

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՐՈՒՄԻ ՏԵԼԵԿՄԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2009

УДК 539.3

ЗАДАЧА ОРТОТРОПНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ПОВЕРХНОСТНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО
СДВИГА

Киракосян Р. М., Степанян С. П.

Ключевые слова: пластинка, ортотропия, поправочные коэффициенты, касательные напряжения, форма распределения.

Keywords: plate, orthotropic, corrected coefficients, tangential stresses, the form of distribution.

Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Ս.Պ. Ստեփանյան

Մակերևութային շոշափող բեռների ազդեցության տակ գտնվող օրթոտրոպ կլոր սալի խնդիրը
ընդլայնական սահմանի հաշվառմամբ

Դիտարկվել է հաստատուն հաստությամբ օրթոտրոպ կլոր սալի ծոման առանցքասիմետրիկ խնդիրը, որը գտնվում է մակերևութային շոշափող բեռների ազդեցության տակ: Խնդիրը լուծվել է օգտագործելով առաջին կարի սահմանի տեսությունը: Մաքսիմալ ձկվածքի համար ստացվել է ուղղման գործակիցը:

R.M. Kirakosyan, S.P. Stepanyan

The Problem of an orthotropic round plate under the action of the
surface tangential loadings taking into account the transversal shear.

An asymptotic problem of bend of an orthotropic round plate of constant thickness which is under the action of radially directed surface tangential loadings is, considered. The Problem is solved with the application of shear theory of the first arider. For the maximum bend the coefficient of corrections is calculated.

Рассмотрена осесимметричная задача изгиба ортотропной круглой пластинки постоянной толщины, которая находится под действием радиально направленных поверхностных касательных нагрузок. Задача решена с применением сдвиговой теории первого порядка. Для максимального прогиба рассчитан коэффициент поправок.

Рассматривается осесимметричная задача изгиба ортотропной круглой пластинки постоянной толщины под действием радиально направленных поверхностных касательных нагрузок. Применяется сдвиговая теория первого порядка [3], [4], которая, в отличие от теории [2], позволяет учитывать влияние изменения поперечного касательного напряжения по толщине пластинки при отсутствии поперечного усилия.

Рассматриваются случаи шарнирного опирания и защемления контура пластинки. Получаются аналитически замкнутые выражения прогиба и изгибающих моментов пластинки.

1. Рассмотрим цилиндрически ортотропную круглую пластинку радиуса a и постоянной толщины h . Пластинку отнесем к системе цилиндрических координат r, θ, z . Координатные оси направим по осям анизотропии материала. Плоскость $r\theta$ совместим со срединной плоскостью пластинки, направив ось Oz вертикально вниз.

Рассмотрим случай, когда на лицевых поверхностях пластинки действуют только радиально направленные касательные силы постоянной интенсивности τ :

$$R|_{z=+h/2} = R^+ = \tau; \quad R|_{z=-h/2} = R^- = -\tau. \quad (1.1)$$

Будем считать, что пластинка шарнирно оперта или защемлена по всему контуру $r = a$.

Уравнения равновесия дифференциального элемента срединной плоскости изгибаемой пластинки в усилиях и моментах имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} N_r &= -Z_2, \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} &= N_r - hR_1, \\ \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r} &= N_\theta - h\theta_1.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Здесь N_r, N_θ и $M_r, M_\theta, M_{\theta r}$ – внутренние усилия и моменты пластинки. Из-за отсутствия нормальных и кольцевых касательных поверхностных нагрузок имеем [1]:

$$Z_2 = \theta_1 = 0, \quad (1.3)$$

а для R_1 , с учетом (1.1), получим:

$$R_1 = \frac{R^+ - R^-}{2} = \tau. \quad (1.4)$$

Первое уравнение системы (1.2) имеет тривиальное решение

$$N_r \equiv 0. \quad (1.5)$$

В силу осесимметричности задачи третье уравнение этой системы отпадает. Остается только второе уравнение, которое с учетом (1.4) и (1.5) принимает вид:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = -h\tau. \quad (1.6)$$

В рамках теории [3], [4] имеем:

$$\begin{aligned}N_r &= \frac{5}{6} B_{55} h \left(\varphi + \frac{dw}{dr} \right) + \frac{\tau h}{6}, \quad M_r = D_{11} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{D_{12}}{r} \varphi, \\ M_\theta &= D_{12} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{D_{22}}{r} \varphi.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Здесь w – прогиб, φ – функция, характеризующая положение первоначально нормального элемента пластинки после ее изгиба. Через B_{55} обозначен модуль сдвига материала в плоскости $r\theta z$, а D_{ij} – жесткости пластинки

$$D_{ij} = \frac{B_{ij} h^3}{12}. \quad (1.8)$$

Параметры $B_{11} = B_r$, $B_{22} = B_\theta$, $B_{12} = B_{r\theta}$ выражаются через упругие постоянные материала по известным формулам [1].

Из первого выражения (1.7) с учетом (1.5) получим:

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} - \frac{\tau}{5B_{55}}. \quad (1.9)$$

Уместно отметить, что в классической теории пластин

$$\varphi^{\text{кл}} = -\frac{dw}{dr} \quad (1.10)$$

Поскольку в рамках сдвиговой теории первого порядка радиальное перемещение u_r , возникшее изгибом пластинки, определяется формулой

$$u_r = z\varphi, \quad (1.11)$$

в сечениях защемления или симметрии вместо $dw/dr = 0$ должно выполняться условие

$$\varphi = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dr} = -\frac{\tau}{5B_{55}}. \quad (1.12)$$

Следовательно, в этих сечениях происходит излом срединной плоскости пластинки. Это обстоятельство характерно всем уточненным теориям.

С учетом (1.9) и выражений моментов (1.7), уравнение (1.6) можно представить в виде

$$r^2 \frac{d^3 w}{dr^3} + r \frac{d^2 w}{dr^2} - k^2 \frac{dw}{dr} = \frac{\tau h r^2}{D_{11}} + \frac{k^2 \tau}{5B_{55}}, \quad (1.13)$$

где обозначено

$$k = \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}. \quad (1.14)$$

Здесь E_r и E_θ – модули упругости материала по радиальному и кольцевому направлениям, соответственно.

Общий интеграл уравнения (1.13) при $k \neq 2$ имеет вид:

$$w = c_1 + c_2 r^{1+k} + c_3 r^{1-k} + \frac{\tau h r^3}{3D_{11}(4-k^2)} - \frac{\tau r}{5B_{55}} \quad (1.15)$$

Здесь c_i – постоянные интегрирования.

Из ограниченности прогиба и его первого производного в центре пластинки $r = 0$ следует

$$c_3 = 0. \quad (1.16)$$

Таким образом, общее выражение прогиба пластинки будет:

$$w = c_1 + c_2 r^{1+k} + \frac{\tau h r^3}{3D_{11}(4-k^2)} - \frac{\tau r}{5B_{55}}. \quad (1.17)$$

Постоянные c_1 и c_2 должны определяться из условий на контуре пластинки $r = a$.

После определения прогиба w изгибающие моменты пластинки можно вычислить по формулам (1.7), которые с учетом (1.9) принимают вид:

$$\begin{aligned} M_r &= -D_{11} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{12}}{r} \left(\frac{dw}{dr} + \frac{\tau}{5B_{55}} \right), \\ M_\theta &= -D_{12} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{22}}{r} \left(\frac{dw}{dr} + \frac{\tau}{5B_{55}} \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отметим, что решение при $k = 2$ можно получить из окончательных выражений w , M_r и M_θ путем предельного перехода $k \rightarrow 2$.

2. Рассмотрим случай шарнирного опирания вдоль всего контура $r = a$. Краевые условия имеют вид:

$$w|_{r=a} = M_r|_{r=a} = 0. \quad (2.1)$$

Используя выражения w и M_r , для постоянных c_1 и c_2 получим:

$$c_1 = \frac{\tau a}{5B_{55}} + \frac{\tau h a^3 \left[(6-k-k^2)D_{11} + (2-k)D_{12} \right]}{3D_{11}(1+k)(4-k^2)(kD_{11}+D_{12})}, \quad (2.2)$$

$$c_2 = -\frac{\tau h a^{2-k}(2D_{11}+D_{12})}{(1+k)(kD_{11}+D_{12})D_{11}(4-k^2)}. \quad (2.3)$$

Подставляя эти значения в (1.17) и (1.18), для прогиба и изгибающих моментов пластинки находим:

$$w = \frac{\tau h}{3D_{11}(1+k)(4-k^2)(kD_{11}+D_{12})} \left\{ \begin{aligned} &(1+k)(kD_{11}+D_{12})r^3 + \left[\begin{aligned} &(6-k-k^2)D_{11} + \\ &+(2-k)D_{12} \end{aligned} \right] a^3 - \\ &-3r^{1+k}a^{2-k}(2D_{11}+D_{12}) \end{aligned} \right\} + \frac{\tau(a-r)}{5B_{55}} \quad (2.4)$$

$$M_r = \frac{\tau h(2D_{11}+D_{12})r}{D_{11}(4-k^2)} (a^{2-k}r^{k-2} - 1), \quad (2.5)$$

$$M_\theta = \frac{\tau h r}{D_{11}} \cdot \frac{a^{2-k}r^{k-2}(kD_{12}+D_{22})(2D_{11}+D_{12}) - (2D_{12}+D_{22})(kD_{11}+D_{12})}{(4-k^2)(kD_{11}+D_{12})}. \quad (2.6)$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow 2$ из (2.4)–(2.6), получим: при $k = 2$

$$w = \tau h \left\{ \frac{(5D_{11}+D_{12})(a^3-r^3) - 3r^3(2D_{11}+D_{12}) \ln \frac{a}{r}}{36D_{11}(2D_{11}+D_{12})} \right\} + \frac{\tau(a-r)}{5B_{55}}, \quad (2.7)$$

$$M_r = \frac{\tau h r (2D_{11}+D_{12})}{4D_{11}} \ln \frac{a}{r}, \quad (2.8)$$

$$M_\theta = \frac{\tau h r}{4D_{11}} \cdot \frac{(2D_{12}+D_{22})(2D_{11}+D_{12}) \ln \frac{a}{r} + D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{2D_{11}+D_{12}}. \quad (2.9)$$

Для простоты вопрос о величине поправки в значении наибольшего прогиба, вносимой учетом формы распределения поперечного касательного напряжения τ_{rz} по толщине пластинки, обсудим для случая $k = 2$, т.е., когда $E_\theta = 4E_r$.

Наибольший прогиб получается в центре пластинки $r = 0$. Из (2.7) находим:

$$w|_{r=0} = \frac{\tau h a^3 (5D_{11}+D_{12})}{36D_{11}(2D_{11}+D_{12})} \left[1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{(2D_{11}+D_{12})B_{11}h^2}{(5D_{11}+D_{12})B_{55}a^2} \right] \quad (2.10)$$

Здесь

$$w^{\text{êê}} \Big|_{r=0} = \frac{\tau h a^3 (5D_{11} + D_{12})}{36D_{11} (2D_{11} + D_{12})} \quad (2.11)$$

представляет собой наибольший прогиб пластинки по классической теории. Поправка составляет

$$\Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{(2D_{11} + D_{12}) B_{11} h^2}{(5D_{11} + D_{12}) B_{55} a^2} \quad (2.12)$$

при $D_{12} = 0.2D_{11}$, $B_{11} = 10B_{55}$, $h = 0.2a$, что вполне разумно, она равна 0.102 или 10%.

Изгибающий момент M_r в центре пластинки имеет нулевое значение. С удалением от центра его значение возрастает, при $r = a/e$ становится максимальным

$$M_r^{\text{max}} = M_r \Big|_{r=\frac{a}{e}} = \frac{\tau h a}{4eD_{11}} (2D_{11} + D_{12}), \quad (2.13)$$

а затем, монотонно убывая, на контуре пластинки превращается в нуль.

Изгибающий момент M_θ также в центре пластинки равен нулю. С удалением от центра он возрастает, в некотором сечении имеет максимум, а на контуре принимает значение :

$$M_\theta \Big|_{r=a} = \frac{\tau h a}{4D_{11}} (2D_{11} - D_{12}). \quad (2.14)$$

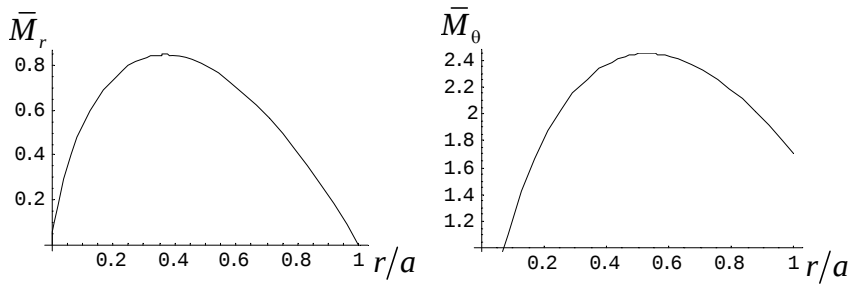
При

$$D_{22} = 4D_{11}, \quad D_{12} = 0.3D_{11} \quad (2.15)$$

для безразмерных моментов из (2.8) и (2.9) получим

$$\begin{aligned} \bar{M}_r &= \frac{4M_r}{\tau h a} = -2.3 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a}, \\ \bar{M}_\theta &= \frac{4M_\theta}{\tau h a} = -4.6 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a} + 1.7 \frac{r}{a}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

На фиг. 1 представлены графики изменения $\bar{M}_r$ и $\bar{M}_\theta$ по радиальной координате



Фиг.1

3. Рассмотрим случай защемления контура $r = a$. Краевые условия в этом случае имеют вид:

$$w|_{r=a} = 0; \quad \varphi|_{r=a} = -\left(\frac{dw}{dr} + \frac{\tau}{5B_{55}}\right)\bigg|_{r=a} = 0 \quad (3.1)$$

С учетом выражения (1.17), из (3.1) для постоянных c_1 и c_2 получим:

$$c_1 = \frac{\tau h a^3}{3D_{11}(1+k)(2+k)} + \frac{\tau a}{5B_{55}}, \quad (3.2)$$

$$c_2 = -\frac{\tau h a^{2-k}}{D_{11}(1+k)(4-k^2)}. \quad (3.3)$$

Подставляя эти значения в (1.17) и (1.18), для прогиба и моментов пластинки находим:

$$w = \frac{\tau h}{3D_{11}} \cdot \frac{(1+k)r^3 + (2-k)a^3 - 3r^{1+k}a^{2-k}}{(1+k)(4-k^2)} + \frac{\tau(a-r)}{5B_{55}}, \quad (3.4)$$

$$M_r = \tau h r \cdot \frac{r^{k-2}a^{2-k}(kD_{11} + D_{12}) - 2D_{11} - D_{12}}{D_{11}(4-k^2)}, \quad (3.5)$$

$$M_\theta = \tau h r \cdot \frac{r^{k-2}a^{2-k}(kD_{12} + D_{22}) - 2D_{12} - D_{22}}{D_{11}(4-k^2)}. \quad (3.6)$$

В случае $k = 2$ предельным переходом получим:

$$w = \frac{\tau h}{36D_{11}} \left(a^3 - r^3 - 3r^3 \ln \frac{a}{r} \right) + \frac{\tau(a-r)}{5B_{55}}, \quad (3.7)$$

$$M_r = \frac{\tau h r}{4D_{11}} \left[(2D_{11} + D_{12}) \ln \frac{a}{r} - D_{11} \right], \quad (3.8)$$

$$M_\theta = \frac{\tau h r}{4D_{11}} \left[(2D_{12} + D_{22}) \ln \frac{a}{r} - D_{12} \right]. \quad (3.9)$$

Наибольший прогиб будет:

$$w|_{r=0} = \frac{\tau h a^3}{36D_{11}} \left[1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{B_{11}h^2}{B_{55}a^2} \right]. \quad (3.10)$$

Поправка составляет

$$\Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{B_{11}h^2}{B_{55}a^2}. \quad (3.11)$$

При $B_{11} = 10B_{55}$, $h = 0.2a$ она равна 0.24 или 24%.

Изгибающие моменты в центре пластинки равны нулю. С удалением от центра они возрастают, имеют максимум, в некоторых сечениях превращаются в нуль, после чего меняют знак и возрастают по абсолютному значению. Как и следовало ожидать, при защемлении контура пластинки изгибающие моменты получаются знакопеременными.

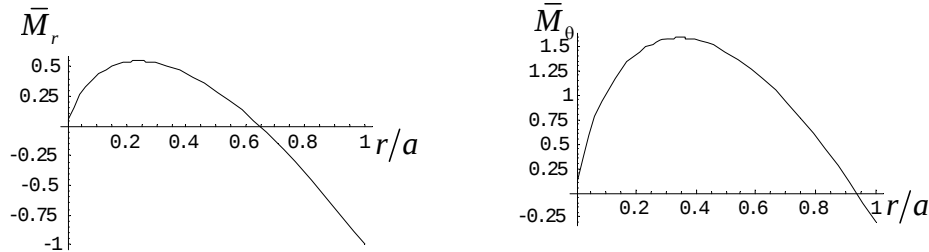
На контуре они равны:

$$M_r|_{r=a} = -\frac{\tau h a}{4}, \quad M_\theta|_{r=a} = -\frac{\tau h a}{4} \frac{D_{12}}{D_{11}}. \quad (3.12)$$

При (2.15) безразмерные моменты имеют вид:

$$\bar{M}_r = -2.3 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a} - \frac{r}{a}, \quad \bar{M}_\theta = -4.6 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a} - 0.3 \frac{r}{a}. \quad (3.13)$$

На фиг. 2 приведены графики $\bar{M}_r$ и $\bar{M}_\theta$.



Фиг.2

В заключение отметим:

а) решения задач для изотропных пластин можно получить из найденных решений, подставляя в них $k = 1$;

б) если в случае действия нормальных поверхностных нагрузок изгибающие моменты в центре пластинки при $k < 1$ имеют особенность, при $k = 1$ принимают одинаковые конечные значения, а при $k > 1$ они равны нулю [5], то в случае действия только касательных поверхностных нагрузок моменты в центре пластинки независимо от характера анизотропии материала всегда равны нулю;

в) учет поперечного сдвига в рассмотренных случаях не влияет на значения изгибающих моментов и они совпадают с соответствующими значениями классической теории пластин;

г) в рассмотренных случаях при $N_r = 0$ теория [2] для прогиба поправок не дает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.:Наука, 1987. 360 с.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. //Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С.46-58.
3. Киракосян Р.М. О поправочных коэффициентах, учитывающих влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №3. С.245-251.
4. Киракосян Р.М. Влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки при наличии касательных поверхностных нагрузок. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.304–311.
5. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.08.2008

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ
КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ
Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: балка, сосредоточенная масса, сосредоточенный момент, устойчивость, флаттер.

Keywords: beam, concentrated mass, concentrated moment, stability, flutter.

Ս.Ռ. Մարտիրոսյան

Հեծանի կայունությունը ոչ կոնսերվատիվ մի խնդրի մասին

Դիտարկված է հեծանի, որի մի ծայրը ամրակցված է, իսկ մյուս ազատ ծայրի վրա կիրառված են կենտրոնացած զանգված և մոմենտ, կայունության խնդիրը.

S.R. Martirosyan

On the non-conservative problem of the cantilevered beam

The paper is devoted to the analysis of stability of the cantilevered beam with a concentrated mass and moment.

Рассматривается задача устойчивости консольного упругого стержня, нагруженного «следающей» силой при наличии сосредоточенной инерционной массы и инерционного момента на свободном конце.

1. Пусть консольный упругий стержень длины l и постоянного сечения нагружен «следающей» силой P и, кроме того, на его свободном конце имеются сосредоточенная инерционная масса m_c и сосредоточенный инерционный момент J_c . Будем полагать, что собственная масса стержня пренебрежимо мала по сравнению с сосредоточенной инерционной массой m_c .

В рамках обычных предположений элементарной теории изгиба уравнение малых изгибных колебаний стержня около невозмущенной формы равновесия описывается соотношением [1,2]

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad w = w(x, t). \quad (1)$$

Здесь EJ – жесткость сечения при изгибе; $w = w(x, t)$ – динамический прогиб в каждой точке стержня.

Граничные условия определяются выражениями:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 0; \quad (2)$$

$$EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -J_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad x = l.$$

Задача состоит в отыскании таких сочетаний параметров P , m_c и J_c , при которых краевая задача, описываемая уравнением (1) и соответствующими граничными условиями (2), имеет решения, отличные от тривиального $w(x, t) = 0$, иными словами, в изучении поведения собственных значений краевой задачи (1), (2), зависящих от P , m_c и J_c как от параметров.

Отыскивая решение уравнения (1) в виде гармонических колебаний

$$w(x, t) = f(x) \exp(i\omega t), \quad (3)$$

приходим к задаче на собственные значения

$$\frac{d^4 f}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EJ}; \quad (4)$$

$$f = \frac{df}{dx} = 0, \quad x = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{J_c}{EJ} \omega^2 \frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{m_c}{EJ} \omega^2 f = 0, \quad x = l.$$

Подставляя общий интеграл уравнения изогнутой оси стержня (4)

$$f(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4$$

и его производные в граничные условия (5), получаем следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_i ,

$i = \overline{1, 4}$:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ kC_1 + C_3 = 0 \\ E J k^2 (C_1 \sin v + C_2 \cos v) + J_c \omega^2 k (C_1 (\cos v - 1) - C_2 \sin v) = 0 \\ E J k^3 (-C_1 \cos v + C_2 \sin v) + m_c \omega^2 (C_1 (\sin v - v) + C_2 (\cos v - 1)) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$k^2 = P(EJ)^{-1}, \quad v = kl. \quad (7)$$

Для нахождения значений параметров P , m_c , J_c и их сочетаний, приводящих к потере устойчивости в задаче (1), (2), имеем алгебраическое уравнение относительно квадратов собственных частот колебаний стержня

$$\alpha \beta (2 - 2 \cos v - v \sin v) \omega^4 - \quad (8)$$

$$-(\beta \sin v + \alpha (\sin v - v \cos v)) \omega^2 + 1 = 0,$$

$$\alpha = m_c (Pk)^{-1}, \quad \beta = J_c k P^{-1}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad (9)$$

которое получается приравнянием нулю определителя, составленного из коэффициентов системы (6).

Вводя обозначения

$$\Omega^2 = \omega^2 \sqrt{\alpha \beta}, \quad \chi = \sqrt{\alpha^{-1} \beta}, \quad \chi > 0, \quad (10)$$

после несложных выкладок уравнение (8) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & 4 \sin 0,5v (\sin 0,5v - 0,5v \cos 0,5v) \Omega^4 - \\ & - \chi^{-1} ((\chi^2 + 1) \sin v - v \cos v) \Omega^2 + 1 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Исследуем уравнение (11).

Корни уравнения (11) определяются из формулы

$$\Omega_{1,2}^2 = 0,5 \left[B(\chi, v) \pm \sqrt{B^2(\chi, v) - 4A(v)} \right], \quad (12)$$

$$A(v) = 4 \sin 0,5v (\sin 0,5v - 0,5v \cos 0,5v), \quad (13)$$

$$B(\chi, v) = \chi^{-1} [(\chi^2 + 1) \sin v - v \cos v]. \quad (14)$$

Из уравнения (11) очевидно, что $\Omega_1^2 \neq 0$, $\Omega_2^2 \neq 0$. А это означает, что потери устойчивости в смысле Эйлера невозможны.

В соответствии с (3), возмущенное движение стержня устойчиво при значениях $\Omega_1^2 > 0$ и $\Omega_2^2 > 0$, что равносильно выполнению условий

$$A(\nu) \geq 0, B(\chi, \nu) > 0, B^2(\chi, \nu) - 4A(\nu) > 0. \quad (15)$$

Колебательный вид неустойчивости будет иметь место, если в формуле (12) выражение под радикалом станет отрицательным. Отсюда следует, что критические значения параметров P , m_c и J_c должны удовлетворять уравнению

$$\chi^{-2} [(\chi^2 + 1) \sin \nu - \nu \cos \nu]^2 - \\ - 16 \sin 0,5\nu (\sin 0,5\nu - 0,5\nu \cos 0,5\nu) = 0, \quad (16)$$

где χ и ν определяются выражениями (10).

Критическое значение параметров P , m_c и J_c , приводящих к неустойчивости апериодического вида с нарастающей экспонентой, определяется из уравнения

$$[(\chi^2 + 1) \sin \nu - \nu \cos \nu] = 0. \quad (17)$$

Исследуя поведение функций (16) и (17) от параметров χ и ν с помощью графо-аналитических методов, приходим к выводу, что наименьший корень $\nu_{\min}$ уравнений (16) и (17), при котором устойчивое возмущенное движение стержня становится неустойчивым, определяется из условий

$$[(\chi^2 + 1) \sin \nu - \nu \cos \nu] = 0, \nu \in (3,14; 4,49), \chi \in (0, 1); \quad (18) \\ \chi^{-2} [(\chi^2 + 1) \sin \nu - \nu \cos \nu]^2 - \\ - 16 \sin 0,5\nu (\sin 0,5\nu - 0,5\nu \cos 0,5\nu) = 0, \nu \in [2,32; 3,14), \chi \in [1, \infty).$$

Как следует из соотношений (18), наименьший корень $\nu_{\min}$ при $\chi \in (0, 1)$ определяет критические значения параметров P , m_c и J_c , приводящих к неустойчивости апериодического вида с нарастающей экспонентой, а при $\chi \in [1, \infty)$ – к неустойчивости колебательного вида с возрастающей амплитудой. При этом, $\nu_{\min} \approx 4,49$ при достаточно малых χ ($\chi \rightarrow 0$) и $\nu_{\min} \approx 3,14$ при достаточно больших χ ($\chi \rightarrow \infty$).

Подставляя конкретные значения χ в соотношения (18), определяем соответствующие наименьшие корни $\nu_{\min}$. Далее, в соответствии с (10), находим критические значения «следящей» силы $P_{\text{кр}}$ и отношения $(m_c J_c^{-1})_{\text{кр}}$ из следующих формул

$$P_{\text{кр}} = EJ l^{-2} \nu_{\min}^2, \quad (m_c J_c^{-1})_{\text{кр}} = P_{\text{кр}} (EJ \chi^2)^{-1}. \quad (19)$$

Таким образом, при наличии сосредоточенной инерционной массы m_c и инерционного момента J_c на свободном конце консольного упругого стержня, нагруженного «следящей» силой P , возмущенное движение стержня становится неустойчивым при критических значениях параметров $P_{\text{кр}}$ и $(m_c J_c^{-1})_{\text{кр}}$, определяемых из формул (19). При этом имеем неустойчивость только флаттерного типа, а дивергентная неустойчивость невозможна.

1. Рассмотрим частные случаи.

1.1. Пусть на свободном конце консольного стержня, нагруженного «следающей» силой P , имеется сосредоточенная инерционная масса m_c , а инерционный момент отсутствует ($J_c = 0$). Тогда, в соответствии с (9) и (10), имеем $\beta = 0$, $\chi = 0$. При этом уравнение (8) переписывается в виде

$$m_c (Pk)^{-1} (\sin v - v \cos v) \omega^2 - 1 = 0. \quad (20)$$

Согласно (7) корни уравнения (20) определяются из формулы

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{Pk}{m_c (\sin kl - kl \cos kl)}}. \quad (21)$$

Формула (21) в точности совпадает с формулой, полученной В.В. Болотиным [1] при исследовании задачи устойчивости консольного стержня, сжатого «следающей» силой при наличии сосредоточенной инерционной массы на свободном конце и Ржаницыным А.Р. в [3].

Наименьший корень (21), соответствующий переходу от устойчивого возмущённого движения к неустойчивому, равен $v_{\min} = (kl)_{\min} \approx 4,49$, откуда, учитывая (7), находим критическое значение «следающей» силы [1]

$$P_{\text{кр}} \approx 20,19 EJ l^{-2} \text{ или } P_{\text{кр}} \approx 2\pi^2 EJ l^{-2}. \quad (22)$$

1.2. А теперь рассмотрим случай, когда на свободном конце консольного стержня, нагруженного «следающей» силой P , приложен только сосредоточенный инерционный момент J_c , а сосредоточенная инерционная масса отсутствует ($m_c = 0$). Тогда, в соответствии с (9) и (10), имеем $\alpha = 0$, $\chi = \infty$. При этом уравнение (8) переписывается в виде

$$J_c k P^{-1} \cdot s \sin v \cdot \omega^2 - 1 = 0, \quad (23)$$

корни которого согласно (7) определяются из формулы

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{E J k (J_c \sin kl)^{-1}}. \quad (24)$$

Из (24) очевидно следует, что переходу от устойчивого возмущенного движения к неустойчивому соответствует наименьший корень

$$v_{\min} = (kl)_{\min} = \pi. \quad (25)$$

В соответствии с (7), отсюда находим критическое значение «следающей» силы

$$P_{\text{кр}} = \pi^2 EJ l^{-2},$$

которое примерно в два раза меньше критического значения «следающей» силы (22).

Автор выражает благодарность М.В.Белубекяну за постановку задачи, за обсуждение и внимание к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
3. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следающей силой. //Изв.АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т. 38. №5. С. 33–44.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
17.09.2008

УДК 539.3

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ
В ДВУХ ПОСТАНОВКАХ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: стержень, устойчивость, сила, перемещение, параметрический резонанс.

Keywords: Beam, stability, force, displacement, parametric resonance.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ.Ներսիսյան

Ձողի դինամիկական կայունության երկու դրվածքների մասին

Ձողի կայունությունը դիտարկվում է երկու դեպքում, երբ եզրում տրվում է ուժ կամ տեղափոխություն պարբերական ֆունկցիայի տեսքով: Երկայնական տատանումների հավասարումը լուծվում է ճշգրիտ, իսկ կայունության հավասարման լուծումը բերվում է Կոշիի խնդրի անվերջ համակարգի համար: Ցույց է տրվում, որ գլխավոր պարամետրական ռեզոնանսի դեպքում երկայնական ուժը ըստ ձողի երկարության կարելի է ընդունել համասեռ:

Դիտարկված է նաև ձողի կայունությունը, երբ եզրում հարվածի տեսքով տեղափոխություն է ազդում:

L.A.Movsisyan, G.G.Nersisyan

On dynamic stability of beam in two statements

The stability of beam in two cases when on one edge of it the force or displacement in form of periodical function is investigated. The equation of longitudinal vibrations is solved exactly and solution of stability equation is reduced to Cauchy problem for infinite system. It is shown that in case of main parametric resonance one can account that compression force is constant along length of beam. Also is considered problem of stability when applied displacement is in impact form.

Устойчивость стержня изучается в двух случаях, когда на конце задаётся сила или перемещение в виде периодической функции. Уравнение продольных колебаний решается точно, а решение уравнения устойчивости сводится к задаче Коши для бесконечной системы. Показано, что при главном параметрическом резонансе можно принять постоянство сжимающей силы по длине стержня. Рассмотрена также задача устойчивости, когда на конце стержня прилагается перемещение в виде удара.

При исследовании задач динамической устойчивости стержня при нагружениях в продольном направлении обычно принимается, что продольная сила однородна по длине стержня за исключением случаев ударных нагрузок. Такое предположение имеет известное объяснение – время распространения упругой волны с одного конца в другой во много меньше, чем периоды основных частот. При таком подходе независимо от того, какие условия на конце заданы относительно перемещения или силы выражения продольной силы друг от друга, отличаются лишь постоянным множителем. Однако возникает вопрос – насколько (в количественном отношении) предположение однородности продольной силы оправдано. Поэтому здесь классическая задача динамической устойчивости при периодических воздействиях рассматривается в точной постановке. Приводится также решение задачи, когда ударным образом прикладывается перемещение.

1. Уравнение устойчивости стержня имеет вид

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Переходя к безразмерным координатам

$$y = \frac{\pi x}{l}, \quad \tau = \frac{at\pi}{l}, \quad a = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}, \quad P = EF \frac{\partial u}{l \partial y}, \quad (1.2)$$

вместо (1.1) будем иметь

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \Omega^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\pi}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \quad \Omega^2 = \frac{J \pi^2}{Fl^2}. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) будем исследовать для случая, когда на концах стержня заданы условия свободного опирания. Тогда, в предположении, что выражение продольного перемещения определено, функцию прогиба и $\frac{\partial u}{\partial y}$ представим в виде рядов

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(\tau) \sin my, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau) \cos ny. \quad (1.4)$$

Для каждой конкретной задачи $a_n(\tau)$ будут разные, а выражение для $w(y, \tau)$ удовлетворяет условиям свободного опирания. Из (1.3) при (1.4) получим следующую бесконечную систему [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_m}{d\tau^2} + \left[\Omega_m^2 - \frac{\pi}{l} \left(a_0 + \frac{a_{2m}}{2} \right) m^2 \right] w_m - \\ - \frac{\pi m}{2l} \sum_{\substack{m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} (a_{m+n} + a_{m-n}) n w_n = 0, \quad \Omega_m = m\Omega. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Об устойчивости стержня будем судить, исходя из системы (1.5). Прежде чем перейти к конкретным задачам, изучим такой вопрос: какие должны быть условия на конце стержня (относительно перемещения или силы), чтобы продольная сила была одинаковой?

2. Уравнение продольного колебания

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

проинтегрируем для двух случаев конечных условий в предположении нулевых начальных условий*)

$$\text{а) } u = \varphi(t) \text{ при } x = 0 \text{ и } u = 0 \text{ при } x = l \quad (2.2)$$

$$\text{б) } P = EF \frac{\partial u}{\partial x} = f(t) \text{ при } x = 0 \text{ и } u = 0 \text{ при } x = l \quad (2.3)$$

Подвергая преобразованию Лапласа уравнение движения со всеми условиями, получим следующие условия для того, чтобы (2.2) или (2.3) дали одинаковые результаты для продольной силы

$$f(p) = -\frac{EF}{a} p \varphi(p) \left(1 + 2e^{-\frac{2pl}{a}} + 2e^{-\frac{4pl}{a}} \dots \right) \quad (2.4)$$

*) Здесь удобнее воспользоваться небезразмерными координатами. Под словом «постановка» в заглавии имеются в виду именно эти два случая.

$$\varphi(p) = -\frac{af(p)}{EF \cdot p} \left(1 - 2e^{-\frac{2pl}{a}} + 2e^{-\frac{4pl}{a}} \dots + (-1)^n 2e^{-\frac{2npl}{a}} \right) \quad (2.5)$$

Функции $f(p)$ и $\varphi(p)$ – соответствующие изображениям функций $f(t)$ и $\varphi(t)$.

Ниже приводятся некоторые, практически важные, конкретные примеры:

$$1) \varphi(t) = u_0 H(t), \quad -\frac{1}{Au_0} f(t) = \begin{cases} \delta(t), & 0 \leq t \leq \frac{2l}{a} \\ (\cdot) + 2\delta\left(t - \frac{2l}{a}\right), & \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a} \\ \dots \end{cases} \quad (2.6)$$

$$2) f(t) = -P_0 H(t), \quad \frac{A}{P_0} \varphi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \frac{2l}{a} \\ \frac{4l}{a} - t, & \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a} \\ \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

$$3) P = C \sin \omega t, \quad \frac{A\omega}{C} \varphi(t) = \begin{cases} \cos \omega t - H(t), & 0 \leq t \leq \frac{2l}{a} \\ (\cdot) + 2 \left[H\left(t - \frac{2l}{a}\right) - \cos \omega \left(t - \frac{2l}{a}\right) \right], & \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a} \\ \dots \end{cases} \quad (2.8)$$

$$4) u = ct \quad -\frac{1}{cA} f(t) = \begin{cases} H(t), & 0 \leq t \leq \frac{2l}{a} \\ (\cdot) + 2H\left(t - \frac{2l}{a}\right), & \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a} \\ \dots \end{cases} \quad (2.9)$$

$$5) P = Ct, \quad -AC f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{2l}{a} \\ (\cdot) - \left(t - \frac{2l}{a}\right)^2, & \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}, \quad A = \frac{EF}{a} \\ \dots \end{cases} \quad (2.10)$$

В приведенных формулах $\delta(\cdot)$ и $H(\cdot)$ – соответственно, функции Дирака и Хевисайда, а скобки $(\cdot)$ на вторых строках правой части означают повторение первой строки.

Перейдем к конкретным примерам.

3. Рассмотрим продольные колебания стержня, когда один конец неподвижен, а на другом задано произвольное перемещение:

$$u = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } u = f(\tau) \text{ при } y = \pi. \quad (3.1)$$

Как здесь, так и в следующих примерах, начальные условия нулевые.

Собственными функциями для случая типа (3.1) являются $\{\sin my\}$, поэтому решение (2.1) при условиях (3.1) будет:

$$u = \frac{y}{\pi} f(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin ny, \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[2f(\tau) + \int_0^{\tau} f(\xi) \sin n(\tau - \xi) d\xi \right] \quad (3.2)$$

В частном случае, когда $f(\tau)$ – периодическая функция

$f(\tau) = c \sin \theta \tau \left(f(\tau) = c \sin p\tau, \quad q = \frac{\theta l}{a\pi} \right)$, коэффициенты a_n для системы (1.5) будут:

$$a_0 = \frac{c}{\pi} \sin q\tau, \quad a_n = \frac{2c}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} q}{n^2 - q^2} \left(\frac{q}{n} \sin q\tau - \sin \tau \right). \quad (3.3)$$

В [1] рассмотрен случай, когда $f(\tau)$ – линейная функция от τ .

Систему (1.5) можно интегрировать только численно. Для начальных условий

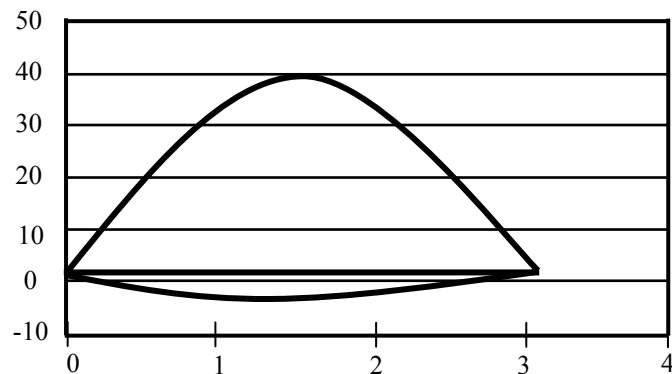
$$w_1(0) = 1, \quad \dot{w}_1(0) = w_n(0) = \dot{w}_n(0), \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

интегрирование производилось для двух случаев:

а) брался только a_0 (что соответствует однородной сжимающей силе по длине),

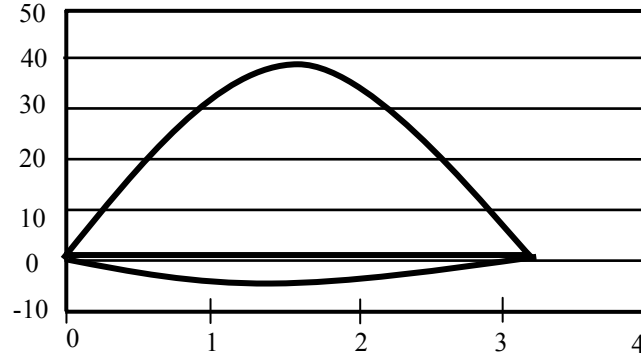
б) брались все коэффициенты для различных отношений Ω_1 и $\frac{c}{l}$ и $q = \Omega_1$ и

$q = 2\Omega_1$. Последнее значение q соответствует главному параметрическому резонансу [2]. На фиг.1 и 2 приведены кривые возрастания прогибов со временем



Фиг. 1

$\left(\tau = \frac{\pi}{\Omega_1}, \frac{2\pi}{\Omega_1} \right)$ для $\frac{c}{l} = 10^{-3}$ и $\Omega = 1/30$, соответственно, для случаев а) и б).



Фиг. 2

Как видно из приведенных фигур и имеющихся у нас данных, принятие однородности сжимающей силы вполне приемлемо. Конечно, для больших значений c/l такое утверждение сомнительно.

4. Теперь пусть на конце стержня $y = \pi$ мгновенно прикладывается перемещение и поддерживается постоянным, т.е.

$$u = 0 \text{ при } y = 0, \quad u = -u_0 H(t) \text{ при } y = \pi. \quad (4.1)$$

Тогда решение (3.2) будет

$$u = -\frac{u_0}{\pi} y + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos n\tau \sin ny \quad (4.2)$$

и, соответственно, коэффициенты a_n будут

$$a_0 = \frac{u_0}{\pi}, \quad a_n = 2(-1)^n \frac{u_0}{\pi} \cos n\tau \quad (4.3)$$

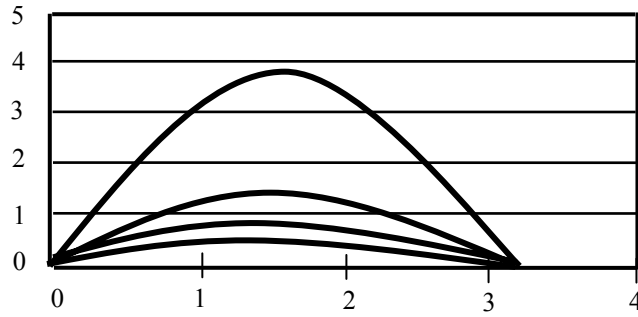
Значение u_0 , при котором стержень может потерять устойчивость по Эйлеру

$$\left(P_{\text{ёд}} = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \right), \text{ есть}$$

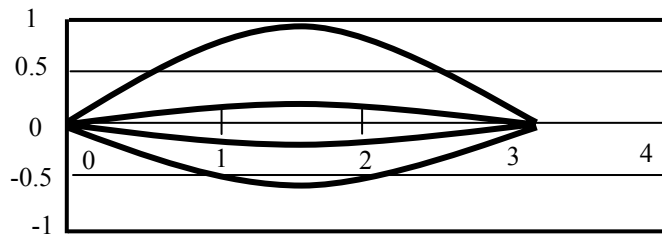
$$u_0 = \frac{J\pi^2}{Fl}. \quad (4.4)$$

Из (1.5) и (4.3) также видно, что и при динамической постановке при (4.4) имеем бесконечное возрастание прогибов. При статической постановке, когда u_0 меньше, чем (4.4), стержень устойчив, в то время, как при динамической постановке имеем возрастание прогибов. На фиг.3 приведена картина изменения прогибов для 0.9 от (4.4) при $u_0 = 10^{-3}l$.

Для u_0 , равного 0,5 (4.4), уже возрастания нет, имеется колебание относительно равновесного положения (фиг.4).



Фиг. 3



Фиг. 4

5. Здесь уже рассмотрим случай, когда на конце задана периодическая сила:

$$u = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } EF \frac{l}{\pi} \frac{\partial u}{\partial y} = C \sin p\tau \text{ при } y = \pi. \quad (5.1)$$

Подобная задача в постановке установившегося режима рассмотрена в [2] (стр.463).

Собственными функциями данного случая есть $\{\sin \mu_n y\}$

$\mu_n = \frac{2n-1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$. Так что решение уравнения (2.1) с условиями (5.1) есть

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin \mu_k y, \quad u_k = \frac{2A_1}{\pi} \frac{1}{\mu_k^2 - q^2} \left(\sin q\tau - \frac{q}{\mu_k} \sin \mu_k \tau \right) \quad (5.2)$$

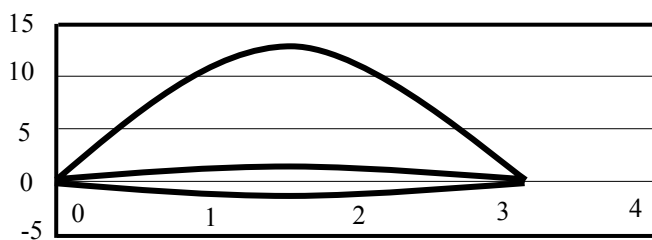
$$A_1 = \frac{IC}{EF\pi}$$

Как уже указывалось в п.1, система (1.5) получается только при условии разложения продольной силы по $\{\cos ny\}$, так что для определения a_n решение (5.2) необходимо разлагать по $\{\sin ny\}$. Такое сделано и для a_k , получены выражения:

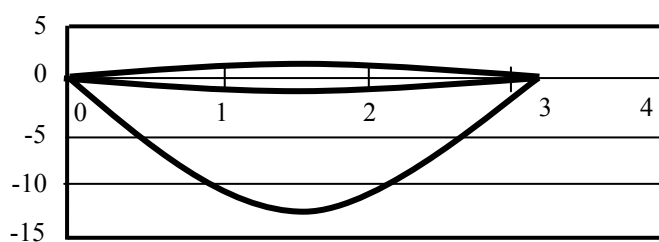
$$a_0 = \frac{2A_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k (\mu_k^2 - q^2)} (\mu_k \sin q\tau - q \sin \mu_k \tau) \quad (5.3)$$

$$a_n = \frac{4(-1)^n A_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{(\mu_k^2 - n^2)(\mu_k^2 - q^2)} (\mu_k \sin q\tau - q \sin \mu_k \tau)$$

На фиг. 5 и 6 приведены кривые возрастания прогибов, соответственно, для случаев $q = \Omega_1$ и $q = 2\Omega_1$. Как и в первом случае (п.2), учет неоднородности сжимающей силы по длине стержня незначительно влияет на картину увеличения прогибов – начально сообщённое возмущение по одной синусоидальной волне так и остаётся по форме и скорость возрастания одинакова.



Фиг. 5



Фиг. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. Устойчивость упругой балки при быстрых нагружениях // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1971. Т.24. №1. С.38-50.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
10.04.2008

УДК 539.374

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ
ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ

Вермишян Г. Б.

Ключевые слова: комплексный модуль, комплексная податливость, диссипативная сила, линейная и экспоненциальная аппроксимация.

Keywords: complex modules, complex compliant, dissipative forces, linear and exponential approximation.

Գ.Բ.Վերմիշյան

Մածուցիկ առաձգական նյութից սնամեջ գլանում ջերմության բաշխումը վիբրացիոն բեռի ազդեցության տակ

Աշխատանքում հետազոտված է մածուցիկ առաձգական նյութից սնամեջ գլանում ջերմության բաշխումը, երբ նրա վրա ներքին և արտաքին մակերևույթների վրա կիրառված է վիբրացիոն ուժ: Խնդիրը լուծված է երկու դեպքի համար, առաջին, երբ ներքին մակերևույթը ջերմամեկուսացված է, իսկ արտաքին մակերևույթի ջերմաստիճանը հավասար է արտաքին միջավայրի ջերմաստիճանին: Երկրորդ դեպքում ներքին մակերևույթը ջերմամեկուսացված է, իսկ արտաքինից տեղի է ունենում ջերմափոխանակում արտաքին միջավայրի հետ Նյուտոնի օրենքով:

G. B. Vermishyan

Distribution of temperature in a quill cylinder made of visco-elastic material under the effect of vibratory load

The distribution of temperature in a quill cylinder made of visko-elastic is examined, which inner and outer surfaces are under the effect of vibratory load.

The problem is solved in two cases. In the first case the inner surface is heat insulated, and the temperature of the outer surface is equal to the ambient temperature. In the second case the inner surface is heat-insulated, and on the outer surface a free heat transfer into the surrounding medium takes place, which is conform to the Newton's law.

В работе рассматривается распределение температуры в полом цилиндре из вязкоупругого материала, когда на внутреннем и внешнем поверхностях действует вибрационная нагрузка.

Задача решена для двух случаев. Первый случай, когда внутренняя поверхность теплоизолирована, а на внешней температура равна температуре окружающей среды. Во втором случае, когда внутренняя поверхность теплоизолирована, а на внешней происходит теплообмен с окружающей средой, подчиняющейся закону Ньютона.

Исследуется нагружение трубы из вязкоупругого материала. На трубу действует изнутри и извне распределенная нагрузка, меняющаяся по гармоническому закону с постоянной амплитудой.

Для установления связи между деформациями и напряжениями, возникающими в трубе, необходимо знать составляющие комплексной податливости, которые, как известно [1], существенно зависят от частоты колебаний и температуры. При этом за счет работы диссипативных сил происходит выделение тепла. Поэтому для определения температуры получаются нелинейные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие некоторые функции, которые находятся экспериментально.

Задача решена при условии, что внутренняя поверхность теплоизолирована, а на внешней поверхности температура равна температуре окружающей среды. Кроме

того, рассматривается случай, когда внутренняя поверхность теплоизолирована, а на внешней поверхности происходит теплообмен с окружающей средой, подчиняющейся закону Ньютона.

Предполагается, что температура по длине не меняется.

Будем рассматривать деформацию трубы с внутренним радиусом R_1 и с внешним R_2 , которая состоит из вязкоупругого материала. На внутренней и внешней поверхностях действует распределенная нагрузка, которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой, соответственно, P_1 и P_2 .

Полагаем, что составляющие комплексной податливости J^{II} малы по сравнению с J^I . Таким образом, для определения напряженного состояния можно воспользоваться решением упругой задачи для трубы, находящейся под внутренним и внешним давлениями [2].

В данном случае компоненты напряжения будут:

$$\sigma_r = \sigma_r^0 \cos \omega t, \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 \cos \omega t, \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_r^0 = -\frac{P_2 R_2^2 - P_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_\theta^0 = -\frac{P_2 R_2^2 - P_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (1.2)$$

$$\tau_{r\theta}^0 = 0$$

Связь между компонентами деформации и напряжения примем в виде [3]:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} + \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \sigma_r(\tau) d\tau - \frac{\nu \sigma_\theta}{E} - \nu \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \sigma_\theta(\tau) d\tau$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} + \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \sigma_\theta(\tau) d\tau - \frac{\nu \sigma_r}{E} - \nu \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \sigma_r(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

$$\gamma_{r\theta} = 0$$

Используя из (1.1) значения σ_r , σ_θ и вводя переменную $\zeta = t - \tau$, получим

$$\varepsilon_r = (\sigma_r^0 - \nu \sigma_\theta^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + \operatorname{Re} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \cos \omega t - \left[\operatorname{Im} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \sin \omega t \right\}$$

$$\varepsilon_\theta = (\sigma_\theta^0 - \nu \sigma_r^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + \operatorname{Re} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \cos \omega t - \left[\operatorname{Im} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \sin \omega t \right\} \quad (1.4)$$

Введем комплексную податливость (где φ^0 – сдвиг фаз между деформацией и напряжением):

$$J^*(T, \omega) = \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta = J^I(T, \omega) - iJ^{II}(T, \omega) =$$

$$= J(T, \omega) \cos \varphi^0 - iJ(T, \omega) \sin \varphi^0 \quad (1.5)$$

Учитывая (1.5), из (1.4) получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= (\sigma_p^0 - \nu \sigma_\theta^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + J^I(T, \omega) \right] \cos \omega t + J^{II}(T, \omega) \sin \omega t \right\} \\ \varepsilon_\theta &= (\sigma_\theta^0 - \nu \sigma_p^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + J^I(T, \omega) \right] \cos \omega t + J^{II}(T, \omega) \sin \omega t \right\}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Работа, совершаемая при вязкоупругой деформации, равна

$$W = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sigma_p \frac{d\varepsilon_p}{dt} dt + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sigma_\theta \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} dt. \quad (1.7)$$

Из (1.1), (1.6) и (1.7) получим

$$W = \pi J^{II}(T, \omega) \left[(\sigma_p^0)^2 - 2\nu \sigma_p^0 \sigma_\theta^0 + (\sigma_\theta^0)^2 \right]. \quad (1.8)$$

Работа, совершаемая за один цикл при деформации вязкоупругого тела, позволяет определить интенсивность выделения тепла $q = \omega \lambda k W / (2\pi)$, где k – величина, обратная механическому эквиваленту тепла, λ – коэффициент, равный доле механической работы, переходящей в тепло. Для установления максимального нагрева будем полагать $\lambda = 1$.

Для стационарного случая уравнение теплопроводности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + f(\rho; \theta) J^{II}(T, \omega) = 0 \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}f(\rho; \theta) &= \frac{2\mu}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[(1 - \nu)(P_2 R_2^2 - P_1 R_1^2)^2 + (1 + \nu)(P_2 - P_1)^2 \frac{R_1^4 R_2^4}{\rho^4} \right], \\ \mu &= \frac{\lambda \omega k}{2a_0 c_0},\end{aligned}\quad (1.10)$$

где a_0 – коэффициент температуропроводности, c_0 – теплоемкость.

Имея в виду, что труба более интенсивно нагревается вблизи внутренней поверхности, принимаем, что интенсивность выделения тепла принимает свое максимальное значение при $\rho = R_1$. Тогда получим верхнюю оценку температуры. Считаем, что интенсивность выделения тепла явно не зависит от радиуса ρ . При данных предположениях для стационарного случая уравнение теплопроводности принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \mu f(r) J^{II}(T, \omega) = 0 \quad (1.11)$$

$$f(r) = \frac{2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[(1 - \nu)(P_2 R_2^2 - P_1 R_1^2)^2 + (1 + \nu)(P_2 - P_1)^2 R_2^4 \right] \quad (1.12)$$

$$J^{II}(T, \omega) = \frac{E^{II}(T, \omega)}{[E^I(T, \omega)]^2 + [E^{II}(T, \omega)]^2} \quad (1.13)$$

Известно [1], что $E^{II}(T, \omega) \ll E^I(T, \omega)$, а величиной $E^{II}(T, \omega)$ по сравнению с $E^I(T, \omega)$ можно пренебречь. Для компонентов комплексного модуля воспользуемся экспоненциальной аппроксимацией [4]:

$$E^I(T, \omega) = A e^{-BT}, E^{II}(T, \omega) = C e^{DT}, \quad (1.14)$$

где A, B, C, D – физические постоянные. С учетом (1.13), (1.14) уравнение (1.11) примет вид:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\gamma C}{A^2} e^{\gamma T} = 0$$

$$(\gamma = 2B + D)$$
(1.15)

Граничные условия при температуре T будут следующими (внутренняя поверхность теплоизолирована):

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_1} = 0, \quad \left. T \right|_{r=R_2} = T_0$$
(1.16)

После введения новой переменной уравнение (1.15) примет вид:

$$\frac{d^2 \tau}{d\rho^2} + a e^{\tau} = 0, \quad \gamma T + 2\rho = \tau, \quad r = e^{\rho}$$
(1.17)

где

$$a = \frac{\gamma \omega \lambda k C}{2 a_0 c_0 A^2} P_1^2 f_0, \quad \frac{R_2}{R_1} = b, \quad \frac{P_2}{P_1} = \varepsilon$$

$$f_0 = \frac{2}{(b^2 - 1)^2} \left[(1 - \nu)(\varepsilon b^2 - 1)^2 + (1 + \nu)(\varepsilon - 1)^2 b^4 \right]$$
(1.18)

Представим способ нахождения общего решения уравнения (1.17):

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\tau}{d\rho} \right) + a \frac{d\tau}{d\rho} \frac{d\rho}{d\tau} e^{\tau} = 0,$$

$$d \left(\frac{d\tau}{d\rho} \right) + a \frac{d\rho}{d\tau} d e^{\tau} = 0,$$

$$\left(\frac{d\tau}{d\rho} \right) d \left(\frac{d\tau}{d\rho} \right) = -a d e^{\tau}.$$

После интегрирования получим:

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \pm \sqrt{2c_1 - 2a e^{\tau}}$$
(1.19)

Из постановки задачи следует, что $\frac{d\tau}{d\rho} < 0$, поэтому возьмем отрицательный корень.

После интегрирования уравнения (1.19) получим общее решение уравнения (1.17) в виде:

$$\ln \frac{1 - \sqrt{1 - a e^{\tau} / c_1}}{1 + \sqrt{1 - a e^{\tau} / c_1}} = -\sqrt{2c_1} \rho + \ln c_2$$

или

$$e^\tau = \frac{4c_1 c_2 e^{-\sqrt{2c_1} \rho}}{a(1+c_2 e^{-\sqrt{2c_1} \rho})^2}.$$

Переходя к первоначальным переменным, получаем:

$$\dot{O} = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{4c_1 c_2 r^{-\sqrt{2c_1}}}{a(1+c_2 r^{-\sqrt{2c_1}})^2 r^2} (R_1 < r < R_2), \quad (1.20)$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

После удовлетворения граничным условиям (1.16) получаем уравнения для определения постоянных c_1 и c_2 .

$$\begin{aligned} \frac{(t+2)b^{-t}}{t-2} &= 2\delta t^2 - 1 - 2t\sqrt{\delta(\delta t^2 - 1)} \\ t &= \sqrt{2c_1}, \quad c_2 = \frac{(t+2)R_1^t}{t-2}, \quad b = \frac{R_2}{R_1}, \quad \delta = \frac{e^{-\gamma T_0}}{2ab^2 R_1^2} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Уравнение (1.21) решается численно.

Окончательное решение задачи получается в виде:

$$T = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{2t^2(t^2-4)(R_1/r)^t}{a[(t-2)+(t+2)(R_1/r)^t]^2 r^2}, \quad (1.22)$$

где t определяется из трансцендентного уравнения (1.21), a дается по формуле (1.18).

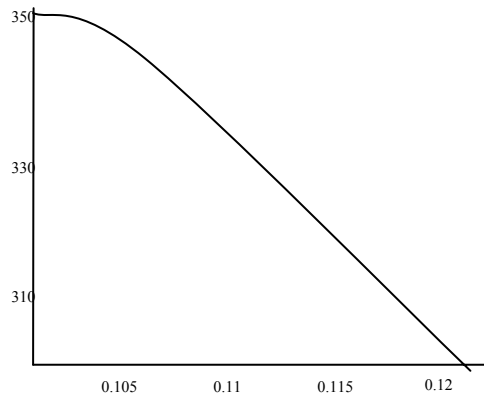
Вычисления проводилось для трубы из полиэтилена с отверстием радиуса $R_1=0.1$ м. При этом использовались следующие данные: $3,4 \cdot 10^9 \text{ Н/л}^2$; $B=D=0,01 \text{ м}^2$; $\tilde{N}=3,87 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$; $a_0 c_0=0,308 \text{ Вт/мград.}$; $K=0.983$; $\omega=100 \text{ Å}$; $T_0=293^0 \text{ K}$; $\alpha=7100 \text{ л}^{-2}$.

В табл. 1 приведены значения температуры T , зависящей от r при различных значениях ε, b, P_1 ($R_1 \leq r \leq R_2$).

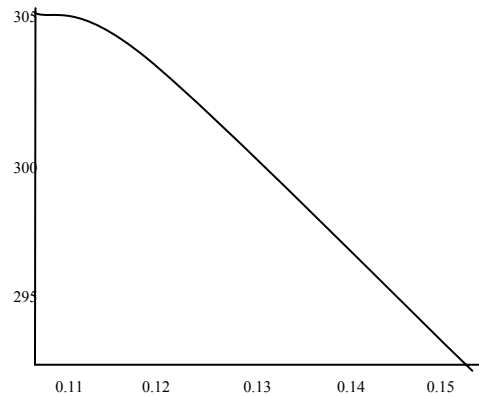
Таблица 1

$\varepsilon = 0,5; b = 1,2; P_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ л}^2$
$T=355,1; 349,8; 335,5; 315,3; 293,0$
$\varepsilon = 0,5; b = 1,5; P_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ л}^2$
$T=305,9; 302,5; 299,4; 295,1; 293,1$
$\varepsilon = 0,25; b = 1,2; P_1 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ л}^2$
$T=347,3; 343,2; 331,6; 315,0; 293,1$
$\varepsilon = 0,25; b = 1,5; P_1 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ л}^2$
$T=305,6; 303,3; 300,3; 296,8; 293,0$

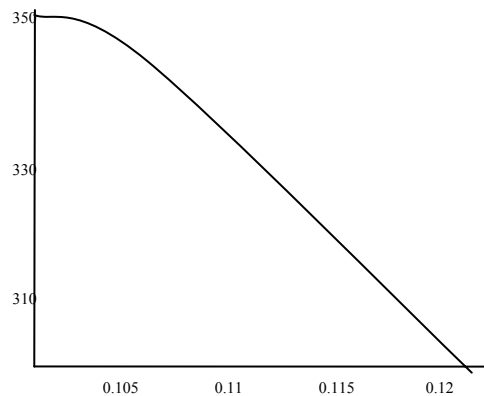
Кроме того, приведены графики (фиг.1– фиг.4) – соотношение между температурой T и радиусом r .



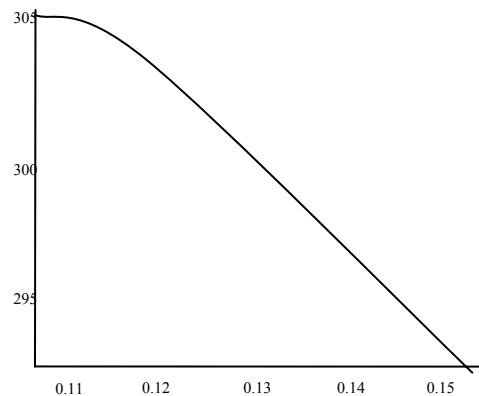
Фиг.1



Фиг.2



Фиг.3



Фиг.4

2. Рассмотрим решение задачи, когда внутренняя поверхность теплоизолирована, а на внешней поверхности происходит свободный теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

В этом случае уравнение теплопроводности имеет вид (1.17), общее решение дается по формуле (1.20).

Граничные условия при температуре T в этом случае имеют вид:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_1} = 0, \quad T \Big|_{r=R_2} = \alpha(T - T_0) \quad (2.1)$$

где α – коэффициент теплопроводности, T_0 – температура окружающей среды.

После удовлетворения граничным условиям (2.1) получается уравнение для определения произвольных постоянных C_1, C_2 , выражающихся через параметр t , который определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{(t^2 - 4)(b^t - 1)}{(t + 2) + (t - 2)b^t} = \alpha b R_1 \ln \frac{\delta^2 (t^2 - 4)b^t}{a [(t + 2) + (t - 2)b^t]^2} \quad (2.2)$$

$$b = R_2 / R_1, \quad \delta = \frac{2e^{-\gamma T_0}}{b^2 R_1^2}, \quad \gamma = 2B + D$$

a дается по формуле (1.18).

Уравнения (2.2) решаются численно.

Приведена таблица значения температуры $T(R_1)$ и $T(R_2)$ (на внутренней и внешней поверхностях) при различных значениях ε, b, P_1 .

Вычисления проводились при тех же данных, приведенных в предыдущем случае.

Таблица 2

$\varepsilon = 0,5; b = 1,2; P_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Ё /и}^2$
$T(R_1)=381,3^0\text{K}; \quad T(R_2)=294,7^0\text{K}$
$\varepsilon = 0,5; b = 1,5; P_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Ё /и}^2$
$T(R_1)=365,1^0\text{K}; \quad T(R_2)=293,3^0\text{K}$
$\varepsilon = 0,25; b = 1,2; P_1 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ Ё /и}^2$
$T(R_1)=371,6^0\text{K}; \quad T(R_2)=293,9^0\text{K}$
$\varepsilon = 0,25; b = 1,5; P_1 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ Ё /и}^2$
$T(R_1)=349,7^0\text{K}; \quad T(R_2)=293,0^0\text{K}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд. ИЛ, 1963. 535с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Физматгиз, 1966. 707 с.
3. Вермишян Г.Б. Действие вибрационной нагрузки на пластинку с круговым отверстием из вязкоупругого материала. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С.86-93.
4. Галин Л.А. О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. //Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 6.

Ереванский Государственный
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
7.07.2008

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АНТИПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОУПРУГОГО
ВОЛНОВОГО СИГНАЛА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ
УЧЕТЕ БОЛЬШИХ СДВИГОВ

Аветисян А.С., Хачатрян В.М.

Ключевые слова: электроупругая волна, геометрическая нелинейность, конечные удлинения и сдвиги, пьезоэлектрический слой.

Key words: electroelastic wave, geometrical nonlinearity, finite elongations and shears, piezoelectric layer.

Ա. Ս. Ավետիսյան, Վ. Մ. Խաչատրյան

Մեծ սահքերի հաշվառման դեպքում հակախարք էլեկտրաառաձգական ալիքային ազդանշանի տարածման մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է 6mm դասի պիեզոէլեկտրոկային դիէլեկտրիկ շերտում վերջավոր լայնույթի էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածումը, երկրաչափական ոչգծայնության (միայն մեծ սահքերի տեսքով) հաշվառումով: Ցույց է տրվում, որ սահքի էլեկտրաակտիվ գծային ազդանշանի տարածման դեպքում, սահմանակցող միջավայրերում գրգռվում է կապակցված էլեկտրամագնիսաառաձգական ալիքային դաշտ, իսկ սկզբնական ալիքային ազդանշանը ձևախեղվում է: Կատարված է թվային վերլուծություն, և ալիքային դաշտի բաղադրիչների ձևախեղման չափի համեմատություն առաջին մոտավորությամբ:

A.S.Avetisyan, V.M.Khachatryan

Propagation of antiplane electroelastic wave signal in the piezoelectric layer taking into account large shears

In this work the propagation of finite amplitude electroelastic waves in dielectric layer of 6mm hexagonal symmetry class piezocrystal taking into account geometrical nonlinearity only in the form of large shears is investigated. It is shown that during the propagation of electroactive shear linear signal in adjoining mediums the related electromagnetoelastic wave field is arisen and prime signal is hardly distorted. The numerical analysis and comparison of distortion measure in the prime approximation of electroelastic field wave components is carried out.

В работе рассматривается распространение электроупругих волн конечной амплитуды в диэлектрическом слое из пьезокристалла класса 6mm гексагональной симметрии с учетом геометрической нелинейности в виде только больших сдвигов. Показывается, что при распространении электроактивного сдвигового линейного сигнала в граничающих средах индуцируется связанное электромагнитоупругое волновое поле, а первичный сигнал сильно искажается. Проведен численный анализ и сравнение меры искажений в первом приближении волновых составляющих электроупругого поля.

Учет больших сдвигов усложняет взаимодействие между упругим и электромагнитным полями, а также между плоским упругим и антиплоским электроупругим деформированными состояниями.

В этой работе, как геометрическая нелинейность, учитываются только конечные сдвиговые деформации.

1. Пусть пьезоэлектрический слой занимает область $|x_1| < \infty$, $0 < x_2 < h$, $|x_3| < \infty$, для которого уравнения движения упругой среды и уравнения электромагнетостатики в лагранжевой форме записи имеют вид [1]:

$$c_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{66} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \left(c_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + c_{66} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \left(c_{11} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} \right) - \\
&\quad - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\
&c_{66} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{11} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = \\
&= -\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \left(c_{66} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \left(c_{66} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + c_{11} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} \right) - \\
&\quad - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
&c_{44} \Delta U_3 + e_{15} \Delta \Phi - \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \left(e_{15} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{44} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right), (1.1) \\
&e_{15} \Delta U_3 - \varepsilon_{11} \Delta \Phi = \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \right), \\
&\Delta \Psi = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right),
\end{aligned}$$

где u_k – компоненты упругого перемещения, ρ – естественная плотность среды, $\Phi(x_j, t)$ и $\Psi(x_k, t)$ – потенциалы электрического и магнитного полей, соответственно, введенные через лагранжевы напряженности электрического $E_k(x_j, t)$ и магнитного $H_k(x_j, t)$ полей с учетом градиента деформации $\xi_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$.

Во внешней вакуумной области $|x_1| < \infty$, $x_2 < 0$, $|x_3| < \infty$ или $|x_1| < \infty$, $x_2 > h$, $|x_3| < \infty$ решаются уравнения электростатики для вакуума

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi^{(e)} &= \frac{\partial^2 U_2^{(e)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi^{(e)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
\Delta \Psi^{(e)} &= \frac{\partial^2 U_2^{(e)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi^{(e)}}{\partial x_1 \partial x_2},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\Phi^{(e)}(x_i, t)$ и $\Psi^{(e)}(x_i, t)$ – потенциалы этих внешних полей соответственно, а $u_k^{(e)}(x_i, t) = u_k(x_1, 0, x_3, t)$ и $u_k^{(e)}(x_i, t) = u_k(x_1, h, x_3, t)$ – деформации точек соответствующей поверхности раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ [2].

Естественно, что конечность деформаций поверхности электроупругой среды искажает (“деформирует”) нематериальную внешнюю среду, чем и продиктованы уравнения (1.2).

На границах раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ удовлетворяется непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей

$$\Phi - \Phi^{(e)} = 0, \quad \Psi - \Psi^{(e)} = 0 \quad (1.3)$$

и нормальных компонент векторов индукций этих полей

$$\begin{aligned} e_{15} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x_1} \right) \\ \mu_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= \mu_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

На недеформированных границах раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ термодинамические напряжения должны равняться нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} &= - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\ c_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} &= - \frac{1}{2} c_{11} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) - c_{66} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \\ &- \frac{1}{2} c_{12} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} - \frac{1}{2} c_{11} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\ c_{44} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= - c_{66} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Очевидно, что учет “деформирования” внешней нематериальной области усложняет запись материальных соотношений внешней среды, тем самым усложняя уравнения электромагнитоупругости (1.2), а также граничные условия (1.4) и (1.5).

Кроме этого, из первоначальных соотношений следует, что посредством градиента деформаций $\xi_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$ квазистатические электрическое и магнитное поля взаимосвязаны. Это значит, что если в пьезодиэлектрическую среду излучать электроупругую волну конечной амплитуды, то как в электроупругой среде, так и в вакуумной области индуцируется также магнитное поле, а волна в целом становится электромагнитоупругой.

Учет “деформаций” внешней вакуумной области особенно важен в задачах о распространении поверхностных электроупругих волн, когда волновая энергия, в основном, локализована у поверхности раздела сред.

Естественно, что при изучении характера распространения излученной в пьезоэлектрическую среду волнового сигнала, наряду с граничными условиями на поверхностях пьезослоя $x_2 = 0$ и $x_2 = h$, должны удовлетворяться также условия затухания по глубине вакуумных соответствующих полупространств всех индуцированных волновых составляющих (при $x_2 \rightarrow \pm\infty$).

2. Пусть на вход пьезодиэлектрической среды падает монохроматическая волна конечной амплитуды. Нелинейность уже не допускает простых периодических волновых решений и приводит к последовательному возбуждению временных гармоник падающей волны типа $f_n = A_n(\xi, \tau) \exp i(\omega_n t - k_n \vec{r})$. При этом

амплитуды генерационных гармоник будут медленно изменяющимися функциями времени и направления распространения волны ($\xi = \varepsilon r, \tau = \varepsilon t$). Здесь ε – физический малый параметр, которым может быть мера понижения первичного волнового сигнала на расстоянии длины волны.

Исходя из вышесказанного и учитывая, что нелинейность кристаллов мала, при решении задачи о распространении волн конечной амплитуды достаточно ограничиться приближением заданного волнового поля (падающего волнового сигнала).

Воспользуемся методом возмущений, представляя искомые величины электромагнитоупругого поля в виде

$$F(x_j, t, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n F_n(x_j, t, \xi, \tau). \quad (2.1)$$

Не нарушая общности решения, за направление распространения волны принята координатная ось Ox_1 (т.е. $\xi = \varepsilon x_1$). В нелинейные волновые уравнения и граничные условия эти изменения входят посредством замены производных по x_1 и по t

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (2.2)$$

Подставляя разложение искомых величин (2.1) в уравнения электромагнитоупругости (1.1) и (1.2) и в граничные условия (1.3) – (1.5) с учетом преобразований (2.2) и приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , в первом приближении получим линейную однородную краевую задачу электромагнитоупругости.

Известно, что для пьезоэлектрических кристаллов класса $6mm$ задачи плоскодеформированного упругого поля и магнитного поля разделяются от задачи антиплоской электроактивной деформации [3]. Это означает, что в данной среде в качестве волнового сигнала можно возбуждать один из указанных волновых полей.

В дальнейшем вместо обозначений декартовых координат x_1, x_2, x_3 для удобства будем пользоваться обозначениями x, y, z , соответственно.

Решения полученных краевых задач, с учетом слабой нелинейности пьезокристалла, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t, \xi, \tau) = & \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}(\xi, \tau) \{ \exp(km v_1 y) + f_m \exp(-km v_1 y) + \\ & + \frac{v_1 v_2}{(v_2^2 + 1) \operatorname{sh}(km v_2 h)} [[-\exp(km v_1 h) + \exp(-km v_2 h) + (\exp(-km v_1 h) - \\ & - \exp(-km v_2 h)) f_m] \exp(km v_2 y) + [\exp(km v_2 h) - \exp(km v_1 h) + \\ & + (\exp(-km v_1 h) - \exp(km v_2 h)) f_m] \exp(-km v_2 y)] \} \exp(im\varphi) + \hat{e} \cdot \hat{n}. \quad (2.3) \\ v_1(x, y, t, \xi, \tau) = & \sum_{m=1}^{\infty} i U_{1m}(\xi, \tau) \{ v_1 [\exp(km v_1 y) - f_m \exp(-km v_1 y)] + \\ & + \frac{v_1}{(v_2^2 + 1) \operatorname{sh}(km v_2 h)} [[-\exp(km v_1 h) + \exp(-km v_2 h) + (\exp(-km v_1 h) - \end{aligned}$$

$$-\exp(-kmv_2h))f_m]\exp(kmv_2y)-[\exp(kmv_2h)-\exp(kmv_1h)+ \\ +(\exp(-kmv_1h)-\exp(kmv_2h))f_m]\exp(-kmv_2y)]\}\exp(im\varphi)+\hat{e}\tilde{n}.$$

$$w_1(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) [\exp(km\alpha y) + f_m \exp(-km\alpha y)] \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n}.$$

$$\Phi_1(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) \left\{ \frac{\alpha c_{44}(1+\chi)}{2e_{15}\text{sh}(kmh)} [\exp(-kmh) - \exp(km\alpha h) + \right. \\ + (\exp(-km\alpha h) - \exp(-kmh))f_m] \exp(kmy) + [\exp(kmh) - \exp(km\alpha h) + \\ + (\exp(-km\alpha h) - \exp(kmh))f_m] \exp(-kmy)] + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} [\exp(km\alpha y) + \\ + f_m \exp(-km\alpha y)] \} \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n}. \quad (2.4)$$

$$\Phi_1^{(e)}(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) \frac{\varepsilon_{11}\alpha c_{44}(1+\chi)(f_m-1)}{e_{15}\varepsilon_0} \exp(kmy) \times \\ \times \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n}. \quad \text{ï ðè } y < 0$$

$$\Phi_1^{(e)}(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) \times \\ \times \frac{\varepsilon_{11}\alpha c_{44}(1+\chi)(\exp(km\alpha h) - f_m \exp(-km\alpha h))}{e_{15}\varepsilon_0 \exp(-kmh)} \exp(-kmy) \times \\ \times \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n}. \quad \text{ï ðè } y > h$$

В вакуумных полупространствах потенциальные магнитные поля не существуют. Однако из линейной теории электроупругости известно, что электрическое поле в пьезоэлектрике индуцирует вихревое магнитное поле, определяющееся формулой [4]:

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_0}{\partial t}.$$

Под индукцией $\vec{D}_0$ понимается определяемое из задачи электроупругости значение $\vec{D}$. Вихревая часть магнитоупругого поля в акустоэлектрической задаче имеет порядок $(v^2/c_0^2) \times |\nabla\Phi|$ и всегда пренебрежимо мала.

В соотношениях (2.3) и (2.4) использованы обозначения

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v_{SH}^2}{c_t^2}}, \quad v_1 = \sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c_t^2}}, \quad v_2 = \sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c_{lt}^2}}, \quad (2.5) \\ c_t^2 = \frac{c_{44}}{\rho}(1+\chi), \quad c_{lt}^2 = \frac{c_{66}}{\rho}, \quad c_l^2 = \frac{c_{11}}{\rho},$$

$\varphi(x, t) = \omega t - kx$ – фазовая функция. Приведённые параметры характеризуют волновой сигнал.

Во втором приближении волновые уравнения электромагнитоупругости получаются в виде:

$$L_1[u_2, v_2] = -2c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \xi} - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau} + F_1[u_1, v_1, w_1],$$

$$L_2[u_2, v_2] = -2c_{66} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi} - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial \tau} + F_2[u_1, v_1, w_1], \quad (2.6)$$

$$L_3[w_2, \Phi_2] = -2c_{44} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial \xi} - 2e_{15} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t \partial \tau} + F_3[u_1, v_1, w_1, \Phi_1],$$

$$L_4[w_2, \Phi_2] = -2e_{15} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial \xi} + 2\varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \xi} + F_4[u_1, v_1, \Phi_1], \quad (2.7)$$

$$L_5[\Phi_2^{(e)}] = -2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(e)}}{\partial x \partial \xi} + F_5[v_1^{(e)}, \Phi_1^{(e)}], \quad L_6[\Psi_2] = -2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial \xi} + F_6[u_1, v_1, \Psi_1],$$

$$L_7[\Psi_2^{(e)}] = -2 \frac{\partial^2 \Psi_1^{(e)}}{\partial x \partial \xi} + F_7[v_1^{(e)}, \Psi_1^{(e)}]. \quad (2.8)$$

Здесь $L_k[*]$ – линейные волновые операторы, а $F_k[*]$ – нелинейные операторы.

На деформированной поверхности раздела $y = 0$ и $y = h$ искомые величины волнового поля удовлетворяют неоднородным граничным условиям:

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + B_1[w_1]$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{c_{11}}{c_{12}} \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + B_2[u_1, v_1, w_1] \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{e_{15}}{c_{44}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = B_3[u_1, v_1, w_1]$$

$$\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial \Phi_2^{(e)}}{\partial y} = B_4[u_1, v_1, v_1^{(e)}, \Phi_1, \Phi_1^{(e)}] \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2^{(e)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1^{(e)}}{\partial \xi} + B_5[u_1, v_1, \Phi_1, \Phi_1^{(e)}]$$

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2^{(e)}}{\partial y} = B_6[u, v_1, v_1^{(e)}, \Psi_1, \Psi_1^{(e)}]$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2^{(e)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi_1^{(e)}}{\partial \xi} + B_7[u_1, v_1, \Psi_1, \Psi_1^{(e)}] \quad (2.11)$$

Здесь также $B_x[*]$ – нелинейные операторы и выражения соответствующих слагаемых не приводятся из-за их громоздкости.

В практике обычно используется или рэлеевский электроупругий сигнал $\{u_1(x, y, t), v_1(x, y, t), 0, \Phi_1(x, y, t)\}$, или чисто сдвиговой электроупругий волновой сигнал $\{0, 0, w_1(x, y, t), \Phi_1(x, y, t)\}$ (волны Гуляева–Блюстейна). В случае пьезокристалла класса бтп в указанном срезе xOy рэлеевское волновое поле не электроактивное, то есть имеем:

$$u_1(x, y, t) \neq 0, v_1(x, y, t) \neq 0, w_1(x, y, t) = 0$$

$$\Phi_1(x, y, t) = 0, \Phi_1^{(e)}(x, y, t) = 0, \Psi_1(x, y, t) = 0, \Psi_1^{(e)}(x, y, t) = 0$$

Тогда, если в первом приближении имеется только одна рэлеевская волна, в соотношениях (2.6) – (2.11), а также в следующих приближениях ($m \geq 1$) будем иметь:

$$\begin{aligned} F_k[u_m, v_m, 0, 0] &= F_k^{(1)}[u_m, v_m], \quad (k = 1, 2), \\ F_j[u_m, v_m, 0, 0] &= 0, \quad (j = 3, 4, 5, 6, 7), \\ B_k[u_m, v_m, 0, 0] &= B_k^{(1)}[u_m, v_m], \quad (k = 1, 2), \\ B_j[u_m, v_m, 0, 0] &= 0, \quad (j = 3, 4, 5, 6, 7). \end{aligned} \quad (2.12)$$

С учетом (2.12), из (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11) очевидно, что начальное плоско-деформированное волновое поле не возбуждает высшие гармоники антиплоского электроупругого, а также магнитоупругого полей. Происходит только последовательное возбуждение высших гармоник чисто упругого плоско-деформированного волнового поля в плоскости изотропии пьезокристалла xOy . Исследование данной задачи можно найти в работах [5,6].

В случае чисто сдвигового электроупругого волнового сигнала:

$$u_1(x, y, t) = 0, v_1(x, y, t) = 0, \Psi_1(x, y, t) = 0, \Psi_1^{(e)}(x, y, t) = 0,$$

а $w_1(x, y, t)$, $\Phi_1(x, y, t)$ и $\Phi_1^{(e)}(x, y, t)$ определяются соотношениями (2.4).

Существует также пренебрежимо малое вихревое поле внутри и вне пьезослоя.

Тогда в уравнениях и граничных условиях имеем:

$$\begin{aligned} F_k[0, 0, w_m, \Phi_m] &= F_k^2[w_m], \\ F_j[0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(e)}] &= 0, \\ B_k[0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(e)}] &= B_k^{(1)}[w_m], \\ B_j[0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(e)}] &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где также $k = 1, 2$ и $j = 3, 4, 5, 6, 7$.

Генерация высших гармоник сдвиговой электроупругой волны происходит из-за самовоздействия волнового сигнала (первичной гармоники). Условие отсутствия вековых членов в решении получается из граничных условий краевой задачи электроупругости (2.7) и (2.10):

$$M_{ij}^0 C_j(\epsilon, \tau) = A_i(W_{1,\xi}, W_{1,\tau}). \quad (2.14)$$

Учитывая, что первичным электроупругим полем обеспечивается выполнение условия $\det \|M_{ij}^0\| = 0$, из условия существования нетривиального решения получаем дифференциальное уравнение, описывающее характер изменения амплитуд высших гармоник сдвиговой электроупругой волны

$$a_1(kh)W_{1m,\xi} + W_{1m,\tau} = 0 \quad \text{для} \quad m \geq 1. \quad (2.15)$$

Здесь $a_1(kh) = (a(kh)/b(kh))$ – скорость изменения амплитуды волны (групповая скорость), где

$$\begin{aligned} a(kh) &= -c_t \left\{ [-1 + e^{2kh}]^2 e_{15}^2 [e^{2kh\alpha} \alpha + e^{2kh\alpha} (kh + 2\alpha) f_1 + (-kh + \alpha) f_1^2] \epsilon_0 + \right. \\ &+ [1 + \chi] c_{44} \epsilon_{11} \left\{ e^{2kh\alpha} [-1 + e^{4kh} - 4e^{2kh} kh\alpha^2 + 2e^{kh(3+\alpha)} (-1 + kh(-1 + \alpha)\alpha) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2e^{kh+kh\alpha}(1+kh\alpha(1+\alpha))\Big] + e^{kh\alpha}\Big[8e^{kh(2+\alpha)}kh\alpha^2 + e^{kh\alpha}(2+kh\alpha) - e^{kh(4+\alpha)} \times \\
& \times (2+kh\alpha) + e^{kh}(-4+2kh(1-2\alpha)\alpha) - 2e^{3kh}(-2+kh\alpha(1+2\alpha))\Big]f_1 + \\
& + [-1+kh\alpha - 4e^{2kh}kh\alpha^2 + e^{4kh}(1-kh\alpha) + 2e^{kh(3+\alpha)}(-1+kh\alpha^2) + 2e^{kh+kh\alpha} \times \\
& \times (1+kh\alpha^2)]f_1^2 \rangle \varepsilon_0 - [-1 + e^{2kh}]^2 [-e^{2kh\alpha} + e^{2kh\alpha}(2+kh\alpha)f_1 + \\
& + (-1+kh\alpha)f_1^2] \varepsilon_{11} \Big\} \Big\} \\
b(kh) = & [-1 + e^{2kh}]^2 \sqrt{1-\alpha^2} \Big\{ -khe_{15}^2 [e^{2kh\alpha} - f_1]f_1\varepsilon_0 + [1+\chi]\text{Csch}(kh) \times \\
& \times c_{44}\varepsilon_{11} \Big\{ \langle e^{2kh\alpha} (e^{kh\alpha}(1+kh\alpha) - \text{Ch}(kh)) + e^{kh\alpha}(-2+kh\alpha + e^{kh\alpha}(2+kh\alpha) \times \\
& \times \text{Ch}(kh)) \rangle f_1 + (e^{kh\alpha} + (-1+kh\alpha)\text{Ch}(kh))f_1^2 \rangle \varepsilon_0 + \text{Sh}(kh) \langle -e^{2kh\alpha} + \\
& + e^{2kh\alpha}(2+kh\alpha)f_1 + (-1+kh\alpha)f_1^2 \rangle \varepsilon_{11} \Big\} \Big\}
\end{aligned}$$

Очевидно, что по сравнению со случаем пьезополюпространства [2], здесь имеется дисперсия волнового сигнала.

При падении линейного волнового сигнала, для комплексных амплитуд гармоник $W_{1m}(\xi, \tau)$ входными условиями будут:

$$\begin{aligned}
\text{Re}[W_{11}(0,0)] &= A_1, \quad \text{Im}[W_{11}(0,0)] = 0, \\
\text{Re}[W_{1m \geq 2}(0,0)] &= 0, \quad \text{Im}[W_{1m \geq 2}(0,0)] = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

С учетом этого для комплексных амплитуд получаем

$$\begin{aligned}
W_{11}(\xi, \tau) &= A_1 \exp(\xi - a_1 \tau), \quad \text{Im}[W_{11}(\xi, \tau)] = 0 \\
W_{1m}(\xi, \tau) &= 0 \quad \text{при } m \geq 2
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Антиплоское электроупругое поле получается в виде:

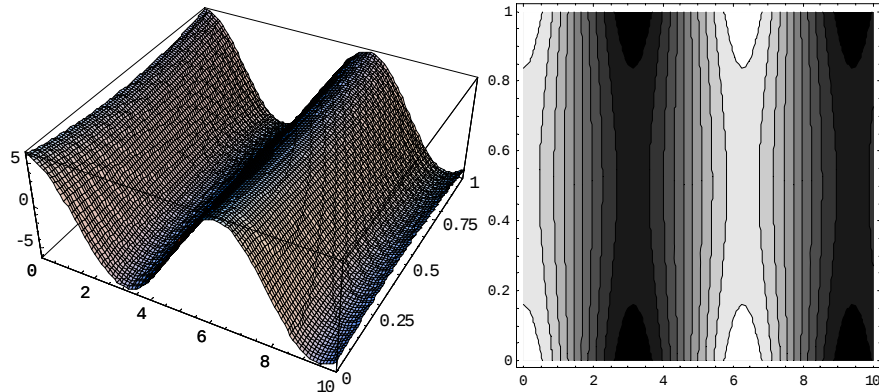
$$\begin{aligned}
w_2(x, y, t, \xi, \tau) &= A_1 \exp(\xi - a_1 \tau) \Big\{ [\exp(k\alpha y) + f_1 \exp(-k\alpha y)] \cos(\omega t - kx) - \\
& - \left(1 - \frac{v_{sh} a_1}{c_i^2}\right) \frac{y}{\alpha} [\exp(k\alpha y) - f_1 \exp(-k\alpha y)] \sin(\omega t - kx) \Big\}, \\
\Phi_2(x, y, t, \xi, \tau) &= A_1 \exp(\xi - a_1 \tau) \Big\{ \left[\frac{\alpha c_{44}(1+\chi)}{2e_{15} \text{sh}(kh)} [(\exp(-kh) - \exp(k\alpha h) + \right. \\
& + (\exp(-k\alpha h) - \exp(-kh))f_1) \exp(ky) + (\exp(kh) - \exp(k\alpha h) + \\
& + (\exp(-k\alpha h) - \exp(kh))f_1) \exp(-ky)] + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (\exp(k\alpha y) + f_1 \exp(-k\alpha y)) \Big] \times \\
& \times \cos(\omega t - kx) - \left[\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11} \alpha} \left(1 - \frac{v_{sh}}{c_i^2} a_1\right) (\exp(k\alpha y) - f_1 \exp(-k\alpha y)) + \right. \\
& + \frac{\alpha c_{44}(1+\chi)}{2e_{15} \text{sh}(kh)} [(\exp(-kh) - \exp(k\alpha h) + (\exp(-k\alpha h) - \exp(-kh))f_1) \times \\
& \times \exp(ky) - (\exp(kh) - \exp(k\alpha h) + (\exp(-k\alpha h) - \exp(kh))f_1) \exp(-ky)] \Big] \times
\end{aligned}$$

$$\times y \sin(\omega t - kx) \} \quad (2.18)$$

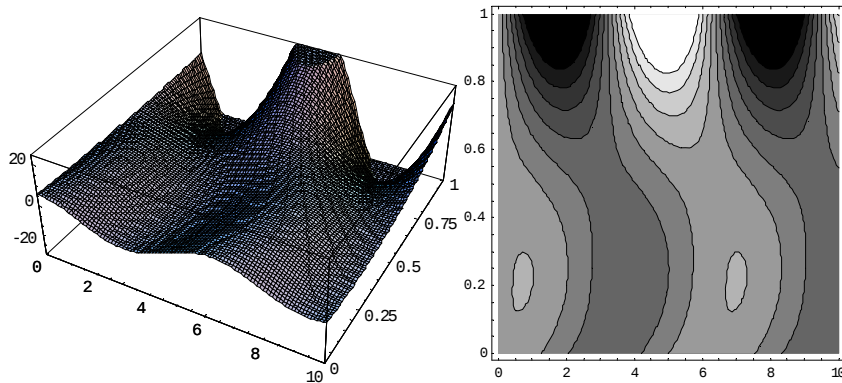
$$\Phi_2^{(a)}(x, y, t, \xi, \tau) = A_1 \exp(\xi - a_1 \tau) \frac{\varepsilon_{11} \alpha c_{44} (1 + \chi)(f_1 - 1)}{e_{15} \varepsilon_0} \left[\cos(\omega t - kx) - \right. \\ \left. - y \sin(\omega t - kx) \right] \exp(ky) \quad \text{и для } y < 0$$

$$\Phi_2^{(a)}(x, y, t, \xi, \tau) = A_1 \exp(\xi - a_1 \tau) \times \\ \times \frac{\varepsilon_{11} \alpha c_{44} (1 + \chi) [\exp(k\alpha h) - f_1 \exp(-k\alpha h)]}{e_{15} \varepsilon_0 \exp(-kh)} \left[\cos(\omega t - kx) + \right. \\ \left. + y \sin(\omega t - kx) \right] \exp(-ky) \quad \text{и для } y > h$$

Из сравнения численных результатов (фиг. 1а и 1б) очевидно, что возникает запаздывающая гармоника электроактивного сдвигового перемещения, отстающая из основного волнового сигнала фазой на $(3/2\pi)$ и неоднородность волны в глубь полупространства, имеет иной характер по сравнению с основным волновым сигналом. Запаздывающая гармоника волны, в отличие от гармонического входного сигнала, имеет максимальную амплитуду как на поверхности $y = h$, так и локальную амплитуду на глубине $y = (\lambda/2\pi\alpha)$ от границы $y = 0$ для каждой волны длиной λ .



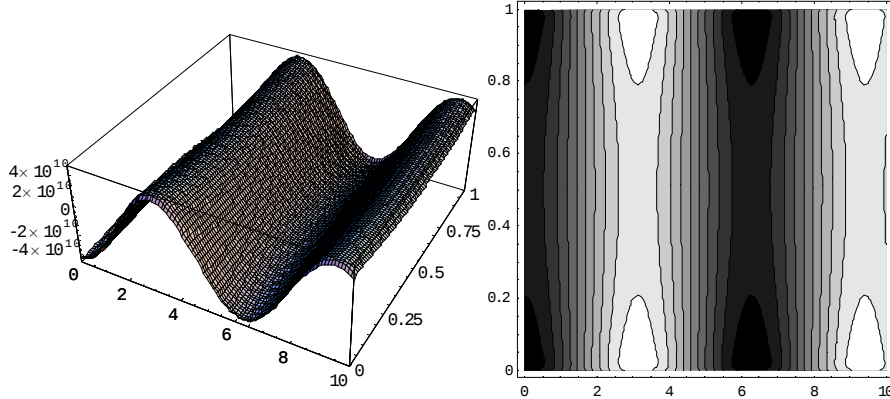
а) перемещение (W_1) в первом приближении



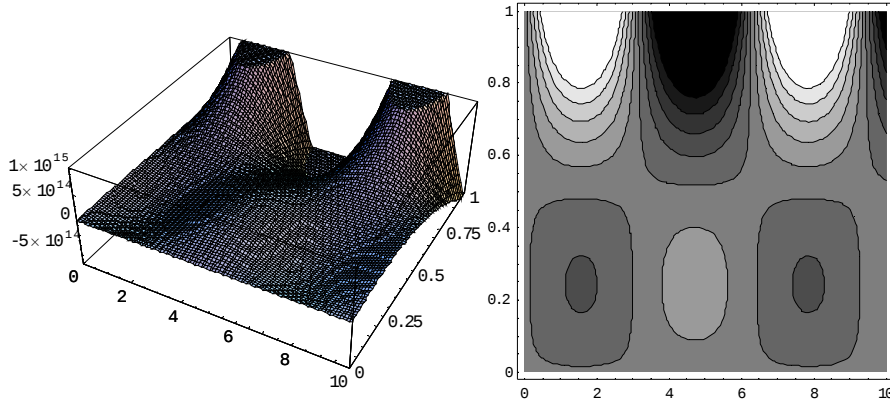
б) перемещение (W_2) во втором приближении

Фиг. 1

Такую же сравнительную картину имеем при сопоставлении численных расчетов для потенциала электрического поля (фиг. 2а и 2б).



а) потенциал электрического поля (Φ_1) в первом приближении



б) потенциал электрического поля (Φ_2) во втором приближении

Фиг. 2

Из (2.13) следует, что в этом случае генерируется также плоско-деформированное волновое состояние.

Во-первых, здесь (фиг.3) возникает акустическое детектирование (нераспространяющаяся волна), обусловленное взаимодействием гармоник электроупругой сдвиговой волны

$$u_{11}(x, y, t, \xi, \tau) = 0,$$

$$v_{11}(x, y, t, \xi, \tau) = R_1^2 B_1 \left[-\exp(2k\alpha y) + f_1^2 \exp(-2k\alpha y) \right],$$

$$\text{где } B_1 = \left[(1/2\alpha) + (\alpha/2) - (c_{1r}^2/\alpha c_l^2) \right], \quad R_1^2 = (2\pi A_1^2/\lambda).$$

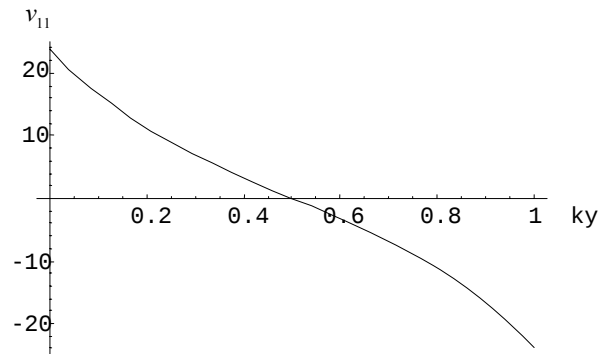
Акустическое детектирование, как и следовало ожидать, по толщине слоя имеет симметричное по отношению к срединной плоскости слоя распределение.

Распространяющееся плоско-деформированное поле (волна Рэлея) определяется из краевой задачи (2.6), (2.9) с учетом (2.13) и (2.18):

$$u_2(x, y, t, \xi, \tau) = \left[C_1 \exp(2kv_1 y) + C_2 \exp(-2kv_1 y) + C_3 \exp(2kv_2 y) + C_4 \exp(-2kv_2 y) + C_5 \left(\exp(2k\alpha y) + f_1^2 \exp(-2k\alpha y) \right) + C_6 \right] \sin(2(\omega t - kx)),$$

$$v_2(x, y, t, \xi, \tau) = [v_1 C_1 \exp(2k v_1 y) - v_1 C_2 \exp(-2k v_1 y) + \frac{C_3}{v_2} \exp(2k v_2 y) - \frac{C_4}{v_2} \exp(-2k v_2 y) + C_5 \alpha (\exp(2k \alpha y) - f_1^2 \exp(-2k \alpha y))] \cos(2(\omega t - kx)),$$

где выражения коэффициентов $C_i(c_{ij}, e_{kij}, \delta_{jk}, A_1, \lambda)$ не приводятся из-за их громоздкости.



Фиг. 3

Неоднородность плоско-деформированного волнового поля по толщине пьезодиэлектрического слоя в общем случае может образоваться вследствие взаимодействия основных форм волнового сигнала плоской деформации или первичного волнового сигнала электроактивной антиплоской деформации. В данном случае при отсутствии сигнала плоской деформации, плоско-деформированное волновое поле возникает за счет искажения первичного волнового сигнала электроактивной антиплоской деформации и взаимодействия основных форм этого же волнового сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С., Хачатрян В.М. Особенности учёта геометрической нелинейности при распространении электроупругой волны конечной амплитуды в пьезоэлектрической среде. //Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. № 2. С. 13-23.
2. Аветисян А.С. Поверхностные электроупругие волны конечной амплитуды в пьезодиэлектрической среде.//Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т. 48. № 2. С. 27-37.
3. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т. 38. №1. С.12-19.
4. Белакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах.Новосибирск: Наука, 1982.
5. Kalyanasundaram N. Nonlinear surface acoustic waves on an isotropic solid. //Int. J. Eng. Sci., 1981. V. 19. № 1. PP. 279-286.
6. Lardner R.W. Nonlinear surface acoustic waves on an elastic solid of general anisotropy.// J. Elast., 1986. V. 16. № 1. PP. 63-75.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.12.2008

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ ОТ
ЭКРАНИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Гаракон В.Г.

Ключевые слова: идеальный проводник, магнитоупругость, волны P и SV .

Keywords: perfect conductor, magnetoelasticity, P and SV waves.

Վ.Գ. Գարակով

Մագնիսաառաձգական ալիքների անդրադարձումը իդեալական հաղորդիչ կիսատարածության եզրին

Դիտարկվում են հարթ դեֆորմացիայի խնդիրներ իդեալական հաղորդիչ առաձգական կիսատարածության համար արտաքին մագնիսական դաշտի առկայությամբ, որն ուղղահայաց է մագնիսաառաձգական ալիքների հարթությանը: Երկայնական կամ լայնական մագնիսաառաձգական ալիքների անկման դեպքում կիսատարածության եզրին դիտարկվում են եզրային պայմանների տարբեր տարբերակներ, այդ թվում մագնիսական կամ էլեկտրական էկրանացման դեպքերը: Մասնավորապես ցույց է տրվում, որ արտաքին մագնիսական դաշտի բավականին թույլ լարվածության դեպքում կարելի է անդրադարձող անհամասեռ ալիքը ձևափոխել ծավալային ալիքի:

V. G. Garakov

Reflection of magnetoelastic waves from screening surface

The plane deformation problems of magnetoelastic wave reflection are studied for perfectly conducting media immersed in magnetic field which is normal to wave plane. A few cases of boundary conditions are considered relate to the phenomenon of “electric and magnetic well” on media interface.

Рассматриваются задачи плоской деформации для идеально проводящего полупространства в присутствии магнитного поля, перпендикулярного плоскости распространения волн. В случае падения продольной или поперечной магнитоупругой волны исследуются различные варианты граничных условий на плоскости, ограничивающей полупространство, в том числе, случаи магнитного и электрического экрана. Показывается, что при наличии достаточно слабой напряженности магнитного поля можно преобразовать отраженную неоднородную волну в объемную.

1. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) полупространство занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Полупространство из упругого идеально проводящего материала находится в постоянном магнитном поле с вектором напряженности, параллельным оси OZ . Рассматриваются задачи плоской деформации с компонентами упругих перемещений

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad w = 0. \quad (1.1)$$

При указанных ограничениях уравнения движения магнитоупругой среды имеют вид [1,2]

$$\begin{aligned} C_t^2 \Delta u + (C_l^2 - C_t^2 + v_3^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ C_t^2 \Delta v + (C_l^2 - C_t^2 + v_3^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$V_3^2 = (4\pi\rho)^{-1} \mu_0 H_{03}^2. \quad (1.3)$$

C_l, C_t – скорости распространения продольных и поперечных волн, соответственно, ρ – плотность, μ – магнитная проницаемость среды, H_{03} – напряженность магнитного поля.

Если граница полупространства свободна, то должны выполняться следующие условия [1,2]:

$$\sigma_{22} + t_{22} = t_{22}^{(e)}, \quad \sigma_{21} + t_{21} = t_{21}^{(e)}, \quad e_1 = e_1^{(e)}, \quad (1.4)$$

где σ_{22}, σ_{21} – компоненты тензора упругих напряжений, $e_1, e_1^{(e)}$ – компоненты возмущенного электрического поля. Компоненты тензора Максвелла определяются следующим образом [2]:

$$t_{21} = t_{21}^{(e)} = 0, \quad t_{22} = -\frac{\mu_0}{4\pi} H_{03} h_3, \quad t_{22}^{(e)} = -\frac{1}{4\pi} H_{03} h_3^{(e)}. \quad (1.5)$$

Здесь $h_3, h_3^{(e)}$ – компоненты возмущенного магнитного поля, величины без верхнего индекса относятся к полупространству $y > 0$, а величины с индексом (e) – к полупространству $y < 0$. Для полной постановки задачи необходимо привести также уравнения электродинамики в области $y < 0$. Однако, в настоящей работе они не приводятся, т.к. предполагается рассматривать задачи, когда плоскость $y = 0$ является экраном, т.е. будут рассматриваться граничные условия, определяющие решение задачи в области $y > 0$.

В рамках модели идеального проводника выражения для компонент электромагнитного поля из (1.4) и (1.5) имеют вид [2]

$$e_1 = -\frac{\mu_0}{e} H_{03} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad h_3 = -H_{03} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (1.6)$$

2. При помощи преобразования

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1)$$

система уравнений (1.2) приводится к автономным уравнениям

$$(C_l^2 + V_3^2) \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad C_t^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что магнитное поле приводит к увеличению скорости продольной волны и не влияет на скорость поперечной волны.

Пусть на границу полупространства падает продольная (P) волна

$$\phi_n = A \exp i(k_1 x - k_2 y - \omega t). \quad (2.3)$$

В (2.3) для определенности принимается, что $k_1 > 0$. Подставляя (2.3) в первое уравнение из (2.2), получим

$$\omega^2 = (C_l^2 + V_3^2)(k_1^2 + k_2^2), \quad (2.4)$$

откуда для k_2 получается

$$k_2 = k_1 \sqrt{\theta \eta - 1}, \quad \theta \eta > 1, \quad \theta < 1, \\ \theta = \frac{C_t^2}{C_l^2 + V_3^2}, \quad \eta = \frac{\omega^2}{k^2 C_t^2}. \quad (2.5)$$

Согласно (2.5) отраженная продольная волна будет иметь вид

$$\varphi_0 = C \exp i(k_1 x + k_2 y - \omega t), \quad (2.6)$$

где постоянная C подлежит определению.

При падении продольной волны возможно также отражение поперечной (SV)-волны. Отраженная SV -волна согласно второму уравнению из (2.2) определяется следующим образом:

$$\psi_0 = D \exp i(k_1 x + k_3 y - \omega t), \quad k_3 = k_1 \sqrt{\eta - 1}. \quad (2.7)$$

Вначале рассматривается случай, когда граница полупространства закреплена:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (2.8)$$

В граничных условиях (2.8) с учетом преобразования (2.1) используются решения

$$\Phi = \Phi_n + \Phi_0, \quad \Psi = \Psi_0. \quad (2.9)$$

В результате получается система из двух уравнений относительно искомых постоянных C и D , решение которой имеет вид:

$$C = \frac{\sqrt{\theta\eta - 1}\sqrt{\eta - 1} - 1}{\sqrt{\theta\eta - 1}\sqrt{\eta - 1} + 1} A, \quad D = -\frac{2\sqrt{\theta\eta - 1}}{\sqrt{\theta\eta - 1}\sqrt{\eta - 1} + 1} A. \quad (2.10)$$

Решение (2.10) не отличается от обычной задачи отражения. Влияние магнитного поля входит только в выражение для θ из (2.5).

3. Пусть теперь граница полупространства свободна от напряжений и является экраном для магнитного поля [3]:

$$h_3^{(e)} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (3.1)$$

В этом случае граничные условия свободного края с учетом (1.4), (1.5), (2.1) приведутся к виду:

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \frac{\mu_0}{4\pi} H_{03}^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\lambda + \frac{\mu_0}{4\pi} H_{03}^2 + 2\mu \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь λ, μ – коэффициенты Ламе.

Подстановкой (2.9) в граничные условия (3.2) определяются искомые постоянные

$$\begin{aligned} C &= \frac{4\sqrt{\eta - 1}\sqrt{\theta\eta - 1}}{(\eta - 2)^2 + 4\sqrt{\eta - 1}\sqrt{\theta\eta - 1}} A, \\ D &= \frac{2(\eta - 2)\sqrt{\theta\eta - 1}}{(\eta - 2)^2 + 4\sqrt{\eta - 1}\sqrt{\theta\eta - 1}} A. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Полученный результат (3.3) совпадает с известным, если в выражении для θ принять $H_{03} = 0$.

В случае же, когда на границе имеется экран электрического поля

$$e_1^{(e)} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (3.4)$$

граничные условия (1.4) с учетом (1.6) заменяются условиями

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (3.5)$$

Такие же граничные условия получаются при задании на границе полупространства условий скользящего контакта. При этом, искомые постоянные определяются как

$$C = A, \quad D = 0 \quad (3.6)$$

и не зависят от напряженности магнитного поля.

4. Пусть теперь на границу полупространства падает SV -волна

$$\psi_n = B \exp i(k_1 x - k_3 y - \omega t), \quad \eta > 1. \quad (4.1)$$

В граничных условиях закреплённого края (2.8) используются решения

$$\varphi = \varphi_0, \quad \psi = \psi_n + \psi_0, \quad (4.2)$$

где φ_0, ψ_0 определены по формуле (2.6), (2.7). В результате, искомые постоянные определяются следующим образом:

$$D = \frac{\sqrt{\eta-1}\sqrt{\theta\eta-1}-1}{\sqrt{\eta-1}\sqrt{\theta\eta-1}+1} B, \quad C = \frac{2\sqrt{\eta-1}}{\sqrt{\eta-1}\sqrt{\theta\eta-1}+1} B. \quad (4.3)$$

В этом случае волна SV может обладать свойством

$$1 < \eta < \theta^{-1}, \quad (4.4)$$

что будет означать, что отраженная P волна будет неоднородной, т.е. с затухающей по глубине полупространства амплитудой. Из (4.4) получается

$$C_t^2 < \omega^2 k_1^{-2} < C_l^2 + V_3^2, \quad (4.5)$$

что показывает существенность влияния магнитного поля на существование неоднородной волны. Если при отсутствии магнитного поля имеет место неравенство $\omega^2 k_1^{-2} > C_l^2$ (неоднородная волна не существует), то при наличии магнитного поля с напряжённостью

$$V_3^2 > \omega^2 k_1^{-2} - C_l^2 \quad (4.6)$$

неоднородная волна появится. При этом, величина напряжённости магнитного поля в зависимости от разности $\omega^2 k_1^{-2} - C_l^2$ может быть сколь угодно малой.

Аналогичный результат получается при падении SV -волны на свободную границу полупространства при наличии экрана магнитного поля, т.е. при условиях (3.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
2. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости. Ереван: Изд. ЕГУ, 1996. 98с.
3. Белубекян М.В., Мартиросян Э.В. Экранированная магнитоупругая поверхностная волна Рэлея. // Вестник РАУ. Сер. физ.-мат. наук. 2007. №1. С.107-119.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
6.02.2009

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АНТИПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОУПРУГОГО
ВОЛНОВОГО СИГНАЛА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ
УЧЕТЕ БОЛЬШИХ СДВИГОВ

Аветисян А.С., Хачатрян В.М.

Ключевые слова: электроупругая волна, геометрическая нелинейность, конечные удлинения и сдвиги, пьезоэлектрический слой.

Key words: electroelastic wave, geometrical nonlinearity, finite elongations and shears, piezoelectric layer.

Ա. Ս. Ավետիսյան, Վ. Մ. Խաչատրյան

Մեծ սահմանի հաշվառման դեպքում հակահարթ էլեկտրաառաձգական ալիքային ազդանշանի տարածման մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է 6mm դասի պիեզոպրուրեդային դիէլեկտրիկ շերտում վերջավոր լայնության էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածումը, երկրաչափական ոչգծայնության (միայն մեծ սահմանի տեսքով) հաշվառումով: Ցույց է տրվում, որ սահմանի էլեկտրաակտիվ գծային ազդանշանի տարածման դեպքում, սահմանակցող միջավայրերում գրգռվում է կապակցված էլեկտրամագնիսաառաձգական ալիքային դաշտ, իսկ սկզբնական ալիքային ազդանշանը ձևախեղվում է: Կատարված է թվային վերլուծություն, և ալիքային դաշտի բաղադրիչների ձևախեղման չափի համեմատություն առաջին մոտավորությամբ:

A.S.Avetisyan, V.M.Khachatryan

Propagation of antiplane electroelastic wave signal in the piezoelectric layer taking into account large shears

In this work the propagation of finite amplitude electroelastic waves in dielectric layer of 6mm hexagonal symmetry class piezocrystal taking into account geometrical nonlinearity only in the form of large shears is investigated. It is shown that during the propagation of electroactive shear linear signal in adjoining mediums the related electromagnetoelastic wave field is arisen and prime signal is hardly distorted. The numerical analysis and comparison of distortion measure in the prime approximation of electroelastic field wave components is carried out.

В работе рассматривается распространение электроупругих волн конечной амплитуды в диэлектрическом слое из пьезокристалла класса 6mm гексагональной симметрии с учетом геометрической нелинейности в виде только больших сдвигов. Показывается, что при распространении электроактивного сдвигового линейного сигнала в граничающих средах индуцируется связанное электромагнитоупругое волновое поле, а первичный сигнал сильно искажается. Проведен численный анализ и сравнение меры искажений в первом приближении волновых составляющих электроупругого поля.

Учет больших сдвигов усложняет взаимодействие между упругим и электромагнитным полями, а также между плоским упругим и антиплоским электроупругим деформированными состояниями.

В этой работе, как геометрическая нелинейность, учитываются только конечные сдвиговые деформации.

1. Пусть пьезоэлектрический слой занимает область $|x_1| < \infty$, $0 < x_2 < h$, $|x_3| < \infty$, для которого уравнения движения упругой среды и уравнения электромагнетостатики в лагранжевой форме записи имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}
& c_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{66} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \\
& = - \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \left(c_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + c_{66} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \left(c_{11} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} \right) - \\
& - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\
& c_{66} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{11} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = \\
& = - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \left(c_{66} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \left(c_{66} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + c_{11} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} \right) - \\
& - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
& c_{44} \Delta U_3 + e_{15} \Delta \Phi - \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \left(e_{15} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{44} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \quad (1.1) \\
& e_{15} \Delta U_3 - \varepsilon_{11} \Delta \Phi = \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \right), \\
& \Delta \Psi = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right),
\end{aligned}$$

где u_k – компоненты упругого перемещения, ρ – естественная плотность среды, $\Phi(x_j, t)$ и $\Psi(x_k, t)$ – потенциалы электрического и магнитного полей, соответственно, введенные через лагранжевы напряженности электрического $E_k(x_j, t)$ и магнитного $H_k(x_j, t)$ полей с учетом градиента деформации $\xi_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$.

Во внешней вакуумной области $|x_1| < \infty$, $x_2 < 0$, $|x_3| < \infty$ или $|x_1| < \infty$, $x_2 > h$, $|x_3| < \infty$ решаются уравнения электромагнетостатики для вакуума

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi^{(e)} &= \frac{\partial^2 U_2^{(e)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi^{(e)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
\Delta \Psi^{(e)} &= \frac{\partial^2 U_2^{(e)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi^{(e)}}{\partial x_1 \partial x_2},
\end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\Phi^{(e)}(x_i, t)$ и $\Psi^{(e)}(x_i, t)$ – потенциалы этих внешних полей соответственно, а $u_k^{(e)}(x_i, t) = u_k(x_1, 0, x_3, t)$ и $u_k^{(e)}(x_i, t) = u_k(x_1, h, x_3, t)$ – деформации точек соответствующей поверхности раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ [2].

Естественно, что конечность деформаций поверхности электроупругой среды искажает (“деформирует”) нематериальную внешнюю среду, чем и продиктованы уравнения (1.2).

На границах раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ удовлетворяется непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей

$$\Phi - \Phi^{(e)} = 0, \quad \Psi - \Psi^{(e)} = 0 \quad (1.3)$$

и нормальных компонент векторов индукций этих полей

$$\begin{aligned} e_{15} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x_1} \right) \\ \mu_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= \mu_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

На недеформированных границах раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ термодинамические напряжения должны равняться нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\ c_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{2} c_{11} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) - c_{66} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \\ &- \frac{1}{2} c_{12} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} - \frac{1}{2} c_{11} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\ c_{44} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= -c_{66} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Очевидно, что учет “деформирования” внешней нематериальной области усложняет запись материальных соотношений внешней среды, тем самым усложняя уравнения электромагнитоупругости (1.2), а также граничные условия (1.4) и (1.5).

Кроме этого, из первоначальных соотношений следует, что посредством градиента деформаций $\xi_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$ квазистатические электрическое и магнитное поля взаимосвязаны. Это значит, что если в пьезодиэлектрическую среду излучать электроупругую волну конечной амплитуды, то как в электроупругой среде, так и в вакуумной области индуцируется также магнитное поле, а волна в целом становится электромагнитоупругой.

Учет “деформаций” внешней вакуумной области особенно важен в задачах о распространении поверхностных электроупругих волн, когда волновая энергия, в основном, локализована у поверхности раздела сред.

Естественно, что при изучении характера распространения излученной в пьезоэлектрическую среду волнового сигнала, наряду с граничными условиями на поверхностях пьезослоя $x_2 = 0$ и $x_2 = h$, должны удовлетворяться также условия затухания по глубине вакуумных соответствующих полупространств всех индуцированных волновых составляющих (при $x_2 \rightarrow \pm\infty$).

2. Пусть на вход пьезодиэлектрической среды падает монохроматическая волна конечной амплитуды. Нелинейность уже не допускает простых периодических волновых решений и приводит к последовательному возбуждению временных гармоник падающей волны типа $f_n = A_n(\xi, \tau) \exp i(\omega_n t - k_n \vec{r})$. При этом

амплитуды генерационных гармоник будут медленно изменяющимися функциями времени и направления распространения волны ($\xi = \varepsilon r, \tau = \varepsilon t$). Здесь ε – физический малый параметр, которым может быть мера понижения первичного волнового сигнала на расстоянии длины волны.

Исходя из вышесказанного и учитывая, что нелинейность кристаллов мала, при решении задачи о распространении волн конечной амплитуды достаточно ограничиться приближением заданного волнового поля (падающего волнового сигнала).

Воспользуемся методом возмущений, представляя искомые величины электромагнитоупругого поля в виде

$$F(x_j, t, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n F_n(x_j, t, \xi, \tau). \quad (2.1)$$

Не нарушая общности решения, за направление распространения волны принята координатная ось Ox_1 (т.е. $\xi = \varepsilon x_1$). В нелинейные волновые уравнения и граничные условия эти изменения входят посредством замены производных по x_1 и по t

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (2.2)$$

Подставляя разложение искомых величин (2.1) в уравнения электромагнитоупругости (1.1) и (1.2) и в граничные условия (1.3) – (1.5) с учетом преобразований (2.2) и приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , в первом приближении получим линейную однородную краевую задачу электромагнитоупругости.

Известно, что для пьезоэлектрических кристаллов класса $6mm$ задачи плоскодеформированного упругого поля и магнитного поля разделяются от задачи антиплоской электроактивной деформации [3]. Это означает, что в данной среде в качестве волнового сигнала можно возбуждать один из указанных волновых полей.

В дальнейшем вместо обозначений декартовых координат x_1, x_2, x_3 для удобства будем пользоваться обозначениями x, y, z , соответственно.

Решения полученных краевых задач, с учетом слабой нелинейности пьезокристалла, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t, \xi, \tau) = & \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}(\xi, \tau) \{ \exp(kmv_1 y) + f_m \exp(-kmv_1 y) + \\ & + \frac{v_1 v_2}{(v_2^2 + 1) \operatorname{sh}(kmv_2 h)} [[-\exp(kmv_1 h) + \exp(-kmv_2 h) + (\exp(-kmv_1 h) - \\ & - \exp(-kmv_2 h)) f_m] \exp(kmv_2 y) + [\exp(kmv_2 h) - \exp(kmv_1 h) + \\ & + (\exp(-kmv_1 h) - \exp(kmv_2 h)) f_m] \exp(-kmv_2 y)] \} \exp(im\varphi) + \hat{e} \cdot \hat{n}. \quad (2.3) \\ v_1(x, y, t, \xi, \tau) = & \sum_{m=1}^{\infty} i U_{1m}(\xi, \tau) \{ v_1 [\exp(kmv_1 y) - f_m \exp(-kmv_1 y)] + \\ & + \frac{v_1}{(v_2^2 + 1) \operatorname{sh}(kmv_2 h)} [[-\exp(kmv_1 h) + \exp(-kmv_2 h) + (\exp(-kmv_1 h) - \end{aligned}$$

$$-\exp(-kmv_2h))f_m]\exp(kmv_2y)-[\exp(kmv_2h)-\exp(kmv_1h)+ \\ +(\exp(-kmv_1h)-\exp(kmv_2h))f_m]\exp(-kmv_2y)]\}\exp(im\varphi)+\hat{e}\tilde{n}.$$

$$w_1(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) [\exp(km\alpha y) + f_m \exp(-km\alpha y)] \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n}.$$

$$\Phi_1(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) \left\{ \frac{\alpha c_{44}(1+\chi)}{2e_{15}\text{sh}(kmh)} [\exp(-kmh) - \exp(km\alpha h) + \right. \\ + (\exp(-km\alpha h) - \exp(-kmh))f_m] \exp(kmy) + [\exp(kmh) - \exp(km\alpha h) + \\ + (\exp(-km\alpha h) - \exp(kmh))f_m] \exp(-kmy)] + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} [\exp(km\alpha y) + \\ \left. + f_m \exp(-km\alpha y)] \right\} \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n}. \quad (2.4)$$

$$\Phi_1^{(e)}(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) \frac{\varepsilon_{11}\alpha c_{44}(1+\chi)(f_m-1)}{e_{15}\varepsilon_0} \exp(kmy) \times \\ \times \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n}. \quad \text{и } \forall y < 0$$

$$\Phi_1^{(e)}(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}(\xi, \tau) \times \\ \times \frac{\varepsilon_{11}\alpha c_{44}(1+\chi)(\exp(km\alpha h) - f_m \exp(-km\alpha h))}{e_{15}\varepsilon_0 \exp(-kmh)} \exp(-kmy) \times \\ \times \exp(im\varphi) + \hat{e}\tilde{n}. \quad \text{и } \forall y > h$$

В вакуумных полупространствах потенциальные магнитные поля не существуют. Однако из линейной теории электроупругости известно, что электрическое поле в пьезоэлектрике индуцирует вихревое магнитное поле, определяющееся формулой [4]:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_0}{\partial t}.$$

Под индукцией $\vec{D}_0$ понимается определяемое из задачи электроупругости значение $\vec{D}$. Вихревая часть магнитоупругого поля в акустоэлектрической задаче имеет порядок $(v^2/c_0^2) \times |\nabla \Phi|$ и всегда пренебрежимо мала.

В соотношениях (2.3) и (2.4) использованы обозначения

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v_{SH}^2}{c_t^2}}, \quad v_1 = \sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c_t^2}}, \quad v_2 = \sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c_{lt}^2}}, \quad (2.5) \\ c_t^2 = \frac{c_{44}}{\rho}(1+\chi), \quad c_{lt}^2 = \frac{c_{66}}{\rho}, \quad c_l^2 = \frac{c_{11}}{\rho},$$

$\varphi(x, t) = \omega t - kx$ – фазовая функция. Приведённые параметры характеризуют волновой сигнал.

Во втором приближении волновые уравнения электромагнитоупругости получаются в виде:

$$L_1[u_2, v_2] = -2c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \xi} - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau} + F_1[u_1, v_1, w_1],$$

$$L_2[u_2, v_2] = -2c_{66} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi} - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial \tau} + F_2[u_1, v_1, w_1], \quad (2.6)$$

$$L_3[w_2, \Phi_2] = -2c_{44} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial \xi} - 2e_{15} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t \partial \tau} + F_3[u_1, v_1, w_1, \Phi_1],$$

$$L_4[w_2, \Phi_2] = -2e_{15} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial \xi} + 2\varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \xi} + F_4[u_1, v_1, \Phi_1], \quad (2.7)$$

$$L_5[\Phi_2^{(e)}] = -2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(e)}}{\partial x \partial \xi} + F_5[v_1^{(e)}, \Phi_1^{(e)}], \quad L_6[\Psi_2] = -2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial \xi} + F_6[u_1, v_1, \Psi_1],$$

$$L_7[\Psi_2^{(e)}] = -2 \frac{\partial^2 \Psi_1^{(e)}}{\partial x \partial \xi} + F_7[v_1^{(e)}, \Psi_1^{(e)}]. \quad (2.8)$$

Здесь $L_k[*]$ – линейные волновые операторы, а $F_k[*]$ – нелинейные операторы.

На деформированной поверхности раздела $y = 0$ и $y = h$ искомые величины волнового поля удовлетворяют неоднородным граничным условиям:

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + B_1[w_1]$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{c_{11}}{c_{12}} \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + B_2[u_1, v_1, w_1] \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{e_{15}}{c_{44}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = B_3[u_1, v_1, w_1]$$

$$\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial \Phi_2^{(e)}}{\partial y} = B_4[u_1, v_1, v_1^{(e)}, \Phi_1, \Phi_1^{(e)}] \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2^{(e)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1^{(e)}}{\partial \xi} + B_5[u_1, v_1, \Phi_1, \Phi_1^{(e)}]$$

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2^{(e)}}{\partial y} = B_6[u, v_1, v_1^{(e)}, \Psi_1, \Psi_1^{(e)}]$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2^{(e)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi_1^{(e)}}{\partial \xi} + B_7[u_1, v_1, \Psi_1, \Psi_1^{(e)}] \quad (2.11)$$

Здесь также $B_x[*]$ – нелинейные операторы и выражения соответствующих слагаемых не приводятся из-за их громоздкости.

В практике обычно используется или рэлеевский электроупругий сигнал $\{u_1(x, y, t), v_1(x, y, t), 0, \Phi_1(x, y, t)\}$, или чисто сдвиговой электроупругий волновой сигнал $\{0, 0, w_1(x, y, t), \Phi_1(x, y, t)\}$ (волны Гуляева–Блюстейна). В случае пьезокристалла класса бтп в указанном срезе xOy рэлеевское волновое поле не электроактивное, то есть имеем:

$$u_1(x, y, t) \neq 0, v_1(x, y, t) \neq 0, w_1(x, y, t) = 0$$

$$\Phi_1(x, y, t) = 0, \Phi_1^{(e)}(x, y, t) = 0, \Psi_1(x, y, t) = 0, \Psi_1^{(e)}(x, y, t) = 0$$

Тогда, если в первом приближении имеется только одна рэлеевская волна, в соотношениях (2.6) – (2.11), а также в следующих приближениях ($m \geq 1$) будем иметь:

$$\begin{aligned} F_k[u_m, v_m, 0, 0] &= F_k^{(1)}[u_m, v_m], \quad (k = 1, 2), \\ F_j[u_m, v_m, 0, 0] &= 0, \quad (j = 3, 4, 5, 6, 7), \\ B_k[u_m, v_m, 0, 0] &= B_k^{(1)}[u_m, v_m], \quad (k = 1, 2), \\ B_j[u_m, v_m, 0, 0] &= 0, \quad (j = 3, 4, 5, 6, 7). \end{aligned} \quad (2.12)$$

С учетом (2.12), из (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11) очевидно, что начальное плоско-деформированное волновое поле не возбуждает высшие гармоники антиплоского электроупругого, а также магнитоупругого полей. Происходит только последовательное возбуждение высших гармоник чисто упругого плоско-деформированного волнового поля в плоскости изотропии пьезокристалла xOy . Исследование данной задачи можно найти в работах [5,6].

В случае чисто сдвигового электроупругого волнового сигнала:

$$u_1(x, y, t) = 0, v_1(x, y, t) = 0, \Psi_1(x, y, t) = 0, \Psi_1^{(e)}(x, y, t) = 0,$$

а $w_1(x, y, t)$, $\Phi_1(x, y, t)$ и $\Phi_1^{(e)}(x, y, t)$ определяются соотношениями (2.4).

Существует также пренебрежимо малое вихревое поле внутри и вне пьезослоя.

Тогда в уравнениях и граничных условиях имеем:

$$\begin{aligned} F_k[0, 0, w_m, \Phi_m] &= F_k^2[w_m], \\ F_j[0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(e)}] &= 0, \\ B_k[0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(e)}] &= B_k^{(1)}[w_m], \\ B_j[0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(e)}] &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где также $k = 1, 2$ и $j = 3, 4, 5, 6, 7$.

Генерация высших гармоник сдвиговой электроупругой волны происходит из-за самовоздействия волнового сигнала (первичной гармоники). Условие отсутствия вековых членов в решении получается из граничных условий краевой задачи электроупругости (2.7) и (2.10):

$$M_{ij}^0 C_j(\epsilon, \tau) = A_i(W_{1,\xi}, W_{1,\tau}). \quad (2.14)$$

Учитывая, что первичным электроупругим полем обеспечивается выполнение условия $\det \|M_{ij}^0\| = 0$, из условия существования нетривиального решения получаем дифференциальное уравнение, описывающее характер изменения амплитуд высших гармоник сдвиговой электроупругой волны

$$a_1(kh)W_{1m,\xi} + W_{1m,\tau} = 0 \quad \text{для} \quad m \geq 1. \quad (2.15)$$

Здесь $a_1(kh) = (a(kh)/b(kh))$ – скорость изменения амплитуды волны (групповая скорость), где

$$\begin{aligned} a(kh) &= -c_t \left\{ [-1 + e^{2kh}]^2 e_{15}^2 [e^{2kh\alpha} \alpha + e^{2kh\alpha} (kh + 2\alpha) f_1 + (-kh + \alpha) f_1^2] \epsilon_0 + \right. \\ &+ [1 + \chi] c_{44} \epsilon_{11} \left\{ e^{2kh\alpha} [-1 + e^{4kh} - 4e^{2kh} kh\alpha^2 + 2e^{kh(3+\alpha)} (-1 + kh(-1 + \alpha)\alpha) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2e^{kh+kh\alpha}(1+kh\alpha(1+\alpha))\Big] + e^{kh\alpha}\Big[8e^{kh(2+\alpha)}kh\alpha^2 + e^{kh\alpha}(2+kh\alpha) - e^{kh(4+\alpha)} \times \\
& \times (2+kh\alpha) + e^{kh}(-4+2kh(1-2\alpha)\alpha) - 2e^{3kh}(-2+kh\alpha(1+2\alpha))\Big]f_1 + \\
& + [-1+kh\alpha - 4e^{2kh}kh\alpha^2 + e^{4kh}(1-kh\alpha) + 2e^{kh(3+\alpha)}(-1+kh\alpha^2) + 2e^{kh+kh\alpha} \times \\
& \times (1+kh\alpha^2)]f_1^2 \rangle \varepsilon_0 - [-1 + e^{2kh}]^2 [-e^{2kh\alpha} + e^{2kh\alpha}(2+kh\alpha)f_1 + \\
& + (-1+kh\alpha)f_1^2] \varepsilon_{11} \Big\} \Big\} \\
b(kh) = & [-1 + e^{2kh}]^2 \sqrt{1-\alpha^2} \Big\{ -khe_{15}^2 [e^{2kh\alpha} - f_1]f_1\varepsilon_0 + [1+\chi]\text{Csch}(kh) \times \\
& \times c_{44}\varepsilon_{11} \Big\{ \langle e^{2kh\alpha} (e^{kh\alpha}(1+kh\alpha) - \text{Ch}(kh)) + e^{kh\alpha}(-2+kh\alpha + e^{kh\alpha}(2+kh\alpha) \times \\
& \times \text{Ch}(kh)) \rangle f_1 + (e^{kh\alpha} + (-1+kh\alpha)\text{Ch}(kh))f_1^2 \rangle \varepsilon_0 + \text{Sh}(kh) \langle -e^{2kh\alpha} + \\
& + e^{2kh\alpha}(2+kh\alpha)f_1 + (-1+kh\alpha)f_1^2 \rangle \varepsilon_{11} \Big\} \Big\}
\end{aligned}$$

Очевидно, что по сравнению со случаем пьезополюпространства [2], здесь имеется дисперсия волнового сигнала.

При падении линейного волнового сигнала, для комплексных амплитуд гармоник $W_{1m}(\xi, \tau)$ входными условиями будут:

$$\begin{aligned}
\text{Re}[W_{11}(0,0)] &= A_1, \quad \text{Im}[W_{11}(0,0)] = 0, \\
\text{Re}[W_{1m \geq 2}(0,0)] &= 0, \quad \text{Im}[W_{1m \geq 2}(0,0)] = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

С учетом этого для комплексных амплитуд получаем

$$\begin{aligned}
W_{11}(\xi, \tau) &= A_1 \exp(\xi - a_1 \tau), \quad \text{Im}[W_{11}(\xi, \tau)] = 0 \\
W_{1m}(\xi, \tau) &= 0 \quad \text{при } m \geq 2
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Антиплоское электроупругое поле получается в виде:

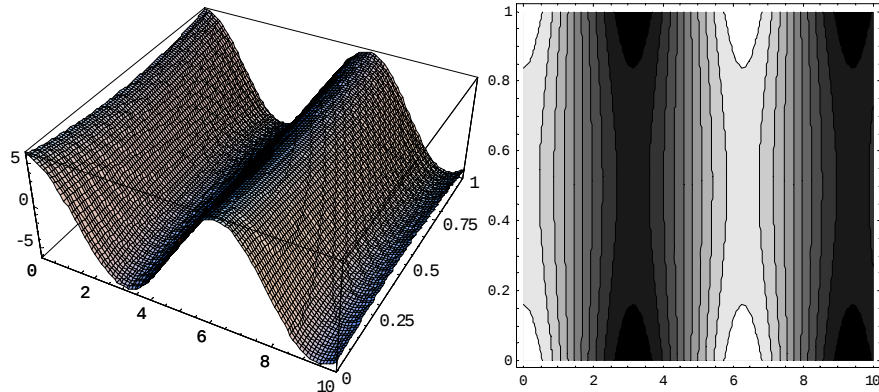
$$\begin{aligned}
w_2(x, y, t, \xi, \tau) &= A_1 \exp(\xi - a_1 \tau) \Big\{ [\exp(k\alpha y) + f_1 \exp(-k\alpha y)] \cos(\omega t - kx) - \\
& - \left(1 - \frac{v_{sh} a_1}{c_i^2}\right) \frac{y}{\alpha} [\exp(k\alpha y) - f_1 \exp(-k\alpha y)] \sin(\omega t - kx) \Big\}, \\
\Phi_2(x, y, t, \xi, \tau) &= A_1 \exp(\xi - a_1 \tau) \Big\{ \left[\frac{\alpha c_{44}(1+\chi)}{2e_{15} \text{sh}(kh)} [(\exp(-kh) - \exp(k\alpha h) + \right. \\
& + (\exp(-k\alpha h) - \exp(-kh))f_1) \exp(ky) + (\exp(kh) - \exp(k\alpha h) + \\
& + (\exp(-k\alpha h) - \exp(kh))f_1) \exp(-ky)] + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (\exp(k\alpha y) + f_1 \exp(-k\alpha y)) \Big] \times \\
& \times \cos(\omega t - kx) - \left[\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11} \alpha} \left(1 - \frac{v_{sh}}{c_i^2} a_1\right) (\exp(k\alpha y) - f_1 \exp(-k\alpha y)) + \right. \\
& + \frac{\alpha c_{44}(1+\chi)}{2e_{15} \text{sh}(kh)} [(\exp(-kh) - \exp(k\alpha h) + (\exp(-k\alpha h) - \exp(-kh))f_1) \times \\
& \times \exp(ky) - (\exp(kh) - \exp(k\alpha h) + (\exp(-k\alpha h) - \exp(kh))f_1) \exp(-ky)] \Big] \times
\end{aligned}$$

$$\times y \sin(\omega t - kx) \} \quad (2.18)$$

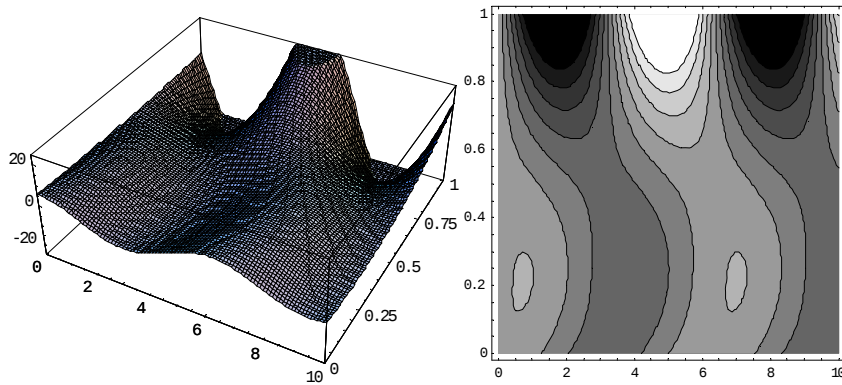
$$\Phi_2^{(a)}(x, y, t, \xi, \tau) = A_1 \exp(\xi - a_1 \tau) \frac{\varepsilon_{11} \alpha c_{44} (1 + \chi)(f_1 - 1)}{e_{15} \varepsilon_0} \left[\cos(\omega t - kx) - \right. \\ \left. - y \sin(\omega t - kx) \right] \exp(ky) \quad \text{и для } y < 0$$

$$\Phi_2^{(a)}(x, y, t, \xi, \tau) = A_1 \exp(\xi - a_1 \tau) \times \\ \times \frac{\varepsilon_{11} \alpha c_{44} (1 + \chi) [\exp(k\alpha h) - f_1 \exp(-k\alpha h)]}{e_{15} \varepsilon_0 \exp(-kh)} \left[\cos(\omega t - kx) + \right. \\ \left. + y \sin(\omega t - kx) \right] \exp(-ky) \quad \text{и для } y > h$$

Из сравнения численных результатов (фиг. 1а и 1б) очевидно, что возникает запаздывающая гармоника электроактивного сдвигового перемещения, отстающая из основного волнового сигнала фазой на $(3/2\pi)$ и неоднородность волны в глубь полупространства, имеет иной характер по сравнению с основным волновым сигналом. Запаздывающая гармоника волны, в отличие от гармонического входного сигнала, имеет максимальную амплитуду как на поверхности $y = h$, так и локальную амплитуду на глубине $y = (\lambda/2\pi\alpha)$ от границы $y = 0$ для каждой волны длиной λ .



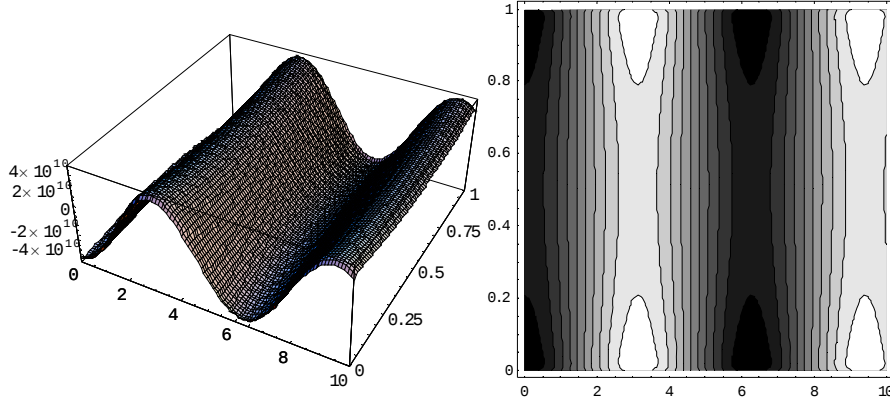
а) перемещение (W_1) в первом приближении



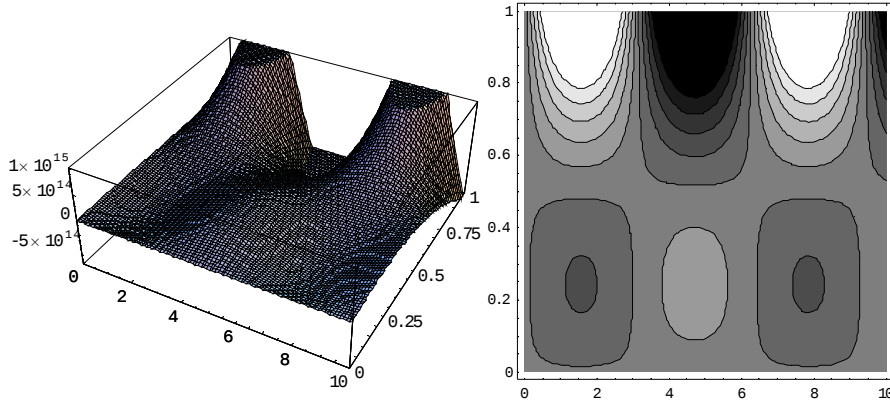
б) перемещение (W_2) во втором приближении

Фиг. 1

Такую же сравнительную картину имеем при сопоставлении численных расчетов для потенциала электрического поля (фиг. 2а и 2б).



а) потенциал электрического поля (Φ_1) в первом приближении



б) потенциал электрического поля (Φ_2) во втором приближении

Фиг. 2

Из (2.13) следует, что в этом случае генерируется также плоско-деформированное волновое состояние.

Во-первых, здесь (фиг.3) возникает акустическое детектирование (нераспространяющаяся волна), обусловленное взаимодействием гармоник электроупругой сдвиговой волны

$$u_{11}(x, y, t, \xi, \tau) = 0,$$

$$v_{11}(x, y, t, \xi, \tau) = R_1^2 B_1 \left[-\exp(2k\alpha y) + f_1^2 \exp(-2k\alpha y) \right],$$

$$\text{где } B_1 = \left[(1/2\alpha) + (\alpha/2) - (c_{1r}^2/\alpha c_l^2) \right], \quad R_1^2 = (2\pi A_1^2/\lambda).$$

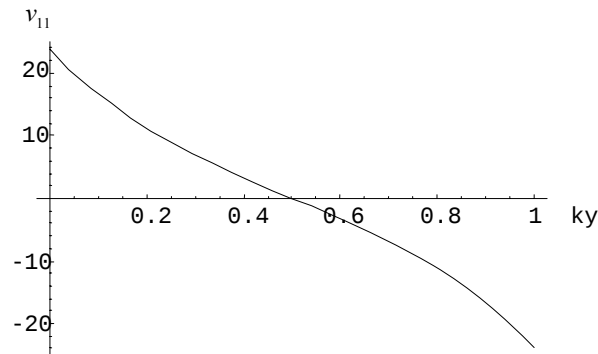
Акустическое детектирование, как и следовало ожидать, по толщине слоя имеет симметричное по отношению к срединной плоскости слоя распределение.

Распространяющееся плоско-деформированное поле (волна Рэлея) определяется из краевой задачи (2.6), (2.9) с учетом (2.13) и (2.18):

$$u_2(x, y, t, \xi, \tau) = \left[C_1 \exp(2kv_1 y) + C_2 \exp(-2kv_1 y) + C_3 \exp(2kv_2 y) + C_4 \exp(-2kv_2 y) + C_5 \left(\exp(2k\alpha y) + f_1^2 \exp(-2k\alpha y) \right) + C_6 \right] \sin(2(\omega t - kx)),$$

$$v_2(x, y, t, \xi, \tau) = \left[v_1 C_1 \exp(2k v_1 y) - v_1 C_2 \exp(-2k v_1 y) + \frac{C_3}{v_2} \exp(2k v_2 y) - \frac{C_4}{v_2} \exp(-2k v_2 y) + C_5 \alpha (\exp(2k \alpha y) - f_1^2 \exp(-2k \alpha y)) \right] \cos(2(\omega t - kx)),$$

где выражения коэффициентов $C_i(c_{ij}, e_{kij}, \delta_{jk}, A_1, \lambda)$ не приводятся из-за их громоздкости.



Фиг. 3

Неоднородность плоско-деформированного волнового поля по толщине пьезоэлектрического слоя в общем случае может образоваться вследствие взаимодействия основных форм волнового сигнала плоской деформации или первичного волнового сигнала электроактивной антиплоской деформации. В данном случае при отсутствии сигнала плоской деформации, плоско-деформированное волновое поле возникает за счет искажения первичного волнового сигнала электроактивной антиплоской деформации и взаимодействия основных форм этого же волнового сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С., Хачатрян В.М. Особенности учёта геометрической нелинейности при распространении электроупругой волны конечной амплитуды в пьезоэлектрической среде. //Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. № 2. С. 13-23.
2. Аветисян А.С. Поверхностные электроупругие волны конечной амплитуды в пьезоэлектрической среде.//Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т. 48. № 2. С. 27-37.
3. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т. 38. №1. С.12-19.
4. Белакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах.Новосибирск: Наука, 1982.
5. Kalyanasundaram N. Nonlinear surface acoustic waves on an isotropic solid. //Int. J. Eng. Sci., 1981. V. 19. № 1. PP. 279-286.
6. Lardner R.W. Nonlinear surface acoustic waves on an elastic solid of general anisotropy.// J. Elast., 1986. V. 16. № 1. PP. 63-75.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.12.2008

УДК 532.529.6: 536.246

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ТЕРМИЧЕСКИ
РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ
В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Оганян Г.Г.

Ключевые слова: пузырек, жидкость, межфазный теплообмен, нелинейность, пульсации.

Key words: bubble, liquid, interphase heat transfer, nonlinearity, oscillations.

Գ.Գ. Օհանյան

Անստեղմելի մածուցիկ հեղուկում ջերմառելարացվող գնդաձև գազային պղպջակի
նշ գծային հարկադիր զարկումները

Միջփուլային ջերմափոխանակության դեպքում դիտարկված է մենակյաց պղպջակի հարկադիր զարկումների վարքը: Ցույց է տրված, որ երբ հարկադիր ուժի մեծությունը գերազանցում է կրիտիկականին՝ ոչ գծայնության ազդեցությունը հանգեցնում է հաստատված զարկումների ամպլիտուդայի թռիչքաձև փոփոխությանը: Այդ երևույթի իրականացումն բացատրվում է նրանով, որ հարկադիր հաճախությունների որոշակի արժեքների դեպքում հեղուկ-պղպջակ համակարգի հավասարակշռված կայուն վիճակը անցում է կատարում մեկ այլ հավասարակշռված կայուն վիճակի:

G.G. Oganyan

The nonlinear forced pulsation of thermally relaxing gas bubble of spherical form
in a noncompressible viscous liquid

The influence of nonlinearity on forced pulsations of bubble is investigated. The account of nonlinearity is bring to variations of amplitudes of steady pulsations for stabilities states of equilibrium of system fluid– bubble and for values of forced force more than critical. Such phenomenon is realized in some values of forced frequencies, when system transmits from one state of equilibrium to another, also stable.

Исследован квазиадиабатический режим вынужденных осцилляций пузырька при наличии межфазного теплообмена между ними и жидкостью. Показано, что в случае мелкого пузырька эффекты вязкости и теплообмена могут быть одного порядка малости, в то время как для крупного межфазный теплообмен является доминирующим в общем механизме диссипации. При наличии в жидкости источника возбуждения гармонических колебаний в системе жидкость–пузырек возможна реализация явлений резонанса. В случае главного резонанса, возникающего на вынуждающей частоте, равной собственной частоте пузырька, в термодинамической системе может реализоваться равновесное состояние, в которой пульсации являются установившимися. Показано, что при значениях вынуждающей силы, большей критической, для состояний устойчивого равновесия учет нелинейности приводит к явлениям скачка и срыва амплитуд установившихся пульсаций, когда при определенных вынуждающих частотах происходит скачкообразное изменение их значений. При таких значениях вынуждающих частот происходит переход системы от одного состояния устойчивого равновесия к другому, также устойчивому.

В реальной системе жидкость–газ пузырьковой структуры имеет место необратимый межфазный теплообмен. Тепловое и динамическое взаимодействия одиночного газового пузырька с безграничной несжимаемой жидкостью как в линейной, так и в нелинейной постановках исследованы многими авторами, в частности, в [1-5]. Влияние малых несферических колебаний системы на радиальные пульсации пузырька изучено в [6]. Линейная задача об установившихся вынужденных малых пульсациях в акустическом поле рассмотрена в [1].

1. Исходные уравнения. Пусть в безграничной вязкой несжимаемой жидкости находится одиночный сферически симметричный пузырек с постоянной массой

калорически совершенного газа. Полагается, что между пузырьком и жидкостью происходит теплообмен, который проявляется, в основном, через процесс необратимого межфазного взаимодействия. Свободные осцилляции такого пузырька в нелинейной постановке исследованы в [5], а вынужденные будут описываться уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{d^2 R}{dt^2} + \omega_{ar}^2 R + 2\delta^* \frac{dR}{dt} - \varepsilon \frac{3n+1}{2} \omega_{ar}^2 R^2 + \varepsilon R \frac{d^2 R}{dt^2} + \varepsilon \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{\omega_{ar}^2}{3\gamma} p_1 \right] = \\ & = -\frac{1}{t_T} \left[\frac{d^2 R}{dt^2} + \omega_{ir}^2 R + 2\delta^* \frac{dR}{dt} - \varepsilon (n+1) \omega_{ir}^2 R^2 + \varepsilon R \frac{d^2 R}{dt^2} + \varepsilon \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{\omega_{ir}^2}{3} p_1 \right] \\ & t_T = \frac{2}{3\gamma} \frac{R_0^2}{\lambda_2 \text{Nu}}, \quad \omega_{ar}^2 = \gamma \omega_{ir}^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_1} \frac{1}{R_0^2}, \quad \delta^* = \frac{2\mu}{\rho_1} \frac{1}{R_0^2}, \quad 1 \leq n \leq \gamma. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь t – время, R – безразмерный возмущенный радиус пузырька, λ_2 и n , γ – температуропроводность, и, соответственно, показатели политропы и адиабаты газа, p – давление, μ и ρ_1 – динамическая вязкость и плотность жидкости, Nu – безразмерное число Нуссельта, характеризующее интенсивность межфазного теплообмена, ω_{ar} – резонансная частота Миннаерта, ε – безразмерный малый параметр, характеризующий отклонение возмущенного радиуса от своего значения в состоянии термодинамического равновесия (покоя). Индекс «0» отнесён к исходному состоянию покоя, t_T – время тепловой релаксации, p_1 – безразмерная сила, приложенная вдали от пузырька к жидкости.

При адиабатическом режиме ($n = \gamma$) пульсаций восстановление термодинамического равновесия длится бесконечно долго в сравнении с макроскопическим, например, периодом свободных пульсаций пузырька $t = 2\pi/\omega_{ar}$, т.е. $t_T \gg t$ ($\text{Nu} \rightarrow 0$) и тогда для рассмотрения следует оставить лишь левую часть уравнения (1.1). При изотермическом режиме ($n = 1$) восстановление термодинамического равновесия происходит мгновенно, т.е. $t_T \ll t$ ($\text{Nu} \rightarrow \infty$) и в (1.1) необходимо рассматривать только его правую часть. В обоих предельных режимах можно пренебречь эффектом межфазного теплообмена ввиду его практического отсутствия.

Квазиадиабатический режим. Положим $n = \gamma$, $t_T > t$, $\text{Nu} \neq 0$, т.е. предполагается, что в рассматриваемой системе жидкость–пузырек происходит необратимый межфазный теплообмен, пусть малой интенсивности. Для оценки порядков величин диссипативных слагаемых в (1.1) уравнение следует представить в безразмерной форме, что достигается введением переменной $t' = \omega_{ar} t$. Выясняется,

что в силу требования слабого затухания пульсаций за счет вязкости и теплообмена при мелком пузырьке влияние каждого эффекта на формирование общего механизма диссипации может быть одного порядка малости, а их совместное воздействие на величину приведенной собственной частоты пульсаций пренебрежимо мало:

$$\frac{\delta^*}{\omega_{ar}} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} \sim \varepsilon, \quad R_0 \sim \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{4}{3\gamma}} \sqrt{\frac{\mu}{p_0} \frac{\mu}{\rho_1}}. \quad (1.2)$$

Примем, что вдали от пузырька в жидкости имеется источник возбуждения гармонических колебаний с заданными частотой ω и амплитудой F , так что $p_1 = 3\gamma F \cos \omega t$. Тогда из (1.1) следует нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \omega_{ar}^2 \dot{R} + \varepsilon 2\delta \ddot{R} - \varepsilon 2\alpha R \dot{R} + \varepsilon 4\dot{R} \ddot{R} + \varepsilon R \ddot{R} + \varepsilon \frac{1}{\gamma} \frac{\omega_{ar}^2}{t_T} R - \varepsilon^2 \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{\omega_{ar}^2}{t_T} R^2 + \\ + \varepsilon^2 \frac{1}{t_T} R \ddot{R} + \varepsilon^2 \frac{3}{2} \frac{1}{t_T} \dot{R}^2 = \omega_{ar}^2 \omega F \sin \omega t - \varepsilon \frac{\omega_{ar}^2}{t_T} F \cos \omega t, \\ \delta = \delta^* + \frac{1}{2} \frac{1}{t_T}, \quad \alpha = \frac{3\gamma+1}{2} \omega_{ar}^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь точки над искомой функцией R означают кратности дифференцирования по t . Решение уравнения (1.3) ищется в виде ряда:

$$R = r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \dots, \quad r_0 = a \cos \varphi, \quad \varphi = \omega_{ar} t + \beta, \quad (1.4)$$

где r_0 – решение его линейного варианта без учета вязкости, теплообмена и внешней вынуждающей силы, в котором амплитуда a и фаза β – постоянные. При вынужденных пульсациях возникают резонансные явления и посему для нахождения значений вынуждающих частот, при которых они проявляются, к уравнению (1.3) прямо применяется разложение (1.4), откуда методом последовательных приближений определяются функции r_1 и r_2 . Результаты выкладок свидетельствуют, что эти функции, наряду с секулярными членами, содержат выражения, знаменатели которых могут стать сколь угодно малыми. Отсюда находятся значения резонансных частот $\omega \approx \omega_{ar}$ и $\omega \approx 2\omega_{ar}$, $\omega \approx \omega_{ar}/2$, соответствующие главному (основному) и вторичным резонансам. Построенное таким путем приближенное решение, очевидно, не является равномерно пригодным разложением функции R .

2. Главный резонанс на частоте $\omega \approx \omega_{ar}$. Его исследование будет проводиться методом Крылова-Боголюбова-Митропольского [7,8], свободным от дефекта прямого разложения. Примем, что величина внешней вынуждающей силы мала: $F \sim \varepsilon^2 f$, $f \sim 1$. Полагается, что величины a и β из (1.4) теперь являются

не постоянными, а медленно меняющимися по t функциями и потому их производные можно представить в виде разложений по степеням ε :

$$\dot{a} = \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots, \quad \dot{\beta} = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \dots, \quad \dot{\varphi} = \omega_{ar} + \dot{\beta}. \quad (2.1)$$

Здесь $A_i, \phi_i (i=1,2)$ – коэффициенты, определяемые в процессе построения приближенного решения. Согласно методу, в качестве новых независимых переменных принимаются a, φ и, аналогично [7,8], в рассмотрение вводятся преобразования, которые в силу (2.1) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \omega_{ar} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varepsilon \left(A_1 \frac{\partial}{\partial a} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \varepsilon^2 \left(A_2 \frac{\partial}{\partial a} + \phi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \omega_{ar}^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \varepsilon 2\omega_{ar} \left(A_1 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} + \phi_1 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \varepsilon^2 \left[\left(\phi_1^2 + 2\omega_{ar}\phi_2 \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(A_1\phi_1 + \omega_{ar}A_2) \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} + A_1 \left(A_1 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + A_1' \frac{\partial}{\partial a} + \phi_1' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] + \dots \\ \frac{d^3}{dt^3} &= \omega_{ar}^3 \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + \varepsilon 3\omega_{ar}^2 \left(\phi_1 \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + A_1 \frac{\partial^3}{\partial a \partial \varphi^2} \right) + \varepsilon^2 3\omega_{ar} \left[\left(\phi_1^2 + \omega_{ar}\phi_2 \right) \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + \right. \\ &\quad \left. + (2A_1\phi_1 + \omega_{ar}A_2) \frac{\partial^3}{\partial a \partial \varphi^2} + A_1 \left(A_1 \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \varphi} + A_1' \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} + \phi_1' \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где штрихи над A_1, ϕ_1 означают дифференцирование по a . Подставляя разложение (1.4) в преобразованное посредством (2.2) уравнение (1.3), приравняем слагаемые при одинаковых степенях ε . В нулевом приближении придем к линейному однородному уравнению

$$\frac{\partial^3 r_0}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} = 0, \quad r_0(a, \varphi) = a \cos \varphi + r_0^*(a) \quad (2.3)$$

Функция $r_0^*(a)$ определится из требования перехода (2.3) в решение нулевого приближения, получаемого из уравнения без учета теплообмена, когда порядок уравнения (1.3) понижается на единицу. Тогда $r_0^*(a) = 0$. Из первого приближения (порядка ε) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 r_1}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} &= -\frac{\phi_1}{\omega_{ar}} \left(3 \frac{\partial^3 r_0}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} \right) - \frac{A_1}{\omega_{ar}} \left(3 \frac{\partial^3 r_0}{\partial a \partial \varphi^2} + \frac{\partial r_0}{\partial a} \right) - 2 \frac{\delta^*}{\omega_{ar}} \frac{\partial^2 r_0}{\partial \varphi^2} - \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} r_0 + 2 \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} r_0 \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} - 4 \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 r_0}{\partial \varphi^2} - r_0 \frac{\partial^3 r_0}{\partial \varphi^3} \end{aligned}$$

Подстановка решения (2.3) дает

$$\frac{\partial^3 r_1}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} = -2 \frac{\phi_1}{\omega_{ar}} a \sin \varphi + \frac{2}{\omega_{ar}} \left[A_1 + \left(\delta^* + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{t_T} \right) a \right] \cos \varphi - \frac{2\alpha + 5\omega_{ar}^2}{2\omega_{ar}^2} a^2 \sin 2\varphi$$

Решение однородного уравнения будет включено в формулу (2.3) и потому не приводится. Из требования отсутствия секулярных членов в выражении решения $r_1(a, \varphi)$ определяются коэффициенты

$$\phi_1 = 0, \quad A_1 = -\omega_{ar} \delta_1 a, \quad \delta_1 = \frac{1}{\omega_{ar}} \left(\delta^* + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{t_T} \right) \quad (2.4)$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$r_1 = -\frac{2\alpha + 5\omega_{ar}^2}{\omega_{ar}^2} \frac{a^2}{12} \cos 2\varphi + r_1^*(a), \quad (2.5)$$

где функция r_1^* определится ниже. Из второго (порядка ε^2) приближения выявляется уравнение, куда подставляются решения (2.3)–(2.5) и вводится в рассмотрение параметр линейной расстройки частоты $\sigma = \omega_{ar} - \omega$, так что $\omega t = \varphi - (\sigma t + \beta)$. В результате выкладок получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 r_2}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial r_2}{\partial \varphi} = & 2 \left[\frac{A_1}{\omega_{ar}} - \frac{f}{2} \sin(\sigma t + \beta) \right] \cos \varphi - 2a \left[\frac{\phi_2}{\omega_{ar}} - \frac{3\gamma(\gamma+2)}{16} a^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3\gamma+2}{2} r_1^* + \frac{1}{2} \delta_1 \delta_3 - \frac{f}{2a} \cos(\sigma t + \beta) \right] \sin \varphi - \frac{A_1}{\omega_{ar}} \left(\frac{dr_1^*}{da} + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{t_T} \frac{r_1^*}{A_1} - \right. \\ & \left. - \frac{3\gamma}{2} a - \frac{\gamma+2}{4\gamma} \frac{1}{t_T} \frac{a^2}{A_1} \right) + 2(\gamma-1) \delta_2 a^2 \cos 2\varphi + \frac{9(\gamma+2)(\gamma+4)}{8} a^3 \sin 3\varphi, \\ \delta_2 = & \frac{\delta^*}{\omega_{ar}} + \frac{2\gamma+1}{2\gamma-1} \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{\omega_{ar} t_T}, \quad \delta_3 = \frac{\delta^*}{\omega_{ar}} + \frac{\gamma+3}{2\gamma} \frac{1}{\omega_{ar} t_T}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отсюда, требуя отсутствие секулярного члена в решении r_2 , приходим к уравнению

$$\frac{dr_1^*}{da} - E \frac{r_1^*}{a} - \frac{3\gamma}{2} \left(1 - \frac{\gamma+2}{6\gamma} E \right) a = 0, \quad E = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} \frac{1}{\delta_1},$$

общим решением которого является функция

$$r_1^* = \frac{3\gamma}{4} \left(1 + \frac{\gamma-1}{3\gamma^2} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} \frac{1}{\delta_4} \right) a^2, \quad \delta_4 = \frac{\delta^*}{\omega_{ar}} - \frac{2-\gamma}{2\gamma} \frac{1}{\omega_{ar} t_T}. \quad (2.7)$$

Одновременно, согласно тому же требованию и формуле (2.7), из уравнения

(2.6) определяются коэффициенты

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{\omega_{ar}} &= \frac{f}{2} \sin(\sigma t + \beta), \quad \frac{\phi_2}{\omega_{ar}} = -Ba^2 - \frac{1}{2} \delta_1 \delta_3 + \frac{f}{2a} \cos(\sigma t + \beta), \\ B &= \frac{3\gamma(5\gamma+2)}{16} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{3\gamma+2}{5\gamma+2} \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} \frac{1}{\delta_4} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Частное решение уравнения (2.6) приводиться не будет. После подстановки формул (2.4), (2.8) в разложения (2.1) приходим к неавтономной системе уравнений, которая заменой $v = \sigma t + \beta$ сведётся к автономной:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{\omega_{ar}} &= -\delta_1 a + \varepsilon \frac{F}{2} \sin v, \quad F = \varepsilon^2 f, \\ \frac{\dot{v}}{\omega_{ar}} &= \sigma_1 - \frac{1}{2} \delta_1 \delta_3 - Ba^2 + \varepsilon \frac{F}{2a} \cos v, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{\omega_{ar}} = 1 - \frac{\omega}{\omega_{ar}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь малый параметр ε отнесен к величинам a , δ^*/ω_{ar} и $1/(\omega_{ar} t_T)$.

3. Стационарный режим пульсаций. При фиксированных параметрах $\sigma_1, \delta_1, \delta_3$ и F численное интегрирование системы (2.9) с произвольными начальными условиями, аналогичное проведенному в [7,8], указывает, что при $t \rightarrow \infty$ $a(t) \rightarrow a_0$, $v(t) \rightarrow v_0$. Тогда в термодинамической системе жидкость-пузырек устанавливается стационарный режим пульсаций, реализуемый в состоянии равновесия, которое характеризуется параметрами a_0 и v_0

$$\delta_1 a_0 = \varepsilon \frac{F}{2} \sin v_0, \quad (Ba_0^2 - \sigma^*) a_0 = \varepsilon \frac{F}{2} \cos v_0, \quad \sigma^* = \sigma_1 - \frac{1}{2} \delta_1 \delta_3. \quad (3.1)$$

Исследуем систему (2.9) на устойчивость к малым возмущениям вблизи состояния, описываемого уравнениями (3.1).

Полагая в (2.9) $a = a_0 + a'$, $v = v_0 + v'$, где штрихи отнесены к малым возмущениям, проведем линеаризацию и в получаемой системе уравнений решения будем искать в виде

$$a'(t) = B_1 e^{\Omega t}, \quad v'(t) = B_2 e^{\Omega t}, \quad B_1, B_2, \Omega = \text{const}.$$

Опуская стандартные выкладки для нахождения величины Ω , получим

$$\Omega_{1,2}/\omega_{ar} = -\delta_1 \pm K, \quad K = \sqrt{(Ba_0^2 - \sigma^*)(\sigma^* - 3Ba_0^2)}.$$

Здесь и далее индексы 1, 2 отнесены к верхнему и нижнему знакам соответственно. Отсюда определяются критерии устойчивости равновесного состояния, описываемого соотношениями (3.1):

$$\sigma^* < Ba_0^2, \quad \sigma^* > 3Ba_0^2, \quad \Omega_1/\omega_{ar} = -\delta_1 + iK \quad (3.2)$$

$$Ba_0^2 \leq \sigma^* \leq 3Ba_0^2, \quad \sum = \sigma^{*2} - 4Ba_0^2\sigma^* + 3B^2a_0^4 + \delta_1^2 > 0, \quad \Omega_{1,2} < 0 \quad (3.3)$$

Если же реализуются значения

$$Ba_0^2 < \sigma^* < 3Ba_0^2, \quad \sum < 0, \quad (3.4)$$

то $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 < 0$ и состояние равновесия системы (2.9) неустойчиво к малым возмущениям.

Из системы (3.1) можно в неявном виде получить зависимость a_0 от σ^*

$$(Ba_0^2)^3 - 2(Ba_0^2)^2\sigma^* + Ba_0^2(\sigma^{*2} + \delta_1^2) = B(\varepsilon F/2)^2, \quad (3.5)$$

называемую [7-9] амплитудно-частотной характеристикой, а ее графическое изображение – резонансной кривой. Из выражения для производной $da_0/d\sigma^*$ можно получить уравнения вертикальных касательных и определить максимальную амплитуду a_{0m}

$$\sigma_{1,2}^* = 2Ba_0^2 \pm \sqrt{B^2a_0^4 - \delta_1^2}, \quad Ba_{0m}^2 = \sigma_m^*.$$

Требование совпадения касательных $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_*^*$ и последующее комбинирование с (3.5) позволяют получить критические значения амплитуды a_{0*} , расстройки частоты σ_*^* и вынуждающей внешней силы F_*

$$F_*^2 = \frac{8}{B}\delta_1\left(\frac{\delta_1}{\varepsilon}\right)^2, \quad Ba_{0*}^2 = \delta_1, \quad \sigma_*^* = 2\delta_1, \quad Ba_{0m}^2 = 2\delta_1\left(\frac{F}{F_*}\right)^2.$$

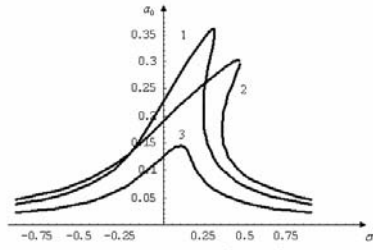
Отметим, что в отсутствие теплообмена всегда $B > 0$, в то время как при его наличии, в силу определения δ_4 из (2.7), величина B может стать отрицательной в зависимости от интенсивности (закона) теплообмена. В этом случае формула для F_* сохранит силу, если B заменить на $|B|$.

Для каждого сорта газа и размера пузырька существует присущее только им свое значение F_* . В последующих вычислениях все расчеты будут проводиться при значении $P_0 = 0.1$ МПа исходного давления.

На фиг. 1 приведены резонансные кривые, отнесенные к пульсирующему в воде мелкому воздушному пузырьку при разных значениях вынуждающей силы F .

Кривая 1 соответствует случаю отсутствия ($t_T \rightarrow \infty$) теплообмена. Кривые 2 и 3 построены при наличии теплообмена, описываемого законом

$$\delta^* = \frac{2-\gamma}{2\gamma} \frac{1}{t_T}, \quad \text{Nu} = \frac{8}{3\gamma} \frac{1}{2-\gamma} \frac{\mu}{\rho_1} \frac{1}{\lambda_2} \quad (3.6)$$



Фиг. 1. Резонансные кривые пульсирующих в воде мелких ($R_0 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}$) воздушных пузырьков.

Кривая 1 –случай отсутствия теплообмена при $B = 2.36, F/F_* = 1.25, F_* = 0.575, \delta_1 = 0.098$.

Кривая 2 ($F = 1.25F_* = 0.89$) и 3 ($F = 0.6F_* = 0.43$) –наличие теплообмена (3.6) при $B = 4.95, \delta_1 = 0.144$.

Кривые 1 и 2, построенные при значениях $F > F_*$, характерны неоднозначностью, которая отсутствует на кривой 3, построенной при $F < F_*$. Степень искривленности кривых, приводящая к неоднозначности, обусловлена нелинейностью, количественно выражаемой через отношение F/F_* , а именно, чем больше единицы величина F/F_* , тем сильнее проявляется эффект нелинейности. Из сопоставления кривых 1 и 2 следует, что учет теплообмена уменьшает максимальное значение амплитуды a_0 , что типично при наличии не только мелкого, но и крупного пузырька. Интересно, что подобные 2 и 3 резонансные кривые приведены в [10] при исследовании стационарных колебаний вязкоупругой квадратной пластинки из винипласта.

В силу специфики рассматриваемой системы жидкость-пузырек, помимо (1.2), могут иметь место оценки

$$\frac{\delta^*}{\omega_{ar}} \sim \varepsilon^3, \quad \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} \sim \varepsilon, \quad R_0 = \frac{1}{\varepsilon^m} \sqrt{\frac{4}{3\gamma}} \sqrt{\frac{\mu}{p_0} \frac{\mu}{\rho_1}}, \quad m \geq 2 \quad (3.7)$$

которые характерны для крупного пузырька. Увеличение поверхности, контактирующей с жидкостью, способствует улучшению и усилению межфазного теплообмена и потому эффектом вязкости можно пренебречь. Такой вывод согласуется с утверждением [1] о доминирующем вкладе межфазного теплообмена в формировании общего механизма диссипации смеси при наличии крупных пузырьков. В соответствии с (3.6), можно полагать, что теплообмен в них происходит по закону ($1 < M < 10$)

$$\frac{1}{\omega_{ar} t_T} = M \left(\frac{\delta^*}{\omega_{ar}} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{Nu} = M \left(\frac{4}{3\gamma} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \left(\sqrt{\frac{p_0}{\rho_1} \frac{R_0}{\lambda_2}} \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\frac{\mu}{\rho_1} \frac{1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (3.8)$$

Влияние сорта газа на изменения амплитуд пульсирующих в воде крупных

пузырьков равного радиуса при одинаковых значениях вынуждающей силы F показано на фиг. 2. Кривая 1 отнесена к пузырьку с воздухом, кривая 2 – с гелием, для которых теплообмен происходит по закону (3.8) с $M = 6$, $m = 3$. Поскольку коэффициент затухания $\delta_1 = 0.117$ гелиевых пузырьков превосходит тот же параметр воздушных $\delta_1 = 0.086$, постольку с переходом от воздуха к гелию затухание пульсации усиливается.

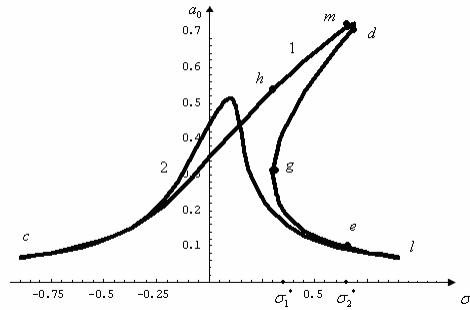
Координаты (σ_1^*, a_{0g}) и (σ_2^*, a_{0d}) точек касания вертикальных касательных с резонансной кривой вычисляются по формулам

$$(Ba_0^2)^3 \pm (Ba_0^2)^2 \sqrt{B^2 a_0^4 - \delta_1^2} = \delta_1^3 (F/F_*)^2, \quad \sigma_{1,2}^* = 2Ba_0^2 \pm \sqrt{B^2 a_0^4 - \delta_1^2} \quad (3.9)$$

При заданных значениях δ_1, F и Ba_0^2 соответствующее им значение σ^* определится из уравнения резонансной кривой (3.5), откуда получим также выражение для производной функции $a_0(\sigma^*)$

$$\sigma^* = Ba_0^2 \pm \delta_1 \sqrt{\frac{2\delta_1}{Ba_0^2} \frac{F^2}{F_*^2} - 1}, \quad \frac{da_0}{d\sigma^*} = \frac{a_0(Ba_0^2 - \sigma^*)}{\sum} \quad (3.10)$$

где явный вид функции $\sum$ приведен в (3.3).



Фиг. 2. Резонансные кривые пульсирующих в воде крупных ($R_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$) пузырьков при теплообмене

(3.8) и одинаковых значениях $F = 1.25$.

Кривая 1 – воздух при $F_* = 0.626$, $B = 1.32$, $\delta_1 = 0.086$, кривая 2 – гелий при

$F_* = 1.92$, $B = -0.374$, $\delta_1 = 0.117$.

Покажем, что с точки зрения устойчивости к различным участкам резонансной кривой (3.5) соответствуют разные состояния равновесия рассматриваемой термодинамической системы. Доказательство проведем на примере кривой 1 фиг.2, которая, как для мелкого, так и для крупного пузырька, является типичной при значениях вынуждающей силы $F/F_* > 1$.

На участке cm , где $m(\sigma_m^*, a_{om})$ – точка максимума, имеем

$$\sigma^* \leq \sigma_m^* = Ba_{0m}^2, \quad Ba_0^2 \leq Ba_{0m}^2; \quad \sigma^* \leq Ba_0^2.$$

Отсюда, в силу критерия (3.2), можно заключить, что состояния равновесий, характеризуемые координатами точек ветви cm , устойчивы к малым возмущениям. На участке md , где $d(\sigma_2^*, a_{0d})$ – точка касания, функция $a_0(\sigma^*)$ убывает и, в силу (3.9), (3.10), на этом участке имеем

$$\frac{da_0}{d\sigma^*} < 0, \quad Ba_0^2 < Ba_{0m}^2 = \sigma_m^* < \sigma^* \leq \sigma_2^* < 3Ba_0^2 < 3Ba_{0d}^2, \quad \Sigma > 0.$$

Согласно критерию (3.3), отсюда следует вывод, что состояния равновесий устойчивы. На участке dg , где $g(\sigma_1^*, a_{0g})$ – точка касания, функция $a_0(\sigma^*)$ возрастает, так что

$$\frac{da_0}{d\sigma^*} > 0, \quad \sigma_1^* < \sigma^* < \sigma_2^*, \quad \Sigma = (\sigma^* - \sigma_1^*)(\sigma^* - \sigma_2^*) < 0, \quad \sigma^* > Ba_0^2.$$

Поскольку в силу (3.9) $\sigma_2^* < 2Ba_0^2 < 3Ba_0^2$, постольку диапазон изменения σ^* предстанет в виде $Ba_0^2 < \sigma^* < 3Ba_0^2$. Тогда, согласно (3.4), можно заключить, что все состояния равновесий, описываемые координатами точек ветви dg , неустойчивы к малым возмущениям. На участке ge , где $e(\sigma_2^*, a_{0e})$ – точка пересечения вертикальной касательной с резонансной кривой, функция $a_0(\sigma^*)$ убывает, при этом, в силу (3.10), выполняются соотношения

$$\frac{da_0}{d\sigma^*} < 0, \quad \sigma_1^* < \sigma^* < \sigma_2^*, \quad \Sigma < 0, \quad \sigma^* < Ba_0^2$$

из которых последнее совпадает с критериями (3.2). Таким образом, координатам точек ветви ge соответствуют параметры состояния устойчивого равновесия. На ветви el выполняется критерий устойчивости (3.3) к малым возмущениям.

Перейдем к изучению поведения амплитуды a_0 установившихся пульсаций при перемещении по кривой 1 фиг. 2. Числовые параметры, характеризующие малые пульсации воздушного пузырька в воде при исходных данных $R_0 = 1 \cdot 10^{-4}$ м, $\delta_1 = 0.086$, $B = 1.32$, $F/F_* = 2$, будут вычислены по формулам (3.9), (3.10).

Пусть первоначально частота ω вынуждающей силы больше собственной, т.е. $\omega > \omega_{ar}$. Перемещение по резонансной кривой вдоль положительного направления оси σ^* , в силу определения (2.9), соответствует уменьшению ω . На ветви cd координаты любой точки являются характерными параметрами некоего состояния устойчивого равновесия, так что передвижение по ней приводит к росту амплитуды до максимального значения $a_{0m} = 0.722$ и последующему незначительному ее

уменьшению. По достижении точки касания $d(\sigma_2^* = 0.69, a_{0d} = 0.72)$ происходит скачкообразный переход в точку $e(\sigma_2^* = 0.69, a_{0e} = 0.09)$, поскольку координатам ветви dg соответствуют параметры состояния неустойчивого равновесия. Таким образом, термодинамическая система (3.1) из состояния устойчивого равновесия с параметрами (σ_2^*, a_{0d}) переходит в такое же состояние, однако, с иными (σ_2^*, a_{0e}) параметрами, вследствие чего реализуется явление сброса (срыва) амплитуды. Далее перемещение происходит по ветви el , координатам точек которой соответствуют параметры состояния устойчивого равновесия, при этом амплитуда a_0 плавно уменьшается.

Пусть теперь первоначально имеем $\omega < \omega_{ar}$ и тогда перемещение по кривой вдоль отрицательного направления оси σ^* соответствует увеличению частоты ω вынуждающей силы F . Ветвь lg соответствует состоянию устойчивого равновесия, поэтому, перемещаясь по ней, a_0 монотонно возрастает. По достижении точки $g(\sigma_1^* = 0.115, a_{0g} = 0.295)$ происходит скачкообразный переход в точку $h(\sigma_1^* = 0.115, a_{0h} = 0.54)$ ветви dc , поскольку ветвь gd соответствует состоянию неустойчивого равновесия. Так как на ветви hc координаты точек являются параметрами состояния устойчивого равновесия, то с последующим увеличением ω амплитуда a_0 уменьшается. Итак, система (3.1) из одного состояния устойчивого равновесия с параметрами (σ_1^*, a_{0g}) переходит в другое, также устойчивое, но с другими параметрами (σ_1^*, a_{0h}) и вследствие такого перехода реализуется явление скачка амплитуды. При последующем увеличении ω (уменьшении σ^*) амплитуда a_0 монотонно убывает.

Закключение. Динамика пульсаций термически релаксирующего газового пузырька описывается уравнением третьего порядка, содержащим слагаемые с квадратичными нелинейностями, исходящими как из уравнений состояния, так и вследствие учета теплообмена, в отсутствие которого порядок уравнения понижается на единицу. Для главного резонанса в режиме установившихся пульсаций учет нелинейностей может привести к скачкообразным изменениям значений их амплитуд, что связано с переходом термодинамической системы из одного состояния устойчивого равновесия в другое, также устойчивое. Реализация явлений срыва и скачка амплитуды может иметь место лишь при воздействии внешней вынуждающей силы, большей критической, когда эффекты нелинейностей проявляются наиболее

ярко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1 М.: Наука, 1987. 360с.
2. Devin Ch. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Amer. 1959. V.31. №12. P.1654-1667.
3. Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С. Декременты затухания колебаний и эффективные коэффициенты теплообмена пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. №6. С.80-87.
4. Ивченко В.М., Приходько Н.А., Сирый Б.С. Численное решение задачи охлаждения пузырька горячего газа в жидкости // Гидромеханика. Киев: Наукова Думка. 1971. №19. С.9-14
5. Оганян Г.Г. Нелинейные свободные пульсации термически релаксирующего газового пузырька сферической формы в несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2007. №1. С.58-69.
6. Ахунова А.А., Сибгатуллин Н.Р. О несимметричных колебаниях изолированного газового пузыря // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, Механика. 2005. №3. С.29-32.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503с.
8. Nayfeh A.S. Introduction to Perturbation Techniques. N.Y.: etc.: Wiley. 1981. = Найфэ А. Введение в методы теории возмущений. М.: Мир, 1984. 535с.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 456с.
10. Минасян М.М. Нелинейные волны и колебания в физически активных деформируемых средах. Ереван: Изд. ЕГУ, 2007. 256с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.06.2008

УДК 519.6

ОЦЕНКА РАССТОЯНИЯ ЛОМАННОЙ ЭЙЛЕРА ОТ СТАБИЛЬНОГО
МНОЖЕСТВА

Габриелян М. С.

Ключевые слова: ломаная Эйлера, экстремальная стратегия, стабильный мост.

Keywords: Euler's Broken Line, extremal strategy, stable bridge.

Մ.Ս. Գաբրիելյան

Էյլերի բեկյալի հեռավորության գնահատականը ստաբիլ բազմությունից

Որոշված է բավականին ճիշտ գնահատական՝ էքստրեմալ ստրատեգիայով կառուցված Էյլերի
բեկյալի և համապատասխան մաքսիմալ ստաբիլ բազմության հեռավորության միջև, ցանկացած
վերջավոր ժամանակահատվածի համար:

M.S.Gabrielyan

Estimation of Distance of Euler's Broken Line From Constant Multitude

The sharp estimation of distance of Euler's broken line which is built by extremal strategy relative to
maximal stable bridge for any terminal time interval is determined.

Определяется достаточно точная оценка расстояния ломаной Эйлера, построенной экстремальной
стратегией относительно максимального стабильного моста для любого конечного промежутка времени

Движение конфликтно-управляемой системы определяется системой
обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^{(1)}[t] = f(t, x^{(1)}[t], u^*, v[t]) \text{ при } x^{(1)}[t_*] = x_*^{(1)}. \quad (1)$$

Пусть функция $x^{(2)}(t)$ является решением уравнения в контингенциях

$$\dot{x}^{(2)}(t) \in co[f : f(t, x, u, v) \mid u \in P, v = v^*] \text{ при } x^{(2)}(t_*) = x_*^{(2)}.$$

Известно, что правую часть этой системы можно записать в виде (1) [1, с.56]

$$\dot{x}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} f(t, x^{(2)}(t), u_k, v^*),$$

$$\text{где } \alpha_k^{(t)} \geq 0; \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} = 1.$$

Векторы u^* и v^* определяются из следующих условий:

$$\max_{v \in Q} (x_*^{(1)} - x_*^{(2)})' f(t_*, x_*^{(1)}, u^*, v) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} (x_*^{(1)} - x_*^{(2)})' f(t_*, x_*^{(1)}, u, v)$$

$$\min_{u \in P} (x_*^{(1)} - x_*^{(2)})' f(t_*, x_*^{(1)}, u, v^*) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} (x_*^{(1)} - x_*^{(2)})' f(t_*, x_*^{(1)}, u, v)$$

Обозначим

$$\rho(t) = \|x^{(2)}(t) - x^{(1)}[t]\|;$$

$$\rho(t_*) = \|x^{(2)}(t_*) - x^{(1)}[t_*]\| = \|x_*^{(2)} - x_*^{(1)}\|.$$

Оценим следующую величину:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^2(t)}{dt} &= 2 \left[\dot{x}^{(2)}(t) - \dot{x}^{(1)}[t] \right]' \left[x^{(2)}(t) - x^{(1)}[t] \right] = 2 \left[x^{(2)}(t) - x^{(1)}[t] \right]' \times \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} \left[f(t, x^{(2)}(t), u_k, v^*) - f(t, x^{(1)}[t], u^*, v[t]) \right] \right\} = 2 \left[x^{(2)}(t) - x^{(1)}[t] \right]' \times \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} \left[f(t, x^{(2)}(t), u_k, v^*) - f(t, x^{(1)}[t], u_k, v^*) + \right. \right. \\ &\left. \left. + f(t, x^{(1)}[t], u_k, v^*) - f(t, x^{(1)}[t], u^*, v[t]) \right] \right\} = \\ &= 2 \left[x^{(2)}(t) - x^{(1)}[t] \right]' \times \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} \left[f(t, x^{(2)}(t), u_k, v^*) - f(t, x^{(1)}[t], u_k, v^*) \right] \right\} + \\ &+ 2 \left[x^{(2)}(t) - x^{(1)}[t] \right]' \times \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} \left[f(t, x^{(2)}(t), u_k, v^*) - f(t, x^{(1)}[t], u_k, v^*) \right] \right\} + \\ &+ 2 \left[x^{(2)}(t) - x^{(1)}[t] \right]' \times \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} \left[f(t, x^{(1)}[t], u_k, v^*) - f(t, x^{(1)}[t], u^*, v[t]) \right] \right\} \leq \\ &\leq 2\lambda \rho^2(t) + 2 \left[(x_*^{(2)} - x_*^{(1)}) + \psi(t-t_*) \right]' \times \\ &\times \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} \left[f(t_*, x_*^{(1)}, u_k, v^*) - f(t_*, x_*^{(1)}, u^*, v[t]) + \psi_1(t-t_*) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\psi \rightarrow 0$, $\psi_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_*$, $\lambda > 0$ – постоянная Липшица системы (1).

Из определения векторов u^* и v^* следует следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} \times (x_*^{(2)} - x_*^{(1)})' \times \left[f(t_*, x_*^{(1)}, u_k, v^*) - f(t_*, x_*^{(1)}, u^*, v[t]) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} (x_*^{(1)} - x_*^{(2)})' \times \left[f(t_*, x_*^{(1)}, u_k, v^*) - f(t_*, x_*^{(1)}, u^*, v[t]) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} (x_*^{(1)} - x_*^{(2)})' \times \left[f(t_*, x_*^{(1)}, u^*, v[t]) - f(t_*, x_*^{(1)}, u^*, v^*) \right] - \\ &- \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} (x_*^{(1)} - x_*^{(2)})' \times \left[f(t_*, x_*^{(1)}, u_k, v^*) - f(t_*, x_*^{(1)}, u^*, v^*) \right] \leq 0 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство:

$$\frac{d}{dt} \rho^2(t) \leq 2\lambda \rho^2(t) + \psi(t-t_*)A + \psi_1(t-t_*)B = 2\lambda \rho^2(t) + \tilde{\varphi}(t-t_*)$$

(причем $\tilde{\varphi}(t-t_*) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_*$). Интегрируя полученное неравенство положительной ориентацией, получаем неравенство:

$$\rho^2(t) \leq e^{2\lambda(t-t_*)} \times \rho^2(t_*) + \varphi(t-t_*) \frac{1}{2\lambda} (e^{2\lambda(t-t_*)} - 1).$$

Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{k+1}$ – ограниченные числа. Тогда используя полученное неравенство, получим:

$$\begin{aligned} \rho^2(t_* + \Delta_1) &\leq \rho^2(t_*) e^{2\lambda \Delta_1} + \varphi_1(\Delta_1) \frac{1}{2\lambda} (e^{2\lambda \Delta_1} - 1) \\ \rho^2(t_* + \Delta_1 + \Delta_2) &\leq \rho^2(t_* + \Delta_1) e^{2\lambda \Delta_2} + \varphi_2(\Delta_2) \times \frac{1}{2\lambda} (e^{2\lambda \Delta_2} - 1) \leq \\ &\leq \rho^2(t_*) e^{2\lambda(\Delta_1 + \Delta_2)} + \varphi_1(\Delta_1) \times \frac{1}{2\lambda} (e^{2\lambda(\Delta_1 + \Delta_2)} - e^{2\lambda \Delta_2}) + \\ &+ \varphi_2(\Delta_2) \frac{1}{2\lambda} (e^{2\lambda \Delta_2} - 1) \leq \rho^2(t_*) e^{2\lambda(\Delta_1 + \Delta_2)} + \bar{\varphi}(\Delta) \frac{1}{2\lambda} (e^{2\lambda(\Delta_1 + \Delta_2)} - 1) \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\varphi}(\Delta) = \max(\varphi_1(\Delta_1), \varphi_2(\Delta_2))$; $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$.

Продолжая такую итерацию, получим:

$$\varepsilon^2 \leq \rho^2(t_*) e^{2\lambda \sum_{i=1}^{k+1} \Delta_i} + \bar{\varphi}(\Delta) \frac{1}{2\lambda} \left(e^{2\lambda \sum_{i=1}^{k+1} \Delta_i} - 1 \right), \text{ где}$$

$$\Delta = \max(\Delta_1, \dots, \Delta_{k+1});$$

$$\bar{\varphi}(\Delta) = \max(\varphi_1(\Delta_1), \dots, \varphi_{k+1}(\Delta_{k+1}))$$

Из полученной формулы следует, что расстояние ломаной Эйлера от стабильного множества стремится к нулю, если

$$\rho(t_*) \rightarrow 0 \text{ и } \bar{\varphi}(\Delta) \rightarrow 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
15. 09. 2008

Բովանդակություն		Содержание	
Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Ս.Պ. Մտեփանյան	3	Киракосян Р. М., Степанян С. П.	
Մակերևութային շոշափող բեռների ազդեցության տակ գտնվող օրթոտրոպ կտր սալի խնդիրը ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ		ЗАДАЧА ОРТОТРОПНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА	
Ս.Ռ. Մարտիրոսյան	10	Мартirosян С. Р.	
Հեծանի կայունությունը ոչ կոնսերվատիվ մի խնդրի մասին		ОБ ОДНОЙ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ	
Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան	14	Мовсисян Л. А., Нерсисян Г. Г.	
Չողի դինամիկական կայունության երկու դրվածքների մասին		О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ В ДВУХ ПОСТАНОВКАХ	
Գ.Բ. Վերմիշյան	21	Вермишян Г. Б.	
Մածուցիկ առածական նյութից սմամեջ գլանում ջերմության բաշխումը վիբրացիոն բեռի ազդեցության տակ		РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ	
Ա. Ս. Ավետիսյան, Վ. Մ. Խաչատրյան	28	Аветисян А. С., Хачатрян В. М.	
Մեծ սահքերի հաշվառման դեպքում հակահարթ էլեկտրաառածական ալիքային ազդանշանի տարածման մասին		РАСПРОСТРАНЕНИЕ АНТИПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ВОЛНОВОГО СИГНАЛА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ УЧЕТЕ БОЛЬШИХ СДВИГОВ	
Վ.Գ. Գարակոյ	39	Гараков В. Г.	
Մագնիսաառածական ալիքների անդրադարձումը իդեալական հաղորդիչ կիսատարածության եզրից		ОТРАЖЕНИЕ МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ ОТ ЭКРАНИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ	
Վ. Մ. Խաչատրյան	43	Хачатрян В. М.	
Մեծ երկարացումների հաշվառման դեպքում հակահարթ էլեկտրաառածական ալիքային ազդանշանի տարածման մասին		РАСПРОСТРАНЕНИЕ АНТИПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ВОЛНОВОГО СИГНАЛА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ УЧЕТЕ БОЛЬШИХ УДЛИНЕНИЙ	
Գ.Գ. Օհանյան	51	Оганян Г. Г.	
Անսեղմելի մածուցիկ հեղուկում ջերմառելաքսացվող զնդածև գազային պղպջակի ոչ զծային հարկադիր զարկումները		НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ТЕРМИЧЕСКИ РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ	
Մ.Ս. Գաբրիելյան	63	Габриелян М. С.	
Էլերի բեկյալի հեռավորության գնահատականը ստաբիլ բազմությունից		ОЦЕНКА РАССТОЯНИЯ ЛОМОНОЙ ЭЙЛЕРА ОТ СТАБИЛЬНОГО МНОЖЕСТВА	