

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՐՄԻԱՅԻ ՏԵԴԵԿՆԻԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2008



АЛЕКСАНДР ГЕОРГИЕВИЧ БАГДОЕВ
(К 75-летию со дня рождения)

Багдоев Александр Георгиевич родился 9 июля 1933 г. в г.Тбилиси в семье служащих. После переезда в Ереван в 1950 г. с золотой медалью окончил школу им. В.Чкалова. В том же году поступил в МГУ на механико-математический факультет, где был удостоен Сталинской стипендии. Сразу после окончания МГУ поступил в аспирантуру на кафедре "Волновой и газовой динамики" и там же в 1959г. под руководством профессора А.Я.Сагомояна защитил кандидатскую диссертацию. Затем был принят на работу в Институт математики и механики АН Армянкой ССР –ныне Институт механики НАН Армении, где работает по сей день. В 1972 году в МГУ Александр Георгиевич защищает докторскую диссертацию, которая была посвящена вопросам определения особенностей фронтов линейных и нелинейных волн. В 1993 г. удостоивается звания профессора, а в 2000 году избирается членом-корреспондентом НАН Армении.

Сфера научных интересов А.Г.Багдоева достаточно широка и касается самых разных вопросов механики деформируемого твердого тела. Он является автором трех монографий и более чем 350 статей.

Большое внимание уделено изучению нелинейных квазимонохроматических волн модуляций в различных механических и оптических средах. Из полученных нелинейных эволюционных уравнений,

учитывающих эффекты диссипации, выведены нелинейные уравнения Шредингера, описывающие поведение амплитуды первой гармоники с комплексными коэффициентами, для которых аналитически решены задачи об узких пучках. При изучении нелинейных волн модуляций в магнитоупругих пластинах им предложен и развит пространственный подход к определению частот линейных колебаний. Дано исследование модуляционной устойчивости и устойчивости солитонных решений эволюционных уравнений. Решён ряд линейных нестационарных задач газодинамики и динамической теории упругости, в том числе краевых. Решена нелинейная задача вблизи каустики.

Одним из основных достижений А.Г.Багдоева в развитии механики можно считать обобщение метода Пуанкаре–Лайтхилла–Го на двумерные волновые задачи дифракции и каустики.

В последние годы А.Г.Багдоев еще более расширил круг своих научных интересов, стараясь применить накопленный опыт теоретических исследований к детерминированным и стохастическим процессам в экономике, физике, социологии, биологии, сейсмологии, и, тем самым, сблизить разные области естественных и гуманитарных наук.

Результаты исследований Александра Георгиевича в области практической философии и этики опубликованы в популярной и научной литературе.

А.Г.Багдоев отличается и достаточно активной научно-организационной и педагогической деятельностью. Особо следует отметить своеобразную научную школу, созданную им в городе Горисе, которая стала базой для организации, ставшей уже традиционной международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», руководителем которой поистине является Александр Георгиевич.

А.Г.Багдоев являлся руководителем 14 кандидатских и научным консультантом 3 докторских диссертаций.

Научная общественность Армении и редакция журнала “Известия НАН Армении, Механика” поздравляют Александра Георгиевича Багдоева со славным юбилеем и желают ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов.

УДК 539.3

**THE STATE EQUATIONS FOR THE FIRST AND SECOND
FUNDAMENTAL PROBLEMS OF ELASTODYNAMICS
FOR A CRACKED MEDIUM.**

Bardzokas D.I., Sfyris G.I.

Ключевые слова: теория упругости, первая и вторая фундаментальные задачи, среда с трещиной, определяющие уравнения, комплексные потенциалы.

Key words: theory of elasticity, first and second fundamental problems, cracked medium, state equations, complex potentials.

Դ.Ի. Բարձոկաս, Գ.Ի. Սֆիրիս

Ճաբով միջավայրերի համար էլաստոդինամիկայի առաջին և երկրորդ հիմնարար խնդիրների որոշիչ հավասարումները

Առաձգականության գծային տեսության շրջանակներում արտածվում են առաջին և երկրորդ հիմնարար դինամիկական խնդիրների որոշիչ հավասարումները Ճաբով մարմինների համար, երբ ճաբի ափերի վրա տրված են լարումների բաղադրիչները, կամ տեղափոխությունների բաղադրիչները, համապատասխանաբար:

Д.И. Бардзокас, Г.И. Сфирис

Определяющие уравнения первой и второй фундаментальных задач эластодинамики для сред с трещиной

В рамках линейной теории упругости выводятся определяющие уравнения первой и второй фундаментальных динамических задач для тел с трещиной, когда на берегах трещины заданы, соответственно, компоненты напряжений или смещений.

1. Introduction.

In our work we will derive the state equations the first and second fundamental dynamical problems in the frame of linear elasticity. In the first fundamental dynamical problem we will consider an infinite medium that contains a crack, on the lips of which, the stresses are considered to be known. The second fundamental problem has the same formulation, but in this case, the displacements on the crack lips are known. Beginning from the equations of motion, Hooke's law and the compatibility equations we will derive the state equations for the above mentioned problems. The derivation of the equations will be based on the Muskhelishvili method of the Complex Potentials, the use of the Sohotsky – Plemely formulas and finally we will get two singular integral equations that are the state equations for the problems. These equations may contribute to better and further study of problems of seismic and fracture mechanics, composite, cracked or multiply connected media. The work was based on [1,2,3,4].

The equations of motion for a continuous medium with density ρ may be written as:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\psi\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{x\psi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\psi\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial \sigma_{\psi z}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\psi z}}{\partial \psi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (1)$$

In equation (1) we have not taken into account the body forces. Hooke's law may be written as

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx}, & \sigma_{\psi\psi} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\psi\psi}, & \sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{x\psi} &= 2\mu\varepsilon_{x\psi}, & \sigma_{xz} &= 2\mu\varepsilon_{xz}, & \sigma_{\psi z} &= 2\mu\varepsilon_{\psi z},\end{aligned}\quad (2)$$

The components of the strains are connected with the vector of displacement \vec{u} according to:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{\psi\psi} &= \frac{\partial v}{\partial \psi}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{x\psi} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right], & \varepsilon_{\psi z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \right], & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]\end{aligned}\quad (3)$$

We replace (2) and (3) into (1) and we get:

$$\begin{aligned}\mu\Delta u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} (\text{div}\vec{u}) &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \mu\Delta u_\psi + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \psi} (\text{div}\vec{u}) &= \rho \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial t^2} \\ \mu\Delta u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} (\text{div}\vec{u}) &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (4)$$

The relations above may be written in vector form

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \text{grad}(\text{div}\vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}\quad (5)$$

If we take into consideration the following condition:

$$\text{grad}(\text{div}\vec{u}) = \text{rot}(\text{rot}\vec{u}) + \Delta\vec{u}\quad (6)$$

And use it in Eq. (5) we find:

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad}(\text{div}\vec{u}) - \mu\text{rot}(\text{rot}\vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}\quad (7)$$

The displacement field of the elastic medium may be analyzed in a transverse and a longitudinal field. These two components of the displacement are propagating with different speeds that are independent. So we get:

$$\vec{u} = \vec{u}^p + \vec{u}^s\quad (8)$$

the components if which satisfy the equations:

$$\text{rot}\vec{u}^p = 0, \quad \text{div}\vec{u}^s = 0\quad (9)$$

Equation (7) based on (8) will result to

$$\frac{\partial^2 \vec{u}^p}{\partial t^2} = c_1^2 \left(\frac{\partial^2 \vec{u}^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}^p}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}^p}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}^s}{\partial t^2} = c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \vec{u}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}^s}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

where $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ are the propagation speeds of the longitudinal (P) and the transverse (S) waves. In case when we consider the existence of body forces vector equation (5) will become:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + \rho \vec{P} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (11)$$

where $\vec{P}(X, Y, Z)$ is the vector of the body forces. If we write vector \vec{P} as

$$\vec{P} = \text{grad}\Phi + \text{rot}\vec{\Psi} \quad (12)$$

then we seek \vec{u} as

$$\vec{u} = \text{grad}\phi + \text{rot}\vec{\psi} \quad (13)$$

and the following condition should be satisfied

$$\text{div} \vec{u} = \nabla^2 \phi \quad (14)$$

Vector equation (11) based on (12), (13) and (14) will become:

$$\begin{aligned} & \mu \nabla^2 (\text{grad}\phi + \text{rot}\vec{\psi}) + (\lambda + \mu) \text{grad}(\nabla^2 \phi) + \rho \text{grad}\Phi + \rho \text{rot}\vec{\Psi} = \\ & = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{grad}\phi) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{rot}\vec{\psi}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{grad} \left[(\lambda + \mu) \nabla^2 \phi + \rho \Phi - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] + \text{rot} \left[\mu \nabla^2 \vec{\psi} + \rho \vec{\Psi} - \rho \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (16)$$

The form of Equation (16) shows that the vector expression (13) will be the solution of the motion equation if and only if functions ϕ and $\vec{\psi}$ are selected in a way that they satisfy (be solutions of) the following equations

$$c_1^2 \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\Phi \quad (17)$$

$$c_2^2 \nabla^2 \vec{\psi} - \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = -\vec{\Psi} \quad (18)$$

Equation (17) is the non-homogenous wave equation with wave propagation velocity c_1 which demonstrates that the component of the total displacement that corresponds to the gradient function ϕ is moving with c_1 speed. From (14) we get that the dilatation $\Delta = \text{div} \vec{u}$ satisfies the wave equation that corresponds to speed c_1 . In seismology this wave is called primary or simply P-wave. This wave contributes to the changes in the volume of the medium.

On the other hand Eq. (18) shows that the other component of the boundary displacement, that corresponds to the vector function $\vec{\psi}$ is moving with a smaller speed, namely c_2 . Using $\text{rot} \vec{u} = \text{rot}(\text{rot} \vec{\psi})$ we come up with the fact that $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}$

satisfies the wave equation with speed c_2 . In seismology this wave is called secondary or simply S-wave.

This type of wave (transverse) refers to the twisting of the element without changes in its volume. In case when the shear modulus is zero then $c_2 = 0$. The above prove that transverse waves can't propagate in media with zero bending stiffness.

For our studies it would be useful to introduce the constant β , that is defined by:

$$\beta = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 - 2\nu}{1 - \nu}} \quad (19)$$

this constant is independent of the density and the elasticity modulus of the medium.

2. The method of Complex Analysis for two dimensional (2-D) Dynamic Problems.

Next, we will examine the solution of the two dimensional boundary problem in the frame of the dynamical theory of elasticity. We will limit the problem to the case of plane strain, where the following equations are valid:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x\psi}}{\partial \psi} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{x\psi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\psi\psi}}{\partial \psi} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (20)$$

where:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial \psi} \\ \sigma_{\psi\psi} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial \psi}, \quad \sigma_{x\psi} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

and the condition of compatibility

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\psi\psi}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{x\psi}}{\partial x \partial \psi} \quad (22)$$

where $\gamma_{x\psi} = 2\varepsilon_{x\psi}$

Hooke's Law (21) may be written as:

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi}) \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial \psi} &= \sigma_{\psi\psi} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi}), \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi}) \end{aligned} \quad (23)$$

The compatibility condition (22) based on (23) will become:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi}) - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) \quad (24)$$

or, based on (23) we get:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi}) = 0 \quad (25)$$

Equation (25) based on the definition of the speed c_1 of the P-wave will become:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi}) = 0 \quad (26)$$

If we differentiate equation (20₁) with respect to x and (20₂) with respect to ψ and then subtracting one from the other we get:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{xx} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{\psi\psi} \quad (27)$$

Based on the definition of the speed of the S-waves we will have:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\psi\psi}}{\partial \psi^2} = \frac{1}{2c_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi}) \quad (28)$$

Adding the results of the differentiations of equations (20) we get

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \psi} (\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{x\psi} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \psi} (\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi}) + \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{x\psi} = 0 \quad (30)$$

Relation (27) will be identically satisfies if we introduce the following relations for $\sigma_{xx}, \sigma_{\psi\psi}$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \sigma_{\psi\psi} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (31)$$

and if we add them we will have:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi} = \nabla^2 U - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (32)$$

Based on (31) relations (25) and (23) will become:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U = 0 \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\sigma_{x\psi} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \psi} \right) = 0 \quad (34)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U = 0 \quad (35)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\sigma_{x\psi} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \psi} \right) = 0 \quad (36)$$

From the above it's easy to understand that function U is the dynamic analogue of the Airy function. So the problem focuses on relation (35). If we concentrate on problems where the disturbance is propagating with speed c parallel to axis x , we can use the transformation:

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = \psi \end{cases} \quad (37)$$

Of course the general case $\xi = x \pm c_1^* t, \quad \eta = \psi \pm c_2^* t$, may be examined.

Relation (35) with respect to the new coordinates (ζ, n) will be:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\mu_1^*} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\mu_2^*} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) U = 0 \quad (38)$$

where μ_1^*, μ_2^* are the solutions of the characteristic equation.

$$\left(1 - \frac{\rho c^2}{\lambda + 2\mu} + \mu^{*2} \right) \left(1 - \frac{\rho c^2}{\mu} + \mu^{*2} \right) = 0 \quad (39)$$

$$\mu_1^* = i \left(1 - \frac{\rho c^2}{\lambda + 2\mu} \right)^{1/2} = i \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right)^{1/2} = ia_1, \quad \mu_2^* = i \left(1 - \frac{\rho c^2}{\mu} \right)^{1/2} = i \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^{1/2} = ia_2$$

Equations (31) and (32) through the new coordinates (ζ, n) will become:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{c^2}{2c_1^2} \frac{\partial U}{\partial \xi^2}, \quad \sigma_{\psi\psi} = \frac{1}{2} (1 + \alpha_2^2) \frac{\partial U}{\partial \xi^2} \quad (40)$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \quad (41)$$

The existence of two solutions forms two complex planes

$$z_1 = \xi + \mu_1^* \eta, \quad z_2 = \xi + \mu_2^* \eta \quad (42)$$

Using Eq. (42) in Eq. the solution will be found in the same way as for the case of the anisotropic medium:

$$U = F_1(z_1) + \overline{F_1(z_1)} + F_2(z_2) + \overline{F_2(z_2)} = 2 \operatorname{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (43)$$

where $F_i(z_i)$ $i=1,2,3$ are analytic functions with respect to complex variables z_j .

If we take into account relation (43), equations (43) and (41) will become:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -2 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{1}{2} + a_1^2 - \frac{1}{2} a_2^2 \right) F_1''(z_1) + \frac{1}{2} (1 + a_2^2) F_2''(z_2) \right] = \\ &= -2 \operatorname{Re} \left[\left(a_1^2 + \frac{1}{2} (1 + a_2^2) \right) \Phi(z_1) + \frac{1}{2} (1 + a_2^2) \Psi(z_2) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

$$\sigma_{\psi\psi} = (1 + \alpha_2^2) \operatorname{Re} [F_1''(z_1) + F_2''(z_2)] = (1 + a_1^2) \operatorname{Re} [\Phi(z_1) + \Psi(z_2)] \quad (45)$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi} = -2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \operatorname{Re}(F_1''(z_1)) = -2(a_1^2 - a_2^2) \operatorname{Re} \Phi(z_1) \quad (46)$$

Where $F_1''(z_1) = \Phi(z_1)$ and $F_1''(z_2) = \Psi(z_2)$. Using the above in Hooke's Law (21) or (23) and integrating we will get:

$$\mu u = -\operatorname{Re} \left[F_1'(z_1) + \frac{1}{2} (1 + a_2^2) F_2'(z_2) \right] = -\operatorname{Re} \left[\phi(z_1) + \frac{1}{2} (1 + a_2^2) \psi(z_2) \right] \quad (47)$$

$$\mu v = \operatorname{Im} \left[a_1 F_1'(z_1) + \frac{1 + a_2^2}{a_2^2} F_2'(z_2) \right] = \operatorname{Im} \left[a_1 \phi(z_1) + \frac{1 + a_2^2}{a_2^2} \psi(z_2) \right] \quad (48)$$

where $F_1'(z_1) = \phi(z_1)$ and $F_2'(z_2) = \psi(z_2)$.

Relation (21₃) based on the above equations will result to:

$$\sigma_{x\psi} = 2 \operatorname{Im} \left[a_1 F_1''(z_1) + \frac{1+a_2^2}{4a_2^2} F_2''(z_2) \right] = -2 \operatorname{Re} \left[i \left(a_1 \Phi(z_1) + \frac{1+a_2^2}{4a_2^2} \Psi(z_2) \right) \right] \quad (49)$$

Equations (44)-(49) gives us the components of the stress tensor and the displacement vector, in any point of the medium. These relations play the same role as the Kolosov – Muskhelishvili – Lechnitski relations.

3.General method of solution of the 1st fundamental dynamic problem of elasticity for the cracked body.

For the first fundamental problem, we consider that the normal and tangential stresses on both of the crack lips are known. If we take into account the next relation:

$$2(\sigma_n + i\sigma_t) = (\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi}) - e^{-2i\theta} [\sigma_{xx} - \sigma_{\psi\psi} + 2i\sigma_{x\psi}] \quad (50)$$

and the expressions for the components of stresses $(\sigma_{xx}, \sigma_{\psi\psi}, \sigma_{x\psi})$ with respect to complex potentials $\Phi_1(z_1)$ and $\Psi_2(z_2)$ when $z \rightarrow t \in \ell$, $z_1 \rightarrow t_1$, $z_2 \rightarrow t_2$ they will become:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{\psi\psi} = -(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \left[\Phi_1^\pm(t_1) + \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} \right] \quad (51)$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{\psi\psi} = -(1 + \alpha_1^2) \left[\Phi_1^\pm(t_1) + \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} \right] - (1 + \alpha_2^2) \left[\Psi_2^\pm(t_2) + \overline{\Psi_2^\pm(t_2)} \right] \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x\psi} &= -2 \operatorname{Re} \left\{ i \left[a_1 \Phi_1^\pm(t_1) + \frac{(1+a_2^2)}{4a_2} \Psi_2^\pm(t_2) \right] \right\} = \\ &= - \left\{ \alpha_1 \left[i\Phi_1^\pm(t_1) - i\overline{\Phi_1^\pm(t_1)} \right] + \frac{(1+a_2^2)^2}{4\beta_2} \left[i\Psi_2^\pm(t_2) - i\overline{\Psi_2^\pm(t_2)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (53)$$

and finally we will have:

$$\begin{aligned} 2[\sigma_n^\pm + i\sigma_t^\pm] &= -(a_1^2 - a_2^2) \left[\Phi_1^\pm(t_1) + \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} \right] + \frac{\overline{dt}}{dt} \left\{ (1+a_1^2) \left(\Phi_1^\pm(t_1) + \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} \right) + \right. \\ & (1 + \alpha_2^2) \left(\Psi_2^\pm(t_2) + \overline{\Psi_2^\pm(t_2)} \right) + 2i \left\{ a_1 \left[i\Phi_1^\pm(t_1) - i\overline{\Phi_1^\pm(t_1)} \right] + \frac{(1 + \alpha_2^2)}{4\alpha_2} + \right. \\ & \left. \left. + \left[i\Psi_2^\pm(t_2) - i\overline{\Psi_2^\pm(t_2)} \right] \right\} \right\}, \quad \frac{dt}{\overline{dt}} = e^{-2i\theta} \\ f^\pm(t) &= -\frac{\overline{dt}}{dt} \frac{1+a_2^2}{2a_2} \left[(1+a_2)^2 \Psi_2^\pm(t_2) + (1+a_2)^2 \overline{\Psi_2^\pm(t_2)} \right] - \\ & - \left[-(a_1^2 - a_2^2) + \frac{\overline{dt}}{dt} (1-a_1)^2 \right] \Phi_1^\pm(t_1) + \left[-(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \frac{\overline{dt}}{dt} (1+a_1)^2 \right] \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} \end{aligned} \quad (54)$$

where $f^\pm(t) = 2(\sigma_n^\pm + i\sigma_t^\pm)$. If we multiply (54) with dt/\overline{dt} and carry out the math we will get:

$$2(1-\alpha_1)\frac{dt_1}{dt}\Phi_1^\pm(t_1)+2(1+a_1)\frac{\overline{dt_1}}{\overline{dt}}\overline{\Phi_1^\pm(t_1)}+(a_2-1)\frac{dt_1}{dt}\left[\Phi_1^\pm(t_1)+\overline{\Phi_1^\pm(t_1)}\right]-$$

$$-\frac{(1+a_2^2)(1-a_2)^2}{2a_2}\Psi_2^\pm(t_2)+\frac{(1+a_2^2)(1+a_2)^2}{2a_2}\overline{\Psi_2^\pm(t_2)}=\frac{dt}{dt}f(t) \quad (55)$$

where: $\frac{dt_1}{dt}=\frac{1}{2}\left[(1+a_1)+(1-a_1)\frac{\overline{dt}}{dt}\right]$, $\frac{\overline{dt_1}}{\overline{dt}}=\frac{1}{2}\left[(1-a_1)+(1+a_1)\frac{dt}{\overline{dt}}\right]$

The conjugate expression of (55) becomes

$$2(1-\alpha_1)\frac{\overline{dt_1}}{\overline{dt}}\overline{\Phi_1^\pm(t_1)}+2(1+a_1)\frac{dt_1}{dt}\Phi_1^\pm(t_1)+(a_2-1)\frac{\overline{dt}}{\overline{dt}}\left[\overline{\Phi_1^\pm(t_1)}+\Phi_1^\pm(t_1)\right]-$$

$$-\frac{(1+a_2^2)(1-a_2)^2}{2a_2}\overline{\Psi_2^\pm(t_2)}+\frac{(1+a_2^2)(1+a_2)^2}{2a_2}\Psi_2^\pm(t_2)=\frac{\overline{dt}}{\overline{dt}}\overline{f^\pm(t)} \quad (56)$$

We multiply relation (55) with $\frac{2\alpha_2}{(1+\alpha_2^2)(1-\alpha_2)^2}$ and relation (56) with

$$\frac{2\alpha_2}{(1+\alpha_2^2)(1-\alpha_2)^2}$$

and consequently we add the results to find:

$$\frac{8\alpha_2(1+\alpha_2^2)}{(1-\alpha_2^2)^2}\Psi_2^\pm(t_2)+\frac{2a_2}{(1+a_2^2)}\left[2\frac{1-a_1}{(1+a_2)^2}\frac{dt_1}{dt}+2\frac{1+a_1}{(1-a_2)^2}\frac{dt_1}{dt}+\right.$$

$$\left.+\frac{a_2-1}{(1+a_2)^2}\frac{dt}{dt}+\frac{a_2-1}{(1-a_2)^2}\frac{\overline{dt}}{\overline{dt}}\right]\Phi_1^\pm(t_1)+\frac{2a_2}{(1+a_2^2)}\left[2\frac{1+a_1}{(1+a_2)^2}\frac{\overline{dt_1}}{\overline{dt}}+\frac{2(1-a_1)}{(1-a_2)^2}\frac{\overline{dt_1}}{\overline{dt}}+\right.$$

$$\left.+\frac{a_2-1}{(1+a_2)^2}\frac{\overline{dt}}{\overline{dt}}+\frac{a_2-1}{(1-a_2)^2}\frac{dt}{dt}\right]\overline{\Phi_1^\pm(t_1)}=g^\pm(t) \quad (57)$$

where

$$g^\pm(t)=\frac{2a_2}{(1+a_2^2)(1+a_2)^2}\frac{dt}{dt}f^\pm(t)+\frac{2a_2}{(1+a_2^2)(1-a_2)^2}\frac{\overline{dt}}{\overline{dt}}\overline{f^\pm(t)}$$

We multiply (57) with $\frac{(1-\alpha_2^2)^2}{8\alpha_2(1-\alpha_2^2)}$ and we have

$$\Psi_2^\pm(t_2)+A(t,\bar{t})\Phi_1^\pm(t_1)\frac{dt_1}{dt_2}+B_1(t,\bar{t})\overline{\Phi_1^\pm(t_1)}\frac{\overline{dt_1}}{\overline{dt_2}}=g_1^\pm(t)\frac{dt}{dt_2} \quad (58)$$

where:

$$A(t,\bar{t})=\frac{(1-a_2^2)^2}{4(1+a_2^2)^2}\left\{\frac{1}{(1+a_2)^2}\left[(1-a_1)^2+\frac{dt}{dt}(a_2^2-a_1^2)\right]+\right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(1-a_2)^2} \left[(1+a_1)^2 + \frac{\bar{dt}}{dt} (a_2^2 - a_1^2) \right] \left(\frac{dt_2}{dt} / \frac{dt_1}{dt} \right) \\
B(t, \bar{t}) &= \frac{(1-a_2^2)^2}{4(1+a_2^2)^2} \left\{ \frac{1}{(1+a_2)^2} \left[(1+a_1)^2 + \frac{dt}{dt} (a_2^2 - a_1^2) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(1-a_2)^2} \left[(1-a_1)^2 + \frac{\bar{dt}}{dt} (a_2^2 - a_1^2) \right] \right\} \left(\frac{dt_2}{dt} / \frac{\bar{dt}_1}{dt_2} \right) \\
g_1^\pm(t) &= \frac{(1-a_2^2)^2}{8a_2(1+a_2^2)} \frac{dt_2}{dt} \\
\frac{dt_2}{dt} &= \frac{1}{2} \left[(1+a_2) + (1-a_2) \frac{\bar{dt}}{dt} \right], \quad \frac{dt_2}{dt} = \frac{1}{2} \left[(1-a_2) + (1+a_2) \frac{dt}{dt} \right]
\end{aligned} \tag{59}$$

As we know the complex potentials that describe the cracked body may be expressed via the Cauchy integrals, similarly with the case of the anisotropic medium:

$$\begin{cases} \Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\phi_2(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} dz_1 \\ \Psi_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\psi(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2 \end{cases} \tag{60}$$

Sohotsky – Plemely formulas when $z \rightarrow t^\pm$ ($z_1 \rightarrow t_1^\pm, z_2 \rightarrow t_2^\pm$) become:

$$\Phi_1^\pm(t_1) = \pm \frac{1}{2} \phi(t_1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\phi(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 \tag{61}$$

$$\Psi_2^\pm(t_2) = \pm \frac{1}{2} \psi(t_2) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\psi(\tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 \tag{62}$$

We subtract relations (58) and based on (61) and (62) we find:

$$\psi(t_2) + A(t, \bar{t}) \phi(t_1) \frac{dt_1}{dt_2} + B(t, \bar{t}) \overline{\phi(t_1)} \frac{\bar{dt}_1}{dt_2} = \lambda_1(t) \frac{dt}{dt_2} \tag{63}$$

where $\psi(t_2) = \Psi^+(t_2) - \Psi^-(t_2)$ and $\lambda_1(t) = g_1^+(t) - g_1^-(t)$

The complex potential $\Psi_2(z_2)$ based on (63) will have the form:

$$\Psi_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\lambda_1(\tau)}{\tau_2 - z_2} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{A(\tau, \bar{\tau}) \phi(\tau_1)}{\tau_2 - z_2} d\tau_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{B(\tau, \bar{\tau}) \overline{\phi(\tau_1)}}{\tau_2 - z_2} d\tau_1 \tag{64}$$

Adding relations (58) based on (61), (62) and the expressions (64) we will have the next singular integral equation:

$$A(t, \bar{t}) \left(\frac{dt_1}{dt} / \frac{dt_2}{dt} \right) \frac{1}{\pi i} \int_{\ell} \frac{\phi(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 - B(t, \bar{t}) \left(\frac{\bar{dt}_1}{dt} / \frac{dt_2}{dt} \right) \frac{1}{\pi i} \int_{\ell} \frac{\overline{\phi(\tau_1)}}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi i} \int_{\ell} \frac{A(\tau, \bar{\tau}) \phi(\tau_1)}{\tau_2 - t_2} d\tau_1 - \frac{1}{\pi i} \int_{\ell} \frac{B(\tau, \bar{\tau}) \overline{\phi(\tau_1)}}{\tau_2 - t_2} d\tau_1 = \left[g_1^+(t) + g_2^-(t) \right] \frac{dt}{dt_2} - \\
& -\frac{1}{\pi i} \int_{\ell} \frac{\lambda_1(\tau)}{\tau_2 - t_2} d\tau
\end{aligned} \tag{I}$$

where $\lambda_2(t) = \left[g_1^+(t) + g_1^-(t) \right]$

Singular integral equation (I) is the state equation of the first fundamental dynamic problem for the cracked body in case when the stresses $(\sigma_n^\pm, \sigma_t^\pm)$ are known for both the crack lips.

4. The 2nd fundamental dynamic problem of elasticity for a cracked body.

For the second fundamental problem, we consider known the displacements on both the crack lips. We have:

$$2\mu(u(z) + iv(z)) = -\left[\beta_1 \phi_1(z_1) + \beta_2 \overline{\phi_1(z_1)} + \beta_3 \psi_2(z_2) + \beta_4 \overline{\psi_2(z_2)} \right] \tag{65}$$

where: $\beta_1 = 1 + \alpha_1$, $\beta_2 = 1 - \alpha_2$, $\beta_3 = \frac{1}{2}(1 + \alpha_2^2) \left(1 + \frac{1}{\alpha_2} \right)$, $\beta_4 = \frac{1}{2}(1 + \alpha_2^2) \left(1 - \frac{1}{\alpha_2} \right)$.

If we take the limiting values of expression (65) when $z \rightarrow t^\pm \in \ell$ ($z_1 \rightarrow t_1^\pm$, $z_2 \rightarrow t_2^\pm$) and differentiate with respect to variable t we get:

$$\begin{aligned}
& 2\mu \frac{d}{dt} \left[u_{(t)}^\pm + iv_{(t)}^\pm \right] = \\
& = -\left[\beta_1 \frac{dt_1}{dt} \Phi_1^\pm(t_1) + \beta_2 \frac{d\bar{t}_1}{dt} \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \beta_3 \frac{dt_2}{dt} \Psi_2^\pm(t_2) + \beta_4 \frac{d\bar{t}_2}{dt} \overline{\Psi_2^\pm(t_2)} \right]
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\mu}{\beta_4} \frac{dt}{dt_2} \frac{d}{dt} \left(u_{(t)}^\pm + iv_{(t)}^\pm \right) = \\
& = -\left[\frac{\beta_1}{\beta_4} \frac{dt_1}{dt_2} \Phi_1^\pm(t_1) + \frac{\beta_2}{\beta_4} \frac{d\bar{t}_1}{dt_2} \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \frac{\beta_1}{\beta_4} \frac{dt_2}{dt_2} \Psi_2^\pm(t_2) + \overline{\Psi_2^\pm(t_2)} \right]
\end{aligned} \tag{67}$$

An analogous expression of (65) is the following:

$$2\mu(u(z) + iv(z)) = -\left[\beta_2 \phi(z_1) + \beta_1 \overline{\phi(z_1)} + \beta_4 \psi_2(z_2) + \beta_3 \overline{\psi_2(z_2)} \right] \tag{68}$$

For $z \rightarrow t$ and consequently differentiation with respect to t , we shall get after carrying out the mathematics:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\mu}{\beta_3} \frac{dt}{dt_2} \frac{d}{dt} \left(u_{(t)}^\pm + iv_{(t)}^\pm \right) = \\
& = -\left[\frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{dt_1}{dt_2} \Phi_1^\pm(t_1) + \frac{\beta_1}{\beta_3} \frac{d\bar{t}_1}{dt_2} \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \frac{\beta_4}{\beta_3} \frac{dt}{dt_2} \Psi_2^\pm(t_2) + \overline{\Psi_2^\pm(t_2)} \right]
\end{aligned} \tag{69}$$

We subtract relation (69) from relation (67) and we get:

$$\begin{aligned}
(\beta_3 - \beta_4) 2\mu \frac{dt}{dt_2} \frac{d}{dt} (u_{(t)}^\pm - iv_{(t)}) = & - \left[(\beta_1\beta_3 - \beta_4\beta_2) \frac{dt_1}{dt_2} \Phi_1^\pm(t_1) + \right. \\
& \left. + (\beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_4) \frac{dt_1}{dt_2} \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + (\beta_3^2 - \beta_4^2) \frac{dt_2}{dt_2} \Psi^\pm(t_2) \right]
\end{aligned} \tag{70}$$

We multiply equation (70) with $\frac{1}{\beta_3^2 - \beta_4^2} \frac{dt_2}{dt_2}$ and we result to:

$$\begin{aligned}
2\mu \frac{dt}{dt_2} \frac{\beta_3 - \beta_4}{\beta_3^2 - \beta_4^2} \frac{d}{dt} (u_{(t)}^\pm + iv_{(t)}^\pm) = & - \left[\frac{\beta_1\beta_3 - \beta_4\beta_2}{\beta_3^2 - \beta_4^2} \frac{dt_1}{dt_2} \Phi_1^\pm(t_1) + \right. \\
& \left. + \frac{\beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_4}{\beta_3^2 - \beta_4^2} \frac{dt_1}{dt_2} \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \Psi^\pm(t_2) \right]
\end{aligned} \tag{71}$$

If we subtract equations (71) and taking into consideration the Sohotsky – Plemely formulas we shall have:

$$\begin{aligned}
\psi(t_2) = & -2\mu \frac{d}{dt} [(u^+ - u^-) - i(v^+ - v^-)] \frac{(\beta_3 - \beta_4)}{\beta_3^2 - \beta_4^2} \frac{dt}{dt_2} - \\
& - \frac{\beta_1\beta_3 - \beta_4\beta_2}{\beta_3^2 - \beta_4^2} \frac{dt_1}{dt_2} \phi_1(t_1) - \frac{\beta_3\beta_2 - \beta_1\beta_4}{\beta_3^2 - \beta_4^2} \frac{dt_1}{dt_2} \overline{\phi_1(t_1)}
\end{aligned} \tag{72}$$

We use the following notation:

$$\lambda_1^*(t) = 2\mu \frac{d}{dt} [(u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)] \frac{\beta_3 - \beta_4}{\beta_3^2 - \beta_4^2} = \lambda_1(t) \frac{dt}{dt_2}$$

So, the expression of the complex potential $\Psi_2(z_2)$ based on relation (72) will become:

$$\begin{aligned}
\Psi_2(z_2) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\psi(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\lambda_1^*(\tau)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2 - \frac{\beta_1\beta_3 - \beta_4\beta_2}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\phi_1(z_1)}{\tau - z_2} d\tau_1 - \\
& - \frac{\beta_3\beta_2 - \beta_1\beta_4}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{\overline{\phi_1(\tau_1)}}{\tau_2 - z_2} d\tau_1
\end{aligned} \tag{73}$$

By addition of relations (71) and taking into consideration the limiting values of the Sohotsky – Plemely formulas for the complex potentials $\Phi_1(z_1)$ and $\Psi_2(z_2)$ we will get the following singular integral equation:

$$\begin{aligned}
& \frac{(\beta_4\beta_2 - \beta_1\beta_3)}{\pi i} \frac{dt_1}{dt_2} \int_{\ell} \frac{\phi_1(\tau_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \frac{\beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_4}{\pi i} \frac{dt_1}{dt_2} \int_{\ell} \frac{\overline{\phi_1(\tau_1)}}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \\
& + \frac{\beta_4\beta_2 - \beta_1\beta_3}{\pi i} \int_{\ell} \frac{\phi(\tau_1)}{\tau_2 - t_2} d\tau_1 + \frac{\beta_1\beta_4 - \beta_3\beta_2}{\pi i} \int_{\ell} \frac{\overline{\phi_1(\tau_1)}}{\tau_2 - t_2} d\tau_1 = \\
& = \lambda_2^*(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\ell} \frac{\lambda_1^*(\tau)}{\tau_2 - t_2} d\tau
\end{aligned} \tag{II}$$

where

$$\lambda_2^*(t) = 2\mu \frac{d}{dt} \left[(u^+ + u^-) + i(v^+ + v^-) \right] (\beta_3 - \beta_4) \frac{dt}{dt_2}$$

Equation (II) is the State Equation for the second fundamental problem of elasticity.

5. Conclusions

In this work, we provided the equations that are reciprocal to the Muskhelishvili equations (which are only effective for static problems) for the dynamic problem as described in the begging. Consequently we deduced the State Equations for the first (equation (I)) and second (equation (II)) fundamental problems.

The work was carried out in the framework of an agreement on scientific cooperation between the National Technical University of Athens and the Institute of Mechanics, National Academy of Sciences (NAS) of Armenia.

6. References

1. Muskhelishvili, N.I., Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. P. Noordhoff, Groningen, 1965.
2. Lechnitsky, S.G., Theory of elasticity for the anisotropic media. Moscow, 1951 (in Russian)
3. Sfyris, G.I., Mathematical simulation in problems of coupled fields and earthquake mechanics. PhD Thesis, National Technical University of Athens, 2007 (in Greek).
4. Sneddon, J.N., Berry, D.S., The classical theory of elasticity. Springer-Verlang, Berlin, Goetingen, Heidelberg, 1958.

School of Applied Mathematics & Physical Sciences,
National Technical University of Athens,
Zografou Campus, GR 157 73, Greece

Received
12.03.2008

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ И ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ
Макарян В.С., Члингярян Г.С.

Ключевые слова: плоскость, пространство, трещина, антитрещина, включение, напряжение, точное решение, преобразование.

Key words: surface, space, crack, anticrack, inclusion, stress, exact solution, transformation.

Վ. Ս. Մակարյան, Գ. Ս. Չլինգարյան

Կոշտ ներդիրներով առաձգական հարթության և տարածության հարթ և առանցքասիմետրիկ
կոնտակտային խնդիրներ

Դիտարկվում է կոշտ ներդիրներ պարունակող առաձգական հարթության և տարածության հարթ և առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդիրները: Ներդիրների և առաձգական միջավայրերի միջև տեղի ունեն կոշտ ամրակցման պայմանները: Հանկելի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների հիման վրա ստացված են խնդիրների ճշգրիտ լուծումները: Բացահայտ տեսքով ստացված են խնդիրների լուծումները՝ ներդիրների տարբեր ձևերի դեպքում: Մասնավոր սահմանային դեպքերում ստացված են խնդիրների լուծումները՝ հակաճաքի համար:

V. S. Makaryan, G. S. Chlingaryan

A Plane and Axisymmetric Contact Tasks for Elastic Surface and Space Containing Rigid Inclusion

A plane and axisymmetric contact problems for elastic surface and space containing rigid inclusion are discussed. There exist conditions of full contact cohesion between inclusions and elastic mediums. Based on Fourier and Hankel integral transformations exact solutions of tasks are obtained. For various forms of inclusions, solutions in explicit forms are obtained. For special extreme cases the solution of tasks are obtained for anticracks.

Рассматривается плоская и осесимметричная контактные задачи для упругих плоскости и пространства, когда последние содержат в себе жесткие включения. Между включениями и упругими средами имеют место условия полного сцепления. На основе интегральных преобразований Фурье и Ханкеля получены точные решения задач. При различных формах включений решения представлены в явном виде. В частных предельных случаях получены решения задач для антитрещин.

1. Плоская задача. Пусть упругая плоскость содержит в себе математический разрез $|x| \leq a$, $y = 0$, берега которого в результате деформации принимают вид заданной функции. На бесконечности $y \rightarrow \infty$ действуют нормальные сжимающие усилия интенсивности \mathbf{P} (фиг. 1).

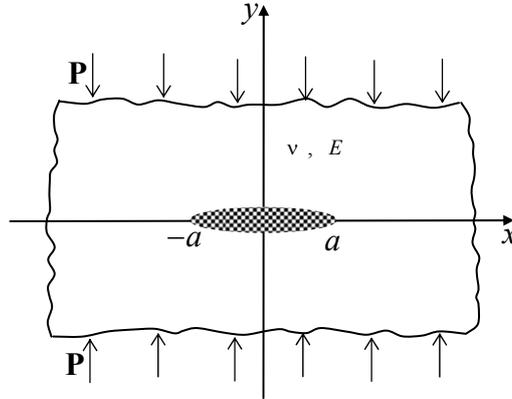
Граничные условия задачи запишем следующим образом:

$$\tau_{xy}(x, y) = \begin{cases} q(x) & y = 0 \quad -a < x < a \\ 0 & y = 0 \quad |x| > a \end{cases} \quad (1.1)$$

$$u_y(x, y) = \begin{cases} V(x) & y = 0 \quad -a \leq x \leq a \\ 0 & y = 0 \quad |x| > a \end{cases} \quad (1.2)$$

$$u_x(x, y) = 0 \quad y = 0 \quad -a \leq x \leq a \quad (1.3)$$

Функция $q(x)$ – неизвестная функция контактного касательного напряжения и подлежит определению, а функция $V(x)$ – заданная функция.



Фиг. 1

Заметим, что для функции $V(x)$ должны быть выполнены условия

$$V(-a) = V(a) = 0 \quad (1.4)$$

что является необходимым условием сплошности упругой среды. Для простоты предположим также, что функция $V(x)$ симметрична относительно оси Oy . В этом случае условиям (1.1) – (1.4) необходимо добавить условия симметрии:

$$u_x(x, y) = \tau_{xy}(x, y) = 0, \quad x = 0, \quad -\infty < y < +\infty \quad (1.5)$$

Решение задачи будем строить при помощи бигармонической функции напряжений Эйри, которую представим в виде следующей суммы интеграла Фурье и вспомогательной функции:

$$\Phi(x, y) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) + \lambda y B(\lambda)] e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda - \frac{P}{2} x^2 \quad \begin{array}{l} 0 < x < \infty \\ 0 < y < \infty \end{array} \quad (1.6)$$

$$\Delta^2 \Phi(x, y) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{– оператор Лапласа,} \quad (1.7)$$

В представлении (1.6) $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ – неизвестные функции интегрирования, которые должны быть определены из граничных условий (1.1) – (1.5).

Выразив при помощи известных соотношений [2]:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1.8)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} + u_0$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} + v_0 \quad (1.9)$$

компоненты напряжений и перемещений через бигармоническую функцию (1.6), будем иметь

$$\sigma_x(x, y) = \int_0^\infty \lambda^2 (A(\lambda) + (y\lambda - 2)B(\lambda)) e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (1.10)$$

$$\sigma_y(x, y) = -P - \int_0^\infty \lambda^2 (A(\lambda) + y\lambda B(\lambda)) e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (1.11)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = - \int_0^\infty \lambda^2 (A(\lambda) + (y\lambda - 1)B(\lambda)) e^{-\lambda y} \sin(\lambda x) d\lambda \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} u_x(x, y) = & \frac{1}{E} \int_0^\infty \lambda ((1+\nu)A(\lambda) + ((1+\nu)y\lambda - 2)B(\lambda)) e^{-\lambda y} \sin(\lambda x) d\lambda + \\ & + \frac{\nu P}{E} x + u_0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} u_y(x, y) = & \frac{1}{E} \int_0^\infty \lambda ((1+\nu)A(\lambda) + (1-\nu + (1+\nu)y\lambda)B(\lambda)) e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda - \\ & - \frac{Px}{E} + v_0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Удовлетворив далее граничным условиям (1.1) и (1.2), на основе интегрального преобразования Фурье получим следующие выражения для неизвестных функций интегрирования:

$$A(\lambda) = -\frac{1-\nu}{\pi\lambda^2} \int_0^a q(s) \sin(\lambda s) ds - \frac{E}{\pi\lambda^2} \int_0^a V'(s) \sin(\lambda s) ds \quad (1.15)$$

$$B(\lambda) = \frac{1+\nu}{\pi\lambda^2} \int_0^a q(s) \sin(\lambda s) ds - \frac{E}{\pi\lambda^2} \int_0^a V'(s) \sin(\lambda s) ds \quad (1.16)$$

где

$$V'(x) = \frac{dV(x)}{dx} \quad (1.17)$$

Условия симметрии (1.5) удовлетворяются тождественно. Удовлетворение же граничному условию (1.3) приводит к следующему интегральному уравнению с ядром Коши относительно касательных контактных напряжений:

$$\int_{-a}^a \frac{q(s)}{x-s} ds = -\frac{2\nu\nu P}{(3-\nu)(1+\nu)} + \frac{E(1-\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} \int_{-a}^a \frac{V'(s)}{x-s} ds \quad (1.18)$$

Решая уравнение (1.18) [3,4], получим:

$$\tau_{xy}(x, 0) \equiv q(x) = \frac{2\nu P}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{(1-\nu)E}{(3-\nu)(1+\nu)} V'(x) \quad |x| < a \quad (1.19)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > a \quad (1.20)$$

В силу известного интегрального представления [4]:

$$\int_0^a \frac{x \sin \lambda x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{\pi a}{2} J_1(\lambda a) \quad (1.21)$$

выражения (1.15) – (1.16) примут следующий вид:

$$A(\lambda) = -\frac{\nu(1-\nu)Pa}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{1}{\lambda^2} J_1(\lambda a) - \frac{4E}{\pi(3-\nu)(1+\nu)} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^a V'(s) \sin(\lambda s) ds \quad (1.22)$$

$$B(\lambda) = \frac{\nu Pa}{(3-\nu)} \frac{1}{\lambda^2} J_1(\lambda a) - \frac{2E}{\pi(3-\nu)} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^a V'(s) \sin(\lambda s) ds \quad (1.23)$$

Подставляя выражения (1.22) – (1.23) в (1.11), получим следующую формулу для нормальных контактных напряжений, действующих на линии $-\infty < x < +\infty$, $y = 0$:

$$\sigma_y(x, 0) = -P - \frac{2E}{\pi(3-\nu)(1+\nu)} \int_{-a}^a \frac{V'(s)}{x-s} ds \quad |x| < a \quad (1.24)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -P \left(1 + \frac{\nu(1-\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{a^2}{x^2 - a^2 + |x| \sqrt{x^2 - a^2}} \right) - \frac{2E}{\pi(3-\nu)(1+\nu)} \int_{-a}^a \frac{V'(s)}{x-s} ds \quad |x| > a \quad (1.25)$$

Формулы для перемещений принимают следующий вид:

$$u_x(x, 0) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ \frac{\nu P}{E} \sqrt{x^2 - a^2} & |x| > a \end{cases} \quad u_0 = 0 \quad (1.26)$$

$$u_y(x, 0) = \int_0^a V'(s) (\operatorname{sgn}(s-x) + \operatorname{sgn}(s+x)) ds, \quad v_0 = 0 \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.27)$$

В частном случае, когда форма жесткого включения взята в виде пересечения двух парабол:

$$V(x) = \mp \frac{k}{2} (x^2 - a^2), \quad k > 0 \quad y \rightarrow \pm 0 \quad (1.28)$$

формулы (1.19), (1.24) и (1.25) преобразуются к следующему виду:

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{2\nu P}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{k(1-\nu)E}{(3-\nu)(1+\nu)} x \quad |x| < a \quad (1.29)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -P - \frac{2kE}{\pi(3-\nu)(1+\nu)} \left(x \ln \frac{a+x}{a-x} - 2a \right) \quad |x| < a \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) = & -P \left(1 + \frac{\nu(1-\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} (\sqrt{x^2 - a^2} + |x|)} \right) - \\ & - \frac{2kE}{\pi(3-\nu)(1+\nu)} \left(x \ln \frac{x+a}{x-a} - 2a \right) \quad |x| > a \quad (1.31) \end{aligned}$$

Из последних формул легко заметить, что касательные напряжения в точках $x = \pm a$ имеют особенность в виде квадратного корня, нормальные же напряжения при $x \rightarrow \pm a \mp 0$ имеют логарифмическую особенность, а при $x \rightarrow \pm a \pm 0$ – особенность в виде квадратного корня.

Если форму включения взять в виде эллипса:

$$V(x) = \mp \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad b > 0, \quad y \rightarrow \pm 0 \quad (1.32)$$

будем иметь:

$$\tau_{xy}(x, 0) = -\frac{b(1-\nu)E - 2a\nu P}{a(3-\nu)(1+\nu)} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad |x| < a \quad (1.33)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -P - \frac{b}{a} \frac{2E}{(3-\nu)(1+\nu)} \quad |x| < a \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) = & -P \left(1 + \frac{\nu(1-\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{a^2}{|x| \sqrt{x^2 - a^2} + x^2 - a^2} \right) + \\ & + \frac{b}{a} \frac{2E_1}{(3-\nu)(1+\nu)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right) \quad |x| > a \quad (1.35) \end{aligned}$$

Формулы (1.33) – (1.35) показывают, что в случае эллиптического включения касательные напряжения имеют корневые особенности в точках $x \pm a$, а нормальные напряжения ограничены при $x \rightarrow \pm a \mp 0$ и имеют корневые особенности при $x \rightarrow \pm a \pm 0$.

Предельные значения, когда $k \rightarrow 0$ в случае параболического включения и $b \rightarrow 0$ в случае эллиптического включения, совпадают со значениями предельной задачи: именно задачи, когда жесткое включение является отрезком прямой $|x| \leq a, y = 0$ (случай антитрещины [6]) и формулы для напряжений принимают следующий простой вид:

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{2\nu P}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad |x| < a \quad (1.36)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -P \quad |x| < a \quad (1.37)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -P \left(1 + \frac{\nu(1-\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x^2-a^2}+|x|)} \right) \quad |x| > a \quad (1.38)$$

Заметим также, что последнее заключение является непосредственным следствием необходимых условий (1.4).

2. Осесимметричная задача. Упругое пространство содержит в себе круговой разрез, $z = 0, 0 \leq r \leq R$, в который помещено жесткое дискообразное включение, иными словами, в результате деформации круговые берега разреза получили вид заданной функции. На бесконечности $z \rightarrow \infty$ действуют сжимающие усилия интенсивности \mathbf{P} (фиг. 2).

Граничные условия запишем следующим образом:

$$\tau_{rz}(r, z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \quad r > R \\ q(r) & z = 0 \quad 0 < r < R \end{cases} \quad (2.1)$$

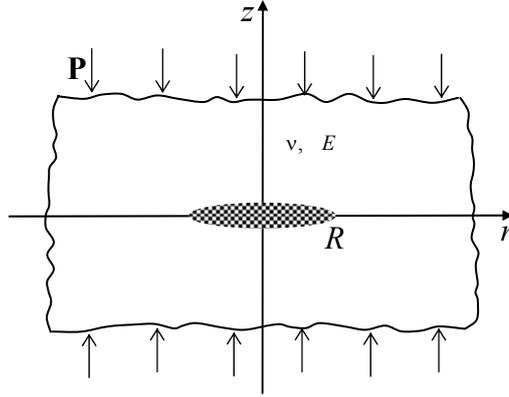
$$u_z(r, z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \quad r > R \\ v(r) & z = 0 \quad 0 \leq r \leq R \quad v(R) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$u_r(r, z) = 0 \quad z = 0 \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.3)$$

Функция $q(r)$ – неизвестная функция контактного касательного напряжения и подлежит определению, а функция $v(r)$ – заданная функция.

Решение задачи будем строить при помощи бигармонической функции напряжений Лява [4], которую представим в виде следующего интеграла Ханкеля и вспомогательной функции:

$$\Phi(r, z) = \frac{P}{4(2-\nu)} r^2 z + \int_0^\infty [A(\lambda) + \lambda z B(\lambda)] e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad \begin{matrix} 0 < z < \infty \\ 0 < r < \infty \end{matrix} \quad (2.4)$$



Фиг. 2

$$\Delta^2 \Phi[r, z] = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа}$$

Здесь $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ – неизвестные функции интегрирования, которые должны определиться из граничных условий (2.1) – (2.3).

Выразив при помощи следующих известных соотношений [2]

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \nu) \Delta \Phi[r, z] - \frac{\partial^2 \Phi[r, z]}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_r(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta \Phi[r, z] - \frac{\partial^2 \Phi[r, z]}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\phi(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta \Phi[r, z] - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi[r, z]}{\partial r} \right) \\ \tau_{rz}(r, z) &= \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \nu) \Delta \Phi[r, z] - \frac{\partial^2 \Phi[r, z]}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$u_r(r, z) = -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \Phi[r, z]}{\partial r \partial z}, \quad u_z(r, z) = \frac{1}{2G} \left(2(1 - \nu) \Delta \Phi[r, z] - \frac{\partial^2 \Phi[r, z]}{\partial z^2} \right)$$

компоненты напряжений и перемещений через бигармоническую функцию (2.4), будем иметь

$$\sigma_z(r, z) = P + \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda^3 (A(\lambda) + (1 - 2\nu + \lambda z) B(\lambda)) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.6)$$

$$\sigma_r(r, z) = -P \frac{1 - 2\nu}{2(2 - \nu)} - \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda^3 (A(\lambda) - (1 + 2\nu - \lambda z) B(\lambda)) J_0(\lambda r) d\lambda +$$

$$+\frac{1}{r}\int_0^{\infty}e^{-\lambda z}\lambda^2(A(\lambda)-(1-\lambda z)B(\lambda))J_1(\lambda r)d\lambda \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}(r,z) = & -P\frac{1-2\nu}{2(2-\nu)} + 2\nu\int_0^{\infty}e^{-\lambda z}\lambda^3B(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda - \\ & -\frac{1}{r}\int_0^{\infty}e^{-\lambda z}\lambda^2(A(\lambda)-(1-\lambda z)B(\lambda))J_1(\lambda r)d\lambda \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\tau_{rz}(r,z) = \int_0^{\infty}e^{-\lambda z}\lambda^3(A(\lambda)-(2\nu-\lambda z)B(\lambda))J_1(\lambda r)d\lambda \quad (2.9)$$

$$u_r(r,z) = \frac{-1}{2G}\int_0^{\infty}e^{-\lambda z}\lambda^2(A(\lambda)-(1-\lambda z)B(\lambda))J_1(\lambda r)d\lambda - \frac{P}{4G(2-\nu)}r + u_0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} u_z(r,z) = & -\frac{1}{2G}\int_0^{\infty}e^{-\lambda z}\lambda^2(A(\lambda)+(2(1-2\nu)+\lambda z)B(\lambda))J_1(\lambda r)d\lambda + \\ & + \frac{P(1-\nu)}{G(2-\nu)}z + v_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Удовлетворив граничным условиям (2.1)–(2.3), на основе интегрального преобразования Ханкеля получим следующие выражения для неизвестных функций интегрирования:

$$\begin{aligned} A(\lambda) = & -\frac{1-2\nu}{(1-\nu)\lambda^2}\int_0^Rtq(t)J_1(\lambda t)dt + \frac{2G\nu}{(1-\nu)\lambda}\int_0^Rtv(t)J_0(\lambda t)dt \\ B(\lambda) = & -\frac{1}{2(1-\nu)\lambda^2}\int_0^Rtq(t)J_1(\lambda t)dt - \frac{G}{(1-\nu)\lambda}\int_0^Rtv(t)J_0(\lambda t)dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

Удовлетворение же граничного условия (2.3) приводит к следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}J_1(\lambda r)d\lambda\int_0^Rtq(t)J_1(\lambda t)dt = & -\frac{(1-\nu)P}{(3-4\nu)(2-\nu)}r - \\ & -2\frac{1-2\nu}{3-4\nu}G\int_0^{\infty}\lambda\bar{v}(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda \quad 0 < r < R \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\bar{v}(\lambda) = \int_0^Rtv(t)J_0(\lambda t)dt \quad (2.14)$$

Приложив к обеим частям уравнения (2.13) оператор [4]:

$$I[\varphi] = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \int_0^x \frac{\varphi}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr \right\} \quad (2.15)$$

и используя известное интегральное представление

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \int_0^x \frac{J_1(\lambda r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr \right\} = \sin(\lambda x) \quad (2.16)$$

уравнение (2.13) приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_0^R t q(t) dt \int_0^\infty \sin(\lambda x) J_1(\lambda t) d\lambda = -\frac{(1-\nu)P}{(3-4\nu)(2-\nu)} x - \\ -2 \frac{1-2\nu}{3-4\nu} G \int_0^\infty \lambda \bar{\nu}(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda \quad 0 < x < R \end{aligned} \quad (2.17)$$

Учитывая далее известное значение разрывного интеграла [3]

$$\int_0^\infty \sin(\lambda x) J_1(\lambda t) d\lambda = \begin{cases} \frac{x}{t\sqrt{t^2 - x^2}} & t > x \\ 0 & t < x \end{cases} \quad (2.18)$$

вместо (2.17) будем иметь следующее интегральное уравнение Абеля:

$$\begin{aligned} \int_x^R \frac{q(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt = -\frac{(1-\nu)P}{(3-4\nu)(2-\nu)} - \\ -\frac{2G(1-2\nu)}{3-4\nu} \frac{1}{x} \int_0^\infty \lambda \bar{\nu}(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda \quad 0 < x < R \end{aligned} \quad (2.19)$$

решение которого имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, 0) \equiv q(r) = -2P \frac{1-\nu}{(3-4\nu)(2-\nu)} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} + 2G \frac{1-2\nu}{3-4\nu} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_r^R \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \int_0^\infty \lambda \bar{\nu}(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

В частном случае, когда форма жесткого включения взята в виде пересечений двух параболоид

$$\nu(r) = \mp k(r^2 - R^2), \quad k > 0 \quad z \rightarrow \pm 0 \quad (2.21)$$

для касательных контактных напряжений получим следующую формулу:

$$\tau_{rz}(r, 0) = \frac{kG(1-2\nu)\pi}{3-4\nu} r - P \frac{2(1-\nu)}{(3-4\nu)(2-\nu)} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.22)$$

Для нормальных напряжений из (2.6) будем иметь:

$$\sigma_z(r, 0) = P - P \frac{1-2\nu}{(3-4\nu)(2-\nu)} \frac{\pi}{2} +$$

$$+ k G \frac{2(3-4\nu) + \pi(1-2\nu)^2}{(3-4\nu)(1-\nu)} R \left[2E\left(\frac{r^2}{R^2}\right) - K\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \right] \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.23)$$

$$\sigma_z(r, 0) = P - P \frac{1-2\nu}{(3-4\nu)(2-\nu)} \left[\arcsin\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} \right] - \frac{2kG}{(1-\nu)\pi} R \times$$

$$\times \left[\pi - E\left(\frac{R^2}{r^2}\right) - K\left(\frac{R^2}{r^2}\right) \right] + \frac{kG(1-2\nu)^2 r}{(3-4\nu)(1-\nu)} \left(2E\left(\frac{R}{r}\right) + \left(\frac{R^2}{r^2} - 2\right) K\left(\frac{R}{r}\right) \right) \quad (2.24)$$

$$R < r.$$

В формулах (2.23) и (2.24) $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k\sin^2\theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k\sin^2\theta} d\theta \quad (2.25)$$

Как видно, и в этом случае касательные напряжения в точке $r = R$ имеют особенность в виде квадратного корня, нормальные же напряжения слева от точки $r = R$ – логарифмическую особенность, а справа – особенности в виде квадратного корня.

Случай эллипсоидального включения также аналогичен случаю эллиптического включения в плоской задаче. Аналогично плоской задаче при предельном переходе $k \rightarrow 0$ (случай круговой антитрещины) получим:

$$\tau_{rz}(r, 0) = -P \frac{2(1-\nu)}{(3-4\nu)(2-\nu)} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.26)$$

$$\sigma_z(r, 0) = P \left(1 - \frac{\pi(1-2\nu)}{2(3-4\nu)(2-\nu)} \right) \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.27)$$

$$\sigma_z(r, 0) = P \left(1 - \frac{1-2\nu}{(3-4\nu)(2-\nu)} \left[\arcsin\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} \right] \right) \quad R < r \quad (2.28)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Макарян В.С., Члингярян Г.С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с трещиной, перпендикулярной к границе раздела материалов. //Изв НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №2. С.3–12.
2. Новожилов В.В. Теория упругости. М.: Судпромгиз, 1958. 370с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 639с.
4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: Изд. иностр. лит., 1949. 798с.
5. Александров А.Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимости между осесимметричными и плоскими состояниями. // ПММ. 1961.Т.25. Вып.5. С. 912-920.
6. John Dundurs, Xanthippi Markenscoff. A Green's function formulation of anticracks and their interaction with load-induced singularities.// Journal of applied mechanics. Vol. 56. 1989.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
12.02.2008

УДК 539.3:534.2

**КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ
НЕЗАМКНУТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ**

Գլղազարյան Գ.Ր., Տրապիոնյան Ժ.Լ.

Ключевые слова: колебания, оболочечная конструкция, классическая, граничные образующие.

Keywords: vibrations, shell–structure, classical, boundary generators.

Գ. Ռ. Դղղազարյան, Զ.Լ. Տրապիոնյան

**Օրթոտրոպ առաձգական բաց զլանային թաղանթներից կազմված ազատ եզրային ծնիչներով
բարակապատ կառուցվածքի տատանումները**

Հետազոտված են միատեսակ օրթոտրոպ բաց անվերջ շրջանային զլանային թաղանթներից կազմված բարակապատ կառուցվածքի սեփական տատանումները, երբ եզրային ծնիչներն ազատ են և միատեսակ օրթոտրոպ բաց վերջավոր շրջանային զլանային թաղանթներից կազմված բարակապատ կառուցվածքի սեփական տատանումները, երբ եզրային ծնիչներն ազատ են, իսկ եզրային ուղղորդ կորերը հողակապորեն ամրակցված: Նշված բարակապատ կառուցվածքների համար, ստացված են դիսպերսիոն հավասարումներ և ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնցով որոշվում են հնարավոր սեփական տատանումների հաճախությունները:

G. R. Ghulghazaryan, Dj.L. Srapionyan

**Vibrations of a thin-shell structure constructed from orthotropic elastic non-closed
cylindrical shells with free boundary generators**

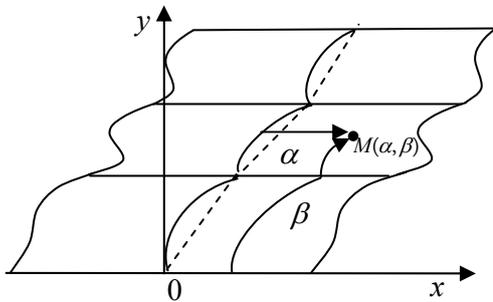
The problems of existence of natural vibrations of an elastic orthotropic thin-shell structure constructed from circular non-closed infinite cylindrical shells with free boundary generators and an elastic orthotropic thin-shell structure constructed from circular non-closed finite cylindrical shells with free boundary generators, which have a Navier's hinge on the boundary directional curves, are studied. The dispersion equations and asymptotic formulas are obtained for determining the natural frequencies of possible vibration types for the foregoing thin-shell structures.

Исследованы вопросы существования собственных колебаний тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими, и оболочечной конструкции, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих. Для вышеуказанных оболочечных конструкций получены дисперсионные уравнения и асимптотические формулы для нахождения собственных частот возможных типов колебаний.

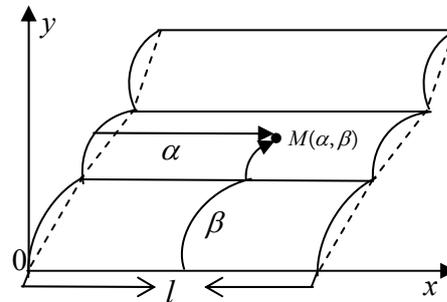
Известно, что волны в тонкостенной упругой оболочечной конструкции распространяются в виде преимущественно изгибных и преимущественно тангенциальных волн [1-4]. У свободного края тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа происходят трансформации одного типа волнового движения в другой. При трансформации волн, с учетом геометрических и механических параметров оболочечной конструкции со свободным краем, возникают сложные картины распределения частот собственных колебаний [5-7].

Используя полученные ниже дисперсионные уравнения и асимптотические формулы для этих дисперсионных уравнений, можно, меняя геометрию конструкции и механические свойства материала, управлять спектром, смещая или начало спектра или точки сгущения из нежелательной области резонанса.

1. Основные уравнения и постановка краевых задач. Предполагается, что образующие ортогональны краям тонкостенной оболочечной конструкции. На срединной поверхности оболочечной конструкции вводятся криволинейные координаты (α, β) ($-\infty < \alpha < \infty$, если составляющие цилиндрической оболочки бесконечны; $0 \leq \alpha \leq l$, если цилиндрические оболочки имеют длину l и $0 \leq \beta \leq \beta_0$), являющиеся, соответственно, длиной образующей и длиной дуги направляющей кривой (фиг. 1 и 2). Обозначим через s длину одной арки цилиндрической оболочки срединной поверхности. В частности, при $\beta_0 = s$ имеем цилиндрическую оболочку открытого профиля.



Фиг. 1#



Фиг. 2#

Заметим, что в данной работе фактически рассматриваются цилиндрические оболочки, направляющие срединной поверхности которых представляют собой непрерывную незамкнутую кусочно-гладкую кривую. На линиях раздела цилиндрических оболочек кривизна направляющей кривой срединной поверхности имеет устранимые особенности. Строгое использование системы уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек связано с введением промежуточных сопрягающих элементов, обеспечивающих непрерывность перемещений вектора точки срединной поверхности. Однако выполнение таких строгих сопряжений связано с произволом при задании вида сопрягающего элемента, что существенно усложняет расчеты, особенно при исследовании конструкций, состоящих из большого числа цилиндрических оболочек (см. [8], стр. 56). Исходя из этого, здесь, вместо введения сопрягающих элементов, кривизна направляющей кривой цилиндрической оболочки заменяется соответствующим рядом Фурье с периодом s и применяются динамические уравнения классической теории ортотропных цилиндрических оболочек [4,9,10]. Итак, в качестве исходных уравнений, описывающих колебания тонкостенной конструкции вышеуказанного типа, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записаны в выбранных криволинейных координатах α, β [11]:

$$-B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \lambda u_1,$$

$$\begin{aligned}
& -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_3}{R} \right) - \frac{\mu^4}{R} \left(4B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{u_2}{R} \right) + \right. \\
& \left. + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(\frac{u_2}{R} \right) \right) - \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \lambda u_2, \quad (1.1) \\
& \mu^4 \left(B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) + \mu^4 \left(B_{22} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left(\frac{u_2}{R} \right) + \right. \\
& \left. + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \left(\frac{u_2}{R} \right) \right) - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \lambda u_3.
\end{aligned}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений, соответственно в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки, $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$ – кривизна направляющей кривой срединной поверхности, $\mu^4 = h^2/12$ (h – толщина оболочки). $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний, ρ – плотность материала. B_{ij} – коэффициенты упругости.

Ряд Фурье кривизны направляющей кривой срединной поверхности такой оболочечной конструкции имеет постоянную сумму R^{-1} при $-\infty < \beta < \infty$, где R – радиус составляющих цилиндрических оболочек срединной поверхности. Обозначим $k = 2\pi n_0 / l$, $n_0 \in N$, если конструкция составлена из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек, где l – произвольное положительное число, или $k = \pi / l$, если составляющие цилиндрической оболочки имеют длину l и $R^{-1} = kr_0/2$, где r_0 – безразмерный параметр. Рассматриваются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
& \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \Big|_{\beta=0, \beta_0} = \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0, \beta_0} = 0, \quad (1.2) \\
& \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0, \beta_0} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} \right) \Big|_{\beta=0, \beta_0} = 0; \\
& u_i(\alpha + 2\pi/k, \beta) = u_i(\alpha, \beta), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.3)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \Big|_{\alpha=0, l} = u_2 \Big|_{\alpha=0, l} = u_3 \Big|_{\alpha=0, l} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=0, l} = 0. \quad (1.4)$$

Граничные условия (1.2)-(1.3) соответствуют конструкции оболочечного типа, составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек: соотношения (1.2) выражают условия свободного края при $\beta = 0$, $\beta = \beta_0$, а соотношения (1.3) – условия волнообразности колебания, где $k = 2\pi n_0 / l$, $n_0 \in N$, $l > 0$ (фиг. 1). Граничные условия (1.2), (1.4) соответствуют конструкции оболочечного типа, составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек: соотношения (1.4) являются условиями шарнирного закрепления по граничным направляющим $\alpha = 0$ и $\alpha = l$, где $k = \pi / l$ (фиг. 2).

Можно доказать, что задачи (1.1)-(1.3); (1.1)-(1.2),(1.4) самосопряженные и имеют неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на $+\infty$ [12, с.362].

2. Вывод и анализ характеристических уравнений. В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1) (при постоянной кривизне, R^{-1}), спектральный параметр λ формально заменим на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно.

Решение системы (1.1) (с вышеуказанными изменениями) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = (u_{cn} \cos kn\alpha, v_{sn} \sin kn\alpha, \sin kn\alpha) \exp(k\chi\beta), \quad n = \overline{1, +\infty}, \quad (2.1)$$

где n – волновое число, u_{cn}, v_{sn} – неопределенные коэффициенты и χ – неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (1.3) и (1.4) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, придавая параметру k разные значения. Подставляя (2.1) в (1.1), получим [4]

$$(c_n + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_n d_n) u_{cn} = \frac{r_0 n}{2} \left\{ a_n + a^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}} \chi^2 l_n + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}} d_n \right\} \quad (2.2)$$

$$(c_n + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_n d_n) v_{sn} = \frac{r_0 \chi}{2} \{ b_n - a^2 g_n l_n \} \quad (2.3)$$

$$R_{nn} c_n + \frac{r_0^2}{4} \left\{ c_n - b_n \chi^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 a_n + a^2 (R_{nn} g_n d_n + 2\chi^2 l_n b_n) + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_n (b_n - \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2) - a^4 \chi^2 g_n l_n^2 \right\} = 0 \quad (2.4)$$

$$a_n = - \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_2^2 \right), \quad b_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 - B_1 n^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2$$

$$c_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^4 - B_2 n^2 \chi^2 + \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_2^2 \right) \chi^2 + \left(n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) (n^2 - \eta_2^2)$$

$$B_1 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}, \quad B_2 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}, \quad d_n = \chi^2 - \frac{4B_{66}}{B_{11}} n^2$$

$$g_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}} n^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2, \quad l_n = \chi^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} n^2, \quad a^2 = \mu^4 k^2 \quad (2.5)$$

$$R_{nn} = a^2 \left(\chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})n^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}} n^4 \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_3^2, \quad \eta_i^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66}k^2}, \quad i = \overline{1, 3}$$

Пусть $\chi_j, j = \overline{1, 4}$ – попарно различные нули уравнения (2.4) с неположительными действительными частями, тогда $\chi_5 = -\chi_1, \chi_6 = -\chi_2, \chi_7 = -\chi_3, \chi_8 = -\chi_4$ – также попарно различные нули этого уравнения. Пусть $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}), j = \overline{1, 8}$ – нетривиальные решения вида (2.1) системы (1.1) при $\chi = \chi_j, j = \overline{1, 8}$, соответственно. Представляя решение задач (1.1)-(1.3) и (1.1)-(1.2),(1.4) в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^8 w_j u_i^{(j)}, \quad i = \overline{1,3}$$

и учитывая граничные условия (1.2), получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(n)} w_j}{c_n^{(j)} + 0.25 a^2 r_0^2 g_n^{(j)} d_n^{(j)}} = 0, \quad i = \overline{1,8}, \quad (2.6)$$

$$M_{1j}^{(n)} = \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 a_n^{(j)} + \chi_j^2 b_n^{(j)} - c_n^{(j)} - \frac{r_0^2}{4} a^2 d_n^{(j)} (b_n^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2) - a^2 \chi_j^2 l_n^{(j)} b_n^{(j)}$$

$$M_{2j}^{(n)} = -\chi_j \left\{ a_n^{(j)} + b_n^{(j)} + a^2 l_n^{(j)} \left(\frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \chi_j^2 + \frac{B_{22}}{B_{66}} n^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) + a^2 \frac{r_0^2}{4} \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_n^{(j)} \right\}$$

$$M_{3j}^{(n)} = \left(\chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 \right) c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left(\chi_j^2 b_n^{(j)} + \frac{4 B_{12} B_{66}}{B_{22}^2} a^2 n^4 g_n^{(j)} \right), \quad z_j = k \chi_j \beta_0 \quad (2.7)$$

$$M_{4j}^{(n)} = \chi_j \left\{ l_n^{(j)} c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} b_n^{(j)} d_n^{(j)} \right\}, \quad M_{ij}^{(n)} = M_{i-4j}^{(n)} \exp(z_j), \quad i = \overline{5,8}, \quad j = \overline{1,8}$$

Здесь индекс j означает, что соответствующая функция взята при $\chi = \chi_j, j = \overline{1,8}$. Чтобы система (2.6) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (2.8)$$

Численный анализ показывает, что левая часть этого равенства становится малой, когда любые два χ -корня уравнения (2.4) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель, в левой части равенства (2.8), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Для этого введем обозначения:

$$\chi_j = \chi_j / n, \quad j = \overline{1,8}; \quad \eta_{im} = \eta_i / n, \quad i = \overline{1,3}; \quad \varepsilon_n = r_0 / (2n),$$

$$[z_i z_j] = (\exp(z_i) - \exp(z_j)) / (z_i - z_j) k n \beta_0, \quad [z_i z_j z_k] = ([z_i z_j] - [z_i z_k]) / (z_j - z_k) k n \beta_0$$

$$[z_1 z_2 z_3 z_4] = ([z_1 z_2 z_3] - [z_1 z_2 z_4]) / (z_3 - z_4) k n \beta_0, \quad \sigma_1 = \sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$$

$$\sigma_3 = \sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \quad (2.9)$$

$$\sigma_4 = \sigma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4, \quad \bar{\sigma}_k = \sigma_k(x_1, x_2, x_3, 0), \quad \bar{\bar{\sigma}}_k = \sigma_k(x_1, x_2, 0, 0), \quad k = \overline{1,4}$$

При этом $\bar{\sigma}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_3 = 0$. Пусть $f_m, m = \overline{1,6}$ является симметрическим многочленом m -ой степени от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 . Известно, что он выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом. Обозначая

$$f_m = f_m(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), \quad \bar{f}_m = f_m(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, 0), \quad \bar{\bar{f}}_m = f_m(\bar{\bar{\sigma}}_1, \bar{\bar{\sigma}}_2, 0, 0), \quad m = \overline{1,6}$$

$$f_1 = \sigma_1, \quad f_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2, \quad f_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3, \quad f_4 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2 \sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_3 - \sigma_4 \quad (2.10)$$

$$\bar{f}_5 = \bar{\sigma}_1^5 - 4\bar{\sigma}_1^3\bar{\sigma}_2 + 3\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2^2 + 3\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_3 - 2\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3, \quad \bar{f}_6 = \bar{\sigma}_1^6 - 5\bar{\sigma}_1^4\bar{\sigma}_2 + 6\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_3^3$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.8), получим

$$\text{Det}\|M_{ij}^{(n)}\|_{i,j=1}^8 = n^{40} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) \text{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 \quad (2.11)$$

$$K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$

$$m_{11} = Hx_1^6 + d_1x_1^4 + d_2x_1^2 + d_3, \quad m_{12} = H\bar{f}_5 + d_1\bar{f}_3 + d_2\bar{f}_1, \quad m_{13} = H\bar{f}_4 + d_1\bar{f}_2 + d_2$$

$$m_{14} = Hf_3 + d_1f_1; \quad m_{21} = Tx_1^5 + d_4x_1^3 + d_5x_1, \quad m_{22} = T\bar{f}_4 + d_4\bar{f}_2 + d_5, \quad m_{23} = T\bar{f}_3 + d_4\bar{f}_1$$

$$m_{24} = Tf_2 + d_4; \quad m_{31} = Fx_1^6 + d_6x_1^4 + d_7x_1^2 + d_8, \quad m_{32} = F\bar{f}_5 + d_6\bar{f}_3 + d_7\bar{f}_1$$

$$m_{33} = F\bar{f}_4 + d_6\bar{f}_2 + d_7, \quad m_{34} = Ff_3 + d_6f_1; \quad m_{41} = Fx_1^7 + d_9x_1^5 + d_{10}x_1^3 + d_{11}x_1$$

$$m_{42} = F\bar{f}_6 + d_9\bar{f}_4 + d_{10}\bar{f}_2 + d_{11}, \quad m_{43} = F\bar{f}_5 + d_9\bar{f}_3 + d_{10}\bar{f}_1, \quad m_{44} = Ff_4 + d_9f_2 + d_{10}$$

$$m_{75} = (-1)^{i+1} m_{71} \exp(\epsilon_1), \quad m_{78} = (-1)^{i+1} (m_{74} \exp(\epsilon_4) + m_{73}[z_3z_4] + m_{72}[z_2z_3z_4] + m_{71}[z_1z_2z_3z_4])$$

$$m_{76} = (-1)^{i+1} (m_{72} \exp(\epsilon_2) + m_{71}[z_1z_2]), \quad m_{77} = (-1)^{i+1} (m_{73} \exp(\epsilon_3) + m_{72}[z_2z_3] + m_{71}[z_1z_2z_3])$$

$$m_{ij} = m_{i-4j+4}, \quad m_{i,j+4} = m_{i-4j}, \quad i = \overline{5,8}, \quad j = \overline{1,4}$$

$$d_1 = a^2 n^2 \left(B_1 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \varepsilon_n^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \right) \quad (2.12)$$

$$d_2 = a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \left(B_1 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 - a^2 n^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left(B_1 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right)$$

$$d_3 = -(1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right), \quad d_4 = a^2 n^2 \left(\frac{2B_{12}}{B_{11}} - B_2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \varepsilon_n^2 \frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}} \right)$$

$$d_5 = 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2 \frac{B_{12}}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 + a^2 n^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left(\frac{B_{22}}{B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2$$

$$d_6 = \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_n^2 - B_1 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2$$

$$d_7 = (1 - \eta_{2n}^2) \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) + \frac{B_{12}}{B_{22}} \left(B_2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 \right) + \varepsilon_n^2 \left(4a^2 n^2 \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{22}} - B_1 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right)$$

$$d_8 = \frac{B_{12}}{B_{22}} \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) (1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2 n^2 \varepsilon_n^2), \quad d_9 = \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_n^2 - B_1 - \frac{4B_{66}}{B_{11}} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2$$

$$d_{10} = (1 - \eta_{2n}^2) \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left(B_2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2n}^2 \right) - \varepsilon_n^2 \left(B_1 + \frac{4B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right)$$

$$d_{11} = 4\varepsilon_n^2 \left(B_1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right) - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} (1 - \eta_{2n}^2) \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1n}^2 \right)$$

Уравнение (2.8) эквивалентно уравнению

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (2.13)$$

Учитывая возможные соотношения между λ_1, λ_2 и λ_3 , уравнение (2.13) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

Замечание 1. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ уравнение (2.4) является характеристическим уравнением для системы (1.1), а уравнение (2.13) при $k = 2\pi n_0 / l$, $n_0 \in N$ является дисперсионным уравнением задачи (1.1)-(1.3), а при $k = \pi / l$ – дисперсионным уравнением задачи (1.1)-(1.2),(1.4), соответственно.

3. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.13) при $r_0 \rightarrow 0$. При использовании предыдущих формул будем предполагать, что $\eta_{1n} = \eta_{2n} = \eta_{3n} = \eta_n = \eta / n$. Тогда при $r_0 \rightarrow 0$ уравнение (2.4) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_n = \frac{B_{22}}{B_{11}} \chi^4 - B_2 n^2 \chi^2 + \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 + \left(n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right) (n^2 - \eta^2) = 0 \quad (3.1)$$

$$R_m = a^2 \left(\chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})n^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}} n^4 \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 = 0, \quad (3.2)$$

которые являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины, соответственно [4,10]. Корни χ / n уравнений (3.1) и (3.2) с неположительными действительными частями обозначим через y_1, y_2 и y_3, y_4 , соответственно. Заметим, что при

$$\varepsilon_n \ll 1, \quad y_i \neq y_j, \quad i \neq j \quad (3.3)$$

x^2 – корни уравнения (2.4) можно представить в виде [6]

$$x_i^2 = y_i^2 + \alpha_i^{(n)} \varepsilon_n^2 + \beta_i^{(n)} \varepsilon_n^4 + \dots, \quad i = \overline{1,4} \quad (3.4)$$

$$\alpha_i^{(n)} = P_n(y_i^2) / \left(\prod_{j=1, j \neq i}^4 (y_j^2 - y_i^2) \right), \quad i = \overline{1,4} \quad (3.5)$$

При условии (3.3), используя (2.7), (3.4) и тот факт, что

$$M_{31}^{(n)} / n^6 = M_{32}^{(n)} / n^6 = M_{41}^{(n)} / n^7 = M_{42}^{(n)} / n^7 = O(\varepsilon_n^2) \quad (3.6)$$

уравнение (2.13) приводится к виду

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \right)^4 N^2(\eta_n) \{ \bar{F}_0(\eta_n) \bar{E}_0(\eta_n) K_{30}^2(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) \} = 0 \quad (3.7)$$

$$N(\eta_n) = (y_1 + y_3)(y_2 + y_3)(y_1 + y_4)(y_2 + y_4)$$

$$\begin{aligned}
\bar{F}_0(\eta_n) &= K_{10}^2(\eta_n)(1 + \exp(2(z_3 + z_4))) + 8m_{33}m_{44}m_{34}m_{43} \exp(z_3 + z_4) - \\
&- 4m_{33}m_{43}(m_{33}m_{44} + m_{34}m_{43})(\exp(z_4) - \exp(z_3))[z_3z_4] - \\
&- (m_{33}m_{44} + m_{34}m_{43})^2(\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) - 4m_{33}^2m_{43}^2[z_3z_4]^2 \\
\bar{E}_0(\eta_n) &= K_{20}^2(\eta_n)(1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + \frac{8B_{22}^2m_{11}m_{22}m_{12}m_{21}}{(B_{12} + B_{66})^2} \exp(z_1 + z_2) - \\
&- \frac{4B_{22}^2[m_{11}m_{21}(m_{11}m_{22} + m_{21}m_{12})]}{(B_{12} + B_{66})^2}(\exp(z_2) - \exp(z_1))[z_1z_2] - \\
&- \frac{B_{22}^2(m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21})^2}{(B_{12} + B_{66})^2}(\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) - \frac{4B_{22}^2m_{11}^2m_{21}^2}{(B_{12} + B_{66})^2}[z_1z_2]^2 \\
m_{11} &= y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}}(1 - \eta_n^2), \quad m_{12} = m_{34} = y_1 + y_2, \quad m_{21} = y_1^3 + \left(\frac{B_{12}}{B_{22}} + \frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_n^2\right)y_1 \quad (3.8) \\
m_{22} &= y_1y_2 + B_1 - \eta_n^2, \quad m_{33} = y_3^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}}, \quad m_{44} = y_3y_4 + \frac{B_{12}}{B_{22}} \\
m_{43} &= y_3^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}}y_3, \quad K_{10}(\eta_n) = y_3^2y_4^2 + 4\frac{B_{66}}{B_{22}}y_3y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{22}}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{20}(\eta_n) &= (1 - \eta_n^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{22}B_{66}} - \eta_n^2 y_1 y_2 \right), \quad K_{30}(\eta_n) = N_1(\eta_n) + \alpha^2 n^2 N_2(\eta_n) + \alpha^4 n^4 N_3(\eta_n) \\
N_1(\eta_n) &= \frac{B_{66}(B_{12} + B_{22})}{B_{11}^2} \eta_n^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2}, \quad N_2(\eta_n) = \left(\frac{B_{22}B_{12} + B_{12}B_{66} + B_{22}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_n^2 - \right. \\
&- \frac{B_{11}B_{22}B_{12} + B_{11}B_{22}B_{66} - B_{12}^3 - 3B_{12}^2B_{66} - 4B_{12}B_{66}^2}{B_{66}B_{11}^2} \left. \left(\frac{B_{22} + B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}} \right) \right) - \\
&- 2 \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_n^2 \right) \left(\frac{2B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_n^2 \right), \quad N_3(\eta_n) = -\frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}} \left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_n^2 \right) X \\
&X \left\{ (1 - \eta_n^2) \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 \right) - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}} - \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{22}} \eta_n^2 \right) + \left(\frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Из (3.7) следует, что при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ уравнения (2.13) распадаются на уравнения

$$\bar{E}_0(\eta_n) = 0, \quad \bar{F}_0(\eta_n) = 0, \quad K_{30}(\eta_n) = 0 \quad (3.9)$$

Из них первые два – дисперсионные уравнения планарных и изгибных колебаний аналогичной задачи для ортотропной пластины-полосы со свободными краями ($k = 2\pi n_0/l$) или прямоугольной пластинки со свободными противоположными сторонами, когда остальные стороны шарнирно закреплены ($k = \pi/l$).

Корням третьего уравнения соответствуют планарные колебания оболочечной конструкции; оно появляется в результате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

Если y_1, y_2 и y_3, y_4 – корни уравнения (3.1) и (3.2) с отрицательными действительными частями соответственно, то при $n\beta_0 \rightarrow \infty$ уравнение (2.13) преобразуется в уравнение

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\right)^4 N^2(\eta_n) K_{10}^2(\eta_n) K_{20}^2(\eta_n) K_{30}^2(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)) = 0, \quad (3.10)$$

из которого следует, что при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $n\beta_0 \rightarrow \infty$ дисперсионное уравнение (2.13) распадается на уравнения

$$K_{10}(\eta_n) = 0, K_{20}(\eta_n) = 0, K_{30}(\eta_n) = 0 \quad (3.11)$$

Из них первые два – дисперсионные уравнения изгибных и планарных колебаний полубесконечной ортотропной пластинки со свободным краем ($k = 2\pi n_0 / l$) или полубесконечной ортотропной пластинки-полосы со свободным торцом при наличии шарнирного закрепления на боковых краях ($k = \pi / l$), соответственно [4,10]. Следовательно, при малых ε_n и больших $n\beta_0$ приближенными значениями корней уравнения (2.13) являются корни уравнения (3.11).

4. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.13) при $\beta_0 \rightarrow \infty$. При использовании предыдущих формул будем предполагать, что χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (2.4)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (2.13) можно привести к виду

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left(\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4\right)^2 + \sum_{j=1}^4 O(\exp(k\chi_j\beta_0)) = 0 \quad (4.1)$$

откуда следует, что при $\beta_0 \rightarrow \infty$ уравнение (2.13) преобразуется в уравнение

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0 \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) при $n \in N$ определяет частоты всевозможных локализованных собственных колебаний у свободной граничной образующей оболочечной конструкции, составленной из счетного числа одинаковых открытых ортотропных бесконечных цилиндрических оболочек ($k = 2\pi n_0 / l$) или частоты всевозможных локализованных собственных колебаний у свободной граничной образующей оболочечной конструкции, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек ($k = \pi / l$) при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых краях. Если $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то имеем [4,10]

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = \left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\right)^2 N(\eta_n) K_{10}(\eta_n) K_{20}(\eta_n) K_{30}(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) \quad (4.3)$$

Учитывая формулы (4.1) и (4.3), еще раз убеждаемся в справедливости асимптотической формулы (3.10).

В табл. 1 приведены значения некоторых корней (η_n) уравнения (3.9) с соответствующими коэффициентами затухания $k\chi_0/n$ для пластинки из стеклопластика с механическими параметрами [13]

$$\rho = 2.4 \cdot 10^3 \text{ кг/М}^3, E_1 = 6.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9 \text{ Н/М}^2, E_2 = 1.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9, \\ G = 0.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9, \nu_1 = 0.26, \nu_2 = 0.06 \quad (4.4)$$

при $h=1/50, s=4; l=2s; k=\pi/l; \beta_0=5s, s$. Численный анализ показывает, что у свободных граничных образующих пластинчатой тонкостенной конструкции могут появляться локализованные колебания. При $n\beta_0 \rightarrow \infty$ частоты локализованных волн у свободных краев пластинчатой тонкостенной конструкции, составленной из бесконечных одинаковых пластин–полос и локализованных колебаний у свободных краев пластинчатой тонкостенной конструкции, составленной из одинаковых прямоугольных пластин при наличии шарнирного закрепления боковых краев, стремятся к частотам аналогичных задач для полубесконечной пластинки и полубесконечной пластинки–полосы соответственно. Существует зона волновых чисел: $10 \leq n \leq 37$, где третье уравнение из (3.11) не имеет действительных η_n -корней.

В табл. 2 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений η/n и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм $k\chi_0/n$ для тонкостенных конструкций оболочечного типа, изготовленных из стеклопластика с механическими параметрами (4.4) и геометрическими параметрами: $R=40; r_0=0.1274, k=\pi/l, l=2s, h=1/50, s=4.00167$ при $\beta_0=5s$ и $\beta_0=s$.

Отметим, что модули упругости E_1 и E_2 соответствуют направлениям вдоль образующей и направляющей, соответственно. В качестве характеристики коэффициентов затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0/n = \max\{k \operatorname{Re} \chi_1/n, k \operatorname{Re} \chi_2/n, k \operatorname{Re} \chi_3/n, k \operatorname{Re} \chi_4/n\}. \quad (4.5)$$

Замечание 2. В табл. 2 между характеристиками коэффициентов затухания и собственными частотами указан тип колебаний; b – преимущественно изгибный, e – преимущественно планарный и t – преимущественно крутильный.

В таблице 2 третья колонка соответствует задаче (1.1)-(1.2),(1.4). Четвертая колонка соответствует задаче (1.1)-(1.2),(1.4), в которой отсутствуют тангенциальные компоненты силы инерции, т.е. имеем преимущественно изгибный тип колебаний. Аналогично, пятая колонка соответствует преимущественно планарному типу, а шестая – преимущественно изгибно-крутильному типу. Отметим, что первые частоты собственных колебаний, локализованных у свободного края тонкостенной конструкции оболочечного типа, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа. Вычисления показывают, что рядом с первыми частотами колебания квазипоперечного типа существуют частоты незатухающих колебаний квазитангенциального типа. С увеличением n эти колебания становятся колебаниями релеевского типа.

Таблица 1

n	$\bar{E}_0(\eta_n)=0, \beta_0=s$	$\bar{F}_0(\eta_n)=0, \beta_0=5s$	$\bar{F}_0(\eta_n)=0, \beta_0=s$	$\bar{E}_0(\eta_n)=0, \beta_0=5s$	$K_{30}(\eta_n)=0$
	$k\chi_0/n$ η/n	$k\chi_0/n$ η/n	$k\chi_0/n$ η/n	$k\chi_0/n$ η/n	$\eta/n=0$
1	-0.0778 0.94366 -0.0149 0.99799	-0.0378 0.00822	-0.0680 0.00819	-0.0530 0.97432 -0.0200 0.99641	3.2114
2	-0.0670 0.95852 -0.0159 0.99771	-0.0278 0.01646	-0.0558 0.01641	-0.0447 0.98182 -0.0281 0.99285	3.2093
3	-0.0605 0.96630 -0.0171 0.99735	-0.0234 0.02470	-0.0473 0.02464	-0.0413 0.98448 -0.0337 0.98968	3.2057
4	-0.0562 0.97110 -0.0185 0.99692	-0.0209 0.03294	-0.0417 0.03288	-0.0397 0.98567 -0.0363 0.98806	3.2003
5	-0.0530 0.97432 -0.0199 0.99641	-0.0192 0.04118	-0.0378 0.04112	-0.0389 0.98624 -0.0373 0.98734	3.1924
9	-0.0457 0.98092 -0.0265 0.99363	-0.0160 0.07413 -0.0109 0.07417	-0.0291 0.07407	-0.0382 0.98673 -0.0381 0.98678	2.7088 3.0773
10	-0.0447 0.98182 -0.0281 0.99285	-0.0157 0.08236 -0.0121 0.08237	-0.0278 0.08230	-0.0382 0.98674 -0.0381 0.98677	- -
110	-0.0382 0.98676	-0.0144 0.90605	-0.0144 0.90605	-0.0382 0.98676	3.3658
120	-0.0382 0.98676 -0.0382 0.98676	-0.0144 0.90605 -0.0144 0.98842	-0.0144 0.90606 -0.0144 0.98842	-0.0382 0.98676 -0.0382 0.98676	3.6218 3.3651
130	-0.0382 0.98676 -0.0382 0.98676	-0.0144 1.07079 -0.0144 1.07079	-0.0144 1.07079 -0.0144 1.07079	-0.0382 0.98676 -0.0382 0.98676	3.6235 3.3645 3.6251

При $\varepsilon_n \rightarrow 0$ собственные колебания для задач (1.1)-(1.3), (1.1)-(1.2), (1.4) расщепляются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания. При этом частоты этих задач стремятся к частотам аналогичных задач для пластинки-полосы и прямоугольной пластинки, соответственно. При увеличении n колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими. Безразмерные характеристики η_n собственной частоты квазитангенциальных колебаний стремятся к корню уравнения Рэлея ($K_{20}(\eta_n) = 0$) из (3.11). При $n\beta_0 \rightarrow \infty$ частоты волн, локализованных у свободных граничных образующих тонкостенной конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек ($k = 2\pi n_0/l$) и частоты колебаний, локализованных у свободных граничных образующих тонкостенной конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек ($k = \pi/l$) при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих, стремятся к частотам волн тонкостенной конструкции оболочечного типа, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек или частотам колебаний, локализованных у свободной образующей оболочечной конструкции, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых краях, соответственно.

Колебания преимущественно изгибно-крутильного типа ($\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$) при достаточно больших n расщепляются на квазипоперечные и преимущественно крутильные типы колебаний. При дальнейшем увеличении n колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими (в таблицах параметры для незатухающих колебаний не приводятся).

Таблица 2

β_0	n	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$	$\eta_2 = \eta_3 = \eta, \eta_1 = 0$	
		$k\chi_0/n$ η/n	$k\chi_0/n$ η/n	$k\chi_0/n$ η/n	$k\chi_0/n$ η/n	
5s	1	-0.4047 b 0.01677 -0.4047 b 0.01678	-0.4048 b 0.01678 -0.4047 b 0.01679	-0.4009 e 0.68968 -0.4009 e 0.68983	-0.4047 b 0.01677 -0.4047 b 0.01678	
	2	-0.2773 b 0.02213 -0.2773 b 0.02213	-0.2773 b 0.02213 -0.2773 b 0.02214	-0.3672 e 0.89948 -0.3672 e 0.89948	-0.2773 b 0.02213 -0.2773 b 0.02213	
	3	-0.2199 b 0.02872 -0.2199 b 0.02872	-0.2200 b 0.02872 -0.2200 b 0.02872	-0.1204 e 0.96233 -0.1203 e 0.96257	-0.2199 b 0.02872 -0.2199 b 0.02872	
	4	-0.1871 b 0.03588 -0.1871 b 0.03588	-0.1872 b 0.03589 -0.1872 b 0.03589	-0.0649 e 0.97792 -0.0634 e 0.97896	-0.1871 b 0.03588 -0.1871 b 0.03588	
	5	-0.1664 b 0.04336 -0.1664 b 0.04336	-0.1665 b 0.04337 -0.1665 b 0.04337	-0.0496 e 0.98277 -0.0481 e 0.98380	-0.1664 b 0.04336 -0.1664 b 0.04336	
	9	-0.0629 b 0.07482 -0.0629 b 0.07482	-0.0628 b 0.07482 -0.0628 b 0.07482	-0.0392 e 0.98637 -0.0391 e 0.98647	-0.0629 b 0.07482 -0.0629 b 0.07482	
	10	-0.0462 b 0.08289 -0.0462 b 0.08289	-0.0461 b 0.08289 -0.0461 b 0.08289	-0.0389 e 0.98651 -0.0388 e 0.98656	-0.0462 b 0.08289 -0.0462 b 0.08289	
	110	-0.0144 b 0.90568 -0.0144 b 0.90568	-0.0144 b 0.90568 -0.0144 b 0.90568	-0.0382 e 0.98676 -0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90568 -0.0144 b 0.90568	
	120	-0.0382 e 0.98676 -0.0382 e 0.98676	-- --	-0.0382 e 0.98676 -0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771 -0.0207 t 0.98771	
	130	-0.0144 b 0.98802 -0.0144 b 0.98802	-0.0144 b 0.98801 -0.0144 b 0.98801	-- --	-0.0144 b 0.98802 -0.0144 b 0.98802	
			-0.0382 e 0.98676 -0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07034 -0.0144 b 1.07034	-0.0382 e 0.98676 -0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772 -0.0366 t 0.98772
	s	1	-0.4273 b 0.01400 -0.4002 b 0.01728	-0.4273 b 0.01400 -0.4002 b 0.01728	-- --	-0.4273 b 0.01400 -0.4002 b 0.01728
		2	-0.2914 b 0.02085 -0.2585 b 0.02368	-0.2914 b 0.02085 -0.2585 b 0.02368	-0.3699 e 0.91898	-0.2914 b 0.02085 -0.2585 b 0.02368
		3	-0.2288 b 0.02812 -0.2082 b 0.02949	-0.2288 b 0.02812 -0.2082 b 0.02949	-0.1647 e 0.93009	-0.2288 b 0.02812 -0.2082 b 0.02949
		4	-0.1920 b 0.03562 -0.1813 b 0.03619	-0.1921 b 0.03562 -0.1814 b 0.03619	-0.0987 e 0.94855	-0.1920 b 0.03562 -0.1813 b 0.03619
		5	-0.1678 b 0.04330 -0.1651 b 0.04342	-0.1678 b 0.04331 -0.1652 b 0.04342	-0.0764 e 0.95867	-0.1678 b 0.04330 -0.1651 b 0.04342
9		-0.0750 b 0.07469 -0.0223 b 0.07509	-0.0748 b 0.07469 -0.0219 b 0.07509	-0.0529 e 0.97506	-0.0750 b 0.07469 -0.0223 b 0.07509	
10		-0.0576 b 0.08277 -0.0576 b 0.08277	-0.0575 b 0.08277 -0.0575 b 0.08277	-0.0507 e 0.97696	-0.0576 b 0.08277 -0.0003 b 0.08309	
110		-0.0144 b 0.90567 -0.0144 b 0.90567	-0.0144 b 0.90567 -0.0144 b 0.90567	-0.0382 e 0.98676 -0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90567 -0.0144 b 0.90567	
120		-0.0382 e 0.98676 -0.0382 e 0.98676	-- --	-0.0382 e 0.98676 -0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771 -0.0207 t 0.98771	
130		-0.0144 b 0.98801 -0.0144 b 0.98801	-0.0144 b 0.98801 -0.0144 b 0.98801	-- --	-0.0144 b 0.98802 -0.0144 b 0.98802	
			-0.0382 e 0.98676 -0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07034 -0.0144 b 1.07034	-0.0382 e 0.98676 -0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772 -0.0366 t 0.98772

Численный анализ показывает, что процесс затухания зависит от типа колебаний, от геометрических и физических параметров конструкции: колебания квазипоперечного типа, в основном, затухают медленнее, чем остальные типы колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284с.
2. Гринченко В.Т. Эффекты локализации волновых движений в упругих волноводах // Прикл. мех. 2005. Т. 41. № 9. С.38-45.
3. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Wilde M.V. Free localajzed vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. America. 2000. V. 107. № 3. P. 1383-1393.
4. Гулгазарян Г.Р. О волнах, локализованных у образующей полубесконечной ортотропной гофрированной тонкой упругой цилиндрической оболочки // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия механика. Вып. 1(5). 2003. С. 23-31.
5. Гулгазарян Г.Р. О локализованных собственных колебаниях у свободного торца полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочки // Изв. РАН. МТТ. 2003. №1. С. 180-192.
6. Gulgazaryan G.R. Vibrations of a semi-infinite, orthotropic, cylindrical shells of open profile // Appl. Mech. 2004, Vol. 40. №2, P. 199-212.
7. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. О колебаниях тонкой упругой ортотропной цилиндрической оболочки со свободными краями // Проблемы прочности и пластичности, 2006. Вып. 68. С. 150-160
8. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкар А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова думка, 1986. 170с.
9. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Колебания ортотропной гофрированной цилиндрической оболочки со свободными краями. // Прикл. мех. 2006. Т. 42. № 12. С.97-114.
10. Гулгазарян Г.Р. Волны у образующей полубесконечной ортотропной гофрированной тонкой упругой цилиндрической оболочки // В сб.: "Математический анализ и его приложения." Ереван: 2003. Вып.3. С.41-93.
11. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
12. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383с.
13. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев. // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. №3. С.171-174.

Институт механики НАН Армении
Аргоспедуниверситет им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
17.09.2007

УДК 539.3

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Закарян Т. В.

Ключевые слова: анизотропия, полоса, колебания, резонанс, сингулярные возмущения.

Key words: anisotropic, strip, vibration, resonance, singularly perturbed.

Տ. Վ. Չաքարյան

Օրբորտրոպ երկշերտի համար առաձգականության տեսության դինամիկական առաջին եզրային խնդրի մասին

Գիտարկված է առաձգականության տեսության հարթ դինամիկական առաջին եզրային խնդիրը երկշերտ օրբորտրոպ շերտ-հեծանի համար: Երկշերտի դինային մակերևույթների վրա տրված են լարման թեքողի բաղադրիչները, որոնք ժամանակից հարմոնիկ ֆունկցիաներ են: Հաստատված են լարման թեքողի և տեղափոխման վեկտրի բաղադրիչների ասիմպտոտիկ կարգերը, որոշված է ներքին խնդրի ընդհանուր լուծումը, հաստատված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Այն դեպքերի համար, երբ երկայնական եզրերում տրված ֆունկցիաները հաստատուն են կամ զծային, որոշված են ներքին խնդրի ճշգրիտ լուծումները:

T. V. Zakaryan

On dynamic first boundary value problem of elasticity theory for two – layered orthotropic strip

A dynamic plane boundary value problem for two – layered orthotropic strip is considered, when on its facial surfaces the values of the corresponding stresses tensor components, which change harmonically in time, are given. For the determination of the solution an asymptotic method of the solutions of singularly perturbed differential equations is applied. Asymptotic orders of all the stresses tensor components and the displacement vector and iteration processes for determining these components are built. The general solution of the inner problem is found. The conditions of arising resonance are established. For private cases mathematically exact solutions of the inner problem are obtained.

Рассматривается динамическая плоская краевая задача для двухслойной ортотропной полосы, когда на ее лицевых поверхностях заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, которые во времени меняются гармонически. Для определения решения применен асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Установлены асимптотические порядки всех компонент тензора напряжений и вектора перемещения и построены итерационные процессы для определения этих компонент. Найдено общее решение внутренней задачи. Установлены условия возникновения резонанса. Для частных случаев получены математически точные решения внутренней задачи.

1. Основные соотношения и структура общего решения. Начиная с конца пятидесятих годов двадцатого века, для определения напряженно-деформированных состояний балок, стержней, пластин и оболочек широко используется асимптотический метод [1-7]. Статическая первая краевая задача для пластин и оболочек рассмотрена в [1,8], а для анизотропных балок, пластин и оболочек – в [9]. Асимптотический метод оказался особенно эффективным для решения неклассических краевых задач тонких тел [9,10], а также для решения динамических задач о собственных и вынужденных колебаниях [11-13]. В работе [14] определено асимптотическое решение первой динамической краевой задачи для ортотропной

полосы. В данной работе найдено решение внутренней задачи для двухслойной ортотропной полосы в динамической первой краевой задаче.

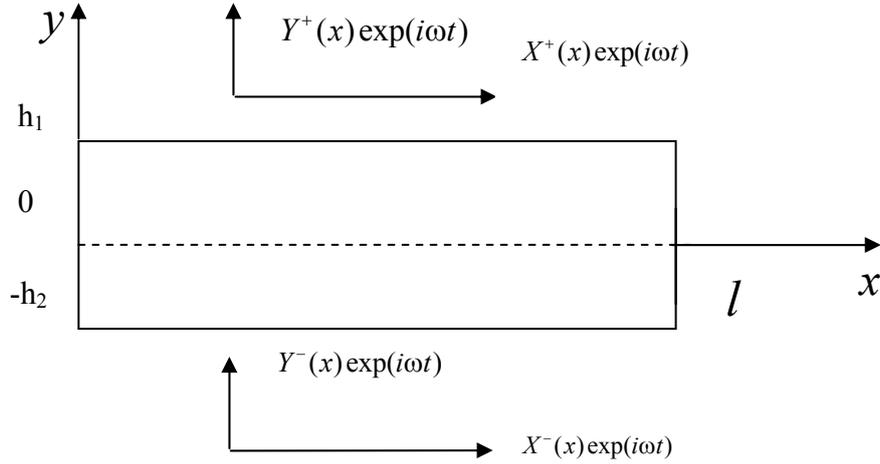
Требуется найти решение динамических уравнений плоской деформации двухслойной ортотропной полосы

$$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq l, -h_2 \leq y \leq h_1, h = \max(h_1, h_2) \ll l\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial y} &= \rho^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} &= \rho^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial u^k}{\partial x} &= \beta_{11}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{12}^k \sigma_{yy}^k, & \frac{\partial v^k}{\partial y} &= \beta_{12}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{22}^k \sigma_{yy}^k, & \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial x} &= a_{66}^k \sigma_{xy}^k, \quad (1.1) \\ \beta_{ij}^k &= \frac{1}{a_{33}^k} (a_{ij}^k a_{33}^k - a_{i3}^k a_{j3}^k), & i, j &= 1, 2, & a_{66}^k &= \frac{1}{G_{12}^k}, \quad k = I, II, \end{aligned}$$

где $\sigma_{\alpha\gamma}, u, v$ – компоненты, соответственно, тензора напряжений и вектора перемещения, ρ – плотность, a_{ij} – постоянные упругости, G_{12} – модуль сдвига,

при граничных условиях (фиг.1)



Фиг.1

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, h_1) &= Y^+(x) \exp(i\omega t), & \sigma_{xy}(x, h_1) &= X^+(x) \exp(i\omega t) \\ \sigma_{yy}(x, -h_2) &= -Y^-(x) \exp(i\omega t), & \sigma_{xy}(x, -h_2) &= -X^-(x) \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

при условиях полного контакта между слоями :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^I(x, 0) &= \sigma_{yy}^{II}(x, 0), & \sigma_{xy}^I(x, 0) &= \sigma_{xy}^{II}(x, 0) \\ u^I(x, 0) &= u^{II}(x, 0), & v^I(x, 0) &= v^{II}(x, 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

и условиях на торцевых сечениях $x = 0, l$, которые пока не будем конкретизировать.

Чтобы решить поставленную задачу, введем безразмерные координаты $\xi = x/l, \zeta = y/h$ и безразмерные перемещения $U_x = u/l, U_y = v/l$. В результате, уравнения (1.1) примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial \zeta} &= l^2 \rho^k \frac{\partial^2 U_x^k}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial \zeta} &= l^2 \rho^k \frac{\partial^2 U_y^k}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial U_x^k}{\partial \xi} &= \beta_{11}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{12}^k \sigma_{yy}^k, & \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_y^k}{\partial \zeta} &= \beta_{12}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{22}^k \sigma_{yy}^k, \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial U_x^k}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_y^k}{\partial \xi} &= a_{66}^k \sigma_{xy}^k, & \varepsilon &= h/l.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Решение системы (1.4) будем искать в виде [11,14]

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^k(\xi, \zeta, t) &= \sigma_{ij}^k(\xi, \zeta) \exp(i\omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, \quad i, j = 1, 2 \\
(U_x^k(\xi, \zeta, t), U_y^k(\xi, \zeta, t)) &= (U^k(\xi, \zeta), V^k(\xi, \zeta)) \exp(i\omega t), \quad k = I, II
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Подставив (1.5) в (1.4), получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 \rho^k U^k &= 0, & \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 \rho^k V^k &= 0, \\
\frac{\partial U^k}{\partial \xi} &= \beta_{11}^k \sigma_{11}^k + \beta_{12}^k \sigma_{22}^k, & \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^k}{\partial \zeta} &= \beta_{12}^k \sigma_{11}^k + \beta_{22}^k \sigma_{22}^k, \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial U^k}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^k}{\partial \xi} &= a_{66}^k \sigma_{12}^k, & \omega_* &= h\omega, \quad k = I, II
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Система (1.6) сингулярно возмущена малым параметром ε . Ее решение складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I^b) [9,15,16]

$$I = I^{\text{int}} + I^b \tag{1.7}$$

2. Решение внутренней задачи. Решение системы (1.6), соответствующее внутренней задаче, будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{k \text{int}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{k(s)}(\xi, \zeta), \quad (U^{k \text{int}}, V^{k \text{int}}) = \varepsilon^s (U^{k(s)}, V^{k(s)}), \\
i, j &= 1, 2, \quad k = I, II, \quad s = \overline{0, N}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в (1.6) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , для определения коэффициентов разложения (2.1) получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \rho^k U^{k(s)} &= 0, & \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \rho^k V^{k(s)} &= 0, \\
\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} &= \beta_{11}^k \sigma_{11}^{k(s)} + \beta_{12}^k \sigma_{22}^{k(s)}, & \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} &= \beta_{12}^k \sigma_{11}^{k(s)} + \beta_{22}^k \sigma_{22}^{k(s)}, \\
\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{66}^k \sigma_{12}^{k(s)}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Из системы (2.2) напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\sigma_{11}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(-\beta_{12}^k \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{22}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(\beta_{11}^k \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right),$$

$$\sigma_{12}^{k(s)} = \frac{1}{a_{66}^k} \left(\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \Delta_1^k = \beta_{11}^k \beta_{22}^k - (\beta_{12}^k)^2 \quad (2.3)$$

Для определения же $U^{k(s)}, V^{k(s)}$ получаются уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^{\kappa(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66}^{\kappa} \omega_*^2 \rho^k U^{\kappa(s)} &= f_u^{\kappa(s)}, & \frac{\partial^2 V^{\kappa(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta_1^{\kappa}}{\beta_{11}^{\kappa}} \omega_*^2 \rho^k V^{\kappa(s)} &= f_v^{\kappa(s)} \\ f_u^{\kappa(s)} &= -a_{66}^{\kappa} \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{\kappa(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V^{\kappa(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), & f_v^{\kappa(s)} &= \frac{\beta_{12}^{\kappa}}{\beta_{11}^{\kappa}} \frac{\partial^2 U^{\kappa(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\Delta_1^{\kappa}}{\beta_{11}^{\kappa}} \frac{\partial \sigma_{12}^{\kappa(s-1)}}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решения уравнений (2.4) имеют вид

$$\begin{aligned} U^{\kappa(s)} &= C_1^{\kappa(s)}(\xi) \sin \sqrt{a_{66}^{\kappa} \rho^k} \omega_* \zeta + C_2^{\kappa(s)}(\xi) \cos \sqrt{a_{66}^{\kappa} \rho^k} \omega_* \zeta + \bar{u}^{-\kappa(s)} \\ V^{\kappa(s)} &= C_3^{\kappa(s)}(\xi) \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^{\kappa}}{\beta_{11}^{\kappa}} \rho^k} \omega_* \zeta + C_4^{\kappa(s)}(\xi) \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^{\kappa}}{\beta_{11}^{\kappa}} \rho^k} \omega_* \zeta + \bar{v}^{-\kappa(s)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\bar{u}^{-k(s)}, \bar{v}^{-k(s)}$ – частные решения уравнений (2.4). Вычислив по формулам (2.3) компоненты напряжений и удовлетворив граничным условиям (1.2) и условиям контакта (1.3), определим функции $C_i^{k(s)}$:

$$\begin{aligned} C_1^{I(s)} &= b_3^{(s)} + k_5 \frac{d_1^{(s)}}{\delta_1}, & C_1^{II(s)} &= \frac{d_1^{(s)}}{\delta_1}, & C_2^{I(s)} &= b_1^{(s)} + \frac{d_2^{(s)}}{\delta_1}, & C_2^{II(s)} &= \frac{d_2^{(s)}}{\delta_1}, \\ C_3^{I(s)} &= b_4^{(s)} + k_6 \frac{d_3^{(s)}}{\delta_2}, & C_3^{II(s)} &= \frac{d_3^{(s)}}{\delta_2}, & C_4^{I(s)} &= b_2^{(s)} + \frac{d_4^{(s)}}{\delta_2}, & C_4^{II(s)} &= \frac{d_4^{(s)}}{\delta_2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \cos k_3 \zeta_2 \sin k_1 \zeta_1 + k_5 \cos k_1 \zeta_1 \sin k_3 \zeta_2, \\ \delta_2 &= \cos k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta_1 + k_6 \cos k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta_2, \\ d_1^{(s)} &= b_7^{(s)} \sin k_1 \zeta_1 + (b_5^{(s)} - b_3^{(s)} \cos k_1 \zeta_1 + b_1^{(s)} \sin k_1 \zeta_1) \sin k_3 \zeta_2, \\ d_2^{(s)} &= b_7^{(s)} k_5 \cos k_1 \zeta_1 - (b_5^{(s)} - b_3^{(s)} \cos k_1 \zeta_1 + b_1^{(s)} \sin k_1 \zeta_1) \cos k_3 \zeta_2, \\ d_3^{(s)} &= b_8^{(s)} \sin k_2 \zeta_1 + (b_6^{(s)} - b_4^{(s)} \cos k_2 \zeta_1 + b_2^{(s)} \sin k_2 \zeta_1) \sin k_4 \zeta_2, \\ d_4^{(s)} &= b_8^{(s)} k_6 \cos k_2 \zeta_1 - (b_6^{(s)} - b_4^{(s)} \cos k_2 \zeta_1 + b_2^{(s)} \sin k_2 \zeta_1) \cos k_4 \zeta_2, \\ b_1^{(s)} &= \bar{u}^{II(s)}(\xi, 0) - \bar{u}^{I(s)}(\xi, 0), & b_2^{(s)} &= \bar{v}^{II(s)}(\xi, 0) - \bar{v}^{I(s)}(\xi, 0), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$b_3^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \left(f_{\sigma_{12}}^{II(s)}(\xi, 0) - f_{\sigma_{12}}^{I(s)}(\xi, 0) \right),$$

$$b_4^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \left(f_{\sigma_{22}}^{II(s)}(\xi, 0) - f_{\sigma_{22}}^{I(s)}(\xi, 0) \right),$$

$$b_5^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \left(X^{+(s)} - f_{\sigma_{12}}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) \right),$$

$$b_6^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \left(Y^{+(s)} - f_{\sigma_{22}}^{I(s)}(\xi, \zeta_2) \right),$$

$$b_7^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^{II} / \rho^{II}} \left(-X^{- (s)} - f_{\sigma_{12}}^{II(s)}(\xi, -\zeta_2) \right),$$

$$b_8^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \left(-Y^{- (s)} - f_{\sigma_{22}}^{II(s)}(\xi, -\zeta_2) \right),$$

$$X^{\pm(0)} = \pm \varepsilon X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = \pm \varepsilon Y^{\pm}, \quad X^{\pm(s)} = 0, \quad Y^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0,$$

$$k_1 = \omega_* \sqrt{a_{66}^I \rho^I}, \quad k_2 = \omega_* \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I}, \quad k_3 = \omega_* \sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}}, \quad k_4 = \omega_* \sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}},$$

$$k_5 = \sqrt{a_{66}^I \rho^{II} / a_{66}^{II} \rho^I}, \quad k_6 = \sqrt{\Delta_1^I \rho^{II} \beta_{11}^{II} / \Delta_1^{II} \rho^I \beta_{11}^I},$$

$$f_{\sigma_{11}}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(-\beta_{12}^k \frac{\partial \bar{v}^{-k(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right),$$

$$f_{\sigma_{12}}^{k(s)} = \frac{1}{a_{66}^k} \left(\frac{\partial \bar{u}^{-k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right),$$

$$f_{\sigma_{22}}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(\beta_{11}^k \frac{\partial \bar{v}^{-k(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad k = I, II.$$

Подставив значения $C_i^{k(s)}$ в формулу (2.5), определим перемещения, а из формул (2.3) определим значения напряжений:

$$\sigma_{11}^{I(s)} = -k_2 \frac{\beta_{12}^I}{\Delta_1^I} \left(C_3^{I(s)} \cos k_2 \zeta - C_4^{I(s)} \sin k_2 \zeta \right) + f_{\sigma_{11}}^{I(s)},$$

$$\sigma_{11}^{II(s)} = -k_4 \frac{\beta_{12}^{II}}{\Delta_1^{II}} \left(C_3^{II(s)} \cos k_4 \zeta - C_4^{II(s)} \sin k_4 \zeta \right) + f_{\sigma_{11}}^{II(s)}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{12}^{k(s)} = \omega_* \sqrt{\rho^k / a_{66}^k} \left(C_1^{k(s)} \cos \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta - C_2^{k(s)} \sin \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta \right) + f_{\sigma_{12}}^{k(s)},$$

$$\sigma_{22}^{k(s)} = \omega_* \sqrt{\beta_{11}^k \rho^k / \Delta_1^k} \left(C_3^{k(s)} \cos \sqrt{\Delta_1^k \rho^k / \beta_{11}^k} \omega_* \zeta - C_4^{k(s)} \sin \sqrt{\Delta_1^k \rho^k / \beta_{11}^k} \omega_* \zeta \right) + f_{\sigma_{22}}^{k(s)},$$

Формулы (1.5), (2.1), (2.3), (2.5)-(2.8) позволяют определить все компоненты напряжений и перемещений двухслойной полосы во внутренней задаче с заранее заданной асимптотической точностью. Из этих формул следует, что в отличие от статической задачи [9], эти величины полностью определяются из граничных условий (1.2) на лицевых поверхностях и из условий контакта (1.3). Другой особенностью является и то, что асимптотика (2.1) в динамической задаче принципиально отличается от асимптотики в статической задаче [1,9]:

$$\sigma_{xx} = O(\varepsilon^{-2}), \quad \sigma_{xy} = O(\varepsilon^{-1}), \quad \sigma_{yy} = O(\varepsilon^0), \quad u = O(\varepsilon^{-2}), \quad v = O(\varepsilon^{-3}) \quad (2.9)$$

Найденное выше решение будет справедливым, если $\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0$. Значения ω , при которых $\delta_1 = 0$ или $\delta_2 = 0$, совпадают со значениями частот собственных колебаний двухслойной полосы [11].

3. Частные решения. Используя приведенные выше формулы, найдем решения некоторых частных задач. Пусть

$$X^{\pm} = \text{const}, Y^{\pm} = \text{const} \quad (3.1)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что отличными от нуля будут величины исходного приближения $s=0$, т. е. для этого случая $Q^{k(s)} \equiv 0$ при $s \geq 1$. В результате получим следующее точное решение внутренней задачи :
 величины первого слоя ($0 \leq y \leq h_1$)–

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^I &= -\frac{\beta_{12}^I}{\Delta_1^I \delta_2 \omega_*} \left[Y^+ \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin(k_2 \zeta + k_4 \zeta_2) + \right. \\ &\quad \left. + Y^- k_6 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin k_2 (\zeta + \zeta_1) \right] \exp(i\omega t), \\ \sigma_{yy}^I &= \frac{1}{\delta_2} \left[Y^+ (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta + \cos k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta) + \right. \\ &\quad \left. + Y^- \sin k_2 (\zeta - \zeta_1) \right] \exp(i\omega t), \\ \sigma_{xy}^I &= \frac{1}{\delta_1} \left[X^+ (k_5 \sin k_3 \zeta_2 \cos k_1 \zeta + \cos k_3 \zeta_2 \sin k_1 \zeta) + \right. \\ &\quad \left. + X^- \sin k_1 (\zeta - \zeta_1) \right] \exp(i\omega t), \\ u^I &= \frac{h}{\delta_1 \omega_*} \left[X^+ \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} (k_5 \sin k_3 \zeta_2 \sin k_1 \zeta - \cos k_3 \zeta_2 \cos k_1 \zeta) - \right. \\ &\quad \left. - X^- k_5 \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \cos k_1 (\zeta - \zeta_1) \right] \exp(i\omega t), \\ v^I &= \frac{h}{\delta_2 \omega_*} \left[Y^+ \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta - \cos k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta) - \right. \\ &\quad \left. - Y^- k_6 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \cos k_2 (\zeta - \zeta_1) \right] \exp(i\omega t), \\ \zeta_1 &= h_1/h, \quad \zeta_2 = h_2/h, \quad h = \max(h_1, h_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

величины второго слоя ($-h_2 \leq y \leq 0$)–

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{II} &= -\frac{k_4 \beta_{12}^{II}}{\Delta_1^{II} \delta_2 \omega_*} \left[Y^+ \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin k_4 (\zeta + \zeta_2) + \right. \\ &\quad \left. + Y^- \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta - \sin k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta) \right] \exp(i\omega t), \\ \sigma_{yy}^{II} &= \frac{1}{\delta_2} \left[Y^+ k_6 \sin k_4 (\zeta + \zeta_2) + \right. \\ &\quad \left. + Y^- (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta - \sin k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta) \right] \exp(i\omega t), \\ \sigma_{xy}^{II} &= \frac{1}{\delta_1} \left[X^+ k_5 \sin k_3 (\zeta + \zeta_2) + \right. \\ &\quad \left. + X^- (k_5 \cos k_1 \zeta_1 \sin k_3 \zeta - \sin k_1 \zeta_1 \cos k_3 \zeta) \right] \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
u'' &= -\frac{h}{\delta_1 \omega_*} \left[X^+ \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \cos k_3 (\zeta + \zeta_2) + \right. \\
&\quad \left. + X^- \sqrt{a_{66}^{II} / \rho^{II}} (k_5 \cos k_1 \zeta_1 \cos k_3 \zeta + \sin k_1 \zeta_1 \sin k_3 \zeta) \right] \exp(i\omega t), \\
v'' &= -\frac{h}{\delta_2 \omega_*} \left[Y^+ \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \cos k_4 (\zeta + \zeta_2) + \right. \\
&\quad \left. + Y^- \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta + \sin k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta) \right] \exp(i\omega t),
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда

$$X^\pm = 0, \quad Y^+ = -a_1 \xi, \quad Y^- = a_2 \xi \quad (3.4)$$

Для этого случая отличными от нуля будут величины приближений $s = 0, 1$. При $s = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
U^{I(0)} &= 0, \quad U^{II(0)} = 0, \quad \sigma_{12}^{I(0)} = 0, \quad \sigma_{12}^{II(0)} = 0, \\
V^{I(0)} &= -\frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left[a_1 \xi \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta - \cos k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta) + \right. \\
&\quad \left. + a_2 \xi k_6 \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \cos k_2 (\zeta - \zeta_1) \right], \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V^{II(0)} &= \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left[a_1 \xi \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \cos k_4 (\zeta + \zeta_2) - \right. \\
&\quad \left. - a_2 \xi \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta + \sin k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{I(0)} &= \frac{\beta_{12}^I \varepsilon}{\Delta_1^I \delta_2 \omega_*} \left[a_1 \xi \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin(k_2 \zeta + k_4 \zeta_2) - \right. \\
&\quad \left. - a_2 \xi k_6 \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \sin k_2 (\zeta + \zeta_1) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{II(0)} &= \frac{\beta_{12}^{II} k_4 \varepsilon}{\Delta_1^{II} \delta_2 \omega_*} \left[a_1 \xi \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin k_4 (\zeta + \zeta_2) - \right. \\
&\quad \left. - a_2 \xi \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta - \sin k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta) \right],
\end{aligned}$$

$$\sigma_{22}^{I(0)} = \frac{\varepsilon}{\delta_2} \left[-a_1 \xi (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta + \cos k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta) + a_2 \xi \sin k_2 (\zeta - \zeta_1) \right],$$

$$\sigma_{22}^{II(0)} = \frac{\varepsilon}{\delta_2} \left[-a_1 \xi k_6 \sin k_4 (\zeta + \zeta_2) + a_2 \xi (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta - \sin k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta) \right],$$

При $s = 1$ получаются

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{I(1)} &= 0, \quad \sigma_{11}^{II(1)} = 0, \quad \sigma_{22}^{I(1)} = 0, \quad \sigma_{22}^{II(1)} = 0, \quad V^{I(1)} = 0, \quad V^{II(1)} = 0, \\
U^{I(1)} &= C_1^{I(1)} \sin k_1 \zeta + C_2^{I(1)} \cos k_1 \zeta + \bar{u}^{I(1)}, \\
U^{II(1)} &= C_1^{II(1)} \sin k_3 \zeta + C_2^{II(1)} \cos k_3 \zeta + \bar{u}^{II(1)}, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{12}^{k(1)} = \sqrt{\rho^k / a_{66}^k} \omega_* \left(C_1^{k(1)} \cos \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta - C_2^{k(1)} \sin \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta \right) + f_{\sigma_{12}}^{k(1)},$$

где

$$\bar{u}^{I(1)} = B_1 \sin k_2 (\zeta + \zeta_1) + B_2 \sin k_2 (\zeta - \zeta_1) + B_3 \sin(k_2 \zeta + k_4 \zeta_2) + B_4 \cos k_2 \zeta + B_5 \sin k_2 \zeta,$$

$$\bar{u}^{II(1)} = A_1 \sin k_4 (\zeta + \zeta_2) + A_2 \sin k_4 \zeta + A_3 \cos k_4 \zeta,$$

$$B_1 = \gamma_1 a_2 k_6 \frac{a_{66}^I \beta_{12}^I}{\Delta_1^I} \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}}, \quad B_2 = \gamma_1 a_2 k_6 k_2 \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}},$$

$$B_3 = -\gamma_1 a_1 \frac{a_{66}^I \beta_{12}^I}{\Delta_1^I} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I}, \quad B_4 = -\gamma_1 a_1 k_6 k_2 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin k_4 \zeta_2,$$

$$B_5 = -\gamma_1 a_1 k_2 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \cos k_4 \zeta_2,$$

$$A_1 = -\gamma_2 a_1 k_4 \left(1 + a_{66}^{II} \frac{\beta_{12}^{II}}{\Delta_1^{II}} \right) \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I},$$

$$A_2 = \gamma_2 k_6 \left(a_2 a_{66}^{II} \frac{\beta_{12}^{II}}{\Delta_1^{II}} \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \cos k_2 \zeta_1 + k_4 \cos k_2 \zeta_1 \right),$$

$$A_3 = -\gamma_2 \left(a_2 a_{66}^{II} \frac{\beta_{12}^{II}}{\Delta_1^{II}} \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \sin k_2 \zeta_1 + k_4 \sin k_2 \zeta_1 \right),$$

$$\gamma_1 = \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_* (a_{66}^I \omega_*^2 \rho^I - k_2^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_* (a_{66}^{II} \omega_*^2 \rho^{II} - k_4^2)},$$

(3.7)

$$f_{\sigma_{12}}^{I(1)} = \frac{1}{a_{66}^I} (B_1 k_2 \cos k_2 (\zeta + \zeta_1) + B_2 k_2 \cos k_2 (\zeta - \zeta_1) + B_3 k_2 \cos(k_2 \zeta + k_4 \zeta_2) - B_4 k_2 \sin k_2 \zeta + B_5 k_2 \cos k_2 \zeta) + \frac{\varepsilon}{a_{66}^I \delta_2 \omega_*} \left[-a_1 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta - \cos k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta) - a_2 k_6 \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \cos k_2 (\zeta - \zeta_1) \right],$$

$$f_{\sigma_{12}}^{II(1)} = \frac{1}{a_{66}^{II}} (A_1 k_4 \cos k_4 (\zeta + \zeta_2) + A_2 k_4 \cos k_4 \zeta - A_3 k_4 \sin k_4 \zeta) + \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left[a_1 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \cos k_4 (\zeta + \zeta_2) - a_2 \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta + \sin k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta) \right],$$

Постоянные $C_1^{k(1)}, C_2^{k(1)}$ вычисляются по формулам (2.6), где

$$\begin{aligned}
b_1^{(1)} &= A_1 \sin k_4 \zeta_2 + A_3 - (B_1 - B_2) \sin k_2 \zeta_1 - B_3 \sin k_4 \zeta_2 + B_4, \\
b_3^{(1)} &= \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a'_{66}/\rho'} \left\{ \frac{1}{a''_{66}} (A_1 k_4 \cos k_4 \zeta_2 + A_2 k_4) - \frac{1}{a'_{66}} (B_1 k_2 \cos k_2 \zeta_1 + \right. \\
&+ B_2 k_2 \cos k_2 \zeta_1 + B_3 k_2 \cos k_4 \zeta_2 + B_5 k_2) + \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left(\frac{1}{a''_{66}} - \frac{1}{a'_{66}} \right) \times \\
&\times \left(a_1 \sqrt{\Delta'_1/\beta'_{11}\rho'} \cos k_4 \zeta_2 - a_2 k_6 \sqrt{\Delta''_1/\beta''_{11}\rho''} \cos k_2 \zeta_1 \right) \Big\}, \\
b_5^{(1)} &= -\frac{1}{a'_{66}\omega_*} \sqrt{a'_{66}/\rho'} \{ B_1 k_2 \cos 2k_2 \zeta_1 + B_2 k_2 + B_3 k_2 \cos(k_2 \zeta_1 + k_4 \zeta_2) - \\
&- B_4 k_2 \sin k_2 \zeta_1 + B_5 k_2 \cos k_2 \zeta_1 + \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left[-a_1 \sqrt{\Delta'_1/\beta'_{11}\rho'} (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta_1 - \right. \\
&- \cos k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta_1) - a_2 k_6 \sqrt{\Delta''_1/\beta''_{11}\rho''} \Big] \Big\}, \\
b_7^{(1)} &= -\frac{1}{a''_{66}\omega_*} \sqrt{a''_{66}/\rho''} \{ A_1 k_4 + A_2 k_4 \cos k_4 \zeta_2 + A_3 k_4 \sin k_4 \zeta_2 + \\
&+ \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left[a_1 \sqrt{\Delta'_1/\beta'_{11}\rho'} - a_2 \sqrt{\Delta''_1/\beta''_{11}\rho''} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta_2 - \right. \\
&- \sin k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta_2) \Big] \Big\}, \\
d_1^{(1)} &= b_7^{(1)} \sin k_1 \zeta_1 + (b_5^{(1)} - b_3^{(1)} \cos k_1 \zeta_1 + b_1^{(1)} \sin k_1 \zeta_1) \sin k_3 \zeta_2, \\
d_2^{(1)} &= b_7^{(1)} k_5 \cos k_1 \zeta_1 - (b_5^{(1)} - b_3^{(1)} \cos k_1 \zeta_1 + b_1^{(1)} \sin k_1 \zeta_1) \cos k_3 \zeta_2
\end{aligned}$$

Используя формулы (1.5), (2.1), (3.5)-(3.8), получим окончательное решение

$$\begin{aligned}
u^k &= hU^{k(1)} \exp(i\omega t), \quad v^k = lV^{k(0)} \exp(i\omega t), \quad \sigma_{xx}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{11}^{k(0)} \exp(i\omega t), \\
\sigma_{xy}^k &= \sigma_{12}^{k(1)} \exp(i\omega t), \quad \sigma_{yy}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{22}^{k(0)} \exp(i\omega t), \quad k = I, II
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Из полученных выше решений можно заключить, что если функции $X^\pm(\xi), Y^\pm(\xi)$ являются многочленами, итерационный процесс будет обрываться на определённом приближении, в результате получим математически точное решение внутренней задачи. Полученные выше решения, как правило, не будут удовлетворять граничным условиям на торцах $x = 0, l$ полосы. Возникающая невязка устраняется с помощью решения пограничного слоя. Это решение строится описанным в [14] способом, где изложена также процедура сопряжения решений внутренней задачи и пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С.668-686.
2. Friedrichs K. O. Kirchhoff's Boundary Conditions and the Edge Effect for Elastic Plates // Proc. Symp. , Appl.Math.3.Amer. Math.Soc. , N. Y. , 1950.
3. Friedrichs K. O. and Dressler R.F. A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates // Comm.Pure and Appl.Math. 1961.Vol.14, № 1.
4. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: Материалы I Всесоюзн. Школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Изд-во Тбилисского ун-та. 1975. С. 51-149.
5. Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells// Proc. Roy.Soc.Ser.A. 1962.Vol.266, №1325.
6. Агаловян Л. А. Применение метода асимптотического интегрирования к построению приближенной теории анизотропных оболочек // ПММ. 1966. Т.30. Вып.2. С.388-398.
7. Агаловян Л. А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977. Т. 30. №5. С.48-62.
8. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
9. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука Физматлит. 1997. 414с.
10. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2005. 468 с.
11. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин.// Изв. ВУЗов РФ, Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.
12. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Междунар. научн. журнал. Прикл. Механика. 2002. Т. 38. №7. С. 3-24.
13. Агаловян Л. А. , Гулгазарян Л. Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. // ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.
14. Агаловян Л. А. , Закарян Т. В. Асимптотическое решение динамической первой краевой задачи теории упругости для ортотропной полосы. // В сб.: "Актуальные проблемы механики сплошной среды". Ереван: 2007. С.21-27.
15. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
16. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
10.03.2008

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ДВУМЯ
СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: стержень, сосредоточенная сила, статическая и динамическая устойчивость, бесконечная система уравнений, частота, критическая сила.

Keywords: rode, concentrated force, static and dynamic stability, infinite system of equations, frequency, critical force.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան
Երկու կենտրոնացված ուժերով ձողի կայունության մասին

Դիտարկված են ձողի ստատիկական և դինամիկական կայունության խնդիրները երկու կենտրոնացված ուժերի դիրքերից և ուղղություններից կախված:

L.A. Movsisyan, G.G. Nersisyan
About stability of beam with two concentrated forces

The dynamic and static stability of beam in dependence from position and direction of two concentrated forces is studied.

Изучаются динамическая и статическая устойчивости стержня в зависимости от раположения и направления двух сосредоточенных сил.

Объект исследования – стержень сжат двумя сосредоточенными силами – не нов и как будто не оригинален.

Однако, оказывается в зависимости от расположения и направления сил возможны интересные состояния напряженности и получаются еще более интересные задачи динамической устойчивости. Изучаются несколько задач динамической устойчивости: а) если силы – периодические функции времени, б) периодически меняются направления действия, или, в) если функция точки приложения сил периодическая. Отдельно исследуются также задачи статической устойчивости и колебаний этих систем.

1. Будем изучать стержень, который в продольном направлении (начальное состояние) закреплен на концах, а по отношению поперечных движений – шарнирно оперт.

Уравнение поперечных движений стержня при наличии осевого напряжения в безразмерных координатах запишется

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\pi^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(N \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $\xi = x/l$, l – длина стержня, τ – безразмерное время

$$\tau = \omega_1 t, \quad \omega_1^2 = \frac{EJ\pi^4}{\rho Fl^4}, \quad (1.2)$$

ω_1 – основная частота свободных колебаний, $N = N(\xi)$ – отношение продольной (неоднородной) силы к эйлеровой

$$N = \frac{P(\xi)}{P_0}, \quad P_0 = \frac{EJ\pi^2}{l^2}. \quad (1.3)$$

В зависимости от расположения и направления действующих сил различными будут $N(\xi)$.

Решение (1.1) будем искать в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \sin m\pi\xi \quad (1.4)$$

удовлетворяющем граничным условиям свободного опирания, а $N(\xi)$ представим как

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\pi\xi, \quad (1.5)$$

тогда из (1.1), (1.4) и (1.5) получим следующую бесконечную систему [1] для неизвестных $f_m(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + m^4 f_m - \frac{1}{2} m^2 [(2a_0 + a_{2m}) f_m + \\ + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} (a_{n-m} + a_{n+m}) \frac{n}{m} f_n] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Изучим несколько вариантов расположения сил.

а) Две сосредоточенные силы P_0 действуют на расстоянии ξ_1 от концов и направлены в одну сторону. Тогда по длине стержня будем иметь

$$P = \begin{cases} P_0, & 0 \leq \xi \leq \xi_1, \\ 0, & \xi_1 \leq \xi \leq 1 - \xi_1, \\ -P_0, & 1 - \xi_1 \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Коэффициенты a_m в этом случае определяются

$$a_m = \frac{2\delta}{m\pi} [1 - (-1)^m] \sin m\pi\xi_1, \quad \delta = \frac{P_0}{P_0}. \quad (1.8)$$

б) Силы направлены друг к другу (вовнутрь)

$$P = \begin{cases} P_0(1 - 2\xi_1), & 0 \leq \xi \leq \xi_1, \\ -P_0 2\xi_1, & \xi_1 \leq \xi \leq 1 - \xi_1, \\ P_0(1 - 2\xi_1), & 1 - \xi_1 \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

$$a_m = \frac{2\delta}{m\pi} [1 + (-1)^m] \sin m\pi\xi_1. \quad (1.10)$$

в) В случае, когда силы направлены к концам стержня в (1.9) и (1.10), нужно менять знаки при P_0 .

г) В случае, когда одна сила приложена в точке ξ_1 , то

$$P = \begin{cases} P_0 (1 - \xi_1), & 0 \leq \xi \leq \xi_1, \\ -P_0 \xi_1, & \xi_1 \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad a_m = \frac{2\delta}{m\pi} \sin m\pi\xi_1 \quad (1.11)$$

2. Здесь изучим несколько задач динамической устойчивости, когда силы или точки их приложения – периодические функции времени.

Для случая г) рассмотрим задачу, когда сила – периодическая функция

$$P_0 = P_0^{(1)} + P_0^{(2)} \cos \theta t = P_0^{(1)} + P_0^{(2)} \cos \frac{\theta}{\omega_1} \tau. \quad (2.1)$$

Тогда, довольствуясь первым приближением, для определения главной области неустойчивости из (1.6), (1.11) и (2.1) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + f_1 - A \left(1 + 2\mu \frac{\theta}{\omega_1} \tau \right) f_2 &= 0, \\ \frac{d^2 f_2}{d\tau^2} + 16f_2 - A \left(1 + 2\mu \cos \frac{\theta}{\omega_1} \right) f_1 &= 0, \\ A = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi\xi_1 + \frac{1}{3} \sin 3\pi\xi_1 \right) \delta^{(1)}, \quad 2\mu = \frac{\delta^{(2)}}{\delta^{(1)}}, \quad \delta^{(i)} = \frac{P_0^{(i)}}{P_0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Конечно, для уточнения предела главной области неустойчивости (устойчивости), как здесь, так и в дальнейшем, из бесконечной системы (1.6) можно брать побольше членов, но нашей основной целью является подчеркивать наличие подобных задач.

Области неустойчивости системы (2.2) находятся обычным образом [2] и они ограничены линиями.

$$\frac{\theta}{\omega_1} = \sqrt{2} \left[17 \pm \sqrt{225 + 4A^2 (1 \pm \mu)^2} \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

В качестве второй задачи рассмотрим такой вариант: в интервале времени $0 \leq t \leq t_1$ постоянные силы действуют вовнутрь (случай б)), а при $t_1 \leq t \leq 2t_1$ – на концах (случай в)). Частота колебаний будет

$$\theta = \frac{\pi}{t_1} = \frac{\pi\omega_1}{\tau_1}. \quad (2.4)$$

Здесь также, довольствуясь только первым приближением из (1.6), (1.10), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + \Omega_1^2 f_1 &= 0, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{\pi\omega_1}{\theta}, \\ \frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + \Omega_2^2 f_1 &= 0, \quad \frac{\pi\omega_1}{\theta} \leq \tau \leq \frac{2\pi\omega_1}{\theta}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\Omega_1^2 = 1 - \frac{\delta}{\pi} \sin 2\pi\xi_1, \quad \Omega_2^2 = 1 + \frac{\delta}{\pi} \sin 2\pi\xi_1$$

Области устойчивости и неустойчивости разделены линиями

$$\cos \frac{\pi \Omega_1 \omega_1}{\theta} \cos \frac{\pi \Omega_1 \omega_1}{\theta} - \frac{1}{1 - \left(\frac{\delta}{\pi} \sin 2\pi \xi_1 \right)^2} \sin \frac{\pi \Omega_1 \omega_1}{\theta} \sin \frac{\pi \Omega_2 \omega_1}{\theta} = \pm 1. \quad (2.6)$$

В табл. 1 приведены несколько корней $\left(\frac{\omega_1}{\theta} \right)$ уравнения (2.6). В каждой клетке числа первой строки соответствуют знаку минус в (2.6), а числа второй строки – знаку плюс.

Таблица 1

$\xi_1 \backslash \delta$	1	2	3
0,2	0,4357 0,9451	0,3855 0,8430	0,3504 0,7515
0,4	0,4589 0,9769	0,4224 0,9220	0,3919 0,8579

Как видно из табл., изменение $\frac{\omega_1}{\theta}$ по δ более ощутимо, чем по ξ_1 .

Следует отметить также, что из (2.6) при $\delta \rightarrow 0$ получается главный параметрический резонанс

$$\theta = 2\omega_1.$$

Третью задачу возьмем такую. Рассмотрим случай б) – сила постоянная, но точка приложения – периодическая функция времени

$$\xi_1 = \xi_1^0 + \varepsilon \cos \frac{\theta}{\omega_1} \tau, \quad \varepsilon \ll \xi_1^0. \quad (2.7)$$

Тогда из (1.6) можно брать только одно уравнение

$$\frac{d^2 f_1}{a\tau^2} + f_1 - a_2 f_1 = 0, \quad (2.8)$$

а a_2 с условиями (1.10) и (2.7) будет

$$a_2 = \frac{\delta}{2\pi} \sin 2\pi \xi_1 \left(1 + 2\pi \varepsilon \operatorname{ctg} 2\pi \xi_1 \cos \frac{\theta \tau}{\omega_1} \right), \quad (2.9)$$

и для f_1 будет обычно уравнение Матье

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + \Omega_1^2 \left(1 - 2\mu \cos \frac{\theta \tau}{\omega_1} \right) f_1, \quad (2.10)$$

$$\Omega_1^2 = 1 - \frac{\delta}{2\pi} \sin 2\pi \xi_1, \quad \mu = \varepsilon \frac{\delta \cos 2\pi \xi_1}{\Omega_1^2}.$$

Главная область неустойчивости определяется линиями

$$\frac{\Omega_1 \omega_1}{\theta} = \sqrt{1 \pm \mu}. \quad (2.11)$$

3. Здесь изучим задачи статической устойчивости и свободных колебаний выше-рассмотренных задач. Конечно, значения критических сил и частот можно получить и из системы (1.6). Однако, предпочтительно получить их точные значения традиционным способом – в отдельности рассматривать части стержня с однородным напряженным состоянием и в дальнейшем сращивать различные решения в точках разделения этих частей. Если искать решения (1.1) в виде

$$w = X(x) e^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

в зависимости от напряженного состояния для $X(x)$

$$X_i^{IV} \pm \delta_i \pi^2 X_i'' - \Omega^2 X_i = 0, \quad \Omega^2 = \frac{\delta F l^4}{EJ} \omega^2. \quad (3.2)$$

В сжатой части стержня должны брать знак «+», а в растянутой – знак «-»
Для задачи а) имеем

$$\begin{aligned} X_1^{IV} + \delta \pi^2 X_1'' - \Omega^2 X_1 &= 0, & 0 \leq \xi \leq \xi_1, \\ X_2^{IV} - \Omega^2 X_2 &= 0, & \xi_1 \leq \xi \leq 1 - \xi_1, \\ X_3^{IV} - \delta \pi^2 X_3'' - \Omega^2 X_3 &= 0, & 1 - \xi_1 \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решение системы (3.3) будет

$$\begin{aligned} X_1 &= C_1 \operatorname{ch} P_2 \xi + C_2 \operatorname{sh} P_2 \xi + C_3 \cos P_1 \xi + C_4 \sin P_1 \xi, \\ X_2 &= D_1 \operatorname{ch} P \xi + D_2 \operatorname{sh} P \xi + D_3 \cos P \xi + D_4 \sin P \xi, \\ X_3 &= E_1 \operatorname{ch} P_1 \xi + E_2 \operatorname{sh} P_1 \xi + E_3 \cos P_2 \xi + E_4 \sin P_2 \xi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$P_1 = \left(\Lambda - \frac{1}{2} \delta \pi^2 \right)^{1/2}, \quad P_2 = \left(\Lambda + \frac{1}{2} \delta \pi^2 \right)^{1/2},$$

$$P = \sqrt{\Omega}, \quad \Lambda = \sqrt{\Omega^2 + \frac{1}{2} \delta \pi^2}.$$

при этом должны быть удовлетворены следующие условия:

$$\begin{aligned} X_1 = X_1'' = 0 & \quad \text{при} \quad \xi = -\xi_1, \\ X_1 = X_2, \quad X_1' = X_2', \quad X_1'' = X_2'', \quad X_1''' = X_2''' & \quad \text{при} \quad \xi = 0, \\ X_2 = X_3, \quad X_2' = X_3', \quad X_2'' = X_3'', \quad X_2''' = X_3''' & \quad \text{при} \quad \xi = 1 - 2\xi_1, \\ X_3' = X_3'' = 0 & \quad \text{при} \quad \xi = 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Полученное трансцендентное уравнение настолько громоздкое, что привести здесь не имеет смысла (такое для второй задачи будет сделано). Приведем только уравнение статической устойчивости. Тогда

$$\begin{aligned} X_1 &= C_1 \operatorname{ch} K \xi + C_2 \operatorname{sh} K \xi + C_3 \xi + C_4, \\ X_2 &= D_1 + D_2 \xi + D_3 \xi^2 + D_4 \xi^3, \\ X_3 &= F_1 \cos K \xi + F_2 \sin K \xi + F_3 \xi + F_4, \quad K = \pi \sqrt{\delta}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Удовлетворяя условиям (3.5), для определения δ получим

$$\operatorname{tg} K \xi_1 + \operatorname{th} K \xi_1 + K(1 - 2\xi_1) = 0. \quad (3.7)$$

Для второй задачи –

$$\begin{aligned} X_i^{IV} - K_1^2 X_1'' - \Omega^2 X_1 &= 0, \\ X_i^{IV} + K_2^2 X_2'' - \Omega^2 X_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} K_1^2 &= \delta\pi^2 (1 - 2\xi_1), \quad K_2^2 = 2\delta\pi^2 \xi_1, \\ X_1 &= C_1 \operatorname{ch} S_1 \xi + C_2 \operatorname{sh} S_1 \xi + C_3 \cos S_2 \xi + C_4 \sin S_2 \xi, \\ X_2 &= D_1 \operatorname{ch} S_3 \xi + D_2 \operatorname{sh} S_3 \xi + D_3 \cos S_4 \xi + D_4 \sin S_4 \xi, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$S_{1,2} = \left(\sqrt{\frac{K_1^4}{4} + \Omega^2} \pm \frac{1}{2} K_1^2 \right)^{1/2}, \quad S_{3,4} = \left(\sqrt{\frac{K_2^2}{4} + \Omega^2} \mp \frac{1}{2} K_2^2 \right)^{1/2}.$$

Для симметричных форм колебаний и форм потери устойчивости помимо условий при $\xi = -\xi_1$ и $\xi = 0$ из (3.5) ставятся условия симметрии при $\xi = \xi_2 = 0.5 - \xi_1$

$$X' = X_2''' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \xi_2 \quad (3.10)$$

Тогда частоты должны быть определены из условия равенства нулю детерминанта

$$|a_{ij}| = 0 \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (S_2^2 + S_3^2)(S_1 + S_3 \operatorname{th} S_1 \xi_1 \operatorname{th} S_3 \xi_2), \\ a_{12} &= (S_2^2 - S_4^2)(S_1 - S_4 \operatorname{th} S_1 \xi_1 \operatorname{tg} S_4 \xi_2), \\ a_{21} &= (S_1^2 - S_3^2)(S_2 + S_3 \operatorname{tg} S_2 \xi_1 \operatorname{th} S_3 \xi_2), \\ a_{22} &= (S_1^2 + S_4^2)(S_2 - S_4 \operatorname{tg} S_2 \xi_1 \operatorname{tg} S_4 \xi_2). \end{aligned}$$

Для определения критической силы (статическая устойчивость) имеем уравнение

$$K_2 \operatorname{th} K_1 \xi_1 \operatorname{tg} K_2 (0,5 - \xi_1) = K_1. \quad (3.12)$$

Исследование задачи г) ничем не отличается от первых двух, поэтому приведем здесь только в окончательном виде уравнение для статической устойчивости –

$$\begin{aligned} K_4 \operatorname{th} K_3 \xi_1 + K_3 \operatorname{tg} K_4 (1 - \xi_1) &= 0, \\ K_3^2 = \delta\pi^2 (1 - \xi_1), \quad K_4^2 = \delta\pi^2 \xi_1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В табл. 2 помещены значения критических сил $\delta_{\text{кр}}$, определенных, соответственно, из (3.7), (3.12) и (3.13).

Таблица 2

$\xi_1 \backslash \delta$	I	II	III
0,1	27,31	5,30	10,50
0,2	7,60	3,12	5,89
0,3	3,87	2,83	4,63
0,4	2,63	3,91	4,31
0,5	2,27	–	4,53

Как видно из табл.2, величины критических сил в случае а) в два раза меньше случая г).

В табл. 3 помещены значения квадрата Ω при различных ξ_1 и α . Коэффициент α характеризует долю статической критической силы для данного ξ_1 , например, $\alpha = 0,1$ значит, что взята $0,1 \cdot \delta_{кр}$, а $\delta_{кр}$ берется из табл.2. В каждой клетке помещены три цифры, по порядку они соответствуют рассмотренным задачам.

Таблица 3

$\alpha \backslash \xi_1$	0,02	0,04	0,1	0,2	0,95
0,1	9,87 9,77 9,77	9,87 9,67 9,67	9,55 9,37 9,37	8,85 8,83 8,84	3,55 2,21 2,22
0,2	9,87 9,77 9,78	9,86 9,68 9,69	9,84 9,38 9,41	9,74 8,87 8,92	3,75 2,26 2,29
0,3	9,86 9,78 9,80	9,86 9,69 9,73	9,83 9,43 9,50	9,70 8,95 9,07	3,29 2,35 2,43
0,4	9,86 9,79 9,83	9,86 9,72 9,78	9,82 9,49 9,63	9,67 9,06 9,34	3,09 2,49 2,66
0,5	9,86 — 9,86	9,86 — 9,86	9,22 — 9,82	9,66 — 9,66	3,04 — 3,03

Вторая задача при $\xi = 0,5$ не имеет смысла, поэтому в таблицах данные отсутствуют.

Как видно из табл. 2, критическая сила получается намного больше, если сила приложена в одной точке, чем делить ее на две части и приложить в двух точках. Конечно, из табл. 3 можно сделать вывод относительно скорости уменьшения относительной частоты, заметим только: во всех трех рассмотренных случаях она почти одинакова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе . //Докл. АН Арм. ССР. 1969. Т.49. №3. С.124-130.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.04.2007

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ “НЕКОРРЕКТНОЙ” ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ

Саргсян В.Г., Хачикян А.С.

Ключевые слова: теплопроводность, некорректная задача, переопределенные данные, поправочная функция.

Keywords: heat conduction, incorrect problem, overdetermined data, function of correction.

Վ.Գ. Սարգսյան, Ա. Ս. Խաչիկյան

Ջերմահաղորդականության ոչ կոռեկտ խնդրի լուծման մասին՝ զերոորոշված նախնական տվյալների դեպքում

Դիտարկվում է ըստ Ադամարի ոչ կոռեկտ ջերմահաղորդականության ստացիոնար խնդրի լուծման հարցը զերոորոշված եզրային պայմանների առկայության դեպքում:

Անվերջ շերտում հարմոնիկ ֆունկցիայի որոշման օրինակով նախանշվում է եզրային պայմանների անճշտությունների նվազեցման մի եղանակ՝ մի քանի կետերում լրացուցիչ տրված ֆունկցիայի արժեքների օգտագործմամբ:

V.G. Sargsyan, A.S. Khachikyan

On the Solution of the Incorrect Problem on Heat Conduction if there are Overdetermined Initial Data

Under incorrect problem conditions the solution of the stationary problem on heat condition with overdetermined initial data is discussed.

Using additional specified values of the function at the some points the method of the error's decreasing at the boundary conditions is assigned. As an example the determination of the harmonic on the infinite strip function is considered.

В условиях задач с “некорректными по Адамару” граничными условиями обсуждается вопрос о решении стационарной задачи теплопроводности при переопределенных исходных данных.

На одном примере определения гармонической в бесконечной полосе функции намечается путь уменьшения погрешностей в граничных условиях с использованием дополнительно заданных значений функций в некоторых точках.

В задачах теории упругости, теплопроводности и в других задачах, приводящихся к определению гармонических или бигармонических функций, когда на одной части границы области граничные условия переопределены, а на остальной части эти условия недоопределены, складывается ситуация, характерная для “некорректных по Адамару” задач математической физики. Если даже решения задач существуют и единственны, может не существовать непрерывная зависимость решений от исходных данных. В условиях прикладных задач, когда граничные условия, как правило, известны с определенной погрешностью, эти решения могут сильно отличаться от истинных физических решений.

Одним из способов восстановления истинных физических решений может быть [1, 2] привлечение, когда это возможно практически, дополнительных, сверх необходимых для построения единственного решения задачи, данных измерений.

Здесь обсуждается решение “некорректной” задачи определения гармонической в бесконечной полосе функции, рассматриваемое как решение стационарной задачи теплопроводности. Принимается, что на одной грани полосы известны значения

температуры и теплового потока, а на другой грани никакие граничные условия не заданы. Дополнительно заданы значения температуры в некоторых точках полосы. Предполагается, что значения температуры измерены абсолютно точно, а значения теплового потока – с некоторой, поддающейся оценке, погрешностью. Изыскивается способ снижения влияния погрешности заданных граничных условий на решение задачи с использованием дополнительно заданных значений температуры.

1. Рассмотрим задачу определения стационарного распределения тепла в бесконечной полосе, описываемого гармоническими функциями.

1.1. Пусть реальный физический процесс (распространение тепла) в полосе $0 \leq y \leq H$, $-\infty < x < \infty$ точно описывается функцией $U_0(x, y)$

$$\begin{aligned} \Delta U_0 &= 0 \\ U_0(x, 0) &= f_0(x) \\ \left. \frac{\partial U_0}{\partial y} \right|_{y=0} &= g_0(x) \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно [3, 4]

$$U_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{f}_0 \operatorname{ch}\lambda y + \frac{\bar{g}_0}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda y \right] e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (2)$$

$$\bar{q}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{i\lambda x} dx, \quad q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

1.2. Пусть для определения функции $U_\varepsilon(x, y) \approx U_0(x, y)$ заданы следующие результаты измерений:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(x, 0) &= f_0(x) \\ \left. \frac{\partial U_\varepsilon(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} &= g_\varepsilon(x), \quad g_\varepsilon(x) = g_0(x) + E(x) \end{aligned} \quad (3)$$

где $E(x)$ – ошибка в результате измерений (погрешность), при этом задано $g_\varepsilon(x)$, а $g_0(x)$ и $E(x)$ неизвестны.

Полагая, что решение задачи существует, определим $U_\varepsilon(x, y)$ по формуле (2)

$$U_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{f}_0 \operatorname{ch}\lambda y + \frac{\bar{g}_\varepsilon}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda y \right] e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (4)$$

$$\bar{g}_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [g_0(x) + E(x)] e^{i\lambda x} dx = \bar{g}_0(\lambda) + \bar{E}(\lambda)$$

Соответственно, получим

$$U_\varepsilon(x, y) = U_0(x, y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{E}(\lambda)}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda y e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (5)$$

Отметим, что может быть вычислен $\bar{g}_\varepsilon(\lambda)$, а $\bar{g}_0(\lambda)$ и $\bar{E}(\lambda)$ неизвестны.

1.3. Полагаем теперь, что дополнительно заданы значения функции $U_0(x, y)$ в некоторых точках

$$U_0(x_{0m}, y_{0m}) = k_{0m}, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Для простоты положим $y_{0m} = y_0$.

Определим значения $U_\varepsilon(x_{0m}, y_0)$ по формуле (4)

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(x_{0m}, y_0) &= U_0(x_{0m}, y_0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{E}(\lambda)}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda y_0 e^{-i\lambda x_{0m}} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{f}_0 \operatorname{ch} \lambda y_0 + \frac{\bar{g}_\varepsilon}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda y_0 \right] \cdot e^{-i\lambda x_{0m}} d\lambda \end{aligned}$$

Составим разности

$$k_m = k_{0m} - U_\varepsilon(x_{0m}, y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{E}(\lambda)}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda y_0 \cdot e^{-i\lambda x_{0m}} d\lambda \quad (7)$$

Введем поправочную функцию

$$Q(x) = \sum_{m=1}^n k_m \cdot e^{-\gamma_m x^2} \quad (8)$$

Постоянные k_m определяются по (7), γ_m произвольны и выбираются из условий сходимости интегралов.

В дальнейшем положим $x_{0m} = x_0$.

Определим промежуточную гармоническую функцию $V(x, y)$

$$V(x, 0) = U_0(x, 0) = f_0(x)$$

$$V(x, y_0) = U_\varepsilon(x, y_0) + Q(x) = V_{y_0} \quad (9)$$

Следуя [3], определим $V(x, y)$ в полосе $0 < y < y_0$, $|x| < \infty$

$$V(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{f}_0(\lambda) \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda (y_0 - y)}{\operatorname{sh} \lambda y_0} + \bar{V}_{y_0}(\lambda) \cdot \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda y_0} \right] \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (10)$$

2. Определим уточненное решение задачи $U(x, y)$, принимая за уточненные граничные значения нормальной производной функции $U(x, y)$ на линии $y = 0$ значения

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} &= g_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y e^{-i\lambda x} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}(\lambda) \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda y} \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda \end{aligned} \quad (11)$$

тогда уточненные граничные условия и решение задачи будут

$$U(x,0) = f_0(x)$$

$$\left. \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (12)$$

$$U(x,y) = U_\varepsilon(x,y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(z) e^{i\lambda z} dz \left[\frac{\text{sh}\lambda y}{\text{sh}\lambda y_0} \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda \right] \quad (13)$$

Здесь под знаком интеграла стоят величины, которые могут быть вычислены по исходным данным.

Мы предполагаем все интегралы сходящимися в L_2 и все формальные выкладки законными.

Очевидно, что предполагаемое уточнение имеет место, если

$$|U(x,y) - U_0(x,y)| \leq |U_\varepsilon(x,y) - U_0(x,y)| \quad (14)$$

3. Проиллюстрируем описанные построения на численном примере. Пусть

$$U_0(x) = \frac{h-y}{(h-y)^2 + (a-x)^2} + \frac{h-y}{(h-y)^2 + (a+x)^2}$$

$$f_0(x) = \frac{h}{h^2 + (a-x)^2} + \frac{h}{h^2 + (a+x)^2}$$

$$g_0(x) = \frac{h^2 - (a-x)^2}{(h^2 + (a-x)^2)^2} + \frac{h^2 - (a+x)^2}{(h^2 + (a+x)^2)^2} \quad (15)$$

$$E(x) = \varepsilon \left[\frac{h_1^2 - (a_1-x)^2}{(h_1^2 + (a_1-x)^2)^2} + \frac{h_1^2 - (a_1+x)^2}{(h_1^2 + (a_1+x)^2)^2} \right]$$

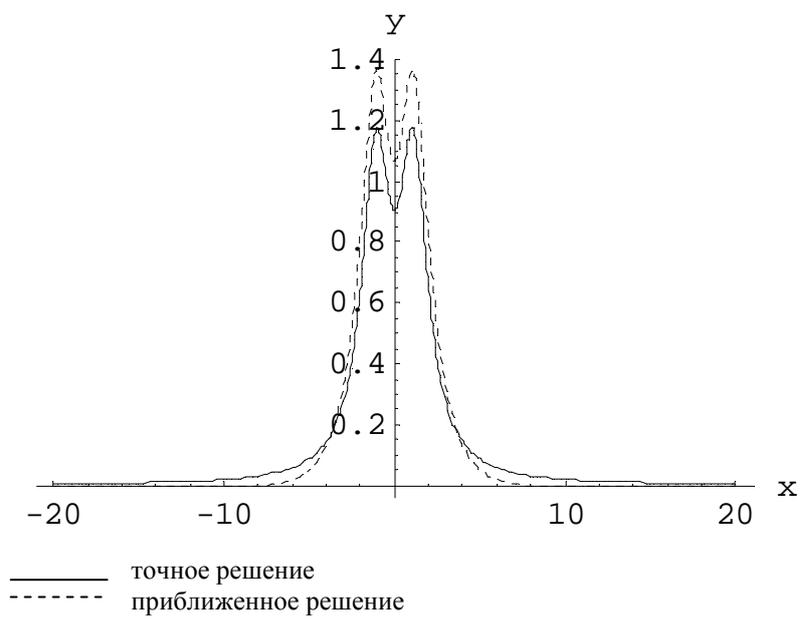
Вычислены значения функций $U_0(x,H), U_\varepsilon(x,H), U(x,H)$ по формулам (5, 13, 15) при следующих значениях, входящих в (15) постоянных.

$$H = 1 \quad a = 1,1 \quad z = 0,1$$

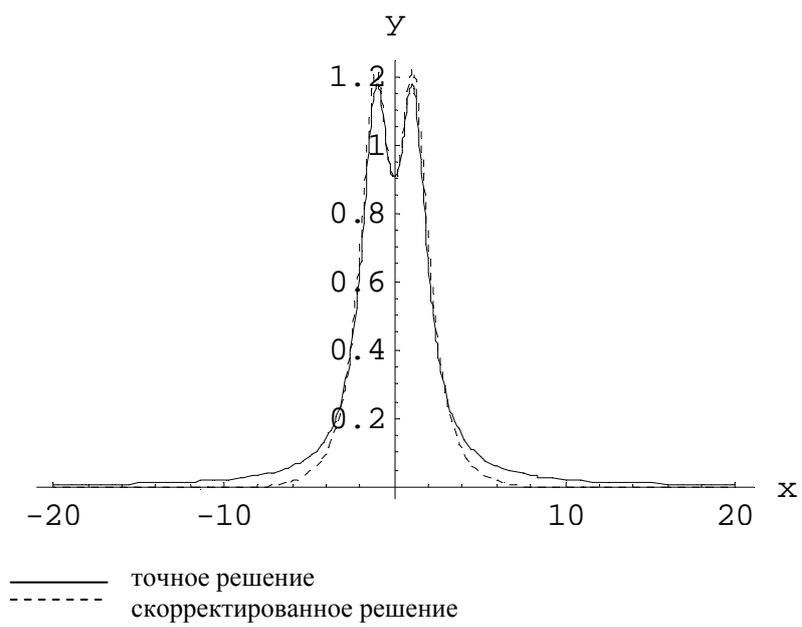
$$h = 2 \quad a_1 = 1.5 \quad \varepsilon = 0,3$$

$$h_1 = 3 \quad b = 0,75 \quad \gamma = 0.8$$

На графиках приведены значения приближенного и точного решений (фиг. 1). На фиг. 2 приведены значения точного и скорректированного решений. Можно отметить, что приближенное решение заметно отличается от точного решения как на близких, так и на дальних расстояниях. Скорректированное решение близко к точному решению на близких (от расположения точек с дополнительными данными) расстояниях и отличается от точного решения на дальних расстояниях. Таким образом, коррекция решения произошла на близких к точке с дополнительным данным расстояниях. Это видно также по данным, приведенным в таблице.



Фиг. 1



Фиг. 2

Таблица значений функций $U_0(x, H)$, $U(x, H)$, $U_\varepsilon(x, H)$

Координаты x	Точное решение $U_0(x, H)$	Скорректированное решение $U(x, H)$	Приближенное решение $U_\varepsilon(x, H)$
0,0	0.904977	0.897904	1.06629
2,0	0.646737	0.699876	0.811472
4,0	0.143293	0.10065	0.133097
6,0	0.059435	0.015281	0.019404
8,0	0.032503	-0.001206	-0.000979
10,0	0.020518	-0.004606	-0.004601

Приведенный численный пример показывает на возможность эффективного использования дополнительных данных для уточнения приближенных решений. Однако вопрос о том, при каких условиях имеет место уточнение решения, остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
2. Леттес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
4. Хачикян А.С. О гармонических и бигармонических задачах для уравнений с неклассическими граничными условиями. //Изв.НАН Армении. Механика. 2006. Т. 59. №4. С. 24-31.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
5.11.2007

Բովանդակություն

Содержание

Ալեքսանդր Գևորգի Բագդոեվ (Օննդյան 75-ամյակի առթիվ)	3	АЛЕКСАНДР ГЕОРГИЕВИЧ БАГДОЕВ (К 75-летию со дня рождения)
Դ.Ի. Բարձոկաս, Գ.Ի. Սֆիրիս ճարավ միջավայրերի համար Էլաստոդինամիկայի առաջին և երկրորդ հիմնարար խնդիրների որոշիչ հավասարումները	5	Bardzokas D.I., Sfyris G.I. THE STATE EQUATIONS FOR THE FIRST AND SECOND FUNDAMENTAL PROBLEMS OF ELASTODYNAMICS FOR A CRACKED MEDIUM.
Վ. Ս. Մակարյան, Գ. Ս. Չինգարյան Կոշտ ներդիրներով առաձգական հարթության և տարածության հարթ և առանցքային մետրիկ կոնտակտային խնդիրներ	16	Макарян В.С., Члинггарян Г.С. ПЛОСКАЯ И ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ
Գ. Ռ. Ղուլգազարյան, Զ.Լ. Սրապիոնյան Օրթոտրոպ առաձգական բաց զլանային թաղանթներից կազմված ազատ եզրային ծնիչներով բարակապատ կառուցվածքի ուստատումները	28	Гулгазарян Г.Р., Срапионян Дж. Л. КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ НЕЗАМКНУТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ
Տ. Վ. Զարարյան Օրթոտրոպ երկշերտի համար առաձգականության տեսության դինամիկական առաջին եզրային խնդրի մասին	41	Закарян Т. В. О ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ
Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան Երկու կենտրոնացված ուժերով ձողի կայունության մասին	51	Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. К УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ДВУМЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ
Վ.Գ. Սարգսյան, Ա. Ս. Խաչիկյան Ջերմահաղորդականության ոչ կոռեկտ խնդրի լուծման մասին՝ գերորոշված եռախառնակ սկզբային դեպքում	58	Саргсян В.Г., Хачикян А.С. О РЕШЕНИИ “НЕКОРРЕКТНОЙ” ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ