Ťμ

UEWUIFYU E X A H И K A MECHANICS

2008

2U8UUSUUF ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №2, 2008

Механика

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ Макарян В.С., Члингарян Г.С.

Ключевые слова: плоскость, трещина, включение, напряжение, точное решение, преобразование. Key words: plane, crack, inclusion, stress, exact solution, transformation.

Վ.Ս.Մակարյան, Գ.Ս. Չլինգարյան

Բաղադրյալ առաձգական հարթության լարվածային վիճակը, բաժանման եզրին ուղղահայաց ճաքի առկայությամբ

Դիտարկվում է միմյանց կոշտ միացված և տարբեր նյութերից կազմված երկու կիսահարթությունների հարթ խնդիրը։ Կիսահարթությունների միացման գծին ուղղահայաց կա ձաք, որը կարող է շարունակվել մի կիսահարթությունից մյուսը; Ենթադրվում է, որ ձաքի ափերին տրված են կամայական նորմալ տեղափոխություններ։ Այլ կերպ ասած ձաքը իր մեջ պարունակում է կոշտ ներդրակ։ Խնդրի լուծումը հանգեցվում է փաթեթի ինտեգրալ հավասարումներին, որոնք թույլ են տալիս բացահայտ տեսքի ձշգրիտ լուծումներ։ Ցույց է տրված, որ ձաքի ծայրակետերի մոտ լարումները ունեն լոգարիթմական եզակիություններ։

V.S.Makaryan, G.S. Chlingaryan

Planar deformation of compound elastic body with crack perpendicular to the attaching line

Consider a planar deformation of two half-surfaces of different medium, hardly attached to each other. There is a crack perpendicular to the attaching line and continued to the second half-surface. There are given some displacements and tangent stresses on the crack faces, in other word, there is a rigid inclusion. The task result in a integral equations of furl. The solutions of that equations, give the stresses and displacement near the crack. It is shown that stresses around the crack have a logarithmic singularity.

Рассматривается плоская задача для двух полуплоскостей из различных материалов, жестко прикрепленных друг к другу. Перпендикулярно к линии раздела материалов есть трещина, которая может продолжаться от одной полуплоскости в другую. Предполагается, что на берегах трещины заданы нормальные перемещения и касательные напряжения, иными словами: трещина содержит жесткое включение с трением. Задача сводится к интегральным уравнениям свертки, которые допускают точные решения в явном виде. Показано, что вблизи граничных точек трещины напряжения имеют логарифмические особенности.

Постановка и граничные условия задачи: пусть две полуплоскости из различных материалов жестко прикреплены друг к другу. В каждой полуплоскости есть трещины, которые перпендикулярны к линии раздела материалов (фиг.1). Внутри трещин расположены абсолютно жесткие включения. Между берегами трещин и жесткими включениями действуют заданные касательные усилия, которые, в частности, могут быть равными нулю. Отнесем индексы «1» к верхней полуплоскости, а индексы «2» – к нижней.

Сначала рассмотрим верхнюю полуплоскость, предположив, что на ее поверхности действуют сосредоточенные нормальная и касательная силы P и Q, соответственно, в точках t и z и симметричные относительно оси Oy (фиг. 2).

Граничные условия задачи запишем в следующем виде:

$$\tau_{xy}^{(1)}[x,y] = q_1(y)\vartheta(a-y) \qquad x = 0 \quad 0 < y < \infty,$$
⁽¹⁾

$$u^{(1)}[x, y] = \phi_1(y) \vartheta(a - y) \qquad x = 0 \quad 0 < y < \infty,$$
(2)

3

где

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\sigma_{y}^{(1)}\left[x,y\right] = P\delta\left(x-t\right) \qquad 0 < x < \infty \quad y = 0, \tag{4}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}[x, y] = Q\delta(x - z) \qquad 0 < x < \infty \quad y = 0,$$
 (5)

где $\phi(y)$ – заданная функция, а $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.



Фиг. 2

Построение общего решения задачи: решение задачи будем строить при помощи бигармонической функции напряжений Эйри, которую представим в виде суммы следующих двух интегралов Фурье:

$$\Phi_{1}[x, y] = \int_{0}^{\infty} \left[A(\lambda) + \lambda x B(\lambda) \right] e^{-\lambda x} \cos(\lambda y) d\lambda +$$
$$+ \int_{0}^{\infty} \left[C(\beta) + \beta y D(\beta) \right] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \quad 0 < x < \infty \quad 0 < y < \infty.$$
(6)

Здесь $A(\lambda), B(\lambda), C(\beta)$ и $D(\beta)$ – неизвестные функции интегрирования, которые должны определиться из граничных условий (1–5). Как известно [1,2], компоненты напряжений и перемещений в плоской задаче теории упругости выражаются через бигармоническую функцию Эйри (6) при помощи следующих соотношений:

$$\Delta^{2}\Phi[x, y] = 0 \qquad \Delta = \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} - \text{оператор Лапласа,}$$

$$\sigma_{x}^{(1)}[x, y] = \frac{\partial^{2}\Phi_{1}}{\partial y^{2}} \qquad \sigma_{y}^{(1)}[x, y] = \frac{\partial^{2}\Phi_{1}}{\partial x^{2}} \qquad \tau_{xy}^{(1)}[x, y] = -\frac{\partial^{2}\Phi_{1}}{\partial x\partial y}, \qquad (7)$$

$$u^{(1)}[x, y] = \frac{1}{E_{1}} \left\{ \int \frac{\partial^{2}\Phi_{1}}{\partial y^{2}} dx - v_{1} \frac{\partial\Phi_{1}}{\partial x} \right\} + u_{0},$$

$$v^{(1)}[x, y] = \frac{1}{E_{1}} \left\{ \int \frac{\partial^{2}\Phi_{1}}{\partial x^{2}} dy - v_{1} \frac{\partial\Phi_{1}}{\partial y} \right\} + v_{0}. \qquad (8)$$

Здесь E_1 и v_1 – соответственно, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Выразив при помощи соотношений (7–8) компоненты напряжений и перемещений через бигармоническую функцию (6), удовлетворив далее граничным условиям (1–5), на основании интегрального преобразования Фурье получим следующие выражения для неизвестных функций интегрирования:

$$A(\lambda) = -\frac{E_1}{\pi\lambda^2} \int_0^a \phi_1(s) \sin(\lambda s) ds - \frac{1-\nu_1}{\pi\lambda^2} \int_0^a q_1(s) \sin(\lambda s) ds,$$

$$B(\lambda) = -\frac{E_1}{\pi\lambda^2} \int_0^a \phi_1(s) \sin(\lambda s) ds + \frac{1+\nu_1}{\pi\lambda^2} \int_0^a q_1(s) \sin(\lambda s) ds,$$

$$C(\beta) = -\frac{2P\cos(\beta t)}{\pi\beta^2} + \frac{E_1}{\pi\beta} \int_0^a s \phi_1(s) e^{-\beta s} ds - \frac{1}{\pi\beta^2} \int_0^a q_1(s) e^{-\beta s} ds - \frac{1}{\pi\beta^2} \int_0^a q_1(s) e^{-\beta s} \left[2 + (1+\nu_1)\beta s\right] ds,$$

$$D(\beta) = -\frac{2}{\pi\beta^2} P\cos(\beta t) + \frac{2}{\pi\beta^2} Q\sin(\beta z) + \frac{E_1}{\pi\beta} \int_0^a s \phi_1(s) e^{-\beta s} ds - \frac{1}{\pi\beta^2} \int_0^a q_1(s) e^{-\beta s} ds - \frac{1}{\pi\beta^2} \int_0^a q_1(s) e^{-\beta s} \left[2 + (1+\nu_1)\beta s\right] ds,$$

5

$$-\frac{1}{\pi\beta^{2}}\int_{0}^{a}q_{1}(s)e^{-\beta s}\left[2+(1+v_{1})\beta s\right]ds \qquad \phi_{1,2}(y)=d\phi_{1,2}(y)/dy.$$
(9)

Напряжение $\sigma_x^{(1)}[x, y]$ на линии x = 0 будет определяться при помощи следующей формулы:

$$\sigma_{x}^{(1)}[x,y] = \frac{4P}{\pi} \frac{t^{2}y}{\left(t^{2}+y^{2}\right)^{2}} - \frac{4Q}{\pi} \frac{z^{3}}{\left(y^{2}+z^{2}\right)^{2}} + \frac{4E_{1}}{\pi} \int_{0}^{a} \frac{s^{2}y}{\left(s-y\right)\left(s+y\right)^{3}} \phi_{1}(s) ds + \frac{4}{\pi} \int_{0}^{a} \frac{s^{2}\left(s-v_{1}y\right)}{\left(s-y\right)\left(s+y\right)^{3}} q_{1}(s) ds ,$$

$$x = 0, \quad 0 < y < \infty.$$
(10)

Остановимся конкретно на частном случае клиновидного включения, представляющего, на наш взгляд, отдельный интерес (фиг. 3).





Положив $q_1(y) \equiv 0$, $\phi_1(y) = -y \, tg \, \alpha + c$, $\phi_1(y) = -tg \, \alpha$, из формулы (10) получим:

$$\sigma_{x}^{(1)}[x,y] = \frac{4}{\pi} P \frac{t^{2} y}{\left(t^{2} + y^{2}\right)^{2}} - \frac{4}{\pi} Q \frac{z^{3}}{\left(y^{2} + z^{2}\right)^{2}} - \frac{E_{1} \operatorname{tg} \alpha}{2\pi} \left(\ln \left| \frac{a - y}{a + y} \right| + 2 \frac{a(2a + y)}{\left(a + y\right)^{2}} \right), \qquad x = 0, \quad 0 < y < \infty, \tag{11}$$

откуда следует, что нормальные напряжения $\sigma_x[x, y]$, действующие на линии x = 0, имеют логарифмическую особенность в точке x = 0, y = a, а в точке x = 0, y = 0 ограничены [3]. Рассмотрим теперь случай, когда

$$q_1(y) = (a - y)q_0, \quad \varphi_1(y) = 0,$$
 (12)

т.е. трение между включением и берегами трещины задано в виде линейной функции. В этом случае формула (10) примет следующий вид:

$$\sigma_{x}^{(1)}[x,y] = \frac{4P}{\pi} \frac{t^{2}y}{\left(t^{2}+y^{2}\right)^{2}} - \frac{4Q}{\pi} \frac{z^{3}}{\left(y^{2}+z^{2}\right)^{2}} - \frac{4q_{0}a}{\pi} \ln y + \frac{q_{0}}{4\pi} \left(-\frac{4a(3(3+\nu_{1})y+2a(4+\nu_{1}))}{a+y} + (1-\nu_{1})(a-y)\ln(a-y)^{2} - \frac{16(2+\nu_{1})y\ln y + 2((7+\nu_{1})a+(17+7\nu_{1})y)\ln(a+y)}{a+y} \right).$$
(13)

Из формулы (13) легко заметить, что нормальные напряжения имеют логарифмические особенности в точке x = 0, y = 0, а в точке x = 0, y = a ограничены.

Производные перемещений $u^{(1)}[x, y]$ и $v^{(1)}[x, y]$ по x на линии y = 0 равны:

$$\frac{\partial u^{(1)}[x,y]}{\partial x} = \frac{(1-v_1)P}{E_1} \left(\delta(x+t) + \delta(x-t)\right) - \frac{2Q}{\pi E_1} \left(\frac{1}{z+x} + \frac{1}{z-x}\right) + \frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{s x^2}{\left(s^2 + x^2\right)^2} \phi_1(s) ds - \frac{4}{\pi E_1} \int_0^a \frac{s \left(s^2 - v_1 x^2\right)}{\left(s^2 + x^2\right)^2} q_1(s) ds,$$

$$y = 0, \ 0 < x < \infty, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}[x,y]}{\partial \mathbf{x}} = \frac{2P}{\pi E_1} \left(\frac{1}{x+t} + \frac{1}{x-t} \right) + \frac{(1-\mathbf{v}_1)Q}{E_1} \left[\delta(x+z) - \delta(x-z) \right] - \frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{s^2 x}{\left(s^2 + x^2\right)^2} \phi_1(s) ds + \frac{4}{\pi E_1} \int_0^a \frac{x \left(x^2 + \left(2 + \mathbf{v}_1\right)s^2\right)}{\left(x^2 + s^2\right)^2} q_1(s) ds,$$

$$y = 0, \ 0 < x < \infty.$$
(15)

Рассмотрим теперь нижнюю полуплоскость. Обозначив коэффициенты упругости через E_2 и v_2 , граничные условия запишем в следующем виде:

$$\tau_{xy}^{(2)}[x, y] = q_2(y) \vartheta(y-b) \quad u^{(2)}[x, y] = \varphi_2(y) \vartheta(y-b) \quad x = 0, \ -\infty < y < 0,$$
(16)

$$\sigma_{y}^{(2)}[x, y] = P\delta(x-t) \quad \tau_{xy}^{(2)}[x, y] = Q\delta(x-z) \quad 0 < x < \infty, \quad y = 0.$$
(17)

В этом случае для производных компонент перемещений получим следующие выражения:

$$\frac{\partial u^{(2)}[x,y]}{\partial x} = \frac{(1-v_2)P}{E_2} \Big(\delta(x+t) + \delta(x-t)\Big) + \frac{2Q}{\pi E_2} \Big(\frac{1}{x+z} - \frac{1}{x-z}\Big) + \frac{4}{\pi} \int_b^0 \frac{s x^2}{\left(s^2 + x^2\right)^2} \phi_2(s) ds + \frac{4}{\pi E_2} \int_b^0 \frac{s \left(s^2 - v_2 x^2\right)}{\left(s^2 + x^2\right)^2} q_2(s) ds ,$$
$$y = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

$$\frac{\partial v^{(2)}[x,y]}{\partial x} = -\frac{2P}{\pi E_2} \left(\frac{1}{x+t} + \frac{1}{x-t} \right) - \frac{(1-v_2)Q}{E_2} \left[\delta(x-z) - \delta(x+z) \right] -$$
(18)
$$-\frac{4}{\pi} \int_b^0 \frac{s^2 x}{\left(s^2 + x^2\right)^2} \phi_2(s) ds + \frac{4}{\pi E_2} \int_b^0 \frac{x \left(x^2 + (2+v_2)s^2\right)}{\left(x^2 + s^2\right)^2} q_2(s) ds ,$$
$$y = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

Удовлетворим условиям контакта на границе раздела материалов y=0

$$u^{(1)}[x,0] = u^{(2)}[x,0], \quad v^{(1)}[x,0] = v^{(2)}[x,0] \quad 0 \le x < \infty$$
(19)

Продифференцировав равенства (19) по x и подставив сюда значения из (14), (15) и (18), получим следующие сингулярные интегральные уравнения для определения контактных нормального и касательного напряжений, действующих на контактной линии y = 0:

$$\frac{\pi}{2}\mu P(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(t)}{x-t} dt + \kappa f_1(x) = 0 \qquad -\infty < x < \infty, \qquad (20)$$

$$\frac{\pi}{2}\mu Q(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{x-t} dt + \kappa f_2(x) = 0 \qquad -\infty < x < \infty, \qquad (21)$$

где введены следующие обозначения:

$$\sigma_{y}(x,y)\Big|_{y=0} \equiv P(x) \quad \tau_{xy}(x,y)\Big|_{y=0} \equiv Q(x), \tag{22}$$

$$\mu = \frac{E_2 (1 - \nu_1) - E_1 (1 - \nu_2)}{E_1 + E_2} \qquad \kappa = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \tag{23}$$

$$f_{1}(x) \equiv \int_{0}^{a} \frac{s x^{2}}{\left(s^{2} + x^{2}\right)^{2}} \phi_{1}(s) ds - \frac{1}{E_{1}} \int_{0}^{a} \frac{s\left(s^{2} - v_{1}x^{2}\right)}{\left(s^{2} + x^{2}\right)^{2}} q_{1}(s) ds - \int_{b}^{0} \frac{s x^{2}}{\left(s^{2} + x^{2}\right)^{2}} \phi_{2}(s) ds - \frac{1}{E_{2}} \int_{b}^{0} \frac{s\left(s^{2} - v_{2}x^{2}\right)}{\left(s^{2} + x^{2}\right)^{2}} q_{2}(s) ds , \qquad (24)$$

$$f_{2}(x) = -\int_{0}^{a} \frac{s^{2}x}{\left(s^{2} + x^{2}\right)^{2}} \phi_{1}(s) ds + \frac{1}{E_{1}} \int_{0}^{a} \frac{x\left(x^{2} + \left(2 + v_{1}\right)s^{2}\right)}{\left(x^{2} + s^{2}\right)^{2}} q_{1}(s) ds + \int_{b}^{0} \frac{s^{2}x}{\left(s^{2} + x^{2}\right)^{2}} \phi_{2}(s) ds - \frac{1}{E_{2}} \int_{b}^{0} \frac{x\left(x^{2} + \left(2 + v_{2}\right)s^{2}\right)}{\left(x^{2} + s^{2}\right)^{2}} q_{2}(s) ds .$$
(25)

Функции (22) на отрицательные значения аргумента продолжены следующим образом:

$$P(t) = P(-t), \qquad Q(t) = -Q(-t), \quad -\infty < t < \infty.$$
⁽²⁶⁾

Применив к этим уравнениям преобразование Фурье [4, 5], получим:

$$\frac{\pi}{2}\mu \overline{P}(\omega) + i\pi \overline{Q}(\omega)\operatorname{sign}(\omega) + \kappa \overline{f_1}(\omega) = 0, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (27)$$

$$\frac{\pi}{2}\mu \overline{Q}(\omega) + i\pi \overline{P}(\omega)\operatorname{sign}(\omega) + \kappa \overline{f}_{2}(\omega) = 0, \quad -\infty < \omega < \infty.$$
(28)

Здесь введено следующее обозначение:

$$\overline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} F(x) dx, \qquad (29)$$

а также учтено, что имеет место следующее известное соотношение [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega x} dx \int_{0}^{\infty} \frac{F(t)}{x-t} dt = -i\,\pi\,\overline{F}(\omega)\operatorname{sign}(\omega).$$

Решая систему уравнений (27–28) относительно $\overline{P}(\omega)$ и $\overline{Q}(\omega)$, получим:

$$\overline{P}(\omega) = -\frac{2}{\pi(\mu^2 + 4)} \left(\kappa \mu \overline{f_1}(\omega) - 2\kappa i \overline{f_2}(\omega) \operatorname{sign} \omega\right), \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (30)$$

$$\overline{Q}(\omega) = -\frac{2}{\pi(\mu^2 + 4)} \left(\kappa \mu \overline{f_2}(\omega) - 2\kappa i \overline{f_1}(\omega) \operatorname{sign} \omega\right), \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (31)$$

Подставив сюда значения из (29) и применив обратное преобразование Фурье, после некоторых несложных преобразований окончательно получим следующие формулы для определения контактных напряжений, действующих на линии раздела материалов *у* = 0

$$P(x) \equiv \sigma_{y}(x,0) = \frac{2\kappa}{\pi(\mu^{2}+4)} \left[\int_{0}^{a} \frac{s(s^{2}-(1+\mu)x^{2})}{(s^{2}+x^{2})^{2}} \phi_{1}(s) ds + \right]$$

_

9

$$+ \int_{b}^{0} \frac{s\left(s^{2} - x^{2}\left(1 - \mu\right)\right)}{\left(s^{2} + x^{2}\right)^{2}} \phi_{2}(s) ds - \int_{0}^{a} \frac{s\left[\left(3 - \mu + \nu_{1}\right)s^{2} + \left(1 - \left(1 - \mu\right)\nu_{1}\right)x^{2}\right]}{E_{1}\left(s^{2} + x^{2}\right)^{2}} q_{1}(s) ds - \\ - \int_{b}^{0} \frac{s\left[\left(3 - \mu + \nu_{2}\right)s^{2} + \left(1 - \left(1 - \mu\right)\nu_{2}\right)x^{2}\right]}{E_{2}\left(s^{2} + x^{2}\right)^{2}} q_{2}(s) ds \right], \qquad (32)$$

$$Q(x) = \tau_{xy}(x,0) = \frac{2\kappa}{\pi(\mu^2 + 4)} \left[\int_{0}^{a} \frac{x(x^2 - (1-\mu)s^2)}{(s^2 + x^2)^2} \phi_1(s) ds + \right]$$

$$+ \int_{b}^{0} \frac{x(x^{2} - (1 + \mu)s^{2})}{(s^{2} + x^{2})^{2}} \phi_{2}(s) ds - \int_{0}^{a} \frac{x[(1 + \mu - \nu_{1})x^{2} + (3 + \nu_{1} + (2 + \nu_{1})\mu)s^{2}]}{E_{1}(s^{2} + x^{2})^{2}} q_{1}(s) ds + \\ + \int_{b}^{0} \frac{x[(1 + \mu - \nu_{2})x^{2} + (3 + \nu_{2} + (2 + \nu_{2})\mu)s^{2}]}{E_{1}(s^{2} + x^{2})^{2}} q_{2}(s) ds \bigg].$$
(33)

Остановимся конкретно на частном случае клиновидного включения (фиг.3), положив:

$$q_1(y) = q_2(y) \equiv 0$$
, $\phi_1(y) = -y \ \text{tg} \alpha + c$, $\phi_2(y) = y \ \text{tg} \beta + c$, (34)

$$\phi_1(y) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \phi_2(y) = \operatorname{tg} \beta, \quad c = a \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \beta.$$
 (35)

В этом случае формулы (32) и (33) примут следующий вид:

$$\sigma_{y}(x,y) = \frac{\kappa \operatorname{tg}(\alpha)}{\pi(\mu^{2}+4)} \left(\frac{(2+\mu)a^{2}}{a^{2}+x^{2}} + \ln\left(\frac{x^{2}}{a^{2}+x^{2}}\right) \right) + \frac{\kappa \operatorname{tg}\beta}{\pi(\mu^{2}+4)} \left(\frac{(2-\mu)b^{2}}{b^{2}+x^{2}} + \ln\left(\frac{x^{2}}{b^{2}+x^{2}}\right) \right), \quad y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (36)$$
$$\tau_{xy}(x,y) = -\frac{\kappa}{\pi(\mu^{2}+4)} \left(\operatorname{tg}\alpha \left[\frac{(2-\mu)ax}{a^{2}+x^{2}} + \mu \operatorname{arctg}(a/x) \right] + \operatorname{tg}\beta \left[\frac{(2+\mu)bx}{b^{2}+x^{2}} - \mu \operatorname{arctg}(b/x) \right] \right), \quad y = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (37)$$

Как видно из формул (36–37), контактные нормальные напряжения, действующие на линии y = 0 (линия раздела материалов), имеют логарифмические особенности. Что касается контактных тангенциальных напряжений, то они всюду ограничены.

При рассмотрении случая, когда:

$$q_1(y) = (a - y)q_1, \ q_2(y) = (y - b)q_2, \ \phi_1(y) = \phi_2(y) = 0,$$
 (38)

легко выясняется, что как нормальные, так и тангенциальные контактные



напряжения сохраняют логарифмические особенности в точке x = 0, y = 0.

В дополнение к данной задаче, рассмотрим случай крестообразного включения (фиг. 4). В силу симметрии относительно осей Ox и Oy, будем рассматривать только четверть-плоскость $0 < x < \infty$ и $0 < y < \infty$. Тогда бигармоническую функцию напряжений можно представить в виде (6).

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\tau_{xy}[x, y] = q_1(y) \vartheta(a - y) \qquad x = 0, \qquad 0 < y < \infty, \tag{39}$$

$$\tau_{xy}[x, y] = q_2(y)\vartheta(b-y) \qquad y = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{40}$$

$$u[x, y] = \varphi_1(y) \vartheta(a - y) \qquad x = 0, \quad 0 < y < \infty, \tag{41}$$

$$u[x, y] = \varphi_2(y) \vartheta(b - y) \qquad y = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

$$(42)$$

Удовлетворив граничным условиям (39–42), при помощи соотношений (6–8) находим неизвестные функции интегрирования в следующем виде:

$$A(\lambda) = -\frac{1}{\pi\lambda^2} \left((1-\nu) \int_0^a q_1(s) \sin(\lambda s) ds + E \int_0^a \phi_1(s) \sin(\lambda s) ds \right),$$

$$B(\lambda) = -\frac{1}{\pi\lambda^2} \left(-(1+\nu) \int_0^a q_1(s) \sin(\lambda s) ds + E \int_0^a \phi_1(s) \sin(\lambda s) ds \right),$$

$$C(\beta) = -\frac{1}{\pi\beta^2} \left((1-\nu) \int_0^b q_2(s) \sin(\lambda s) ds + E \int_0^b \phi_2(s) \sin(\lambda s) ds \right),$$

$$D(\beta) = -\frac{1}{\pi\beta^2} \left(-(1+\nu) \int_0^b q_2(s) \sin(\lambda s) ds + E \int_0^b \phi_2(s) \sin(\lambda s) ds \right).$$

Напряжение $\sigma_x[x, y]$ на линии x = 0 будет определяться при помощи следующей формулы:

$$\sigma_{x}[x, y] = \frac{1 - \nu}{2\pi} \int_{0}^{a} \left(\frac{1}{s - y} + \frac{1}{s + y} \right) q_{1}(s) ds + \frac{E}{2\pi} \int_{0}^{a} \left(\frac{1}{s - y} + \frac{1}{s + y} \right) \phi_{1}(s) ds - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{b} \frac{s((1 - \nu)y^{2} + (3 + \nu)s^{2})}{(s^{2} + y^{2})^{2}} q_{2}(s) ds - \frac{E}{\pi} \int_{0}^{b} \frac{s(y^{2} - s^{2})}{(s^{2} + y^{2})^{2}} \phi_{2}(s) ds$$

$$x = 0, \quad 0 < y < \infty.$$
(43)

Анализ формулы (43) вполне аналогичен приведенному выше анализу. В заключение заметим, что во всех рассмотренных выше случаях, включения могут быть расположены произвольным образом по какому-либо контуру Γ . В этом случае интегралы, распространенные на отрезках [0; a], [0; b], должны быть заменены на интегралы, распространенные по контуру Γ .

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Новожилов В.В. Теория упругости. Судпромгиз. М.: 1958. 370с.
- 2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
- 3. Макарян В. С., Саркисян В.Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990. Т.43. №2. С.3–11.
- 4. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 279с.
- 5. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295с.
- 6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды в 3-х т. М.: Физматлит, 2003.
- 7. Макарян В.С. Поведение трещины под сжимающей нагрузкой.// Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №2. С.144-152.
- 8. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спец.курс. М.: Наука, 1965. 327с.
- 9. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1984.
- 10. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255с.
- 11. Григорян Э.Х. Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости./ Межвуз. сб. науч. тр. Механика. Ереван: Изд. ЕГУ, 1987. №6.

Институт механики НАН Армении Поступила в редакцию 19.11.2007

2UBUUSUUF ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №2, 2008

Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ Багдасарян З.Р.

Ключевые слова: изгиб пластины, прогиб, система дифференциальных уравнений, перерезывающие усилие.

Keywords: a bending of a plate, deflection, differential equations, shear stress resultant.

Չ.Ռ.Բաղդասարյան

Ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ ուղղանկյուն սալի ծռման մի խնդրի մասին

Ներկայացվող աշխատանքում, Կիրխհոֆի դասական տեսության և Համբարձումյանի Ճշգրտված տեսության հիման վրա դիտարկված են ուղղանկյուն սալի ծռման խնդիրներ։

Ցույց է տրված, որ երկու եզրերում հոդակապորեն ամրակցված, իսկ մյուս երկուսում ազատ հենված սալի պարագայում՝ Կիրխհոֆի վարկածի Ճշտությունը սալի հարաբերական հաստության առհամարհումն է մեկի նկատմամբ։

Ստացվաց են բանաձներ Ճկվածքի, կտրող և ընդհանրացված կտրող ուժերի համար։

Տարբեր մասնավոր դեպքերի համար ստացված են մաքսիմալ Ճկվածքի և կտրող ուժերի տեսքերը։

Z.R.Baghdasaryan

The Problem of Bending of Rectangular Plate Taking into Account the Transversal Shear

In this work the problems on the bending of rectangular plate on the basis of classical theory by Kirchhoff and Ambartsumyan's theory is observed. It is shown, that when the plate is leaned free on two opposite sides, and on two others is hinge joint, the exactness of Kirchhoff's hypothesis is the neglecting of a related thickness in comparison with unit. Formulas for a deflection and also for shear stress resultant and generalized shear stress resultant are received. In different private cases expressions of maximal deflection and shear stress resultant are received.

В настоящей работе на основе классической теории Кирхгофа и уточненной теории Амбарцумяна рассмотрены задачи изгиба прямоугольной пластинки.

Показано, что в случае, когда пластинка по двум противоположным сторонам оперта свободно, а по двум другим закреплена шарнирно, точность гипотезы Кирхгофа есть пренебрежение относительной толщиной по сравнению с единицей.

Получены формулы для прогиба, а также для перерезывающих и обобщенно перерезывающих усилий.

В разных частных случаях получены выражения максимального прогиба и перерезывающих усилий.

1. На основе классической теории пластин [1] рассматривается шарнирно закрепленная по всему контуру тонкая прямоугольная пластинка с размерами a, b и толшиной 2h.

Прямоугольная декартовая система координат *Охуг* выбрана так (фиг.1), что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью *Оху*, а ось *Ог* нормальна к этой плоскости ($0 \le x \le a; -0.5b \le y \le 0.5b; -h \le z \le h$).

Предполагается, что пластинка изгибается под действием произвольной, симметрично распределенной относительно оси Ox, нормальной нагрузки q(x, y).



13

Фиг.1

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки и граничные условия в рассматриваемом случае соответственно имеют вид [1]:

$$\Delta\Delta W(x,y) = -\frac{q(x,y)}{D},$$
(1.1)

$$W(x, y) = 0, \ \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{при } x = 0, \ x = a,$$
(1.2)

$$W(x, y) = 0$$
, $\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} = 0$ при $y = \pm 0.5b$, (1.3)

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \ D = \frac{2Eh^3}{3(1-v^2)} = \frac{4Gh^3}{3(1-v)},$$

W(*x*, *y*) – прогиб пластинки, *E* – модуль Юнга, *v* – коэффициент Пуассона, *G* – модуль сдвига.

Следуя М.Леви, решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \lambda_n x, \qquad (1.4)$$

где $f_n(y)$ – неизвестные функции, а $\lambda_n = \pi n / a \ (n = 1, 2, ...)$.

Далее, разлагая функцию q(x, y) в ряд Фурье

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y) \sin \lambda_n x$$
(1.5)

и удовлетворяя граничным условиям (1.2) и (1.3), получим:

$$W(x, y) = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 \operatorname{cha}_n} \{ [(1 + \alpha_n \operatorname{tha}_n) \operatorname{ch}\lambda_n y - \lambda_n y \operatorname{sh}\lambda_n y]_0^{\frac{b}{2}} \operatorname{sh}\lambda_n (t - \frac{b}{2}) q_n(t) dt - \lambda_n \operatorname{ch}\lambda_n y \int_0^{\frac{b}{2}} (t - \frac{b}{2}) \operatorname{ch}\lambda_n (t - \frac{b}{2}) q_n(t) dt + \operatorname{cha}_n \int_0^y [\lambda_n (t - y) \operatorname{ch}\lambda_n (t - y) - \operatorname{sh}\lambda_n (t - y)] q_n(t) dt \} \operatorname{sin}\lambda_n x , \qquad (1.6)$$

где $\alpha_n = \frac{b}{2}\lambda_n \quad (n = 1, 2, \dots).$

Из формулы (1.6) для максимального прогиба имеем

$$W(a/2,0) = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{3} ch\alpha_n} \int_{0}^{\frac{1}{2}} [(1 + \alpha_n th\alpha_n) sh\lambda_n (t - b/2) - \lambda_n (t - b/2) ch\lambda_n (t - b/2)] q_n(t) dt .$$
(1.6)

В рассмотренном случае перерезывающие усилия $N_x(x, y)$, $N_y(x, y)$ и обобщенные перерезывающие усилия $\widetilde{N}_x(x, y)$, $\widetilde{N}_y(x, y)$ выражаются следующими формулами:

h

$$\begin{split} N_{x}(x,y) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{sh}\lambda_{n}y}{\mathrm{ch}\alpha_{n}} \int_{0}^{\frac{b}{2}} \mathrm{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2})q_{n}(t)dt + \int_{0}^{y} \mathrm{ch}\lambda_{n}(t-y)q_{n}(t)dt \right] \mathrm{sin}\,\lambda_{n}x \quad (1.7) \\ N_{y}(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{ch}\lambda_{n}y}{\mathrm{ch}\alpha_{n}} \int_{0}^{\frac{b}{2}} \mathrm{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2})q_{n}(t)dt - \int_{0}^{y} \mathrm{sh}\lambda_{n}(t-y)q_{n}(t)dt \right] \mathrm{cos}\,\lambda_{n}x \,, (1.8) \\ \tilde{N}_{x}(x,y) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}\alpha_{n}} \left\{ (1-v)\mathrm{sh}\lambda_{n}y \int_{0}^{\frac{b}{2}} \left[\lambda_{n}(t-\frac{b}{2})\mathrm{ch}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2}) - (1+\alpha_{n}\,\mathrm{th}\alpha_{n})\mathrm{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2}) \right]q_{n}(t)dt + \left[(1-v)\lambda_{n}y\mathrm{ch}\lambda_{n}y - (1+v)\mathrm{sh}\lambda_{n}y \right]_{0}^{\frac{b}{2}} \mathrm{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2})q_{n}(t)dt + \mathrm{ch}\alpha_{n}\int_{0}^{y} \left[(1-v)\lambda_{n}(t-y)\mathrm{sh}\lambda_{n}(t-y) - (2\mathrm{ch}\lambda_{n}(t-y)) \right]q_{n}(t)dt \right] \mathrm{sin}\,\lambda_{n}x \,, (1.9) \\ \tilde{N}_{y}(x,y) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}\alpha_{n}} \left\{ (1-v)\mathrm{ch}\lambda_{n}y \int_{0}^{\frac{b}{2}} \left[\lambda_{n}(t-\frac{b}{2})\mathrm{ch}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2}) - (1+\alpha_{n}\,\mathrm{th}\alpha_{n})\mathrm{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2}) \right]q_{n}(t)dt + \left[(1-v)\lambda_{n}y\mathrm{ch}\lambda_{n}y + (1-v)\mathrm{ch}\lambda_{n}y \mathrm{sh}\lambda_{n}y + (1-v)\mathrm{ch}\lambda_{n}y \mathrm{sh}\lambda_{n}y \right] \right] \mathrm{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2}) \mathrm{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2}) \mathrm{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2}) + (1+\alpha_{n}\,\mathrm{th}\alpha_{n})\mathrm{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2}) \mathrm{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2}) \mathrm{sh}\lambda_{n}(t-y) \mathrm{sh}\lambda_{n}(t-y)$$

$$+(1-\nu)\lambda_n(t-y)\mathrm{ch}\lambda_n(t-y)]q_n(t)dt\}\cos\lambda_n x.$$
(1.10)

Отметим, что сосредоточенные реакции в угловых точках пластинки по абсолютной величине равны, причем

$$R(0,\frac{b}{2}) = (1-v)\sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\frac{b}{2}} \left[1+t-\frac{b}{2}-th^{2}\alpha_{n}+(t-\frac{b}{2})th\alpha_{n}cth\lambda_{n}(t-\frac{b}{2})\right]sh\lambda_{n}(t-\frac{b}{2})q_{n}(t)dt$$

2. На основе уточненной теории С.А.Амбарцумяна [2] система дифференциальных уравнений изгиба рассмотренной пластинки и граничные условия шарнирного закрепления соответственно имеют вид [3]:

$$\begin{cases} \Delta \Phi = \frac{3}{4h}q(x, y), \\ \Delta W - \frac{8\gamma h^3}{3(1-\nu)D}\Delta \Phi + \frac{4h}{3D}\Phi = 0, \\ \Delta \Psi - \frac{1}{\gamma h^2}\Psi = 0, \end{cases}$$
(2.1)

15

$$W = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{2\gamma}{G} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$
(2.2)

$$\Pi p u \quad x = 0, \ x = a;$$

$$W = 0, \ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{2\gamma}{G} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0, \ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$
(2.3)
npu $y = \pm 0,5b$,

где $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ – искомые функции, $\gamma = 2/5$ по теории Амбарцумяна и $\gamma = 1/3$ по теории Рейснера-Генки-Миндлина, по варианту Васильева [4].

Решение системы дифференциальных уравнений (2.1) ищем в виде

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \lambda_n x, \Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y) \sin \lambda_n x,$$
$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y) \cos \lambda_n y, \qquad (2.4)$$

где $f_n(y)$, $g_n(y)$ и $p_n(y)$ (n = 1, 2, ...) – неизвестные функции.

Подставляя функции (2.4) в систему (2.1), решая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $f_n(y)$, $g_n(y)$ и $p_n(y)$ (n = 1, 2, ...) и представляя q(x, y) в виде ряда (1.5), получим

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n e^{-\lambda_n y} + B_n e^{\lambda_n y} + \frac{2hy}{3\lambda_n D} (C_n e^{-\lambda_n y} - D_n e^{\lambda_n y}) + \frac{1}{2\lambda_n^{3} D} \int_0^y [\lambda_n (t-y) ch\lambda_n (t-y) - (1 + \frac{4\xi^2}{1-\nu}) sh\lambda_n (t-y)] q_n(t) dt\} \sin \lambda_n x, \quad (2.5)$$

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n e^{-\lambda_n y} + D_n e^{\lambda_n y} - \frac{3}{4\lambda_n h} \int_0^y \mathrm{sh}\lambda_n (t-y) q_n(t) dt \right] \sin \lambda_n x \quad (2.6)$$

$$\Psi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n e^{-\lambda_n \mu_n y} + F_n e^{\lambda_n \mu_n y} \right) \cos \lambda_n x \,. \tag{2.7}$$

где

$$\mu_n = \frac{\sqrt{1 + {\xi_n}^2}}{{\xi_n}}, \quad \xi_n = \sqrt{\gamma} \lambda_n h, \qquad (2.8)$$

а произвольные постоянные A_n , B_n , C_n , D_n , E_n и F_n подлежат определению.

Учитывая, что нагрузка симметрично распределена относительно оси Ox, заменяя граничные условия при y = -0.5b условиями симметрии,

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial^3 W(x,y)}{\partial y^3} = 0, \ \Psi(x,y) = 0 \ \text{при } y = 0$$
(2.9)

и подставляя (2.5) и (2.7) в (2.9), получим

$$A_n = B_n, \ C_n = D_n, \ E_n = -F_n.$$
 (2.10)

С учетом (2.10) для функций W(x, y), $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ имеем

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2A_n \operatorname{ch}\lambda_n y - \frac{4hy}{3\lambda_n D} C_n \operatorname{sh}\lambda_n y + \frac{1}{2\lambda_n^{3} D} \int_0^y [\lambda_n(t-y) \operatorname{ch}\lambda_n(t-y) - (1 + \frac{4\xi^2}{1-y}) \operatorname{sh}\lambda_n(t-y)] q_n(t) dt \right\} \sin \lambda_n x, \qquad (2.5')$$

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2C_n \operatorname{ch}\lambda_n y - \frac{3}{4\lambda_n h} \int_0^y \operatorname{sh}\lambda_n (t-y)q_n(t)dt \right] \sin \lambda_n x , \qquad (2.6')$$

$$\Psi(x, y) = -2\sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sh} \lambda_n \mu_n y \cos \lambda_n x. \qquad (2.7')$$

Используя также граничные условия (2.3) при y = 0.5b, получим

$$W(x,y) = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 \operatorname{cha}_n} \{ [(1+\alpha_n \operatorname{tha}_n + \frac{4\xi_n^2}{1-\nu}) \operatorname{ch}_n y - \lambda_n y \operatorname{sh}_n y] \int_0^{\frac{b}{2}} \operatorname{sh}_n (t-\frac{b}{2}) q_n(t) dt - \lambda_n \operatorname{ch}_n y \int_0^{\frac{b}{2}} (t-\frac{b}{2}) \operatorname{ch}_n (t-\frac{b}{2}) q_n(t) dt + \operatorname{cha}_n \int_0^y [\lambda_n(t-y) \operatorname{ch}_n (t-y) - (1+\frac{4\xi_n^2}{1-\nu}) \operatorname{sh}_n (t-y)] q_n(t) dt \} \sin \lambda_n x , (2.11)$$

$$\Phi(x,y) = \frac{3}{4h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{ch}\lambda_n y}{\mathrm{ch}\alpha_n} \int_0^{\overline{2}} \mathrm{sh}\lambda_n (t - \frac{b}{2}) q_n(t) dt - \int_0^y \mathrm{sh}\lambda_n (t - y) q_n(t) dt \right] \sin \lambda_n x , (2.12)$$

$$\Psi(x,y) = 0 \qquad (2.13)$$

Из формулы (2.11) для максимального прогиба имеем

$$W(\frac{a}{2},0) = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{-3} ch\alpha_n} \int_{0}^{\frac{b}{2}} [(1+\alpha_n th\alpha_n + \frac{4\xi_n^{-2}}{1-\nu}) sh\lambda_n (t-\frac{b}{2}) - \lambda_n (t-\frac{b}{2}) ch\lambda_n (t-\frac{b}{2})] q_n(t) dt .$$
(2.14)

Далее, вычисляя перерезывающие усилия $N_x(x,y)$, $N_y(x,y)$, убеждаемся, что выражения этих величин совпадают с соответствующими выражениями (1.7) и (1.8), полученные на основе классической теории пластин.

3. Предположим, что рассмотренная выше пластинка шарнирно закреплена по краям x = 0, x = a и свободно оперта по краям $y = \pm 0,5b$.

Подставляя (2.5')-(2.8') в граничные условия

$$W = 0, \ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\gamma}{G} \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{2\gamma}{G} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad \text{при } y = \frac{b}{2}$$
(3.1)

для коэффициентов A_n , B_n , C_n , D_n , E_n и F_n (n = 1, 2, ...) получим

17

$$A_{n} = B_{n} = \frac{1}{4\lambda_{n}^{3}Dch\alpha_{n}} \left\{ \frac{\alpha_{n}sh\alpha_{n}}{\eta_{n}} \left((1-\nu)\lambda_{n}\xi_{n}\sqrt{1+\xi_{n}^{2}} \left(G_{n}sh\alpha_{n}+Q_{n}ch\alpha_{n}\right) + \left[4\xi_{n}^{3}\sqrt{1+\xi_{n}^{2}}sh\alpha_{n}-(1+2\xi_{n}^{2})^{2}ch\alpha_{n}th\alpha_{n}\mu_{n}\right]F_{n}\right) + \frac{4\xi_{n}^{2}}{1-\nu}F_{n} + \lambda_{n}G_{n}\right\}, (3.2)$$

$$C_{n} = D_{n} = \frac{3}{8\lambda_{n}h} \cdot \frac{1}{\eta_{n}} \left((1-\nu)\lambda_{n}\xi_{n}\sqrt{1+\xi_{n}^{2}} \left(G_{n}sh\alpha_{n}+Q_{n}ch\alpha_{n}\right) + \left[4\xi_{n}^{3}\sqrt{1+\xi_{n}^{2}}sh\alpha_{n}-(1+2\xi_{n}^{2})^{2}ch\alpha_{n}th\alpha_{n}\mu_{n}\right]F_{n}\right), (3.3)$$

$$E_n = -F_n = \frac{3(1-\nu)(1+2\xi_n^2)}{16\lambda_n h ch\alpha_n \mu_n} \cdot \frac{\lambda_n (G_n sh\alpha_n + Q_n ch\alpha_n) ch\alpha_n - (\alpha_n + sh\alpha_n ch\alpha_n) F_n}{\eta_n}, (3.4)$$

где

$$\eta_{n} = [(1-\nu)\alpha_{n} + (1-\nu+4\xi_{n}^{2}) \operatorname{sh}\alpha_{n} \operatorname{ch}\alpha_{n}]\xi_{n}\sqrt{1+\xi_{n}^{2}} - (1+2\xi_{n}^{2})^{2} \operatorname{ch}^{2}\alpha_{n} \operatorname{th}\alpha_{n}\mu_{n} + F_{n} = \int_{0}^{b/2} \operatorname{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2})q_{n}(t)dt ,$$
$$G_{n} = \frac{1}{\lambda_{n}}\int_{0}^{b/2} [\operatorname{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2}) - \lambda_{n}(t-\frac{b}{2})\operatorname{ch}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2})]q_{n}(t)dt ,$$
$$Q_{n} = -\int_{0}^{b/2} (t-\frac{b}{2})\operatorname{sh}\lambda_{n}(t-\frac{b}{2})q_{n}(t)dt .$$

В рассмотренном случае для максимального прогиба имеем

$$W(\frac{a}{2},0) = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{3} ch\alpha_n} \left\{ \frac{\alpha_n sh\alpha_n}{\eta_n} \left((1-\nu)\lambda_n \xi_n \sqrt{1+\xi_n^{2}} (G_n sh\alpha_n + Q_n ch\alpha_n) + \left[4\xi_n^{3} \sqrt{1+\xi_n^{2}} sh\alpha_n - (1+2\xi_n^{2})^2 ch\alpha_n th\alpha_n \mu_n \right] F_n \right\} + \frac{4\xi_n^{2}}{1-\nu} F_n + \lambda_n G_n \right\}.$$
(3.5)

В большинстве задач результаты теории Кирхгофа получаются из уточненной теории пренебрежением членами, содержащими квадрат относительной толщины (например, когда все четыре стороны пластинки шарнирно закреплены). В рассматриваемой задаче результаты теории Кирхгофа получаются пренебрежением членами, содержащими относительную толщину.

Следовательно, в рассматриваемой задаче, как и в задаче [2,5], точность гипотезы Кирхгофа есть пренебрежение относительной толщиной.

Для перерезывающих усилий $N_x(x, y)$, $N_y(x, y)$ получим

$$N_{x}(x,y) = \frac{4h}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{4h} \int_{0}^{y} \operatorname{ch}\lambda_{n}(t-y)q_{n}(t)dt + 2\lambda_{n}C_{n}\operatorname{sh}\lambda_{n}y - 2\lambda_{n}E_{n}\operatorname{sh}\lambda_{n}\mu_{n}y\right] \sin\lambda_{n}x, (3.6)$$

$$N_{y}(x,y) = \frac{4h}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{4h} \int_{0}^{y} \operatorname{sh}\lambda_{n}(t-y)q_{n}(t)dt - 2\lambda_{n}C_{n}\operatorname{ch}\lambda_{n}y + +2\lambda_{n}\mu_{n}E_{n}\operatorname{ch}\lambda_{n}\mu_{n}y\right] \cos\lambda_{n}x.$$

$$(3.7)$$

Из полученных формул видно, что выражения перерезывающих усилий существенно отличаются от соответствующих выражений этих усилий, полученных на основе классической теории.

4. В частности, принимая, что нагрузка задана в виде

$$q(x, y) = q_1(y) \sin \lambda_1 x \tag{4.1}$$

т.е. в представлении нагрузки (1.5), оставляя только первый член, для выражений максимального прогиба (1.6'), (2.14') и (3.5) и перерезывающих усилий, соответственно, получим

$$W(\frac{a}{2},0) = \frac{1}{2D} \frac{1}{\lambda_1^3 ch\alpha_1} \int_0^{b/2} [\lambda_1(t-\frac{b}{2})ch\lambda_1(t-\frac{b}{2}) - (1+\alpha_1 th\alpha_1)sh\lambda_1(t-\frac{b}{2})]q_1(t)dt, \quad (4.2)$$
$$W(\frac{a}{2},0) = \frac{1}{2D} \frac{1}{\lambda_1^3 ch\alpha_1} \int_0^{b/2} [(1+\alpha_1 th\alpha_1 + \frac{4\xi_1^2}{1-\nu})sh\lambda_1(t-\frac{b}{2}) - \lambda_1(t-\frac{b}{2})ch\lambda_1(t-\frac{b}{2})]q_1(t)dt, \quad (4.3)$$

$$W(a/2,0) = \frac{1}{2D} \frac{1}{\lambda_1^3 ch\alpha_1} \left\{ \frac{\alpha_1 sh\alpha_1}{\eta_1} \left((1-\nu)\lambda_1 \xi_1 \sqrt{1+\xi_1^2} (G_1 sh\alpha_1 + Q_1 ch\alpha_1) + \frac{\alpha_1 sh\alpha_1}{\eta_1} \right) \right\}$$

+
$$\left[4\xi_{1}^{3}\sqrt{1+\xi_{1}^{2}}\operatorname{sh}\alpha_{1}-(1+2\xi_{1}^{2})^{2}\operatorname{ch}\alpha_{1}\operatorname{th}\alpha_{1}\mu_{1}\right]F_{1}\right)+\frac{4\xi_{1}^{2}}{1-\nu}F_{1}+\lambda_{1}G_{1}\right\},$$
 (4.4)

$$N_{x}(x,y) = \frac{4h}{3} \left[\frac{3}{4h} \int_{0}^{y} ch\lambda_{1}(t-y)q_{1}(t)dt + 2\lambda_{1}C_{1}sh\lambda_{1}y - 2\lambda_{1}E_{1}sh\lambda_{1}\mu_{1}y\right]sin\lambda_{1}x, \quad (4.5)$$

$$N_{y}(x,y) = \frac{4h}{3} \left[\frac{3}{4h} \int_{0}^{y} \mathrm{sh}\lambda_{1}(t-y)q_{1}(t)dt - 2\lambda_{1}C_{1}\mathrm{ch}\lambda_{1}y + 2\lambda_{1}\mu_{1}E_{1}\mathrm{ch}\lambda_{1}\mu_{1}y\right] \cos\lambda_{1}x .$$
(4.6)

Из формулы (4.6) видно, что усилие $N_y(x, y)$ возрастает при уменьшении относительной толщины.

В угловых точках для перерезывающих усилий получим

$$N_{x}(0,\pm b/2) = N_{x}(a,\pm b/2) = 0,$$

$$N_{y}(0,\pm b/2) = -N_{y}(a,\pm b/2) = \frac{4h}{3} \left[-2\lambda_{1}C_{1}ch\alpha_{1} + \frac{3}{4h} \int_{0}^{b/2} sh\lambda_{1}(t-\frac{b}{2})q_{1}(t)dt + 2\frac{\lambda_{1}}{\xi_{1}}E_{1}ch\frac{\alpha_{1}}{\xi_{1}} \right].$$

Далее рассматривая следующие частные случаи:

$$q(x, y) = q_0 \sin \lambda_1 x, q(x, y) = P\delta(y) \sin \lambda_1 x,$$

$$q(x, y) = q_0 \cos \frac{\pi}{b} y \sin \lambda_1 x \quad (q_0 = \text{const}),$$
(4.7)

где $\delta(y)$ – функция Дирака, а P – интенсивность сосредоточенной силы, т.е. в выражениях максимального прогиба (4.2)–(4.4) и перерезывающго усилия $N_y(0,\pm b/2)$, поочередно принимая

$$q(t) = q_0, \ q(t) = P\delta(t), \ q(t) = q_0 \cos\frac{\pi}{b}t,$$
 (4.8)

соответственно получим

 $q(t) = q_0$

$$W(a/2,0) = \frac{q_0}{\lambda_1^4 D} \left(1 - \frac{2 + \alpha_1 \text{th}\alpha_1}{2\text{ch}\alpha_1}\right), \tag{4.2'}$$

$$W(a/2,0) = \frac{q_0}{\lambda_1^4 D} \left[1 - \frac{2 + \alpha_1 th\alpha_1}{2ch\alpha_1} + \frac{2\xi_1^2}{1 - \nu} \left(1 - \frac{1}{ch\alpha_1}\right)\right], \quad (4.3')$$

$$W(a/2,0) = \frac{q_0}{\lambda_1^4 D} \left[1 - \frac{1}{ch\alpha_1} - \frac{\alpha_1 sh\alpha_1}{2} \frac{2(1-\nu)\xi_1 th\alpha_1 - th\frac{\alpha_1}{\xi_1}}{(1-\nu)\xi_1(\alpha_1 + sh\alpha_1 ch\alpha_1) - ch^2\alpha_1 th\frac{\alpha_1}{\xi_1}}\right], (4.4')$$

$$N_{y}(0,\pm b/2) = \frac{q_{0}(1-\nu)}{2\lambda_{1}\xi_{1}} \cdot \frac{\mathrm{sh}\alpha_{1}\mathrm{ch}\alpha_{1} - \alpha_{1}}{(1-\nu)\xi_{1}(\alpha_{1} + \mathrm{sh}\alpha_{1}\mathrm{ch}\alpha_{1}) - \mathrm{ch}^{2}\alpha_{1}\mathrm{th}\frac{\alpha_{1}}{\xi_{1}}}, \quad (4.6')$$

$$q(t) = P\delta(t)$$

б)

a)

$$W(a/2,0) = \frac{P}{4\lambda_1^3 D \mathrm{ch}^2 \alpha_1} (\mathrm{sh}\alpha_1 \mathrm{ch}\alpha_1 - \alpha_1), \qquad (4.2")$$

$$W(a/2,0) = \frac{P}{4\lambda_1^{3}Dch^{2}\alpha_1} \left[\left(1 + \frac{4\xi_1^{2}}{1-\nu}\right) sh\alpha_1 ch\alpha_1 - \alpha_1 \right), \quad (4.3")$$

$$W(a/2,0) = \frac{P}{4\lambda_{1}^{3}Dch\alpha_{1}} \{ sh\alpha_{1} - \alpha_{1}ch\alpha_{1} - \frac{\alpha_{1}sh^{2}\alpha_{1}[ch\alpha_{1}th\frac{\alpha_{1}}{\xi_{1}} - (1-\nu)\xi_{1}\alpha_{1}sh\alpha_{1}]}{(1-\nu)\xi_{1}(\alpha_{1} + sh\alpha_{1}ch\alpha_{1}) - ch^{2}\alpha_{1}th\frac{\alpha_{1}}{\xi_{1}}} \}, (4.4'')$$

$$N_{y}(0, \pm b/2) = \frac{P(1-\nu)}{4\xi_{1}} \cdot \frac{\alpha_{1}sh\alpha_{1}}{(1-\nu)\xi_{1}(\alpha_{1} + sh\alpha_{1}ch\alpha_{1}) - ch^{2}\alpha_{1}th\frac{\alpha_{1}}{\xi_{1}}}, \quad (4.6'')$$

$$(1-\nu)\xi_1(\alpha_1+sh\alpha_1)$$

B)

$$q(t) = q_0 \cos \frac{\pi}{b} t$$
$$W(a/2,0) = \frac{q_0}{\pi^4 D} \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^2},$$
(4.2")

$$W(a/2,0) = \frac{q_0}{\pi^4 D} \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^2} \left(1 + \frac{2\xi_1^2}{1 - \nu} \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2}\right), \qquad (4.3''')$$

20

$$W(a/2,0) = \frac{q_0}{\pi^4 D} \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^2} \left[1 - \frac{(1 - \nu)\xi_1 \pi \frac{a}{b} \operatorname{sh}\alpha_1}{(1 - \nu)\xi_1 (\alpha_1 + \operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_1) - \operatorname{ch}^2 \alpha_1 \operatorname{th}\frac{\alpha_1}{\xi_1}}\right], (4.4''')$$
$$N_y(0, \pm b/2) = \frac{q_0 \lambda_1 (1 - \nu)}{\xi_1} \frac{ab}{a^2 + b^2} \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha_1}{(1 - \nu)\xi_1 (\alpha_1 + \operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_1) - \operatorname{ch}^2 \alpha_1 \operatorname{th}\frac{\alpha_1}{\xi_1}} \cdot (4.6''')$$

Выражения, приводимые в формулах (4.2')-(4.6'), (4.2"), (4.2") и (4.3""), совпадают с известными формулами [1,2,6,7].

В формуле (4.6'''), принимая $\alpha_n >> 1$ и $\alpha_n << 1$, т.е. рассматривая приближения узкой и широкой пластинок (относительно краев $y = \pm b/2$), соответственно получим

$$N_{y}(0,\pm b/2) = q_{0}\lambda_{1}\frac{1-\nu}{\xi_{1}}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{(1-\nu)\xi_{1}-1},$$
$$N_{y}(0,\pm b/2) = q_{0}\lambda_{1}\frac{1-\nu}{\xi_{1}}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2(1-\nu)\xi_{1}\alpha_{1}-th\frac{\alpha_{1}}{\xi_{1}}}.$$

Переходя к численным расчетам и снова предполагая, что нагрузка задана в виде

$$q(x, y) = q_0 \cos \frac{\pi}{b} y \sin \lambda_1 x,$$

представим таблицы, в которых приведены безразмерные значения максимального прогиба

$$W_{1} = \frac{b^{4}}{(a^{2} + b^{2})^{2}}, W_{2} = \frac{b^{4}}{(a^{2} + b^{2})^{2}} \left(1 + \frac{2\xi_{1}^{2}}{1 - \nu} \cdot \frac{a^{2} + b^{2}}{b^{2}}\right),$$
$$W_{3} = \frac{b^{4}}{(a^{2} + b^{2})^{2}} \left[1 - \frac{(1 - \nu)\xi_{1}\pi\frac{a}{b}sh\alpha_{1}}{(1 - \nu)\xi_{1}(\alpha_{1} + sh\alpha_{1}ch\alpha_{1}) - ch^{2}\alpha_{1}th\frac{\alpha_{1}}{\xi_{1}}}\right],$$

и безразмерные значения перерезывающих усилий в угловых точках

$$N_{y}^{0}(0,\pm b/2) = \frac{1-v}{\xi_{1}} \cdot \frac{ab}{a^{2}+b^{2}} \cdot \frac{ch^{2}\alpha_{1}}{(1-v)\xi_{1}(\alpha_{1}+sh\alpha_{1}ch\alpha_{1})-ch^{2}\alpha_{1}th\frac{\alpha_{1}}{\xi_{1}}}$$

при коэффициенте Пуассона v = 0.3 для различных значений параметра ξ_1 и отношения a/b.

					Таблица1
a/b	51	0	0.05	0.1	0.2
	W_1 max	0.8244	-	-	-
1	$W_2 \max$	0.8244	0.8309	0.8504	0.9282
π	$W_3 \max$	0.8244	0.8305	0.8424	0.8571
1	W_1 max	0.2500	-	-	-
	$W_2 \max$	0.2500	0.2536	0.2643	0.3071
	$W_3 \max$	0.2500	0.2586	0.2735	0.3172
π	W_1 max	0.0085	-	-	-
	$W_2 \max$	0.0085	0.0091	0.0110	0.0190
	$W_3 \max$	0.0085	0.0093	0.0114	0.0196

			Таблица 2
$\frac{\xi_1}{a/b}$	0.1	0.2	0.3
$1/\pi$	2.1756	1.1764	0.8539
1	3.8112	2.0916	1.5454
π	2.1522	1.1669	0.8974

Как видно из табл.1, значения W_2 и W_3 монотонно возрастают по ξ_1 и убывают по отношению к a/b. По отношению к a/b монотонно убывают также значения W_1 .

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636с.
- 2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
- Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. /В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел.» Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2002. С.67-88.
- 4. Васильев В.В. Классическая теория пластин, история и современный анализ. //Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
- Хачатрян А.А. Об изгибе полубесконечной пластинки нагрузкой, распределенной по краю // Изв. АН Арм. ССР. Сер.физ.-мат. наук. 1965. Т.12. №2. С.39–47.
- 6. Багдасарян З.Р. Изгиб прямоугольной пластинки, равномерно распределенной нормальной нагрузкой. /Уч.записки ЕГУ. Естеств.науки. 2007. №3. С.52–61.
- Калманок А.С. Строительная механика пластинок. М.: Машстройиздат, 1950. 303с.

Институт механики НАН Армении Поступила в редакцию 10.10.2007

2UBUUSUUF ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61. №2. 2008

Механика

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ "СЛЕДЯЩЕЙ" НАГРУЗКИ, ПРИЛОЖЕННОЙ НА СВОБОДНОЙ КРОМКЕ Белубекян В.М., Белубекян М.В.

Ключевые слова: пластинка, устойчивость, упругость, неконсервативность, критическая нагрузка.

Keywords: plate, stability, elasticity, nonconservative, critical load.

Վ.Մ Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան Ուղղանկյուն սալի կայունությունը երբ ազատ եզրում կիրառված է "հետևող" ուժ

Դիտարկված է ուղղանկյուն սալ որի երկու հանդիպակաց կողմները ազատ հենվածեն,իսկ մյուս երկու ազատ կողմերի վրա ազդում են հետևող բեռերը: Կրիտիկական բեռերի արժեքները որոշվում են ինչպես ստատիկ դրվածքով, այնպես էլ դինամիկ Բոլոտինի կողմից առաջարկված եղակակով: Բավականաչափ նեղ սալերի համար ցույց է տրված որ դինամիկ դրվածքով որոշված կրիտիկական բեռը էապես փոքր է ստատիկից:

V.M. Belubekyan, M.V. Belubekyan The stability of the rectangular plate under the "follow" load action.

In the present paper a rectangular plate is considered, such that two opposite edges are hinged, and two others are free, loaded with follower forces. The problem is split into determination of symmetric and anti-symmetric shape of loss of stability. For symmetric shape critical loads are determined using both static problem statement and dynamic problem statement, based on model suggested by V. Bolotin. It is shown, that if the plate is narrow enough in the direction of loading forced, the critical loads of dynamic problems are significantly smaller than critical loads of static problems.

Рассматривается прямоугольная пластинка с двумя противоположными шарнирно закрепленными краями и двумя свободными. Сжимающая нагрузка приложена на свободных краях. Определяются критические нагрузки в статической постановке для случаев "мертвой" и "следящей" нагрузок. В случае "следящей" нагрузки задача рассматривается также на основе динамического подхода по модели В.В. Болотина. Показывается, что для достаточно узких по направлению приложенных нагрузок пластин, критические нагрузки динамической задачи (флаттер) существенно меньше статической (дивергенция).

Многочисленные публикации посвящены задаче устойчивости стержня со следящей нагрузкой. Обзор этих исследований приводится в [1,2]. Имеются лишь несколько статей, посвященных устойчивости прямоугольных пластин при действии следящих сил. В [3] рассмотрена задача для полностью свободной прямоугольной пластинки.

Задача устойчивости прямоугольной пластинки, шарнирно закрепленной по трем сторонам и сжатой следящей нагрузкой на свободной стороне, решена в [4] на основе статического подхода. Показана возможность потери устойчивости и приведены значения критических нагрузок в зависимости от коэффициента Пуассона и отношения сторон пластинки.

Статья [5] посвящена динамической устойчивости консольной пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки, приложенной на свободной кромке противоположной закрепленной.

В [6] показанно, что консольная пластинка имеет также дивергентную форму потери устойчивости в зависимости от отношения сторон пластинки. При этом критическая нагрузка дивергентной неустойчивости оказывается меньше флаттерной

критической нагрузки. Всесторонне сжатая полубесконечная пластинка рассмотрена в [7], где показывается, что при действии следящей нагрузки локализованная неустойчивость не имеет места как при статическом, так и динамическом подходе.

1. Прямоугольная пластинка постоянной толщины 2h в прямоугольной декартовой координатной системе занимает область $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}, \quad 0 \le y \le b, \quad -h \le z \le h$. Пластинка равномерно сжата постоянной

нагрузкой P по кромкам $x = \pm 0,5 a$. Уравнение устойчивости пластинки на основе теории Кирхгофа имеет вид [8]

$$D\Delta^2 w + P\partial^2 w / \partial x^2 = 0, \qquad (1.1)$$

где *w* – функция прогиба пластинки, *D* – жесткость пластинки на изгиб

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-v^2)},$$
 (1.2)

Е – модуль Юнга, *v* – коэффициент Пуассона.

Стороны пластинки y = 0, b шарнирно закреплены

$$w = 0, \ \partial^2 w / \partial y^2 = 0.$$
(1.3)

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.3), представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda n = n\pi/b.$$
(1.4)

Подстановка (1.4) в (1.1) приводит к следующей системе последовательных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f_n^{IV} - 2\lambda_n^2 \left(1 - 0, 5\eta_n^2\right) f_n^{"} + \lambda_n^4 f_n = 0, \qquad (1.5)$$

где

$$\eta_n^2 = \left(\lambda_n^2 D\right)^{-1} P \quad . \tag{1.6}$$

. /

Общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$f_n = A_1 e^{\lambda_n p_1 x} + A_2 e^{-\lambda_n p_1 x} + A_3 e^{\lambda_n p_2 x} + A_4 e^{-\lambda_n p_2 x}, \qquad (1.7)$$

где

$$p_{1,2} = \left(1 - 0, 5\eta_n^2 \pm 0, 5\eta_n \sqrt{\eta_n^2 - 4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$
 (1.8)

При $\eta_n^2 \ge 4$ корни p_1, p_2 характеристического уравнения – мнимые, а при $\eta_n^2 \le 4$ они комплексные и их удобно представить следующим образом:

$$p_{1,2} = \sqrt{1 - \frac{\eta_n^2}{4}} \pm i \frac{\eta_n}{2}.$$
 (1.9)

В дальнейшем рассматриваются задачи с одинаковыми граничными условиями на сторонах $x = \pm 0,5 a$. Поэтому форма пластинки после потери устойчивости может быть либо симметричной, либо антисимметричной.

Симметричное решение получается из (1.7) после удовлетворения условию симметрии

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \ \text{при} \ x = 0$$
 (1.10)

и учета (1.4) в виде

$$f_n = A_n \operatorname{ch} \lambda_n p_1 x + B_n \operatorname{ch} \lambda_n p_2 x.$$
(1.11)

Соответственно, антисимметричное решение удовлетворяет условиям

 $w = 0, \ \partial^2 w / \partial x^2 = 0$ при x = 0 (1.12)

и имеет вид

$$f_n = C_n \mathrm{sh}\lambda_n p_1 x + D_n \mathrm{sh}\lambda_n p_2 x \,. \tag{1.13}$$

2.Пусть на свободных кромках пластинки $x = \pm 0,5$ действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка, которая при изгибе пластинки не меняет направление. В этом случае граничные условия имеют вид [8]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - v) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + P \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = \pm 0, 5 a \quad (2.1)$$

или с учетом (1.4)

$$f_n'' - v\lambda_n^2 f_n = 0, \ f_n''' - (2 - v - \eta_n^2) f_n' = 0$$
 при $x = \pm 0,5 a$. (2.2)

Подстановка симметричного решения (1.11) в граничные условия (2.2) при x = 0, 5 a приводит к следующей алгебраической системе уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n :

$$(p_1^2 - v) \operatorname{ch} p_1 \zeta_n A_n + (p_2^2 - v) \operatorname{ch} p_2 \zeta_n B_n = 0, p_1 [p_1^2 - (2 - v - \eta_n^2)] A_n \operatorname{sh} p_1 \zeta_n + p_2 [p_2^2 - (2 - v - \eta_n^2)] B_n \operatorname{sh} p_2 \zeta_n = 0,$$
rge
rge
(2.3)

$$\zeta_n = \lambda_n \, a/2 \,. \tag{2.4}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.3) приводит к уравнению, определяющему критические нагрузки

$$p_{2}\left(p_{1}^{2}-\nu\right)\left[p_{2}^{2}-\left(2-\nu-\eta_{n}^{2}\right)\right] \text{th } p_{2}\zeta_{n}=p_{1}\left(p_{2}^{2}-\nu\right)\left[p_{1}^{2}-\left(2-\nu-\eta_{n}^{2}\right)\right] \text{th } p_{1}\zeta_{n}.(2.5)$$

Очевидно, если уравнение (2.5) имеет корень, удовлетворяющий условию

$$\eta_n^2 < 4 , \qquad (2.6)$$

то этот корень будет минимальным и, следовательно, задача определения минимальной критической нагрузки будет решена. При условии (2.6) рассмотрим достаточно длинную в направлении оси *ОХ* пластинку

$$\zeta_n 1 >> 1$$
 или $\pi a b^{-1} >> 1$. (2.7)

Учитывая (1.9) и (2.6) и принимая во внимание, что

$$\lim_{\zeta_n \to \infty} \text{th } p_{1,2}\zeta_n = \lim \frac{\text{th}\sqrt{1 - 0,25\eta_n^2 \zeta_n \pm i \text{tg}(0,5\eta_n \zeta_n)}}{1 + i \text{th}\sqrt{1 - 0,25\eta_n^2 \zeta_n \text{tg}(0,5\eta_n \zeta_n)}} = 1, \quad (2.8)$$

уравнение (2.5) приводится к виду

$$K(\eta_n) \equiv (p_2 - p_1) K_1(\eta_n) = 0, \qquad (2.9)$$

где

$$K_{1}(\eta_{n}) = p_{1}^{2} p_{2}^{2} + 2(1 - v - 0, 5\eta_{n}^{2}) p_{1} p_{2} - v(p_{1}^{2} + p_{2}^{2} - 2 + v + \eta_{n}^{2}). \quad (2.10)$$

Нетрудно проверить, что при $p_2 = p_1$ получается корень $\eta_n = 0$, которому соответствует тривиальное решение w = 0. Из уравнения $K_1(\eta_n) = 0$ с учетом (1.9) получается решение в виде

$$\eta_n^2 = (3+\nu)(1-\nu).$$
 (2.11)

Из (1.6) и (2.11) минимальная критическая нагрузка (n = 1) для достаточно длинных пластин определяется следующим образом:

$$p_{\rm kp} = (3+v)(1-v)\pi^2 Db^{-2}. \qquad (2.12)$$

Следует отметить, что решение (2.11) удовлетворяет условию (2.6).

Критическая нагрузка существенно зависит от коэффициента Пуассона v. Согласно (2.12) максимальное значение получается при v = 0, а минимальное – при v = 0, 5, их отношение равно $3:1,75 \approx 1,7$.

Значение $\eta_n^2 = 4$ является корнем уравнения (2.5), что можно проверить подстановкой $p_{i,2} = \pm i$ из (1.9) в (2.5). Однако, в этом случае, определяя B_n через A_n из (2.3) и подставляя в (1.11), можно получить, что корню $\eta_n^2 = 4$ соответствует тривиальное решение $w = 0(f_n = 0)$. Критическое значение нагрузки, соответствующее этому корню в [8] (с.328-330), принимается как решение рассматриваемой задачи, принимая, что «граничные условия по коротким краям в данном случае являются несущественными».

На самом деле, критическое значение удлиненной пластинки со свободными короткими сторонами должно определяться по формуле (2.12), а критическое значение, соответствующее корню $\eta_n^2 = 4$,

$$_{\rm kp} = 4\pi^2 D b^{-2} \tag{2.13}$$

будет соответствовать аналогичной задаче с короткими шарнирно-закрепленными краями.

p

Для критической нагрузки (2.11) в случае удлиненных пластин ($\zeta_n >> 1$) можно определить постоянные B_n через A_n из первого уравнения системы (2.3) следующим образом:

 $B_n = 0,5\{(1+v)\cos\eta_*\zeta_n + \eta_*\sin\eta_*\zeta_n + i[\eta_*\cos\eta_*\zeta_n + (1+v)\sin\eta_*\zeta_n]\}A_n. (2.14)$ С учетом (1.9), (2.11) и (2.14) в выражении (1.11) получится форма потери устойчивости пластинки.

Естественно, что для определения минимальной критической нагрузки в случае, когда ширина пластинки (b) существенно больше по сравнению с продольным размером (a), необходимо принять n = 1. Тогда из уравнения (2.5) при условии $\zeta_1 \ll 1$ получается

$$M(\eta_1) \equiv (p_2^2 - p_1^2) M_1(\eta_1) = 0, \qquad (2.15)$$

где

$$M_{1}(\eta_{1}) = p_{1}^{2} p_{2}^{2} - (p_{1}^{2} + p_{2}^{2}) + v(2 - v - \eta_{1}^{2}).$$
(2.16)

26

С учетом

$$p_1 p_2 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 = 2 - \eta_1^2$$
 (2.17)

критическое значение параметра нагрузки из уравнения $M_1(\eta_1) = 0$ получается в виде

$$\eta_1^2 = 1 - v \,. \tag{2.18}$$

Для антисимметричной задачи подстановка (1.13) в граничные условия (2.1) при x = 0,5a приводит к системе уравнений относительно произвольных постоянных C_n, D_n

$$(p_1^2 - v) \operatorname{sh} p_1 \zeta_n C_n + (p_2^2 - v) \operatorname{sh} p_2 \zeta_n D_n = 0, p_1 \left[p_1^2 - (2 - v - \eta_n^2) \right] \operatorname{ch} p_1 \zeta_n C_n + p_2 \left[p_2^2 - (2 - v - \eta_n^2) \right] \operatorname{ch} p_2 \zeta_n D_n = 0.$$
(2.19)

Из равенства нулю детерминанта системы (2.19) получается следующее уравнение, определяющее критические нагрузки:

$$p_{2}\left(p_{1}^{2}-\nu\right)\left[p_{2}^{2}-\left(2-\nu-\eta_{n}^{2}\right)\right]\operatorname{th}p_{1}\zeta_{n} = p_{1}\left(p_{2}^{2}-\nu\right)\left[p_{1}^{2}-\left(2-\nu-\eta_{n}^{2}\right)\right]\operatorname{th}p_{2}\zeta_{n}.(2.20)$$

В приближении удлиненной пластинки (2.7) нетрудно заметить, что с учетом (2.8) уравнение, определяющее критическую нагрузку, совпадает с уравнением (2.9) симметричной задачи. Следовательно, и здесь критическая нагрузка для достаточно длинной (по x) пластинки определяется по формуле (2.1).

Для узкой пластинки, принимая как и для симметричной задачи n = 1, $\xi_1 << 1$ из (2.20), получается следующее уравнение:

$$\left(p_{1}^{2}-\nu\right)\left[p_{2}^{2}-\left(2-\nu-\eta_{1}^{2}\right)\right]=\left(p_{2}^{2}-\nu\right)\left[p_{1}^{2}-\left(2-\nu-\eta_{1}^{2}\right)\right].$$
(2.21)

Используя равенства (2.17), нетрудно получить решение уравнения (2.21) в виде

$$\eta_1^2 = 2(1-v). \tag{2.22}$$

Сравнение с формулой (2.18) показывает, что критическая нагрузка для узкой пластинки при симметричной форме потери устойчивости вдвое меньше критической нагрузки несимметричной формы потери устойчивости.

Формулы (2.18), (2.22), определяющие критические нагрузки узких пластин $(\zeta_1 < 1)$, для симметричной и антисимметричной задач, соответственно, уточняются следующим образом:

$$\eta_{1}^{2} = 1 - \nu + \frac{2\nu(1 - 2\nu)}{3(1 - \nu)}\zeta_{1}^{2}, \qquad \eta_{1}^{2} \approx 2\left(1 - \nu\right)\left(1 + \frac{5 - 3\nu}{3}\xi_{1}^{2}\right).$$
(2.23)

3. Пусть стороны пластинки $x = \pm 0, 5a$ сжаты следящей нагрузкой. В этом случае граничные условия (2.1) заменяются условиями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - v) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \text{ при } x = \pm 0,5 a.$$
(3.1)

Подстановка симметричного решения (1.4), (1.11) в граничные условия (3.1) при x = 0,5 a приводит к следующей алгебраической системе уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n :

$$(p_1^2 - v) \operatorname{ch} p_1 \zeta_n A_n - (p_2^2 - v) \operatorname{ch} p_2 \zeta_n B_n = 0, p_1 (p_1^2 - 2 + v) \operatorname{sh} p_1 \zeta_n A_n + p_2 (p_2^2 - 2 + v) \operatorname{sh} p_2 \zeta_n B_n = 0.$$
(3.2)

Из условия равенства нулю детерминанта системы (3.2) получается уравнение, определяющее критические нагрузки

 $L(\eta_n) \equiv p_2(p_1^2 - v)(p_2^2 - 2 + v) \text{th } p_2\zeta_n - p_1(p_2^2 - v)(p_1^2 - 2 + v) \text{ th } p_1\zeta_n = 0.$ (3.3) В случае удлиненных пластин, при условиях (2.6), (2.7) уравнение (3.3) с учетом

(2.8) приводится к виду

$$L(\eta_n) \approx (p_2 - p_1) L_1(\eta_n) = 0, \qquad (3.4)$$

где

$$L_{1}(\eta_{n}) = p_{1}^{2}p_{2}^{2} + 2(1-v)p_{1}p_{2} - v(p_{1}^{2}+p_{2}^{2}) + v(2-v).$$
(3.5)

Уравнение $L_{1}(\eta_{n}) = 0$ с использованием равенств (2.17) приводится к виду

$$(3+v)(1-v)+v\eta_n^2=0.$$
 (3.6)

Отсюда следует, что удлиненная пластинка при действии следящей (в отличие от консервативной) нагрузки не имеет симметричной формы потери устойчивости для сжимающих нагрузок, удовлетворяющих условию (2.6) (или условию $0 < \eta_n^2 < 4$). Однако, из (3.6) следует, что возможна потеря устойчивости для растягивающих нагрузок $(\eta_n^2 < 0)$. В этом случае растягивающая критическая нагрузка будет существенно больше сжимающей консервативной нагрузки (2.11). Наименьшая разница будет для коэффициента Пуассона v = 0, 5 – критическая растягивающая нагрузка (3.6) в два раза больше сжимающей (2.11)

В приближении узкой пластинки, при условиях n = 1, $\zeta_1 << 1$, уравнение (3.3) приводится к виду

$$N(\eta_1) = (p_2^2 - p_1^2) N_1(\eta_1) = 0, \qquad (3.7)$$

где

$$N_1(\eta_1) = p_1^2 p_2^2 - v(p_1^2 + p_2^2) + v(2 - v).$$
(3.8)

Уравнение $N_1(\eta_1) = 0$ с учетом (2.17) преобразуется к следующему уравнению:

$$1 - v^2 + v \eta_1^2 = 0.$$
 (3.9)

Как и в случае удлиненной пластинки, уравнение (3.9) не имеет решения, удовлетворяющего условию $\eta_1^2 > 0$, но имеет решение для отрицательных η_1^2 . Т.е. наличие следящей растягивающей нагрузки может привести к потере симметричной формы устойчивости узкой пластинки.

Если в уравнении (3.3) при условиях n = 1, $\zeta_1 < 1$ удержать следующее приближение, т.е. допустить

th
$$p_i \zeta_n \approx p_i \zeta_n - p_i^3 \zeta_n^3 / 3$$
, (3.10)

то уравнение (3.7) заменяется следующим уравнением:

$$N(\eta_{1}) \equiv \left(p_{2}^{2} - p_{1}^{2}\right) \left[N_{1}(\eta_{1}) - \frac{\zeta_{1}^{2}}{2}N_{2}(\eta_{1})\right] = 0, \qquad (3.11)$$

где

28

$$N_{2}(\eta_{1}) = 2\nu(1-\nu) - (1-\nu)^{2} \eta_{1}^{2} + \nu \eta_{1}^{4}.$$
(3.12)

Т.к. *p*₂ ≠ *p*₁, из (3.11) получается уравнение, определяющее критическую нагрузку

$$v\zeta_{1}^{2}\eta_{1}^{4} - \left[3v + (1-v)^{2}\xi_{1}^{2}\right]\eta_{1}^{2} - 3(1-v^{2}) + 2v(1-v)\zeta_{1}^{2} = 0.$$
(3.13)

В табл.1 приводится сравнение критических нагрузок симметричной формы потери устойчивости узкой пластинки для случаев консервативной нагрузки согласно (2.23) и следящей нагрузки, согласно (3.13). Вычисления приведены для отношения стороны пластинки $\zeta_1^2 = 0,1 \ (b = \sqrt{10}\pi a/2)$.

					Табл	1ица 1
η_1^2 ν	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
(2.23)	1	0,9	0,81	0,71	0,61	0,5
(3.13)	8	44,7	37,04	34,27	32,79	31,91
(3.3)	104,61	101,05	100,88	100,82	100,79	100,77

В табл. 2 то же самое сравнение приводится для случая $\zeta_1^2 = 0,5 \, \left(b = \pi a \, / \sqrt{2}\right)$ Таблица 2

					140	лица 2
η_1^2 ν	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
(2.23)	1	0,93	0,85	0,76	0,64	0,5
(3.13)	8	17,41	11,15	9,42	8,28	8,00
(3.3)	84,83	81,39	81,18	81,11	81,07	81,04

В третьих строках табл. 1 и 2 приведены значения критического параметра нагрузки η_1 , вычисленные по точному уравнению (3.3). Сравнение с приближенным решением по формуле (3.13) дает существенное отличие, что показывает неприменимость приближения $\zeta_1^2 \ll 1$ ввиду $|p_1|\zeta_1 > 1$. Тем не менее, приближение (3.13), как и расчеты на основе точного уравнения, показывает возможность потери статической устойчивости пластинки при действии сжимающей следящей нагрузки.

Для задачи потери устойчивости по антисимметричной форме (1.13) уравнение, определяющее критические нагрузки, получается в виде

$$p_2(p_1^2 - v)(p_2^2 - 2 + v) \text{th } p_1\zeta_n = p_1(p_2^2 - v)(p_1^2 - 2 + v) \text{th } p_2\zeta_n.$$
(3.14)

Как и в предыдущей задаче, из уравнения (3.14) следует, что в приближении $\zeta_n^2 >> 1$ и при условии $\eta_n^2 < 4$ неустойчивость невозможна.

В статье [4] приводятся численные результаты решения уравнения (3.14).

Задача устойчивости прямоугольной пластинки с двумя противоположными шарнирно закрепленными краями, с одним закрепленным и с четвертым свободным при действии следящей нагрузки исследована в [9, 10].

4. Решение задач устойчивости со следящей нагрузкой (неконсервативных задач) на основе статического метода Эйлера, в общем случае, может привести к ошибочным результатам [11-13].

Для применения динамического подхода, обычно, в уравнении учитывают инерционные члены. Учет в уравнении устойчивости инерции массы пластинки $2\rho h \partial^2 w / \partial t^2$ приводит к большим сложностям вычислительного характера. С целью преодолевания аналогичных трудностей в задаче устойчивости консольной балки со следящей нагрузкой (задача Бекка), В.В. Болотиным предложена модель, когда на свободном конце балки имеется сосредоточенная инерционная масса и пренебрегается инерция массы балки [11].

Следуя идее В.В Болотина, граничные условия (3.1) на свободном крае пластинки, в случае следящей нагрузки, заменяются следующими условиями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - v) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \beta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = \pm 0, 5 a , \quad (4.1)$$

где $\beta = m/D$, *m* – сосредоточенная на краях $x = \pm 0,5a$ инерционная масса.

Учитывая динамическую постановку задачи, решение уравнения (1.1) представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) e^{i\omega_n t} \sin \lambda_n y.$$
(4.2)

После подстановки (4.2) в (1.1), нахождения общего решения (1.7), удовлетворения граничным условиям (1.10), (1.12), определяются симметричные и антисимметричные формы колебания, которые совпадают с представлением функций $f_n(x)$ в виде (1.11) и (1.13), соответственно. Подстановка симметричного решения (1.11), с учетом (4.2), в граничные условия (4.1) при x = 0,5a приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n :

$$(p_1^2 - v) \operatorname{ch} p_1 \zeta_n A_n + (p_2^2 - v) \operatorname{ch} p_2 \zeta_n B_n = 0,$$

$$[p_1 (p_1^2 - 2 + v) \operatorname{sh} p_1 \zeta_n + \beta \omega_n^2 \operatorname{ch} p_1 \zeta_n] A_n +$$

$$+ [p_2 (p_2^2 - 2 + v) \operatorname{sh} p_2 \zeta_n + \beta \omega_n^2 \operatorname{ch} p_2 \zeta_n] B_n = 0.$$

$$(4.3)$$

Из условия равенства нулю детерминанта системы (4.3) определяются частоты колебаний ω_n .

При условии

$$\eta_n^2 > 4 \tag{4.4}$$

и при новых обозначениях

$$p_{1,2} = i q_{1,2}, \quad q_{1,2} = \sqrt{0,25 \eta_n^2 - 1 \pm 0,5 \eta_n}$$
 (4.5)

выражение для частот колебаний принимает вид

$$\omega_n^2 = \frac{q_2 (q_1^2 + v) (q_2^2 + 2 - v) \cos q_1 \zeta_n \sin q_2 \zeta_n - q_1 (q_2^2 + v) (q_1^2 + 2 - v) \sin q_1 \zeta_n \cos q_2 \zeta_n}{\beta (q_1^2 - q_2^2) \cos q_1 \zeta_n \cos q_2 \zeta_n} .$$
(4.6)

Условие равенства нулю числителя выражения (4.6) определяет критическую нагрузку при статическом подходе (дивергентную форму потери устойчивости). Условие же равенства нулю знаменателя (4.6) определяет критическую нагрузку при динамическом подходе (флаттерную форму потери устойчивости) [11].

При значении $\eta_n = 0$ и $\eta_n = 2$ числитель и знаменатель выражения (4.6) обращаются в нуль.

В этих случаях необходимо найти предельные значения для частот ω_n или же провести решения задачи заново. В случае $\eta_n = 0$ получаются следующие выражения для собственных частот колебаний пластинки с сосредоточенными инерционными массами на краях $x = \pm 0, 5a$

$$\omega_n^2 = \frac{(1-\nu)\lambda_n^3}{2\beta} \left[(3+\nu) \operatorname{th} \zeta_n - \frac{(1-\nu)\zeta_n}{\operatorname{ch}^2 \zeta_n} \right].$$
(4.7)

Частоты колебаний для случая $\eta_n = 2$ определяются следующим образом:

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda_n^3}{2\beta} \frac{(3-\nu)(1+\nu)\zeta_n - 0.5(1-6\nu+\nu^2)\sin 2\zeta_n}{\cos^2 \zeta_n}.$$
 (4.8)

Нетрудно проверить, что числитель и знаменатель выражения всегда положительные, т.е. не меняют знак в зависимости от ζ_n .

Следовательно, как и в статическом случае, пластинка при $\eta_n = 2$ устойчива.

Здесь флаттерная устойчивость могла бы иметь место, если знаменатель меняет знак в зависимости от ζ_n [11]. Однако, в окрестности изменения $\zeta_n = \pi/2$ возможны колебания резонансного типа.

Имея в виду, что для узких пластин минимальная критическая нагрузка будет при *n* = 1, согласно (4.6), флаттерная неустойчивость появляется при условии

$$\cos q_1 \zeta_1 = 0. \tag{4.9}$$

Из (4.9) для параметра критической нагрузки с учетом (4.5) получается

$$\eta_{1k} = \frac{(2k-1)\pi}{2\zeta_1} + \frac{2\zeta_1}{(2k-1)\pi}, \qquad (4.10)$$

откуда

$$\min_{k} \eta_{1k} = \frac{\pi}{2\zeta_1} + \frac{2\zeta_1}{\pi}.$$
 (4.11)

Из (4.11), в частности, следует, что при $\zeta_1^2 = 0,1$ получается $\eta_1^2 \approx 26,73$, а при $\zeta_1^2 = 0,5$ получается $\eta_1^2 \approx 7,1342$. Сравнение этих значений критических нагрузок с соответствующими значениями из табл. 1 и 2 позволяет делать вывод, что для узких пластин флаттерные критические нагрузки значительно меньше дивергентных.

Одновременно флаттерные критические нагрузки, которые получаются в задаче со следящими нагрузками, существенно больше критических нагрузок в случае консервативных нагрузок.

Работа выполнена при содействии гранта INTAS 8886.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Langthjem M.A., Sugiyama Y. Dynamic Stability of Columns Subjected to Follow Loads: A Survey.// Journal of Sound and Vibration. 2000. 238 (5). P. 809-851.
- Elishakoff I. Controversy Associated with the so-called "Follower Forces". Critical Overview. //Applied Mechanics Reviews. 2005. 58. P. 117-142.
- 3. Higuchi K, Dowell E.H. Effect of structural Damping on Flatter of Plates with a Follower Force. //AIAA Journal 1992. 30. P. 820-825.
- Арутюнян И.Р., Белубекян М.В. Две задачи устойчивости прямоугольной пластинки. /В сб.: "Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем" Ереван: 1997. С. 86-88.
- 5. Kim J.H., Kim H.S. A Study on the Dynamic Stability of Plates under a Follower Force. //Computers and Structures. 2000. 74. P. 351-363.
- Belubekyan V.M., Belubekyan M.V. Nonconservative Stability problems for axially compressed rectangular plate. "Physics and Control" Intern. Conf. Saint Peterburg, Russia, 2003. P. 1070-1073.
- 7. Белубекян В.М. Локализованная неустойчивость равномерно сжатой пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 1. С. 33-37.
- 8. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
- 9. Gulkowski P.M., Reisman H. Plate buckling due to follower force edges. //Trans. ASME. Ser E. Journ. Appl. Mech. 1977. 44. P.768-769.
- 10. Adali S. Stability of a rectangular plate under nonconservative and conservative forces // Inter. Journ of Solids and Structures. 1982. V 18. № 12. P. 1044-1052.
- 11. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Госизд. физ-мат лит. 1961. 340 с.
- 12. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
- Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1979. 384 с.

Институт механики НАН Армении Поступила в редакцию 2.08.2007

2UBUUSUUF ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №2, 2008

Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: пластинка, свободный край, устойчивость. Keywords: plate, free edges, stability.

. Ա. Մովսիսյան

Երկու եզրերով ազատ ուղղանկյան սալի կայունության մասին

Դիտարկվում է ուղղանկյան սալի կայունությունը, երբ երկու եզրերն ազատ հենված են, իսկ մյուս երկուսն՝ ազատ։ Ուսումնասիրվում է կրիտիկական Ճիգի կախվածությունը Պուասոնի գործակցից և կողմերի հարաբերությունից:

L.A. Movsisyan About Stability of Rectangular Plate with Two Free Edges The influence of coefficient of Poisson and ratio of sides on value of critical force is investigated.

Рассматривается устойчивость прямоугольной пластинки, две сжимающиеся стороны которой свободно оперты, а другие свободны. Изучается влияние коэффициента Пуассона и отношение сторон на значения критического усилия.

Поводом, по причине которого пишется настоящая заметка, является [1]. Как известно, из решения задачи устойчивости прямоугольных пластин со свободно опертыми краями как частный случай рассматривается вариант, когда сжатие стороны во много больше, чем остальные [2]. Тогда для критического усилия получается выражение

$$P_{\rm kp}^{(1)} = \frac{Eh^3\pi^2}{12(1-\nu^2)a^2}.$$
 (1)

При этом принимается, что форма потери устойчивости происходит по цилиндрической поверхности (цилиндрический изгиб).

Если сжатые стороны пластинки свободно оперты, а две другие свободны (здесь рассматривается только такой случай) и при этом длины первых во много меньше по сравнению со свободными краями, то естественно, пластинка будет работать как стержень (ширины 1) и критическое усилие есть

$$P_{\rm kp}^{(2)} = \frac{Eh^3\pi^2}{12\ a^2}\,.$$
 (2)

Заметим, что (2) получится и из (1) при v = 0. Очевидно, что уже для пластинки, стороны которой соразмерные, или ширина во много больше "длины", будем иметь критическое усилие $P_{\rm kp}$

$$P_{\rm kp}^{(2)} \le P_{\rm kp} \le P_{\rm kp}^{(1)} \,. \tag{3}$$

То, что при двух свободных краях не осуществляется цилиндрический изгиб, известно давно [3] (с.245-246). Подобное может произойти лишь только тогда, когда $\nu = 0$ (замечание вышеприведенное), или заданы нулевые краевые условия относительно нормальной производной от прогиба и перерезывающего усилия. Тем

не менее, при расссмотрении задачи устойчивости для не полностью свободно опертых пластин принимается, что $P_{\kappa p}$ должно быть больше, чем (1) (во всей знакомой мне литературе). Например, в [2] (с.290) читаем «Как мы видели, в предельном случае пластинки со свободными продольными сторонами критическое напряжение определяется формулой (88) ...». Формула (88) есть (1), написанная для напряжения. Но ведь (1) или (88) получена не для свободных продольных сторон.

В [1] считаю важным, что при наличии свободного края возможно значение критической силы меньше, чем (1).

В данной заметке рассматривается прямоугольная пластинка с двумя свободными сторонами. Целью является выяснить, как изменяется $P_{\rm kp}$ в зависимости от коэффициента V и отношений сторон пластинки.

Критическое усилие рассматриваемой пластинки определяется из уравнения

$$U_1 V_2 - U_2 V_1 = 0 , (4)$$

$$U_{i} = (s_{i}^{2} - \nu\lambda^{2}) \operatorname{ch} 0.5 s_{i} , \quad V_{i} = s_{i} \left[s_{i}^{2} - (2 - \nu)\lambda^{2} \right] \operatorname{sh} 0.5 s_{i} , \quad i = 1, 2,$$

$$s_{1} = \lambda \left[1 + \sqrt{\delta (1 - \nu^{2})} \right]^{1/2} , \quad s_{2} = \lambda \left[1 - \sqrt{\delta (1 - \nu^{2})} \right]^{1/2} ,$$

$$\lambda = \frac{\pi b}{a} , \quad \delta = \frac{P}{P_{\mathrm{kp}}^{(2)}} , \quad 1 \le \delta \le \frac{1}{1 - \nu^{2}} .$$

Форма потери устойчивости будет

$$w(x, y) = \left(\operatorname{chs}_{2} y - \frac{s_{2}^{2} - \nu \lambda^{2}}{s_{1}^{2} - \nu \lambda^{2}} \frac{\operatorname{ch} 0.5 s_{2}}{\operatorname{ch} 0.5 s_{1}} \operatorname{chs}_{1} y \right) \cos \frac{\pi x}{a},$$
(5)
-0,5 \le x, y \le 0.5.

Вычисление первого корня (4) производилось для различных ν и λ : $\nu = 0$ · 0.3 · 0.5

$$\lambda = \frac{1}{50}, \ \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \ 1, \ 5, \ 10, \ 20, \ 50$$
⁽⁶⁾

В табл. 1 приведены значения критических $\delta_{\kappa p}$.

								Та	блица 1
v	λ	0.02	0.05	0.1	1	5	10	20	50
0.3	3	1	1	1	1.01	1.063	1.079	1.088	1.092
0.5	5	1	1	1	1.025	1.182	1.239	1.267	1.276

Заметим, что независимо от ширины пластинки всегда есть $\delta_{\kappa p}$ меньше, чем определяемые из (1).

В табл. 2 приведена форма изменения по y центральной линии -w(0, y) по (5).

Как и следовало ожидать, при v = 0 для всех значений $\lambda \, \delta_{\kappa p} = 1$. Не изменяется также w(0, y) при изменении y – везде w(0, y) = 1.

						Таблица 2
γ λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.02	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
0.02	1.268	1.268	1.268	1.268	1268	1.268
0.05	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
0.05	1.268	1.268	1.268	1.268	1.268	1.268
0.1	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
0.1	1.267	1.267	1.267	1.268	1.268	1.268
1	1.125	1.126	1.131	1.138	1.148	1.162
1	1.223	1.226	1.234	1.248	1.268	1.293
5	1.010	1.015	1.031	1.062	1.121	1.229
5	1.022	1.035	1.077	1.158	1.300	1.552
10	1.000	1.005	1.021	1.052	1.119	1.306
10	1.000	1.020	1.080	1.196	1.419	1.958
20	1.000	1.001	1.040	1.091	1.176	1.478
20	1.001	1.050	1.208	1.490	1.966	3.560
50	1.000	1.032	1.131	1.304	1.562	2.257
50	1.000	1.284	2.298	4.617	9.565	26.381

Что интересно в приведенных таблицах, так это то, что вплоть до $\frac{b}{a} = \frac{1}{\pi}$

пластинка (независимо от v) работает как стержень. Даже для достаточно широких пластин прогиб на краях не намного больше, чем в центре, к тому же для широких пластин прогиб в центре такой же, как при стержне.

ЛИТЕРАТУРА

- Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. //В сб. научн.тр.конференции: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем». Ереван. 1997. С.95-99.
- 2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Госфизматлит, 1963. 879 с.
- 3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Госфизматлит, 1963. 635 с.

Институт механики НАН Армении Поступила в редакцию 15.01.2007

2ԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №2, 2008

Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА СОСТАВНОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА В ОКРЕСТНОСТЯХ УГЛОВЫХ ТОЧЕК Агаларян О. Б.

Ключевые слова: нелинейное упругое тело, упрочнение, составной материал. Key words: non-linear elastic body, strengthening, compaund material.

Հ. Բ. Աղալարյան

Երկայնական սահքի խնդրի լուծման ասիմպտոտիկ վարքը` ոչ գծային առաձգական բաղադրյալ մարմինների անկյունային կետի շրջակայքում

Դիտարկվում է կամայական անկյունային մեծությամբ երկու սեպերից կազմված, ոչ գծային աստիձանային օրենքով ամրապնդվող, առաձգական բաղադրյալ սեպի լարվածա-դեֆորմացիոն վիձակը՝ երկայնական սահքի խնդրում, երբ ընդհանուր կողի վրա տրված են լրիվ կոնտակտի պայմանները։ Հոդոգրաֆի մեթոդի կիրառմամբ արտածված են լարումների և տեղափոխությունների դաշտերի արտահայտությունները անվերջ գումարների տեսքերով։ Ստացված տրանսցենդենտ հավասարման համակարգի արմատը, որոշակի ինտերվալում, որոշում է միացման գագաթի շրջակայքում լարումների վարքը և թերլարվածության երևույթը բնութագրող սահմանային կորի հավասարումը, որից մասնավոր դեպքում ստացվում է գծային առաձգականության հայտնի արդյունքները։

O.B. Agalaryan

Asympthotic behaviour of the solution of problem of longitudinal shear of compaund nonlinear elastic body at the neighbourhood of angular points

The asymptotic behavior of stressed state near wedge-shaped prominent or entering edge of surface is investigated at the outside compound nonlinear elastic body which is located in anti-plain condition under the action of external tangential loads applied on certain distance from the apex of junction. To the investigation of similar questions for plane problems, as well as the problem of torsion and longitudinal shear are dedicated [1-8].

Рассматривается асимптотическое поведение напряжённого состояния около клиновидного выступающего или входящего края поверхности в нагружённом составном нелинейном упругом теле, которое находится в антиплоском состоянии под действием внешних касательных нагрузок, приложенных на некотором расстоянии от вершины соединения.

Исследованию подобных вопросов для плоской задачи, а также задачи кручения и продольного сдвига посвящены [1–8].

1. Пусть составное клиновидное тело, изготовленное из двух различных нелинейно-упругих материалов, находится в состоянии антиплоской деформации под действием заданных внешних касательных нагрузок (фиг. 1-а). Требуется определить поля напряжений и деформаций в конечной области, содержащей внутри угловую точку, и вывести асимптотику этих полей в окрестности вершины соединения. Выберем декартовую координатную систему $\{X, Y, Z\}$, начало которой находится в угловой точке, а ось $\{O, Z\}$ направлена перпендикулярно к указанной плоскости. Тогда, по определению продольного сдвига, единственным неравным нулю компонентом перемещения будет $u_z^{(\iota)} = w_\iota(x, y)$, где (i = 1, 2), соответственно, для первого и второго тела. Следовательно, все компоненты деформации тождественно равны нулю кроме продольных сдвигов $\gamma_{xz}^{(i)}, \gamma_{yz}^{(i)}$. Следуя деформационной теории

пластичности, зависимость между напряжением и деформацией в общем случае принимается в виде

$$\tau_{xz} = \frac{T(\Gamma)}{\Gamma} \gamma_{xz}, \qquad \tau_{yz} = \frac{T(\Gamma)}{\Gamma} \gamma_{yz}.$$
(1.1)

Остальные компоненты напряжения равны нулю в связи с отсутствием соответствующих компонентов деформации. Здесь Т является интенсивностью касательных напряжений, а Γ – интенсивностью деформации сдвигов. В данном случае эти величины имеют вид:

$$T = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} , \qquad \Gamma = \sqrt{\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2} . \qquad (1.2)$$

В случае антиплоской деформации из общих уравнений равновесия и совместности остаются одно уравнение равновесия и одно уравнение совместности, то есть:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 ; \qquad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 0 . \qquad (1.3)$$

Уравнения (1.1) и (1.3) составляют нелинейную задачу в каждой области Ω_i (i = 1, 2), которые должны быть решены с учетом следующих граничных условий:

$$\begin{cases} \tau_{nz}^{(1)}(x, y) = 0 & \text{Ha} & OA \\ \tau_{nz}^{(2)}(x, y) = 0 & \text{Ha} & OB \end{cases}$$
(1.4)

На общей стороне ОС должны выполняться условия непрерывности составлящих напряжений и перемещений

$$\begin{cases} w^{(1)}(x,0) = w^{(2)}(x,0) \\ \tau^{(1)}_{yz}(x,0) = \tau^{(2)}_{yz}(x,0) \end{cases}$$
(1.5)

При полном построении решения в окрестности вершины соединения необходимо также удовлетворить граничным условиям на линиях AC и BC, которые можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \tau_{nz}^{(1)}(x, y) = f_1(x, y) & \text{Ha} & AC \\ \tau_{nz}^{(2)}(x, y) = f_2(x, y) & \text{Ha} & BC \end{cases},$$
(1.6)

где f_1 и f_2 – известные функции, удовлетворяющие условиям равновесия как следствие отсутствия внешних нагрузок.

Нелинейные уравнения задач продольного сдвига можно привести к линейным уравнениям, если координаты x, y рассмотреть как функции от деформации или, что эквивалентно, от напряжений, то есть

$$\begin{cases} x = x(\gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ y = y(\gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = x(\tau_{xz}, \tau_{yz}) \\ y = y(\tau_{xz}, \tau_{yz}) \end{cases}.$$
(1.7)

Такое предположение справедливо, если компоненты деформаций являются однозначными функциями координат в рассматриваемых областях. При асимптотическом исследовании, не нарушая общности задач, можно предположить, что в окрестности вершины соединения существует область, где такое соответствие имеет место. Тогда уравнения (1.3), с учётом (1.1), переходят в следующее, эквивалентное им, уравнение на плоскости $\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$ [5, 9] для неизвестных функций $\Psi^{(i)}(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$:

$$\frac{T(\gamma)}{\gamma T'(\gamma)} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial \vartheta^2} = 0, \qquad (1.8)$$

где { γ , 9} – полярная координатная система на плоскости { γ_{xz}, γ_{yz} }

$$\gamma_{xz} = \gamma \cos \vartheta, \quad \gamma_{yz} = -\gamma \sin \vartheta.$$

Здесь 9 отсчитывается от оси $\{0, \gamma_{yz}\}$ в направлении против часовой стрелки, отметим, что $\Gamma = \gamma$. При этом x и y в каждой области Ω_i определяются через функцию $\Psi^{(i)}$ следующими формулами:

$$\begin{cases} x = -\sin \vartheta \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \gamma} - \frac{\cos \vartheta}{\gamma} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \vartheta}, \\ y = \cos \vartheta \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \gamma} - \frac{\sin \vartheta}{\gamma} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$
(1.9)

Теперь выясным, для какой области и при каких краевых условиях необходимо решить уравнение (1.8). С этой целью отметим, что в работе [6] на основе линейной теории упругости для задачи кручениия призматических составных стержней, поперечное сечение которых представляет собой область, показанная на фиг. 1-а, получено, что на плоскости (α , β) существуют три типа областей: первая соответствует тому случаю, когда напряжения около рассматривамой угловой точки обращаются в нуль независимо от отношения модулей сдвига составляющих материалов; во второй области напряжения всегда имеют особенность, а в третьей

области каждому значению отношения $k_1 = \frac{G_1}{G_2}$ соответствует предельная кривая

$$(1+k_1)\sin(\alpha+\beta)+(1-k_1)\sin(\alpha-\beta)=0,$$

отделяющая зону малонапряжённости от зоны концентрации напряжения. При рассмотрении нелинейных тел предполагается, что указанные три типа областей не изменяются, а после построения решения нелинейной задачи доказывается справедливость этого предположения.



Пусть точка $\{\alpha, \beta\}$ принадлежит к области первого типа, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, при этом грани *OA* и *OB* отображаются на *OA*' и *OB*', а луч *OC* разбивается на две кривые: *OC*' и *OC*". Обозначим уравнение кривой *OC*' через $\varphi_1(\gamma_{xz})$, а *OC*" – через $\varphi_2(\gamma_{xz})$, которые можем представить в виде следующих степенных рядов в окрестности точки *O*':

$$\varphi_1(\gamma_{xz}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma_{xz}^n, \qquad \varphi_2(\gamma_{xz}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \gamma_{xz}^n.$$
(1.10)

С учетом условий (1.5) нетрудно убедиться, что между коэффициентами *a*₁ и *b*₁ справедливо следующее соотношение:

$$a_1 \left(1 + a_1^2 \right)^{\frac{\nu - 1}{2}} = \frac{B_2}{B_1} b_1 \left(1 + b_1^2 \right)^{\frac{\nu - 1}{2}} .$$
 (1.11)

Заменим линии OC' и OC'' касательными, проведенными в точке O и обозначим составленные углы с осью $\{O\gamma_{xz}\}$, соответственно, α_1 и β_1 , тогда будем иметь:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \arctan a_1 \\ \beta_1 = \arctan b_1 \end{cases}$$
(1.12)

Как известно, от этого характер распределения напряжений в малой окрестности угловой точки не изменится. С учетом этого, окончательно получим, что в области Ω_1' необходимо решить уравнение (1.8) для неизвестной функции $\Psi_1(\gamma, \vartheta)$ со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_{1}(\gamma, \vartheta)}{\partial \vartheta} = 0 & \vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \cos \vartheta \frac{\partial \Psi_{1}(\gamma, \vartheta)}{\partial \gamma} - \frac{\sin \vartheta}{\gamma} \frac{\partial \Psi_{1}(\gamma, \vartheta)}{\partial \vartheta} = 0 & \vartheta = -\frac{\pi}{2} + \alpha_{1} \end{cases}$$
(1.13)

а в области Ω_2' – уравнение (1.8) для функции $\Psi_2(\gamma, \vartheta)$ со следующими граничными условиями :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_2(\gamma, \vartheta)}{\partial \vartheta} = 0 & \vartheta = -\frac{\pi}{2} + \beta \\ \cos \vartheta \frac{\partial \Psi_2(\gamma, \vartheta)}{\partial \gamma} - \frac{\sin \vartheta}{\gamma} \frac{\partial \Psi_2(\gamma, \vartheta)}{\partial \vartheta} = 0 & \vartheta = -\frac{\pi}{2} + \beta_1 \end{cases}$$
(1.14)

Решения этих краевых задач при помощи метода разделения переменных записываются в виде

$$\Psi_{i}(\gamma, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{m_{k}^{(i)}} \left[\mathbf{A}_{k}^{(i)} \cos\left(\lambda_{k}^{(i)}\vartheta\right) + \mathbf{B}_{k}^{(i)} \sin\left(\lambda_{k}^{(i)}\vartheta\right) \right], \qquad (1.15)$$

где $\lambda_k^{(1)}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Delta_{1} = \begin{vmatrix} \sin \lambda_{k}^{(1)} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right); & -\cos \lambda_{k}^{(1)} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \\ \left(m_{k}^{(1)} + \lambda_{k}^{(1)} \right) \cos \left(1 - \lambda_{k}^{(1)} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + m_{k} - \lambda_{k}^{(1)}; \\ \left(m_{k}^{(1)} + \lambda_{k}^{(1)} \right) \sin \left(1 - \lambda_{k}^{(1)} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.16)$$

а Δ_1 является главным определителем системы относительно неизвестных постоянных $A_k^{(1)}, B_k^{(1)}$, полученных из граничных условий (1.13), а из граничных условий (1.14) следует, что $\lambda_k^{(2)}$ удовлетворяет уравнению:

$$\Delta_{2} = \begin{vmatrix} \sin \lambda_{k}^{(2)} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) & \cos \lambda_{k}^{(2)} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \\ \left(m_{k}^{(2)} + \lambda_{k}^{(2)} \right) \cos \left(1 - \lambda_{k}^{(2)} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + \left(m_{k}^{2} - \lambda_{k}^{(2)} \right) \cos \left(1 + \lambda_{k}^{(2)} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) & \left(m_{k}^{(2)} + \lambda_{k}^{(2)} \right) \end{vmatrix} = 0$$
где
$$m_{k}^{(i)} = \frac{1 - \nu + \sqrt{(1 + \nu)^{2} + 4\nu\lambda_{k}^{(i)^{2}}}}{2} \quad . \tag{1.17}$$

На основании формул (1.1) и (1.9) заключаем, что асимптотический характер компонентов напряжения определяется наименьшим значением $\lambda = \min_{k} \{\lambda_{k}^{(i)}\}$. Присодинения к уравнениям $\Delta_{1} = 0$ и $\Delta_{2} = 0$ условия (1.11), получим для трёх неизвестных величин $\{\lambda, a_{1}, b_{1}\}$ следующую систему из трёх уравнений :

$$\begin{cases} \lambda \sin \lambda (\pi - \alpha - \arctan a_1) + ma_1 \cos \lambda (\pi - \alpha - \arctan a_1) = 0\\ \lambda \sin \lambda (\operatorname{arctg} b_1 - \beta) - mb_1 \cos \lambda (\operatorname{arctg} b_1 - \beta) = 0 \quad , \quad (1.18)\\ a_1 (1 + a_1^2)^{\frac{\nu - 1}{2}} = \frac{B_2}{B_1} (1 + b_1^2)^{\frac{\nu - 1}{2}} b_1 \end{cases}$$

где $m = \frac{1}{2} \left(1 - \nu + \sqrt{(1 - \nu)^2 + 4\nu\lambda^2} \right)$

ſ

По данным значениям параметров $\{B_1, B_2, v\}$ из системы (1.18) можем определить λ , а потом и величину показателя особенности напряжения $\{n_1\}$ по

формуле $n_1 = \frac{\nu}{\lambda - 1}$. При построении этого решения предполагалось, что λ

является вещественной величиной. Как показывают дальнейшие исследования, при помощи предельного перехода, из полученных решений получаются результаты линейной теории упругости, а это означает, что принятое предположение является справедливым для любого значения V.

Пусть при фиксированном значении угла $\beta \alpha$ начинает увеличиваться, принимая значение больше $\frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$. Тогда с учетом того, что при построении отображения луч OA' не изменяет своего положения, а луч OC' поворачивается вокруг начала координат по направлению часовой стрелки, пересекая ось $\{O\gamma_{xz}\}$ и исходя из непрерывного характера отображения и следующих неравенств ($\beta < \beta' < \alpha' < \alpha$), приходим к выводу о существовании такого значения α , при котором области Ω'_1 и Ω'_2 одновременно переходят в отрезки. А это означает, что компоненты напряжения принимают отличные от нуля значения, т. е. точка $\{\alpha, \beta\}$ лежит на предельной кривой. Теперь определим уравнение этой кривой. С этой целью сначала покажем, что из системы уравнений (1.18) можно получить уравнение предельной кривой для линейной теории упругости. В этом случае ($\nu = 1, \lambda = m, B_1 = G_1, B_2 = G_2$) и из первых двух уравнений получим:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\lambda(\pi - \alpha - \operatorname{arctg}a_1) = -a_1 \\ \operatorname{tg}\lambda(\operatorname{arctg}b_1 - \beta) = b_1 \end{cases}$$

Решая систему (1.18) относительно a_1 и b_1 , будем иметь:

$$a_1 = -\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\alpha\right); \quad b_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\beta\right).$$

Подставляя эти значения в третье уравнение системы (1.18), после некоторых преобразований получим следующее уравнение относительно $\{\lambda\}$:

$$(1+k_1)\sin\frac{\lambda}{\lambda-1}(\alpha+\beta) + (k_1-1)\sin\frac{\lambda}{\lambda-1}(\alpha-\beta) = 0, \qquad (1.19)$$

которое при обозначении $\frac{\lambda}{\lambda - 1} = s$ полностью совпадает с уравнением, полученным в [6]. По данным значениям k_1 можем определить λ , а затем и показатель напряжения по формуле $n_1 = \frac{1}{\lambda - 1}$, отсюда следует, что напряжения принимают конечные значения, т. е. $n_1 \rightarrow 0$, если $\lambda \rightarrow \infty$. Сделав этот формальный предельный переход, получим уравнение предельной кривой для линейной теории упругости. Теперь рассмотрим нелинейный случай. Тогда из (1.17) следует:

$$\left(\operatorname{arctg} a_{1} + \frac{1}{\lambda} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{ma_{1}}{\lambda} \right) = \pi - \alpha \right),$$

$$\left(\operatorname{arctg} b_{1} - \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{mb_{1}}{\lambda} = \beta \right).$$

$$(1.20)$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda \to \infty$ и решив систему (с учетом правомерности предельного перехода), найдём

$$a_1 = -\mathsf{tg}\alpha, \quad b_1 = \mathsf{tg}\beta \tag{1.21}$$

Подставляя эти значения в третье уравнение, после некоторых преобразований получим уравнение предельной кривой для нелинейной задачи:

$$\left| B_1 \left| \cos \alpha \right|^{1-\nu} + B_2 \left| \cos \beta \right|^{1-\nu} \right| \sin(\alpha + \beta) + \left| B_1 \left| \cos \alpha \right|^{1-\nu} - B_2 \left| \cos \beta \right|^{1-\nu} \right| \sin(\alpha - \beta) = 0 (1.22)$$

которое при v = 1 переходит в соответствующее уравнение линейной задачи. Очевидно, что область второго типа также не изменяется. При увеличении vпредельная кривая продвигается в направлении начала координат, это означает, что если для линейного тела напряжения стремятся к нулю, то при переходе к нелинейному, напряжения могут принимать только конечные или бесконечные значения.

На основании формул (1.9) и (1.15) для неизвестных компонентов напряжений и перемещений нетрудно получить асимптотические формулы в окрестности угловой точки, обобщающие известные формулы в линейной теории упругости. В частности, для первого клина в полярной координатной системе (r, ϕ) эти выражения имеют вид:

$$\begin{cases} W^{(1)}(r,\phi) = K_{1}\left(\frac{r}{K_{1}}\right)^{\frac{m_{1}}{m_{1}-1}} \left[m_{1}^{2}\cos^{2}\lambda\left(\chi_{1}+\alpha-\frac{\pi}{2}+\vartheta_{1}\right) + \lambda^{2}\sin^{2}\lambda\left(\chi_{1}+\alpha-\frac{\pi}{2}+\vartheta_{1}\right)\right]^{\frac{m_{1}}{2(m_{1}-1)}}(1-m_{1})\cos\lambda(\chi_{1}-\phi); \\ \tau_{\phi z}^{(1)}(r,\phi) = B_{1}\left(\frac{r}{K_{1}}\right)^{\frac{\nu}{m_{1}-1}} \left[m_{1}^{2}\cos^{2}\lambda\left(\chi_{1}+\alpha-\frac{\pi}{2}+\vartheta_{1}\right) + \lambda^{2}\sin^{2}\lambda\left(\chi_{1}+\alpha-\frac{\pi}{2}+\vartheta_{1}\right)\right]^{\frac{\nu}{2(1-m_{1})}}\cos\lambda(\phi-\chi_{1}); \\ \tau_{rz}^{(1)}(r,\phi) = B_{1}\left(\frac{r}{K_{1}}\right)^{\frac{\nu}{m_{1}-1}} \left[m_{1}^{2}\cos^{2}\lambda\left(\chi_{1}+\alpha-\frac{\pi}{2}+\vartheta_{1}\right) + \lambda^{2}\sin^{2}\lambda\left(\chi_{1}+\alpha-\frac{\pi}{2}+\vartheta_{1}\right)\right]^{\frac{\nu}{2(1-m_{1})}}\sin\lambda(\phi-\chi_{1}); \\ + \lambda^{2}\sin^{2}\lambda\left(\chi_{1}+\alpha-\frac{\pi}{2}+\vartheta_{1}\right)\right]^{\frac{\nu}{2(1-m_{1})}}\sin\lambda(\phi-\chi_{1}); \end{cases}$$
(1.23)

где угол χ_1 определяется из следующего уравнения:

$$\lambda \sin(\varphi - \chi_1) \sin \lambda \left(\chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) - m_1 \cos \lambda \left(\chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) \cos(\varphi - \chi_1) = 0 \quad (1.24)$$

при $-\alpha < \varphi < 0 \qquad -\frac{\pi}{2} + \alpha_1^* < \chi_1 < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Нетрудно убедиться, что система трансцендентных уравнений имеет бесконечное множество собственных значений и соответствующие им собственные функции, которые образуют ортогональную систему. Поэтому, составляя суммы этих выражений по λ_i , тем самым, получаем решение краевой задачи в области, содержащей начало координат.

Нужно ещё удовлетворить условиям (1.6). С этой целью достаточно потребовать разложимость функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$ в ряд по собственным функциям и найти коэффициенты разложения. При этом, из этих выражений при помощи предельного перехода выводятся результаты линейной теории упругости. В [7] исследуется лишь характер, то есть показатель особенности напряжений, поэтому вышесказанные результаты по этой статье не выводятся и, в частности, не получаются асимптотические формулы типа формул (1.23).

Таким образом, если точка $\{\alpha, \beta\}$ и начало координат расположены по разные стороны от предельной кривой, то образы Ω_1 и Ω_2 будут дополнениями к

областям $\Omega_1^{'}, \Omega_2^{'}$.

Тогда уравнения $\phi_1(\gamma_{xz})$ и $\phi_2(\gamma_{xz})$ будут иметь вид:

$$\begin{cases} \varphi_1(\gamma_{xz}) = a_1 \gamma_{xz} + \varphi_{11}(\gamma_{xz}) \\ \varphi_2(\gamma_{xz}) = b_1 \gamma_{xz} + \varphi_{22}(\gamma_{xz}) \end{cases}$$
(1.25)

где $\varphi_{11}(\gamma_{xz})$ и $\varphi_{22}(\gamma_{xz})$ стремятся к нулю при $\gamma_{xz} \to \infty$. При помощи замены переменных $\gamma_1 = \frac{1}{\gamma}$, $\vartheta_1 = -\vartheta$, области Ω_1' и Ω_2' переходят в области,

выходящие из начала координат и снова неизвестные функции находятся при помощи метода однородных решений. Аналогичные построения можно сделать так же, тогда точка $\{\alpha, \beta\}$ принадлежит ко второму или третьему типу областей. При этом, для третьего типа области, сначала на основании нелинейной теории упругости необходимо решить задачу и построить соответствующую предельную кривую, а потом, определяя положение точки (α, β) относительно этой кривой, построить указанные отображения. Отметим, что для всех этих случаев полученная система полностью совпадает с системой (1.16), в которой α и β являются соответствующими углами растворов клиньев, а в выражении *M* перед радикалом надо поставить знак минус. Это дает возможность распространить метод годографа и для этих случаев, тем самым, исчерпая все возможные случаи, когда компоненты напряжения стремятся к нулю или бесконечно увеличиваются.

С целью применения полученных решений для определения поля напряжений и деформаций в составных телах, имеющих угловые вырезы или трещины, и подверженных упруго-пластическому кручению, отметим следующее: как в задаче кручения, так и в задаче антиплоского сдвига, имеется лишь один коэффициент интенсивности, и при малых пластических зонах поля в них асимптотически одинаковые. Это позволяет на основе полученных формул найти линию постоянной интенсивности касательных напряжений, то есть упруго-пластическую границу с точностью до постоянного множителя. Вне этой линии материал остается упругим, что делает целесообразным использование известных уравнений, для определения напряжённо-деформированного состояния в упругой области. Неизвестные множители K_i определяются из условий непрерывности решений на линии раздела. В заключение отметим, что указанный способ решения упруго-пластических задач справедлив тогда, когда область пластической деформации мала по сравнению с упругой областью, то есть когда она локализована в окрестности угловой точки.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.: Гостехиздат, 1947.
- 2. Математические основы теории разрушения. Т.2. М.: Мир, 1975.
- 3. Анин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука.Сибирское отделение. 1983.
- 4. Райс Дж. Напряжения, обусловленные острым вырезом в упрочняющемся материале при продольном сдвиге. // ПМ. №2. 1967.
- Соколовский В.В. Концентрация касательных напряжений при нелинейном законе деформации. //Изв. АН СССР. Инженерный ж-л. 1962. Т.2. Вып.2. С.362–368.
- 6. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд.АН Арм.ССР, 1987.
- 7. Задоян М.А. Продольный сдвиг составного клина. //ДАН СССР. 1987. №2.
- 8. Агаларян О.Б. К задаче кручения осесимметричного упруго-пластического тела с трещиной. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1987. Т.31. №6. С.36–41.
- 9. Агаларян О.Б. Асимптотическое поведение решения задачи продольного сдвига нелинейного упругого тела в окрестности угловых точек. //Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. №3. С.3–13.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 14.07.2006

2UBUUSUUF ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61. №2. 2008

Механика

УДК 539.3: 537.228.1

ОБ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА Аветисян А.Г., Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.

Ключевые слова: электроупругое поле, характеристики, особенность напряжений и электрической индукции.

Keywords: Electroelastisity field, characteristics, singularity of the stresses and electric induction.

Ա.Գ.Ավետիսյան, Գ.Գ.Ներսիսյան, Ա.Մ.Սարգսյան

Մեպի համար էլեկտրաառաձգականության տեսության մի խնդրում լարումների եզակիության մասին

Կառուցված է էլեկտրաառաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը բարակ պիեզաէլեկտրիկ սեպի համար, որի եզրերին տրված են զրոյական շոշոփող լարումներ և նորմալ տեղափոխությունների արժեքները։ Մեպի եզրերին տրված են նաև էլեկտրական երեք հնարավոր պայմաններ։ Հետազոտված է էլեկտրաառաձգական դաշտի բնութագրիչների (լարումներ, ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչներ) վարքը սեպի գագաթի շրջակայքում։ Ցույց է տրված, որ նշված մեխանիկական եզրային պայմանների դեպքում էլեկտրատաձգական դաշտի բնութագրիչների վարքի վոտ էլեկտրական եզրային պայմանների ազդեցությունը աննշան է։

A.G.Avetisian, G.G.Nersisian, A.M.Sargsian On Singularities of Stresses in One Problem of Electroelasticity Theory for a Wedge

The solution of a plane problem of electroelastisity for a thin piezoelectric wedge is built. On the bounds of the wedge the zero tangential stresses and the normal displacement values are given. On the bounds of the wedge three possible electric conditions are also given. The behaviour of electroelastic field characteristics (stresses, components of electric induction vector) in the visiting of the wedge top is studied. It is shown that at the noted mechanical boundary conditions the influence of electrical boundary conditions on the electroelastic characteristics (stresses, components of electric induction vector) is insignificant.

Построено решение плоской задачи электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина. На гранях клина заданы нулевые касательные напряжения и значения нормальных перемещений. На гранях клина заданы также три возможных электрических условия.

Исследуется поведение характеристик электроупругого поля (напряжения, компоненты вектора электрической индукции) в окрестности вершины клина.

Показано, что при этих механических граничных условиях влияние электрических граничных условий на поведение характеристик электроупругого поля незначительно.

Поведение характеристик электроупругого поля (напряжений и компоненты вектора электрической индукции) окрестности вершины тонкого В которого заданы пьезоэлектрического клина, на гранях разнообразные электромеханические условия, исследовано в ряде работ последних лет [1-5]. Выявлено влияние некоторых электромеханических граничных условий на характер распределения напряжений и электрической индукции вблизи вершины клина.

В данной работе эти вопросы исследуются для случая, когда на гранях клина осуществляется условие соприкасания с жестким штампом без трения (граничные условия гладкого контакта). Такая постановка задачи имеет определенный интерес еще и в том смысле, что исследование решений этой задачи в упругой постановке имеет ряд упущений [6-8]. Попытка заполнить этот пробел была предпринята в работе [9].

Рассмотрим краевую задачу электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина $(0 \le r < \infty, 0 < \theta \le \theta_1)$, на гранях которого заданы механические условия гладкого контакта

$$u_{\theta}(r,0) = u_{0}(r), \quad \tau_{r\theta}(r,0) = 0,$$

$$u_{\theta}(r,0) = u_{0}(r), \quad \tau_{r\theta}(r,0) = 0,$$
(1)

$$u_{\theta}(r, \theta_1) = u_1(r), \quad \tau_{r\theta}(r, \theta_1) = 0$$

и электрические условия, записанные в одном из видов

$$V(r,0) = V_0(r), \qquad V(r,\theta_1) = V_1(r),$$
 (2.1)

$$D_{\theta}(r,0) = D_0(r), \qquad D_{\theta}(r,\theta_1) = D_1(r),$$
 (2.2)

$$V(r,0) = V_0(r), \qquad D_0(r,\theta_1) = D_1(r).$$
 (2.3)

 $V(r,0) = V_0(r), \qquad D_{\theta}(r,\theta_1) = D_1(r).$ (2.3) В условиях (2.1) – (2.3) $V(r,\theta)$ – потенциал электрического поля, $D_{\theta}(r,\theta)$ –

компонент вектора электрической индукции в направлении θ .

Предполагается, что пьезоэлектрический клин в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии, параллельную его срединной плоскости.

Как и в работах [1-4], представляя общее решение уравнений электроупругости для тонкого пьезоклина

$$4\pi L_4 \varphi(x, y) - L_3 \psi(x, y) = 0, \quad L_3 \varphi(x, y) + L_2 \psi(x, y) = 0, \quad (3)$$

где

$$L_{2} = \eta_{22} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} - 2\eta_{12} \frac{\partial^{2}}{\partial x \partial y} + \eta_{11} \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}},$$

$$L_{3} = -g_{22} \frac{\partial^{3}}{\partial x^{3}} + (g_{12} + g_{26}) \frac{\partial^{3}}{\partial x^{2} \partial y} - (g_{21} + g_{16}) \frac{\partial^{3}}{\partial x \partial y^{2}} + g_{11} \frac{\partial^{3}}{\partial y^{3}},$$

$$L_{4} = s_{22} \frac{\partial^{4}}{\partial x^{4}} - 2s_{26} \frac{\partial^{4}}{\partial x^{3} \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^{4}}{\partial x^{2} \partial y^{2}} - 2s_{16} \frac{\partial^{4}}{\partial x \partial y^{3}} + s_{11} \frac{\partial^{4}}{\partial y^{4}}$$

 $(s_{22}, \dots -$ коэффициенты упругости при постоянной электрической индукции, η_{22}, \dots коэффициенты диэлектрической восприимчивости при постоянных механических напряжениях, g_{22}, \cdots – пьезоэлектрические модули) в виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} \varphi_{j} (x + \mu_{j} y) = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} \varphi_{j} (z_{j}),$$

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} f_{j} \varphi_{j}' (x + \mu_{j} y) = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} f_{j} \varphi_{j}' (z_{j})$$
(4)

и учитывая уравнения состояния, условие потенциальности электрического поля и соотношения

$$\sigma_{x} = \partial^{2} \phi / \partial y^{2}, \quad \sigma_{y} = \partial^{2} \phi / \partial x^{2}, \quad \tau_{xy} = -\partial^{2} \phi / \partial x \partial y,$$

$$D_{x} = \partial \psi / \partial y, \quad D_{y} = -\partial \psi / \partial x$$
(5)

в полярной системе координат имеем

$$\sigma_{r} = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} b_{j}^{2}(\theta) \varphi_{j}^{"}(z_{j}), \qquad \sigma_{\theta} = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} a_{j}^{2}(\theta) \varphi_{j}^{"}(z_{j}), \tau_{r\theta} = -\sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} a_{j}(\theta) b_{j}(\theta) \varphi_{j}^{"}(z_{j}), \qquad \frac{\partial u_{r}}{\partial r} = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} a_{j}(\theta) c_{j}(\theta) \varphi_{j}^{"}(z_{j}),$$

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} a_{j}(\theta) d_{j}(\theta) \varphi_{j}^{"}(z_{j}), \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} a_{j}(\theta) m_{j} \varphi_{j}^{"}(z_{j}),
D_{\theta} = -\sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} a_{j}(\theta) f_{j} \varphi_{j}^{"}(z_{j}), \qquad D_{r} = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} b_{j}(\theta) f_{j} \varphi_{j}^{"}(z_{j}),$$
(6)

где

$$a_{j}(\theta) = \cos \theta + \mu_{j} \sin \theta, \qquad b_{j}(\theta) = -\sin \theta + \mu_{j} \cos \theta,$$

$$M_{j} = s_{11}\mu_{j}^{2} - s_{16}\mu_{j} + s_{12} - f_{j}(g_{11}\mu_{j} - g_{21})/4\pi,$$

$$N_{j} = s_{12}\mu_{j} - s_{26} + s_{22}\mu_{j}^{-1} - f_{j}(g_{12} - g_{22}\mu_{j}^{-1})/4\pi,$$

$$m_{j} = g_{11}\mu_{j}^{2} - g_{16}\mu_{j} + g_{12} + f_{j}(\eta_{11}\mu_{j} - \eta_{12}),$$

$$c_{j}(\theta) = M_{j}\cos\theta + N_{j}\sin\theta, \qquad d_{j}(\theta) = N_{j}\cos\theta - M_{j}\sin\theta,$$

 D_x и D_y – компоненты вектора электрической индукции в направлениях x и y. μ_j – неравные между собой корни алгебраического уравнения шестого порядка

$$4\pi l_4(\mu) l_2(\mu) + l_3^2(\mu) = 0, \qquad (7)$$

$$\mu_j = \sigma_j + i\nu_j, \quad f_j = -l_3(\mu_j)/l_2(\mu_j) \quad (j = 1, 2, ..., 6),$$

$$\mu_4 = \overline{\mu}_1, \quad \mu_5 = \overline{\mu}_2, \quad \mu_6 = \overline{\mu}_3; \quad \nu_1 > 0, \quad \nu_2 > 0, \quad \nu_3 > 0,$$

$$\gamma_j = \begin{cases} 1, \quad (j = 1, 2, 4, 5) \\ l_3(\mu_j)/4\pi l_4(\mu_j) \quad (j = 3, 6). \end{cases}$$

Полиномы $l_k(\mu)$ (k = 2, 3, 4) получаются из L_k заменой $\partial^k / \partial x^k$ на единицу, а $\partial^k / \partial y^k$ – на μ^k .

Принимается, что корни уравнения (7) не являются одновременно корнями уравнений $l_k(\mu) = 0$ (k = 2, 3, 4).

Для решения краевых задач (1)–(5) используется обобщенное интегральное преобразование Меллина аналитической функции $f(z) = f(x + \mu y)$ (μ -некоторая комплексная константа), впервые, по-видимому, введенное в работах [10, 11]

$$\langle f(z) \rangle = \int_{0}^{\infty} f(z) r^{s-1} dr = a^{-s}(\theta) \overline{f}(s),$$

$$a(\theta) = \cos \theta + \mu \sin \theta, \ \overline{f}(s) = \int_{0}^{\infty} f(z) z^{s-1} dz,$$

$$f(z) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle f(z) \rangle r^{-s} ds.$$

$$(8)$$

Если f(z) аналитична в некотором секторе $\theta_0 < \theta < \theta_*$, $0 < r \le \infty$ и $f(z) = O(r^{\xi})$ при $r \to 0$, $f(z) = O(r^{\eta})$ при $r \to \infty$, то $\overline{f}(s)$ существует в полосе $-\xi < c < -\eta$ и не зависит от θ в заданном секторе.

Будем искать решение (1)–(6), удовлетворяющее следующим условиям: $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \tau_{r\theta}, D_r, D_{\theta}, \partial u_r / \partial r$ и $\partial u_{\theta} / \partial r$ при $r \to 0$ имеют порядок $O(r^{-1+\alpha})$, а при $r \to \infty$ исчезают как $O(r^{-1-\beta})$, где $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$. Тогда в полосе $1 - \alpha < \operatorname{Re} s < 1 + \beta$ существует преобразование Меллина.

Применяя обобщенное интегральное преобразование Меллина к выражениям (6), получим

$$\langle \sigma_r \rangle = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j b_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) \overline{\varphi}_j(s), \qquad \langle \sigma_\theta \rangle = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) \overline{\varphi}_j(s), \langle \tau_{r\theta} \rangle = -\sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \overline{\varphi}_j(s), \qquad \langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \rangle = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) c_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \overline{\varphi}_j(s), \langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \rangle = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) d_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \overline{\varphi}_j(s), \qquad \langle \frac{\partial V}{\partial r} \rangle = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) m_j a_j^{-s}(\theta) \overline{\varphi}_j(s), \langle D_\theta \rangle = -\sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) \overline{\varphi}_j(s), \qquad \langle D_r \rangle = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j b_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) \overline{\varphi}_j(s), \overline{\varphi}_j(s) = \int_{0}^{\infty} \varphi_j^{*}(z_j) z_j^{s-1} dz_j.$$
(9)

Продифференцировав первое и третье условия из (1) и (2.1) по r и применив к граничным условиям (2)–(2.1), (2)–(2.2), (2)–(2.3) преобразование Меллина (предполагается, что функции $V_0(r)$, $V_1(r)$, $D_0(r)$ и $D_1(r)$ удовлетворяют требованиям преобразования Меллина), в каждом конкретном случае получим систему алгебраических уравнений относительно $\overline{\phi}_i(s)$

$$\sum_{j=1}^{6} B_{lj} \overline{\varphi}_j(s) = T_l(s), \quad (l = 1, 2, \dots, 6), \quad (10)$$

где под $T_l(s)$ подразумеваются преобразования соответствующих граничных условий.

В случае граничных условий (1), (2.1) имеем

$$T_{l1}^* = \left\| \left\langle du_0(r)/dr \right\rangle, 0, \left\langle \sigma_1(r) \right\rangle, 0, \left\langle dV_0(r)/dr \right\rangle, \left\langle dV_1(r)/dr \right\rangle \right\|$$

Здесь звездочка означает транспонирование.

Матрица коэффициентов B_{li} в данном случае имеет вид:

где

$$a_{j} = a_{j}(\theta_{1}), \ b_{j} = b_{j}(\theta_{1}), \ c_{j} = c_{j}(\theta_{1}), \ d_{j} = d_{j}(\theta_{1}),$$

48

$$m_{33} = \gamma_3 (g_{11}\mu_3^2 - g_{16}\mu_3 + g_{12}) + \eta_{11}\mu_3 - \eta_{12},$$

$$m_{66} = \gamma_6 (g_{11}\mu_6^2 - g_{16}\mu_6 + g_{12}) + \eta_{11}\mu_6 - \eta_{12}.$$

Заменяя в пятой и шестой строках матрицы (11) m_j на f_j , а пятый и шестой элементы матрицы (11) на $\langle -D_0(r) \rangle$ и $\langle -D_1(r) \rangle$, получим коэффициенты и правые части системы (9) для граничных условий (2)– (2.2).

Для получения коэффициентов B_{ij} и правых частей системы (10), в случае граничных условий (2)–(2.3) соответствующая замена совершенно очевидна.

Определяя $\overline{\phi}(s)$ из (9) и подставляя в (8), получим выражения для трансформант компонент напряжения и вектора электрической индукции

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma}_{r} \right\rangle = \sum_{l=1}^{6} T_{l} \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} b_{j}^{2}(\boldsymbol{\theta}) a_{j}^{-s}(\boldsymbol{\theta}) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) ,$$

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\theta}} \right\rangle = \sum_{l=1}^{6} T_{l} \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} a_{j}^{2}(\boldsymbol{\theta}) a_{j}^{-s}(\boldsymbol{\theta}) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) ,$$

$$\left\langle \boldsymbol{\tau}_{r\boldsymbol{\theta}} \right\rangle = -\sum_{l=1}^{6} T_{l} \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} a_{j}(\boldsymbol{\theta}) b_{j}(\boldsymbol{\theta}) a_{j}^{-s}(\boldsymbol{\theta}) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) ,$$

$$\left\langle D_{\boldsymbol{\theta}} \right\rangle = -\sum_{l=1}^{6} T_{l} \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} a_{j}(\boldsymbol{\theta}) f_{j} a_{j}^{-s}(\boldsymbol{\theta}) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) ,$$

$$\left\langle D_{r} \right\rangle = \sum_{l=1}^{6} T_{l} \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} b_{j}(\boldsymbol{\theta}) f_{j} a_{j}^{-s}(\boldsymbol{\theta}) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) ,$$

$$\left\langle D_{r} \right\rangle = \sum_{l=1}^{6} T_{l} \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_{j} b_{j}(\boldsymbol{\theta}) f_{j} a_{j}^{-s}(\boldsymbol{\theta}) A_{lj} \right] \Delta^{-1}(s) ,$$

где $\Delta_1(s)$ – определитель матрицы (11), A_{lj} – алгебраические дополнения B_{lj} . Аналогичные выражения записываются и при других граничных условиях.

Характеристики электроупругого поля находим из трансформант $\langle \sigma_r \rangle, \ldots, \langle D_r \rangle$ (которые определены в той же области, что и преобразования Меллина внешних воздействий) с помощью обратного преобразования Меллина, путь интегрирования которого лежит в полосе

$$\max_{\operatorname{Re} s_k < 1} (\operatorname{Re} s_k) < c < \min_{\operatorname{Re} s_k \ge 1} (\operatorname{Re} s_k), \qquad (13)$$

где s_k (k = 1, 2, ...) – полюсы $\langle \sigma_r \rangle, ..., \langle D_r \rangle$.

Явный вид $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \tau_{r\theta}, D_{\theta}$ и D_r может быть получен численным интегрированием, но для их ассимптотического исследования при $r \to 0$ дополним путь интегрирования (13) влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах. В результате получим [10, 11]

49

где N_k – кратность полюсов s_k , а $G_{krn}(\theta), \dots, H_{krn}(\theta)$ – гладкие функции угла θ , причем $\operatorname{Re} s_k < 1$ ($\operatorname{Re} s_1 > \operatorname{Re} s_2 > \dots$).

Если внешние воздействия равны нулю в некоторой окрестности вершины клина, то в области $\operatorname{Re} s < 1$ нет полюсов $T_l(s)$ и все полюсы s_k находятся среди нулей $\Delta(s)$. Следовательно, сингулярные члены в (14) определяются только нулями $\Delta(s)$ в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Причем максимальная степень сингулярности напряжений равна действительной части s_k , ближайшего к прямой $\operatorname{Re} s = 1$. Если $\Delta(s)$ имеет нули только первого порядка, то в выражениях (13) отсутствуют множители $\ln r$.

Заметим, что при отсутствии пьезоэффекта $g_{ij} = 0$ каждая из рассматриваемых задач распадается на две независимые задачи: упругую задачу для анизотропного клина $L_4 \varphi(x, y) = 0$ с граничными условиями (5) и электростатическую задачу $L_2 \psi(x, y) = 0$ с одним из граничных условий (5.1)–(5.4).

При этом вместо (2) и (3) будем иметь

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + \varphi_4(z_4) + \varphi_5(z_5),$$
(2)

$$\Psi(x, y) = \Phi_3(z_3) + \Phi_6(z_6),$$

$$l_4(\mu)l_2(\mu) = 0, (3)$$

а матрица (11) становится ступенчатой с диагональными клетками A_4 и A_2

$$\begin{vmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}$$

где A_4 – матрица четвертого порядка, A_2 – второго порядка. Корни $l_4(\mu) = 0$



зависят только от упругих коэффициентов, а корни $l_2(\mu) = 0$ –только от коэффициентов диэлектрической восприимчивости.

Некоторые результаты численного исследования зависимости $\text{Re } s_1$ от угла раствора клина, изготовленного из бифталата калия или бифталата рубидия, представлены в виде кривых на фиг. 1*a* и 1*б*, соответственно (номера кривых соответствуют номерам граничных условий (2)). Там же, для сравнения, приведены соответствующие кривые для упругого изотропного (кривая 4) и анизотропного (кривая 5) клиньев.

Как следует из приведенных кривых, особенности напряжений, возникающие в задачах электроупругости и упругости для клина при граничных условиях гладкого контакта, почти полностью совпадают, т.е. электрические граничные условия (2.1)–(2.3) в данном случае не влияют на поведение характеристик электроупругого поля, что было обнаружено также в работе [12]. Между тем, в работах [1–4], где на гранях клина были заданы или напряжения, или перемещения, обнаружено, что при смешанных электрических граничных условиях такое влияние существенно.

ЛИТЕРАТУРА

- Саргсян А.М. Поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки пьезоэлектрического клина при обобщенном плоском напряженном состоянии. // Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. №1. С. 34-39.
- Саргсян А.М. Особенность связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Сб. научных трудов конференции, посвященной 91летию со дня рождения профессоров Т.Т.Хачатряна и О.М.Сапонджяна, состоявшейся 23-24 октября 1998г. в г.Ереване. С. 169-175.
- Саргсян А.М. Об особенности связанного плоского электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №2. С. 36-41.
- Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий на поведение напряжений в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армении, Механика. 2005. Т.58. №3. С.7481.
- 5. Саргсян А.М. О решении краевых задач электроупругости для клиновидных областей. // Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №2. С.153-160.
- 6. Каландия А.И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. // ПММ. 1969. Т. 33. №1. С. 132-135.
- Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312с.
- Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688с.
- 9. Саргсян А.М. Об особенности напряжений в одной задаче теории упругости для клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. №1. С.48–53.
- 10. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.416 с.
- 11. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. // ПМ. 1975. №5. С. 45-53.
- Аветисян А.Г., Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. О решении четырех краевых задач электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №3. С.27-33.

Институт механики НАН Армении Поступила в редакцию 27.04.2007

2U8UUSUUF ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61. №2. 2008

Механика

УДК 62.50:534.112

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАДАННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ Барсегян В. Р., Саакян М. А.

Ключевые слова: струна, колебания, промежуточные моменты времени, оптимальное управление Keywords: wire, vibration, intermediate periods of time, optimal control

Վ.Ռ. Բարսեղյան, Մ. Ա. Սահակյան Ժամանակի միջանկյալ պահերին տրված վիձակներով լարի տատանման օպտիմալ ղեկավարումը

Ուսումնասիրված է ժամանակի միջանկյալ պահերին տրված վիձակներով լարի տատանման օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը։ Օգտվելով Ֆուրյեի փոփոխականների անջատման եղանակից յուրաքանչյուր հարմոնիկի համար կամայական թվով միջանկյալ պահերի դեպքում մոմենտների պրոբլեմով լուծված է օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը։ Մտացվել են օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները և լարի տատանման ֆունկցիան։ Բերված է թվային օրինակ։

V. R. Barsegyan, M. A. Sahakyan The optimal control of wire vibration in the states of the given intermediate periods of time

The problem of the optimal control of wire vibration in the states of given intermediate periods of time is investigated. By using Fourier's method of parting variables for each harmonic with arbitrary cases of intermediate moments, with the help of the moments problem the problem of optimal control is solved. The optimal control effects and function of wire vibration are received. Numerical example is given.

Рассмотрена задача об оптимальном управлении колебания струны с заданными промежуточными состояниями. Используя метод разделения переменных по Фурье, для каждой гармоники с произвольным количеством промежуточных моментов с помощью проблемы моментов решена задача оптимального управления. Получены оптимальные управляющие воздействия и функция колебаний струны. Приведен числовой пример.

1. Рассмотрим однородную, упругую струну длиной ℓ , края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью u(x,t). Ограничимся рассмотрением малых колебаний струны и предположим, что участок, на который действуют распределенные силы, имеет положительную меру по Лебегу.

Пусть Q(x,t) при $0 \le x \le \ell$ и $t \ge 0$ есть прогиб струны, подчиненный при $0 < x < \ell$ и t > 0 следующему уравнению [1]:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + u(x,t)$$
(1.1)

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_0(x) \quad 0 \le x \le \ell$$
(1.2)

и однородными граничными условиями

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(\ell,t) = 0 \quad t > 0,$$
 (1.3)

где $a^2 = T_0 / \rho$, T_0 – натяжение, ρ – плотность однородной струны.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = T$ заданы значения состояния и скорости любой точки струны

$$Q(x,t_j) = \varphi_j(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{t=t_j} = \psi_j(x) \quad (j = 1,2,...,n)$$
(1.4)

Задача оптимального управления колебаниями струны ставится следующим образом: среди возможных управлений u(x,t) при $0 \le x \le \ell$, $0 \le t \le T$ требуется найти оптимальное управление $u^0(x,t)$, переводящее струну из заданного начального состояния (1.2) через промежуточные состояния (1.4) в конечное состояние

$$Q(x,T) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0 \quad 0 \le x \le \ell$$
(1.5)

и минимизирующее функционал

$$\int_{0}^{T} \int_{0}^{\ell} \left[u(x,t) \right]^{2} dx dt.$$
 (1.6)

2. Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$Q(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} x.$$
(2.1)

Представив функции u(x,t), $\varphi_j(x,t)$, $\psi_j(x,t)$ (j = 1,2,...,n) в виде рядов Фурье и подставив их значения вместе с Q(x,t) в уравнение (1.1) и в условие (1.2), (1.4), (1.5), получаем

$$\ddot{Q}_{k}(t) + \lambda_{k}^{2} Q_{k}(t) = u_{k}(t)$$
(2.2)

$$Q_k(0) = \varphi_k^{(0)}, \quad \dot{Q}_k(0) = \psi_k^{(0)}$$
 (2.3)

$$Q_k\left(t_j\right) = \varphi_k^{(j)}, \quad \dot{Q}_k\left(t_j\right) = \psi_k^{(j)} \quad \left(j = 1, ..., n\right)$$
(2.4)

$$Q_{k}(T) = \varphi_{k}^{(n+1)} = 0, \quad \dot{Q}_{k}(T) = \psi_{k}^{(n+1)} = 0, \quad (2.5)$$

где через $u_k(t)$, $\phi_k^{(j)}$, $\psi_k^{(j)}$ обозначены коэффициенты Фурье, соответственно функциям

 $u(x,t), \quad \varphi_j(x,t), \quad \psi_j(x,t), \quad a \quad \lambda_k^2 = a^2 \pi^2 k^2 / \ell^2 \quad (k = 1, 2, ...).$

Предполагается, что функция u(x,t) такая, что ее коэффициенты $u_k(t)$ $0 \le t \le T$ для любого индекса k не равны нулю.

Общее решение уравнения (2.2) с начальными условиями (2.3) имеет вид [2]

$$Q_k(t) = \varphi_k^{(0)} \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \psi_k^{(0)} \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t u_k(\tau) \sin \lambda_k(t-\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Имея явное выражение (2.6) для Q(x,t) и учитывая условия (2.4) и (2.5), получим, что функции $u_k(\tau)$ должны удовлетворять следующей бесконечной системе равенств:

$$\int_{0}^{t_j} u_k(\tau) \sin \lambda_k(t_j - \tau) d\tau = \lambda_k \varphi_k^{(j)} - \lambda_k \varphi_k^{(0)} \cos \lambda_k t_j - \psi_k^{(0)} \sin \lambda_k t_j$$
(2.7)

$$\int_{0}^{t_j} u_k(\tau) \cos\lambda_k(t_j - \tau) d\tau = \psi_k^{(j)} - \lambda_k \phi_k^{(0)} \sin\lambda_k t_j - \psi_k^{(0)} \cos\lambda_k t_j, \qquad (2.8)$$

где (j = 1, 2, ..., n + 1).

Эти равенства удобно представить в виде

$$\int_{0}^{t_{j}} u_{k}(\tau) \sin \lambda_{k} \tau d\tau = c_{1k}(t_{j}), \quad \int_{0}^{t_{j}} u_{k}(\tau) \cos \lambda_{k} \tau d\tau = c_{2k}(t_{j}), \quad (2.9)$$

где

$$c_{1k}(t_j) = \lambda_k \varphi_k^{(0)} - \lambda_k \varphi_k^{(j)} \cos \lambda_k t_j + \psi_k^{(j)} \sin \lambda_k t_j$$

$$c_{2k}(t_j) = -\psi_k^{(0)} + \psi_k^{(j)} \cos \lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_k^{(j)} \sin \lambda_k t_j$$
(2.10)

Для того, чтобы левую часть системы (2.9) для каждого ($\kappa = 1, 2, 3, ...$) рассматривать как линейную операцию, порожденную функцией $u_k(\tau)$ на отрезке [0,T], целесообразно ввести следующие функции [3]:

$$h_{1k}^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \sin \lambda_k \tau & \text{при } 0 \le \tau \le t_j \\ 0 & \text{при } t_j \le \tau \le T \end{cases}$$

$$h_{2k}^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \cos \lambda_k \tau & \text{при } 0 \le \tau \le t_j \\ 0 & \text{при } t_j \le \tau \le T, \end{cases}$$

$$(2.11)$$

где (j = 1, 2, ..., n + 1).

Соотношения (2.9) при помощи функций $h_{1k}^{(j)}(\tau)$ (2.11) и $h_{2k}^{(j)}(\tau)$ (2.12) запишутся как:

$$\int_{0}^{T} h_{1k}^{(j)}(\tau) u_{k}(\tau) d\tau = c_{1k}(t_{j})$$

$$\int_{0}^{T} h_{2k}^{(j)}(\tau) u_{k}(\tau) d\tau = c_{2k}(t_{j}) \qquad (j = 1, 2, ..., n + 1)$$
(2.13)

Учитывая, что u(x,t) является элементом пространства L_2 при $x \in [0, \ell]$, получим, что минимизация функционала (1.6) равносильна минимизации функционалов

$$\int_{0}^{T} u_{k}^{2}(\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, ...)$$
(2.14)

Таким образом, для каждого индекса k надо найти такое оптимальное управляющее воздействие $u_k^{(0)}(t)$ $t \in [0,T]$, (k = 1,2,...), которое удовлетворяет интегральным условиям (2.13) и минимизирует функционал (2.14). Так как (2.14) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, то решение поставленной задачи можно найти с помощью проблемы моментов [4].

3. Для решения задачи (2.13), (2.14), следуя работам [2,4], нужно найти числа p_{jk} и q_{jk} (j = 1, 2, ..., n + 1), связанные условием

$$\sum_{j=1}^{n+1} [p_{jk}c_{1k}(t_j) + q_{jk}c_{2k}(t_j)] = 1, \qquad (3.1)$$

для которых

$$\left(\rho_{k}^{0}\right)^{2} = \min_{(3.1)} \int_{0}^{T} h_{k}^{2}(\tau) d\tau , \qquad (3.2)$$

где

$$h_k(\tau) = \sum_{j=1}^{n+1} [p_{jk} h_{1k}^{(j)}(\tau) + q_{jk} h_{2k}^{(j)}(\tau)] .$$
(3.3)

Подставляя (3.3) в (3.2), проведя соответствующие вычисления и вводя следующие обозначения:

$$a_{ik} = t_i - \frac{\sin 2\lambda_k t_i}{2\lambda_k}, \ b_{ik} = t_i + \frac{\sin 2\lambda_k t_i}{2\lambda_k}, \ d_{ik} = \frac{\sin^2 \lambda_k t_i}{\lambda_k},$$

будем иметь

$$(p_k^0)^2 = \min_{(3,1)} \left[\sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \left(p_{ik} p_{jk} a_{jk} + p_{ik} q_{jk} d_{jk} + q_{ik} q_{jk} b_{jk} + p_{jk} q_{ik} d_{jk} \right) + \sum_{j=i}^{n+1} \left(p_{ik} p_{jk} a_{ik} + p_{ik} q_{jk} d_{ik} + q_{ik} q_{jk} b_{ik} + p_{jk} q_{ik} d_{ik} \right) \right) \right]$$

$$(3.4)$$

Методом неопределенных множителей Лагранжа из (3.4) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (p_{ik}a_{1k} + q_{ik}d_{1k}) = v_k c_{1k}(t_1)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (p_{ik}d_{1k} + q_{ik}b_{1k}) = v_k c_{2k}(t_1)$$

$$\sum_{i=m+1}^{n+1} (p_{ik}\sigma_{1mk} + q_{ik}\sigma_{3mk}) = -v_k c_{1mk}$$

$$\sum_{i=m+1}^{n+1} (p_{ik}\sigma_{3mk} + q_{ik}\sigma_{2mk}) = -v_k c_{2mk} \quad (m = 1, ..., n)$$
(3.5)

где приняты следующие обозначения:

$$\sigma_{1ik} = a_{ik} - a_{i+1k}, \ \sigma_{2ik} = b_{ik} - b_{i+1k}, \ \sigma_{3ik} = d_{ik} - d_{i+1k}$$

$$c_{1ik} = c_{1k}(t_{i+1}) - c_{1k}(t_i), \ c_{2ik} = c_{2k}(t_{i+1}) - c_{2k}(t_i) \ (i = 1, ..., n)$$
(3.6)

а v_k – неопределенный множитель Лагранжа. Присоединяя к системе (3.5) условие (3.1), получим замкнутую систему алгебраических уравнений относительно p_{jk} , q_{jk} , v_k (j = 1, 2, ..., n + 1).

Полученная система алгебраических уравнений допускает следующее решение:

$$\begin{cases} p_{1k} = v_k \left(\frac{e_k}{\Delta_k} + \frac{M_{1k}}{\Delta_{1k}} \right), \\ q_{1k} = v_k \left(\frac{f_k}{\Delta_k} + \frac{N_{1k}}{\Delta_{1k}} \right) \\ p_{mk} = v_k \left(\frac{M_{mk}}{\Delta_{mk}} - \frac{M_{m-1k}}{\Delta_{m-1k}} \right) \\ q_{mk} = v_k \left(\frac{N_{mk}}{\Delta_{mk}} - \frac{N_{m-1k}}{\Delta_{m-1k}} \right) \quad m = 2, ..., n \end{cases}$$

$$p_{n+1k} = -v_k \frac{M_{nk}}{\Delta_{nk}}, \\ p_{n+1k} = -v_k \frac{N_{nk}}{\Delta_{nk}}, \\ v_k = \frac{\Delta_k}{A_k} \end{cases}$$

$$(3.7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$e_{k} = c_{1k}(t_{1})b_{1k} - c_{2k}(t_{1})d_{1k}, \quad f_{k} = c_{2k}(t_{1})a_{1k} - c_{1k}(t_{1})d_{1k}$$

$$\Delta_{ik} = \sigma_{1ik}\sigma_{2ik} - \sigma_{3ik}^{2}, \quad \Delta_{k} = a_{1k}b_{1k} - d_{1k}^{2}$$

$$M_{ik} = c_{1ik}\sigma_{2ik} - c_{2ik}\sigma_{3ik}, \quad N_{ik} = c_{2ik}\sigma_{1ik} - c_{1ik}\sigma_{3ik}, \quad (3.8)$$

$$A_{k} = c_{1k}^{2}(t_{1})b_{1k} - 2c_{1k}(t_{1})c_{2k}(t_{1})d_{1k} + c_{2k}^{2}(t_{1})a_{1k} - \sum_{i=1}^{n}(c_{1ik}M_{ik} + c_{2ik}N_{ik})\frac{\Delta_{k}}{\Delta_{ik}}$$

Из (3.4) с учетом (3.7) будем иметь

$$\left(\rho_k^0\right)^2 = \frac{\Delta_k}{2A_k} \,. \tag{3.9}$$

Подставляя из (3.7) значения для p_{jk}^0 , q_{jk}^0 (j = 1, 2, ..., n + 1) в (3.3), получим

$$h_{k}^{(0)}(\tau) = \frac{1}{A_{k}} \left[e_{k} h_{1k}^{(1)}(\tau) + f_{k} h_{2k}^{(1)}(\tau) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{k}}{\Delta_{ik}} M_{ik} \left(h_{1k}^{(i)}(\tau) - h_{1k}^{(i+1)}(\tau) \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{k}}{\Delta_{ik}} N_{ik} \left(h_{2k}^{(i)}(\tau) - h_{2k}^{(i+1)}(\tau) \right) \right]$$
(3.10)

Так как

$$u_k^0(t) = \frac{1}{\left(\rho_k^0\right)^2} h_k^{(0)}(t), \qquad (3.11)$$

то с учетом (2.11), (2.12) и учитывая (3.9), (3.10), для каждого индекса оптимальное управляющее воздействие имеет следующий вид:

$$u_{k}^{0}(t) = \begin{cases} u_{k}^{01}(t) & \text{при } 0 \le t \le t_{1} \\ u_{k}^{02}(t) & \text{при } t_{1} < t \le t_{2} \\ \dots \\ u_{k}^{0n+1}(t) & \text{при } t_{n} < t \le t_{n+1} \end{cases}$$
(3.12)

где

$$\begin{split} u_{k}^{0i+1}(t) &= \frac{2}{(t_{i+1} - t_{i})(1 - (S_{ki})^{2})} \Biggl\{ \Biggl\{ \lambda_{k} \varphi_{k}^{(i)} \Bigl[\cos \lambda_{k} t_{i} + S_{ki} \cos \lambda_{k} t_{i+1} \Bigr] - \\ &- \psi_{k}^{(i)} \Bigl[\sin \lambda_{k} t_{i} - S_{ki} \sin \lambda_{k} t_{i+1} \Bigr] - \lambda_{k} \varphi_{k}^{(i+1)} \Bigl[\cos \lambda_{k} t_{i+1} + S_{ki} \cos \lambda_{k} t_{i} \Bigr] + \\ &+ \psi_{k}^{(i+1)} \Bigl[\sin \lambda_{k} t_{i+1} - S_{ki} \sin \lambda_{k} t_{i} \Bigr] \Biggr\} \sin \lambda_{k} t + \\ &+ \Biggl\{ - \lambda_{k} \varphi_{k}^{(i)} \Bigl[\sin \lambda_{k} t_{i} + S_{ki} \sin \lambda_{k} t_{i+1} \Bigr] - \psi_{k}^{(i)} \Bigl[\cos \lambda_{k} t_{i} - S_{ki} \cos \lambda_{k} t_{i+1} \Bigr] + \\ &+ \lambda_{k} \varphi_{k}^{(i+1)} \Bigl[\sin \lambda_{k} t_{i+1} + S_{ki} \sin \lambda_{k} t_{i} \Bigr] + \psi_{k}^{(i+1)} \Bigl[\cos \lambda_{k} t_{i+1} - S_{ki} \cos \lambda_{k} t_{i} \Bigr] \Biggr\}$$
(3.13)
при $S_{ki} = \frac{\sin \lambda_{k} (t_{i} - t_{i+1})}{\lambda_{k} (t_{i} - t_{i+1})}.$

4. В пункте 3 полностью определены функции $u_k^0(t)$ ($\kappa = 1, 2, ...$). Для функции $u^0(x, t)$ будем иметь

$$u^{0}(x,t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k}^{01}(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} x & \text{при} \quad 0 \le t \le t_{1} \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_{k}^{02}(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} x & \text{при} \quad t_{1} < t \le t_{2} \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_{k}^{0n+1}(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} x & \text{при} \quad t_{n} < t \le t_{n+1} \end{cases}$$
(4.1)

Для функции $Q_k(t)$, из формулы (2.6) с учетом (3.12) и интегрального условия (2.7) будем иметь

$$\begin{aligned} Q_{k}^{i+1}(t) &= \varphi_{k}^{(0)} \cos \lambda_{k} t + \frac{1}{\lambda_{k}} \psi_{k}^{(0)} \sin \lambda_{k} t + \frac{1}{\lambda_{k}} \sum_{j=1}^{i} \int_{t_{j-1}}^{t_{j}} u_{k}^{0,j}(\tau) \sin \lambda_{k}(t-\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda_{k}} \int_{t_{i}}^{t} u_{k}^{0,i+1}(\tau) \sin \lambda_{k}(t-\tau) d\tau \quad (4.2) \end{aligned}$$
rge $t_{i} < t \leq t_{i+1}, \ (i = 1, 2, ..., n)$

Для того, чтобы убедиться в непрерывности функций прогиба струны

$$Q(x,t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^1(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} x & \text{при } 0 \le t \le t_1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^2(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} x & \text{при } t_1 < t \le t_2 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^n(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} x & \text{при } t_n < t \le t_{n+1} \end{cases}$$
(4.3)

достаточно доказать равномерную сходимость рядов (4.3). Равномерная сходимость рядов (4.1), (4.3) и рядов для функции $Q_{xx}(x,t)$, $Q_{tt}(x,t)$ сводится к сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k}^{\alpha} \left| \phi_{k}^{(j)} \right| \qquad \left(\alpha = 0, 1, 2; \ j = 0, 1, 2, ..., n \right)$$
(4.4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k}^{\alpha} |\Psi_{k}^{(j)}| \qquad \left(\alpha = -1, 0, 1; \ j = 0, 1, 2, ..., n\right)$$
(4.5)

для сходимости рядов (4.4) достаточно потребовать, чтобы начальные и промежуточные отклонения, т.е. $\varphi_0(x)$, $\varphi_j(x)$ удовлетворяли условиям сходимости ряда при $\alpha = 2$.

Для сходимости рядов (4.5) достаточно потребовать, чтобы начальная и промежуточная скорости $\Psi_0(x)$, $\Psi_i(x)$ удовлетворяли сходимости ряда при $\alpha = 1$.

5. Численный пример. Рассматривается оптимальное управление колебаниями упругой струны длиной в 1 м, края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью u(x,t) и при t = 0



Среди возможных управлений u(x,t) $0 \le x \le \ell$, $t \ge 0$ требуется найти оптимальное управление $u^0(x,t)$, переводящее струну из заданного начального состояния (5.1) через промежуточные состояния (5.2), (5.3) при

$$t = 3, \quad \varphi_1(x) = -\frac{2x^3}{3} + 2x^2 - \frac{4x}{3}, \qquad \psi_1(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{x}{3}$$
 (5.2)



при

$$t = 6, \quad \varphi_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, \qquad \psi_2(x) = -2x^2 + 2x \tag{5.3}$$

в конечное состояние при

$$\dot{t} = 9, \qquad \phi_3(x) = 0, \qquad \psi_3(x) = 0$$
(5.4)

и минимизирующее функционал (1.6).

Подставим значения функций $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ в уравнения (3.13) и получим значения $u_k^{0i+1}(t)$, с помощью которых из (4.1), (4.2), (4.3) получаем значения оптимального управления $u^0(x,t)$ и Q(x,t). Приводятся графики функции $u^0(x,t)$ при t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.



59



ЛИТЕРАТУРА

- 1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
- Барсегян В.Р. Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях. //Уч. записки ЕГУ. 1988. №1 (188). С. 24-29.
- 3. Барсегян В.Р. Оптимальное управление линейными системами при фиксированных промежуточных фазовых состояниях. // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. №2. С. 56-62.
- 4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 19.07.2006

2U8UUSUUF ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա

61, №2, 2008

Механика

УДК 539.3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ КОЛЛИЗИИ АРАВИЙСКОЙ И ЕВРАЗИАТСКОЙ ПЛИТ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ GPS С УЧЕТОМ РАЗЛИЧИЙ ИХ ЖЕСТКОСТЕЙ Агамалян В.А., Хачикян А.С.

Ключевые слова: Плиты Земной коры, напряженное состояние, метод конечных элементов, неоднородность.

Keywords: Earthcrust plate, Stressed state, Finite Element Application, Heterogeneous.

Վ.Ա. Աղամալյան, Ա.Ս. Խաչիկյան

Հարումների բաշխումը՝ արաբական և եվրասիական սալերի բախման գոտում՝ GPS տվյալների հիման վրա, հաշվի առնելով նրանց կոշտությունների տարբերությունը

Վերջավոր տարրերի մեթոդով որոշվում է Արաբական և Եվրասիական սալերի հատվածների (բլոկների) լարվածային վիճակը վերին կավճի ժամանակաշրջանում տեղ գտած բախման (կոլիզիայի) Կովկասյան գոտում այդ սալերի կոշտությունների տարբերության հաշվառումով։ Սալերի առաձգականության մոդուլների հարաբերության միջինացված արժեքները գնահատվում են նրանցում առաձգական երկայնական ալիքների արագությունների համեմատությամբ, որոնք հայտնի են ըստ Արմաշ-Ախալցխա խորքային սեյսմիկ զննման տվյալների։ Տարածաշրջանի կինեմատիկան վերցվում է ըստ 1988-1997թթ. 37 կետերի համար GPS դիտարկումների տվյալների։ Հաշվարկված բաշխումը որոշ դեպքերում ներդաշնակ է ըստ հայտնի փաստերի սպասվող բաշխմանը։

V.A.Aghamalyan, A.S.Khachikyan The Strain Shearing in the Collizion Zone of the Arabian and Eurasian Plates by the GPS Data and the Plate Rigidity Consideration

By the FEA method it is defined the strain mode of the Arabian and Eurasian plate fragments in the zone of their Upper Cretaceous collision in Caucasus with consideration of the rigidity difference of those plates. The averaged ratio of elasticity modules of the plates is assessed by the comparison of the longitudinal wave velocity, known from the deep seismic sounding. The kinematics of the region is gained from GPS prospecting at 1988-1997 on 37 points. The mode of the calculated strain sometimes corresponds to the behavior, anticipated by the other common data.

Методом конечных элементов определяется напряженное состояние фрагментов Аравийской и Евразиатской плит в зоне их верхнемеловой коллизии в Кавказском регионе с учетом различий жесткостей этих плит. Осредненные отношения модулей упругости плит оцениваются сопоставлением скоростей продольных упругих волн, известные по данным глубинного сейсмического зондирования. Кинематика региона берется согласно данным наблюдений GPS в 1988-1997гг. на 37 точках. Характер вычисленных напряжений в некоторых случаях соответствует поведению ожидаемой по другим известным фактам.

Введение

Вопросы определения напряженного состояния плит земной коры в зоне коллизии Аравийской и Евразиатской плит давно привлекают внимание исследователей [7, 6, 5]. В последнее время, благодаря накоплению новых данных наблюдений GPS и другими методами, возможности исследований кинематики и динамики плит в этой зоне расширились [4]. Однако сложная картина геологической структуры и кинематики региона не позволяет пока однозначно интерпретировать всю динамику современных движений, движущие силы и характер взаимодействий микроплит региона [3-6]. Определение реальных напряжений, возникающих в земной коре вследствие современных движений, является целью настоящей работы.

В [2] методом конечных элементов, при предположениях об однородности и изотропности вещества плит и существования плоского напряженного состояния, на основе данных GPS о кинематике региона было определено напряженное состояние региона. Здесь эта задача рассматривается более реалистично и решается уже с учетом неоднородного состояния веществ рассматриваемых блоков. Предполагается, что фрагменты Аравийской и Евразиатской плит обладают разной жесткостью, относительное значение которых определяется отношением квадратов средних скоростей продольных упругих волн, определяемых на основании данных глубинного сейсмического зондирования (ГСЗ).

Определение отношения жесткостей фрагментов Аравийской и Евразиатской плит

Для определения отношения жесткостей Аравийской и Евразиатской плит воспользуемся значениями скоростей продольных упругих волн на профиле ГСЗ Армаш–Ахалцихе (фиг. 1 и 2). Граница плит на линии профиля приходится на район Базумского надвига [1]. На профиле Армаш-Ахалцихе от границы плит по обе стороны в ЮВ направлении (Аравийская плита) и в СЗ направлении (Евразиатская плита) определим средние скорости продольных волн на глубине от 0 до 55 км по трем сечениям в каждую сторону (фиг. 2).

На этих сечениях, начиная от точки соприкосновения двух плит, средние скорости составили на СЗ для Евразиатской плиты 6,725км/с; 6,673 км/с; 6,784км/с и на ЮВ для Аравийской плиты 6,716 км/с; 6,875 км/с; 6,906 км/с.

На двух смежных к границе плит сечениях, поближе к границе плит, разность средних скоростей незначительная, соизмеримая с точностью использованных данных и методики расчета.

Разность средних скоростей на более удаленных от контакта плит сечениях хоть и небольшая (порядка 2-3%), но определенно выраженная. Средние скорости на стороне Аравийской плиты имеют большее значение, чем на стороне Евразиатской плиты.

Как известно, в первом приближении скорость продольных волн

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$
, следовательно, $\frac{E_A}{E_E} = \frac{V_A^2}{V_E^2} \cdot \frac{\rho_A}{\rho_E}$, где, E , ρ , ν –

модули упругости, плотности и коэффициенты Пуассона соответствующих плит при предположении $v_A = v_E$.

Предположим, что эти соотношения верны и для средних значений скоростей, и модулей упругости, и что $\rho_E = \rho_A$. Тогда можно полагать, что $E_A / E_E \approx 1,03 \div 1,06$.

Интересно отметить, что определенные таким образом модули упругости в зоне разграничения плит в непосредственной близости от разлома имеют меньшее значение, чем дальше по обе стороны от разлома. Это может быть следствием раздробленности пород в зоне разлома. Интересно также, что и без расчетов это заметно на карте скоростей профиля ГСЗ и более ярко выражено в глубоких слоях, чем ближе к поверхности.

Сделанная оценка отношения модулей вещества плит может быть объяснена геологической историей становления этих плит.



Фиг. 1. Схематическая геологическая карта Армении с указанием трассы ГСЗ и и верхнемеловой коллизионной сутуры.

Условные обозначения: 1– Неоген-четвертичный чехол. 2– Палеогеновые отложения.

3-Меловые отложения. 4-Юрские отложения. 5- Отложения девона-триаса; 6-9 – Выходы и блоки кристаллического фундамента. (10-13) – Интрузии: 10- Неогеновые интрузии; 11- Палеогеновые интрузии; 12- Нижнемеловые интрузии; 13-Юрские интрузии. (14-16)- Структурные обозначения: 14 – Трасса профиля ГСЗ Армаш-Ахалцихе; 15 – Верхнемеловая сутура между Перигондванской Армянской складчатой зоной и Сомхето-Карабахской зоной (достоверная); 16 – та же граница (предполагаемая).



Фиг. 2. Профиль ГСЗ Армаш-Ахалцихе (упрощенный)

Цифрами внутри профиля указаны граничные скорости Vp в км/сек. Кружочками обозначены гипоцентры землетрясений разной магнитуды. Наиболее крупный – очаг спитакского землетрясения. Тонкими вертикальными линиями показаны участки расчета усредненной плотности по обе стороны от границы блоков. Границей блоков принят Базумский надвиг.

Определение напряженного состояния плит

Принимаем границу между фрагментами Аравийской и Евразиатской плит в регионе согласно [1] совпадающей с Базумским надвигом (поддвигом), показанной на фиг.1. Приписываем фрагменту Евразиатской плиты модуль упругости $E_E = 6 \cdot 10^{10}$ Па, а Аравийской плиты – $E_A = 1.06 \cdot 6 \cdot 10^{10}$ Па.

Как и в [2], принимаем, что имеет место плоское напряженное состояние. Вычисляем по несколько видоизмененной программе, примененной в этой работе, напряженное состояние, состоящее из двух слагаемых: напряжения плоского напряженного состояния от контурных перемещений, определяемые методом конечных элементов и локальные напряжения, определяемые в каждом треугольнике перемещением его вершин, считая в каждом треугольнике деформации и напряжения постоянными. Как и в [2], разность этих двух напряженных состояний приписываем влиянию сил, действующих на подошву плиты, или внутренним факторам.

Векторы перемещения реперов GPS и методика разбивки области на треугольники приведены в [2].

Численные расчеты и обсуждение результатов

Вычислены значения среднегодовых приростей напряжений вследствие перемещений плит для всего рассматриваемого региона, и определены значения главных напряжений и направления их осей для трассы, показанной на фиг. 3 в затемнённом виде.



Фиг. 3. Трасса вычислений главных напряжений и реперы наблюдений GPS



Фиг. 4, а. Главные напряжения и направление осей главных напряжений



Значения главных напряжений и направления их осей плоского напряженного состояния для указанной выше трассы приведены в табл. 1 и на фиг. 4. На фиг. 5 для этой же трассы приведены значения главных напряжений и направлений их осей, соответствующих локальному напряженному состоянию.

Как показывают вычисления, в зоне, где Аравийская плита соприкасается по относительно крутой дуге с Евразиатской плитой, заметна некоторая концентрация напряжений на фоне общих изменений до 6%, относительно однородной модели [2].

Можно заметить, что на отмеченной трассе (фиг.4в.) направление главных напряжений с ЮВ на СЗ меняется по часовой стрелке порядка 30°.

			Гаолица Г
Номера треугольных	σ_1	σ_{2}	α
регионов	•10 ² Па	• $10^2 \Pi a$	градус
22	3.19082	-3.59012	15.0373
21	3.35839	-345225	16.5342
20	4.48462	-3.58776	17.6431
19	4.22022	-2.25855	21.135
28	4.1773	-2.86666	11.4657
29	4.15979	-2.76494	11.9937
43	3.89707	-2.25478	3.53053
42	3.87249	-1.61789	6.37364
48	3.72311	-1.50703	5.32965
49	4.62759	-1.30859	-3.95997
50	2.6512	-0.810211	-0.162337
53	3.32542	-0.732353	-2.9786
54	2.48483	-0.808617	-6.64133
55	2.73229	0.0461607	5.31372
56	2.26181	0.921019	-8.5365

Графики главных напряжений показывают, что напряжения, соответствующие плоскому напряженному состоянию (фиг. 4 а,б), обнаруживают заметную тенденцию упорядоченного изменения по отмеченной трассе. В то же время напряжения, соответствующие локальному напряжённому состоянию (фиг.5а,б), заметной упорядоченной тенденции не обнаруживают.

Полученные данные могут быть полезны при обсуждении кинематики и динамики зоны коллизии Аравийской и Евразиатской плит.



Фиг. 5, а. Главные напряжения локального напряженного состояния



ЛИТЕРАТУРА

- Агамалян В.А. Определение 3D смещений земной коры Кавказа по данным GPS и повторных нивелировок. //В кн.: Проблемы геоморфологии и неотектоники горных областей Альпийско-Гималайского пояса. Ереван. 2001. С. 38-40.
- Арутюнян А.Г., Тоноян В.С., Хачикян А.С. Распределение деформаций в зоне взаимодействия Аравийской и Евразиатской плит на основе данных GPS. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т. 56. №3. С. 3-13.
- Астахов К.П., Белов А.А. Геолого-геофизические условия в очаговой зоне Спитакского землетрясения 1988 года. М.: Министерство геологии СССР, НПО «Нефтегеофизика», 1990. 348 с.
- Шевченко В.И. и др. Современная геодинамика Кавказа. //Физика Земли. 1999.
 9. С. 3-18.
- Jackson J. and McKenzie D. The relationship between plate motions and seismic tremors, and the rates of active deformation in the Mediterranean and Middle East, Geophys J.R. Astron, Soc., 1988, 93, pp. 45-73, 1988.
- 6. Jackson J. Partitioning of strike-slip and convergent motion between Eurasia and Arabia in eastern Tyrkey, Geophys. J. Res., 1992, 97, 12, 471-12, p. 479.
- 7. Mckenzie D.P. Active tectonics of the Mediterranean region, Geophys J.R. Astron, Soc., 1972, 30, pp. 109-185.
- Reiliger R., et al. Global Positioning System measurements of present-day crystals movements in the Arabia-Africa-Eurasia plate collision zone. Geophys. J. Res., 1997, 102, pp. 9083-9099
- McClusky S. Et al. Global Positioning System constraints on plate kinematics and dynamics in the Eastern Mediterranean»s and Caucasus. Journ. of Geophys. Research, v. 105, N B3, March 10, 2000, pp. 5695-5719.

Институт геологических наук НАН Армении Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 18.12.2007

	ри́цьри 77708 Индекс
ՄԵԽЦЪРЧЦ МЕХАНИКА МЕСНАЛІСЯ	Հատոր Том 61 №2 2008 — Volume
MECHANICS	Volume

 Բովանդակություն		Содержание
Վ.Մ.Մակարյան, Գ.Մ. Չլինգարյան Բաղադրյալ առաձգական հարթության լարվածային վիճակը, բաժանման եզրին ուղղահայաց ճաքի առկայությամբ	3	Макарян В.С., Члингарян Г.С. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ
Ձ.Ռ.Բաղդասարյան Ընդլայնական սահքերի հաշվարմամբ ուղղանկյուն սալի ծոման մի խնդրի մասին	13	Багдасарян З.Р. ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ
Վ.Մ Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան Ուղղանկյուն սալի կայունությունը երբ ազատ եզրում կիրառված է "հետևող" ուժ	23	Белубекян В.М., Белубекян М.В. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ "СЛЕДЯЩЕЙ" НАГРУЗКИ, ПРИЛОЖЕННОЙ НА СВОБОДНОЙ КРОМКЕ
Լ.Ա.Մովսիսյան Երկու եզրերով ազատ ուղղանկյան սալի կայունության մասին	33	Мовсисян Л.А. К УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ
Հ.Բ. Աղալարյան Երկայնական սահքի խնդրի լուծման ասիմպտոտիկ վարքը` ոչ գծային առաձգական բաղադրյալ մարմինների անկյունային կետի շրջակայքում	36	Агаларян О.Б. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА СОСТАВНОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА В ОКРЕСТНОСТЯХ УГЛОВЫХ ТОЧЕК
Ա.Գ.Ավետիսյան, Գ.Գ.Ներսիսյան, Ա.Մ.Մար•սյան Մեպի համար էլեկտրաառաձ•ականության տեսության մի խնդրում լարումների եզակիության մասին	45	Аветисян А.Г., Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. ОБ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА
Վ.Ռ. Բարսեղյան, Մ. Ա. Մահակյան Ժամանակի միջանկյալ պահերին տրված վիձակներով լարի տատանման օպտիմալ	52	Барсегян В. Р., Саакян М. А. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАДАННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

61

Агамалян В.А., Хачикян А.С. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ

КОЛЛИЗИИ АРАВИЙСКОЙ И ЕВРАЗИАТСКОЙ ПЛИТ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ GPS C УЧЕТОМ

РАЗЛИЧИЙ ИХ ЖЕСТКОСТЕЙ

Վ.Ա. Աղամալյան, Ա.Ս. Խաչիկյան Լարումների բաշխումը արաբական և եվրասիական սալերի բախման գոտում GPS տվյալների հիման վրա, հաշվի առնելով նրանց կոշտությունների տարբերությունը

ղեկավարման խնդիրը