-\eta_n)}{5(1-v)(1+\alpha_0)}\right]F_n-\frac{3\alpha_0}{5(1+\alpha_0)}(4-\eta_0)E_n=0 \quad (2.6)$$

$$n^2\left[\left(1+\xi_n^2\right)\gamma_0 - j_0\eta_n\right]B_n + \frac{2\alpha_0}{1+\alpha_0}\zeta_n F_n -$$

$$-\left\{\frac{2(1-\nu)\alpha_0}{1+\alpha_0} + n^2\left[\left(1+\zeta_n^2\right)\gamma_0 - \frac{1+\alpha_0}{4}j_0\eta_n\right]\right\}E_n = 0 \tag{2.7}$$

Приравнивая к нулю детерминант системы уравнений (2.4)-(2.7), получим уравнение для определения параметров частот колебаний оболочки η_n:

$$\begin{vmatrix} (1-\eta_0) & -\nu\xi_n & 0 & 0 \\ -\nu\xi_n & \left(\xi_n^2-\eta_n\right) & \dfrac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\zeta_n & \dfrac{2(1-\nu)\alpha_0}{1+\alpha_0} \\ 0 & -(1-\eta_n) & P_1 & \dfrac{3\alpha_0(4-\eta_n)}{5(1+\alpha_0)} \\ 0 & P_2 & \dfrac{2\alpha_0}{1+\alpha_0}\zeta_n & P_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.8}$$

где введены следующие обозначения:

$$P_1 = 1 + \frac{12\zeta_n(1-\eta_n)}{5(1-\nu)(1+\alpha_0)},\ P_2 = n^2 j_0\left[\left(1+\xi^2\right)\frac{\gamma_0}{j_0} - \eta_n\right],$$

$$P_3 = \frac{2(1-\nu)\alpha_0}{1+\alpha_0} + n^2 j_0\frac{(1+\alpha_0)}{4}\left[\frac{4\left(1+\xi_n^2\right)\gamma_0}{(1+\alpha_0)j_0} - \eta_n\right]. \tag{2.9}$$

Таким образом, поставленная задача решена. Имея значение упругих постоянных и геометрических размеров оболочки, мы можем вычислить значения частот свободных колебаний оболочки.

В частности, например, для пластинки $(\xi_n = 0)$, если $\alpha = 0\ (\alpha_0 = 0)$ и не учитываются сдвиговые деформации $\zeta_n << 1$, из (2.8) получаются следующие корни, определяющие частоты колебаний:

$$\eta_{n1} = 1,\quad \eta_{n2} = \zeta_n,\quad \eta_{n3} = \frac{4\gamma_0}{j_0}, \tag{2.10}$$

где первым равенством определяются частоты планарных (мембранных) колебаний, вторым равенством – изгибных колебаний, третьим равенством – внутренних вращений, при этом упругие колебания на зависят от микровращений. В этом случае, если пластинка изготовлена из материала «алюминиевая дробь в эпоксидной смоле» [4-6] со следующими характеристиками:

$$\alpha = 7{,}45\,МПа,\ \gamma+\varepsilon = 2{,}64\,KH,\ j = 0{,}429 10^{-3}\,kr/M,$$

$$\mu = 1{,}89\,ГПа,\ E = 5{,}29\,ГПа,\ \rho = 0{,}8\,kr/M^3,$$

из (2.10) согласно (2.3) получим

$$\eta_{n3} = 3{,}13\ \ 10^{-3}. \tag{2.11}$$

Сравнивая (2.11) с (2.10) с учетом (2.3) и приведенных характеристик материала, нетрудно заметить, что частоты изгибных колебаний вероятно могут совпадать с частотами колебаний вращения.

3. Рассмотрим пластинку-полосу шириной l, изготовленную из материала «алюминиевая дробь в эпоксидной смоле». Поперечные сдвиги не рассматриваются, принимается также, что $\zeta_1 << 1,\ \alpha_0 << 1$. Определим лишь первые частоты колебаний.

При указанных допущениях частота планарных колебаний определяется из равенства

$$\eta_{11} = 1. \tag{3.1}$$

Частоты изгибных и вращательных колебаний при $\nu = 0{,}4$, согласно (2.8), будут определены из следующего уравнения:

$$\begin{vmatrix} -\eta_1 & \zeta_1 & 1{,}2\alpha_0 \\ \eta_1 - 1 & 1 & 0{,}6\alpha_0\left(4-\eta_1\right) \\ \gamma_0 - j_0\eta_1 & 2\alpha_0\zeta_1 & 0{,}25\, j_0\eta_1 - \left(1{,}2\,\alpha_0 + \gamma_0\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Ниже приводится значения искомых частот колебаний в зависимости от значений относительной толщины пластинки ζ_1

Таблица

ζ_1	10^{-2}	$5\ 10^{-3}$	10^{-4}	$0{,}5\ 10^{-4}$	$\zeta \to 0$
η_{12}	$1{,}02\ 10^{-2}$	$5{,}325\ 10^{-3}$	$4{,}089\ 10^{-4}$	$3{,}555\ 10^{-4}$	$3{,}017\ 10^{-4}$
η_{13}	$1{,}63\ 10^{-4}$	$0{,}35\ 10^{-4}$	$0{,}485\ 10^{-4}$	$0{,}505\ 10^{-4}$	$0{,}548\ 10^{-4}$

Из таблицы видно, что частоты изгибных колебаний (η_{12}) при уменьшении относительной толщины пластинки уменьшаются, а частоты колебаний внутренних вращений вначале уменьшаются, а в последующем увеличиваются. Однако, обе частоты имеют предел при $\zeta_1 \to 0$. Кроме того, они не могут быть равными [5,6] в отличие от случая, рассмотренного в пункте 2.

В заключение отметим, что другой вариант двумерных уравнений микрополярных оболочек, полученный на основе применения асимптотического метода интегрирования, предложен в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАН Армении, 1999. 214 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд. МГУ, 1999. 327с.
5. Атоян А.А., Саркисян С.О. Задача динамики тонкой пластинки на основе нессиметричной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. № 2. С. 3-17.
6. Бровко Г.Л., Иванова О.А. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной структуры типа Коссера. //МТТ. 2008. № 1. С. 22-36.
7. Саркисян С.О. Общая теория упругих оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл.НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С.309–319.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.10.2008

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОИСТОГО ТОНКОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Агаловян М.Л., Геворкян Р. С.

Ключевые слова: асимптотическое решение, термоупругость, слоистость, анизотропия, динамическая задача.
Keywords: asymptotic solution, thermoelasticity, laminated, anisotropy, dynamic problem.

Մ.Լ. Աղալովյան, Ռ.Ս. Գևորգյան

Անիզոտրոպ անհամասեռ նյութից բաղկացած փոփոխական հաստության շերտավոր բարակ մարմնի համար ջերմաառաձգականության դինամիկ խնդիրների ասիմպտոտիկական լուծումները

Ելնելով անիզոտրոպ մարմնի ջերմաառաձգականության տեսության եռաչափ հավասարումներից ասիմպտոտիկ եղանակով շերտավոր անհամասեռ մարմնի համար արտածված են ռեկուրենտ հավասարումներ, որոնք ինտեգրված են յուրաքանչյուր կետում ընդլայնական z առանցքին ուղղահայաց սիմետրիայի հարթության առկայությամբ անիզոտրոպիայի դեպքում: Արտածվել են ռեկուրենտ բանաձեւեր լարումների թենզորի եւ տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների համար, երբ շերտավոր փաթեթի դիմային մակերեւույթների վրա տրված են ջերմաառաձգականության տեսության հաստատված դինամիկ խնդրի տարբեր եզրային պայմաններ: Որոշվել են հարկադրական տատանումների ամպլիտուդները: Արտածվել են սեփական տատանումների հաճախությունների դիսպերսիոն հավասարումները, որոշվել են ռեզոնանսային հաճախությունները մասնավոր դեպքի համար: Մշակվել է ձեւակերպված եզրային խնդիրների անալիտիկ լուծումները որոշելու ալգորիթմը ժամանակակից հաշվողական տեխնիկայի կիրառմամբ:

M.L. Aghalovyan, R.S. Gevorgyan

The asymptotic solutions of thermoelasticity dynamic problems for laminated thin body with variable thickness consisting of anisotropic inhomogeneous materials

On the base of three-dimentional equations of anisotropic body thermoelasticity dynamic problem the recurrent equations for laminar inhomogeneous thin body are derived by asymptotic method. The equations are integrated under the anisotropy possessing in each point with one symmetry plane, perpendicular to transversal axis z. The recurrent formulas for the determination of displacement vector component and stress tensor are derived when on the face of lamination various modifications of boundary conditions for dynamic problem of the thermoelasticity theory are specified. The amplitudes of forced vibrations are obtained. The dispersion equations of natural oscillations frequency as well as resonance frequency for special case are derived. An algorithm for determination of analytical solutions of formulated boundary problems with the help of modern computer facilities is developed.

Исходя из трехмерных уравнений динамической задачи термоупругости анизотропного тела, асимптотическим методом выведены рекуррентные уравнения для слоистого неоднородного тонкого тела, которые интегрированы при анизотропии, обладающей в каждой точке одной плоскостью симметрии, перпендикулярной к поперечной оси z. Выведены рекуррентные формулы для определения компонент вектора перемещения и тензора напряжений, когда на лицевых поверхностях слоистого пакета заданы различные варианты граничных условий установившейся динамической задачи теории термоупругости. Найдены амплитуды вынужденных колебаний. Выведены дисперсионные уравнения частот собственных колебаний, вычислены резонансные частоты для частного случая. Разработан алгоритм для определения аналитических решений поставленных краевых задач с помощью современных вычислительных средств.

Асимптотический метод решения смешанных краевых задач теории термоупругости для анизотропных полос, пластин и оболочек [1-6] оказался эффективным для получения решений как статических, так и динамических [7-12] задач. Было показано, что в случаях, когда функции, заданные на лицевых поверхностях, являются многочленами, после конечного числа шагов итерационый процесс обрывается и приводит к математически точному решению для полосы и слоя [6,11,12].

Целесообразно использовать предложенный асимптотический метод и возможности современных вычислительных средств для вывода универсального алгоритма, пригодного для определения напряженно-деформированного состояния и амплитуд вынужденных колебаний слоистого тонкого тела.

1. Постановка краевых задач. Рассмотрим слоистое тонкое тело, слои которого ограничены гладкими непересекающимися поверхностями, которые относительно некоторой прямоугольной системы координат $Oxyz$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_0(x,y)<\varphi_1(x,y)<\varphi_2(x,y)<\ldots<\varphi_{n-1}(x,y)<\varphi_n(x,y) \tag{1.1}$$

$$h=\operatorname{Sup}\left\{\max\left|\varphi_i-\varphi_{i-1}\right|\right\}<<l=\min(a,b),\ |x|\le a$$

$$|y|\le b,\ i=1,2,\ldots,n$$

Пусть лицевым поверхностям тонкого тела сообщены установившиеся во времени тангенциальные и нормальные перемещения

$$u_j(x,y,\varphi_n,t)=u_j^+(x,y,t),\ u_j(x,y,\varphi_0,t)=u_j^-(x,y,t)\quad j=x,y,z, \tag{1.2}$$

или условия первой краевой задачи теории упругости

$$\begin{aligned}&\sigma_{jx}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,x)+\sigma_{jy}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,y)+\\&+\sigma_{jz}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,z)=\bar{\Phi}_j^+(x,y,t)\quad(n,0;+,-)\end{aligned}\quad (j=x,y,z), \tag{1.3}$$

или одна из следующих комбинаций смешанных граничных условий задачи теории упругости

$$u_j(x,y,\varphi_0,t)=u_j^-(x,y,t)\ \ j=x,y,z,\ u_j(x,y,\varphi_n,t)=u_j^+(x,y,t),\ j=x,y$$

$$\begin{aligned}&\sigma_{xz}(z=\varphi_n)c\text{os}(\vartheta_n,x)+\sigma_{yz}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,y)+\\&+\sigma_{zz}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,z)=\bar{\Phi}_z^+(x,y,t)\end{aligned} \tag{1.4}$$

или

$$u_j(x,y,\varphi_0,t)=u_j^-(x,y,t)\ \ j=x,y,z,\ u_z(x,y,\varphi_n,t)=u_z^+(x,y,t)$$

$$\begin{aligned}&\sigma_{jx}(z=\varphi_n)c\text{os}(\vartheta_n,x)+\sigma_{jy}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,y)+\\&+\sigma_{jz}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,z)=\bar{\Phi}_j^+(x,y,t)\end{aligned}\quad j=x,y \tag{1.5}$$

На поверхностях контакта слоев $z=\varphi_i(x,y)$ выполняются условия полного контакта теории термоупругости

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_{jx}^{(i)}(z=\varphi_i)-\sigma_{jx}^{(i+1)}(z=\varphi_i)\right)\psi_{ix}+\left(\sigma_{jy}^{(i)}(z=\varphi_i)-\sigma_{jy}^{(i+1)}(z=\varphi_i)\right)\psi_{iy}+\\&+\sigma_{jz}^{(i)}(z=\varphi_i)-\sigma_{jx}^{(i+1)}(z=\varphi_i)=0\qquad u_j^{(i)}(z=\varphi_i)=u_j^{(i+1)}(z=\varphi_i)\\&\qquad\qquad i=1,2,\cdots,n-1\ ,\quad j=x,y,z\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь обозначены

$$\cos(\vartheta_i, x) = -\frac{1}{\delta_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \frac{1}{\delta_i}\psi_{ix} \quad (x, y), \qquad \cos(\vartheta_i, z) = \frac{1}{\delta_i}$$

$$\delta_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)^2} \qquad i = 0,1,2,\cdots,n \tag{1.7}$$

Предполагается установившийся процесс, в связи с чем не заданы начальные условия. Не заданы также граничные условия на торцах $x = \pm a, \quad y = \pm b$ тонкого тела, поскольку решается внутренняя задача (основное асимптотическое разложение). Условиями на боковой поверхности обусловлено возникновение пограничных слоев. Соответствующее решение строится отдельно [3,6]. Считается, что на слоистое тонкое тело действует также тепловое поле, влияние которого учитывается по модели Дюгамеля–Неймана, предполагается, что температурная функция $\overline{T}(x, y, z, t) = T - T_0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности и соответствующим граничным условиям [13].

Преследуется цель – разработать, по мере возможности, универсальный алгоритм, позволяющий аналитически определить и исследовать напряженно-деформированное состояние и динамику слоистого тонкого тела, используя современные вычислительные средства.

Решение поставленных задач подразумевает найти удовлетворяющие условиям (1.2)–(1.5) решения уравнений динамической задачи термоупругости и соотношений упругости анизотропного тела с учетом температурных напряжений:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + \overline{P}_x = \rho\ddot{u}_x \quad (x, y, z;\ X, Y, Z) \tag{1.8}$$

$$col\left[e_{xx} - \alpha_{11}\overline{T}, e_{yy} - \alpha_{22}\overline{T}, ..., e_{xy} - \alpha_{12}\overline{T}\right] = \left\|a_{ij}\right\|_{6\times6} col\left[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \cdots, \sigma_{xy}\right]$$

$$col\left[\sigma_{xx} + \gamma_{11}\overline{T}, \sigma_{yy} + \gamma_{22}\overline{T}, \cdots, \sigma_{xy} + \gamma_{12}\overline{T}\right] = \left\|b_{ij}\right\|_{6\times6} col\left[e_{xx}, e_{yy}, \cdots, e_{xy}\right]$$

$$\left\|b_{ij}\right\|_{6\times6} = \left\|a_{ij}\right\|_{6\times6}^{-1}, \quad a_{ij} = a_{ji},\ b_{ij} = b_{ji},\ \alpha_{ij} = \alpha_{ji},\ \gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

$$col\left[\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33,} \cdots, \gamma_{12}\right] = \left\|b_{ij}\right\|_{6\times6} col\left[\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \cdots \alpha_{12},\right] \tag{1.9}$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (x, y, z)$$

Здесь обозначены: a_{ij} – коэффициенты упругой податливости, b_{ij} – коэффициенты упругости, α_{ij} – коэффициенты линейного (теплового) расширения, причем

$$\begin{gathered} a_{ij} = a_{ij}(x, y),\ b_{ij} = b_{ij}(x, y),\ i, j = 1,2,\cdots,6 \\ \alpha_{ij} = \alpha_{ij}(x, y), \quad i, j = 1,2,3, \ \alpha_{13} = \alpha_{23} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \\ a_{1j} = a_{2j} = a_{3j} = a_{6j} = b_{1j} = b_{2j} = b_{3j} = b_{6j} = 0 \quad j = 4,5, \end{gathered} \tag{1.10}$$

поскольку материалы слоев неоднородные по направлениям координатных осей x, y и анизотропные с тринадцатью коэффициентами анизотропии (в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, перпендикулярной к оси z).

2. Вывод разрешающих уравнений. Для решения поставленных краевых задач заменяем все искомые и заданные в (1.2)– (1.6) функции их образами преобразования Фурье

$$u_x\left(x,y,z,t\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U_x\left(x,y,z,\omega\right)\sin\omega t\,d\omega$$
$$\left\{u_x,\sigma_{ij},\bar{\Phi},\bar{T},\bar{P}_x\right\}\to\left\{U_x,\tau_{ij},\Phi,\theta,P_x\right\}\quad(x,y,z)\tag{2.1}$$

(в дальнейшем, для краткости изложения, оперируя образами преобразования Фурье физических величин, за образами будут сохранены названия соответствующих физических величин) и переходим к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi=\frac{x}{l},\quad \eta=\frac{y}{l},\quad \zeta=\frac{z}{h}=\varepsilon^{-1}\frac{z}{l},\quad \varepsilon=\frac{h}{l},\quad u=\frac{U_x}{l},\ v=\frac{U_y}{l},\ w=\frac{U_z}{l},\tag{2.2}$$

где ε – геометрический малый параметр, указывающий на относительную тонкость рассматриваемого слоистого тела.

Для каждого слоя тонкого тела получаем:

$$\frac{\partial\tau_{xx}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{xy}^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\tau_{xz}^{(i)}}{\partial\zeta}+lP_x^{(i)}=-\varepsilon^{-2}\rho^{(i)}\varpi^2h^2u^{(i)}\quad\left(x,y;\xi,\eta\right)$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{yz}^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\tau_{zz}^{(i)}}{\partial\zeta}+lP_z^{(i)}=-\varepsilon^{-2}\rho^{(i)}\varpi^2h^2w^{(i)}\tag{2.3}$$

$$\tau_{xx}^{(i)}=b_{11}^{(i)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\xi}+b_{12}^{(i)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}b_{13}^{(i)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\zeta}+b_{16}^{(i)}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\xi}\right)-\gamma_{11}^{(i)}\theta^{(i)}$$
$$\left(x,y;1,2\right)$$
$$\tau_{zz}^{(i)}=b_{13}^{(i)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\xi}+b_{23}^{(i)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}b_{33}^{(i)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\zeta}+b_{36}^{(i)}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\xi}\right)-\gamma_{33}^{(i)}\theta^{(i)}$$
$$\tau_{xy}^{(i)}=b_{16}^{(i)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\xi}+b_{26}^{(i)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}b_{33}^{(i)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\zeta}+b_{36}^{(i)}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\xi}\right)-\gamma_{12}^{(i)}\theta^{(i)}\tag{2.4}$$
$$\tau_{yz}^{(i)}=b_{44}^{(i)}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\eta}\right)+b_{45}^{(i)}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\xi}\right)\quad\left(x,y;\xi,\eta;u,v;4,5\right)$$

Система уравнений (2.3) и соотношения (2.4) сингулярно возмущены геометрическим малым параметром ε, следовательно [6,14,15], решение системы складывается из двух решений: основного (проникающего) решения, доминирующего внутри области, занимаемой тонким пакетом кроме небольшой зоны вблизи её торцов, и решения задачи в пограничном слое, которое экспоненциально быстро затухает (убывает) по направлению внутренней нормали к поверхности торцов [16,17]. Это обусловлено граничными условиями (1.2)–(1.5).

Учитывая это, здесь строится только основное (внутреннее) решение.

Решение внутренней задачи, соответствующее системе (2.3),(2.4), ищется в виде [1,3,6]

$$Q^{(i)}\left(x,y,z\right)=\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{\chi_Q}Q^{(i,s)}\left(\xi,\ \eta,\ \zeta\right),\tag{2.5}$$

где Q – любая из неизвестных компонент вектора перемещения u, v, w и тензора напряжений τ_{ij}, χ_Q – асимптотический порядок соответствующей величины, $\chi_u = 0$ – для всех перемещений и $\chi_\sigma = -1$ – для всех напряжений [1-3,7]. Такие асимптотические порядки впервые установлены в [1] для краевых задач пластин постоянной толщины с аналогичными (1.2),(1.4),(1.5) кинематическими и смешанными граничными условиями.

Заданные объемные силы и температурную функцию представим для каждого слоя в виде асимптотических разложений

$$P_x^{(i)}(x,y,z) = \sum_{s=0}^{S} l^{-1}\varepsilon^{s-2} P_x^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta) \qquad (x,y,z)$$
$$\theta^{(i)}(x,y,z) = \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{s-1}\theta^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{2.6}$$

Это означает, что объемные силы и изменение температуры могут влиять на напряженно-деформированное состояние тонкого тела, начиная с первого шага итерационного процесса, если их асимптотические порядки будут, соответственно, ε^{-2} и ε^{-1}, в противном случае их влияние будет сказываться в последующих приближениях.

Подставив (2.5),(2.6) в (2.3),(2.4) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в левых и правых частях равенств, получим систему рекуррентных разрешающих уравнений в виде следующих трех дифференциальных уравнений и рекуррентных соотношений для компонент тензора напряжений:

$$b_{45}^{(i)}\frac{\partial^2 v^{(i,s)}}{\partial\zeta^2} + b_{55}^{(i)}\frac{\partial^2 u^{(i,s)}}{\partial\zeta^2} + \rho^{(i)}\omega^2 h^2 u^{(i;s)} = R_u^{(i,s)} \qquad (u,v;5,4)$$
$$\frac{\partial^2 w^{(i,s)}}{\partial\zeta^2} + \lambda_3^{(i)2} w^{(i,s)} = R_w^{(i,s)}$$
$$\tau_{xx}^{(i,s)} = b_{13}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s)}}{\partial\zeta} + \tau_{xx*}^{(i,s)} \ (x,y;1,2),\ \ \tau_{zz}^{(i,s)} = b_{33}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s)}}{\partial\zeta} + \tau_{zz*}^{(i,s)} \tag{2.7}$$
$$\tau_{xy}^{(i,s)} = b_{36}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s)}}{\partial\zeta} + \tau_{xy*}^{(i,s)},\ \ \tau_{yz}^{(i,s)} = b_{44}^{(i)}\frac{\partial v^{(i,s)}}{\partial\zeta} + b_{45}^{(i)}\frac{\partial u^{(i,s)}}{\partial\zeta} + \tau_{yz*}^{(i,s)} \qquad (x,y;u,v;4,5)$$

Здесь обозначены:

$$R_u^{(i,s)} = -P_x^{(i,s)} - \frac{\partial\tau_{xx}^{(i,s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\tau_{xy}^{(i,s-1)}}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(b_{55}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial\xi} + b_{45}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial\eta}\right)$$
$$(x,y;\xi,\eta,u,v;5,4),\ \lambda_3^{(i)} = \varpi h\sqrt{\rho^{(i)}/b_{33}^{(i)}}$$
$$R_w^{(i,s)} = \left[\gamma_{33}^{(i)}\frac{\partial\theta^{(i,s)}}{\partial\zeta} - P_z^{(i,s)} - \frac{\partial\tau_{xz}^{(i,s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\tau_{yz}^{(i,s-1)}}{\partial\eta} - \right.$$
$$\left. -\left(b_{13}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} + b_{36}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial\zeta} - \left(b_{23}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta} + b_{36}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial\zeta}\right]\Big/ b_{33}^{(i)}$$

$$\tau_{xx*}^{(i,s)}=b_{11}^{(i)}\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial\xi}+b_{12}^{(i)}\frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial\eta}+b_{16}^{(i)}\left(\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial\zeta}\right)-\gamma_{11}^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\left(x,y;\xi,\eta;u,v;1,2\right) \tag{2.8}$$

$$\tau_{zz*}^{(i,s)}=b_{13}^{(i)}\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial\xi}+b_{23}^{(i)}\frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial\eta}+b_{36}^{(i)}\left(\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial\xi}\right)-\gamma_{33}^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\tau_{xy*}^{(i,s)}=b_{16}^{(i)}\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial\xi}+b_{26}^{(i)}\frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial\eta}+b_{66}^{(i)}\left(\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial\xi}\right)-\gamma_{12}^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\tau_{yz*}^{(i,s)}=b_{44}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial\eta}+b_{45}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial\xi}\quad\left(x,y;\xi,\eta;\,u,v;4,5\right).$$

3. Общий интеграл краевых задач. Общее решение системы разрешающих уравнений (2.7) выражается следующими рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned}&w^{(i,s)}=M_w^{(i,s)}\sin\lambda_3^{(i)}\zeta+N_w^{(i,s)}\cos\lambda_3^{(i)}\zeta+I_w^{(i,s)}\left(\zeta\right)\pm\\&u^{(i,s)}=\mu_1^{(i)}(M_u^{(i,s)}\sin\lambda_1^{(i)}\zeta+N_u^{(i,s)}\cos\lambda_1^{(i)}\zeta)+\\&\quad+b_{45}^{(i)}\lambda_2^{(i)2}(M_v^{(i,s)}\sin\lambda_2^{(i)}\zeta+N_v^{(i,s)}\cos\lambda_2^{(i)}\zeta)+I_u^{(i,s)}\left(\zeta\right)\quad(u,v;1,2;4,5)\end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\lambda_{1,2}^{(i)2}=\rho^{(i)}\omega^2h^2\left(b_{44}^{(i)}+b_{55}^{(i)}\pm\sqrt{c^{(i)}}\right)\Big/(2\Delta^{(i)}),\quad c^{(i)}=(b_{55}^{(i)}-b_{44}^{(i)})^2+4b_{45}^{(i)2}$$

$$\Delta^{(i)}=b_{44}^{(i)}b_{55}^{(i)}-b_{45}^{(i)2},\ \mu_1^{(i)}=\rho^{(i)}\varpi^2h^2-b_{44}^{(i)}\lambda_1^{(i)2}\ \ (1,2;4,5)$$

$$I_u^{(i,s)}(\zeta)=\frac{1}{\lambda_1^{(i)}}\int_0^\zeta\Phi_u^{(i,s)}(\tau)\sin\lambda_1^{(i)}(\zeta-\tau)d\tau\quad(u,v,w;1,2,3)$$

$$\Phi_u^{(i,s)}(\zeta)=\left(\mu_2R_u^{(i,s-1)}(\zeta)-b_{45}^{(i)}\lambda_2^{(i)2}R_v^{(i,s-1)}(\zeta)\right)\Big/\Delta_*\quad(u,v;1,2;4,5) \tag{3.2}$$

$$\Phi_w^{(i,s)}(\zeta)=R_w^{(i,s-1)}(\zeta),\ \Delta_*^{(i)}=\rho^{(i)}\varpi^2h^2\sqrt{c^{(i)}}\,(b_{55}^{(i)}-b_{44}^{(i)}-\sqrt{c^{(i)}})\Big/(2\Delta^{(i)})$$

Соответствующие компоненты тензора напряжений вычисляются по формулам:

$$\tau_{xx}^{(i,s)}=\lambda_3^{(i)}b_{13}^{(i)}\left(M_w^{(i,s)}\cos\lambda_3^{(i)}\zeta-N_w^{(i,s)}\sin\lambda_3^{(i)}\zeta\right)+I_{xx}^{(i,s)}\quad(x,y;1,2)$$

$$\tau_{zz}^{(i,s)}=\lambda_3^{(i)}b_{33}^{(i)}\left(M_w^{(i,s)}\cos\lambda_3^{(i)}\zeta-N_w^{(i,s)}\sin\lambda_3^{(i)}\zeta\right)+I_{zz}^{(i,s)}$$

$$\tau_{xy}^{(i,s)}=\lambda_3^{(i)}b_{36}^{(i)}\left(M_w^{(i,s)}\cos\lambda_3^{(i)}\zeta-N_w^{(i,s)}\sin\lambda_3^{(i)}\zeta\right)+I_{xy}^{(i,s)}$$

$$\begin{aligned}&\tau_{xz}^{(i,s)}=\alpha_1^{(i)}\left(M_u^{(i,s)}\cos\lambda_1^{(i)}\zeta-N_u^{(i,s)}\sin\lambda_1^{(i)}\zeta\right)+\\&+\beta_2^{(i)}\left(M_v^{(i,s)}\cos\lambda_2^{(i)}\zeta-N_v^{(i,s)}\sin\lambda_2^{(i)}\zeta\right)+I_{xz}^{(i,s)}\end{aligned}\quad(x,y;u,v;1,2) \tag{3.3}$$

$$I_{xz}^{(i,s)}(\zeta)=\tau_{xz*}^{(i,s)}+b_{45}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\zeta}I_v^{(i,s)}(\zeta)+b_{55}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\zeta}I_u^{(i,s)}(\zeta)\ \ (x,y;u,v;4,5)$$

$$I_{xx}^{(i,s)}(\zeta)=\tau_{xx*}^{(i,s)}+b_{13}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\zeta}I_w^{(i,s)}(\zeta)\ (xx,yy,zz,xy;13,23,33,36)$$

$$\alpha_1^{(i)}=\lambda_1^{(i)}(b_{55}^{(i)}\mu_1^{(i)}+b_{45}^{(i)}\lambda_1^{(i)2}),\ \beta_2^{(i)}=\lambda_2^{(i)}b_{45}^{(i)}(\mu_2^{(i)}+b_{55}^{(i)}\lambda_2^{(i)2})\quad(1,2;4,5).$$

Общий интеграл (3.1)–(3.3) поставленных краевых задач для каждого шага итерации содержит 6n функций интегрирования, которые однозначно определяются из 6(n–1) условий контакта слоев (1.4) и одной из комбинаций условий (1.2) – (1.5), каждая из которых состоит из шести граничных условий. Это свидетельствует о том, что сформулированные в первом параграфе краевые задачи являются вполне корректными для слоя $(-\infty < x, y < +\infty)$ переменной толщины и для тонкого тела конечных размеров $(|x| \le a, |y| \le b)$. Во втором случае полученное решение будет доминирующим во внутренних точках тела, кроме небольшой зоны пограничного слоя вблизи краев $x = \pm a,\ y = \pm b$ [16,17].

Удовлетворяя условиям контакта между слоями и граничными условиями, получим систему из 6n линейных алгебраических уравнений, которую запишем в матричной форме:

$$
\begin{gathered}
col \left| M_u^{(1,s)}, N_u^{(1,s)}, M_v^{(1,s)}, N_v^{(1,s)}, M_w^{(1,s)}, N_w^{(1,s)}, \cdots, M_u^{(n,s)}, N_u^{(n,s)}, \right. \\
\left. M_v^{(n,s)}, N_v^{(n,s)}, M_w^{(n,s)}, N_w^{(n,s)} \right| = \left\| c_{mk} \right\|_{(6n)\times(6n)}^{-1} \left\| d_m \right\|_{(6n)\times 1}
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Элементы матрицы $\left\| c_{mk} \right\|_{(6n)\times(6n)}$ и матрицы-столбца $\left\| d_m \right\|_{(6n)\times 1}$, соответствующие условиям контакта (1.6), являются общими для всех четырех сформулированных краевых задач (1.2)–(1.5). После удовлетворения условий полного контакта слоев (1.6) определяются следующие 6(n–1) элементы матрицы $\left\| c_{mk} \right\|_{(6n)\times(6n)}$ и $\left\| d_m \right\|_{(6n)\times 1}$:

$$
\begin{gathered}
c_{mm} = \alpha_1^{(i)} q_1^{(i)}, \quad c_{m(m+1)} = -\alpha_1^{(i)} p_1^{(i)},\ c_{m(m+2)} = \beta_2^{(i)} q_2^{(i)},\ c_{m(m+3)} = -\beta_2^{(i)} p_2^{(i)} \\
c_{m(m+4)} = \lambda_3^{(i)} D_1^{(i)} q_3^{(i)}, \ c_{m(m+5)} = -\lambda_3^{(i)} D_1^{(i)} p_3^{(i)},\ c_{m(m+6)} = -\alpha_1^{(i+1)} q_1^{*(i)} \\
c_{m(m+7)} = \alpha_1^{(i+1)} p_1^{*(i)}, c_{m(m+8)} = -\beta_2^{(i+1)} q_2^{*(i)}, c_{m(m+9)} = \beta_2^{(i+1)} p_2^{*(i)} \\
c_{m(m+10)} = -\lambda_3^{(i+1)} D_1^{*(i)} q_3^{*(i)},\ c_{m(m+11)} = \lambda_3^{(i+1)} D_1^{*(i)} p_3^{*(i)} \\
(c_{mj}, c_{(m+1)j}; 1,2),\ j = m, (m+1), \cdots, (m+11) \\
c_{(m+2)m} = E_1^{(i)} q_1^{(i)},\ c_{(m+2)(m+1)} = -E_1^{(i)} p_1^{(i)},\ c_{(m+2)(m+2)} = E_2^{(i)} q_2^{(i)} \\
c_{(m+2)(m+3)} = -E_2^{(i)} p_2^{(i)} \ \ c_{(m+2)(m+4)} = \lambda_3^{(i)} b_{33}^{(i)} q_3^{(i)},\ c_{(m+2)(m+5)} = -\lambda_3^{(i)} b_{33}^{(i)} p_3^{(i)} \\
c_{(m+2)(m+6)} = -E_1^{*(i)} q_1^{*(i)},\ c_{(m+2)(m+7)} = E_1^{*(i)} p_1^{*(i)},\ c_{(m+2)(m+8)} = -E_2^{*(i)} q_2^{*(i)} \qquad (3.5) \\
c_{(m+2)(m+9)} = E_2^{*(i)} p_2^{*(i)},\ c_{(m+2)(m+10)} = -\lambda_3^{(i+1)} b_{33}^{(i+1)} q_3^{*(i)},\ c_{(m+2)(m+11)} = \lambda_3^{(i+1)} b_{33}^{(i+1)} p_3^{*(i)}, \\
c_{(m+3)m} = \mu_1^{(i)} p_1^{(i)},\ c_{(m+3)(m+1)} = \mu_1^{(i)} q_1^{(i)},\ c_{(m+3)(m+2)} = b_{45}^{(i)} \lambda_2^{(i)2} p_2^{(i)}, \\
c_{(m+3)(m+3)} = b_{45}^{(i)} \lambda_2^{(i)2} q_2^{(i)},\ c_{(m+3)(m+6)} = -\mu_1^{(i+1)} p_1^{*(i)}, c_{(m+3)(m+7)} = -\mu_1^{(i+1)} q_1^{*(i)}, \\
c_{(m+3)(m+8)} = -b_{45}^{(i+1)} \lambda_2^{(i+1)2} p_2^{(i)}, c_{(m+3)(m+9)} = -b_{45}^{(i+1)} \lambda_2^{(i+1)2} q_2^{(i)}, \\
c_{(m+3)(m+k)} = 0, \ \ k = 5,6, k > 9 \ \ (c_{(m+3)j}, c_{(m+4)j}; 1,2) \\
c_{(m+5)(m+4)} = p_3^{(i)},\ c_{(m+5)(m+5)} = q_3^{(i)},\ c_{(m+5)(m+10)} = p_3^{*(i)},\ c_{(m+5)(m+11)} = q_3^{*(i)} \\
c_{(m+5)(m+k)} = 0, \ \ k = 0,1,\cdots,9, \ \ k > 11, \quad c_{mk} = c_{(m+1)k} = \cdots = c_{(m+5)k} = 0, \ k < m \\
d_m^{(s)} = \left(I_{xx}^{(i+1,s)}(\zeta_i) - I_{xx}^{(i,s)}(\zeta_i) \right) \psi_{ix} + \left(I_{xy}^{(i+1,s)}(\zeta_i) - I_{xy}^{(i,s)}(\zeta_i) \right) \psi_{iy} +
\end{gathered}
$$

$$+I_{xz}^{(i+1,s)}(\zeta_i)-I_{xz}^{(i,s)}(\zeta_i)\ \ \big(m,(m+1),(m+2);x,y,z\big)$$

$$d_{(m+3)}^{(s)}=I_u^{(i+1,s)}(\zeta_i)-I_u^{(i,s)}(\zeta_i)\qquad\big((m+3),(m+4),(m+5);u,v,w\big)$$

Здесь обозначены

$$p_k^{(i)}=\sin\lambda_k^{(i)}\zeta_i,\ p_k^{*(i)}=\sin\lambda_k^{(i+1)}\zeta_i,\ \mathrm{q}_k^{(i)}=\cos\lambda_k^{(i)}\zeta_i,\ \mathrm{q}_k^{*(i)}=\cos\lambda_k^{(i+1)}\zeta_i,\ \mathrm{k=1,2,3}$$

$$D_1^{(i)}=\lambda_3^{(i)}(b_{13}^{(i)}\psi_{ix}+b_{36}^{(i)}\psi_{iy}),\ \ D_1^{*(i)}=\lambda_3^{(i+1)}(b_{13}^{(i+1)}\psi_{ix}+b_{36}^{(i+1)}\psi_{iy})\ \ (1{,}2;x,y)\quad(3.6)$$

$$E_1^{(i)}=\alpha_1^{(i)}\psi_{ix}+\beta_1^{(i)}\psi_{iy},\ \ E_1^{*(i)}=\alpha_1^{(i+1)}\psi_{ix}+\beta_1^{(i+1)}\psi_{iy}\quad(1{,}2;x,y)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.2) при $\zeta_0=\varphi_0/h$, получим элементы еще трех строк матриц

$$c_{(6n-5)1}=\mu_1^{(1)}p_1^{*(0)},\ c_{(6n-5)2}=\mu_1^{(1)}q_1^{*(0)},\ c_{(6n-5)3}=b_{45}^{(1)}\lambda_2^{(1)2}p_2^{*(0)},$$

$$c_{(6n-5)4}=b_{45}^{(1)}\lambda_2^{(1)2}q_2^{*(0)},\ c_{(6n-5)k}=0,\ \ k>4,\ d_{(6n-5)}^{(s)}=U^{-(s)}/l-I_u^{(1,s)}(\zeta_0)$$

$$c_{(6n-4)1}=b_{45}^{(1)}\lambda_1^{(1)2}p_1^{*(0)},\ c_{(6n-4)2}=b_{45}^{(1)}\lambda_1^{(1)2}q_1^{*(0)},\ c_{(6n-4)3}=\mu_2^{(1)}p_2^{*(0)}\qquad(3.7)$$

$$c_{(6n-4)4}=\mu_2^{(1)}q_2^{*(0)},\ c_{(6n-4)k}=0,\ \ k>4,\ d_{(6n-4)}^{(s)}=V^{-(s)}/l-I_v^{(1,s)}(\zeta_0)$$

$$c_{(6n-3)5}=p_3^{*(0)},\ \ c_{(6n-3)5}=q_3^{*(0)},\ c_{(6n-3)k}=0,\ k=1,2,3,4,\ k>6$$

$$d_{(6n-3)}^{(s)}=W^{-(s)}/l-I_w^{(1,s)}(\zeta_0),\ U^{\pm(0)}=U^{\pm},\ \ U^{\pm(s)}=0,\ \ s>0\ \ (U,V,W)$$

Из условий (1.2) при $\zeta_n=\varphi_n/h$ для тангенциальных перемещений получаем элементы двух предпоследних строк:

$$c_{(6n-2)(6n-5)}=\mu_1^{(n)}p_1^{(n)},\ c_{(6n-2)(6n-4)}=\mu_1^{(n)}q_1^{(n)},\ c_{(6n-2)(6n-3)}=b_{45}^{(n)}\lambda_2^{(n)2}p_2^{(n)}$$

$$c_{(6n-2)(6n-2)}=b_{45}^{(n)}\lambda_2^{(n)2}q_2^{(n)},\ c_{(6n-2)k}=0,\ \ k<(6n-5),\ k=(6n-1),(6n)\qquad(3.8)$$

$$c_{(6n-1)(6n-5)}=b_{45}^{(n)}\lambda_1^{(n)2}p_1^{(n)},\ c_{(6n-1)(6n-4)}=b_{45}^{(n)}\lambda_1^{(n)2}q_1^{(n)},\ c_{(6n-1)(6n-3)}=\mu_2^{(n)}p_2^{(n)}$$

$$c_{(6n-1)(6n-2)}=\mu_2^{(n)}q_2^{(n)},\ c_{(6n-2)k}=0,\ \ k<(6n-5),\ k=(6n-1),(6n)$$

$$d_{(6n-1)}^{(s)}=V^{+(s)}/l-I_v^{(n,s)}(\zeta_n),\ \ d_{(6n-2)}^{(s)}=U^{+(s)}/l-I_u^{(n,s)}(\zeta_n)$$

а элементы последней строки получаем из граничного условия (1.2) для нормального перемещения

$$c_{(6n)(6n-1)}=p_3^{(n)},\ c_{(6n)(6n)}=q_3^{(n)},\ c_{(6n)k}=0,\ \ k<(6n-1)\qquad(3.9)$$

$$d_{(6n)}^{(s)}=W^{+(s)}/l-I_w^{(n)}(\zeta_0).$$

Следовательно, решение краевой задачи с граничными условиями (1.2) определяется рекуррентными формулами (2.5),(3.1)–(3.3), где функции интегрирования определяются из матричного уравнения (3.4), когда элементы матриц имеют вид (3.5)–(3.9). Условием существования решения является

$$\Delta_u=\det\left\|c_{mk}\right\|_{(6n)\times(6n)}\neq 0.\qquad(3.10)$$

Для решения краевой задачи с граничными условиями (1.3) изменятся элементы только последних шести строк матриц в левых и правых частях (3.4) следующим образом:

удовлетворив граничным условиям (1.3) при $\zeta_0=\varphi_0/h$, получаем

$$c_{(6n-5)1}=\alpha_1^{(1)}q_1^{*(0)},\ c_{(6n-5)2}=-\alpha_1^{(1)}p_1^{*(0)},\ c_{(6n-5)3}=\beta_2^{(1)}q_2^{*(0)},\ c_{(6n-5)4}=-\beta_2^{(1)}p_2^{*(0)},$$

$$c_{(6n-5)5}=\lambda_3^{(1)}D_1^{*(0)}q_3^{*(0)},\ c_{(6n-5)6}=-\lambda_3^{(1)}D_1^{*(0)}p_3^{*(0)},\ c_{(6n-2)k}=0,\ \ k>6$$
$$d_{(6n-5)}^{(s)}=\delta_0\Phi_x^{-(s)}-I_{xx}^{(1,s)}(\zeta_0)\psi_{0x}-I_{xy}^{(1,s)}(\zeta_0)\psi_{0y}-I_{xz}^{(1,s)}(\zeta_0)$$
$$\left((6n-5),(6n-4);1,2;x,y\right) \tag{3.11}$$
$$c_{(6n-3)1}=E_1^{*(0)}q_1^{*(0)},\ c_{(6n-3)2}=-E_1^{*(0)}p_1^{*(0)},\ c_{(6n-3)3}=E_2^{*(0)}q_2^{*(0)},$$
$$c_{(6n-3)4}=-E_2^{*(0)}p_2^{*(0)},\ c_{(6n-3)5}=\lambda_3^{(1)}b_{33}^{(1)}q_3^{*(0)},\ c_{(6n-3)6}=-\lambda_3^{(1)}b_{33}^{(1)}p_3^{*(0)},$$
$$c_{(6n-3)k}=0,\ \ k>6\ \ d_{(6n-3)}^{(s)}=\delta_0\Phi_z^{-(s)}-I_{xz}^{(1,s)}(\zeta_0)\psi_{0x}-I_{yz}^{(1,s)}(\zeta_0)\psi_{0y}-I_{zz}^{(1,s)}(\zeta_0)$$
$$\Phi_{\vartheta j}^{(0)}=\varepsilon\Phi_j^{\pm},\ \Phi_{\vartheta j}^{(s)}=0\ \ s>0,\ \ j=x,y,z\ ,$$
при $\zeta_n=\varphi_n/h$ из условий (1.3) для тангенциальных напряжений имеем:
$$c_{(6n-2)(6n-5)}=\alpha_1^{(n)}q_1^{(n)},\ c_{(6n-2)(6n-4)}=-\alpha_1^{(n)}p_1^{(n)},\ c_{(6n-2)(6n-3)}=\beta_2^{(n)}q_2^{(n)}$$
$$c_{(6n-2)(6n-2)}=-\beta_2^{(n)}p_2^{(n)},\ c_{(6n-2)(6n-1)}=\lambda_3^{(n)}D_1^{(n)}q_3^{(n)}\ \ c_{(6n-2)(6n)}=-\lambda_3^{(n)}D_1^{(n)}p_3^{(n)},$$
$$c_{(6n-2)k}=0,\ \ k<6n-5\ , \tag{3.12}$$
$$d_{(6n-2)}^{(s)}=\delta_n\Phi_x^{+(s)}-I_{xx}^{(n,s)}(\zeta_n)\psi_{nx}-I_{xy}^{(n,s)}(\zeta_n)\psi_{ny}-I_{xz}^{(n,s)}(\zeta_n)$$
$$\left((6n-2),(6n-1);1,2;x,y\right)$$
и для нормальных напряжений
$$c_{(6n)(6n-5)}=E_1^{(n)}q_1^{(n)},\ c_{(6n)(6n-4)}=-E_1^{(n)}p_1^{(n)},\ c_{(6n)(6n-3)}=E_2^{(n)}q_2^{(n)} \tag{3.13}$$
$$c_{(6n)(6n-2)}=-E_2^{(n)}p_2^{(n)},\ c_{(6n)(6n-1)}=\lambda_3^{(n)}b_{33}^{(n)}q_3^{(n)},\ c_{(6n)(6n)}=-\lambda_3^{(n)}b_{33}^{(n)}p_3^{(n)}$$
$$c_{(6n)k}=0,k<(6n-5),\ d_{(6n)}^{(s)}=\delta_n\Phi_z^{+(s)}-I_{xz}^{(n,s)}(\zeta_n)\psi_{nx}-I_{yz}^{(n,s)}(\zeta_n)\psi_{ny}-I_{zz}^{(n,s)}(\zeta_n)$$
Следовательно, решение краевой задачи с граничными условиями (1.3) определяется теми же рекуррентными формулами (2.5),(3.1)–(3.3), где функции интегрирования определяются из матричного уравнения (3.4), когда элементы матриц имеют вид (3.5),(3.6),(3.11)–(3.13), условием существования решения является
$$\Delta_\sigma=\det\left\|c_{mk}\right\|_{(6n)\times(6n)}\neq 0\,. \tag{3.14}$$
В решениях краевых задач со смешанными граничными условиями изменятся элементы только части последних шести строк матриц (3.4). Для задачи со смешанными граничными условиями (1.4) элементами матрицы будут (3.5)–(3.8), (3.13), а условие существования решения будет
$$\Delta_{1(u\sigma)}=\det\left\|c_{mk}\right\|_{(6n)\times(6n)}\neq 0\,. \tag{3.15}$$
А для задачи со смешанными граничными условиями (1.5) элементами матрицы будут (3.5)–(3.7), (3.9), (3.12) с условием существования решения
$$\Delta_{2(u\sigma)}=\det\left\|c_{mk}\right\|_{(6n)\times(6n)}\neq 0\,. \tag{3.16}$$
Заметим, что выведенные рекуррентные формулы решений сформулированных краевых задач после каждого шага итерации подразумевают интегрирование по поперечной координате $z(\zeta)$ и дифференцирование по продольным координатам $x,y\ (\xi,\eta)$, следовательно, итерационный процесс позволяет решить краевые задачи с любой асимптотической точностью $O(\varepsilon^s)$, если все заданные в условиях задач величины, в том числе физико-механические коэффициенты, вместе со своими

производными необходимого порядка являются функциями класса C^S с изменяемостью $O(\varepsilon^0)$ [14].

Из условий (3.10),(3.14),(3.15),(3.16) существования решений краевых задач следует, что невыполнение этих условий приводит к резкому возрастанию амплитуд колебаний. Нетрудно доказать, что уравнения

$$\Delta_u = 0,\ \ \Delta_\sigma = 0,\ \ \Delta_{1(u\sigma)} = 0,\ \ \Delta_{2(u\sigma)} = 0 \tag{3.17}$$

являются дисперсионными уравнениями главных значений частот собственных колебаний анизотропного слоистого тонкого тела. Поскольку для слоистого тела решение уравнений (3.17) в общем случае громоздко, приведем решение дисперсионного уравнения $\Delta_u = 0$ и соответствующие им значения собственных частот для однослойного анизотропного неоднородного тела (слоя) переменной толщины:

$$\sin\lambda_3(\zeta_1 - \zeta_0) = 0,\ \ \varpi_{rez.} = \frac{\pi k}{\varphi_1 - \varphi_0}\sqrt{\frac{b_{33}}{\rho}} \tag{3.18}$$

$$\sin\lambda_1(\zeta_1 - \zeta_0) = 0,\ \ \sin\lambda_2(\zeta_1 - \zeta_0) = 0,\ \varpi_{rez.} = \frac{\pi k}{\varphi_1 - \varphi_0}\sqrt{\frac{2\Delta}{\rho(b_{44} + b_{55} \pm \sqrt{c})}}$$

Заметим, что собственные частоты являются функциями продольных координат x, y.

Резюмируя приведенное выше, можем констатировать, что асимптотический метод позволяет найти решения широкого класса динамических задач для слоистых, неоднородных и анизотропных тел. При этом, выведенные рекуррентные соотношения могут служить готовым алгоритмом для получения окончательного решения не только численно, но и аналитически, используя современные вычислительные средства.

Укажем также, что полученные результаты применимы для решения так называемых "некорректных по Адамару" [18] краевых задач, т.е. когда на одной лицевой поверхности тела условий заданы больше чем надо, а на противоположной – наоборот, заданы меньше условий, чем необходимо.Такие задачи встречаются, в частности, в геофизике при изучении тектоники литосферных плит по данным системы GPS (Система Глобального Местоположения) – в определенном регионе заданы перемещения точек свободной от нагрузки поверхности земли (данные системы GPS) за определенное время. Требуется изучить напряженно-деформированное состояние земной коры [18,19] данного региона. Для решения такой задачи из всех комбинаций граничных условий (1.2)–(1.3) нужно выбирать все шесть условия с верхним индексом “+”, а именно:

$$\sigma_{jx}\left(z = \varphi_n\right)c\,\text{os}\left(\vartheta_n, x\right) + \sigma_{jy}\left(z = \varphi_n\right)\cos\left(\vartheta_n, y\right) + \sigma_{jz}\left(z = \varphi_n\right)\cos\left(\vartheta_n, z\right) =$$
$$= \bar{\Phi}_j^{+}\left(x, y, t\right),\ u_j(x, y, \varphi_n, t) = u_j^{+}(x, y, t),\ \left(j = x, y, z\right). \tag{3.19}$$

Найденное общее асимптотическое решение позволяет удовлетворить и этим условиям. Удовлетворив им, элементы матрицы (3.4) определятся по формулам (3.5), (3.6), (3.8), (3.9) и

$$c_{(6n-5)(6n-5)} = \alpha_1^{(n)} q_1^{(n)},\ c_{(6n-5)(6n-4)} = -\alpha_1^{(n)} p_1^{(n)},\ c_{(6n-5)(6n-3)} = \beta_2^{(n)} q_2^{(n)},$$
$$c_{(6n-5)(6n-2)} = -\beta_2^{(0)} p_2^{(0)},$$
$$c_{(6n-5)(6n-1)} = \lambda_3^{(n)} D_1^{(n)} q_3^{(n)},\ c_{(6n-5)(6n)} = -\lambda_3^{(n)} D_1^{(n)} p_3^{(n)},$$

$$c_{(6n-5)k}=0,\ \ k<6n-5\,,$$
$$d^{(s)}_{(6n-5)}=\delta_n\Phi^{+(s)}_x-I^{(n,s)}_{xx}(\zeta_n)\psi_{nx}-I^{(n,s)}_{xy}(\zeta_n)\psi_{ny}-I^{(n,s)}_{xz}(\zeta_n)\,,$$
$$\big((6n-5),(6n-4);1,2;x,y\big),\ c_{(6n-3)}=0,k=(6n-5) \tag{3.20}$$
$$c_{(6n-3)(6n-5)}=E^{(n)}_1q^{(n)}_1\,,\ c_{(6n-3)(6n-4)}=-E^{(n)}_1p^{(n)}_1\,,\ c_{(6n-3)(6n-3)}=E^{(n)}_2q^{(n)}_2$$
$$c_{(6n-3)(6n-2)}=-E^{(n)}_2p^{(n)}_2\,,\ c_{(6n-3)(6n-1)}=\lambda^{(n)}_3b^{(n)}_{33}q^{(n)}_3\,,c_{(6n-3)(6n)}=-\lambda^{(n)}_3b^{(n)}_{33}p^{(n)}_3$$
$$d^{(s)}_{(6n-3)}=\delta_n\Phi^{+(s)}_z-I^{(n,s)}_{xz}(\zeta_n)\psi_{nx}-I^{(n,s)}_{yz}(\zeta_n)\psi_{ny}-I^{(n,s)}_{zz}(\zeta_n)\,.$$

Работа выполнена при поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учёными из новых независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 06-100017-8886).

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией //Сб.тр. IV Всесоюзн. Симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С.105-110.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С.271-278.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Смешанные краевые задачи для анизотропных пластин переменной толщины // ПММ. 1996. Т.60. Вып.2. С. 290–298.
5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек // Изв. АН АрмССР. Механика. 1989. Т.42. №3. С.28-36.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во „Гитутюн" НАН РА, 2005. 468 с.
7. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V., Ghulghazaryan L.G. Analysis of Forced Vibrations of Base-Foundation Packet and Seismoisolator on the Base of Dinamic Equations Theory //Proccedings of the Third World Conference on Structural Control. Como, Italy.2002. P.759-764.
8. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V. Optimization of the Resistance of Base-foundation Packet of constructions under Seismic and Force Actions // Third European Conference on Structural Control.Vienna. Austria.2004. P. M6-21–M6-24.
9. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L. On Forced Vibrations of Beams under Seismic and Force Actions when There is a Viscous Resistance // Third European Conference on Structural. Control Vienna. Austria. 2004. P. M6-26–M6-28.
10. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы.// Докл. НАН РА. 2003. №4. С. 296-301.

11. Агаловян М.Л. Асимптотика решения пространственной динамической задачи для анизотропных пластин. //В сб.: Механика оболочек и пластин (Тр. XX международной конф. по теории оболочек и пластин). Изд.: Нижегородского Госунта, Нижний Новгород, РФ. 2002. С.78-82.
12. Агаловян М.Л. Пространственная задача о вынужденных колебаниях пластин с общей анизотропией.//В сб.: Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Ереван: “Гитутюн” НАН Армении, 2006. С. 42-49.
13. Nowacki W.Dynamiczne zagadnienia termosprezystosci. Warszawa: PWN, 1966= Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
14. Немировский В.Ю., Янковский А.П. Метод асимптотических разложений решений задач стационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин.//ПММ. 2008. Т.72. Вып.1. С.157-175.
15. Немировский В.Ю., Янковский А.П. Асимптотический анализ стационарной задачи теплопроводности конструктивно и физически неоднородных композитных стержней при анизотропии общего вида.// Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №4. С.71-85.
16. Геворкян Р.С. Асимптотические решения установившихся динамических (связанных) задач термоупругости для изотропных пластин. // ПММ. АН РФ. 2008. Вып.1. С.148-156.
17. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
18. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.
19. Агаловян Л.А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач // Межвуз. сб. н.трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. С.51-58.
20. Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв.АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. №6. С.3-15.
21. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
22. Lenser A. Aghalovyan, Ruben S. Gevorgyan, Avetik V.Sahakyan. Mathematical Simulation of Collision of Arabian and Euroasian Plates on the Base of GPS Data // Изв.НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №4. С.3-9.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.10.2008

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ РАЗЛИЧНЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ УПРУГИМИ СТРИНГЕРАМИ

Григорян Э.Х., Оганисян Г.В.

Ключевые слова: пластина, контакт, стрингер, сингулярное интегральное уравнение, функциональное уравнение, асимптотика.
Keywords: plate, contact, stringer, singular integral equation, functional equation, asymptotic.

Է.Խ. Գրիգորյան, Հ.Վ. Հովհաննիսյան
Կոնտակտային խնդիր՝ կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ առաձգական սալի համար, որն ուժեղացված է երկու տարբեր առաձգական անվերջ զուգահեռ վերադիրներով

Աշխատանքում դիտարկված է կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ առաձգական սալի կոնտակտային խնդիրը, որը կազմված է երկու կիսաանվերջ առաձգական սալերից, որոնք ունեն ընդհանուր ուղղագիծ բաժանման սահման և տարբեր առաձգական հատկություններ: Ենթադրվում է, որ կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ առաձգական սալը ուժեղացված է երկու զուգահեռ անվերջ առաձգական վերադիրներով, որոնք դասավորված են վերոհիշյալ կիսաանվերջ առաձգական սալերի բաժանման գծի տարբեր կողմերում և եռակցված (սոսնձված) են այդ կիսաանվերջ առաձգական սալերին: Ոչ համաչափ դասավորված վերադիրները զուգահեռ են կիսաանվերջ առաձգական սալերի բաժանման գծին, ունեն լայնական հատույթի տարբեր մակերեսներ և օժտված են տարբեր առաձգական հատկություններով: Կոնտակտային զույգը (սալ-վերադիր) դեֆորմացվում է վերադիրների վրա ազդող համուղղված և կենտրոնացված ուժերով: Խնդիրը ձևակերպված է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի տեսքով, որոնց կորիզները բաղկացած են սինգուլյար և ռեգուլյար մասերից: Համակարգը լուծվում է Ֆուրիեի ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ, որի շնորհիվ վերոհիշյալ համակարգը բերվում է որոնելի ֆունկցիաների Ֆուրիեի տրանսֆորմանտների նկատմամբ ֆունկցիոնալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Տրված է այդ համակարգի փակ լուծումը ինտեգրալ տեսքով: Որոշված են կոնտակտային շոշափող լարումները և վերադիրներում առաջացող նորմալ լարումները, որոնց համար ստացվել են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են լարումների վարքը ուժերի կիրառման կետերի շրջակայքում և դրանից հեռու կետերում:

E.Kh. Grigoryan, H.V. Hovhannisyan
A Contact Problem for a Piecewise Homogeneous Infinite Plate Strengthened with Two Parallel Different Infinite Elastic Stringers

In the present paper, a contact problem is considered for a piecewise homogeneous infinite elastic plate consisted of two semi-infinite plates with different elastic characteristics and strengthened with two infinite elastic stringers, having different elastic properties. The stringers are parallel to the straight line between the two semi-infinite plates (the contact pair) and have different distances from the straight line, as well as they are on different sides of the straight line. The contact pair is deformed by two forces applied to the stringers having the same direction. The problem is formulated as a system of singular integral equations with a cornel consisted of singular and regular parts. The solution of the above-mentioned system is based on the generalized Fourie integral transformation, which is reduced to a system of functional equations, which makes possible to construct a closed solution in an integral form. The behavior of contact tangent tensions, as well as of stringer normal tensions at the infinite point and at the points of the forces applications are investigated, by means of the asymptotic formulae obtained in the present work.

В работе рассматривается контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, состоящей из двух, сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы, полубесконечных пластин с различными упругими характеристиками. Предполагается, что кусочно-однородная упругая бесконечная пластина усилена двумя параллельными упругими бесконечными стрингерами, которые расположены на разных сторонах раздела указанных полубесконечных пластин и приварены (приклеены) к этим пластинам. Стрингеры расположены несимметрично относительно линии раздела указанных полубесконечных пластин, параллельны к линии разнородности полубесконечных пластин, имеют разные упругие свойства и площади поперечного сечения. Контактная пара (стрингер-пластина) деформируется сонаправленными и сосредоточенными силами, действующими на стрингеры. Задача сформулирована в виде системы сингулярных интегральных уравнений, ядра которых состоят из сингулярной и регулярной частей. Эта система решается посредством обобщенного интегрального преобразования Фурье, которое превращает интегральные уравнения в систему функциональных уравнений относительно трансформантов Фурье искомых функций. Приведено замкнутое решение этой системы в интегральном виде. Определены контактные тангенциальные напряжения и нормальные напряжения, возникающие в стрингерах. Получены асимптотические формулы, описывающие поведение напряжении как вблизи, так и вдали точек приложении сил.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой кусочно-однородной бесконечной пластины малой постоянной толщины h, состоящий из двух, сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы, полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, на своей верхней поверхности линий $y = a\ (a > 0)$ и $y = -c\ (c > 0)$ содержит два параллельных различных упругих стрингера прямоугольного поперечного сечения.

Задача заключается в определении закона распределения интенсивности тангенциальных контактных усилий вдоль линий крепления упругих бесконечных стрингеров с упругими полубесконечными пластинами и нормальных напряжений в стрингерах, когда контактирующая пара (стрингер-пластина) подвержена воздействиям силовых факторов $P\delta(x)\delta(y-a)$ и $Q\delta(x)\delta(y+c)$, которые действуют вдоль стрингеров и имеют одинаковые направления.

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается во внимание модель контакта по линии [1.5], т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средних линий контактных участков, а для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины считается справедливой модель обобщенного плоского напряженного состояния.

Обращаясь теперь к выводу разрешающих уравнений поставленной задачи, заметим, что в горизонтальном направлении стрингера растягиваются или сжимаются, находясь в одноосном напряженном состоянии. Из уравнений равновесия элемента стрингера и на основе закона Гука будем иметь:

$$\frac{du_s^{(1)}(x)}{dx} = \frac{1}{2E_s^{(1)}F_s^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-s)\,\tau^{(1)}(s)\,ds - \frac{P\operatorname{sgn}x}{2E_s^{(1)}F_s^{(1)}}, \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.1}$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x)}{dx} = \frac{1}{2E_s^{(2)}F_s^{(2)}}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-u)\,\tau^{(2)}(u)\,du - \frac{Q\operatorname{sgn}x}{2E_s^{(2)}F_s^{(2)}}, \tag{1.2}$$

при этом условия равновесия стрингеров имеют вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{(1)}(s)\,ds = P, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{(2)}(u)\,du = Q. \tag{1.3}$$

Отметим, что из (1.1) и (1.2) нормальные напряжения в стрингерах при $y = a$ и $y = -c$ можно представить следующим образом:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=\frac{1}{2F_s^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x-s)\tau^{(1)}(s)ds-\frac{P\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(1)}}, \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1.4}$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=\frac{1}{2F_s^{(2)}}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x-u)\tau^{(2)}(u)du-\frac{Q\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(2)}}, \tag{1.5}$$

здесь $u_s^{(1)}(x)$ и $u_s^{(2)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров на линии $y=a$ и $y=-c$; $\tau^{(1)}(x)=d_s^{(1)}\tau^{(1)}(x;a)$, где $\tau^{(1)}(x;a)$ – тангенциальные контактные напряжения на линии $y=a$, $d_s^{(1)}$ – ширина этого стрингера; $\tau^{(2)}(x)=d_s^{(2)}\tau^{(2)}(x;-c)$, где $\tau^{(2)}(x;-c)$ –тангенциальные контактные напряжения на линии $y=-c$, $d_s^{(2)}$ – ширина этого стрингера; $E_s^{(1)}$ и $E_s^{(2)}$ – модули упругости, а $F_s^{(1)}=d_s^{(1)}h_s^{(1)}$ и $F_s^{(2)}=d_s^{(2)}h_s^{(2)}$ – площадь поперечного сечения верхнего и нижнего стрингеров, соответственно, а $h_s^{(1)}$ и $h_s^{(2)}$ – их высота; P и Q – сосредоточенные силы, приложенные на стрингеры в точках $(0;a)$ и $(0;-c)$, соответственно; $\operatorname{sgn}x$ – известная сигнум-функция.

С другой стороны, для горизонтальной деформации упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, когда на полубесконечных пластинах на линиях $y=a$ и $y=-c$ действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностями $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$, соответственно, имеем [2]:

$$hl\frac{du^{(1)}(x;a)}{dx}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{x-s}-d_1\frac{x-s}{(x-s)^2+4a^2}+d_2\frac{8a^2(x-s)}{\left[(x-s)^2+4a^2\right]^2}+\right.$$

$$\left.+d_3\frac{2a^2(x-s)\left[(x-s)^2-12a^2\right]}{\left[(x-s)^2+4a^2\right]^3}\right\}\tau^{(1)}(s)ds-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{d_4\frac{x-u}{(x-u)^2+(a+c)^2}-\right.$$

$$\left.-d_5\frac{2c(a+c)(x-u)}{\left[(x-u)^2+(a+c)^2\right]^2}-d_6\frac{2a(a+c)(x-u)}{\left[(x-u)^2+(a+c)^2\right]^2}\right\}\tau^{(2)}(u)du, \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1.6}$$

$$hl_1\frac{du^{(2)}(x;-c)}{dx}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{x-u}-b_1\frac{x-u}{(x-u)^2+4c^2}+b_2\frac{8c^2(x-u)}{\left[(x-u)^2+4c^2\right]^2}+\right.$$

$$+b_3\frac{2c^2(x-u)\left[(x-u)^2-12c^2\right]}{\left[(x-u)^2+4c^2\right]^3}\Bigg\}\tau^{(2)}(u)\,du-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{b_4\frac{x-s}{(x-s)^2+(a+c)^2}-\right.$$

$$\left.-b_5\frac{2a(a+c)(x-s)}{\left[(x-s)^2+(a+c)^2\right]^2}-b_6\frac{2c(a+c)(x-s)}{\left[(x-s)^2+(a+c)^2\right]^2}\right\}\tau^{(1)}(s)\,ds. \tag{1.7}$$

Здесь введены следующие обозначения [2]:

$$l=\frac{8\mu}{3-\nu}=\frac{4E}{(3-\nu)(1+\nu)},\qquad l_1=\frac{8\mu_1}{3-\nu_1}=\frac{4E_1}{(3-\nu_1)(1+\nu_1)},$$

$$d_1\equiv d_1(k;\nu;\nu_1)=$$

$$=\frac{k(3-\nu)\left[k(3-\nu)(1+\nu_1)+2(1-\nu)(1-\nu_1)\right]-(3-\nu_1)\left[8-(1+\nu)(3-\nu)\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_2\equiv d_2(k;\nu)=\frac{(k-1)(1+\nu)}{k(3-\nu)+1+\nu},\qquad k=\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{E_1(1+\nu)}{E(1+\nu_1)},$$

$$d_3\equiv d_3(k;\nu)=\frac{2(k-1)(1+\nu)^2}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]}, \tag{1.8}$$

$$d_4\equiv d_4(k;\nu;\nu_1)=\frac{8\left[k(3-\nu)+3-\nu_1\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_5\equiv d_5(k;\nu;\nu_1)=\frac{4(1+\nu_1)}{(3-\nu)\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_6\equiv d_6(k;\nu)=\frac{4(1+\nu)}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]},$$

$$b_1=d_1\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right),\qquad b_2=d_2\left(\frac{1}{k};\nu_1\right),\qquad b_3=d_3\left(\frac{1}{k};\nu_1\right),$$

$$b_4=d_4\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right),\qquad b_5=d_5\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right),\qquad b_6=d_6\left(\frac{1}{k};\nu_1\right),$$

где $u^{(1)}(x;a)$ и $u^{(2)}(x;-c)$ –горизонтальное перемещение точек полубесконечных пластин на линиях $y=a$ и $y=-c$; (E,μ,ν) –упругие характеристики пластины при $0<y<\infty$, а (E_1,μ_1,ν_1) – при $-\infty<y<0$; E и E_1 – модули Юнга, μ и μ_1– модули сдвига, а ν и ν_1 – коэффициенты Пуассона пластин.

Заметим, что на линиях креплений стрингеров с полубесконечными пластинами, должны удовлетворяться следующие контактные условия:

$$\frac{du_s^{(1)}(x)}{dx} = \frac{du^{(1)}(x;a)}{dx}, \tag{1.9}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x;-c)}{dx}. \tag{1.10}$$

Учитывая контактные условия (1.9) и (1.10) из (1.1), (1.2), (1.6) и (1.7) относительно неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностями $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$, которые являются основными неизвестными функциями в рассматриваемой задаче, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{x-s}+\frac{\lambda\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-s)+B_{11}(x;s)\right]\tau^{(1)}(s)\,ds+\\+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{12}(x;u)\tau^{(2)}(u)\,du=\frac{\lambda}{2}P\operatorname{sgn}x,\end{gathered} \tag{1.11}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{x-u}+\frac{\lambda_1\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-u)+B_{22}(x;u)\right]\tau^{(2)}(u)\,du+\\+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{21}(x;s)\tau^{(1)}(s)\,ds=\frac{\lambda_1}{2}Q\operatorname{sgn}x,\end{gathered} \tag{1.12}$$

при этом введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}B_{11}(x;s)=-d_1\frac{x-s}{(x-s)^2+4a^2}+d_2\frac{8a^2(x-s)}{\left[(x-s)^2+4a^2\right]^2}+\\+d_3\frac{2a^2(x-s)\left[(x-s)^2-12a^2\right]}{\left[(x-s)^2+4a^2\right]^3},\\
B_{12}(x;u)=d_4\frac{x-u}{(x-u)^2+(a+c)^2}-2(a+c)(cd_5+ad_6)\frac{x-u}{\left[(x-u)^2+(a+c)^2\right]^2},\\
B_{22}(x;u)=-b_1\frac{x-u}{(x-u)^2+4c^2}+b_2\frac{8c^2(x-u)}{\left[(x-u)^2+4c^2\right]^2}+\\+b_3\frac{2c^2(x-u)\left[(x-u)^2-12c^2\right]}{\left[(x-u)^2+4c^2\right]^3},\end{gathered} \tag{1.13}$$

$$B_{21}(x;s)=b_4\frac{x-s}{(x-s)^2+(a+c)^2}-2(a+c)(ab_5+cb_6)\frac{x-s}{\left[(x-s)^2+(a+c)^2\right]^2},$$

$$\lambda=\frac{hl}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}},\quad \lambda_1=\frac{hl_1}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}},\quad (-\infty<x,s,u<\infty).$$

Здесь интегралы с ядрами Коши в точках $x=s$ и $x=u$ в системе сингулярных интегральных уравнений (1.11) и (1.12) трактуются в смысле их главного значения по Коши.

Таким образом, решение поставленной контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) и (1.12) с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей, при условиях (1.3).

2. С целью решения системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) и (1.12) при условиях (1.3), применив к системе (1.11) и (1.12) обобщенное интегральное преобразование Фурье, после некоторых преобразований и пользуясь формулой свертки, относительно трансформантов Фурье функций $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$, получим следующую систему функциональных уравнений:

$$D_{11}(|\sigma|)\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)+D_{12}(|\sigma|)\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\lambda P, \tag{2.1}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$D_{21}(|\sigma|)\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)+D_{22}(|\sigma|)\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\lambda_1 Q, \tag{2.2}$$

при этом условия (1.3) примут вид:

$$\overline{\tau}^{(1)}(0)=P,\qquad \overline{\tau}^{(2)}(0)=Q. \tag{2.3}$$

Разрешая систему функциональных уравнений (2.1) и (2.2) при условии (2.3) относительно $\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)$ будем иметь:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)=\lambda P\frac{D_{22}(|\sigma|)}{D(|\sigma|)}-\lambda_1 Q\frac{D_{12}(|\sigma|)}{D(|\sigma|)}, \tag{2.4}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\lambda_1 Q\frac{D_{11}(|\sigma|)}{D(|\sigma|)}-\lambda P\frac{D_{21}(|\sigma|)}{D(|\sigma|)}, \tag{2.5}$$

при этом, в формулах (2.1) – (2.5) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&D_{11}(|\sigma|)=\lambda+|\sigma|+A_{11}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2a|\sigma|},\quad D_{12}(|\sigma|)=A_{12}(|\sigma|)|\sigma|e^{-(a+c)|\sigma|},\\
&D_{22}(|\sigma|)=\lambda_1+|\sigma|+A_{22}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2c|\sigma|},\quad D_{21}(|\sigma|)=A_{21}(|\sigma|)|\sigma|e^{-(a+c)|\sigma|},\\
&D(|\sigma|)=(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)+(\lambda_1+|\sigma|)A_{11}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2a|\sigma|}+\\
&\qquad+(\lambda+|\sigma|)A_{22}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2c|\sigma|}+A_{11}(|\sigma|)A_{22}(|\sigma|)\sigma^2e^{-2(a+c)|\sigma|}-\\
&\qquad-A_{12}(|\sigma|)A_{21}(|\sigma|)\sigma^2e^{-2(a+c)|\sigma|},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$A_{11}(|\sigma|)=-d_1+2d_2a|\sigma|-d_3a^2\sigma^2,\quad A_{12}(|\sigma|)=d_4-(cd_5+ad_6)|\sigma|,$$
$$A_{22}(|\sigma|)=-b_1+2b_2c|\sigma|-b_3c^2\sigma^2,\quad A_{21}(|\sigma|)=b_4-(ab_5+cb_6)|\sigma|,$$

а $\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)=F\left[\tau^{(1)}(x)\right]$ и $\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=F\left[\tau^{(2)}(x)\right]$– трансформанты Фурье функций $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$, соответственно, $F[.]-$ оператор Фурье, $\sigma(-\infty<\sigma<\infty)$ – параметр преобразования. Отметим, что функции $\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)$, определенные формулами (2.4) и (2.5), однозначно удовлетворяют условиям (2.3) и являются четными функциями, следовательно и $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$–четные функции, что и следовало ожидать. Выше имелось в виду, что [3]:

$$\frac{1}{\pi}F\left[\frac{1}{t}\right]=i\operatorname{sgn}\sigma,\qquad \frac{1}{\pi}F[\operatorname{sgn}t]=\frac{2i}{\sigma},$$
$$\frac{1}{\pi}F\left[\frac{t}{t^2+y^2}\right]=i\operatorname{sgn}\sigma e^{-|\sigma||y|},\quad (-\infty<\sigma,y,t<\infty) \tag{2.7}$$
$$\frac{1}{\pi}F\left[\frac{t}{(t^2+y^2)^2}\right]=\frac{i\sigma}{2|y|}e^{-|\sigma||y|},\quad \frac{1}{\pi}F\left[\frac{t}{(t^2+y^2)^3}\right]=\frac{i\sigma}{8|y|^3}(1+|\sigma||y|)e^{-|\sigma||y|}.$$

Для определения трансформантов нормальных напряжений в стрингерах применим к (1.4) и (1.5) обобщенное интегральное преобразование Фурье, учитывая (2.4) и (2.5), получим:

$$\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma)=-\frac{i}{F_s^{(1)}}\left[\frac{D_{22}^*(\sigma;|\sigma|)}{D(|\sigma|)}P+\lambda_1Q\frac{D_{12}^*(\sigma;|\sigma|)}{D(|\sigma|)}\right], \tag{2.8}$$
$$(-\infty<\sigma<\infty)$$
$$\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma)=-\frac{i}{F_s^{(2)}}\left[\frac{D_{11}^*(\sigma;|\sigma|)}{D(|\sigma|)}Q+\lambda P\frac{D_{21}^*(\sigma;|\sigma|)}{D(|\sigma|)}\right], \tag{2.9}$$

здесь приняты следующие обозначения:

$$D_{11}^*(\sigma;|\sigma|)=(\lambda+|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma+A_{11}(|\sigma|)\sigma e^{-2a|\sigma|}+(\lambda+|\sigma|)A_{22}(|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma e^{-2c|\sigma|}+$$
$$+A_{11}(|\sigma|)A_{22}(|\sigma|)\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|}-A_{12}(|\sigma|)A_{21}(|\sigma|)\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|},$$
$$D_{22}^*(\sigma;|\sigma|)=(\lambda_1+|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma+A_{22}(|\sigma|)\sigma e^{-2c|\sigma|}+(\lambda_1+|\sigma|)A_{11}(|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma e^{-2a|\sigma|}+$$
$$+A_{11}(|\sigma|)A_{22}(|\sigma|)\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|}-A_{12}(|\sigma|)A_{21}(|\sigma|)\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|}, \tag{2.10}$$
$$D_{12}^*(\sigma;|\sigma|)=A_{12}(|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma e^{-(a+c)|\sigma|},\qquad D_{21}^*(\sigma;|\sigma|)=A_{21}(|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma e^{-(a+c)|\sigma|},$$

а $\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma)=F\left[\sigma_x^{(1)}(x;a)\right]$ и $\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma)=F\left[\sigma_x^{(2)}(x;-c)\right]$–трансформанты Фурье функций $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$, соответственно.

Очевидно, что $\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma)$ являются нечетными функциями, следовательно, $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$ – нечетные функции.

Теперь, применив к (2.4), (2.5), (2.8) и (2.9) обратное преобразование Фурье, в итоге получим искомые величины $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(2)}(x)$, $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$:

$$\tau^{(1)}(x)=\frac{\lambda P}{\pi}\int_0^\infty\frac{D_{22}(\sigma)}{D(\sigma)}\cos(\sigma x)\,d\sigma-\frac{\lambda_1 Q}{\pi}\int_0^\infty\frac{D_{12}(\sigma)}{D(\sigma)}\cos(\sigma x)\,d\sigma, \tag{2.11}$$

$$\tau^{(2)}(x)=\frac{\lambda_1 Q}{\pi}\int_0^\infty\frac{D_{11}(\sigma)}{D(\sigma)}\cos(\sigma x)\,d\sigma-\frac{\lambda P}{\pi}\int_0^\infty\frac{D_{21}(\sigma)}{D(\sigma)}\cos(\sigma x)\,d\sigma, \tag{2.12}$$

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=-\frac{P}{\pi F_s^{(1)}}\int_0^\infty\frac{D_{22}^{**}(\sigma)}{D(\sigma)}\sin(\sigma x)\,d\sigma-\frac{\lambda_1 Q}{\pi F_s^{(1)}}\int_0^\infty\frac{D_{12}^{**}(\sigma)}{D(\sigma)}\sin(\sigma x)\,d\sigma, \tag{2.13}$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=-\frac{Q}{\pi F_s^{(2)}}\int_0^\infty\frac{D_{11}^{**}(\sigma)}{D(\sigma)}\sin(\sigma x)\,d\sigma-\frac{\lambda P}{\pi F_s^{(2)}}\int_0^\infty\frac{D_{21}^{**}(\sigma)}{D(\sigma)}\sin(\sigma x)\,d\sigma,$$
$$(-\infty<x<\infty), \tag{2.14}$$

здесь $D_{kn}^{**}(\sigma)=D_{kn}^{*}(\sigma;\sigma)\;\;(n,k=1;2)$.

Таким образом, рассматриваемая контактная задача решается в замкнутом виде в интегральной форме, а искомые величины имеют вид (2.11) – (2.14).

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) однородная бесконечная пластина $(E=E_1;\ \nu=\nu_1)$. В этом случае на основе (1.8), (2.6) и (2.10) из (2.4), (2.5) и (2.8), (2.9), соответственно, получим:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)=\frac{\lambda(\lambda_1+|\sigma|)P-\lambda_1\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)|\sigma|e^{-(a+c)|\sigma|}Q}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2e^{-2(a+c)|\sigma|}}, \tag{2.15}$$

$$\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\frac{\lambda_1(\lambda+|\sigma|)Q-\lambda\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)|\sigma|e^{-(a+c)|\sigma|}P}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2e^{-2(a+c)|\sigma|}}, \tag{2.16}$$

$$\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma)=-\frac{i}{F_s^{(1)}}\frac{\left[(\lambda_1+|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|}\right]P}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2e^{-2(a+c)|\sigma|}}-$$

$$-\frac{i}{F_s^{(1)}}\frac{\lambda_1 Q\left[1-(a+c)\dfrac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right]\operatorname{sgn}\sigma e^{-(a+c)|\sigma|}}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\dfrac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2 e^{-2(a+c)|\sigma|}}, \tag{2.17}$$

$$\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma)=-\frac{i}{F_s^{(2)}}\frac{\left[(\lambda+|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma-\left(1-(a+c)\dfrac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|}\right]Q}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\dfrac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2 e^{-2(a+c)|\sigma|}}-$$

$$-\frac{i}{F_s^{(2)}}\frac{\lambda P\left[1-(a+c)\dfrac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right]\operatorname{sgn}\sigma e^{-(a+c)|\sigma|}}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\dfrac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2 e^{-2(a+c)|\sigma|}}, \tag{2.18}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty).$$

Отметим, что формулы (2.15)–(2.18) совпадают с результатом [4] при $E_s^{(1)}=E_s^{(2)}, F_s^{(1)}=F_s^{(2)}, P=Q$ и $a=c$ и имеют вид:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)\equiv\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\overline{\tau}(\sigma)=\frac{\lambda P}{\lambda+2|\sigma|\operatorname{ch}(a|\sigma|)e^{-a|\sigma|}-2a\dfrac{1+\nu}{3-\nu}\sigma^2 e^{-2a|\sigma|}}, \tag{2.19}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma)\equiv\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma)=\overline{\sigma}_x(\sigma)=\frac{iP}{F_s^{(1)}}\frac{2a\dfrac{1+\nu}{3-\nu}\sigma e^{-2a|\sigma|}-2\operatorname{ch}(a|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma e^{-a|\sigma|}}{\lambda+2|\sigma|\operatorname{ch}(a|\sigma|)e^{-a|\sigma|}-2a\dfrac{1+\nu}{3-\nu}\sigma^2 e^{-2a|\sigma|}}; \tag{2.20}$$

б) кусочно-однородная бесконечная пластина, усиленная только одним стрингером (верхний стрингер). В этом случае имеем [6]:

$$\overline{\tau}(\sigma)=\frac{\lambda P}{\lambda+|\sigma|+A_{11}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2a|\sigma|}}, \tag{2.21}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$\overline{\sigma}_x(\sigma)=-\frac{iP}{F_s^{(1)}}\frac{\operatorname{sgn}\sigma\left(1+A_{11}(|\sigma|)\right)e^{-2a|\sigma|}}{\lambda+|\sigma|+A_{11}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2a|\sigma|}}. \tag{2.22}$$

Следует отметить, что при однородной бесконечной пластине $(E=E_1;\ \nu=\nu_1)$ из (2.21) и (2.22) получим [7]:

$$\overline{\tau}(\sigma)=\frac{\lambda P}{\lambda+|\sigma|}, \tag{2.23}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$\overline{\sigma}_x(\sigma) = -\frac{iP}{F_s^{(1)}} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{\lambda + |\sigma|}; \tag{2.24}$$

в) рассмотрим предельный случай, когда одновременно $a \to 0$ и $c \to 0$. Тогда на основе (1.8), (2.6) и (2.10) из (2.4), (2.5), (2.8), (2.9) и (2.15)–(2.22), соответственно, получим:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma) = \frac{\lambda\left(\lambda_1 + (1-b_1)|\sigma|\right)P - \lambda_1 d_4 |\sigma| Q}{\lambda\lambda_1 + \lambda(1-b_1)|\sigma| + \lambda_1(1-d_1)|\sigma| + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)\sigma^2}, \tag{2.25}$$

$$\overline{\tau}^{(2)}(\sigma) = \frac{\lambda_1\left(\lambda + (1-d_1)|\sigma|\right)Q - \lambda b_4 |\sigma| P}{\lambda\lambda_1 + \lambda(1-b_1)|\sigma| + \lambda_1(1-d_1)|\sigma| + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)\sigma^2}, \tag{2.26}$$

$$\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma) = -\frac{\left[\lambda_1(1-d_1)i\operatorname{sgn}\sigma + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)i\sigma\right]P + \lambda_1 d_4 Q i \operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(1)}\left[\lambda\lambda_1 + \lambda(1-b_1)|\sigma| + \lambda_1(1-d_1)|\sigma| + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)\sigma^2\right]}, \tag{2.27}$$

$$\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma) = -\frac{\left[\lambda(1-b_1)i\operatorname{sgn}\sigma + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)i\sigma\right]Q + \lambda b_4 P i \operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(2)}\left[\lambda\lambda_1 + \lambda(1-b_1)|\sigma| + \lambda_1(1-d_1)|\sigma| + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)\sigma^2\right]}, \tag{2.28}$$

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma) = \frac{\lambda\lambda_1 P + (\lambda P - \lambda_1 Q)|\sigma|}{\lambda\lambda_1 + (\lambda + \lambda_1)|\sigma|}, \quad \overline{\tau}^{(2)}(\sigma) = \frac{\lambda\lambda_1 Q + (\lambda_1 Q - \lambda P)|\sigma|}{\lambda\lambda_1 + (\lambda + \lambda_1)|\sigma|}, \tag{2.29}$$

$$\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma) = -\frac{\lambda_1(P+Q)i\operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(1)}\left(\lambda\lambda_1 + (\lambda+\lambda_1)|\sigma|\right)}, \ \overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma) = -\frac{\lambda(P+Q)i\operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(2)}\left(\lambda\lambda_1 + (\lambda+\lambda_1)|\sigma|\right)} \tag{2.30}$$

$$\overline{\tau}(\sigma) = \frac{\lambda P}{\lambda + 2|\sigma|} = \frac{\lambda P/2}{\lambda/2 + |\sigma|}, \ \overline{\sigma}_x(\sigma) = -\frac{2Pi\operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(1)}(\lambda + 2|\sigma|)} = -\frac{Pi\operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(1)}\left(\dfrac{\lambda}{2} + |\sigma|\right)}, \tag{2.31}$$

$$\overline{\tau}(\sigma) = \frac{\lambda P}{\lambda + (1-d_1)|\sigma|}, \qquad \overline{\sigma}_x(\sigma) = -\frac{P(1-d_1)i\operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(1)}\left(\lambda + (1-d_1)|\sigma|\right)}, \tag{2.32}$$

$$(-\infty < \sigma < \infty).$$

Следует отметить, что из (2.31) видно, что жесткость стрингеров удваивается, это говорит о том, что при приближении стрингеров их жесткость как бы увеличивается, а из (2.32) следует, что их жесткость увеличивается в размере $(1-d_1)$, а из (2.29) в размере $\dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}$ или $\dfrac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}$.

Таким образом, мы определили закон распределения трансформантов тангенциальных контактных сил и нормальных напряжений в стрингерах вдоль линии соединения кусочно-однородной бесконечной пластины со стрингерами, когда контактирующая пара деформируется сосредоточенными силами, приложенными к стрингерам.

3. Теперь исследуем поведение функций тангенциальных контактных усилий $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ и нормальные напряжения в стрингерах $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$, характеризующие их поведение вблизи и вдалеке от точек приложенных сил. Сначала приступим к получению асимптотических формул для $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ при $|x| \to \infty$. Для этого заметим, что при $|\sigma| \to 0$ из (2.4) и (2.5) $\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)$ можно представить в следующих видах:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma) = \left[1 - \beta_1|\sigma| + \beta_2\sigma^2 - \beta_3|\sigma|^3\right]P + \left[-\beta_4|\sigma| + \beta_5\sigma^2 - \beta_6|\sigma|^3\right]Q + O\left(\sigma^4\right),$$
$$\left(|\sigma| \to 0\right), \tag{3.1}$$

$$\overline{\tau}^{(2)}(\sigma) = \left[1 - \gamma_1|\sigma| + \gamma_2\sigma^2 - \gamma_3|\sigma|^3\right]Q + \left[-\gamma_4|\sigma| + \gamma_5\sigma^2 - \gamma_6|\sigma|^3\right]P + O\left(\sigma^4\right),$$
$$\left(|\sigma| \to 0\right), \tag{3.2}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\beta_1 = \frac{1-d_1}{\lambda}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\lambda_1\lambda^2}\left[\lambda_1(1-d_1)^2 + \lambda b_4 d_4 - 2\lambda\lambda_1 a(d_1+d_2)\right], \quad \beta_4 = \frac{d_4}{\lambda},$$

$$\gamma_1 = \frac{1-b_1}{\lambda_1}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\lambda\lambda_1^2}\left[\lambda(1-b_1)^2 + \lambda_1 b_4 d_4 - 2\lambda\lambda_1 c(b_1+b_2)\right], \quad \gamma_4 = \frac{b_4}{\lambda_1},$$

$$\begin{aligned}\beta_3 = \frac{1}{\lambda_1^2\lambda^3}\Big[&\lambda_1^2(1-d_1)^3 + (1-b_1)b_4d_4\lambda^2 + 2(1-d_1)b_4d_4\lambda\lambda_1 - \\ &-4a(1-d_1)(d_1+d_2)\lambda\lambda_1^2 + a(b_4d_6 + d_4b_5 + 2b_4d_4)\lambda_1\lambda^2 + \\ &+c(b_4d_5 + d_4b_6 + 2b_4d_4)\lambda_1\lambda^2 - a^2(d_3 + 4d_2 + 2d_1)\lambda^2\lambda_1^2\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3 = \frac{1}{\lambda^2\lambda_1^3}\Big[&\lambda^2(1-b_1)^3 + (1-d_1)b_4d_4\lambda_1^2 + 2(1-b_1)b_4d_4\lambda\lambda_1 - \\ &-4c(1-b_1)(b_1+b_2)\lambda_1\lambda^2 + a(d_4b_5 + b_4d_6 + 2b_4d_4)\lambda\lambda_1^2 + \\ &+c(d_4b_6 + b_4d_5 + 2b_4d_4)\lambda\lambda_1^2 - c^2(b_3 + 4b_2 + 2b_1)\lambda^2\lambda_1^2\Big],\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\beta_5 = \frac{1}{\lambda_1\lambda^2}\left[\lambda(1-b_1)d_4 + \lambda_1(1-d_1)d_4 + a(d_4+d_6)\lambda\lambda_1 + c(d_4+d_5)\lambda\lambda_1\right],$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{\lambda\,\lambda_1^2}\left[\lambda(1-b_1)b_4 + \lambda_1(1-d_1)b_4 + a(b_4+b_5)\lambda\lambda_1 + c(b_4+b_6)\lambda\lambda_1\right],$$

$$\begin{aligned}\beta_6 = \frac{1}{\lambda_1^2\lambda^3}\Big[&\lambda^2(1-b_1)^2 d_4 + \lambda_1^2(1-d_1)^2 d_4 + \left((1-b_1)(1-d_1) + b_4d_4\right)d_4\lambda\lambda_1 - \\ &-2a(d_1+d_2)d_4\lambda\lambda_1^2 - 2c(b_1+b_2)d_4\lambda_1\lambda^2 + \left((a+c)d_4 + cd_5 + ad_6\right)\times \\ &\times\left(\lambda(1-b_1) + \lambda_1(1-d_1)\right)\lambda\lambda_1 + (a+c)\left(\frac{a+c}{2}d_4 + cd_5 + ad_6\right)\lambda^2\lambda_1^2\Big],\end{aligned}$$

$$\gamma_6=\frac{1}{\lambda^2\lambda_1^3}\Big[\lambda^2(1-b_1)^2 b_4+\lambda_1^2(1-d_1)^2 b_4+\big((1-b_1)(1-d_1)+b_4d_4\big)b_4\lambda\lambda_1-$$
$$-2a(d_1+d_2)b_4\lambda\lambda_1^2-2c(b_1+b_2)b_4\lambda_1\lambda^2+\big((a+c)b_4+ab_5+cb_6\big)\times$$
$$\times\big(\lambda(1-b_1)+\lambda_1(1-d_1)\big)\lambda\lambda_1+(a+c)\left(\frac{a+c}{2}b_4+ab_5+cb_6\right)\lambda^2\lambda_1^2\Big].$$

Теперь применим к (3.1) и (3.2) обобщенное обратное преобразование Фурье, имея в виду, что [3]:

$$F^{-1}\left[\sigma^{2m}\right]=(-1)^m\delta^{(2m)}(x),\qquad F^{-1}\left[|\sigma|^{2m+1}\right]=(-1)^{m+1}\frac{\Gamma(2m+2)}{\pi}x^{-2(m+1)},$$
$$(m=0,1,2,...),\tag{3.4}$$

где $F^{-1}[.]$ – обратный оператор Фурье, а $\Gamma(\cdot)$ – известная гамма-функция, $\delta^{(n)}(x)$ – n-ая производная функции $\delta(x)$, для $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ получим следующие асимптотические представления при $|x|\to\infty$:

$$\tau^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\beta_1}{x^2}-\frac{6\beta_3}{x^4}\right)P+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\beta_4}{x^2}-\frac{6\beta_6}{x^4}\right)Q+O\left(\frac{1}{x^6}\right),\quad (|x|\to\infty),\tag{3.5}$$

$$\tau^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\gamma_1}{x^2}-\frac{6\gamma_3}{x^4}\right)Q+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\gamma_4}{x^2}-\frac{6\gamma_6}{x^4}\right)P+O\left(\frac{1}{x^6}\right),\quad (|x|\to\infty).\tag{3.6}$$

Для получения асимптотических формул для $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$ при $|x|\to\infty$ представим (1.4) и (1.5) в виде:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=\frac{1}{F_s^{(1)}}\int_x^\infty\tau^{(1)}(s)\,ds-\frac{P\theta(-x)}{F_s^{(1)}},\tag{3.7}$$
$$(-\infty<x<\infty)$$
$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=\frac{1}{F_s^{(2)}}\int_x^\infty\tau^{(2)}(u)\,du-\frac{Q\theta(-x)}{F_s^{(2)}},\tag{3.8}$$

где $\theta(x)$ –функция Хевисайда.

Теперь учитывая нечетность функции $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$ на основе (3.5) и (3.6) из (3.7) и (3.8) при $|x|\to\infty$, получим:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=\frac{1}{\pi F_s^{(1)}}\left(\frac{\beta_1}{x}-\frac{2\beta_3}{x^3}\right)P+\frac{1}{\pi F_s^{(1)}}\left(\frac{\beta_4}{x}-\frac{2\beta_6}{x^3}\right)Q+O\left(\frac{1}{x^5}\right),$$
$$(|x|\to\infty),\tag{3.9}$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=\frac{1}{\pi F_s^{(2)}}\left(\frac{\gamma_1}{x}-\frac{2\gamma_3}{x^3}\right)Q+\frac{1}{\pi F_s^{(2)}}\left(\frac{\gamma_4}{x}-\frac{2\gamma_6}{x^3}\right)P+O\left(\frac{1}{x^5}\right),$$
$$(|x|\to\infty).\tag{3.10}$$

Из полученных асимптотических формул видно, что тангенциальные контактные усилия при $|x| \to \infty$ имеют порядок $O\left(x^{-2n}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, а нормальные напряжения – порядок $O\left(x^{-2k-1}\right)(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Теперь приступим к получению асимптотических формул для $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ при $|x| \to 0$. Для этого заметим, что из (2.4) и (2.5) на основе (2.6) $\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)$ можно представить в виде:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma) = \frac{\lambda P}{\lambda + |\sigma|} + \frac{\lambda P C_{11}(|\sigma|)}{(\lambda + |\sigma|) D(|\sigma|)} - \frac{\lambda_1 Q D_{12}(|\sigma|)}{D(|\sigma|)}, \qquad (-\infty < \sigma < \infty) \tag{3.11}$$

$$\overline{\tau}^{(2)}(\sigma) = \frac{\lambda_1 Q}{\lambda_1 + |\sigma|} + \frac{\lambda_1 Q C_{22}(|\sigma|)}{(\lambda_1 + |\sigma|) D(|\sigma|)} - \frac{\lambda P D_{21}(|\sigma|)}{D(|\sigma|)}, \tag{3.12}$$

Здесь принято, что

$$\begin{aligned} C_{11}(|\sigma|) &= C(|\sigma|) - (\lambda_1 + |\sigma|) A_{11}(|\sigma|)|\sigma| e^{-2a|\sigma|}, \\ C_{22}(|\sigma|) &= C(|\sigma|) - (\lambda + |\sigma|) A_{22}(|\sigma|)|\sigma| e^{-2c|\sigma|}, \qquad (-\infty < \sigma < \infty) \\ C(|\sigma|) &= \left[A_{12}(|\sigma|) A_{21}(|\sigma|) - A_{11}(|\sigma|) A_{22}(|\sigma|)\right] \sigma^2 e^{-2(a+c)|\sigma|}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Так как при $|\sigma| \to \infty$ имеет место представление:

$$\frac{k}{k + |\sigma|} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{k}{|\sigma|}\right)^{n+1}, \tag{3.14}$$

то из (3.11) и (3.12) после применения обобщенного обратного преобразования Фурье, имея в виду, что [3]:

$$\begin{aligned} F^{-1}\left[|\sigma|^{-2m-1}\right] &= \frac{(-1)^m x^{2m}}{\pi (2m)!}\left(\psi(2m+1) + \ln\frac{1}{|x|}\right), \\ F^{-1}\left[\sigma^{-2m-2}\right] &= (-1)^{m+1} \frac{|x|^{2m+1}}{2(2m)!}, \qquad (m = 0; 1; 2; \ldots), \end{aligned} \tag{3.15}$$

получим асимптотические формулы для $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ при $|x| \to 0$, записанные в виде:

$$\begin{aligned} \tau^{(1)}(x) = \frac{\lambda P}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg[(-1)^n \frac{(\lambda x)^{2n}}{(2n)!}\left(\psi(2n+1) + \ln\frac{1}{|\lambda x|}\right) + (-1)^n \frac{\pi |\lambda x|^{2n+1}}{2(2n+1)!} + \\ + (-1)^n A_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\Bigg] - \frac{\lambda_1 Q}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad (|x| \to 0), \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\tau^{(2)}(x)=\frac{\lambda_1 Q}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(\lambda_1 x)^{2n}}{(2n)!}\left(\psi(2n+1)+\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}\right)+(-1)^n\frac{\pi|\lambda_1 x|^{2n+1}}{2(2n+1)!}+\right.$$

$$\left.+(-1)^n C_n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]-\frac{\lambda P}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n D_n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad (|x|\to 0). \tag{3.17}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_n=\int_0^{\infty}\frac{C_{11}(\sigma)\sigma^{2n}}{(\lambda+\sigma)D(\sigma)}d\sigma,\qquad B_n=\int_0^{\infty}\frac{D_{12}(\sigma)\sigma^{2n}}{D(\sigma)}d\sigma,$$

$$C_n=\int_0^{\infty}\frac{C_{22}(\sigma)\sigma^{2n}}{(\lambda_1+\sigma)D(\sigma)}d\sigma,\qquad D_n=\int_0^{\infty}\frac{D_{21}(\sigma)\sigma^{2n}}{D(\sigma)}d\sigma, \tag{3.18}$$

а $\psi(t)$ – известная пси-функция.

Отметим, что из полученных формул (3.16) и (3.17) видно, что $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ при $|x|\to 0$ имеют логарифмическую особенность, обусловленную сосредоточенными силами P и Q. Чтобы получить асимптотические формулы для $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$ представим (1.4) и (1.5) в виде:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=\frac{1}{F_s^{(1)}}\int_0^x\tau^{(1)}(s)\,ds-\frac{P\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(1)}}, \tag{3.19}$$

$$(-\infty<x<\infty)$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=\frac{1}{F_s^{(2)}}\int_0^x\tau^{(2)}(u)\,du-\frac{Q\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(2)}}. \tag{3.20}$$

Учитывая (3.16) и (3.17) из (3.19) и (3.20) для $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$ при $|x|\to 0$, получим:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=\frac{P}{\pi F_s^{(1)}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(\lambda x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\psi(2n+2)+\ln\frac{1}{|\lambda x|}+\frac{\pi|\lambda x|}{2(2n+2)}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^n A_n\frac{\lambda x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]-\frac{\lambda_1 Q}{\pi F_s^{(1)}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{P\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(1)}},\quad (|x|\to 0), \tag{3.21}$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=\frac{Q}{\pi F_s^{(2)}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(\lambda_1 x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\psi(2n+2)+\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}+\frac{\pi|\lambda_1 x|}{2(2n+2)}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^n C_n\frac{\lambda_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]-\frac{\lambda P}{\pi F_s^{(2)}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n D_n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{Q\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(2)}},\quad (|x|\to 0). \tag{3.22}$$

Отметим, что ряды (3.16), (3.17), (3.21) и (3.22) сходятся для любых x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. // ПМ. Труды Амер. общ. инж.–мех. Сер.Е. 1968. №4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Об одной контактной задаче для кусочно-однородной пластины с конечными стрингерами. // Межвуз. сб. науч. трудов. Механика. Ереван. Изд. ЕГУ. 1984. №3. С.130-137.
3. Справочник по специальным функциям. // М.: Наука, 1979. 832с.
4. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.3-10.
5. Григорян Э.Х. Задача для кусочно–однородной бесконечной пластины с полубесконечным стрингером. // Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1983. №1. С.34-37.
6. Багдасарян Р.А., Гукасян Г.О. Об одной задаче для кусочно-однородной пластины, усиленной бесконечным стрингером. // Межвуз. сб. науч. трудов. Механика. Ереван. Изд. ЕГУ. 1991. №8. С.316-321.
7. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. // М.: Машиностроение, 1980. 416с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 4.12.2008

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛОИСТОЙ СИСТЕМЕ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКОЙ И ДВУМЯ ИЗОТРОПНЫМИ СЛОЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

Даноян З.Н., Манукян Г. А., Берберян А.Х., Даноян Н.З.

Ключевые слова: электроупругие волны Лява, слоистые системы
Keywords: electroelastic Love’s waves , layered systems

Զ. Ն. Դանոյան, Գ.Ա. Մանուկյան, Ա.Խ.Բերբերյան, Ն. Զ.Դանոյան

Լյավի մակերևույթային էլեկտրաառաձգական ալիքները պյեզոէլեկտրիկ հիմքով և երկու իզոտրոպ կամայական հաստությամբ շերտերով շերտավոր համակարգում

Աշխատանքում հետազոտվում է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների գոյությունը և վարքը 6, 4, 6mm, 4mm դասի պյեզոէլեկտրիկ հիմքով և կամայական հաստությամբ երկու շերտերով (հաղորդիչ-դիէլեկտրիկ, հաղորդիչ-հաղորդիչ) համակարգում՝ կախված համակարգի ֆիզիկամեխանիկական բնութագրիչներից և շերտերի հարաբերական հաստություններից [1-5]: Մակերևույթային ալիքի բնութագրիչ հավասարումը հետազոտված է այն դեպքում, երբ հիմքին կպած հիմնական շերտը փափուկ է: Մասնավորապես ցույց է տրված ճեղքային տիպի Լյավի ալիքների գոյությունը, որը պայմանավորված է զուտ պյեզոէլեկտրական էֆեկտով: Ուսումնասիրված են Լյավի ալիքի կառուցվածքը և ալիքային ձևերի վարքը: Բերված են ալիքային ձևերի դիսպերսիոն կորերի որակական գրաֆիկները: Քննարկված է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների կապը Լյավի սովորական ալիքների և Բլյուստեյն-Գուլյաևի ալիքների հետ:

Z.N.Danoyan, G.A.Manukyan, A. Kh.Berberyan, N.Z.Danoyan

Surface Electroelastic Love Waves in Layered System with a Piezoelectric Substrate and Two Isotropic Layers of Any Thickness

In the article the existence and behaviour of electroelastic Love waves in three-layered system of a piezoelectric substrate of classes 6, 4, 6mm, 4mm and attached to her two isotropic layers (conductor-dielectric, conductor-conductor) of any thickness is investigated, depending on the physicomechanical characteristics of layered system and relative thicknesses of layers. The characteristic equation of a required surface wave is investigated in case of a basic soft layer. The research is based on properties of the electromechanical factor of surface wave given in the work [1-5]. Existence of a Love wave of a gap type caused by extremely piezoelectric effect in particular is shown. The structure and behavior of modes of Love waves are investigated. The qualitative diagrams of “dispersive” curves of modes of Love waves are given . The relation between electroelastic Love waves, pure-elastic Love waves, and Bleustein-Gulyaev waves is discussed.

В работе исследуется существование и поведение электроупругих волн Лява в трехслоистой системе из пьезоэлектрической подложки классов 6, 4, 6mm, 4mm и прикрепленных к ней двух изотропных слоев произвольной толщины в зависимости от физико-механических характеристик слоистой системы и относительной толщины слоев. Характеристическое уравнение искомой поверхностной волны исследуется в случае основного мягкого слоя. Исследование основано на свойствах коэффициента электромеханической связи поверхностной волны, приведенных в работах [1-5]. В частности, показано существование волны Лява щелевого типа, обусловленной исключительно пьезоэлектрическим эффектом. Изучены структура и поведение мод волны Лява. Приведены качественные графики дисперсионных кривых. Обсужден вопрос связи электроупругих волн Лява с обычными волнами Лява и волнами Гуляева – Блюстейна.

Известно, что [1-3 и др.] в полубесконечной изотропной подложке, на которую нанесен изотропный слой из другого материала, могут распространяться сдвиговые поверхностные волны горизонтальной поляризации, называемые волнами Лява. Волны Лява в системе из 3-х непьезоэлектрических слоев рассмотрена в [2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим слоистую систему, состоящую из упругой пьезоэлектрической подложки и прикрепленных к ней двух изотропных слоев, которая отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ (фиг.1). Слой, приклепленный к подложке, называемый в дальнейшем основным, является проводящим слоем конечной толщины h_1. Другой слой, дополнительный, является проводником или диэлектриком и имеет конечную толщину h_2. Слои изготовлены из различных материалов.

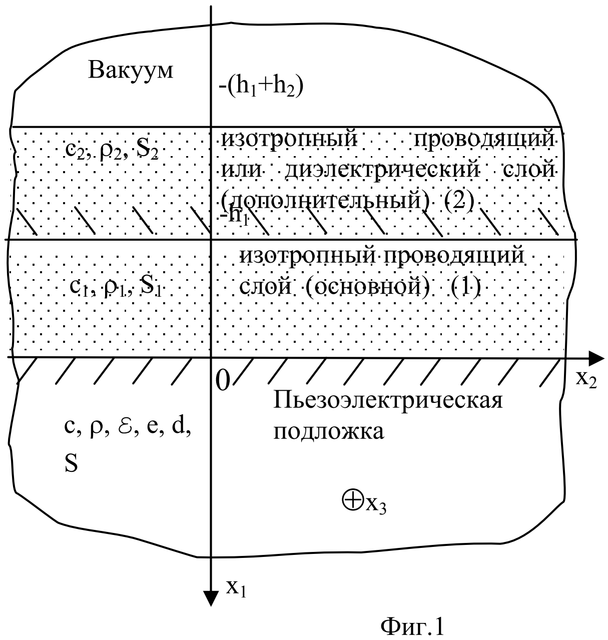
Пьезоэлектрическая подложка принадлежит симметриям классов 6, 4, 6mm, 4mm. Главная ось пьезоэлектрика (L_6 или L_4) направлена по оси Ox_3, ось Ox_1 перпендикулярна к поверхности границы и направлена в глубь пьезоэлектрического полупространства. Верхний край слоистой системы $x_1 = -(h_1 + h_2)$ механически свободен.

Упругие и электрические поля в пьезоэлектрической подложке (в области $x_1 > 0$) взаимосвязаны и описываются квазистатическими уравнениями линейной теории электроупругости:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\ , \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ik} = c_{iklm}\gamma_{lm} - e_{lik}E_l\,,\quad D_i = e_{ikj}\gamma_{kj} + \varepsilon_{ik}E_k\,,$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\ \varphi,\ \ \mathrm{div}\ \vec{\mathrm{D}} = 0,\ \ \gamma_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{1.2}$$



Фиг.1

Здесь u_i – составляющие упругого перемещения, σ_{ik} – составляющие тензора напряжений, $\vec{E}(E_k)$ –напряженность электрического поля, $\vec{D}(D_k)$ электрическая индукция, γ_{lm} – составляющие тензора деформаций, φ – потенциал электрического поля, c_{iklm} – составляющие тензора упругих постоянных, e_{lik} –составляющие тензора пьезоэлектрических постоянных, ε_{ik} – составляющие тензора диэлектрических постоянных, x_k – пространственные координаты, t – время, ρ – плотность пьезоэлектрика.

В квазистатической постановке электрическое поле не проникает в проводящую среду, в слоях упругое поле опишется уравнениями (1.1), (1.2), где $E_\ell \equiv 0$.

В дальнейшем рассматривается следующее антиплоское деформированное состояние:

$$\begin{aligned} &u_1 \equiv 0,\ u_2 \equiv 0,\ u_3 = u(x_1, x_2, t),\ \ -(h_1 + h_2) < x_1 < +\infty, \\ &\varphi = \varphi(x_1, x_2, t), \quad 0 < x_1 < +\infty. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для случая (1.3) получим следующие дифференциальные уравнения:

1. В подложке ($0 < x_1 < +\infty$):

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_{44} \nabla^2 u + e_{15} \nabla^2 \varphi \\ &\varepsilon_{11} \nabla^2 \varphi - e_{15} \nabla^2 u = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

2. В основном слое $(-h_1 < x_1 < 0)$:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_{44}^{(1)} \nabla^2 u_1 \tag{1.5}$$

3. В дополнительном слое $(-(h_1 + h_2) < x_1 < -h_1)$:

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_{44}^{(2)} \nabla^2 u_2\ , \tag{1.6}$$

где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ – двумерный оператор Лапласа. Здесь и далее величины, относящиеся к подложке и к слоям, обозначаются, соответственно, без индекса и индексами «1», «2».

Упругие и электрические характеристики должны удовлетворять условиям затухания: $x_1 \to +\infty,\ \ u \to 0,\ \ \varphi \to 0$ и граничным условиям на границе слоистой системы, а также условиям непрерывности на контактах между слоями и подложкой:

1. На поверхности $x_1 = -(h_1 + h_2)$:

$$\sigma_{13}^{(2)} = 0 \tag{1.7}$$

2. На поверхности $x_1 = -h_1$:

$$\sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)},\ u_1 = u_2 \tag{1.8}$$

3. На поверхности $x_1 = 0$:

$$\sigma_{13} = \sigma_{13}^{(1)},\ u = u_1,\ \varphi = 0 \tag{1.9}$$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &c_{44} = c,\ c_{44}^{(1)} = c_1,\ c_{44}^{(2)} = c_2,\ e_{15} = e,\ e_{14} = d,\ \varepsilon_{11} = \varepsilon, \\ &\overline{c} = c(1+\chi^2),\ \chi^2 = e^2 / \varepsilon c,\ \overline{e} = e / \varepsilon,\ S = \sqrt{\overline{c} / \rho},\ S_1 = \sqrt{c_1 / \rho_1}, \\ &S_2 = \sqrt{c_2 / \rho_2}\ ,\ \varphi' = \varphi - \overline{e}\, u,\ S = S_0 \sqrt{1+\chi^2}\ ,\ S_0 = \sqrt{c / \rho}\ , \end{aligned} \tag{1.10}$$

где χ^2 – коэффициент электромеханической связи, S_0, S – скорости распространения упругих и электроупругих сдвиговых объемных волн в подложке, S_1, S_2 – скорости распространения упругих сдвиговых объемных волн в слоях, φ' – новая неизвестная величина, связанная с перемещением u и потенциалом φ подложки по (1.10).

Из уравнений (1.4)-(1.9) получим следующую математическую модель для описания электроупругих волн Лява:

1.Уравнения в подложке $(0 < x_1 < +\infty)$:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 \varphi' = 0 \tag{1.11}$$

2. Уравнения в основном слое $(-h_1 < x_1 < 0)$:

$$\nabla^2 u_1 = \frac{1}{S_1^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tag{1.12}$$

3. Уравнения в дополнительном слое $(-(h_1 + h_2) < x_1 < -h_1)$:

$$\nabla^2 u_2 = \frac{1}{S_2^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \tag{1.13}$$

4. Граничные условия при $x_1 = -(h_1 + h_2)$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \tag{1.14}$$

5. Граничные условия при $x_1 = -h_1$:

$$u_1 = u_2, \quad c_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = c_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \tag{1.15}$$

6. Граничные условия при $x_1 = 0$:

$$u = u_1,\ \overline{e}u + \varphi' = 0,\ \overline{c}\frac{\partial u}{\partial x_1} + e\frac{\partial \varphi'}{\partial x_1} - d\frac{\partial \varphi'}{\partial x_2} - de'\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = c_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{1.16}$$

7.Условия затухания при $x_1 \to +\infty$:

$$u \to 0, \quad \varphi' \to 0 \tag{1.17}$$

2. Решение задачи. Решение уравнений (1.11)-(1.13) будем искать в виде плоской гармоничной волны, которая распространяется в направлении оси Ox_2 и затухает вдоль оси Ox_1, когда $x_1 \to +\infty$

$$\begin{aligned} u &= U(x_1)e^{i(px_2 - \omega t)}, \quad -(h_1 + h_2) < x_1 < +\infty \\ \varphi &= \Phi(x_1)e^{i(px_2 - \omega t)}, \quad 0 < x_1 < +\infty \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $U(x_1)$ и $\Phi(x_1)$ – неизвестные амплитуды, удовлетворяющие условиям затухания, ω – частота волны, p – волновое число, в предположении, что $\omega > 0,\ \ p > 0,\ \ V = \omega / p$ – фазовая скорость искомой поверхностной волны.

Удовлетворяя уравнениям (1.11)-(1.13) и условию затухания (1.17), получим следующие решения:

1. В области $x_1 > 0,\ -\infty < x_2 < +\infty$:

$$u = U_0 e^{-p\beta(V)\,x_1}\, e^{i(p x_2 - \omega t)},$$
$$\varphi' = \Phi'_0\, e^{-p\,x_1}\, e^{i(p x_2 - \omega t)}, \qquad (2.2)$$
$$\varphi = [\bar{e}\, U_0\, e^{-p\beta(V)\,x_1} + \Phi'_0\, e^{-p\,x_1}]e^{i(p x_2 - \omega t)}.$$

2. В области $-h_1 < x_1 < 0,\ -\infty < x_2 < +\infty$:

$$u_1 = \left[U_{10}^{+} e^{ip\beta_1(V)x_1} + U_{10}^{-} e^{-ip\beta_1(V)x_1}\right] e^{i(px_2 - \omega t)}. \qquad (2.3)$$

3. В области $-(h_1 + h_2) < x_1 < -h_1,\ -\infty < x_2 < +\infty$:

$$u_2 = \left[U_{20}^{+} e^{ip\beta_2(V)x_1} + U_{20}^{-} e^{-ip\beta_2(V)x_1}\right] e^{i(px_2 - \omega t)}, \qquad (2.4)$$

где $U_0,\ \Phi'_0,\ U_{10}^{+},\ U_{10}^{-},\ U_{20}^{+},\ U_{20}^{-}$ – произвольные постоянные, которые также называются амплитудами, $\beta(V),\ \beta_1(V),\ \beta_2(V)$ – коэффициенты затухания, определяемые формулами:

$$\beta(V) = \sqrt{1 - V^2/S^2},\ \beta_1(V) = \sqrt{V^2/S_1^2 - 1},\ \beta_2(V) = \sqrt{V^2/S_2^2 - 1} \qquad (2.5)$$

Из условия затухания в подложке следует, что коэффициент $\beta(V)$ должен быть действительной положительной величиной, что соответствует упругой объемной волне. Другие два коэффициента $\beta_1(V),\ \beta_2(V)$ могут быть как действительными, так и мнимыми.

Подставляя выражения (2.2)-(2.5) в граничные условия (1.14)-(1.16), для неизвестных амплитуд получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&U_0 = U_{10}^{+} + U_{10}^{-},\ \Phi_0' = -\bar{e}U_0,\\
&\beta_2(e^{-ip\beta_2(h_1+h_2)}U_{20}^{+} - e^{ip\beta_2(h_1+h_2)}U_{20}^{-}) = 0.\\
&\bar{c}\beta U_0 + e\Phi_0' = ic_1\beta_1(U_{10}^{-} - U_{10}^{+}),\\
&U_{10}^{+}e^{-ip\beta_1 h_1} + U_{10}^{-}e^{ip\beta_1 h_1} = U_{20}^{+}e^{-ip\beta_2 h_1} + U_{20}^{-}e^{ip\beta_2 h_1},\\
&c_1\beta_1(e^{-ip\beta_1 h_1}U_{20}^{+} - e^{ip\beta_1 h_1}U_{10}^{-}) = c_2\beta_2(e^{-ip\beta_2 h_1}U_{20}^{+} - e^{ip\beta_2 h_1}U_{20}^{-}),\\
&\beta_2(e^{-ip\beta_2(h_1+h_2)}U_{20}^{+} - e^{ip\beta_2(h_1+h_2)}U_{20}^{-} = 0.
\end{aligned} \qquad (2.6)$$

Для получения нетривиального решения системы (2.6) напишем условие равенства нулю детерминанта, составленного из коэффициентов системы (2.6)

$$\beta(V) = \bar{c}_1\beta_1(V)\frac{\bar{c}_1\beta_1(V)\operatorname{tg}(\beta_1 k_1) + \bar{c}_2\beta_2(V)\operatorname{tg}(\beta_2 k_2)}{\bar{c}_1\beta_1(V) - \bar{c}_2\beta_2(V)\operatorname{tg}(\beta_1 k_1)\operatorname{tg}(\beta_2 k_2)} + R,$$

$$\widehat{c}_1 = c_1/\widehat{c}_1 = c_1/c(1+\chi^2),\ \widehat{c}_2 = c_2/\bar{c} = c_2/c(1+\chi^2), \qquad (2.7)$$

$$k_1 = p\,h_1 = 2\pi h_1/\lambda,\ k_2 = p\,h_2 = 2\pi h_2/\lambda,\ R = e\bar{e}/\bar{c} = e^2/\varepsilon c(1+\chi^2)$$

Здесь k_1, k_2 – приведенные (относительные) постоянные, R – постоянная электромеханическая связь поверхностной волны, λ –длина волны.

$$0 < R < 1 \qquad (2.8)$$

Если пьезоэффект отсутствует $(e=0)$, то в уравнении (2.7) коэффициент R становится равным нулю, а $S=S_0$, и уравнение (2.7) преобразуется в дисперсионное уравнение упругой волны Лява, когда подложка несет два слоя. Это уравнение приведено в работе [2] и имеет следующий вид:

$$\beta(V)=\bar{c}_1\beta_1(V)\frac{\bar{c}_1\beta_1(V)\operatorname{tg}(\beta_1 k_1)+\bar{c}_2\beta_2(V)\operatorname{tg}(\beta_2 k_2)}{\bar{c}_1\beta_1(V)-\bar{c}_2\beta_2(V)\operatorname{tg}(\beta_1 k_1)\operatorname{tg}(\beta_2 k_2)}\ . \tag{2.9}$$

При отсутствии слоёв, когда имеем механически свободное пьезоэлектрическое полупространство с электрическим коротко замкнутым краем [3], (2.7) преобразуется в дисперсионное уравнение волны Блюстейна- Гуляева:

$$\beta(V)=R\,. \tag{2.10}$$

При отсутствии только дополнительного слоя $(k_2=0)$, (2.7) преобразуется в дисперсионное уравнение волны Лява, когда имеется пьезоэлектрическое полупространство с проводящим слоем[1,4].

$$\beta(V)=\tilde{c}_1\beta_1(V)\operatorname{tg}(\beta_1 k_1)+R\,. \tag{2.11}$$

Для чисто упругих волн можем получить следующее дисперсионное уравнение

$$\beta(V)=\tilde{c}_1\beta_1(V)\operatorname{tg}(\beta_1 k_1)\,. \tag{2.12}$$

Если поверхностная волна существует, то $\beta(V)>0$. При чисто упругих волнах это возможно только в следующих трех случаях:

1) Коэффициенты $\beta_1(V),\ \beta_2(V)$ являются реальными положительными величинами, которым соответствуют упругие объемные волны, которые испытывают полное внутреннее отражение от границ слоев, при этом имеет место условие

$$\tilde{c}_1\beta_1(V)\operatorname{ctg}(\beta_1 k_1)>\tilde{c}_2\beta_2(V)\operatorname{tg}(\beta_2 k_2) \tag{2.13}$$

и условие при пьезоупругих волнах

$$\tilde{c}_1\beta_1(V)\operatorname{ctg}(\beta_1 k_1)\neq\tilde{c}_2\beta_2(V)\operatorname{tg}(\beta_2 k_2)\,, \tag{2.14}$$

V_L удовлетворяет условиям: a) $S_2<S_1<V_L<S$, b) $S_1<S_2<V_L<S$.

2) $\beta_1(V)>0$, а $\beta_2(V)$ является мнимым.

Допустим

$$\beta_2(V)=i\gamma_2(V),\quad \gamma_2(V)=\sqrt{\frac{V^2}{S_2^2}-1}>0 \tag{2.15}$$

В этом случае уравнения (2.7), (2.9) примут вид:

$$\beta(V)=\bar{c}_1\beta_1(V)\frac{\bar{c}_1\beta_1(V)\operatorname{tg}(\beta_1 k_1)-\bar{c}_2\gamma_2(V)\operatorname{th}(\beta_2 k_2)}{\bar{c}_1\beta_1(V)+\bar{c}_2\beta_2(V)\operatorname{tg}(\beta_1 k_1)\operatorname{th}(\beta_2 k_2)}+R \tag{2.16}$$

В случае чистых упругих волн $(R=0)$ должно выполняться условие

$$\tilde{c}_1\beta_1(V)\operatorname{tg}(\beta_1 k_1)>\tilde{c}_2\gamma_2(V)\operatorname{th}(\gamma_2 k_2) \tag{2.17}$$

Тогда V_L удовлетворяет условию c) $S_1<V_L<S_2<S$ или d) $S_1<V_L<S<S_2$

3) $\beta_2(V)>0$. Этот случай соответствует объемным волнам в дополнительном слое, которые подвергаются полному внутреннему отражению. $\beta_1(V)$ – мнимая величина, которой соответствуют в основном слое упругие неоднородные волны. В этом случае возьмем

$$\beta_1(V)=i\gamma_1(V);\quad \gamma_1(V)=\sqrt{1-\frac{V^2}{S_1^2}} \tag{2.18}$$

и уравнение (2.7) (так же, как и его частный случай (2.9)) примет вид:

$$\beta\left(V\right)=-\bar{c}_1\gamma_1\left(V\right)\frac{\bar{c}_1\gamma_1\text{th}\left(\gamma_1 k_1\right)-\bar{c}_2\beta\left(V\right)\text{tg}\left(\beta_2 k_2\right)}{\bar{c}_1\gamma_1-\bar{c}_2\beta_2\left(V\right)\text{tg}\left(\beta_2 k_2\right)\text{th}\left(\gamma_1 k_1\right)}+R.$$

$$\beta(V)=-\tilde{c}_1\gamma_1(V)\frac{\tilde{c}_1\gamma_1\text{th}(\gamma_1 k_1)-\tilde{c}_2\beta(V)\text{tg}(\beta_2 k_2)}{\tilde{c}_1\gamma_1-\tilde{c}_2\beta_2(V)\text{tg}(\beta_2 k_2)\text{th}(\gamma_1 k_1)}+R \tag{2.19}$$

В случае чистых упругих волн должно удовлетворяться условие (R=0):

$$\tilde{c}_1\gamma_1\text{th}(\gamma_1\text{k}_1)<\tilde{c}_2\beta_2\text{tg}(\beta_2\text{k}_2)<\tilde{c}_1\gamma_1\text{cth}(\gamma_1\text{k}_1), \tag{2.20}$$

а в случае электроупругих волн – условие

$$c\,\text{th}(\gamma_1 k_1)\tilde{c}_1\gamma_1(V)\neq\tilde{c}_2\beta_2(V)\text{tg}(\beta_2 k_2) \tag{2.21}$$

При этом, скорость волн Лява удовлетворяет условию

$$\text{e)}\ 0<S_2<V_\text{L}<S_1<S \quad \text{или} \quad \text{f)}\ 0<S_2<V_\text{L}<S<S_1 \tag{2.22}$$

Вернемся и рассмотрим случай, когда оба коэффициента $\beta_1(V)$ и $\beta_2(V)$ – мнимые. Этот случай в слоях будет соответствовать неоднородным упругим волнам.

Возьмем одновременно уравнения (2.15) и (2.18). Дисперсионное уравнение (2.7) и соответствующий ему частный случай (2.9) примут вид:

$$\beta(\text{V})=-\tilde{c}_1\gamma_1(\text{V})\frac{\tilde{c}_1\gamma_1\text{th}(\gamma_1\text{k}_1)+\tilde{c}_2\gamma_2\text{th}(\gamma_2\text{k}_2)}{\tilde{c}_1\gamma_1+\tilde{c}_2\gamma_2\text{th}(\gamma_1\text{k}_1)\text{th}(\gamma_2\text{k}_2)}+\text{R},\quad \gamma_2(V)=\sqrt{V^2/S_2^2-1} \tag{2.23}$$

Для чистых упругих волн $(R=0)$ – правая часть отрицательна при любых значениях k_1 и k_2. То есть упругие поверхностные волны Лява не могут образоваться от 5-ти парциальных неоднородных упругих волн, два или четыре из них должны быть однородными (объемными) волнами. Электроупругая волна Лява в уравнении (2.23) при наличии слагаемого $R>0$ также может существовать и образоваться из 5-ти неоднородных волн.

Как видим, наличие пьезоэлектрического эффекта расширяет область существования поверхностных волн Лява (и не только в этой задаче).

3. Исследование дисперсионного уравнения. Как было отмечено, при отсутствии двух слоев $k_1=k_2=0$ получаем дисперсионное уравнение (2.9), которое всегда имеет решение

$$V=V_{BG}=S_1\sqrt{1-R^2} \tag{3.1}$$

и представляет собой скорость распространения поверхностных волн Блюстейна-Гуляева в пьезоэлектрическом полупространстве (при отсутствии пьезоэффекта в упругом полупространстве будем иметь чисто упругую объемную волну со скоростью распространения $V=S$, которая при наличии пьезоэффекта преобразуется в поверхностную волну Блюстейна-Гуляева), если для слоистой структуры выполняется условие $S_1<S$ и $S_2<S$.

Далее приведем некоторые возможные случаи слоев (табл. 3.1) и их физические величины (табл. 3.2).

I. Рассмотрим случай, когда берем первый ряд табл. 3.1 с данными второго, третьего и четвертого рядов табл. 2.

Допустим, что второй слой отсутствует, т.е. $k_2 = 0$. В этом случае для системы (PZT-4–Zn-1) из (2.7) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\beta(V) = -\tilde{c}_1\, \beta_1(V)\, \mathrm{th}[\beta_1(V)\, k_1] + R \tag{3.2}$$

Так как $R = \mathrm{const} > 0, \quad V_{BG} < S_1 < S$, решения опишутся дисперсионными кривыми рис. 6.1 а) работы [4]. В нашем примере будем иметь следующую картину (фиг.2). Здесь скорость первой моды волны Лява $V_1(k_1)$ в точке $k_1 = k_{11} = 0$ начнется со скорости Гуляева-Блюстейна $V = V_{BG}$, возрастает вместе с возрастанием k_1 и асимптотически стремится к значению $V_{1\infty} = 2460,57$, которая меньше скорости распространения объемной волны слоя S_1.

Таблица 1

Подложка	Основной слой	Дополнительный слой	Взаимоотношения
PZT-4 (трансверсаль-но-изотропная)	Zn	Al	$V_{BG} < S_1 < S < S_2$
	Zn	Pt	$S_2 < V_{BG} < S_1 < S$
	Pt	Zn	$S_1 < V_{BG} < S_2 < S$
	Pt	Au	$S_1 < V_{BG} < S < S_2$
	Al	Zn	$S_2 < S_1 < V_{BG} < S$
	Al	Pt	$V_{BG} < S_2 < S < S_1$
	Al	Si	$S_2 < V_{BG} < S < S_1$
	Al	W	$V_{BG} < S < S_2 < S_1$
	Au	Pt	$S_1 < S_2 < V_{BG} < S$

Таблица 2

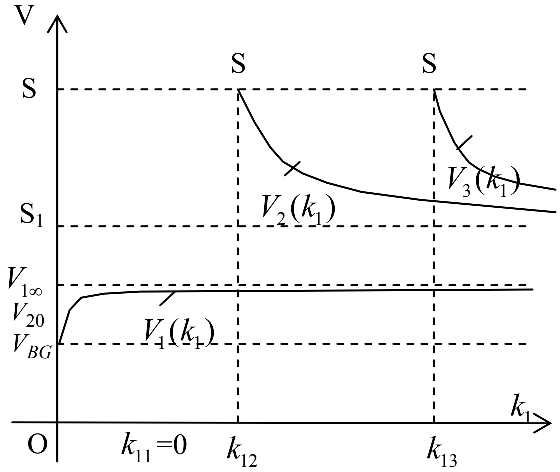
1	C_{44} Н/м^2	ρ кг/м^3	e_{15} с/м^2	ε_{11} Ф/м	S м/с	V_{BG} м/с
2 PZT-4	$2{,}56 \cdot 10^{10}$	$7{,}5 \cdot 10^3$	12,7	$65 \cdot 10^{-10}$	2592,65	2256,85
3 Zn	$4{,}5 \cdot 10^{10}$	$7{,}14 \cdot 10^3$	–	–	2510,48	–
4 Al	$2{,}83 \cdot 10^{10}$	$2{,}702 \cdot 10^3$	–	–	3236,31	–
5 Pt	$7{,}65 \cdot 10^{10}$	$21{,}4 \cdot 10^3$	–	–	1690,71	–
6 Au	$4{,}24 \cdot 10^{10}$	$19{,}30 \cdot 10^3$	–	–	1482,19	–
7 W	$16{,}06 \cdot 10^{10}$	$19{,}26 \cdot 10^3$	–	–	2887,65	–
8 Si					5842,5	

Высшие моды волны начинаются, соответственно, с критических значений мод $k_{12} = 7,79,\ k_{13} = 19,97,\ k_{14} = 32,15$ и др., в случае которых имеем объемные волны со скоростью распространения $V = S$, затем они преобразуются в поверхностные волны, скорости которых $V_i(k_1)$ с возрастанием k_1 убывают и в бесконечности приближаются к скорости $V = S_1$ объемных волн, распространяемых в слое.

Предположим, что первый слой отсутствует, т.е. $k_1 = 0$. В случае системы подложка-слой-2 получим следующее дисперсионое уравнение:

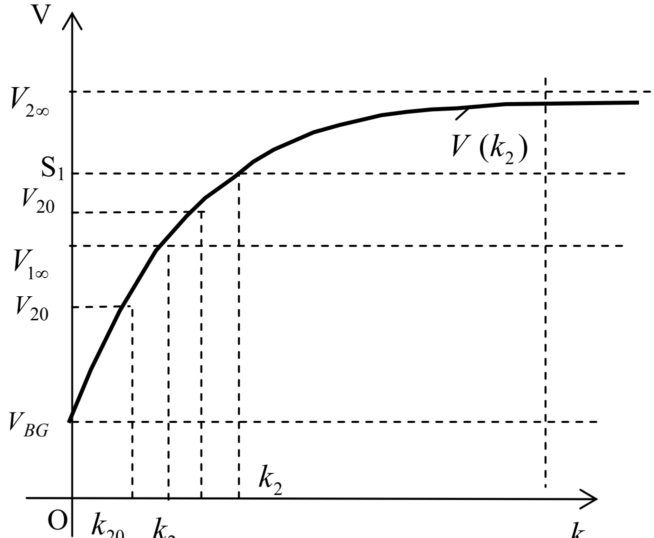
$$\beta(V) = -\tilde{c}_2\,\gamma_2(V)\,\mathrm{th}[\gamma_2(V)\,k_2] + R\,, \tag{3.3}$$

где учтено, что в случае $V < S < S_2$ имеем $\beta_2 = i\gamma_2$. Так как имеем случай жесткого слоя $(S < S_2,\ 0 < R = \mathrm{const} < 1)$, следовательно, будем иметь одно решение (3.4), которое опишется дисперсионными кривыми, приведенными на фиг.3.



k_2=0,38 Фиг.2

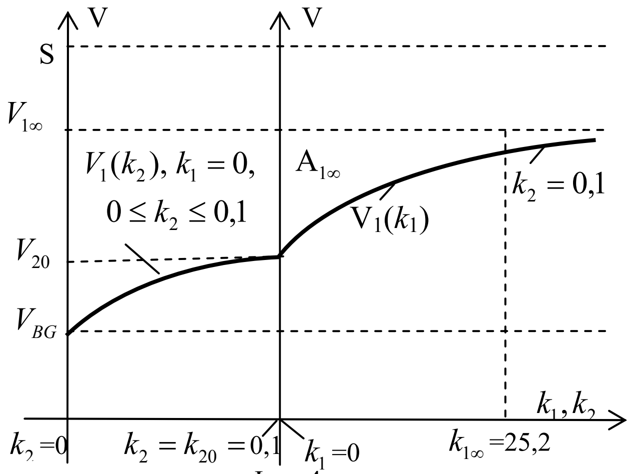
Как видно из фиг.3, скорость волны Лява начинается со скорости волны Блюстейна- Гуляева V_{GB} (когда $k_2 = 0$) и с возрастанием k_2 монотонно возрастает. При значении $k_2 = 0{,}817$ достигает значения $V_{1\infty} = 2460{,}57\,м/с$ (о чем было сказано при описании частного случая $k_2 = 0$). При значении $k_2 = 1{,}3268$ достигает значения $S_1 = 2510.48\,м/с$ (которая равна скорости распространения объемной сдвиговой волны в первом слое), затем возрастая в бесконечности, стремится к значению $V_{2\infty} = 2563{,}49$ м/с (практически, когда $k_2 \geq 12$). Достигая этого значения при $k_1 = 0$, в случае величины $k_2 < 0{,}817$ первая мода волны Лява распространяется с определенной скоростью V_{20}, причем $V_{20} < V_{1\infty}$.



Фиг. 3

Допустим, что второй слой имеет определенную фиксированную толщину k_{20}, а толщина первого слоя начинается изменяться в интервале $k_1 \in [0;\infty]$. Если $k_1 = 0$, то в системе подложка-слой-2 при толщине $k_2 = k_{20} < 0,817$ (фиг.3) волна Лява распространится со скоростью $V_{20}(k_2) < V_{1\infty}$.

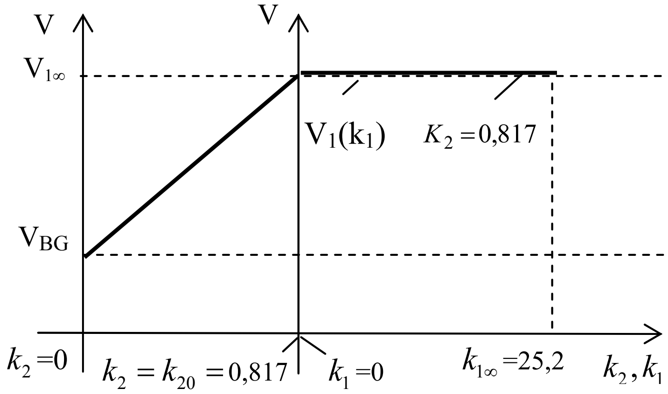
При добавлении первого слоя толщиной k_1 в полученной системе скорость первой моды волны Лява больше, чем V_{20}, которая с V_{20} монотонно возрастает до $V_{1\infty}$ при возрастании k_1 с нуля до ∞. Следовательно, дисперсионная кривая первой моды будет иметь вид (фиг. 4) (напр., при значении $k_{20} = 0,1$).



Фиг. 4

При возрастании k_{20} возрастает также и скорость V_{20} (фиг.3), так что точка A_{20} фиг. 4 перемещается наверх, когда же k_{20} стремится к значению $k_2 = 0,817$,

то V_{20} стремится к $V_{1\infty}$, т.е. точка A_{20} стремится к точке $A_{1\infty}$, интервал $(V_{20}, V_{1\infty})$ сжимается к точке $V_{1\infty}$ независимо от значения k_1; первая мода волны Лява распространяется с постоянной скоростью $V = V_{1\infty}$ (фиг.4). В случае, когда толщина второго слоя k_{02} становится больше, чем $\mathrm{k}_2 = 0.817$, скорость распространения волны Лява V_{20} в системе подложка-слой-2 становится больше значения $V_{1\infty}$ (фиг.3). Теперь, при добавлении первого слоя толщиной k_1 и при возрастании k_1 с нуля до бесконечности, в полученной системе волна Лява начинает распространяться с монотонно убывающей скоростью V_{20} до значения $V_{1\infty}$.
Дисперсионная кривая изображена на фиг.6, когда $k_{20} = 1$ и $V_{20} = 2482,5$ì /ñ (практически $k = k_\infty = 20,\ V = V_{1\infty}$). Когда толщина второго слоя становится $k_{20} = 1,327$ (фиг.3), в системе подложка-слой-2 распространяется поверхностная волна $V = S_1$, которая в зависимости от k_1 преобразуется, как на фиг.7. Затем, при возрастании k_2 возрастает также V_{20} (напр., при k_{20} $V_{20} = 2563,5$) и дисперсионная кривая будет иметь вид (фиг. 7).



Фиг. 5

Высокие моды волны начинают распространяться с объемных волн подложки при фиксированном случае k_2 для определенных критических значений k_1 и параллельно возрастанию k_1 распространяются с убывающими скоростями, которые стремятся в первом слое к скоростям распространения $V = S_1$ сдвиговых объемных волн. Ниже приведены критические значения 1– 4 возникающих мод волны для толщины k_2 второго слоя исследуемой системы (табл. 3).

Как видно из табл.3, начиная приблизительно со значения $k_2 = 10$ значения k_{12}, k_{13}, k_{14} и значения других критических точек устанавливаются и остаются практически неизменными в зависимости от сходимости $\mathrm{th}(\gamma_2 k_2)$ при возрастании k_2. С другой стороны, для каждого значения k_2 разность двух соседних критических точек k_1 равна приблизительно 12.18, которая зависит от периодичности $\mathrm{tg}\,(k_1\beta_1)$.

Таблица 3

k_2	k_{12}	k_{13}	k_{14}
0	7.787	19.967	32.147
0.1	8.124	20.31	32.489
1	10.37	22.54	34.72
10	11.55	23.72	35.90
100	11.55	23.72	35.90

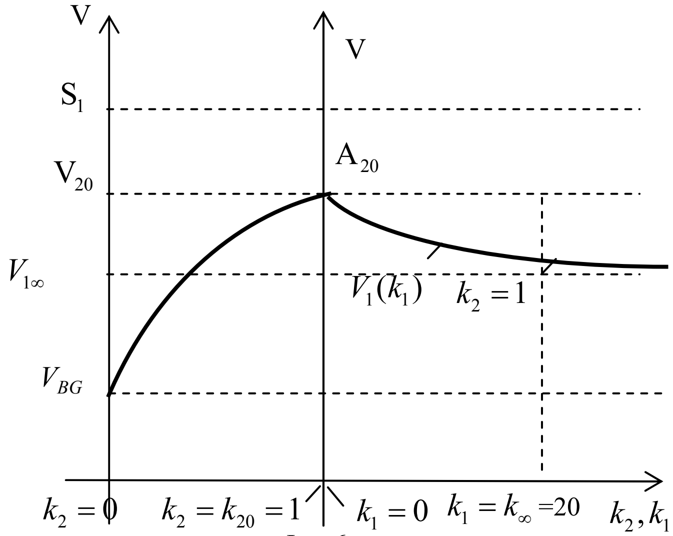
Таким образом, для электроупругих поверхностных волн Лява в определенных слоистых структурах, определяемых условиями случая а), получили:

1) волна Лява существует для любых относительных толщин слоев структуры k_1, k_2 и представляет собой многомодную дисперсионную волну;

2) поведение высших мод одинаково для любых значений k_1, k_2. При параметре k_1 они начинаются в подложке сдвиговыми волнами, распространяющимися со скоростью $V = S$, а при параметре k_2 они начинаются для каждых фиксированных значений определенных критических значений $k_{12}(k_2), k_{13}(k_2), k_{14}(k_2)$ и др.

С увеличением k_1 сдвиговые волны, распространяемые в подложке, становятся поверхностными волнами и распространяются с убывающей скоростью, значения которых стремятся к скоростям объемных волн, распространяющихся в первом слое $V = S_1$, при $k_1 \to \infty$. С увеличением k_2 указанные критические значения устанавливаются и становятся практически постоянными. Разность соседних критических значений в случае любого k_2 одинаковы и приблизително равны 12.18 (фиг. 2, табл.3.2);

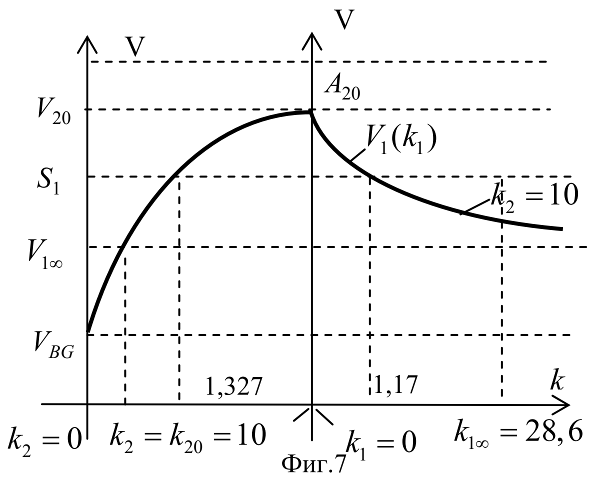
3) первая мода волны Лява зависит от толщины 2-го слоя k_2 и с таким поведением: при $0 < k_2 < 0,817$ первая мода в точке $k_1 = 0$ начинается с поверхностной волны, распространяющейся со скоростью $V_{02}(k_2)$ в системе подложка-слой-2 и с увеличивающейся скоростью распространяется в слоистой системе, достигая граничной скорости $V_{1\infty}$ при $k_1 \to +\infty$. $V_{1\infty} = 2460{,}57$ – граничная скорость, к которой стремится скорость поверхностной волны, распространяющейся в системе подложка-слой-1 при $k_1 = +\infty$ (фиг.4).



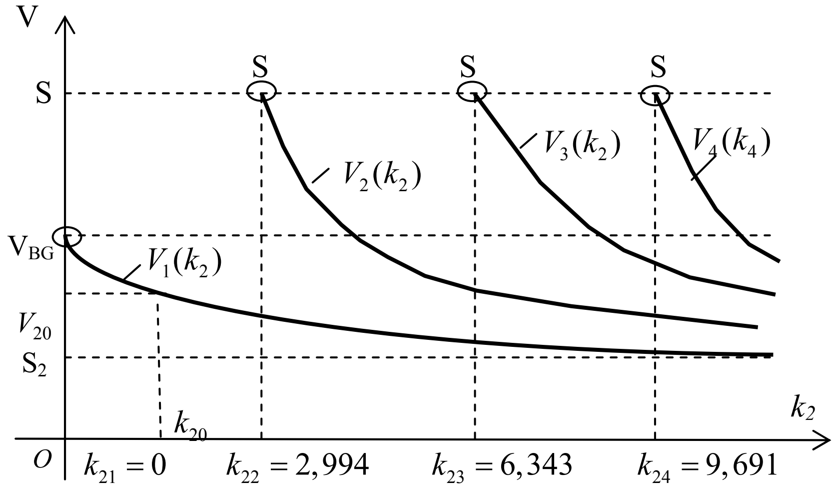
Фиг.6

При $k_2 = 0,817$ волна Лява распространяется с постоянной скоростью $V_{1\infty}$, которая не зависит от значения толщины k_1 (фиг.5).

При $k_2 = 0,817$ первая мода волны Лява начинает распространяться с объемной волны системы подложка-слой-2, которая имеет скорость $V_{02}(k_2)$ и с убывающей скоростью достигает граничного значения $V_{1\infty}$ при $k_1 \to \infty$ (фиг.6). В частности, при $k = k_{20} = 1,327$ скорость дисперсионной волны начинается со значения $V_{02} = S_1$ (фиг.10). При возрастании k_2 возрастает также начальная скорость и приближается к значению $V_{2\infty}$ (фиг.6). Дисперсионная кривая имеет вид (фиг.10).



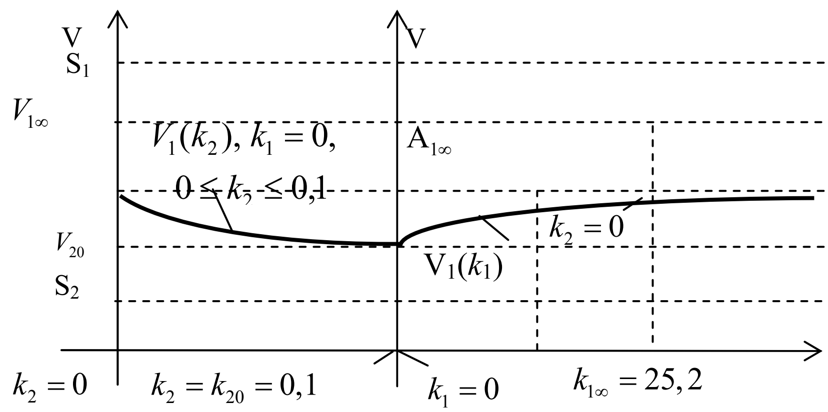
Фиг.7



Фиг.8

II. Перейдем к слоистым структурам, удовлетворяющим условиям второго ряда табл.1 с данными второго, третьего и пятого рядов табл. 2. В этом случае $S_2 < S_1 < S$, т.е первый слой снова мягок по отношению к подложке, а второй слой, в свою очередь, мягок по отношению к первому (следовательно, и по отношению к подложке). Снова рассмотрим частный случай $k_2 = 0$, затем случай $k_1 = 0$, а дальше – общий случай $k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$. В случае $k_2 = 0$ получаем рассмотренную ранее, в случае а) систему (PZT-4–Zn-1), где волновой процесс описывается дисперсионной кривой, фиг.4, 5.

При $k_1 = 0\ \ k_2 \neq 0$ уже имеем новую систему PZT-4–Pt-2 (подложка-слой-2), в которой слой мягче подложки. В этом случае из (2.7) получим уравнение:

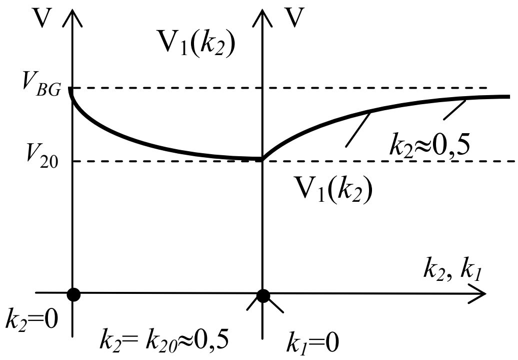


Фиг.9

$$\beta(V) = -\tilde{c}_2\, \beta_2(V)\, \mathrm{th}[\beta_2(V)\, k_2] + R\,, \tag{3.4}$$

которое мы должны исследовать в интервале $k_2 \in [0, \infty],\ V \in [0, S]$. Так как $S_2 < S$, то в интервале $V \in [0, S_2]$ уравнение (3.4) можем заменить уравнением (3.3). Воспользуемся результатами работы [4].

Поскольку здесь $R = \text{const} > 0$ и $S_2 < V_{BG} < S$, поведение волны Лява описывают дисперсионные кривые, приведенные на рис. 5.2 работы [4], которые в нашей работе будут иметь вид (фиг.8).



Фиг.10

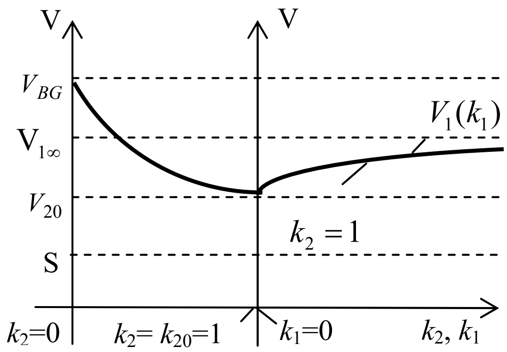
Как видно из фиг.8, высокие моды волны Лява начинаются с критических значений k_{22}, k_{23}, k_{24} и т.д., как основные объемные волны, распространяющиеся со скоростью S, затем, с увеличением k_2, становятся поверхностными, и с убыванием скорости приближаются к волне, распространяющейся в слое со скоростью S_2. Первая мода $k_2 = 0$ начинается с поверхностной волны Гуляева–Блюстейна, которая имеет скорость V_{BG} и распространяется с убывающей скоростью $V_1(k_2)$ и при $k_2 \to \infty$ стремится к значению S_2.

Перейдем к общему случаю. Возьмем для второго слоя толщину k_{20} (напр., $k_{20} = 0{,}1$), а k_1 будем менять в интервале $[0, \infty]$. При $k_1 = 0$ в системе подложка-дополнительный слой-2 распространится волна Лява со скоростью $V_{20}(k_{20}) > S_2$ (фиг.9). Если добавить первый слой толщиной k_1, то в полученной двухслойной системе распространится волна Лява, скорость первой моды которой будет больше, чем V_{20}, и которая при $k_1 \to +\infty$ будет монотонно возрастать со значения V_{20} до $\mathrm{V}_{1\infty} = 2460{,}57$. Отметим, что при $k_1 = 0{,}38$ скорость $V_1(k_1)$ получит значение V_{BG}. Приведем дисперсионную кривую этой моды при $k_2 = 0{,}1$ (фиг.9).

При возрастании $k_2 = k_{20}$ приблизительно при значении 0,5 и при $K_1 \to \infty$ в качестве асимптоты выступает значение $V = V_{BG}$ (фиг.10).

При продолжении возрастания k_2, например, когда $k_2 = k_{20} = 1$, дисперсионная кривая имеет поведение, приведенное на фиг.12.

При более больших значениях k_2, например, $k_2 = k_{20} = 10$, будем иметь $V_{20} = 1892{,}8$ ì /ñ, $V_{1\infty} = 1905{,}52$ ì /ñ, а при $k_2 = k_{20} = 100$ будем иметь $V_{20} = 1892{,}5$, $V_{1\infty} = 1892{,}699$. То есть, когда k_2 возрастает, величины V_{20} и $V_{2\infty}$ тесно приближаются друг к другу и интервал ($V_{20}, V_{1\infty}$) преобразуется в точку; и в этом случае волна Лява становится независимой от k_1 и распространяется со скоростью $V_{2\infty}$ (фиг.12).



Фиг.11

Теперь обратимся к более высоким модам. Например, при $k_2 = 0,1$ для k_1 получаем следующие критические значения: $k_{12} = 4.15$, $k_{13} = 18.0$, $k_{14} = 26.65$. Поскольку в этом случае (т.е. $S_2 < V$) в характеристическое уравнение входит функция $\operatorname{tg}(\beta_2(V)k_2)$, то в силу её цикличности критические точки будут перемещаться по определенному закону по оси k_1, в случае, когда изменяется k_2. В качестве примера понаблюдаем за изменением критической точки k_{12}, которая приведена в табл. 4.

Таблица 4

K_2	0,1	1,68	2	2,5	2,9	2,95	2,97	
K_{12}	4,15	1,705	1,5	1,09	0,36	0,18	0,11	
K_2	2,98	2,99	2,995	3	4	6	6,3	6,34
K_{12}	0,06	0,02	0	10,55	2,65	0,95	0,25	0,01

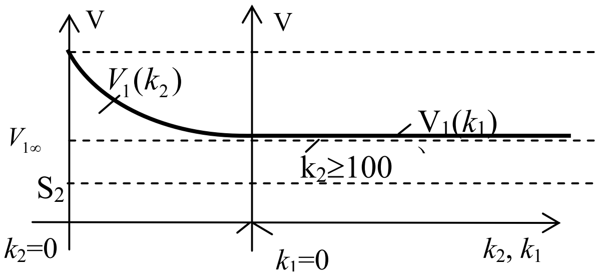
Таким образом, для электроупругой волны Лява слоистой системы, определяемой условиями II, получили следующие результаты:

1) критические точки k_{12}, k_{13}, k_{14} k_1 высших мод волны Лява периодически перемещаются вдоль оси k_1 в зависимости от полученного результата k_2;

2) поведение первой моды волны Лява зависит от толщины второго слоя k_2 и определяется так: она начинается с распространяющейся в системе подложка-слой -2 и распространяющейся со скоростью $V_{20}(k_2)$ волны Лява в случае $k_1 = 0$ и параллельно возрастанию k_1 начинает распространяться с возрастающей скоростью; при определенном значении k_1 ($k_2 = 0,1$; $k_1 = 0,38$) имеет скорость волны Гуляева–Блюстейна V_{BG}, затем скорость возрастает и асимптотично стремится к граничной скорости $V_{1\infty}$, которая зависит от значения k_2 (при $k_2 = 0,1$ $V_{1\infty} = 2460,57\ м/с$) (фиг.9).

При $k_2 \approx 0,5$ скорость первой моды, начиная со значения $V_{20}(k_{20})$ (которая меньше, чем в предыдущем случае), возрастает, а при $k_1 \to \infty$ асимптотически стремится к значению V_{BG} (фиг.10).
Затем k_2, увеличиваясь, изменяется в интервале $[V_{20}, V_{1\infty}]$, где скорость $V_{1\infty}$ стремится асимптотически при $k_1 \to +\infty$, причем $V_{1\infty} < V_{BG}$ (фиг.11).
Начиная с больших значений k_2, интервал $[V_{20}; V_{1\infty}]$ сужается и преобразуется в точку, а волна по k_1 распространяется с постоянной скоростью $V_{1\infty} > S_2$ (фиг.12).

III. Перейдем к случаю, когда берем третий ряд табл. 1 с данными второго, третьего и пятого рядов табл.2. В этом случае $S_1 < V_{BG} < S_2 < S$, т.е. оба слоя мягки по отношению к подложке, а первый слой мягок по отношению ко второму. Вначале обсудим частные случаи – $k_1, k_2 \neq 0$, а затем – общий случай.

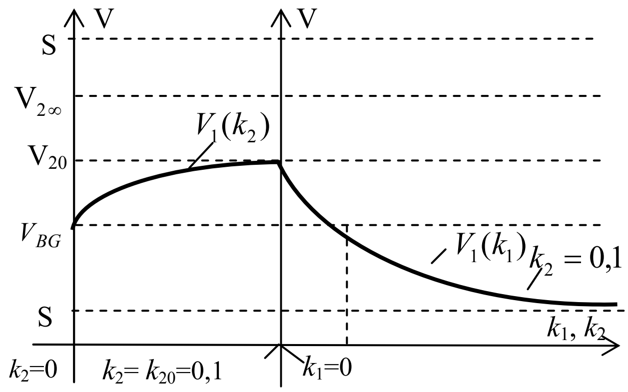


Фиг.12

В случае $k_2 = 0$ получаем систему подложка-слой-1 (PZT-4-Pt(1)), что аналогично системе PZT-4-Pt(2), описанной в предыдущем примере, которая получается при равенстве параметра $k_1 = 0$, т.е. описание волнового процесса будет иметь вид: фиг.8, только необходимо выполнить замену: $k_2 \to k_1$, $S_2 \to S_1$, $k_{21} \to k_{11}, k_{22} \to k_{12}$ и др. (фиг.13).

В случае $k_1 = 0$ получим систему подложка-слой (2) PZT-4-Zn(2), что аналогично случаям, описанным в последних двух случаях – PZT-4-Zn(1), когда параметр k_2 равен нулю. Итак, в этом случае поведение волны Лява опишется кривой, изображенной на фиг.2, где необходимо выполнить следующую замену обозначений: $k_1 \to k_2$, $S_1 \to S_2$, $k_{11} \to k_{21}$, $k_{12} \to k_{22}$, $V_{\infty 1} \to V_{2\infty}$ (фиг.14).

Перейдем к общему случаю. Возьмем для второго слоя определенную фиксированную толщину k_2 (например, $k_{20} = 0,1$), а k_1 будем изменять в интервале $[0,\ \infty]$. Если $k_1 = 0$, то в системе подложка-слой будет распространяться волна Лява со скоростью $V_{20} < V_{2\infty}$ (фиг.13). Теперь добавим 1-ый слой толщиной k_1. В полученной двухслойной системе распространится первая мода волны Лява со скоростью меньшей V_{20}, которая при определенном значении k_{1*} приравнится к скорости волны Гуляева–Блюстейна и затем, параллельно возрастанию значения k_1, убывая, будет стремиться к скорости объемных волн первого слоя S_1. Дисперсионная кривая будет иметь вид, приведенный на фиг. 13.



Фиг.13

Рассмотрим случай I, когда берем первый ряд табл.1 с данными второго, третьего и четвертого рядов табл. 2 (фиг.8). При возрастании параметра k_2 скорость $V_{20}(k_2)$ также возрастёт, стремясь к значению $V_{2\infty}$ и скорость $V_1(k_1)$ изменится подобно предыдущему случаю – убывает от $V_{20}(k_2)$ до S_1. Дисперсионная кривая подобна кривой фиг.2. Высокие моды возникают подобным образом. Например, при $k_1 = 0,1$ значение критических точек будет $k_{12} = 2,989,\ k_{13} = 6,338,\ k_{14} = 9,678$.

Таким образом, для электроупругих волн Лява в определенных слоистых структурах, определяемых условиями случая а), получили следующие значения:

1) волна Лява существует для любых относительных толщин слоев структуры – k_1, k_2 и представляет собой многомодную дисперсионную волну;

2) поведение высших мод одинаково для любых значений k_1, k_2. Они начинаются в подложке сдвиговыми волнами, распространяющимися со скоростью $V = S$ при параметре k_1; в случае параметра k_2 – для каждых фиксированных значений определённых критическими значениями – $k_{12}(k_2), k_{13}(k_2), k_{14}(k_2)$ и др.. С увеличением k_1 сдвиговые волны, распространяемые в подложке, становятся поверхностными волнами и распространяются с убывающей скоростью, значения которых стремятся к скоростям объемных волн, распространяющихся в первом слое $V = S_1$ при $k_1 \to \infty$. С увеличением k_2 указанные критические значения устанавливаются и становятся практически постоянными. Разность соседних критических значений в случае любого k_2 одинакова и приблизительно равна 12.18 (фиг. 2, табл.2).

Первая мода волны Лява зависит от толщины 2-го слоя k_2 и имеет поведение:

при $0 < k_2 < 0,817$ первая мода в точке $k_1 = 0$ начинается с поверхностной волны, распространяющейся со скоростью $V_{02}(k_2)$ в системе подложка-слой-2 и с увеличивающейся скоростью распространяется в слоистой системе, достигая граничной скорости $V_{1\infty}$ при $k_1 \to +\infty$ (фиг. 4);

при $k_2 = 0,817$ волна Лява распространяется с постоянной скоростью $V_{1\infty}$, которая не зависит от значения толщины k_1 (фиг.5);

при $k_2 > 0,817$ первая мода волны Лява начинается со значения объемной волны системы подложка-слой-2, которая имеет скорость $V_{02}(k_2)$ и с убывающей скоростью достигает значения $V_{1\infty}$ при $k_1 \to \infty$ (фиг.6). В частности,

при $k = k_{20} = 1,327$ скорость волны начинается со значения $V_{02} = S_1$ (фиг.7);

при возрастании k_2 возрастает также начальная скорость и приближается к значению $V_{2\infty}$ (фиг.3). Дисперсионная кривая имеет вид фиг.7.

Заключение. Таким образом, для электроупругой волны Лява слоистой системы, определяемой условиями II, получили следующие результаты.

1) Критические точки k_{12}, k_{13}, k_{14} k_1 высших мод волны Лява периодически перемещаются вдоль оси k_1 в зависимости от полученного результата k_2.

2) Поведение первой моды волны Лява зависит от толщины второго слоя k_2 и определяется так: она начинается с распространяющейся в системе подложка-слой-2 и распространяющейся со скоростью $V_{20}(k_2)$ волны Лява в случае $k_1 = 0$, и параллельно возрастанию k_1 начинает распространяться с возврастающей скоростью; при определенном значении k_1 (когда $k_2 = 0.1, k_1 = 0.38$) имеет скорость волны Гуляева–Блюстейна V_{BG}, затем скорость возрастает и асимптотично стремится к граничной скорости $V_{1\infty}$, которая зависит от значения k_2 (в случае $k_2 = 0,1$ $V_{1\infty} = 2460,57\, м/с$) (фиг.9).

Когда значение k_2 достигает примерно значения 0.5, скорость первой моды, начиная со значения $V_{20}(k_{20})$ (которая меньше, чем в предыдущем случае), возрастает и при $k_1 \to \infty$ асимптотически стремится к значению V_{BG} (фиг.10).

Затем, при возрастании k_2, увеличиваясь, изменяется в интервале $[V_{20}, V_{1\infty}]$, где $V_{1\infty}$ стремится асимптотически при $k_1 \to +\infty$, причем $V_{1\infty} < V_{BG}$ (фиг.11).

Начиная с больших значений k_2, интервал $[V_{20}; V_{1\infty}]$ сужается и преобразуется в точку, а волна по k_1 распространяется с постоянной скоростью $V_{1\infty} > S_2$ (фиг.12).

Перейдем к случаю III, когда берём третий ряд табл. 3.1 с данными второго, пятого и третьего рядов табл. 2. В этом случае $S_1 < V_{BG} < S_2 < S$, т.е. оба слоя мягки по отношению к подложке, а первый слой мягок по отношению ко второму. Вначале обсудим частные случаи – $k_2, k_1 \neq 0$, а затем – общий случай.

В случае $k_2 = 0$ получаем систему PZT-4-Pt(1), что аналогично системе PZT-4-Pt(2), описанной в предыдущем примере, которая получается при равенстве параметра $k_1 = 0$, т.е. описание волнового процесса будет иметь вид: фиг.8, только необходимо выполнить замену: $k_2 \to k_1$, $S_2 \to S_1$, $k_{21} \to k_{11}$, $k_{22} \to k_{12}$ и др. (фиг.12).

В случае $k_1 = 0$ получим систему подложка-слой-2 PZT-4-Zn(2), что аналогично случаям, описанным в последних двух случаях – PZT-4-Zn(1) при равенстве нулю патраметра k_2. Так что, в этом случае поведение волны Лява опишется кривой, изображенной на фиг.2, где необходимо выполнить следующую замену обозначений: $k_1 \to k_2$, $S_1 \to S_2$, $k_{11} \to k_{21}$, $k_{12} \to k_{22}$, $V_{\infty 1} \to V_{2\infty}$ (фиг.13).

Перейдем к общему случаю. Возьмем для второго слоя определённую фиксированную толщину k_2 (например, $k_{20} = 0{,}1$), а k_1 будем изменять в интервале $[0,\ \infty]$. Если $k_1 = 0$, то в системе подложка-слой будет распространяться волна Лява со скоростью $V_{20} < V_{2\infty}$ (фиг.8). Теперь добавим 1-ый слой толщиной k_1. В полученной двухслойной системе распространится первая мода волны Лява со скоростью, меньшей V_{20}, которая при определённом значении k_{1*} приравнится к скорости волны Гуляева–Блюстейна и затем, параллельно возрастанию значения k_1, убывая, будет стремиться к скорости объемных волн первого слоя S_1. Дисперсионная кривая будет иметь вид, приведенный на фиг.13. Рассмотрим случай I, когда берем первый ряд табл. 1 с данными второго, третьего и четвертого рядов табл. 2 (фиг.13). Затем, при возрастании параметра k_2 скорость $V_{20}(k_2)$ также возрастёт, стремясь к значению $V_{2\infty}$ и скорость $V_1(k_1)$ изменится подобно предыдущему случаю – убывает от $V_{20}(k_2)$ до S_1. Дисперсионная кривая подобна кривой фиг.13. Высокие моды возникают подобным образом. Например, приведем значение критических точек $k_{12} = 2.989,\ k_{13} = 6.338,\ k_{14} = 9678$ при $k_1 = 0.1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492 с.
2. Даноян З.Н., Даноян Н. З., Манукян Г. А. Поверхностные электроупругие волны Лява для двух слоев на пьезоэлектрической подложке.// Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54. № 4. С.22-25.
3. Lothe J,Barnett D.M. On the existance of surfase wave soiution for anisotropic elastic half-spaces with free surfase. // J.Appl.phys. 1976.V.47. №2. P.428-453.
4. Danoyan Z.N., Pilliposyan G. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer.//International Journal Solids and Structures. 2007. V.44. PP.5829–5847.
5. Белубекян М.В., Казарян К.Б. К вопросу существования поверхностных сдвиговых волн в однородном упругом полупространстве.//Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №1. С.6-12.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
21.05.2008

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 539.3

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЕ

Погосян Н.Д.

Ключевые слова: волна, пластина, локализованная, изгибная, неоднородная
Key words: wave, plate, localized, bending, non-homogenous

Ն. Ջ. Պողոսյան
Տեղայնացված լայնական ալիքների տարածումը կիսաանվերջ անհամասեռ սալում

Ուսումնասիրվում է լայնական ալիքները կիսաանվերջ սալում, որի մեջ Յունգի մոդուլը և խտությունը փոփոխվում են էքսպոնենցիալ օրենքով. Կախված անհամասեռությանը բնութագրող α գործակցից և առաձգականության ν պարամետրից ուսումնասիրված է լայնական մարող ալիքի գոյությունը.

N.D. Poghossyan
Localized bending waves in semi-infinite non homogeneous plate

The bending waves are studied in semi-infinite plate which elasticity module and density are function of exponential type. The bending localized wave existence problem is investigated in depend of parameters characterizing non homogeneity and elastic property of plate material.

Изучаются изгибные волны в полубесконечной пластине, в которой модуль Юнга и плотность изменяются по экспоненциальному закону. Исследован вопрос существования изгибной локализованной волны в зависимости от параметров, характеризующих неоднородность и упругие свойства материала пластинки.

Исследования, посвященные локализованным изгибным волнам в упругих пластинах, впервые были проведены Коненковым Ю. [1] и позднее развиты в других работах [2-4] и т.д.

Основываясь на теории пластин Кирхгофа, проблема колебаний пластины разделяется на две независимые задачи планарных и изгибных колебаний, и в частности, для изгибных волн задача состоит в исследовании локализованных колебаний вблизи свободного края пластины по аналогии с волнами вдоль свободной поверхности полупространства, изучаются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль кромки пластинки в случае свободной кромки.

Рассмотрим полубесконечную пластину, отнесённую к декартовой системе координат $Oxyz\left\{x\in\left[0,+\infty\right);\ y\in\left(-\infty;+\infty\right);\ z\in\left[-h;h\right]\right\}$ так, чтобы срединная плоскость пластинки совпадала с координатной плоскостью Oxy.

Полагаем, что модуль Юнга и плотность пластинки изменяются по закону $E=E_0e^{\alpha x}$, $\rho=\rho_0e^{\alpha x}$ (экспоненциальная неоднородность).

Тогда изгибные колебания пластинки описываются уравнением

$$\Delta^2W+2\alpha\frac{\partial}{\partial x}\Delta W+\alpha^2\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right)=-\frac{2\rho_0h}{D_0}\frac{\partial^2W}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

где $W\left(x,y,t\right)$ – перемещение точек пластины, а $D_0=\dfrac{2E_0h^3}{3\left(1-\nu^2\right)}$.

На кромке пластины $x=0$ примем условия свободного края:

$$M_x\Big|_{x=0}=\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\Big|_{x=0}=0 \qquad (1.2)$$

$$N_x=\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+2\frac{\partial H}{\partial y}\right)\Big|_{x=0}=\left(\alpha\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=0}=0\ .$$

Условие локализации затухания колебаний пластинки примем при $x\to\infty$ в виде

$$\lim_{x\to\infty} W\left(x,y,t\right)=0\,. \qquad (1.3)$$

Эта задача в однородном случае $\alpha=0$ рассмотрена в [4].

Представим решение уравнения в виде плоских монохроматических волн, распространяющихся вдоль оси oy.

$$W(x,y,t)=W_0(x)\exp\left[i\,(\omega\, t-k\, y)\right], \qquad (1.4)$$

где ω – частота колебаний, k – волновое число. Подставляя (1.4) в (1.1), для определения функции $W_0(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d^2}{d\,x^2}-k^2\right)^2 W_0\left(x\right)+2\alpha\left(\frac{d^3}{d\,x^3}-k^2\frac{d}{dx}\right)W_0\left(x\right)+$$
$$+\alpha^2\left(\frac{d^2}{d\,x^2}-\nu k^2\right)W_0\left(x\right)=\frac{2\rho_0 h}{D_0}\omega^2 W_0\left(x\right). \qquad (1.5)$$

Характеристическое уравнение полученного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\left(\left(\lambda_0^2-1\right)+\beta\lambda_0\right)^2=\beta^2\nu+\omega_0^2, \qquad (1.6)$$

где $\omega_0=\omega\Big/\sqrt{\dfrac{D_0 k^4}{2\rho_0 h}}$, $\beta=\dfrac{\alpha}{k}$, $\dfrac{\lambda}{k}=\lambda_0$.

Запишем (1.6) в виде

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_0^2+\beta\lambda_0-\left(1+\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}\right)=0\\ \lambda_0^2+\beta\lambda_0-\left(1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}\right)=0.\end{array}\right. \qquad (1.7)$$

Первое уравнение совокупности (1.7) имеет корни противоположного знака

$$\left(\lambda_0\right)_1=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2+4+4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2}<0\ , \qquad (1.8)$$

$$\left(\lambda_0\right)_3=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2+4+4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2}>0$$

при любом $\beta \in (-\infty, +\infty)$.

Второе уравнение совокупности (1.8) имеет корни противоположного знака при наличии условия

$$1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2} > 0 \quad \text{или} \quad \omega_0^2 < 1-\beta^2\nu, \tag{1.9}$$

(здесь $\beta^2\nu < 1$)

$$(\lambda_0)_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2+4\left(1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}\right)}}{2},$$

$$(\lambda_0)_4 = \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2+4\left(1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}\right)}}{2}.$$

При выполнении условия (1.9) корень $(\lambda_0)_2 < 0$, а $(\lambda_0)_4 > 0$ – при любом знаке β.

При $\beta^2\nu < 1$ возможно $\beta^2\nu+\omega_0^2 \geq 1$ и налагая условие

$\beta^2+4\left(1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}\right) \geq 0$, получим для ω_0^2 ограничения в виде

$$1-\beta^2\nu \leq \omega_0^2 \leq \left(\beta^2/4+1\right)^2-\beta^2\nu$$

отсюда при $\beta < 0$ $(\lambda_0)_2 \geq 0,$ $(\lambda_0)_4 \geq 0$, а при $\beta > 0$ имеем $(\lambda_0)_2 \leq 0$ и $(\lambda_0)_4 \leq 0$.

Итак, при $\omega_0^2 < 1-\beta^2\lambda$ корни $(\lambda_0)_1$ и $(\lambda_0)_2$ отрицательные, а $(\lambda_0)_3$ и $(\lambda_0)_4$ положительные и общее решение с учетом условия затухания (1.3) будет

$$W_0(x,y,t) = \left[C_1 \exp(-k\,\eta_1 x) + C_2 \exp(-k\,\eta_2 x)\right] e^{\,i(\omega t - ky)},$$

$$\eta_1 = +\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4+4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{+\beta+\sqrt{\beta^2+4-4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2}.$$

Удовлетворяя это решение граничным условиям (1.2) при $x=0$, получим соотношения

$$C_1\left(\eta_1^2-\nu\right)+C_2\left(\eta_2^2-\nu\right)=0,$$

$$C_1\eta_1\left(\eta_1^2-(2-\nu)\right)+C_2\eta_2\left(\eta_2^2-(2-\nu)\right)=0.$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим следующее дисперсионное уравнение, определяющее частоту изгибных локализованных колебаний

$$\eta_1^2\eta_2^2+2(1-\nu)\eta_1\eta_2-\nu\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right)+\nu(2-\nu)=0. \tag{1.10}$$

Учитывая соотношения $\eta_1^2=\beta\eta_1+1+\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}$, $\eta_2^2=\beta\eta_2+1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0}$,

это уравнение преобразуется к виду:

$$\eta_1^2\eta_2^2+2(1-\nu)\eta_1\eta_2-\nu\beta(\eta_1+\eta_2)-\nu^2=0 \tag{1.11}$$

После численного исследования (1.11) в промежутке $0<\omega_0^2<1-\beta^2\nu$ можно заключить, что для каждого ν существует такое $\beta_{ïð}$, что при $\beta>\beta_{ïð}$ уравнение (1.11) решений не имеет, а при $\beta<\beta_{пр}$ уравнение (1.11) имеет единственное решение в заданном промежутке. Для положительных β значение $\beta_{пр}$ для разных ν приведены в табл.1

Таблица 1

ν	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0
$\beta_{пр}$	0,0043	0,023	0,069	0,182	0,399	нет корней

Аналогично при $\beta<0$ можно заключить, что уравнение (1.11) для каждого ν имеет единственное решение ω_0^2 в интервале $\left[0,\ 1-\beta^2\nu\right]$ при $|\beta|>|\beta_{пр}|$, а при $|\beta|>|\beta_{пр}|$ уравнение (1.11) решений не имеет.

Если ω_0^2 меняется в интервале $\left(1-\beta^2\nu,\ \left(\beta^2/4+1\right)-\beta^2\nu\right)$ при $\beta<0$, то получаем затухающее решение

$$W_0(x,y)=C_1\exp\left(-k\,\eta_1 x\right)e^{i(\omega t-ky)}.$$

Из граничных условий (1.2) получим

$$\begin{cases} C_1\left(\eta_1^2-\nu\right)=0 \\ C_1\left(\eta_1^3+(2-\nu)\eta_1\right)=0. \end{cases}$$

Отсюда следует: $C_1=0$ и $W(x,y)\equiv 0$, т.е. в этом случае задача решений не имеет.

При $\beta^2\nu<1,\ \beta>0$ и $\omega_0^2\in\left(1-\beta^2\nu;\ \left(\beta^2/4+1\right)^2-\beta^2\nu\right]$

получаем затухающее решение в виде

$$\begin{aligned} W_0(x,y,t)=\big[&C_1\exp\left(-k\,\eta_1 x\right)+C_2\exp\left(-k\,\eta_2 x\right)+\\ &+C_3\exp\left(-k\eta_3 x\right)\big]\,e^{i(\omega t-ky)} \end{aligned} \qquad (1.12)$$

где

$$\eta_1=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4+4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2},\quad \eta_2=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4-4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2},$$

$$\eta_3=\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+4-4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2}.$$

Из граничных условий (1.2) получим:

$$C_1\left(\eta_1^2-\nu\right)+C_2\left(\eta_2^2-\nu\right)+C_3\left(\eta_3^2-\nu\right)=0,$$

$$C_1\eta_1\left(\eta_1^2-(2-\nu)\right)+C_2\eta_2\left(\eta_2^2-(2-\nu)\right)+C_3\eta_3\left(\eta_3^3-(2-\nu)\right)=0.$$

При $C_3=0$ придём к дисперсионному уравнению (1.11).

При $C_2=0$ придё м к дисперсионному уравнению

$$\eta_1^2\eta_3^2+2(1-\nu)\eta_1\eta_3-\nu\beta(\eta_1+\eta_3)-\nu^2=0. \qquad (1.13)$$

При $C_1=0$ из граничных условий (1.2) получим

$$C_2\left(\eta_2^2-\nu\right)+C_3\left(\eta_3^2-\nu\right)=0,$$
$$C_2\eta_2\left(\eta_2^2-(2-\nu)\right)+C_3\eta_3\left(\eta_3^2-(2-\nu)\right)=0.$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю и учитывая соотношения

$$\eta_2^2=1+\beta\eta_2-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2},\ \eta_3^2=1+\beta\eta_3-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2},$$

получим

$$\begin{aligned}&\eta_2^2\eta_3^2+2(1-\nu)\eta_2\eta_3-\nu\beta(\eta_2+\eta_3)+\\&+2\nu\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}-\nu^2=0.\end{aligned} \qquad (1.14)$$

Преобразуем полученное дисперсионное уравнение. Так как $-\eta_2$ и $-\eta_3$ являются корнями второго из уравнений совокупности (1.8), то $\eta_2+\eta_3=\beta,\quad \eta_2\eta_3=\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}-1$, подставляя в (1.14), получим $\omega_0^2=(1-\nu)^2$. Таким образом, мы получили, что уравнение (1.14) имеет решение $\omega_0=1-\nu$ для заданного ν независимо от β. Ясно, что при $0<\beta<1$ имеем $1-\beta^2\nu>(1-\nu)^2$ и ω_0^2 не попадает в интервал $\left(1-\beta^2\nu,\ \left(\beta^2/4+1\right)^2-\beta^2\nu\right]$, а в случае $\beta>1$ $(1-\nu)^2>1-\beta^2\nu$ и $\omega_0^2=(1-\nu)^2$ попадают в указанный интервал. Т.е. задача (1.1)–(1.3) при $1<\beta<1/\nu$ имеет решение (существует частота ω_0 поперечной волны), для которого ω_0^2 лежит в интервале $\left(1-\beta^2\nu,\ \left(\beta^2/4+1\right)^2-\beta^2\nu\right]$.

Интересен случай $\beta^2\nu\geq 1$, где ω_0 следует искать в интервале $\left(0;\ (\beta^2/4+1)^2-\beta^2\nu\right)$.

При $\beta\to\infty$ можно заметить, что $\lim\limits_{\beta\to\infty}\eta_1=\infty$, а $\lim\limits_{\beta\to\infty}\eta_3=1$, которые показывают степень затухания первой и третьей слагаемых решения (1.12). Численные исследования показывают, что в указанном случае дисперсионное уравнение (1.11) не имеет решений, а уравнение (1.13) имеет для разных ν и β решения $x=\omega_0^2$, которые находятся в интервале (1; 1,5). Результаты численных расчетов приведены в табл. 2

В итоге получаем, что при $\beta^2\nu\geq 1$ задача (1.1)-(1.3) имеет два решения: при первом решении в (1.12) надо взять $C_2=0$, и для разных $\beta>0$ и ν получаем разные значения ω_0. При втором решении в (1.12) надо взять $C_1=0$ и при любом β $\left(\beta^2\nu\geq 1\right)$ взять $\omega_0=1-\nu$.

Таблица 2

ν	0.1			
ß	4	10	100	1000
$x=\omega^2$	1.04.	1.096	1.242	1.168
ν	0.25			
ß	2	5	10	100
$x=\omega^2$	1.085	1.16	1.22	1.3
ν	0.5			
ß	2	5	10	100
$x=\omega^2$	1.08	1.15	1.19	1.24

Заключение.

Таким образом, при рассмотрении локализованных изгибных волн в неоднородной пластинке от свободной границы при $\beta^2\nu<1$ в интервале $\left[0,1-\beta^2\nu\right]$ можно найти ω_0^2 (частоту локализованной волны) для каждого ν независимо от знака β, а именно: материал пластинки с глубиной уплотняется или разрежается.

Так как при рассмотрении неоднородной пластинки возникает новая локализованная волна, которая отсутствовала в однородном случае, то нужно провести новое исследование, которое связано с колебаниями пластинки конечных размеров (не полубесконечной). Предельный случай решения конечной задачи раскроет эффект влияния неоднородности в вопросе существования и характера локализованной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю. К. Об изгибной волне рэлеевского типа. //Акуст. журн. 1960. Т.6. № 1. С.124−126.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластин. //Прикл. Механика. 1994. Т.30. № 2. С.61−68.
3. Багдасарян Р.А., Казарян К.Б. Изгибные поверхностные волны в ортотропной пластинке. //Докл. АН Арм. ССР. 1986. Т.83. №2. С.69−72.
4. Енгибарян И.А., Мкртчян А.П. Локализованные колебания однородной полубесконечной пластинки-полосы. /Механика. Материалы 12-ой Республиканской конференции молодых ученых. Ереван: 2003. Изд. «Гитутюн» НАН Армении. С.83-86.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
15.07.2008

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 517.949.8

К ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Торосян В.С., Саакян С.Л.

Ключевые слова: ряды Фурье, ускорение сходимости.
Key words: Fourier series, acceleration of convergence

Վ.Ս. Թորոսյան, Ս.Լ. Սահակյան
Միակողմանի անհամասեռություն ունեցող ուղղանկյուն մեմբրանի ծռման խնդրի մասին
Դիտարկվում է երկրորդ կարգի էլիպտական հավասարման համար Դիրիխլեի մի խնդիր, երբ տիրույթը ուղղանկյուն է: Այդպիսի հավասարման է բերվում մասնավորաբար ուղղանկյուն մեմբրանի ոլորման խնդիրը, երբ այն մեկ ուղղությամբ ունի անհամասեռություն: Խնդիրը լուծվել է Ֆուրյեի եռանկյունաչափական կրկնակի շարքերի միջոցով: Բերվում է թվային օրինակ: Թվային փորձարկումը կատարվել է Ֆուրյեի շարքերի զուգամիտության արագացման նոր եղանակով:

V.S. Torossian, S.L. Sahakian
On the problem of torsion of a rectangular membrane with one-direction non-homogeneity
A Dirichlet problem for a second order elliptic equation is discussed when the domain is a rectangle. In particular, the problem of torsion of a rectangular membrane is reduced to such equation, when it is non-homogenous in one direction. A numerical example is presented. The numerical experiment is carried out trough a new method of acceleration of convergence of Fourier series.

В работе посредством двойных рядов Фурье получено решение задачи Дирихле для одного уравнения второго порядка, когда область – прямоугольник. Приведен численный пример. При проведении численного эксперимента использован новый метод ускорения сходимости рядов Фурье.

Известно, что тригонометрические ряды Фурье сходятся медленно. Тем не менее, они (и тригонометрические многочлены) часто и эффективно применяются при решени различных задач математической физики [1-4].

В предлагаемой работе, используя двойные тригонометрические ряды Фурье, получено решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, оператор которого несимметричен. К такому уравнению приводится, в частности, задача об изгибе прямоугольной мембраны при наличии однонаправленной неоднородности [5]. Целесообразность такого подхода объясняется и тем, что в последнее десятилетие разработаны новые методы для ускорения сходимости тригонометрических рядов Фурье [5].

§1. Постановка задачи. Пусть $\overline{D}=\{0\le x\le a; 0\le y\le b\}$ – прямоугольник со сторонами a,b; ∂D – его граница. Рассмотрим задачу Дирихле для следующего эллиптического уравнения второго порядка:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=f \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\partial D}=\varphi \tag{1.2}$$

здесь λ – коэффициент неоднородности.

Будем предполагать, что функции $\varphi(0,y)$, $\varphi(a,y)$, $\varphi(x,0)$, $\varphi(x,b)$ в рассмотренной области удовлетворяют условию Дирихле для разложения в ряд Фурье, а правая часть уравнения (1.1) – $f \in C^{Q+2}(\overline{D})$.

Пусть функции $h_{ij}(x,y)$ $(i=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots)$ образуют в рассматриваемой области полную систему непрерывных функций. Перепишем уравнение (1.1) в следующем виде:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}-f=0 \ . \tag{1.3}$$

Тогда, если левая часть уравнения (1.3) для всех значений i,j будет удовлетворять условию ортогональности

$$\int_0^a\int_0^b\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}-f\right)h_{ij}(x,y)\,dxdy=0 \ , \tag{1.4}$$

можно считать, что $u(x,y)$ удовлетворяет и уравнению (1.1).

Если возьмем

$$h_{ij}(x,y)=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\sin\alpha_i x\sin\beta_i y \qquad \left(\alpha_i=\frac{i\pi}{a},\ \beta_j=\frac{j\pi}{b}\right) ,$$

то получим решение задачи (1.1)–(1.2) в виде

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_{ij}\sin\alpha_i x\sin\beta_i y \ . \tag{1.5}$$

Из (1.4) после преобразования при помощи интегрирования по частям для разложения коэффициентов Фурье A_{ij} получим уравнение

$$\left(\alpha_i^2+\beta_j^2\right)A_{ij}-\lambda\alpha_i C_{ij}=f_{ij}+\theta_{ij} \ , \tag{1.6}$$

где

$$f_{ij}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\alpha_i x\sin\beta_i y\,dxdy \ ,$$

$$\theta_{ij}=\alpha_i(-1)^{i+1}k_{aj}+\alpha_i k_{0j}+\beta_{ji}(-1)^{j+1}l_{bi}+\beta_{ji}l_{0i} \ ,$$

$$k_{aj}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^b\varphi(a,y)\sin\beta_i y\,dy \ ,$$

$$k_{0j}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^b\varphi(0,y)\sin\beta_i y\,dy \ , \tag{1.7}$$

$$l_{bi}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\varphi(x,b)\sin\alpha_i x\,dx \ ,$$

$$l_{0i}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\varphi(x,0)\sin\alpha_i x\,dx \ ,$$

а C_{ij} – коэффициенты Фурье функции $u(x,y)$ при разложении по ортонормированной системе $\left\{\frac{2}{a}\frac{2}{b}\cos\alpha_i x\sin\beta_j y\right\}_{i=0,\,j=1}^{\infty}$, т.е

$$C_{ij}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\int_0^b u\left(x,y\right)\cos\alpha_i x\sin\beta_i ydxdy\ . \tag{1.8}$$

Легко показать, что

$$C_{kl}=\frac{4}{\pi}\sum_{i+k}^{\infty}A_{il}\,\frac{i}{i^2-k^2}\qquad\left(k,l=1,2,\cdots\right) \tag{1.9}$$

Здесь и далее индекс суммирования $i+k$ принимает нечетные значения. Отсюда, имея в виду зависимость (1.6) для определения коэффициентов Фурье C_{kl}, получаем следующую бесконечную систему:

$$C_{kl}=\frac{4}{\pi}\sum_{i+k}^{\infty}\frac{\lambda\alpha_i}{\delta_{il}}\frac{i}{i^2-k^2}c_{il}+\frac{4}{\pi}\sum_{i+k}^{\infty}\frac{i}{\delta_{il}}\frac{\psi_{il}}{i^2-k^2}\ , \tag{1.10}$$

где введены обозначения

$$\delta_{kl}=\alpha_i^2+\beta_l^2,\quad \psi_{il}=f_{il}+\theta_{il}$$

Пусть

$$\varphi\left(0,y\right)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{0j}\sin\beta_j y,\qquad \varphi\left(a,y\right)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{aj}\sin\beta_i y\ , \tag{1.11}$$

откуда, учитывая граничное условие (1.2), получаем

$$\frac{C_{0l}}{2}=-\sum_{i=2,4,\cdots}^{\infty}C_{il}+\frac{1}{2}\left(p_{0l}+p_{al}\right)\quad\left(l=1,2,\cdots\right)\ . \tag{1.12}$$

§2. Исследование бесконечной системы (1.10). Перепишем бесконечную систему (1.10) отдельно для четных и нечетных значений k:

$$C_{kl}=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\lambda\alpha_i}{\delta_{il}}\frac{i}{i^2-k^2}c_{il}+\frac{4}{\pi}\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{i}{\delta_{il}}\frac{\psi_{il}}{i^2-k^2}\quad\left(k=2,4,\cdots\right) \tag{2.1}$$

$$C_{kl}=\frac{4}{\pi}\sum_{i=2,4,\cdots}^{\infty}\frac{\lambda\alpha_i}{\delta_{il}}\frac{i}{i^2-k^2}c_{il}+\frac{4}{\pi}\sum_{i=2,4,\cdots}^{\infty}\frac{i}{\delta_{il}}\frac{\psi_{il}}{i^2-k^2}\quad\left(k=1,3,\cdots\right). \tag{2.2}$$

Введем обозначение

$$M_{il}=\frac{\lambda i\alpha_i}{\delta_{il}}=\frac{\lambda\, i^2\pi/a}{i^2\pi^2/a^2+j^2\pi^2/b^2}\ \left(i,l=1,2,\cdots\right)$$

Очевидно,

$$\left|M_{il}\right|=\frac{\left|\lambda\right|a}{\pi\left(1+\dfrac{l^2a^2}{i^2b^2}\right)}<\frac{\left|\lambda\right|a}{\pi}\ \left(i,l=1,2,\cdots\right)\ .$$

И, следовательно,

$$\sum_{i+k}^{\infty}\left|M_{il}\,\frac{1}{i^2-k^2}\right|<\frac{\left|\lambda\right|a}{\pi}\sum_{i+k}^{\infty}\left|\frac{1}{i^2-k^2}\right|\ \left(k=1,2,\cdots\right).$$

Известно [6], что

$$\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2-(2k)^2}=0 \quad (k=1,2,\cdots) \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{i^2(2k)^2-1}=\frac{1}{2}\ . \tag{2.4}$$

Имеем

$$\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \left|\frac{1}{i^2-(2k)^2}\right| = \sum_{i=1,3,\cdots}^{2k-1} \frac{1}{i^2-(2k)^2} + \sum_{i=2k+1,2k+3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2-(2k)^2}\,. \tag{2.5}$$

Нетрудно установить, что

$$\sum_{i=2k+1,2k+3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2-(2k)^2} = \sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i(4k+i)} < \sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{(i+2)^2} \le \frac{\pi^2}{8}-1 \quad (k=3,4,\cdots)$$

$$\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \left|\frac{1}{i^2-4}\right| \le \frac{1}{3} + \sum_{i=3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2-4} \le \frac{2}{3} \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \left|\frac{1}{i^2-16}\right| \le \frac{1}{15}+\frac{1}{7}+\sum_{i=5,7,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2-16} \le \frac{44}{105}\,.$$

И, следовательно,

$$\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \left|M_{il}\frac{1}{i^2-(2k)^2}\right| < \frac{2|\lambda|a}{3\pi} \quad (k=1,2,\cdots). \tag{2.7}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\sum_{i=2,4,\cdots}^{\infty} \left|M_{il}\frac{1}{i^2-(2k-1)^2}\right| < \frac{|\lambda|a}{2\pi} \quad (k=1,2,\cdots).$$

Из оценок (1.17)-(1.18) следует, что бесконечная система (1.10) вполне регулярна, если выполнено условие $\frac{4}{\pi}\frac{2a}{3\pi}|\lambda|\le 1$, т.е. $a \le \frac{3\pi^2}{8|\lambda|}$.

§3. Численный пример. В качестве примера рассмотрим задачу (1.1)-(1.2), когда $\overline{D}$ – единичный квадрат, т.е. $a=b=1$, $\lambda=1$, $\varphi(x,y)=0$, а правая часть уравнения (1.1) есть функция $f(x,y)=\left[\pi^2(x^2-x)+2x-3\right]\sin\pi y$. Тогда точное решение задачи принимает вид $u(x,y)=x(x-1)\sin\pi y$. Численный эксперимент проводился на основе метода, который изложен в работе А.Б. Нерсесяна [6]. Суть метода состоит в следующем.

Пусть $f=f(x)$ – кусочно-гладкая на отрезке $[-1,1]$ функция с точками “сливания” $\{\gamma_s\}$, $-1\le\gamma_1<\cdots<\gamma_l<1$, $1\le l<\infty$ и $f\in C^{Q+1}$, $Q>1$ на каждом из отрезков $[\gamma_k,\gamma_{k+1}]$, а $A_{sk}=f^{(k)}(\gamma_s-0)-f^{(k)}(\gamma_s+0)$ $(k=0,1,\cdots,Q,\ s=1,2,\cdots l)$ – скачки f и ее производных в точках $\{\gamma_s\}$. Тогда аппроксимационная формула

$$S_{N,Q}(f)=\sum_{n=-N}^{N}\left(f_n-\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{Q-1}A_{jk}(f)B_{k,n}e^{i\pi n\left(1-\gamma_j\right)}\right)e^{i\pi nx}+$$
$$+\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{Q-1}A_{jk}(f)B_k\left(x-\gamma_j+1\right) \tag{3.1}$$

где

$$f_n=\int_{-1}^{1}f(t)e^{-i\pi nt}dt\ \ \left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right),$$

а $B_k(x)$ – полиномы Бернулли, коэффициенты Фурье которых имеют вид

$$B_{k,n}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2\left(i\pi n\right)^{k+1}} & n=\pm1,\pm2,\cdots\\ 0 & n=0\end{cases}$$

сами они определяются следующей рекуррентной формулой:

$$B_0(x)=\frac{x}{2},\ B_k(x)=\int B_{k-1}(x)dx\ \ x\in[-1,1],\ k=1,2,\cdots$$

где константа интегрирования вычисляется из условия

$$\int_{-1}^{1}B_k(t)dt=0\ \ k=1,2,\cdots$$

сходятся к f со скоростью порядка $O\left(\dfrac{1}{N^{Q+1}}\right)$ при $N\to\infty$. Получены численные значения решения задачи (1.1)-(1.2) $\tilde{u}(x,y)=S_{N,Q}(u)$ при $Q=2$ для различных значений N. Результаты для $\tilde{u}(1/2,1/2)$ сведены в таблице:

$N=20$	$N=32$	$N=64$	$N=128$
-0.237765	-0.247654	-0.249761	-0.2499887

Сравнение с точным значением $u(1/2,1/2)=-1/4$ показывает, что при $N=64$ точность вычисления имеет порядок $O\left(10^{-4}\right)$, а при $N=128$ она составляет $O\left(10^{-6}\right)$. Пусть $u_0(x,y)$ есть решение задачи (1.1)–(1.2), когда коэффициент неоднородности $\lambda=0$. В этом случае, как показывают численные результаты, $u_0(x,y)\approx x(x-1)\sin\pi y$, при этом,

$$u_0(x,y)<x(x-1)\sin\pi y \text{ при } 0<x<1/2,\ 0<y<1,$$
$$u_0(x,y)>x(x-1)\sin\pi y \text{ при } 1/2<x<1,\ 0<y<1.$$

Как и следовало ожидать, в центре квадрата $u_0(1/2,1/2)=-1/4$.

Заметим также, что уравнение (1.1) с помощью постановки $u=v\exp(\lambda x/2)$ приводится к уравнению Гельмгольца

$$\Delta v+\frac{\lambda^2}{4}v=-fe^{\lambda x/2} \tag{3.2}$$

для которого ставятся различные граничные задачи. При решении этих задач применяются различные численные методы. В частности, для задачи Дирихле при $|\lambda|>>1$ можно использовать многошаговые итерационные методы [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко–Бородич М.М. Теория упругости. ОГИЗ, 1959.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
3. Смелов В.В. Аппроксимация кусочно-гладких функций тригонометрическими многочленами и исследование последних в вариационных методах. Новосибирск: 1975.
4. Тодоров М.М. О решении плоской задачи теории упругости для прямоугольника посредством двойных тригонометрических рядов. // Изв. АН СССР. ОТН. 1959. № 4. С.185-191.
5. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
6. Нерсесян А.Б. Квазиполиномы типа Бернулли и ускорение сходимости рядов Фурье кусочно-гладких функций. //Докл. НАН Армении. 2004. Т.104. №.4. С.273-279.
7. Валиулин А.Н., Кузнецов Ю.А. О разностных методах решения уравнения Гельмгольца. /Тр.Всесоюзного сем. "Численные методы мех. вяз. жид.", Новосибирск: 1969. С.34-36.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16. 12. 2008

Ինդեքս 77708 Индекс

ՄԵԽԱՆԻԿԱ Հատոր
МЕХАНИКА Том 62 №3 2009
MECHANICS Volume

Բովանդակություն | Содержание