Ťμ

UEWUIFYU E X A H И K A MECHANICS

2ԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №4, 2008

Механика



ЛАВРЕНТИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ МОВСИСЯН (К 75-летию со дня рождения)

Мовсисян Лаврентий Александрович родился 24 октября 1933г. в с.Арачадзор НКР в семье учителей. Духовные ценности и высокие моральные принципы, присущие жизнедеятельности сельской интеллигенции, оказали определяющее влияние на формирование мировоззрения юбиляра. После окончания школы в 1951г. поступил на физико-математический факультет Ереванского Государственного Университета. По завершению учёбы в 1956г. направлен на работу в Институт математики и механики АН Арм.ССР, где началась его научная деятельность в области механики деформируемых сред. В 1959г. продолжил учёбу в аспирантуре Института машиноведения АН Украинской ССР (г.Харьков), которую закончил представлением к защите кандидатской диссертации в 1962г. С 1963г. – кандидат технических наук, с 1975г. – доктор технических наук. В 1985г. присуждено звание профессора. Под его научным руководством подготовлены и защищены 5 кандидатских диссертаций. Долгие годы занимается преподавательской работой по подготовке молодых специалистов-механиков на факультете математики и механики ЕГУ. Является автором более 150 научных публикаций в различных академических журналах и научных сборниках как в Армении, так и за рубежом.

Круг научных интересов Л.А.Мовсисяна широк и разнообразен. Его исследования посвящены, в основном, развитию теории пластин и оболочек. Им был поставлен и решён вопрос рационального использования возможностей материала (анизотропии) цилиндрической оболочки, а именно, определение тех ориентаций главных направлений упругости, при которых получаются наименьший прогиб или наибольшая критическая сила, а также наибольшие собственные частоты. Предложенный подход в дальнейшем был применён к практическим задачам проектирования оболочек из композитов. Исследованы нестационарные вынужденные колебания ортотропной цилиндрической оболочки, когда демпфирование происходит согласно законам Фохта и Сорокина, а также задачи устойчивости стержней и цилиндрических изотропных и ортотропных оболочек при ударных нагружениях с различными граничными условиями.

Совместно с А.Г.Багдоевым рассматривались задачи устойчивости распространения ударных волн и волн модуляций в нелинейно-упругих и геометрически нелинейных пластинах и оболочках. При этом нелинейная упругость взята степенной по Каудереру, а геометрическая нелинейность – по теории Кармана. В геометрически нелинейной пластине пренебрежение продольным инерционным членом приводит к устойчивости волнового пакета, в то время как при его учёте волновой пакет всегда неустойчив. В различных постановках исследовалась плоская задача о распространении полубесконечной трещины в изотропной вязкоупругой среде, когда на её берегах заданы постоянные нормальные напряжения.

Последние публикации посвящены, в основном, развитию теории оптимального управления движением упругих и вязкоупругих тел.

Научная общественность Армении и редакция журнала «Известия НАН Армении. Механика» поздравляют Лаврентия Александровича Мовсисяна со славным юбилеем и желают ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №4, 2008 Механика

УДК 539.3

О ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ Агаян К.Л., Григорян Э.Х.

Ключевые слова: контакт, балка, изгиб, интегральное-разностные уравнение, вычет, асимптотика.

Key words: contact, beam, bending, integral-difference equation, residue, asymptotic.

Կ.Լ. Աղայան, Է.Խ. Գրիգորյան Առաձգական կիսահարթության եզրում կիսաանվերջ հեծանի ծոման խնդրի մասին

Նորից դիտարկվում է առաձգական կիսահարթության եզրագծում դրված կիսաանվերջ հեծանի ծոման հայտնի կոնտակտային խնդիրը, երբ հեծանի ծայրում կիրառված են կենտրոնացված $P_{
m 0}$ ուժը և $\,M_{_0}\,$ մոմենտը։ Խնդրի լուծումը բերվում է տարբերակային հավասարման և կառուցվում է նրա փակ լուծումը։ Կառուցված լուծման օգնությամբ և տարբերակային հավասարման վերլուծության արդյունքում, որը հնարավորություն է տալիս պարզելու անհայտ կոնտակտային լարման Ֆուլեի ձևափոխության պատկերի անալիտիկ շարունակության կառուցվածըը, առաջարկվում է լուրահատուկ մոտեցում, որը թույլ է տալիս հաշվել ասիմպտոտիկ վերլուծության համապատասխան գործակիցները վերջավոր տեսքով։

K.L. Aghayan, E.Kh. Grigoryan On the problem of bending of semi-infinite beam in boundary elastic half-plane

The famous contact problem of bending of semi-infinite beam in elastic half-plane boundary under the action of concentrated loading P_0 and moment M_0 in the end-point of beam is considered. The solution of problem is reduced to the difference equation and close solution is obtained. With the help of built solution and the analysis of functional equation that allows to determinate the structure of analytical continuation of Fourier transformation of unknown contact stress, the peculiar approach is suggested which allows to calculate the coefficient of appropriate asymptotic formulas in the finite species.

Вновь рассматривается известная контактная задача об изгибе полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости, когда к концу балки приложены сосредоточенная сила P_0 и момент M_0 . Решение задачи сведено к разностному уравнению и построено её замкнутое решение. При помощи построенного решения и анализа функционального уравнения, позволяющее определить структуру аналитического продолжения преобразования Фурье неизвестного контактного напряжения, предлагается своеобразный подход, позволяющий вычислить коэффициенты соответствующих асимптотических формул в конечном виде.

В предлагаемой работе вновь рассматривается известная контактная задача об изгибе полубесконечной балки (цилиндрический изгиб полубесконечной пластинки) на границе упругой полуплоскости, когда к концу балки приложены сосредоточенная сила P_0 и момент M_0 . Замкнутое решение этой задачи впервые было получено в работе [1] с помощью предельного перехода в решении соответствующей пространственной задачи (устремляя параметр преобразования Фурье к нулю). В последующем эта задача была рассмотрена в работах [2-4]. В [2,3] решение задачи сведено к краевой задаче Карлемана для аналитических функций в полосе, замкнутое решение которого получено сведением ее к задаче Римана на полуоси. В [4] решение задачи сведено к однородному разностному уравнению и построено ее замкнутое решение методом, предложенным в [5,6]. При исследовании поведения контактных напряжений около конца балки и на бесконечности в [1-4] ограничивались только качественным анализом. Было показано, что контактные напряжения имеют порядок $O(x^{-1/2})$ при $x \to 0$ и $O(x^{-4})$ при $x \to \infty$.

В работе [7] с помощью обобщенного преобразования Фурье решение указанной выше задачи сведено к краевой задаче Римана на действительной оси. Методом факторизации построено замкнутое решение этого функционального уравнения. Простая факторизация коэффициента функционального уравнения позволила получить асимптотические формулы для контактных напряжений в окрестности конца и далеких от него точках балки. При этом, вычислены значения всех коэффициентов, входящих в асимптотические формулы (некоторые вычислительные промахи уточнялись нами в настоящей работе).

Основные предпосылки, связанные с повторным рассмотрением указанной выше задачи, заключаются в следующем:

а) построить еще одно замкнутое решение качественно новой структуры;

б) при помощи анализа разрешающего разностного уравнения определить структуру аналитического продолжения преобразования Фурье неизвестного контактного напряжения $\overline{P}(\alpha)$ [8,9];

г) при помощи построенного решения и анализа функционального уравнения вычислить вычеты $\overline{P}(\alpha)$ и, тем самым, вычислить коэффициенты соответствующих асимптотических формул.

1. Пусть на границе упругой полуплоскости, отнесенной к декартовой системе координат XOY (OX направлена по краю полуплоскости, OY – по внешней нормали), изгибается полубесконечная балка (цилиндрический изгиб пластинки) с постоянной жесткостью D_0 . К концу балки приложены сосредоточенные сила P_0 и момент M_0 . При обычном предположении, что в контактной зоне касательные напряжения отсутствуют и контактирование происходит без отрыва балки от края полуплоскости [1-4,7-9], требуется определить закон распределения нормальных контактных напряжений, возникающих при контактировании полубесконечной балки с краем полуплоскости.

Дифференциальное уравнение равновесия балки имеет вид:

$$D_0 V_0'' = q(x), \qquad 0 < x < \infty \tag{1.1}$$

где $V_0(x) = dv_0/dx$, $v_0(x)$ – вертикальные перемещения (прогиб) балки,

q(x)-подлежащие определению, неизвестные нормальные контактные напряжения. Граничные условия при (1.1) будут

$$D_{0}V_{0}|_{x=0} = X_{0}, \quad D_{0}V_{0}'|_{x=0} = M_{0}, \quad D_{0}V''|_{x=0} = -P_{0}$$
(1.2)
$$V_{0}(x) \to 0 \quad \text{при } x \to \infty$$

где X_0 – неизвестная постоянная.

Условия равновесия балки имеют вид:

$$\int_{0}^{\infty} q(x) dx = P_{0}, \qquad \int_{0}^{\infty} xq(x) dx = M_{0}.$$
(1.3)

Решение уравнения (1.1) при условиях (1.2) представим в виде

$$V_0(x) = \frac{1}{D_0} \int_0^x (x-t)^2 q(t) dt - \frac{P_0}{D_0} x^2 + \frac{M_0}{D_0} x + \frac{X_0}{D_0}, \qquad 0 \le x < \infty$$
(1.4)

	,		
	۲		
۰	L		
	٩	-	

Из (1.2)-(1.4) нетрудно получить

$$X_{0} = -\frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} t^{2} q(t) dt$$
 (1.5)

Подставляя (1.5) в (1.4), с учетом (1.3), получим решение уравнения (1.1) в виде

$$V_0(x) = -\frac{1}{2D_0} \int_0^\infty \Theta(t-x) (x-t)^2 q(t) dt, \qquad 0 \le x < \infty$$
(1.6)

где $\vartheta(x)$ – функция Хевисайда.

С другой стороны, для граничных точек полуплоскости имеем [10]

$$V_1(x) = \frac{dv_1(x,0)}{dx} = -\frac{1 - v_1}{\pi \mu_1} \int_0^\infty \frac{q(s) ds}{s - x}, \qquad -\infty < x < \infty$$
(1.7)

где $v_1(x,0)$ – вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости, v_1 – коэффициент Пуассона, а μ_1 – модуль сдвига материала полуплоскости.

Решение поставленной задачи будет точным при принятых допущениях, если установленный закон распределения контактных напряжений q(x) обеспечивает как выполнение условий равновесия (1.3), так и контактного условия, выраженного равенством

$$V_1(x) = V_0(x), \qquad 0 < x < \infty.$$
 (1.8)

Подставляя (1.6) и (1.7) в (1.8), получим определяющее интегральное уравнение для q(x) в виде:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{s-x}q(s)ds = \lambda\int_{0}^{\infty}\vartheta(s-x)(s-x)^{2}q(s)ds, \qquad 0 < x < \infty$$
(1.9)

$$\lambda = \mu_1 / D_0 \left(1 - \nu_1 \right) = 12 \mu_1 \left(1 - \nu_0^2 \right) / E_0 h_0^3 \left(1 - \nu_1 \right)$$
(1.10)

где h_0, E_0, v_0 – соответственно, толщина, модуль упругости и коэффициент Пуассона балки.

Таким образом, решение задачи сведено к решению сингулярного интегрального уравнения (1.9) при условиях (1.3).

Решение уравнения (1.9), с учетом (1.3), ищем в классе функции:

$$q(x) \sim x^{-\gamma} (\gamma < 1) \quad \text{при } x \to +0; \qquad q(x) \sim x^{-1-\delta} (\delta > 0) \quad \text{при } x \to \infty$$
(1.11)

Сделаем в (1.9) замену переменных

$$\mathbf{x} = \beta e^{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{s} = \beta e^{u}, \quad \beta = \lambda^{-1/3} \tag{1.12}$$

и применим к ним комплексное преобразование Фурье, при этом имея в виду теорему о свертке. После некоторых преобразований приходим к следующему однородному функционально-разностному уравнению:

$$\operatorname{cth} \pi \alpha \cdot \overline{P}(\alpha) + \overline{P}(\alpha - 3i) / \alpha (\alpha - i) (\alpha - 2i) = 0, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -\gamma \quad (1.13)$$

с условиями, вытекающими из (1.3)

$$\overline{P}(-i) = P_0, \qquad \overline{P}(-2i) = \beta^{-1}M_0 = M_*$$
^(1.14)

$$\alpha = \sigma + i\tau, \quad P(u) = \beta q(\beta e^{u}), \quad \overline{P}(\alpha) = \int_{-\infty} P(u) e^{i\alpha u} du.$$
 (1.15)

Прежде чем перейти к решению уравнения (1.13) с условиями (1.14), заметим, что из оценок (1.11) следует, что $\overline{P}(\alpha)$ регулярна в полосе $-1-\delta < \operatorname{Im} \alpha < -\gamma$, а $\overline{P}(\alpha - 3i)$ – в полосе $2-\delta < \operatorname{Im} \alpha < -\gamma + 3$. Тогда первое слагаемое из (1.13) регулярно при $-1 < \operatorname{Im} \alpha < -\gamma$, а второе – в полосе $2-\delta < \operatorname{Im} \alpha < 0$. Требуя теперь, чтобы $2-\delta \leq -1$, т.е. $\delta \geq 3$, получим, что оба слагаемых регулярны в полосе $-1 < \operatorname{Im} \alpha < -\gamma$, как это отмечено в (1.13). С другой стороны, из функционального уравнения (1.13) можно заключить, что $\overline{P}(\alpha)$ регулярна в полосе $-4 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$, которое указывает, что $\delta = 3$, а $\gamma = 1/2$. Следовательно, получилось, что $q(x) \sim x^{-4}$ при $x \to \infty$ и $q(x) \sim x^{-1/2}$ при $x \to +0$, что и следовало ожидать [1].

Таким образом, решение поставленной выше контактной задачи свелось к решению функционально-разностному уравнению (1.13) с условиями (1.14).

2. Перейдем к решению (1.13). Следуя Койтеру [11], её решение ищем в виде

$$\overline{P}(\alpha) = -iP_0\Gamma(i\alpha)\overline{T}(\alpha)/\mathrm{sh}(\pi\alpha/2), \qquad (2.1)$$

где $\Gamma(z)$ – известная гамма-функция Эйлера, $\overline{T}(\alpha)$ – неизвестная функция.

Подставляя (2.1) в (1.13), после некоторых выкладок для $\overline{T}(\alpha)$ получим функциональное уравнение

$$\overline{R}(\alpha) \cdot \overline{T}(\alpha) - \overline{T}(\alpha - 3i) = 0, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2 \quad (2.2)$$

$$R(\alpha) = \operatorname{ch} \pi \alpha / (\operatorname{ch} \pi \alpha - 1)$$
(2.3)

Из (2.1) и (1.12) следует:

$$\overline{T}(-i) = 1, \qquad \overline{T}(-2i) = 0.$$
 (2.4)

Для решения уравнения (2.2) с условиями (2.4) факторизуем $R(\alpha)$, представив её в виде

$$\overline{R}(\alpha) = \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{ch} \pi \alpha - 1} = \frac{Y(\alpha - 3i)}{Y(\alpha)}, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -\frac{1}{2}$$
(2.5)

где $Y(\alpha)$ регулярна в полуполосе $-4 < \text{Im}\,\alpha < -1/2$, там не имеет нулей и удовлетворяет условиям (A – конечная постоянная):

$$Y(-i) = 1, \quad Y(\alpha) \to A$$
 при $|\alpha| \to \infty, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$ (2.6)

Очевидно, что при этом

$$Y'(\alpha)/Y(\alpha) \to 0$$
 при $|\alpha| \to \infty$, $-1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$ (2.7)

Теперь логарифмируя, а затем дифференцируя обе части (2.5), получим $\overline{V}(\alpha) = \overline{V}(\alpha - 2i) - \overline{L}(\alpha) = -1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$

$$\overline{X}(\alpha) - \overline{X}(\alpha - 3i) = \overline{L}(\alpha), \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$$
(2.8)

где

$$\overline{X}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \left(\ln Y(\alpha) \right) = \frac{Y'(\alpha)}{Y(\alpha)}$$
(2.9)

$$\overline{L}(\alpha) = \frac{\pi \operatorname{sh} \pi \alpha}{\operatorname{ch} \pi \alpha - 1} - \frac{\pi \operatorname{sh} \pi \alpha}{\operatorname{ch} \pi \alpha}$$
(2.10)

Из (2.7) и (2.9) следует, что $\overline{X}(\alpha) \to 0$ в полосе $-1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$ при $|\alpha| \to \infty$. Тогда, применив к (2.8) обратное преобразование Фурье и используя теорему Коши о вычетах, будем иметь

. ,

$$X(u)(1-e^{3u}) = L(u)$$
(2.11)

где

$$X(u) = F^{-1}\left[\overline{X}(\alpha)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau'-\infty}^{i\tau+\infty} \overline{X}(\alpha) e^{-i\alpha u} d\alpha, \quad -1 < \tau' < -\frac{1}{2} \qquad (2.12)$$

$$L(u) = F^{-1}\left[\overline{L}(\alpha)\right] = i\left(\operatorname{ch}(u/2) - 1\right) / e^{u} \operatorname{sh} u \qquad (2.13)$$

или же

$$X(u) = C_1 \delta(u) + L(u) / (1 - e^{3u})$$
(2.14)

где C_1 – постоянная, $\delta(u)$ – известная-дельта функция Дирака.

Применив теперь к (2.14) преобразование Фурье, получим

$$\overline{X}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{ch} u/2}{\left(e^{3u} - 1\right)e^{u} \operatorname{sh} u} e^{i\alpha u} du + C_{1}$$
(2.15)

Интеграл, входящий в (2.15), удается вычислить в конечном виде и в итоге решение разностного уравнения (2.8) $\overline{X}(\alpha)$ представляется в виде:

$$\overline{X}(\alpha) = \frac{i\pi}{3 \operatorname{sh} 2\pi\alpha} \left[\sqrt{3} \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi\alpha}{3} - i\sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{2\pi\alpha}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\operatorname{sh} \frac{4\pi\alpha}{3} - i\sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{4\pi\alpha}{3} \right) - 3i \operatorname{ch} \pi\alpha - 2\alpha - 5i \right] + C_1$$
(2.16)

Имея в виду, что $\overline{X}(\alpha) \to 0$ в полосе $-1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$ при $|\alpha| \to \infty$, получим $C_1 = 0$.

Следует здесь особо отметить, что вычисление $\overline{X}(\alpha)$ в конечном виде позволяет в дальнейшем вычислить вычеты аналитического продолжения $\overline{P}(\alpha)$ (приложение).

Имея $\overline{X}(\alpha)$ из (2.9) и (2.6), получим следующее представление для $Y(\alpha)$:

$$Y(\alpha) = \exp\left[\int_{-i}^{\alpha} \overline{X}(\xi) d\xi\right] = \exp\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{ch}(u/2)}{(e^{3u} - 1)e^{u} \operatorname{sh} u} \cdot \frac{e^{i\alpha u} - e^{u}}{u} du\right] \quad (2.17)$$

которая, очевидно, регулярна в полосе $-4 < \text{Im}\,\alpha < -1/2$.

Подставляя теперь представление (2.5) в (2.2), приходим к однородному разностному уравнению

$$\overline{Z}(\alpha) - \overline{Z}(\alpha - 3i) = 0, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$$
(2.18)

при условиях

$$\overline{Z}(-i) = 1, \ \overline{Z}(-2i) = 0,$$
 (2.19)

где

$$\overline{Z}(\alpha) = \overline{T}(\alpha) / Y(\alpha)$$
(2.20)

регулярна в полосе $-4 < \text{Im}\,\alpha < -1/2$, а $Y(\alpha)$ дается формулой (2.17).

Решение уравнения (2.18), удовлетворяющего условию $\overline{Z}(\alpha) \to 0$ в полосе $-1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$ при $|\alpha| \to \infty$, будет $\overline{Z}(\alpha) \equiv 0$. Но в таком случае условие $\overline{Z}(-i) = 1$ не будет выполняться. Это означает, что решение (2.18) не может стремиться к нулю в полосе $-1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$ при $|\alpha| \to \infty$.

С другой стороны, пользуясь формулой Стирлинга, получим,

$$\frac{\Gamma(i\alpha)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)} \sim |\alpha|^{-\tau-1/2} e^{-\pi|\sigma|}, \quad |\sigma| \to \infty, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha = \tau < -1/2 \quad (2.21)$$

Тогда, имея в виду, что $\overline{P}(\alpha) \to 0$ при $|\alpha| \to \infty$ в полосе $-1 < \tau < -1/2$, из (2.21) и (2.1) получим

$$e^{-\pi|\sigma|}\overline{T}(\alpha) \to 0, \quad |\sigma| \to \infty, \quad -1 < \tau < -1/2.$$
 (2.22)

Последнее, в свою очередь, с учетом (2.6) и (2.20), указывает на то, что

$$\overline{Z}(\alpha)/\operatorname{sh}\pi\alpha \to 0$$
 при $|\alpha| \to \infty$, $-1 < \operatorname{Im}\alpha < -1/2$ (2.23)

Следовательно, решение уравнения (2.18) можно построить методом Койтера [11], предварительно разделив обе части уравнения (2.18) на $sh \pi \alpha$. Сделав это, получим

$$\overline{Z}(\alpha)/\operatorname{sh} \pi \alpha + \overline{Z}(\alpha - 3i)/\operatorname{sh} \pi(\alpha - 3i) = 0, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2 \quad (2.24)$$

Таким образом, решение уравнения (2.2) с условиями (2.4) свелось к (2.24) с условиями (2.19).

Применив теперь к (2.24) обратное преобразование Фурье и используя теорему Коши о вычетах, с учетом (2.23) и (2.19) получим

$$Z(\mathbf{v}) = i \left[\overline{Z}(-3i) / \pi \left(1 + e^{3v} \right) + e^{2v} / \pi \left(1 + e^{3v} \right) \right]$$
(2.25)

где $\overline{Z}(-3i)$ – неизвестная постоянная, а

$$Z(\mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi} \int_{i_c - \infty}^{i_c + \infty} \frac{Z(\alpha)}{\operatorname{sh} \pi \alpha} e^{-i\alpha \mathbf{v}} d\alpha, \qquad -1 < c < -1/2 \qquad (2.26)$$

Тогда, по обратной формуле Фурье, из (2.25) и (2.26) получим

$$\overline{Z}(\alpha) = \frac{\operatorname{sh} \pi \alpha}{3} \left[\frac{\overline{Z}(-3i)}{\operatorname{sh}(\pi \alpha/3)} + \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi(\alpha - 2i)/3)} \right]$$
(2.27)

Отметим, что при получении (2.27) было использовано значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha v}}{1 + e^{3v}} dv = -\frac{i\pi}{3} \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/3)}, \qquad -3 < \operatorname{Im} \alpha < 0$$
(2.28)

Подставляя значение $\overline{Z}(\alpha)$ из (2.27) в (2.20), а последнее в (2.1), получим окончательное выражение для $\overline{P}(\alpha)$ в виде

$$\overline{P}(\alpha) = -\frac{2iP_0}{3} \cdot \Gamma(i\alpha)Y(\alpha)\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2} \left[\frac{\overline{Z}(-3i)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/3)} + \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi(\alpha-2i)/3)}\right] \quad (2.29)$$

Обратимся теперь к условиям (1.14). Нетрудно убедиться, что первое условие $\overline{P}(-i) = P_0$ удовлетворяется тождественно, а из второго – $\overline{P}(-2i) = M_*$ получим значение неизвестного $\overline{Z}(-3i)$ в виде

$$\overline{Z}(-3i) = 1 - 3\sqrt{3}M_* / 4P_0Y(-2i) = 1 - \sqrt{3}M_* / P_0$$
(2.30)

Здесь было учтено, что Y(-2i) = 3/4 (см. приложение).

Таким образом, решение функционально-разностного уравнения (1.13) с условиями (1.14) получено в виде (2.29), где $Y(\alpha)$ и $\overline{Z}(-3i)$ даются формулами (2.17) и (2.30).

Имея (2.29), по обратной формуле Фурье получим решение задачи в виде

$$p(\mathbf{v}) = \beta q(\beta e^{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{i_c - \infty}^{i_c + \infty} \overline{P}(\alpha) e^{-i\alpha \mathbf{v}} d\alpha, \quad -4 < c < -1/2$$
(2.31)

3. Перейдем к определению асимптотических формул, характеризующих поведение контактных напряжений при $x \to +0$ и $x \to \infty$. Эти формулы, как обычно, получаются из (2.31) при помощи теоремы Коши о вычетах. Но для этого необходимо определить полюса аналитического продолжения (АП) функции $\overline{P}(\alpha)$ вне полосы $-4 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$ и уметь вычислить соответствующие вычеты в этих полюсах. Ясно, что из (2.29) невозможно непосредственно угадать структуру АП $\overline{P}(\alpha)$. Для этой цели, помимо (2.29), необходимо существенным образом использовать функциональное уравнение (1.13), т.е. параллельно рассматривать АП уравнения (1.13) вне полосы $-1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$.

Рассмотрим сначала АП $\overline{P}(\alpha)$ в полуплоскости Im $\alpha > -1$, имея при этом в виду, что $\overline{P}(\alpha)$ регулярна в полосе $-4 < \text{Im } \alpha < -1/2$. Тогда из функционального уравнения (1.13) следует, что точка $\alpha = -i/2$ может быть простым полюсом для АП $\overline{P}(\alpha)$. С другой стороны, так как $\overline{P}(-3i)$ – конечная величина, то $\overline{P}(0)$ также конечна. Аналогичным образом, из (1.13) следует, что $\overline{P}(i)$ и $\overline{P}(2i)$ – конечные величины, а точки $\alpha = ik$ (k = 3, 4, ...) являются простыми нулями АП $\overline{P}(\alpha)$. Далее, так как $\overline{P}(-5i/2)$ конечна, то опять из (1.13) получим, что точка $\alpha = i/2$ может быть простым полюсом для АП $\overline{P}(\alpha)$. Аналогично, точка $\alpha = 3i/2$ может быть простым полюсом для АП $\overline{P}(\alpha)$, так как $\overline{P}(-3i/2)$ конечна. Точка $\alpha = 5i/2$ может быть уже полюсом второго порядка, так как $\alpha = -i/2$ простой полюс $\overline{P}(\alpha)$, а ch $(5\pi i/2) = 0$. Продолжая эти рассуждения, нетрудно убедиться, что в точках-тройках $\{(3n-1/2)i;(3n+1/2)i;(3n+3/2)i\}_{n=0}^{\infty}$ аналитическое продолжение $\overline{P}(\alpha)$ может иметь полюса (n+1)-го порядка. Рассмотрим теперь аналитическое продолжение $\overline{P}(\alpha)$ в полуплоскость Im $\alpha < -1/2$. Поскольку $\overline{P}(-i)$; $\overline{P}(-2i)$ и $\overline{P}(-3i)$ – конечные величины, то из (1.13) следует, что в точках $\alpha = -4i$, $\alpha = -5i$ и $\alpha = -6i$ АП $\overline{P}(\alpha)$ имеет простые полюса. Далее, так как $\alpha = -4i$ – простой полюс для АП $\overline{P}(\alpha)$, то опять из (1.13) получим, что в точке $\alpha = -7i$ АП $\overline{P}(\alpha)$ имеет двухкратный полюс. Продолжая этот процесс, в итоге получим, что аналитическое продолжение $\overline{P}(\alpha)$ в области Im $\alpha < -1/2$ имеет полюса (n+1)-го порядка в точках-тройках $\{-(3n+4)i; -(3n+5)i; -(3n+6)i\}_{n=0}^{\infty}$.

Приступим к определению асимптотической формулы для контактных напряжений q(x) при $x \to +0$. Так как $x = e^{\nu}$ и при 0 < x < 1, $\nu < 0$, то при выходе из полосы регулярности контур интегрирования в (2.31) следует замыкать в верхней полуплоскости и рассматривать полюса аналитического продолжения $\overline{P}(\alpha)$ в области Im $\alpha > -1$. Из (2.6), (2.21) и (2.29) следует, что в полосе $-1 < \text{Im} \alpha < -1/2 \ \overline{P}(\alpha)$ регулярна и $|\overline{P}(\alpha)| \to 0$ равномерна по τ при $|\sigma| \to \infty$. Тогда имея в виду хорошо известную формулу

$$\Gamma(i\alpha)\Gamma(-i\alpha) = \pi/\alpha \operatorname{sh} \pi \alpha$$
,

по принципу аналитического продолжения можно утверждать, что $\overline{P}(\alpha)$ регулярна в каждой полосе $m-1/2 < \text{Im} \alpha < m+1/2$ (m=0,1,2,...) и $|\overline{P}(\alpha)| \rightarrow 0$ равномерна относительно τ при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Следовательно, имея в виду вышесказанное о полюсах $\overline{P}(\alpha)$ из (2.31), при помощи теоремы Коши о вычетах, для любого конечного неотрицательного целого n будем иметь ($\nu < 0$):

$$P(\mathbf{v}) = i \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2} \left[\frac{1}{k!} \frac{d^{k}}{d\alpha^{k}} \left(\left(\alpha - \alpha_{k}^{(j)} \right)^{k+1} \overline{P}(\alpha) e^{-i\alpha \mathbf{v}} \right) \right]_{\alpha = \alpha_{k}^{(j)}} + i \sum_{j=0}^{m} \left[\frac{d^{n}}{n! d\alpha^{n}} \left(\left(\alpha - \alpha_{n}^{(j)} \right)^{n+1} \overline{P}(\alpha) e^{-i\alpha \mathbf{v}} \right) \right]_{\alpha = \alpha_{n}^{(j)}} + \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau' - \infty}^{i\tau' + \infty} \overline{P}(\alpha) e^{-i\alpha \mathbf{v}} d\alpha, \quad (3.1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2; \qquad 3n + m - 1/2 < \tau' < 3n + m + 1/2$$

где $\alpha_n^{(m)} = (3n + m - 1/2)i$ -полюса аналитического продолжения $P(\alpha)$.

Для интегрального слагаемого из (3.1), опять по теореме Коши будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{i\tau'-\infty}^{i\tau'+\infty} \overline{P}(\alpha) e^{-i\alpha\nu} d\alpha = \operatorname{Buy.}(\overline{P}(\alpha))\Big|_{\alpha=(3n+m+1/2)} e^{(3n+m+1/2)\nu} + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\tau''-\infty}^{i\tau''+\infty} \overline{P}(\alpha) e^{-i\alpha\nu} d\alpha, \quad 3n+m+1/2 < \tau'' < 3n+m+3/2$$

$$(3.2)$$

Следовательно, по известной теореме [12] можем утверждать, что при $\nu \to -\infty$

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{i\tau'-\infty}^{i\tau'+\infty} \overline{P}(\alpha) e^{-i\alpha\nu} d\alpha \right| \le e^{(3n+m+1)\nu}$$
(3.3)

для любого неотрицательного целого n и m = 0, 2.

Таким образом, если нам удастся вычислить вычеты функции $\overline{P}(\alpha)$ в полюсах $\alpha = (3n + m - 1/2)i$, то по формуле (3.1) можем определить асимптотическое поведение контактных напряжений при $\nu \to -\infty$ (т.е. при $x \to +0$) для любого конечного n. Очевидно, что вычислить эти вычеты прямым подходом из (2.29) невозможно. Оказывается, что эти вычеты можно вычислить при помощи функционального уравнения (1.13). Ниже будет показан алгоритм вычисления этих вычетов, ограничиваясь четырьмя первыми членами асимптотики из (3.1). В этом случае n = 1; m = 0 (в точках -i/2;i/2 и 3i/2 имеем простой полюс, а в точке 5i/2 – полюс второго порядка). Тогда из (3.1), переходя к прежним переменным, будем иметь, что при $x \to +0$

$$\beta q(\beta x) = i \sum_{k=0}^{3} B_{-1}^{\frac{i(2k-1)}{2}} x^{\frac{2k-1}{2}} - B_{-2}^{(5i/2)} x^{5/2} \ln x + O\left(x^{\frac{7}{2}} (\ln x + 1)\right)$$
(3.4)

где $B_{-1}^{(\alpha_k)}$ – вычет аналитического продолжения $\overline{P}(\alpha)$ в точках $\alpha_k = (k - 1/2)i \quad (k = \overline{0,3}), \quad a \quad B_{-2}^{(5i/2)} = \lim_{\alpha \to 5i/2} (\alpha - 5i/2)^2 \overline{P}(\alpha)$ (3.5)

Вычислим вычет $B_{-1}^{(-i/2)}$ АП $\overline{P}(\alpha)$ в точке $\alpha = -i/2$. Для этого обратимся к функциональному уравнению (1.13), представив ее в виде

$$\lim_{\alpha \to -i/2} \left[\frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{(\alpha + i/2) \operatorname{sh} \pi \alpha} \left(\alpha + \frac{i}{2} \right) \overline{P}(\alpha) + \frac{\overline{P}(\alpha - 3i)}{\alpha(\alpha - i)(\alpha - 2i)} \right] = 0$$
(3.6)

Вычислив предел, получим

$$B_{-1}^{(-i/2)} = \lim_{\alpha \to -i/2} \left(\alpha + \frac{i}{2} \right) \overline{P}(\alpha) = 8i\overline{P}(-7i/2)/15\pi$$
(3.7)

Таким образом, вычет АП $P(\alpha)$ в точке $\alpha = -i/2$ выражается через значение $\overline{P}(\alpha)$ в её регулярной точке $\alpha = -7i/2$. Вычислив $\overline{P}(-7i/2)$ из (2.29) и подставив её значение в (3.7), получим

$$B_{-1}^{(-i/2)} = -i\frac{1}{\sqrt{3\pi}} \left[2P_0 - \sqrt{3}M_* \right].$$
(3.8)

. .

Аналогичным (3.6)-(3.8) путем получим

$$B_{-1}^{(i/2)} = -\frac{2i}{3} \Big[P_0 - 2\sqrt{3}M_* \Big]; \quad B_{-1}^{(3i/2)} = i\frac{2\sqrt{6}}{9\sqrt{\pi}} \Big[P_0 - \sqrt{3}M_* \Big], B_{-2}^{(5i/2)} = -\frac{8i}{15\pi} B_{-1}^{(-i/2)} = \frac{8}{15\pi\sqrt{3\pi}} \Big[2P_0 - \sqrt{3}M_* \Big].$$
(3.9)

Отметим, что при вычислении вычетов (3.8), (3.9) были использованы значения функции $Y(\alpha)$ в её регулярных точках -3i/2, -2i, -7i/2, приведённые в приложении.

Вычислим теперь $B_{-1}^{(5i/2)}$. Так как

$$B_{-1}^{(5i/2)} = \left[\left(\left(\alpha - 5i/2 \right)^2 \overline{P}(\alpha) \right)' \right]_{\alpha = 5i/2}, \qquad (3.10)$$

то из (2.29) получим

$$B_{-1}^{(5i/2)} = -\frac{2ip_0}{3} \left(F\left(\frac{5i}{2}\right) y_{-1}^{(5i/2)} + y_{-2}^{(5i/2)} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=5i/2} \right),$$
(3.11)

$$F(\alpha) = \Gamma(i\alpha) \operatorname{ch} \frac{\pi \alpha}{2} \left[\frac{\overline{Z}(-3i)}{\operatorname{sh} \pi \alpha/3} + \frac{1}{\operatorname{sh} \pi (\alpha - 2i)/3} \right], \quad (3.12)$$

$$y_{-1}^{(5i/2)} = \lim_{\alpha \to 5i/2} \frac{d}{d\alpha} \left(\left(\alpha - 5i/2 \right)^2 Y(\alpha) \right); \quad y_{-2}^{(5i/2)} = \lim_{\alpha \to 5i/2} \left(\alpha - 5i/2 \right)^2 Y(\alpha). \quad (3.13)$$

Из (3.12) получим

$$F\left(\frac{5i}{2}\right) = i\sqrt{2}\Gamma\left(-5/2\right)\left[\overline{Z}\left(-3i\right)+1\right], \qquad \frac{dF\left(\alpha\right)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=5i/2} = (3.14)$$

$$=\sqrt{2}\left(\left(-\Gamma'(-5/2)-\frac{\pi}{2}\Gamma(-5/2)\right)\left(\bar{Z}(-3i)+1\right)+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\Gamma(-5/2)\left(\bar{Z}(-3i)-1\right)\right).$$

Подставляя (3.14) в (3.11), имея при этом в виду (2.30) и значения $y_{-1}^{(5i/2)}$ и $y_{-2}^{(5i/2)}$, приведённые в приложении, получим значение вычета АП $\overline{P}(\alpha)$ в точке $\alpha = 5i/2$ в виде

$$B_{-1}^{(5i/2)} = i \frac{8\sqrt{6}}{45\pi^2} \left(\left(2P_0 - \sqrt{3}M_* \right) \left(\frac{5\sqrt{3}}{54} - \frac{3\pi}{4} - \psi\left(-5/2\right) \right) - \pi M_* \right)$$
(3.15)

где $\psi(z) = \Gamma'(z) / \Gamma(z)$ – известная пси-функция.

Подставляя (3.8), (3.9) и (3.15) в (3.4), получим следующую асимптотическую формулу (ограничиваясь первыми четырьмя членами) для контактных напряжений q(x) при $x \rightarrow +0$

$$\beta q (\beta x) = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\pi}} (2P_0 - \sqrt{3}M_*) x^{-1/2} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} (P_0 - 2\sqrt{3}M_*) x^{1/2} - \frac{2\sqrt{6}}{9\sqrt{\pi}} (P_0 - \sqrt{3}M_*) x^{3/2} - \frac{8\sqrt{6}}{45\pi^2} \left[(2P_0 - \sqrt{3}M_*) \left(\frac{5\sqrt{3}}{54} - \frac{3\pi}{4} - \psi \left(-\frac{5}{2} \right) \right) - \pi M_* \right] x^{5/2} - \frac{8\sqrt{3}}{45\pi\sqrt{\pi}} (2P_0 - \sqrt{3}M_*) x^{5/2} \ln x + O\left(x^{\frac{7}{2}} (\ln x + 1) \right), \qquad x \to +0$$

$$(3.16)$$

Из формулы (3.16) следует, что контактные напряжения имеют корневую особенность в точке x = +0. Оно исчезает при $P_0 = \sqrt{3}\lambda M_0/2$. Отметим еще, что все коэффициенты в разложении (3.16) с точностью совпадают с соответствующими коэффициентами из [7]. Кроме того, при $P_0 > \sqrt{3}\lambda M_0/2$ q(x) > 0 в некоторой окрестности точки x = 0, т.е. балка в некоторой окрестности своего конца вдавливается на полуплоскость.

Перейдем к определению асимптотической формулы, представляющей поведение контактных напряжений при $x \to \infty$ $(v \to \infty)$ из интеграла (2.31). Очевидно, что в этом случае следует рассматривать полюса АП $\overline{P}(\alpha)$ в области Im $\alpha < -1/2$. Эти полюса, как было отмечено выше, расположены в точках-тройках $\{-(3n+7)i; -(3n+5)i; -(3n+6)i\}_{n=0}^{\infty}$, в которых АП $\overline{P}(\alpha)$ имеет полюс (n+1)-го порядка. Выше также было отмечено, что $\overline{P}(\alpha)$ регулярна в полосе $-1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$ и там равномерна по τ $|\overline{P}(\alpha)| \to 0$ при $|\sigma| \to \infty$. Тогда из (2.6), (2.21) и (2.29) следует, что АП $\overline{P}(\alpha)$ регулярно в каждой полосе $-(n+5) < \operatorname{Im} \alpha < -(n+4)$, (n=0,1,2,...) и $|\overline{P}(\alpha)| \to 0$ равномерна по τ при $|\sigma| \to \infty$. Следовательно, при помощи теоремы Коши для любого неотрицательного n из (2.31) получим, аналогичное (3.1), выражение для контактных напряжений при x > 1

$$\beta q(\beta x) = -i \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2} \left[\frac{d^{k}}{k! d\alpha^{k}} \left(\left(\alpha - \alpha_{k}^{(j)} \right)^{k+1} \overline{P}(\alpha) x^{-i\alpha} \right) \right] \right|_{\alpha = \alpha_{k}^{(j)}} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m} \left[\frac{d^{n}}{n! d\alpha^{n}} \left(\left(\alpha - \alpha_{n}^{(j)} \right)^{n+1} \overline{P}(\alpha) x^{-i\alpha} \right) \right] \right|_{\alpha = \alpha_{n}^{(j)}} + \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau_{+}^{+}\infty}^{i\tau_{-}^{+} \infty} \overline{P}(\alpha) x^{-i\alpha} d\alpha - \frac{1}{2} (3n+m+5)i < \tau_{-}^{\prime} < -(3n+m+4), \quad \alpha_{n}^{(m)} = -(3n+m+4)i = 0, 1, 2.$$
(3.17)

При этом, аналогично (3.2), имеет место [12]

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\tau'_{-\infty}}^{\tau'_{-+\infty}}\overline{P}(\alpha)x^{-i\alpha}d\alpha\right| < x^{-(3n+m+5)\nu}, \quad x \to \infty$$
(3.18)

которое указывает, что (3.18) даёт асимптотическое представление контактных напряжений при $x \to \infty$ для любого n = 0, 1, 2, ...; $m = \overline{0, 2}$.

Ограничиваясь, как и выше, четырьмя первыми членами асимптотики, вычислим коэффициенты-вычеты разложения, входящие в (3.17), указывая при этом способ вычисления этих вычетов для любого n. В рассматриваемом случае следует в (3.17) принять n = 1, m = 0 (в точках $\alpha = -ki$ (k = 4, 5, 6) $\overline{P}(\alpha)$ имеет простой полюс, а в точке $\alpha = -7i$ -двухкратный полюс). Тогда, при помощи (1.13) будем иметь

$$\lim_{\alpha \to -i} \left[\frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{sh} \pi \alpha} (\alpha + i) \overline{P}(\alpha) + \frac{(\alpha + i) \overline{P}(\alpha - 3i)}{\alpha (\alpha - i) (\alpha - 2i)} \right] = 0$$
(3.19)

Вычислив предел, имея при этом условие (1.14), получим

$$A_{-1}^{(-4i)} = \lim_{\alpha \to -4i} (\alpha + 4i) \overline{P}(\alpha) = -iP_0 \pi^{-1} \Gamma(4)$$
(3.20)

Аналогично, из (1.13), (1.14) и (2.29) получим значения вычета АП $\overline{P}(\alpha)$ в

гочках
$$\alpha = -5i$$
 и $\alpha = -6i$ в виде

$$A_{-1}^{(-5i)} = -iM_*\Gamma(5)/\pi\Gamma(2), \quad A_{-1}^{(-6i)} = 2iP_0\Gamma(6)Y(-3i)\overline{Z}(-3i)/\pi\Gamma(3)(3.21)$$

В точке $\alpha = -7i$ АП $P(\alpha)$ имеет двухкратный полюс. Следовательно,

$$\overline{P}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(-7i)} \left(\alpha + 7i\right)^k + \frac{A_{-1}^{(-7i)}}{\alpha + 7i} + \frac{A_{-2}^{(-7i)}}{\left(\alpha + 7i\right)^2}$$
(3.22)

Тогда, имея в виду (2.29), получим

$$A_{-2}^{(-7i)} = \lim_{\alpha \to} \left(\alpha + 7i\right)^2 \overline{P}\left(\alpha\right) = -P_0 \Gamma\left(7\right) y_1\left(-7i\right)$$
(3.23)

где

$$v_1(\alpha) = (\alpha + 7i)^2 Y(\alpha)$$
(3.24)

Из (3.22) для $A_{-1}^{(-7i)}$ получим

$$A_{-1}^{(-7i)} = -\frac{2iP_0}{3} \left[F(-7i) y_1'(-7i) + y_1(-7i) \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \right]_{\alpha = -7i}$$
(3.25)

где $F(\alpha)$ даётся формулой (3.12). При этом нетрудно убедиться, что

$$F(-7i) = -i\frac{3}{2}\Gamma(7); \quad \frac{dF(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha = -7i} = -\frac{3}{2}\Gamma(7)\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\overline{Z}(-3i) - \psi(7)\right] (3.26)$$

Подставляя (3.26) в (3.25), получим

$$A_{-2}^{(-7i)} = -P_0 \Gamma(7) \Big[y_1'(-7i) - iy_1(-7i) \Big(2\pi 3^{-1.5} \overline{Z}(-3i) - \psi(7) \Big) \Big]$$
(3.27)

Значения $y_1(-7i)$ и $y'_1(-7i)$ приведены в приложении, а $\overline{Z}(-3i)$ дается формулой (2.30).

Имея (3.20), (3.21), (3.23) и (3.27), из (3.17) получим формулу при $x \to \infty$

$$\beta q(\beta x) = -\frac{P_0 \Gamma(4)}{\pi x^4} - \frac{M_* \Gamma(5)}{\pi x^5} + \frac{2 \Gamma(6)}{3 \pi} \left(P_0 - \sqrt{3} M_* \right) \frac{1}{x^6} +$$
(3.28)

$$+\frac{\Gamma(7)}{\pi^{2}}\left[P_{0}\left(\frac{9+8\pi\sqrt{3}}{27}-\psi(7)\right)-\frac{2\pi}{3}M_{*}\right]\frac{1}{x^{7}}+\frac{P_{0}\Gamma(7)}{\pi^{2}}\frac{\ln x}{x^{7}}+O\left(x^{-8}\left(\ln x+1\right)\right)$$

представляющее асимптотическое поведение контактных напряжений (ограничиваясь первыми четырьмя членами) при $x \to \infty$.

Из (3.28) следует, что поведение контактных напряжений в далеких, от точек приложения сосредоточенной силы P_0 и момента M_0 , точках имеют разные порядки убывания. Формула (3.28) также указывает, что после некоторого значения x балка всегда растягивает полуплоскость.

Приложение

Здесь коротко остановимся на вычислении значения $Y(\alpha)$ и $Y'(\alpha)$ в некоторых определенных точках, которые потребовались при определении коэффициентов асимптотических представлений (3.16) и (3.28). Отметим, что $Y(\alpha)$ является решением уравнения (2.5) и дается формулой (2.17). Представим (2.17) в виде

$$Y(\alpha) = \exp(H(\alpha)) = \exp\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{ch}(\nu/2)}{(e^{3\nu} - 1)e^{\nu} \operatorname{sh}\nu} \frac{e^{i\alpha\nu} - e^{\nu}}{\nu} d\nu\right]$$
(0.1)

В точках полосы регулярности $-4 < \text{Im}\,\alpha < -0,5$ значения $Y(\alpha)$ вычисляются прямым вычислением интегралов $H(\alpha)$, приводя их к табличным интегралам. Так, при $\alpha = -2i$ будем иметь

$$H(-2i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{ch}(\nu/2)}{e^{3\nu} - 1} \frac{e^{\nu} - 1}{\nu \operatorname{sh}\nu} d\nu =$$

= $4 \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^{2}(\nu/4) \operatorname{ch}(\nu/2)}{\nu \operatorname{sh}(3\nu/2)} d\nu - 4 \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^{2}(\nu/4) d\nu}{\nu \operatorname{sh}\nu} = \ln \frac{3}{4}$ (0.2)

Следовательно, из (0.1) и (0.2) получим

$$Y(-2i) = 3/4$$
. (0.3)

Значения последних интегралов из (0.2) приведены в [13, стр.355]. Аналогично (0.2) получим

$$H(-3i) = \ln(3/2) \Rightarrow Y(-3i) = 2/3$$

$$H(-3i/2) = \ln(\sqrt{3}/2) \Rightarrow Y(-3i/2) = \sqrt{3}/2$$

$$H(-5i/2) = -\ln\sqrt{2} \Rightarrow Y(-5i/2) = \sqrt{2}/2$$

$$H(-7i/2) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{8} \Rightarrow Y(-7i/2) = \sqrt{6}/4$$

University $y_{(5i/2)}^{(5i/2)} = y_{(2,12)}^{(5i/2)}$
(0.4)

Обратимся к вычислению $y_{-1}^{(51/2)}$ и $y_{-2}^{(51/2)}$ из (3.13).

Точка $\alpha = 5i/2$ уже не принадлежит полосе регулярности $Y(\alpha)$ и прямое вычисление пределов из (3.13) невозможно. Поэтому обратимся к функциональному уравнению (2.5) и рассмотрим её аналитическое продолжение из полосы регулярности $-1 < \text{Im} \alpha < -0,5$ на всю комплексную плоскость, которое, очевидно, имеет место во всей комплексной плоскости, и где под $Y(\alpha)$ вне интервала $-4 < \text{Im} \alpha < -0,5$ понимается её аналитическое продолжение. О структуре АП $Y(\alpha)$ можно догадаться, используя функциональное уравнение (2.5), как это было сделано выше для $\overline{P}(\alpha)$.

Рассмотрим функциональное уравнение (2.5), представив ее в виде

$$\lim_{\alpha \to 5i/2} \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{(\alpha - 5i/2)(\operatorname{ch} \pi \alpha - 1)} \left(\alpha - \frac{5i}{2}\right)^2 Y(\alpha) = \lim_{\alpha \to 5i/2} \left(\alpha - \frac{5i}{2}\right) Y(\alpha - 3i) \quad (0.5)$$

Вычислив пределы, имея в виду (3.13), получим

$$y_{-2}^{(5i/2)} = i\pi^{-1}y_{-1}^{(-i/2)}, \quad y_{-1}^{(-i/2)} = \lim_{\alpha \to i/2} (\alpha + i/2)Y(\alpha)$$
(0.6)

В свою очередь, из функционального уравнения (2.5) получим

$$y_{-1}^{(-i/2)} = \frac{1}{\pi i} Y\left(-7i/2\right) \tag{0.7}$$

Тогда (0.4) и (0.6) дают

$$y_{-2}^{(5i/2)} = \frac{1}{\pi^2} Y(-7i/2) = \frac{\sqrt{6}}{4\pi^2}$$
(0.8)

Для вычисления $y_{-1}^{(5i/2)}$ умножим уравнение (2.5) на $(\alpha - 5i/2)$, продифференцируем и вычислим пределы при $\alpha \rightarrow 5i/2$, имея при этом в виду (3.13), после чего получим

$$-i\pi y_{-1}^{(5i/2)} + y_{-2}^{(5i/2)}\pi^{2} = \left[\left(\left(\alpha - 5i/2 \right) Y \left(\alpha - 3i \right) \right)' \right]_{\alpha = 5i/2}$$
(0.9)

С другой стороны, нетрудно убедиться, что

$$\left[\frac{d}{d\alpha}\left(\left(\alpha - \frac{5i}{2}\right)Y\left(\alpha - 3i\right)\right)\right]_{\alpha = 5i/2} = \left[\frac{d}{d\alpha}\left(\left(\alpha + \frac{i}{2}\right)Y\left(\alpha\right)\right)\right]_{\alpha = -i/2}$$
(0.10)

$$\left\| \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\operatorname{ch} \pi \alpha \left(\alpha + i/2 \right)}{\left(\alpha + i/2 \right) \left(\operatorname{ch} \pi \alpha - 1 \right)} Y(\alpha) \right) \right\|_{\alpha = -i/2} = Y'(\alpha - 3i) \Big|_{\alpha = -i/2}$$
(0.11)

Проводя соответствующие вычисления в (0.10), (0.11) и имея в виду (0.7), получим

$$y_{-1}^{(5i/2)} = \pi^{-2} Y' \left(-7i/2\right) \tag{0.12}$$

Таким образом, вычисление $y_{-1}^{(5i/2)}$ свелось к вычислению Y'(-7i/2). Для её вычисления обратимся к (2.17). Из (2.17) получим

$$Y'\left(-7i/2\right) = Y\left(-7i/2\right)\overline{X}\left(-7i/2\right) \tag{0.13}$$

а из (2.16), раскрывая неопределённость, получим

$$\overline{X}\left(-7i/2\right) = -i\left(10\sqrt{3}\pi^{2} + 18 - 27\pi\right)/54\tag{0.14}$$

которое при помощи (0.13) и (0.12) дает окончательное значение $y_{-1}^{(5i/2)}$ в виде

$$y_{-1}^{(5i/2)} = -i\sqrt{6} \left(10\sqrt{3}\pi^2 - 27\pi + 18 \right) / 24\pi^2$$

Величины $y_1(-7i)$ и $y'_1(-7i)$, входящие в (3.23) и (3.27), вычисляются аналогичной процедурой. Рассмотрим аналитическое продолжение уравнения (2.5) в область Im $\alpha < -1/2$ и составим выражения

$$\left\| \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{ch} \pi \alpha - 1} (\alpha + 4i)^2 Y(\alpha) \right\|_{\alpha = -4i} = \left[(\alpha + 4i)^2 Y(\alpha - 3i) \right]_{\alpha = -4i}$$
(0.15)

$$\left[\frac{d}{d\alpha}\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{\operatorname{ch}\pi\alpha-1}(\alpha+4i)^{2}Y(\alpha)\right]_{\alpha=-4i} = \left[\frac{d}{d\alpha}(\alpha+4i)^{2}Y(\alpha-3i)\right]_{\alpha=-4i} (0.16)$$

Вычислив пределы в (0.15) с учетом (3.24) и очевидных равенств

$$Y(-4i) = 1/2, \qquad y_1(-7i) = \lim_{\alpha \to -4i} (\alpha + 4i) Y(\alpha - 3i)$$
 (0.17)

получим

$$y_1(-7i) = \pi^{-2} \tag{0.18}$$

Аналогично, из (0.16) получим

$$y_1'(-7i) = 2\pi^{-2}Y'(-4i)$$
(0.19)

а из функционального уравнения (2.5) -

$$Y'(-4i) = Y'(-i)/2$$
(0.20)

Следовательно,

$$y_1'(-7i) = \pi^{-2}Y'(-i)$$
 (0.21)

Но из (2.9), (2.6) и (2.16) получим

$$Y'(-i) = Y(-i)\bar{X}(-i) = \bar{X}(-i) = -i(9 + 2\pi\sqrt{3})/27, \qquad (0.22)$$

которое с учётом (0.21) даёт

$$y_1'(-7i) = -i(9+2\pi\sqrt{3})/27\pi^2$$
 (0.23)

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты на линейно-деформированном основании. //ПММ. 1961. Т.25. Вып.2. С.342-355.
- Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. //ПММ. 1974. Т.38. Вып.2. С.312-320.
- Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином. //ПММ. 1975. Т.39. Вып.6. С.1100-1109.
- Нуллер Б.М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой. //ПММ. 1974. Т.38. Вып.5. С.876-882.
- 5. Банцури Р.Д. Контактная задача для клина с упругим креплением. //ДАН СССР. 1973. Т.211. №3.
- 6. Barns E.W. The linear finite differences equations of the first order. Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 1904, vol.2.
- 7. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости. //Изв. НАН Армении. Механика. 1992. Т.45. №1-2. С.11–25.
- 8. Григорян Э.Х. Изгиб двух полубесконечных балок, лежащих на границе упругой полуплоскости. //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.20–30.
- Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Изгиб балки на границе упругой полуплоскости, Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2007. С.32-36.
- 10. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1972.
- 11. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. J. Mech. and Math. 1955, vol.8. №2.
- 12. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Наука, 1962. 278с.
- 13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798с.

Институт механики НАН Армении Поступила в редакцию 10.07.2008

2U3UUSUՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №4, 2008

Механика

УДК 539.3

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО СТЕРЖНЯ Акопян С.А., Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: бесконечный и полубесконечный стержень, преобразования Лапласа и Фурье, периодическая сила, постоянная скорость.

Keywords: infinity and semi-infinity boams, transform of Fourier and Laplace, periodic fores, constant velocity.

<u>Մ.Ա. Հակոբյան,</u> Լ.Ա. Մովսիսյան Դինամիկայի երկու խնդիրներ անվերջ երկար ձողի համար

2ողի ծռում և ձգում-սեղմում դեպքերի համար դիտարկված են երկու տիպի խնդիրներ։ Պարբերական ուժը հաստատուն արագությամբ շարժվում է անվերջ ձողի երկարությամբ և կիսաանվերջ ձողի եզրը հաստատուն արագությամբ փոխվում է որտեղ կիրառված են պարբերական ծռող մոմենտ կամ ձգող ուժ։ Լուծումները կառուցված են Ֆուրյեի և Լապլասի ձևափոխությունների միջոցով։ Ստացված է ռեզոնանս առաջանալու պայմանը։

S.A. Hakobyan, L.A.Movsisyan Two problems of dynamics for infinite long beam

The problems of bending and longitudinal motion of beam are considered. Periodical force with constant velocity is moving along infinite long beam. The edge of semi-infinite beam, with constant velocity is moving and periodical bending moment or tension force is applied on it. The solutions are built by application of transformation of Fourier and Laplace. The condition of resonance is obtained.

Для стержня рассмотрены два типа задач для изгиба и растяжения-сжатия. Периодическая сила с постоянной скоростью движется вдоль бесконечно длинного стержня, и край полубесконечного стержня с постоянной скоростью перемещается, где приложен изгибающий периодический момент или растягивающая сила. Решения построены применением преобразований Фурье и Лапласа. Получено условие появления резонанса.

1.Имеется стержень бесконечной длины. В момент времени t = 0 сосредоточенная периодическая сила $P \sin \omega t$ с постоянной скоростью c движется в сторону $x \rightarrow \infty$. Уравнение поперечного движения системы будет

$$k^{2} \frac{\partial^{4} w}{\partial x^{4}} + \frac{\partial^{2} w}{\partial t^{2}} = Q \sin \omega t \,\delta(x - ct), \qquad (1.1)$$
$$k^{2} = \frac{EJ}{\rho F}, \quad Q = \frac{P}{\rho F} \quad .$$

Подвергая (1.1) преобразованию Фурье, для трансформанты получим

$$\frac{d^2 \overline{w}}{dt^2} + k^2 \alpha^4 \overline{w} = Q e^{i\alpha ct} \sin \omega t , \qquad (1.2)$$

решение которого будет

$$\overline{w} = C_1 \cos k\alpha^2 t + C_2 \sin k\alpha^2 t + A \sin \omega t + B \cos \omega t .$$
(1.3)

В предположении нулевых начальных условий имеем:

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0$$

$$A = \frac{Qe^{i\alpha ct}}{\Delta} \left(k^2 \alpha^4 - \alpha^2 c^2 - \omega^2 \right) , \quad B = -2i\alpha c\omega \frac{Qe^{i\alpha ct}}{\Delta} ,$$

$$C_1 = -B , \qquad C_2 = -\frac{1}{k\alpha^2} \left(A\omega + i\alpha c B \right) \text{ при } t = 0,$$

$$\Delta = \left(k^2 \alpha^4 - c^2 \alpha^2 - \omega^2 \right)^2 - 4\alpha^2 c^2 \omega^2 . \qquad (1.4)$$

Прогиб w(x,t) определяется

a)

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{w} e^{-i\alpha x} d\alpha .$$
 (1.5)

Частные решения, сответствующие sin и cos, вычислим в отдельности. Будем различать два случая:

$$c^2 - 4k\omega > 0$$
 . (1.6)

Тогда в подынтегральных выражениях двух интегралов

$$QJ_1 = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{+i\alpha(ct-x)} d\alpha \quad , \qquad J_2 = 2\alpha c\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{+i\alpha(ct-x)}}{\Delta} d\alpha \tag{1.7}$$

имеем восемь особых точек (нули Δ) и расположены они на оси абсциссы. Вот они:

$$\alpha_{1,2} = \frac{c \pm x_1}{2k} , \quad \alpha_{3,4} = \frac{-c \pm x_2}{2k} , \quad x_1 = \sqrt{c^2 + 4\omega k} ,$$

$$\alpha_{5,6} = \frac{c \pm x_2}{2k} , \quad \alpha_{7,8} = \frac{-c + x_2}{2k} , \quad x_2 = \sqrt{c^2 - 4\omega k} .$$
(1.8)

Вычисления интегралов производятся обычным образом [1]. Контур интегрирования показан на фиг1. Как обычно, особые точки обходятся малыми полукругами c_{ε}^{k} и пользуются теоремой Коши и леммой Жордана. И так как при $R \to \infty$ интеграл по большому полукругу стремится к нулю, то для J_{1} в окончательном виде имеем

$$J_{1} = \frac{\pi}{2\omega^{2}} \left[\frac{c}{k} \sin cy (\cos x_{1}y + \cos x_{2}y) - \frac{c^{2} + 2k\omega}{kx_{1}} \cos cy \sin x_{1}y - \frac{c^{2} - 2k\omega}{kx_{2}} \cos cy \sin x_{2}y \right].$$
(1.9)

б) В случае $c^2 - 4k\omega < 0$ из восьми корней четыре комплексные:

$$\alpha_{3,4} = \frac{-c \pm i \sqrt{4k\omega - c^2}}{2k} , \quad \alpha_{5,6} = \frac{c \pm i \sqrt{4k\omega - c^2}}{2k} . \quad (1.10)$$

Из этих четырех корней в верхней полуплоскости (с положительной мнимой частью, фиг.2) являются α_3 и α_5 . При вычислении соответствующего интеграла уже берутся вычеты в этих точках. И в окончательном виде выражение J_1 для данного случая будет

$$J_1 = \frac{\pi}{2\omega^2} \left[\frac{c}{k} \sin cy \left(e^{-x_3 y} + \cos x_1 y \right) - \right]$$

$$-\frac{c^{2}+2k\omega}{kx_{1}}\cos cy\sin x_{1}y+\frac{c^{2}-2k\omega}{kx_{3}}e^{-x_{3}y}\cos cy\bigg],$$
 (1.11)
$$x_{3}=\sqrt{4k\omega-c^{2}} , \qquad y=\frac{ct-x}{2k}.$$







Фиг.2

Подобными же методами вычисляется интеграл J_2 . Для случая а)

$$J_{2} = \frac{i\pi}{2\omega^{2}} \left[\frac{c}{k} \cos cy \left(\cos x_{2} y - \cos x_{1} y \right) + \frac{c^{2} - 2k\omega}{kx_{2}} \sin cy \sin x_{2} y - \frac{c^{2} + 2k\omega}{kx_{1}} \sin cy \sin x_{1} y \right]$$
(1.12)

и для случая б)

$$J_{2} = -\frac{i\pi}{2\omega^{2}} \left[\frac{c}{k} \cos cy \left(\cos x_{1} y - e^{-x_{3} y} \right) + \frac{c^{2} + 2k\omega}{kx_{1}} \sin cy \sin x_{1} y + \frac{c^{2} - 2k\omega}{kx_{3}} e^{-x_{3} y} \sin cy \right]$$
(1.13)

Выражения прогиба от возмущающей силы будет

$$w_1(x,t) = \frac{Q}{2\pi} \left(J_1 \sin \omega t + i J_2 \cos \omega t \right)$$
(1.14)

Что касается решения однородной части, то его можно найти подобным же образом, к тому же, формулы будут во много длиннее, чем (1.9)–(1.13). Как известно, вследствие внутреннего трения решение однородной части со временем стремится к нулю и очень часто можно довольствоваться частным решением (стационарной частью) для выяснения общего характера движения. Кстати, не излишне привести цитату (по другой подобной задаче). «Разумеется, это лишь частное решение, но оно описывает наиболее важную, стационарную часть процесса, другая часть решения, описывающая колебания с собственными частотами, быстро исчезает вследствие действия неизбежных сил трения» [2] (стр.273).

В частном случае, когда сила неподвижна (c=0), в (1.3) B=0 и для J_1 будем иметь

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{k^2 \alpha^4 - \omega^2}$$
(1.15)

Корни знаменателя суть

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{k}} , \qquad \alpha_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{\omega}{k}} .$$
 (1.16)

Интеграл (1.15) вычисляется, как и в предыдущих случаях, и в окончательном виде имеем

$$J_{1} = \begin{cases} \frac{\pi}{2\omega\sqrt{k\omega}} \left(\sin\sqrt{\frac{\omega}{k}}x - e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}x} \right), & x < 0\\ -\frac{\pi}{2\omega\sqrt{k\omega}} \left(\sin\sqrt{\frac{\omega}{k}}|x| - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}|x|} \right), & x > 0 \end{cases}$$
(1.17)

В полученном решении – два факта, достойные упоминания:

а) при подвижной силе помимо вынужденных колебаний по виду во внешней силе появляется еще другое гармоническое колебание (наличие $\cos \omega t$);

б) в случае $c^2 = 4k\omega$ условие $\Delta = 0$ дает кратные корни и будем иметь расходящиеся интегралы. Естественно, по аналогии с обычным резонансом, принять, что при таком условии возникает резонанс.

2. Для продольного движения

$$a^{2} \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} = \frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} + q \,\delta(x - ct) \sin \omega t \quad , \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$
(2.1)

при нулевых начальных условиях трансформанта \overline{u} есть

$$\overline{u} = c_1 \cos a\alpha + c_2 \sin a\alpha + e^{i\alpha ct} \left(A \sin \omega t + B \cos \omega t \right), \qquad (2.2)$$

$$A = q \frac{\left(a^2 - c^2\right)\alpha^2 - \omega^2}{\Delta_1} , \quad B = -q \frac{2ic\alpha\omega}{\Delta_1} ,$$
$$\Delta_1 = \left[\left(a^2 - c^2\right)\alpha^2 - \omega^2\right]^2 - 4\alpha^2 c^2\omega^2 ,$$

а c_i через A и B выражается, как в (1.4).

Особые точки $\left(\Delta_1 = 0 \right)$ находятся на оси абсцисс

$$\alpha_{1,3} = \mp \frac{\omega}{a-c} , \quad \alpha_{3,4} = \pm \frac{\omega}{a+c} .$$
 (2.3)

Обратное преобразование совершается обычным образом, и окончательное выражение для перемещения есть

$$u(x,t) = \frac{q}{2a\omega} \{\sin \omega t [\sin \alpha_3 (x-ct) + \sin \alpha_2 (x-ct)] + \cos \omega t [\cos \alpha_2 (x-ct) - \cos \alpha_3 (x-ct)] \}$$
(2.4)

3. Вторая задача такая. Имеется полубесконечный стержень, край которого движется с постоянной скоростью 2υ (стержень укорачивается). Введя новую координату

$$y = x - 2\upsilon t , \qquad (3.1)$$

уравнение движения поперечных колебаний преобразуем к виду

$$k^{2} \frac{\partial^{4} w}{\partial y^{4}} + 4\nu^{2} \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} - 4\nu \frac{\partial^{2} w}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^{2} w}{\partial t^{2}} = 0.$$
(3.2)

Допустим, что имеются нулевые начальные условия и на конце y = 0 заданы условия относительно перемещения и изгибающего момента:

$$w = 0$$
, $EJ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = A \sin \omega t$. (3.3)

В [3] была рассмотрена подобная задача, когда на конце заданы условия типа защемления.

Применяя преобразования Лапласа, вместо (3.2) и (3.3) будем иметь:

$$\frac{d^{4}\overline{w}}{dy^{4}} + n^{2} \left(4\upsilon^{2} \frac{d^{2}\overline{w}}{dy^{2}} - 4\upsilon p \frac{d\overline{w}}{dy} + p^{2}\overline{w} \right) = 0,$$

$$\overline{w} = 0, \qquad \frac{d^{2}\overline{w}}{dy^{2}} = M \frac{\omega}{p^{2} + \omega^{2}} \operatorname{пpu} y = 0,$$

$$n = \frac{1}{k}, \qquad M = \frac{A}{EJ}.$$
(3.4)

Среди четырех корней характеристического уравнения – необходимые нам следующие два:

$$s_1 = -i\left(n\upsilon + \sqrt{n^2\upsilon^2 - inp}\right)$$
, $s_2 = i\left(n\upsilon + \sqrt{n^2\upsilon^2 + inp}\right)$. (3.5)

С учетом условий (3.4) решение относительно \overline{W} представится

$$\overline{w} = \frac{M\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{s_1^2 - s_i^2} \left(e^{s_1 y} - e^{s_2 y} \right).$$
(3.6)

Обратное преобразование от (3.6) в принципе возможно, как сделано в работе [2], но полученный результат настолько громоздкий и необозримый, что целесообразнее воспользоваться асимптотическими выражениями – соответственно, для малых и больших времен.

Для малых времен $p \to \infty$ вместо (3.5) можно брать

$$s_{1,2} = -s(1\pm i)\sqrt{p}$$
, $2s^2 = n$. (3.7)

Тогда (3.6) примет вид

$$\overline{w} = \frac{M\omega}{4s^2 i} F(p), \quad F(p) = \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)} \left(e^{-sy(1+i)\sqrt{p}} - e^{-sy(1-i)\sqrt{p}} \right).$$
(3.8)

Оригинал функции F(p) находим, пользуясь [1,4,5]. Её можно представить как

$$F(p) = -2i \frac{e^{-sy\sqrt{p}} \sin sy\sqrt{p}}{p(p^2 + \omega^2)}.$$
(3.9)

Известно [1]

$$\frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\sin\sqrt{p} \xrightarrow{:} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}.$$

Используя теорему подобия, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-sy\sqrt{p}}\sin sy\sqrt{p} \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{s^2y^2}{2t}, \quad s, y > 0.$$
(3.10)

Далее известно [5], если

$$G(p) \xrightarrow{\cdot} g(t), \quad \text{to}$$

$$\frac{1}{p\sqrt{p}} G\left(\frac{1}{p}\right) \xrightarrow{\cdot} \int_{0}^{t} \frac{\sin\left(2\sqrt{\xi t}\right)}{\sqrt{\xi t}} g(\xi) d\xi, \quad (3.11)$$

соответствие чего

$$\frac{1}{\sqrt{p}\left(p^{2}+\omega^{2}\right)} \xrightarrow{i} \frac{1}{\omega^{2}} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin\left(2\sqrt{\xi t}\right)}{\sqrt{\pi\xi}} \cos\frac{\xi}{\omega} d\xi \,. \tag{3.12}$$

Используя известное равенство [5]

$$\int_{0}^{\infty} \sin 2bx \cos ax^{2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[\sin \frac{b^{2}}{a} C\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \cos \frac{b^{2}}{a} S\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right]$$

a, b > 0, где

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{x} \cos t^{2} dt , \quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{x} \sin t^{2} dt ,$$

(3.12) можно представить как

$$\frac{1}{\sqrt{p}\left(p^{2}+\omega^{2}\right)} \xrightarrow{i} \sqrt{\frac{2}{\omega^{3}}} \left[\sin \omega t C\left(\sqrt{\omega t}\right) - \cos \omega t S\left(\sqrt{\omega t}\right)\right].$$
(3.13)

Согласно теореме свертки [1], из (3.10) и (3.11) получим

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} -i\sqrt{\frac{8}{\omega^3}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sin \frac{s^2 y^2}{2(t-\tau)} \left[\sin \omega \tau C\left(\sqrt{\omega\tau}\right) - \cos \omega \tau S\left(\sqrt{\omega\tau}\right) \right] d\tau .$$
(3.14)

Таким образом, по (3.8) и (3.14) определяется прогиб для малых времен.

Для больших времен $p \to 0$ вместо (3.5) можно брать

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \frac{p}{v} \pm 2inv$$
(3.15)

и для преобразований (3.6) с (3.15), пользуясь теоремой опаздывания, получим

$$w(x,t) = \frac{M}{2n\omega} \sin 2n\upsilon y \left[\cos \omega \left(t - \frac{y}{2\upsilon} \right) - H \left(t - \frac{y}{2\upsilon} \right) \right], \qquad (3.16)$$

где *H* – единичная функция.

4. Для продольного движения решение получается очень простое. Полубесконечный стержень укорачивается со скоростью 2υ и на конце приложена сила $P = P_0 \sin \omega t$. Тогда преобразованное уравнение движения будет

$$\left(a^{2}-4\upsilon^{2}\right)\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}+4\upsilon\frac{\partial^{2}u}{\partial y\partial t}-\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}=0, \ a^{2}=\frac{E}{\rho}$$
(4.1)

Корни характеристического уравнения

$$S_1 = \frac{p}{a+2\upsilon}, \qquad S_2 = -\frac{p}{a-2\upsilon}$$
 (4.2)

и условие на конце y = 0

$$\frac{d\overline{u}}{dy} = \frac{P_0}{EF} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$
(4.3)

дают

$$\overline{u} = -\frac{P_0\omega}{EF} \frac{a-2\upsilon}{p(p^2+\omega^2)} e^{-\frac{py}{a-2\upsilon}} . (4.4)$$

Оригинал этой функции будет

$$u(x,t) = \frac{P_0}{EF} \frac{a-2\upsilon}{\omega} \left[\cos \omega \left(t - \frac{y}{a-2\omega} \right) - H \left(t - \frac{y}{a-2\omega} \right) \right].$$
(4.5)

При a = 2v, естественно, нет движения в стержне.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
- 2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352с.
- Мовсисян Л.А. Колебания полубесконечной балки с перемещающимся концом. //Изв. АН СССР. МТТ. 1966. №1. С. 174-177.
- 4. Бейтмен Г. и Эдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. 344 с.
- 5. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, суммы рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Институт механики НАН Армении Поступила в редакцию 10.04.2008

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №4, 2008

Механика

УДК 539.3

О ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ И РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ПОЛОСУ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ Асратян, М. Г. Хачатрян Г. Г.

Ключевые слова: полоса переменной ширины, сосредоточенная сила, распределённая нагрузка, асимптотическое решение.

Keywords: band of variable width, concentrated forces, distributed load, asymptotic solution.

Մ. Գ. Հասրաթյան, Գ. Գ. Խաչատրյան

Փոփոխական լայնության շերտի վրա կենտրոնացված ուժի և բաշխված բեռի ազդեցության մասին

Ախատանքում դիտարկված է փոփոխական լայնության շերտի խառը եզրային խնդիր, երբ նրա ընդերկայնական եզրերից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուս ուղղագիծ եզրի վրա ազդում է կենտրոնացված ուժ և կտոր առ կտոր անընդհատ բեռնավորում։

Խնդիրը մոդելավորում է առաձգական հիմնատակերի և հիմքերի փոխազդեցությունը։

Ասիմպտոտիկ և Ֆլաման Բուսինեսկի լուծումների համակցման ձանապարհով որոշված են փոփոխական լայնության շերտի լարումները և դեֆորմացիաները, երբ շերտը գտնվում է հարթ դեֆորմացիոն վիձակում։

Բերված են կիրառական նշանակության մասնակի խնդիրների լուծումներ։

M. G. Hasratyan, G. G. Khachatryan

On the influence of concentrated force and distributed load on the band of variable width

The mixed boundary problem for the band of variable widths is considered when one of the longitudinal edges is rigidly fixed, on the other straight edge the concentrated force and piecewise continuous load is influence.

The problem is modeling the interaction of elastic base and foundation. On the combined way of asymptotic and Flaman–Businsk solutions the band of width variable strains and deformations are determined, when the band is on the smooth deforming form. The solutions of the partial problems for applied purpose are brought.

В работе рассмотрена смешанная краевая задача для полосы переменной ширины, когда одна из продольных граней жестко закреплена, а на другую прямолинейную грань действует сосредоточенная сила и кусочно-непрерывная нагрузка.

Задача моделирует взаимодействие упругого основания и фундамента.

Путем сращивания решений Фламана–Буссинеска и асимптотического определены напряжения и деформации для полосы переменной ширины при нахождении полосы в плоско-деформированном состоянии.

Приведены решения частных задач прикладного назначения.

Смешанные краевые задачи для полос и пластин постоянной и переменной толщин были решены асимптотическим методом в [1-6]. В этих задачах граничные функции предполагались дифференцируемыми необходимое число раз. Между тем, во многих задачах граничные функции бывают дискретными или кусочно-гладкими (сосредоточенные силы и кусочно-непрерывные нагрузки).

В настоящей работе рассматривается краевая задача для полосы переменной ширины, когда один ее край жестко закреплен, а на другой край действует сосредоточенная сила или кусочно-непрерывная нагрузка. Задача решается путем сращивания асимптотического решения с решением задачи Фламана-Буссинеска [7,8]. Приведены иллюстрационные примеры.

Рассматривается изотропная полоса

$$\Omega = \{x, z: -l \le x \le l, -\varphi(x) \le z \le h_1, \}$$

 $\varphi(x) \ge 0, h_1 \ge 0, h = \{h_1 + \sup \varphi(x)\}, h << l\}$ переменной ширины. На верхней прямолинейной грани полосы приложена сосредоточенная нагрузка с нормальной и тангенциальной компонентами - P_z и - P_x (фиг. 1).





$$\sigma_z(x,h_1) = -\mathbf{P}_z\delta(x), \quad \sigma_{xz}(x,h_1) = -\mathbf{P}_x\delta(x) \tag{1.1}$$

Нижняя продольная грань полосы, описывающаяся кусочно-гладкой функцией $z = -\phi(x)$, жестко закреплена.

$$u_{x}(x,-\phi(x)) = u_{z}(x,-\phi(x)) = 0$$
 (1.2)

Требуется определить напряженно-деформированное состояние полосы, когда она находится в состоянии плоской деформации. Задача, в частности, моделирует упругое основание-фундамент мелкого заложения в модели сжимаемого слоя [9,10].

Решение задачи ищется путем сращивания асимптотического решения [1,4,5] с решением Фламана–Буссинеска [11].

$$Q = A + B \tag{1.3}$$

где A – общий интеграл асимптотического решения, B – решение Фламана– Буссинеска. Асимптотическое решение смешанной краевой задачи для изотропной полосы имеет вид [1,4,5].

$$A = \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^{\kappa+s} A^{(s)}, \ \kappa_{u} = 0, \ \kappa_{\sigma} = -1,$$

$$\sigma_{xz}^{(s)} = \sigma_{xz0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xz*}^{(s)}(\xi,\zeta), \ (x,z); \ \sigma_{xx}^{(s)} = \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_{zz0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xx*}^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$U_{x}^{(s)} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xz0}^{(s)}\zeta + U_{x0}^{(s)}(\xi) + U_{x*}^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$U_{z}^{(s)} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_{zz0}^{(s)}\zeta + U_{z0}^{(s)}(\xi) + U_{z*}^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$\sigma_{xz*}^{(s)} = -\int_{0}^{\zeta} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} d\zeta, \ \sigma_{zz*}^{(s)} = -\int_{0}^{\zeta} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \xi} d\zeta,$$

$$\sigma_{xx*}^{(s)} = \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_{zz*}^{(s)}(\xi) + \frac{E}{(1-\nu^{2})} \frac{\partial U_{x}^{(s-1)}}{\partial \xi} d\zeta$$
(1.4)

$$U_{x^{*}}^{(s)} = \int_{0}^{\zeta} \left[\frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xz^{*}}^{(s)} - \frac{\partial U_{z}^{(s-1)}}{\partial \zeta} \right] d\zeta,$$
$$U_{z^{*}}^{(s)} = \int_{0}^{\zeta} \left[-\frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{xx^{*}}^{(s)} + \frac{(1-\nu^{2})}{E} \sigma_{zz^{*}}^{(s)} \right] d\zeta,$$
$$\xi = \frac{x}{l}, \ \zeta = \frac{z}{h} = \varepsilon^{-1} \frac{z}{l}, \ \varepsilon = \frac{h}{l}, \ U_{x}^{(s)} = \frac{u_{x}^{(s)}}{l}, \ U_{z}^{(s)} = \frac{u_{z}^{(s)}}{l}.$$

Представленное асимптотическое решение (1.4) содержит четыре неизвестных функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(s)}, \sigma_{z0}^{(s)}, U_{x0}^{(s)}, U_{z0}^{(s)}$, которые подлежат определению из граничных условий (1.1), (1.2).

Решение Фламана–Буссинеска приводим для кусочно-непрерывной нагрузки на отрезке $a \le x \le b$, откуда легко выписывается решение также для сосредоточенной силы.

$$\sigma_{zz}^{(B)} = -\frac{2}{\pi} \int_{a}^{b} p_{z}(\xi) \frac{(z-h_{1})^{3}}{r^{4}} d\xi - \frac{2}{\pi} \int_{a}^{b} P_{x}(\xi) \frac{(z-h_{1})^{2}(x-\xi)}{r^{4}} d\xi$$

$$\sigma_{xx}^{(B)} = -\frac{2}{\pi} \int_{a}^{b} p_{z}(\xi) \frac{(x-\xi)^{2}(z-h_{1})}{r^{4}} d\xi - \frac{2}{\pi} \int_{a}^{b} P_{x}(\xi) \frac{(x-\xi)^{3}}{r^{4}} d\xi$$

$$\sigma_{xz}^{(B)} = -\frac{2}{\pi} \int_{a}^{b} p_{z}(\xi) \frac{(z-h_{1})^{2}(x-\xi)}{r^{4}} d\xi - \frac{2}{\pi} \int_{a}^{b} P_{x}(\xi) \frac{(z-h_{1})(x-\xi)^{2}}{r^{4}} d\xi \quad (1.5)$$

$$U_{x}^{(B)} = \frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_{a}^{b} P_{z}(\xi) \left[\frac{(z-h_{1})(x-\xi)}{r^{2}} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(x-\xi)}{(z-h_{1})} \right] d\xi - -\frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_{a}^{b} P_{x}(\xi) \left[\frac{(x-\xi)^{2}}{r^{2}} + 2(1-\nu) \ln|r| \right] d\xi.$$

$$U_{z}^{(B)} = -\frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_{a}^{b} P_{z}(\xi) \left[\frac{(x-\xi)^{2}}{r^{2}} + 2(1-\nu) \ln|r| \right] d\xi + +\frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_{a}^{b} P_{x}(\xi) \left[\frac{(z-h_{1})(x-\xi)}{r^{2}} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(z-h_{1})}{(x-\xi)} \right] d\xi$$

$$r(x,z) = \left[(x-\xi)^{2} + (z-h_{1})^{2} \right]_{z}^{\frac{1}{2}}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), (1.2) с учетом (1.3)-(1.5), для неизвестных функций получим:

$$\sigma_{xz0}^{(s)} = -\sigma_{xz*}^{(s)} \left(\xi, \frac{h}{h_1}\right), \quad (x, z)$$

$$U_{x0}^{(s)} = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\phi}{h} \sigma_{xz0}^{(s)} - \overline{U}_x^{(s)} - U_{x*}^{(s)} \left(\xi, -\frac{\phi}{h}\right)$$

$$U_{z0}^{(s)} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \frac{\phi}{h} \sigma_{zz0}^{(s)} - \overline{U}_z^{(s)} - U_{z*}^{(s)} \left(\xi, -\frac{\phi}{h}\right)$$

$$\overline{U}_{x}^{(s)} = \overline{U}_{z}^{(s)} = 0 \quad \text{при } s \neq 0; \quad \overline{U}_{x}^{(0)} = \frac{1}{l} \overline{u}_{x}, \qquad (x, z)$$

$$\overline{u}_{x} = -\frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_{a}^{b} \left\{ P_{z} \left[\frac{(x-\xi)(h_{1}+\phi)}{r^{2}} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(x-\xi)}{(h_{1}+\phi)} \right] + P_{x} \left[2(1-\nu) \ln |r| + \frac{(h_{1}+\phi)^{2}}{r^{2}} \right] \right\} d\xi \qquad (1.6)$$

$$\overline{u}_{z} = -\frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_{a}^{b} \left\{ P_{z} \left[\frac{(x-\xi)^{2}}{r^{2}} + 2(1-\nu) \ln |r| \right] + P_{x} \left[\frac{(x-\xi)(h_{1}+\phi)}{r^{2}} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(h_{1}+\phi)}{(x-\xi)} \right] \right\} d\xi$$

$$\overline{v} = \left[(x-\xi)^{2} + (h_{1}+\phi)^{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

где $r = [(x - \xi)^2 + (h_1 + \varphi)^2]^2$. Подставляя (1.6) в (1.4), получим итерационные формулы, позволяющие заданной определить компоненты полей напряжений и перемещений с наперед заданной асимптотической точностью $\mathrm{O}(\varepsilon^3)$.

$$\sigma_{xx}^{(s)} = -\frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_{zz*}^{(s)}\left(\frac{h_1}{h}\right) + \sigma_{xx*}^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$\sigma_{zz}^{(s)} = -\sigma_{xz*}^{(s)}\left(\frac{h_1}{h}\right) + \sigma_{xz*}^{(s)}(\xi,\zeta), \quad (x,z)$$
(1.7)

$$U_x^{(s)} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{xz*}^{(s)}\left(\frac{h_1}{h}\right)\frac{(\phi+h\zeta)}{h} - \overline{U}_x^{(s)} - U_{x*}^{(s)}\left(\xi, -\frac{\phi}{h}\right) + U_{x*}^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$U_{z}^{(s)} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\sigma_{zz^{*}}^{(s)}\left(\frac{h_{1}}{h}\right)\frac{(\varphi+h\zeta)}{h} - \overline{U}_{z}^{(s)} - U_{z^{*}}^{(s)}\left(\xi, -\frac{\varphi}{h}\right) + U_{z^{*}}^{(s)}(\xi, \zeta).$$

Решение краевой задачи (1.1), (1.2), вычисленное по формулам (1.3)-(1.7) с точностью $O(\epsilon^3)$, что обычно является достаточным для практических расчетов, будет

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(B)} + \frac{E}{(1-\nu^{2})} \left[\frac{\partial^{2} \overline{u}_{z}}{\partial x^{2}} (z+\varphi) - \frac{\partial \overline{u}_{z}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u}_{x}}{\partial x} \right],$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{(B)} + \frac{E}{(1-\nu^{2})} \frac{\partial^{2} \overline{u}_{x}}{\partial x^{2}} (z-h_{1}), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(B)}, \quad (1.8)$$

$$u_{x} = u_{x}^{(B)} - \overline{u}_{x} - \left[\frac{\partial \overline{u}_{z}}{\partial x} - \frac{\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_{x}}{\partial x} + (2h_{1} + \frac{\nu}{(1-\nu)}\varphi) \frac{\partial^{2} \overline{u}_{x}}{\partial x^{2}} \right] (z+\varphi) + \frac{(2-3\nu)}{2(1-2\nu)} \frac{\partial^{2} \overline{u}_{x}}{\partial x^{2}} (z^{2}-\varphi^{2})$$

$$u_{z} = u_{z}^{(B)} - \overline{u}_{z} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left[\frac{\partial \overline{u}_{x}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_{z}}{\partial x} - \varphi \frac{\partial^{2} \overline{u}_{z}}{\partial x^{2}} \right] (z+\varphi) - \frac{\nu}{2(1-2\nu)} \frac{\partial^{2} \overline{u}_{z}}{\partial x^{2}} (z^{2}-\varphi^{2})$$

Решение написано для кусочно-непрерывной вертикальной и горизонтальной нагрузок, где \overline{u}_x и \overline{u}_z имеют вид (1.6), и где решение приведено в (1.5).

2.a) Наиболее часто встречающийся в расчетной практике случай равномерно распределенной нагрузки - р (фиг.2) / .

$$\sigma_{xx} = P_x(x) = 0, \quad \sigma_{zz}(z = h_1) = \begin{cases} P_z(x) = -p & -a \le x \ge a \\ 0, & x \notin [-a, a], \end{cases}$$
(2.1)



НДС в точке (x, z) от равномерной нормальной нагрузки на участке (-a, +a)будет:

$$\begin{split} \sigma_{x} &= -\frac{2p}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{(x-\xi)^{2}(z-h_{1})}{r^{4}} d\xi + \frac{E}{(1-v^{2})} \int_{-a}^{a} \left[\frac{\partial^{2}\overline{u}_{z}}{\partial x^{2}} (z+\phi) + \frac{\partial\overline{u}_{z}}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\overline{u}_{x}}{\partial x} \right] d\xi \\ \sigma_{z} &= -\frac{2p}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{(z-h_{1})^{2}}{r^{4}} d\xi , \\ \sigma_{xz} &= -\frac{2p}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{(z-h_{1})^{2} (x-\xi)}{r^{4}} d\xi + \frac{E}{(1-v^{2})} \int_{-a}^{a} \frac{\partial^{2}\overline{u}_{x}}{\partial x^{2}} (z-h_{1}) d\xi \\ u_{x} &= \frac{p}{2\pi G} \int_{-a}^{a} \left[(1-2v) \left(\arctan \left(\frac{x-\xi}{(z-h_{1})} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{(x-\xi)(z-h_{1})}{r^{2}} \right) \right] d\xi + \\ &+ \int_{-a}^{a} \left\{ -\overline{u}_{x} - \frac{1}{(1-v)} \left[(1-v) \frac{\partial\overline{u}_{z}}{\partial x} + v \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\overline{u}_{x}}{\partial x} + (2h_{1}+v\phi) \frac{\partial^{2}\overline{u}_{x}}{\partial x^{2}} \right] (z+\phi) + \\ &+ \frac{(2-v)}{2(1-v)} \frac{\partial^{2}\overline{u}_{x}}{\partial x^{2}} (z^{2}-\phi^{2}) \right\} d\xi \\ u_{z} &= -\frac{p}{2\pi G} \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{(x-\xi)^{2}}{r^{2}} - 2(1-v) \ln \left[(x-\xi)^{2} + (z-h_{1})^{2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} d\xi + \\ &+ \int_{-a}^{a} \left\{ -\overline{u}_{z} - \frac{v}{2(1-v)} \frac{\partial^{2}\overline{u}_{z}}{\partial x^{2}} (z^{2}-\phi^{2}) - \frac{v}{2(1-v)} \left[-\frac{\partial\overline{u}_{x}}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\overline{u}_{z}}{\partial x} + \phi \frac{\partial^{2}\overline{u}_{z}}{\partial x^{2}} \right] (z+\phi) \right\} d\xi \end{split}$$

$$\overline{u}_{x} = -\frac{p}{2\pi G} \left[\frac{x(h_{1} + \varphi)}{x^{2} + (h - \varphi)^{2}} + (2\nu - 1) \left(\arctan \frac{x}{(h_{1} + \varphi)} + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$\overline{u}_{z} = -\frac{p}{2\pi G} \left\{ \frac{x^{2}}{x^{2} + (h_{1} + \varphi)^{2}} + 2(1 - \nu) \ln \left[x^{2} + (h_{1} + \varphi)^{2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

где $r^{2} = \left[(x - \xi)^{2} + (z - h_{1})^{2} \right]; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ - модуль сдвига.

б) Приведем решение задачи, когда на верхний край полосы действует нормальная линейная нагрузка, а касательная нагрузка отсутствует (фиг. 3)

$$\sigma_{zz}(z=h_1) = \begin{cases} P_z(x) = -p_1 x & x \in [0,a] \\ 0 & x \notin [0,a] \end{cases}, \quad \sigma_{xz} = P_x(x) = 0. \tag{2.3}$$



Фиг.3

Линейная нагрузка рассматривается как нагрузка, распределённая элементарными сосредоточенными силами на участке (0, a). Тогда решение задачи будет

$$\sigma_{xx} = -\frac{2p_1}{\pi} \int_0^a \frac{(x-\xi)^3 (z-h_1)}{r^4} d\xi + \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 \overline{u}_z}{\partial x^2} (z+\varphi) + \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial x} \right]$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{2p_1}{\pi} \int_0^a (x-\xi) \frac{(z-h_1)^3}{r^4} d\xi,$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{2p_1}{\pi} \int_0^a \frac{(x-\xi)^2 (z-h_1)^2}{r^4} d\xi + \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \overline{u}_x}{\partial x^2} (z-h_1)$$

$$u_x = \frac{p_1}{2\pi G} \int_0^a (x-\xi) \left[\frac{(z-h_1)(x-\xi)}{r^2} + (2\nu-1) \left(\operatorname{arctg} \frac{(x-\xi)}{(z-h_1)} + \frac{\pi}{2} \right) \right] d\xi - \overline{u}_x - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left[\left(\frac{1-2\nu}{(1-\nu)} \right) \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial x} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial x} + \left(2h_1 + \frac{\nu}{(1-\nu)} \varphi \right) \frac{\partial^2 \overline{u}_x}{\partial x^2} \right] (z+\varphi) + \frac{1}{2\pi G} \int_0^a \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial x} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial x} + \left(2h_1 + \frac{\nu}{(1-\nu)} \varphi \right) \frac{\partial^2 \overline{u}_x}{\partial x^2} \right] (z+\varphi) + \frac{1}{2\pi G} \int_0^a \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial x} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial x} + \frac{2h_1 + \nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 \overline{u}_x}{\partial x^2} \right] (z+\varphi) + \frac{1}{2\pi G} \int_0^a \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial x} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial x} + \frac{2h_1 + \nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 \overline{u}_x}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$+\frac{(2-\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial^{2}\overline{u}_{x}}{\partial x^{2}}(z^{2}-\varphi^{2})$$
(2.4)
$$u_{z} = -\frac{p_{1}}{2\pi G}\int_{0}^{a}(x-\xi)\left\{\frac{(z-h_{1})^{2}}{r^{2}} + (2\nu-1)\ln\left[\frac{(x-\xi)^{2}+(z-h_{1})^{2}}{l_{1}^{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}d\xi - \overline{u}_{x} - \frac{\nu}{2(1-\nu)}\frac{\partial^{2}\overline{u}_{z}}{\partial x^{2}}(z^{2}-\varphi^{2}) - \frac{\nu}{2(1-\nu)}\left[-\frac{\partial\overline{u}_{x}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\overline{u}_{z}}{\partial x} + \varphi\frac{\partial^{2}\overline{u}_{z}}{\partial x^{2}}\right](z+\varphi)$$
$$\overline{u}_{x} = -\frac{p_{1}}{2\pi G}x\left[\frac{x(\varphi+h_{1})}{[x^{2}+(\varphi+h_{1})^{2}]} + (2\nu-1)\left(\arctan\frac{x}{(\varphi+h_{1})} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$\overline{u}_{z} = -\frac{p_{1}}{2\pi G}x\left[\frac{x^{2}}{[x^{2}+(\varphi+h_{1})^{2}]} + 2(1-\nu)\ln\left[x^{2}+(\varphi+h_{1})^{2}\right]^{\frac{1}{2}}\right]$$

Решение, приведенное выше, состоит из решения Д. Е. Польшина (1933 г.), сращенной с асимптотическим решением. Как видим, НДС зависит не только от координаты точки и от величины нагрузки, но и от упругого характера материала и геометрии полосы.

в) Рассмотрим теперь случай, когда на верхнем краю полосы задана линейная горизонтальная нагрузка $P_x = q_2 x$ на участке (0, a) (фиг. 4).



$$\sigma_{zz} = P_z \delta(x) = 0, \qquad \sigma_{xz}(x,h) = \begin{cases} -q_2 x & x \in [0,a] \\ 0 & x \notin [0,a] \end{cases}$$
(2.5)

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещения полосы будут:

$$\sigma_{x} = \frac{2q_{2}}{\pi} \int_{0}^{a} (x-\xi) \frac{(x-\xi)^{3}}{r^{4}} d\xi + E \left[\frac{\partial^{2} \overline{u}_{z}}{\partial x^{2}} (\varphi+z) + \frac{\partial \overline{u}_{z}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u}_{x}}{\partial x} \right]$$
$$\sigma_{z} = \frac{2q_{2}}{\pi} \int_{0}^{a} (x-\xi) \frac{(z-h_{1})^{2} (x-\xi)}{r^{4}} d\xi$$

$$\begin{split} \sigma_{xz} &= \frac{2q_2}{\pi} \int_0^a (x-\xi) \frac{(z-h_1)(x-\xi)^2}{r^4} d\xi + E \frac{\partial^2 \overline{u}_x}{\partial x^2} (z-h_1) \\ u_x &= \frac{q_2}{2\pi G} \int_0^a \left\{ (x-\xi) \left[\frac{(z-h_1)^2}{r^4} + 2(1-\nu)\ln|r| \right] + \right\} d\xi - \overline{u}_x - \end{split}$$
(2.6)
 $&- \frac{1}{(1-\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial x} + (2h_1+\nu\varphi) \frac{\partial^2 \overline{u}_x}{\partial x^2} \right] (z+\varphi) + \\ &+ \frac{(2-\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \overline{u}_x}{\partial x^2} (z^2-\varphi^2) \\ u_z &= -\frac{q_2}{2\pi G} \int_0^a \left\{ (x-\xi) \left[\frac{(z-h_1)(x-\xi)}{r^2} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(z-h_1)}{(x-\xi)} \right] \right\} d\xi - \overline{u}_z - \\ &- \frac{\nu}{(1-\nu)} \left[-\frac{\partial \overline{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial x} + \varphi \frac{\partial^2 \overline{u}_z}{\partial x^2} \right] (z+\varphi) - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \overline{u}_z}{\partial x^2} (z^2-\varphi^2) \\ \text{где } \overline{u}_x &= -\frac{q_2}{2\pi G} \int_0^a \left\{ (x-\xi) \left[2(1-\nu)\ln|r| + \frac{(\varphi+h_1)^2}{r^2} \right] \right\} d\xi \\ &\quad \overline{u}_z &= -\frac{q_2}{2\pi G} \int_0^a \left\{ (x-\xi) \left[\frac{(x-\xi)(\varphi+h_1)}{r^2} + (2\nu-1)\operatorname{arctg} \frac{(\varphi+h_1)}{(x-\xi)} \right] \right\} d\xi \\ &\quad \overline{u}_z &= -\frac{q_2}{2\pi G} \int_0^a \left\{ (x-\xi) \left[\frac{(x-\xi)(\varphi+h_1)}{r^2} + (2\nu-1)\operatorname{arctg} \frac{(\varphi+h_1)}{(x-\xi)} \right] \right\} d\xi \end{split}$

НДС полосы в точке (x, z) зависит от очертания полосы, от интенсивности сил на краю, от координаты точки и от модуля деформаций полосы.

Аналогичным путем можно определить НДС и при более сложных нагрузках.

Таким образом, приведенный такой подход расширяет область применения асимптотических решений [1–3] и получаются решения новых классов задач. Его можно обобщить и для слоистых полос и пластинок переменной толщины.

В заключение отметим, что приведенные решения справедливы вне зоны простирания погранслоев. В близи же торцов $x = \pm l$ на указанное решение следует наложить решение погранслоя. Решение погранслоя для полосы построено в работе [12], там же указана зона простирания погранслоя и дана процедура сопряжения решений внутренней задачи и погранслоя.

ЛИТЕРАТУРА

- Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. Механика. //Межвузовский сб. науч. трудов. Ереван: Изд. ЕГУ. Вып. 2. 1982. С.7-12.
- Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией. //В сб.: "Механика конструкций из композиционных материалов". Новосибирск: Наука, 1984. С. 105-110.
- Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок. //ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С. 271-278.
- Хачатрян Г.Г. Третья краевая задача теории упругости для анизотропной полосы переменной ширины.// Сб. науч. тр.: Механика деформируемого твердого тела. Изд-во АН Армении. 1993. С.124-129.
- Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Смешанные краевые задачи для анизотропных пластин переменной толщины //ПММ. 1996. Т.60. Вып. 2. С. 290-298.
- 6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойных анизотропных пластин переменной толщины// Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т.51. №2. С.27-36.
- Агаловян Л.А., Асратян М.Г., Геворкян Р.С. К асимптотическому решению задач о действии сосредоточенной силы кусочно-непрерывной нагрузки на двухслойную полосу // ПММ. 1990. Т. 54. Вып.5. С.831–836.
- 8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: «Гитутюн», 2005. 469с.
- Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гостройиздат, 1960.
- 10. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 486 с.
- 11. Лейбензон Л. С. Курс Теории упругости. М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 464 с.
- Агаловян Л.А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач. /Механика. Межвузовский сб. научн. трудов, Ереван: Изд. ЕГУ. Вып.3. 1984. С. 51-58.

Государственный аграрный Поступила в редакцию университет Армении 15.05.2008

2U3UUSUՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №4, 2008

Механика

УДК 539.3

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ, ОДИН ИЗ КОТОРЫХ НАГРУЖЕН И ОПИРАЕТСЯ НА ПРУЖИНУ

Бабаян С.А.

Ключевые слова: стержень, продольные колебания, пружина. Key words: bar, longitudinal vibrations, spring.

Մ.Հ. Բաբայան Մի ծայրով բեռնված և զսպանակին հենված շարժական ծայրերով ձողի երկայնական տատանումները

Հոդվածում քննարկվում է ձողի երկայնական տատանումները, որի մի ծայրը տեղափոխվում է ըստ առաջադրված օրենքի, իսկ հակառակը՝ բեռնված է և հենված զսպանակին։ Ի տարբերություն նավթարդյունահանման մեջ օգտագործվող սյունային ձողերի համար գրականության մեջ տրված այդ խնդրի լուծման եղանակի, որը հիմնված է հարվածային բնույթի առանձգական ալիքների տարածման ուսումնասիրման վրա, ձողի դեֆորմացիաները որոշված են Մ.Պ. Տիմոշենկոյի եղանակով օգտագործելով նորմալ ֆունկցիաները։

Արդյունքում հաշվարկային առավելագույն լարումը զգալիորեն նվազում է։

S.H. Babayan

The bar's longitudinal vibrations with movable edges one of which is loaded and spring-supported

In this article the longitudinal vibrations of bar is considered. One edge of a bar is transfered according to the offered law, the opposite one is loaded and spring-supported. In contrast to described in literature method of this problem solution for pillar bars in petroleum production based on investigation of elastic waves propogation of percussive character, the bar's deformations are determined by the method of S.P. Timoshenko by using normal functions. As a result the calculated maximal tensions are significantly decreased.

В статье рассматриваются продольные колебания стержня, один конец которого с ускорением перемещается по заданному закону, а противоположный нагружен массой и опирается на пружину.

В отличие от описанного в литературе способа решения этой задачи для колонны штанг в нефтедобыче, основанного на изучении распространения упругих волн ударного характера, деформации стержня определены по методу С.П.Тимошенко с использованием нормальных функций. В результате расчетные максимальные напряжения значительно снижаются.

Продольные упругие колебания стержней с различными начальными и граничными условиями достаточно подробно изучены в работе С.П.Тимошенко [1]

В частности, решены задачи колебаний стержней с подвижными опорами, стержней, несущих на концах нагрузку и опирающихся на пружину.

Нефтедобыча является одной из отраслей, где может быть применен метод С.П.Тимошенко, в частности, при расчете максимальных нагрузок в колонне штанг, на которых подвешен плунжер погружного насоса (фиг.1а).

В колонне штанг для добычи нефти, помимо статических, возникают и динамические нагрузки вследствие продольных колебаний колонны.

Процесс подъема жидкости разбивается на две стадии – период начальной деформации, когда происходит постепенное нагружение штанг силой веса столба жидкости, и период перемещения нагруженных штанг с плунжером [2].



Рис. 1а. Схема насосной установки 1-колонна обсадная 2-плунжер 3-колона штанг 4-клапан нагнетательный 5-клапан всасывающий

Рис. 16. Схема нагружения колонны штанг

По сложившейся традиции эти нагрузки определяют, используя решение волнового уравнения в виде

$$u = f(t - x/c) + f_1(t + x/c)$$

где u –упругие перемещения сечения с координатой x, c –скорость распространения звука в колонне [2,3].

Однако, как считает С.П.Тимошенко, такое решение приемлемо для случая ударного приложения нагрузки, а для обычного нагружения автор рекомендует метод решения задачи продольных колебаний стержня с использованием главных (или нормальных) функций, описывающих форму собственных колебаний.

В работе [4] определены динамические нагрузки в колонне штанг по методу С.П.Тимошенко для стадии подъема жидкости и показано, что максимальные значения этих величин, расчитанные по принятому методу [2], завышены в 1,5–2 раза.

В связи с этим представляет интерес расчета динамических нагрузок по этому же методу [4] и для начальной стадии хода вверх, когда происходит постепенное нагружение колонны штанг силой веса столба жидкости.

Как видно из фиг.1a, для начальной стадии хода вверх оба клапана закрыты и вес столба жидкости передается на колонну обсадных труб, свободно подвешенных к устью скважины.

Колонна растянута силой Mg на величину $\Delta \ell_T = Mg\ell / Ef_T$, где f_T – площадь поперечного сечения обсадных труб по металлу, M – масса столба жидкости.

Действие силы упругости растянутой колонны эквивалентно действию силы упругости сжатой пружины $Q_{np} = K \cdot \Delta \ell_T$, где $K = Ef_T / \ell$ – жесткость пружины.

Штанги не нагружены, и их удлинение $\Delta \ell_{\rm m} = 0$. Точка О подвеса штанг к балансиру станка-качалки, привод которого представляет четырехзвенник, перемещается по известному закону $u_0(t)$ [4].

При таких условиях расчет вибраций в колонне штанг можно вести по схеме (фиг.16).Отметим, что эта схема обобщает два исследованных варианта колебаний стержня с подпружиненной массой на конце, но с неподвижными опорами, и стержня с подвижными опорами, но без массы и пружины на конце [1].

Динамическую составляющую перемещения произвольного сечения *x* стержня можно найти, используя интеграл Дюамеля из выражения [1]

$$u^{*} = -\sum_{l=1}^{\infty} \left(X_{i} / p_{i} \right) \int_{0}^{t} X_{i} \int_{0}^{t} \mathbf{b}_{CT} \left(x, t^{1} \right) \sin p_{i} \left(t - t^{1} \right) dt^{1} dx,$$
(1)

где X_i – функция от x, описывающяя форму собственных колебаний, называемая главной (или нормальной);

*p*_{*i*} – частота собственных колебаний;

 $\ddot{u}_{cr}(x,t^1)$ – ускорение произвольной точки стержня, обусловленное перемещением невесомого податливого стержня при заданном законе движения спор.

Главная функция имеет вид [1]

$$X_i = D_i \sin(p_i \mathbf{x} / c), \qquad (2)$$

где D_i – постоянная интегрирования, определяемая из условия нормирования функции X_i при соотношениях ортогональности для стержня с рассматриваемыми концевыми условиями. Для любого момента времени на конце стержня по принципу Даламбера имеет место равновесие всех действующих сил: силы натяжения стержня, силы упругости сжатой пружины, силы инерции массы M, т.е.

$$-r\partial u_{il}/\partial x - Ku_{il} + M\partial^2 u_{il}/\partial t^2 = 0, \qquad (3)$$

где $r = E f_{\rm mr} r = E F_{\rm mr}$ ($F_{\rm mr}$ – площадь поперечного сечения штанг),

$$u_i = X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) \tag{4}$$

С учетом (2) и (4) условие (3) преобразуется в уравнение

$$\theta_i tg \theta_i = \eta / (1 - \psi_i) \tag{5}$$

$$\theta_i = p_i \ell / c; \qquad \psi_i = K / p_i^2 M; \qquad \eta = m \ell / M$$

(*m* – масса штанг на единицу длины с учетом "плавучести".)

Трансцендентное уравнение (5) служит для определения собственнных частот колебаний p_i .

Для определения постоянной D_i запишем уравнение колебаний стержня в форме задачи на собственные значения, т.е. $X_i^{"} = (-mp_i^2/r) \cdot X_i$, после чего проверим, обладают ли свойством ортогональности собственные функции для *i*-ой и *j*-ой форм колебаний с учетом концевых условий $rX_{i\ell}^1 = (Mp_i^2 - K)X_{i\ell}$, полученных из (3).

Имеем

$$rX_i'' = -mp_i^2 X_i \tag{6}$$

$$rX_{j}^{"} = -mp_{j}^{2}X_{j} \tag{7}$$

$$rX_{i\ell}^{1} = \left(Mp_{i}^{2} - K\right)X_{i\ell}$$

$$\tag{8}$$

$$rX_{j\ell}^{I} = \left(Mp_{j}^{2} - K\right)X_{j\ell}$$
(9)

Умножая левые и правые части уравнений (6) на X_j и (8) на X_{jl} , а уравнение (7) на X_i и (9) на X_{il} , а затем интегрируя полученные из (6) и (7) выражения по всей длине стержня, получим

$$r\int_{0}^{\ell} X_{i}^{"} X_{j} dx = -mp_{i}^{2} \int_{0}^{\ell} X_{i} \cdot X_{j} dx$$
(10)

$$r\int_{0}^{\ell} X_{j}^{"} \cdot X_{i} dx = -mp_{j}^{2} \int_{0}^{\ell} X_{j} \cdot X_{i} dx$$

$$\tag{11}$$

$$rX_{i\ell}^{\mathrm{I}} \cdot X_{j\ell} = \left(Mp_i^2 - K\right)X_{i\ell} \cdot X_{j\ell}$$
⁽¹²⁾

$$rX_{j\ell}^{\mathrm{I}} \cdot X_{i\ell} = \left(Mp_{j}^{2} - K\right)X_{j\ell} \cdot X_{i\ell}$$
(13)

Вычитая уравнения (12) и (13) из уравнений (10) и (11), соответственно, и интегрируя левые части полученных выражений по частям, имеем

$$-rX_{jo}^{1} \cdot X_{jo} - r\int_{0}^{\ell} X_{i}^{1}X_{j}dx = -mp_{i}^{2}\int_{0}^{\ell} X_{i} \cdot X_{j}dx - (Mp_{i}^{2} - K) \cdot X_{i\ell} \cdot X_{j\ell} \quad (14)$$

$$-rX_{jo}^{I} \cdot X_{io} - r\int_{0}^{\ell} X_{i}^{I} \cdot X_{j}^{I} dx = -mp_{j}^{2} \int_{0}^{\ell} X_{i} \cdot X_{j} dx - (Mp_{j}^{2} - K) X_{i\ell} \cdot X_{j\ell}$$
(15)

Вычитывая из (15) уравнение (14), в итоге получим

$$\left(p_i^2 - p_j^2 \left(m \int_o^\ell X_i \cdot X_j dx + M X_{i\ell} X_{j\ell}\right) = 0$$
(16)

При *i* ≠ *j*

$$m\int_{0}^{l} X_{i} \cdot X_{j} dx + M X_{i\ell} \cdot X_{j\ell} = 0$$
⁽¹⁷⁾

Из (14) следует

$$r\int_{o}^{\ell} X_{i}^{\mathrm{I}} \cdot X_{j}^{\mathrm{I}} dx + K X_{i\ell} X_{j\ell} = 0$$
⁽¹⁸⁾

Вычитывая (12) из (10), с учетом (17) получим *l*

$$r \int_{o}^{I} X_{i}^{II} X_{j} dx - r X_{i\ell}^{I} X_{j\ell} - K X_{i\ell} \cdot X_{j\ell} = 0$$
(19)

Условия (17), (18) и (19) являются соотношениями ортогональности и при i = j могут быть пронормированы следующим образом:

$$m \int_{o}^{\ell} X_{i}^{2} \cdot dx + M X_{i\ell}^{2} = m$$
⁽²⁰⁾

$$r\int_{o}^{\ell} (X_{i}^{I})^{2} dx + KX_{i}^{2} = mp_{i}^{2}$$
⁽²¹⁾

$$r \int_{0}^{\ell} X_{i}^{II} \cdot X_{\ell} dx - r X_{i\ell}^{I} \cdot X_{i\ell} - K X_{i\ell}^{2} = m p_{i}^{2}$$
(22)

Из этих соотношений может быть определена постоянная интегрирования

$$D_i^2 = \left[0.5\ell - (c/4p_i)(\sin 2\ell p_i/c) + (M\sin^2 \ell p_i/c)/m\right]^{-1}$$

В формуле (1) $\ddot{u}_{cr}(x,t^1)$ является ускорением точки x перемещающегося стержня, закрепленного по обоим концам при заданном движении опор. Само перемещение определяется из статического анализа и имеет вид [1]

$$u_{\rm cr}\left(x_{I}t^{1}\right) = \frac{\ell - x}{l}u_{o}\left(t^{1}\right) + \frac{x}{\ell}u_{\ell}\left(t^{1}\right).$$
⁽²³⁾

Для механизма станка-качалки можно с достаточной степенью точности принять [4] ь $\binom{t^1}{t^2} = 0.5\pi^2 S(\cos \omega t^1 - \lambda \cos 2\omega t^1)$ (24)

$$\mathbf{b}_{o}(t^{T}) = 0.5\boldsymbol{\varpi}^{2} S(\cos \boldsymbol{\omega} t^{T} - \lambda \cos 2\boldsymbol{\omega} t^{T}), \qquad (24)$$

где страни стр Страни стр

S – ход полированного штока (перемещение точки 0);

 $\lambda = r/\ell$ – отношение радиуса кривошипа к длине шатуна.

Известно также [2], что на начальной стадии хода вверх $U_o = \Delta \ell_{\rm T} + \Delta \ell_{\rm mr}$. Тогда из (23)получим

$$\mathbf{b}_{CT}(x,t^{1}) = \mathbf{b}_{0}(t^{1}) \left[1 - \frac{x}{\ell} (1+\mu)^{-1} \right] \qquad (\mu = f_{\mu T} / f_{T})$$
(25)

Раскрыв интеграл (1) с учетом (24) и (25), получим

$$U_{s} = 0.5\omega^{2}Sc\sum_{l=1}^{\infty}D_{l}^{2}p_{l}^{-3}\psi(t)X_{i}(p_{l})\sin p_{i}x/c, \#$$

где $\psi_i(t) = \alpha_i \cos \omega t + \beta_i \cos 2\omega t - (\alpha_i + \beta_i) \cos p_i t$;

$$\alpha_i^{-1} = 1 - \omega^2 / p_i^2;$$
 $\lambda \beta_i^{-1} = 1 - 4\omega^2 / p_i^2;$

$$X_{l}(p_{l}) = 1 - \ell^{-1}(1+\mu)^{-1}cp^{-1}\sin p_{l}\ell/c - \mu(1+\mu)^{-1}\cos p_{l}\ell/c . \#$$

Максимальная вибрационная нагрузка, действующяя в точке О подвеса штанг, равна

$$Q_{e} = Ef_{urr} \left(\frac{\partial u_{e}}{\partial x} \right)_{x=0} = 0,5 Ef_{urr} \omega^{2} S \sum_{l=-1}^{\infty} D_{l}^{2} p_{l}^{-3} \cdot \psi_{i}(t) \cdot X_{l}(p_{l}).$$
(26)

Инерционную нагрузку от перемещения массы всего стержня, обусловленного его податливостью, можно найти из выражения

$$Q_{u} = \int_{0}^{\infty} \mathbf{b}_{CT} (x, t^{1}) dm = 0.5 \rho f_{urr} \omega^{2} S \ell \left[1 - 0.5 / (1 + \mu) \right] (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t)$$
(27)

где $\ddot{u}_{cr}(x,t^1)$ – ускорение точки x стержня, найденное из выражений (24) и (25); р – плотность материала стержня.

0

Полученные зависимости (26) и (27) были использованы для расчета динамических нагрузок в колонне штанг длиною 2205м, состоящей из двух ступеней Ø22–705 м, Ø19–1500 м, обсадная труба–Ø2,5["] плунжер насоса –Ø32; длина хода

S=2,1м, число оборотов кривошипа (число качаний) п =11,05 об/мин.*

Вес колонны штанг с учетом "плавучести"

$$(\rho_{\rm *} = 880 \kappa z / m^3)$$
 Q_{шт}.=47040Н. Вес столба жидкости Q_{*} =15700Н.

Для принятых исходных данных полное нагружение штанг весом столба жидкости происходит при угле поворота кривошина 69° 201

По данным расчета максимальные значения динамических нагрузок составляют $Q_{\mu}=7504H., Q_{B}=725H. \text{ t. e. } (Q_{B}+Q_{\mu})=0.03 (Q_{\mu}\text{t.}+Q_{\pi}).$

Данные расчета показывают, что в начальной стадии хода плунжера вверх вибрационные нагрузки практически не влияют на величину общей нагрузки.

Такая же картина повторяется и для других вариантов расчета с использованием исходных данных, имеющих практическое применение.

На основании полученных данных можно сделать следующие выводы:

1. Применяемые методы расчета максимальной нагрузки на начальной стадии процесса нагружения штанг при ходе вверх [2,3] дают завышенные значения.

2. При расчете максимальной нагрузки в колонне штанг на начальной стадии процесса нагружения по предлагаемому методу динамическую составляющую из общей нагрузки можно исключить.

Для сопоставления результатов расчета исходные данные те же, что и в [3].

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Тимошенко С.П. и др. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение. 1985.
- 2. Мищенко И.Т. Скважинная добыча нефти. М.: Изд-во "Нефть и газ", 2003.
- 3. Кенгерли А.М. Некоторые вопросы механики штанговой глубиннонасосной установки. /Автореферат диссертации. Азинефтехим, Баку, 1969.
- 4. Бабаян С.А. Расчет экстремальных нагрузок в колонне насосных штанг для добычи нефти. // " Нефть, газ и бизнес". 2007. №4.

Арцахский Государственный университет

Поступила в редакцию 20.07.2008

2U3UUSUUF ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №4, 2008

Механика

УДК 539.3

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ Баблоян А.А., Токмаджян В.О.

Ключевые слова: пластина, изгиб, момент, перерезывающие силы. Keywords: plate, bending, moment, shearing face.

Ա.Հ. Բաբլոյան, Վ.Հ.Թոքմաջյան Խառը եզրային՝ պայմաններով սալի ծռման խնդիր՝ լայնական սահքերի հաշվառմամբ

U.Ա.Համբարձումյանի տեսության սահմաններում լուծված է ուղղանկյուն սալի ծռման խնդիրը, երբ սալի երկու հարևան կողմերը կոշտ ամրակցված են, իսկ մյուս երկուսը՝ բեռնավորված։ Ստացված են երեք տրանսցենդենտ հավասարումներ ուղղանկյան գագաթների փոքր շրջակայքերոմ լարվածային վիմակները ուսումնասիրելու համար։

A.A.Babloyan, V.H.Tokmajyan A Mixed Problem of Plate Bending taking into account the transversal shears

According to S.A.Ambartsumyan theory a solution of the bending problem of rectangular plate have two neighboring sides, rigidly restrained and other two sides loaded by bending moments and shearing forces has been obtained. Three transcendental equations have been obtained for determining degrees of force factors particulars and principal parts of bending moments and shearing forces have been emphasized.

В рамках уточнённой теории С.А. Амбарцумяна [1,2] получено решение задачи изгиба прямоугольной, изотропной пластины, две соседние стороны которой жестко защемлены, а остальные две стороны свободны или загружены изгибающими моментами и перерезывающими силами. Эта же задача по теории Кирхгофа рассматривалась в [3], где доказывалась, что она не имеет решения в некоторой окрестности $|V - V_0| < \varepsilon$, где V – коэффициент Пуассона, $V_0 = 3 - 2\sqrt{2}$. Аналогичная плоская задача решена в [4].

1. Рассмотрим задачу изгиба прямоугольной пластины с размерами а x b и толщиной 2 h, когда две соседние стороны жестко заделаны, а две остальные стороны свободны от внешних воздействий, или же загружены изгибающими моментами и перерезывающими силами. Решение задачи будем строить по уточненной теории С.А. Амбарцумяна.

Известно [1,2], что по теории С.А. Амбарцумяна задача изгиба изотропной пластины сводится к отысканию трех неизвестных функций W(x, y), $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ из системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$D\Delta W - \frac{4h^2}{5(1-\nu)}q(x,y) + \frac{4h}{3}\Phi = 0, \ \Delta \Phi = \frac{3}{4h}q(x,y),$$

$$\Delta \Psi - \frac{5}{2h^2}\Psi = 0, \ D = \frac{4h^3G}{3(1-\nu)}$$
(1.1)

При этом, перерезывающие силы Q_x, Q_y , моменты M_x, M_y, M_{xy} и углы наклона θ_x, θ_y выражаются через неизвестные функции системы (1.1) формулами

$$M_{x} = -D\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}} + v\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} - \frac{4}{5G}\left(\frac{\partial\varphi_{x}}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi_{y}}{\partial y}\right)\right)$$

$$M_{y} = -D\left(v\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} - \frac{4}{5G}\left(v\frac{\partial\varphi_{x}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{y}}{\partial y}\right)\right)$$

$$M_{xy} = -(1-v)D\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x\partial y} - \frac{2}{5G}\left(\frac{\partial\varphi_{x}}{\partial y} + v\frac{\partial\varphi_{y}}{\partial x}\right)\right)$$

$$Q_{x} = \frac{4h}{3}\varphi_{x}, \qquad Q_{y} = \frac{4h}{3}\varphi_{y}$$

$$\theta_{x} = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{16h^{3}}{15(1-v)}\varphi_{x}, \qquad \theta_{y} = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{16h^{3}}{15(1-v)}\varphi_{y}$$

$$\varphi_{x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad \varphi_{y} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \qquad (1.2)$$

Граничные условия задачи задаются в виде:

$$x = 0; \quad W = 0, \quad \varphi_{y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{4}{5G} \varphi_{x} = 0$$

$$y = 0; \quad W = 0, \quad \varphi_{x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{4}{5G} \varphi_{y} = 0$$

$$x = a; \quad M_{x} = f1(y), \qquad \frac{\partial^{2} W}{\partial x \partial y} - \frac{2}{5G} \frac{\partial \varphi_{y}}{\partial x} = 0, \quad \varphi_{x} = 0$$

$$y = b; \quad M_{y} = f2(x), \qquad \frac{\partial^{2} W}{\partial x \partial y} - \frac{2}{5G} \frac{\partial \varphi_{x}}{\partial y} = 0, \quad \varphi_{y} = 0$$
(1.3)

Разлагая нормальную нагрузку в ряд Фурье

$$q(x, y) = \sum_{k, p=1}^{\infty} q(k, p) \sin \alpha_k x \cdot \sin \beta_p y, \qquad (1.4)$$

решение уравнений (1.1) представим в виде:

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi 1_{k}(y) \sin \alpha_{k} x + \sum_{p=1}^{\infty} \Phi 2_{p}(x) \sin \beta_{p} y - \sum_{k,p=1}^{\infty} \frac{3q(k,p) \sin \alpha_{k} x \cdot \sin \beta_{p} y}{4h(\alpha_{k}^{2} + \beta_{p}^{2})}$$

$$\Psi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi 1_{k}(y) \cos \alpha_{k} x + \sum_{p=1}^{\infty} \Psi 2_{p}(x) \cos \beta_{p} y \qquad (1.5)$$

$$Gh^{2} W(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} W 1_{k}(y) \sin \alpha_{k} x + \sum_{p=1}^{\infty} W 2_{p}(x) \sin \beta_{p} y + y$$

+
$$\sum_{k,p=1}^{\infty} \frac{3[4h^2(\alpha_k^2 + \beta_p^2) + 5(1-\nu)]q(k,p)\sin\alpha_k x \sin\beta_p y}{20h(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2}$$
.

Здесь использованы обозначения

$$\Phi l_{k}(y) = 2 \frac{x l_{k} \operatorname{cha}_{k}(b-y) + y l_{k} \operatorname{sha}_{k} y}{a \cdot \operatorname{cha}_{k} b},$$

$$\Phi 2_{p}(x) = 2 \frac{x 2_{p} \operatorname{ch\beta}_{p}(a-x) + y 2_{p} \operatorname{sh\beta}_{p} x}{b \cdot \operatorname{ch\beta}_{p} a},$$

$$\Psi l_{k}(y) = 2 \frac{\alpha_{k} x l_{k} \operatorname{shy}_{k}(b-y) - \gamma_{k} y l_{k} \operatorname{chy}_{k} y}{a \cdot \gamma_{k} \operatorname{chy}_{k} b},$$

$$\Psi 2_{p}(x) = 2 \frac{-\beta_{p} x 2_{p} \operatorname{sh\delta}_{p}(a-x) + \delta_{p} y 2_{p} \operatorname{ch\delta}_{p} x}{b \cdot \delta_{p} \operatorname{ch\delta}_{p} a},$$

$$W l_{k}(y) = \frac{x l_{k} [b \cdot \operatorname{sech}(\alpha_{k} b) \cdot \operatorname{sh}(\alpha_{k} y) + y \operatorname{sha}_{k}(b-y)](-1+v)}{a \alpha_{k} \operatorname{cha}_{k} b} - y l_{k} \frac{(3-v) \operatorname{sha}_{k} y + (1-v) \alpha_{k} [b \cdot \operatorname{sha}_{k} y \cdot \operatorname{tha}_{k} b - y \cdot \operatorname{cha}_{k} y]}{a \cdot \alpha_{k}^{2} \operatorname{cha}_{k} b},$$

$$W 2_{p}(x) = \frac{x 2_{p} [a \cdot \operatorname{sech} \beta_{p} a \cdot \operatorname{sh\beta}_{p} x + x \cdot \operatorname{sh\beta}_{p} (a-x)](-1+v)}{b \cdot \beta_{p} \operatorname{ch\beta}_{p} a},$$

$$(1.6)$$

где

$$\gamma_k^2 = \alpha_k^2 + \frac{5}{2h^2}, \ \delta_p^2 = \beta_p^2 + \frac{5}{2h^2}, \ \alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2a}, \ \beta_p = \frac{(2p-1)\pi}{2b}.$$

Благодаря выбору (1.5) и (1.6), восемь граничных условий (1.3) удовлетворяются тождественно. Из остальных четырех граничных условий получаются следующие бесконечные системы:

$$x1_{k} p1_{k} + y1_{k} Q1_{k} + \frac{2}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \left[a1(k,p)x2_{p} - (-1)^{k} b1(k,p)y2_{p} \right] = c1_{k}$$

$$x1_{k} p3_{k} + y1_{k} Q3_{k} + \frac{8}{3b} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p} \left[a3(k,p)x2_{p} - (-1)^{k} b3(k,p)y2_{p} \right] = c3_{k}$$

$$x2_{p} p2_{p} + y2_{p} Q2_{p} + \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \left[a2(k,p)x1_{k} - (-1)^{p} b2(k,p)y1_{k} \right] = c2_{p}$$
(1.7)

$$\begin{aligned} x2_{p}p4_{p} + y2_{p}Q4_{p} + \frac{8}{3a}\sum_{k=1}^{\infty} (-1^{k})[a4(k,p)x1_{k} - (-1)^{p}b4(k,p)y1_{k}] &= c4_{p} \end{aligned}$$

где
$$\Delta_{0}a1(k,p) &= -\alpha_{k}\beta_{p}[5(1-\nu) + 2h^{2}(3-\nu)(\alpha_{k}^{2}+\beta_{p}^{2})]$$

$$\Delta_{0}b1(k,p) &= 2h^{2}\alpha_{k}^{4} - (2-\nu)\beta_{p}^{2}(5+2h^{2}\beta_{p}^{2}) - \alpha_{k}^{2}[5+2h^{2}(1-\nu)\beta_{p}^{2}]$$

$$\Delta_{0}a3(k,p) &= \alpha_{k}[\nu\alpha_{k}^{2}(5+2h^{2}\alpha_{k}^{2}) + 6h^{2}\beta_{p}^{4} + (5+2h^{2}(3+\nu)\alpha_{k}^{2})\beta_{p}^{2}$$

$$\Delta_{0}b3(k,p) &= \beta_{p}[2\beta_{p}^{2}(5+2h^{2}\beta_{p}^{2}) - 2(1-\nu)h^{2}\alpha_{k}^{4} + (1+\nu)\alpha_{k}^{2}(5+2h^{2}\beta_{p}^{2})]$$

$$\Delta_{0} &= [2h^{2}(\alpha_{k}^{2}+\beta_{p}^{2}) + 5](\alpha_{k}^{2}+\beta_{p}^{2})^{2}$$

 $10\alpha_{k}p1_{k} = (8h^{2}\alpha_{k}^{2} - 5 + 5v) \text{th}\alpha_{k}b - 5b(1 - v)\alpha_{k} \sec h^{2}\alpha_{k}b - 8h^{2}\alpha_{k}^{3}\gamma_{k}^{-1} \text{th}\gamma_{k}b$

$$10\alpha_k Q l_k = 8h^2 \alpha_k^2 (\sec h\gamma_k b - \sec h\alpha_k b) - 10 \sec h\alpha_k b - (1 - \nu)5\alpha_k b \cdot \sec h\alpha_k b \cdot th\beta_k b$$
$$3p3_k = -4(\alpha_k Q l_k + 2 \sec h\alpha_k b)$$

$$7,5Q3_k = -8h^2\alpha_k\gamma_k \operatorname{th}\gamma_k b - 5(1-\nu)\alpha_k b \cdot \sec h^2\alpha_k b + (8h^2\alpha_k^2 + 5 - 5\nu)\operatorname{th}\alpha_k b$$

$$c1_{k} = -\frac{3b}{40h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k}q(k,p)[8h^{2}(\alpha_{k}^{2} + \beta_{p}^{2}) + 5(1-\nu)]}{(\alpha_{k}^{2} + \beta_{p}^{2})^{2}}$$
(1.8)

$$c3_{k} = \frac{1}{h} \int_{0}^{a} f2(x) \sin \alpha_{k} x dx + \frac{a}{10h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q(k, p)(\nu \alpha_{k}^{2} + \beta_{p}^{2})[8h^{2}(\alpha_{k}^{2} + \beta_{p}^{2}) + 5(1-\nu)]}{(1-\nu)(-1)^{p}(\alpha_{k}^{2} + \beta_{p}^{2})^{2}}$$

Остальные коэффициенты системы (1.7) получаются из (1.8) путем соответствующих перестановок.

<u>2. Исследование бесконечных систем.</u> Проверка показала, что бесконечная система (1.7) не регулярна. Поэтому ее нельзя решать методом редукций или же последовательных приближений. Несмотря на это, система (1.7) имеет решения, обладающее следующим асимптотическим поведением (λ , δ , μ)>0:

$$x1_{k} \approx x_{11}\alpha_{k}^{-\lambda} + x_{12}(-1)^{k-1}\alpha_{k}^{-\delta}, y1_{k} \approx y_{11}\alpha_{k}^{-\delta} + y_{12}(-1)^{k-1}\alpha_{k}^{-\mu}, (k \gg 1)$$

$$x2_{p} \approx x_{21}\beta_{p}^{-\lambda} + x_{22}(-1)^{p-1}\beta_{p}^{-\delta}, y2_{p} \approx y_{21}\beta_{p}^{-\delta} + y_{22}(-1)^{p-1}\beta_{p}^{-\mu}, (p \gg 1)$$
(2.1)

Подставляя (2.1) в (1.7) и отбрасывая бесконечно малые величины высших порядков, для коэффициентов разложений (2.1) получим связи

$$(1+v)x_{11}\cdot\sin\frac{\pi\lambda}{2} = (3-v)\lambda\cdot x_{21}, \quad (1+v)x_{21}\sin\frac{\pi\lambda}{2} = (3-v)\lambda x_{11}$$

$$(1+\nu)y_{12} \cdot \sin\frac{\pi\mu}{2} + [4-(3-\nu)\mu]y_{22} = (1+\nu)y_{22} \cdot \sin\frac{\pi\mu}{2} + [4-(3-\nu)\mu] = 0$$
$$(1+\nu)x_{12} \cdot \cos\frac{\pi\delta}{2} = [1-\nu-(3-\nu)\delta]y_{21},$$

$$(1+\nu)y_{21} \cdot \cos\frac{\pi\delta}{2} + [3+\nu-(3-\nu)\delta] = 0$$

$$(1+\nu)y_{11} \cdot \cos\frac{\pi\delta}{2} + [3+\nu-(3-\nu)\delta]x_{22} = 0,$$

$$(1+\nu)x_{22} \cdot \cos\frac{\pi\delta}{2} = [1-\nu-(3-\nu)\delta]y_{11} = 0$$
 (2.2)

Из условий существования нетривиальных решений уравнений (2.2) для определения показателей λ, μ, δ получим трансцендентные уравнения

$$\sin^{2} \frac{\pi \lambda}{2} - \frac{(3-\nu)^{2} \lambda^{2}}{(1+\nu)^{2}} = 0, \qquad \sin^{2} \frac{\pi \mu}{2} - \frac{[4-(3-\nu)\mu]^{2}}{(1+\nu)^{2}} = 0,$$
$$\cos^{2} \frac{\pi \delta}{2} + \frac{[1-\nu-(3-\nu)\delta][3+\nu-(3-\nu)\delta]}{(1+\nu)^{2}} = 0 \tag{2.3}$$

Первое уравнение (2.3) определяет степень особенности в окрестности точки (x = y = 0), второе уравнение – в окрестности точки (x = a, y = b), а третьим уравнением определяются степени особенностей напряжений в окрестностях точек (x = a, y = 0) и (x = 0, y = b).

Первые два уравнения (2.3) разлагаются в простые множители, вследствие чего напряженные состояния в окрестностях точек (0,0) и (a,b) разлагаются в симметричные и кососимметричные слагаемые относительно биссектрисы прямых углов. В окрестностях точек (a,0) и (0,b) таких разложений не существует.

Для наглядности, в табл. (1-3) приведены значения первых трех корней уравнений (2.3).

Корни функции $\sin^2 \frac{\pi \lambda}{2} - \frac{(3-\nu)^2 \lambda^2}{(1+\nu)^2}$

Таблица 1

n	1	2	3
ν			
0.0	2.559+1.882i	4.723+2.191i	6.784+2.397i
0.1	2.615+1.792i	4.733+2.105i	6.791+2.312i
0.2	2.631+1.707i	4.742+2.024i	6.798+2.233i
0.3	2.646+1.626i	4.751+1.947i	6.804+2.157i
0.4	2.660+1.549i	4.760+1.873i	6.810+2.084i
0.5	2,674+1.474i	4.769+1.802i	6,816+2.014i

Корни функции	sin ²	πμ	$[4-(3-v)\mu]^2$
		2	$(1+\nu)^2$

Таблица 2

n	1	2	3	4
V				
0.0	1	1.550	2.374+1.536i	4.653+2.003i
0.1	1	1.602	2.388+1.412i	4.664+1.907i
0.2	1	1.652	2.401+1.289i	4.673+1.816i
0.3	1	1.700	2.414+1.166i	4.683+1.727i
0.4	1	1.747	2.426+1.040i	4.692+1.641i
0.5	1	1.792	2.438+0.907i	4.700+1.555i

Корни функции
$$\cos^2 \frac{\pi \delta}{2} + \frac{\left[1 - \nu - (3 - \nu)\delta\right]\left[3 + \nu - (3 - \nu)\delta\right]}{(1 + \nu)^2}$$

Таблица 3

n	1	2	3	4
0.0	0,450	1,0	2.518+1.733i	4.693+2.104i
0.1	0,445	1,067	2.535+1.632i	4.703+2.014i
0.2	0,441	1,134	2.552+1.536i	4.713+1.929i
0.3	0,436	1,199	2.568+1.443i	4.722+1.847i
0.4	0,432	1,263	2.583+1.353i	4.731+1.768i
0.5	0,427	1,324	5.599+1.264i	4.740+1.691i

Из приведенных таблиц следует, что:

• в окрестности точки (0, 0) нет особенностей силовых факторов $\lambda_1 > 2,6$;

- в окрестности точки (*a*,*b*) возможно появление только логарифмической особенности (µ₁ = 1 при нарушении парности касательных напряжений);
- в окрестности точки (a,0) и (0,b) всегда существуют особенности $(\delta_1 \le 0,45).$

3. Выделение особенностей силовых факторов. Из вышеизложенного следует, что для этой цели достаточно исследовать окрестности точки (a,0) или (0,b). Подставляя (1.5) и (1.6) в (1.2), получим расчетные формулы для перерезывающих сил и моментов. Из этих общих формул, для достаточно малых значений $\{x, b - y\}$, получаются асимптотические разложения

$$Q_x(x,y) \approx \frac{10}{3ah} \sum_{k=1}^{\infty} y \mathbf{1}_k e^{-\alpha_k(b-y)} \cos \alpha_k x \cdot (b-y-\alpha_k^{-1}) -$$

$$-\frac{10}{3bh}\sum_{p=1}^{\infty}x2p(-1)^{p}e^{-\beta_{p}x}\cos\beta_{p}(b-y)\cdot(x+\beta_{p}^{-1}),$$

$$M_{x}(x,y)\approx\frac{4h}{3a}\sum_{k=1}^{\infty}y1_{k}e^{-\alpha_{k}(b-y)}\sin\alpha_{k}x\cdot[1+\nu+(3-\nu)\alpha_{k}(b-y)]+$$

$$+\frac{4h}{3b}\sum_{p=1}^{\infty}x2_{p}(-1)^{p-1}e^{-\beta_{p}x}\cos\beta_{p}(b-y)\cdot[-2+(3-\nu)\beta_{p}x],$$

$$M_{xy}(x,y)\approx\frac{4h}{3a}\sum_{k=1}^{\infty}y1_{k}e^{-\alpha_{k}(b-y)}\cos\alpha_{k}x\cdot(3-\nu)\alpha_{k}(b-y)+$$

$$+\frac{4h}{3b}\sum_{p=1}^{\infty}x2_{p}e^{-\beta_{p}x}\sin\beta_{p}(b-y)(-1)^{p-1}[1-\nu-(3-\nu)\beta_{p}x] \qquad (3.1)$$

где неизвестные постоянные $y1_k$ и $x2_p$ определяются из (2.1) с учетом (2.2) и (2.3).

Суммы бесконечных рядов (3.1) будем вычислять по формуле [5].

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x(n+\upsilon)}}{(n+\upsilon)^s} \cdot \left\{ \frac{\cos(n+\upsilon)y}{\sin(n+\upsilon)y} \right\} =$$

$$= \frac{\Gamma(1-s)}{\rho^{1-s}} \left\{ \frac{\cos(1-s)\varphi}{\sin(1-s)\varphi} \right\} \pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(s-k,\upsilon)\rho^k}{(-1)^k \cdot k!} \cdot \left\{ \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi} \right\}$$
(3.2)

где: $x + y = \rho e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg(x + iy)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} < 2\pi$, $0 < \upsilon \le 1$, $s \ne 1,2,...$

Здесь Г(s) – гамма-функция Эйлера, $\zeta(s, \upsilon)$ – обобщенная дзета-функция Римана [5].

При помощи (3.2) вычислим суммы в (3.1), ограничиваясь только первым (главным) членом (3.2). После ряда преобразований для главных частей силы Q_x и моментов M_x и M_{xy} в малой окрестности точки (0,b) получим следующие выражения:

$$Q_{x}(x, y) \approx \frac{10\Gamma(-\delta) \cdot \rho^{\delta}}{3\pi} \{ x_{22} [\cos \delta \varphi_{2} - \delta \cdot \cos(1-\delta)\varphi_{2} \cdot \cos \varphi_{2}] - y_{11} [\cos \delta \varphi_{1} + \delta \cdot \cos(1-\delta)\varphi_{1} \cdot \cos \varphi_{1}] \},$$

$$M_{x}(x, y) \approx \frac{4h\Gamma(1-\delta)}{3\pi\rho^{1-\delta}} \{ x_{22}[-2\cos(1-\delta)\varphi_{2} + (3-\nu)(1-\delta)\cos(2-\delta)\varphi_{2} \cdot \cos\varphi_{2}] + y_{11}[(1+\nu)\sin(1-\delta)\varphi_{1} + (3-\nu)(1-\delta)\sin(2-\delta)\varphi_{1} \cdot \cos\varphi_{1}] \},\$$
$$M_{x,y}(x, y) \approx \frac{4h\Gamma(1-\delta)}{3\pi\rho^{1-\delta}} \{ y_{11}(3-\nu)(1-\delta)\cos(2-\delta)\varphi_{1} \cdot \cos\varphi_{1} + (3-\nu)(1-\delta)\cos(2-\delta)\varphi_{1} + (3-\nu)(1-$$

+
$$x_{22}[(1-\nu)\sin(1-\delta)\phi_2 - (3-\nu)(1-\delta)\sin(2-\delta)\phi_2 \cdot \cos\phi_2]$$
 (3.3)

где значение $\delta = \delta_1$ определяется по табл. 3,

$$\sin \phi_1 = \cos \phi_2 = \frac{x}{\rho}, \ \sin \phi_2 = \cos \phi_1 = \frac{b - y}{\rho}, \ \rho = \sqrt{x^2 + (b - y)^2} < \varepsilon.$$

Постоянные x_{22} и y_{11} связаны соотношениями (2.2).

Для полного определения этих постоянных необходимо решать бесконечные системы (1.7). Аналогичные формулы можно получить для окрестности точки (a, 0).

Бесконечные системы (1.7) следует решать методом А.Ф.Улитко и В.Т.Гринченко.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М: «Наука», 1987. 360с.
- Белубекян М.Б. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В кн.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел», Ереван: 2002. С.67-88.
- Баблоян А.А., Токмаджян В.О. Об одной задаче изгиба прямоугольных пластин. //В кн.: «Проблемы механики деформируемого твердого тела», Ереван: 2007. С.54-56.
- 4. Баблоян А.А., Токмаджян В.О. Плоская смешанная задача для упругого прямоугольника.// Докл. НАН РА. 2006. Т.106. №1. С.41- 45.
- 5. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М: «Наука», 1973. 296с.

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию 20.03.2008

2U3UUSUUF ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №4, 2008

Механика

УДК 539.3

МАГНИТНО-ИМПУЛЬСНАЯ ПРОБИВКА ТОНКОЛИСТОВОЙ ЗАГОТОВКИ МЕТАНИЕМ ПУАНСОНА Ананян В.А.

Ключевые слова: магнитно-импульсная, пробивка, метание, пуансон, тонколистовой, заготовка, ИМП, матрица.

Keywords: Magneto-impulse, piercing, throwing, puncheon, light-gage, matrix.

V.A. Ananyan

Magneto-impulse thin sheet pinching of the blank by punch pin throwing

With the purpose of raising the efficiency in magneto-impulse deformation is considered thin sheet blank pinching possibility by punch pin throwing to a matrix.

During the blank throwing and separation the impact analysis and the consistency definition of the process are performed on the basis on preliminarily obtained differential equations of the punch pin movement under the influence of magneto-impulse field.

Վ. Ա. Անանյան

Բարակթիթեղյա պատրաստուկի մագնիսա-իմպուլսային ծակոտումը պուանսոնի նետումով

Մագնիսա-իմպուլսային դեֆորմացիայի օգտակար գործողության գործակցի բարձրացման նպատակով դիտարկված է բարակթիթեղյա պատրաստուկի ծակոտումը պուանսոնի նետումով մատրիցի վրա։ Դուրս բերված պուանսոնի շարժման դիֆերենցյալ հավասարման հիման վրա կատարված է բարակթիթեղյա պատրաստուկի ծակոտման դինամիկայի հետազոտումը և պրոցեսի պարամետրերի որոշումը։

С целью повышения коэффициента полезного действия при магнитно-импульсном деформировании рассмотрена возможность пробивки тонколистовой заготовки метанием пуансона по матрице. На основе выведенного дифференциального уравнения движения пуансона под действием импульсного магнитного поля в процессе метания и разделения заготовки проведен анализ динамики и последовательности определения параметров процесса.

Представляет большой интерес использование возможностей магнитноимпульсного метода деформирования, который имеет ряд неоспоримых преимуществ перед известными способами. Известно, что при деформировании импульсным магнитным полем (ИМП) давление на заготовку принципиально отличается от нагружения тем, что проникновение электромагнитного поля в электропроводный материал приводит к возникновению объёмно-распределенной нагрузки по толще заготовки. Таким образом, непосредственное усилие, деформирующее заготовку, передается не каким-либо промежуточным твердым, жидким или газообразным телом, а непосредственно магнитным полем. Это позволяет формировать без повреждения предварительно полированную плоскую деталь с приданием ей сложной формы (1), формовать детали, заключенные в герметичные оболочки из стали и пластмассы (2). Метод позволяет изготовлять детали любых сложных форм, осуществлять сборочные операции, встраивать установки в автоматические линии, широко механизировать и автоматизировать операции, точнее регулировать параметры процесса, добиваться в ряде случаев высокой производительности. К недостаткам метода относятся его ограниченные энергетические возможности и недостаточная прочность существующих конструкций индукторов, что не позволяет деформировать крупногабаритные толстостенные детали, а также зависимость эффективности процесса от электропроводности заготовки.

Известен метод вырубки и пробивки метанием ИМП тонколистовой заготовки по матрице (3). При этом импульсное магнитное поле одновременно выполняет роль пуансона, а также осуществляет необходимый прижим заготовки с соударением её по матрице. Недостатком процесса является очень малый к.п.д. процесса (2-4%).

Обращает на себя внимание значительность потребного усилия деформирования изза необходимости одновременного приложения нагрузки по всему контуру разделения.

Между тем, известно, что тонкую заготовку можно разделить и без прижима её по матрице, например, обычными ножницами. Такое разделение удается осуществить с меньшими усилиями благодаря приложению всего усилия не одновременно по площади среза всего контура детали, а по площади среза в некоторой точке контура будущей детали с последовательным продолжением разделения по всему контуру.

В этой связи видется использование комбинации непосредственного деформирования заготовки ИМП с одновременным деформированием жестким пуансоном, метаемым ИМП по матрице. При таком способе деформирования осуществление процесса вырубки-пробивки потребует значительно меньше электроэнергии, чем при непосредственном деформировании ИМП. Особенностью конструкций пуансонов является наличие скоса поверхности, заключенной в срезающем контуре, а также наличие игольчатых выступов на нём (фиг.1,б). В случае разных переходов контура раздела можно иметь 2 или более игольчатых выступов.

Для ведения технологического процесса необходим расчет скоростей соударения пуансона по матрице, а следовательно, и кинетической энергии соударения с целью обеспечения необходимого процесса деформирования. Выведем дифференциальное уравнение движения пуансона, выстреливаемого действием давления ИМП. В условиях определенных допущений наведённые токи на торцевой поверхности цилиндрического пуансона представим зеркальным отображением токов обмотки плоского индуктора (фиг.1,а). Противостоящая обмотке индуктора кольцевая часть поверхности пуансона представлена из отдельных витков и их количество равно количеству (w) витков индуктора. Для конкретности схемы и в расчетах примем w = 10, что соответствует действительному количеству витков обмотки индуктора,

w = 10, что соответствует деиствительному количеству витков оомотки индуктора, используемых в экспериментальных исследованиях.

Запишем вектор силы взаимодействия между i-ым и k-ым витками, если предварительно принять, что наведённые на торце пуансона токи равны токам в обмотке индуктора

$$\overline{F}_{ik} = 2cJ^2 \frac{l_c}{r_{ik}} \overline{e}_{ik}, \qquad (1)$$

где: $r_{ik} \ll l_c$ – радиус-вектор, проведенный от *i*-ого «витка» индуктора к *k*-ому «витку» на торце пуансона; $l_c = \frac{l_i + l_k}{2}$, l_i – длина *i* -го «витка» индуктора, l_k – длина *k*-ого «витка» на торце пуансона, *J* – сила разрядного тока, протекающего по обмотке индуктора, $c = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}$, \overline{e}_{ik} – единичный вектор.

Векторная сумма сил на k -ый кольцевой элемент пуансона со стороны всех W витков принимает вид

$$\overline{F}_{k} = \sum_{i=1}^{w} 2c J^{2} \frac{l_{c}}{r_{ik}} \overline{e}_{ik}.$$
(2)



Фиг. 1.

а) модель действия поля на пуансон,

б) пробивка заготовки пуансоном метаемым ИМП.

Суммарная сила на все k -ые элементы на нагружаемом торце пуансона будет

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{w} \sum_{i=1}^{w} 2cJ^2 \frac{l_c}{r_{ik}} \overline{e}_{ik} .$$
(3)

Составим в направлении метания дифференциальное уравнение движения пуансона под действием давления ИМП:

$$m\frac{d^{2}h}{d\tau^{2}} = 2cJ^{2}\sum_{k=1}^{w}\sum_{i=1}^{w}\frac{l_{c}}{r_{ik}}e_{iz}$$
(4)

Из фиг.1 определим

$$l_c = \pi \left[d - \frac{b}{w} (i - k) \right], \tag{5}$$

$$r_{ik} = \sqrt{\left(k - i\right)^2 \frac{b^2}{w^2} + h^2} \quad , \tag{6}$$

$$\cos\left(\overline{r_{ik}}, z\right) = \frac{h}{r_{ik}}, \qquad (7)$$

где *h* – вертикальный уровень торца пуансона от индуктора.

Массу пуансона запишем выражением $m = bl_c a \rho_0$, где a – высота пуансона,

 ρ_0 – плотность материала пуансона.

Запишем квадрат силы тока в следующем виде:

$$J^{2} = U_{0}^{2} \frac{C_{0}}{L_{0}} \lambda^{2} \sin^{2} \omega t = U_{0}^{2} C_{0}^{2} \omega_{0}^{2} \lambda^{2} \sin^{2} \omega t , \qquad (8)$$

где U_0 – напряжение на батарее конденсаторов, C_0 – емкость конденсаторной батареи, L_0 – индуктивность разрядного контура, λ – коэффициент затухания тока, ω – фактическая круговая частота колебаний тока.

Введем безразмерные величины:

$$H = \frac{h}{h_0} , \ n_1 = \frac{b}{h_0} , \ n_2 = \frac{d}{h_0} , \ \beta_1 = \frac{2cw^2 U_0^2 C_0^2 \lambda^2}{mb} , \ \tau = \omega t ,$$
(9)

где $h_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ м – первоначальный зазор между индуктором и пуансоном, технологически обусловленный изоляционным слоем на рабочей поверхности индуктора, *m* – масса метаемого пуансона, β_1 – величина, являющаяся критерием подобия, учитывающая параметры разрядного контура.

Особенности концентрации поля и эффективность использования энергии поля в работе деформирования учтём коэффициентом η . Кроме того, неполное затухание волн поля в пуансоне учтём коэффициентом k_{oc} .

Введем
$$\beta = \beta_1 \eta k_{oc}$$
 (10)

Уравнение (4) с учетом (5)–(10) примет вид:

$$\frac{d^2 H}{d\tau^2} = \beta n_1 \sum_{k=1}^{w=10} \sum_{i=1}^{w=10} \frac{\pi \left[\left(n_2 + \frac{n_1}{w} (i-k) \right) \right] H}{w H^2 + (k-i) n_1^2} \sin^2 \tau .$$
(11)

Формула (11) описывает смещение пуансона под действием ИМП под зоной концентрации поля.

С учетом сопротивления от встречи с матрицей дифференциальное уравнение движения пуансона на этапе разделения тонколистовой заготовки в безразмерном виде запишем в виде:

$$\frac{d^2 H}{d\tau^2} = \beta n_1 \sum_{k=1}^{w=10} \sum_{i=1}^{w=10} \frac{\pi \left[n_2 + \frac{n_1 \left(i - k \right)}{w} \right] H}{w^2 H^2 + \left(k - i \right)^2 n_1^2} \sin^2 \tau - \frac{A}{m h_0 \omega_0^2} , \qquad (12)$$

где A – величина, учитывающая сопротивление движения пуансона при разделении заготовки:

$$A = \tau_s 2\pi R s + \int_0^s \int_0^{\Delta t} \rho_0 v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} 2\pi (R+x) dx dz + \int_0^s \int_0^{\Delta t} \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} 2\pi (R+x) dx dz , \qquad (13)$$

где V_z – вертикальная составляющая скорости перемещения частиц металла в очаге деформации.

В выражении (13) первая составляющая учитывает усилие деформирования при пробивке отверстий с обычными малыми скоростями на прессах. Два последних составляющих представляют собой сопротивление деформированию от влияния инерционных сил, зависящих от координат точек перемещения материала в очаге пластической деформации и от времени пробивки заготовки [4]. Эти составляющие не оказывают существенного влияния при $V_{0,7} \leq 200$ м/с и при ускорениях

 $\frac{\partial V_{0,H}}{\partial t} \le 3,5 \cdot 10^6 \,\text{м/c}^2, \text{ поэтому их можно не учитывать при деформировании с использованием минимально необходимой для осуществления процесса энергии [5]. Уравнение (11) решалось при начальных условиях: <math>\tau = 0$, H = 1, $\frac{dH}{d\tau} = 0$ (для краткости обозначим $\frac{dH}{d\tau} = u$), $n_1 = 15$, $n_2 = 80$. Диапазон изменения- $\beta = 0.0028 \div 0.0866$.

При решении получены данные для расчета зависимостей $u = f(\tau)$, $H = f(\tau)$ (фиг. 2a,6): Спад кривых обусловлен встречей пуансона с матрицей, когда возникает сопротивление движению пуансона в процессе разделения заготовки. Эта часть кривых получена решением уравнения (12) при начальных условиях $\tau = \tau|_{H=5}$, $u = u|_{H=5}$, H = 5, $n_1 = 15$, $n_2 = 80$ и $\frac{A}{mh_0\omega_0^2} = 4$.



Фиг. 2. Безразмерные графические зависимости при различных значениях β , a) $u = f(\tau)$; б) $H = f(\tau)$.

Полученные зависимости используемы при определении параметров процесса вырубки-пробивки.

Задана заготовка (ρ_0) , толщина листа (s), $\mu = 4 \cdot 10^{-7}$ Г/м, имеющаяся в наличии магнитно-импульсная установка (ω, C) . Необходимо выбрать инструмент

и необходимые параметры процесса для пробивки отверстия (d) в следующей последовательности.

1. Выбор схемы, где путь метания до встречи с матрицей $h_3 = 4 \cdot 10^{-3} - 15 \cdot 10^{-3} \,\mathrm{m}$.

2. Выбор инструмента (концентратор магнитного поля, матрица, пуансон).

3. Определение режима процесса для определённых параметров рассчитываем $u = f(\tau)$ и $H = f(\tau)$ по уравнениям (11,12) и диапазону изменения β , соответствующего возможному диапазону энергии на имеющемся в наличии МИУ. Выбираем момент соударения метаемого пуансона с матрицей $\tau_c \approx 1,5 \div 2,5$, когда заготовка прижата к матрице магнитным полем вспомогательного индуктора. Из теоретических и экспериментальных исследований для разделения алюминиевой заготовки толщиной $s = 1 \cdot 10^{-3}$ м при ожидаемой скорости соударения $V_0 = 100$ м/с определяем безразмерную скорость по формуле:

$$u = \frac{dH}{dt} = \frac{d\frac{h}{h_0}}{d\omega t} = \frac{1}{\omega h_0} \frac{dh}{dt} = \frac{V_0}{\omega h_0} = \frac{100}{31400 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 3,187.$$

Из кривых $u = f(\tau)$ и $H = f(\tau)$ выбираем кривые с $\beta = 0,0037$, т.к. именно на них найдётся рабочая точка с $\tau = 2, 4, u \approx 3, 5, H = 5$, что близко совпадает с найденными выше параметрами процесса. Строим наложенный график (фиг.3) зависимостей $u = f(\tau), H = f(\tau)$ кривых с $\beta = 0,0037$ и s = 1 с зависимостями: P = f(t) – давлением магнитного поля в зависимости от времени и J = f(t) – силой разрядного тока в зависимости от времени.

Уточняем V_0 , соответствующую u = 3,5 по графику $u = f(\tau)$ для $\tau = 2,4: V_0 = uh_0 \omega = 3,5 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 31400 \approx 110$ м/с. Рассчитываем концентратор по методике, приведенной в работе [5], при этом становятся известными w, η, ϕ и другие параметры. Определяем кинетическую энергию метаемого пуансона в момент встречи с матрицей по формуле $W_{\rm MII} = \frac{mV_0^2}{2}$; определяем работу деформирования $(A_{\mathcal{I}})$ по формуле, приведенной в работе [6]; определяем в первом приближении потребную для процесса пробивки запасаемую в конденсаторной батарее энергии (W_0) по формуле $W_0 = \frac{A_{\mathcal{I}}}{\eta_{\rm MII}}$, принимая к.п.д=10%, т.е. $\eta_{\rm MII} = 0,1$ (может быть и выше, что уточнится в процессе практики деформирования с метанием пуансона) или по формуле $W_0' = \frac{W_{\rm MII}}{k_{oc} \eta}$ (значения W_0 и W_0' должны быть близки друг к другу). Определяем напряжение на конденсаторной батарее для данной установки по формуле $U_0 = \sqrt{\frac{2W_0'}{C_0}}$; производим зарядку конденсаторной батареи до рассчетного





Фиг. 3. Характер зависимости силы разрядного тока, давления поля от времени и безразмерные зависимости скорости и смещения пуансона для s = 1 при $\beta = 0,0037$.

Следует отметить, что под воздействием сильного ИМП в формуле (13) следовало бы учесть явление уменьшения предела текучести (τ_s) электропроводного пластического материала в два и более раза [7]. Более того, уменьшение τ_s сопровождается нелинейностью процесса, что сильно усложняет учёт действительного характера сопротивления материала разделению. Учитывая тонкостенность заготовки, можно было бы принять осреднённое значение τ_s в зависимости от магнитного поля и времени. Однако строгое решение данного вопроса усложняет расчёты и в конечном итоге значения τ_s будут колебаться в определённых пределах, но не превышающих его начального значения.

Таким образом, при меньших значениях τ_s на самом деле сопротивление движению пуансона при разделении заготовки значительно уменьшается, это говорит в пользу того, что потребная запасаемая энергия в конденсаторной батарее, а следовательно, и начальная скорость разделения (V_0) уменьшаются по сравнению с приведёнными выше расчётами, что, в свою очередь, означает ещё большее ожидаемое увеличение к.п.д. процесса. Для каждого конкретного случая увеличение коэффициента полезного действия окончательно могут быть получены и уточнены на практике.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Цыплаков О.Г. и др. Опыт формирования металлических деталей сложной конфигурации. ЛДНТП, 1968. 24 с.
- 2. Lesley L., Seyler. Automation. 1970. 17. 5. P. 69-72.
- Кононенко В.Г., Ананян В.А. Экспериментальные исследования к анализу процесса вырубки-пробивки тонкостенной листовой заготовки импульсным магнитным полем, сконцентрированным по контуру вырубки. //Самолетостроение. Техника воздушного флота. 1980. Вып. 47. С.112-118.
- Кононенко В.Г., Ананян В.А. К анализу динамики процесса вырубки-пробивки тонкостенной листовой заготовки импульсным магнитным полем, сконцентрированным по контуру вырубки. // Обраб. металлов давлением в машиностроении. 1982. Вып. 18. С.3-8.
- 5. Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. Харьков: "Вища школа", 1977. 168с.
- 6. Ананян В.А. Деформированное состояние в очаге деформации на кромке отверстия и работа деформирования при магнитно-импульсной пробивке тонколистовой заготовки //Изв. НАН РА и ГИУА.Сер.ТН. 2002. Т.55. №3. С.385–391.
- Беклемишев Н.Н., Шапиро Г.С. О законе деформирования и критерии разрушения пластического проводящего материала с учетом воздействия импульса электромагнитного поля.– Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С.41–51.

Государственный аграрный университет Армении

Поступила в редакцию 25.01.2008

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, **№**4, 2008

Механика

СОДЕРЖАНИЕ

61 тома 2008 г. «Изв. НАН Армении, Механика»

1.	Аветисян А.Г., Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. – Об особенности напряжений в
	одной задаче электроупругости для клина2-45
2.	Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. – Управление гарантированным поиском
	подвижного объекта при минимальных световых энергозатратах1-83
3.	Агаларян О.Б. – Асимптотическое поведение решения задачи продольного
	сдвига составного нелинейно-упругого тела в окрестностях угловых точек2-36
4.	Агамалян В.А., Хачикян А.С. – Распределение напряжений в зоне коллизии
	аравийской и евразиатской плит на основе данных GPS с учётом различий их
_	жёсткостей
5.	Агаян К.Л., Григорян Э.Х. – О задаче изгиба полубесконечной балки на границе
	упругой полуплоскости
6.	Агаян К.Л., Григорян Э.Х. – О решении контактной задачи для полуплоскости с
_	упругим креплением
7.	Акопян С.А., Мовсисян Л.А. – Две задачи динамики для бесконечно длинного
•	стержня
8.	Ананян В.А. – Магнито-импульсная пробивка тонколистовой заготовки метанием
0	пуансона
9.	Асратян М.І., Хачатрян І.І. – О деиствии сосредоточенной силы и
10	распределенной нагрузки на полосу переменной ширины
10	которых изгругуён и опирается на пружник
11	Которых нагружен и опирается на пружину
11	вертикальной трешиной 1–15
12	Баблодн А А Токмалжан В О – Смещанная запана изгиба пластины с учетом
14	поперечных слеигов
•	Багласаран $A B = cM N_0 11$
13	Багласарян З Р – Об олной залаче изгиба прямоугольной пластины с учетом
10	поперечных слвигов
14	Баглоев А Г – К 75-летию со лня рожления 3–3
15	Балалов Ф.Б., Хулаяров Б.А. – Исследование влияния вязко-упругого свойства
	материала конструкций летательного аппарата на критическое время и
	критические скорости флаттера1–75
16	Бардзокас Д.И., Сфирис Г.И. – Определяющие уравнения первой и второй
	фундаментальных задач эластодинамики для сред с трещиной
17	Барсегян В.Р., Геворкян Г.А. –Учёт непрерывности напряжений при решении
	задач изгиба пластин методом конечных элементов
18	.Барсегян В.Р., Саакян М.А Оптимальное управление колебаниями струны с
	заданными состояниями в промежуточные моменты времени
19	. Белубекян В.М., Белубекян М.В. – Устойчивость прямоугольной пластинки при
	действии «следящей» нагрузки, приложенной на свободной кромке2-53
•	Белубекян М.В. – см. № 19

20. Белубекян М.В., Мгерян Д.Э. – Пространственная задача распростра	нения
упругих поверхностных волн в пространстве со свойствами кубич	еской
симметрии	1–23
 Берберян А.Х. – см. № 23 	
 Геворкян Г.А. – см. № 17 	
21. Григоренко Ярослав Михайлович – К 80-летию со дня рождения	1–3
• Григорян Э.Х. – см. №№ 5, 6	
22. Гулгазарян Г.Р., Срапионян Дж.Л. – Колебания тонкостенной уп	ругой
конструкции из незамкнутых ортотропных цилиндрических оболоче	ск со
свободными граничными образующими	3–28
23. Даноян З.Н., Берберян А.Х. – Усиление и поглощение акустоэлектрич	еских
волн в системе, состоящей из ромбического пьезоэлектрика класса 2	222 и
полупроводника	1–69
24. Закарян Т.В. – О динамической первой краевой задаче теории упругост	и для
двухслойной ортотропной полосы	3-41
25. Капанадзе Г.А. – Об одной задаче плоской теории упругости для полу-плос	кости,
ослабленной периодично расположенными равнопрочными отверстиями	1–30
26. Керопян А.В. – Решение контактных задач для упругой полуплоско	сти и
оесконечнои пластины, которые усилены частично склеенными разнород	(НЫМИ 1 27
стрингерами	1–3 /
27. Макарян Б.С., Члингарян Г.С. – папряженное состояние составной уп	ругои
плоскости с трещиной, перпендикулярной к транице раздела материалов 28 Макаран В С. Цлицгоран Г С. Плоскод и ососилистрициод контокти на с	2-3
20. Макарян Б.С., Члингарян Г.С. – плоская и оссоимметричная контактные з	адачи 2 16
Для упругой плоскости и пространства с жесткими включениями	
• Maprupocsh C.r. – cm. M^{2}	
• Мперян Д.Э. – см. лу 20 20 Мореневи П.А. – Кустойнирости «анизотроници»» стержней	1 63
30 Мореневи П Λ_{-} К устойнирости прямочтоти ной пластиции с прумя сробот	1–05
кпаями	2_33
31. Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. – К устойчивости стержня с	лвумя
сосредоточенными силами	.3–51
32. Мовсисян Лаврентий Александрович – К 75-летию со дня рождения	4–3
• Мовсисян Л.А. – см. № 7	
 Непсисян Г.Г. – см. №№ 1. 31 	
 Саакян М.А. – см. № 18 	
• Canfight A.M. $-$ cm. No 1	
33. Саргсян А.М. – Об особенности напряжений в олной залаче теории упру	лости
лля клина	1–48
34. Саргсян В.Г., Хачикян А.С. – О решении «некорректной» з	адачи
теплопроводности с переопределёнными исходными данными	3–58
• Срапионян Дж.Л. – см. № 22	
 Сфирис Г.И. – см. № 16 	
 Токмаджян В.О. – см. № 12 	
 Хачатрян Г.Г. – см. № 9 	

- Худаяров Б.А. см. № 15
 Члингарян Г.С. №№ 27, 28



Բովանդակություն

ՀավրենտիԱլեքսանդրի Մովսիսյան

(Ծննդյան 75-ամյակի առթիվ)

Կ.Լ. Աղայան, Է.Խ. Գրիգորյան

Առաձգական կիսահարթության եզրում կիսաանվերջ հեծանի ծոման խնդրի մասին

Մ.Ա. Հակոբյան, Լ.Ա. Մովսիսյան

Դինամիկայի երկու խնդիրներ անվերջ երկար ձողի համար

Մ. Գ. Հասրաթյան, Գ. Գ. Խաչատրյան

Փոփոխական լայնության շերտի վրա կենտրոնացված ուժի և բաշխված բեոի ազդեցության մասին

Ս.Հ. Բաբայան

Մի ծայրով բեռնված և զսպանակին հենված շարժական ծայրերով ձողի երկայնական տատանումները

Ա.Հ. Բաբլոյան, Վ.Հ.Թոքմաջյան

Խառը եզրային պայմաններով սալի ծոման խնդիր՝ լայնական սահքերի հաշվառմամբ

Վ. Ա. Անանյան

Բարակթիթեղյա պատրաստուկի մագնիսաիմպուլսային ծակոտումը պուանսոնի նետումով

"ՀՀ ԳԱԱ տեղեկագիր Մեխանիկա"

2008p. 61 huunnh

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Содержание

3 МОВСИСЯН ЛАВРЕНТИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

(к 75-летию со дня рождения)

Агаян К.Л., Григорян Э.Х.

5

20

37

О ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

- Акопян С.А., Мовсисян Л.А.
- ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО СТЕРЖНЯ

28 Асратян, М. Г. Хачатрян Г. Г.

О ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ И РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ПОЛОСУ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Бабаян С.А.

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ, ОДИН ИЗ КОТОРЫХ НАГРУЖЕН И ОПИРАЕТСЯ НА ПРУЖИНУ

44 Баблоян А.А., Токмаджян В.О.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

52 Ананян В.А.

МАГНИТНО-ИМПУЛЬСНАЯ ПРОБИВКА ТОНКОЛИСТОВОЙ ЗАГОТОВКИ МЕТАНИЕМ ПУАНСОНА

60 СОДЕРЖАНИЕ

61 тома 2008 г. "Изв. НАН Армении, Механика"